



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL  
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL  
LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

**Doctor en Tecnología Química**

EN EL CAMPO DE: **Control de Procesos**

TÍTULO DE LA TESIS:

**Nuevos resultados teóricos y aplicaciones  
al control óptimo de procesos**

INSTITUCIONES DONDE SE REALIZÓ:

Instituto Tecnológico para el Desarrollo de la Industria Química (INTEC)  
Departamento de Ingeniería Química – FIQ – UNL

AUTOR:

Ing. Pablo Santiago Rivadeneira Paz

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Eduardo J. Adam

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Vicente Costanza

MIEMBROS DEL JURADO:

Dr. Carlos H. Muravchik

Dr. José L. Figueroa

Dr. Carlos E. D'Attellis

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2010



# Agradecimientos

Esta tesis de doctorado está dedicada principalmente al Dr. Vicente Costanza, quien fue mi director por más de cuatro años. Está dedicada a sus certeras sugerencias, a su gentil modo de señalar mis errores, a su paciencia y a su modo de ver la vida. Le agradezco haberme instruido en ciencias, pero más aún, el haberme ayudado a mejorar como persona y como investigador. Con él aprendí que el trabajo serio y el esfuerzo son recompensados.

Al término de la tesis deseo agradecer a mi codirector, el Dr. Eduardo Adam, quien después de dos años de trabajo me sigue colaborando con el mismo entusiasmo, gracias a él pudimos darle un buen cierre a este trabajo.

Le doy gracias a mi familia por creer en mi con fe desbordante. Ellos aportaron la fuerza para avanzar con paso firme por el camino del doctorado, sin ellos no habría sido posible anclar en buen puerto. Le agradezco a Dios por acompañarme y no dejarme desfallecer en el camino, pero mucho más por el haberme dado a dos persona maravillosas: a mi esposa Teresita y a mi pequeño hijo que crece apaciblemente en su vientre.

Por último, a todos mis compañeros del INTEC, quienes día a día compartieron risas, enojos y buenos ratos, les deseo que lleguen de la mejor manera a sus metas con el virtuosismo que siempre han demostrado en su trabajo. A todos ellos, un gran abrazo.



# Índice general

Índice de figuras	IV
Índice de tablas	VIII
Resumen	VIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Valor científico-técnico de la tesis. . . . .	1
1.2. Breve análisis de la principal bibliografía relacionada. . . . .	4
1.3. Aspectos diferenciadores de la tesis. . . . .	8
<b>2. Nociones Preliminares y Notación</b>	<b>11</b>
2.1. Sistemas de control y el problema de control óptimo. . . . .	11
2.2. La función de valor y el formalismo Hamiltoniano. . . . .	13
2.3. Nuevo tratamiento del problema de las HCEs con condiciones de contorno. . . . .	19
<b>3. PDEs variacionales aplicadas a problemas de control óptimo</b>	<b>22</b>
3.1. PDEs variacionales en sistemas no lineales unidimensionales. . . . .	23
3.1.1. Problema de cambio de set-point óptimo. . . . .	23
3.1.2. Mejoramiento de la exactitud en la generación de las trayectorias óptimas. . . . .	28
3.1.3. Abatimiento óptimo de perturbaciones. . . . .	30
3.2. PDEs variacionales con ley de control óptima implícita. . . . .	34
3.2.1. Descripción de las ecuaciones de evolución de hidrógeno (HER) a través de los pasos Volmer-Heyrovsky-Tafel. . . . .	35
3.2.2. El proceso HER visto como un sistema de control. . . . .	36
3.2.3. Ecuaciones PDEs para las tres condiciones de borde faltantes. . . . .	38
3.2.4. Cambio óptimo de set-point para el sistema HER. . . . .	41
3.3. PDEs variacionales para sistemas no lineales multidimensionales. . . . .	49
3.3.1. Aplicaciones a sistemas lineales invariantes. . . . .	53
3.3.2. Aplicaciones a sistemas bilineales invariantes. . . . .	64

3.3.3.	Aplicaciones a sistemas lineales variantes en el tiempo. . . . .	67
3.4.	Discusión y conclusiones. . . . .	76
<b>4.</b>	<b>Estrategias de control H2DOF</b>	<b>78</b>
4.1.	Estrategias two-degrees-of-freedom (2DOF) en el contexto de los procesos no lineales. Variante Hamiltoniana (H2DOF). . . . .	78
4.2.	Control óptimo de un reactor químico continuo tipo tanque agitado (CSTR) con reacción exotérmica. . . . .	81
4.3.	Generación de la trayectoria óptima nominal para el CSTR. . . . .	84
4.4.	Compensación on-line de las trayectorias óptimas perturbadas. . . . .	90
4.4.1.	Compensación Hamiltoniana por feedback y linealización a lo largo de la trayectoria óptima. . . . .	90
4.4.2.	Reducción óptima de ruidos en señales de entrada-salida y de perturbaciones ambientales. . . . .	92
4.5.	Diagrama de bloques de la estrategia H2DOF. . . . .	95
4.6.	Discusión y conclusiones. . . . .	95
<b>5.</b>	<b>Manejo de restricciones</b>	<b>98</b>
5.1.	Problemas de optimización con estados finales fijos y flexibles. . . . .	99
5.1.1.	Caso estudio: conducción de un móvil hacia el equilibrio con esfuerzo mínimo. . . . .	99
5.1.2.	La solución PMP con controles arbitrarios. . . . .	100
5.1.3.	La solución óptima a partir de las PDEs variacionales. Estados finales flexibles y controles arbitrarios. . . . .	101
5.2.	Problemas de optimización con controles acotados. . . . .	103
5.2.1.	Caso: $u \geq 0$ . Sólo frenado. . . . .	103
5.2.2.	Aproximación del problema con restricción $u \geq 0$ <i>via</i> las soluciones provistas por las PDEs. . . . .	107
5.2.3.	Extensión del problema a controles acotados inferior y superiormente. . .	110
5.3.	Discusión y conclusiones. . . . .	113
<b>6.</b>	<b>Estrategias óptimas aproximadas basadas en LMIs.</b>	<b>115</b>
6.1.	Control óptimo de procesos batch . . . . .	116
6.2.	Ecuaciones de un reactor fed-batch para la producción de penicilina . . . . .	117
6.3.	Generación de la trayectoria nominal del reactor batch. . . . .	118
6.3.1.	Extensión de la ley feedforward Hamiltoniana a un feedback de estados lineal. . . . .	119
6.3.2.	Estrategia subóptima de control en tiempo finito. . . . .	120

6.3.3. Estrategia subóptima en horizonte infinito. . . . .	123
6.4. Discusión y conclusiones. . . . .	128
<b>7. Modelación y optimización aplicado al tratamiento del SIDA (VIH-1).</b>	<b>129</b>
7.1. Descripción de un modelo simplificado para la dinámica del VIH. . . . .	131
7.2. El proceso terapéutico como un sistema de control. . . . .	135
7.3. El costo total asociado a una estrategia terapéutica. . . . .	137
7.3.1. La necesidad de discretizar parcialmente el problema. . . . .	139
7.4. Resultados numéricos minimizando costos. . . . .	140
7.4.1. Tratamiento terapéutico óptimo para la infección aguda del VIH. . . . .	141
7.4.2. Tratamiento terapéutico para un enfermo endémico. . . . .	149
7.5. Consideración explícita de los efectos secundarios de la medicación. . . . .	152
7.5.1. Incorporando la probabilidad de efectos secundarios en el modelo. . . . .	152
7.5.2. Los efectos secundarios como parte del costo a optimizar. . . . .	156
7.5.3. Tratamiento de un paciente con infección aguda y efectos colaterales. . . . .	158
7.6. Discusión y conclusiones. . . . .	162
<b>8. Conclusiones y perspectivas.</b>	<b>165</b>
8.1. Perspectivas de trabajo futuro. . . . .	167
<b>Bibliografía</b>	<b>170</b>

# Índice de figuras

2.1. Sistema de control general. . . . .	11
3.1. Superficie de estados finales óptimos en $T, S$ para cambio de set-point. . . . .	25
3.2. Superficie de coestados iniciales óptimos en $T, S$ para cambio de set-point. . . . .	25
3.3. Trayectorias óptimas de estado para diferentes valores de $S$ y el horizonte de optimización fijo $T = 5$ . . . . .	26
3.4. Trayectorias óptimas de control correspondientes al cambio de set-point $1 \rightarrow 1.5$ . $T = 5, S = 60$ . . . . .	26
3.5. Compensación de las trayectorias Hamiltonianas a través de $\varepsilon$ . . . . .	30
3.6. Tracking On-line de la trayectoria óptima de estado con rechazo a perturbaciones usando la DRE. . . . .	32
3.7. Tracking On-line de la trayectoria óptima de estado con rechazo a perturbaciones usando la adaptación de la ARE. . . . .	33
3.8. Comparación de la diferencia de costos entre la estrategia DRE y ARE para el rechazo de perturbaciones. . . . .	33
3.9. Influencia del factor de escala $k$ sobre el Hamiltonian del sistema. $S = 0.5, x = x_0$ . . . . .	42
3.10. Condición de borde $g(S)$ : proceso de duración cero $T = 0$ . . . . .	43
3.11. Dependencia de $g(S)$ sobre $k$ . Valores admisibles para $S$ . . . . .	44
3.12. $\rho(T, S)$ . Solución de las PDEs para el estado final. . . . .	45
3.13. $\sigma(T, S)$ . Solución de las PDEs para el coestado inicial. . . . .	45
3.14. $\nu(T, S)$ . Solución de las PDEs para la acción de control final. . . . .	46
3.15. Solución de las HACEs $(x, \lambda)$ . . . . .	47
3.16. Influencia de la penalización final $S$ sobre las trayectorias de estado óptimo. . . . .	48
3.17. Influencia de la penalización final $S$ sobre las trayectorias de control óptimo. . . . .	48
3.18. Verificación de la relación de $\alpha_S, \beta_S$ , con las submatrices $U_2$ y $U_4$ , respectivamente. . . . .	59
3.19. Evaluación del costo y del estado final $\rho_1$ , en función de la penalización final $sI$ . . . . .	60
3.20. Estado final $\rho_1(T, S)$ para $S$ matriz diagonal, con $s_1$ variable y $s_2 = 2$ fijo. . . . .	61
3.21. Coestado inicial $\sigma_1(T, S)$ para $S$ matriz diagonal, con $s_1$ variable y $s_2 = 2$ fijo. . . . .	61
3.22. Variación del estado final para distintos horizontes de optimización y distintas $S$ . . . . .	62



3.23. Curvas paramétricas del costo y el estado final con parámetro $\theta \in [0, 2\pi)$ . . . . .	62
3.24. Error relativo en % de la solución de $\rho_1$ para $S$ diagonal comparadas con la $S$ escalar ( $s_1 = s_2$ ). . . . .	64
3.25. Estado y acción de control para controladores ARE ( $t \leq 1$ ), y DRE en con penalización final ( $t \leq T = 0.5$ ). . . . .	65
3.26. Primera componente de $\rho_1(T, s)$ para el sistema bilineal dimensional. . . . .	66
3.27. Primera componente de $\sigma_1(T, s)$ para el sistema bilineal dimensional. . . . .	67
3.28. Estado final $\rho_1(T, s) = x^*(T)$ . . . . .	72
3.29. Coestado inicial $\sigma_1(T, s) = \lambda^*(0)$ . . . . .	72
3.30. Primera componente de la ecuación matricial de Riccati $\tilde{P}_{11}(t) = P(t)$ y sus valores iniciales (en $t = 0$ ) para procesos de duración $T - t$ . . . . .	74
4.1. Diagrama de bloques general de la estrategia de control “Two-degrees-of-freedom”. . . . .	80
4.2. Espacio de fases para $q_0 = 3$ . . . . .	82
4.3. Relaciones de entrada-salida del reactor CSTR con reacción exotérmica. . . . .	83
4.4. $\rho_2(T, S)$ estado final para el problema de cambio de set-point. . . . .	85
4.5. $\sigma_2(T, S)$ coestado inicial para el problema de cambio de set-point. . . . .	86
4.6. Trayectorias de estado $x_2(\tau)$ correspondientes a los controles de la Figura 4.7. . . . .	86
4.7. Algunas trayectorias de control usadas para verificar optimalidad. . . . .	87
4.8. Trayectorias de costo y costo total acumulado en $\tau = 1.0$ correspondientes a los controles de la Figura 4.7. . . . .	88
4.9. Comparación en costos entre la metodología MPC y la óptima desarrollada. La estrategia de control del MPC es dibujada también, con valores en el eje izquierdo. . . . .	89
4.10. Trayectorias del estado $x_2$ en distintas situaciones de control. . . . .	93
4.11. Estrategias de control: control óptimo nominal, compensación por feedback y comparación con control PI. . . . .	94
4.12. Diagrama de bloques de la estrategia de control óptimo Hamiltoniano 2DOF. . . . .	96
5.1. Trayectorias óptimas para los estados y el control para el caso con estados finales fijos y controles no acotados. Solución PMP. . . . .	101
5.2. Espacio de fases para trayectorias óptimas con diferentes valores de $s$ , para el problema con condiciones finales flexibles y controles no acotados. . . . .	102
5.3. Trayectorias de estado y control óptimo para el problema de estados finales flexibles y controles acotados obtenidos para $s = 100$ . . . . .	106
5.4. Trayectorias del estado $x_1$ , del coestado $\lambda_2$ , y el control $u$ para controles acotados, y sus partes ocultas en el período de saturación. . . . .	107
5.5. Isoclina con diferentes $s$ para los controles evaluados en $t$ y con el valor de los estados $e^{At}x_0$ , cada una de ellas resulta óptima con respecto al horizonte $T - t$ . . . . .	109

5.6. Variaciones a la estrategia de control óptima con un único tiempo de conmutación $\tau$ , usadas para comparar costos. . . . .	109
5.7. Trayectorias óptimas de los estados y el control cuando el control está acotado inferior y superiormente. . . . .	112
5.8. Cálculo del segundo tiempo de conmutación $\tau_2$ y sus correspondientes estrategias de control óptimo para diferentes $s$ . . . . .	113
6.1. Esquema de control H2DOF simplificado. . . . .	117
6.2. Trayectorias nominales de estado y control para el reactor fed-batch. $T = 132$ y $s = 20$ . . . . .	122
6.3. Trayectorias nominales de estado y control para la ley de control PI. . . . .	124
6.4. Trayectorias nominales de estado y control que cumplen restricciones. . . . .	127
7.1. Flujo tridimensional de la dinámica libre ( $u \equiv 0$ ). . . . .	133
7.2. Trayectorias individuales de la dinámica libre en el espacio de fases 3D. . . . .	133
7.3. Sensibilidad de $z$ con respecto a los parámetros $\beta_0$ , $\alpha_1$ , y $\alpha_2$ . . . . .	137
7.4. Trayectorias óptimas $x^*(t)$ , para cada valor fijo de $x^*(0)$ y diferentes $y^*(0)$ , $z^*(0)$ . . . . .	142
7.5. Trayectorias óptimas $z^*(t)$ , para cada valor fijo de $z^*(0)$ y diferentes $x^*(0)$ , $y^*(0)$ . . . . .	142
7.6. Trayectorias óptimas discretas $u^*(t)$ . . . . .	143
7.7. Trayectoria óptima $x^*(t)$ discreta, redondeada y continua. . . . .	144
7.8. Trayectoria óptima $z^*(t)$ discreta, redondeada y continua. . . . .	145
7.9. Comparación de las distintas trayectorias $x(t)$ . . . . .	148
7.10. Comparación de las distintas trayectorias $z(t)$ . . . . .	148
7.11. Comparación de las distintas trayectorias $u(t)$ . . . . .	149
7.12. Trayectorias $x(t)$ para el caso endémico. Comparación entre lazo abierto (óptimo) y cerrado. . . . .	150
7.13. Trayectorias $z(t)$ para el caso endémico. Comparación entre lazo abierto (óptimo) y cerrado. . . . .	151
7.14. Trayectorias $u(t)$ para el caso endémico. Comparación entre lazo abierto (óptimo) y cerrado. . . . .	151
7.15. Evolución de la probabilidad $p(t)$ de efectos secundarios, para diferentes terapias constantes y el mismo paciente con CI: $x(0) = 800$ células/ $mm^3$ , $y(0) = 41$ células/ $mm^3$ , $z(0) = 3760$ copias/ $ml$ y $p(0) = 0.06$ . . . . .	156
7.16. Comparación de trayectorias óptimas $x(t)$ entre las que consideran efectos secundarios y las que no. . . . .	158
7.17. Comparación de trayectorias óptimas $z(t)$ entre las que consideran efectos secundarios y las que no. . . . .	159
7.18. Evolución óptima de la probabilidad de efectos secundarios para distintos pesos $a_4$ . . . . .	159

---

7.19. Estrategias de control óptimas para distintos valores del peso $a_4$ . . . . .	160
7.20. Verificación de optimalidad de las trayectorias con y sin considerar efectos secundarios, para varios valores de carga viral inicial $z_0$ . . . . .	161

# Índice de tablas

3.1. Parámetros de los pasos HER . . . . .	35
3.2. Matriz $P(0)$ para distintos tipos de $S$ . . . . .	63
5.1. Costos y estados finales para el control óptimo y sus variaciones con solo una cota inferior, $S = 100I$ . . . . .	110
7.1. Costos para las trayectoria de control a lazo abierto, a lazo cerrado, y con el factor de descuento inverso. . . . .	149
7.2. Probabilidad de efectos secundarios (%) detectados al usar dosis de droga constante.	154
7.3. Estimación de los parámetros $d_i$ de la dinámica de efectos secundarios . . . . .	155
7.4. Incidencia en el costo de cada objetivo particular para diferentes valores del peso $a_4$ . Los valores están normalizados a la unidad. . . . .	162

# Resumen

El objetivo principal de esta tesis es fundamentar nuevos desarrollos científicos y tecnológicos en control óptimo de procesos, especialmente sobre estrategias de control basadas en el formalismo Hamiltoniano. Se ha puesto el énfasis en que los esquemas de control óptimo se puedan implementar completamente en tiempo real, y que tengan la capacidad de generar las trayectorias óptimas en paralelo con el proceso, abatir eficazmente perturbaciones aleatorias, tanto los ruidos en las señales de entrada y salida del sistema, así como los ruidos de interacción entre el proceso y el ambiente. También se ha avanzado en resolver problemas de control óptimo cuando sobre la variable manipulada se imponen restricciones. Varias de las estrategias desarrolladas en esta tesis conforman una nueva metodología denominada “Control Hamiltoniano con dos grados de libertad” (H2DOF del inglés), donde el primer grado se ocupa de la acción de control en lazo abierto para la construcción de la trayectoria óptima, y el segundo grado genera una ley de control retroalimentada que permite la compensación de desviaciones o seguimiento de la trayectoria óptima.

Las estrategias obtenidas se verificaron y validaron mediante aplicaciones a procesos de ingeniería, tales como (i) un reactor tanque agitado continuo, con dos estados, un solo control y una salida, donde es necesario hacer un cambio de referencia entre diferentes puntos de operación, (ii) un sistema de reacciones electroquímicas modeladas por una ecuación diferencial con un estado y un control, donde el costo a minimizar fue la “potencia del sistema” expresada por el producto entre el estado y el control, (iii) un reactor tanque agitado fed-batch para la producción de penicilina, con cuatro estados, un control y una salida, y (iv) otros sistemas ficticios (lineales y no lineales) que fueron analizados con el fin de validar los resultados teóricos obtenidos; entre ellos un vehículo aéreo modelado en una dimensión y el frenado de un tren cuya dinámica tiene un planteamiento matemático sencillo pero con derivaciones analíticas interesantes.

No todos los procesos requieren la aplicación de estrategias de control en tiempo continuo. Por ejemplo, el estudio de tratamientos terapéuticos para el síndrome de inmunodeficiencia humana (VIH/SIDA) presenta las siguientes características: (i) las salidas no son observables en tiempo real, (ii) no se le puede suministrar al paciente drogas continuamente, y (iii) las dosis de medicamento (valores de control) sólo pueden variar en un conjunto finito de fraccionamientos posibles. Entonces se debe optar por utilizar otros esquemas para tratar el problema de control

y optimización que plantea la reducción de la infección. En este caso se aplicó la metodología de “programación dinámica híbrida” para encontrar las dosificaciones óptimas de droga que debe ingerir el paciente periódicamente. En este esquema la observación de las variables y la toma de decisiones se adaptan a las condiciones de funcionamiento esencialmente discretas impuestas por la práctica, mientras que la evolución del sistema (no lineal) se simula siempre en tiempo continuo, como es en la realidad. El planteamiento resultó también útil para abordar el problema de reducir los efectos colaterales (side-effects) asociados con la ingestión de ciertas drogas utilizadas en la terapia HAART del VIH. Por primera vez en la literatura se presenta un modelo empírico de la dinámica del sistema que incluye estos efectos secundarios.

Los resultados obtenidos de esta tesis fueron publicados en artículos con referato, de difusión internacional [43, 44, 46, 47, 37, 38, 39], y otros trabajos similares están en revisión [45, 103].

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Valor científico-técnico de la tesis.

En esta tesis de doctorado se substantian nuevos desarrollos científicos y técnicos para el control óptimo de sistemas no lineales (tema que desde hace años se ha posicionado como uno de los ejes principales en la investigación en teoría de control). La mayoría de los procesos de ingeniería y disciplinas relacionadas, como biomedicina, responden a modelos no lineales, a veces con aparición de fenómenos como caos, bifurcación, reacciones oscilantes, ciclos límites, histéresis, etc., con restricciones en las variables, ruidos en las señales de entrada y salida, y perturbaciones en el modelo. Por otro lado, es creciente la preocupación y necesidad de controlar adecuadamente los procesos y al mismo tiempo optimizar su funcionamiento, normalmente minimizando un costo generalizado. Esta tesis se desarrolla dentro del marco de control óptimo, y fundamenta el uso de nuevas estrategias de control implementables totalmente en tiempo real mediante el “formalismo Hamiltoniano”. También utiliza la “programación dinámica híbrida” para el control y optimización de la dinámica del virus de inmunodeficiencia humano (VIH), considerado como un proceso de ingeniería biomédica.

Las estrategias de control fueron preparadas para resolver diversas situaciones dinámicas, tales como:

- Regulación alrededor de un punto de trabajo con un buen rechazo de perturbaciones. Aquí, el valor inicial del estado del proceso se piensa como una perturbación alrededor de su punto de trabajo (“operating point” o “set-point”). Esta necesidad de estabilización define un problema de control conocido como “problema de regulación”.
- Cambios de valores de referencia (o de “set-point” en inglés), donde se busca estrechar la diferencia de la salida del sistema de control respecto de una referencia (constante).
- Seguimiento de trayectorias (o problema de “tracking”). En este caso las referencias son curvas, y pueden estar dadas de antemano (resultado de experiencias anteriores con

el proceso) o ser generadas a medida que evoluciona el sistema. En la evolución del proceso se busca atenuar las posibles perturbaciones, los ruidos inherentes al proceso, las desigualdades entre mediciones y datos del modelo, etc.

Estos tipos de procesos de control se deben realizar garantizando criterios estándar de funcionamiento, robustez y optimalidad. Sobre esta base se plantearon las siguientes hipótesis para la elaboración de la tesis:

1. Es posible desarrollar técnicas de control para procesos tecnológicos no lineales utilizando las herramientas del enfoque Hamiltoniano del control óptimo, totalmente instrumentables en tiempo real, y que además ofrecen robustez y flexibilidad.
2. En dichas técnicas es posible solucionar problemas de filtrado y manejo de restricciones, considerando que existen perturbaciones (o ruidos) en las entradas y salidas del proceso, y otras debido a las interacciones del sistema con el ambiente.

A lo largo de la tesis se desarrollaron técnicas basadas en la teoría de control óptimo, tanto para sistemas lineales como no lineales. Las nuevas técnicas de control fueron elaboradas para satisfacer las hipótesis planteadas, y también resultaron ser capaces de:

- Permitir el uso de modelos de procesos en espacio de estados de cualquier dimensión, con funcionales de costo arbitrarios y penalización final cuadrática.
- Expresar el diseño preliminar del control en base al horizonte de optimización  $T$  y al coeficiente matricial de penalización final  $S$  (una matriz semidefinida positiva arbitraria). Este diseño requiere encontrar las condiciones de borde mixtas faltantes para integrar las Ecuaciones Canónicas Hamiltonianas (HCEs en inglés) en función del par  $(T, S)$ , cosa que se logra a través de nuevas ecuaciones en derivadas parciales (PDEs, llamadas aquí “variacionales”).
- Generar información necesaria para el cálculo de una ley de control óptimo a lazo abierto (“feedforward” en inglés) en base a los estados del proceso y de los coestados del problema Hamiltoniano, de tal forma que dicho control se vaya construyendo en línea con las trayectorias óptimas del sistema.
- Incorporar filtrado, observación y retroalimentación óptimos, a fin de abatir eventuales perturbaciones del proceso y reducir ruidos en las señales de entrada y salida del sistema.
- En ciertos casos, generar el control pertinente para el proceso aún en presencia de restricciones del sistema, sobre todo cuando se imponen en la variable manipulada.

Las bondades y dificultades de las estrategias se ilustraron mediante la aplicación a diferentes procesos de ingeniería y de biomedicina. Los procesos seleccionados para su posterior estudio



abarcaron los tres tipos de problemas de control descritos antes, y en su mayoría fueron sistemas no lineales.

La organización de la tesis es la siguiente:

- El primer capítulo fue consagrado a la introducción y justificación conceptual de la tesis.
- En el Capítulo 2 se estableció brevemente la base teórica necesaria para el desarrollo de las nuevas técnicas, planteando primero el problema genérico de optimización que se tratará a lo largo de la tesis en los diferentes capítulos, luego los conceptos clásicos de control óptimo, posteriormente detallando el enfoque Hamiltoniano, y por último introduciendo el método relacionado con “Invariant Imbedding”, del cual se desprenden las PDEs variacionales para casos no lineales concernientes al problema de regulación.
- El Capítulo 3, dedicado a aplicaciones de las PDEs variacionales, se inició estudiando la dinámica y optimización de un vehículo aéreo cuyas trayectorias dibujan aproximadamente las etapas de navegación aérea: “despegue”, “crucero” y “aterrizaje”. El sistema es unidimensional, y ha sido descrito anteriormente en diferentes publicaciones [100, 101, 43]. Este sistema permitió trasladar las PDEs para regulación al problema de cambio de referencia, que una vez resuelto permite la generación de estrategias óptimas de control en línea con el proceso. Adicionalmente, se creó un sistema primario de rechazo a perturbaciones basados en la diferencia de la salida del proceso y la salida óptima. En el mismo Capítulo, en la Sección 3.2, se analizó un sistema de reacciones electroquímicas de hidrógeno que constan de los “pasos” Volmer-Heyrovsky-Tafel fundamentados en las publicaciones [55, 30, 44]. La dinámica resulta ser unidimensional pero con la particularidad de que el control óptimo  $u^0(x, \lambda)$  no tiene una forma analítica explícita, es decir, no es posible despejar el control de manera de explicitar su dependencia en los estados y coestados del sistema. Por lo tanto se generó una PDE adicional para resolver la situación. En las secciones restantes del capítulo, varios sistemas ficticios multidimensionales lineales autónomos, lineales variantes en el tiempo, bilineales autónomos y no lineales también fueron tratados con el propósito extender y substanciar analíticamente las PDEs para problemas no lineales multidimensionales, comprobar numéricamente sus soluciones, y además introducir herramientas que se utilizarán en capítulos posteriores. Los coeficientes de tales sistemas fueron extraídos de trabajos ya publicados en la literatura: [41, 42, 39, 47].
- En el Capítulo 4, centrado en la metodología H2DOF, se trajo a consideración un reactor tanque agitado continuo (CSTR de su sigla en inglés) con reacción exotérmica, el cual muestra una dinámica no lineal, con tres estados de equilibrio aislados y multiplicidades de entrada - salida. Este proceso fue tratado para analizar varias herramientas desarrolladas en la tesis: (i), gracias a las nuevas PDEs del capítulo anterior, el esquema de generación de las trayectorias óptimas de estado (a las cuales llamaremos trayectorias nominales), (ii)

el sistema de rechazo a perturbaciones por medio de la aplicación de una ley de feedback lineal (sustentada en el Capítulo 3), y (iii) la adición del sistema de observación y filtrado óptimo, que también incluye en su ganancia una matriz asociada con la ecuación de Riccati planteada en el Capítulo 2. Este proceso está bien detallado en varias publicaciones de la literatura [105, 40, 46].

- En el Capítulo 5 se consideró la dinámica del frenado de un tren para estudiar el manejo de restricciones sobre la variable manipulada en sistemas lineales. Este sistema de tratamiento analítico relativamente sencillo en la ausencia de restricciones, facilitó la detección de un mecanismo basado en las herramientas descritas en los capítulos anteriores, que permite modificar el control óptimo con el propósito de tener en cuenta las limitaciones físicas de la variable manipulada. Este sistema ya ha sido descrito en los manuscritos del grupo [2, 45].
- En el Capítulo 6 fueron ensayadas algunas de las herramientas para sistemas no lineales introducidas anteriormente, aplicándolas a un reactor tanque agitado fed-batch para la producción de penicilina con cuatro estados, una salida y un solo control. La principal novedad de este caso es que tanto el control como las variables de estado deben moverse en regiones acotadas. El proceso fue estudiado previamente en [10, 103].
- En el Capítulo 7 se describen aplicaciones al tratamiento del síndrome de inmunodeficiencia humana (VIH/SIDA) desde la perspectiva de teoría de control. A través de la aplicación de la técnica de programación dinámica híbrida, se desarrollaron nuevas estrategias terapéuticas, que en promedio consumen menos drogas que las terapias existentes en la actualidad, y que al mismo tiempo mantienen al virus en un nivel tolerable para el enfermo. Al reducir la cantidad de medicación suministrada al paciente en su tratamiento, simultáneamente se reducen los costos de la compra de medicación y los efectos secundarios que la droga produce sobre el paciente. El modelo del proceso y su optimización han sido ampliamente ilustrados y discutidos, principalmente en los artículos [86, 87, 37, 38].
- Finalmente, se enuncian las conclusiones generales de la tesis y las perspectivas de trabajo futuro.

## 1.2. Breve análisis de la principal bibliografía relacionada.

La teoría clásica ha producido un cuerpo muy sólido de resultados para tratar los problemas de optimización de sistemas lineales con funcional de costo cuadrático asociado. Sin embargo, los sistemas lineales resultan inadecuados para aproximar todas las trayectorias generadas por estrategias de control admisibles aplicados a procesos industriales (o biotecnológicos), en general no lineales. La necesidad de herramientas eficientes para controlar dichos procesos

ha sido ampliamente reconocida en la literatura. Ciertas técnicas interesantes fueron desarrolladas basadas en teoremas de la Geometría Diferencial [67, 61, 2]. Estas técnicas confían en la exactitud e invariancia del modelo disponible y de transformación linealizante, lo cual está garantizado únicamente en un limitado número de casos. La llamada “linealización global” depende de que se cumplan las condiciones del teorema de Frobenius [67], y aún así las fórmulas de transformación son complicadas. Otros intentos por utilizar modelos no lineales han recurrido a estructuras con coeficientes que deben ajustarse adaptativamente durante el proceso [9]. Pero estos intentos dejan aún sin resolver el problema de controlar sistemas con una estructura no lineal generalizada, y con un costo asociado no cuadrático por optimizar, como es a veces necesario en procesos de ingeniería y biomedicina.

