UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis Armónico**

Título de la tesis:

Teorema $T1$ a valores vectoriales con medidas no necesariamente doblantes. Aplicaciones.

Institución donde se realizó:
Departamento de Matemática – FIQ
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral – IMAL

Autor:
Pablo Sebastián Viola

Directores de Tesis:
Dra. Beatriz Eleonora Viviani
Dr. José Luis Torrea

Defendida ante el jurado compuesto por:

Jurado 1: Cabrelli, Carlos

Jurado 2: Godoy, Tomás

Jurado 3: Zó, Felipe

Año de presentación: 2007

Quiero agradecer a mis directores Eleonora B. Viviani y José Luis Torrea por brindarme sus invaluables conocimientos, y darme ideas y sugerencias, gracias a los cuales esta tesis ha sido posible.
Agradezco a los profesores por la formación que me dieron en sus cursos de doctorado.
También deseo agradecerles a mi familia, a mis directores, y a mis compañeros y profesores, por el apoyo moral recibido durante el desarrollo de la presente tesis doctoral, acompañando en el esfuerzo, y ayudando en aspectos humanos fundamentales.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

La teoría clásica de Calderón-Zygmund de integrales singulares, que está contenida en el célebre trabajo en **[CZ]**, fue a partir de los años ochenta generalizada a varias direcciones y contextos. En 1984, David y Journé en **[DJ]** dan condiciones necesarias y suficientes para la acotación en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de tales operadores. La herramienta esencial en este trabajo es el Lema de Cotlar (ver **[C]**), lo que permite el desarrollo de la Teoría L^2 sin el uso de la transformada de Fourier. Este hecho conduce posteriormente a David, Journé y Semmes en **[DJS]** a extender estos resultados al contexto de los espacios de tipo homogéneo para una medida continua. La acotación de estos operadores con medidas más generales, en el sentido que no cumplan la condición de duplicación, fueron obtenidas usando diferentes métodos y técnicas, por Nazarov, Treil y Volberg en **[NTV]**, por Tolsa en **[T1]** y **[T3]** y por Verdera en **[V]**, en todos ellos para el caso de medidas continuas, y, recientemente, por Tolsa en **[T2]** para el caso de medidas con átomos.

Por otra parte la teoría de operadores de Calderón-Zygmund a valores vectoriales iniciada por Benedeck, Calderón y Panzone en **[BCP]** y desarrollada en **[RFRT]**, **[RFT]** y en el libro **[GR]** ha demostrado tener importantes aplicaciones y derivaciones en el estudio del análisis clásico y, en particular, en el desarrollo de la teoría de pesos.

Sin embargo, la generalización del "Teorema T1" a este contexto es recientemente (2004) obtenida por Figiel en **[F]** para el caso de la acotación entre los espacios $L^p(\mathbb{R}^n, X)$, $1 < p < \infty$, con X espacio de Banach que satisface la condición UMD. Estos espacios son aquellos para los cuales el clásico resultado de la acotación de la Transformada de Hilbert es válido, tal como lo demuestran J. Bourgain y S. L. Burkholder en **[B1]** y **[B2]** respectivamente.

Finalmente, Hytönen y Weis (ver **[HW]**) extienden el Teorema T1 al caso de diferentes espacios de Banach, ambos satisfaciendo la condición UMD. En estos dos trabajos antes mencionados no se dan ejemplos explícitos de operadores a los cuales puede aplicarse el Teorema T1 a valores vectoriales.

Nuestro propósito es encuadrar dentro de un Teorema T1 a valores vectoriales y en espacios con medidas generales a las diferencias cuadráticas de operadores T_ϵ para los cuales existe el límite puntual $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f(x) = Tf(x)$.

Más precisamente, dada una familia de operadores $T = \{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ para los cuales es conocido que existe $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x)$ para casi todo x, se trata de investigar la velocidad de convergencia de la familia $\{T_\varepsilon\}$ por medio de expansiones cuadráticas que involucran diferencias de tipo $T_\varepsilon f(x) - T_{\varepsilon'} f(x)$. Para tal fin se estudian los operadores función cuadrática $\mathcal{G}(Tf)$, de oscilacion $\mathcal{O}(Tf)$ y de variación $\mathcal{V}_\rho(Tf)$ definidos por:

$$\mathcal{G}(Tf)(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|T_{\varepsilon_i} f(x) - T_{\varepsilon_{i+1}} f(x)\right|^2\right)^{1/2}, \qquad \text{con } \varepsilon_i \downarrow 0, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{O}(Tf)(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1}\le\varepsilon_{i+1}<\varepsilon_i\le t_i} \left|T_{\varepsilon_i} f(x) - T_{\varepsilon_{i+1}} f(x)\right|^2\right)^{1/2}, \qquad \text{con } t_i \downarrow 0, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{V}_\rho(Tf)(x) = \sup_{\varepsilon_i\downarrow 0} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left|T_{\varepsilon_i} f(x) - T_{\varepsilon_{i+1}} f(x)\right|^\varrho\right)^{1/\varrho}, \tag{1.3}$$

donde $\rho > 2$ y el supremo se toma sobre todas las sucesiones $\{\varepsilon_i\}$ decrecientes a cero.

El tratamiento de estas diferencias de tipo cuadrático tienen su origen en el estudio de operadores de la teoría ergódica contenida en los trabajos de Gaposhkin (ver **[G1]** y **[G2]**) para las oscilaciones de medias ergódicas, y de Bourgain (ver **[B3]**) en el caso de $\mathcal{V}_\rho$. Las acotaciones de tales operadores inducen generalizaciones del Teorema ergódico puntual y proporcionan un control del número de saltos de los promedios ergódicos (ver **[JKRW]**). En el caso que $\{T_\varepsilon\}$ son las truncaciones de la transformada de Hilbert o el núcleo de Poisson, los operadores $\mathcal{O}(Tf)$

y $\mathcal{V}_\rho(Tf)$ fueron estudiados por Campbell, Jones, Reinhold y Wierdel en **[CJRW1]** y en el caso de integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ por los mismos autores en **[CJRW2]**. Asimismo, es de interés el estudio de la velocidad de convergencia de los operadores asociados a ecuaciones diferenciales de segundo orden L, autoadjunta y positiva con respecto a una medida μ, las cuales son el generador infinitesimal del semigrupo del calor $\{T_t\}_{t>0} = \{e^{-tL}\}_{t>0}$ (ver **[S]**).

En el caso euclídeo donde $L = -\triangle$, con Δ el operador de Laplace, $T_t f(x)$ es la convolución con el núcleo de Gauss-Weierstrass. La acotación de las $\mathcal{G}$-funciones y de la oscilación y variación de operadores asociados a ecuaciones diferenciales de segundo orden en este contexto fueron considerados por ejemplo en **[HTV]** y **[GHSTV]** para el caso de las $\mathcal{G}$-funciones del operador del calor-Laguerre, y recientemente en **[GT]** y **[HMMT]** para la oscilación y variación de operadores asociados al Laplaciano y al semigrupo de Orstein-Uhhlenbeck respectivamente.

Por otra parte, Muckenhoupt y Stein en **[MS]** analizan algunos operadores clásicos asociados al sistema de polinomios ultraesféricos, los cuales son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden, autoadjunto y positivo en $L^2((0,\pi), d\mu)$ con $d\mu$ una medida doblante. Asimismo, en **[BMT]** se estudia, junto con otros operadores, la $\mathcal{G}$-función del operador del calor asociado a dicha ecuación diferencial. En este trabajo se prueba que este operador es de Calderón-Zygmund en un espacio de tipo homogéneo, es decir $L^2((0,\pi), d\mu)$.

Nuestro primer objetivo es obtener un Teorema $T1$ que conduzca a la acotación de operadores de integral singular en los espacios $L^2(X,\mathbb{C})$ y $L^2(X,\mathbb{H})$ con H espacio de Hilbert y X un espacio de tipo homogéneo (ver Teorema 3.3.1). Este Teorema nos permite su aplicación al estudio sistemático de velocidades de convergencia cuadrática de operadores del tipo (1.1) en espacios de tipo homogéneo.

Otro de los objetivos, contenido en el capítulo 4, es obtener una fórmula explícita para operadores integrales singulares a valores vectoriales y con una medida no necesariamente doblante (en el contexto de espacios euclidianos), que involucran la condición $T1 = g$, para funciones g del espacio de funciones $BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, análogo al espacio de Oscilación Media Acotada BMO_ρ considerado en **[T1]** para el caso escalar. Estos resultados generalizan en parte aquellos obtenidos en **[MST]** para el caso escalar y una medida doblante (ver Teorema 4.5.3). Análogamente se obtiene una fórmula explícita para el adjunto del operador T, actuando en este caso sobre funciones $\vec{\psi}$ a valores vectoriales. Usando ambas expresiones y un Teorema de Krein (ver Sección 2.4) se obtiene una versión del Teorema $T1$ a valores vectoriales y con medidas no necesariamente doblantes (ver Sección 4.6). Este resultado se obtendrá para operadores que satisfacen una condición de tamaño y suavidad integral, lo que permite en particular su aplicación al estudio de la función cuadrática del tipo (1.1) asociados a las truncaciones de la transformada de Hilbert, de Riesz y de los conmutadores de Calderón.

Finalmente en el capitulo 5 se desarrollan estos y otros ejemplos a los cuales se aplican los resultados obtenidos en esta tesis.

Como comentarios finales de esta tesis (ver capítulo 6), se espera aplicar las versiones de estos teoremas al estudio de las velocidades de convergencia cuadrática de operadores provenientes de la teoría de semigrupos, asociados a un operador diferencial de segundo orden, autoadjunto y positivo con respecto a una medida μ. Estos resultados abarcarían algunos de los casos ya estudiados y proporcionarían el estudio de otros operadores aún no considerados en este contexto, relacionados entre otros a los semigrupos de Hërmite, de Laguerre y de Bessel.

Resumen de los resultados obtenidos.

Hemos estudiado operadores de integrales singulares T a valores en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, bajo la hipótesis $T1 = 0_{\mathbb{H}}$, $T^*(1w) = 0$ (todo vector $w \in \mathbb{H}$), y hemos aplicado principalmente dos métodos distintos para obtener su acotación $(L^2_\mu(X), L^2_\mu(X,\mathbb{H}))$.

El primer método logra obtener acotaciones de tipo $(L^2_\mu(X), L^2_\mu(X,\mathbb{H}))$ mediante el uso del Lema de Cotlar aplicado al paraproducto, basado en la demostración clásica de David y Journé en **[DJ]** para $\mathbb{R}^n$. No obstante, no nos limitamos al estudio de funciones definidas sobre el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, sino que fue posible obtener la acotación $(L^2_\mu(X), L^2_\mu(X,\mathbb{H}))$ en el caso más general de espacios de tipo homogéneo. Fue esencial el uso de la teoría de integrales de funciones a valores vectoriales en el sentido de Böchner (sobretodo el Teorema de Hille (ver sección 2.2)), a fin de abordar adecuadamente pasos clave de la demostración del Teorema 3.3.1.

A continuación estudiamos la acotación $(L^2_\mu(\mathbb{R}^n), L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))$ de operadores integrales singulares T mediante la obtención de fórmulas explícitas para T y T^* (usando las técnicas expuestas en **[MST]**), y la aplicación del Teorema de Krein.

En **[MST]** se trabaja en el contexto de espacios de tipo homogéneo, y por lo tanto la medida μ satisface allí la propiedad de duplicación para bolas de radio R:

$$\mu(B_{2R}(x)) \leq A\mu(B_R(x)).$$

En nuestro caso, no hacemos uso de ese supuesto, y en su lugar probamos el Teorema 4.4.22 en el contexto más general de medidas no necesariamente doblantes (aunque el espacio métrico utilizado es $\mathbb{R}^n$). Más precisamente, si μ es una medida en $\mathbb{R}^n$ que es absolutamente continua respecto la medida de Lebesgue, y para toda bola B de radio R satisface la relación:

$$\mu(B_R(x)) \leq CR^\nu,$$

para algún ν, $0 < \nu \leq 1$ (estamos suponiendo una medida de Lebesgue normalizada, ver sección 4.1), se obtiene la fórmula explícita

$$T\phi(x) = (g(x) - m_{A\hat{B}}g)\phi(x) + \mathsf{C}_{B,\hat{B}}[g]\phi(x) - I_B 1(x)\phi(x) + \int [\phi(y) - \phi(x)]k(x,y)h_B(y)\, d\mu(y),$$

contenida en el Teorema antes mencionado, gracias a la cual se establece la acotación en norma Lipschitz del operador T, bajo la hipótesis $T1 = 0$ (Teorema 4.5.3).

En algunos casos especiales importantes fuimos capaces de probar fórmulas análogas para el operador adjunto T^*. Por ejemplo, para funciones $\vec{\psi}$ que son combinaciones lineales de la forma $\vec{\psi} = \psi_1 w_1 + \cdots + \psi_N w_N$, con $\psi_1, \cdots, \psi_N$ funciones de Lipschitz con valores escalares, y $w_1, \cdots, w_N \in \mathbb{H}$ vectores fijos (ver Teorema 4.5.6). Este caso, al tratarse de operadores actuando sobre funciones vectoriales es diferente al escalar, y en particular a la fórmula obtenida para T, aunque las expresiones resultantes sean similares. También hallamos fórmulas para T^* en el caso de núcleos antisimétricos (ver Sección 4.7).

A partir de las fórmulas para T^*, bajo la hipótesis $T^*(1w) = 0$, $w \in \mathbb{H}$, se infieren también acotaciones de tipo Lipschitz, y acotaciones en norma L^∞_μ (Teorema 4.5.6).

Las fórmulas obtenidas antes tienen una sutil diferencia con las establecidas en **[MST]**: si B se mueve en el conjunto de las bolas que contienen el soporte de ϕ y $\vec{\psi}$, entonces, en todo momento existe dependencia de la bola $\hat{B}$, que es la mínima bola doblante concéntrica con B. Esta expresión que involucra bolas doblantes y no doblantes, aún es correcta, y sirve para expresar completamente al operador T (o sea, las fórmulas expresan $T\phi(x)$, $T^*\psi(x)$ para funciones ϕ, $\vec{\psi}$ de soporte en B).

Además, en el Lema 4.4.11, esencial para la obtención de los Teoremas 4.4.4, 4.4.22 y 4.5.6, se debió utilizar la hipótesis de L^r-suavidad, que en **[MST]** no fue necesaria.

Finalmente, como una aplicación nueva de las fórmulas explícitas halladas para T y T^*, mediante el uso del Lema de Krein, obtenemos una versión del Teorema $T1$ a valores vectoriales para medidas no doblantes, para el caso $T1 = 0_{\mathbb{H}}$ y $T^*(1w) = 0$ ($\forall w \in \mathbb{H}$) (Teorema 4.6.7 para $\mathbb{H}$ separable, y 4.7.12 cuando el núcleo asociado a T es antisimétrico). Como un Corolario de esto, cuando $\mathbb{H}$ es separable, la fórmula correspondiente a $T^*\vec{\psi}$ se extiende a funciones de Lipschitz $\mathbb{H}$-valuadas cualesquiera (no sólo combinaciones lineales finitas).

Debemos destacar además, que en la obtención de las fórmulas explícitas para T y T^* (Teoremas 4.4.22 y 4.5.6) a diferencia de lo obtenido en **[MST]** para el operador T con μ doblantes, tuvimos que suponer como hipótesis la Propiedad de Conmutación de Meyer (ver 4.4.1). Sin embargo probamos que la mayoría de los operadores que surgen en las aplicaciones, por ejemplo, los operadores antisimétricos (ver Sección 4.7), los asociados a núcleos integrables, cumplen dicha propiedad.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Propiedades de los Espacios de Hilbert. Lema de Cotlar.

2.1.1. Consideremos un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Recordamos que $\mathbb{H}$ es su propio espacio dual, lo cual usaremos constantemente al escribir un elemento de $\mathbb{H}$ como un funcional lineal continuo de $\mathbb{H}$, y viceversa.

El producto interno entre dos elementos u, v de $\mathbb{H}$ se escribirá:

$$\big(u, v\big)_{\mathbb{H}},$$

o simplemente

$$\big(u, v\big),$$

y su norma se denotará:

$$|u|_{\mathbb{H}} := \sqrt{\big(u, u\big)_{\mathbb{H}}}.$$

El elemento nulo de $\mathbb{H}$ se denotará con $0_{\mathbb{H}}$.

2.1.2. Teorema de Representación de Riesz. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, y sea $\mathbb{H}'$ su espacio dual. Entonces, existe una isometría $\iota : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$. En particular, esto permite identificar cada funcional lineal $\eta \in H'$ con un único elemento $h \in \mathbb{H}$, mediante $h = \iota^{-1}(\eta)$. La identificación es tal que se verifica:

$$\big(h, v\big)_{\mathbb{H}} = \eta(v),$$

para todo vector $v \in \mathbb{H}$.

2.1.3. Si $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert, y g_1, g_2 son dos elementos de un espacio de funciones $\mathcal{F}$ que son $\mathbb{H}$-valuadas, usaremos la notación siguiente:

$$\big\langle g_1, g_2 \big\rangle := \int \big(g_1(x), g_2(x)\big)_{\mathbb{H}}\, dx,$$

siempre que dicha integral tenga sentido.

2.1.4. Lema. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, y sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach incluido densamente en $\mathbb{H}$ (que podría coincidir con $\mathbb{H}$), tal que $|\cdot|_{\mathbb{H}} \leq C_{\mathbb{B},\mathbb{H}} |\cdot|_{\mathbb{B}}$. Sea $T : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ un operador lineal, acotado y tal que verifica la propiedad

$$\big(Tx, y\big) = \big(x, Ty\big), \qquad \text{todo } x, y \in \mathbb{B}.$$

Entonces, para todo $x \in \mathbb{B}$, y todo entero positivo n:

$$|Tx|_{\mathbb{H}}^n \leq |T^n x|_{\mathbb{H}}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\|T\|_{L(\mathbb{B})} = 1$, y que $|x|_{\mathbb{B}} = 1$.

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n := \big(T^n x, T^n x\big).$$

Observando que para el polinomio cuadrático:

$$\begin{aligned}
V_{n-1} + 2\lambda V_n + \lambda^2 V_{n+1} &= \left(T^{n-1}x, T^{n-1}x\right) + \lambda \left(T^{n-1}x, T^{n+1}x\right) + \lambda \left(T^{n+1}x, T^{n-1}x\right) + \lambda^2 \left(T^{n+1}x, T^{n+1}x\right) \\
&= \left(T^{n-1}x + \lambda T^{n+1}x, T^{n-1}x + \lambda T^{n+1}x\right) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

obtenemos que el discrimante cuadrático asociado debe ser no positivo, es decir:

$$(2V_n)^2 - 4V_{n+1}V_{n-1} \leq 0,$$

que equivale a:

$$V_n^2 \leq V_{n+1}V_{n-1}.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
&V_0 = |x|_{\mathbb{H}}^2 \leq 1. \\
&V_1^2 \leq V_0 V_2 \leq V_2, \qquad (\therefore V_1 \leq \tfrac{V_2}{V_1}, \text{ si } V_1 \neq 0) \\
&V_2^2 \leq V_1 V_3, \qquad (\therefore \tfrac{V_2}{V_1} \leq \tfrac{V_3}{V_2}, \text{ si } V_1, V_2 \neq 0).
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Luego, si $V_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos:

$$V_1 \leq \frac{V_2}{V_1} \leq \frac{V_3}{V_2} \cdots \leq \frac{V_n}{V_{n-1}}.$$

Por lo tanto:

$$V_1^{n-1} = \underbrace{V_1 V_1 \cdots V_1}_{n-1} \leq \frac{V_2}{V_1}\frac{V_3}{V_2} \cdots \frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{V_n}{V_1}.$$

Esto implica que:

$$V_1^n \leq V_n.$$

Notando que $V_1 = |Tx|_{\mathbb{H}}^2$, y que $V_n = |T^n x|_{\mathbb{H}}^2$, el Lema queda probado. □

2.1.5. Proposición. Sea $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operador lineal, continuo y autoadjunto, definido sobre el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Para todo entero positivo M se tiene que:

$$\|T^M\|_{L(\mathbb{H})} = \|T\|_{L(\mathbb{H})}^M.$$

Demostración. Por ser T autoadjunto, tenemos que $\|T^*\|_{L(\mathbb{H})} = \|T\|_{L(\mathbb{H})}$, pues para todo par $x, y \in \mathbb{H}$ se tiene que $\big(Tx, y\big)_{\mathbb{H}} = \big(x, T^*y\big)_{\mathbb{H}} = \big(x, Ty\big)_{\mathbb{H}}$.

Además, vale que $\|T\|_{L(\mathbb{H})}^2 = \|T^*T\|_{L(\mathbb{H})}$, ya que:

$$\|T^*T\|_{L(\mathbb{H})} \leq \|T^*\|_{L(\mathbb{H})}\|T\|_{L(\mathbb{H})} = \|T\|_{L(\mathbb{H})}^2,$$

y por otro lado:

$$\|T\|_{L(\mathbb{H})}^2 = \sup_{|x|_{\mathbb{H}}=1} \big(Tx, Tx\big)_{\mathbb{H}} = \sup_{|x|_{\mathbb{H}}=1} \big(T^*Tx, x\big)_{\mathbb{H}} \leq \|T^*T\|_{L(\mathbb{H})}, \tag{2.1.5.a}$$

donde en la última desigualdad usamos la propiedad de Cauchy-Schwartz.

Pero como $T^*T = T^2$, obtenemos que:

$$\|T\|_{L(\mathbb{H})}^2 = \|T^2\|_{L(\mathbb{H})}.$$

Haciendo inducción en el entero positivo j, obtenemos ahora que:

$$\|T\|_{L(\mathbb{H})}^{2^j} = \|T^{2^j}\|_{L(\mathbb{H})}.$$

Por otro lado, escribiendo $M = \sum_{j\geq 0} d_j 2^j$, donde $d_j = 0$ ó 1, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|T^M\|_{L(\mathbb{H})} &= \|T^{\sum_{j\geq 0} d_j 2^j}\|_{L(\mathbb{H})} \\
&\leq \prod_{j\geq 0} \|T^{d_j 2^j}\|_{L(\mathbb{H})} \\
&= \prod_{j\geq 0} \|T\|_{L(\mathbb{H})}^{d_j 2^j} \\
&= \|T\|_{L(\mathbb{H})}^{\sum_{j\geq 0} d_j 2^j} = \|T\|_{L(\mathbb{H})}^M .
\end{aligned}$$

Recíprocamente, fijemos un elemento $x \in \mathbb{H}$, con $|x|_{\mathbb{H}} = 1$. Por el Lema 2.1.4, tenemos que

$$|Tx|_{\mathbb{H}}^M \leq \left|T^M x\right|_{\mathbb{H}} .$$

Tomando supremo en x, con $|x|_{\mathbb{H}} = 1$, obtenemos que:

$$\|T\|_{L(\mathbb{H})}^M \leq \|T^M\|_{L(\mathbb{H})}.$$

□

A continuación enunciamos propiedades sobre normas en espacios de Hilbert.

2.1.6. Lema. Sean $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ espacios de Hilbert. Sea S un operador lineal acotado de $\mathbb{G}$ en $\mathbb{H}$. Entonces:

(a)
$$\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})}^2 \leq \|(S^*S)\|_{L(\mathbb{H})}, \qquad \|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})}^2 \leq \|(SS^*)\|_{L(\mathbb{G})}.$$

(b) Los operadores $SS^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ y $SS^* : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, son autoadjuntos.

(c) Para todo entero positivo k:
$$\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})} \leq \|(SS^*)^k\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})}^{1/2k},$$
y también:
$$\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})} \leq \|(S^*S)^k\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{G})}^{1/2k}.$$

Demostración.

Prueba de (a):

Sea $S : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ lineal continuo.

$$\begin{aligned}
\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})}^2 = \|S^*\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{G})}^2 &= \sup_{\|x\|_{\mathbb{H}}=1} \|S^*x\|_{\mathbb{G}}^2 \\
&= \sup_{\|x\|_{\mathbb{H}}=1} \left|\Big(S^*x, S^*x\Big)_{\mathbb{G}}\right| \\
&= \sup_{\|x\|_{\mathbb{H}}=1} \left|\Big(SS^*x, x\Big)_{\mathbb{H}}\right|
\end{aligned}$$

(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\|x\|_{\mathbb{H}}=1} \|SS^*x\|_{\mathbb{H}}\|x\|_{\mathbb{H}} \\
&\leq \|SS^*\|_{L(\mathbb{H})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})}^2 \leq \|SS^*\|_{L(\mathbb{H})}$ y de modo similar $\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})}^2 \leq \|S^*S\|_{L(\mathbb{G})}$ (probado en (2.1.5.a)).

Prueba de (b):

Es claro, pues $x, y \in \mathbb{H} \implies$
$$\big(SS^*x, y\big)_{\mathbb{H}} = \big(S^*x, S^*y\big)_{\mathbb{G}} = \big(x, SS^*y\big)_{\mathbb{H}} .$$

Análogamente se demuestra que S^*S es autoadjunto.

Prueba de (c):
Todo operador autoadjunto T satisface que

$$\|T^M\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})} = \|T\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})}^M \qquad \text{(para todo entero } M \geq 1).$$

Como SS^* es autoadjunto, se sigue que:

$$\|(SS^*)^k\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})} = \|SS^*\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})}^k.$$

Por lo tanto, de (a) se deduce que

$$\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})} \leq \|SS^*\|_{L(\mathbb{H})}^{1/2} \leq \|(SS^*)^k\|_{L(\mathbb{H})}^{1/2k}, \qquad k \geq 1.$$

La otra desigualdad es análoga. □

A partir de estas relaciones podemos deducir lo siguiente:

2.1.7. Lema de Cotlar. Sea $[T_j]_{j\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de operadores lineales acotados de $\mathbb{G}$ en $\mathbb{H}$ (espacios de Hilbert), con adjuntos T_j^*, y $\{a(j)\}_{\mathbb{Z}}$ una sucesión de números no negativos tales que:

$$\|T_iT_j^*\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})} + \|T_i^*T_j\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{G})} \leq a(i-j).$$

Entonces para todos los enteros m, n, con $n \leq m$:

$$\Big\|\sum_{j=n}^{m} T_j\Big\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2}.$$

Nota: En realidad esta es una generalización directa del Lema de Cotlar original (ver **[C]**), en la cual involucramos dos espacios de Hilbert diferentes en lugar de uno.

Demostración. Sea

$$S = S_{m,n} := \sum_{j=m}^{n} T_j.$$

Dado un entero $k > 0$, tenemos que:

$$(SS^*)^k = \sum_{j_1,\cdots,j_{2k}=n}^{m} T_{j_1}T_{j_2}^*\cdots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*,$$

y la norma en cada sumando puede acotarse por:

$$\begin{aligned}
\|T_{j_1}T_{j_2}^*\cdots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\|_{L(\mathbb{H})} &\leq \|T_{j_1}T_{j_2}^*\|_{L(\mathbb{H})}\|T_{j_3}T_{j_4}^*\|_{L(\mathbb{H})}\cdots\|T_{j_{2k-3}}T_{j_{2k-2}}^*\|_{L(\mathbb{H})}\|T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\|_{L(\mathbb{H})}\\
&\leq a(j_1-j_2)a(j_3-j_4)\cdots a(j_{2k-3}-j_{2k-2})a(j_{2k-1}-j_{2k}).\\
\|T_{j_1}T_{j_2}^*\cdots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\|_{L(\mathbb{H})} &\leq \|T_{j_1}\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})}\|T_{j_2}^*T_{j_3}\|_{L(\mathbb{G})}\|T_{j_4}^*T_{j_5}\|_{L(\mathbb{G})}\cdots\|T_{j_{2k-4}}^*T_{j_{2k-3}}\|_{L(\mathbb{G})}\|T_{j_{2k-2}}^*T_{j_{2k-1}}\|_{L(\mathbb{G})}\|T_{j_{2k}}^*\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{G})}\\
&\leq a(0)^{1/2}a(j_2-j_3)a(j_4-j_5)\cdots a(j_{2k-4}-j_{2k-3})a(j_{2k-2}-j_{2k-1})a(0)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Tomando media geométrica y sumando:

$$\|(SS^*)^k\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})} \leq a(0)^{1/2}\sum_{j_1,\cdots,j_{2k}=n}^{m} a(j_1-j_2)^{1/2}a(j_2-j_3)^{1/2}\cdots a(j_{2k-1}-j_{2k})^{1/2}.$$

Fijando $j_1,\cdots,j_{2k-1}$ y sumando en el índice j_{2k}, luego sumando sobre el índice j_{2k-1}, etcétera, hasta llegar al índice j_1, obtenemos:

$$\|(SS^*)^k\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})} \leq a(0)^{1/2}(m-n+1)\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2}\right)^{2k-1}.$$

Usando Lema 2.1.6(c), se deduce ahora que:

$$\|S\|_{L(\mathbb{G},\mathbb{H})} \leq \|(SS^*)^k\|_{L(\mathbb{H},\mathbb{H})}^{1/2k} \leq (m-n+1)^{1/2k} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)^{1/2} \right)^{1-1/2k}.$$

Haciendo tender k a ∞ obtenemos el resultado deseado. □

2.1.8. Nota. Comúnmente, los espacios de Hilbert a los cuales aplicaremos el Lema de Cotlar, serán espacios de funciones de cuadrado integrable.

2.2. Algunas Propiedades de la Integral de Böchner

Consideremos dos espacios de Banach $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ con normas $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ y $|\cdot|_{\mathbb{B}}$.

Sea (X, μ) un espacio de medida positiva σ-finita.

Una función $f : X \to \mathbb{B}$ se dice simple si existe una familia finita $E_1, \cdots, E_n$ de conjuntos μ-medibles de medida finita, y elementos $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{B}$, tal que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{E_i}(x).$$

Se define su integral de Böchner por medio de:

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E_i).$$

Una función f se dice μ-medible si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples tales que:

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)|_{\mathbb{B}} = 0,$$

en μ-casi todo punto de X.

Si $\mathbb{B}$ es separable, entonces f es μ-medible si y sólo si para todo $\xi \in \mathbb{B}'$ (el dual de $\mathbb{B}$) la función escalar $q(x) = \langle \xi, f(x) \rangle$ es μ-medible.

Se dice que f es μ-integrable Böchner si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que convergen a f en μ-casi todo punto y tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f(x) - f_n(x)|_{\mathbb{B}} \, d\mu(x) = 0.$$

En tal caso, para cada conjunto μ-medible M existe un elemento $u_M \in \mathbb{B}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| u_M - \int_X \chi_M \; f_n \, d\mu \right|_{\mathbb{B}} = 0.$$

Llamamos a ese vector u_M la μ-integral de Böchner de f sobre el conjunto M, y la denotamos por

$$\int_M f \; d\mu.$$

Una función f es μ-integrable Böchner si y sólo si la función de valores reales $r(x) = |f(x)|_{\mathbb{B}}$ es μ-integrable.

Si f es μ-integrable Böchner, entonces

$$\left| \int f \; d\mu \right|_{\mathbb{B}} \leq \int |f|_{\mathbb{B}} \, d\mu.$$

El siguiente resultado es básico en la teoría de integrales de Böchner, y puede hallarse, por ejemplo, en [DU] (capítulo 2, sección 2).

2.2.1. Teorema (Hille). Sea T un operador lineal continuo del espacio de Banach $\mathbb{A}$ en el espacio de Banach $\mathbb{B}$. Si f es una función μ-integrable Böchner con valores en $\mathbb{A}$, entonces $T \circ f$ es μ-integrable Böchner con valores en $\mathbb{B}$, y vale la igualdad siguiente:

$$\int_M T(f(x)) \, d\mu(x) = T \left(\int_M f(x) \, d\mu(x) \right), \qquad M \; \mu\text{-medible}.$$

2.3. Teorema de Krein

2.3.1. Teorema. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Sea además $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$ un espacio de Banach denso en $\mathbb{H}$ con norma $|.|_{\mathbb{B}}$ tal que $|x|_{\mathbb{H}} \leq C_{\mathbb{B},\mathbb{H}} |x|_{\mathbb{B}}$, $(x \in \mathbb{B})$.

Sea T un operador lineal acotado, $T : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, tal que

$$\big(Tx, y\big) = \big(x, Ty\big), \qquad \text{todo } x, y \in \mathbb{B}.$$

Entonces T tiene una extensión $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ lineal y continua, y además se tiene que:

$$|Tx|_{\mathbb{H}} \leq \|T\|_{L(\mathbb{B})} |x|_{\mathbb{H}} .$$

Demostración. Por ser T un operador $\mathbb{B}$-acotado, se tiene:

$$|Tx|_{\mathbb{B}} \leq \|T\|_{L(\mathbb{B})} |x|_{\mathbb{B}} .$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\|T\|_{L(\mathbb{B})} = 1$, y que $|x|_{\mathbb{B}} = 1$. Deseamos probar que $|Tx|_{\mathbb{H}} \leq 1$.

Por el Lema 2.1.4, tenemos que, para cada entero positivo n:

$$|Tx|_{\mathbb{H}} \leq |T^n x|_{\mathbb{H}}^{1/n} .$$

En consecuencia:

$$|Tx|_{\mathbb{H}} \leq \liminf_{n \to \infty} |T^n x|_{\mathbb{H}}^{1/n} .$$

Por la hipótesis de inclusión continua, y por ser T un operador acotado, resulta:

$$\begin{aligned} |T^n x|_{\mathbb{H}}^2 &\leq C_{\mathbb{B},\mathbb{H}}^2 |T^n x|_{\mathbb{B}}^2 \\ &\leq C_{\mathbb{B},\mathbb{H}}^2 \|T\|_{L(\mathbb{B})}^{2n} |x|_{\mathbb{B}}^2 \\ &= C_{\mathbb{B},\mathbb{H}}^2 |x|_{\mathbb{B}}^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$|Tx|_{\mathbb{H}}^2 \leq \liminf_{n \to \infty} |T^n x|_{\mathbb{H}}^{2/n} \leq \liminf_{n \to \infty} (C_{\mathbb{B},\mathbb{H}}^2 |x|_{\mathbb{B}}^2)^{1/n} = 1.$$

Luego:

$$|Tx|_{\mathbb{H}}^2 \leq 1,$$

para toda x tal que $|x|_{\mathbb{H}} = 1$, y esto prueba el teorema. □

2.3.2. Teorema de Krein. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$ un espacio de Banach denso en $\mathbb{H}$ con norma $|\cdot|_{\mathbb{B}}$ tal que $|x|_{\mathbb{H}} \leq C_{\mathbb{B},\mathbb{H}} |x|_{\mathbb{B}}$, $(x \in \mathbb{B})$.

Entonces para cualesquiera dos operadores lineales $T_1, T_2 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ que satisfacen $|T_i x|_{\mathbb{B}} \leq C_i |x|_{\mathbb{B}}$, $(x \in \mathbb{B}, i = 1, 2)$, $\big(T_1 x, y\big) = \big(x, T_2 y\big)$, $(x, y \in \mathbb{B})$, tenemos:

$$|T_i x|_{\mathbb{H}} \leq (C_1 C_2)^{1/2} |x|_{\mathbb{H}} , \qquad x \in \mathbb{B}, i = 1, 2.$$

Demostración. Definamos $T = T_1 T_2$, y tomemos $x \in \mathbb{B}$. Por las hipótesis sobre T_1, T_2, tenemos que

$$\big(T^* x, y\big) = \big(x, T_1 T_2 y\big) = \big(T_2 x, T_2 y\big) = \big(T_1 T_2 x, y\big) = \big(Tx, y\big) .$$

Esto equivale a: $T^* = T$.

Por otro lado:

$$|Tx|_{\mathbb{B}} = |T_1 T_2 x|_{\mathbb{B}} \leq C_1 |T_2 x|_{\mathbb{B}} \leq C_1 C_2 |x|_{\mathbb{B}} .$$

Luego T satisface las hipótesis del Teorema anterior, y entonces:

$$|T_1 T_2 x|_{\mathbb{H}} \leq C_1 C_2 |x|_{\mathbb{H}} .$$

Procediendo de modo análogo, se puede obtener que:

$$|T_2 T_1 x|_{\mathbb{H}} \leq C_1 C_2 |x|_{\mathbb{H}} .$$

En consecuencia:

$$|T_1x|_{\mathbb{H}}^2 = \big(T_1x, T_1x\big) = \big(x, T_2T_1x\big) \leq |x|_{\mathbb{H}}\, |T_2T_1x|_{\mathbb{H}} \leq C_1C_2\, |x|_{\mathbb{H}}^2 \,,$$

lo cual implica que

$$|T_1x|_{\mathbb{H}} \leq (C_1C_2)^{1/2}\, |x|_{\mathbb{H}} \,.$$

De manera análoga se puede probar que:

$$|T_2x|_{\mathbb{H}} \leq (C_1C_2)^{1/2}\, |x|_{\mathbb{H}} \,.$$

Esto finaliza la prueba. □

En particular, T_1, T_2 pueden extenderse a operadores acotados sobre $\mathbb{H}$.

El resultado anterior puede generalizarse al caso de dos espacios de Hilbert distintos, como sigue a continuación:

2.3.3. Teorema de Krein (generalizado). Sean $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$, dos espacios de Hilbert, con productos internos respectivos $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}1}$ y $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}_2}$, y normas $|\cdot|_{\mathbb{H}_1}$ y $|\cdot|_{\mathbb{H}_2}$. Sean $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$, dos espacios de Banach tales que:

- $\mathbb{B}_i \subset \mathbb{H}_i$, $i = 1, 2$,
- $\mathbb{B}_i$ es denso en $\mathbb{H}_i$, $i = 1, 2$,
- $|x_i|_{\mathbb{H}_i} \leq C_i\, |x_i|_{\mathbb{B}_i}$, para todo $x_i \in \mathbb{B}_i$.

Sean $T_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$, $T_2 : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_1$ operadores lineales que satisfacen:

$$\begin{aligned} |T_1x_1|_{\mathbb{B}_2} &\leq C_1\, |x_1|_{\mathbb{B}_1} \,, \\ |T_2x_2|_{\mathbb{B}_1} &\leq C_2\, |x_2|_{\mathbb{B}_2} \,, \\ \Big(T_1x_1, x_2\Big)_{\mathbb{H}_2} &= \Big(x_1, T_2x_2\Big)_{\mathbb{H}_1} \,, \qquad (\text{todo } x_i \in \mathbb{B}_i,\ i = 1, 2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |T_1x_1|_{\mathbb{H}_2} &\leq (C_1C_2)^{1/2}\, |x_1|_{\mathbb{H}_1} \,, \qquad (\text{todo } x_1 \in \mathbb{B}_1) \\ |T_2x_2|_{\mathbb{H}_1} &\leq (C_1C_2)^{1/2}\, |x_2|_{\mathbb{H}_2} \,, \qquad (\text{todo } x_2 \in \mathbb{B}_2). \end{aligned}$$

Demostración. Sean $x_1, x_1' \in \mathbb{B}_1$ y $x_2, x_2' \in \mathbb{B}_2$. El operador $T_2T_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_1$ satisface que

$$\big(T_2T_1x_1, x_1'\big)_{\mathbb{H}_1} = \big(T_1x_1, T_1x_1'\big)_{\mathbb{H}_2} = \big(x_1, T_2T_1x_1'\big)_{\mathbb{H}_1} \,,$$

por lo tanto $(T_2T_1)^* = T_2T_1$.

Por otra parte:

$$|T_2T_1x_1|_{\mathbb{B}_1} \leq C_2\, |T_1x_1|_{\mathbb{B}_2} \leq C_2C_1\, |x_1|_{\mathbb{B}_1} \,.$$

Luego, por el teorema previo, tenemos que:

$$|T_2T_1x_1|_{\mathbb{H}_1} \leq C_1C_2\, |x_1|_{\mathbb{H}_1} \,.$$

Podemos proceder de la misma manera con el operador $T_1T_2 : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_2$, obteniendo que $(T_1T_2)^* = T_1T_2$ y

$$|T_1T_2x_2|_{\mathbb{H}_2} \leq C_1C_2\, |x_2|_{\mathbb{H}_2} \,.$$

Ahora deducimos que:

$$\begin{aligned} |T_1x_1|_{\mathbb{H}_2}^2 &= \Big(T_1x_1, T_1x_1\Big)_{\mathbb{H}_2} \\ &= \Big(x_1, T_2T_1x_1\Big)_{\mathbb{H}_1} \\ &\leq |x_1|_{\mathbb{H}_1}\, |T_2T_1x_1|_{\mathbb{H}_1} \\ &\leq C_1C_2\, |x_1|_{\mathbb{H}_1}\, |x_1|_{\mathbb{H}_1} \\ &= C_1C_2\, |x_1|_{\mathbb{H}_1}^2 \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x_1 \in \mathbb{H}_1$:

$$|T_1x_1|_{\mathbb{H}_2} \leq (C_1C_2)^{1/2}\, |x_1|_{\mathbb{H}_1} \,.$$

De manera análoga se puede probar que para todo $x_2 \in \mathbb{H}_2$:

$$|T_2x_2|_{\mathbb{H}_1} \leq (C_1C_2)^{1/2}\, |x_2|_{\mathbb{H}_2} \,.$$

□

2.4. Espacios de Tipo Homogéneo

2.4.1. Definiciones. Sean X un conjunto no vacío, d una casi-distancia en X, o sea, una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$, y $k > 0$ una constante tal que:

$$d(x,x) = 0, \tag{2.4.1.1}$$

$$d(x,y) = d(y,x), \tag{2.4.1.2}$$

$$d(x,z) \leq k[d(x,y) + d(y,z)], \tag{2.4.1.3}$$

para todo $x, y, z \in X$. La constante k es independiente de x, y, z.

Se dice que (X, d, k) es un **espacio casi métrico**.

Una d-**bola** en X es un conjunto de la forma

$$B_r^d(x) = \{y \in X | d(x,y) < r\}. \tag{2.4.1.4}$$

Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra que contiene a las d-bolas. Sea μ una medida en X cuya σ-álgebra de conjuntos medibles es $\mathcal{M}$.

Supongamos además que se tienen las siguientes propiedades:

• Existe $a \geq 1$ tal que para toda d-bola se satisface la relación:

$$\mu(B_{2r}^d(x)) \leq a\mu(B_r^d(x)). \tag{2.4.1.5}$$

• **Propiedad de Normalidad:** Existen constantes positivas A_1 y A_2 tales que

$$A_1 r \leq \mu(B_r^d(x)) \leq A_2 r, \tag{2.4.1.6}$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$.

• Existen un número $0 < \theta \leq 1$ y una constante $C > 0$ tal que:

$$|d(x,y) - d(x',y)| \leq C r^{1-\theta} d(x,x')^{\theta}, \tag{2.4.1.7}$$

para todo $x, x', y \in X, r > 0, d(x,y) < r, d(x',y) < r$.

• Supondremos además que X es no acotado (se puede probar que $\mu(X) = \infty$).

• Supondremos que μ es no atómica, es decir que, si $x \in X$, entonces $\mu(x) = 0$

• También supondremos que μ es una medida regular respecto de la σ-álgebra de Borel determinada por las bolas de la casi-métrica d.

Si se satisfacen todas esas propiedades (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo, normal, regular de orden θ, no acotado y no atómico.

Sin pérdida alguna de generalidad, podemos utilizar siempre una misma constante A que reemplace a todas las anteriores, con tal de que satisfagan las desigualdades:

$$\frac{1}{A} \leq A_1 \leq \max\{k, a, C, A_2\} \leq A. \tag{2.4.1.8}$$

2.5. Funciones Lipschitz valuadas en un espacio de Hilbert

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo de orden θ.

Si f es una función $f : X \to \mathbb{H}$ tal que para algún $0 < \eta \leq \theta$ satisface:

$$\sup_{x,y \in X, x \neq y} |f(x) - f(y)|_{\mathbb{H}} \leq C d(x,y)^{\eta}, \tag{2.5.1}$$

decimos que f es una **función Lipschitz de orden** η, y al ínfimo de tales constantes lo denotamos con $|f|_{\eta,\mathbb{H}}$.

Al espacio de estas funciones lo indicamos con $\Lambda^{\eta}(X, \mathbb{H})$.

Dada una bola B en X, al espacio de funciones Lipschitz de orden η con soporte en B valuadas en $\mathbb{H}$ lo denotamos $\Lambda^\eta(B,\mathbb{H})$.

La norma Lipschitz de orden η de $f \in \Lambda^\eta(B,\mathbb{H})$ está dada por

$$\|f\|_{\eta,\mathbb{H}} = \|f\|_{\infty,\mathbb{H}} + |f|_{\eta,\mathbb{H}}\,. \tag{2.5.2}$$

Definimos el espacio de funciones Lipschitz de orden η con soporte compacto, como la unión

$$\Lambda_0^\eta(X,\mathbb{H}) = \bigcup_{B\ d\text{-bola en } X} \Lambda^\eta(B,\mathbb{H}). \tag{2.5.3}$$

La topología del espacio $\Lambda_0^\eta(X,\mathbb{H})$ será el límite inductivo de las topologías de $\Lambda^\eta(B,\mathbb{H})$ definidas sobre cada bola B de X.

Al espacio de funcionales lineales continuos sobre $\Lambda_0^\eta(X,\mathbb{H})$ lo denotamos por $\Lambda_0^\eta(X,\mathbb{H})'$.

Consideremos el espacio $\Lambda_0^\eta(X,\mathbb{H})_0$ de las funciones $f \in \Lambda_0^\eta(X,\mathbb{H})$ que tienen integral nula:

$$\int f = 0_{\mathbb{H}},$$

en donde $0_{\mathbb{H}}$ denota el vector nulo en el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

Cuando $\mathbb{H}$ sea el conjunto de números complejos, expresamente la omitiremos en la notación de todas las definiciones precedentes.

2.6. Aproximación a la Identidad en Espacios de Tipo Homogéneo

2.6.1. Teorema. EN [MST] se prueba que en un espacio de tipo homogéneo que satisface las propiedades de la sección 2.4, existe una **aproximación a la identidad** en X, o sea, una función ρ de $X \times X \times (0,\infty)$ en $[0,\infty)$ que satisface lo siguiente: existe una constante $c > 0$ tal que, para cada $t > 0$ y $0 < \beta \le \theta$,

$$\operatorname{sop} \rho(\cdot,\cdot,t) \subset \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < ct\}, \qquad (\text{todo } t > 0) \tag{2.6.1.a}$$

$$\sup\{\rho(x,y,t) : x,y \in X\} \le ct^{-1} \tag{2.6.1.b}$$

$$\rho(x,y,t) = \rho(y,x,t) \tag{2.6.1.c}$$

$$|\rho(x,y,t) - \rho(x',y,t)| \le ct^{-\beta-1} d(x,x')^\beta, \qquad (\text{todo } x,x',y \in X) \tag{2.6.1.d}$$

$$|\rho(x,y,t) - \rho(x,y',t)| \le ct^{-\beta-1} d(y,y')^\beta, \qquad (\text{todo } x,y,y' \in X) \tag{2.6.1.e}$$

$$\int \rho(x,y,t)\,d\mu(y) = 1 \qquad (\text{todo } x \in X, t > 0) \tag{2.6.1.f}$$

$$\int \rho(x,y,t)\,d\mu(x) = 1 \qquad (\text{todo } y \in X, t > 0) \tag{2.6.1.h}$$

Se puede probar además (ver [DJS]) que vale la siguiente propiedad de suavidad:

$$\begin{aligned} &|(\rho(x,y,t) - \rho(x,y',t)) - (\rho(x',y,t) - \rho(x',y',t))| \\ &\qquad \le ct^{-1-2\beta} d(x,x')^\beta d(y,y')^\beta, \qquad (\text{todo } x,x',y,y' \in X). \end{aligned} \tag{2.6.1.i}$$

2.6.2. Dada $f \in \Lambda_0^\beta(X)$, definimos para cada $t > 0$:

$$f_t(x) = \int \rho(x,y,t) f(y)\,d\mu(y),$$

y hacemos una definición completamente análoga para $g \in \Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H})$.