Un camino alternativo hacia el control de procesos no lineales consistió en considerar a los sistemas bilineales como aproximaciones universales de los procesos no lineales, como los polinomios aproximan a las funciones continuas. Más precisamente [110], si el proceso a ser controlado es no lineal, causal, de tiempo continuo, con una función entrada-salida, suficientemente regular, entonces puede ser aproximado en cualquier punto de cualquier trayectoria por un sistema bilineal, durante un período de tiempo  $t_m$ , previamente fijado, asumiendo que las funciones de control son acotadas uniformemente. También los sistemas bilineales fueron considerados de interés desde un punto de vista práctico por su similitud (aparente) con los sistemas lineales [20]. Se han utilizado los sistemas bilineales con un funcional de costo cuadrático para el caso de regulación y cambio de set-point, obteniendo soluciones sub-óptimas del problema. De todas maneras, estos modelos han dado la posibilidad de utilizarlos en estrategias de control donde se combina la actualización de parámetros, observadores no lineales y el filtro óptimo de Kalman - Bucy para reducir ruidos externos (ver [31, 40, 46]).

Para sistemas no lineales en general y con funcionales de costo arbitrarios, el problema del control óptimo no ha tenido una solución estándar y efectiva. El formalismo Hamiltoniano ha contribuido al desarrollo de la teoría de control óptimo en los últimos años [98, 71, 21, 106]. Cuando el problema para un sistema  $n$ -dimensional con un funcional de costo dado es regular [71], es decir, cuando su Hamiltoniano puede ser minimizado únicamente por un valor de la acción de control  $u$  dependiente de las variables restantes ( $t, x, \lambda$ , donde  $\lambda$  es una variable “auxiliar” del problema de optimización, o “coestado”), entonces debe integrarse un conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias (conocidas como ecuaciones canónicas Hamiltonianas o HCEs) con condiciones de borde mixtas. A menudo, éste es un problema numérico difícil de resolver, por sus condiciones de borde y por su planteamiento enteramente no lineal. Además, a pesar de que sea soluble, la integración de las ecuaciones suele tener dificultades numéricas debido a la presencia subyacente de autovalores positivos y negativos en la linealización del sistema Hamiltoniano (véase [1, 100, 101, 43]). Para el regulador cuadrático lineal (LQR) con horizonte finito existen varios métodos que transforma el problema de condiciones de borde

mixtas en uno de condiciones iniciales [106]. Un nuevo método fue desarrollado en [42, 45] para resolver el problema de condiciones mixtas para el LQR de horizonte finito  $T$  y con coeficiente de penalización final  $S$  [106]. Esta nueva forma de abordar el problema tiene la ventaja de evitar resolver la ecuación diferencial de Riccati cada vez que se cambie la penalización o el tiempo de optimización.

Los sistemas Hamiltonianos (conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyo campo vectorial puede ser expresado en términos de las derivadas parciales de una función escalar, similar a una energía total, normalmente llamada el Hamiltoniano del sistema) son importantes objetos de estudio tanto en Matemática como en Física. Las ecuaciones diferenciales ordinarias para el estado y el coestado referidos al problema de control óptimo constituyen un sistema Hamiltoniano. Richard Bellman contribuyó particularmente en aplicaciones a sistemas Hamiltonianos provenientes de la Física (ver una introducción más amplia en [1]), encontrando una ecuación en derivadas parciales (PDEs) para el valor final del estado  $x(T)$  (donde  $T$  es el horizonte de optimización, con  $t_0 = 0$ ) y del valor final del coestado  $\lambda(T) = c$  (una de las condiciones de borde mixtas, ver [13]). Bellman desarrolló estas ideas en torno a una técnica numérica llamada “invariant imbedding”.

Recientemente, en [32], esta técnica ha sido generalizada y probada para sistemas unidimensionales con funcional de costo cuadrático y ley de control explícita. Se obtienen allí PDEs para el valor del estado final  $x(T) = \rho(T, S)$  y el coestado inicial  $\lambda(0) = \sigma(T, S)$ , con los cuales es posible iniciar la integración numérica de las  $2n$  ecuaciones Hamiltonianas. Las nuevas ecuaciones en derivadas parciales dependen exclusivamente de dos parámetros: el horizonte de optimización  $T$  y la matriz  $S$  involucrada en la penalización cuadrática final  $x'(T)Sx(T)$ . Estas ecuaciones resultan ser cuasilineales de primer orden y pueden ser integradas por separado. Los resultados obtenidos de su integración deben ser guardados en memoria para su posterior uso en la puesta en marcha del proceso a controlar. La información suministrada no sólo es útil para rescatar las condiciones de borde del sistema Hamiltoniano, sino que también puede ser utilizada en la etapa de diseño del controlador. En [33, 39], se realizó una extensión de las PDEs para el caso multidimensional.

Relacionada también con la tesis, la metodología conocida en la literatura como “two-degrees-of-freedom control (2DOF)” (o control con dos grados de libertad en castellano) pretende construir una trayectoria de referencia y al mismo tiempo hacer el seguimiento de la misma en presencia de perturbaciones (véase [89, 43, 46]). Las estrategias 2DOF han sido adaptadas a varios contextos [79]. En esta tesis este esquema se modificó al incluir el enfoque Hamiltoniano, logrando las siguientes propiedades: (i) la trayectoria de referencia es óptima y es generada on-line, y (ii) la etapa de compensación es diseñada bajo el mismo criterio de optimización usado para calcular la trayectoria nominal. En lugar de tener una receta (como es normal en muchos procesos, incluyendo los batch) para construir las curvas de referencia a

seguir, las trayectorias son soluciones de las ya introducidas HCEs, las cuales manejan todas las alinealidades del proceso. Esta integración es posible luego de integrar las PDEs citadas, cuyas soluciones proveen las condiciones de contorno faltantes en función de los parámetros  $T$  y  $S$ . Al final, un filtro óptimo permite generar la componente de compensación basada en el error  $\hat{x} = x - x_d$ , donde  $x_d$  es el estado deseado, que en este capítulo será la trayectoria óptima de estados  $x^*$ . En particular, la estimación óptima de las desviaciones  $\hat{x}$ , en el sentido de mínimos cuadrados, es la solución de la ecuación diferencial de Kalman-Bucy (véase [40] para más detalles al respecto).

A pesar de que las limitaciones físicas en la operación de procesos siempre han estado presentes, son pocas las estrategias de control que las contemplan con solvencia en su diseño. Es más, la mayoría de los controladores son configurados únicamente para que trabajen cerca de los puntos de trabajo. El principio del máximo de Pontryagin (PMP) ha sido utilizado ampliamente en teoría de control, especialmente en presencia de restricciones sobre los estados y/o la variable manipulada. A pesar de la generalidad del PMP, dado que es sólo una condición necesaria de optimalidad existen situaciones en que la aplicación del principio no conduce a soluciones óptimas y/o factibles en la práctica. En [4] se propone una forma primaria de tratar el problema. Esta idea es retomada por [45], que en base al formalismo Hamiltoniano y las ecuaciones en derivadas parciales descritas en [33] y relacionadas, brinda una solución aproximada a este problema. En [66] se trata el problema similarmente y se encuentran unos tiempos de conmutación (“switcheo”) para activar diferentes controles compatibles con las restricciones.

Otra forma alternativa de incluir las restricciones en sistemas lineales, y que se resuelve en forma aproximada en modelos no lineales, es mediante el uso de las desigualdades matriciales lineales, o LMIs (ver [18, 74, 26, 103]). El elevado poder computacional que se ha alcanzado recientemente y la aparición de poderosos algoritmos de optimización convexa han contribuido fuertemente a la popularidad de las LMIs. Éstas, fundamentalmente, permiten introducir las limitaciones del tipo  $u_{min} < u < u_{max}$ , por ejemplo, en el cálculo de la ganancia del controlador.

Entre los diversos casos de estudio que se describieron en la Sección 1.1, el de reactores continuos es una fuente clásica para el desarrollo y prueba de sistemas de control. El reactor estudiado tiene un diagrama de fase que muestra tres estados de equilibrio aislados, dos estables y uno inestable [105, 46]. Para este tipo de procesos se han intentado distintas alternativas de control [14], desde las más simples del control predictivo hasta unas más robustas que involucran aproximaciones a sistemas bilineales, con actualización de parámetros y aplicación de filtrado (ver [40]).

Los procesos por lotes (o “batch”) han sido ampliamente usados en la industria alimenticia, química y farmacéutica. En los últimos años se ha incrementado su uso debido a su gran flexibilidad; esto es, su capacidad para manejar diferentes grados, tipos y cantidades de productos con un mismo equipo. Al igual que cualquier otro proceso poseen una naturaleza dinámica y

por lo tanto requieren que durante su operación se ejecuten acciones correctivas que eviten los efectos negativos de los cambios que en ellos ocurren. Además de las características dinámicas que posee todo proceso, tales como restricciones físicas, químicas y energéticas, el modo de operación por lotes o semilotes implica características que hacen aún más complejo el control de este tipo de procesos: punto de operación variante en el tiempo (se pueden considerar en estado transitorio permanente), comportamiento irreversible y perturbaciones inherentemente internas. Aunque se han encontrado soluciones satisfactorias a problemas específicos, existe poca literatura donde se analizan estos procesos dentro del marco de la teoría de control óptimo [107].

Existen otras aplicaciones de control óptimo que recibieron atención en el desarrollo de esta tesis. El estudio del virus de inmunodeficiencia humano (VIH) es un tema de gran importancia en la sociedad, ya que es una de las enfermedades actuales que se ha esparcido por el mundo de forma alarmante. En una encuesta de 2007, más de 3.2 millones de personas deben convivir con la enfermedad, de los cuales 2.2 millones han sido recientemente afectados. Las drogas anti-VIH caen en tres categorías: inhibidoras de transcriptasa reversa (RTIs), inhibidoras de proteasa inversa (PIs) e inhibidoras de fusión. El análisis y control de la dinámica del VIH ha tomado gran interés entre los profesionales de control en los últimos años (véase [86, 87, 37, 38]). Sin embargo, la optimización de la terapia (dosificación de las drogas) como la minimización de costos y efectos secundarios en los pacientes, siguen siendo un problema abierto. Han habido varios intentos de generar leyes de control. Por ejemplo en [75], se planteó la maximización de la población de células CD4+, buscando reducir los efectos secundarios y costos. En otras publicaciones se han propuesto distintas estructuras que apuntan a los problemas antes planteados, control predictivo basado en modelos, linealización exacta, por realimentación, etc., pero todas desde el contexto en tiempo continuo del control de procesos (ver referencias en [12, 19, 87, 86]). Debido a que la enfermedad no puede ser monitoreada a través del análisis de sangre en tiempo real y que al paciente no se le pueden suministrar drogas continuamente, en esta tesis se adoptó una mezcla entre lo discreto y lo continuo, que se ve bien sustentada mediante la aplicación de la técnica “programación dinámica híbrida”. Se debe notar que el problema del VIH es un problema complejo de control, no sólo por su dinámica altamente no lineal, sino también porque incorpora naturalmente restricciones fuertes tanto en los estados del sistema como en el control.

### 1.3. Aspectos diferenciadores de la tesis.

Los intentos de control basados en el enfoque Hamiltoniano de control óptimo no permiten en general la obtención de una estrategia generada completamente en tiempo real, principalmente debido a la falta de las condiciones iniciales en los coestados, de los que depende crucialmente el control óptimo. En esta tesis se ampliaron y desarrollaron esquemas que permiten aplicar

estrategias de control en tiempo real basados en el enfoque Hamiltoniano. El principal aporte teórico de la tesis es fundamentar unas ecuaciones en derivadas parciales (“PDEs variacionales”) que encuentran las condiciones de borde faltantes para sistemas no lineales multidimensionales en función del horizonte de optimización  $T$  y el coeficiente matricial de penalización final cuadrática  $S$  [43, 44, 39]. Para sistemas lineales se sustentaron importantes resultados relacionados, principalmente la forma de calcular la solución de la ecuación diferencial de Riccati (DRE) y de esa manera el feedback óptimo, a partir de la información suministrada por las adecuadas PDEs [47]. Otro resultado diferenciador que se desprende de la solución de las PDEs para sistemas lineales, es el de encontrar el control óptimo cuando la variable manipulada está acotada [45].

También se mostró que el uso de las PDEs no está limitado simplemente a la obtención de las condiciones faltantes (el estado final y el coestado inicial), sino que se las puede utilizar como una herramienta de diseño de la estrategia de control, ya que a priori se cuenta con la información necesaria para decidir eficazmente el horizonte del proceso (en caso de que pueda ser variado), y/o la penalización final de manera que el estado final solución de las PDEs sea óptimamente cercano al estado final deseado (o referencia). Otra característica que hace de las PDEs un aspecto diferenciador de la tesis, es que con la misma solución de las PDEs es posible encontrar el valor inicial de la ganancia de Riccati solución de la DRE para la linealización del sistema Hamiltoniano, el cual permite compensar las diferencias o perturbaciones de la salida del sistema (ver Capítulo 4).

El acceso a los coestados óptimos on-line permite generar nuevas estrategias de control denominadas “estrategias H2DOF” (Hamiltonian two-degrees-of-freedom control en inglés). La solución de las PDEs como núcleo de las estrategias H2DOF permite generar una trayectoria nominal óptima en línea con el proceso y, manteniendo el mismo funcional de costo, adicionar un esquema de estimación, filtrado y rechazo a perturbaciones óptimo, basados en la linealización del sistema Hamiltoniano [46, 103]. Esto se convierte en un resultado novedoso, ya que las H2DOF combinan todas las herramientas óptimas desarrolladas separadamente en un sólo “paquete” que es totalmente implementable on-line para procesos tecnológicos.

La aplicación al VIH considerada al final de la tesis es un tema de gran interés mundial y en especial de la comunidad científica. En esta tesis se han substanciado tratamientos terapéuticos óptimos de tal forma que reducen la cantidad de medicación suministrada al paciente y por ende el costo económico asociado, a la par de mantener la infección en niveles tolerables [37]. Los aspectos diferenciadores de estas propuestas terapéuticas son: (i) se utilizó la técnica “Programación Dinámica Híbrida” que permite el cálculo de secuencias de control óptimo desde una perspectiva que se ajusta mejor a las condiciones de “operación” de la enfermedad (las mediciones a través de la sangre no se pueden hacer continuamente, tampoco se puede suministrar droga al enfermo constantemente, y la cantidad de droga toma sólo ciertos valores discretos),

(ii) la técnica es capaz de soportar diferentes tipos de Lagrangianos y restricciones en las señales de entrada y salida del sistema, y (iii) el médico, en base a los análisis clínicos y la evolución predicha según el tratamiento aplicado, tendría la posibilidad de corregir la terapia para atenuar las posibles diferencias entre lo predicho y lo medido, sin tener que hacer más cálculos. Sólo debe extraer, de la información guardada y las nuevas mediciones, la dosis de la medicación óptima a suministrar.

Otro aspecto innovador de la tesis en cuanto al problema del HIV es la descripción matemática (modelación) de la evolución de los efectos secundarios provocados por la ingesta de medicamentos [38]. Esto luego permite la optimización explícita de los “side-effects”, logrando nuevos tratamientos que los tienen en cuenta.

Resumiendo, a lo largo de esta tesis se sustenta teóricamente y/o se valida a través de las aplicaciones a procesos, fundamentalmente los siguientes resultados:

1. La obtención analítica de PDEs que calculan el estado final y el coestado inicial del sistema Hamiltoniano en función del horizonte de optimización  $T$  y el coeficiente matricial de penalización final  $S$ , su posterior comprobación y resolución numérica a través de distintas aplicaciones, y la demostración de su funcionalidad en la creación de estrategias de control óptimo en tiempo real.
2. Construcción de la estrategia H2DOF, que genera la trayectoria en tiempo real, y adiciona estimación, filtrado y rechazo de perturbaciones, todo optimizado bajo el mismo criterio de optimización y utilizando el enfoque Hamiltoniano.
3. Programación dinámica híbrida aplicada a la dinámica del VIH, que facilita la resolución del problema de control y optimización de la infección.
4. El tratamiento matemático de los “side-effects” debidos al consumo de medicamentos altamente activos (HAART) usados como terapia en la enfermedad del VIH/SIDA, y obtención de las terapias óptimas para minimizar dichos efectos colaterales.



## Capítulo 2

# Nociones Preliminares y Notación

Este capítulo expone brevemente las características básicas de los sistemas de control a tratar, y fija la notación de las variables principales y sus dominios respectivos. También define el problema de control óptimo que se considerará en todas las aplicaciones de la tesis y los objetos matemáticos relacionados. Luego, se introduce la función de valor del sistema, el formalismo Hamiltoniano y se describe cómo el problema de control óptimo puede ser resuelto a través de varias metodologías. Por último, una vez definidas las ecuaciones canónicas Hamiltonianas (HCEs) se hace una corta excursión al método de “Invariant Imbedding”, donde se revelan ecuaciones en derivadas parciales (PDEs) que permitirán convertir el sistema de HCEs con condiciones mixtas en un problema con condiciones iniciales.

### 2.1. Sistemas de control y el problema de control óptimo.

La forma más sencilla de visualizar un sistema de control ( $\Sigma$ ) es mediante la siguiente figura:

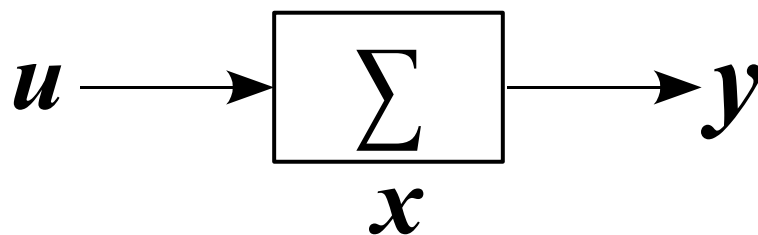


Figura 2.1: Sistema de control general.

donde la variable de entrada, variable manipulada o “control”  $u(t)$  (se entiende como una trayectoria de vectores de  $\mathbb{R}^m$ ) fuerza al proceso a lograr cierto comportamiento (reflejado en los estados del sistema ( $x$ ) o en las salidas ( $y$ )). Esta variable de control es manejada directamente por un agente externo al proceso. Por ejemplo, en el llenado de un tanque, la apertura o cierre de la válvula que fija el nivel del mismo es movida expresamente desde fuera del tanque. De ese

modo, la entrada influencia a las variables a controlar o “estados” del sistema (representados por  $x$ , donde  $x(t)$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  para cada  $t$ ). El estado de un sistema es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) tal que el conocimiento de esas variables en  $t = t_0$  en conjunto con el valor de la variable de entrada para  $t \geq 0$  determinan completamente el comportamiento del proceso para cualquier tiempo  $t \geq 0$ . Una idea intuitiva de los estados está relacionada con la memoria necesaria del proceso para poder predecir su futuro. Los estados por lo general son variables físicas como la temperatura, concentración, nivel, distancias, o simplemente entes matemáticos abstractos. Se debe aclarar que a lo largo de esta tesis sólo se tratarán procesos físicos representados por el formalismo del “espacio de estados” (ver [106]). La salida  $y(t)$  del sistema de control resume las observaciones del proceso físico. Por lo general, es un conjunto de variables físicamente medibles y de dimensión menor o igual a  $n$ , con  $n$  la dimensión de los estados.

Los estados  $x$  se mueven en una región  $\mathcal{O}_{x_0}$  de  $\mathbb{R}^n$ , que contiene a las condiciones iniciales  $x_0$ . La variable manipulable  $u$  toma valores en un conjunto  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Sin pérdida de generalidad, las trayectorias admisibles de control serán todas las funciones continuas a tramos dependientes del tiempo  $t$ . La relación entre el control con los estados y las salidas del proceso estará dada mediante una ecuación diferencial y otra de observación:

$$(\Sigma) \quad \dot{x}(t) = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = g(t, x, u), \quad (2.2)$$

con regularidad tal que están garantizadas la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial (2.1) [63].

El uso de entradas externas o controles  $u$  “fuerzan” a que los estados del sistema  $x$  partan de sus condiciones iniciales  $x_0$  y se dirijan a otros estados deseados  $\bar{x}$ . Sin embargo, dicha transición, si es posible, en general no es única y depende fuertemente de los controles aplicados. En este contexto, naturalmente surge la inquietud de hallar la mejor manera de realizar dicha transición, así que el “problema de control óptimo” consiste en buscar una trayectoria de control  $u(t)$  que le permita al proceso llegar lo más cercano posible de su estado “deseado” minimizando un “costo”. Dicho costo estará descrito por un funcional generalizado, al cual llamaremos funcional de costo, criterio de optimización o función objetivo:

$$\mathcal{J}(T, t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^T L(t, x_u(t), u(t)) dt + K(x(T)), \quad (2.3)$$

donde  $L$  es el Lagrangiano del problema óptimo de control y  $K$  representa a una función de penalización final. El horizonte de optimización  $\Delta T = T - t_0$  del problema es finito y  $t \in [t_0, T]$ . La minimización del funcional de costo con respecto a  $u$  está sujeto a la restricción impuesta por la “dinámica” del sistema de control, es decir  $x_u(t)$  debe ser la solución de (2.1) correspondiente

a la trayectoria de control  $u(t)$ , donde  $t_0$  es el tiempo inicial y  $T$  es el tiempo final. Dado que normalmente se tomará  $t_0 = 0$  el horizonte de optimización  $\Delta T$  se reduce a  $T$ . Si existe una trayectoria de control que minimiza (2.3) será denotada por  $u^*$ , verificará

$$u^*(\cdot) \triangleq \arg \inf_{u(\cdot)} \mathcal{J}(T, 0, x_0, u(\cdot)), \quad (2.4)$$

y una vez aplicada al sistema (2.1) generará la trayectoria óptima de estado  $x^*(t)$  de tal modo que  $x^*(\cdot)$  sea solución de (2.1) con  $u(\cdot) = u^*(\cdot)$ .

El “Lagrangiano”  $L(t, x, u)$  es una función de valor escalar no negativa ( $L \geq 0$ ), es decir, transforma elementos de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  a elementos de  $\mathbb{R}_0^+$ . Esta función se debería entender como un costo de trayectoria. Por ejemplo, en el caso más típico donde  $L = x'Qx + u'Ru$ , se cuantifica el esfuerzo de llevar los estados  $x$  a cero aplicando la acción de control  $u$  a lo largo del horizonte de optimización. Cuando  $L$  es diferente a cero, su integral sigue creciendo al ser una función positiva. En un típico “costo cuadrático”, el término  $x'Qx$  indica el costo instantáneo de los estados y análogamente  $u'Ru$  nos da una idea del esfuerzo de control ejercido. En cada aplicación se debe elegir qué tipo concreto de Lagrangiano utilizar, sin embargo, lo más usado son las formas cuadráticas para  $x$  y  $u$ . Otras formas, como por ejemplo la “potencia” del sistema definida como el producto de los estados por el control, serán utilizadas en capítulos posteriores. El término  $K(x(T))$  se entiende como una penalización final sobre los estados. Claramente, introduce un costo adicional al final del horizonte de optimización  $T$ . Si por ejemplo, se define como  $K = x'(T)Sx(T)$ , el efecto que produce sobre el sistema es que éste intente terminar lo más cercano de cero.

Otra manera de ver al sistema es a través de la función de transición  $\phi(t, s, x, w)$  (ver [106], [71]), donde  $t$  es el tiempo final de la transición,  $s$  el tiempo inicial de la transición,  $x$  es el estado al tiempo  $s$  y  $w$  es la trayectoria de control aplicada entre  $s$  y  $t$ . Definida  $\phi$  de esta forma, cuando la aplicamos nos brinda el valor exacto del estado en  $t$ . De esta manera podemos reescribir el funcional de costo:

$$\mathcal{J}(T, t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^T L(t, \phi(t, t_0, x_0, u), u(t)) dt + K(x(T)), \quad (2.5)$$

También se conoce a  $\phi$  como el “flujo” de la ecuación diferencial (ver [63]).

## 2.2. La función de valor y el formalismo Hamiltoniano.

La “función de valor” o función de Bellman  $\mathcal{V}$  (llamada así dado que Richard Bellman fue pionero en la utilización de esta función), se define [106] como:

$$\mathcal{V}(t, x) \triangleq \inf_u \mathcal{J}(T, t, x, u), \quad (2.6)$$

donde  $T$  sigue siendo el tiempo final del horizonte de optimización,  $t \in [t_0, T]$ ,  $x$  el estado desde el cual se desea optimizar a partir de  $t$ , y  $u$  es la trayectoria de control aplicada. Al igual que  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{V}$  es un costo, sin embargo, ésta nos da el costo mínimo entre todas las posibles trayectorias que comienzan en  $(t, x)$ , por lo que  $\mathcal{V}(t_0, x_0)$  daría el costo óptimo total del proceso.

La función de valor tiene la siguientes propiedades:

- (i) Propiedad de aditividad, dados los tiempos  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  y los correspondientes estados iniciales  $x$  y controles  $w$ ,

$$\mathcal{J}(t_3, t_1, x, w) = \mathcal{J}(t_2, t_1, x, w |_{[t_1, t_2]}) + \mathcal{J}(t_3, t_2, \phi(t_2, t_1, x, w |_{[t_1, t_2]}), w |_{[t_2, t_3]}) \quad (2.7)$$

- (ii) Para cada  $s \in [t_0, T]$  y  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{V}(s, x) \leq \int_s^t L(\tau, x_u(\tau), u(\tau)) d\tau + \mathcal{V}(t, x_u(t)), \quad \forall s < t \leq T, x, \quad \forall u. \quad (2.8)$$

Esta propiedad es sencilla pero debe ser bien entendida, el término  $\mathcal{V}(t, x_u)$  dice que a partir de las condiciones  $(t, x_u)$  hasta el tiempo final  $T$  el costo óptimo es conocido. Por lo tanto, para un dado  $u \neq u^*$  el costo correspondiente  $\mathcal{V}(s, x)$  para el horizonte  $\Delta T = T - s$  tiene que ser menor a la suma de la integral del Lagrangiano y  $\mathcal{V}(t, x_u)$ , a menos que dicho  $u$  sea el óptimo. En este último caso resulta ser la igualdad. En [106] se puede consultar una explicación más rigurosa de esta propiedad.

- (iii) Condición de borde, en  $t = T$ ,  $\mathcal{V}(T, x(T)) = K(x(T))$ .

La función de valor en conjunto con las propiedades anteriores son el germen de lo que se conoce como “Programación Dinámica”. En el caso discreto la programación dinámica puede ser implementada mediante el siguiente algoritmo (para una adecuada fundamentación teórica de la técnica consultar [71], [106]):

1. Se comienza discretizando los estados en  $t = T$ ,
2. luego por la propiedad (iii) se calcula el costo es  $K(x(T))$  para todos los puntos  $x(T)$  dentro de la discretización de  $x$ . Éste es el costo óptimo en el tiempo final.
3. Se pasa al tiempo  $t_1$ , hacia atrás en la discretización del tiempo. Ahí, para cada punto discreto de  $x$  en  $t_1$  se aplican todas las acciones de control permitidas en  $[t_1 - T]$ , y con sus respectivas trayectorias de estado, se calcula la integral del Lagrangiano. Por las propiedades (i), (ii) y suponiendo que  $\mathcal{V}$  está asumida (es decir, existe un control  $u^*$  tal que  $\mathcal{V}(t, x) = \min_u \mathcal{J}(T, s, x, u)$ ), se escoge la de mínimo costo. Para este tiempo  $t_1$ , dicho valor de control será el óptimo. En este momento se guarda el valor del costo  $\mathcal{V}(t_1, x(t_1))$  óptimo, el control óptimo  $u^*(t_1)$  que lo produce y el estado óptimo  $x^*(T)$  final alcanzado.

4. Luego, nuevamente se va hacia el paso siguiente hacia atrás, a un tiempo  $s$  en la discretización del tiempo, se aplica lo explicado en el ítem anterior y se guarda el costo óptimo  $\mathcal{V}(s, x(s))$ , el control óptimo  $u^*(s)$  y el estado óptimo  $x^*(t_1)$  correspondientes.
5. El procedimiento se repite hasta llegar a las condiciones iniciales en  $t_0$ , donde  $x(t_0) = x_0$  son conocidos.

Ahora si queremos saber cuál es la trayectoria óptima desde la condición inicial  $x_0$  hasta el final del horizonte de optimización  $T$ , basta con concatenar todas las soluciones óptimas guardadas, ya que por la propiedad (i) sabemos que una solución calculada como la suma de soluciones óptimas será óptima también. Este procedimiento (de “programación dinámica”) describe la forma de encontrar trayectorias óptimas para problemas generales: el sistema de control es de cualquier tipo (es decir, podría ser lineal, no lineal, autónomo, variante con el tiempo), el Lagrangiano es una función generalizada, y los estados y el control pueden tener restricciones y estar acotados.

Volviendo al tiempo continuo y suponiendo que existe una trayectoria óptima de control  $u^*(t)$  que produce la trayectoria óptima de estados  $x^*(t)$ , a lo largo de esas trayectorias la función de valor

$$v(t) \triangleq \mathcal{V}(t, x^*(t)) = \int_t^T L(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau + \mathcal{V}(T, x^*(T)) \quad (2.9)$$

es absolutamente continua y tiene derivada con respecto al tiempo:

$$\dot{v}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = -L(t, x^*(t), u^*(t)). \quad (2.10)$$

Por tanto, a lo largo de las trayectorias óptimas la velocidad de decrecimiento de la función de Bellman es igual al costo instantáneo negativo. Por otro lado, también es cierto que la derivada de  $v(t)$  con respecto al tiempo es (asumiendo que  $\mathcal{V}$  resulta una función suave de sus variables)  $\dot{v} = \mathcal{V}_t + \mathcal{V}_x \dot{x}(t)$  (donde la notación  $\mathcal{V}_x$  indica la derivada parcial de  $\mathcal{V}$  con respecto a su variable  $x$ ), por lo que al igualarla con la ecuación 2.10 y reemplazando  $\dot{x}^*(t)$  por su respectiva derivada, obtenemos

$$\mathcal{V}_t(t, x^*(t)) = -L(t, x^*(t), u^*(t)) - \mathcal{V}_x(t, x^*(t)) f(t, x^*(t), u^*(t)). \quad (2.11)$$

$L$  es una función escalar, por lo que las dimensiones del gradiente  $\mathcal{V}_x$  de  $\mathcal{V}$  deberían ser las de un vector fila. Se convendrá que todas las derivadas parciales de una función escalar con respecto a un vector (sea este fila o columna) serán consideradas como vector fila.

Ahora, definiremos al Hamiltoniano del sistema asociado al problema de control óptimo como una función escalar, continuamente diferenciable que depende de las variables  $(t, x, \lambda, u)$

$$\mathcal{H}(t, x, \lambda, u) \triangleq L(t, x, u) + \lambda' f(t, x, u), \quad (2.12)$$

donde  $(t, x, u) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , y se puede demostrar que esta función traslada el problema de control óptimo a resolver a

$$\min_u \mathcal{H}(t, x, \lambda, u).$$

donde la variable  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . En la literatura, esta variable auxiliar  $\lambda$  es conocida como el “coestado” del sistema, o covector a partir de su interpretación geométrica en manifolds (o variedades diferenciales en español), ya que para cada punto  $x$ ,  $\lambda$  pertenece al plano cotangente  $T_x^*X$  del espacio de estados  $X$  (usualmente un manifold) y se define como el espacio dual del espacio tangente  $T_xX$  en  $x$ . También, el coestado podría ser matemáticamente entendido como un “multiplicador de Lagrange” el cual cumple la función de adicionar la restricción impuesta por la dinámica del sistema al problema de optimización del costo asociado con el Lagrangiano.

Se dice que el problema de control óptimo es “regular” (véase [71]) si existe una única función de control

$$u^0(t, x, \lambda) \triangleq \arg \min_u \mathcal{H}(t, x, \lambda, u), \quad (2.13)$$

tal que el Hamiltoniano del sistema (2.12) es minimizado, es decir, con  $(t, x, \lambda)$  arbitrarios, se cumple que

$$\mathcal{H}(t, x, \lambda, u^0(t, x, \lambda)) \leq \mathcal{H}(t, x, \lambda, u) \quad \forall u. \quad (2.14)$$

Basados en este control óptimo podemos reescribir el Hamiltoniano a su forma óptima como

$$\mathcal{H}^0(t, x, \lambda) \triangleq \mathcal{H}(t, x, \lambda, u^0(t, x, \lambda)), \quad (2.15)$$

cuya relación con la función de valor es (al combinar las ecuaciones (2.11-2.15))

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}(t, x) + \mathcal{H}^0\left(t, x, \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right]'(t, x)\right) = 0, \quad \mathcal{V}(T, x) = K(x(T)), \quad (2.16)$$

donde resulta clara la notación

$$\lambda^*(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t, x^*(t))\right)', \quad t \in [0, T], \quad (2.17)$$

y en particular, para  $t = T$  la ecuación (2.18) nos brinda la siguiente condición final,

$$\lambda^*(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(t, x^*(t))\right)', \quad t \in [0, T], \quad (2.18)$$

Además, el control óptimo Hamiltoniano puede ser expresado como (ver [106], p. 361)

$$u^*(t) = u^0(x^*(t), \lambda^*(t)). \quad (2.19)$$

La ecuación en derivadas parciales (2.16) es la llamada ecuación de “Hamilton-Jacobi-Bellman” (HJB) asociada al problema de control óptimo. La importancia de este resultado es que todo el problema de control óptimo se reduce a hallar la solución de la HJB. Sin embargo, esto es difícil inclusive numéricamente [106, 21].

Del Hamiltoniano y control óptimo surgen las ecuaciones canónicas Hamiltonianas (HCEs de su sigla en inglés) (véase [98] para problemas generales y [106], p. 406 para el caso con estado final libre)

$$\dot{x} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} \right)' \triangleq \mathcal{F}(x, \lambda); \quad x(0) = x_0, \quad (2.20)$$

$$\dot{\lambda} = - \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x} \right)' \triangleq -\mathcal{G}(x, \lambda); \quad \lambda(T) = \frac{\partial K}{\partial x}(x(T)), \quad (2.21)$$

las cuales definen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs de su sigla en inglés) de dimensión  $2n$  para el campo vectorial Hamiltoniano  $\mathcal{X}$ ,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(x, \lambda) \\ -\mathcal{G}(x, \lambda) \end{pmatrix} \triangleq \mathcal{X}(x, \lambda). \quad (2.22)$$

El flujo Hamiltoniano definido como  $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{O}_{x_0} \times \mathcal{O}_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , donde  $\phi(t, x, \lambda)$  da los valores del estado y coestado en el tiempo  $t$ , de manera similar a como se describió el flujo en la sección anterior, satisface

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\phi(t, x, \lambda)) \\ -\mathcal{G}(\phi(t, x, \lambda)) \end{pmatrix} = \mathcal{X}(\phi(t, x, \lambda)), \quad (2.23)$$

$$\phi(0, x, \lambda) = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{x_0} \times \mathcal{O}_{\lambda_0}, \quad (2.24)$$

donde  $\mathcal{O}_{x_0}, \mathcal{O}_{\lambda_0}$  son regiones apropiadas de  $\mathbb{R}^n$ . Las soluciones de las ecuaciones (2.20, 2.21) son equivalentes a resolver la HJB y además brindan las trayectorias óptimas tanto para el estado  $x^*(t)$  como para el coestado óptimo  $\lambda^*(t)$ . Entre las propiedades más importantes del Hamiltoniano óptimo, se puede citar la propiedad de mantenerse constante a lo largo de las trayectorias óptimas (véase [1]), es decir,

$$\frac{d\mathcal{H}^0}{dt}(x^*(t), \lambda^*(t)) = \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x} \right) \cdot \mathcal{F} + \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} \right) \cdot [-\mathcal{G}] = 0. \quad (2.25)$$

Conviene recordar aquí la solución clásica al problema de control óptimo para sistemas lineales y variantes en el tiempo de dimensión  $n$ , caracterizados por la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u; \quad x(0) = x_0, \quad (2.26)$$

donde  $x, u$  mantienen su definición de la Sección 2.1, sujeto a un funcional de costo dado por la ecuación (2.3) con un Lagrangiano y una penalización final cuadráticos del tipo:

$$L(t, x, u) = x'Q(t)x + u'R(t)u, \quad (2.27)$$

$$K(x) = (x'Sx), \quad (2.28)$$

$$Q(t), S \geq 0, \quad R(t) > 0, \quad T < \infty. \quad (2.29)$$

donde las matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $R(t)$  y  $S$  tienen dimensiones apropiadas. El Hamiltoniano  $\mathcal{H}(t, x, \lambda, u)$  se expresa como

$$\mathcal{H}(t, x, \lambda, u) = L(t, x, u) + \lambda' f(t, x, u) = x' Q(t)x + u' R(t)u + \lambda'(A(t)x + B(t)u), \quad (2.30)$$

dado que se asumió que el Hamiltoniano  $\mathcal{H}(t, x, \lambda, u)$  es diferenciable y de la condición  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ , la acción de control óptima para este problema es

$$u^0(t, x^*(t), \lambda^*(t)) = u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t). \quad (2.31)$$

Es bien conocido que la solución de la ecuación HJB para este caso tiene la forma (ver [17])

$$\mathcal{V}(t, x) = x' P(t)x, \quad (2.32)$$

y entonces el coestado óptimo  $\lambda^*$  resulta ser, por la ecuación (2.18),

$$\lambda^*(t) = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right]' (t, x^*(t)) = 2P(t)x^*(t). \quad (2.33)$$

donde  $x^*(t)$  denota a la trayectoria óptima de estado y  $P(t)$  a la solución de la ecuación diferencial de Riccati (DRE de su sigla en inglés)

$$\dot{\pi} = \pi W(t)\pi - \pi A(t) - A'(t)\pi - Q(t); \quad (2.34)$$

con condición de borde final  $\pi(T) = S$  y  $W(t) \triangleq B(t)R^{-1}(t)B'(t)$ .

Combinando las ecuaciones (2.31, 2.33), la acción de control en lazo abierto (ya que depende de los coestados del sistema) se convierte a un feedback de estados

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t). \quad (2.35)$$

Las trayectorias óptimas del estado y coestado son soluciones de las ecuaciones canónicas Hamiltonianas dadas por las ecuaciones (2.20, 2.21). Para este caso en particular, si se considera el Hamiltoniano óptimo (2.30), resultan ser

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^0(t, x, \lambda) = A(t)x - \frac{1}{2}W(t)\lambda, \quad (2.36)$$

$$\dot{\lambda} = 2 \left[ \dot{P}(t)x + P(t)\dot{x} \right] = -2Q(t)x - A'(t)\lambda. \quad (2.37)$$

Estas ecuaciones pueden agruparse en una ecuación diferencial matricial lineal, variante en el tiempo, de dimensión  $2n$

$$\dot{\Psi} = \mathbf{H}(t)\Psi, \quad (2.38)$$

con

$$\Psi(t) \triangleq \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}, \mathbf{H}(t) \triangleq \begin{pmatrix} A(t) & -\frac{1}{2}W(t) \\ -2Q(t) & -A'(t) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

y condiciones de borde mixtas

$$x(0) = x_0, \lambda(T) = 2Sx(T). \quad (2.40)$$

En [17, 106] se pueden consultar los tratamientos rigurosos de este problema.



### 2.3. Nuevo tratamiento del problema de las ecuaciones canónicas Hamiltonianas con condiciones de contorno.

Las ecuaciones (2.20, 2.21) plantean un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para el estado y coestado óptimo con condiciones de borde mixtas. Para que el control óptimo de la ecuación 2.19 sea aplicable en cada instante de muestreo en un proceso físico, se necesita ir evaluándolo en línea con el proceso, en otras palabras, sería útil contar con condiciones iniciales para las HCEs.

Richard Bellman contribuyó especialmente en el estudio de sistemas simplécticos que provienen de la Física (ver por ejemplo [1]), cuyo principal aporte fue el de idear una ecuación PDE para el valor final del estado  $x(T) = \rho(\Delta T, c)$  como función de la duración del proceso (u horizonte de optimización)  $\Delta T = T - t_0$ , y de  $c$  como el valor final impuesto sobre el coestado del sistema  $\lambda(T) = c$  (ver [13]). Su forma de solución fue conocida luego como “Invariant Imbedding”.

En [32, 33, 43, 39], la técnica invariant imbedding fue ampliada y generalizada, y nuevas PDEs fueron halladas tanto para sistemas lineales como no lineales de dimensión y horizonte finito, con la característica de que el coestado final depende del estado final, es decir,  $c = c(\rho)$ . El principal resultado [32] fue el de encontrar una PDE para el valor inicial del coestado ( $\sigma$  o  $\lambda(0)$ ), cuyo valor es crucial en la integración “on-line” de las HCEs. Las variables independientes en estas PDEs son el horizonte de optimización  $T$ , con  $t_0 = 0$  y el coeficiente matricial de penalización final  $S$  definido apropiadamente en la función de costo del problema.

A continuación se mostrará cómo obtener las PDEs aludidas para el caso unidimensional general autónomo (es decir, el sistema puede ser lineal o no lineal). Se denotará al estado final alcanzado en un proceso de duración  $T$  y penalización  $S$  como  $\rho(T, S)$  y al coestado inicial para el mismo proceso como  $\sigma(T, S)$ . También asumamos que para cada combinación de parámetros  $(T, S)$ , las HCEs con condiciones mixtas tienen solución única, variando suavemente sus parámetros.

La siguiente notación indica que las dos componentes del flujo Hamiltoniano,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  (refiriéndose al estado y coestado), respectivamente, serán consideradas por separado:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

y según la notación anterior se tiene que

$$\rho(T, S) \triangleq x^{T,S}(T) = \phi_1(T, x_0, \sigma(T, S)), \quad (2.42)$$

$$\sigma(T, S) \triangleq \lambda^{T,S}(0), \quad (2.43)$$

$$\lambda^{T,S}(T) = 2S\rho(T, S) = \phi_2(T, x_0, \sigma(T, S)), \quad (2.44)$$

donde la notación  $x^{T,S}(t), \lambda^{T,S}(t)$  es introducida para hacer referencia a las trayectorias óptimas correspondientes al horizonte fijo de optimización  $T$  y el coeficiente de penalización final  $S$  en el punto  $t \in [0, T]$ .

La notación dada hasta ahora servirá para un sistema general de dimensión  $n$ . Entonces, derivando parcialmente la ecuación (2.42) con respecto a  $T$  (la notación  $D_1$  significa  $\frac{\partial}{\partial T}$ , donde el subíndice (1) hace referencia a la primera variable independiente y análogamente para las otras  $D_i$ )

$$D_1\rho(T, S) = D_1\phi_1(T, x_0, \sigma(T, S)) + D_3\phi_1(T, x_0, \sigma(T, S))D_1\sigma(T, S) . \quad (2.45)$$

La existencia del flujo implica que

$$D_1\phi(t, x, \lambda) = (\mathcal{F}(\phi(t, x, \lambda)), \mathcal{G}(\phi(t, x, \lambda))) , \quad (2.46)$$

y en el tiempo final  $T$ ,

$$\begin{aligned} D_1\phi_1(T, x_0, \sigma(T, S)) &= \mathcal{F}(\phi(T, x_0, \sigma(T, S))) = \\ &= \mathcal{F}(\phi_1(T, x_0, \sigma(T, S)), \phi_2(T, x_0, \sigma(T, S))) = \\ &= \mathcal{F}(x(T), \lambda(T)) = \mathcal{F}(\rho(T, S), 2S\rho(T, S)) , \end{aligned} \quad (2.47)$$

la cual se puede reescribir como ( $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T} = D_1\rho$ , y análogamente para  $\frac{\partial}{\partial S}$ )

$$\rho_T = F + \phi_{1\lambda}\sigma_T , \quad (2.48)$$

donde  $F$  se define como

$$F(\rho, S) \triangleq \mathcal{F}(\rho, 2S\rho). \quad (2.49)$$

Ahora, tomando la derivada de la ecuación (2.42) con respecto a  $S$  obtenemos

$$\rho_S = \phi_{1\lambda}\sigma_S , \quad (2.50)$$

y repitiendo el procedimiento anterior ( $\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial S}$ ) con la ecuación (2.44) y  $G(\rho, S) \triangleq \mathcal{G}(\rho, 2S\rho)$  resulta

$$2S\rho_T = -G + \phi_{2\lambda}\sigma_T , \quad (2.51)$$

$$2(\rho + S\rho_S) = \phi_{2\lambda}\sigma_S . \quad (2.52)$$

El flujo  $\phi_{1\lambda}$  puede ser formalmente eliminado de las ecuaciones (2.48) y (2.50), y similarmente  $\phi_{2\lambda}$  de (2.51) y (2.52) para obtener

$$\rho_S\sigma_T + (F - \rho_T)\sigma_S = 0 , \quad (2.53)$$

$$2(\rho + S\rho_S)\sigma_T - (2S\rho_T + G)\sigma_S = 0 . \quad (2.54)$$

### 2.3 Nuevo tratamiento del problema de las HCEs con condiciones de contorno. 21

A fin de encontrar una solución no trivial del problema, el determinante del sistema dado por las ecuaciones (2.53, 2.54) tiene que ser cero, resultando

$$\rho\rho_T - (SF + \frac{G}{2})\rho_S = \rho F , \quad (2.55)$$

lo cual es una ecuación PDE de primer orden, cuasi-lineal y que además no está acoplada a  $\sigma(T, S)$ . Para un proceso de duración cero, los estados no se han movido de su estado inicial  $x_0$ , por lo que su condición de borde es

$$\rho(0, S) = x_0 . \quad (2.56)$$

Una PDE para  $\sigma$  puede hallarse de las ecuaciones (2.53 y 2.55),

$$\rho\sigma_T - (SF + \frac{G}{2})\sigma_S = 0 , \quad (2.57)$$

la cual es cuasi-lineal, homogénea y de primer orden. A diferencia de la PDE para  $\rho$ , ésta si está acoplada con la de  $\rho$ . Su condición de contorno, suponiendo que la penalización final es de la forma  $x'(T)Sx(T)$ , es

$$\sigma(0, S) = 2Sx_0 . \quad (2.58)$$

Las soluciones de  $\rho$  ,  $\sigma$  cubrirán un rango de las variables independientes  $(T, S)$ , la utilidad de tener dichas soluciones resulta evidente al considerar:

- El valor  $\rho$  del estado final es obtenido para cada par  $(T, S)$  sin requerir el cálculo de la trayectoria óptima. Este valor nos dice cuán cerca del estado deseado  $\bar{x}$  podríamos llegar para ese par  $(T, S)$  . En la etapa de diseño, esta información permitiría modificar la elección de los parámetros  $T$  y  $S$  para cumplir con los requerimientos del proceso.
- El coestado inicial  $\sigma$  es visto como una medida del costo marginal  $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(0, x_0)$ , donde  $\mathcal{V}$  es la función de Bellman del problema (ecuación (2.6)). Por lo tanto, al conocer  $\sigma(T, S)$  podríamos conocer desde el principio el efecto sobre el costo total que tiene las perturbaciones o incertidumbres en el estado inicial para cada conjunto de parámetros, y de esa manera nuevamente nos da otro argumento para influir en la elección de  $(T, S)$ .

Por ahora, las soluciones de las PDEs son simplemente vistas como herramientas en el etapa de diseño del controlador, en capítulos posteriores veremos que dichas soluciones son capaces de brindar mucha más información que permitirá mejorar los lazos de control en tiempo real.

## Capítulo 3

# Ecuaciones variacionales en derivadas parciales (PDEs) aplicadas a problemas de control óptimo

Gracias al formalismo Hamiltoniano y a la función de valor, el problema de control óptimo regular de horizonte finito se reduce a integrar numéricamente las ecuaciones canónicas Hamiltonianas. Sin embargo, dichas HCEs tienen condiciones de borde mixtas, imposibilitando su integración “on-line” con el proceso a controlar. En la Sección 2.3 se introdujo un método relacionado al “Invariant Imbedding”, ideado por Bellman y adaptado por Costanza y colaboradores en [32, 39], a través del cual se generaron nuevas PDEs (a resolver antes de iniciar el proceso, es decir, “off-line”) para calcular el estado final y el coestado inicial desconocidos. En este capítulo, en la Sección 3.1, las PDEs unidimensionales se adaptarán para estudiar el problema de cambio de set-point de un sistema no lineal relacionado con la navegación aérea descrito en [101, 43], y además se investigará cómo tratar las “perturbaciones” de proceso. En la Sección 3.2, se estudiará el problema de cambio de referencia con control  $\mathcal{H}$ -mínimo en forma implícita, es decir, cuando la acción óptima de control no se puede expresar funcionalmente en términos de los estados y coestados. Además, se substanciará una ODE (adicional a las HCEs) para el control y se ampliarán las PDEs para determinar las condiciones de borde de esta nueva ODE de control. A medida que se desarrolla el soporte teórico de esta parte, los resultados se aplicarán a un sistema de reacciones electroquímicas conocidas como HER (ver [44, 54, 30]). Luego, en la Sección 3.3, se presentará la extensión de las PDEs unidimensionales a sistemas generales de dimensión  $n$ , y las soluciones obtenidas se evaluarán a través de su aplicación en sistemas lineales invariantes, lineales no autónomos y no lineales. Finalmente, se presentarán las conclusiones y discusión del capítulo.

### 3.1. PDEs variacionales para cambio de set-point en sistemas no lineales unidimensionales.

En la presente sección se resuelve el problema de cambio de set-point óptimo para un sistema unidimensional mediante la aplicación del enfoque Hamiltoniano. El sistema no lineal tratado tiene un comportamiento cualitativo semejante a la navegación aérea. El sistema “arranca” de su condición inicial hacia el estado de “crucero”, una vez alcanzado esa posición se mantiene por un intervalo de tiempo y finalmente inicia su “aterrizaje” hacia el estado de destino [100, 43]. Este modelo es gobernado por la siguiente ecuación diferencial autónoma e inicializada:

$$\dot{x} = -x^3 + u ; x(0) = x_0 = 1 , \quad (3.1)$$

y está sujeto al siguiente criterio de optimización cuadrático:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T [Q(x(t) - \bar{x}_c)^2 + Ru^2(t)] dt + S(x(T) - \bar{x}_\ell)^2 , \quad (3.2)$$

donde  $x$  es el estado del “avión”,  $u$  la variable de control,  $\bar{x}_c$  es su estado de crucero y  $\bar{x}_\ell$  es el estado final deseado. Este mismo problema de control óptimo pero sin penalización final (con  $\bar{x}_c = 0$  y  $Q = R = 1$ ), ya ha sido estudiado anteriormente en [101], descrito como un problema hipersensitivo a las condiciones de borde (HSBP), dado que pequeñas perturbaciones afectan seriamente su solución numérica a lo largo del horizonte  $T$ . Soluciones típicas de este problema (con  $\bar{x}_c = 0$ ,  $\bar{x}_\ell \neq 0$ ), exhiben un comportamiento como el predicho, en tres etapas. Durante la primera etapa el sistema busca su equilibrio natural  $(\bar{x}_c, \bar{u}_c) = (0, 0)$  favorecido por el Lagrangiano. El estado continua alrededor de una posición dictada por  $\bar{x}_c$  y  $\bar{x}_\ell$  durante el segundo segmento y después de un cierto tiempo, el sistema es forzado a salir hacia su estado final deseado  $\bar{x}_\ell$ . Este tipo de comportamientos son estudiados para diseñar rutas aeroportuarias. Sin embargo, situaciones similares se presentan en otros procesos (p. ej., véase [35, 100]). El ejemplo fue elegido principalmente debido a su alinealidad y baja dimensionalidad.

En el tratamiento se ilustró que la alta sensibilidad en las condiciones de borde puede ser contrarrestada para valores moderados de  $T$  de la siguiente manera: (i) recuperando la información inicial de los coestados, (ii) manipulando la influencia de la penalización final, y (iii) usando las propiedades del Hamiltoniano a lo largo de las trayectorias óptimas para mejorar la precisión en la integración numérica de las HCEs.

#### 3.1.1. Problema de cambio de set-point óptimo.

El problema de control óptimo de “cambio de set-point” (en español cambio de referencia o consigna) se presenta cuando en la ecuación (3.2) el estado final deseado (“target”)  $\bar{x}$  del funcional de costo no es cero (para este caso es  $\bar{x} = \bar{x}_c = \bar{x}_\ell = 1.5$ ). Esto significa que el

funcional de costo se minimizará cuando el estado y el control sean lo más parecido al target  $\bar{x}$ . Esto debe ser interpretado como el deseo de llevar el sistema de un equilibrio (en este caso  $(x_0, u_0) = (1, 1)$ ) hacia otro equilibrio  $((\bar{x}, \bar{u}) = (1.5, 1.5^3))$  con costo óptimo, donde el funcional de costo penaliza desviaciones del nuevo set-point. Las PDEs halladas en la Sección 2.3 por el método de invariant imbedding también son aplicables a este problema, aunque requieren algunas ligeras modificaciones. Concretamente, las funciones para el problema óptimo de cambio de set-point son

$$F(\rho, S) \triangleq \mathcal{F}(\rho, 2S(\rho - \bar{x})) , \quad G(\rho, S) \triangleq \mathcal{G}(\rho, 2S(\rho - \bar{x})) , \quad (3.3)$$

y las PDEs para las condiciones de borde faltantes de las HCEs resultan:

- para el estado final  $x(T) = \rho(T, S)$

$$(\rho - \bar{x})\rho_T - (SF + \frac{G}{2})\rho_S = (\rho - \bar{x})F, \quad (3.4)$$

con condición de borde

$$\rho(0, S) = x_0 , \quad (3.5)$$

- y para el coestado inicial  $\lambda(0) = \sigma(T, S)$

$$(\rho - \bar{x})\sigma_T - (SF + \frac{G}{2})\sigma_S = 0, \quad (3.6)$$

con condición de borde

$$\sigma(0, S) = 2S(x_0 - \bar{x}) . \quad (3.7)$$

Para este caso las ecuaciones para el estado verifican:

$$\rho_T - \left[ -\frac{S\rho^3}{\rho - \bar{x}} - S^2 + 1 - 3\rho^2 S \right] \rho_S = -\rho^3 - 2S^2(\rho - \bar{x})^2 , \quad \rho(0, S) = x_0 = 1 , \quad (3.8)$$

y para el coestado:

$$\sigma_T - \left[ -\frac{S\rho^3}{\rho - \bar{x}} - S^2 + 1 - 3\rho^2 S \right] \sigma_S = 0 , \quad \sigma(0, S) = 2S(x_0 - \bar{x}) = -S . \quad (3.9)$$

Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran las soluciones para  $\rho$  y  $\sigma$  en un rango de  $(T, S)$ . Se puede observar que, para pequeños valores de  $S$  y en el rango de horizontes de optimización  $T \in [0, 1]$ , los estados finales alcanzados están lejos del estado de equilibrio deseado; es más, para valores muy pequeños de  $S$ , el estado final  $\rho$  resulta estar por debajo del estado inicial  $x_0 = 1$  a pesar de que la referencia es mayor ( $\bar{x} = 1.5$ ). Sin embargo, al adoptar valores grandes de  $S$  los estados finales se acercan considerablemente a los deseados. Aquí se muestra una de las ventajas mencionadas de las PDEs, ya que al resolverlas a priori para una familia de valores de  $(T, S)$ , se sabe con exactitud qué penalización y horizonte de optimización son los adecuados

para el problema estudiado. Esto indica que en la etapa de diseño, las soluciones  $\rho$ ,  $\sigma$  brindan información útil al manejo del sistema de control.

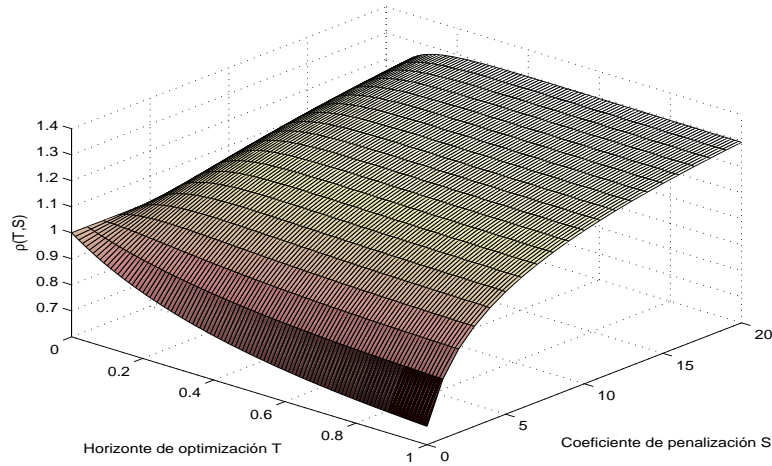


Figura 3.1: Superficie de estados finales óptimos en  $T, S$  para cambio de set-point.

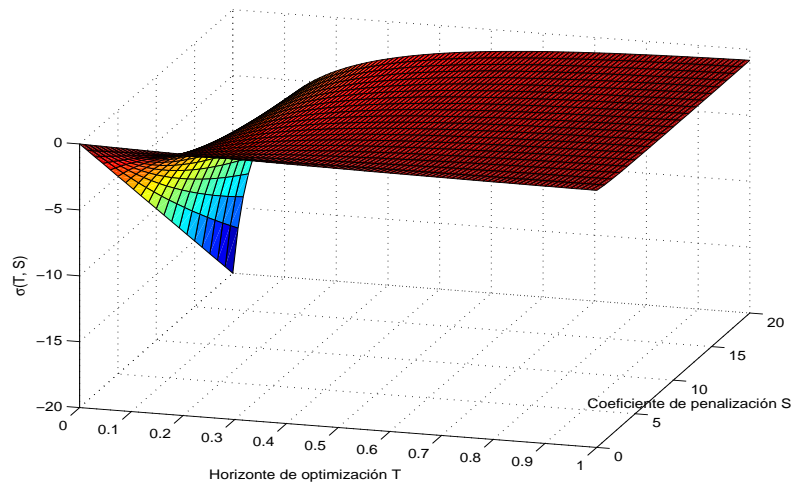


Figura 3.2: Superficie de coestados iniciales óptimos en  $T, S$  para cambio de set-point.

La Figura 3.3 muestra la influencia de la adopción de valores de  $S$  crecientes sobre el comportamiento dinámico de las trayectorias óptimas manteniendo el horizonte fijo en  $T = 5$ . Se integraron las HCEs (obtenidas utilizando las ecuaciones (2.20, 2.21)) con condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $\lambda(0) = \sigma(5, S)$ , para varios valores de  $S$ , es decir, se resolvió

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - \frac{\lambda}{2}; x(0) = 1, \\ \dot{\lambda} = -2(x - \bar{x}) + 3\lambda x^2; \lambda(0) = \sigma(5, S). \end{cases} \quad (3.10)$$

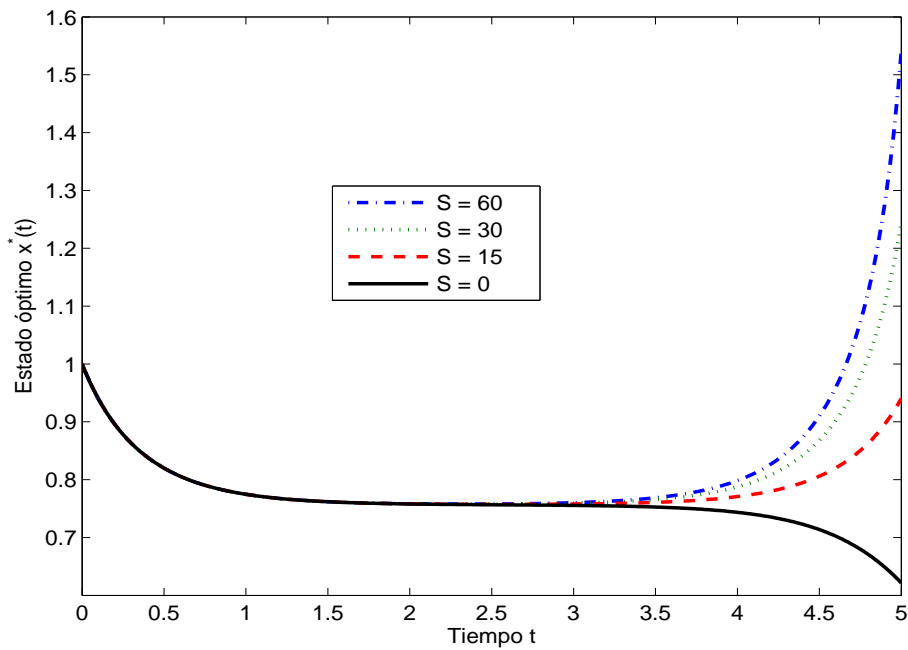


Figura 3.3: Trayectorias óptimas de estado para diferentes valores de  $S$  y el horizonte de optimización fijo  $T = 5$ .

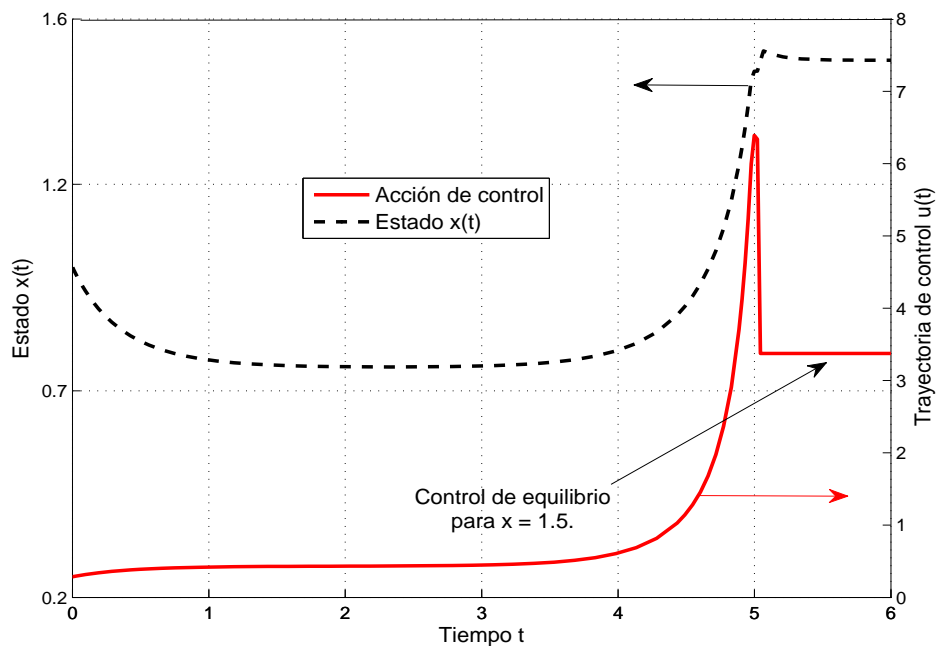


Figura 3.4: Trayectorias óptimas de control correspondientes al cambio de set-point  $1 \rightarrow 1.5$ .  $T = 5, S = 60$ .