Definimos, para $f \in \Lambda_0^\beta(X)$:

$$S_j f(x) = f_{2^j}(x),$$

y para $g \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$:

$$\tilde{S}_j g(x) = g_{2^j}(x).$$

Por otro lado, denotamos $\Delta_j = S_j - S_{j-1}$ y $\tilde{\Delta}_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}$.

Observamos que los operadores S_j y $\tilde{S}_j$ son autoadjuntos. Esto significa, por ejemplo, que si $g_1 \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, $g_2 \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, entonces:

$$\left\langle \tilde{S}_j g_1, g_2 \right\rangle = \left\langle g_1, \tilde{S}_j g_2 \right\rangle.$$

Esto es directo, debido a (2.6.1.c), y a la definición de $\langle .,. \rangle$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{S}_j g_1, g_2 \right\rangle &= \int \left(\tilde{S}_j g_1(x), g_2(x) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&= \int \left(\left[\int \rho(x,y,2^j) g_1(y) d\mu(y) \right], g_2(x) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)
\end{aligned}$$

(La integral de Böchner respecto y conmuta con el operador lineal $\left(\cdot, g_2(x)\right)_{\mathbb{H}}$:)

$$= \iint \left(\rho(x,y,2^j) g_1(y), g_2(x) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(y) d\mu(x)$$

(Teorema de Fubini y propiedad (2.6.1.c):)

$$\begin{aligned}
&= \iint \left(\rho(y,x,2^j) g_1(y), g_2(x) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \left\langle g_1, \tilde{S}_j g_2 \right\rangle.
\end{aligned}$$

2.6.3. Teorema de Aproximación. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo de orden θ. Dada $g \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, $0 < \beta \leq \theta$, soportada en $B_r(x_0)$, se tiene que para cada $t > 0$ las funciones g_t satisfacen:

(a) $\operatorname{sop}(g_t) \subset B_{\tilde{r}(t)}(x_0)$, si $t < r$; donde $\tilde{r}(t) = r + C'' r^{1-\theta} t^\theta$.

(b) $|g_t(x) - g_t(x')|_{\mathbb{H}} \leq C'' t^{-(1+\theta)} \mu(B_r(x_0))^{1+\beta} d(x,x')^\theta$.

(c) $|(g_t(x) - g(x)) - (g_t(x') - g(x'))|_{\mathbb{H}} \leq C(t) d(x,x')^\beta$, donde $\lim_{t \to 0} C(t) = 0$.

Demostración. Esto se obtiene mediante una generalización directa de [MST, Lema 1.20], reemplazando $|.|$ por $|.|_{\mathbb{H}}$. $\square$

2.6.4. Corolario. En las condiciones del Teorema anterior, tenemos que

$$\lim_{t \to 0} \|g_t - g\|_{\beta, \mathbb{H}} = 0.$$

Demostración. Por la parte (c) del Teorema precedente, se deduce que:

$$\lim_{t \to 0} |g_t - g|_{\beta, \mathbb{H}} = 0.$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|g_t(x) - g(x)|_{\mathbb{H}} &= \left| \int \rho(x,y,t)(g(y) - g(x))\, d\mu(y) \right|_{\mathbb{H}} \\
&\leq \int \rho(x,y,t) \, |(g(y) - g(x))|_{\mathbb{H}} \, d\mu(y) \\
&\leq \int \rho(x,y,t) \, |g|_{\beta, \mathbb{H}} \, d(x,y)^\beta \, d\mu(y)
\end{aligned}$$

(Usando 2.6.1.a:)

$$\leq \int_{d(x,y)<ct} \rho(x,y,t) \, |g|_{\beta,\mathbb{H}} \, (ct)^{\beta} \, d\mu(y)$$

(Usando 2.6.1.b:)

$$\leq |g|_{\beta,\mathbb{H}} \, (ct)^{\beta} \, \mu(B_{ct}(x)) ct^{-1}$$

(Usando normalidad de la medida:)

$$\leq C \, |g|_{\beta,\mathbb{H}} \, t^{\beta}.$$

Tenemos entonces que:

$$\|g_t - g\|_{\infty,\mathbb{H}} \leq Ct^{\beta},$$

lo cual tiende a 0 cuando t tiende a 0. $\square$

Capítulo 3

El Teorema T1 en un espacio de tipo homogéneo a valores en un espacio de Hilbert

3.1. Operadores de Calderón-Zygmund generalizados

Sea (X, d, μ) un espacio de Tipo Homogéneo Normal de orden θ, no atómico.
Denotaremos con Δ a la diagonal en $X \times X$.

3.1.1. Definición. Una función continua $K : X \times X \setminus \Delta \to \mathbb{H}$ es un núcleo estándar (con valores en $\mathbb{H}$) si existe un exponente $\delta \in (0, \theta]$, y una constante positiva C_K que sólo depende de K, tal que:

$$\text{(K1)} \qquad |K(x,y)|_{\mathbb{H}} \leq C_K \frac{1}{d(x,y)},$$

para todo $x, y \in X$.

$$\text{(K2)} \qquad |K(x,y) - K(x',y)|_{\mathbb{H}} + |K(y,x) - K(y,x')|_{\mathbb{H}} \leq C_K \frac{d(x,x')^{\delta}}{d(x,y)^{1+\delta}},$$

para todo $x, x', y \in X$ tal que $d(x,x') \leq d(x,y)/2A$.

3.1.2. Dado un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y un número $0 < \beta \leq \delta$, consideremos un operador continuo $T : \Lambda_0^{\beta}(X) \to \Lambda_0^{\beta}(X, \mathbb{H})'$ asociado a un núcleo estándar K, de la siguiente manera: Dadas $f \in \Lambda_0^{\beta}(X)$ y $g \in \Lambda_0^{\beta}(X, \mathbb{H})$, con soportes disjuntos vale:

$$\text{(3.1.2.a)} \qquad \langle Tf, g \rangle = \iint \big(K(x,y), g(x)\big)_{\mathbb{H}} f(y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Aquí $\big(.,.\big)_{\mathbb{H}}$ es el producto interno en $\mathbb{H}$.
Si T puede extenderse a un operador acotado de $L^2_{\mu}(X)$ en $L^2_{\mu}(X, \mathbb{H})$, entonces decimos que T es un **operador de Calderón-Zygmund** en el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

3.1.3. El **adjunto** de T es el operador T^* tal que para $G \in \Lambda_0^{\beta}(X, \mathbb{H})$ y $F \in \Lambda_0^{\beta}(X)$ está dado por:

$$\langle T^* G, F \rangle = \langle TF, G \rangle .$$

El operador T^* tiene asociado el núcleo estándar $K(y, x)$.

3.1.4. Definición. Decimos que T satisface la **Propiedad de Acotación Débil**, si existe una constante positiva C_T que sólo depende del operador T, tal que:

$$\big|\langle Tf, g \rangle\big| \leq C_T \; \mu(B)^{1+2\beta} \|f\|_{\beta} \|g\|_{\beta, \mathbb{H}},$$

para cualquier bola prefijada B en X, y cualesquiera funciones $f \in \Lambda_0^{\beta}(X)$, $g \in \Lambda_0^{\beta}(X, \mathbb{H})$, con soporte en B.

En particular, si $f_1, f_2 \in \Lambda_0^\beta(X)$ tienen soporte en la d-bola B, y si v es un vector fijo en $\mathbb{H}$, resulta que $f_2 v$ es una función del espacio $\Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H})$, y tenemos entonces que:

$$\left|\left\langle Tf_1, f_2 v\right\rangle\right| \leq C_T \ \mu(B)^{1+2\beta} \|f_1\|_\beta \|f_2\|_\beta \, |v|_{\mathbb{H}} \, .$$

3.1.5. Observación. Si $\beta' \geq \beta$, $\beta' \leq \delta$, se puede probar fácilmente que T sastisface la Propiedad de Acotación Débil respecto al exponente β'. También T se extiende a un operador lineal continuo de $\Lambda_0^{\beta'}(X)$ en $\Lambda_0^{\beta'}(X,\mathbb{H})$, porque se tienen las inclusiones continuas $\Lambda_0^{\beta'}(X) \subset \Lambda_0^{\beta}(X)$ y $\Lambda_0^{\beta'}(X,\mathbb{H}) \subset \Lambda_0^{\beta}(X,\mathbb{H})$, si $\beta' \geq \beta$.

3.1.6. Convención. Sin pérdida de generalidad, supondremos en lo sucesivo que $C_K = C_T$.

3.2. Extensión de los Operadores

A continuación haremos extensiones de los operadores T y T^* a funciones acotadas. Notemos que aún en el ejemplo más elemental de integral singular, como es el caso de la transformada de Hilbert en la recta real, hay problemas al intentar hacer una tal extensión.

En ese caso, se hace necesario llevar a cabo un procedimiento *adecuado*, habitual en estos casos, con el fin de asegurarse que la extensión realizada está bien definida.

3.2.1. Proposición. Si $T : \Lambda_0^\beta(X) \to (\Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H}))'$ es un operador lineal continuo que está asociado a un núcleo estándar K (con valores en $\mathbb{H}$) . Entonces T se puede extender a un operador $\tilde{T} : (\Lambda^\beta(X) \cap L^\infty_\mu(X)) \to (\Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H})_0)'$.

Demostración. Sea $f \in \Lambda^\beta(X) \cap L^\infty(X)$. Definimos la acción de T sobre f, como una distribución actuando sobre elementos de $\Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H})_0$. Tomemos $g \in \Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H})_0$, elijamos $x_0 \in \operatorname{sop}(g)$ y $R > 0$ tal que $\operatorname{sop}(g) \subset B_R(x_0)$.

Sea $\xi \in \Lambda_0^\theta(X)$ tal que $\xi(y) \equiv 1$ en $B_{2AR}(x_0)$, $\xi(y) \equiv 0$ en $X \setminus B_{4A^2R}(x_0)$, y $0 \leq \xi(y) \leq 1$ en otro caso.

Consideramos la extensión:

$$\left\langle Tf, g\right\rangle = \left\langle T(f\xi), g\right\rangle + \left\langle T(f(1-\xi)), g\right\rangle . \tag{3.2.1.a}$$

El segundo término debe entenderse como:

$$\left\langle T(f(1-\xi)), g\right\rangle = \iint \left\langle (K(x,y) - K(x_0,y))\,(1-\xi(y))f(y), g(x)\right\rangle_{\mathbb{H}} d\mu(y)\,d\mu(x)$$

Se puede probar que $\left\langle T(f(1-\xi)), g\right\rangle$ da un valor finito, luego está bien definida. Veremos esto a continuación: En virtud de la propiedad (K2), tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\iint \left|\Big((K(x,y) - K(x_0,y))\,(1-\xi(y))f(y), g(x)\Big)_{\mathbb{H}}\right| d\mu(y)\,d\mu(x) \\
&\leq \iint |(K(x,y) - K(x_0,y))|_{\mathbb{H}}\ |1-\xi(y)|\,|f(y)|\,|g(x)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\,d\mu(x)
\end{aligned}$$

(Usamos (K2) y el hecho de que f es acotada:)

$$\begin{aligned}
&\leq \iint C\frac{d(x,x_0)^\delta}{d(x_0,y)^{1+\delta}} \|f\|_{L^\infty_\mu(X)}\,|1-\xi(y)|\,|g(x)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&\leq C\|f\|_{L^\infty_\mu(X)} \int_{X\setminus B_{2AR}(x_0)} \frac{1}{d(x_0,y)^{1+\delta}} d\mu(y) \int_{\operatorname{sop}(g)} R^\delta\, |g(x)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

Integrando sobre los anillos disjuntos $B_{2^{N+1}AR}(x_0) \setminus B_{2^N AR}(x_0)$, y usando la normalidad de X, se puede estimar la primera integral:

$$\begin{aligned}
\int_{X\setminus B_{2AR}(x_0)} \frac{1}{d(x_0,y)^{1+\delta}} d\mu(y) &= \sum_{N>0} \int_{B_{2^{N+1}2AR}(x_0)\setminus B_{2^N 2AR}(x_0)} \frac{1}{d(x_0,y)^{1+\delta}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{N>0} \int_{B_{2^{N+1}2AR}(x_0)\setminus B_{2^N 2AR}(x_0)} \frac{1}{(2^N 2AR)^{1+\delta}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{N>0} C\mu(B_{2^{N+1}2AR}(x_0) \setminus B_{2^N 2AR}(x_0)) \frac{1}{(2^N 2AR)^{1+\delta}}
\end{aligned}$$

(Usamos duplicación de la medida:)

$$\leq \sum_{N>0} C2^N 2AR(2A-1))\frac{1}{(2^N 2AR)^{1+\delta}}$$
$$\leq CR\sum 2^{-N\delta}\frac{1}{R^{1+\delta}}$$
$$\leq C\frac{1}{R^\delta}$$

Por otro lado:

$$\int_{\mathrm{sop}(g)} |g(x)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(x) \leq C\|g\|_{L^\infty(X,\mathbb{H})}\mu(\mathrm{sop}(g))$$

Luego la expresión $\langle T(f(1-\xi)), g\rangle$ está acotada, y eso significa que es finita, luego bien definida.
Más aún, toda la expresión está acotada por

$$C\|f\|_{L^\infty(X)}\|g\|_{L^\infty(X,\mathbb{H})}\mu(\mathrm{sop}(g)).$$

Debemos ver que la definición de $\langle Tf, g\rangle$ no depende de la elección del punto x_0 ni de la función ξ. Para ello, tomemos $x_1, x_2 \in \mathrm{sop}(g)$, y sean ξ_1, ξ_2 un par de funciones en $\Lambda_0^\beta(X)$ tales que valen 1 en las respectivas bolas $B_1 = B_{2AR_1}(x_1), B_2 = B_{2AR_2}(x_2)$, donde R_1, R_2 son radios lo bastante grandes como para que las bolas contengan al soporte de g. Calculamos:

$$\iint \Big((K(x,y)-K(x_1,y))(f(y)(1-\xi_1(y))), g(x)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y)d\mu(x)$$
$$-\iint \Big((K(x,y)-K(x_2,y))(f(y)(1-\xi_2(y))), g(x)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y)d\mu(x)$$

(como las dos integrales dobles son absolutamente convergentes, se pueden agrupar:)

$$= \iint \Big(-(K(x_1,y)(1-\xi_1(y)) - K(x_2,y)(1-\xi_2(y)))f(y), g(x)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y)d\mu(x)$$

(como X es espacio de medida σ-finito, se puede además cambiar el orden de integración:)

$$= \iint \Big(-(K(x_1,y)(1-\xi_1(y)) - K(x_2,y)(1-\xi_2(y)))f(y), g(x)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(x)d\mu(y)$$

(la integral de Böchner conmuta con operadores lineales continuos, en este caso con $(.,.)_{\mathbb{H}}$:)

$$= \int \Big(-(K(x_1,y)(1-\xi_1(y)) - K(x_2,y)(1-\xi_2(y)))f(y), \int g(x)d\mu(x)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y)$$

(g tiene integral $0_{\mathbb{H}}$:)

$$= 0.$$

□

3.2.2. Proposición. Sea $T : \Lambda_0^\beta(X) \to (\Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H}))'$ un operador lineal continuo que está asociado a un núcleo estándar K (con valores en $\mathbb{H}$), y que satisface la propiedad de acotación débil. Sea T^* el adjunto de T. Entonces T^* se puede extender a un operador $\tilde{T}^* : \Lambda^\beta(X,\mathbb{H}) \cap L_\mu^\infty(X,\mathbb{H}) \to (\Lambda_0^\beta(X)_0)'$.

Demostración. Omitimos la prueba, por ser similar al caso anterior, dándole sentido a la descomposición:

$$\langle T^* g, f\rangle = \langle T^*(g\xi), f\rangle + \langle T^*(g(1-\xi)), f\rangle , \tag{3.2.2.a}$$

igual que como se hizo antes, siendo ξ una función de valores escalares. □

3.2.3. En lo que sigue, a los operadores extendidos $\tilde{T}$ y $\tilde{T}^*$ los seguiremos escribiendo como T y T^*, respectivamente, quedando claro en cada caso el significado correcto. La función $f \equiv 1$ es un elemento de $\Lambda_0^\beta(X) \cap L^\infty_\mu(X)$, y por lo tanto tiene sentido el objeto $T1$ como un elemento del espacio dual $(\Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})_0)'$. Asimismo, para cada vector constante $h \in \mathbb{H}$, tenemos que T^*h es un elemento de $(\Lambda_0^\beta(X)_0)'$.

3.3. Enunciado del Teorema $T1 = 0$ en un espacio de tipo homogéneo a valores en un espacio de Hilbert

Estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de este capítulo. El **Teorema** $T1 = 0$**:**

3.3.1. Teorema. Si $T : \Lambda_0^\beta(X) \to (\Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H}))'$ es un operador lineal continuo que está asociado a un núcleo estándar K (con valores en $\mathbb{H}$), satisface la propiedad de acotación débil, y además

$$T1 = 0_{\mathbb{H}}$$

y para cada vector constante $h \in \mathbb{H}$ vale

$$T^*h = 0,$$

entonces T se extiende a un operador acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$.

Demostración. Para cada entero positivo N, sea

$$R_N = \sum_{-N}^{N} (\tilde{S}_j T\Delta_j + \tilde{\Delta}_j T S_j - \tilde{\Delta}_j T\Delta_j).$$

Veremos que para todas las funciones $f \in \Lambda_0^\beta(X)$, $g \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, se tiene:

$$\lim_{N\to\infty} \langle R_N f, g\rangle = \langle Tf, g\rangle .$$

En efecto, es fácil ver que:

$$R_N = \tilde{S}_{-N} T S_{-N} - \tilde{S}_{N+1} T S_{N+1}$$

Además $S_{-N} f \to f$ en $\Lambda_0^\beta(X)$ y también $\tilde{S}_{-N} g \to g$ en $\Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$ (ver Corolario 2.6.4).
Por hipótesis, T es continuo de $\Lambda_0^\beta(X)$ en $\Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})'$, luego:

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \tilde{S}_{-N} T S_{-N} f, g\right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle T S_{-N} f, \tilde{S}_{-N} g\right\rangle = \langle Tf, g\rangle .$$

Necesitamos probar que

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \tilde{S}_N T S_N f, g\right\rangle = 0.$$

Para cada β, $0 < \beta \le \theta$, se tiene que $S_N f \to 0$ en la topología de $\Lambda_0^\beta(X)$. Más precisamente, tenemos que:

$$|S_N f(x)| \le c 2^{-N} \|f\|_{L^1},$$

por (2.6.1.b), lo cual implica que $\|S_N f\|_{L^\infty}$ tiende a 0 cuando N tiende a ∞. Y además:

$$\left| \frac{S_N f(x) - S_N f(x')}{d(x, x')^\beta} \right| \le c 2^{-N(1+\beta)} \|f\|_{L^1},$$

por (2.6.1.d), lo cual prueba que $\|S_N f\|_{\Lambda_0^\beta(X)}$ tiende a 0 cuando N tiende a ∞.

De manera análoga se prueba que $\tilde{S}_N g$ tiende a 0 en $\Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$ cuando N tiende a ∞.

Como T es continuo, resulta que

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle \tilde{S}_N T S_N f, g\right\rangle = \lim_{N\to\infty}\left\langle T(S_N f), \tilde{S}_N g\right\rangle = 0.$$

Denotamos a los operadores

$$(*) \qquad T_j = \tilde{S}_j T \Delta_j + \tilde{\Delta}_j T S_j + \tilde{\Delta}_j T \Delta_j,$$

para cada entero j.

Afirmación: Los operadores compuestos $T_j^* T_k$ son lineales y acotados (en norma de operador) de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, los operadores compuestos $T_j T_k^*$ son lineales y acotados de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X)$, y las respectivas normas de operador están acotadas por $C2^{|j-k|\beta/2}$.

La prueba de esa afirmación será el tema de lo que resta del capítulo.

Suponiéndola cierta, podemos ahora recurrir al Lema de Cotlar con los espacios de Hilbert $L^2_\mu(X)$ y $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, para obtener que cada R_N es un operador acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$.
La norma $\|R_N\|_{\mathcal{L}(L^2_\mu(X),L^2_\mu(X,\mathbb{H}))}$ está uniformemente acotada en el índice N. Ese hecho implica que hay alguna subsucesión de $\{R_N\}_N$, digamos $\{R_{N_m}\}_m$, tal que R_{N_m} converge a algún operador T^0 que es acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$. En particular $R_{N_m} \to T^0$ débilmente.
Pero como $R_{N_m} \to T$ débilmente, la unicidad del límite implica que $T^0 = T$, lo cual prueba el Teorema. □

Resta probar la **Afirmación** contenida en el Teorema precedente, la cual enunciamos como la siguiente:

3.3.2. Proposición. Sea T_j el operador definido en (*). Entonces, para todo par de enteros j,k se tiene que:

- $T_j^* T_k$ es un operador lineal acotado (en norma de operador) de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$,
- $T_j T_k^*$ es un operador lineal acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X)$, y
- las respectivas normas de operador están acotadas por $C2^{|j-k|\beta/2}$.

Demostración. La prueba se da a través de los resultados de las secciones siguientes. □

3.4. Lemas de continuidad respecto integral de Böchner

Consideremos uno de los operadores $\mathcal{T}_j = \tilde{S}_j T \Delta_j = \tilde{S}_j T S_j - \tilde{S}_j T S_{j-1}$, con j fijo.

Nuestro primer objetivo es probar resultados de continuidad respecto integración de Bochner.
Deseamos probar el siguiente:

3.4.1. Lema. Sea j un entero fijo. Entonces:

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{S}_j T S_j f, g\right\rangle &= \iint \left\langle T\rho(\cdot,y,2^j)f(y), \rho(\cdot,x,2^j)g(x)\right\rangle d\mu(y)d\mu(x)\\ &= \iint \left\langle T\rho(\cdot,y,2^j)f(y), \rho(\cdot,x,2^j)g(x)\right\rangle d\mu(x)d\mu(y).\end{aligned}$$

Demostración. Consideremos la aproximación a la identidad ρ del capítulo precedente, y denotemos, por brevedad:

$$\Phi(x,y) = \rho(x,y,2^{-j})$$

Consideremos un punto prefijado $x_0 \in X$.
Sean $F \in \Lambda^\beta_0(X)$, $G \in \Lambda^\beta_0(X,\mathbb{H})$, ambas con soporte en la bola $B^d_{R_1}(x_0)$ $(R_1 > 0)$.
Por (2.6.1.a) sabemos que $\mathrm{sop}(\Phi) \subset \{(x,y) : d(x,y) < c2^{j+1}\}$.
Denotemos $R = A(R_1 + c2^{j+1})$, $B = \overline{B^d_R(x_0)}$ (la clausura de la bola en X).
Tenemos que $\Phi(x,y)F(y) = 0$ siempre que $\mathrm{sop}(\Phi(x,\cdot)) \cap \mathrm{sop}(F) = \emptyset$.

Esto ocurre cuando $d(x,x_0)\geq R$, pues $\text{sop}(\Phi(x,\cdot))\cap\text{sop}(F)\subset B$.

El conjunto $\mathcal{C}_0[B]$ de funciones continuas con soporte compacto en B, es un espacio de Banach con la norma del supremo (topología de la convergencia uniforme).

Consideremos la función $\mathcal{H}:X\to\mathcal{C}_0[B]$ dada por:

$$\mathcal{H}[y](\cdot)=\Phi(\cdot,y)F(y).$$

Vemos que para cada $y\in X$ fijo, $\mathcal{H}[y]\in\mathcal{C}_0[B]$, pues por un lado $\text{sop}(\mathcal{H}[y])\subset B$, y por otro lado $\mathcal{H}[y]$ es función continua (para cada índice fijo $y\in X$).

Además, $y_k\to y$ (en X) implica que $\mathcal{H}[y_k]\rightrightarrows\mathcal{H}[y]$ (o sea, en la topología uniforme de $\mathcal{C}_0[B]$).

Por lo tanto $\mathcal{H}$ es función continua de la variable y.

Como $\mathcal{H}$ es continua, resulta ser medible Böchner respecto el espacio de Banach $\mathcal{C}_0[B]$.

Además, si $|\cdot|_u$ denota la norma del máximo:

$$\begin{aligned}\int|\mathcal{H}[y]|_u\,d\mu(y)&=\int\|\mathcal{H}[y](\cdot)\|_{L^\infty_\mu(X)}d\mu(y)\\&=\int\|\Phi(\cdot,y)\|_{L^\infty_\mu(X)}\,|F(y)|\,d\mu(y)\\&\leq\|\Phi(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_\mu(X\times X)}\|F\|_{L^1_\mu(X)}<\infty\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{H}$ es integrable en el sentido de Böchner en $\mathcal{C}_0[B]$.

Luego, para un operador lineal continuo $\ell:\mathcal{C}_0[B]\to\mathbb{C}$, el Teorema de Hille (ver 2.2.1) implica que:

$$\int\ell(\mathcal{H}[y])d\mu(y)=\ell\left(\int\mathcal{H}[y]d\mu(y)\right),$$

Consideremos el operador

$$\ell(h)=\left\langle Th,G\right\rangle.$$

Para $h\in\Lambda^\beta_0(B)\subset\mathcal{C}_0(B)$, tenemos que $\ell(h)$ está bien definido, y claramente es lineal.

Si $h_k\to h$ en $\Lambda^\beta_0(B)$, ocurre en particular $\ell(h_k)\to\ell(h)$. De manera que ℓ es un funcional lineal continuo del espacio $\Lambda^\beta_0(B)$.

Como $\Lambda^\beta_0(B)$ está incluido densamente en $\mathcal{C}_0[B]$, se puede extender ℓ de forma continua a $\mathcal{C}_0[B]$.

Por lo tanto:

$$\int\left\langle T\mathcal{H}[y],G\right\rangle d\mu(y)=\left\langle T\int\mathcal{H}[y]d\mu(y),G\right\rangle.$$

Pero entonces:

$$\left\langle T\left(\int\Phi(\cdot,y)F(y)d\mu(y)\right),G\right\rangle=\left\langle T\int\mathcal{H}[y]d\mu(y),G\right\rangle=\int\left\langle T\Phi(\cdot,y),G\right\rangle F(y)d\mu(y).$$

Reemplazando Φ por su definición, y tomando $F=f$, la última igualdad toma esta forma:

$$\begin{aligned}\left\langle T(S_jf),G\right\rangle&=\left\langle T\left(\int\rho(\cdot,y,2^j)f(y)d\mu(y)\right),G\right\rangle\\&=\int\left\langle T\rho(\cdot,y,2^j),G\right\rangle f(y)d\mu(y).\end{aligned}$$

Igual que antes, $\mathcal{C}_0[B,\mathbb{H}]$ (el espacio de funciones continuas $\mathbb{H}$-valuadas, de soporte contenido en B) es un espacio de Banach. Definimos:

$$\tilde{\mathcal{H}}[x]=\Phi(\cdot,x)g(x),$$

y estudiamos el funcional

$$\tilde{\ell}(h)=\left\langle T\Phi(\cdot,y),hg\right\rangle.$$

Se podrá probar, de manera similar a como hicimos antes, que:

$$\left\langle T\Phi(\cdot,y),\int\Phi(\cdot,x)g(x)d\mu(x)\right\rangle=\int\left\langle T\Phi(\cdot,y),\Phi(\cdot,x)g(x)\right\rangle d\mu(x).$$

Si aplicamos todo esto, y tomamos $G = \tilde{S}_j g$, obtenemos:

$$\text{(3.4.1.a)} \qquad \left\langle \tilde{S}_j T S_j f, g \right\rangle = \left\langle T S_j f, \tilde{S}_j g \right\rangle = \iint \left\langle T\rho(\cdot, y, 2^j) f(y), \rho(\cdot, x, 2^j) g(x) \right\rangle d\mu(x) d\mu(y).$$

También hemos visto que las aplicaciones:

$$y \to \rho(\cdot, y, 2^j) f(y)$$
$$x \to \rho(\cdot, x, 2^j) g(x)$$

son funciones (a valores en un espacio de funciones) con soporte compacto.

Luego la función de dos variables:

$$(x, y) \to \left\langle T\rho(\cdot, y, 2^j) f(y), \rho(\cdot, x, 2^j) g(x) \right\rangle$$

tiene soporte compacto.

Tenemos además que la familia de funciones:

$$\{\rho(\cdot, y, 2^j) f(y)\}_{y \in X} \times \{\rho(\cdot, x, 2^j) g(x)\}_{x \in X}$$

se mueve en un conjunto acotado de $\Lambda_0^\beta(X) \times \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$ (esto vale con el índice j fijo).

Por lo tanto, por la Propiedad de Acotación Débil, la integral (3.4.1.a) es absolutamente convergente. De ese modo, vale la regla de Fubini para dicha integral, y el orden de integración en x, y no es relevante.

Esto culmina la prueba del Lema.

$\square$

3.4.2. Expresión de los Núcleos asociados al operador $\mathcal{T}_j$.

Sean x, y fijos. Consideremos el funcional

$$l(v) = \left\langle T\rho(\cdot, y, 2^j), \rho(\cdot, x, 2^j) v \right\rangle, \qquad v \in \mathbb{H}.$$

Tenemos que:

$$l(s\, v + w) = s\; l(v) + l(w)$$

para vectores cualesquiera $v, w \in \mathbb{H}$ y cualquier escalar s.

Además, por la Propiedad de Acotación Débil tenemos:

$$|l(v)| = \left| \left\langle T\rho(\cdot, y, 2^j), \rho(\cdot, x, 2^j) v \right\rangle \right| \leq C_{x,y,j}\, |v|_{\mathbb{H}} < \infty$$

Como la constante $C_{x,y,j}$ no depende de v, es claro que l es un funcional lineal continuo sobre $\mathbb{H}$. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un elemento $\xi \in \mathbb{H}$ de manera que

$$l(v) = \left(\xi, v\right)_{\mathbb{H}}$$

para todo $v \in \mathbb{H}$.

Entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$\left\langle T\rho(\cdot, y, 2^j), \rho(\cdot, x, 2^j) v \right\rangle = \left(\xi, v\right)_{\mathbb{H}}.$$

todo $v \in \mathbb{H}$.

Un resultado análogo al Lema 3.4.1 permite afirmar que

$$\left(\tilde{S}_j T S_{j-1} f, g \right) = \iint \left\langle T\rho(\cdot, y, 2^{j-1}) f(y), \rho(\cdot, x, 2^j) g(x) \right\rangle d\mu(x) d\mu(y).$$

y es posible además cambiar el orden de integración en las variables x, y.

Usando un razonamiento similar al de antes, podemos hallar un vector $\xi' \in \mathbb{H}$ de manera que

$$\left\langle T\rho(\cdot, y, 2^{j-1}), \rho(\cdot, x, 2^j) v \right\rangle = \left(\xi', v\right)_{\mathbb{H}}.$$

todo $v \in \mathbb{H}$.

Al vector $\xi - \xi'$ (que depende de x, y y de j) lo denotaremos por $\kappa_j(x,y)$.
Escribimos, pues, la igualdad:

$$\begin{aligned}\Big(\kappa_j(x,y), v\Big)_{\mathbb{H}} &= \Big((T\rho(\cdot,y,2^j) - T\rho(\cdot,y,2^{j-1})), \rho(\cdot,x,2^j)\, v\Big) \\ &= \Big\langle T(\rho(\cdot,y,2^j) - \rho(\cdot,y,2^{j-1})), \rho(\cdot,x,2^j)\, v\Big\rangle,\end{aligned}$$

todo $v \in \mathbb{H}$.

En las secciones siguientes analizamos el operador $\mathcal{T}_j = \tilde{S}_j T \Delta_j$. Podemos escribir para este operador, la igualdad siguiente:

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathcal{T}_j f, g\Big\rangle &= \iint \Big\langle (T\rho(\cdot,y,2^j) - T\rho(\cdot,y,2^{j-1}))f(y), \rho(\cdot,x,2^j)g(x)\Big\rangle\, d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \iint \Big(\kappa_j(x,y)f(y), g(x)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(x)d\mu(y),\end{aligned}$$

y diremos que $\kappa_j(x,y)$ (considerado como función de x, y) es el núcleo del operador $\mathcal{T}_j$.
En lo sucesivo investigaremos las propiedades de este núcleo.

3.5. Cotas para los núcleos de los operadores involucrados en el paraproducto.

Recordemos que, como $\delta \geq \beta$, vale la Propiedad de Acotación Débil respecto el exponente δ.
Usaremos la notación

$$p(r) = (1+r)^{-(1+\delta)}. \qquad p_j(r) = 2^{-j}p(2^{-j}r).$$

También definimos

$$\psi(x,y,t) = \rho(x,y,t) - \rho(x,y,t/2).$$

3.5.1. Proposición. Para todo vector constante $v \in \mathbb{H}$:

$$\left|\left(\kappa_j(x,y), v\right)_{\mathbb{H}}\right| \leq C p_j(d(x,y))\, |v|_{\mathbb{H}}\, .$$

La constante C es igual a $C_T\tilde{c}$, donde C_T depende de T y su núcleo K, y $\tilde{c}$ es una constante geométrica, que no depende del operador T ni de j.

Demostración. Primero supongamos que $d(x,y) \leq c\,10A2^j$, donde c es la constante que aparece en (2.6.1.a). Estimamos:

$$\left|\Big(\kappa_j(x,y), v\Big)_{\mathbb{H}}\right| = \left|\left\langle T\psi(\cdot,y,2^j), \rho(x,\cdot,2^j)\frac{v}{|v|_{\mathbb{H}}}\right\rangle\right| |v|_{\mathbb{H}}$$

(Usamos Prop. de Acot. Débil aplicada al valor $\beta' = \delta$, junto con (2.6.1.d) y (2.6.1.e):)

$$\begin{aligned}&\leq C_T(2^j)^{1+2\delta}c^2(2^j)^{2(-1-\delta)}\, |v|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C_T\, c^2 2^{-j}\, |v|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C_T\, \tilde{c}\, p_j(d(x,y))\, |v|_{\mathbb{H}}\end{aligned}$$

donde $\tilde{c}$ no depende de j, sino sólo de las constantes geométricas del espacio, y hemos usado las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}2^{-j} &= \frac{(1+c10A)^{1+\delta}}{(1+c10A)^{1+\delta}}2^{-j} \\ &\leq (1+c10A)^{1+\delta}p_j(d(x,y)),\end{aligned}$$

pues p_j es función decreciente, y además $d(x,y) < c\,10A2^j$ por hipótesis.

Ahora supongamos que $d(x,y) \geq c10A2^j$.

Entonces $\rho(x,\cdot,2^j)$ y $\psi(\cdot,y,2^j)$ tienen soportes disjuntos. En efecto, si z fuese un punto en el soporte de ambas, en particular, tendríamos $z \in (B_{c2^j}(x)) \cap (B_{c2^j}(y))$, con lo cual

$$d(x,y) \leq A(d(z,x)+d(z,y)) \leq c2A2^j < c10A\,2^j,$$

contra lo supuesto.

Luego, para un vector genérico $v \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}\Big(\kappa_j(x,y),v\Big)_{\mathbb{H}} &= \Big\langle T\psi(\cdot,y,2^j),\rho(x,\cdot,2^j)\,v\Big\rangle \\ &= \iint \Big(K(\xi,\zeta)\psi(\zeta,y,2^j),\rho(x,\xi,2^j)\,v\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(\zeta)d\mu(\xi) \\ &\quad - \iint \underbrace{\Big(K(\xi,y),\rho(x,\xi,2^j)\,v\Big)_{\mathbb{H}}}_{\text{constante respecto de }\zeta} \psi(\zeta,y,2^j)d\mu(\zeta)d\mu(\xi)\end{aligned}$$

La última integral doble es 0 pues $\int \psi(\cdot,y,2^j)d\mu = 0$ (usar definición de ψ y (2.6.1.h)).

Deseamos probar que $d(x,y) \approx d(\xi,y)$ en los puntos (ξ,ζ) del soporte de la función que estamos considerando bajo el signo de integral doble.

Observando los soportes de $\rho(x,\cdot,2^j)$ y $\psi(\cdot,y,2^j)$, vale que $d(x,\xi) \leq c2^j$, $d(\zeta,y) \leq c2^j$ (ambos son menores que $d(x,y)/10A$). Además $d(\xi,y) \leq A(d(\xi,x)+d(x,y)) \leq 3cAd(x,y)$.

Por otra parte $d(\xi,y) > c7d(\xi,x)$, porque si no, $d(x,y) \leq A(d(x,\xi)+d(\xi,y)) \leq c(1+7)Ad(\xi,x) < c10A2^j$, contra lo supuesto.

Ahora tenemos $d(x,y) \leq A(d(x,\xi)+d(\xi,y)) < A(\frac{1}{7c}+1)d(\xi,y)$.

Por lo tanto $d(x,y) \approx d(\xi,y)$, como queríamos.

Esto junto a (K2) nos da ahora que:

$$\left|\Big(\kappa_j(x,y),v\Big)_{\mathbb{H}}\right| \leq \iint |K(\xi,\zeta)-K(\xi,y)|_{\mathbb{H}} \left|\rho(x,\xi,2^j)\right| |v|_{\mathbb{H}} \left|\psi(\zeta,y,2^j)\right| d\mu(\xi)d\mu(\zeta)$$

(por desigualdad de Cauchy-Schwartz en $\mathbb{H}$)

(Usamos (2.6.1.b):)

$$\begin{aligned}&\leq C_K\,|v|_{\mathbb{H}} \iint_{\mathrm{sop}(\rho(x,\cdot,2^j))\times\mathrm{sop}(\psi(\cdot,y,2^j))} \frac{d(\zeta,y)^\delta}{d(\xi,y)^{1+\delta}} c2^{-j}c(2^{-j}+2^{-j+1})d\mu(\xi)d\mu(\zeta) \\ &\leq C_K 3c^2 2^{-2j}\,|v|_{\mathbb{H}} \iint_{\mathrm{sop}(\rho(x,\cdot,2^j))\times\mathrm{sop}(\psi(\cdot,y,2^j))} \frac{2^{j\delta}}{(\frac{1}{7c}+1)A\,d(x,y)^{1+\delta}} d\mu(\xi)d\mu(\zeta)\end{aligned}$$

(Aplicamos (2.4.1.6):)

$$\begin{aligned}&\leq C_K\tilde{c}\frac{2^{j\delta}}{d(x,y)^{1+\delta}}\,|v|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C_K\tilde{c}\,p_j(d(x,y))\,|v|_{\mathbb{H}}\end{aligned}$$

donde $\tilde{c}$ denota una constante geométrica (depende sólo de las constantes del espacio X). □

3.5.2. Proposición. Para cada entero j, el núcleo $\kappa_j(x,y)$ es integrable en cada una de las variables x,y.

Demostración. Por la proposición 3.5.1, basta probar que $p_j(d(x,y))$ es integrable en cada una de las variables x,y.

$$
\begin{aligned}
\int p_j(d(x,y))d\mu(y) &= 2^{-j}\int \frac{1}{(1+2^{-j}d(x,y))^{1+\delta}}d\mu(y)\\
&\le 2^{-j}\left(\int_{d(x,y)<2^j} 1d\mu(y) + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^n2^j\le d(x,y)<2^{n+1}2^j} 2^{-(1+\delta)(n+j)}d\mu(y)\right)\\
&\le 2^{-j}\left(\mu(B_{2^j}(x)) + \sum_{n=0}^{\infty}\mu(B_{2^{n+1+j}})2^{-(1+\delta)(n+j)}\right)\\
&\le C + C2^{-(1+\delta)j} < \infty.
\end{aligned}
$$

La integración respecto a la variable x se hace de igual modo. □

3.5.3. Definición. Para cada $x, u, y \in X$ y cada $t > 0$, escribimos

$$\sigma_x(u,y,t) = \rho(x,y,t) - \rho(u,y,t).$$

3.5.4. Proposición. Supongamos que x, w, y, u son puntos de X, tales que $d(x,w) < 2^j$, $d(x,u) < bd(x,w)$, $d(w,u) < bd(x,w)$, donde b es una constante mayor que 1, independiente de x, w, u y de j.

Entonces, para todo vector constante $v \in \mathbb{H}$:

$$\left|\left\langle T\psi(\cdot,y,2^j), \sigma_x(u,\cdot,2^j)\, v\right\rangle\right| \le Cp_j(d(u,y))2^{-j\delta}d(x,u)^\delta\, |v|_{\mathbb{H}}\,.$$

La constante C es igual a $C_T\tilde{c}$, donde C_T depende sólo de T, y $\tilde{c}$ es una constante geométrica, que no depende del operador T ni de j.

Demostración. Primero supongamos que $d(u,y) \le 4bA^2 2^j$.

Luego, por la Propiedad de Acotación Débil, junto a (2.6.1.d) y (2.6.1.i):

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle T\psi(\cdot,y,2^j), (\sigma_x(u,\cdot,2^j))\frac{v}{|v|_{\mathbb{H}}}\right\rangle\right| |v|_{\mathbb{H}} &\le C_T(Ab2^j)^{1+2\delta}c^2(2^j)^{-2-3\delta)}d(x,u)^\delta\, |v|_{\mathbb{H}}\\
&\le C_T\,\tilde{c}\,2^{-j}2^{-j\delta}d(x,u)^\delta\, |v|_{\mathbb{H}}\\
&\le C_T\,\tilde{c}\,p_j(d(u,y))2^{-j\delta}d(x,u)^\delta\, |v|_{\mathbb{H}}
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{c}$ no depende de j, sino sólo de las constantes geométricas del espacio, y hemos usado que $2^{-j} \le \tilde{c}\,p_j(d(u,y))$, en forma similar a la Proposición anterior.

Ahora supongamos que $d(u,y) \ge 4bA^2 2^j$.

Entonces $\sigma_x(u,\cdot,2^j)$ y $\psi(\cdot,y,2^j)$ tienen soportes disjuntos. En efecto, si z fuese un punto en el soporte de ambas, en particular, tendríamos $z \in (B_{2^j}(x) \cup B_{2^j}(u)) \cap (B_{2^j}(y))$, con lo cual, si $d(z,u) < 2^j$, entonces:

$$d(u,y) \le A(d(u,z) + d(z,y)) \le 2A2^j < 4bA^2 2^j,$$

y si $d(z,x) < 2^j$, entonces:

$$d(u,y) \le A(d(u,z) + d(z,y)) \le A(A(d(z,x) + d(x,u)) + d(z,y)) \le A(A(1+b)+1)2^j < 4bA^2 2^j,$$

pues $d(x,u) < bd(x,w) < b2^j$, y además $1 \le b$ y $1 \le A$.

Pero esto contradice nuestra hipótesis acerca de $d(u,y)$.

Luego, para un vector genérico $v \in \mathbb{H}$:

$$
\begin{aligned}
\left\langle T\psi(\cdot,y,2^j), \sigma_x(u,\cdot,2^j)v\right\rangle &= \iint \left(K(\xi,\zeta)\psi(\zeta,y,2^j), \sigma_x(u,\xi,2^j)v\right)_{\mathbb{H}} d\mu(\zeta)d\mu(\xi)\\
&\quad - \iint \underbrace{\left(K(\xi,y), \sigma_x(u,\xi,2^j)v\right)_{\mathbb{H}}}_{\text{constante respecto de } \zeta} \psi(\zeta,y,2^j)d\mu(\zeta)d\mu(\xi)
\end{aligned}
$$

La última integral doble tiene integral 0, porque $\int \psi(\cdot, y, 2^j) = 0$.

Observando los soportes de $\sigma_x(u, \cdot, 2^j)$ y $\psi(\cdot, y, 2^j)$, vale que $d(u,\xi) \leq A(1+b)2^j$, $d(\zeta, y) \leq 2^j$ (ambos son menores que $d(u,y)/4A^2$), además $d(\xi, y) \leq A(d(\xi,u) + d(u,y)) \leq (1/2A + A)d(u,y) < (1+A)d(u,y)$.

Por otra parte $d(\xi, y) > 2d(\xi, u)$, porque si no, $d(u,y) \leq A(d(u,\xi) + d(\xi,y)) < (1+2)Ad(\xi,u) < 6bA^2 2^j$, contra lo supuesto.

Ahora tenemos $d(u,y) \leq A(d(u,\xi) + d(\xi,y)) < A(\frac{1}{2}+1)d(\xi,y) = \frac{3}{2}Ad(\xi,y)$.

De manera que $d(u,y) \approx d(\xi,y)$ en los puntos (ξ,ζ) del soporte de la función que estamos considerando bajo el signo de integral doble.

Esto junto a (K2), y ya que $d(y,\zeta) < d(\xi,y)/2A$:

$$\left| \iint \left((K(\xi,\zeta) - K(\xi,y))\psi(\zeta,y,2^j), \sigma_x(u,\xi,2^j)v \right)_{\mathbb{H}} d\mu(\xi) d\mu(\zeta) \right|$$

$$\leq \iint |K(\xi,\zeta) - K(\xi,y)|_{\mathbb{H}} \left|\sigma_x(u,\xi,2^j)\right| |v|_{\mathbb{H}} \left|\psi(\zeta,y,2^j)\right| d\mu(\xi)d\mu(\zeta)$$

(Usamos (K2), (2.6.1.b) y (2.6.1.d):)

$$\leq C_K |v|_{\mathbb{H}} \iint_{\mathrm{sop}(\sigma_x(u,\cdot,2^j))\times \mathrm{sop}(\psi(\cdot,y,2^j))} \frac{d(\zeta,y)^\delta}{d(\xi,y)^{1+\delta}} c 2^{-j(1+\delta)} d(x,u)^\delta\, c(2^{-j} + 2^{-j+1}) d\mu(\xi)d\mu(\zeta)$$

$$\leq C_K \tilde{c} 2^{-2j} 2^{-j\delta} d(x,u)^\delta |v|_{\mathbb{H}} \iint_{\mathrm{sop}(\sigma_x(u,\cdot,2^j))\times \mathrm{sop}(\psi(\cdot,y,2^j))} \frac{2^{j\delta}}{(\frac{2}{3A}\, d(u,y))^{1+\delta}} d\mu(\xi)d\mu(\zeta)$$

(Aplicamos (2.4.1.6):)

$$\leq C_K \tilde{c} \frac{2^{j\delta}}{d(u,y)^{1+\delta}}\, 2^{-j\delta} d(x,u)^\delta |v|_{\mathbb{H}} = C_K \tilde{c} \frac{1}{d(u,y)^{1+\delta}}\, d(x,u)^\delta |v|_{\mathbb{H}}$$
$$\leq C_K \tilde{c} p_j(d(u,y))\, 2^{-j\delta} d(x,u)^\delta |v|_{\mathbb{H}}$$

donde $\tilde{c}$ denota una constante geométrica (depende sólo de las constantes del espacio X). □

3.5.5. Proposición. Sean $x, w, y \in X$. Entonces, para todo vector $v \in \mathbb{H}$:

$$\left| \left(\kappa_j(x,y) - \kappa_j(w,y), v \right)_{\mathbb{H}} \right| \leq C \min(1, 2^{-j\delta} d(x,w)^\delta)(p_j(d(x,y)) + p_j(d(w,y))) |v|_{\mathbb{H}}.$$

La constante C vale $\max(C_K, C_T)\tilde{c}$, donde $\tilde{c}$ es una constante geométrica que no depende del operador T, ni de j.

Demostración. Si $d(w,x) \geq 2^j$, se usa la Proposición 3.5.1.

Podemos entonces asumir que $d(w,x) \leq 2^j$.

Para cada punto $u \in X$, tenemos que:

$$\rho(x,\cdot,2^j) - \rho(w,\cdot,2^j) = \sigma_x(u,\cdot,2^j) - \sigma_w(u,\cdot,2^j).$$

Así que podemos elegir el punto u de manera que sea apropiado para nuestros propósitos.