Para un valor cercano a  $S = 60$ , el estado deseado  $\bar{x} = 1.5$  es prácticamente alcanzado, tal como se puede apreciar en la Figura 3.4. Sin embargo, aún en este caso, el estado no llega a la referencia monotónicamente, sino que primero desciende hasta el estado de cruce (alrededor de 0.75) debido al alto costo asociado con la acción de control, tal como se ve en la Figura 3.4. El control de equilibrio correspondiente a  $x(0) = 1$  debería ser  $u = 1$ , pero el término  $Ru^2 = 1$  costaría mucho comparado al término  $Q(x - \bar{x})^2 = 0.25$ . Por lo tanto, el control óptimo comienza descendiendo hasta aproximadamente 0.3, para luego establecerse en la velocidad de cruce, donde permanece hasta que cerca de  $t \approx 3.2$ , es forzado a subir debido a la penalización final, llevando de esa manera al sistema cerca del estado deseado  $\bar{x}$ . En la Figura 3.4 se muestra una posible continuación de la estrategia cuando para  $t \geq T$  se necesite alcanzar exactamente en el equilibrio de llegada. Esta estrategia consiste simplemente en aplicar el control de equilibrio  $\bar{u} = 1.5^3$  correspondiente al estado de referencia  $\bar{x}$  en  $t = T$ , esto produciría un aterrizaje suave después de un sobre impulso despreciable, hasta que el control sea modificado.

### Algunos aspectos numéricos de las soluciones.

La integración numérica de las PDEs de primer orden asociadas al método de invariant imbedding descrito en el Capítulo 2 no es una tarea sencilla (véase [16]). Sin embargo, por el momento se asumirá que la solución podría ser hallada y que los valores encontrados tendrán una exactitud razonable si se aplica un esfuerzo computacional adecuado.

Ya que dicha integración es desarrollada “off-line”, una manera de chequear la exactitud de la solución será ilustrada mediante el siguiente ejemplo. Para el problema de cambio de set-point con  $(T, S) = (5, 60)$ , se recuperaron los valores  $\rho(T, S) = 1.40899$ ; y  $\sigma(T, S) = -0.57205$  de la solución numérica de las PDEs (ecuaciones (3.8) - (3.9)). Ya que se conoce la dependencia final del coestado con la penalización  $S$ ,  $\lambda^*(T)$  puede ser calculado directamente como

$$\lambda^*(T) = 2S(x^*(T) - \bar{x}) = 2S(\rho(T, S) - \bar{x}) = -10.92079 . \quad (3.11)$$

Así, el Hamiltoniano óptimo para este caso (3.12) a lo largo de las trayectorias óptimas resulta

$$\mathcal{H}^0(x^*(t), \lambda^*(t)) = [x^*(t) - 1.5]^2 - \lambda^*(t) [x^*(t)]^3 - \frac{[\lambda^*(t)]^2}{4} \quad (3.12)$$

que debe ser constante (propiedad descrita en la Sección 2.6). En particular, debe cumplirse para el inicio y el final del horizonte de optimización:

$$\mathcal{H}^0(x^*(0), \lambda^*(0)) = \mathcal{H}^0(1.00000, -0.572050) = 0.74024, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{H}^0(x^*(5), \lambda^*(5)) = \mathcal{H}^0(1.40899, -10.92079) = 0.74024. \quad (3.14)$$

En conclusión, antes de iniciar la integración de las HCEs ya podemos comprobar que los valores arrojados de las PDEs son coherentes al comparar los Hamiltonianos óptimos iniciales y finales.

Si esto no se llegara a cumplir, se deberá evaluar formas alternativas de resolver numéricamente las PDEs.

Durante el intervalo  $t \in (0, T)$  también es recomendable ir comprobando que el Hamiltoniano óptimo se mantenga constante. Para esto se podría utilizar el valor calculado con la ecuación (3.12) en conjunto con las HCEs (3.10) y comparándolo contra un valor “constante” adoptado, por ejemplo, el valor promedio de (3.13), (3.14)).

Las PDEs ofrecen un método alternativo (al “shooting”, Galerkin, etc.) para integrar numéricamente las HCEs de un sistema, brindando el valor inicial desconocido del coestado. Además, como se verá en la subsección que viene, es posible mejorar la integración usando propiedades del Hamiltoniano. Para poder comprobar la utilidad de resolver las PDEs, se trató de aplicar el método de shooting para este caso de estudio unidimensional (mediante la rutina “ode45” de Matlab para integrar las ODEs), pero la aplicación de este método no fue satisfactoria debido a:

- Al comenzar con  $x(0) = x_0$ ,  $\lambda(0) = -0.573 \approx \sigma(5, 60) = -0.572050296$ , (como valores iniciales del shooting) y corriendo las HCEs hacia delante en el tiempo, las trayectorias resultantes difieren mucho del comportamiento esperado. Entonces se mejoró la condición inicial del coestado haciendola más parecida a la arrojada por las PDEs, pero
- las trayectorias de estado y coestado siguen divergiendo inclusive para aproximaciones del coestado inicial muy cercanas a su valor obtenido de las PDEs, por ejemplo, se llegó a utilizar un valor de  $\lambda(0) = -0.57206$ .
- Luego se intentó integrar las HCEs hacia atrás en el tiempo, utilizando las condiciones finales conocidas para el sistema Hamiltoniano más una pequeña perturbación y así aplicar el método de shooting, es decir,

$$x(T) = \rho(5, 60) + \varepsilon, \quad \lambda(T) = 2s(x(T) - \bar{x}_\ell),$$

con  $\varepsilon$  tan pequeño como 0.000005, y sin embargo, las ODEs continuaban divergiendo.

La conclusión de intentar aplicar el método de shooting fue que este método no es útil en estos casos “caóticos” o hiper-sensibles a las condiciones iniciales y finales, mientras que los resultados brindados por las PDEs fueron consistentes y hallados con muy buena precisión, ya que los coestados iniciales de las PDEs permitieron la integración de las HCEs sin mayores problemas.

### 3.1.2. Mejoramiento de la exactitud en la generación de las trayectorias óptimas.

La estructura simpléctica [1] de las HCEs es una fuente de inestabilidad numérica, sobre todo cerca del equilibrio (ya que se puede mostrar que los autovalores de la linealización de la

trayectoria Hamiltoniana tienen partes reales positivas y negativas, por mitades). Además, en general, su alinealidad induce problemas de exactitud en las soluciones numéricas para tiempos crecientes. Cuando las trayectorias óptimas  $(x^*(\cdot), \lambda^*(\cdot))$  se generan on-line, es conveniente reforzar los métodos numéricos para integrar las ODEs a fin de prevenir dichas inexactitudes. Esto es necesario ya que el valor nominal del control que maneja al proceso es construido directamente de esta información (ecuación (2.13)).

A continuación se presenta una técnica simple y efectiva de reforzar los métodos numéricos convencionales mediante las siguientes consideraciones:

- El valor del Hamiltoniano  $\mathcal{H}^0$ , siendo teóricamente constante a lo largo de las trayectorias óptimas, implica que la transpuesta de su gradiente

$$(\nabla \mathcal{H}^0)' = \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} \right)' \quad (3.15)$$

es ortogonal al vector de velocidades  $v = (\dot{x}, \dot{\lambda})'$ .

- En cada punto  $(\tilde{x}(t), \tilde{\lambda}(t))'$  de la solución de las HCEs, el Hamiltoniano  $\mathcal{H}^0(\tilde{x}(t), \tilde{\lambda}(t)) = \tilde{\mathcal{H}}^0(t)$  podría ser evaluado aproximadamente a partir de (3.12). Este valor posiblemente diferirá de su valor constante  $\overline{\mathcal{H}}^0 = \mathcal{H}^0(x^*(t), \lambda^*(t))$ , generando

$$\Delta H(t) \triangleq \tilde{\mathcal{H}}^0(t) - \overline{\mathcal{H}}^0, \quad (3.16)$$

$$\Delta z(t) \triangleq (\tilde{x}(t) - x^*(t), \tilde{\lambda}(t) - \lambda^*(t))'. \quad (3.17)$$

Es claro que  $\Delta z(t)$  tendrá una componente normal en la misma dirección que  $\text{sign}(\Delta H) \cdot [\nabla \mathcal{H}^0(x^*(t), \lambda^*(t))]'$ .

- Por lo tanto, es natural intentar una corrección en el vector de velocidad  $\Delta v(t)$ , en la dirección opuesta a la componente normal de  $\Delta z(t)$  y proporcional a  $|\Delta H|$ , es decir,

$$\Delta v = -\gamma \cdot |\Delta H| \cdot \left[ \text{sign}(\Delta H) \cdot \frac{(\nabla \mathcal{H}^0)'}{\|\nabla \mathcal{H}^0\|} \right] = -\varepsilon \cdot \Delta H \cdot (\nabla \mathcal{H}^0)'. \quad (3.18)$$

Este tipo de ajuste es similar a la “regla MIT” utilizada en control adaptivo descrita en [9], en donde  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\|\nabla \mathcal{H}^0\|} \geq 0$  interpreta el rol de un “coeficiente de relajación” para ser escogido en cada problema específico.

- Con el valor corregido  $v \rightarrow v + \Delta v$  las HCEs a integrar son

$$\begin{cases} \dot{x} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} \right)' - \varepsilon (\Delta H) \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x} \right)' \\ \dot{\lambda} = - \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x} \right)' - \varepsilon (\Delta H) \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} \right)' \end{cases} \quad (3.19)$$

Nótese que si  $\Delta H = 0$ , entonces no se hace ninguna corrección. La forma de las ecuaciones (3.19) muestran que el costo computacional del término adicionado (3.18) será pequeño ya que las derivadas parciales de  $\mathcal{H}^0$  son calculadas solamente una vez en cada paso. La Figura 3.5 ilustra el valor de las diferencias  $\Delta H(t)$  para algunos valores del coeficiente de relajación  $\varepsilon$ , mostrando que un valor adecuado para este problema podría ser  $\varepsilon \approx 0.1$ .

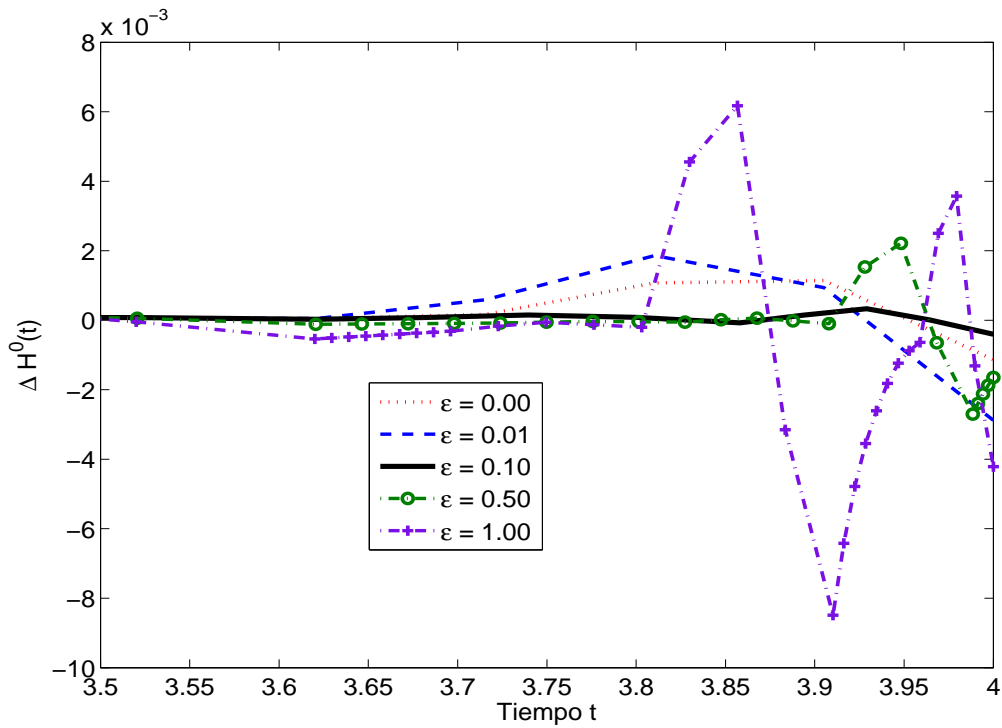


Figura 3.5: Compensación de las trayectorias Hamiltonianas a través de  $\varepsilon$ .

### 3.1.3. Abatimiento óptimo de perturbaciones.

La solución del estado óptimo  $x^*(\cdot)$  que proviene de la integración de las HCEs provee una trayectoria nominal de estado “deseada”, pero en algún punto  $t$  del tiempo, el estado  $x(t)$  del sistema real puede diferir del estado óptimo  $x^*(t)$  debido a perturbaciones del proceso. Con el fin de abatir el efecto de dichas perturbaciones es necesario adicionar un control correctivo  $U(\cdot)$  al control óptimo Hamiltoniano  $u^*(\cdot) = u^0$  calculado con la ecuación (2.13). Asumiendo que esas diferencias son relativamente pequeñas, entonces las variables de desviación

$$X(t) \triangleq x(t) - x^*(t), \quad U(t) \triangleq u(t) - u^*(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.20)$$

se aproximan mediante una dinámica lineal (ver [106] para más detalles)

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}^*(t) = f(x(t), u(t)) - f(x^*(t), u^*(t)) \approx \\ &\approx f_x(x^*(t), u^*(t))X(t) + f_u(x^*(t), u^*(t))U(t) = \\ &= A(t)X(t) + B(t)U(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

El control de compensación  $U$  puede ser diseñado utilizando el contexto de horizonte finito (típicamente con la misma duración  $T < \infty$  del problema original), o alternativamente de manera asintótica (utilizando la ecuación diferencial de Riccati en el primer caso, o la ecuación algebraica de Riccati en el segundo).

**Seguimiento óptimo de trayectoria con horizonte finito.**

Asumiendo que la configuración de horizonte finito con el mismo valor de  $T$  es adoptado para tratar el problema de tracking, una optimización adicional surge para mitigar las desviaciones de la trayectoria óptima de estados. La dinámica para las desviaciones está dada por (3.21) con

$$A(t) = -3[x^*(t)]^2, \quad B(t) = 1, \quad (3.22)$$

sujeto al mismo tipo de criterio de optimización del problema original, es decir,

$$\mathcal{J}(U) = \int_0^T [Q_1 X^2(t) + R_1 U^2(t)] dt + S_1 X^2(T). \quad (3.23)$$

La ecuación diferencial de Riccati correspondiente (DRE) a este problema es entonces (con  $R_1 = 1$  por simplicidad)

$$\dot{P} = P^2(t) - 2A(t)P(t) - Q_1, \quad (3.24)$$

$$P(T) = S_1, \quad (3.25)$$

de cuyas soluciones se puede calcular el feedback óptimo (ver Sección 2.2, ecuación (2.34)) como

$$U^*(t) = -P(t)X(t), \quad (3.26)$$

y por lo tanto el control real aplicado al sistema en cada tiempo  $t$  es

$$u(t) = u^*(t) + U^*(t) = u^0(x^*(t), \lambda^*(t)) - P(t)[x(t) - x^*(t)]. \quad (3.27)$$

Este procedimiento de tracking fue aplicado al problema de cambio de set-point estudiado anteriormente en presencia de tres perturbaciones puntuales en el estado: una en la condición inicial, otra en  $t = 1$ , y una final en  $t = 4$ , manteniendo los coeficientes  $Q_1 = 1$ ,  $S_1 = 60$  con los que se logró la trayectoria nominal. El desempeño del control de tracking fue bastante bueno, tal como se ilustra en la Figura 3.6. La principal desventaja de este método es que  $P(t)$  tiene que ser calculado off-line porque la DRE (3.24) necesita a priori el conocimiento de toda la trayectoria óptima  $x^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Esto, por ahora, imposibilita implementarlo en tiempo real.

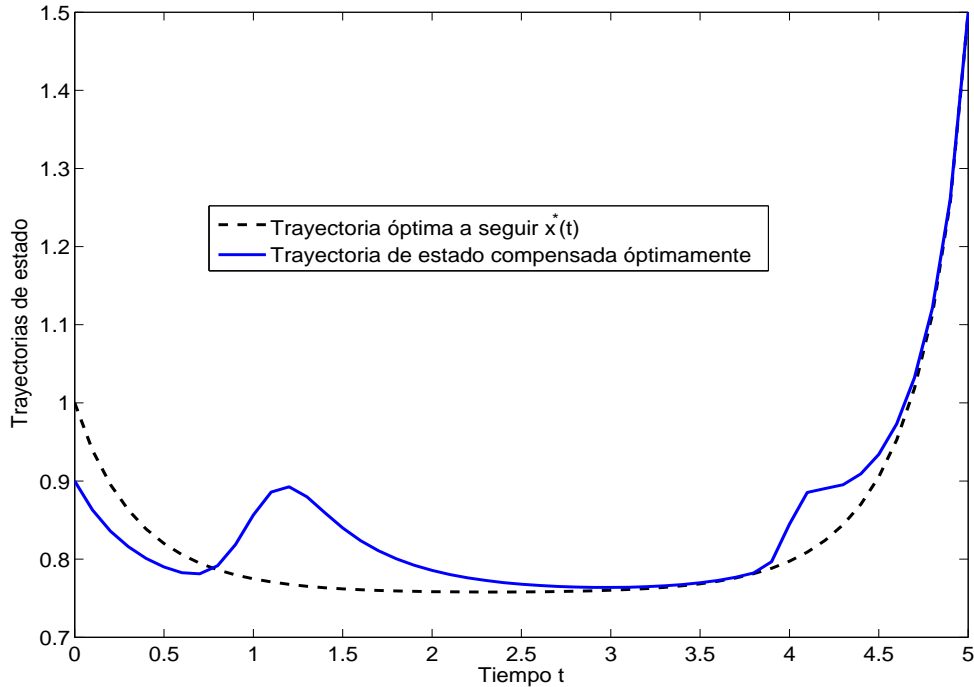


Figura 3.6: Tracking On-line de la trayectoria óptima de estado con rechazo a perturbaciones usando la DRE.

### Tracking asintótico en horizonte infinito.

Para un proceso industrial el cálculo on-line del control es prácticamente obligatorio, así como el de la trayectoria óptima es altamente deseable. Por lo tanto, es imprescindible describir un método que calcule  $u^*(t)$  y su corrección en conjunto con el proceso real. La teoría de control óptimo mitiga esta necesidad mediante la ecuación algebraica de Riccati (ARE), la cual resulta ser utilizada como una aproximación constante de la DRE, ya que cuando el horizonte  $T \rightarrow \infty$ , la ARE se convierte en una cota superior de la DRE con  $S = 0$ . La solución de la ARE  $\bar{P}$  es positiva (aunque necesariamente el sistema tiene que ser controlable, véase [106]), es decir

$$0 = 2\bar{A}\bar{P} + Q_1 - \bar{P}^2, \quad (3.28)$$

donde  $\bar{A}$  adopta algún valor característico para  $A(t)$  propuesto por la DRE (3.22). El valor de  $\bar{A}$  puede ser adaptado on-line. En la Figura 3.7 se muestra la adaptación de  $\bar{A}$  dos veces: (i) al principio debido a la perturbación inicial en el estado (resultando  $\bar{A} = -3, \bar{P} \approx 0.16230$ ), y (ii) después de que una segunda perturbación fuera impuesta en  $t \approx 2$ , la ganancia resultante duplica a la primera,  $\bar{P} \approx 0.26902$ .

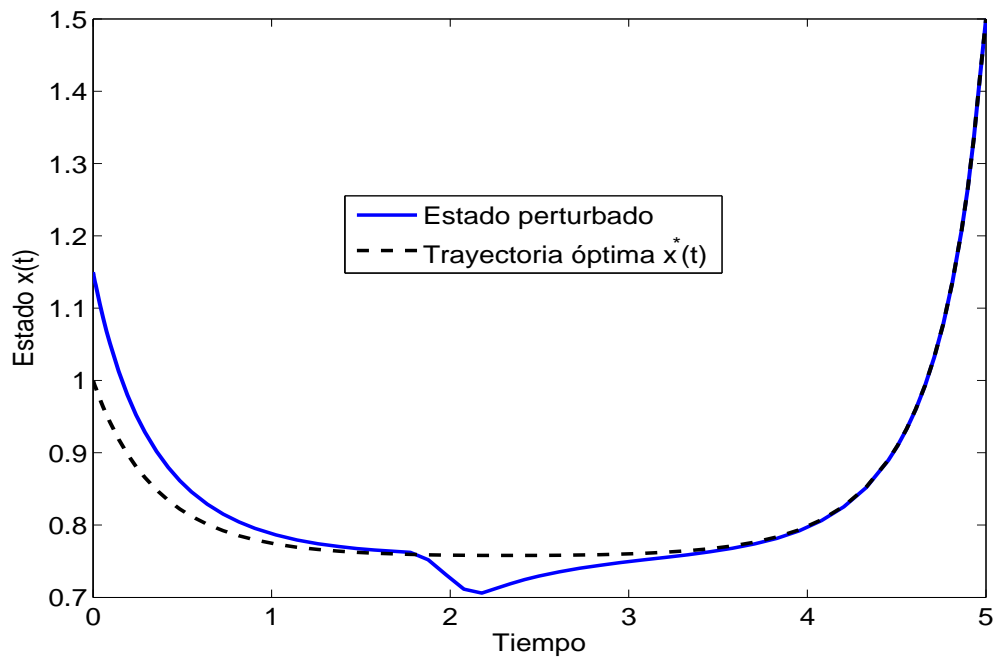


Figura 3.7: Tracking On-line de la trayectoria óptima de estado con rechazo a perturbaciones usando la adaptación de la ARE.

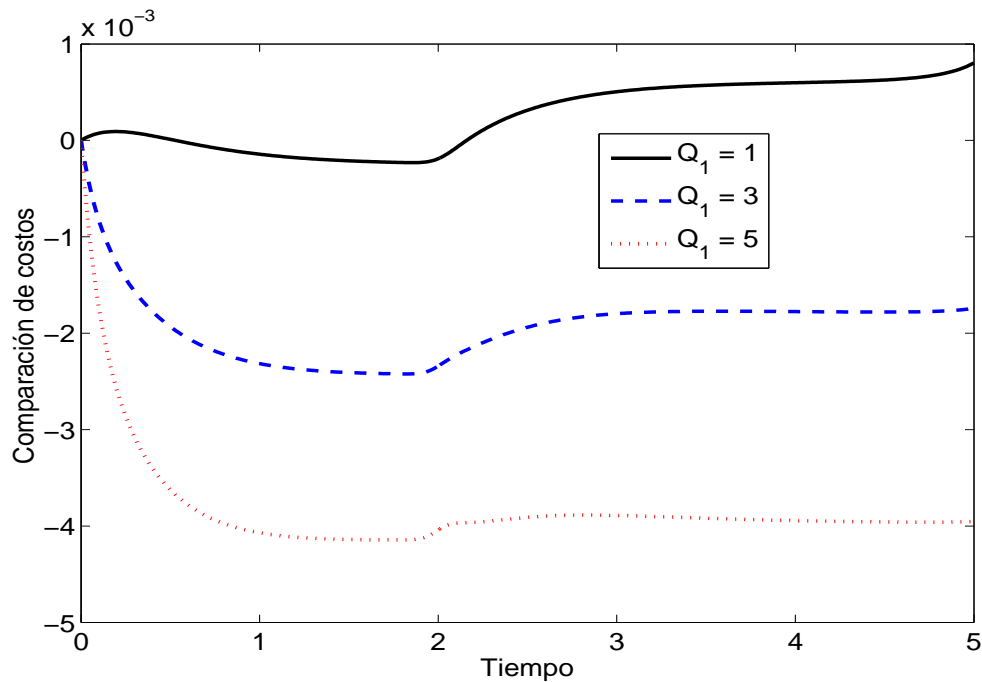


Figura 3.8: Comparación de la diferencia de costos entre la estrategia DRE y ARE para el rechazo de perturbaciones.

La diferencia entre el desempeño del tracking de la DRE y la ARE no fue significativa bajo las mismas condiciones. Se calculó la diferencia en costos entre las dos:  $[\mathcal{J}_t(U_{DRE}) - \mathcal{J}_t(U_{ARE})]$ , donde  $\mathcal{J}_t$  representa el costo acumulativo de la integración de la ecuación (3.23) en  $[0, t]$ . En la Figura 3.8 se graficó dicha diferencia de costos para varios valores del coeficiente  $Q_1 \geq 1$ . En general, como es de esperarse, el costo asociado a la DRE resulta menor que el de la ARE; pero las diferencias no son importantes. Para  $Q = 1$  ambos costos son casi iguales, aunque la ARE parece mejorar hacia el final del horizonte. Por lo tanto, el tracking usando la ARE parece una buena alternativa para abatir las perturbaciones y además permite un esquema totalmente on-line.

### 3.2. PDEs variacionales para cambios de set-point con ley de control óptima implícita.

En el Capítulo 2 se definió apropiadamente el problema de control óptimo en el contexto Hamiltoniano. Se estableció que si el problema era regular, entonces existía un control  $u^0(x, \lambda) \triangleq \arg \min_u H(x, \lambda, u)$  que minimiza al Hamiltoniano. Sin embargo, eso no garantiza que siempre se puede “despejar” la  $u^0(x, \lambda)$  y de esa manera encontrar una ley explícita de control. En esta sección se tratará el problema de tener sólo una forma implícita de la acción de control, se ampliarán tanto las HCEs como las PDEs, para incluir una ecuación diferencial para el control y su condición de borde.

También se estudiará el problema de cambio de set-point óptimo analizando un sistema de reacciones electroquímicas, usualmente llamadas “Hydrogen Evolution Reaction” (HER de su sigla en inglés). Típicamente la hidrólisis es un ejemplo de HER, donde energía eléctrica se aplica al agua a fin de descomponerla en  $H_2$  y  $O_2$ . En celdas de combustible sucede lo contrario, ya que se busca producir energía a expensas del  $H_2$  y su propensión a combinarse con el oxígeno. Estos tipos de procesos han recibido mucha atención en los últimos años debido a: las constantes crisis de energía, los precios del petróleo, la búsqueda de tecnología limpia para mitigar el calentamiento global, y la actual velocidad desproporcionada de consumo de combustibles fósiles. Existe una extensa bibliografía donde diversos campos de la ciencia buscan aplicar los procesos HER, por ejemplo en fusión nuclear fría (ver [59]), o en descontaminación y corrosión de metales pesados por  $H_2$  (ver [3] y sus referencias).

Otra aplicación importante de los procesos HER es en las celdas de combustible, especialmente en prototipos de membranas intercambiadoras de protones no isotérmicas (véase [57]). En todos los casos, las alinealidades de estos procesos han sido confirmadas experimentalmente, lo cual implica que la tecnología de celdas de combustible requeriría técnicas de control no lineales para llevar a cabo los cambios entre distintas condiciones de operación. Como ejemplo de aplicaciones, en [77] se intentó llevar al sistema a otros puntos de operación por regiones no



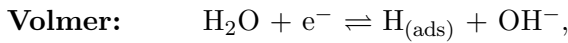
Parámetro	Descripción	Valor
$H_{2(g)}$	hidrógeno molecular gaseoso	
$v_V^e$	velocidad de reacción de equilibrio paso Volmer	$1 \times 10^{-10}$
$v_H^e$	velocidad de reacción para el paso Heyrovsky	$1 \times 10^{-13}$
$v_T^e$	velocidad de reacción de equilibrio del paso Tafel	$1 \times 10^{-12}$
$\theta_e$	superficie cubierta de equilibrio	0.1
$\alpha$	factor de simetría de adsorción	0.5
$R$	constante de los gases	$8.3145 J mol^{-1} K^{-1}$
$F$	constante de Faraday	$96484.6 C mol^{-1}$
$T$	temperatura absoluta	$303.15 K$
$d = F/RT$	parámetro	$38.2795 C J^{-1}$

Tabla 3.1: Parámetros de los pasos HER

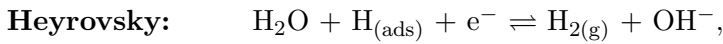
caóticas, y en [30] se trató de minimizar la disipación de energía eléctrica durante el proceso para cambios de set-point.

### 3.2.1. Descripción de las ecuaciones de evolución de hidrógeno (HER) a través de los pasos Volmer-Heyrovsky-Tafel.

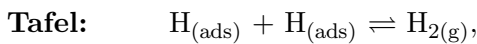
La dinámica de adsorción y desorción sobre la superficie de un electrodo (HER) se modela usualmente a través de la combinación de tres “pasos” elementales (para más detalles ver [54, 55]), con sus correspondientes velocidades:



$$v_V = v_V^e \left\{ \frac{1 - \theta}{1 - \theta_e} e^{-(1-\alpha)d\eta} - \frac{\theta}{\theta_e} e^{\alpha d\eta} \right\}, \quad (3.29)$$



$$v_H = v_H^e \left\{ \frac{\theta}{\theta_e} e^{-(1-\alpha)d\eta} - \frac{1 - \theta}{1 - \theta_e} e^{\alpha d\eta} \right\}, \quad (3.30)$$



$$v_T = v_T^e \left\{ \left( \frac{\theta}{\theta_e} \right)^2 - \left( \frac{1 - \theta}{1 - \theta_e} \right)^2 \right\}, \quad (3.31)$$

donde las variables principales son:  $\theta$  es la superficie del electrodo cubierta por el hidrógeno atómico adsorbido  $H_{(ads)}$ , y  $\eta$  el potencial aplicado para la reacción electroquímica. Los demás parámetros y sus valores numéricos están registrados en la Tabla 3.1.

Combinando las tres rutas o pasos (3.29 - 3.31) y asumiendo que la superficie del electrodo cubierta es proporcional al número de átomos de  $H_{(ads)}$ , entonces el balance estequiométrico de la reacción HER permite escribir la ecuación de acumulación  $\theta$ :

$$(\Sigma) \quad \dot{\theta} = \frac{F}{\gamma} (v_V - v_H - 2v_T) \triangleq f(\theta, \eta), \quad (3.32)$$

donde  $\gamma$  es la medida experimental de la densidad superficial de carga eléctrica cubierta en una monocapa de  $H_{(ads)}$ . Para las simulaciones numéricas el valor adoptado de  $\gamma$  es  $2.21 \times 10^{-4} Ccm^{-2}$ , correspondiente a un electrodo de platino estándar (similar a como es tomado en [60]).

Varios experimentos y simulaciones (reportados en [85]) han mostrado comportamientos cíclicos, histéresis, biestabilidad, atractores extraños y caos. Estos resultados experimentales, de alguna manera inesperados, han brindado mayor comprensión sobre la teoría de los mecanismos de adsorción, patrones espacio-temporales de electrodos catalíticos y problemas físicos relacionados. Por supuesto, aquí el énfasis estará puesto en el control óptimo de las transiciones entre distintos estados del sistema, principalmente de aquellas que involucran grandes desplazamientos desde el estado de equilibrio inicial (por lo general estable) hacia otros deseados.

### 3.2.2. El proceso HER visto como un sistema de control.

Se asumirá que la evolución del potencial  $\eta(\cdot)$  puede ser manipulada (dentro de un rango razonable), por lo que será natural definirla como entrada o control del sistema (3.32). Por el contrario, la variable  $\theta$  no puede ser manejada de forma arbitraria, así que  $\theta$  será tomada como la variable de estado. La suavidad de las ecuaciones HER garantiza para cada tramo de la trayectoria de control  $\{u(t) \triangleq \eta(t), 0 \leq t \leq T \leq \infty\}$  que sea continuamente diferenciable y para cada condición inicial  $x_0 \triangleq \theta(0) = \theta_0 \in [0, 1]$ , que existirá una trayectoria continua del estado  $\{x(t) \triangleq \theta(t), 0 \leq t \leq T\}$  solución del sistema (3.32). Aunque el conocimiento del estado  $x(t)$  es suficiente para describir la dinámica de (3.32), no se puede garantizarse que sea medido continuamente. Dada esta situación es conveniente definir la salida del sistema como la densidad de corriente  $J = h(x, u)$ , la cual en general es función de  $(x, u)$ . Los valores de  $J$  sí son observables o medibles continuamente. El problema de control óptimo que involucra un cambio de set-point para las ecuaciones HER consiste en encontrar trayectorias de control  $u(t)$ , las cuales lleven el sistema (3.32) desde su estado inicial  $(x_0, u_0)$  hacia el estado deseado  $(\bar{x}, \bar{u})$  con gasto mínimo de potencia.

El costo  $\mathcal{J}$  que se debe minimizar es de la forma:

$$\mathcal{J}(0, T, x_0, u(\cdot)) = \int_0^T (\mathcal{P}_0 - xu)^2 dt + (x(T) - \bar{x})' S (x(T) - \bar{x}), \quad (3.33)$$

donde  $\mathcal{P}_0$  es la potencia nominal del sistema HER,  $\mathcal{J}(0, T, x_0, u(\cdot))$  es la suma del costo generado por la estrategia de control admisible  $u(\cdot)$  y por la trayectoria de estado ( $x(t) = \varphi(t, x_0, u(\cdot))$ ,  $t \in [0, T]$ ) (donde  $\varphi$  es la función de transición de estados para  $t_0 = 0$ , ver see [106, 71]). El costo es entonces la integral del Lagrangiano  $L(x, u) = (\mathcal{P}_0 - xu)^2$ , más una penalización cuadrática pesada por un coeficiente positivo  $S$ ,

$$K(x) \triangleq (x - \bar{x})' S (x - \bar{x}). \quad (3.34)$$

El Hamiltoniano del problema se define de manera usual (aunque se asume que ahora es una función  $\mathcal{C}^2$ )

$$H(x, \lambda, u) \triangleq L + \lambda' f = L(x, u) + \lambda' f(x, u), \quad (3.35)$$

donde  $\lambda$  es la variable adjunta que en este caso resulta:

$$\lambda(T) = \left( \frac{\partial K}{\partial x} \right)' (x(T)) = 2S (x(T) - \bar{x}). \quad (3.36)$$

Al asumir que  $H$  es regular [71], es posible definir las HCEs con sus respectivas condiciones de borde:

$$\dot{x} = H_\lambda(x, \lambda, u) \triangleq \mathcal{F}(x, \lambda, u); \quad x(0) = x_0 \neq 0, \quad (3.37)$$

$$-\dot{\lambda} = H_x(x, \lambda, u) \triangleq \mathcal{G}(x, \lambda, u); \quad \lambda(T) = 2S(x(T) - \bar{x}). \quad (3.38)$$

El Hamiltoniano a lo largo de las trayectorias debería verificar ([106], p. 403)

$$k(t) \triangleq H_u(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.39)$$

donde el símbolo \* significa valores óptimos. Entonces, a lo largo de las trayectorias óptimas

$$\dot{k}(t) = \left[ H'_{ux} \dot{x} + H'_{u\lambda} \dot{\lambda} + H_{uu} \dot{u} \right]' = \left[ H'_{ux} f - H_{\lambda u} H'_x + H_{uu} \dot{u} \right]' = \quad (3.40)$$

$$= \left[ H'_{ux} f - f'_u H'_x + H_{uu} \dot{u} \right]' \equiv 0, \quad (3.41)$$

y ya que  $H$  es asumido estrictamente convexo ( $H_{uu} > 0$ ), surge la siguiente condición necesaria para la acción de control óptima

$$\dot{u} = H_{uu}^{-1}(x, \lambda, u) \left\{ \left[ H_x(x, \lambda, u) f_u(x, u) \right]' - H'_{ux}(x, \lambda, u) f(x, u) \right\} \triangleq \mathcal{Z}(x, \lambda, u). \quad (3.42)$$

Las ecuaciones (3.37, 3.38, 3.42) son las anunciadas ecuaciones Hamiltonianas canónicas ampliadas (HACEs de su sigla en inglés) para el problema de control óptimo regular e implícito. En principio no se cuenta con ninguna condición de borde (ya sea inicial o final) para la ecuación (3.42), aunque de la propiedad del Hamiltoniano óptimo dada por la ecuación (3.39) (ver [98, 106]), se extrae una restricción algebraica adicional que involucra dichas condiciones

$$H(x^*(T), 2S(x^*(T) - \bar{x}), u^*(T)) = H(x_0, \lambda^*(0), u^*(0)), \quad (3.43)$$

lo cual implica que existen tres ODEs dadas por las ecuaciones (3.37, 3.38, 3.42) y esencialmente tres condiciones de borde faltantes para el problema:  $x(T)$ ,  $\lambda(0)$ , y cualquiera de los valores de  $u(0)$  o  $u(T)$ . Al escoger alguna de estas últimas dos, la otra automáticamente puede ser recuperada de la ecuación (3.43).

### 3.2.3. Ecuaciones PDEs para las tres condiciones de borde faltantes.

Se mantendrá la notación de  $\rho(T, S)$  para el valor del estado final óptimo  $x^*(T)$  y la de  $\sigma(T, S)$  para el valor del coestado inicial óptimo  $\lambda^*(0)$ . Ya que necesitamos hallar la condición de borde para la ODE del control, se denotará a  $\mu(T, S)$  y  $\nu(T, S)$  como los valores óptimos del control inicial y final ( $u^*(0)$ ,  $u^*(T)$ ), respectivamente.

A continuación se desarrollará el procedimiento para obtener las PDEs antes mencionadas. La extensión al problema de control óptimo que considera cambios de set-point require que se reemplacen en el costo los valores intermedios y finales de los estados  $(x, \rho)$  por sus desviaciones con respecto al estado deseado,  $x - \bar{x}$  y  $\rho - \bar{\rho}$ , respectivamente. De tal manera que, las funciones principales se redefinen como

$$F \triangleq F(\rho, 2S(\rho - \bar{\rho}), \nu); \quad G \triangleq G(\rho, 2S(\rho - \bar{\rho}), \nu); \quad Z \triangleq Z(\rho, 2S(\rho - \bar{\rho}), \nu). \quad (3.44)$$

Aplicando las ideas de “invariant imbedding” a las HACEs con sus condiciones de borde se consiguen las siguientes ecuaciones:

$$(\rho - \bar{\rho})\rho_T - \left(SF + \frac{G}{2}\right)\rho_S = (\rho - \bar{\rho})F, \quad (3.45)$$

$$(\rho - \bar{\rho})\sigma_T - \left(SF + \frac{G}{2}\right)\sigma_S = 0, \quad (3.46)$$

$$(\rho - \bar{\rho})\nu_T - \left(SF + \frac{G}{2}\right)\nu_S = (\rho - \bar{\rho})Z. \quad (3.47)$$

donde  $\rho_T$  y  $\rho_S$  son notaciones para describir las derivadas parciales de  $\rho$  con respecto a su primera y segunda variable respectivamente, y lo mismo para  $\sigma$ ,  $\nu$ . Las expresiones (3.45, 3.46, 3.47) forman un sistema acoplado de tres ecuaciones de primer orden cuasi-lineales en derivadas parciales. Al considerar un proceso de duración 0 (donde  $x(T) = x_0$ ) surgen las siguientes condiciones de borde para  $\rho$ ,  $\sigma$ , y  $\nu$ ,

$$\rho(0, S) = x_0, \quad (3.48)$$

$$\sigma(0, S) = 2S(x_0 - \bar{x}), \quad (3.49)$$

$$\nu(0, S) = g(S). \quad (3.50)$$

donde el valor final del control podría ser obtenido analítica o numéricamente de

$$g(S) \triangleq \arg \min_{\nu} H(x_0, 2S(x_0 - \bar{x}), \nu). \quad (3.51)$$

(Note que el valor de  $x_0$  esta fijo, por lo que  $g$  es simplemente función de  $S$ , y está bien definido acorde a las hipótesis impuestas en la formulación del problema). Finalmente, una vez que el sistema PDE es resuelto, el valor inicial del control  $\mu$  puede ser recuperado para cada par  $(T, S)$  a partir de

$$H(\rho, 2S(\rho - \bar{x}), \nu) = H(x_0, \sigma, \mu). \quad (3.52)$$

A continuación se resume la demostración de las PDEs anteriores (3.45-3.47):

La siguiente notación indica que las tres componentes del flujo, referidas respectivamente al estado (denotado más adelante por  $\phi_1$ ), el coestado (denotado por  $\phi_2$ ), y el control (denotado por  $\phi_3$ ), cada uno de ellos en  $\mathbb{R}$ , serán considerados separadamente

$$\phi(t, x, \lambda, u) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Consecuentemente se tiene que

$$\rho(T, S) = \phi_1(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)), \quad (3.54)$$

$$\lambda^*(T) = 2S(\rho - \bar{x}) = \phi_2(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)), \quad (3.55)$$

$$u^*(T) = \nu = \phi_3(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)), \quad (3.56)$$

donde  $(x^*(\cdot), \lambda^*(\cdot), u^*(\cdot))'$  es el vector de trayectorias óptimas compuesto por el estado, el coestado y el control, correspondiente a un proceso de duración fija  $T$  y un coeficiente de penalización  $S$ .

Tomando las derivadas parciales con respecto a la primera variable en la ecuación (3.54) (la notación  $D_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $D_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $D_3 = \frac{\partial}{\partial \lambda}$ ,  $D_4 = \frac{\partial}{\partial u}$ , debido al orden de aparición en  $\phi(t, x, \lambda, u)$ , es adoptada para evitar confusión con las variables involucradas), y entonces

$$\begin{aligned} D_1 \rho(T, S) &= D_1 \phi_1(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)) + D_3 \phi_1(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)) D_1 \sigma(T, S) + \\ &+ D_4 \phi_1(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)) D_1 \mu(T, S). \end{aligned} \quad (3.57)$$

La existencia del flujo implica que

$$D_1 \phi(t, x, \lambda, u) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\phi(t, x, \lambda, u)) \\ -\mathcal{G}(\phi(t, x, \lambda, u)) \\ \mathcal{Z}(\phi(t, x, \lambda, u)) \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

es decir, se verifican las ODEs originales (3.37, 3.38, 3.42), entonces al evaluarlas en el tiempo final  $T$ ,

$$D_1 \phi_1(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)) = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(T, x_0, \sigma, \mu) = \mathcal{F}(\phi(T, x_0, \sigma(T, S), \mu(T, S)))$$

$$= \mathcal{F}(x(T), \lambda(T), u(T)) = \mathcal{F}(\rho(T, S), 2S(\rho(T, S) - \bar{x}), \nu(T, S)) , \quad (3.59)$$

o, en notación simplificada,

$$\rho_T = F + \phi_{1_\lambda} \sigma_T + \phi_{1_u} \mu_T . \quad (3.60)$$

Ahora, al tomar la derivada de la ecuación (3.54) con respecto a  $S$  se obtiene

$$\rho_S = \phi_{1_\lambda} \sigma_S + \phi_{1_u} \mu_S , \quad (3.61)$$

y repitiendo el procedimiento  $(\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial S})$  con las ecuaciones (3.55-3.56) se llega a

$$2S\rho_T = -G + \phi_{2_\lambda} \sigma_T + \phi_{2_u} \mu_T , \quad (3.62)$$

$$2((\rho - \bar{x}) + S\rho_S) = \phi_{2_\lambda} \sigma_S + \phi_{2_u} \mu_S . \quad (3.63)$$

$$\nu_T = Z + \phi_{3_\lambda} \sigma_T + \phi_{3_u} \mu_T , \quad (3.64)$$

$$\nu_S = \phi_{3_\lambda} \sigma_S + \phi_{3_u} \mu_S . \quad (3.65)$$

La existencia de  $u^0(x, \lambda)$  permite escribir

$$\mu(T, S) = u^0(x_0, \sigma(T, S)) , \quad (3.66)$$

lo cual implica

$$\mu_T = u_\lambda^0 \sigma_T , \quad \mu_S = u_\lambda^0 \sigma_S , \quad (3.67)$$

$$\mu_T \sigma_S = \mu_S \sigma_T , \quad (3.68)$$

$$\nu_T \sigma_S - \nu_S \sigma_T = Z \sigma_S . \quad (3.69)$$

El mismo procedimiento aplicado al par de ecuaciones (3.60, 3.61) y (3.62, 3.63) arroja

$$\rho_T \sigma_S - \rho_S \sigma_T = F \sigma_S , \quad (3.70)$$

$$2S\rho_T \sigma_S - 2((\rho - \bar{x}) + S\rho_S) \sigma_T = -G \sigma_S . \quad (3.71)$$

Ya que se requiere una solución no trivial para las variables incógnitas  $(\sigma_T, \sigma_S)$ , el determinante del sistema lineal relacionado con las incógnitas tiene que ser cero, de lo cual se obtiene la ecuación (3.45) para  $\rho$ . Similarmente, eliminando  $\rho_S$  de las ecuaciones (3.70, 3.45), la PDE para  $\sigma$  es la ecuación (3.46). Finalmente, considerando nuevamente el par de ecuaciones (3.69, 3.71), y replicando el esquema anterior para  $\sigma$ , se logra la PDE para  $\nu$ , específicamente la ecuación (3.47).

Esta metodología permitirá obtener las condiciones de borde faltantes para las HACEs (3.37, 3.38, 3.42) para poder luego integrar dichas HACEs on-line. Sin embargo, este procedimiento necesita de un esfuerzo numérico importante debido a que el sistema de control requiere resolver tres PDEs y realizar un proceso de interpolación para encontrar las raíces de la función  $g(S)$

haciendo uso de la propiedad (3.52). De todas maneras, todo ese aumento de costo computacional será agregado a la parte off-line del problema, es decir, eso se realizará antes de iniciar la integración en línea de las ODEs. Si el problema es soluble según las hipótesis planteadas, entonces las PDEs, la interpolación de  $g(S)$ , y demás cálculos pueden llevarse a cabo utilizando programas de cómputo estándar como Mathematica o Matlab.

### 3.2.4. Cambio óptimo de set-point para el sistema HER.

El estado estable  $(\hat{x}, \hat{u})$ , llamado aquí también como set-point, será el par de valores  $x$  y  $u$  tal que  $f(\hat{x}, \hat{u}) = 0$ . La situación física a ser considerada en esta sección será la de encontrar trayectorias de control que fueren al sistema a evolucionar desde una condición de estado estable

$$\{(x_0, u_0) = (0.3855, -0.05), t \leq 0\} \quad (3.72)$$

hacia otra de estado estable (el set-point),

$$\{(\bar{x}, \bar{u}) = (0.4803, -0.06)\} \quad (3.73)$$

a través de una trayectoria admisible.

Ir de un set-point a otro implica que la variable de estado tiene variaciones significativas dentro de su posible dominio, por lo que es necesario que el sistema de control sea capaz de manejar toda la alinealidad existente en el sistema. Consecuentemente, la dinámica original (3.32) será considerada en conjunto con la función de salida observable

$$J = F(v_V + v_H) \triangleq h(x, u), \quad (3.74)$$

y una “densidad de potencia”  $\mathcal{P}$  definida por

$$\mathcal{P}(t) \triangleq J(t)\eta(t) = h(x(t), u(t))u(t). \quad (3.75)$$

El Lagrangiano en el funcional de costo generalizado  $\mathcal{J}(u)$  queda caracterizado por

$$L = -ku(t)(J(t) - J(0)), \quad (3.76)$$

donde  $J(0) = 2.97 \times 10^{-6}$  voltios.  $L$  describirá al abastecimiento de potencia eléctrica que el sistema 3.32 necesitará para alcanzar al estado deseado. Claramente, la función representada por (3.76) difiere de la típica función cuadrática en  $x$  y  $u$  (vista en secciones anteriores). Dado que el voltaje  $u$  es negativo, el signo menos garantiza que  $L$  sea positiva en la minimización del Hamiltoniano. Entonces, para este caso  $H$  toma la forma

$$H(x, \lambda, u) \triangleq L + \lambda' f = -ku(t)(F(v_V + v_H) - J(0)) + \lambda' f(x, u), \quad (3.77)$$

La presencia de  $k$  es requerida para asegurar que  $H$  sea regular, y trabajará como un factor de escala. El valor de  $k$  fue ajustado en 6500, según se puede apreciar en la Figura 3.9, la cual

muestra el comportamiento del Hamiltoniano para distintos valores de  $k$ . También se observa que para  $k \gtrsim 2500$ ,  $H(x_0, \lambda_0, \cdot)$  se torna una función convexa de  $u$ .

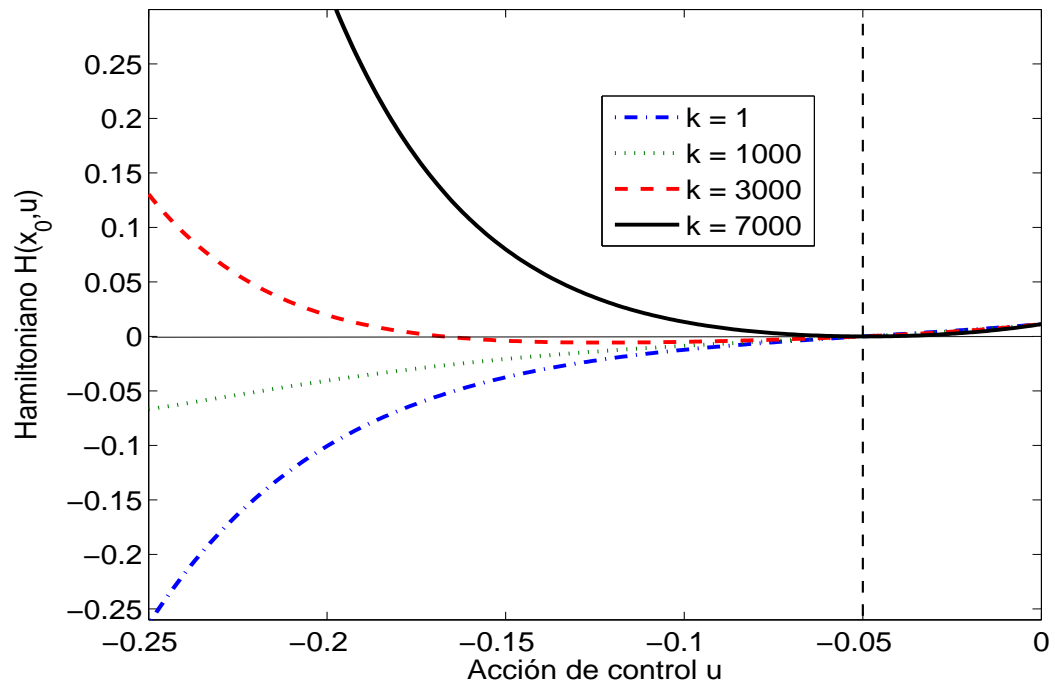


Figura 3.9: Influencia del factor de escala  $k$  sobre el Hamiltonian del sistema.  $S = 0.5$ ,  $x = x_0$ .



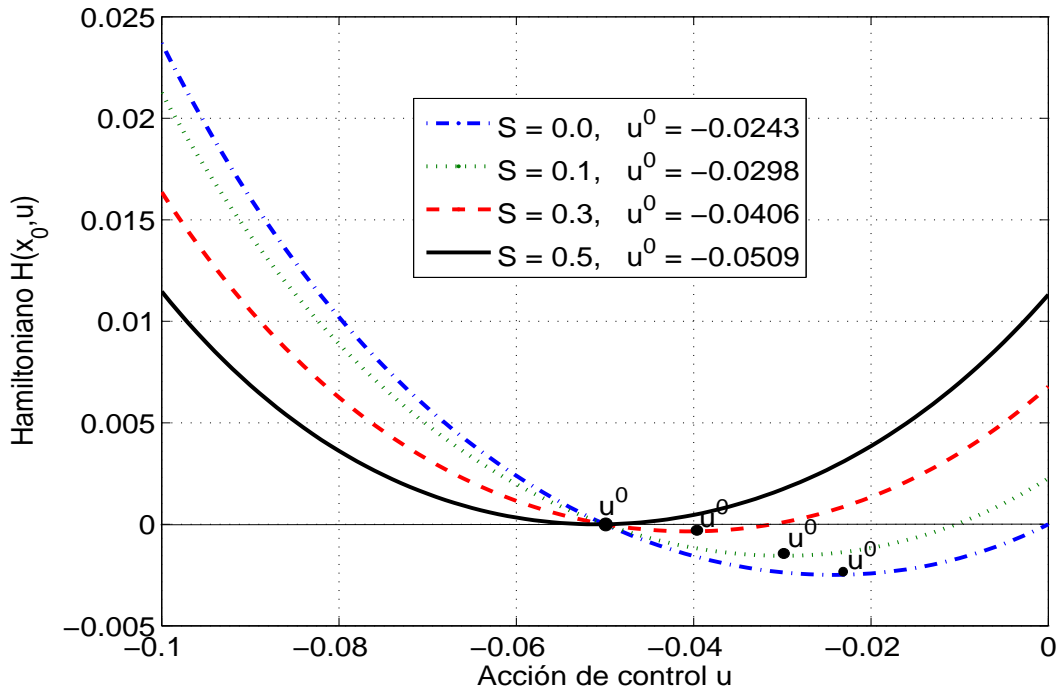


Figura 3.10: Condición de borde  $g(S)$ : proceso de duración cero  $T = 0$ .

Las PDEs para recuperar las condiciones de borde faltantes en el problema de cambio óptimo de set-point del sistema HER están dadas por las ecuaciones (3.45), (3.46) y (3.47). Con el fin de resolverlas, es necesario encontrar el valor faltante en (3.50), denotado por  $g(S)$ , el cual representa la condición inicial para un proceso de duración cero. El funcionamiento del sistema HER impone una restricción sobre el conjunto de controles admisibles  $u$ , es decir  $u(T, S) \geq u_0$ , de otra manera el sistema generaría potencia eléctrica en lugar de gastarla, entonces los únicos valores de control aceptables son  $\nu(0, S) < -0.05$ . La Figura 3.10 muestra que a partir de  $S = 0.5$ , los valores de  $g(S)$  son compatibles con la restricción física. Por lo que el rango en las simulaciones para  $S$  fue de  $0.5 \leq S \leq 5$ .

En la Figura 3.11 se ilustra la dependencia de la función  $g(S)$  sobre el factor de escala  $k$ . Los valores del coeficiente de penalización admisibles  $S$  para cada  $k$  serán aquellos valores que correspondan a valores de  $u$  más pequeños que  $-0.05$ , es decir,  $g(S) \leq -0.05$ . Sólo  $S$  más grandes que esos valores en las intersecciones de  $g(S) = -0.05$  serán admisibles.

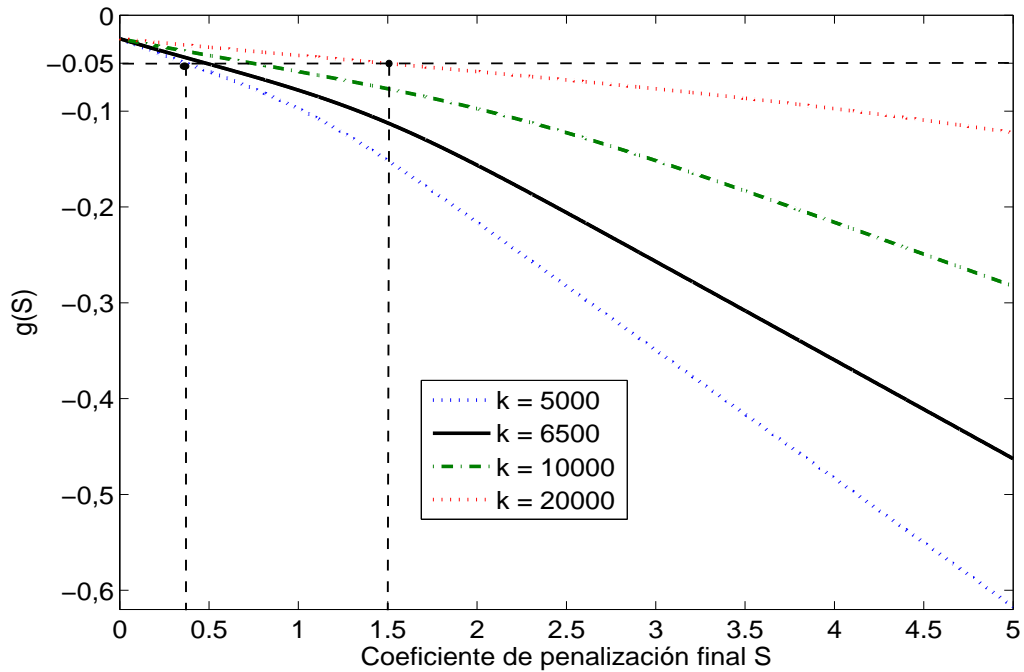


Figura 3.11: Dependencia de  $g(S)$  sobre  $k$ . Valores admisibles para  $S$ .

Una vez hallada  $g(S)$ , es posible integrar las PDEs. Las Figuras 3.12, 3.13 y 3.14 muestran las soluciones para  $\rho$ ,  $\sigma$  y  $\nu$  en un rango de valores de  $(T, S)$ . Se puede observar que en el rango de horizontes  $T \in [0, 1]$ , para penalizaciones pequeñas, los estados finales alcanzables están lejos de su referencia, es más, para valores aún más pequeños de  $S$ ,  $\rho$  casi no se desplaza de su condición inicial  $x_0 = 0.3855$  a pesar de que la referencia es mayor ( $\bar{x} = 0.4803$ ). Esto muestra la utilidad de tener una familia de soluciones para el espacio  $(T, S)$ .

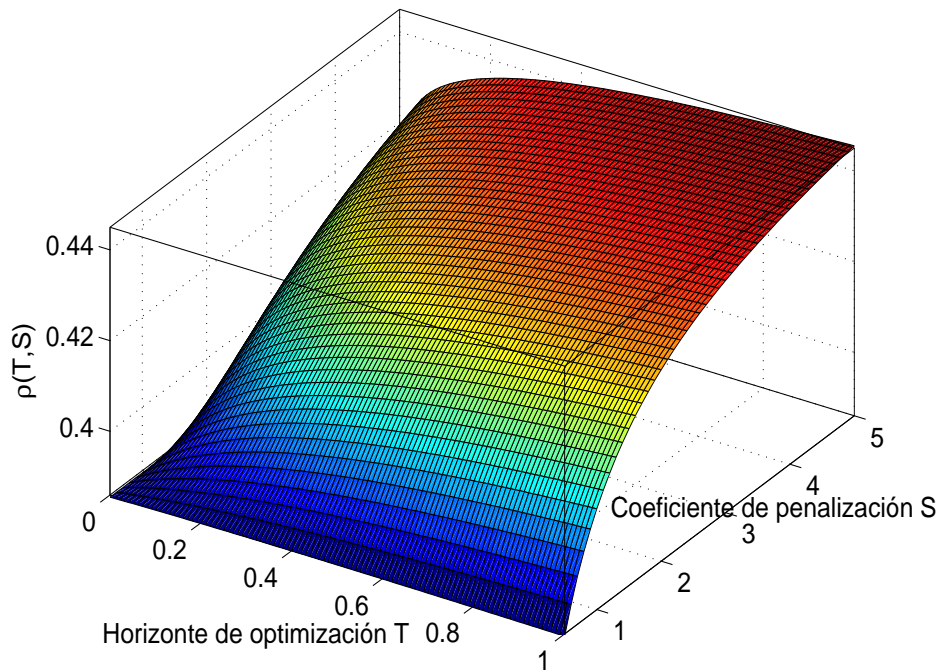


Figura 3.12:  $\rho(T, S)$ . Solución de las PDEs para el estado final.

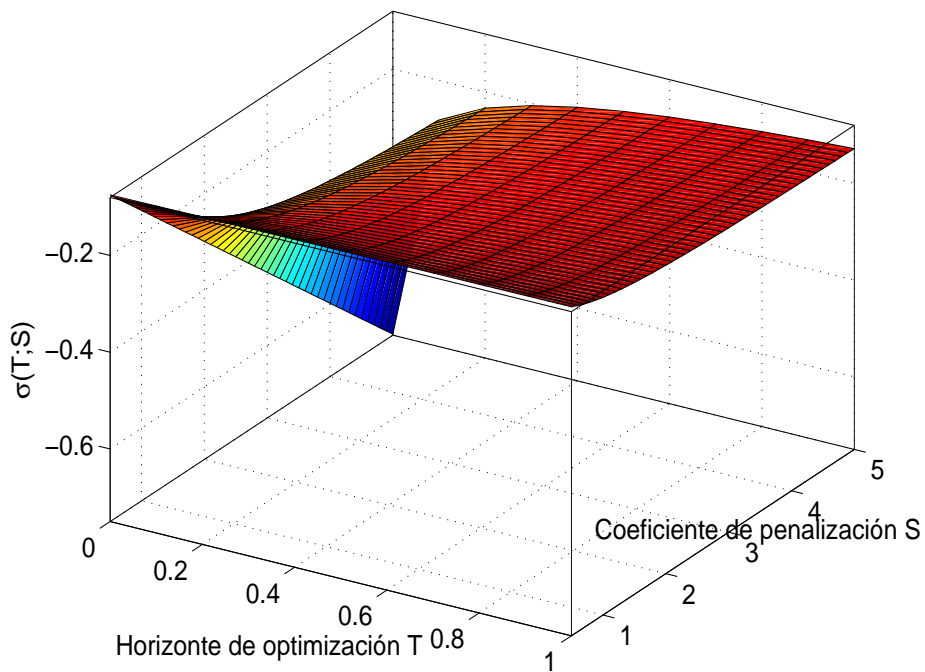


Figura 3.13:  $\sigma(T, S)$ . Solución de las PDEs para el coestado inicial.

También se debe resaltar que tales soluciones no muestran la evolución temporal del estado, el coestado y la acción de control, únicamente sus valores de borde para un proceso de duración  $T$  y penalización  $S$ . Para obtener la evolución desde la condición inicial del proceso HER dada por (3.72) hacia su estado deseado (3.73), se debe elegir un par  $(T, S)$  e integrar las HACEs. La elección de éstos parámetros por lo general está sujeta a criterios económicos y de desempeño. En la simulación de esta aplicación se eligió  $(T, S) = (5, 10)$ , aunque sólo para mostrar que el cambio de set-point bajo las condiciones establecidas por el sistema HER es posible mediante el uso de las herramientas aquí desarrolladas. Para el par  $(T, S) = (5, 10)$  elegido, las condiciones de borde faltantes extraídas de la solución de las PDEs son

$$\rho(5, 10) = 0.4801, \quad (3.78)$$

$$\sigma(5, 10) = -0.0723, \quad (3.79)$$

$$\nu(5, 10) = g(10) = -0.0699 \approx -0.07. \quad (3.80)$$

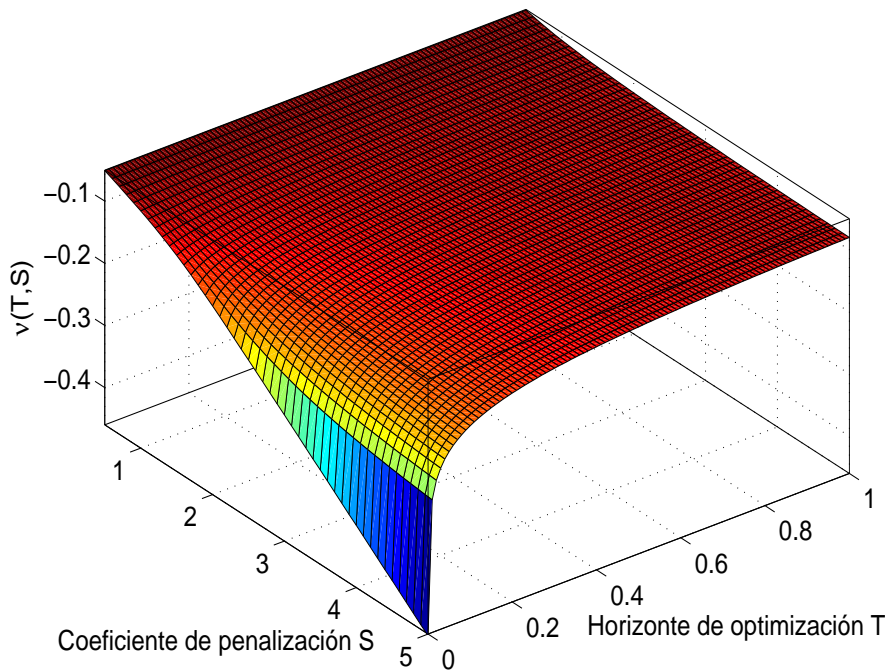


Figura 3.14:  $\nu(T, S)$ . Solución de las PDEs para la acción de control final.