Vamos a elegir $u = x$.

Estimamos:

$$\left| \left(\kappa_j(x,y) - \kappa_j(w,y), v \right)_{\mathbb{H}} \right| = \left| \left\langle T\psi(\cdot,y,2^j), (\sigma_x(u,\cdot,2^j) - \sigma_w(u,\cdot,2^j))v \right\rangle \right|$$

(Aplicando Proposición 3.5.4, y usando que $u = x$:)

$$\leq C_T \tilde{c}\, p_j(d(x,y))\, 2^{-j\delta} |v|_{\mathbb{H}}\, d(x,w)^\delta$$
$$\leq C_T \tilde{c}\, (p_j(d(x,y)) + p_j(d(w,y)))\, 2^{-j\delta} d(x,w)^\delta |v|_{\mathbb{H}}.$$

La constante $\tilde{c}$ no depende del operador T ni de j. □

3.6. Acotación L^2 de los operadores involucrados en el paraproducto.

3.6.1. Proposición. Dado un entero j fijo, el operador $\mathcal{T}_j = \tilde{S}_j T \Delta_j$, se extiende a un operador lineal acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$.

Además $\mathcal{T}_j$ tiene una representación integral de la forma:

$$\mathcal{T}_j f = \int \kappa_j(\cdot, y) f(y) d\mu(y), \qquad f \in L^2_\mu(X).$$

Demostración. Sean $f \in \Lambda_0^\beta(X)$, $g \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$. Calculamos:

$$\left|\left\langle \mathcal{T}_j f, g \right\rangle\right| = \left| \iint \Big(\kappa_j(x,y) f(y), g(x)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y) d\mu(x) \right|$$

(Cauchy-Schwartz)

$$\leq \left(\int |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int \left[\int \left| \Big(\kappa_j(x,y), g(x)\Big)_{\mathbb{H}} \right| d\mu(x) \right]^2 d\mu(y) \right)^{1/2}$$

(por Proposición 3.5.1:)

$$\leq C \|f\|_{L^2(X)} \left(\int \left(\int p_j(d(x,y)) \, |g(x)|_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) \right)^2 d\mu(y) \right)^{1/2}$$

$$\leq C \|f\|_{L^2(X)} \left(\int \left(\int p_j(d(x,y)) \, |g(x)|^2_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}\cdot 2} \left(\int p_j(d(x,y)) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}\cdot 2} d\mu(y) \right)^{1/2}$$

Estimamos:

$$\begin{aligned}
\int p_j(d(x,y)) d\mu(x) &= \sum_{N \in \mathbb{Z}} \int_{B_{2^{N+1}}(y) \setminus B_{2^N}(y)} \frac{2^{-j}}{(1 + 2^{-j} d(x,y))^{1+\delta}} d\mu(y) \\
&= \sum_{N \in \mathbb{Z}} \mu(B_{2^{N+1}}(y) \setminus B_{2^N}(y)) \frac{2^{-j}}{(1 + 2^{-j} 2^N)^{1+\delta}}
\end{aligned}$$

(Por la duplicación de la medida:)

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{N \in \mathbb{Z}} (A-1) \mu(B_{2^N}(y)) \frac{2^{-j}}{(1 + 2^{-j} 2^N)^{1+\delta}} \\
&\leq (A-1) A \sum_{N \in \mathbb{Z}} 2^N \frac{2^{-j}}{(1 + 2^{-j} 2^N)^{1+\delta}}
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\sum_{N \geq 0} 2^N \frac{2^{-j}}{(1 + 2^{-j} 2^N)^{1+\delta}} \leq \sum_{N \geq 0} 2^N \frac{2^{-j}}{(2^{-j} 2^N)^{1+\delta}} \leq 2^{j\delta} \frac{1}{1 - 2^{-\delta}}$$

También:

$$\sum_{N < 0} 2^N \frac{2^{-j}}{(1 + 2^{-j} 2^N)^{1+\delta}} \leq 2^{-j}$$

Por lo tanto:

$$(*) \qquad \int p_j(d(x,y)) d\mu(x) \leq \tilde{c}(2^{j\delta} + 2^j),$$

donde $\tilde{c}$ es una constante geométrica (no depende de y ni de j).

Luego:

$$(**)\qquad \left|\left\langle \mathcal{T}_j f, g\right\rangle\right| \leq C(\tilde{c}(2^{j\delta}+2^{-j}))^{1/2}\|f\|_{L^2_\mu(X)} \left(\int\left(\int p_j(d(x,y))\,|g(x)|^2_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)\right)d\mu(y)\right)^{1/2}$$

(Teorema de Fubini-Tonelli:)

$$\leq C(\tilde{c}(2^{j\delta}+2^{-j}))^{1/2}\|f\|_{L^2_\mu(X)} \left(\int |g(x)|^2_{\mathbb{H}} \underbrace{\int p_j(d(x,y))d\mu(y)}_{\leq \tilde{c}(2^{j\delta}+2^{-j})} d\mu(x)\right)^{1/2}$$
$$\leq C\tilde{c}(2^{j\delta}+2^{-j})\|f\|_{L^2_\mu(X)}\|g\|_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})}.$$

Como $\Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H})$ es un subconjunto denso de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, el funcional lineal acotado $\mathcal{T}_j f$ puede extenderse de manera que

$$\left|\left\langle \mathcal{T}_j f, g\right\rangle\right| \leq C\tilde{c}(2^{j\delta}+2^{-j})\|f\|_{L^2_\mu(X)}\|g\|_{L^2(X,\mathbb{H})},$$

para cualquier función $g \in L^2_\mu(X,\mathbb{H})$.

Por el Teorema de Representación de Riesz, $\mathcal{T}_j f$ se identifica con una función del espacio $L^2_\mu(X,H)$. Además se tiene que:

$$\|\mathcal{T}_j f\|_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})} = \sup_{\|g\|_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})=1}} \left|\left(\mathcal{T}_j f, g\right)\right| \leq C(2^{j\delta}+2^{-j})\|f\|_{L^2_\mu(x)}.$$

Así que $\mathcal{T}_j$ es acotado en norma de operador, entre los espacios $L^2_\mu(X)$ y $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, cuando se lo considera restringido al subconjunto denso $\Lambda_0^\beta(X) \subset L^2_\mu(X)$.

Por densidad, $\mathcal{T}_j$ se puede extender a un operador lineal acotado del espacio de funciones de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$.

Veamos que $\mathcal{T}_j$ tiene una representación integral. En la Proposición 3.5.2 se vio que $\kappa_j(x,y)$ es un núcleo integrable (en cada una de las variables). En consecuencia tenemos que:

$$\left(\mathcal{T}_j f, g\right)_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})} = \left\langle \mathcal{T}_j f, g\right\rangle = \iint \left(\kappa_j(x,y)f(y), g(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(y)d\mu(x)$$

(Aplicando el Teorema de Hille 2.2.1:)

$$= \int\left(\int \kappa_j(x,y)f(y)d\mu(y), g(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)$$
$$= \left(\int \kappa_j(\cdot,y)f(y)d\mu(y), g\right)_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})}.$$

Por el Teorema de Representación de Riesz, debemos tener que:

$$\mathcal{T}_j f(x) = \int \kappa_j(x,y)f(y)\mu(y).$$

$\square$

3.6.2. Proposición. Dado un entero k fijo, el operador adjunto $\mathcal{T}_k^*$ de $\mathcal{T}_k = \tilde{S}_k T \Delta_j$, se extiende a un operador lineal acotado de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X)$.

Además $\mathcal{T}_k^*$ tiene una representación integral de la forma:

$$\mathcal{T}_k^* g = \int \left(\kappa_k(x,\cdot), g(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x).$$

Demostración. La prueba es parecida a la de la proposición anterior. Por ejemplo, se establece que:

$$\langle \mathcal{T}_k^* g, f \rangle = \langle \mathcal{T}_k f, g \rangle = \int \left(\int \big(\kappa_k(x,y), g(x)\big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) \right) f(y) d\mu(y).$$

Esta última igualdad es cierta por la Proposición 3.5.2, y el hecho de que f y g están soportadas en una bola, permiten probar que el integrando es absolutamente integrable, y en consecuencia se puede aplicar la Regla de Fubini.

Razonando como antes, se demuestra que $\mathcal{T}_k^* g$ se extiende a un funcional lineal acotado de $L^2_\mu(X)$, luego se identifica con una función que pertenece a $L^2_\mu(X)$, también se prueba que $\mathcal{T}_j^*$ se extiende a un operador lineal acotado de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X)$, y además $T^* g$ tiene la siguiente representación integral:

$$\mathcal{T}_k^* g(y) = \int \big(\kappa_k(x,y), g(x)\big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x).$$

□

3.6.3. Hemos logrado expresar los operadores $\mathcal{T}_j$ de una manera más sencilla, a saber, exhibiendo su comportamiento respecto funciones de $L^2_\mu(X)$, sin hacer alusión al espacio de distribuciones $(\Lambda_0^\beta(X,\mathbb{H}))'$. Esta manera de proceder permite realizar de modo más práctico las estimaciones de los operadores compuestos $\mathcal{T}_j \mathcal{T}_k^*$ y $\mathcal{T}_k^* \mathcal{T}_j$, por ejemplo.

3.6.4. Observación. Si bien hemos probado la acotación $(L^2_\mu(X), L^2_\mu(X,\mathbb{H}))$ de $\mathcal{T}_j$, la cota obtenida no es idónea para la aplicación del Lema de Cotlar, y es por eso que se debe seguir trabajando un poco más.

3.7. Los núcleos de los operadores del Paraproducto tienen integral nula.

3.7.1. Proposición. Para cada $y \in X$:

$$\int \kappa_j(x,y) d\mu(x) = 0_{\mathbb{H}}.$$

Demostración. En lo que sigue, fijaremos un punto o en el espacio X como "referencia".

También fijaremos un vector $w \in \mathbb{H}$, para expresar la acción de cada vector $\kappa_j(x,y)$ como un funcional lineal continuo sobre $\mathbb{H}$, y supondremos sin pérdida de generalidad que $|w|_{\mathbb{H}} = 1$.

Sea y un punto fijo de X.

Aplicando el Teorema 2.2.1, para un radio R suficientemente grande:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_R(o)} \kappa_j(x,y) d\mu(x), w \right)_{\mathbb{H}} &= \int_{B_R(o)} \Big(\kappa_j(x,y), w\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&= \int_{B_R(o)} \Big\langle T\psi(\cdot, y, 2^j), \rho(x, \cdot, 2^j) w \Big\rangle \, d\mu(x) \\
&= \left\langle T\psi(\cdot, y, 2^j), \int_{B_R(o)} \rho(x, \cdot, 2^j) w \, d\mu(x) \right\rangle \\
&= \Big\langle T\psi(\cdot, y, 2^j), h_R w \Big\rangle
\end{aligned}$$

donde

$$h_R(u) = \int_{B_R(o)} \rho(x, u, 2^j) d\mu(x).$$

Por otro lado, por la Proposición 3.5.2, se tiene que $\int |\kappa_j(x,y)|_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) < \infty$. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$, existe un radio $R_0 = R_0(\epsilon)$ tal que

$$(*_1) \qquad \Big| \int_{d(o,x)>R} \kappa_j(x,y) d\mu(x) \Big|_{\mathbb{H}} \le \int_{d(o,x)>R} |\kappa_j(x,y)|_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) < \epsilon,$$

para todo $R \geq R_0$.

Supongamos que $d(o,u) < \frac{1}{k}(R - ck2^j)$. Si $x \in \mathrm{sop}(\rho(\cdot,u,2^j))$ entonces $d(u,x) < c2^j$. Por lo tanto:

$$d(o,x) \leq k(d(o,u) + d(u,x)) < k(\frac{1}{k}(R - ck2^j) + c2^j) = R.$$

O sea que $\mathrm{sop}(\rho(\cdot,u,2^j)) \subset B_R(o)$. Por lo tanto, usando (2.6.1.f), obtenemos:

$$h_R(u) - 1 = \int \rho(x,u,2^j) d\mu(x) - 1 = 0.$$

De manera que $h_R - 1$ es una función con soporte en $X \setminus B_{\frac{1}{k}(R-ck2^j)}(o)$.

Por otro lado $\langle \psi(\cdot,y,2^j), T^*(1w) \rangle = 0$ porque $\psi(\cdot,y,2^j) \in \{\Lambda_0^\beta(X)\}_0$ tiene integral 0, y hemos supuesto $T^*(1w) = 0$.

De manera que

$$\langle T\psi(\cdot,y,2^j), (h_R)w \rangle = \langle T\psi(\cdot,y,2^j), (h_R)w \rangle - \langle \psi(\cdot,y,2^j), T^*(1w) \rangle = \langle T\psi(\cdot,y,2^j), (h_R - 1)w \rangle .$$

Si R es suficientemente grande, entonces $h_R - 1$ y $\psi(\cdot,y,2^j)$ tienen soportes disjuntos, y puede aplicarse la igualdad (3.1.2.a) junto con (3.2.1.a), para escribir:

$$\left| \left\langle T\psi(\cdot,y,2^j), (h_R - 1)w \right\rangle_{\mathbb{H}} \right| = \left| \int_{d(z,y)\leq c2^j} \int_{X\setminus B_{(R-ck2^j)/k}(o)} \Big((K(u,z) - K(u,y))\psi(z,y,2^j), (h_R(u) - 1)w \Big)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(z) \right|$$

(Por (K2) y (2.6.1.b):)

$$\begin{aligned}
&\leq C2^{-j} \int_{d(z,y)\leq c2^j} \int_{X\setminus B_{(R-ck2^j)/k}(o)} \frac{d(z,y)^\delta}{d(u,y)^{1+\delta}} |w|_{\mathbb{H}} \, d\mu(z) d\mu(u) \\
&\leq C2^{-j} 2^{j\delta} \mu(B_{c2^j}(y)) \int_{X\setminus B_{R/2k}(o)} \frac{1}{d(u,y)^{1+\delta}} |w|_{\mathbb{H}} \, d\mu(u) \\
&\leq C2^{j\delta} \int_{X\setminus B_{R/2k}(o)} \frac{1}{d(u,y)^{1+\delta}} |w|_{\mathbb{H}} \, d\mu(u)
\end{aligned}$$

Analicemos qué ocurre con los puntos u en el dominio de integración.

Si $d(u,y) \geq d(o,u)$, entonces, claro:

$$\frac{1}{d(u,y)} \leq \frac{1}{d(u,o)}.$$

Denotemos $a = d(o,y)$.

Si $d(u,y) < d(o,u)$, entonces $d(u,y) \geq R/2k^2 - a$. Porque en caso contrario:

$$d(o,u) \leq k(d(o,y) + d(y,u)) < k(a + \frac{R}{2k^2} - a) = \frac{1}{2k} R,$$

en contra del hecho de que $d(o,u) \geq R/2k$ en el dominio de integración.

Por lo tanto $u \in X \setminus B_{R/2k^2-a}(y) \subset X \setminus B_{CR}(y)$, para alguna constante C, si $R > 4k^2 a$. Por lo tanto, podemos estimar:

$$\begin{aligned}
\int_{X\setminus B_{R/2k}(o)} \frac{1}{d(u,y)^{1+\delta}} d\mu(u) &\leq \int_{X\setminus B_{R/2k}(o), d(y,u)\geq d(o,u)} \frac{1}{d(u,y)^{1+\delta}} d\mu(u) + \int_{X\setminus B_{CR}(y), d(y,u)<d(o,u)} \frac{1}{d(u,y)^{1+\delta}} d\mu(u) \\
&\leq \int_{X\setminus B_{R/2k}(o)} \frac{1}{d(o,u)^{1+\delta}} d\mu(u) + \int_{X\setminus B_{CR}(y)} \frac{1}{d(u,y)^{1+\delta}} d\mu(u) \\
&\leq \tilde{C} R^{-\delta}.
\end{aligned}$$

Finalmente resulta:

$$\left| \left\langle T\psi(\cdot,y,2^j), (h_R - 1)w \right\rangle \right| \leq C_K \, C \, 2^{j\delta} \, |w|_{\mathbb{H}} \, R^{-\delta}.$$

Esto último tiende a 0 cuando $R \to \infty$, luego dado $\epsilon > 0$, existe $R_1 = R_1(\epsilon)$ tal que

$$(*_2) \qquad \left| \int_{d(x,o)<R} \left(\kappa_j(x,y), w\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \right| < \epsilon, \qquad \text{para todo } R \geq R_1.$$

En consecuencia, por $(*_1)$ y $(*_2)$, para todo $w \in \mathbb{H}$ tenemos:

$$\int \left(\kappa_j(x,y), w\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) = 0.$$

Como $\kappa_j(x,y)$ es integrable, aplicamos el Teorema 2.2.1, y obtenemos:

$$\int \kappa_j(x,y) d\mu(x) = 0_{\mathbb{H}}.$$

Lo cual vale para cada $y \in X$ prefijado. □

3.7.2. Proposición. Para todo $x \in X$

$$\int \kappa_j(x,y) d\mu(y) = 0.$$

Demostración. También fijamos un vector $w \in \mathbb{H}$, con $|w|_{\mathbb{H}} = 1$, y un punto $x \in X$.

Como $\kappa_j(x,y)$ es integrable, por ejemplo en la variable y, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \left(\int \kappa_j(x,y) d\mu(y), w \right)_{\mathbb{H}} &= \int \Big(\kappa_j(x,y), w\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y) \\ &= \int \Big\langle T\psi(\cdot, y, 2^j), \rho(x, \cdot, 2^j) w \Big\rangle d\mu(y) \end{aligned}$$

(Como T es continuo, también $\ell(F) = \langle TF, \rho(x, \cdot, 2^j)w \rangle$ es continuo, y podemos aplicar el Teorema 2.2.1:)

$$\begin{aligned} &= \left\langle T\left(\int \psi(\cdot, y, 2^j) d\mu(y) \right), \rho(x, \cdot, 2^j) w \right\rangle \\ &= \Big\langle T0, \rho(x, \cdot, 2^j) w \Big\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego:

$$\left(\int \kappa_j(x,y) d\mu(y), w \right)_{\mathbb{H}} = 0,$$

para cada vector fijo $w \in \mathbb{H}$, y en consecuencia:

$$\int \kappa_j(x,y) d\mu(y) = 0_{\mathbb{H}}.$$

□

3.8. Cotas para la composición de los operadores que aparecen en el paraproducto.

3.8.1. Denotamos $T_j = \tilde{S}_j T \Delta_j + \tilde{\Delta}_j T S_j + \tilde{\Delta}_j T \Delta_j$. En las secciones precedentes hemos probado la acotación $(L^2_\mu(X), L^2_\mu(X, \mathbb{H}))$ del término $\tilde{S}_j T \Delta_j$, y hemos hallado una representación integral para él. Un trabajo similar es válido para el operador $\tilde{\Delta}_j T S_j$. También se pueden esperar resultados análogos para $\tilde{S}_{j-1} T \Delta j$, pues el hecho de cambiar el índice j por $j-1$ no introduce grandes complicaciones en lo hecho hasta aquí.

Finalmente escribimos $\tilde{\Delta}_j T \Delta_j = \tilde{S}_j T \Delta_j - \tilde{S}_{j-1} T \Delta_j$, y aplicamos lo que ya sabemos a cada término.

En conclusión: T_j se extiende a un operador lineal acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, y existe un núcleo integrable $K_j(x,y)$ tal que, para $f \in \Lambda^\beta_0(X)$ se tiene la representación integral:

$$T_j f(x) = \int K_j(x,y) f(y) d\mu(y).$$

De modo análogo se puede decir que T_j^* se extiende a un operador lineal acotado de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X)$, y para $g \in \Lambda^\beta_0(X,\mathbb{H})$ se tiene la representación integral:

$$T_j^* g(y) = \int \big(K_j(x,y), g(x)\big)_{\mathbb{H}} d\mu(x),$$

donde K_j es el mismo núcleo de T_j.

Se satisface también que estos núcleos K_j verifican las mismas propiedades que los núcleos κ_j, probadas en las secciones anteriores.

3.8.2. Proposición. Dados dos enteros j, k, el operador compuesto $T_j T_k^*$ es acotado sobre $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, y tiene una representación mediante integral doble:

$$T_j T_k^* g(x) = \iint K_j(x,y) \big(K_k(u,y), g(u)\big)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(y), \qquad g \in \Lambda^\beta_0(X,\mathbb{H}) \cap L^2(X,\mathbb{H}).$$

Demostración. Sea $g \in \Lambda^\beta_0(X,\mathbb{H}) \cap L^2_\mu(X,\mathbb{H})$. En virtud de lo dicho en el párrafo anterior, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
(T_j T_k^* g)(x) &= \int K_j(x,y) \int \Big(K_k(u,y), g(u)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(y) \\
&= \iint K_j(x,y) \Big(K_k(u,y), g(u)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Como T_k^* es acotado de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X)$, y T_j es acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, tenemos que $T_j T_k^*$ es un operador lineal acotado de $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$. $\square$

3.8.3. Sin embargo, no hemos podido estimar dicha norma adecuadamente. Necesitamos cotas más precisas. Previamente necesitamos las estimaciones de los siguientes lemas:

3.8.4. Lema. Para todo entero k y todo $y \in X$:

$$\int_X p_k(d(z,y)) d\mu(y) \leq C < \infty$$

donde C es una constante independiente de k y del punto y.

Demostración. Para cada $r > 0$, el anillo centrado en y entre los radiso r y $2r$ lo denotamos $A_r(y) = B_{2r}(y) \setminus B_r(y)$. Estimamos:

$$\begin{aligned}
\int_X p_k(d(z,y)) d\mu(y) &= \int_X \frac{2^{-k}}{\Big(1 + d(z,y)/2^k\Big)^{1+\delta}} d\mu(y) \\
&= 2^{k\delta} \int_X \frac{1}{(2^k + d(z,y))^{1+\delta}} d\mu(y) \\
&= 2^{k\delta} \sum_{N\in\mathbb{Z}} \int_{A_{2^N}(y)} \frac{1}{(2^k + d(z,y))^{1+\delta}} d\mu(y) \\
&\leq 2^{k\delta} \sum_{N\in\mathbb{Z}} \int_{A_{2^N}(y)} \frac{1}{(2^k + 2^N)^{1+\delta}} d\mu(y)
\end{aligned}$$

(Para cada N vale $d(z,y) \geq 2^N$ en el dominio de integración:)

$$\leq 2^{k\delta} \sum_{N\in\mathbb{Z}} \frac{\mu(A_{2^N}(y))}{(2^k + 2^N)^{1+\delta}} d\mu(y)$$

(Duplicación de la medida:)

$$\leq 2^{k\delta} \sum_{N\in\mathbb{Z}} (A-1)\mu(B_{2^N}(y))(2^k+2^N)^{1+\delta}$$

(Propiedad (2.4.1.6))

$$\leq 2^{k\delta} \sum_{N\in\mathbb{Z}} (A-1)A_2\, 2^N(2^k+2^N)^{1+\delta}.$$

Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{N<k} 2^N(2^k+2^N)^{1+\delta} &= \sum_{M=1}^{\infty} \frac{2^{-M}2^{-k\delta}}{(1+2^{-M})^{1+\delta}} \\ &\leq 2^{-k\delta}\sum_{M=1}^{\infty} 2^{-M} = 2^{-k\delta}.\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\sum_{N\geq k} 2^N(2^k+2^N)^{1+\delta} &= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{2^{M}2^{-k\delta}}{(1+2^{M})^{\delta}} \\ &\leq \sum_{M=0}^{\infty} \frac{2^{M}2^{-k\delta}}{(1+2^{M})^{\delta}} \\ &\leq 2^{-k\delta}\sum_{M=0}^{\infty} 2^{-M\delta} = (1-2^{-\delta})^{-1}2^{-k\delta}.\end{aligned}$$

Juntando todo resulta:

$$\int_X p_k(d(z,y))d\mu(y) \leq C2^{k\delta}2^{-k\delta} \leq C.$$

□

3.8.5. Lema. Para todo par de enteros j,k con $j\leq k$, y todo punto $x\in X$:

$$\int_X p_j(d(x,y))\,\text{mín}\left(1,\frac{d(x,y)^\delta}{2^{k\delta}}\right)d\mu(y) \leq C\,2^{-|j-k|\delta},$$

con C independiente de j,k y x.

Demostración. Si $A_R(x)$ denota la corona $B_{2R}(x)\setminus B_R(x)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int p_j(d(x,y))\,\text{mín}\left(1,\frac{d(x,y)^\delta}{2^{k\delta}}\right)d\mu(y) &= \int \frac{2^{-j}}{\left(1+d(x,y)/2^j\right)^{1+\delta}}\,\text{mín}\left(1,\frac{d(x,y)^\delta}{2^{k\delta}}\right)d\mu(y) \\ &\leq \sum_{N\in\mathbb{Z}}\int_{A_{2^N}(x)} \frac{2^{-j}}{(1+2^N/2^j)^{1+\delta}}\,\text{mín}\left(1,\frac{d(x,y)^\delta}{2^{k\delta}}\right)d\mu(y) \\ &\leq \sum_{N\in\mathbb{Z}}\int_{A_{2^N}(x)} \frac{2^{j\delta}}{(2^j+2^N)^{1+\delta}}\,\text{mín}\left(1,\frac{(2^{N+1})^\delta}{2^{k\delta}}\right)d\mu(y) \\ &= \sum_{N\in\mathbb{Z}} \mu(A_{2^N}(x))\frac{2^{j\delta}}{(2^j+2^N)^{1+\delta}}\,\text{mín}\left(1,\frac{(2^{N+1})^\delta}{2^{k\delta}}\right) \\ &\leq \sum_{N\in\mathbb{Z}} (A-1)\mu(B_{2^N}(x))\frac{2^{j\delta}}{(2^j+2^N)^{1+\delta}}\,\text{mín}\left(1,\frac{(2^{N+1})^\delta}{2^{k\delta}}\right) \\ &\leq \sum_{N\in\mathbb{Z}} (A-1)A\frac{2^{j\delta}2^N}{(2^j+2^N)^{1+\delta}}\,\text{mín}\left(1,\frac{(2^{N+1})^\delta}{2^{k\delta}}\right).\end{aligned}$$

Por un lado, cuando $N+1 \geq k$ es claro que

$$\text{mín}\left(1, \frac{(2^{N+1})^\delta}{2^{k\delta}}\right) = 1,$$

y además:

$$\begin{aligned}
\sum_{N\geq k} \frac{2^{j\delta}2^N}{(2^j+2^N)^{1+\delta}} &= 2^{j\delta}2^{-k\delta}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{2^M}{(2^{j-k}+2^M)^{1+\delta}} \\
&= 2^{-|j-k|\delta}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{2^M}{2^{j-k}+2^M}\frac{1}{(2^{j-k}+2^M)^\delta} \\
&\leq 2^{-|j-k|\delta}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{1}{(2^M)^\delta} \\
&\leq C2^{-|j-k|\delta}.
\end{aligned}$$

Por otro lado:, cuando $N+1<k$, es claro que $2^{(N+1)} \leq 2^k$, luego

$$\text{mín}\left(1, \frac{(2^{N+1})^\delta}{2^{k\delta}}\right) = \frac{(2^{N+1})^\delta}{2^{k\delta}},$$

y además:

$$\begin{aligned}
\sum_{N<k} \frac{2^{j\delta}2^N}{(2^j+2^N)^{1+\delta}}\frac{(2^N)^\delta}{2^{k\delta}} &= 2^\delta 2^{-|j-k|\delta}\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2^{j-k+M})^{1+\delta}} \\
&\leq 2^\delta 2^{-2|j-k|\delta}\sum_{M=1}^{\infty}2^{-(1+\delta)M} \\
&= C2^{-2|j-k|\delta}.
\end{aligned}$$

Ahora juntamos todo y obtenemos que:

$$\int p_j(d(x,y))\,\text{mín}\left(1, \frac{d(x,y)^\delta}{2^{k\delta}}\right)d\mu(y) \leq C\,(2^{-|j-k|\delta} + 2^{-2|j-k|\delta}).$$

Pero observemos además que, cuando ℓ es un número entero no negativo, tenemos que:

$$2^{-2\ell\delta} \leq 2^{-\ell\delta},$$

y esto prueba el lema. □

3.8.6. Consideramos ahora el operador (para funciones $\mathbb{H}$-valuadas en general) siguiente:

$$\Gamma_{jk}g(x) = \iint K_j(x,y)\left(K_k(u,y), g(u)\right)_{\mathbb{H}}\,d\mu(u)d\mu(y).$$

Siempre que la integral doble converja en casi todo punto $x \in X$, y lo haga a una función medible, tendremos que $\Gamma_{jk}g$ está bien definida.

Nuestro objetivo es probar que dicho operador es acotado sobre $L^\infty_\mu(X,\mathbb{H})$, y también sobre $L^1_\mu(X,\mathbb{H})$, con normas de operador del orden de $2^{-\delta|j-k|}$.

De esta manera, aplicando el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, podremos hallar que la norma de Γ_{jk} como operador sobre $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$ también es del orden de $2^{-|j-k|\delta}$.

Al extender por continuidad a los operadores T_j y T_k^*, resultará que el operador $T_jT_k^*$ coincide ahora con Γ_{jk}, y valdrán para él las cotas obtenidas.

3.8.7. Proposición. Dados dos enteros j,k, el operador Γ_{jk} es acotado sobre $L^2_\mu(X,\mathbb{H})$, y además

$$\|\Gamma_{jk}\|_{\mathcal{L}(L^2_\mu(X,\mathbb{H}))} \leq C2^{-|j-k|\delta}.$$

Demostración. Sea $g \in L^\infty_\mu(X, \mathbb{H})$. Entonces:

$$|\Gamma_{jk} g(x)|_{\mathbb{H}} = \left| \iint K_j(x,y) \Big(K_k(u,y), g(u) \Big)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(y) \right|$$

(Los núcleos tienen integral nula:)

$$\begin{aligned}
&= \left| \iint K_j(x,y) \Big(K_k(u,y) - K_k(u,x), g(u) \Big)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(y) \right| \\
&\leq \iint |K_j(x,y)|_{\mathbb{H}} \, |K_k(u,y) - K_k(u,x)|_{\mathbb{H}} \, |g(u)|_{\mathbb{H}} \, d\mu(u) d\mu(y) \\
&\leq C \iint p_j(d(x,y)) \, \text{mín} \left(1, \frac{d(x,y)^\delta}{2^{k\delta}} \right) (p_k(d(x,u)) + p_k(d(y,u))) \, |g(u)|_{\mathbb{H}} \, d\mu(u) d\mu(y) \\
&\leq \|g\|_{L^\infty_\mu(X,\mathbb{H})} C \iint p_j(d(x,y)) \, \text{mín} \left(1, \frac{d(x,y)^\delta}{2^{k\delta}} \right) (p_k(d(x,u)) + p_k(d(y,u))) d\mu(u) d\mu(y)
\end{aligned}$$

(Por Lemas 3.8.4 y 3.8.5:)

$$\leq C 2^{-|j-k|\delta/2} \|g\|_{L^\infty_\mu(X,\mathbb{H})}$$

donde la constante $C = \text{máx}(C_T, C_K)^2 \tilde{c}$, siendo C_T y C_K constantes que dependen del operador T, y $\tilde{c}$ una constante geométrica independiente de T.

Luego, no sólo $\Gamma_{jk} g \in L^\infty_\mu(X, \mathbb{H})$, sino que además Γ_{jk} es un operador lineal acotado sobre $L^\infty_\mu(X, \mathbb{H})$ con norma menor que $C_\infty 2^{-|j-k|\delta/2}$, con C_∞ independiente de los índices j, k y de la función g.

Sea $g \in L^1_\mu(X, \mathbb{H})$. Entonces, similar al caso previo:

$$\int |\Gamma_{jk} g(x)|_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) \leq \iiint p_j(d(x,y)) \, |g(u)|_{\mathbb{H}} \, \text{mín}(1, 2^{-k\delta} d(x,y)^\delta) (p_k(d(x,u)) + p_k(d(y,u))) d\mu(u) d\mu(y) d\mu(x)$$

(Desigualdad de Hölder)

$$\leq \|g\|_{L^1_\mu(X,\mathbb{H})} \left\| \iint p_j(d(x,y)) \, \text{mín}(1, 2^{-k\delta} d(x,y)^\delta) (p_k(d(x,\cdot)) + p_k(d(\cdot,\cdot))) d\mu(x) d\mu(y) \right\|_{L^\infty_\mu(X,\mathbb{H})}$$

(Por Lemas 3.8.4 y 3.8.5)

$$\leq C_1 2^{-|j-k|\delta/2} \|g\|_{L^1_\mu(X,\mathbb{H})}.$$

Luego Γ_{jk} es acotado sobre $L^1_\mu(X, \mathbb{H})$ con constante $C_1 2^{-|j-k|\delta/2}$, donde $C = \text{máx}(C_K, C_T)^2 \tilde{c}$, con C_K y C_T dependientes del operador T y $\tilde{c}$ una constante geométrica.

Por el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, Γ_{jk} es acotado sobre $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$, y por el mismo teorema, la cota satisface, para $g \in L^2_\mu(X, \mathbb{H})$:

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_{jk} g\|_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})} &\leq 2(C_1 C_\infty 2^{-|j-k|\delta/2} 2^{-|j-k|\delta/2})^{1/2} \|g\|_{L^2(X,\mathbb{H})} \\
&= 2(C_1 C_\infty)^{1/2} 2^{-|j-k|\delta/2} \|g\|_{L^2(X,\mathbb{H})}.
\end{aligned}$$

Notemos que la constante $2(C_1 C_\infty)^{1/2}$ es menor o igual que $\text{máx}(C_T, C_K)^2 \tilde{c}$, con C_T y C_K que dependen de T y $\tilde{c}$ constante geométrica. □

3.8.8. Teorema. El operador compuesto $T_j T_k^*$ es acotado en $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$, y su norma satisface:

$$\|T_j T_k^*\|_{\mathcal{L}(L^2_\mu(X,\mathbb{H}))} \leq C 2^{-|j-k|\delta/2}.$$

Además, se tiene la representación integral:

$$T_j T_k^* g(x) = \iint K_j(x,y) \left(K_k(u,y), g(u)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(y),$$

para cualquier función $g \in L^2_\mu(X, \mathbb{H})$.

(Antes sólo dábamos esta representación para funciones de Lipschitz).

Demostración. Prosiguiendo con los pasos de la demostración de la Proposición previa, se tiene que:

$$\|\Gamma_{jk}\|_{\mathcal{L}(L^2_\mu(X,\mathbb{H}))} \leq \text{máx}(C_T, C_K)^2 \tilde{c}\, 2^{-|j-k|\delta/2}.$$

Restringiendo Γ_{jk} al espacio de funciones $g \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, resulta que

$$T_j T_k^* g = \Gamma_{jk} g,$$

y para esas funciones g vale la acotación:

$$\|T_j T_k^* g\|_{\mathcal{L}(L^2_\mu(X,\mathbb{H}))} \leq C 2^{-|j-k|\delta} \|g\|_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})}.$$

El operador $T_j T_k^*$ puede extenderse ahora de manera única por densidad a un operador lineal acotado sobre $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$. Pero entonces, dicho operador extendido debe coincidir con Γ_{jk}.

□

3.8.9. Teorema. El operador compuesto $T_j^* T_k$ es acotado en $L^2_\mu(X)$, y su norma satisface:

$$\|T_j^* T_k\|_{\mathcal{L}(L^2_\mu(X))} \leq C 2^{-|j-k|\delta}.$$

Además, se tiene la representación integral:

$$T_j^* T_k f(y) = \iint \left(K_j(x,y), K_k(x,u) f(u)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(u) d\mu(x),$$

para cualquier función $f \in L^2_\mu(X)$.

Demostración. Se prueba a partir de lemas y proposiciones similares a los que permitieron demostrar la proposición anterior. □

3.8.10. Conclusión. Ahora quedó demostrada la **Proposición 3.3.2** y por lo tanto T se extiende a un operador acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$.

De modo análogo se puede probar que T^* es un operador acotado de $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$ en $L^2_\mu(X)$.

Capítulo 4

Una fórmula explícita para operadores de Calderón-Zygmund generalizados con medidas no doblantes en espacios euclídeos

4.1. Medidas No-Duplicantes en el Espacio Euclidiano

4.1.1. El Espacio Euclidiano como un Espacio de Tipo Homogéneo Normal
Consideremos en $\mathbb{R}^n$, el **espacio euclidiano de dimensión** n, la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por:

$$d(x,y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| \, | i = 1, \cdots, n\}^n, \qquad x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n).$$

Entonces d es una casi métrica que satisface:

$$d(x,y) \leq 2^n(d(x,z) + d(z,y)),$$

y $(\mathbb{R}^n, d, A)$ es un Espacio Casi Métrico, con constante $A = 2^n$.
Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$, la **d-bola de centro x y radio s** es el conjunto

$$B_s(x) = \{y | d(x,y) < s\}.$$

Al radio de una d-bola B lo denotaremos por $\varrho(B)$.
Denotamos con aB a la bola concéntrica con B cuyo radio es a veces el radio de B.
Las d-bolas son, en realidad, cubos con lados paralelos a los ejes coordenados.
Por esta razón podemos también hablar de **d-cubos**, para ser más consecuentes con la intuición.

4.1.2. Lema. Si $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ son tales que $d(x,y), d(x',y) < s$, entonces para $\alpha = 1/n$ se tiene:

$$|d(x,y) - d(x'y)| \leq n s^{1-\alpha} d(x,x')^\alpha.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sunpongamos que $d(x,y) \geq d(x',y)$.
Sea i_0 el índice tal que $|x_{i_0} - y_{i_0}| = \text{máx}_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i|$. Como $d(x,y) \geq d(x',y)$, tenemos que:

$$|x_{i_0} - y_{i_0}| - \max_{i=1,\cdots,n} |x'_i - y_i| \geq 0.$$

Observamos que:

$$0 \leq |x_{i_0} - y_{i_0}| - \max_{i=1,\cdots,n} |x'_i - y_i| \leq |x_{i_0} - y_{i_0}| - \left|x'_{i_0} - y_{i_0}\right|.$$

Si ξ es un valor intermedio entre $\text{máx}_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i|$ y $\text{máx}_{i=1,\cdots,n} |x'_i - y_i|$, entonces, como $d(x,y) \geq d(x',y)$, necesariamente debe ocurrir que:

$$d(x',y) \leq \xi^n \leq d(x,y).$$

Ahora estimamos:

$$|d(x,y) - d(x'y)| = \left| \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i|^n - \max_{i=1,\cdots,n} |x'_i - y_i|^n \right|$$

(Teorema del Valor Medio:)

$$
\begin{aligned}
&= \left| \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i| - \max_{i=1,\cdots,n} |x'_i - y_i| \right| n\xi^{n-1}, \qquad \text{donde } \xi \text{ es un valor entre } |x_i - y_i| \text{ y } |x'_i - y_i| \\
&\leq \left| |x_{i_0} - y_{i_0}| - |x'_{i_0} - y_{i_0}| \right| n\xi^{n-1} \\
&\leq \left| x_{i_0} - x'_{i_0} \right| n\xi^{n(1-1/n)} \\
&\leq \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - x'_i| \; n\xi^{n(1-1/n)} \\
&\leq d(x,x')^{1/n} \, n \left(d(x,y)^{1-1/n} \right) \\
&\leq d(x,x')^{1/n} n s^{1-1/n}.
\end{aligned}
$$

□

4.1.3. Respecto a esta casi-métrica, la medida de Lebesgue n-dimensional (normalizada), m_n, satisface para un d-cubo Q de radio s, la igualdad:

$$m_n(Q) = 2s.$$

Por lo tanto, denotando con $2Q$ al d-cubo de radio doble que Q, es claro que:

$$m_n(2Q) = 2m_n(Q).$$

O sea que la medida de Lebesgue es doblante, y así $(\mathbb{R}^n, d, m_n)$ es un espacio de tipo homogéneo. También es normal porque $m_n(Q) \approx s$ cuando Q es un d-cubo de radio s. Más aún, sabemos que la medida de Lebesgue es no atómica, y no acotada.

4.1.4. Vimos que (X, d, m_n) es un espacio de tipo homogéneo, que cumple las condiciones de la sección 2.4. Entonces reemplazamos todas las constante geométricas por una sola, que denotamos con A, igual que en la sección 2.4.

4.1.5. Medidas No-Doblantes. Decimos que una medida de Radón μ definida en $\mathbb{R}^n$, absolutamente continua respecto la medida de Lebesgue, es **no-doblante**, si existe un número ν, $0 < \nu \leq 1$, tal que para todo $s > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mu(B_s(x)) \leq c_0 s^\nu, \tag{4.1.5.1}$$

donde c_0 es una constante positiva independiente de s y de x.

Supondremos en el resto del capítulo que μ es una medida en $\mathbb{R}^n$ no-doblante, que satisface los siguientes requisitos:

(a) μ es no atómica, es decir, los conjuntos puntuales tienen μ-medida 0.

(b) μ es absolutamente continua respecto la medida de Lebesgue n-dimensional.

4.1.6. Espacios de Funciones de potencia integrable. Dado un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, y $1 \leq p < \infty$, denotaremos con $L^p_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ al espacio de funciones $\mathbb{H}$-valuadas cuya p-ésima potencia es μ-integrable en el sentido de Böchner, es decir, las funciones f tales que:

$$\int |f(x)|^p_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) < \infty.$$

Si $p = \infty$, denotamos con $L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ al espacio de funciones μ-medibles que son μ-esencialmente acotadas.

En el caso en que $\mathbb{H}$ coincida con el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, denotaremos estos espacios funcionales simplemente como $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ y $L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$

Si μ es la medida de Lebesgue, entonces se omitirá el subíndice μ.

Denotamos

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^p_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} &= \left(\int |f(x)|^p_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty, \\
\|f\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} &= \text{ess sup}_\mu \{ |f(x)|_{\mathbb{H}} \, | x \in \mathbb{R}^n \}.
\end{aligned}
$$

4.1.7. Funciones de Oscilación Media Acotada. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Se dice que g es una función del espacio de funciones de **Oscilación Media Acotada** con constante ρ, y exponente p, $1 \leq p < \infty$, denotado $BMO^p_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, si existe una constante C tal que para toda d-bola B se tiene:

$$\left(\int_B |g(x) - m_B g|^p_{\mathbb{H}}\, d\mu(x)\right)^{1/p} \leq C\mu(\rho B),$$

donde $m_B g = \frac{1}{\mu(B)} \int_B g\, d\mu$. Al ínfimo de las constantes C se lo denota con $\|g\|_{BMO^p_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})}$.

Si $p = 1$, denotamos $BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}) = BMO^1_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

Si $\mathbb{H}$ coincide con el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, el espacio de funciones se denotará simplemente como $BMO^p_\rho(\mathbb{R}^n)$, y como $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$ cuando $p = 1$.

En general, **usaremos un valor fijo de ρ, del cual suponemos que $\rho > 1$**.

4.1.8. Definición. Dada una d-bola (d-cubo) B, y dados dos números positivos a, b, $a > 1$, decimos que B es (a, b)**-doblante** si se satisface la relación:

$$\mu(aB) \leq b\mu(B).$$

4.1.9. Lema. Dado un punto $z \in \operatorname{sop}(\mu)$, y un número positivo σ. Si $b > a^\nu$, entonces existe una d-bola $\tilde{B}$ centrada en z que es (a, b)-doblante y tal que $\varrho(\tilde{B}) \geq \sigma$.

Demostración. Sea $B = B_\sigma(z)$, y suponer sin pérdida de generalidad que $\mu(B) > 0$.

Si B no es (a, b)-doblante, entonces

$$\mu(aB) > b\mu(B).$$

Si aB es (a, b)-doblante, entonces $\mu(a^2 B) \leq b\mu(aB)$, y el Lema se cumple.

Supongamos, pues que aB no es (a, b)-doblante. En tal caso, $\mu(a^2 B) > b\mu(aB) > b^2\mu(B)$.

Proseguimos de este modo buscando un entero positivo i tal que $\mu(a^{i+1}B) \leq b\mu(a^i B)$. Si un tal entero i existe, el Lema se cumple.

En caso contrario, tendríamos que para todo i, vale la desigualdad:

$$\mu(a^i B) > b^i \mu(B).$$

Pero por la condición impuesta sobre la medida μ, tenemos para $s \geq \sigma$:

$$(a^i s)^\nu c_0 \geq \mu(a^i B) > b^i \mu(B),$$

de donde se deduce que:

$$\frac{c_0 s^\nu}{\mu(B)} > \left(\frac{b}{a^\nu}\right)^i.$$

Tomamos límite para $i \to \infty$, y así obtenemos que el lado derecho tiende a ∞, lo cual no puede ocurrir porque el lado izquierdo es constante y finito.

Este absurdo prueba que debe haber algún i para el cual $\mu(a^{i+1}B) \leq b\mu(a^i B)$. □

4.1.10. Corolario. Dada una d-bola B, cuyo centro es un punto que pertenece al soporte de μ, y dados dos números positivos a, b, con $b > a^\nu$, existe alguna d-bola (a, b)-doblante $\tilde{B}$ concéntrica con B que contiene a B.

Demostración. En cuyo caso basta tomar $\sigma = \varrho(B)$ y z igual al centro de la bola B, en el Lema precedente. □

4.1.11. Definición. Decimos que una bola B es **doblante** si es $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-doblante, donde

$$\mathfrak{a} = 8A^4\rho, \qquad \mathfrak{b} = 2\mathfrak{a}.$$

Observación: En particular, como $0 < \nu \leq 1$ y $\mathfrak{a} > 1$, tenemos que $\mathfrak{b} \geq 2\mathfrak{a}^\nu$.

4.1.12. Teorema. Dada una bola B de radio $s > 0$, cuyo centro es un punto que pertenece al soporte de μ, existe una bola doblante $\hat{B}$ tal que:

(a) $\hat{B}$ es concéntrica con B,

(b) $\hat{B}$ es doblante,

(c) Si $\tilde{B}$ es otra d-bola doblante concéntrica con B, entonces $\hat{B} \subset \tilde{B}$,

es decir: $\hat{B}$ es la d-bola doblante de radio mínimo, que contiene a B y es concéntrica con B.

Demostración. Sea s_0 el ínfimo de los radios $\tilde{s} \geq s$, tales que existe una bola doblante de radio $\tilde{s}$, concéntrica con B (existe al menos un $\tilde{s}$ con esta propiedad porque $\mathfrak{b} = 2\mathfrak{a} \geq 2\mathfrak{a}^\nu > \mathfrak{a}^\nu$). Claramente $0 < s \leq s_0 < \infty$.

Sea $\{s_j\}_j$ una sucesión decreciente de números positivos tal que para cada j: es $s_j \geq s_0$, existe una bola B_j doblante concéntrica con B de radio s_j; y además $\lim_{j\to\infty} s_j = s_0$. Sea $\hat{B}$ la bola de radio s_0 concéntrica con B (cumple (a)). Tenemos que:

$$\mu(\mathfrak{a}\hat{B}) \leq \mu(\mathfrak{a}B_j) \leq \mathfrak{b}\mu(B_j).$$

Tomando ínfimo del lado derecho, y usando que $\hat{B} = \cap_j B_j$, y continuidad de la medida, vemos que:

$$\mu(\mathfrak{a}\hat{B}) \leq \mathfrak{b}\mu(\hat{B}).$$

Por lo tanto $\hat{B}$ es una bola doblante (se cumple (b)).

Si $\tilde{B}$ es una bola doblante concéntrica con B, que contiene a B, debe tener radio mayor que s, y por lo tanto, también mayor que s_0, por la manera en que definimos s_0. Como $\tilde{B}$ es también concéntrica con $\hat{B}$, resulta que $\hat{B} \subset \tilde{B}$. Esto prueba (c). □

4.1.13. Definición. Para cada d-bola B, cuyo centro es un punto que pertenece al soporte de μ, **denotamos con $\hat{B}$ a la mínima d-bola doblante concéntrica con B, que contiene a** B, la cual existe gracias al Teorema anterior.

4.1.14. Proposición. Para μ-casi todo $x \in \operatorname{sop}(\mu)$, y todo $\delta_0 > 0$, existe una bola doblante B centrada en x de radio $0 < \delta \leq \delta_0$.

Nota: Estamos diciendo que para μ-casi todo punto x existen bolas doblantes centradas en x de radio tan pequeño como se quiera.

Demostración. Respecto a las d-bolas, la medida de Lebesgue satisface la siguiente propiedad de diferenciación:

$$(*) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{m_n(B_s(x))}{s} = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Es una versión *normalizada* de la propiedad de diferenciación, que se debe al uso de la casi-métrica d en lugar de la estándar métrica euclídea.

Como μ es absolutamente continua respecto la medida de Lebesgue, para μ-casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ vale que:

$$(**) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{\mu(B_s(x))}{s} > 0,$$

debido a la propiedad de diferenciación de μ respecto la medida de Lebesgue.

Sea x uno de los puntos que verifica la relación (**). Tomemos $B = B_s(x)$, y asumamos que ninguna de las bolas $\mathfrak{a}^{-k}B$, $k \geq 1$ es doblante. Entonces para todo $k \geq 1$:

$$\mu(B) > \mathfrak{b}\mu(\mathfrak{a}^{-1}B) > \cdots > \mathfrak{b}^k\mu(\mathfrak{a}^{-k}B).$$

Por lo tanto:

$$\frac{\mu(\mathfrak{a}^{-k}B)}{(\mathfrak{a}^{-k}s)} < \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)^k \frac{\mu(B)}{s}.$$

Como $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$, el lado derecho tiende a 0 cuando $k \to \infty$, mientras que el lado izquierdo tiende a un número positivo, por (**).

Esta contradicción muestra que debe haber algún $k_1 \geq 1$ tal que $\mathfrak{a}^{-k_1}B$ es doblante.

Repitiendo el razonamiento, ahora respecto la bola $\mathfrak{a}^{-k_1}B$ podemos hallar un entero $k_2 \geq 1$ tal que $\mathfrak{a}^{-k_1-k_2}B$ es doblante. Siguiendo en forma inductiva, tenemos una sucesión de enteros $\{k_j\}_{j\geq 1}$ tales que cada bola $B_j = \mathfrak{a}^{-k_1-\cdots-k_j}B$ es doblante, para todo j.

Basta elegir j suficientemente grande de modo que $\mathfrak{a}^{-k_1-\cdots-k_j}s \leq \delta_0$, y así se completa la prueba. □

4.1.15. Lema de Diferenciación. Sea φ una función localmente μ-integrable (μ-integrable sobre todas las d-bolas). Para μ-casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, existe una sucesión de bolas doblantes $B_j = B_{s_j}(x)$ tales que:

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} \varphi(y) d\mu(y) = \varphi(x).$$

Demostración. Por ser μ absolutamente continua respecto la medida de Lebesgue m_n, tenemos que para m_n-casi todo punto x, existe el límite:

$$f(x) = \frac{d\mu}{dm_n}(x) = \lim_{s \to 0} \frac{\mu(B_s(x))}{s}.$$

Tenemos que $f(x) > 0$ para μ-casi todo punto x en el soporte de μ.

Podemos escribir, por tanto:

$$\int \varphi(x) d\mu(x) = \int \varphi(x)\, f(x)\, dm_n(x),$$

para cada función μ-integrable φ (ya sea que tome valores escalares o vectoriales).

Por otro lado, si φ es localmente μ-integrable, tiene sentido escribir el promedio:

$$m_B \varphi = \frac{1}{\mu(B)} \int_B \varphi(x)\, d\mu(x),$$

para toda bola B de medida positiva.

Si x es un punto del soporte de μ, toda bola centrada en x debe tener medida positiva.

Por la Proposición 4.1.14, para μ-casi todo punto $x \in \mathrm{sop}(\mu)$, existe una sucesión de bolas doblantes $\{B_{s_j}(x)\}_{j \geq 1}$ tal que sus radio s_j tienden a 0 cuando j tiende a ∞.

Denotemos $E[\mu]$ al conjunto de tales puntos x, tales que además $f(x) > 0$. El complemento de este conjunto tiene μ-medida igual a 0.

Para m_n-casi todo punto de $E[\mu]$ vale la propiedad de diferenciación de Lebesgue respecto la función $\varphi(x)f(x)$, que es m_n-localmente integrable, por ser φ una función μ-integrable.

Denotemos $F[\mu, m_n]$ a ese subconjunto de $E[\mu]$. Tenemos que $\mu(E[\mu] \setminus F[\mu, m_n]) = 0$, porque $m_n(E[\mu] \setminus F[\mu, m_n]) = 0$ y por ser μ absolutamente continua respecto m_n. Por lo tanto el complemento de $F[\mu, m_n]$ tiene μ-medida igual a 0.

Si x es uno de los puntos de $F[\mu, m_n]$, entonces podemos escribir:

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_{s_j}(x)} \varphi(y) d\mu(y) = \lim_{j \to \infty} \frac{s_j}{\mu(B_j(x))} \frac{1}{s_j} \int_{B_{s_j}(x)} \varphi(y) f(y) dm_n(y) = \frac{1}{f(x)} \varphi(x) f(x) = \varphi(x).$$

□

4.2. Funciones Lipschitz en espacios de medida no doblante

4.2.1. Definición. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert (que puede ser $\mathbb{H} = \mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos).

Se dice que una función $\vec{\psi}$ pertenece al espacio de Lipschitz $\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, $0 < \gamma \leq \alpha = 1/n$, si existe una constante C tal que para μ-casi todo punto $x, y \in \mathrm{sop}(\mu)$ se tiene:

$$\left| \vec{\psi}(x) - \vec{\psi}(y) \right|_{\mathbb{H}} \leq C d(x, y)^\gamma.$$

Al ínfimo de las constantes C anteriores se le llama la **norma** de $\vec{\psi}$, y se denota por $\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})}$.

El subespacio de $\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ que consta de las funciones con soporte en una bola B, se lo denota por $\Lambda^\gamma(B, \mathbb{H})$. El espacio resultante de la unión de todos los espacios $\Lambda^\gamma(B, \mathbb{H})$, para toda bola B, se lo denota con $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

El subespacio de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ de las funciones $\vec{\psi}$ tal que $\int \vec{\psi} d\mu = 0_{\mathbb{H}}$, lo denotaremos por $\{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})\}_0$.

Otro espacio de funciones importante es el que consta de las funciones Lipschitz acotadas, es decir:

$$\Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}) = \Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}) \cap L_\mu^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}).$$

Cuando $\mathbb{H}$ sea el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, denotaremos a todos estos espacios simplemente por $\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda^\gamma(B)$, $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)\}_0$, $\Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n)$.

4.2.2. Nota: En el próximo Teorema se enuncian otras formas equivalentes de las funciones Lipschitz en el caso de una medida no doblante. El mismo es una extensión del obtenido por Macías y Segovia en [**MS**] para espacios de tipo homogéneo.

4.2.3. Teorema. Para una función f, μ-integrable sobre d-bolas de $\mathbb{R}^n$, son equivalentes las siguientes condiciones:

- Existe alguna constante C_1 y una colección de números f_B, uno para cada bola B, tal que se cumplen estas dos propiedades: Para cualquier d-bola B de radio s:
$$\frac{1}{\mu(2B)}\int_B |f(x)-f_B|\,d\mu(x) \leq C_1 s^\gamma,$$
y para cada d-bola U tal que $B\subset U$ y radio $\varrho(U)\leq 2s$:
$$|f_B - f_U| \leq C_1 s^\gamma.$$
- Existe una constante C_2 tal que
$$|f(x)-f(y)| \leq C_2\,|x-y|^\gamma$$
para μ-casi todos los puntos x,y, en el soporte de μ.
- Para cualquier p dado, $1\leq p\leq\infty$, existe una constante $C(p)$, tal que para toda d-bola B de radio s, tenemos
$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(x)-m_B(f)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \leq C(p)s^\gamma,$$
y también, para cualquier d-bola U tal que $B\subset U$, y radio $\varrho(U)\leq 2s$:
$$|m_B(f)-m_U(f)| \leq C(p)s^\gamma.$$

Además, las cantidades $\operatorname{ínf} C_1, \operatorname{ínf} C_2$ e $\operatorname{ínf} C(p)$, con un p fijo, son equivalentes.

Nota: Si bien no usaremos esta caracterización equivalente del concepto de función Lipschitz, observamos que la forma (a) del Teorema anterior, tiene sentido para $\gamma=0$, y el espacio obtenido en este caso es el $RBMO_\mu$, de Tolsa (ver [**T1**]), el cual está contenido en BMO_ρ, con $\rho=2$.

4.2.4. Proposición. Si $\vec{\psi}$ es una función del espacio $\Lambda^\gamma(B,\mathbb{H})$, para alguna bola B de radio s, entonces se tiene la desigualdad siguiente:
$$\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(B,\mathbb{H})}s^\gamma.$$
En particular, vale la siguiente inclusión de conjuntos:
$$\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}) \subset L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}).$$

Demostración. Supongamos que $\mu(B)>0$, y que x_0 es el centro de B. Por definición de las funciones Lipschitz, para μ-casi todos los puntos $x,y\in\operatorname{sop}(\mu)$ se tiene la desigualdad:
$$\begin{aligned}\left|\vec{\psi}(x)-\vec{\psi}(y)\right|_{\mathbb{H}} &\leq \|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}d(x,y)^\gamma\\ &\leq \|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\Big(A(d(x_0,x)+d(x_0,y))\Big)^\gamma.\end{aligned}$$

En particular, como B tiene μ medida positiva, esto es cierto para algún punto $x\in B$, que dejaremos fijo. Para ese punto x se sigue de lo anterior que:
$$\left|\vec{\psi}(x)-\vec{\psi}(y)\right|_{\mathbb{H}} \leq \|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}A^\gamma(s+d(x_0,y))^\gamma.$$

Si $y\notin B$ se tiene $\vec{\psi}(y)=0$, luego si tomamos el ínfimo para todos los puntos y en los que vale la desigualdad anterior, tales que y no pertenece a B, se tiene:
$$\left|\vec{\psi}(x)\right|_{\mathbb{H}} \leq \operatorname*{ínf}_{y\notin B}\left|\vec{\psi}(x)-\vec{\psi}(y)\right|_{\mathbb{H}} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\operatorname*{ínf}_{y\notin B}(s+d(x_0,y))^\gamma.$$

Como la casi-distancia d es equivalente a la distancia euclídea, tenemos que el ínfimo anterior se alcanza justamente para el radio s de la bola B, con lo cual:

$$\left|\vec{\psi}(x)\right|_{\mathbb{H}} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^{\gamma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}s^{\gamma}, \qquad \text{para todo } x \in B.$$

□

4.2.5. Proposición. El espacio de funciones Lipschitz con soporte compacto $\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$ es un subconjunto denso del espacio de funciones de potencia p μ-integrable $L_{\mu}^{p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. En primer lugar, tomemos una función cualquiera $\varphi \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, y mostremos que es de potencia p μ-integrable, para $1 \leq p < \infty$.

Sea B una bola que contiene al soporte de φ, de radio s_0. Usando la proposición anterior:

$$\begin{aligned}\int |\varphi(x)|_{\mathbb{H}}^{p}\, d\mu(x) &\leq C\int_B \|\varphi\|_{\Lambda^{\gamma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}^{p} s_0^{\gamma p} d\mu(x)\\ &\leq \|\varphi\|_{\Lambda^{\gamma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}^{p} s_0^{\gamma p}\mu(B) < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}) \subset L_{\mu}^{p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}), \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Sea E un conjunto μ-medible y acotado. Dado $\epsilon > 0$, existen un compacto K_ϵ y un abierto acotado G_ϵ tales que $K_\epsilon \subset E \subset G_\epsilon$, y $\mu(G_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$, porque μ es una medida de Radón, absolutamente continua respecto la medida de Lebesgue.

Definimos la función

$$\zeta_\epsilon(x) = \frac{d(x,G_\epsilon^c)}{d(x,G_\epsilon^c) + d(x,K_\epsilon)}.$$

Claramente $0 \leq \zeta_\epsilon(x) \leq 1$.

Además *soporte*$(\zeta_\epsilon) \subset \overline{G_\epsilon}$. Como $\overline{G_\epsilon}$ es un conjunto acotado, la función ζ_ϵ tiene soporte compacto.

Denotemos:

$$s_\epsilon = \inf_{x\in\mathbb{R}^n, z_1\in K_\epsilon, z_2\in G_\epsilon^c}(d(x,z_1) + d(x,z_2)).$$

Esta es una cantidad positiva, como puede verse sin dificultad, usando que $d(\partial G_\epsilon, \partial K_\epsilon) > 0$.

Sea B_0 una bola de centro z que contiene a $\overline{G_\epsilon}$, de radio R.

Para abreviar, definimos las variables auxiliares

$$p^y = d(y,K_\epsilon), \qquad q^y = d(y,G_\epsilon^c)$$

Si $d(x,y) \leq 2AR$, y al menos uno de los puntos, digamos x, está en B_0, tenemos que $p^y \leq 2AR$, $q^y \leq 2AR$:

$$\begin{aligned}|\zeta_\epsilon(x) - \zeta_\epsilon(y)| &= \left|\frac{d(x,G_\epsilon^c)}{d(x,G_\epsilon^c)+d(x,K_\epsilon)} - \frac{d(y,G_\epsilon^c)}{d(y,G_\epsilon^c)+d(y,K_\epsilon)}\right|\\ &= \left|\frac{q^x}{q^x+p^x} - \frac{q^y}{q^y+p^y}\right|\\ &= \left|\frac{q^x(q^y+p^y) - q^y(q^x+p^x)}{(q^x+p^x)(q^y+p^y)}\right|\\ &\leq \frac{1}{s^{2\epsilon}}\left|q^x(q^y+p^y) - q^y(q^x+p^x)\right|\\ &= \frac{1}{s^{2\epsilon}}\left|(q^x-q^y)(q^y+p^y) + q^y(q^y+p^y-q^x-p^x)\right|\\ &\leq \frac{1}{s_\epsilon^2}(C(2AR)^{1-\gamma}d(x,y)^{\gamma}(2AR+2AR) + 2AR((2AR)^{1-\gamma}d(x,y)^{\gamma} + (2AR)^{1-\gamma}d(x,y)^{\gamma}))\\ &\leq \frac{C_{A,R,\gamma}}{s_\epsilon^2}d(x,y)^{\gamma}.\end{aligned}$$

Si $d(x,y) > 2AR$, entonces es claro que al menos uno de los puntos, digamos y, no está en B, porque de lo contrario $d(x,y) \leq A(d(z,x) + d(z,y)) \leq 2AR$. Entonces

$$|\zeta_\epsilon(x) - \zeta_\epsilon(y)| = \zeta_\epsilon(x) \leq 1 \leq \left(\frac{d(x,y)}{2AR}\right)^\gamma.$$

Hemos cubierto todos los casos relevantes.

Por lo tanto

$$|\zeta_\epsilon(x) - \zeta_\epsilon(y)| \leq C_\epsilon d(x,y)^\gamma,$$

y así $\zeta_\epsilon \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia ζ_ϵ es una función de potencia p μ-integrable, para $1 \leq p < \infty$.

Ahora calculamos.

$$\begin{aligned}\int |\zeta_\epsilon(x) - \chi_E|^p \, d\mu(x) &\leq \int_{G_\epsilon \setminus K_\epsilon} |\zeta_\epsilon(x) - \chi_E|^p \, d\mu(x) \\ &\leq 2^p \mu(G_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq 2^p \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\zeta_\epsilon - \chi_E\|_{L^p_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq 2\epsilon^{1/p}.$$

Si $f(x) = \sum_{j=1}^M a_j \chi_{E_j}$, donde $a_1, \cdots, a_M \in \mathbb{H}$ y $E_1, \cdots, E_M$ son conjuntos μ-medibles acotados, aplicando el párrafo anterior a cada E_j, podremos obtener una función de Lipschitz ζ_{ϵ_j}, siendo $\epsilon_j = \epsilon/(M\,|a_j|_{\mathbb{H}})^p$, tal que

$$\|\zeta_{\epsilon_j} - \chi_{E_j}\|_{L^p_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq 2\frac{\epsilon^{1/p}}{M\,|a_j|_{\mathbb{H}}}.$$

La suma $\zeta_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^M a_j \zeta^j_{\epsilon_j}$ satisface ahora que:

$$\|\zeta_\epsilon - f\|_{L^p_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})} \leq 2\epsilon^{1/p}.$$

Se sabe que el conjunto de funciones del tipo $\sum_{j=1}^M a_j \chi_{E_j}$ es denso en el espacio de funciones $L^p_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

Por lo tanto, el espacio de funciones Lipschitz $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ es un subconjunto denso de $L^p_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, para cada $1 \leq p < \infty$. □

4.2.6. Corolario. Sea F una función μ-medible y $\mathbb{H}$-valuada. Si existe una constante $C > 0$, tal que para toda $\varphi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$:

$$\left| \int \big(F(x), \varphi(x)\big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) \right| \leq C \|\varphi\|_{L^1_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})},$$

entonces $F \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ y

$$\|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})} \leq C.$$

4.2.7. Funciones auxiliares. Damos aquí la definición de ciertas funciones de valores escalares que necesitaremos en las secciones siguientes.

Partimos de una función básica $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, infinitamente diferenciable, tal que:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ \text{algún valor entre 0 y 1}, & 1 < t < A, \\ 0, & t \geq A. \end{cases}$$

A partir de ella, para cada bola $B = B_s(z)$ construimos las funciones h_B, h'_B, l_B siguientes:

$$\begin{aligned} h_B(y) &= h\left(\frac{d(y,z)}{7A^3 s}\right). \\ h'_B(y) &= h\left(\frac{d(y,z)}{s}\right). \\ l_B(y) &= \frac{1}{\int h'_B(y) d\mu(y)} h'_B(y). \end{aligned}$$

La función h_B vale 1 en $B_{7A^3s}(z)$, vale 0 en $B^c_{A7A^3s}(z)$ y su soporte está incluido en la bola $B_{8A^4s}(z)$.
La función h'_B vale 1 en $B_s(z)$, vale 0 en $B^c_{As}(z)$ y su soporte está incluido en la bola $B_{2As}(z)$.
Esto implica que la función $l_{\hat{B}}$ también vale 0 en $B^c_{As}(z)$ y su soporte está incluido en la bola $B_{2As}(z)$.
Se puede probar que estas funciones satisfacen condiciones Lipschitz, para todo exponente $0 < \gamma \leq \alpha$. Sean $x, y \in B_{8A^4s}(z)$:

$$|h_B(x) - h_B(y)| = \left|h(d(x,z)/7A^3s) - h(d(y,z)/7A^3s)\right|$$

(Teorema del valor medio:)

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|dh/dt\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{7A^3s}\,|d(x,z) - d(y,z)| \\
&\leq \frac{\|dh/dt\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{7A^3s} n(8A^4s)^{1-\alpha} d(x,y)^\alpha \\
&\leq \frac{\|dh/dt\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{7A^3s} n(8A^4s)^{1-\gamma} d(x,y)^\gamma \frac{d(x,y)^{\alpha-\gamma}}{(8A^4s)^{\alpha-\gamma}} \\
&\leq \frac{\|dh/dt\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{7A^3s} n(8A^4s)^{1-\gamma} d(x,y)^\gamma \frac{(2A8A^4s)^{\alpha-\gamma}}{(8A^4s)^{\alpha-\gamma}} \\
&\leq C_{h,n,\gamma,A} s^{-\gamma} d(x,y)^\gamma.
\end{aligned}$$

Para otros pares de puntos de x, y, se puede obtener más fácilmente esa cota, usando que h_B está soportada en la bola $B_{8A^4s}(z)$.
En particular tenemos:

$$\|h_B\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leq Cs^{-\gamma}. \tag{4.2.7.1}$$

Un procedimiento análogo prueba que h'_B es una función Lipschitz para cualquier exponente $0 < \gamma \leq \alpha$, lo cual automáticamente implica idéntica propiedad para l_B.
Por otro lado, vale la igualdad:

$$\int l_B(y)\, d\mu(y) = 1.$$

Cuando se utilice la mínima bola doblante $\hat{B} = B_{\hat{s}}(z)$ concéntrica con B (que la contiene), las funciones $h_{\hat{B}}$ y $h'_{\hat{B}}$ tienen soportes que dependen ahora del radio $\hat{s}$ de $\hat{B}$.
En este caso tenemos estimaciones interesantes de las normas Lipschitz:

4.2.8. Proposición. Dada una bola $B = B_s(z)$, se tienen las siguientes desigualdades en norma:

$$\begin{aligned}
\|h_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} &\leq C\hat{s}^{-\gamma} \\
\|h'_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} &\leq C\hat{s}^{-\gamma} \\
\|l_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} &\leq C\mu(B_{\hat{s}}(z))^{-1}\hat{s}^{-\gamma}.
\end{aligned}$$

Demostración. Recordemos la definición de las funciones $h_{\hat{B}}, h'_{\hat{B}}, l_{\hat{B}}$:

$$h_{\hat{B}}(y) = h(d(y,z)/7A^3\hat{s}), \qquad \text{y} \qquad h'_{\hat{B}}(y) = h(d(z,y)/\hat{s}).$$

Las primeras dos acotaciones en norma pueden probarse a partir de (4.2.7.1).
Tenemos que:

$$l_{\hat{B}} = \frac{h'_{\hat{B}}}{\int h'_{\hat{B}}}.$$

Esta función vale 0 en $A\hat{B}^c$. Además:

$$\mathrm{sop}(l_{\hat{B}}) \subset 2A\hat{B}.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\left|l_{\hat{B}}(x) - l_{\hat{B}}(y)\right| &\le \left(\int_B h'_{\hat{B}}\right)^{-1} \left|h'_{\hat{B}}(x) - h'_{\hat{B}}(y)\right| \\ &\le \left(\int_{B_{\hat{s}}(z)} 1\right)^{-1} C\hat{s}^{-\gamma} d(x,y)^{\gamma} \\ &\le C\mu(B_{\hat{s}}(z))^{-1}\hat{s}^{-\gamma} d(x,y)^{\gamma}.\end{aligned}$$

□

4.2.9. Definiciones de Constantes. Las constantes que aparecen en los dos apartados anteriores serán utilizadas en las secciones que siguen. Sin embargo, su utilización directa puede dar expresiones muy engorrosas, así que preferimos darles una notación más compacta.

Damos a continuación la lista de constantes:

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}^1 &:= 2A \\ \mathfrak{c}^2 &:= 5A^2 \\ \mathfrak{c}^3 &:= 7A^3 \\ \mathfrak{c}^4 &:= 8A^4 \\ \mathfrak{c}^5 &:= 21A^5 \\ \mathfrak{c}^6 &:= 32A^6\end{aligned}$$

La idea subyacente de esta notación es que $\mathfrak{c}^i \approx A^i$.

De paso recordamos que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &:= \mathfrak{c}^4\rho = 8A^4\rho \\ \mathfrak{b} &:= 2\mathfrak{a}.\end{aligned}$$

4.3. Operadores de integral singular en el contexto de medidas no-doblantes

4.3.1. Definición. Sean $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, y consideramos un operador lineal continuo T de $\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$, para algún γ con $0 < \gamma \le \alpha = 1/n$, asociado a un núcleo $k : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta) \to \mathbb{H}$, de manera tal que para toda función $\phi \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, y todo $x \notin \operatorname{sop}(\phi)$, se tiene la siguiente representación integral:

$$T\phi(x) = \int k(x,y)\phi(y)\, d\mu(y).$$

En tal caso decimos que T es un **operador de integral singular** con núcleo k.

4.3.2. Definición. Sea $\tilde{k} = \tilde{k}(x,y)$ la función definida por

$$\tilde{k}(x,y) = \sup_{\epsilon < d(x,y)/\mathfrak{c}^3} \left\{ \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x))\mu(B_\epsilon(y))} \iint_{d(u,x)<\epsilon, d(v,y)<\epsilon} |k(u,v)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(u) d\mu(v) \right\} \tag{4.3.2.a}$$

Decimos que k satisface una **condición de tamaño de tipo L^r-Dini,** $1 \le r \le \infty$, si para todo $R > 0$:

$$\left(\int\limits_{R<d(x,y)\le AR} (\tilde{k}(x,y)^r + \tilde{k}(y,x)^r) d\mu(y) \right)^{1/r} \le CR^{-\nu/r'} \tag{4.3.2.b}$$

Se dice que k satisface una **condición de L^r-suavidad,** $1 \le r \le \infty$, si existe un η, $0 < \eta \le \alpha$, tal que si $Ad(y,z) \le R$, entonces:

$$\left(\int\limits_{R<d(y,x)\le AR} |k(y,x) - k(z,x)|_{\mathbb{H}}^r\, d\mu(x) \right)^{1/r} \le CR^{-\nu/r'} \left(\frac{d(y,z)}{R}\right)^{\eta}. \tag{4.3.2.c}$$

y

$$(4.3.2.d) \qquad \left(\int\limits_{R<d(x,y)\leq AR} |k(x,y)-k(x,z)|_{\mathbb{H}}^{r}\, d\mu(x) \right)^{1/r} \leq CR^{-\nu/r'} \left(\frac{d(y,z)}{R}\right)^{\eta}.$$

Nota: Con r' estamos denotando al exponente conjugado de r, a saber: $r' = r/(r-1)$.

4.3.3. Propiedad de Acotación Débil. Decimos que T es **débilmente acotado** de orden γ, $0 < \gamma \leq \alpha$, si para $\phi \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ tales que $\phi, \vec{\psi}$ están soportadas en la misma bola $B = B_s(x_0)$, se tiene:

$$\left|\left\langle T\phi, \vec{\psi} \right\rangle\right| \leq C\mu(\rho B)\|\phi\|_{\Lambda^{\gamma}(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^{\gamma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s^{2\gamma}.$$

El factor ρ es mayor o igual que 1, es independiente de $\phi, \vec{\psi}$, B, y es el mismo valor de ρ que hemos tomado al definir el espacio de funciones $BMO_{\rho}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

4.3.4. Algunas consideraciones para el operador adjunto de T.
Se define el operador adjunto de T como el operador lineal T^* que está definido de $\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ en $(\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n))'$, mediante:

$$\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi \right\rangle = \left\langle T\phi, \vec{\psi} \right\rangle, \qquad (\vec{\psi} \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}), \phi \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n)).$$

Este operador tiene asociado el núcleo $k^*(x, y) = k(y, x)$, en el sentido de que para cualquier función $\vec{\psi} \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, y cualquier $x \notin \mathrm{sop}(\vec{\psi})$, vale:

$$T^*\vec{\psi}(x) = \int \left(k^*(x,y), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x).$$

Esto se deduce del hecho que, cuando $\phi, \vec{\psi}$ tienen soportes disjuntos, vale la igualdad:

$$\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi \right\rangle = \iint \left(k^*(x,y), \vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}} \phi(x)\, d\mu(x) d\mu(y).$$

El núcleo $k^*(x, y)$ satisface, por lo tanto, las mismas propiedades de tamaño y de suavidad que k. También vale para T^* una relación de acotación débil, con la misma apariencia que la de T.

4.3.5. Operadores auxiliares.
Fijemos ahora un vector $w \in \mathbb{H}$. Podemos definir un nuevo operador S_w que está definido en el espacio de funciones de valores escalares $\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, y toma valores en el espacio de funcionales lineales continuos $(\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n))'$, mediante:

$$\left\langle S_w\psi, \phi \right\rangle := \left\langle T^*(\psi w), \phi \right\rangle, \qquad \phi, \psi \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n).$$

El operador S_w es del tipo integral singular, y el espacio de Hilbert involucrado es, simplemente $\mathbb{H} = \mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos.

Es fácil verificar que S_w tiene asociado el núcleo

$$(4.3.5.a) \qquad k_w(x,y) = \left(k^*(x,y), w\right)_{\mathbb{H}}.$$

Satisface las condiciones de L^r-tamaño y L^r-suavidad siguientes:

$$(4.3.5.b) \qquad \left(\int\limits_{R<d(x,y)\leq AR} \left(\widetilde{k_w}(x,y)^r + \widetilde{k_w}(y,x)^r\right) d\mu(y) \right)^{1/r} \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\, R^{-\nu/r'}$$

Si $Ad(y, z) \leq R$, entonces:

$$(4.3.5.c) \qquad \left(\int\limits_{R<d(y,x)\leq AR} \left|\left(k^*(y,x), w\right)_{\mathbb{H}} - \left(k^*(z,x), w\right)_{\mathbb{H}}\right|^r d\mu(x) \right)^{1/r} \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\, R^{-\nu/r'} \left(\frac{d(y,z)}{R}\right)^{\eta}$$

$$(4.3.5.d) \qquad \left(\int\limits_{R<d(x,y)\leq AR} \left|\left(k^*(x,y), w\right)_{\mathbb{H}} - \left(k^*(x,z), w\right)_{\mathbb{H}}\right|^r d\mu(x) \right)^{1/r} \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\, R^{-\nu/r'} \left(\frac{d(y,z)}{R}\right)^{\eta}.$$

Se cumple también trivialmente la propiedad de acotación débil. Toma esta forma:

$$\left|\left\langle S_w\psi,\phi\right\rangle\right| \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\ \mu(\rho B)s^{2\gamma}\|\phi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}, \qquad \phi,\psi\in\Lambda^\gamma(B), B=B_s(x_0).$$

Nótese que en todos los casos se ha cambiado la constante C por la constante $C\,|w|_{\mathbb{H}}$, que depende del vector w.

La ventaja de usar un tal operador será la de poder reutilizar resultados previamente probados para operadores integral singular genéricos.

4.4. Lemas y Teoremas Previos

4.4.1. Propiedad de Conmutación de Meyer. Supongamos que T es un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$ para algún γ, $0<\gamma<\alpha=1/n$, asociado a un núcleo que satisface las condiciones de L^r-Dini y L^r-suavidad, y que T es débilmente acotado de orden η, para algún $\eta\geq\gamma$.

Se dice que T satisface la **propiedad de conmutación de Meyer** si para cualesquiera $\phi,\varphi\in\Lambda_0^{\gamma'}(\mathbb{R}^n)$,$\vec{\psi}\in\Lambda_0^{\gamma'}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, con $\gamma'>\gamma$:

$$\left\langle T(\phi\varphi),\vec{\psi}\right\rangle = \left\langle T\phi,\vec{\psi}\,\varphi\right\rangle + \iint\left[\varphi(y)-\varphi(x)\right]\left(\phi(y)\,k(x,y),\vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)d\mu(y).$$

Observación: Si T satisface la propiedad de conmutación de Meyer, entonces T^* también lo hace, aunque lo escribimos en el formato siguiente (atendiendo a la idea de que $k(x,y)$ y $k^*(x,y)$ se identifican con transformaciones lineales definidas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{H}$, y de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{C}$ respectivamente):

$$\left\langle T^*(\vec{\psi}\varphi),\phi\right\rangle = \left\langle T^*\vec{\psi},\phi\,\varphi\right\rangle + \iint\left[\varphi(y)-\varphi(x)\right]\left(\vec{\psi}(y),k^*(x,y)\right)_{\mathbb{H}}\phi(x)\,d\mu(y)d\mu(x).$$

Demostración.

$$\left\langle T^*(\vec{\psi}\varphi),\phi\right\rangle = \left\langle T\phi,\vec{\psi}\varphi\right\rangle$$

(Propiedad de conmutación de Meyer de T:)

$$= \left\langle T(\phi\,\varphi),\vec{\psi}\right\rangle - \iint\left[\varphi(y)-\varphi(x)\right]\left(k(x,y)\phi(y),\vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)d\mu(y)$$

(cambio de variable $(x,y)\mapsto(y,x)$:)

$$= \left\langle T(\phi\,\varphi),\vec{\psi}\right\rangle + \iint\left[\varphi(y)-\varphi(x)\right]\left(k(y,x)\phi(x),\vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}}\,d\mu(y)d\mu(x)$$
$$= \left\langle T^*\vec{\psi},\phi\,\varphi\right\rangle + \iint\left[\varphi(y)-\varphi(x)\right]\left(k^*(x,y),\vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}}\phi(x)\,d\mu(y)d\mu(x).$$

□

4.4.2. Lema. Sea $k(x,y)$ un núcleo que satisface la condición de tamaño de tipo L^r-Dini. Si $0<\eta\leq\alpha$, entonces, para $s>0$ y $x\in X$:

(4.4.2.a) $$\int_{B_s(x)} d(x,y)^\eta\tilde{k}(x,y)d\mu(y)\leq Cs^\eta$$

(4.4.2.b) $$\int_{B_s(x)} d(x,y)^\eta\tilde{k}(y,x)d\mu(y)\leq Cs^\eta.$$

Demostración.

$$\int\limits_{B_s(x)} d(x,y)^\eta \tilde{k}(x,y)d\mu(y) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{A^{-j}s<d(x,y)\leq A^{-j+1}s} d(x,y)^\eta \tilde{k}(x,y)d\mu(y)$$

(Desigualdad de Hölder con exponente r:)

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{A^{-j}s<d(x,y)\leq A^{-j+1}s} \tilde{k}(x,y)^r d\mu(y) \right)^{1/r} \cdot \left(\int_{A^{-j}s<d(x,y)\leq A^{-j+1}s} d(x,y)^{\eta r'} d\mu(y) \right)^{1/r'}$$

(Usando condición L^r-Dini y (4.1.5.1):)

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} (A^{-j}s)^{-\nu/r'} \cdot \left(\underbrace{(A^{-j}s)^{\eta r'}}_{\text{máx}\, d(x,y)^{\eta r'}} \underbrace{(A^{-j}s)^{\nu}}_{\mu(B_{A^{-j+1}})} \right)^{1/r'}$$
$$\leq Cs^\eta \sum_{j=0}^{\infty} (A^{-j})^\eta$$
$$\leq Cs^\eta .$$

La prueba para $\tilde{k}(y,x)$ sigue los mismos pasos. $\square$

4.4.3. Lema. Sea $k(x,y)$ un núcleo que satisface la condición de L^r-suavidad, y sea $B = B_s(z)$. Entonces, para cualesquiera $x_1, x_2 \in B_{\mathfrak{c}^1 s}(z)$

(4.4.3.a) $$\left| \int (k(x_1,y) - k(x_2,y))(1-h_B(y))d\mu(y) \right|_{\mathbb{H}} \leq C \left(\frac{d(x_1,x_2)}{s} \right)^\eta$$

(4.4.3.a') $$\left| \int (k(x_1,y) - k(x_2,y))(1-h_B(y))d\mu(y) \right|_{\mathbb{H}} \leq C$$

(4.4.3.b) $$\left| \int (k(y,x_1) - k(y,x_2))(1-h_B(y))d\mu(y) \right|_{\mathbb{H}} \leq C \left(\frac{d(x_1,x_2)}{s} \right)^\eta$$

(4.4.3.b') $$\left| \int (k(y,x_1) - k(y,x_2))(1-h_B(y))d\mu(y) \right|_{\mathbb{H}} \leq C.$$

Demostración. Si $\mathfrak{c}^3 s < d(z,y)$, como $d(x_1,z) < \mathfrak{c}^1 s$, tenemos que:

$$7A^3 s = \mathfrak{c}^3 s < d(z,y) \leq A(d(x_1,z) + d(x_1,y)) < A(\mathfrak{c}^1 s + d(x_1,y)) = 2A^2 s + Ad(x_1,y) \leq 2A^3 s + Ad(x_1,y).$$

De aquí se desprende que:

$$5A^2 s = \mathfrak{c}^2 s < d(x_1,y).$$

Tenemos

$$\int_{\mathfrak{c}^3 s<d(z,y)} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)$$
$$\leq \int\limits_{\mathfrak{c}^2 s<d(x_1,y)} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{A^j \mathfrak{c}^2 s<d(x_1,y)\leq A^{j+1}\mathfrak{c}^2 s} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)$$

(Por desigualdad de Hölder, la condición de L^r-suavidad, y (4.1.5.1):)

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{(A^{j+1}\mathfrak{c}^2 s)^{\nu/r'}}_{\text{Hölder } r' \text{ y medida del dominio}} \underbrace{(A^j\mathfrak{c}^2 s)^{-\nu/r'}(d(x_1,x_2))^{\eta}(A^j\mathfrak{c}^2 s)^{-\eta}}_{L^r\text{-suavidad}}$$

$$\leq C\left(\frac{d(x_1,x_2)}{\mathfrak{c}^2 s}\right)^{\eta}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{A^{j\eta}}$$

$$\leq C\left(\frac{d(x_1,x_2)}{s}\right)^{\eta}.$$

Esto prueba (4.4.3.a).
Como $d(x_1,x_2) \leq 2A\mathfrak{c}^1 s$, se deduce (4.4.3.a').
Las desigualdades (4.4.3.b/b'), se obtienen de manera análoga. □

4.4.4. Lema. Sea $k(x,y)$ un núcleo que satisface la condición de L^r-suavidad. Sea $B = B_s(z)$.
Entonces para cada $\phi \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$, y cada $\vec{\psi} \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$:

$$I_B\phi(x) := \int (k(x,y) - k(z,y))\,\phi(y)\,(1-h_B(y))\,d\mu(y)$$
$$I_B^{(*)}\vec{\psi}(x) := \int \Big(k(y,x) - k(y,z), \vec{\psi}(y)\Big)_{\mathbb{H}}(1-h_B(y))\,d\mu(y),$$

están bien definidas para μ-casi todo todo $x \in \mathfrak{c}^1 B = B_{\mathfrak{c}^1 s}(z)$.

Más aún, si $\phi \in \Lambda^\gamma_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, $\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, $0 < \gamma \leq \alpha = 1/n$, tenemos que: $I_B\phi \in (\Lambda^\gamma(B,\mathbb{H}))'$, $I_B^{(*)}\vec{\psi} \in (\Lambda^\gamma(B,\mathbb{C}))'$ y tanto I_B como $I_B^{(*)}$ satisfacen la siguiente propiedad (parecida a la acotación débil) para funciones soportadas en $B_{\mathfrak{c}^1 s}(z)$:

$$\left|\int \Big(I_B\phi(x), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)\right| \leq C\mu(\mathfrak{c}^1 B)\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}s^{\gamma}$$
$$\left|\int \Big(I_B\phi(x), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)\right| \leq C\mu(\mathfrak{c}^1 B)\|\phi\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}s^{2\gamma}$$
$$\left|\int I_B^{(*)}\vec{\psi}(x)\,\phi(x)\,d\mu(x)\right| \leq C\mu(\mathfrak{c}^1 B)\|\phi\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}s^{\gamma}$$
$$\left|\int I_B^{(*)}\vec{\psi}(x)\,\phi(x)\,d\mu(x)\right| \leq C\mu(\mathfrak{c}^1 B)\|\phi\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}s^{2\gamma}.$$

Nota: Usamos la notación $I^{(*)}$ en vez de I^*, porque $I^{(*)}$ no es el operador adjunto de I, sino un operador análogo a I asociado al operador T^*, adjunto de T.

Demostración. Sea $\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma(\mathfrak{c}^1 B,\mathbb{H})$.
Por el Lema precedente tenemos

$$\left|\int \Big(I_B\phi(x), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(x)\right| \leq \int |I_B\phi(x)|_{\mathbb{H}}\left|\vec{\psi}(x)\right|_{\mathbb{H}} d\mu(x) \qquad \text{(desigualdad de Cauchy-Scwartz en } \mathbb{H})$$
$$\leq C\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\int_{B_{\mathfrak{c}^1 s}(z)}\left(\frac{d(x,z)}{4A^2 s}\right)^{\gamma} d\mu(x)$$
$$\leq C\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\mu(\mathfrak{c}^1 B)$$
$$\leq C\mu(\mathfrak{c}^1 B)\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n,H)}s^{\gamma}.$$

Si $\phi \in \Lambda^\gamma(\mathfrak{c}^1 B)$, entonces

$$\left|\int \Big(I_B\phi(x), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)\right| \leq C\mu(\mathfrak{c}^1 B)\|\phi\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}s^{2\gamma}.$$

Las estimaciones para $I^{(*)}$ son análogas. □

4.4.5. Definición. Sea T un operador lineal de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$.
Dada $B = B_r(z)$ definimos $T_B : \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n) \to (\Lambda^\gamma(B,\mathbb{H}))'$ como

$$T_B\phi = T(\phi h_B) + I_B\phi, \qquad \phi \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n).$$

Y también hacemos una declaración análoga respecto el adjunto T^*, definiendo $T_B^{(*)} : \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}) \to (\Lambda^\gamma(B))'$ de esta manera:

$$T_B^{(*)}\vec{\psi} = T^*(\vec{\psi}h_B) + I_B^{(*)}\vec{\psi}, \qquad \vec{\psi} \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}).$$

4.4.6. Lema. Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$ asociado a un núcleo k que satisface la condición de L^r-suavidad.
Entonces para cada par de bolas $B_1 = B_{r_1}(z_1) \subset B_2 = B_{r_2}(z_2)$, la igualdad

$$\left\langle T_{B_1}\phi, \vec{\psi}\right\rangle = \left\langle T_{B_2}\phi, \vec{\psi}\right\rangle,$$

es válida para cualesquiera $\vec{\psi} \in \{\Lambda^\gamma(B_1,\mathbb{H})\}_0$, el conjunto de las funciones en $\Lambda^\gamma(B_1,\mathbb{H})$ con integral 0, y $\phi \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n)$.
Asimismo, la igualdad

$$\left\langle T_{B_1}^{(*)}\vec{\psi}, \phi\right\rangle = \left\langle T_{B_2}^{(*)}\vec{\psi}, \phi\right\rangle,$$

es válida para cualesquiera $\phi \in \{\Lambda^\gamma(B_1)\}_0$, el conjunto de las funciones en $\Lambda^\gamma(B_1)$ con integral 0, y $\vec{\psi} \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle T_{B_2}\phi, \vec{\psi}\right\rangle &= \left\langle T(\phi h_{B_2}), \vec{\psi}\right\rangle + \left(I_{B_2}\phi, \vec{\psi}\right) \\
&= \left\langle T(\phi h_{B_1}), \vec{\psi}\right\rangle + \left\langle T\phi(h_{B_2} - h_{B_1}), \vec{\psi}\right\rangle + \int \left(I_{B_2}\phi(x), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&= \left\langle T(\phi h_{B_1}), \vec{\psi}\right\rangle + \int \left(\vec{\psi}(x), \int k(x,y)[h_{B_2}(y) - h_{B_1}(y)]\phi(y)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) + \int \left(I_{B_2}\phi(x), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x).
\end{aligned}$$

Claramente,

$$-T(\phi(h_{B_2} - h_{B_1}))(z_1) = \int k(z_1,y)\phi(y)\big(h_{B_1}(y) - h_{B_2}(y)\big)\, d\mu(y),$$

y

$$-I_{B_2}\phi(z_1) = \int \big(k(z_2,y) - k(z_1,y)\big)(1 - h_{B_2}(y))\, \phi(y)\, d\mu(y).$$

Entonces, como $\int \vec{\psi} = 0_{\mathbb{H}}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle T_{B_2}\phi, \vec{\psi}\right\rangle &= \left\langle T(\phi h_{B_1}), \vec{\psi}\right\rangle + \int \left(\int \big(k(x,y) - k(z_1,y)\big)\phi(y)[1 - h_{B_1}(y)]d\mu(y), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&= \left\langle T(\phi h_{B_1}), \vec{\psi}\right\rangle + \left\langle I_{B_1}\phi, \vec{\psi}\right\rangle \\
&= \left\langle T_{B_1}\phi, \vec{\psi}\right\rangle.
\end{aligned}$$

La prueba de que $\left\langle T_{B_1}^{(*)}\vec{\psi}, \phi\right\rangle = \left\langle T_{B_2}^{(*)}\vec{\psi}, \phi\right\rangle$ es muy similar, usando en este caso que:

$$\begin{aligned}
-T^*(\vec{\psi}(h_{B_2} - h_{B_1}))(z_1) &= \int \left(k^*(z_1,y), \vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}} \big(h_{B_1}(y) - h_{B_2}(y)\big)\, d\mu(y) \\
-I_{B_2}^{(*)}\vec{\psi}(z_1) &= \int \left(\big(k^*(z_2,y) - k^*(z_1,y)\big)(1 - h_{B_2}(y)), \vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(y).
\end{aligned}$$

. □

4.4.7. Es claro que

$$\left\langle T_B\phi, \vec{\psi}\right\rangle = \left\langle T\phi, \vec{\psi}\right\rangle,$$

cuando sop$(\phi) \subset B$, y además

$$\left\langle T_B^{(*)}\vec{\psi}, \phi\right\rangle = \left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle,$$

cuando sop$(\vec{\psi}) \subset B$.

Entonces el Lema precedente nos permite introducir las siguientes extensiones de T y T^*.

4.4.8. Definición. Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$ asociado a un núcleo $k(x, y)$ que satisface la condición de L^r-suavidad.

Para cualesquiera $\phi \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n)$ y $\vec{\psi} \in \{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})\}_0$ con sop$(\vec{\psi}) \subset B$, definimos

$$\left\langle T\phi, \vec{\psi}\right\rangle = \left\langle T_B\phi, \vec{\psi}\right\rangle.$$

Asimismo, para cualesquiera $\vec{\psi} \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ y $\phi \in \{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)\}_0$ con sop$(\phi) \subset B$, definimos

$$\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle = \left\langle T_B^{(*)}\vec{\psi}, \phi\right\rangle.$$

4.4.9. Definición. Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$ asociado a un núcleo $k(x, y)$ que satisface la condición de L^r-suavidad, y tal que T es débilmente acotado de orden γ.

Para cada función g del espacio $BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ y cada bola B, definimos el **vector** $\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g] \in \mathbb{H}$ en forma dual, mediante el siguiente funcional:

$$\left(\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g], w\right)_{\mathbb{H}} = \langle Th_B + I_B 1 - (g - m_{A\hat{B}}(g)), l_{\hat{B}}\, w\rangle, \qquad \text{todo } w \in \mathbb{H}.$$

Por otra parte, para cada función f del espacio $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$, cada **vector fijo** $w \in \mathbb{H}$, y cada bola B, definimos el **número** $\mathtt{C}_{B,\hat{B}}^{(*)}[f, w]$, mediante:

$$\mathtt{C}_{B,\hat{B}}^{(*)}[f, w] = \left\langle T^*(h_B w) + I_B^{(*)}(1w) - (f - m_{A\hat{B}}(f)), l_{\hat{B}}\right\rangle.$$

Podemos definir también los siguientes **vectores**: $\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}, \bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}^{(*)}$, a través de su formulación dual:

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}, w\right)_{\mathbb{H}} &= \left\langle Th_B + I_B 1, l_{\hat{B}}\, w\right\rangle, && \text{todo } w \in \mathbb{H} \\
\left(\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}^{(*)}, w\right)_{\mathbb{H}} &= \left\langle T^*(h_B w) + I_B^{(*)}(1w), l_{\hat{B}}\right\rangle, && \text{todo } w \in \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

Nota: La cantidad $\mathtt{C}_{B,\hat{B}}^{(*)}[f, w]$ no puede presentarse como un vector de $\mathbb{H}$ evaluada en forma de funcional lineal contra el vector genérico w, porque el término $\langle (f - m_{A\hat{B}}(f)), l_{\hat{B}}\rangle$ no es lineal en w.

Sin embargo las restantes cantidades definidas sí se consideran como un vector de $\mathbb{H}$, gracias a que se los puede identificar con funcionales lineales respecto de la variable w.