Sin embargo, la integración de la ecuación (3.42) no puede ser iniciada a menos que se consiga la condición inicial para la ecuación diferencial del control. De las PDEs solamente se logró el valor final  $\nu(5, 10) \triangleq u^*(5)$ , así que en este punto se debe utilizar la constancia del Hamiltoniano  $H^0$ . Entonces, evaluando el valor final de  $H^0$  e igualándolo con su valor inicial,

se encuentra una relación algebraica que nos permite recuperar la acción de control inicial  $\mu$  para el par  $(T, S)$ ,

$$H(\rho, 2S(\rho - \bar{x}), \nu) = 1.062117 \times 10^{-6} = H(x_0, \sigma, \mu) \implies \mu(5, 10) = -0.050047,$$

con  $\rho(5, 10)$  sacado de la solución de las PDEs (3.45, 3.46, 3.47). Nótese que  $x_0$  y  $\sigma$  están fijos, por lo tanto  $H(x_0, \sigma, \mu)$  es sólo función de  $\mu(T, S)$ . La Figura 3.15 muestra la evolución temporal de las ecuaciones Hamiltonianas para las condiciones iniciales encontradas. El eje izquierdo representa al estado  $x(t)$ , mientras que el eje derecho muestra al coestado  $\lambda(t)$  y a la acción de control  $u(t)$  simultáneamente. La trayectoria de estado se aproxima a la referencia manteniendo un aumento en la velocidad (cualitativamente diferente al comportamiento de estado para un sistema estable clásico, donde el estado va asintóticamente a la referencia disminuyendo su velocidad). Correspondientemente, la variable manipulada o control óptimo incrementa su valor e inclusive sobrepasa su valor de equilibrio  $\bar{u} = -0.06$ . En situaciones prácticas, una vez el sistema llegue al final del horizonte de optimización, se debería aplicar el control de equilibrio  $\bar{u} = -0.06$  a fin de mantener la salida del proceso en su estado estable, a menos que otro objetivo sea impuesto al final de ese horizonte, es decir, para  $t > T$ .

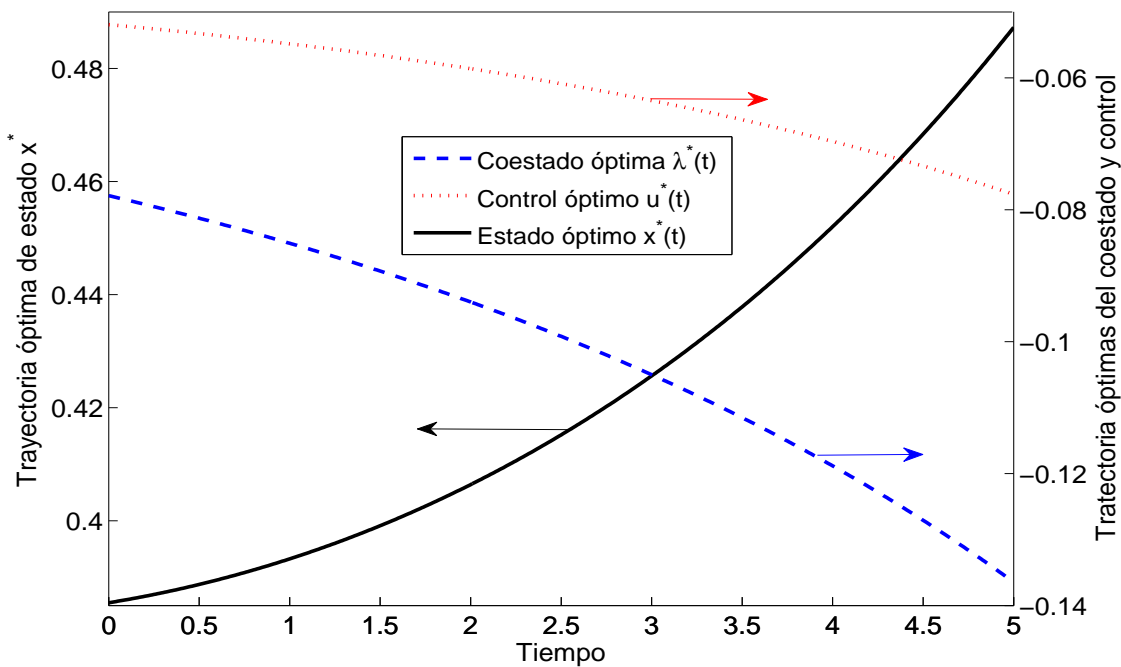


Figura 3.15: Solución de las HACEs  $(x, \lambda)$ .

En las figuras 3.16 y 3.17 puede observarse el efecto de variar el coeficiente de penalización  $S$ , manteniendo fijo el horizonte en  $T = 0.1$ . Para  $S = 1$  el sistema raramente se mueve de su estado inicial y para  $S = 40$  el sistema llega muy cerca de su referencia.

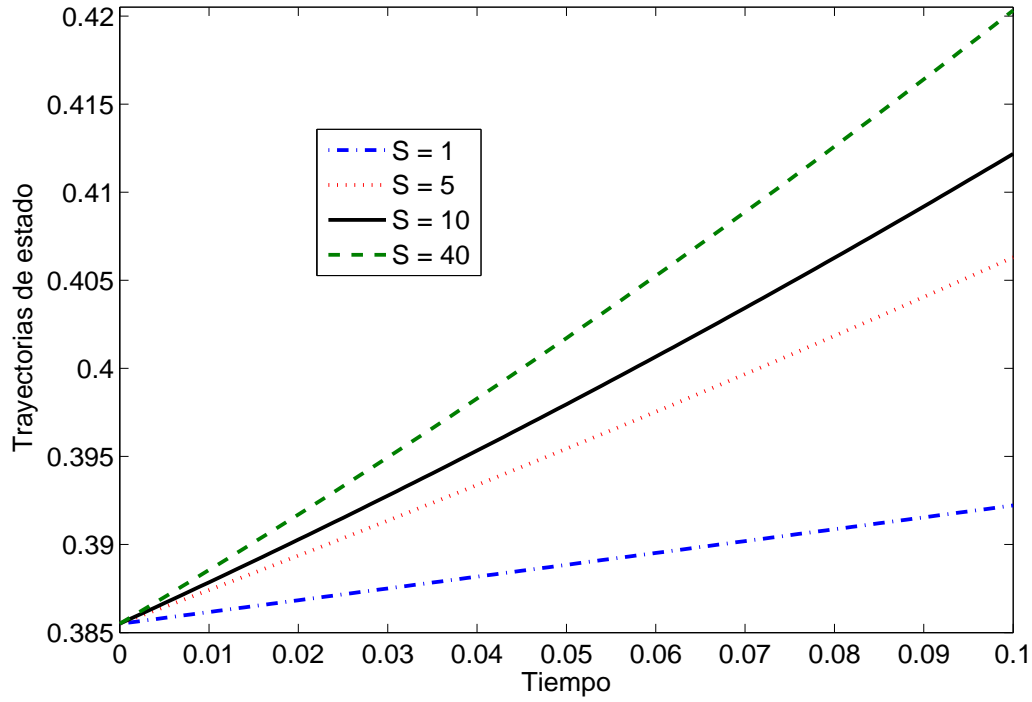


Figura 3.16: Influencia de la penalización final  $S$  sobre las trayectorias de estado óptimo.

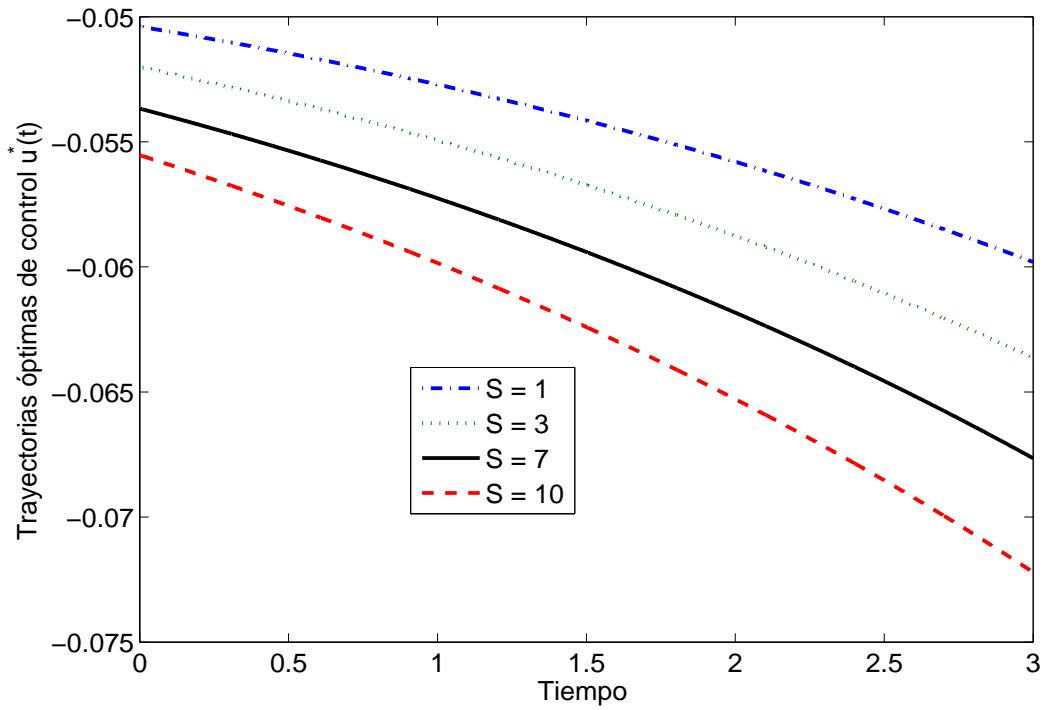


Figura 3.17: Influencia de la penalización final  $S$  sobre las trayectorias de control óptimo.

A continuación se presenta un algoritmo de resolución del problema aplicable a un sistema no lineal unidimensional con ley de control óptima implícita:

- Se plantean las HACEs mediante las ecuaciones (3.37, 3.38, 3.42). Y se adecúan las funciones  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{Z}$  en términos de  $(x, \lambda, u)$
- De  $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{Z})$  se construye las expresiones de  $(F, G, Z)$  (3.44), las que se introducen en las PDEs para  $(\rho, \sigma, \nu)$  (3.45-3.47).
- Se encuentra (analíticamente o numéricamente) la función  $g(S)$  (3.51), la cual completa las condiciones de borde de las PDEs (3.48-3.50).
- Se resuelve las PDEs para un rango de valores de  $(T, S)$ .
- Se obtiene el valor inicial del control  $\mu(T, S)$  utilizando la propiedad de constancia del Hamiltoniano (3.52).
- Se selecciona el par apropiado de  $(T, S)$  y se inicia el control del proceso en paralelo con la integración de las ecuaciones (3.37, 3.38, 3.42) con condiciones:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \lambda(0) &= \sigma(T, S), \\ u(0) &= \mu(T, S). \end{aligned}$$

### 3.3. Ecuaciones PDEs variacionales para sistemas no lineales multidimensionales.

Hasta el momento se ha fundamentado el uso y ampliación de las PDEs para hallar las condiciones  $(x(T), \lambda(0))$  en sistemas unidimensionales, que para el caso no lineal se trata por primera vez en la literatura en [32, 33, 43, 39]. Este método es una alternativa promisoría diferente a los ya conocidos métodos de programación no lineal [56], los de shooting, entre otros, que son soluciones clásicas para ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta sección se extenderá las PDEs descritas en las secciones anteriores para que abarquen a los sistemas multidimensionales: se substanciarán las respectivas PDEs, se mostrará su utilidad y se las probará mediante varios sistemas ficticios, tanto lineales como no lineales.

Recordando la notación introducida en la Subsección 2.3 y asumiendo que el campo vectorial Hamiltoniano es de clase  $C^1$ , se garantiza la existencia de un flujo Hamiltoniano también  $C^1$ , cuyas componentes (como en los casos anteriores) se considerarán por separado, es decir,  $\phi_1, \phi_2$  denotarán al flujo sobre los subespacios del estado y coestado, respectivamente. De esa manera,

para sistemas de control de dimensión  $n$ , la primera componente de la ecuación (2.23) se escribe como

$$\begin{aligned} D_1\phi_1(T, x_0, \sigma(T, S)) &= \mathcal{F}(\phi(T, x_0, \sigma(T, S))) \\ &= \mathcal{F}((x^*(T), \lambda^*(T))') \\ &= \mathcal{F}((\rho(T, S), 2S\rho(T, S))') \triangleq F(\rho, S), \end{aligned} \quad (3.81)$$

Similarmente de la segunda componente de la ecuación (2.23) obtenemos

$$-D_1\phi_2(T, x_0, \sigma(T, S)) = \mathcal{G}((\rho(T, S), 2S\rho(T, S))') \triangleq G(\rho, S). \quad (3.82)$$

La función de avance asociada con el flujo Hamiltoniano es  $\phi^T(x, \lambda) \triangleq \phi(t, x, \lambda)$ , lo cual permite definir a  $V$  como la derivada de la función de avance en el espacio de fases del sistema Hamiltoniano,

$$V \triangleq D\phi^T(x_0, \sigma) = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\phi_1^T & D_2\phi_1^T \\ D_1\phi_2^T & D_2\phi_2^T \end{pmatrix} (x_0, \sigma) = \begin{pmatrix} \phi_{1_x}^T & \phi_{1_\lambda}^T \\ \phi_{2_x}^T & \phi_{2_\lambda}^T \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

donde  $\phi_{1_x}^T \triangleq \frac{\partial \phi_1^T}{\partial x}$  y similarmente para  $\phi_{2_x}^T, \phi_{1_\lambda}^T, \phi_{2_\lambda}^T$ . La existencia y unicidad de las soluciones implican que la inversa de  $V$  existe y verifica

$$U \triangleq V^{-1} = D\phi^{-T}(\rho, 2S\rho). \quad (3.84)$$

Se sabe que el campo vectorial Hamiltoniano tiene su flujo  $\phi$ , el cual verifica propiedades de espacios simplécticos (ver [68], p. 378 y [72], p. 220)

$$V_1'V_4 - V_3'V_2 = I = V_4'V_1 - V_2'V_3, \quad (3.85)$$

$$V_1'V_3 - V_3'V_1 = 0 = V_2'V_4 - V_4'V_2, \quad (3.86)$$

donde la siguiente notación fue adoptada para las submatrices  $n \times n$ :  $V_i' \triangleq (V_i)'$ , resultantes del particionamiento de la matriz  $V$  de  $2n \times 2n$ .

La inversa de  $V$  puede ser calculada en términos de las submatrices  $V_i$  de  $V$ , utilizando las ecuaciones (3.85, 3.86),

$$V^{-1} = U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_4' & -V_2' \\ -V_3' & V_1' \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Derivando la ecuación (2.42), para sistemas de dimensión  $n$ , con respecto a  $T$  se obtiene

$$D_1\rho(T, S) = D_1\phi_1(T, x_0, \sigma(T, S)) + D_3\phi_1(T, x_0, \sigma(T, S))D_1\sigma(T, S), \quad (3.88)$$

donde la escribimos (con  $\phi_{1_\lambda}^T = \frac{\partial \phi_1^T}{\partial \lambda} = D_3\phi_1 = D_2\phi_1^T$ ) simplemente como

$$\rho_T(T, S) = F(\rho, S) + V_2\sigma_T(T, S). \quad (3.89)$$



De la misma manera, derivando la ecuación (2.44), para sistemas de dimensión  $n$ , con respecto a  $T$  se obtiene

$$2S\rho_T(T, S) = -G(\rho, S) + V_4\sigma_T(T, S). \quad (3.90)$$

Ahora, usando las propiedades simplécticas del campo vectorial Hamiltoniano, las ecuaciones (3.89, 3.90) se convierten en

$$V_4'(\rho_T - F) = V_4'V_2\sigma_T = V_2'V_4\sigma_T = V_2'(2S\rho_T + G). \quad (3.91)$$

De ahora en adelante, la matriz  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  será de la forma  $diag(s, \dots, s) = sI$ , donde  $s$  es un número real no negativo. Repitiendo el procedimiento para las derivadas con respecto a  $s$  de las ecuaciones (2.42, 2.44) se obtiene

$$\rho_s(T, s) = \phi_{1\lambda}^T \sigma_s(T, s) = V_2 \sigma_s(T, s), \quad (3.92)$$

$$2(\rho(T, s) + s\rho_s(T, s)) = \phi_{2\lambda}^T \sigma_s(T, s) = V_4 \sigma_s(T, s), \quad (3.93)$$

de las cuales, aplicando nuevamente las propiedades simplécticas del flujo Hamiltoniano, se llega a la siguiente igualdad

$$V_4'\rho_s = V_4'V_2\sigma_s = V_2'V_4\sigma_s = V_2'(2\rho + 2s\rho_s). \quad (3.94)$$

Ahora, usando el hecho de que  $V' = \begin{pmatrix} V_1' & V_3' \\ V_2' & V_4' \end{pmatrix}$  y las ecuaciones (3.91, 3.94), se logran las siguientes expresiones

$$V' \begin{pmatrix} 2s\rho_T + G & 2\rho + 2s\rho_s \\ F - \rho_T & -\rho_s \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{V_1'(2s\rho_T + G) + V_3'(F - \rho_T)}{0} & \frac{V_1'(2\rho + 2s\rho_s) - V_3'\rho_s}{0} \\ \hline & \end{array} \right), \quad (3.95)$$

que al combinarlas con las ecuaciones (3.89, 3.90) y (3.92, 3.93), es posible mostrar que el lado izquierdo es igual a

$$\dots = \left( \begin{array}{c|c} \frac{V_1'V_4\sigma_T - V_3'V_2\sigma_T}{0} & \frac{V_1'V_4\sigma_s - V_3'V_2\sigma_s}{0} \\ \hline & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_T & \sigma_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.96)$$

lo cual significa que existen sólo dos PDEs vectoriales de primer orden para  $\rho$  y  $\sigma$ ,

$$V_1'(2s\rho_T + G) + V_3'(F - \rho_T) = \sigma_T, \quad (3.97)$$

$$V_1'(2\rho + 2s\rho_s) - V_3'\rho_s = \sigma_s. \quad (3.98)$$

Nótese que sólo  $V_1$  y  $V_3$  están involucradas. Sin embargo, se podrían obtener PDEs equivalentes que contengan únicamente a  $V_2$  y  $V_4$ . En el caso unidimensional (subsección 2.3) se mostró que las ecuaciones correspondientes estaban desacopladas, lo que no resulta igual en este caso multidimensional. Esto sugiere que para  $n > 1$  se necesita un tratamiento más cuidadoso, el cual

se mostrará en las siguientes subsecciones. Las ecuaciones (3.97-3.98) son las anunciadas PDEs para sistemas multidimensionales, aunque para completar su descripción falta explicar cómo obtener las componentes  $V_i$  de la derivada de la función de avance con respecto a sus variables espaciales  $(x, \lambda)$  en función de  $(T, s)$ .

### La ecuación variacional del flujo Hamiltoniano.

Resulta conveniente denotar  $v \triangleq \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ . De tal forma la ecuación (2.23) puede ser escrita como

$$D_1\phi(t, v) = \mathcal{X}(\phi(t, v)) , \quad (3.99)$$

y derivando ambos lados con respecto a  $v$ , (i.e.  $D_2 = \frac{\partial}{\partial v}$ ), luego intercambiando el orden de la derivación (ya que se supuso un flujo suave), se obtiene la “ecuación variacional” para sistemas Hamiltonianos (ver [63], p. 299),

$$D_1[D_2\phi(t, v)] = D\mathcal{X}(\phi(t, v)) \cdot D_2\phi(t, v) , \quad (3.100)$$

abusando un poco de la notación, para un  $v \in \mathcal{O}_x \times \mathcal{O}_\lambda$  fijo

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}(t) = \mathcal{A}(t)\tilde{V}(t) , \quad (3.101)$$

con la condición inicial

$$\tilde{V}(0) = I , \quad (3.102)$$

donde  $\tilde{V}(t) \triangleq D\phi^t$  (el símbolo  $V$  está reservado para  $\tilde{V}(T)$ ),  $\mathcal{A}(t) \triangleq D\mathcal{X} \circ \phi^t$ . Esto significa que  $\tilde{V}(T) = V = \Phi(T, 0)$  (la solución fundamental de (3.101)), la cual verifica (ver [106], p. 488)

$$\frac{\partial\Phi(T, 0)}{\partial T} = \mathcal{A}(T)\Phi(T, 0) , \quad (3.103)$$

es decir, la siguiente identidad es establecida (ver ecuación (3.83))

$$V_T \triangleq \frac{\partial V}{\partial T}(T, x_0, \sigma) = D\mathcal{X}(\rho, 2s\rho) \cdot V(T, x_0, \sigma) , \quad (3.104)$$

y viendo que en general  $\mathcal{A}$  depende de  $T$  y  $s$ , se tiene que

$$V_T = \mathcal{A}(T, s)V , \quad V(0, s) = I. \quad (3.105)$$

Nótese que la PDE (3.105) junto a las PDEs (3.97, 3.98), llamadas “PDEs variacionales”, son suficientes para encontrar las soluciones de  $\rho$  y  $\sigma$ . Con respecto a la existencia y unicidad de las soluciones de este sistema de ecuaciones sólo se cuenta con resultados locales (ver [52], p. 51). La integración de ecuaciones matriciales en derivadas parciales es un campo que está todavía en desarrollo (véase por ejemplo, [114]).

### 3.3.1. Aplicaciones a sistemas lineales invariantes.

En especial, el problema de regulación con horizonte finito y coeficientes constantes, a pesar de conducir a una situación de condiciones de contorno en su formulación Hamiltoniana, admitía hasta ahora al menos dos métodos de ataque: (i) a través de la ecuación diferencial de Riccati (DRE, [106], Capítulo 2), y (ii) usando una formulación matricial aumentada para transformar la situación en otra de condiciones iniciales ([106], pp. 369-371). Estos métodos llevan a un control del tipo feedback, lineal en el estado, y con una ganancia variable en el tiempo.

En esta subsección se aplicarán las ideas de “invariant imbedding” desarrolladas anteriormente para el control óptimo de toda una familia de problemas LQR, sin aumentar el esfuerzo requerido por los métodos clásicos para resolver cada caso particular. Dicha familia incluye a todos los problemas LQR planteados sobre un sistema lineal con un Lagrangiano fijo, pero con un horizonte y un coeficiente de penalización final cuadrática variables. La solución permite encontrar no sólo el feedback óptimo sino también el estado final alcanzable y el costo total involucrado para todos los problemas de la familia.

En la subsección 2.2 se describió las HCEs para el caso lineal como un problema con condiciones de contorno mediante un sistema lineal matricial  $\dot{\Psi}(t) = \mathbf{H}\Psi$  con la matriz Hamiltoniana

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{2}W \\ -2Q & -A' \end{pmatrix}, \quad (3.106)$$

y cuya solución se puede obtener particionada en dos submatrices de  $n \times n$  ( $X(t), \Lambda(t), t \in [0, T]$ ),

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{\Lambda} \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} X \\ \Lambda \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} X(T) \\ \Lambda(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 2S \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

La solución de este problema lineal aumentado (3.107) es única, por lo que tiene que verificar

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ \Lambda(0) \end{pmatrix} = e^{-\mathbf{H}T} \begin{pmatrix} I \\ 2S \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

y dado que la ecuación (2.39) verifica la misma ecuación diferencial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

las condiciones de borde faltantes pueden ser encontradas explícitamente,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda(0) \end{pmatrix} = e^{-\mathbf{H}T} \begin{pmatrix} x(T) \\ 2Sx(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0) \\ \Lambda(0) \end{pmatrix} x(T), \quad (3.110)$$

$$x(T) = X^{-1}(0)x_0, \quad (3.111)$$

$$\lambda(0) = \Lambda(0)X^{-1}(0)x_0, \quad (3.112)$$

donde se utiliza el hecho [106] de que  $X$  es invertible. Note que la  $P(t)$  solución de la DRE podría ser recuperada de la solución de (3.107), concretamente

$$P(t) = \Lambda(t)X^{-1}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.113)$$

A continuación se aplicará un desarrollado parecido al de las PDEs para esta familia de problemas LQR definida por las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ ,  $R$ , y  $x_0$ . Para este caso lineal e invariante en el tiempo el campo vectorial Hamiltoniano satisface  $\mathcal{X}(v) = \mathbf{H}v$ , cuyo flujo verifica

$$\phi^T(v) = e^{\mathbf{H}T}v, \quad (3.114)$$

y consecuentemente

$$V = D\phi^T = \phi^T = e^{\mathbf{H}T}, \quad (3.115)$$

$$U = V^{-1} = e^{-\mathbf{H}T}. \quad (3.116)$$

Mediante las definiciones  $\rho(T, S) \triangleq x^{T, S}(T)$  y  $\sigma(T, S) \triangleq \lambda^{T, S}(0)$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} \alpha(T, S) \\ \beta(T, S) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} X^{T, S}(0) \\ \Lambda^{T, S}(0) \end{pmatrix}, \quad (3.117)$$

donde el superíndice  $(T, S)$  se refiere a un problema individual con horizonte  $T$  y matriz de penalización final  $S$  fijos. La ecuación (3.108) puede ser reescrita de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha(T, S) \\ \beta(T, S) \end{pmatrix} = U(T) \begin{pmatrix} I \\ 2S \end{pmatrix}. \quad (3.118)$$

Ya que el sistema Hamiltoniano subyacente es lineal, su solución depende suavemente de los parámetros y condiciones iniciales, por lo que la derivada parcial de la ecuación (3.118) con respecto a  $T$  resulta

$$\begin{pmatrix} \alpha_T \\ \beta_T \end{pmatrix} = -U\mathbf{H} \begin{pmatrix} I \\ 2S \end{pmatrix}, \quad (3.119)$$

donde las variables independientes  $(T, S)$  han sido eliminadas de la notación por sencillez en el uso de estas ecuaciones.

**El caso escalar** ( $S = sI$ ).

Para el caso  $S = sI$ ,  $s \in \mathbb{R}_0^+$  se puede calcular las derivadas parciales con respecto a  $s$  de la ecuación (3.118)

$$\begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 0 \\ 2I \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

Ahora bien, particionando  $U$  en submatrices  $U_i, i = 1, \dots, 4$  de  $n \times n$ , de la forma

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}, \quad (3.121)$$

a partir de las últimas ecuaciones resulta:

$$\frac{1}{2}\alpha_s = U_2, \quad \frac{1}{2}\beta_s = U_4, \quad (3.122)$$

y combinando esto con la ecuación (3.118) se tiene

$$U_1 = \alpha - \alpha_s S, \quad U_3 = \beta - \beta_s S. \quad (3.123)$$

al insertar las relaciones anteriores en la ecuación (3.119), se obtienen las PDEs principales para el sistema lineal

$$\alpha_T - \alpha_s M = -\alpha N, \quad (3.124)$$

$$\beta_T - \beta_s = -\beta N, \quad (3.125)$$

donde los coeficientes matriciales ( $M, N$ ) son:

$$M \triangleq A'S + SA + Q - SWS, \quad (3.126)$$

$$N \triangleq A - WS. \quad (3.127)$$

con condiciones de contorno,

$$\alpha(0, s) = I, \quad \beta(0, s) = 2S. \quad (3.128)$$

Las PDEs (3.124-3.125) son de primer orden, cuasi-lineales, con coeficientes dependientes sólo de  $S$  y condiciones sobre una línea (en general, sobre un hiperplano de dimensión apropiada) para  $T = 0$ . La existencia y unicidad de su solución está garantizada (ver [52]) en las condiciones en que existe y es única la solución definida positiva de la ecuación diferencial de Riccati, lo cual es independiente de  $T, S$ , con la ventaja de que se evita resolver la DRE para cada problema  $(T, S)$  y guardar en memoria las matrices  $P(t), t \in [0, T]$  para cada caso.

Es importante también comprobar que, a partir de estas matrices auxiliares  $\alpha, \beta$  y de su significado en la formulación Hamiltoniana,  $\rho, \sigma$  pueden recuperarse inmediatamente, para cada par  $(T, S)$  (es decir, considerando ahora un proceso fijo de horizonte  $T$  con matriz de costo final  $S$ ), mediante las relaciones

$$\rho = \alpha^{-1}x_0, \quad \sigma = \beta\alpha^{-1}x_0 = \beta\rho. \quad (3.129)$$

### Extensión a una $S$ diagonal.

A partir del caso escalar se puede pasar ahora al caso  $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ . Las matrices auxiliares serán consideradas en esta parte como funciones de  $n + 1$  variables,

$$\begin{pmatrix} \alpha(T, s_1, s_2, \dots, s_n) \\ \beta(T, s_1, s_2, \dots, s_n) \end{pmatrix} = U(T) \begin{pmatrix} I \\ 2\text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) \end{pmatrix}, \quad (3.130)$$

y entonces puede verificarse que las derivadas con respecto a  $T$  permanecen formalmente iguales al caso anterior, mientras que con respecto a las  $s_i$ ,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{s_i} \\ \beta_{s_i} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial s_i}(T, s_1, s_2, \dots, s_n) \\ \frac{\partial \beta}{\partial s_i}(T, s_1, s_2, \dots, s_n) \end{pmatrix} = U(T) \begin{pmatrix} 0_n \\ 2I_n^i \end{pmatrix}, \quad (3.131)$$

donde  $I_n^i \triangleq \text{diag}(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ , con el 1 en la posición  $i$ -ésima. Es conveniente aquí introducir la notación

$$\alpha_S \triangleq \sum_{i=1}^n \alpha_{s_i}, \quad \beta_S \triangleq \sum_{i=1}^n \beta_{s_i}, \quad (3.132)$$

y verificar que se cumple, para este caso “diagonal”,

$$\begin{pmatrix} \alpha_S \\ \beta_S \end{pmatrix} = U(T) \begin{pmatrix} 0_n \\ 2I_n \end{pmatrix}. \quad (3.133)$$

Por lo tanto, las modificaciones necesarias con respecto al caso escalar son simples de expresar, concretamente:

$$\frac{1}{2}\alpha_S = U_2, \quad \frac{1}{2}\beta_S = U_4, \quad (3.134)$$

que combinado con la ecuación (3.118) da

$$U_1 = \alpha - \alpha_S S, \quad U_3 = \beta - \beta_S S, \quad (3.135)$$

Finalmente, las PDEs resultantes son:

$$\begin{pmatrix} \alpha_T \\ \beta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_S M - \alpha N \\ \beta_S M - \beta N \end{pmatrix}. \quad (3.136)$$

El significado de los coeficientes  $M$ ,  $N$  permanece inalterable, tanto como las condiciones de contorno. Debe notarse que las PDEs se conservan en número, pero ahora las soluciones, como funciones de  $n+1$  variables, son más complejas de guardar en memoria y eventualmente graficar.