Observación: Las cantidades recién definidas satisfacen estas relaciones:

$$\begin{aligned}
\left(\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g], w\right)_{\mathbb{H}} &= \left(\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}, w\right)_{\mathbb{H}} - \left\langle (g - m_{A\hat{B}}(g)), l_{\hat{B}}\, w\right\rangle \\
\mathtt{C}_{B,\hat{B}}^{(*)}[f, w] &= \left(\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}^{(*)}, w\right)_{\mathbb{H}} - \left\langle (f - m_{A\hat{B}}(f)), l_{\hat{B}}\right\rangle.
\end{aligned}$$

4.4.10. Lema. Sea $T : \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n) \to (\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$ un operador de integral singular, asociado al núcleo estándar k, el cual satisface la condiciónd de tamaño de L^r-Dini, y que también verifica la propiedad de Acotación Débil.

Sea $B = B_s(z)$ una bola de radio s centrada en z. Como siempre, denotemos $\hat{B}$ a la mínima bola doblante concéntrica con B, y sea $\hat{s}$ su radio (de modo que $\hat{B} = B_{\hat{s}}(z)$).

Si $w \in \mathbb{H}$, entonces $\left|\langle Th_B, l_{\hat{B}} w\rangle\right| \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}$, con constante C independiente de B y w.

Análogamente, $\left|\langle T^*(h_B w), l_{\hat{B}}\rangle\right| \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}$, con constante C independiente de B y w.

Demostración. Sin pérdidad de generalidad, supongamos que $|w|_{\mathbb{H}} = 1$.

A lo largo de esta demostración, las bolas consideradas estarán centradas en z. Así, B_σ significa $B_\sigma(z)$.

Tenemos por ejemplo: $B = B_s$, $\hat{B} = B_{\hat{s}}$. Denotaremos $B^1 = B_{3A^2 s}$.

La función h_B vale 1 en $B_{\mathfrak{c}^3 s}$, se anula en $B^c_{7A^4 s}$, y por lo tanto tiene su soporte incluido en $B_{\mathfrak{c}^4 s} = B_{8A^4 s}$.

La función $h'_{\hat{B}}$ vale 1 en $B_{\hat{s}}$, se anula en $B^c_{A\hat{s}}$, y por lo tanto tiene su soporte incluido en $B_{\mathfrak{c}^1 \hat{s}} = B_{2A\hat{s}}$.

La función h_{B^1} vale 1 en $B_{3A^2\mathfrak{c}^3 s} = B_{\mathfrak{c}^5 s}$, se anula en $B^c_{21A^6 s}$, y por lo tanto tiene su soporte incluido en $B_{4A^2\mathfrak{c}^4 s} = B_{\mathfrak{c}^6 s}$. Luego la funcióh $1 - h_{B^1}$ se anula en $B^c_{\mathfrak{c}^5 s}$.

<u>(1er caso:) Supongamos que $\mathfrak{c}^6 s \leq \hat{s}$.</u>

Escribimos:

$$\langle Th_B, l_{\hat{B}} w\rangle = \langle Th_B, h_{B^1} l_{\hat{B}}\, w\rangle + \langle Th_B, (1 - h_{B^1}) l_{\hat{B}}\, w\rangle =: J_1 + J_2.$$

Debido a la propiedad de acotaciòn débil, y al hecho de que h_B y $h_{B^1} l_{\hat{B}}$ están ambas soportadas en $B_{4A^2\mathfrak{c}^4 s}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \mu(\rho B_{\mathfrak{c}^6 s}) C s^{2\gamma} \|h_B\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} \|h_{B^1} l_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \mu(\rho B_{\mathfrak{c}^6 s}) C s^{2\gamma} C s^{-\gamma} \frac{1}{\int h_{\hat{B}}} \|h_{B^1} h'_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

(Usando que $\mathfrak{c}^6 s \leq \hat{s}$:)

$$\leq C \mu(\rho B_{\hat{s}}) s^\gamma \frac{1}{\mu(\hat{B})} \|h_{B^1} h'_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}$$

(Como $h'_{\hat{B}} = 1$ en el soporte de h_{B^1}, tenemos $h_{B^1} h'_{\hat{B}} = h_{B^1}$. Además $\rho B_{\hat{s}} = B_{\rho\hat{s}} \subset B_{\mathfrak{a}\hat{s}} = \mathfrak{a}\hat{B}$. Luego:)

$$\begin{aligned}
&\leq C \mu(\mathfrak{a}\hat{B}) s^\gamma \frac{1}{\mu(\hat{B})} \|h_{B^1}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \mu(\mathfrak{a}\hat{B}) s^\gamma \frac{1}{\mu(\hat{B})} C (4A^2\mathfrak{c}^3 s)^{-\gamma}
\end{aligned}$$

(Usando que $\hat{B}$ es doblante:)

$$\leq C\mathfrak{b}.$$

Ahora estudiemos J_2. Si x fuese un punto común del soporte de h_B y de $\vartheta := (1 - h_{B^1}) l_{\hat{B}}$, tendríamos que $d(x, z) \leq \mathfrak{c}^4 s$ (debido al soporte de h_B) y $d(x, z) \geq \mathfrak{c}^5 = 21A^5 s > 8A^4 s = \mathfrak{c}^4 s$, ya que ϑ se anula fuera de la bola $B_{\mathfrak{c}^5 s}(z)$, lo cual da una contradicción.

Por lo tanto, h_B y $\vartheta = (1 - h_{B^1}) l_{\hat{B}}$ tienen soportes disjuntos. Tenemos ahora que:

$$J_2 = \iint \big(k(x, y), w\big)_{\mathbb{H}}\, h_B(y)(1 - h_{B^1}(x)) l_{\hat{B}}(x)\, d\mu(x) d\mu(y).$$

Estimamos:

$$|J_2| \leq \int_{y \in \mathfrak{c}^4 B} \left| \int_{x \in \hat{B}} \Big(k(x, y), w\Big)_{\mathbb{H}}\, h_B(y)(1 - h_{B^1}(x)) l_{\hat{B}}(x)\, d\mu(x) \right| d\mu(y)$$

(Si el integrando no se anula en el par (x, y), entonces $d(x, y) \geq \mathfrak{c}^4 s$, porque de lo contrario $d(x, z) \leq A(d(x, y) + d(y, z)) \leq 2A\mathfrak{c}^4 s = 16A^5 s < 21A^5 s \leq d(x, z)$, debido al soporte de ϑ, lo cual da una contradicción. Luego:)

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\int h'_{\hat{B}}} \int_{y \in \mathfrak{c}^4 B} \left| \int_{\mathfrak{c}^4 s \leq d(x, y) \leq 2A\hat{s}} \Big(k(x, y), w\Big)_{\mathbb{H}}\, h_B(y)(1 - h_{B^1}(x)) h'_{\hat{B}}(x)\, d\mu(x) \right| d\mu(y) \\
&\leq \frac{1}{\int h'_{\hat{B}}} \int_{y \in \mathfrak{c}^4 B} \int_{\mathfrak{c}^4 s \leq d(x, y) \leq 2A\hat{s}} |k(x, y)|_{\mathbb{H}}\; d\mu(x) d\mu(y)
\end{aligned}$$

(Desigualdad de Hölder:)

$$\leq \frac{1}{\mu(\hat{B})} \int_{y \in \mathfrak{c}^4 B} \left(\int_{\mathfrak{c}^4 s \leq d(x,y) \leq 2A\hat{s}} |k(x,y)|_{\mathbb{H}}^r \; d\mu(x) \right)^{1/r} \mu(2A\hat{B})^{1/r'} d\mu(y)$$
$$\leq \frac{1}{\mu(\hat{B})} \int_{y \in \mathfrak{c}^4 B} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{c}^4 s A^m \leq d(x,y) \leq \mathfrak{c}^4 s A^{m+1}} |k(x,y)|_{\mathbb{H}}^r \; d\mu(x) \right)^{1/r} \mu(2A\hat{B})^{1/r'} d\mu(y)$$

(Condición de tamaño L^r-Dini:)

$$\leq \frac{1}{\mu(\hat{B})} \int_{y \in c^4 B} \sum_{m=0}^{\infty} (\mathfrak{c}^4 s A^m)^{-\nu/r'} \mu(2A\hat{B})^{1/r'} d\mu(y)$$
$$\leq \frac{1}{\mu(\hat{B})} \mu(\mathfrak{c}^4 B) C (\mathfrak{c}^4 s)^{-\nu/r'} \mu(2A\hat{B})^{1/r'}.$$

(Condición 4.1.5.1:)

$$\leq \frac{1}{\mu(\hat{B})} \mu(\mathfrak{c}^4 B) C \mu(\mathfrak{c}^4 B)^{-1/r'} \mu(2A\hat{B})^{1/r'}.$$

(Como $2A \leq \mathfrak{a}$ y $\hat{B}$ es doblante:)

$$\leq C\mathfrak{b} \left(\frac{\mu(\mathfrak{c}^4 B)}{\mu(\hat{B})} \right)^{1/r}$$

(Como $\mathfrak{c}^4 s \leq \hat{s}$, tenemos $\mathfrak{c}^4 B \subset \hat{B}$, luego:)

$$\leq C.$$

(2do caso:) Ahora analizamos: $\mathfrak{c}^6 s > \hat{s}$.
Tenemos en particular que $s \leq \hat{s} < \mathfrak{c}^6 s$. O sea que $s \approx \hat{s}$.
La función h_B está soportada en $\mathfrak{c}^4 B \subset \mathfrak{c}^4 \hat{B}$.
La función $h'_{\hat{B}}$ está soportada en $\mathfrak{c}^1 \hat{B} \subset \mathfrak{c}^4 \hat{B}$.
Luego, ambas funciones están soportadas en $\mathfrak{c}^4 \hat{B}$. Aplicamos la Propiedad de Acotación Débil y obtenemos:

$$\left| \left\langle T h_B, l_{\hat{B}} w \right\rangle \right| = \frac{1}{\int h_{\hat{B}}} \left| \left\langle T h_B, h'_{\hat{B}} w \right\rangle \right|$$
$$\leq \frac{1}{\mu(\hat{B})} \mu(\rho \mathfrak{c}^4 \hat{B}) C \hat{s}^{2\gamma} \|h_B\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)} \|h'_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq \frac{1}{\mu(\hat{B})} \mu(\mathfrak{a}\hat{B}) \, C\hat{s}^{2\gamma} \, C s^{-\gamma} C \hat{s}^{-\gamma}$$

(Usando que $s \approx \hat{s}$, y que $\hat{B}$ es doblante:)

$$\leq \mathfrak{b} C.$$

La prueba de que $\left| \left\langle T^*(h_B w), l_{\hat{B}} \right\rangle \right| \leq C \, |w|_{\mathbb{H}}$, es análoga.

□

4.4.11. Lema. Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$ asociado a un núcleo $k(x,y)$ que satisface las condiciones de tamaño de L^r-Dini, de L^r-suavidad, y tal que T es débilmente acotado de orden γ.

Para cada función $g \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$ y cada bola B, se tiene que:

$$\left|\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g]\right|_{\mathbb{H}} \leq C_g, \qquad \left|\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}\right|_{\mathbb{H}} \leq C \tag{4.4.11.a}$$

donde la constante C_g sólo depende de la función g, pero no de B, y la constante C depende del operador T, y no depende de g ni de B.

Asimismo, para cada función $f \in BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$, cada vector $w \in \mathbb{H}$ **fijo**, y cada bola B, se tiene que:

$$\left|\mathtt{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}[f,w]\right|_{\mathbb{H}} \leq C\,|w|_{\mathbb{H}} + C_f, \qquad \left|\bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}\right|_{\mathbb{H}} \leq C \tag{4.4.11.b}$$

donde la constante C_f sólo depende la función f, pero no de w ni de B, y la constante C depende del operador T, y no depende de f, ni de w, ni de B.

Demostración. Por el Lema previo:

$$\left|\left\langle Th_B, l_{\hat{B}}w\right\rangle\right| \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\,.$$

También para T^* tendremos:

$$\left|\left\langle T^*(h_B w), l_{\hat{B}}\right\rangle\right| \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\,.$$

Por Lema 4.4.4, se tiene:

$$\begin{aligned}
\left(\int I_B 1(x) l_{\hat{B}}(x)d\mu(x), w\right)_{\mathbb{H}} &\leq C\mu(\mathfrak{c}^1 B)\hat{s}^\gamma \|l_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\,|w|_{\mathbb{H}}\\
&\leq C\mu(\mathfrak{c}^1 \hat{B})\hat{s}^\gamma \|l_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\,|w|_{\mathbb{H}}\\
&\leq C\mu(\mathfrak{a}\hat{B})\hat{s}^\gamma \|l_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\,|w|_{\mathbb{H}}\\
&\leq C\mathfrak{b}\mu(\hat{B})\hat{s}^\gamma \|l_{\hat{B}}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\,|w|_{\mathbb{H}}\\
&\leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\,,
\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\left|\int \left(I_B^{(*)}(1w)(x), l_{\hat{B}}(x)\right)_{\mathbb{H}}\right| d\mu(x) \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\,.$$

Observando que:

$$l_{\hat{B}}(x) = \frac{h'_{\hat{B}}(x)}{\int h'_{\hat{B}}} \leq \frac{1}{\int_{\hat{B}} 1} \leq \frac{1}{\mu(\hat{B})},$$

y tomando $g \in BMO_\rho(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, calculamos:

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle g - m_{A\hat{B}}g, l_{\hat{B}}w\right\rangle\right| &\leq \frac{C}{\mu(\hat{B})}\int_{A\hat{B}} \left|g(x) - m_{A\hat{B}}g\right|_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)\,|w|_{\mathbb{H}}\\
&\leq \frac{C}{\mu(\hat{B})}\int_{A\hat{B}} \left|g(x) - m_{A\hat{B}}g\right|_{\mathbb{H}}\,d\mu(x)\,|w|_{\mathbb{H}}
\end{aligned}$$

(Definición de BMO_ρ:)

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{\mu(\hat{B})}\mu(\rho A\hat{B})\|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\,|w|_{\mathbb{H}}\\
&\leq \frac{C}{\mu(\hat{B})}\mu(\mathfrak{a}\hat{B})\|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\,|w|_{\mathbb{H}}
\end{aligned}$$

(Usando que $\hat{B}$ es una bola doblante:)

$$\leq C\mathfrak{b}\|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\,|w|_{\mathbb{H}}\,.$$

De modo análogo se puede probar que para $f\in BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\left\langle (f-m_{A\hat{B}}f),l_{\hat{B}}\right\rangle\right|\leq C\|f\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n)}.$$

Estas estimaciones, junto al Lema de Representación de Riesz en $\mathbb{H}$, en donde sea aplicable, culminan la prueba del Lema. □

4.4.12. Lema. Una expresión para Th_B: Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$ asociado a un núcleo $k(x,y)$ que satisface las condiciones de L^r-tamaño y de L^r-suavidad, y tal que T es débilmente acotado de orden γ.

Si $T1=g$ con $g\in BMO_\rho(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, entonces, dada una bola $B=B_r(z)$:

$$\left\langle Th_B,\vec{\psi}\right\rangle=\int\Big(g(x)-m_{A\hat{B}}(g),\vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}d\mu(x)+\left(\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g],\int\vec{\psi}(x)d\mu(x)\right)_{\mathbb{H}}-\int\Big(I_B1(x),\vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}d\mu(x),$$

para cualquier $\vec{\psi}\in\Lambda^\gamma(B,\mathbb{H})$.

Nota: En el caso en que $\mathbb{H}=\mathbb{C}$ y la bola B es doblante (coincide con $\hat{B}$), se obtiene el Teorema 2.18 de **[MST]**.

Demostración. Dada $\vec{\psi}\in\Lambda^\gamma(B,\mathbb{H})$, tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle Th_B+I_B1,\vec{\psi}\right\rangle&=\left\langle Th_B+I_B1,\vec{\psi}-\left(\int\vec{\psi}\right)l_{\hat{B}}\right\rangle+\left\langle Th_B+I_B1,\left(\int\vec{\psi}\right)l_{\hat{B}}\right\rangle\\&=\left\langle g,\vec{\psi}-\left(\int\vec{\psi}\right)l_{\hat{B}}\right\rangle+\left\langle Th_B+I_B1,l_{\hat{B}}\int\vec{\psi}\right\rangle\\&=\int\Big(g(x)-m_{A\hat{B}}g,\vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}d\mu(x)+\left(m_{A\hat{B}}g,l_{\hat{B}}\int\vec{\psi}\right)_{\mathbb{H}}\\&\quad-\left\langle g,l_{\hat{B}}\int\vec{\psi}\right\rangle+\left\langle Th_B+I_B1,l_{\hat{B}}\int\vec{\psi}\right\rangle\\&=\int\Big(g(x)-m_{A\hat{B}},\vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}d\mu(x)+\left(\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g],\int\vec{\psi}\right)_{\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

□

4.4.13. Lema. Una expresión para $T^*(h_Bw)$: Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$ asociado a un núcleo $k(x,y)$ que satisface las condiciones de L^r-tamaño y L^r-suavidad, y tal que T es débilmente acotado de orden γ.

Sea $w\in\mathbb{H}$ un vector prefijado

Si $T^*(1w)=f$ con $f\in BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$, entonces, dada una bola $B=B_s(z)$:

$$\left\langle T^*(h_Bw),\phi\right\rangle=\int(f(x)-m_{A\hat{B}}(f))\phi(x)d\mu(x)+\mathtt{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}[f,w]\int\phi(x)d\mu(x)-\int I_B^{(*)}(1w)(x)\phi(x)d\mu(x),$$

para cualquier $\phi\in\Lambda^\gamma(B)$.

Demostración. Dada $\phi \in \Lambda^\gamma(B)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle T^*(h_B w) + I_B^{(*)}(1w), \phi \right\rangle &= \left\langle T^*(h_B w) + I_B^{(*)}(1w), \phi - \left(\int \phi\right) l_{\hat{B}} \right\rangle + \left\langle T^*(h_B w) + I_B^{(*)}(1w), \left(\int \phi\right) l_{\hat{B}} \right\rangle \\
&= \left\langle f, \phi - \left(\int \phi\right) l_{\hat{B}} \right\rangle + \left\langle T^*(h_B w) + I_B^{(*)}(1w), l_{\hat{B}} \int \phi(x) d\mu(x) \right\rangle \\
&= \int (f(x) - m_{A\hat{B}} f)\phi(x) d\mu(x) + m_{A\hat{B}} f \int \phi \\
&\quad - \left\langle f, l_{\hat{B}} \int \phi \right\rangle + \left\langle T^*(h_B w) + I_B^{(*)}(1w), l_{\hat{B}} \int \phi \right\rangle \\
&= \int (f(x) - m_{A\hat{B}})\phi(x) d\mu(x) + \mathsf{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}[f,w] \int \phi.
\end{aligned}$$

□

4.4.14. Expresiones para Th_B y $T^*(h_B w)$. Resumimos a continuación las expresiones halladas en las dos proposciones anteriores, y damos a su vez formas alternativas, que serán útiles para separar los casos en que $T1 = 0$ y/o $T^*(1w) = 0$, y en los casos en que eso no ocurre.

Asumimos que B es una bola dada, $\phi \in \Lambda^\gamma(B)$, $\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma(B, \mathbb{H})$, $w \in \mathbb{H}$, $g \in BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, $f \in BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$:

(4.4.14.a)
$$\begin{aligned}
\left\langle Th_B, \vec{\psi} \right\rangle &= \int \left(g(x) - m_{A\hat{B}}(g), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&\quad + \left(\mathsf{C}_{B,\hat{B}}[g], \int \vec{\psi}(x) d\mu(x)\right)_{\mathbb{H}} - \int \left(I_B 1(x), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)
\end{aligned}$$

(4.4.14.a')
$$\begin{aligned}
\left\langle Th_B, \vec{\psi} \right\rangle &= \int \left(g(x) - m_{A\hat{B}}(g), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) - \left\langle (g - m_{A\hat{B}}(g)), l_{\hat{B}} \int \vec{\psi} \right\rangle \\
&\quad + \left(\bar{\mathsf{C}}_{B,\hat{B}}, \int \vec{\psi}(x) d\mu(x)\right)_{\mathbb{H}} - \int \left(I_B 1(x), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)
\end{aligned}$$

(4.4.14.b)
$$\begin{aligned}
\left\langle T^*(h_B w), \phi \right\rangle &= \int (f(x) - m_{B,\hat{B}}(f))\phi(x) d\mu(x) \\
&\quad + \mathsf{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}[f,w] \int \phi(x) d\mu(x) - \int I_B^{(*)}(1w)(x)\, \phi(x)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

(4.4.14.b')
$$\begin{aligned}
\left\langle T^*(h_B w), \phi \right\rangle &= \int (f(x) - m_{B,\hat{B}}(f))\phi(x) d\mu(x) - \left\langle (f - m_{A\hat{B}}(f)), l_{\hat{B}} \right\rangle \int \phi(x) d\mu(x) \\
&\quad + \left(\bar{\mathsf{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}, w\right)_{\mathbb{H}} \int \phi(x) d\mu(x) - \int I_B^{(*)}(1w)(x)\, \phi(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

4.4.15. Corolario. Sea T un operador que satisface todas las condiciones del Lema (4.4.12). Si $g \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, entonces $\left|\left\langle Th_B, \vec{\psi} \right\rangle\right| \leq C \|\vec{\psi}\|_{L^1_\mu(B,\mathbb{H})}$, para toda $\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma(B, \mathbb{H})$.

Recíprocamente: si $\left|\left\langle Th_B, \vec{\psi} \right\rangle\right| \leq C \|\vec{\psi}\|_{L^1_\mu(B,\mathbb{H})}$ para cualquier $\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma(B, \mathbb{H})$, donde C es una constante absoluta que no depende de B, entonces $g \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

Demostración. La primer parte se deduce fácilmente de la fórmula del Lema 4.4.12, ya que:

$$\left| \int \left((g(x) - m_{A\hat{B}}(g)), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \right| \leq \int |g(x) - m_{A\hat{B}}(g)|_{\mathbb{H}} \left|\vec{\psi}(x)\right|_{\mathbb{H}} d\mu(x) \leq 2\|g\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \|\vec{\psi}\|_{L^1_\mu(B,\mathbb{H})},$$

y además:

$$\begin{aligned}
\left| \int \left(I_B 1(x), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \right| &\leq \int |I_B 1(x)|_{\mathbb{H}} \left|\vec{\psi}(x)\right|_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&\leq C \|I_B 1\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \|\vec{\psi}\|_{L^1_\mu(B,\mathbb{H})} \\
&\leq C \|\vec{\psi}\|_{L^1_\mu(B,\mathbb{H})}
\end{aligned}$$

Para ver la recíproca, usamos la fórmula (4.4.14.a). Igual que antes, podemos ver que $\left|\int \left(I_B 1(x), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)\right| \leq C\|\vec{\psi}\|_{L^1_\mu(B,\mathbb{H})}$.

Además, como $\left|\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g]\right|_{\mathbb{H}} \leq C$, tenemos que $\left|\left(\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g], \int \vec{\psi}\right)_{\mathbb{H}}\right| \leq C\|\vec{\psi}\|_{L^1_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}$.

Esto implica, $g - m_{A\hat{B}}(g) \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ (por dualidad, pues $\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ es un subconjunto denso de $L^1_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$). Pero como $m_{A\hat{B}}(g)$ es un elemento constante de $\mathbb{H}$, resulta que g debe ser una función acotada. □

4.4.16. Corolario. Sea T un operador que satisface todas las condiciones del Lema (4.4.13). Si $T^*w = 0$ para cada vector $w \in \mathbb{H}$, entonces $\left|\langle T^*(h_B w), \phi\rangle\right| \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\,\|\phi\|_{L^1_\mu(B)}$, para toda $\phi \in \Lambda^\gamma(B)$, con constante C independiente de w y de B.

Demostración. Es claro que para $\phi \in \Lambda^\gamma(B)$ se tiene que:

$$\left|\left(\bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}, w\right)_{\mathbb{H}} \int \phi(x)\,d\mu(x)\right| \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\,\|\phi\|_{L^1_\mu(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\left|\int I^{(*)}_B(1w)(x)\phi(x)\,d\mu(x)\right| &\leq \int \left|I^{(*)}_B(1w)(x)\right| |\phi(x)|\,d\mu(x)\\ &\leq C\|I^{(*)}_{\hat{B}}(1w)\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{L^1_\mu(B)}\\ &\leq C\,|w|_{\mathbb{H}}\,\|\phi\|_{L^1_\mu(B)}\end{aligned}$$

□

Observación: El último Corolario, correspondiente al operador adjunto T^*, requiere de más hipótesis que el correspondiente Corolario respecto T. Lo hacemos así por dos razones. En primer lugar, en el futuro no aplicaremos la generalidad de hipótesis tales como que $T^*(1w)$ es una función f_w de $BMO_\rho(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$.

Y en segundo término, ocurre que el análisis de una tal hipótesis trae complicaciones que nos alejan de nuestro objetivo central, ya que tendríamos una función f_w distinta para cada vector w, y eso en principio no nos permitiría tener una constante C uniforme, sin exigir previamente restricciones sobre el tipo de funciones f_w.

La más sencilla de estas restricciones es pedir que $T^*(1w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{H}$.

4.4.17. Definición. Sea T un operador que satisface las condiciones del Lema (4.4.12). Dados $\phi \in \Lambda^\gamma(B)$ y $x \in B$, definimos:

$$T^B\phi(x) = (g(x) - m_{A\hat{B}}g)\phi(x) + \mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g]\phi(x) - I_B 1(x)\phi(x) + \int [\phi(y) - \phi(x)]k(x,y)h_B(y)\,d\mu(y).$$

Observación: La función $T^B\phi(x)$ es $\mathbb{H}$-valuada.

4.4.18. Proposición. Sea T un operador que satisface las condiciones del Lema 4.4.12. Sean $B_1 = B_{r_1}(z_1) \subset B_2 = B_{r_2}(z_2)$ y $\phi \in \Lambda^\gamma(B_1)$. Entonces:

$$T^{B_2}\phi(x) = T^{B_1}\phi(x), \qquad \text{para } x \in B_1.$$

Demostración. Consideremos las mínimas bolas doblantes $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ concéntricas con B_1 y B_2, respectivamente.

Primero observemos que

$$\begin{aligned}\left(\mathtt{C}_{B_2,\hat{B}_2}[g] - \mathtt{C}_{B_1,\hat{B}_1}[g], w\right)_{\mathbb{H}} &= \left\langle Th_{B_2} + I_{B_2}1 - (g - m_{A\hat{B}_2}g), (l_{\hat{B}_2} - l_{\hat{B}_1})w\right\rangle\\ &+ \left\langle Th_{B_2} + I_{B_2}1 - (g - m_{A\hat{B}_2}g), l_{\hat{B}_1}w\right\rangle\\ &- \left\langle Th_{B_1} + I_{B_1}1 - (g - m_{A\hat{B}_1}g), l_{\hat{B}_1}w\right\rangle\end{aligned}$$

(La función $l_{\hat{B}_2} - l_{\hat{B}_1}$ tiene integral nula, luego se puede usar que $T1 = g$:)

$$= \left\langle \underbrace{T1 - g}_{=0}, (l_{\hat{B}_2} - l_{\hat{B}_1})w \right\rangle$$

($m_{A\hat{B}_2}g$ es un elemento de $\mathbb{H}$ constante respecto x)

$$\begin{aligned}
&+ \int \Big(m_{A\hat{B}_2}g,\, w\Big)_{\mathbb{H}} (l_{\hat{B}_2}(x) - l_{\hat{B}_1}(x))d\mu(x) \\
&+ \Big\langle Th_{B_2} + I_{B_2}1 - (g - m_{A\hat{B}_2}g), l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle \\
&- \Big\langle Th_{B_1} + I_{B_1}1 - (g - m_{A\hat{B}_1}g), l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle
\end{aligned}$$

(Usamos que $l_{\hat{B}_2} - l_{\hat{B}_1}$ tiene integral nula, y que $\int l_{\hat{B}_1} = 1$:)

$$= 0 + \Big\langle T(h_{B_2} - h_{B_1}) + I_{B_2}1 - I_{B_1}1, l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle + \Big(m_{\hat{B}_2}g - m_{\hat{B}_1}g, w\Big)_{\mathbb{H}}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
I_{B_1}1(x) - I_{B_2}1(x) &= \int (k(x,y) - k(z_1,y))(1 - h_{B_1}(y))d\mu(y) \\
&\quad - \int (k(x,y) - k(z_2,y))(1 - h_{B_2}(y))d\mu(y) \\
&= \int k(x,y)(h_{B_2}(y) - h_{B_1}(y))d\mu(y) \\
&\quad + \int (k(z_2,y) - k(z_1,y))(1 - h_{B_2}(y))d\mu(y) \\
&\quad - \int k(z_1,y)(h_{B_2}(y) - h_{B_1}(y))d\mu(y) \\
&= \int k(x,y)(h_{B_2}(y) - h_{B_1}(y)) - I_{B_2}1(z_1) \\
&\quad - \int k(z_1,y)(h_{B_2}(y) - h_{B_1}(y))
\end{aligned}$$

(Claramente, la función $(h_{B_2} - h_{B_1})(y)$ vale 0 cuando $y \in B_1$, así que si $x \in B_1$, tenemos:)

(*)
$$= T(h_{B_2} - h_{B_1})(x) - I_{B_2}1(z_1) - T(h_{B_2} - h_{B_1})(z_1).$$

También tenemos:

$$\Big\langle T(h_{B_2} - h_{B_1}) + I_{B_2}1 - I_{B_1}1, l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle = \Big\langle T(h_{B_2} - h_{B_1}), l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle - \Big\langle I_{B_1}1 - I_{B_2}1, l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle$$

(Usando (*):)

$$\begin{aligned}
&= \Big\langle T(h_{B_2} - h_{B_1}), l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle \\
&\quad - \Big(\Big\langle T(h_{B_2} - h_{B_1}) - I_{B_2}1(z_1) - T(h_{B_2} - h_{B_1})(z_1), l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle \Big) \\
&= \Big\langle I_{B_2}1(z_1) + T(h_{B_2} - h_{B_1})(z_1), l_{\hat{B}_1}w \Big\rangle \\
&= \int \Big(I_{B_2}1(z_1) + T(h_{B_2} - h_{B_1})(z_1), l_{\hat{B}_1}(x)w \Big)_H d\mu(x) \\
&= \Big(I_{B_2}1(z_1) + T(h_{B_2} - h_{B_1})(z_1), w \Big)_H \underbrace{\int l_{\hat{B}_1} d\mu}_{=1}.
\end{aligned}$$

Más aún,

$$\int(\phi(y)-\phi(x))k(x,y)(h_{B_2}(y)-h_{B_1}(y))d\mu(y) = \int_{B_1}\phi(y)k(x,y)(h_{B_2}(y)-h_{B_1}(y))d\mu(y)$$
$$-\phi(x)\int k(x,y)(h_{B_2}(y)-h_{B_1}(y))d\mu(y)$$

(El soporte del primer integrando está en el complemento de B_1:)

$$= -\phi(x)T(h_{B_2}-h_{B_1})(x).$$

Entonces usando estas igualdades, y la definición de $T^{B_2}-T^{B_1}$, para todo $w\in\mathbb{H}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\Big(T^{B_2}\phi(x)-T^{B_1}\phi(x),w\Big)_{\mathbb{H}} &= \Big((m_{A\hat{B}_1}(g)-m_{A\hat{B}_2}(g))\phi(x),w\Big)_{\mathbb{H}}\\ &\quad+\Big((m_{A\hat{B}_2}(g)-m_{A\hat{B}_1}(g))\phi(x),w\Big)_{\mathbb{H}}+\Big(T(h_{B_2}-h_{B_1})(z_1)+I_{B_2}1(z_1)\phi(x),w\Big)_{\mathbb{H}}\\ &\quad+\Big(T(h_{B_2}-h_{B_1})(x)\phi(x)-(T(h_{B_2}-h_{B_1})(z_1)+I_{B_2}1(z_1))\phi(x),w\Big)_{\mathbb{H}}\\ &\quad-\left(\phi(x)\int_{B_1}k(x,y)(h_{B_2}(y)-h_{B_1}(y))d\mu(y),w\right)_{\mathbb{H}}\\ &=0,\end{aligned}$$

obteniendo así el resultado buscado. □

4.4.19. Definición. Sea $w\in\mathbb{H}$ un vector fijo, y sea T un operador que satisface las condiciones del Lema (4.4.13). Dados $\psi\in\Lambda^\gamma(B)$ (una función a valores escalares) y $x\in B$, declaramos:

$$S_w^B\psi(x) = (f(x)-m_{A\hat{B}}f)\psi(x)+\mathtt{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}[f,w]\psi(x)-I_B^{(*)}(1w)(x)\psi(x)+\int[\psi(y)-\psi(x)]\left(k^*(x,y),w\right)_{\mathbb{H}}h_B(y)\,d\mu(y).$$

<u>Observación:</u> La función $S_w^B\psi(x)$ toma valores complejos (escalares).

4.4.20. Proposicion. Sea T un operador que satisface las mismas condiciones que el Lema 4.4.13.
Sean $B_1=B_{r_1}(z_1)\subset B_2=B_{r_2}(z_2)$ y $\psi\in\Lambda^\gamma(B_1)$. Entonces:

(4.4.20.1) $$S_w^{B_2}\psi(x)=S_w^{B_1}\psi(x),\qquad \text{para } x\in B_1.$$

Demostración. Sea $\bar{S}_w:\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\to(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}))'$, definido por medio de

$$\bar{S}_w\psi=T^*(\psi\, w),\qquad\qquad (\text{toda } \psi\in\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})).$$

El operador S_w satisface las hipótesis de la proposición 4.4.18, respecto $\mathbb{C}$ considerado como espacio de Hilbert (en lugar de $\mathbb{H}$), con f en lugar de g, y con constante $C\,|w|_{\mathbb{H}}$ asociada a las cotas del operador S y de su núcleo (ver Subsección 4.3.5).

Queda definida la familia de operadores $\bar{S}_w^B$, según la fórmula 4.4.17 (con $\bar{S}_w$ en lugar de T).

De allí se desprende la validez de la proposición 4.4.18 para la familia de operadores S_w^B. Es decir:

$$\bar{S}_w^{B_2}\psi(x)=\bar{S}_w^{B_1}\psi(x),\qquad (x\in B_1),$$

para toda $\psi\in\Lambda^\gamma(B)$.

No obstante, para cada bola B se tiene que $\bar{S}_w^B=S_w^B$, lo cual completa la demostración. □

4.4.21. Definición. Dada $\phi\in\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, la proposición 4.4.18 nos permite definir $\tilde{T}\phi$ como la función

$$\tilde{T}\phi(x)=T^B\phi(x),$$

donde B es una bola que contiene al soporte de ϕ, y $x\in B$.

Ahora probamos el resultado principal de esta sección:

4.4.22. Teorema. Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$, para todo $0<\gamma\leq\alpha$, con un núcleo asociado k que satisface las condiciones (4.3.2.b) y (4.3.2.c) , y tal que $T1=g$, $g\in BMO_\rho(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$.

Supongamos además que T satisface la Propiedad de Conmutación de Meyer.

Para cualquier η, $0<\eta\leq\alpha$, tenemos que si T es débilmente acotado de orden η, entonces para cualquier $\phi\in\Lambda_0^\eta(\mathbb{R}^n)$:

$$T\phi=\tilde{T}\phi.$$

Observación: En el Teorema correspondiente para el caso de espacios de tipo homogéneo (ver [**MST**]), la Propiedad de Conmutación de Meyer no se pide, sino que se prueba previamente.

También en [**MST**] se tiene el resultado recíproco, que no vale en el contexto de medidas no doblantes, pero la dirección que necesitamos para nuestros propósitos es la del Teorema 4.4.22.

Por otra parte, como veremos en la sección 4.7, la Propiedad de Conmutación de Meyer se cumple para la mayoría de los operadores que surgen en las aplicaciones, por ejemplo, para operadores con núcleo antisimétrico, además de aquellos con núcleo integrable.

Demostración. Sean $\phi\in\Lambda^\eta(B),\vec{\psi}\in\Lambda^\eta(B,\mathbb{H})$.

Entonces por la Propiedad de Conmutación de Meyer:

$$\left\langle T\phi,\vec{\psi}\right\rangle=\left\langle Th_B,\phi\vec{\psi}\right\rangle+\iint[\phi(y)-\phi(x)]\left(k(x,y)h_B(y),\vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}}d\mu(x)d\mu(y),$$

y ahora se aplica el Lema (4.4.12). □

4.4.23. Definición. Dada $\psi\in\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, y dados un vector fijo $w\in\mathbb{H}$, la Proposición 4.4.20 nos permite definir $\tilde{S}_w\psi$ como la función

$$\tilde{S}_w\psi(x)=S_w^B\psi(x)\qquad\qquad(x\in B),$$

donde B es una bola que contiene al soporte de ψ.

Tenemos el siguiente:

4.4.24. Teorema. Sea T un operador lineal continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))'$, para todo $0<\gamma\leq\alpha$, con un núcleo asociado k que satisface las condiciones (4.3.2.b) y (4.3.2.d).

Sea $w\in\mathbb{H}$ un vector prefijado, y supongamos que $T^*(1w)=f$, $f\in BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$.

Supongamos además que T satisface la Propiedad de Conmutación de Meyer.

Para cualquier η, $0<\eta\leq\alpha$, tenemos que si T es débilmente acotado de orden η, entonces para cualquier $\psi\in\Lambda_0^\eta(\mathbb{R}^n)$:

$$T^*(\psi\,w)=\tilde{S}_w\psi.$$

Demostración. Sean $\phi\in\Lambda^\eta(B),\psi\in\Lambda^\eta(B)$.

Entonces por la Propiedad de Conmutación de Meyer de T^*:

$$\left\langle T^*(\psi\,w),\phi\right\rangle=\left\langle T^*(h_B\,w),\phi\psi\right\rangle+\iint[\psi(y)-\psi(x)]\left(k(y,x)h_B(y),\phi(x)\,w\right)_{\mathbb{H}}d\mu(y)d\mu(x),$$

y ahora se aplica el Lema (4.4.13). □

4.4.25. Observación. Notar que si consideramos el operador

$$T\phi(x)=g(x)\phi(x),$$

y si T es débilmente acotado de orden γ, entonces

$$|g(x)|_{\mathbb{H}}\leq C,$$

para μ-casi todo punto en el soporte de μ.

Demostración. Sea x_0 un punto del soporte de μ, y sea $\{\hat{B}_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de bolas doblantes centradas en x_0 tales que sus respectivos radios $\hat{s}_j$ tienden a 0 cuando $j \to \infty$.

Sea $w \in \mathbb{H}$ un vector prefijado, y sin pérdida de generalidad supongamos que $|w|_{\mathbb{H}} = 1$.

Usando que $\int l_{\hat{B}_j} = 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\left(m_{\hat{B}_j}(g), w\right)_{\mathbb{H}}\right| &= \left|\int \left(m_{\hat{B}_j}(g), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| \\
&\leq \left|\int \left(m_{\hat{B}_j}(g) - g(x), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| + \left|\int \left(g(x), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| \\
&= \left|\int \left(m_{\hat{B}_j}(g) - g(x), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| + \left|\int \left(h_{\hat{B}_j} g(x), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| \\
&= \left|\int \left(m_{\hat{B}_j}(g) - g(x), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| + \left|\left\langle Th_{\hat{B}_j}, l_{\hat{B}_j}\right\rangle\right|.
\end{aligned}$$

Por la Propiedad de Acotación Débil, y por la Proposición 4.2.8, tenemos que

$$\left|\left\langle Th_{\hat{B}_j}, l_{\hat{B}_j}\right\rangle\right| \leq C.$$

Por otro lado, estimamos:

$$\begin{aligned}
\left|\int \left(m_{\hat{B}_j}(g) - g(x), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| &\leq \left|\int \left((m_{\hat{B}_j}(g) - m_{A\hat{B}_j}), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| \\
&\quad + \left|\int \left(m_{A\hat{B}_j}(g) - g(x), w\right)_{\mathbb{H}} l_{\hat{B}_j}(x)\, d\mu(x)\right| \\
&\leq \left|\left((m_{\hat{B}_j}(g) - m_{A\hat{B}_j}(g)), w\right)_{\mathbb{H}}\right| \\
&\quad + \frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \left|\int_{A\hat{B}_j} \left(m_{A\hat{B}_j}(g) - g(x), w\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)\right|.
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \left|\int_{A\hat{B}_j} \left(m_{A\hat{B}_j}(g) - g(x), w\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)\right| &\leq \frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \mu(\rho A\hat{B}_j) \|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})} \\
&\leq \frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \mu(\mathfrak{a}\hat{B}_j) \|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})}
\end{aligned}$$

(Y como $\hat{B}_j$ es doblante:)

$$\leq \mathfrak{b} \|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})}.$$

Además, calculamos:

$$\begin{aligned}
\left|m_{\hat{B}_j}(g) - m_{A\hat{B}_j}(g)\right| &= \left|\frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \int_{\hat{B}_j} \left(g(x) - m_{A\hat{B}_j}(g)\right) d\mu(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \int_{A\hat{B}_j} \left|g(x) - m_{A\hat{B}_j}(g)\right|_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \mu(\rho A\hat{B}_j) \|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})} \\
&\leq \frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \mu(\mathfrak{a}\hat{B}_j) \|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})} \\
&\leq \mathfrak{b} \|g\|_{BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})}.
\end{aligned}$$

En consecuencia hemos probado que para todo índice j:

$$\left|\frac{1}{\mu(\hat{B}_j)} \left(\int_{\hat{B}_j} g(x)\, d\mu(x), w\right)_{\mathbb{H}}\right| \leq C$$

Por el Lema de Diferenciación 4.1.15, se sigue que:

$$|g(x_0)|_{\mathbb{H}} \leq C,$$

como queríamos probar.

$\square$

4.4.26. Corolario. Sea T un operador que satisface las hipótesis y condiciones del Teorema 4.4.22. Entonces el núcleo $k(x,y)$ es 0 **sii** $T\phi(x) = \beta(x)\phi(x)$, con $\beta \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

Demostración. Asumir que $k = 0$. Entonces

$$T\phi(x) = (g(x) - m_{A\hat{B}}g)\phi(x) + \mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g]\phi(x) = (g(x) - m_{A\hat{B}}g + \mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g])\phi(x).$$

Por lo tanto, por la Observación anterior, $g(x) - m_{A\hat{B}}g + \mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g]$ debe ser acotado, pero como $\mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g]$ es acotado, esto nos dice que g debe ser acotada. Luego la función $\beta(x) = g(x) - m_{A\hat{B}}g + \mathtt{C}_{B,\hat{B}}[g]$ nos da la conclusión requerida. $\square$

4.5. Teoremas $T1 = 0$ y $T^*(1w) = 0$.

4.5.1. Antes de enunciar los resultados que nos interesan, conviene realizar separadamente estimaciones básicas que aparecen en la demostración del teorema $T1 = 0$.

La razón de hacerlo de este modo es que necesitaremos los mismos cálculos en contextos distintos. El primero de ellos será el teorema $T1 = 0$ de esta sección, y el segundo caso corresponde al adjunto de un operador antisimétrico, que se estudiará más adelante en este capítulo.

4.5.2. Proposición. Sea T un operador lineal continuo definido de $\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda^\gamma_0(\mathbb{R}^n))'_{\mathbb{H}}$ para cada γ, $0 < \gamma \leq \alpha$, débilmente acotado de orden η para algún η, $0 < \eta \leq \alpha$, y con un núcleo asociado k que satisface las condiciones de tamaño L^r-Dini y de L^r-suavidad para $\eta + \epsilon$ con $\epsilon > 0$.

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, y consideremos las bolas $B_1 = B_{d(x_1,x_2)}(x_1)$, $B = B_s(x_1)$ tal que $x_1, x_2 \in B$, $Ad(x_1,x_2) < s$.

Entonces las siguientes desigualdades son válidas:

(4.5.2.a) $$\int d(x_1,y)^\eta \tilde{k}(x_1,y) h_B(y) h_{B_1}(y)\, d\mu(y) \leq Cd(x_1,x_2)^\eta$$

(4.5.2.a') $$\int d(x_1,y)^\eta \tilde{k}^*(x_1,y) h_B(y) h_{B_1}(y)\, d\mu(y) \leq Cd(x_1,x_2)^\eta$$

(4.5.2.b) $$\int_{d(x_1,y)<\mathfrak{c}^4 d(x_1,x_2)} d(x_2,y)^\eta \tilde{k}(x_2,y)\, d\mu(y) \leq Cd(x_1,x_2)^\eta$$

(4.5.2.b') $$\int_{d(x_1,y)<\mathfrak{c}^4 d(x_1,x_2)} d(x_2,y)^\eta \tilde{k}^*(x_2,y)\, d\mu(y) \leq Cd(x_1,x_2)^\eta$$

Si $T1 \in L^\infty_\mu(R^n, \mathbb{H})$, entonces:

(4.5.2.c) $$\left| \int k(x_1,y) h_B(y)(1 - h_{B_1}(y)) d\mu(y) \right|_{\mathbb{H}} \leq C$$

Si $T^*(1w) = 0$, todo $w \in \mathbb{H}$, entonces:

(4.5.2.c') $$\left| \int k^*(x_1,y) h_B(y)(1 - h_{B_1}(y)) d\mu(y) \right|_{\mathbb{H}} \leq C$$

Además se cumple:

$$\int_{Ad(x_1,x_2)<d(x_1,y)} d(x_2,y)^\eta \left|k(x_1,y)-k(x_2,y)\right|_{\mathbb{H}} d\mu(y) \leq Cd(x_1,x_2)^\eta \tag{4.5.2.d}$$

$$\int_{Ad(x_1,x_2)<d(x_1,y)} d(x_2,y)^\eta \left|k^*(x_1,y)-k^*(x_2,y)\right|_{\mathbb{H}} d\mu(y) \leq C\delta(x_1,x_2)^\eta \tag{4.5.2.d'}$$

$$\int_{A^{j-2}(A-1)s_0<d(x,y)<2A^{j+2}s_0} \tilde{k}(x,y)d\mu(y) \leq C \tag{4.5.2.e}$$

$$\int_{A^{j-2}(A-1)s_0<d(x,y)<2A^{j+2}s_0} \tilde{k}^*(x,y)d\mu(y) \leq C. \tag{4.5.2.e'}$$

Demostración. **Prueba de (a):** Por Lema 4.4.2 tenemos

$$\begin{aligned}\int d(x_1,y)^\eta \tilde{k}(x_1,y)h_B(y)h_{B_1}(y)d\mu(y) &\leq C\int_{d(x_1,y)<\mathfrak{c}^4 d(x_1,x_2)} d(x_1,y)^\eta \tilde{k}(x_1,y)d\mu(y)\\ &\leq Cd(x_1,x_2)^\eta.\end{aligned}$$

Prueba de (a'): Análoga al caso anterior.

Prueba de (b): Por Lema 4.4.2:

$$\begin{aligned}\int_{d(x_1,y)<\mathfrak{c}^4 d(x_1,x_2)} d(x_2,y)^\eta \tilde{k}(x_2,y)d\mu(y) &\leq C\int_{d(x_2,y)<2A\mathfrak{c}^4 d(x_1,x_2)} d(x_2,y)^\eta \tilde{k}(x_2,y)d\mu(y)\\ &\leq Cd(x_1,x_2)^\eta.\end{aligned}$$

Prueba de (b'): Análoga al caso anterior.

Prueba de (c):

$$\left|\int k(x_1,y)h_B(y)(1-h_{B_1}(y))d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}}$$

(como $x_1 \notin \operatorname{sop}(h_B(1-h_{B_1}))$ y $B_1 \subset B$, y por definición del núcleo k asociado a T:)

$$\begin{aligned}&= \left|T(h_B - h_{B_1})(x_1)\right|_{\mathbb{H}}\\ &\leq \Big(\left|Th_B(x_1)\right|_{\mathbb{H}} + \left|Th_{B_1}(x_1)\right|_{\mathbb{H}}\Big)\end{aligned}$$

(la hipótesis $T1 \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$ permite aplicar el corolario 4.4.15:)

$$\leq C.$$

En el último paso hemos usado dualidad de los espacios de funciones. En efecto. El corolario 4.4.15 implica que Th_B es una función del espacio $L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, cuya norma $\|Th_B\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}$ está uniformemente acotada cuando se varía la bola B.

Prueba de (c'): Análoga al caso anterior, usando ahora 4.4.16.

Prueba de (d): Por la condición de L^r-suavidad:

$$\int_{Ad(x_1,x_2)<d(x_1,y)} d(x_2,y)^\eta \left|k(x_1,y)-k(x_2,y)\right|_{\mathbb{H}} d\mu(y)$$

(Desigualdad de Hölder:)

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{A^j Ad(x_1,x_2) \leq d(x_1,y) < A^{j+1} Ad(x_1,x_2)} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|_{\mathbb{H}} \, d\mu(y) \right)^{1/r} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{A^j Ad(x_1,x_2) \leq d(x_1,y) < A^{j+1} Ad(x_1,x_2)} d(x_2,y)^{\eta r'} d\mu(y) \right)^{1/r'}$$

(Propiedad de L^r-suavidad:)

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} (A^j d(x_1,x_2))^{-\nu/r'} \left(\frac{d(x_1,x_2)}{A^j d(x_1,x_2)} \right)^{\eta+\epsilon} (A^j d(x_1,x_2))^{\eta} (A^j d(x_1,x_2))^{\nu/r'}$$
$$\leq C d(x_1,x_2)^{\eta} \sum_{j=0}^{\infty} A^{-j\epsilon}$$
$$\leq C d(x_1,x_2)^{\eta}.$$

Prueba de (d'): Análoga al caso anterior.

Prueba de (e):

$$\int_{A^{j-2}(A-1)s_0 < d(x,y) < 2A^{j+2}s_0} \tilde{k}(x,y) d\mu(y)$$

(Desigualdad de Hölder:)

$$\leq C \left(\int_{A^{j-2}s_0 < d(x,y) < 2A^{j+2}s_0} \tilde{k}(x,y)^r d\mu(y) \right)^{1/r} (\mu(B_{2A^{j+2}s_0}(x)))^{1/r'}$$

(Propiedad L^r-Dini:)

$$\leq C.$$

Prueba de (e'): Análoga al caso anterior. □

4.5.3. Teorema. Sea T un operador lineal continuo definido de $\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$ para cada γ, $0 < \gamma \leq \alpha$, débilmente acotado de orden η para algún η, $0 < \eta \leq \alpha$, y con un núcleo asociado que satisface las condiciones de tamaño L^r-Dini y de L^r-suavidad para $\eta + \epsilon$ con $\epsilon > 0$.

Supongamos que T satisface la Propiedad de Conmutación de Meyer.

Si $T1 = 0_{\mathbb{H}}$ entonces

$$\|T\phi\|_{\Lambda^{\eta}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C \|\phi\|_{\Lambda^{\eta}(\mathbb{R}^n)}$$

y $T\phi$ es una función acotada, tal que para cualquier bola B_0 de radio s_0, que contiene al soporte de ϕ, se satisface:

$$\|T\phi\|_{L^{\infty}_{\mu}(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C \|\phi\|_{\Lambda^{\eta}(\mathbb{R}^n)} s_0^{\eta}$$

Además, la constante C en ambas desigualdades depende solamente de las constantes que aparecen en las relaciones de tamaño de L^r-Dini, de L^r-suavidad y la propiedad de acotación débil.

Demostración. Supongamos que $g = T1 = 0_{\mathbb{H}}$.

Dados $x_1, x_2 \in X$, $\phi \in \Lambda_0^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, y $B_1 = B_{d(x_1,x_2)}(x_1)$, consideramos $B = B_s(x_1)$ tal que $x_1, x_2 \in B$, *soporte*$(\phi) \subset B$, $Ad(x_1,x_2) < s$.

Queremos probar que $T^B\phi$ es una función de Lipschitz.
Como siempre, $\hat{B}$ será la mínima bola doblante concéntrica con B y que la contiene.
Estimamos la diferencia

$$\begin{aligned}\left|T^B\phi(x_1) - T^B\phi(x_2)\right|_{\mathbb{H}} &\leq \left|\mathsf{C}_{B,\hat{B}}[0]\right|_{\mathbb{H}} |\phi(x_1) - \phi(x_2)| \\ &\quad + |I_B 1(x_1)\phi(x_1) - I_B 1(x_2)\phi(x_2)|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \left|\int [\phi(y) - \phi(x_2)] k(x_2,y) h_B(y) d\mu(y) - \int [\phi(y) - \phi(x_1)] k(x_1,y) h_B(y) d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\leq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.\end{aligned}$$

Tenemos

$$\sigma_1 \leq \sup_B \left|\mathsf{C}_{B,\hat{B}}[0]\right|_{\mathbb{H}} \|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta = \sup_B \left|\bar{\mathsf{C}}_{B,\hat{B}}\right|_{\mathbb{H}} \|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta.$$

Por otro lado, como $I_B 1(x_1) = 0_{\mathbb{H}}$, por Lema 4.4.3 tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_2 &\leq C\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \left(\frac{d(x_1,x_2)}{s}\right)^\eta \\ &\leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s^\eta d(x_1,x_2)^\eta \frac{1}{s^\eta} \\ &\leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta.\end{aligned}$$

Para σ_3, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_3 &\leq \left|\int [\phi(y) - \phi(x_1)] k(x_1,y) h_B(y) h_{B_1}(y)\, d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \left|\int [\phi(y) - \phi(x_2)] k(x_2,y) h_B(y) h_{B_1}(y)\, d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \left|\int \{[\phi(y) - \phi(x_1)] k(x_1,y) - [\phi(y) - \phi(x_2)] k(x_2,y)\}\; h_B(y)(1 - h_{B_1}(y)) d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &= \sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33}.\end{aligned}$$

Por (4.5.2.a)

$$\sigma_{31} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} \int d(x_1,y)^\eta \tilde{k}(x_1,y) h_B(y) h_{B_1}(y) d\mu(y) \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta.$$

Por (4.5.2.b)

$$\sigma_{32} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} \int_{d(x_1,y) < \mathfrak{c}^4 d(x_1,x_2)} d(x_2,y)^\eta \tilde{k}(x_2,y) d\mu(y) \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta.$$

Escribimos

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &\leq |\phi(x_2) - \phi(x_1)| \left|\int k(x_1,y) h_B(y)(1 - h_{B_1}(y)) d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \int |\phi(y) - \phi(x_2)|\, |k(x_1,y) - k(x_2,y)|_{\mathbb{H}}\, h_B(y)(1 - h_{B_1}(y)) d\mu(y) \\ &= \sigma_{331} + \sigma_{332}.\end{aligned}$$

Como $T1 = 0$ es, ciertamente, una función de $L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, se puede aplicar (4.5.2.c), obteniendo:

$$\sigma_{331} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta.$$

Por otro lado, por (4.5.2.d):

$$\begin{aligned}\sigma_{332} &\leq \|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathfrak{c}^3 d(x_1,x_2) < d(x_1,y)} d(x_2,y)^\eta\, |k(x_1,y) - k(x_2,y)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(y) \\ &\leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta.\end{aligned}$$

Finalmente, probaremos que si $soporte(\phi) \subset B_0$ (bola de radio s_0),

$$\|T\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.$$

Para ello escribimos, para una bola B arbitraria:

$$\left|T^B\phi(x)\right|_{\mathbb{H}} \leq \left|\mathsf{C}_{B,\hat{B}}[0]\right|_{\mathbb{H}} \|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} + \|I_B 1\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} + \left|\int [\phi(y)-\phi(x)]k(x,y)h_B(y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} =: I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 \leq C\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.$$
$$I_2 \leq C\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.$$

Nos resta probar que

$$\left|\int [\phi(y)-\phi(x)]k(x,y)h_B(y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta,$$

para cualquier bola B suficientemente grande.

Sean $B_0 = B_{s_0}(z)$, $B_1 = B_{A^2 s_0}(z)$ y $B = B_s(z)$ tales que $soporte(\phi) \subset B_0$ y $A^2\mathfrak{c}^3 s_0 < s$.

Asumamos primero que $x \notin B_{A^2 s_0}(z)$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\int [\phi(y)-\phi(x)]k(x,y)h_B(y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} &= \left|\int \phi(y)k(x,y)h_B(y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &= \left|\int \phi(y)k(x,y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

En esta integral los puntos relevantes y satisfacen $d(z,y) < s_0$, pues $y \in soporte(\phi)$, y $d(x,z) > A^2 s_0$.

Entonces, si $A^j s_0 < d(x,z) \leq A^{j+1}s_0$, $j \geq 2$, tenemos

$$A^{j-2}(A-1)s_0 < d(x,y) \leq 2A^{j+2}s_0.$$

Por lo tanto, para $x \in B_{A^{j+1}s_0}(z) \setminus B_{A^j s_0}(z)$, $j \geq 2$, tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int \phi(y)k(x,y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} &= \left|\int_{A^{j-2}(A-1)s_0 < \delta(x,y) < 2A^{j+2}s_0} \phi(y)k(x,y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{A^{j-2}(A-1)s_0 < d(x,y) < 2A^{j+2}s_0} \tilde{k}(x,y)d\mu(y)\end{aligned}$$

(Aplicando (4.5.2.e):)

$$\leq C\|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.$$

Sea $x \in B_{A^2 s_0}(z)$. Usando la condición de L^r-tamaño de Dini, la desigualdad (4.5.2.c), y el Lema 4.4.2, tenemos:

$$\begin{aligned}\left|\int [\phi(y)-\phi(x)]k(x,y)h_B(y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} &\leq \left|\int [\phi(y)-\phi(x)]k(x,y)h_B(y)h_{B_1}(y)d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \left|\int [\phi(y)-\phi(x)]k(x,y)h_B(y)(1-h_{B_1}(y))d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} \int_{d(x,y)\leq \mathfrak{c}^4 A^2 s_0} d(x,y)^\eta \tilde{k}(x,y)d\mu(y) \\ &\quad + \left|\phi(x)\int_{d(z,y) > A^2\mathfrak{c}^3 s_0} k(x,y)(h_B(y)-h_{B_1}(y))d\mu(y)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)}\, s_0^\eta + \|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|T(h_B - h_{B_1})\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \\ &\leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)}\, s_0^\eta + \|\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\Big(\|Th_B\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} + \|Th_{B_1}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\Big)\end{aligned}$$

(Aplicando el Corolario 4.4.15:)

$$\leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.$$

□

4.5.4. Hemos probado un teorema del tipo $T1 = 0$, que nos dice que el operador T es acotado entre espacios de Lipschitz.

Desearíamos un resultado análogo para el operador adjunto T^*. Sin embargo debemos tomar un camino algo diferente, usando en este caso la expresión (4.4.19) obtenida para $S_w(\psi) = T^*(\psi w)$.

4.5.5. El operador adjunto T^* aplicado a combinaciones lineales finitas de funciones Lipschitz. Sean $w_1, \cdots, w_N$ una lista finita de vectores del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

Sean $f_1, \cdots, f_N$ funciones del espacio $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando el Teorema 4.4.24 obtenemos, para funciones arbitrarias $\psi_1, \cdots, \psi_N \in \Lambda^\gamma(B)$, y para cualquier $x \in B$:

(4.5.5.1)
$$\begin{aligned} T^*(\sum_{i=1}^N \psi_i w_i)(x) = \sum_{i=1}^N \Bigg[&(f_i(x) - m_{A\hat{B}} f_i)\psi_i(x) \\ &+ \mathtt{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}[f_i, w_i]\psi_i(x) - I_B^{(*)}(1w_i)(x)\psi_i(x) \\ &+ \int \Big(k^*(x,y)h_B(y), [\psi_i(y) - \psi_i(x)]w_i\Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y)\Bigg]. \end{aligned}$$

O bien esta otra forma alternativa:

(4.5.5.2)
$$\begin{aligned} T^*(\sum_{i=1}^N \psi_i w_i)(x) = \sum_{i=1}^N \Bigg[&(f_i(x) - m_{A\hat{B}} f_i)\psi_i(x) - \Big\langle (f_i(x) - m_{A\hat{B}} f_i), l_{\hat{B}} \Big\rangle \\ &+ \Big(\bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}, w_i\Big)_{\mathbb{H}} \psi_i(x) - I_B^{(*)}(1w_i)(x)\psi_i(x) \\ &+ \int \Big(k^*(x,y)h_B(y), [\psi_i(y) - \psi_i(x)]w_i\Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y)\Bigg]. \end{aligned}$$

En caso de que $f_1 = \ldots f_N = 0$, nos queda esta otra expresión:

(4.5.5.3)
$$\begin{aligned} T^*\left(\sum_{i=1}^N \psi_i w_i\right)(x) = \sum_{i=1}^N \Bigg[&\Big(\bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}, w_i\Big)_{\mathbb{H}} \psi_i(x) - I_B^{(*)}(1w_i)(x)\psi_i(x) \\ &+ \int \Big(k^*(x,y)h_B(y), [\psi_i(y) - \psi_i(x)]w_i\Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y)\Bigg]. \end{aligned}$$

4.5.6. Teorema. Sea T un operador lineal continuo definido de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$ para cada γ, $0 < \gamma \leq \alpha$, débilmente acotado de orden η para algún η, $0 < \eta \leq \alpha$, y con un núcleo asociado que satisface las condiciones de tamaño L^r-Dini y de L^r-suavidad para $\eta + \epsilon$ con $\epsilon > 0$.

Supongamos que T satisface la Propiedad de Conmutación de Meyer.

Si para ciertos vectores prefijados $w_1, \cdots, w_N \in \mathbb{H}$, se tiene que $T^*(1w_1) = \cdots = T^*(1w_N) = 0$, resulta que para cualquier función $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\eta(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, que tenga la forma $\vec{\psi} = \psi_1 w_1 + \cdots + \psi_N w_N$, para funciones $\psi_1 \cdots, \psi_N \in \Lambda_0^\eta(\mathbb{R}^n)$, se cumple que para toda bola $B = B_s(x_0)$:

(4.5.6.a)
$$\begin{aligned} T^*(\vec{\psi})(x) = \Big(\bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}} &- \left(\int \big(k^*(x,y) - k^*(x_0,y)\big)(1 - h_B(y))\, d\mu(y), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} \\ &+ \int \Big(k^*(x,y)h_B(y), \vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y). \end{aligned}$$

Más aún

(4.5.6.b)
$$\|T^*\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})}$$

y $T^*\vec{\psi}$ es una función acotada, tal que para cualquier bola B_0 de radio s_0, que contiene al soporte de $\vec{\psi}$, se satisface:

$$\|T^*\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s_0^\eta.$$

Además, la constante C en ambas desigualdades depende solamente de las constantes que aparecen en las relaciones de tamaño de L^r-Dini, de L^r-suavidad y la propiedad de acotación débil (del operador T).

Demostración. La fórmula (4.5.6.a) se deduce de (4.5.5.3).

Notemos asimismo que, aplicando Teorema 2.2.1, se sigue que:

$$I_B^{(*)}(1\vec{\psi}(x)) = \Big(\int \big(k^*(x,y) - k^*(x_0,y)\big)(1-h_B(y))\,d\mu(y), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}} = \Big(J_B(1), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}},$$

donde J_B denota el operador definido por:

$$J_B(\phi)(x) := \int \big(k^*(x,y) - k^*(x_0,y)\big)(1-h_B(y))\,\phi(y)\,d\mu(y)$$

Obsérvese que J_B tiene propiedades muy similares a las de I_B.

Para proceder a la prueba de las acotaciones en norma Lipschitz y norma $L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, debe repetirse la demostración del Teorema 4.5.3, con la única salvedad de que ahora aparecen funciones $\vec{\psi}$ vectoriales, en vez de ϕ. En cuyo caso debe usarse repetidamente la desigualdad de Cauchy-Schwartz de $\mathbb{H}$.

Así que solamente daremos un bosquejo de la demostración, haciendo hincapié sólo en las diferencias importantes.

Igual que antes, sean $x_1, x_2 \in X$, y $B_1 = B_{d(x_1,x_2)}(x_1)$, consideramos $B = B_s(x_1)$ tal que $x_1, x_2 \in B$, *soporte*$(\vec{\psi}) \subset B$, $Ad(x_1,x_2) < s$.

Queremos probar que $T^*\vec{\psi}$ es una función de Lipschitz.

Estimamos la diferencia:

$$\begin{aligned}\Big|T^*\vec{\psi}(x_1) - T^*\vec{\psi}(x_2)\Big|_{\mathbb{H}} &\leq \Big|\Big(\bar{\mathsf{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x_1) - \vec{\psi}(x_2)\Big)_{\mathbb{H}}\Big| + \Big|\Big(J_B1(x_1), \vec{\psi}(x_1)\Big)_{\mathbb{H}} - \Big\langle J_B1(x_2), \vec{\psi}(x_2)\Big\rangle_{\mathbb{H}}\Big| \\ &+ \Big|\int \Big([\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_1)], k^*(x_1,y)h_B(y)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y) - \int \Big([\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_2)], k^*(x_1,y)h_B(y)\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y)\Big| \\ &\leq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.\end{aligned}$$

Tenemos

$$\sigma_1 \leq \Big|\bar{\mathsf{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}\Big|_{\mathbb{H}} \Big|\vec{\psi}(x_1) - \vec{\psi}(x_2)\Big|_{\mathbb{H}} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,H)} d(x_1,x_2)^\eta.$$

Por otro lado, como $J_B1(x_1) = 0_{\mathbb{H}}$, por Lema 4.4.3 tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_2 &\leq |J_B1(x_2)|_{\mathbb{H}} \Big|\vec{\psi}(x_2)\Big|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} d(x_1,x_2)^\eta.\end{aligned}$$

Para σ_3, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_3 &\leq \Big|\int \Big([\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_1)], k^*(x_1,y)h_B(y)h_{B_1(y)}\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y)\Big| \\ &+ \Big|\int \Big([\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_2)], k^*(x_2,y)h_B(y)h_{B_1(y)}\Big)_{\mathbb{H}} d\mu(y)\Big| \\ &+ \Big|\int \Big\{\Big([\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_1)], k^*(x_1,y)\Big)_{\mathbb{H}} - \Big([\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_2)], k^*(x_2,y)\Big)_{\mathbb{H}}\Big\}\ h_B(y)(1-h_{B_1}(y))\,d\mu(y)\Big| \\ &= \sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33}.\end{aligned}$$

Tenemos las estimaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_{31} &\leq \int \Big|\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_1)\Big|_{\mathbb{H}} |k^*(x_1,y)h_B(y)h_{B_1}(y)|_{\mathbb{H}}\ d\mu(y) \\ &\leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} d(x_1,x_2)^\eta \\ \sigma_{32} &\leq \int \Big|\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x_2)\Big|_{\mathbb{H}} |k^*(x_2,y)h_B(y)h_{B_1}(y)|_{\mathbb{H}}\ d\mu(y) \\ &\leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} d(x_1,x_2)^\eta.\end{aligned}$$

Escribimos

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &\leq \left|\int \left([\vec{\psi}(x_2)-\vec{\psi}(x_1)], k^*(x_1,y)h_B(y)(1-h_{B_1}(y))\right) d\mu(y)\right| \\ &\quad + \int \left|\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x_2)\right|_{\mathbb{H}} |k^*(x_1,y)-k^*(x_2,y)|_{\mathbb{H}}\, h_B(y)(1-h_{B_1}(y))d\mu(y) \\ &= \sigma_{331}+\sigma_{332}.\end{aligned}$$

Como x_1 no pertenece al soporte de $h_B(y)(1-h_{B_1}(y))$, y notando que $w = [\vec{\psi}(x_2)-\vec{\psi}(x_1)]$ es un vector fijo de $\mathbb{H}$, nos queda que:

$$\begin{aligned}\sigma_{331} &\leq \left|\int \left([\vec{\psi}(x_2)-\vec{\psi}(x_1)], k^*(x_1,y)h_B(y)(1-h_{B_1}(y))\right) d\mu(y)\right| \\ &= \left|\int \left(k^*(x_1,y), h_B(y)(1-h_{B_1}(y))\, w\right) d\mu(y)\right| \\ &= |T^*(h_B(y)(1-h_{B_1}(y))\, w)| \\ &\leq |T^*(h_B\, w)(y)| + |T^*(h_{B_1}\, w)(y)|\,.\end{aligned}$$

Tenemos que

$$w = \sum_{i=1}^{N} (\psi_i(x_2)-\psi_i(x_1))\, w_i.$$

Además sabemos que $T^* w_i = 0$. Esto quiere decir que $T^* w = 0$. Podemos aplicar ahora el Corolario 4.4.16, para obtener por dualidad que $\|T^*(h_B\, w)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\,|w|_{\mathbb{H}}$, siendo C independiente de la bola B y del vector w.

En consecuencia, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{331} &\leq C\,|w|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C\left|\vec{\psi}(x_2)-\vec{\psi}(x_1)\right|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} d(x_1,x_2)^\eta.\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\sigma_{332} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} d(x_1,x_2)^\eta.$$

Finalmente, se prueba que si *soporte*$(\vec{\psi}) \subset B_0$ (bola de radio s_0):

$$\|T\vec{\psi}(x)\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.$$

Para ello escribimos, para una bola B arbitraria (que contenga al soporte de $\vec{\psi}$):

$$\begin{aligned}\left|T^{*B}\vec{\psi}(x)\right|_{\mathbb{H}} &\leq \left|\left(\mathtt{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}}\right| + \left|\left(\int \left(k^*(x,y)-k^*(x_0,y)\right)(1-h_B(y))\, d\mu(y), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}}\right| \\ &\quad + \left|\int \left([\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x)], k^*(x,y)h_B(y)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(y)\right| \\ &\leq \left|\mathtt{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}\right|_{\mathbb{H}} \|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \\ &\quad + \|J_B 1\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \\ &\qquad + \left|\int \left([\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x)], k^*(x,y)h_B(y)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(y)\right| \\ &=: I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 &\leq C\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s_0^\eta. \\ I_2 &\leq C\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s_0^\eta.\end{aligned}$$

Nos resta probar que

$$\left|\int \Big([\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x)], k^*(x,y)h_B(y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| \le C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s_0^\eta,$$

para cualquier bola B suficientemente grande.

Sean $B_0 = B_{s_0}(z)$, $B_1 = B_{A^2 s_0}(z)$ y $B = B_s(z)$ tales que *soporte*$(\vec{\psi}) \subset B_0$ y $A^2\mathfrak{c}^3 s_0 < s$.

Asumamos primero que $x \notin B_{A^2 s_0}(z)$. Entonces

$$\left|\int \Big([\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x)], k^*(x,y)h_B(y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| = \left|\int \Big(\vec{\psi}(y), k^*(x,y)h_B(y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| = \left|\int \Big(\vec{\psi}(y), k^*(x,y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right|.$$

En esta integral los puntos relevantes y satisfacen $d(z,y) < s_0$, pues $y \in$ *soporte*$(\vec{\psi})$, y $d(x,z) > A^2 s_0$.

Entonces, si $A^j s_0 < d(x,z) \le A^{j+1}s_0$, $j \ge 2$, tenemos

$$A^{j-2}(A-1)s_0 < d(x,y) \le 2A^{j+2}s_0.$$

Por lo tanto, para $x \in B_{A^{j+1}s_0}(z) \setminus B_{A^j s_0}(z)$, $j \ge 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int \Big(k^*(x,y), \vec{\psi}(y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| &= \left|\int_{A^{j-2}(A-1)s_0<d(x,y)<2A^{j+2}s_0} \Big(\vec{\psi}(y), k^*(x,y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| \\
&\le \int_{A^{j-2}(A-1)s_0<d(x,y)<2A^{j+2}s_0} \left|\vec{\psi}(y)\right|_{\mathbb{H}} |k^*(x,y)|_{\mathbb{H}}\, d\mu(y) \\
&\le C\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.
\end{aligned}$$

Sea $x \in B_{A^2 s_0}(z)$. Usando la condición de L^r-tamaño de Dini, la desigualdad (4.5.2.c'), el Corolario 4.4.16 (junto con dualidad de las funciones μ-esencialmente acotadas respecto las funciones μ-integrables), y el Lema 4.4.2, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\int \Big([\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x)], k^*(x,y)h_B(y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| &\le \left|\Big([\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x)], k^*(x,y)h_B(y)h_{B_1}(y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| \\
&\quad + \left|\Big([\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x)], k^*(x,y)(1-h_{B_1}(y))\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)\right| \\
&\le C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\, s_0^\eta \\
&\quad + \left|\vec{\psi}(x)\int_{d(z,y)>A^2\mathfrak{c}^3 s_0} k^*(x,y)(h_B(y)-h_{B_1}(y))d\mu(y)\right| \\
&\le C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\, s_0^\eta + \|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\|T(h_B-h_{B_1})\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \\
&\le C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\, s_0^\eta + \|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\Big(\|Th_B\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} + \|Th_{B_1}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\Big) \\
&\le C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s_0^\eta.
\end{aligned}$$

□

4.6. Acotación en norma L^2 a través del Lema de Krein.

4.6.1. Notación. Sea $\mathbb{A}$ un espacio de Hilbert, y μ una medida sobre $\mathbb{R}^n$.

4.6.2. Lema. Sean $\mathbf{T} : \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \mapsto \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})$, $\mathbf{S} : \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A}) \mapsto \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, tales que para todas las funciones $f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, $\vec{g} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})$:

(4.6.2.a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathbf{S}\vec{g}(x)\,d\mu = \int \big(\vec{g}(x), \mathbf{T}f(x)\big)_{\mathbb{A}}\, d\mu,$

(4.6.2.b) $\|\mathbf{T}f\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} \le C\|f\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}$, $\|\mathbf{S}\vec{g}\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \le C\|\vec{g}\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})}$, (4.6.2.c) $\|\mathbf{T}f\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} \leq \|f\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_0^\gamma$, $\|\mathbf{S}\vec{g}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \leq \|\vec{g}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} s_0^\gamma$, donde s_0 es el radio de una bola B que contiene al soporte de g.

Entonces $\mathbf{T}$ es acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})$, y $\mathbf{S}$ es acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.

Demostración. Sea $\{s_m\}_m$ una sucesión de radios de la correspondiente sucesión de bolas $\{B_{s_m}(z)\}$ doblantes tales que $\cup_{m=1}^\infty B_{s_m}(z) = \mathbb{R}^n$, tales que $s_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$, y tal que para cada índica m se tiene: $As_m \leq s_{m+2}$, $As_{m+1} < s_{m+2}$.

Con la función infinitamente diferenciable h dada en 4.2.7, denotamos:

$$h_m(x) = h(d(z,x)/s_m),$$

con lo cual h_m vale 1 en $B_{s_m}(z)$ y está soportada en $B_{As_m}(z)$.

Sea m un índice fijo. Definimos los conjuntos

$$\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}} = \{h_m F | F \in \Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\}$$
$$\mathcal{E}_m^{\mathbb{A}} = \{h_m \vec{G} | \vec{G} \in \Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})\}$$

Hacemos:

$$\|F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}} = C(\|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} + s_m^\gamma \|F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})})$$
$$\|\vec{G}\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}} = C(\|\vec{G}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} + s_m^\gamma \|\vec{G}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})})$$

donde la constante C se ha de elegir luego.

Definimos $\mathbf{T}_m : \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}} \to \mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}$, $\mathbf{S}_m : \mathcal{E}_m^{\mathbb{A}} \to \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$ por medio de:

$$\mathbf{T}_m F = h_m \mathbf{T}(h_m F)$$
$$\mathbf{S}_m \vec{G} = h_m \mathbf{S}(h_m \vec{G}).$$

Denotamos con $H_m^{\mathbb{C}}$ a la clausura del espacio $\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$ respecto la topología del espacio $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, y análogamente $H_m^{\mathbb{A}}$ será la clausura de $\mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}$ respecto $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})$, lo cual nos dará como resultado los espacios de Hilbert

$$H_m^{\mathbb{C}} = L^2_\mu(B_{As_m}(z),\mathbb{C})$$
$$H_m^{\mathbb{A}} = L^2_\mu(B_{As_m}(z),\mathbb{A})$$

formado por las funciones de cuadrado integrable en el conjunto $B_{As_m}(z)$.

Es fácil ver que:

$$\|h_m F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \leq \|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}.$$

Ahora tratemos de estimar $\|h_m F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}|h_m(x)F(x) - h_m(x')F(x')| &= |h_m(x) - h_m(x')|\, \|F\|_{L^\infty_\mu} + \|h_m\|_{L^\infty_\mu} |F(x) - F(x')| \\ &\leq \|h\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \left(\frac{d(x,x')}{s_m}\right)^\gamma \|f\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} + \|h_m\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n.\mathbb{C})} \|F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} d(x,x')^\gamma.\end{aligned}$$

Un cálculo similar puede hacerse para $\|h_m \vec{G}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})}$, de manera que:

$$\|h_m F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \leq \|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_m^{-\gamma} + \|F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}$$
$$\|h_m \vec{G}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} \leq \|\vec{G}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_m^{-\gamma} + \|\vec{G}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})}.$$

Luego, para toda $F \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_m F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} &\leq \|\mathbf{T} h_m f\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \leq C \|h_m F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_m^\gamma \\ &\leq C(\|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_m^{-\gamma} + C\|F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}) s_n^\gamma \\ &\leq C(\|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} + \|F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_m^\gamma) = \|F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}}.\end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_m F\|_{\Lambda^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} &\leq C(\|\mathbf{T}(h_m F)\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} s_m^{-\gamma} + \|\mathbf{T}(h_m F)\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}) \\ &\leq C(\|h_m F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_m^{\gamma} s_m^{-\gamma} + \|h_m F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}) \\ &\leq C(\|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} s_m^{-\gamma} + \|F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}) \\ &= C s_m^{-\gamma}(\|F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} + s_m^{\gamma}\|F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}) \\ &= C s_m^{-\gamma}\|F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$s_m^{\gamma}\|\mathbf{T}_m F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} \leq C\|F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}},$$

y entonces:

$$\|\mathbf{T}_m F\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n.\mathbb{C})} + s_m^{\gamma}\|\mathbf{T}_m F\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} = \|\mathbf{T}_m F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}} \leq C\|F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}}.$$

Reescribimos:

$$\|\mathbf{T}_m F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}} \leq C\|F\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}}.$$

Análogamente se puede demostrar que:

$$\|\mathbf{S}_m \vec{G}\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}} \leq C\|\vec{G}\|_{\mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}}.$$

Por (4.6.2.a) tenemos que, para cualesquiera $F \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$, $G \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}$:

$$\int_{AB_{s_m}(z)} \Big(\mathbf{T}_m F(x), \vec{G}(x)\Big)_{\mathbb{A}} \, d\mu(x) = \int_{AB_{s_m}(z)} F(x)\, \mathbf{S}_m \vec{G}(x) d\mu, \qquad .$$

Aplicando ahora el Teorema de Krein generalizado (ver 2.3.3), se sigue que:

$$(*_1) \qquad \|\mathbf{T}_m F\|_{H_m^{\mathbb{A}}} \leq C_0\|F\|_{H_m^{\mathbb{C}}}, \qquad \forall F \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$$

$$(*_2) \qquad \|\mathbf{S}_m \vec{G}\|_{H_m^{\mathbb{C}}} \leq C_0\|\vec{G}\|_{H_m^{\mathbb{A}}}, \qquad \forall \vec{G} \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{A}}.$$

Sea $f \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$, y sea $s_{m+1} > s_m$. Tenemos que $B_{s_m}(z) \subset B_{s_{m+1}}(z)$.

Debido a que $\mathrm{sop}(F) \subset B_{As_m} \subset B_{s_{m+1}}$, y que existe una función $F \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ tal que $f = h_m F$, tenemos que $h_{m+1} f = h_{m+1} h_m F = h_m F = f$, o sea:

$$h_{m+1} f = f.$$

Pero esto implica que $\mathcal{E}_m^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{E}_{m+1}^{\mathbb{C}}$, para todo m.

Dado un índice m_0 prefijado, para todo $m > m_0$ tenemos ahora que:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_m f = h_m \mathbf{T}(h_m f) = h_m \mathbf{T}(f), \qquad &\forall f \in \mathcal{E}_{m_0}^{\mathbb{C}} \\ \mathbf{S}_m g = h_m \mathbf{T}(h_m g) = h_m \mathbf{T}(g), \qquad &\forall g \in \mathcal{E}_{m_0}^{\mathbb{A}}.\end{aligned}$$

Además $h_m \mathbf{T}(f) \uparrow \mathbf{T}(f)$ cuando m tiende a ∞, puntualmente, para toda $f \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$.

Luego, por el Teorema de la convergencia Monótona:

$$(*_3) \qquad \|\mathbf{T} f\|^2_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} = \lim_{m\to\infty} \int |\mathbf{T}_m f(x)|^2 \, d\mu(x) \leq C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}, \qquad \forall f \in \mathcal{E}_m^{\mathbb{C}}$$

Supongamos ahora que $f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, entonces existe un m tal que $\mathrm{sop}(f) \subset B_{s_m}(z)$. Allí tendremos que $h_m f = f$.

Tenemos en consecuencia que $\mathbf{T}(h_m f)$ converge uniformemente a $\mathbf{T}(f)$ cuando m tiende a infinito, para toda $f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.

Esto implica que

$$\lim_{m\to\infty} \int |\mathbf{T}_m f|^2 \, d\mu = \int |\mathbf{T} f|^2 \, d\mu, \qquad \forall f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}).$$

Además, como $h_m f$ converge uniformemente a f para todo $f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, resulta que $h_m f$ converge a f en norma $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.

Luego, para toda $f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, se tiene que: $\|\mathbf{T}(h_m f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} \leq C\|h_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}$, por $(*_3)$. Tomando límite de m hacia ∞, resulta ahora que:

$$(*_4) \qquad \|\mathbf{T}f\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A})} \leq C\|f\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}, \qquad \text{para toda } f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

Por densidad se obtiene la desigualdad $(*_4)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
De manera análoga se obtiene el resultado para el operador $\mathbf{S}$.

□

A fin de aplicar estos resultados a los operadores integral singular que nos ocupan, daremos algunas definiciones.

4.6.3. Definiciones.
Sea $\{e_N\}_{N=1}^\infty$ base ortonormal de un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$. Dado un entero positivo N, denotamos $\mathbb{A}_N$ al subespacio de $\mathbb{H}$ generado por los vectores $e_1, \cdots, e_N$. En ese caso $\mathbb{A}_N$ es isomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{R}^N$.
Denotemos con $P_N : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{A}_N$ al operador proyección que está determinado a partir de la base canónica por medio de:

$$P_N(e_i) = \begin{cases} e_i, & 1 \leq i \leq N \\ 0, & i > N \end{cases}.$$

Si I denota el operador identidad en $\mathbb{H}$, tenemos la identidad:

$$(I - P_N)P_N = 0.$$

También tenemos que la proyección es un operador autoadjunto: Si $u, v \in \mathbb{H}$, entonces:

$$(4.6.3.a) \qquad \big(u, P_N v\big)_{\mathbb{H}} = \big(P_N u, v\big)_{\mathbb{H}},$$

lo cual es fácil de verificar.

4.6.4. Operadores Parciales asociados a T (mediante proyecciones).
Ahora vamos a definir operadores que involucran la operación de proyección P_N, a fin de construir versiones restringidas de T, con las cuales nos iremos aproximando al operador original T, a medida que N tiende a ∞.
Supondremos que T satisface la propiedad de acotación débil, y la propiedad de conmutación de Meyer.
Fijemos un entero positivo N.
Sean $\phi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$. Definimos el operador T_N por medio de

$$\left\langle T_N\phi, \vec{\psi} \right\rangle := \left\langle T\phi, P_N\vec{\psi} \right\rangle.$$

Como sabemos que la distribución $T\phi$ se identifica con una función vectorial Lipshitz acotada, tiene sentido escribir $P_N(T\phi(x))$ como función de x, y en consecuencia tenemos:

$$\left\langle T_N\phi, \vec{\psi} \right\rangle = \left\langle P_N T\phi, \vec{\psi} \right\rangle.$$

Esto nos dice que P_T conmuta con T:

$$TP_N = P_N T.$$

Podemos descomponer la función $\vec{\psi}$ en la siguiente manera:

$$\vec{\psi}(x) = P_N\vec{\psi}(x) + (I - P_N)\vec{\psi}(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$.
Para la segunda parte de esta composición, el operador T_N se anula:

$$\left\langle T_N\phi, (I - P_N)\vec{\psi} \right\rangle = \left\langle T\phi, (I - P_N)P_N\vec{\psi} \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la forma bilineal $\left\langle T_N\phi, \vec{\psi} \right\rangle$ está definida para funciones $\vec{\psi}$ valuadas en el espacio de Hilbert $\mathbb{A}_N$.

Si tomamos dos funciones ϕ, $\vec{\psi}$, con soportes disjuntos, se tiene que:

$$\left(T_N\phi, \vec{\psi}\right) = \iint \left\langle k(x,y)\,\phi(y), P_N\vec{\psi}(x)\right\rangle_{\mathbb{A}_N} \, d\mu(y)d\mu(x)$$

(Aplicando (4.6.3.a):)

$$= \iint \left\langle P_N k(x,y)\,\phi(y), \vec{\psi}(x)\right\rangle_{\mathbb{A}_N} \, d\mu(y)d\mu(x).$$

Esto prueba que el núcleo de T_N es $k_N(x,y) = P_N k(x,y)$.

El núcleo $k_N(x,y)$ satisface las mismas propiedades de L^r-Dini, y de L^r-suavidad que el núcleo original $k(x,y)$, incluso con las mismas constantes.

Tenemos entonces que T_N es un operador de integral singular que tiene asociado el núcleo $k_N(x,y)$.

También es trivial comprobar que T_N satisface la propiedad de acotación débil, ya que para toda función $\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ se tiene que $P_N\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$, y además trivialmente se verifica:

$$\|P_N\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{A}_N)} \leq \|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}.$$

Por otra parte, T_N cumple trivialmente la propiedad de conmutación de Meyer, porque en lugar de $\vec{\psi}$ debe escribirse ahora $P_N\vec{\psi}$, y la igualdad de la conmutación de Meyer se sigue cumpliendo en este caso.

También se observa que, cuando $\vec{\psi}$ tiene integral nula, entonces $P_N\vec{\psi}$ también tiene integral nula. Esto nos dice que cuando $T1 = 0$, ocurre que $T_N 1 = 0$, pues para cada bola B:

$$\left\langle T_N 1, \vec{\psi}\right\rangle = \left\langle (T_N)_B 1, \vec{\psi}\right\rangle = \left\langle T_B 1, P_N\vec{\psi}\right\rangle = 0,$$

donde $(T_N)_B$ es la extensión correspondiente del operador T_N a funciones del espacio $L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ (al estilo de la Definición 4.4.5).

Finalmente, si T satisface las hipótesis del Teorema 4.5.3, entonces T_N también lo hace, y con las mismas constantes para T_N que aparecieron en todo el análisis hecho previamente del operador T.

Esto implica que T_N satisface la conclusión del teorema 4.5.3. Es decir (poniendo $\mathbb{H}$ en vez de $\mathbb{A}_N$), T_N es acotado de $\Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n)$ en $\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$, y $T_N\phi$ es una función acotada para toda $\phi \in \Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n)$. Además, las constantes involucradas no dependen de N.

En particular, ocurren las siguientes relaciones entre dominio e imagen de T_N:

$$T_N(\Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n)) \subset \Lambda^\eta(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N) \subsetneqq \Lambda^\eta(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}).$$

Ahora observemos el operador adjunto T_N^*. Su núcleo asociado es $k_N^*(x,y) = k_N(y,x)$.

Tenemos que:

$$\left\langle T_N^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle = \left\langle T_N\phi, \vec{\psi}\right\rangle = \left\langle T\phi, P_N\vec{\psi}\right\rangle = \left\langle T^*(P_N\vec{\psi}), \phi\right\rangle.$$

En ese caso, se puede pensar que T_N^* es simplemente la restricción del operador T^* al espacio $\Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$.

Por lo tanto, si suponemos que $T^*(1w) = 0$ para cada vector $w \in \mathbb{H}$, en particular ocurre que $T^*(1e_j) = 0$ para los vectores e_j de la base ortonormal de $\mathbb{H}$.

Aplicando esto a la lista de vectores $e_1, \cdots, e_N$, el Teorema 4.5.6 nos dice ahora que T^* es acotado de $\Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$ en $\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)$, y $T^*\vec{\psi}$ es acotada para $\vec{\psi} \in \Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N))$. Más aún, las constantes involucradas son independientes de N, como puede apreciarse en el correspondiente Teorema.

Pero también podemos tomar el punto de vista en que T_N^* es acotado de $\Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ en $\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)$, y $T_N^*\vec{\psi}$ es acotada para $\vec{\psi} \in \Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))$, debido a la presencia de la proyección P_N.

4.6.5. Lema. Dada una función $\vec{\psi} \in \Lambda^\eta_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ *cualquiera*, definimos la sucesión $\{\vec{\psi}_N\}_{N=1}^\infty$ por

$$\vec{\psi}_N = P_N\vec{\psi}, \qquad N = 1, 2, 3, \ldots$$

En tal caso se tiene la siguiente convergencia en norma $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$:

$$\lim_{N\to\infty} \|\vec{\psi}_N - \vec{\psi}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} = 0.$$

Demostración. En efecto, la norma en el sentido de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ de la función $\vec{\psi}$ satisface:

$$\begin{aligned}
\|\vec{\psi}\|^2_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} &= \int \left|\vec{\psi}(\cdot)\right|^2_{\mathbb{H}} d\mu \\
&= \int \sum_{m=1}^{\infty} \left|\vec{\psi}_m(\cdot)\right|^2 d\mu \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int \left|\vec{\psi}_m(\cdot)\right|^2 d\mu,
\end{aligned}$$

que es una serie de términos no negativos. Se deduce de aquí que la sucesión $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$ de colas de la serie, digamos

$$s_N = \sum_{m=N}^{\infty} \int \left|\vec{\psi}_m(\cdot)\right|^2 d\mu,$$

debe tender a 0. Pero es claro que

$$s_N = \int \sum_{m=N}^{\infty} \left|\vec{\psi}_m(\cdot)\right|^2 d\mu = \|\vec{\psi} - \vec{\psi}_N\|^2_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}.$$

Así que $\vec{\psi}_N$ tiende a $\vec{\psi}$ en norma $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$. □

4.6.6. Proposición. El conjunto $\Omega = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$ es denso en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

Demostración. En efecto. Sea $\vec{\vartheta} \in L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$. Por el Lema (4.2.5), dado $\varepsilon > 0$, existe una función $\vec{\psi}_\varepsilon \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ tal que

$$\|\vec{\vartheta} - \vec{\psi}_\varepsilon\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} < \epsilon.$$

Por el Lema precedente, existe un entero positivo N_ϵ tal que

$$\|\vec{\psi}_\epsilon - P_N\vec{\psi}_\varepsilon\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A}_N)} < \varepsilon,$$

para todo $N \geq N_\epsilon$.

En consecuencia tenemos que:

$$\|\vec{\vartheta} - P_N\vec{\psi}_\varepsilon\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} < 2\varepsilon.$$

Pero a su vez $P_N\vec{\psi}_\varepsilon \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$, para todo $N \geq N_\varepsilon$.

□

4.6.7. Teorema. En las mismas condiciones del Teorema 4.5.3, suponiendo que $T1 = 0_{\mathbb{H}}$, y que para todo vector e_j de la base ortonormal del espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$, se tiene $T^*(1e_j) = 0$, resulta entonces que T se extiende a un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

Demostración. Sea N un entero positivo. Consideremos el operador T_N del apartado anterior, y su conjugado T_N^*. Se ve que satisfacen todas las hipótesis del Lema 4.6.2.

Por lo tanto T_N se puede extender a un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$, y T_N^* se puede extender a un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Se puede pensar también que T_N es un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, aunque sabiendo que la imagen de T_N sigue constando de funciones que son $\mathbb{A}_N$-valuadas. En particular valen las relaciones entre conjuntos:

$$T_N(L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})) \subset L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N) \subsetneqq L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}).$$

Debido a que las constantes de las acotaciones de 4.6.2(b) y 4.6.2(c) son independientes de N, tenemos que:

$$\|T_N\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{A}_N)} \leq C\|\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})},$$

pero también podemos decir que:

$$\|T_N\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C\|\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})},$$

con constante C independiente de N.

En particular, para funciones $\phi \in \Lambda_0^\eta(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\eta(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$,

$$\left|\left\langle T_N\phi, \vec{\psi}\right\rangle\right| \leq C\|\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})},$$

que es lo mismo que:

$$\left|\left\langle T\phi, P_N\vec{\psi}\right\rangle\right| \leq C\|\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n)}\|P_N\vec{\psi}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})},$$

con constante C independiente de N.

Esto nos muestra que, en particular, para funciones $\phi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Omega = \bigcup_{N=1}^\infty \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$:

$$(*) \qquad \left|\left\langle T\phi, \vec{\psi}\right\rangle\right| \leq C\|\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}.$$

Como T es continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$, y como $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$, y Ω es denso en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, resulta que la forma bilineal $\left\langle T\phi, \vec{\psi}\right\rangle$ se extiende de forma continua a funciones arbitrarias $\phi \in L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, siendo válida para estas funciones la desigualdad $(*)$.

Esto prueba finalmente que $T\phi$ se identifica con una función del espacio $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, y que:

$$\|T\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C\|\phi\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n)},$$

con constante C independiente de ϕ.

Automáticamente, la relación $(*)$ también permite afirmar que T^* se extiende de manera continua como un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$. □

4.6.8. Corolario. En las mismas condiciones del Teorema anterior, si B es una bola dada, entonces para cada función $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ soportada en B vale la fórmula (4.5.6.a):

$$(4.6.8.a) \qquad T^*(\vec{\psi})(x) = \left(\bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} - \left(\int \left(k^*(x,y) - k^*(x_0,y)\right)(1 - h_B(y))\, d\mu(y), \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} + \int \left(k^*(x,y)h_B(y), \vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(y).$$

Demostración. Denotemos con $\mathcal{E}[\vec{\psi}](x)$ al lado derecho de (4.6.8.a).

Para toda función $\vec{\psi} \in \bigcup_{N=1}^\infty \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{A}_N)$, los dos lados de (4.6.8.a) coinciden. Por otra parte, el operador T^* se extiende en forma continua a un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sean $\vec{\psi} \in \Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, soportada en una bola B, y sea $\{\vec{\psi}_N\}_{N=1}^\infty$ la sucesión de funciones definida por $\vec{\psi}_N = P_N\vec{\psi}$.

Sabemos que $\vec{\psi}_N \to \vec{\psi}$ en el sentido de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$. En particular existe una subsucesión $\{\vec{\psi}_{N_j}\}_{j=1}^\infty$ tal que $\vec{\psi}_{N_j}(x) \to \vec{\psi}(x)$, $j \to \infty$, para μ-casi todo punto x.

Además, tenemos que $\lim_{j\to\infty} \|T^*\vec{\psi}_{N_j} - T^*\vec{\psi}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^n)} = 0$, por la continuidad de T^*.

En particular, esto implica que existe una subsucesión $\{\vec{\psi}_{N_{j_i}}\}_{i=1}^\infty$ tal que $T^*\vec{\psi}_{N_{j_i}}(x) \to T^*\vec{\psi}(x)$, $j \to \infty$, puntualmente, para μ-casi todo punto x.