### Extensión a una $S$ general.

Para extender la aplicabilidad de estos resultados a matrices “generales  $S$ ” (dentro del contexto LQR, semidefinida positivas y simétricas), se utiliza la posibilidad de diagonalizarlas via matrices ortogonales (ver [62], pág. 349), es decir, para una tal  $S$  existe una matriz ortogonal  $E$  que provoca un “cambio de coordenadas”

$$\tilde{S} \triangleq ESE' = \text{diag}(s_1, \dots, s_n), \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

donde los  $s_i$  son los autovalores (reales, no negativos) de  $S$ . Ahora bien, definiendo

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(T, S) \\ \tilde{\beta}(T, S) \end{pmatrix} \triangleq U \begin{pmatrix} I_n \\ 2\tilde{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 + 2U_2\tilde{S} \\ U_3 + 2U_4\tilde{S} \end{pmatrix}, \quad (3.137)$$

podemos aplicar a  $(\alpha, \beta)$ , los resultados de la subsección anterior, con lo que resulta

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\tilde{S}} \\ \tilde{\beta}_{\tilde{S}} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 0 \\ 2I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U_2 \\ 2U_4 \end{pmatrix}, \quad (3.138)$$

Por otra parte, utilizando la definición general (3.118) de las matrices intermedias  $(\alpha, \beta)$ ,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} I \\ 2S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 + 2U_2S \\ U_3 + 2U_4S \end{pmatrix}, \quad (3.139)$$

con lo que se arriba a las fórmulas de extensión:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} - 2U_2\tilde{S} + 2U_2S \\ \tilde{\beta} - 2U_4\tilde{S} + 2U_4S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} + 2U_2(S - \tilde{S}) \\ \tilde{\beta} + 2U_4(S - \tilde{S}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_{\tilde{S}}(S - \tilde{S}) \\ \tilde{\beta} + \tilde{\beta}_{\tilde{S}}(S - \tilde{S}) \end{pmatrix}, \quad (3.140)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1}x_0 \\ \beta\alpha^{-1}x_0 \end{pmatrix}. \quad (3.141)$$

Todo lo anterior implica que, para tratar el caso de  $S$  general el procedimiento a seguir sería:

1. Resolver las PDEs para el caso diagonal (ecuación 3.136), cubriendo con los  $s_i$  el rango de autovalores que se desea abarcar en el caso general
2. Dada una  $S$  en particular, diagonalizarla via la matriz ortogonal  $E$  (alcanza con calcular sus autovalores), y obtener  $\tilde{S}$ .
3. Rescatar del paso (i) los valores  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha}_{\tilde{S}}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\beta}_{\tilde{S}}$  correspondientes a  $\tilde{S}$ ,
4. Calcular  $\alpha, \beta$  usando las fórmulas de extensión (3.140), y calcular  $\rho, \sigma$  usando las fórmulas generales (3.141).

### Relaciones entre las PDEs, las ecuaciones de Riccati y el feedback lineal de estados.

Como se ha visto en las subsecciones anteriores las soluciones  $\alpha(T, S)$ ,  $\beta(T, S)$  permiten obtener las condiciones de contorno desconocidas de las HCEs (2.37), y también evaluar el costo óptimo marginal  $\sigma(T, S)$  de cada proceso individual. En particular, el cálculo de  $\sigma(T, S)$  permite evaluar “on-line” las ecuaciones Hamiltonianas como un problema de condiciones iniciales, es decir, con el vector inicial  $(x_0, \sigma(T, S))$ , y por lo tanto se podrá generar el control óptimo a partir de la solución  $(x^*(t), \lambda^*(t))$  que vaya arrojando el integrador mediante la ecuación (2.31).

Sin embargo, esto será útil siempre que el modelo lineal represente al sistema real con exactitud, y que además no existan perturbaciones inesperadas que hagan variar el estado de manera tal que, por ejemplo en un tiempo intermedio  $t$ , la medición del estado físico  $\hat{x}(t)$  arroje un valor diferente al del integrador, es decir que se produzca  $\hat{x}(t) \neq x^*(t)$ . En ese caso no se

puede seguir aplicando el esquema anterior para tiempos mayores que  $t$ . Se plantea entonces el problema de controlar óptimamente al sistema con un horizonte de duración  $T - t$ , y que comienza con estado inicial  $x(0) = \hat{x}(t)$ . Claramente, el coestado óptimo correspondiente a dicha situación será

$$\bar{\lambda}(t) = \sigma(T - t, S) = \beta(T - t, S)\alpha^{-1}(T - t, S)\hat{x}(t), \quad (3.142)$$

y entonces el control óptimo a aplicar en  $t \in [0, T]$ :

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B'\bar{\lambda}(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B'\beta(T - t, S)\alpha^{-1}(T - t, S)\hat{x}(t). \quad (3.143)$$

Esto es equivalente a afirmar que se ha obtenido una expresión del control óptimo en forma de feedback, es decir,  $u^*(t) = k(t)x(t)$  donde  $k(t)$  es la ganancia (variable en el tiempo) del controlador, y  $x(t)$  es el valor del estado físico del sistema en ese momento. La ganancia se sabe que debe coincidir con  $k(t) = -R^{-1}B'P(t)$ , y por lo tanto también se deberá cumplir, para cada problema individual  $(T, S)$ ,

$$P(t) = \frac{1}{2}\beta(T - t, S)\alpha^{-1}(T - t, S) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.144)$$

En particular, para  $t = 0$ ,

$$\sigma = \lambda^{T,S}(0) = 2P(0)x_0, \quad P(0) = \frac{1}{2}\beta(T, S) [\alpha(T, S)]^{-1}, \quad (3.145)$$

y el costo óptimo  $\mathcal{V}(0, x_0) = x_0'P(0)x_0$ .

### Ejemplos numéricos.

Se considerará en esta sección el problema bidimensional de control óptimo para el caso de regulación alrededor de  $\bar{x} = (0, 0)'$ , donde se requiere minimizar el costo de la expresión dada por (2.28) con matrices

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = 1, \quad (3.146)$$

restringido a la dinámica lineal de la ecuación diferencial (2.26) con coeficientes constantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.147)$$

y por el valor inicial del estado  $x_0 = (0.2, 0.1)'$  (se supone que  $x_0$  es una perturbación del equilibrio  $\bar{x}$ ).

Al fijar estas matrices coeficientes para un ejemplo particular, se puede calcular la matriz  $U(T)$  de  $2n \times 2n$  a partir de (3.106, 3.115), pero la dificultad es creciente con  $n$ . En este caso,



para  $T$ :

$$U(T) = \exp(-\mathbf{HT}) \begin{pmatrix} 84.00 & -81.78 & 1.42 & 1.42 \\ -64.42 & 66.64 & 1.42 & 1.42 \\ 8.85 & -0.21 & 5.74 & 5.74 \\ -26.13 & 37.98 & 7.85 & 7.86 \end{pmatrix}. \quad (3.148)$$

Luego de calcular  $(\alpha, \beta)$  como soluciones de las PDEs matriciales se evaluó también  $U(T)$  de (3.123-3.122), para varias  $S$ , y se constató la proximidad con (3.148):

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \alpha_S S & \left| \frac{\alpha_S}{2} \right| \\ \beta - \beta_S S & \left| \frac{\beta_S}{2} \right| \end{pmatrix} = \exp(-\mathbf{HT}) \begin{pmatrix} 84.00 & -81.80 & 1.42 & 1.42 \\ -64.42 & 66.64 & 1.42 & 1.42 \\ 8.86 & -0.22 & 5.74 & 5.74 \\ -26.14 & 37.98 & 7.85 & 7.86 \end{pmatrix}. \quad (3.149)$$

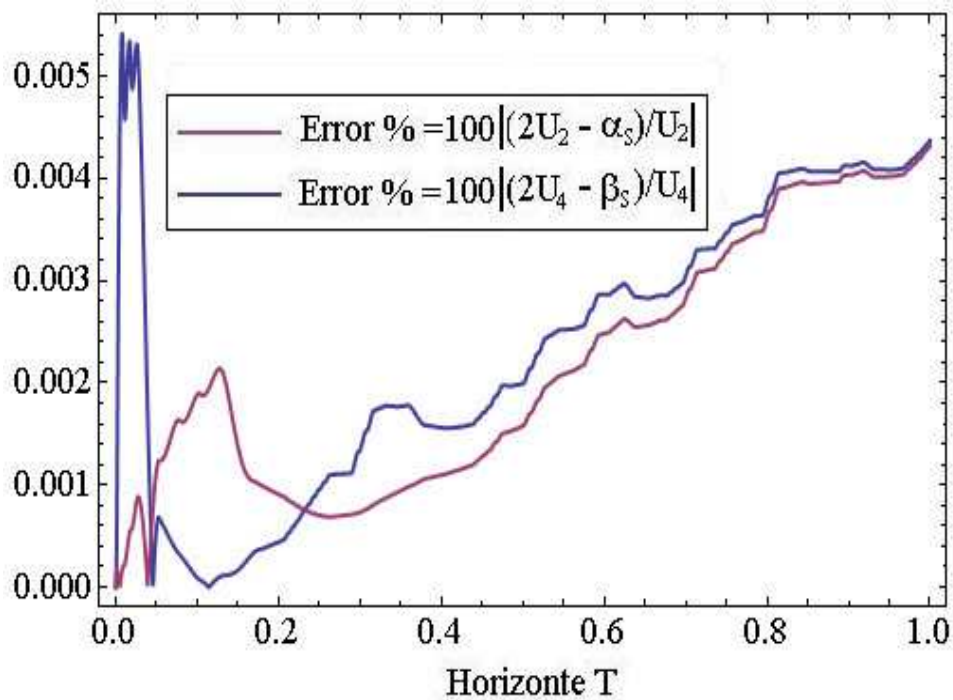


Figura 3.18: Verificación de la relación de  $\alpha_S, \beta_S$ , con las submatrices  $U_2$  y  $U_4$ , respectivamente.

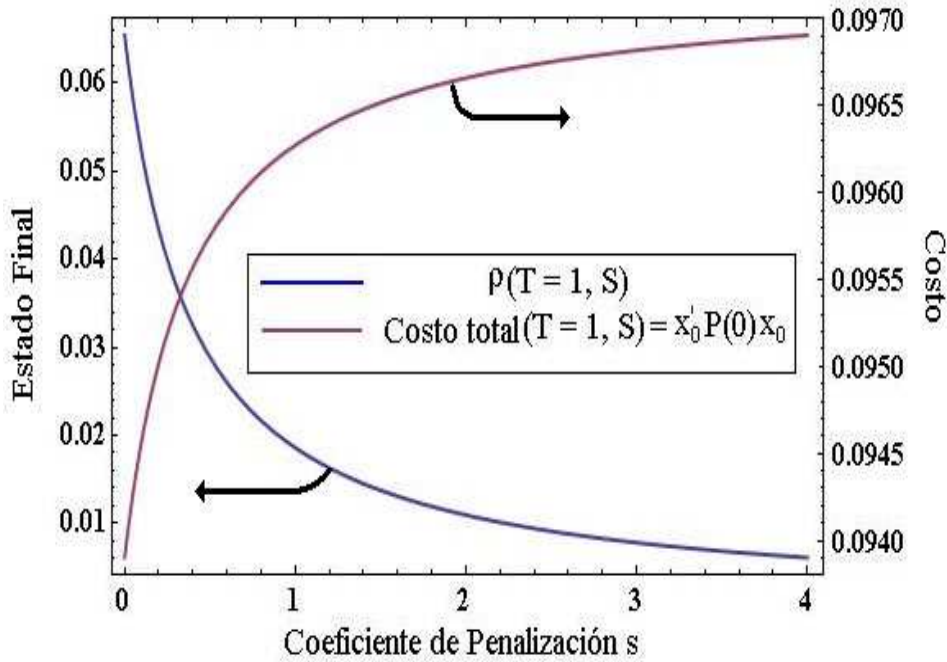


Figura 3.19: Evaluación del costo y del estado final  $\rho_1$ , en función de la penalización final  $sI$ .

En la Figura 3.18 se muestra la relación (para distintos horizontes) entre las submatrices  $U_2$ ,  $U_4$  y las derivadas  $\alpha_S$ ,  $\beta_S$ , respectivamente, provenientes de la solución de (3.118). De la ecuación (3.115) se desprende una dependencia exclusiva en  $T$  (horizonte de optimización), por lo que esta gráfica debería ser válida para cualquier valor de  $s$ , comprobable aproximadamente a partir de la solución  $(\alpha, \beta)$ .

Las implicancias sobre los costos totales pueden verse para una solución del sistema en la Figura 3.19. En la escala derecha de la figura se gráfica el costo para un proceso de duración  $T = 1$  y penalización final variable. Simultáneamente en la escala izquierda se dan los valores de la componente  $\rho_1$  del estado alcanzado para cada valor de  $S$ . Este tipo de figuras se pueden usar en el caso general como herramientas de diseño, ya que si se fija un costo máximo para el proceso, entonces se podría obtener la penalización final que cumpliría con ese costo y mantener el valor final del estado alcanzado.

En las Figuras 3.20 y 3.21 se muestran la variación de las primeras componentes de  $\rho(T, S)$  y  $\sigma(T, S)$  respectivamente. Gráficas similares se pueden obtener para la segunda componente del sistema. Se debe recordar que estas figuras no muestran la evolución temporal del estado o del coestado. Es información útil para el diseño del controlador en función del horizonte de optimización y la matriz de penalización final, ya que no sólo proporciona los estados finales que se alcanzarían para un determinado par  $(T, S)$ , sino también, a partir de  $x_0' P(0) x_0$ , el “costo marginal” en ausencia de perturbaciones

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x_0} = 2P(0)x_0 = \beta(T, S)\alpha^{-1}(T, S)x_0 = \sigma(T, S). \quad (3.150)$$

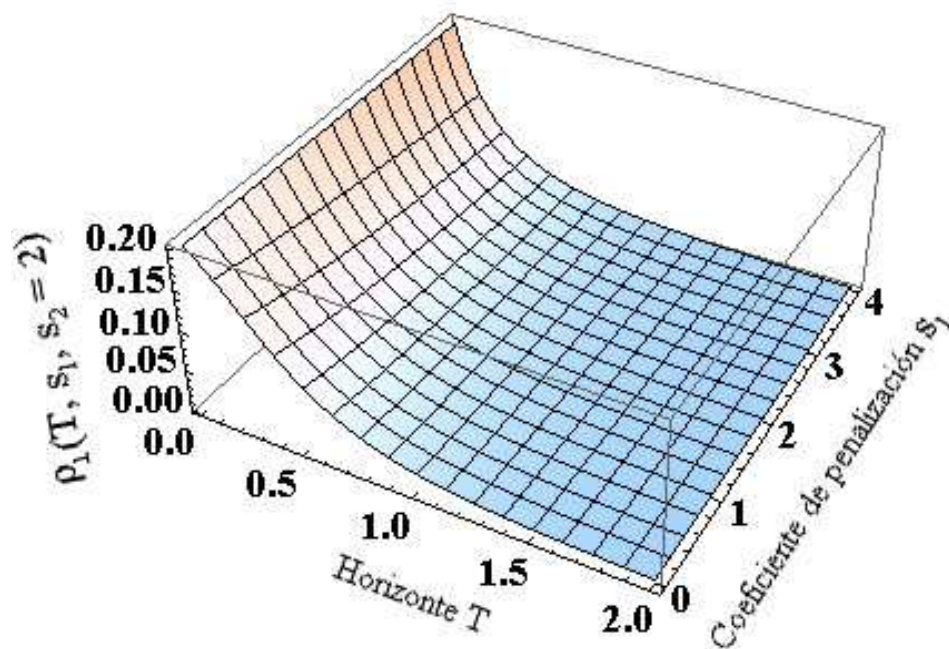


Figura 3.20: Estado final  $\rho_1(T, S$  para  $S$  matriz diagonal, con  $s_1$  variable y  $s_2 = 2$  fijo.

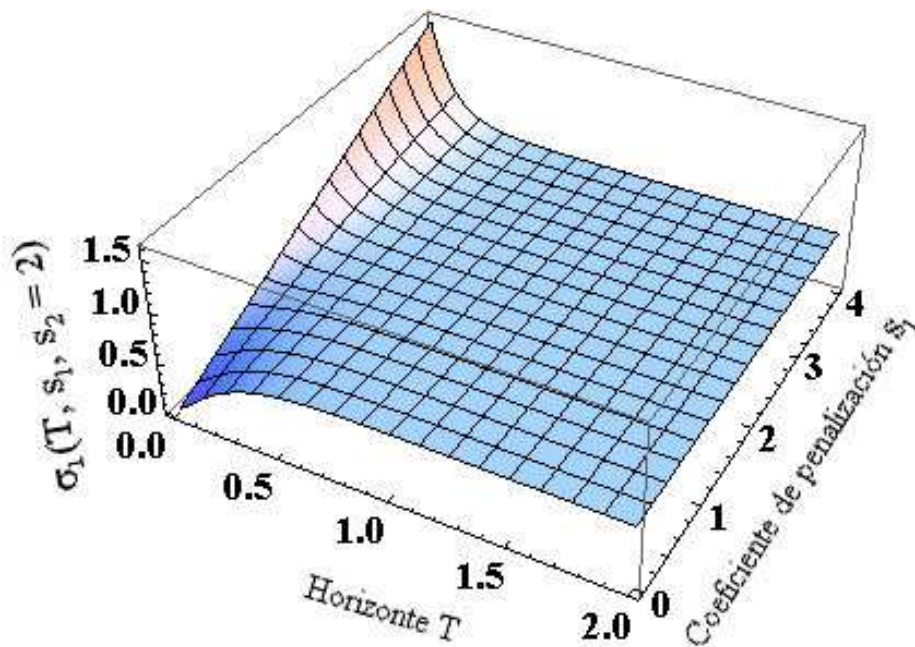


Figura 3.21: Coestado inicial  $\sigma_1(T, S$  para  $S$  matriz diagonal, con  $s_1$  variable y  $s_2 = 2$  fijo.

En la Figura 3.22 se muestra la variación de las componentes de  $\rho(T, S)$  manteniendo  $s_2 = 2$  y  $s_1 = 1.1$  fijos.  $S_{diag}$  denota una matriz diagonal. A su vez, se muestra cómo se modifica la situación si se lleva la matriz a la forma no diagonal  $S_{comp}$  mediante una transformación del tipo (3.137) y aplicando el algoritmo detallado en la parte de extensión a matrices  $S$  generales.

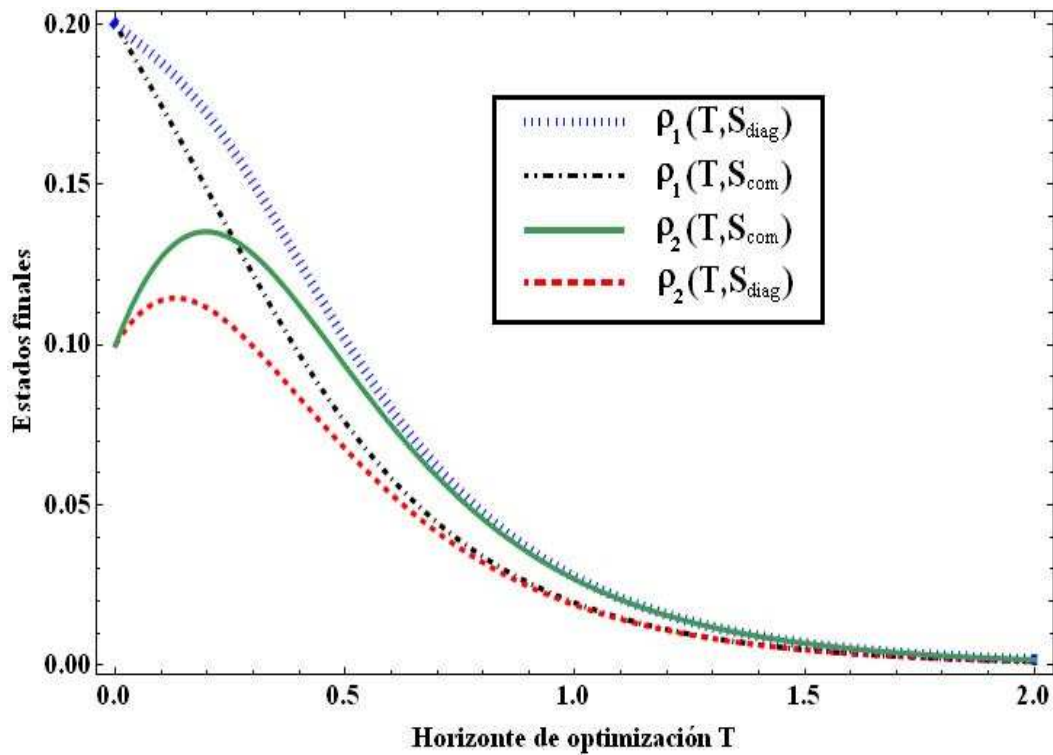


Figura 3.22: Variación del estado final para distintos horizontes de optimización y distintas  $S$ .

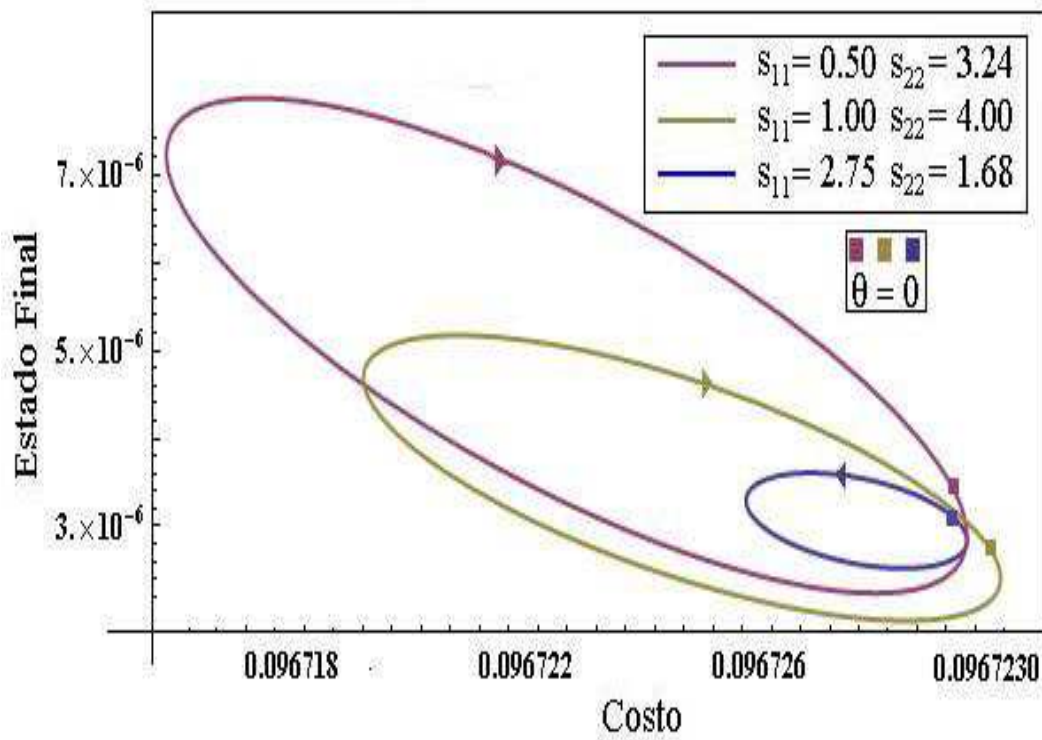


Figura 3.23: Curvas paramétricas del costo y el estado final con parámetro  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Para matrices diagonales como las utilizadas en las figuras anteriores se pueden generar varias familias de matrices  $S$  simétricas, definidas positivas, mediante transformaciones ortogonales con

$$E(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3.151)$$

En la Figura 3.23 se graficó las dependencias del estado final y el costo. Cada elipse corresponde a una familia completa de  $S$  que depende de  $\theta$ .

Es interesante observar que los costos mínimos (máximos) como funciones de  $S$  no se corresponden en general con las mayores (menores) desviaciones de  $\rho$ , como podría conjeturarse.

### Comprobaciones numéricas.

Una primera comprobación se realizó utilizando los coeficientes  $Q$ ,  $R$ ,  $A$ ,  $B$  y fijando el tiempo de optimización en  $T = 1$  calculando luego  $P(0)$  mediante la ecuación (3.144) y contrastándolo con el valor que se obtiene integrando la ecuación (2.34). Se fabricó la Tabla 3.3.1 para una  $S$  escalar, una diagonal y una general. Se muestra sólo la matriz de Riccati  $P(0)$  a partir de la DRE, que coincidió exactamente con el valor dado por el procedimiento explicado en las secciones anteriores (a partir de  $\alpha(T, S)$  y  $\beta(T, S)$ ). Dado que en el caso diagonal se están

$s_{11}$	$s_{22}$	$s_{12} = s_{21}$	$P(0)$
3.5	3.5	0.0	$\begin{pmatrix} 0.9029 & 1.1074 \\ 1.1074 & 1.6455 \end{pmatrix}$
2.0	1.1	0.0	$\begin{pmatrix} 0.9001 & 1.1035 \\ 1.1035 & 1.6402 \end{pmatrix}$
1.95	2.78	0.72	$\begin{pmatrix} 0.9024 & 1.1070 \\ 1.1070 & 1.6451 \end{pmatrix}$

Tabla 3.2: Matriz  $P(0)$  para distintos tipos de  $S$ .

calculando “derivadas con respecto a  $S$ ” como la suma de derivadas parciales con respecto a escalares (ver ecuación (3.81)); una segunda comprobación que se plantea naturalmente es ver si realmente las soluciones que se obtienen a partir de las ecuaciones de la Sección 2.2 coinciden con las de la Sección 3.3 cuando todas las  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  coinciden. Esta constatación se ilustra en la Figura 3.24, que muestra el error relativo dado por

$$\%Error = 100 \left( \frac{\rho_1(T, sI) - \rho_1(T, S)}{\rho_1(T, sI)} \right) \quad (3.152)$$

donde  $\rho_1(T, sI)$  es la solución obtenida si se considera una penalización escalar, y  $\rho_1(T, S)$  para  $S$  diagonal y luego evaluada en  $(T, s, \dots, s)$ . Otra comprobación (realizada para varios valores de  $T$ , aunque se trata de una propiedad general) fue la siguiente: la matriz  $U(T)$ , por ser el flujo

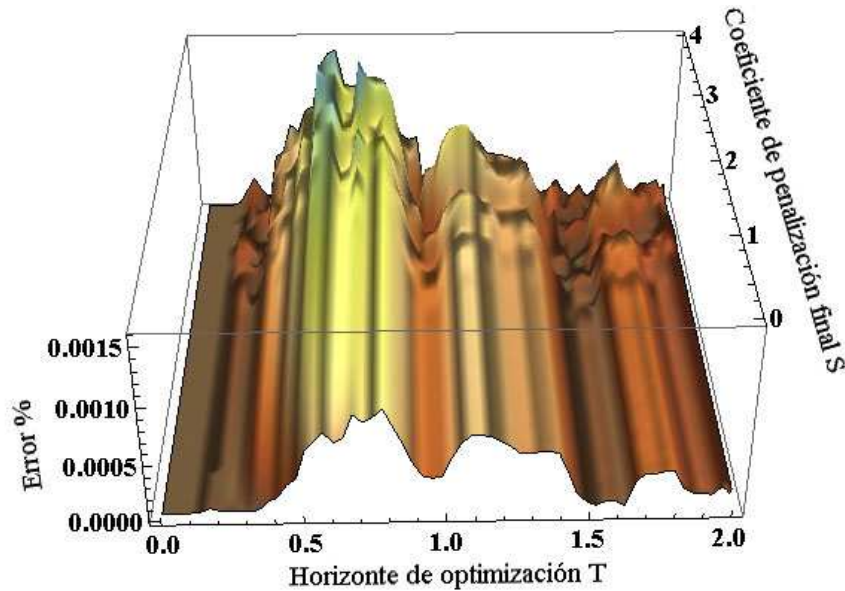


Figura 3.24: Error relativo en % de la solución de  $\rho_1$  para  $S$  diagonal comparadas con la  $S$  escalar ( $s_1 = s_2$ ).

de un campo Hamiltoniano definido por  $\mathbf{H}$ , resulta simpléctica (ver p.ej. [68]). O sea que sus submatrices deben cumplir las relaciones simplécticas (3.85-3.86) para  $U(T)$ . Los resultados numéricos fueron satisfactorios en todos los casos.

En relación a la obtención de estrategias de control desarrollados en las secciones anteriores, se puede verificar que siguen siendo óptimas en comparación con otros controladores bajo el mismo costo asociado. Por ejemplo, para las mismas matrices  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ ,  $R$ , se puede generar el control óptimo correspondiente a un horizonte infinito (que se sabe requiere una ganancia constante), es decir

$$u^*(t) = -R^{-1}B'\bar{P}x(t), \quad (3.153)$$

con  $\bar{P}$  solución de ecuación algebraica de Riccati  $\bar{P}W\bar{P} - \bar{P}A - A'\bar{P} - Q = 0$ .

Se aplicó el feedback (3.144) para  $t \leq T = 1$  y se lo comparó con el proveniente de las PDEs-DRE, con ganancia variable y penalización  $s = 2$ . El costo obtenido para el ARE fue de 3.7204 con estado final 0.0571. El costo para el PDEs-DRE fue de 3.72003, lo que muestra que es óptimo, como se esperaba. Pero además es interesante ver (Figura 3.25) que al cambiar la penalización final a  $s = 12.9$  se consigue llegar al estado final del ARE pero en la mitad del tiempo, con un costo total similar, usando la DRE.