También tenemos que $\vec{\psi}_{N_{j_i}}(x) \to \vec{\psi}(x)$, $i \to \infty$, para μ-casi todo punto x.

Esto implica que $\mathcal{E}[\vec{\psi}_{j_i}](x) \to \mathcal{E}[\vec{\psi}](x)$, para μ-casi todo punto de B (se debe usar que $\bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}$ es un vector fijo, y el Teorema de la Convergencia Dominada).

Obtenemos entonces que

$$T^*\vec{\psi}(x) = \lim_{i\to\infty} T^*\vec{\psi}_{N_{j_i}}(x) = \lim_{i\to\infty} \mathcal{E}[\vec{\psi}_{j_i}](x) = \mathcal{E}[\vec{\psi}](x),$$

para μ-casi todo punto $x \in B$, como deseábamos probar. □

4.7. Caso Especial: el núcleo k es antisimétrico.

4.7.1. Hipótesis de antisimetría.
En esta sección supondremos que el operador T tiene asociado un núcleo k, que satisface las propiedades de tamaño L^r-Dini y de L^r-suavidad, que k es antisimétrico, es decir, satisface la relación:

$$k(x,y) = -k(y,x), \qquad\qquad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

y además suponemos que T está definido de la siguiente manera, para funciones $\phi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$:

$$\left\langle T\phi, \vec{\psi}\right\rangle := \lim_{\epsilon\to 0} \iint_{d(x,y)\geq\epsilon} \Big(k(x,y)\,\phi(y), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(x)d\mu(y). \tag{4.7.1.1}$$

En breve probaremos que T está bien definido, y que además satisface la Propiedad de Conmutación de Meyer.

4.7.2. Expresiones Básicas.
En lo sucesivo será conveniente que definamos las siguientes expresiones, para funciones $h \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, con φ y $\vec{\psi}$ soportadas en una bola B:

$$\mathfrak{E}_M^B(h,\varphi,\vec{\psi}) := \iint_{M\cap(B\times B)} \Big(k(x,y), (\varphi(y)-\varphi(x))h(y)\vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)d\mu(x) \tag{4.7.2.1}$$

$$\mathfrak{E}_M^{\dagger\,B}(h,\varphi,\vec{\psi}) := \iint_{M\cap(B\times B)} \Big(k(x,y), (\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x))h(x)\varphi(x)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)d\mu(x), \tag{4.7.2.2}$$

donde M es un subconjunto $\mu\times\mu$-medible de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.
Cuando $M = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, denotaremos simplemente:

$$\mathfrak{E}^B(h,\varphi,\vec{\psi}) := \mathfrak{E}^B_{R^n\times R^n}(h,\varphi,\vec{\psi}), \qquad\qquad \mathfrak{E}^{\dagger\,B}(h,\varphi,\vec{\psi}) := \mathfrak{E}^{\dagger\,B}_{R^n\times R^n}(h,\varphi,\vec{\psi}).$$

Cuando podamos prescindir de la bola de soporte B (por ejemplo, cuando la función h esté soportada también en B), también podemos usar las siguientes expresiones, que no involucran el uso explícito de B:

$$\mathfrak{E}(h,\varphi,\vec{\psi}) := \iint \Big(k(x,y), (\varphi(y)-\varphi(x))h(y)\vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)d\mu(x) \tag{4.7.2.3}$$

$$\mathfrak{E}^{\dagger}(h,\varphi,\vec{\psi}) := \iint \Big(k(x,y), (\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x))h(x)\varphi(x)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)d\mu(x), \tag{4.7.2.4}$$

Sigamos suponiendo que h está soportada en B. Supongamos además que M es un conjunto simétrico de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Si hacemos el cambio de variable $(x,y)\mapsto(y,x)$, y al resultado obtenido lo promediamos con el valor original de $\mathfrak{E}(h,\varphi,\vec{\psi})$, o el de $\mathfrak{E}^\dagger(h,\varphi,\vec{\psi})$, obtenemos estas otras igualdades:

$$\mathfrak{E}(h,\varphi,\vec{\psi}) = \frac{1}{2}\iint \Big(k(x,y), (\varphi(y)-\varphi(x))(h(y)\vec{\psi}(x)+h(x)\vec{\psi}(y))\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)d\mu(x) \tag{4.7.2.5}$$

$$\mathfrak{E}^\dagger(h,\varphi,\vec{\psi}) = \frac{1}{2}\iint \Big(k(x,y), (\vec{\psi}(y)-\vec{\psi}(x))(h(y)\varphi(x)+h(x)\varphi(y))\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(y)d\mu(x). \tag{4.7.2.6}$$

4.7.3. Lema. Sean $h \in \Lambda_b^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, y sea $B = B_s(x_0)$ una bola que contiene al soporte de ϕ y de $\vec{\psi}$.
Si M es un conjunto $\mu\times\mu$-medible cualquiera, las integrales que definen $\mathfrak{E}_M^B(h,\phi,\vec{\psi})$ y $\mathfrak{E}_M^{\dagger\,B}(h,\phi,\vec{\psi})$ son absolutamente convergentes, y se tienen además las desigualdades:

$$\left|\mathfrak{E}_M^B(h,\phi,\vec{\psi})\right|, \left|\mathfrak{E}_M^{\dagger\,B}(h,\phi,\vec{\psi})\right| \leq C\|h\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\,\|\phi\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\,\mu(B)s^{2\gamma}, \qquad .$$

con constante C independiente de $M, B, h, \phi, \vec{\psi}$.

Demostración. Por el Lema 4.4.2, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_M^B(h,\phi,\vec{\psi})\right| &\le \iint_{M\cap B\times B} \left|\left(k(x,y),(\phi(y)-\phi(x))h(y)\vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}}\right| \, d\mu(y)d\mu(x)\\
&\le \iint_{M\cap B\times B} |k(x,y)|_{\mathbb{H}} \left|(\phi(y)-\phi(x))h(y)\vec{\psi}(x)\right|_{\mathbb{H}} \, d\mu(y)d\mu(x)\\
&\le C\|h\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\int_B\int_{B_{2As}(x)} d(x,y)^\gamma \tilde{k}(x,y)d\mu(y)d\mu(x)\\
&\le C\|h\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} C\mu(B)s^\gamma\\
&\le C\|h\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} C\mu(B)s^{2\gamma}.
\end{aligned}
$$

De modo similar se prueba que:

$$
\left|\mathfrak{E}_M^{\dagger\,B}(h,\phi,\vec{\psi})\right| \le C\|h\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} C\mu(B)s^{2\gamma}.
$$

□

4.7.4. Proposición. Para todo $0<\gamma\le\alpha$, el operador T dado por (4.7.1.1) está bien definido para cualesquiera funciones $\phi\in\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi}\in\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$. También satisface la igualdad:

(4.7.4.a) $$\left\langle T\phi,\vec{\psi}\right\rangle = \frac{1}{2}\iint \left(k(x,y),\phi(y)\vec{\psi}(x)-\phi(x)\vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)d\mu(y),$$

y además verifica la propiedad de acotación débil:

(4.7.4.b) $$\left|\left\langle T\phi,\vec{\psi}\right\rangle\right| \le C\mu(B)s^{2\gamma}\|\phi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})},$$

para funciones $\phi,\vec{\psi}$ soportadas en $B=B_s(z)$.

Demostración. Sea $B=B_s(x_0)$ una bola que contiene al soporte de ϕ y de $\vec{\psi}$.

Tenemos la siguiente desigualdad:

$$
\begin{aligned}
\iint_{B\times B}|k(x,y)|_{\mathbb{H}}\,\chi_{\{d(x,y)\ge\epsilon\}}(x,y)\,d\mu(x)d\mu(y) &\le \iint_{B\times B}\left|\tilde{k}(x,y)\right|\chi_{\{d(x,y)\ge\epsilon\}}(x,y)\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&\le \sum_{j=0}^{\infty}\int_B\left(\int_{\mathfrak{c}^2\epsilon A^j<d(x,y)\le\mathfrak{c}^2\epsilon A^{j+1}}\left|\tilde{k}(x,y)\right|^r d\mu(x)\right)^{1/r}\mu(B)^{1/r'}d\mu(y)\\
&\le C\sum_{j=0}^{\infty}(A^j\epsilon)^{-\eta/r'}\mu(B)^{1/r'}\mu(B)\\
&\le C\epsilon^{-\eta/r'}\mu(B)^{1+1/r'}<\infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la integral doble

$(*_1)$ $$\left\langle T_\epsilon\phi,\vec{\psi}\right\rangle := \iint_{d(x,y)\ge\epsilon}\left(k(x,y)\,\phi(y),\vec{\psi}(x)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)d\mu(y)$$

es absolutamente convergente, y en particular está bien definida.

Haciendo el cambio de variable $(x,y)\mapsto(y,x)$, y usando luego que $k(x,y)=-k(y,x)$, por ser k antisimétrico, obtenemos que:

$(*_2)$ $$\left\langle T_\epsilon\phi,\vec{\psi}\right\rangle = -\iint_{d(x,y)\ge\epsilon}\left(k(x,y)\,\phi(x),\vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)d\mu(y).$$

Promediando $(*_1)$ y $(*_2)$, obtenemos que:

$(*_3)$ $$\left\langle T_\epsilon\phi,\vec{\psi}\right\rangle = \frac{1}{2}\iint_{d(x,y)\ge\epsilon}\left(k(x,y),\phi(y)\vec{\psi}(x)-\phi(x)\vec{\psi}(y)\right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)d\mu(y).$$

Sea el conjunto $M_\epsilon = \{(x,y)|d(x,y) \geq \epsilon\}$, podemos escribir:

$$\left\langle T_\epsilon \phi, \vec{\psi} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}^B_{M_\epsilon}(1,\phi,\vec{\psi}) - \mathfrak{E}^{\dagger\, B}_{M_\epsilon}(1,\phi,\vec{\psi}) \right).$$

No obstante, por el Lema 4.7.3, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{E}^B_{M_\epsilon}(1,\phi,\vec{\psi}) \right| &\leq C\|\phi\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} C\mu(B)s^{2\gamma} \\ \left| \mathfrak{E}^{\dagger,B}_{M_\epsilon}(1,\phi,\vec{\psi}) \right| &\leq C\|\phi\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} C\mu(B)s^{2\gamma}, \end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$(*_4) \qquad \left| \left\langle T_\epsilon \phi, \vec{\psi} \right\rangle \right| \leq C\mu(B)\|\phi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s^{2\gamma}.$$

Se observa que la constante C es independiente de ϵ.

Más aún, en el Lema 4.7.3 se puede ver que las integrales que definen $\mathfrak{E}^B_{M_\epsilon}(1,\phi,\vec{\psi})$ y $\mathfrak{E}^{\dagger\, B}_{M_\epsilon}(1,\phi,\vec{\psi})$ son, en realidad, absolutamente convergentes, y acotadas por $C\mu(B)s^{2\gamma}\|\phi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}$. Luego, por el teorema de la convergencia monótona, resulta que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2} \iint_{d(x,y)\geq\epsilon} \left| \left(k(x,y), \phi(y)\vec{\psi}(x) - \phi(x)\vec{\psi}(y) \right)_{\mathbb{H}} \right| d\mu(x)d\mu(y) \leq C\mu(B)\|\phi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s^{2\gamma}.$$

Pero como el integrando es no negativo, esto equivale a:

$$\iint \left| \left(k(x,y), \phi(y)\vec{\psi}(x) - \phi(x)\vec{\psi}(y) \right)_{\mathbb{H}} \right| d\mu(x)d\mu(y) \leq C\mu(B)\|\phi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s^{2\gamma} < \infty.$$

Estamos diciendo que el integrando $\left| \left(k(x,y), \phi(y)\vec{\psi}(x) - \phi(x)\vec{\psi}(y) \right)_{\mathbb{H}} \right|$ es una función $\mu \times \mu$-integrable.

Ahora podemos aplicar el teorema de convergencia dominada, para probar que

$$\begin{aligned} \left\langle T\phi, \vec{\psi} \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \left\langle T_\epsilon\phi, \vec{\psi} \right\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2} \iint_{d(x,y)\geq\epsilon} \left(k(x,y), \phi(y)\vec{\psi}(x) - \phi(x)\vec{\psi}(y) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \frac{1}{2} \iint \left(k(x,y), \phi(y)\vec{\psi}(x) - \phi(x)\vec{\psi}(y) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)d\mu(y). \end{aligned}$$

Esto muestra que $\left\langle T\phi, \vec{\psi} \right\rangle$ está bien definido, y de paso prueba la parte (a).

Para la parte (b), basta observar que la constante C en $(*_4)$ es independiente de ϵ, y entonces:

$$\left| \left\langle T\phi, \vec{\psi} \right\rangle \right| = \lim_{\epsilon\to 0} \left| \left\langle T_\epsilon\phi, \vec{\psi} \right\rangle \right| \leq C\mu(B)s^{2\gamma}\|\phi\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)}\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}.$$

□

4.7.5. Proposición. Sea $0 < \gamma \leq \alpha$. Para cualesquiera $h, \varphi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, el operador T dado en (4.7.1.1) satisface la propiedad de Conmutación de Meyer:

Demostración. Sean $h, \varphi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$. Sea B una bola que contiene al soporte de estas tres funciones.

Debido a los soportes de h y $\vec{\psi}$, es válida la siguiente igualdad:

$$(*_1) \qquad \mathfrak{E}(h,\varphi,\vec{\psi}) = \iint \left(k(x,y), (\varphi(y)-\varphi(x))h(y)\vec{\psi}(x) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(y)d\mu(x) = \mathfrak{E}^B(h,\varphi,\vec{\psi}).$$

Esto sirve para notar que $\mathfrak{E}(h,\varphi,\vec{\psi})$ está bien definida, y es una integral doble absolutamente convergente.

Debemos calcular la diferencia entre $\left\langle Th\varphi, \vec{\psi} \right\rangle$ y $\left\langle Th, \varphi\vec{\psi} \right\rangle$:

$$\begin{aligned} &\left\langle Th\varphi, \vec{\psi} \right\rangle - \left\langle Th, \varphi\vec{\psi} \right\rangle \\ &\quad = \frac{1}{2} \iint \left(k(x,y), (h(y)\varphi(y)\vec{\psi}(x) - h(x)\varphi(x)\vec{\psi}(y)) - (h(y)\varphi(x)\vec{\psi}(x) - h(x)\varphi(y)\vec{\psi}(y)) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(y)d\mu(x) \\ &\quad = \frac{1}{2} \iint \left(k(x,y), (\varphi(y)-\varphi(x))(h(y)\vec{\psi}(x) + h(x)\vec{\psi}(y)) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(y)d\mu(x) \end{aligned}$$

(Usando (4.7.2.5)*:)*

$$= \mathfrak{E}(h, \varphi, \vec{\psi})$$

(Usando $(*_1)$*:)*

$$= \iint \Big(k(x,y), (\varphi(y) - \varphi(x)) h(y) \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y) d\mu(x)$$

Esto culmina la prueba. ☐

4.7.6. Proposición. Para todo $0 < \gamma \leq \alpha$, el operador T definido en (4.7.1.1) es continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $\big(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})\big)'$.

Demostración. Sean $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\{\vec{\psi}_j\}_{j=1}^\infty \subset \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, funciones tales que ϕ_j tiende a 0 en la topología de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, y $\vec{\psi}_j$ tiende a $0_{\mathbb{H}}$ en la topología de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

En particular, existe una bola $B = B_s(x_0)$ que es el soporte de todas las funciones ϕ_j, y también de todas las $\vec{\psi}_j$, y además se tiene que

$$\lim_{j\to\infty} \|\phi_j\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)} = 0, \qquad \lim_{j\to\infty} \|\vec{\psi}_j\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} = 0.$$

Por la Proposición 4.7.4, vale la desigualdad (4.7.4.b), porque la propiedad de acotación débil se cumple para todo exponente γ.

Tenemos entonces que, para todo j:

$$\left| \Big\langle T\phi_j, \vec{\psi}_j \Big\rangle \right| \leq C\mu(B) s^{2\gamma} \|\phi_j\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)} \|\vec{\psi}_j\|_{\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})},$$

y el lado derecho tiende a 0 cuando j tiende a ∞, porque C, B, s, no dependen de j.

Esto culmina la prueba. ☐

4.7.7. Una fórmula explícita para el operador adjunto T^*.

Ya tenemos una fórmula que tiene la forma definida en 4.4.17, y coincide con $T\phi$ gracias al Teorema 4.4.22. Esta fórmula podemos usarla también para el caso particular en que el núcleo k es antisimétrico, así que no necesitamos hacer nada nuevo al respecto.

Quisiéramos hallar una fórmula para el operador adjunto T^*, que aproveche la antisimetría de k.

Recordemos que para el caso de un núcleo $k(x,y)$ general no necesariamente antisimétrico, la fórmula para $T^*\vec{\psi}$ enunciada en (4.5.6.a), fue establecida para el caso de combinaciones lineales finitas de funciones Lipschitz de la forma $\vec{\psi} = \psi_1 w_1 + \cdots + \psi_N w_N$, siendo $\psi_1, \cdots, \psi_N$ funciones que toman valores escalares, y $w_1, \cdots, w_N$ vectores fijos de $\mathbb{H}$.

También pudimos extender esa fórmula al caso especial de un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$, bajo la hipótesis $T1 = 0$, $Te_j = 0$ (todo j), según se vio en el Corolario 4.6.8.

Pero no sabemos, en principio, si esa fórmula coincide con $T^*\vec{\psi}$ para otras situaciones más generales.

Pero ahora que el núcleo k es antisimétrico, podremos hallar una fórmula para $T^*\vec{\psi}$, válida para cualquier función $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, y cualquier espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

4.7.8. Teorema. Supongamos que $T1 = g \in BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$. Sea $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, y tomemos una bola $B = B_s(x_0)$ que contiene al soporte de $\vec{\psi}$. Entonces, para $x \in B$, tenemos:

$$\begin{aligned} T^*\vec{\psi}(x) = &- \Big((g(x) - m_{A\hat{B}} g), \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} + \Big\langle (g - m_{A\hat{B}}(g)), l_{\hat{B}}\, \vec{\psi}(x) \Big\rangle \\ &- \Big(\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} + \Big(I_B 1(x), \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} \\ &- \int \Big(k(x,y), (\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x)) h_B(x) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y), \end{aligned} \tag{4.7.8.1}$$

en donde $\Big\langle (g - m_{A\hat{B}}(g)), l_{\hat{B}}\, \vec{\psi}(x) \Big\rangle$, debe entenderse como el funcional lineal $\sigma(w) = \big\langle (g - m_{A\hat{B}}(g)), l_{\hat{B}}\, w \big\rangle$, actuando sobre el vector $w = \vec{\psi}(x)$.

Demostración. Sea $\phi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, soportada en la bola B.

Entonces las tres funciones h_B, ϕ, $\vec{\psi}$, están soportadas en $\mathfrak{c}^4 B$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\mathfrak{E}(h_B, \phi, \vec{\psi}) = \mathfrak{E}^{\mathfrak{c}^4 B}(h_B, \phi, \vec{\psi}), \qquad \mathfrak{E}^\dagger(h_B, \phi, \vec{\psi}) = \mathfrak{E}^{\dagger\, \mathfrak{c}^4 B}(h_B, \phi, \vec{\psi}).$$

Calculando la resta de estas dos cantidades, usando (4.7.2.5/6), con $h = h_B$, y usando que $h_B(\cdot)\phi(\cdot) = \phi(\cdot)$, y $h_B(\cdot)\vec{\psi}(\cdot) = \vec{\psi}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(h_B, \phi, \vec{\psi}) - \mathfrak{E}^\dagger(h_B, \phi, \vec{\psi}) &= \iint \Big(k(x,y), \phi(y)\vec{\psi}(x) - \phi(x)\vec{\psi}(y)\Big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(x) d\mu(y) \\ &= 2\left\langle T\phi, \vec{\psi}\right\rangle \\ &= 2\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle\end{aligned}$$

De aquí resulta que:

$$\mathfrak{E}(h_B, \phi, \vec{\psi}) = 2\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle + \mathfrak{E}^\dagger(h_B, \phi, \vec{\psi}).$$

Denotemos $Z^B\{\vec{\psi}, \phi\}$ a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}Z^B\{\vec{\psi}, \phi\} = &\int \Big((g(x) - m_{A\hat{B}}g), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}} \phi(x)\, d\mu(x) - \int \left\langle (g - m_{A\hat{B}}(g)), l_{\hat{B}}\, \vec{\psi}(x)\right\rangle \phi(x)\, d\mu(x) \\ &+ \int \Big(\bar{\mathsf{C}}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}} \phi(x)\, d\mu(x) - \int \Big(I_B 1(x), \vec{\psi}(x)\Big)_{\mathbb{H}} \phi(x)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Ahora, aplicamos la fórmula (4.4.17.1), y el Teorema 4.4.22, aprovechando la expresión de $T\phi$ para obtener:

$$\begin{aligned}\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle &= \left\langle T\phi, \psi\right\rangle \\ &= Z^B\{\vec{\psi}, \phi\} + \mathfrak{E}(h_B, \phi, \vec{\psi}) \\ &= Z^B\{\vec{\psi}, \phi\} + 2\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle + \mathfrak{E}^\dagger(h_B, \phi, \vec{\psi}).\end{aligned}$$

Despejando $\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle$, obtenemos:

$$\left\langle T^*\vec{\psi}, \phi\right\rangle = -Z^B\{\vec{\psi}, \phi\} - \mathfrak{E}^\dagger(h_B, \phi, \vec{\psi}).$$

De aquí concluimos que, cuando x es un punto de la bola B, vale la igualdad (4.7.8.1). $\square$

4.7.9. Resumen. Sea T un operador integral singular definido por medio de la igualdad 4.7.1.1, respecto un núcleo k antisimétrico que satisface las propiedades de L^r-Dini, y de L^r-suavidad.

Entonces T es continuo de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $\left(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})\right)'$ para todo exponente γ, $0 < \gamma \leq \alpha$, T satisface la propiedad de acotación débil, para todo $0 < \eta \leq \alpha$, y también satisface la propiedad de Conmutación de Meyer.

En el caso en que $T1 = g \in BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, se obtiene para el operador adjunto T^* la fórmula (4.7.8.1).

Si además ocurre que $T1 = 0$, usando ahora el teorema 4.5.3, en el caso en que la condición de L^r-suavidad valga para $\eta + \epsilon$, con $\epsilon > 0$, obtenemos que:

$$\|T\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)}$$

y $T\phi$ es una función acotada, tal que para cualquier bola B_0 de radio s_0, que contiene al soporte de ϕ, se satisface:

$$\|T\phi\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})} \leq C\|\phi\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n)} s_0^\eta.$$

Bajo todas estas condiciones tenemos que:

4.7.10. Proposición. Si $T1 = 0$, entonces para todo vector fijo $w \in \mathbb{H}$ se tiene que $T^*(1w) = 0$.

Demostración. En primer lugar sean $\phi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$. Entonces se tiene la igualdad:

$$\begin{aligned}
\left\langle T^* \vec{\psi}, \phi \right\rangle &= \left\langle T\phi, \vec{\psi} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \iint \Big(k(x,y), \phi(y)\vec{\psi}(x) - \phi(x)\vec{\psi}(y) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \frac{1}{2} \iint \Big(k(y,x), \phi(x)\vec{\psi}(y) - \phi(y)\vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \frac{1}{2} \iint \Big(k^*(x,y), \vec{\psi}(y)\phi(x) - \vec{\psi}(x)\phi(y) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Ahora tomamos una función $\phi \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ con integral nula, y un vector fijo $w \in \mathbb{H}$. Dada una bola $B = B_s(x_0)$ que contiena al soporte de $\vec{\psi}$, tenemos por definición:

$$\left\langle T^*(1w), \phi \right\rangle = \left\langle T^*(h_B w), \phi \right\rangle + \left\langle I_B^{(*)}(1w), \phi \right\rangle.$$

Sin embargo:

$$(*_1) \qquad \begin{aligned}
\left\langle T^*(h_B w), \phi \right\rangle &= \frac{1}{2} \iint \Big(k^*(x,y), (h_B(y)w)\, \phi(x) - (h_B(x)w)\, \phi(y) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \frac{1}{2} \iint \Big(k(y,x), h_B(y)\, (\phi(x)w) - h_B(x)\, (\phi(y)w) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) d\mu(y)
\end{aligned}$$

(Antisimetría de $k(x,y)$:)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \iint \Big(k(x,y), h_B(y)\, (\phi(x)w) - h_B(x)\, (\phi(y)w) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(x) d\mu(y) \\
&= -\left\langle T h_B, \phi w \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$(*_2) \qquad \begin{aligned}
\left\langle I_B^{(*)}(1w), \phi \right\rangle &= \iint \Big(k^*(x,y) - k^*(x_0,y), w \Big)_{\mathbb{H}} \, (1 - h_B(y))\, \phi(x)\, d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \int \left(\int (k(y,x) - k(y,x_0))\, (1 - h_B(y))\, d\mu(y),\ \phi(x)w \right)_{\mathbb{H}} d\mu(x)
\end{aligned}$$

(Antisimetría de $k(x,y)$:)

$$\begin{aligned}
&= -\int \left(\int (k(x,y) - k(x_0,y))\, (1 - h_B(y))\, d\mu(y),\ \phi(x)w \right)_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&= -\left\langle I_B 1, \phi w \right\rangle.
\end{aligned}$$

Pero ahora ϕw es una función del conjunto $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ que tiene integral $0_{\mathbb{H}}$. Por lo tanto, usando $(*_1)$ y $(*_2)$:

$$\left\langle T^*(1w), \phi \right\rangle = -\left\langle T h_B, \phi w \right\rangle - \left\langle I_B 1, \phi w \right\rangle = -\left\langle T1, \phi w \right\rangle = 0.$$

□

4.7.11. Corolario. Si $T1 = 0$, entonces para toda $\vec{\psi} \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, y toda bola B que contenga al soporte de $\vec{\psi}$, vale la fórmula:

$$(4.7.11.1) \qquad T^*\vec{\psi}(x) = -\Big(\mathtt{C}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} + \Big(I_B 1(x), \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} - \int \Big(k(x,y), (\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x)) h_B(x) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y)$$

$$(4.7.11.1') \qquad \begin{aligned}
&= \Big(\mathtt{C}^{(*)}_{B,\hat{B}}, \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} - \left(\int (k^*(x,y) - k^*(x_0,y))(1 - h_B(y))\, d\mu(y), \vec{\psi}(x) \right)_{\mathbb{H}} \\
&\quad + \int \Big(k^*(x,y) h_B(y), \vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(x) \Big)_{\mathbb{H}} \, d\mu(y),
\end{aligned}$$

para μ-casi todo $x \in B$.

Además se tiene la acotación en norma:

$$\|T^*\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \tag{4.7.11.2}$$

y $T^*\vec{\psi}$ es una función acotada, tal que para cualquier bola B_0 de radio s_0, que contiene al soporte de ϕ, se satisface:

$$\|T^*\vec{\psi}\|_{L^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\vec{\psi}\|_{\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} s_0^\eta. \tag{4.7.11.3}$$

Demostración. Usando la antisimetría, se puede ver que $-\bar{\mathtt{C}}_{B,\hat{B}} = \bar{\mathtt{C}}^{(*)}_{B,\hat{B}}$, y asimismo con los demás términos de (4.7.11.1) y (4.7.11.1').

La demostración de (4.7.11.1) es trivial a partir de (4.7.8.1') y el hecho de que $g = T1 = 0$.

La demostración de (4.7.11.2) y (4.7.11.3) sigue lineamientos completamente análogos a los que se usan en la demostración del Teorema 4.5.6.

Basta observar que, como $T1 = 0$, tenemos que $T^*(1w) = 0$ para todo vector $w \in \mathbb{H}$, por la Proposición 4.7.10, que nos permite usar el Corolario 4.4.16, y es aplicable la demostración del Teorema 4.5.6. $\square$

4.7.12. Corolario. Si $T1 = 0$, entonces T se extiende a un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$, y asimismo T^* se extiende a un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Siendo $T1 = 0$, vale la conclusión del Corolario precedente. En tal caso se puede hacer una aplicación directa del Lema 4.6.2, con $\mathbf{T} = T$, $\mathbf{S} = T^*$, y $\mathbb{A} = \mathbb{H}$. $\square$

4.7.13. Observación. Estos resultados para el operador adjunto T^* en el caso de núcleo k antisimétrico, son válidos para cualquier espacio de Hilbert. No se requiere que nos restrinjamos a un $\mathbb{H}$ de dimensión finita, y las propiedades (4.7.11.2) y (4.7.11.3), así como el último Corolario, no requieren que $\mathbb{H}$ sea separable. Notar que en este caso, se obtiene la expresión más concisa (4.7.8.1) para $T^*\vec{\psi}(x)$, aunque involucrando la función $g = T1$.

Capítulo 5

Aplicaciones

5.1. Oscilaciones de una Aproximación a la Identidad en un Espacio de Tipo Homogéneo.

5.1.1. Establecimiento general del problema. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo normal de orden θ, para algún $0 < \theta \leq 1$.

Tomemos $\{\rho(x, y, t)\}_{t>0}$, una aproximación a la identidad que verifique las propiedades de la Sección 2.6.

Denotemos $K = [K^\ell]_{\ell \in \mathbb{Z}}$, donde

$$K^\ell(x, y) = \rho(x, y, 2^\ell) - \rho(x, y, 2^{\ell-1}).$$

Deseamos probar que $K(x, y)$ es un núcleo estándar, a valores en el espacio de Hilbert $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{C})$.

Luego definiremos el operador T asociado a K, que será un operador de oscilación para las aproximaciones a la identidad, y le aplicaremos el Teorema 3.3.1 a fin de probar su acotación L^2.

5.1.2. Lema. Para todo $x, y \in X \times X \setminus \Delta$:

$$|K(x, y)|_{\mathbb{H}} \leq C \frac{1}{d(x, y)}.$$

Demostración. Sean $x, y \in X$, tales que $x \neq y$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
|K(x, y)|_{\mathbb{H}} &= \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \rho(x, y, 2^\ell) - \rho(x, y, 2^{\ell-1}) \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \rho(x, y, 2^\ell) \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(c2^{-\ell} \chi_{[0, c2^\ell]}(d(x, y)) \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}, d(x,y) \leq c2^\ell} \left(c2^{-\ell} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_{\log_2(d(x,y)/c)}^{\infty} \left(2^{-2t} \right) dt \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(d(x, y)^{-2} \right)^{1/2} \\
&\leq C d(x, y)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

5.1.3. Lema. Para todo $x, x', y \in X$, tal que $d(x,x') < d(x,y)/2A$, se satisface:

$$|K(x,y) - K(x',y)|_{\mathbb{H}} \leq C_\beta \frac{d(x,x')^\beta}{d(x,y)^{1+\beta}}.$$

Demostración. Sean x, x', y tales que $d(x,x') < d(x,y)/2A$. Entonces debe ocurrir que $d(x',y) \geq d(x,y)/4A$, porque de lo contrario:

$$d(x,y) \leq A(d(x,x') + d(x',y)) \leq A\left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{4A}\right) d(x,y) \leq \frac{3}{4} d(x,y) < d(x,y),$$

que es un absurdo.

En consecuencia:

$$\begin{aligned} |K(x,y) - K(x',y)|_{\mathbb{H}} &\leq C \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left|(\rho(x,y,2^\ell) - \rho(x',y,2^\ell))\right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C d(x,x')^\beta \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c 2^{-2\beta - 2} (\chi_{[0,c2^\ell]}(d(x,y)) + \chi_{[0,c2^\ell]}(d(x',y))) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(Siguiendo pasos análogos de la prueba del Lema previo:)

$$\leq C d(x,x')^\beta \left((d(x,y)^{(-2-2\beta)\ell} + d(x',y)^{-2-2\beta}) \right)^{1/2}$$

(Usamos aquí que $d(x',y) \geq d(x,y)/4A$:)

$$\leq C d(x,x')^\beta d(x,y)^{-1-\beta}.$$

□

5.1.4. Proposición. $K(x,y)$ es un núcleo estándar (con valores en $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{C})$).

Demostración. Esto es ciero debido a los dos lemas precedentes. □

5.1.5. Definición del operador T. Sean $f \in \Lambda_0^\beta(X), g, \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, con $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{C})$. Definimos el operador $T : \Lambda_0^\beta(X) \to (\Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H}))'$ por medio de cualquiera de estas expresiones:

$$\begin{aligned} \left\langle Tf, g \right\rangle &= \lim_{L \to \infty} \int \sum_{\ell=-L}^{L} \left(\int K^\ell(x,y) f(y) d\mu(y) \right) g_\ell(x)\, d\mu(x) \\ &= \lim_{L \to \infty} \sum_{\ell=-L}^{L} \int \left(\int K^\ell(x,y) f(y) d\mu(y) \right) g_\ell(x)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Nos interesa probar que T tiene asociado el núcleo estándar K, y que además satisface las hipótesis del Teorema 3.3.1.

5.1.6. Acotación Débil de T y Buena definición de T. Sea B una bola de radio R y centro x_0, y sean f, g funciones soportadas en B. Luego, usando que $\int K^\ell(\cdot, y) d\mu = 0$:

$$\left| \int \sum_{-L \leq \ell < \log_2 R} \int K^\ell(x,y) f(y) d\mu(y)\, g_\ell(x) d\mu(x) \right|$$

(Para cada ℓ las integrales dobles convergen, luego podemos cambiar el orden de integración:)

$$= \left| \int \int \sum_{-L \leq \ell < \log_2 R} K^\ell(x,y) f(y) \left(g_\ell(x) - g_\ell(x_0)\right) d\mu(x) d\mu(y) \right|$$

(Usamos de nuevo que K^ℓ tiene integral 0, previo cambio del orden de integración:)

$$\begin{aligned}
&\leq \int \sum_{\ell < \log_2 R} \left| \int K^\ell(x,y)(f(y) - f(x)) d\mu(y) \right| |g_\ell(x) - g(x_0)| \, d\mu(x) \\
&\leq C_{f,g} \int \sum_{\ell < \log_2 R} \int \left| K^\ell(x,y) d(x,y)^\beta \right| \chi_{B \times B}(x,y) d\mu(y) \;\; (d(x,x_0)^\beta) d\mu(x) \\
&\leq C R^\beta \int \sum_{\ell < \log_2 R} \int \left| c K^\ell(x,y) 2^{\ell\beta} \, \chi_{B \times B}(x,y) \right| \, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leq C R^\beta \int \sum_{\ell < \log_2 R} \left| \int 2^{\ell(-1+\beta)} \chi_{[0, c2^\ell]}(d(x,y)) \, \chi_{B \times B}(x,y) d\mu(y) \right| d\mu(x) \\
&\leq C R^\beta \int_B \sum_{\ell < \log_2 R} 2^{\ell(\beta)} d\mu(x) \\
&\leq C R^\beta \int_B R^\beta d\mu(x) \\
&\leq C R^{1+2\beta} \leq C \mu(B)^{1+2\beta}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, comenzando igual que en el párrafo previo llegamos a:

$$\begin{aligned}
&\left| \int \sum_{L \geq \ell \geq \log_2 R} \left(\int K^\ell(x,y) f(y) d\mu(y) \right) g_\ell(x) d\mu(x) \right| \\
&\qquad \leq C_{f,g} \int \sum_{\ell \geq \log_2 R} \int \left| K^\ell(x,y) d(x,y)^\beta) \right| \chi_{B \times B}(x,y) d\mu(y) \;\; (d(x,x_0)^\beta) d\mu(x) \\
&\qquad \leq C R^\beta \int \sum_{\ell \geq \log_2 R} \int \left| c K^\ell(x,y) R^\beta \, \chi_{B \times B}(x,y) \right| \, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\qquad \leq C R^{2\beta} \int_B \sum_{\ell \geq \log_2 R} \left| \int 2^{-\ell} \chi_{[0,cR]}(d(x,y)) d\mu(y) \right| d\mu(x) \\
&\qquad \leq C R^{2\beta} \int_B R \sum_{\ell \geq \log_2 R} 2^{-\ell} d\mu(x) \\
&\qquad \leq C R^{2\beta} \int_B R \, R^{-1} d\mu(x) \\
&\qquad \leq C R^{1+2\beta}
\end{aligned}$$

(Usando normalidad de la medida:)

$$\leq C \mu(B)^{1+2\beta}.$$

Por lo tanto:

$$\left| \int \sum_{-L \leq \ell \leq L} \left(\int K^\ell(x,y) f(y) d\mu(y) \right) g_\ell(x) d\mu(x) \right| \leq C \mu(B)^{1+2\beta}.$$

Se observa que $C \leq \tilde{C} \|f\|_\beta \|g\|_{\beta, \ell^2}$.
Resulta que T satisface la propiedad de acotación débil.

Además la cota anterior es uniforme en L, y si observamos bien, nos permite hablar de convergencia bajo el primer signo integral, lo cual nos dice que T está bien definido.

5.1.7. Lema. Sean $f \in \Lambda_0^\beta(X), g \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, tales que $\operatorname{sop}(f) \cap \operatorname{sop}(g) = \emptyset$. Entonces

$$\langle Tf, g\rangle = \iint \big(K(x,y)f(y), g(x)\big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \iint \big(K(x,y)f(y), g(x)\big)_{\mathbb{H}}\, d\mu(x)d\mu(y). \tag{5.1.7.a}$$

Demostración. Para cada entero ℓ tenemos $\operatorname{sop}(K^\ell(x,\cdot)) \subset B_{c2^{\ell+1}}(x)$.

Denotemos $F = \operatorname{sop}(f)$, y $F_\varepsilon = \varepsilon$-entorno$(\operatorname{sop}(f))$.

Luego:

$$\operatorname{sop}\left(\int \left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\right) \subset F_{c2^{\ell+1}}.$$

Como $\operatorname{sop}(f)$ y $\operatorname{sop}(g)$ son compactos y disjuntos, resulta que

$$\operatorname{dist}(\operatorname{sop}(f), \operatorname{sop}(g)) > 0.$$

Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $F_\varepsilon \cap \operatorname{sop}(g) = \emptyset$.

Entonces existe $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\ell \leq \ell_0$ implica:

$$F_{c2^{\ell+1}} \cap \operatorname{sop}(g) = \emptyset.$$

Luego, si $\ell \leq \ell_0$:

$$\int \left(\int \left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\right) |g_\ell(x)|\, d\mu(x) = 0.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{L\to\infty} \int \sum_{-L}^{L} \left(\int \left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\right) |g_\ell| = \lim_{L\to\infty} \int \sum_{\ell_0}^{L} \int \left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\, |g_\ell(x)|\, d\mu(x).$$

A su vez:

$$\int \sum_{\ell_0}^{\infty} \left(\left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\right) |g_\ell| \leq \int \left(\sum_{\ell_0}^{\infty} \left(\int \left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\right)^2\right)^{1/2} |g(x)|_{\ell^2}\, d\mu(x).$$

Se deduce de aquí que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell_0}^{\infty} \int \left(\int \left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\right) g(x)_\ell d\mu(x) &\leq \int \left(\sum_{\ell_0}^{\infty} c2^{-2\ell} \|f\|_{L^1_\mu}^2\right)^{1/2} |g(x)|_{\ell^2}\, d\mu(x) \\
&\leq C\|f\|_{L^1_\mu(X)} \|g\|_{L^1_\mu(X,\mathbb{H})} \big(\sum_{\ell_0}^{\infty} 2^{-2\ell}\big)^{1/2} \\
&\leq C\|f\|_{L^1_\mu(X)} \|g\|_{L^1_\mu(X,\mathbb{H})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int \sum_{\ell} \left|K^\ell(x,\cdot)\right| |f|\, |g_\ell(x)|$$

es integrable, y podemos escribir la igualdad (5.1.7.a). $\square$

5.1.8. Condición $T1 = 0$. Sea $g \in \Lambda_0^\beta(X, \mathbb{H})$, con $\int g = 0$. Tomar $\varepsilon > 0$ y $L \in \mathbb{Z}$.

Sea h_ε una función Lipschitz, $0 \leq h_\varepsilon \leq 1$, que vale 1 en un ε-entorno de $\operatorname{sop}(g)$, 0 fuera de un 2ε-entorno de $\operatorname{sop}(g)$.

Denotemos:

$$I_\varepsilon(L) = \left|\int \sum_{L}^{\infty} \int K^\ell(x,y) g_\ell(x) d\mu(x)(1 - h_\varepsilon(y)) d\mu(y)\right|.$$

Sea x_0 un punto en el soporte de g, y sea $R > 0$ un número tal que $\operatorname{sop}(g) \subset B_R := B_R(x_0)$.

Para $\varepsilon \geq A^2R$, y usando que $\int g_\ell = 0$, estimamos, para L suficientemente grande:

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon(L) &\leq \int \left| \sum_L^\infty \int (K^\ell(x,y) - K^\ell(x_0,y)) g_\ell(x) d\mu(x) (1 - h_\varepsilon(y)) \right| d\mu(y) \\
&\leq \int_{x \in \operatorname{sop}(g)} \sum_L^\infty \int_{d(x,y) > AR} \left| (K^\ell(x,y) - K^\ell(x_0,y)) g_\ell(x) \right| d\mu(y) d\mu(x)
\end{aligned}
$$

Usemos que $\left|K^\ell(x,y) - K^\ell(x_0,y)\right| \leq c2^{-\ell(\beta+1)} d(x,x_0)^\beta$, *y que* $\operatorname{sop} K^\ell \subset B_{A(c2^\ell + R)}(x_0)$*:*

$$
\leq CR^\beta \int_{x \in \operatorname{sop}(g)} \sum_L^\infty \left| c2^{-\ell(\beta+1)} \right| \int_{d(x,y) > AR, d(x,y) \leq c^2 2^\ell + cR} d\mu(y) \left| g_\ell(x) \right| d\mu(x)
$$

como R está fijo para la g dada, y L es suficientemente grande, existe una constante C_R tal que:

$$
\leq CR^\beta \int_{x \in \operatorname{sop}(g)} \sum_L^\infty \left| c2^{-\ell(\beta+1)} \right| \int_{d(x,y) > \varepsilon, d(x,y) \leq c_R 2^\ell} d\mu(y) \left| g_\ell(x) \right| d\mu(x)
$$

Aquí usamos que la medida de las bolas es comparable a su radio:

$$
\leq CR^\beta c_R \int_{x \in \operatorname{sop}(g)} \sum_L^\infty 2^{-\ell(\beta)} \left| g_\ell(x) \right| d\mu(x)
$$

Cauchy-Schwartz:

$$
\begin{aligned}
&\leq CR^\beta c_R \int_{x \in \operatorname{sop}(g)} \left(\sum_L^\infty 2^{-2\ell(\beta)}\right)^{1/2} \left| g(x) \right|_{\mathbb{H}} d\mu(x) \\
&\leq CR^\beta c_R 2^{-L\beta} \|g\|_{L^1_{\mathbb{H}}}.
\end{aligned}
$$

Se deduce que:

$$
\limsup_{L \to \infty} I_\varepsilon(L) = 0.
$$

Si $x \in \operatorname{sop}(g)$, $y \in \operatorname{sop}(1 - h_\varepsilon)$ (con $\varepsilon \geq A^2R$), y $\ell < -L$, resulta que, cada vez que $(x,y) \in \operatorname{sop}(K^\ell)$, se obtiene, para L suficientemente grande:

$$
d(x,y) \leq c2^\ell < c2^{-L} \leq \varepsilon < d(x,y).
$$

Esto es absurdo, luego debemos tener, para L grande:

$$
J_\varepsilon(L) := \left| \iint \sum_{-\infty}^{-L} K^\ell(x,y) g_\ell(x)(1 - h_\varepsilon(y)) d\mu(y) d\mu(x) \right| = 0.
$$

debido a la disjunción de los soportes de las funciones del integrando.

Por otro lado, como $\int K^\ell(x,\cdot) = 0$:

$$
\iint K^\ell(x,y) g_\ell(x) d\mu(x) d\mu(y) = 0
$$

(cambiando el orden de integración).

Por lo tanto. para $\varepsilon \geq A^2R$:

$$
\left| \langle T1, g \rangle \right| \leq \limsup_{L \to \infty} \left(I_\varepsilon(L) + J_\varepsilon(L) + \sum_{-L}^{L} \left| \iint K^\ell(x,y) g_\ell(x) d\mu(x) d\mu(y) \right| \right) = 0.
$$

Hemos probado que

$$\big\langle T1, g\big\rangle = 0.$$

5.1.9. Condición $T^*(1w) = 0$.

Si ahora tomamos un vector fijo $w \in \mathbb{H}$, se desea probar que $T^*(1w) = 0$. Escribimos en este caso, para algún $\varepsilon > 0$:

$$\big\langle T^*(1w), f\big\rangle = \lim_{L\to\infty} \big(I_1(L) + I_2(L) + I_3(L)\big),$$

donde

$$I_1(L) = \sum_{\ell=-L}^{L} \iint K^\ell(y,x) h_\varepsilon(y) f(x)\, w_\ell \, d\mu(y) d\mu(x)$$

$$I_2(L) = \sum_{\ell=-\infty}^{L} \iint K^\ell(y,x)(1 - h_\varepsilon(y)) f(x) w_\ell \, d\mu(y) d\mu(x)$$

$$I_3(L) = \sum_{\ell=L}^{\infty} \iint K^\ell(y,x)(1 - h_\varepsilon(y)) f(x) w_\ell \, d\mu(y) d\mu(x).$$

Igual que antes, tenemos que $I_1(L) = 0$, y para L suficientemente grande $I_2(L) = 0$. Asimismo, $\limsup_{L\to\infty} I_1(L) = 0$.

5.1.10. Teorema. El operador T definido en 5.1.5, es un operador acotado de $L^2_\mu(X)$ en $L^2_\mu(X, \mathbb{H})$.

Demostración. Es claro, porque T tiene asociado el núcleo estándar K, T satisface la propiedad de acotación débil, y además verifica las condiciones $T1 = 0$ y $T^*(1w) = 0$ (para cada vector fijo $w \in \mathbb{H}$).

En consecuencia se puede aplicar el Teorema 3.3.1. □

5.1.11. Aplicación a la teoría de Littlewood-Paley.

Dada una función $f \in L^2_\mu(X)$, tenemos la función cuadrado asociada a f, definida por:

$$\mathfrak{S} f = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |D_k f|^2\right)^{1/2},$$

donde $D_k = S_k - S_{k-1}$ y $S_k f = \int \rho(x, \cdot, 2^k) f$.

Por el Teorema previo, tenemos que:

$$\left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |D_k f|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^2_\mu(X)} = \|Tf\|_{L^2_\mu(X,\mathbb{H})} \leq C \|f\|_{L^2_\mu(X)}.$$

Luego, usando esta estimación junto al hecho que $S_j f \to f$ $(k \to -\infty)$, y $S_k f \to 0$ $(k \to -\infty)$, en norma L^2_μ, se obtiene la conocida estimación de la teoría de Littlewood-Paley:

$$\|f\|_{L^2_\mu(X)} \approx \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |D_k f|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^2_\mu(X)}.$$

5.2. Ejemplos con Núcleo Antisimétrico.

5.2.1. Establecimiento general del problema.

Sea μ una medida, que puede ser doblante en un espacio de tipo homogéneo X, o bien no necesariamente doblante en el espacio euclidiano $X = \mathbb{R}^n$. Denotemos $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{C})$.

Sea $\kappa(x, y)$ un núcleo antisimétrico (a valores escalares), asociado a un operador de integral singular τ.

Para cada $\varepsilon > 0$ se puede definir el operador truncado τ_ε dado por:

$$\langle \tau_\varepsilon f, g \rangle = \iint_{d(x,y)\geq\varepsilon} \kappa(x,y) f(y) g(x) d\mu(y) d\mu(x).$$

A continuación se define el operador de oscilación $T = \mathcal{O}(\tau)$, mediante

$$\langle Tf, \vec{g} \rangle = \lim_{L\to\infty} \sum_{\ell=-L}^{L} \langle (\tau_{2^\ell} - \tau_{2^{\ell-1}}) f, g \rangle ,$$

para cualesquiera funciones $f \in \Lambda_0^\gamma(X)$, $\vec{g} \in \Lambda_0^\gamma(X, \mathbb{H})$, siempre que el límite exista.

Se puede apreciar que T tiene asociado el núcleo

$$k(x,y) = \{\kappa(x,y) \chi_{[2^{\ell-1}, 2^\ell)}(d(x,y))\}_{\ell\in\mathbb{Z}}.$$

Nuestro objetivo es estudiar este operador de oscilación, y determinar si es acotado entre espacios de funciones de cuadrado integrable.

5.2.2. Condición de tamaño del núcleo. Si el núcleo original $\kappa(x,y)$ satisface una condición de tamaño como 3.1.1(K1), o como (4.3.2.b), entonces el núcleo oscilado $k(x,y)$ también satisfará idéntica propiedad, aunque en sentido vectorial. En efecto, dados un par de puntos distintos $x, y \in X$ (pudiendo ser $X = \mathbb{R}^n$), existe un único índice $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{\ell_0 - 1} \leq d(x,y) < 2^{\ell_0}$. Por lo tanto el vector $k(x,y) = \{\kappa(x,y)\chi_{[2^{\ell-1},2^\ell)}(d(x,y))\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ tiene, a lo sumo, la componente ℓ_0-ésima distinta de 0, mientras que las demás componentes son nulas.

Ahora tenemos que:

$$|k(x,y)|_{\mathbb{H}} = |\kappa(x,y)| \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \chi_{[2^{\ell-1},2^\ell)}(d(x,y))^2 \right)^{1/2} = |\kappa(x,y)|\, \chi_{[2^{\ell_0-1},2^{\ell_0})}(d(x,y)) \leq |\kappa(x,y)| ,$$

de lo cual se deduce que $k(x,y)$ cumple 3.1.1(K1), o bien (4.3.2.b), según sea el caso.

5.2.3. Condición de suavidad del núcleo. Si el núcleo original $\kappa(x,y)$ satisface alguna condición de suavidad, como 3.1.1(K2), o bien (4.3.2.c) y (4.3.2.d), no necesariamente ocurre que el núcleo oscilado $k(x,y)$ satisfaga esas mismas relaciones.

La dificultad aparece en el uso de la función característica. Supongamos por ejemplo que x, x', y son puntos de X (o de $\mathbb{R}^n$), tales que para algún índice ℓ_0:

$$d(x,y) \in [2^{\ell_0-1}, 2^{\ell_0}), \qquad d(x',y) \in [2^{\ell_0}, 2^{\ell_0+1}).$$

En este caso no puede usarse lo que ya sabemos de la condición de suavidad de $\kappa(x,y)$ para estimar la correspondiente condición de suavidad de $k(x,y)$, pues

$$\begin{aligned} |k(x,y) - k(x',y)|_{\mathbb{H}} &= \left(|\kappa(x,y)|^2 \chi_{[2^{\ell_0-1},2^{\ell_0})}(d(x,y)) + |\kappa(x',y)|^2 \chi_{[2^{\ell_0-1},2^{\ell_0})}(d(x',y)) \right)^{1/2} \\ &= \left(|\kappa(x,y)|^2 + |\kappa(x',y)|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y nos queda una suma de valores absolutos en donde nos gustaría que apareciera el valor asoluto de una resta.

Para rodear este problema, definiremos los operadores truncados suaves.

5.2.4. Truncamientos suaves. Para cada $\varepsilon > 0$ definamos la función $h_\varepsilon(t) := h(t/\varepsilon)$. Por comodidad denotemos: $\sigma_\varepsilon(t) = 1 - h_\epsilon(t)$.

Podemos introducir los operadores de truncación suave de τ mediante:

$$\langle \tilde{\tau}_\varepsilon f, g \rangle = \iint \sigma_\varepsilon(d(x,y)) \kappa(x,y) f(y) g(x) d\mu(y) d\mu(x).$$

El núcleo de cada uno de estos operadores es $\tilde{\kappa}_\varepsilon(x,y) := \sigma_\varepsilon(d(x,y))\kappa(x,y)$.

A continuación, queda determinado un operador de oscilación $\tilde{\mathcal{O}}(\tau)$, dado por:

$$\left\langle \tilde{\mathcal{O}}(\tau) f, \vec{g} \right\rangle := \lim_{L\to\infty} \sum_{\ell=-L}^{L} (\tilde{\kappa}_{2^\ell} - \tilde{\kappa}_{2^{\ell-1}}) f(y) g_\ell(x)\, d\mu(y) d\mu(x).$$

El núcleo de este operador es

$$k(x,y)=\{\tilde{\kappa}_{2^\ell}-\tilde{\kappa}_{2^{\ell-1}}\}_{\ell\in\mathbb{Z}}.$$

Denotando $k_\ell(x,y)=\tilde{\kappa}_{2^\ell}-\tilde{\kappa}_{2^{\ell-1}}$, escribimos:

$$k(x,y)=\{k_\ell(x,y)\}_{\ell\in\mathbb{Z}}.$$

También tenemos esta igualdad:

$$k(x,y)=-\kappa(x,y)\{h_{2^\ell}(d(x,y))-h_{2^{\ell-1}}(d(x,y))\}_{\ell\in\mathbb{Z}}.$$

Verifiquemos que $k(x,y)$ satisface las mismas condiciones de tamaño que $\kappa(x,y)$. En efecto, sea $\ell_0\in\mathbb{Z}$ el único índice tal que $2^{\ell_0-1}\le d(x,y)<2^{\ell_0}$. Entonces, para los únicos índices $\ell\in\mathbb{Z}$ para los cuales $k_\ell(x,y)$ no se anula, son aquellos en los cuales $h_{2^\ell}(d(x,y))-h_{2^{\ell-1}}(d(x,y))$ no se anula. Esto requiere que $2^{\ell_0-2}\le d(x,y)\le A2^{\ell_0}$.

Escribiendo $a=\log_2 A$, nos queda: $2^{\ell_0-2}\le d(x,y)\le 2^{\ell_0+a}$. Por lo tanto:

$$\left|\tilde{k}(x,y)\right|_{\mathbb{H}}\le(a+2)\left|\kappa(x,y)\right|,$$

y de aquí se deduce directamente que $\tilde{k}(x,y)$ satisface 3.1.1(K1), o bien (4.3.2.b), según corresponda, aunque con la constante C agrandada en un factor de $a+2$.

Ahora estudiemos las propiedades de suavidad del núcleo $\tilde{k}(x,y)$. Dados $x,x',y\in X$ (o en $\mathbb{R}^n$), la diferencia $\tilde{k}_\ell(x,y)-\tilde{k}_\ell(x',y)$ se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_\ell(x,y)-\tilde{k}_\ell(x',y)&=-\kappa(x,y)\big(h_{2^\ell}(x,y)-h_{2^\ell}(x',y)+h_{2^{\ell-1}}(x',y)-h_{2^{\ell-1}}(x,y)\big)\\&\quad-\big(\kappa(x,y)-\kappa(x',y)\big)\big(h_{2^\ell}(x',y)-h_{2^{\ell-1}}(x',y)\big).\end{aligned}$$

Sean $\ell_0,\ell_0'\in\mathbb{Z}$ los únicos índices tales que $2^{\ell_0-1}\le d(x,y)<2^{\ell_0}$, $2^{\ell_0'-1}\le d(x',y)<2^{\ell_0'}$.

Como antes, tenemos que $h_{2^\ell}(x,y)-h_{2^{\ell-1}}(x,y)$ no se anula sólo si $2^{\ell_0-2}\le d(x,y)\le 2^{\ell_0+a}$. Y también $h_{2^\ell}(x',y)-h_{2^{\ell-1}}(x',y)$ no se anula sólo si $2^{\ell_0'-2}\le d(x',y)\le 2^{\ell_0'+a}$.

Tenemos que:

$$(\kappa(x,y)-\kappa(x',y))(h_{2^\ell}(x',y)-h_{2^{\ell-1}}(x',y))=0,$$

salvo posiblemente cuando $\ell_0'-2\le\ell\le\ell_0'+a$.

Primer Caso: Supongamos primero, como en 3.1.1(K2), que $d(x,x')<\frac{1}{2A}d(x,y)$. En ese caso

$$(*_1)\qquad (h_{2^\ell}(x,y)-h_{2^\ell}(x',y)+h_{2^{\ell-1}}(x',y)-h_{2^{\ell-1}}(x,y))=0,$$

salvo que $2^{\ell_0-2}\le d(x,y)\le 2^{\ell_0+a}$ o bien que $2^{\ell_0'-2}\le d(x',y)\le 2^{\ell_0'+a}$.

Debe ocurrir que $d(x',y)\le A(d(x,x')+d(x,y))\le 2Ad(x,y)$. También debe pasar que $d(x',y)\ge\frac{1}{3A}d(x,y)$, porque si no:

$$d(x,y)\le A(d(x,x')+d(x',y))\le(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})d(x,y)<d(x,y),$$

que es absurdo.

En resumen:

$$\frac{1}{3A}d(x,y)\le d(x',y)\le 2Ad(x,y).$$

Del mismo modo se puede probar que:

$$\frac{1}{3A}d(x',y)\le d(x,y)\le 2Ad(x',y).$$

Si tuviésemos que $2^{\ell_0-2}\le d(x,y)\le 2^{\ell_0+a}$, entonces

$$2^{\ell_0-2-\log_2 3A}\le d(x',y)\le 2^{\ell_0+a+\log_2 2A}.$$

Esto implica que:

$$\ell_0-2-\log_2 3-a\le\ell_0'\le\ell_0+1+2a.$$

De modo análogo, si tuviésemos que $2^{\ell_0'-2}\le d(x',y)\le 2^{\ell_0'+a}$, entonces

$$\ell_0'-2-\log_2 3-a\le\ell_0\le\ell_0'+1+2a.$$

En cualquier caso, $(*_1)$ es nulo excepto para los índices ℓ tales que:

$$(\ell_0 - 2 - \log_2 3 - a) - 2 \leq \ell \leq (\ell_0 + 1 + 2a) + a.$$

Restando los valores $(\ell_0+1+2a)+a$ y $(\ell_0-2-\log_2 3-a)-2$, vemos que hay siempre, a lo sumo, una cantidad de $M = \log_2 3 + 5 + 4a$ índices ℓ para los cuales $(*_1)$ no se anula.

Por teorema de valor medio, y por (2.4.1.7):

$$(*_2) \qquad \begin{aligned} |h_{2^\ell}(x,y) - h_{2^\ell}(x',y) + h_{2^{\ell-1}}(x',y) - h_{2^{\ell-1}}(x,y)| &\leq 3\|dh/dt\|_{L^\infty} \frac{1}{2^\ell} |d(x,y) - d(x',y)| \\ &\leq C_1 \frac{1}{2^{(\ell_0-4-\log_2 3-a)}} d(x,x')^\theta \, 2^{(\ell_0+1+3a)(1-\theta)} \\ &\leq C_1 d(x,x')^\theta 2^{-\ell_0\theta} \\ &\leq C_1 d(x,x')^\theta d(x,y)^{-\theta}. \end{aligned}$$

Podemos deducir ahora que:

$$\left|\tilde{k}(x,y) - \tilde{k}(x',y)\right|_{\mathbb{H}} \leq C_1(a+2)\,|\kappa(x,y)|\, d(x,x')^\theta d(x,y)^{-\theta} + 2(a+2)\,|\kappa(x,y) - \kappa(x',y)|\,.$$

Para proseguir, necesitamos usar la condición de tamaño 3.1.1(K1), junto con la condición de suavidad 3.1.1(K2) (no podemos usarlas por separado).

Observamos que si se cumple (2.4.1.7) para el exponente θ, también se cumple idéntica condición para el exponente $\delta \leq \theta$, que aparece en 3.1.1(K2). Obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{k}(x,y) - \tilde{k}(x',y)\right|_{\mathbb{H}} &\leq C_1(a+2)Cd(x,y)^{-1-\theta} d(x,x')^\theta + 2(a+2)C(d(x,y)^{-1-\delta})d(x,x')^\delta \\ &\leq Cd(x,y)^{-1-\delta} d(x,x')^\delta d(x,x')^{\theta-\delta} d(x,y)^{-(\theta-\delta)} + Cd(x,y)^{-1-\delta} d(x,x')^\delta \end{aligned}$$

(Usando que $d(x,x') < \frac{1}{2A} d(x,y)$:)

$$\leq Cd(x,y)^{-1-\delta} d(x,x')^\delta.$$

Segundo Caso: ¿Qué ocurre si estamos en la situación de $X = \mathbb{R}^n$, con una medida μ no doblante? Aquí suponemos la validez de las condiciones (4.3.2.b), (4.3.2.c) y (4.3.2.d) para el núcleo κ (con $1 \leq r < \infty$).

Supongamos que $x, x', y \in \mathbb{R}^n$, que $Ad(x,x') \leq R$, y que $R < d(x,y) \leq AR$.

En particular tenemos que $d(x',y) \leq A(d(x,x') + d(x,y)) \leq (1+A^2)R$.

Debemos usar que los soportes de las diferencias $h_{2^\ell} - h_{2^{\ell-1}}$ son "casi disjuntos".

Supongamos que $(h_{2^\ell} - h_{2^{\ell-1}})(t) - (h_{2^{\ell'}} - h_{2^{\ell'-1}})(t) \neq 0$. Esto implica que $2^{\ell-1} \leq t \leq A2^\ell$ y $2^{\ell'-1} \leq t \leq A2^{\ell'}$. En consecuencia, debemos tener que $\ell - \ell' \leq \log_2 A + 1 = a + 1$.

De manera que, para cada valor de t, se tiene:

$$|\{(h_{2^\ell} - h_{2^{\ell-1}})(t)\}|_{\mathbb{H}} \leq 2(a+1).$$

Por lo tanto:,

$$\begin{aligned} J_1 \overset{\text{def}}{:=} \left(\int_{R<d(x,y)\leq AR} |\kappa(x,y) - \kappa(x',y)|^r \, |\{h_{2^\ell} - h_{2^{\ell-1}}(d(x,y))\}|_{\mathbb{H}} \, d\mu(y) \right)^{1/r} \\ \leq C \left(\int_{R<d(x,y)\leq AR} |\kappa(x,y) - \kappa(x',y)|^r \, d\mu(y) \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \left|\{h_{2^\ell}(x,y) - h_{2^\ell}(x',y)\}_{\ell\geq\log_2 R}\right|_{\mathbb{H}} &\leq C\,|d(x,y) - d(x',y)| \Big(\sum_{\ell\geq\log_2 R} 2^{-2\ell} \Big)^{1/2} \\ &\leq C\,|d(x,x')|^\eta \, R^{-\eta}. \end{aligned}$$

Debemos tener que $d(x', y) \geq \frac{R}{A} - d(x, x')$, porque de lo contrario nos daría que $d(x, y) \leq A(d(x, x') + d(x', y)) \leq R$, que es un absurdo.

Sin pérdida de generalidad, **podemos suponer que la constante geométrica A es mayor o igual que** 2.

En tal caso, siempre es cierto que $R \geq \frac{R}{A} - d(x, x')$, porque de lo contrario tendríamos que $A - 1 < d(x, x')\frac{R}{A} < 1$, o sea, $A < 2$, en contra de lo supuesto.

Ahora, tomando en cuenta que los índices relevantes satisfacen $\ell_0 \leq \ell \leq \log_2 AR$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_{R<d(x,y)\leq AR} |\kappa(x,y)|^r \left|\{h_{2^\ell}(d(x,y)) - h_{2^\ell}(d(x',y))\}_{\ell \leq \log_2 AR}\right|_{\mathbb{H}}^r d\mu(y) \\
&= \int_{R<d(x,y)\leq AR} |\kappa(x,y)|^r \left|\{h_{2^\ell}(d(x,y)) - h_{2^\ell}(d(x',y))\}_{\ell_0 \leq \ell \leq \log_2 AR}\right|_{\mathbb{H}}^r d\mu(y),
\end{aligned}$$

donde $\ell_0 = \log_2(AR - d(x, x'))$.

El número de índices ℓ que se toman en el último término está acotado por

$$N_0(x, x') = \log_2 AR - \log_2(AR - d(x, x')) = \log_2(1 + d(x, x')/(AR - d(x, x'))).$$

Usando el teorema del valor medio, y el Lema 4.1.2, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\left|\{h_{2^\ell}(d(x,y)) - h_{2^\ell}(d(x',y))\}_{\ell_0 \leq \ell \leq \log_2 R}\right|_{\mathbb{H}} \\
&\leq d(x, x')^\eta R^{1-\eta} \left(\sum_{\ell=\ell_0}^{\log_2 AR} 2^{-2j} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Tenemos ahora que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=\ell_0}^{\log_2 AR} 2^{-2j} &= 2^{-2\ell_0} \sum_{\ell=0}^{N_0(x,x')} 2^{-2j} \\
&\leq 2^{-2\ell_0} C 2^{-2N_0(x,x')} \\
&\leq C(AR - d(x, x'))^{-2} \left(\frac{AR}{AR - d(x, x')} \right)^{-2} \\
&\leq (AR)^{-2}.
\end{aligned}$$

Juntando todas estas estimaciones, podemos ahora ver que:

$$\begin{aligned}
J_2 &\stackrel{\text{def}}{:=} \left(\int_{R<d(x,y)\leq AR} |\kappa(x,y)|^r \left|\{h_{2^\ell}(d(x,y)) - h_{2^\ell}(d(x',y))\}_{\ell \leq \log_2 AR}\right|_{\mathbb{H}}^r d\mu(y) \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\int_{R<d(x,y)\leq AR} |\kappa(x,y)|^r d\mu(y) \right)^{1/r} C d(x, x')^\eta R^{-\eta} \\
&\leq C R^{-\nu/r'} \left(\frac{d(x, x')}{R} \right)^\eta.
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{R<d(x,y)\leq AR} \left|\tilde{k}(x,y) - \tilde{k}(x',y)\right|_{\mathbb{H}}^r d\mu(y) \right)^{1/r} &= \left(\int_{R<d(x,y)\leq AR} |\kappa(x,y) - \kappa(x',y)|^r \left|\{h_{2^\ell}(d(x,y)) - h_{2^\ell}(d(x',y))\}_{\ell\in\mathbb{Z}}\right|_{\mathbb{H}}^r d\mu(y) \right)^{1/r} \\
&\leq C_r(J_1 + J_2) \leq C R^{-\nu/r'} \left(\frac{d(x, x')}{R} \right)^\eta.
\end{aligned}$$

Así que $\tilde{k}(x, y)$ satisface la condición de L^r-suavidad, $1 \leq r < \infty$, respecto al exponente η.

5.2.5. Antisimetría. Si el núcleo original $\kappa(x, y)$ es antisimétrico, entonces es claro que los núcleos de $\mathcal{O}(\tau)$ y $\tilde{\mathcal{O}}(\tau)$ también son antisimétricos. En ese caso, podemos aplicar los resultados de la Sección 4.7, y obtenemos que $\mathcal{O}(\tau)$ y $\tilde{\mathcal{O}}(\tau)$ satisfacen la propiedad de conmutación de Meyer, y también la propiedad de acotación débil, para todo exponente $0 < \gamma \leq \theta$ (en el caso de $\mathbb{R}^n$, tomamos $\theta = 1/n$), y además ambos operadores son acotados de $\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ en $(\Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}))'$.

Notemos que aunque $\mathcal{O}(\tau)$ puede no satisfacer condiciones de suavidad, en la prueba de los resultados de la Sección 4.7 sólo hemos usado condiciones de tamaño, y en consecuencia siguen siendo válidas las propiedades de Acotación Débil, de Conmutación de Meyer, y de continuidad.

Mencionemos que, si de alguna manera se prueba que la diferencia $\mathcal{O}(\tau) - \tilde{\mathcal{O}}(\tau)$ es un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, y que $\tilde{\mathcal{O}}(\tau)(1) = 0$, se podrá concluir que $\mathcal{O}(\tau)$ es un operador acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ (porque tendríamos que $\tilde{\mathcal{O}}(\tau)$ también es acotado de $L^2_\mu(\mathbb{R}^n)$ en $L^2_\mu(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$).

5.3. Oscilaciones de la Transformada de Riesz.

5.3.1. Definiciones y observaciones básicas.

Se define la j-ésima Transforamda de Riesz ($j = 1, \cdots, n$) de una función $f \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$ mediante:

$$\Re_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{d(x,y) \geq \varepsilon} \frac{x_j - y_j}{d(x,y)^{\frac{1}{n}(n+1)}} f(y)\, dm_n(y).$$

En este contexto consideramos la medida de Lebesgue n-dimensional m_n. Entonces el exponente ν en (4.1.5) es igual a 1.

En lo que sigue consideraremos sólo el caso $j = 1$, y denotaremos $\Re = \Re_1$.

Se ve claramente que el núcleo $\kappa(x,y) = \dfrac{x_1 - y_1}{d(x,y)^{\frac{1}{n}(n+1)}}$ es antisimétrico.

Es conocido que este núcleo satisface las condiciones de tamaño y suavidad siguientes:

$$|\kappa(x,y)| \leq C d(x,y)^{-1}, \qquad \text{(para todo } x, y,\ x \neq y),$$
$$|\kappa(x,y) - \kappa(x',y)| \leq C \frac{d(x,x')^\alpha}{d(x,y)^{1+\alpha}}, \qquad (d(x,x') \leq d(x,y)/A).$$

Esto implica que κ satisface las condiciones (4.3.2.b), (4.3.2.c) y (4.3.2.d), para todo r, $1 \leq r < \infty$, y η, $0 < \eta \leq \alpha = 1/n$.

De nuevo consideramos el espacio de Hilbert $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{C})$. Como antes, denotamos τ_ε al operador truncado $\tau_\varepsilon f(x) := \int_{d(x,y) \geq \varepsilon} \kappa(x,y) dm_n(y)$. Estudiaremos el siguiente operador de oscilación $T = \mathcal{O}(\Re)$ para la Transformada de Riesz:

$$\langle Tf, \vec{g} \rangle = \lim_{L \to \infty} \sum_{\ell=-L}^{L} \langle (\tau_{A^\ell} - \tau_{A^{\ell-1}}) f, g \rangle,$$

cuyo núcleo es

$$k(x,y) = \{\kappa(x,y) \chi_{[A^{\ell-1}, A^\ell)}(d(x,y))\}_{\ell \in \mathbb{Z}}.$$

Análogamente se puede definir el núcleo $\tilde{k}$ asociado al operador de oscilación suavizado $\tilde{\mathcal{O}}(\Re)$.

En la sección anterior las oscilaciones se formaban con potencias de la forma 2^ℓ en vez de A^ℓ, pero puede verse sin dificultad que las conclusiones obtenidas allí sobre tamaño y suavidad son las mismas para este caso.

Así, los núcleos k y $\tilde{k}$, de los operadores $\mathcal{O}(\Re)$ y $\tilde{\mathcal{O}}(\Re)$ satisfacen la condición de tamaño

$$|k(x,y)|_{\mathbb{H}} \leq C d(x,y)^{-1}.$$

Además, el núcleo $\tilde{k}$ satisface la condición de suavidad:

$$\left| \tilde{k}(x,y) - \tilde{k}(x',y) \right| \leq C \frac{d(x,x')^\alpha}{d(x,y)^{1+\alpha}}, \qquad (d(x,x') \leq d(x,y)/A).$$

Se puede probar a partir de estas relaciones que $k(x,y)$ y $\tilde{k}(x,y)$ satisfacen la condición (4.3.2.b) para todo r, $1 \leq r \leq \infty$. También se puede ver que $\tilde{k}(x,y)$ verifica la condición de L^r-suavidad para todo r, $1 \leq r < \infty$.

Deseamos probar que el núcleo k satisface una condición de L^r-suavidad, al menos para $r = 2$.

5.3.2. Proposición. Para todo $R > 0$, y para todo par de puntos $x, x' \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(x,x') < R/A$, se cumple que:

$$\left(\int_{R \le d(x,y) < AR} |k(x,y) - k(x',y)|_{\mathbb{H}}^2 \, dm_n(y)\right)^{1/2} \le CR^{-1/2}\left(\frac{d(x,x')}{R}\right)^{\alpha/2},$$

siendo $\alpha = 1/n$.

Demostración. Sean x, x' un par de puntos tales que $d(x,x') < R/A$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ el entero que satisface $A^{j-1} \le R < A^j$. Calculamos

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_{R<d(x,y)\le AR} \left|k(x,y) - k(x',y)\right|^2 \, dm_n(y)\Big)^{1/2} \\
&\le \int_{R<d(x,y)\le AR} \left|\kappa(x,y) - \kappa(x',y)\right|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y))\right|^2 \, dm_n(y) \\
&\quad + \int_{R<d(x,y)\le AR} \left|\kappa(x',y)\right|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y)) - \chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x',y))\right|^2 \, dm_n(y) \\
&=: J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Para J_1, como $A < d(x,y) \le AR$ resulta que $\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y)) = 0$ siempre que $\ell \ne j, j+1$. Ahora podemos aplicar la condición de L^r-suavidad con $r = 2$ de κ y se obtiene así la cota deseada.

Para J_2, tenemos $|\kappa(x',y)|^2 \le C\,R^{-2}$. Así que debemos prestar atención a la serie. Vemos que $A^{m-1} < d(x,y) \le A^m$ sólo si $m = j$ ó $m = j+1$.

A continuación debemos analizar lo que ocurre con cada término de la serie a medida que el índice ℓ varía.

Usaremos la notación siguiente:

$$U_\ell(x,y) = \left|\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y)) - \chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x',y))\right|^2$$

También definimos los términos $I_1^{(\ell)}$ y $I_2^{(\ell)}$ como

$$I_1^{(\ell)} := \int_{R<d(x,y)\le A^j} U_\ell(x,y) dm_n(y), \qquad I_2^{(\ell)} := \int_{A^j<d(x,y)\le AR} U_\ell(x,y) dm_n(y).$$

Ahora estimamos:

$$J_2 \le CR^{-2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (I_1^{(\ell)} + I_2^{(\ell)}),$$

Consideremos en primer lugar los términos $I_1^{(\ell)}$. Para ellos se tiene que $A^{j-1} < d(x,y)$.

Primero estudiamos lo que ocurre cuando $d(x',y) < A^\ell \le A^{j-1}$. Tenemos

$$0 \le d(x,y) - d(x',y) \le nd(x,x')^\alpha A^{j(1-\alpha)},$$

por lo tanto

$$d(x,y) \le A^\ell + nd(x,x')^\alpha A^{j(1-\alpha)}$$

Se sigue que

$$d(x,y) \le A^\ell + nA^\alpha R^\alpha A^{j(1-\alpha)} \le A^\ell + \frac{n}{A^\alpha} R \le A^\ell + \frac{n}{A^\alpha} d(x,y),$$

por lo tanto $(1 - n/A^\alpha) d(x,y) \le A^\ell$, lo cual implica $(1 - n/A^\alpha) A^{j-1} \le A^\ell$ y entonces $(j-1) + \log_A(1 - n/A^\alpha) \le \ell \le j-1$.

Esto significa que hay a lo sumo $\log_A(1 - n/A^\alpha)$ términos $I_1^{(\ell)}$ no nulos con $\ell \le j-1$. Para estos términos tenemos $A^{j-1} < d(x,y) \le A^{j-1} + C\,d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}$, así que, para todo $\ell \le j-1$,

$$\begin{aligned}
I_1^{(\ell)} \le \int_{A^{j-1}<d(x,y)\le A^j} U_\ell(x,y) dm_n(y) &\le Cm_n\big(B(x, A^{j-1} + Cd(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}) \setminus B(x, A^{j-1})\big) \\
&\le Cd(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos $d(x',y) \le c_n(d(x,x') + d(x,y)) \le c_n(R/A + A^j) < A^{j+1}$. Esto implica que $U_\ell(x,y) = 0$ cuando $\ell \ge j+2$.

Sólo resta analizar los casos $\ell = j, j+1$.

Para $I_1^{(j+1)}$, tomando $A^{j-1} < d(x,y) \leq A^j$ y $A^j < d(x',y) \leq A^{j+1}$, tenemos

$$0 \leq d(x',y) - d(x,y) \leq nd(x',x)^\alpha A^{(j+1)(1-\alpha)} \leq C\,d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha},$$

así, obtenemos $A^j < d(x',y) \leq A^j + Cd(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}$ y entonces

$$I_1^{(j+1)} \leq m_n(B(x', A^j + Cd(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}) \setminus m_n(B(x', A^j))) \leq Cd(x,x')^\alpha R^{1-\alpha},$$

como deseábamos.

Ahora analicemos el término $I_1^{(j)}$. Denotamos $\ell = j$. Tenemos así que $A^{\ell-1} \leq d(x,y) < A^\ell \leq AR$. Por otro lado, por la desigualdad casi-triangular y como $A = (2n)^n \geq c_n$ tenemos que $d(x',y) \leq c_n(d(x,x') + d(x,y)) \leq R + Ad(x,y) \leq C'R$. La expresión bajo el signo integral no se anula sólo en caso de que $d(x',y) < A^{\ell-1}$ o bien cuando $d(x',y) \geq A^\ell$.

En el primer caso tenemos que

$$A^{\ell-1} > d(x',y) = (d(x',y) - d(x,y)) + d(x,y),$$

pero como $d(x,y) \geq A^{\ell-1}$, resulta que $d(x',y) - d(x,y) < 0$, y así:

$$A^{\ell-1} + |d(x',y) - d(x,y)| \geq d(x,y).$$

Esto implica

$$d(x,y) \leq A^{\ell-1} + nd(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}.$$

Supongamos ahora que estamos en el segundo caso, esto es $d(x',y) \geq A^\ell$. Como $d(x,y) < A^\ell$, obtenemos que $d(x',y) - d(x,y) \geq 0$. Podemos escribir

$$C''d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha} + d(x,y) \geq \big(d(x',y) - d(x,y)\big) + d(x,y) \geq A^\ell.$$

La constante C'' es igual a n por la desigualdad (4.1.2).

Usando que $d(x,x') \leq R/A$, tenemos

$$(*) \qquad C''d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha} \leq nA^{-\alpha}R \leq n((2n)^n)^{-1/n}R < A^\ell.$$

Esto implica que

$$d(x,y) \geq A^\ell - C''d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha} \geq 0.$$

Luego, la integral no es nula en la unión de los dos anillos

$$\begin{aligned} A_\ell^1 &:= B_{A^{\ell-1}+d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}}(x) \setminus B_{A^{\ell-1}}(x), \\ A_\ell^2 &:= B_{A^\ell}(x) \setminus B_{A^\ell - d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}}(x). \end{aligned}$$

Como m_n es la medida de Lebesgue, tenemos estas sencillas identidades

$$\begin{aligned} m_n(A_\ell^1) &= 2d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha} \\ m_n(A_\ell^2) &= 2d(x,x')^\alpha R^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Esto nos da las cotas deseadas.

Ahora debemos pasar al análisis de los términos $I_2^{(\ell)}$. En general, corriendo el índice ℓ en 1 hacia la derecha obtenemos estimaciones totalmente análogas a las de los términos $I_1^{(\ell)}$. Es decir que la cota de cada $I_2^{(\ell)}$ es análoga y se obtiene con el mismo método que para el término $I_1^{(\ell-1)}$, prácticamente sin cambio alguno. Tan sólo notamos que para $I_2^{(j+1)}$, tomando ahora $\ell = j+1$ en $(*)$, la constante C'' es igual a $nA^{1-\alpha}$. La cota deseada sigue siendo cierta porque en este caso $A^{j-1} < R \leq A^j = A^{\ell-1}$.

Reuniendo todos estos hechos la Proposición queda probada. $\square$

5.3.3. Proposición. El operador de oscilación $\mathcal{O}(\Re)$ satisface la condición $\mathcal{O}(\Re)(1) = 0$.

Demostración. Fijemos un índice $\ell \in \mathbb{Z}$. Sea $g_\ell \in \Lambda_0^\gamma(\mathbb{R}^n)$, soportada en la bola B de centro x_0, tal que $\int g_\ell = 0$. Si e_ℓ denota el ℓ-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{H}$, entonces, para cada $t > 1$:

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathcal{O}(\Re)(1), g_\ell e_\ell \Big\rangle &= \iint \kappa(x,y)\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y))h_{tB}(y)g_\ell(x)\,dm_n(y)dm_n(x)\\ &+ \iint \big(\kappa(x,y)\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y)) - \kappa(x_0,y)\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x_0,y))\big)(1-h_{tB})(y)g_\ell(x)\,dm_n(y)dm_n(x)\\ &= \iint \kappa(x,y)\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y))dm_n(y)g_\ell(x)\,dm_n(x)\\ &- \iint \kappa(x_0,y)\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x_0,y))(1-h_{tB}(y))g_\ell(x)\,dm_n(y)dm_n(x)\\ &:= I_1 - I_2.\end{aligned}$$

Para calcular I_1, partimos el dominio de integración en dos conjuntos disjuntos, el primero de ellos es tal que $y_1 > x_1$, y el otro es tal que $y_1 < x_1$ (notar que si $y_1 = x_1$, resulta $k(x,y) = 0$). Obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int \kappa(x,y)\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y))dm_n(y) &= \int_{y_1>x_1} + \int_{y_1<x_1}\\ &= \int_{y_1-x_1>0} \frac{|x_1-y_1|}{d(x,y)}\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y))dm_n(y) - \int_{y_1-x_1<0} \frac{|x_1-y_1|}{d(x,y)}\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x,y))dm_n(y).\end{aligned}$$

El integrando es una función simétrica respecto el hiperplano $x_1 = y_1$. La medida de Lebesgue también es simétrica respecto el hiperplano $x_1 = y_1$. Por lo tanto ambas integrales dan el mismo resultado, y así su diferencia nos debe dar 0. Esto implica que:

$$I_1 = \int 0\, g_\ell(x)\,dm_n(x) = 0.$$

Por otra parte, la integral:

$$\int \kappa(x_0,y)\chi_{[A^{\ell-1},A^\ell)}(d(x_0,y))(1-h_{tB}(y))\,dm_n(y),$$

es finita e independiente de x. Así que, usando que g_ℓ tiene integral nula, resulta:

$$I_2 = \int C\, g_\ell(x)\,dm_n(x) = 0.$$

Por último, tomemos una función $\vec{g} = \{g_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$, de integral nula. Usando que:

$$\iint |k(x,y) - k(x_0,y)|_{\mathbb{H}}\, |1-h_B(y)|\, |\vec{g}(x)|_{\mathbb{H}}\; dm_n(y)dm_n(x),$$

es finita, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para ver que:

$$\begin{aligned}&\lim_{L\to\infty} \iint (1-h_B(y)) \sum_{\ell=-L}^{L} (k_\ell(x,y) - k_\ell(x_0,y))g_\ell(x)\,dm_n(y)dm_n(x)\\ &\qquad= \iint \lim_{L\to\infty}(1-h_B(y)) \sum_{\ell=-L}^{L} (k_\ell(x,y) - k_\ell(x_0,y))g_\ell(x)\,dm_n(y)dm_n(x)\\ &\qquad= \iint (1-h_B(y)) \Big(k_\ell(x,y) - k_\ell(x_0,y), \vec{g}(x)\Big)_{\mathbb{H}}\; dm_n(y)dm_n(x)\\ &\qquad= \Big\langle I_B 1, \vec{g}\Big\rangle.\end{aligned}$$

Además, por definición de $\mathcal{O}(\Re)$, resulta que

$$\langle Th_B, \vec{g}\rangle = \lim_{L\to\infty} \sum_{\ell=-L}^{L} \langle \mathcal{O}(\Re)h_B, g_\ell e_\ell\rangle.$$

En consecuencia, resulta que:

$$\left\langle \mathcal{O}\Re(1), \vec{g} \right\rangle = \lim_{L\to\infty} \sum_{\ell=-L}^{L} \left\langle \mathcal{O}\Re(1), g_\ell\, e_\ell \right\rangle = \lim_{L\to\infty} \sum_{\ell=-L}^{L} 0 = 0.$$

□

5.3.4. Teorema. El operador de oscilaciones de la transformada de Riesz se extiende a funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, y satisface:

$$\|\mathcal{O}(\Re)(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. Dado que $T = \mathcal{O}(\Re)$ es un operador integral singular con núcleo antisimétrico, además satisface las condiciones de tamaño de L^r-Dini, de L^r-suavidad, Acotación Débil, Conmutación de Meyer, y también $T1 = 0$, se puede aplicar el Corolario 4.7.12, lo cual prueba el Teorema. □

5.3.5. Corolario. El operador de oscilaciones de la transformada de Hilbert se extiende a funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, y es acotado entre los espacios $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$.

Demostración. La transformada de Hilbert coincide con la transformada de Riesz correspondiente a la dimensión $n = 1$. □

5.4. Oscilaciones de un Conmutador de Calderón.

5.4.1. Definiciones y Propiedades Básicas.
Para cada $\varepsilon > 0$ se define el operador H_ε^N para funciones suaves de $\mathbb{R}$:

$$H_\varepsilon^N f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} \left(\frac{\lambda(x) - \lambda(y)}{x - y}\right)^N \frac{1}{x - y} f(y)\, dy.$$

donde N es un entero positivo prefijado ($N = 0$ corresponde a la transformada de Hilbert), y λ es una función Lipschitz, cuya norma de Lipschitz denotaremos $\|\lambda\|_\Lambda$.

El conmutador de Calderón de orden N respecto λ se define ahora como el límite siguiente:

$$H^N f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon^N f(x).$$

La existencia de ese límite es consecuencia de la antisimetría del núcleo

$$\kappa^N(x, y) = \left(\frac{\lambda(x) - \lambda(y)}{x - y}\right)^N \frac{1}{x - y}.$$

En el presente contexto, estamos trabajando en la recta real, en donde $d(x, y) = |x - y|$, la constante de la desigualdad triangular puede tomarse como $A \geq 1$, y la medida μ es simplemente la medida de Lebesgue sobre la recta.

Es conocido que este núcleo satisface las condiciones de tamaño y suavidad siguientes:

$$\begin{aligned} \left|\kappa^N(x, y)\right| &\leq C\,|x - y|^{-1}, && \text{(para todo } x, y,\ x \neq y\text{)}, \\ \left|\kappa^N(x, y) - \kappa(x', y)\right| &\leq C\frac{|x - x'|}{|x - y|^2}, && (|x - x'| \leq \tfrac{1}{2}\,|x - y|). \end{aligned}$$

Esto implica que κ^N satisface las condiciones (4.3.2.b), (4.3.2.c) y (4.3.2.d), para todo r, $1 \leq r < \infty$, y η, $0 < \eta \leq 1$ (para tal fin, tomamos $A = 2$).

Como antes, consideramos el espacio de Hilbert $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{C})$.

Por la teoría de la sección anterior, los núcleos k^N y $\tilde{k}^N$, de los operadores de oscilación $T^N = \mathcal{O}(H^N)$ y $\tilde{T}^N = \tilde{\mathcal{O}}(H^N)$ satisfacen la condición de tamaño

$$\left|k^N(x, y)\right|_{\mathbb{H}} \leq C\,|x - y|^{-1}.$$

Se puede probar a partir de estas relaciones que $k^N(x,y)$ satisface la condición (4.3.2.b) para todo r, $1 \leq r \leq \infty$. También se puede ver que $\tilde{k}^N(x,y)$ verifica la condición de L^r-suavidad para todo r, $1 \leq r < \infty$.

Deseamos probar que el núcleo k^N satisface una condición de L^r-suavidad, para $r = 2$.

5.4.2. Proposición. Para todo $R > 0$, y para todo par de puntos $x, x' \in \mathbb{R}$ tales que $|x - x'| < R/2$, se cumple que:

$$\int_{R \leq |x-y| < 2R} \left| k^N(x,y) - k^N(x',y) \right|_{\mathbb{H}} dy \leq C R^{-1/2} \left(\frac{|x-x'|}{R} \right)^{1/2}.$$

Demostración. El método de demostración es análogo al caso de las Oscilaciones de las Transformadas de Riesz, debido a que sólo se usan las propiedades de tamaño y suavidad del núcleo κ^N del operador H^N, y tomamos un valor de $A = 2$. $\square$

5.4.3. Condición $T1 \in BMO$.

En el caso conocido del Conmutador de Calderón de orden $N+1$, para deducir que H^{N+1} es un operador de Calderón-Zygmund, se debe probar que $H^{N+1}(1) \in BMO$. Para ello, se utiliza la hipótesis de inducción (en el superíndice N) de que H^N es un operador de Calderón-Zygmund. Esta hipótesis implica que H^N es acotado de L^∞ en BMO. Ahora bien. Se prueba que $H^{N+1}(1) = H^N(b)$, para una función acotada b, con lo cual $H^{N+1}(1)$ es una función del espacio BMO.

En el contexto vectorial, nosotros sólo hemos probado que un operador de integral singular antisimétrico que verifica $T1 = 0$ resulta ser un operador de Calderón-Zygmund (acotación $L^2 - L^2_{\mathbb{H}}$). Como no hemos demostrado un teorema del tipo $T1 \in BMO$, no podríamos usar una prueba por recurrencia del mismo estilo anterior.

Mencionemos que, si supiéramos de alguna manera que $\mathcal{O}(T^N 1)$ está en BMO_ρ, podríamos concluir que el operador de Oscilaciones del Conmutador de Calderón de orden N satisface la fórmula (4.7.8.1).

Capítulo 6

Comentarios Finales.

Los teoremas probados permiten su utilización al estudio de operadores de oscilación, para los cuales es natural su formulación y estudio de la teoría de operadores definidos sobre funciones vectoriales. Por ejemplo, el operador de oscilación de la aproximación a la identidad en espacios de tipo homogéneo permite probar acotaciones de tipo Littlewood-Paley. También se establecen acotaciones de los operadores de oscilación de la transformada de Hilbert, y de la transformada Riesz, y se dan condiciones para poder aplicar esta teoría a las oscilaciones de los conmutadores de Calderón. Así también quedan establecidas las bases para estudiar operadores similares.

Se espera poder aplicar esta teoría a los operadores de oscilación asociados a una familia de operadores $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ provenientes de la teoría de semigrupos (ver (1.1-3)), y asimismo al operador de Oscilación de la Transformada de Cauchy sobre una curva Lipschitz. Al haber establecido un teorema del tipo $T1 = 0_{\mathbb{H}}$ para funciones valuadas en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, en el contexto de medidas no necesariamente doblantes, se espera que esto sirva de aplicación en teoremas más generales, del tipo $T1 \in BMO_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$, generalizando al caso vectorial resultados conocidos para el caso escalar, como es el caso de la Teoría de X. Tolsa (Teorema 1.1 en **[T1]**), y estudiar de este modo la acotación $(L^2_\mu(X), L^2_\mu(X, \mathbb{H}))$ del Operador de oscilaciones de la Transformada de Cauchy.

Bibliografía

[BCP] A. Benedek, A.-P. Calderón, and R. Panzone. Convolution operators on Banach space valued functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 48:356–365, 1962.

[BMT] Martinez T., Buraczenski D. and Torrea J.L. Calderón-Zygmund operators associated to ultraspherical expansions. 2005.

[B1] J. Bourgain. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. *Ark. Mat.*, 21(2):163–168, 1983.

[B2] D. L. Burkholder. A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions. In *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981)*, Wadsworth Math. Ser., pages 270–286. Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

[B3] Jean Bourgain. Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (69):5–45, 1989.

[CJRW1] James T. Campbell, Roger L. Jones, Karin Reinhold, and Máté Wierdl. Oscillation and variation for the Hilbert transform. *Duke Math. J.*, 105(1):59–83, 2000.

[CJRW2] James T. Campbell, Roger L. Jones, Karin Reinhold, and Máté Wierdl. Oscillation and variation for singular integrals in higher dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(5):2115–2137 (electronic), 2003.

[C] Mischa Cotlar. A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems. *Rev. Mat. Cuyana*, 1:105–167 (1956), 1955.

[CZ] A. P. Calderon and A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.*, 88:85–139, 1952.

[DJ] Guy David and Jean-Lin Journé. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators. *Ann. of Math. (2)*, 120(2):371–397, 1984.

[DJS] G. David, , J.-L. Journé, and S. Semmes. Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(4):1–56, 1985.

[DU] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr. Vector Meaures. *Mathematical Suerveys Number 15, American Mathematical Society*, 1977.

[F] Tadeusz Figiel. Singular integral operators: a martingale approach. In *Geometry of Banach spaces (Strobl, 1989)*, volume 158 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 95–110. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[G1] V. F. Gapoškin. A theorem on the almost everywhere convergence of a sequence of measurable functions, and its applications to sequences of stochastic integrals. *Mat. Sb. (N.S.)*, 104(146)(1):3–21, 175, 1977.

[G2] V. F. Gaposhkin. An individual ergodic theorem for normal operators in L_2. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 15(1):18–22, 96, 1981.

[GR] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[GT] T. A. Gillespie and José L. Torrea. Dimension free estimates for the oscillation of Riesz transforms. *Israel J. Math.*, 141:125–144, 2004.

[GHSTV] Torrea J. L., Harboure E., Signa T. and Viviani B. A sharp weighted transplantation theorem for laguerre function expansion. *Preprint.*

[HMMT] E. Harboure, R. A. Macías, M. T. Menárguez, and J. L. Torrea. Oscillation and variation for the Gaussian Riesz transforms and Poisson integral. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 135(1):85–104, 2005.

[HTV] E. Harboure, J. L. Torrea, , and B. Viviani. On the search for weighted inequalities for operators related to the Ornstein-Uhlenbeck semigroup. *Math. Ann.*, 318(2):341–353, 2000.

[HW] T. Hytönen and L. Weis. A $T1$ theorem for integral transformation with operator-valued kernel. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2006(599):155-200, 2006.

[JKRW] Roger L. Jones, Robert Kaufman, Joseph M. Rosenblatt, and Máté Wierdl. Oscillation in ergodic theory. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(4):889–935, 1998.

[MS] B. Muckenhoupt and E. M. Stein. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 118:17–92, 1965.

[MST] Roberto A. Macías, Carlos Segovia, and José L. and Torrea. Singular integral operators with non-necessarily bounded kernels on spaces of homogeneous type. *Adv. Math.*, 93(1):25–60, 1992.

[MV] M.S. Melnikov and J. Verdera. A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs. *Internat. Math. Res. Notices*, 325-331, 1995.

[NTV] F.Ñazarov, , S. Treil, and A. Volberg. Cauchy integral and Calderón-Zygmund operators on nonhomogeneous spaces. *Internat. Math. Res. Notices*, (15):703–726, 1997.

[RFRT] José L. Rubio de Francia, Francisco J. Ruiz, and José L. and Torrea. Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels. *Adv. in Math.*, 62(1):7–48, 1986.

[RFT] José L. Rubio de Francia and José L. Torrea. Vector extensions of operators in L^p spaces. *Pacific J. Math.*, 105(1):227–235, 1983.

[S] Elias M. Stein. *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 63. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[T1] Xavier Tolsa. Littlewood-Paley Theory and the $T(1)$ Theorem with Non-doubling Measures. *Advances in Math.*, 164:57–116, 2001.

[T2] Xavier Tolsa. A $T(1)$ theorem for non-doubling measures with atoms. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 82(1):195–228, 2001.

[T3] Xavier Tolsa. L^2-boundedness of the Cauchy integral operator for continuous measures. *Duke Math. J.*, 98(2):269–304, 1999.

[V] Joan and Verdera. On the $T(1)$-theorem for the Cauchy integral. *Trans. of the American Mathematical Society*, 299(2):581–599, 1987.

[W] R. Wittmann. Application to a Theorem of M. G. Krein to Singular Integrals. *Ark. Mat.*, 38(1):183–199, 2000.