### 3.3.2. Aplicaciones a sistemas bilineales invariantes.

El caso del regulador bilineal-cuadrático (con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ) será analizado para ilustrar los resultados de las PDEs a una clase de sistemas no lineales multidimensionales. La dinámica a



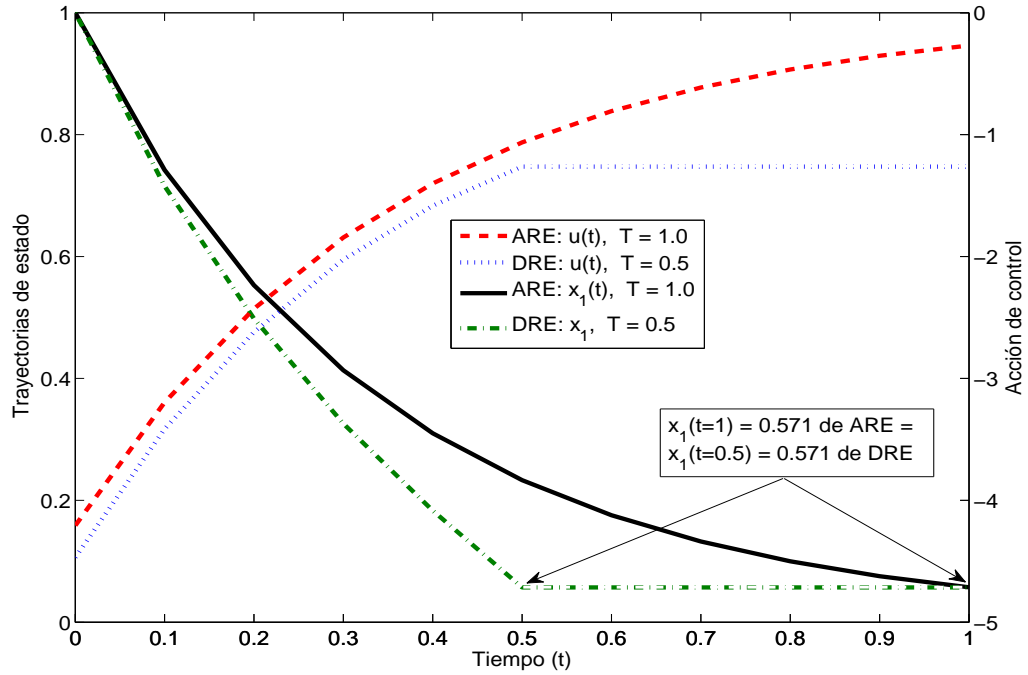


Figura 3.25: Estado y acción de control para controladores ARE ( $t \leq 1$ ), y DRE en con penalización final ( $t \leq T = 0.5$ ).

tratar, el funcional de costo, y la penalización final serán, respectivamente:

$$f(x, u) = Ax + (B + Nx)u, \quad L(x, u) = x'Qx + u'Ru, \quad K(x(T)) = x'(T)Sx(T). \quad (3.154)$$

El Hamiltoniano para sistemas bilineales, según la ecuación (2.12), es

$$\mathcal{H}(x, \lambda, u) = x'Qx + u'Ru + \lambda'(Ax + (B + Nx)u). \quad (3.155)$$

El control óptimo Hamiltoniano evaluando la condición ( $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ ) puede ser hallado sin dificultad [106] aplicando el formalismo Hamiltoniano visto en el Capítulo 2, sección 2.2 y resulta

$$u^0(x, \lambda) = -\frac{1}{2}R^{-1}\lambda'(B + Nx), \quad (3.156)$$

insertando este control en la ecuación (3.155), el Hamiltoniano de control óptimo es

$$\mathcal{H}^0(x, \lambda, u) = x'Qx + \lambda'Ax - \frac{1}{4}\lambda'(B + Nx)R^{-1}(B + Nx)'\lambda. \quad (3.157)$$

por lo que las HCEs (ecuaciones (2.20-2.21)) para este caso pueden ser escritas como:

$$\dot{x} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} \right)' = Ax - \frac{1}{2}(B + Nx)R^{-1}(B + Nx)'\lambda; \quad x(0) = x_0, \quad (3.158)$$

$$\dot{\lambda} = - \left( \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x} \right)' = -Qx - A'\lambda + \frac{1}{2}\lambda'(B + Nx)R^{-1}N\lambda; \quad \lambda(T) = 2Sx(T). \quad (3.159)$$

Se debe notar que para sistemas bilineales las ecuaciones resultan muy similares al LQR, es más si el término  $N$  fuera cero, se corresponderían exactamente, sin embargo, esa matriz hace que todos los miembros de las ecuaciones sean no lineales, por lo que las PDEs a aplicar son las expresadas en (3.105, 3.97,3.98), donde los objetos matemáticos necesarios son

$$F = \left[ A - \frac{1}{r}(B + N\rho)(B + N\rho)'s \right] \rho, \quad (3.160)$$

$$G = 2 \left[ Q + A's - \frac{\rho's(B + N\rho)}{r}N's \right] \rho. \quad (3.161)$$

En el caso lineal las funciones  $F$ ,  $G$  definían un sistema matricial lineal  $v$  a través de la matriz  $\mathbf{H}$ . Si el sistema bilineal es expresado de la misma manera, esa  $\mathbf{H}$  dependería de  $\rho$ . Por esta razón no se utilizará la definición de las matrices auxiliares  $\alpha$ ,  $\beta$  para hallar a  $\rho$ ,  $\sigma$ . Para ilustrar los resultados de éstas ecuaciones algunos cálculos numéricos fueron hechos utilizando un sistema bilineal bidimensional, es decir, con estados en  $\mathbb{R}^2$  y sujetos al anterior funcional cuadrático de costo, con las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $N = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $R = 1$ , y para una grilla de  $(T, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

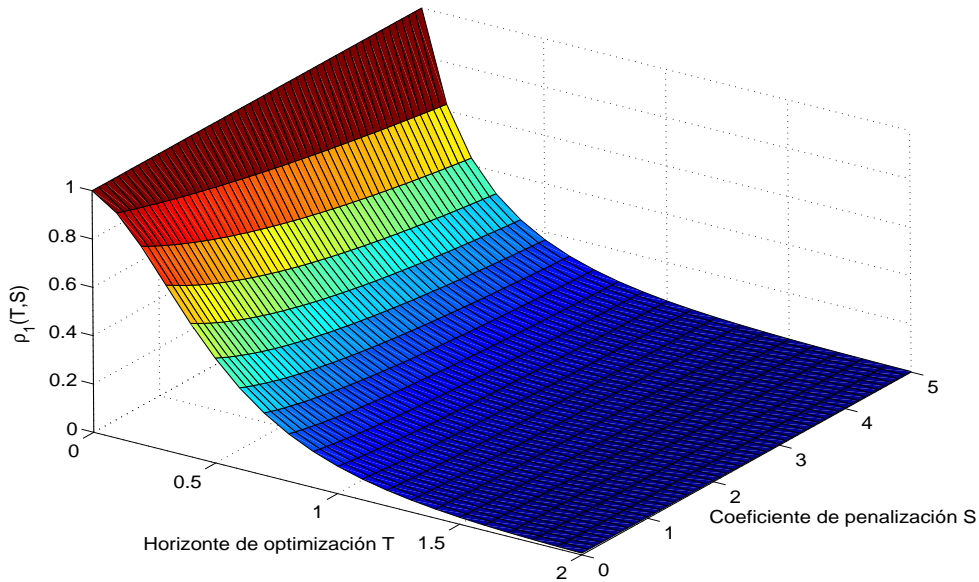


Figura 3.26: Primera componente de  $\rho_1(T, s)$  para el sistema bilineal dimensional.



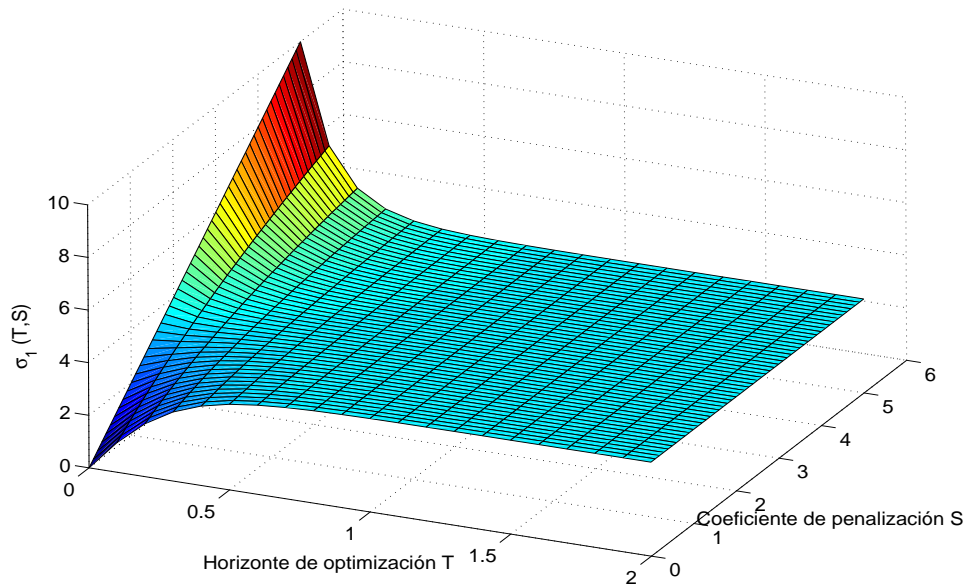


Figura 3.27: Primera componente de  $\sigma_1(T, s)$  para el sistema bilineal dimensional.

El comando “NDSolve” del software Mathematica fue usado para obtener la solución de las PDEs, mostradas en las Figuras (3.26-3.27), donde la influencia de las alinealidades hace que el control tenga un efecto más estabilizante que en el caso del LQR (ya que se añade un término negativo adicional a la dinámica  $Nxu^0$ ). Como comprobación, para la solución obtenida se calculó el Hamiltoniano inicial y final (ver Eq. (2.25)) para todo el rango de  $(T, S)$  y se comprobó

$$\mathcal{H}_{T,s}^0(x_0, \sigma) \approx \mathcal{H}_{T,s}^0(\rho, 2s\rho) \quad (3.162)$$

No se muestra la gráfica ya que el error estuvo alrededor del 0.3%, lo cual está dentro de una tolerancia aceptable típica en resoluciones numéricas.

### 3.3.3. Aplicaciones a sistemas lineales variantes en el tiempo.

En el Capítulo 2, subsección 2.2 se trajo a colación el problema de control óptimo LQR variante en el tiempo y se obtuvo el control óptimo  $u^0(t, x, \lambda)$  que resuelve el problema de optimización dinámica. Dicha ley de control puede ser vista como un feedback lineal de estados  $k(t)x(t)$  con  $k(t)$  la ganancia del controlador variante en el tiempo. Encontrar  $k(t)$  requiere la resolución de la DRE con matrices y parámetros dependientes del tiempo, y para su evaluación on-line se debe guardar la solución de la DRE en memoria, o bien al menos encontrar la condición inicial  $P(0)$  desconocida en el planteamiento del problema, e integrar la DRE como un problema de condiciones iniciales, en paralelo con el sistema.

En esta subsección se verá un método para obtener la condición inicial faltante de la DRE para sistemas lineales variantes en el tiempo (o no autónomos), utilizando las PDEs antes desarrolladas para sistemas autónomos. Para compatibilizar este requerimiento con el LQR variante en el tiempo, se optó por hacer un cambio de variables, transformando al tiempo en un nuevo estado. De esta manera se logra que el sistema lineal y variante pase a ser autónomo, aunque se convierte en un sistema no lineal. Sin embargo, esto no trae mayores inconvenientes ya que en las secciones anteriores se desarrollaron las PDEs apropiadas para problemas de control óptimo no lineales multidimensionales.

En [34, 46] se ha mostrado que para el caso no lineal en general, el valor inicial  $\tilde{P}(0)$  solución de la DRE asociado con la linealización de las HCEs a lo largo de la trayectoria óptima podría ser recuperado de la solución de las PDEs variacionales. Este resultado es de mucha importancia en relación a la metodología de control “two-degrees-of-freedom” (2DOF) en el contexto Hamiltoniano (que será retomada en detalle en el Capítulo 4), ya que la  $\tilde{P}(t)$  entra a la estructura de control como una ganancia de compensación de perturbaciones, y si se cuenta con el valor inicial puede ser integrada “on-line” con los demás objetos de la estructura. Para el LQR visto como un sistema no lineal, se probó analíticamente que esta  $\tilde{P}(t)$  es esencialmente la misma que la solución  $P(t)$  de la DRE del problema original (lineal-cuadrático variante). Dado que la  $\tilde{P}(t)$  es calculada a partir de la  $\tilde{P}(0)$ , y ésta de las PDEs, la coincidencia analítica aludida sirve como una primera verificación de las PDEs en el contexto no lineal. Veamos ahora paso a paso como se realizó dicha comprobación.

### Transformación del problema LQR variante en el tiempo a uno autónomo.

El procedimiento para transformar el problema LQR variante en el tiempo en uno autónomo es estándar, donde se considera al tiempo como otro estado más. A continuación se tratará un ejemplo ilustrativo con  $A(t) \equiv -1$ ,  $B(t) = e^{-t}$ ,  $Q(t) \equiv 0$ ,  $R(t) \equiv 1$ ,  $s \geq 0$ .

$$\dot{x} = -x + e^{-t}u \triangleq f(t, x, u), \quad (3.163)$$

$$L(t, x, u) = u^2, K(x) = s[x(T)]^2. \quad (3.164)$$

Se debe notar que aquí el Lagrangiano permanece autónomo, aunque en realidad esto no es esencial para lo que sigue. Para este ejemplo, la solución de su correspondiente DRE (2.34) se halló analíticamente,

$$P(t) = \frac{e^{2t}s}{e^{2T} + s(T-t)}, \quad (3.165)$$

y por lo tanto el problema LQR está completamente resuelto. Sin embargo, para los propósitos de esta sección se lo convertirá a un problema autónomo mediante el cambio de variables:

$$x \rightarrow x_1, t \rightarrow x_2, \quad (3.166)$$

y sólo por simplicidad el viejo símbolo  $x$  se usará en lo que sigue, como

$$x \triangleq (x_1, x_2)' . \quad (3.167)$$

Por lo tanto, en la nueva configuración la dinámica (autónoma) es caracterizada por  $f_a$  según

$$\dot{x} = f_a(x, u) \triangleq (f(x_2, x_1, u), 1)' , \quad (3.168)$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + e^{-x_2} u , \quad x_1(0) = x_0 , \quad (3.169)$$

$$\dot{x}_2 = 1 , \quad x_2(0) = 0 , \quad (3.170)$$

donde el funcional de costo, el Lagrangiano y la penalización final transformados resultan

$$\mathcal{J}_a(T, 0, (x_0, 0)', u(\cdot)) \triangleq \int_0^T L_a(x(\tau), u(\tau)) d\tau + K_a(x) , \quad (3.171)$$

$$L_a(x, u) \triangleq u^2 = L(x_2, x_1, u) , \quad (3.172)$$

$$K_a(x) \triangleq s x_1^2 = x' [\text{diag}(s, 0)] x = K(x_1) . \quad (3.173)$$

Debe quedar claro que el control óptimo para los dos problemas (el variante en el tiempo y el autónomo) es el mismo dado que

$$\mathcal{J}_a(T, 0, (x_0, 0)', u(\cdot)) = \mathcal{J}(T, 0, x_0, u(\cdot)) . \quad (3.174)$$

Sin embargo, la nueva dinámica es de hecho no lineal (en la ecuación (3.169) que, al tener una exponencial, implica que todas las potencias de  $x_1$  están presentes y además están multiplicadas por el control). Para este nuevo problema es necesario encontrar las expresiones para el Hamiltoniano  $H_a$ , el control H-mínimo  $u_a^0$ , y el Hamiltoniano minimizado  $\mathcal{H}_a^0$ , las cuales después de algunos cálculos resultan

$$H_a(x, \lambda, u) \triangleq L_a(x, u) + \lambda' f_a(x, u) = R u^2 + \lambda_1 (-x_1 + e^{-x_2} u) + \lambda_2 , \quad (3.175)$$

$$u_a^0(x, \lambda) \triangleq \arg \min_u H(x, \lambda, u) = -\frac{1}{2R} e^{-x_2} \lambda_1 , \quad (3.176)$$

$$\mathcal{H}_a^0(x, \lambda) \triangleq H_a(x, \lambda, u_a^0(x, \lambda)) = -x_1 \lambda_1 - \frac{1}{4R} e^{-2x_2} \lambda_1^2 + \lambda_2 , \quad (3.177)$$

y las HCEs para este caso serán

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \frac{1}{2} e^{-2x_2} \lambda_1 , \quad x_1(0) = x_0 ; \quad (3.178)$$

$$\dot{x}_2 = 1 , \quad x_2(0) = 0 , \quad (3.179)$$

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 , \quad \lambda_1(T) = 2s x_1(T) ; \quad (3.180)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} e^{-2x_2} \lambda_1^2 , \quad \lambda_2(T) = 0 , \quad (3.181)$$

Estas ODEs se resolvieron analíticamente, obteniendo

$$x_1(t) = e^{-t} \left( x_0 - \frac{t}{2} c_1 \right); \quad (3.182)$$

$$x_2(t) = t, \quad (3.183)$$

$$\lambda_1(t) = c_1 e^t, \quad c_1 = \frac{2s}{e^{2T} + sT}, \quad (3.184)$$

$$\lambda_2(t) = c_3 - \frac{1}{2} c_1^2 t, \quad c_3 = \frac{T}{2} c_1^2. \quad (3.185)$$

### Las PDEs para el sistema no lineal y autónomo.

En la parte anterior se mostró que el sistema resultante de haber eliminado la dependencia explícita de los objetos involucrados con el tiempo resultaba no lineal. Sin embargo, para éste se sabe cómo calcular las condiciones de borde faltantes a través de las PDEs variacionales.

El objetivo de esta parte es resolver no sólo el problema LQR variante sino también aprovechar que el sistema autónomo resultante es no lineal para comprobar las ecuaciones PDEs halladas para sistemas multidimensionales no lineales. Comenzaremos por describir la ecuación variacional:

$$\dot{V}(t, s) = \mathcal{A}(t, s)V(t, s), \quad V(0, s) = I, \quad (3.186)$$

donde  $\mathcal{A}(t, s) \triangleq D\mathcal{X} \circ \phi^t(x_0, \sigma(T, s))$  y  $\dot{V}(t, s)$  denota  $\frac{\partial V}{\partial t}(t, s)$ . Para nuestro caso de estudio, algunos de los objetos matemáticos definidos previamente son (ver notación al principio de la Subsección 3.3):

$$\mathcal{X}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -x_1 - \frac{1}{2} e^{-2x_2} \lambda_1 \\ 1 \\ \lambda_1 \\ -\frac{1}{2} e^{-2x_2} \lambda_1^2 \end{pmatrix} \quad (3.187)$$

$$D\mathcal{X}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -1 & e^{-2x_2} \lambda_1 & -\frac{1}{2} e^{-2x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{-2x_2} \lambda_1^2 & -e^{-2x_2} \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, s) &= \begin{pmatrix} -1 & e^{-2x_2(t)} \lambda_1(t) & -\frac{1}{2} e^{-2x_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{-2x_2(t)} \lambda_1^2(t) & -e^{-2x_2(t)} \lambda_1(t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & c_1 e^{-t} & -\frac{1}{2} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_1^2 & -c_1 e^{-t} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.188)$$

Entonces es posible integrar analíticamente la ODE variacional lineal y dependiente del tiempo (3.186), y su solución resulta,

$$V(t, s) = \begin{pmatrix} e^{-t} & c_1 t e^{-t} & -\frac{1}{2} t e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & c_1^2 t & -c_1 t & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.189)$$

Se debería notar que  $V$  es la matriz fundamental  $\Phi(t, 0)$  del siguiente sistema lineal ( $s$  está fijo)

$$\dot{y} = \mathcal{A}(t, s) \cdot y, \quad (3.190)$$

en particular  $y(t) = \Phi(t, \tau)y(\tau)$ ,  $\Phi(\tau, \tau) = I$ , y se puede mostrar (véase [106]) que (abusando en la notación)  $V(T, s) = \Phi(T, 0)$  verifica:

$$V_T(T, s) = \mathcal{A}(T, s) V(T, s), \quad V(0, s) = I. \quad (3.191)$$

Nótese la dependencia con  $\rho$

$$\mathcal{A}(T, s) = D\mathcal{X}(x(T), \lambda(T)) = D\mathcal{X}(\rho(T, s), 2s\rho(T, s)), \quad (3.192)$$

por lo que, en general, debería de ser integrada en paralelo con las ecuaciones apropiadas para  $\rho(T, s)$ . En la primera parte de la sección 3.3 se mostró que las ecuaciones pertinentes para  $\rho$  y  $\sigma$  vienen dadas por las expresiones (3.97-3.98) y

$$F(\rho, s) \triangleq \mathcal{F}(\rho, 2s\rho), \quad G(\rho, s) \triangleq \mathcal{G}(\rho, 2s\rho). \quad (3.193)$$

Estas PDEs (3.191, 3.97, 3.98) se resolvieron numéricamente para el caso de estudio y sus soluciones se compararon con la solución analítica:

$$V(T, s) = \begin{pmatrix} e^{-T} & \frac{2sT e^{-T}}{e^{2T} + sT} & -\frac{1}{2} T e^{-T} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^T & 0 \\ 0 & \frac{4s^2 T}{(e^{2T} + sT)^2} & -\frac{2sT}{e^{2T} + sT} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.194)$$

$$\rho_1(T, s) = x_1(T) = \frac{e^T}{e^{2T} + sT} + e^{-T}(x_0 - 1), \quad (3.195)$$

$$\rho_2(T, s) = x_2(T) = T, \quad (3.196)$$

$$\sigma_1(T, s) = \lambda_1(0) = c_1 = \frac{2s}{e^{2T} + sT}, \quad (3.197)$$

$$\sigma_2(T, s) = \lambda_2(0) = c_3 = \frac{T}{2} c_1^2, \quad (3.198)$$

La primera componente de  $\rho$ ,  $\sigma$ , obtenidas al resolver simultáneamente las ecuaciones (3.105, 3.97 y 3.98) con Mathematica se graficaron en las Figuras 3.28 y 3.29, respectivamente. El error numérico (su diferencia con las soluciones analíticas (3.195, 3.197)) es despreciable y está alrededor de 0.1%.

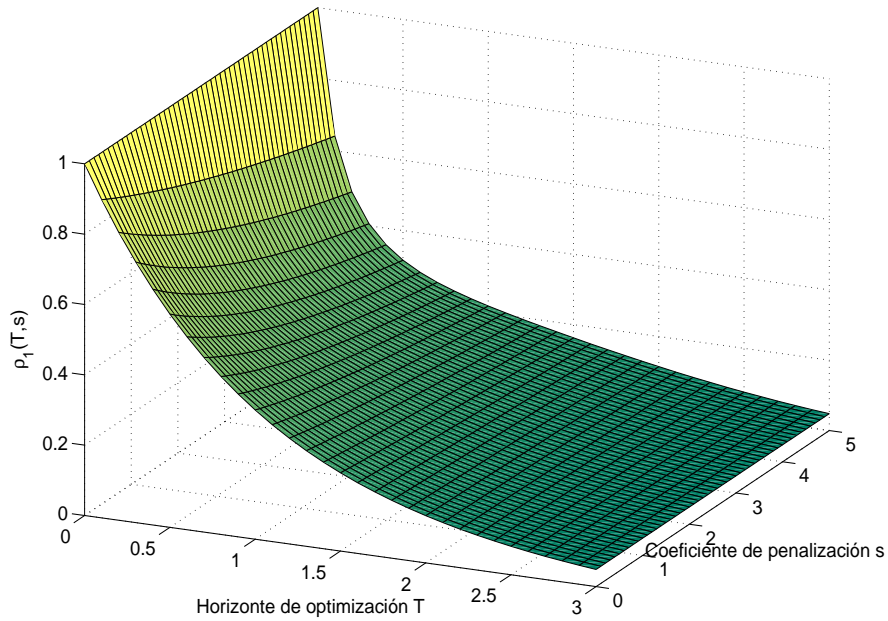


Figura 3.28: Estado final  $\rho_1(T, s) = x^*(T)$ .

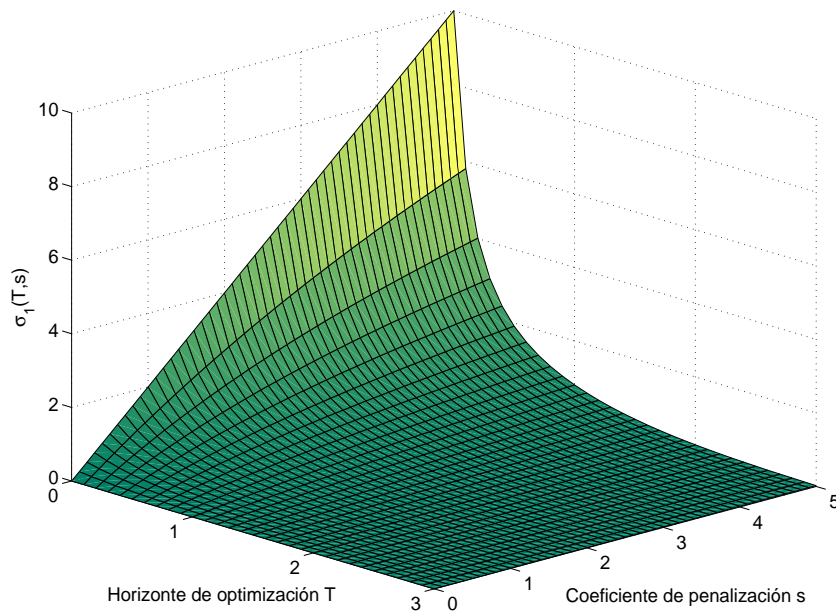


Figura 3.29: Coestado inicial  $\sigma_1(T, s) = \lambda^*(0)$ .

**Relación con la solución analítica del problema original variante en el tiempo. El valor inicial de la matriz de Riccati.**

Para el sistema transformado, la matriz de orden  $2n \times 2n$   $\mathcal{A}(t) \triangleq D\mathcal{X}(x(t), \lambda(t)) = \mathbf{H}(t)$  y sus particiones  $n \times n$  resultan:

$$\mathbf{H}(t) \triangleq \begin{pmatrix} \tilde{A}(t) & -\frac{1}{2}\tilde{W}(t) \\ -2\tilde{Q}(t) & -\tilde{A}'(t) \end{pmatrix}, \quad (3.199)$$

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 & c_1 e^{-t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}c_1^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.200)$$

El sistema lineal de la ecuación (2.38) tiene como solución  $v(t) = (x(t), \lambda(t))'$ , en la cual sabemos que  $\lambda$  verifica  $\lambda(t) = 2\tilde{P}(t)x(t)$ , con  $\tilde{P}(t)$  solución de la ecuación matricial de Riccati de  $2 \times 2$ ,

$$\dot{\pi} = \pi\tilde{W}\pi - \pi\tilde{A} - \tilde{A}'\pi - \tilde{Q}; \quad \pi(T) = \text{diag}(s, 0). \quad (3.201)$$

Asumiendo que la matriz  $V = V(T, s) = \Phi(T, 0)$  es conocida y mediante las matrices auxiliares  $\alpha, \beta$  de la Subsección 3.3.1

$$\begin{pmatrix} \alpha(T, s) \\ \beta(T, s) \end{pmatrix} \triangleq V^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 2sI \end{pmatrix}, \quad (3.202)$$

se sigue que, para cada condición inicial  $x_0$ ,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \sigma \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(T, 0) \begin{pmatrix} \rho \\ 2s\rho \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 2sI \end{pmatrix} \rho \triangleq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rho, \quad (3.203)$$

$$\sigma = \beta\rho = \beta\alpha^{-1}x_0 = 2\tilde{P}(0)x_0 \quad \forall x_0, \quad (3.204)$$

y por lo tanto el valor inicial  $\tilde{P}(0)$  podría ser recuperado de las soluciones de las PDEs de la ecuación (3.144). A continuación se muestra una confirmación analítica de este último resultado:

$$U(T, s) \triangleq [V(T, s)]^{-1} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^T & -\frac{2sT}{e^{2T}+sT} & \frac{1}{2}Te^{-T} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-T} & 0 \\ 0 & -\frac{4s^2T}{(e^{2T}+sT)^2} & \frac{2sTe^{-T}}{e^{2T}+sT} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(T, s) = U_1 + 2sU_2 = \begin{pmatrix} e^T + sTe^{-T} & -\frac{2sT}{e^{2T}+sT} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[\alpha(T, s)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^T}{e^{2T}+sT} & 2sTe^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta(T, s) = U_3 + 2sU_4 = \begin{pmatrix} 2e^{-T}s & 0 \\ \frac{4s^2Te^{-T}}{e^{2T}+sT} & 2s - \frac{4s^2T}{(e^{2T}+sT)^2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{P}_{11}(0) = \frac{1}{2} \left\{ \beta(T, s) [\alpha(T, s)]^{-1} \right\}_{11} \quad (3.205)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{[\beta(T, s)]_{11}}{[\alpha(T, s)]_{11}} = \frac{s}{e^{2T} + sT} = P(0) . \quad (3.206)$$

Por la forma de las matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{W}$  en (3.200), y de las originales  $A$ ,  $Q$ ,  $W$ , resulta

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}_{11} &= \tilde{P}_{11} \tilde{W}_{11} \tilde{P}_{11} - \tilde{P}_{11} \tilde{A}_{11} - \tilde{A}'_{11} \tilde{P}_{11} - \tilde{Q}_{11} , \\ &= \tilde{P}_{11} W \tilde{P}_{11} - \tilde{P}_{11} A - A \tilde{P}_{11} - Q , \\ \tilde{P}_{11}(T) &= s , \end{aligned} \quad (3.207)$$

así  $\tilde{P}_{11}$  verifica la misma ODE con condición final que la  $P$  para el caso original. Por unicidad de soluciones:  $\tilde{P}_{11}(t) = P(t) \quad \forall t \in [0, T]$ .

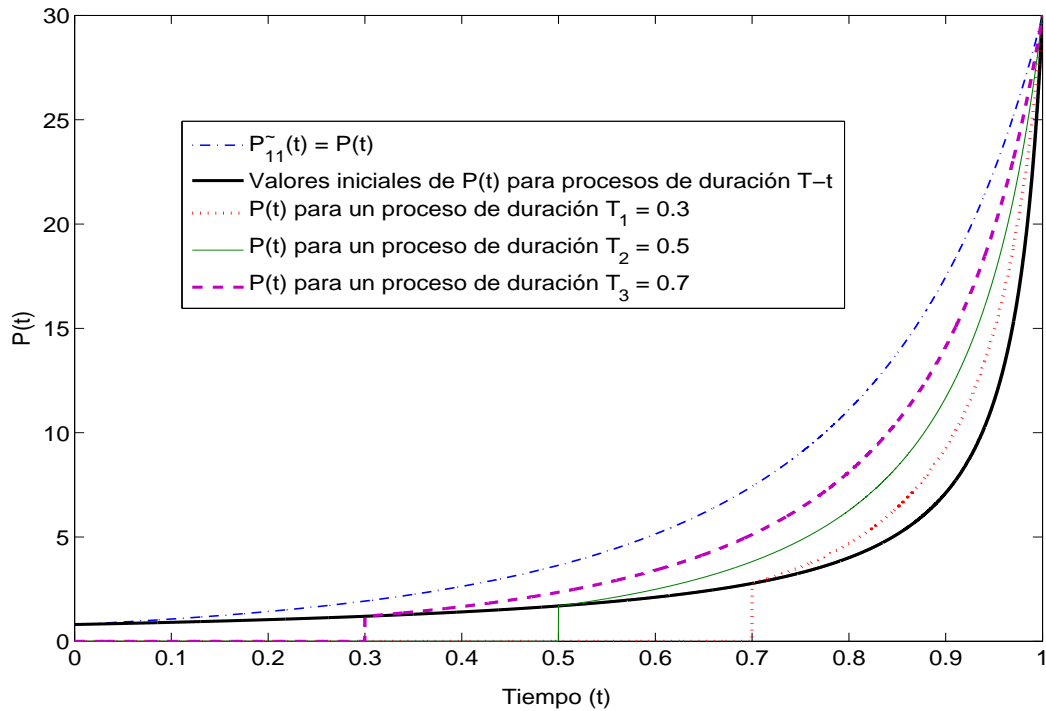


Figura 3.30: Primera componente de la ecuación matricial de Riccati  $\tilde{P}_{11}(t) = P(t)$  y sus valores iniciales (en  $t = 0$ ) para procesos de duración  $T - t$ .

En la Figura 3.30 se grafica la  $\tilde{P}_{11}(t)$  para el horizonte completo  $T = 1$ . La línea sólida gruesa muestra los valores iniciales  $\tilde{P}(0)$  para procesos LQR con distintos horizontes  $T - t$ . También se ilustra el comportamiento de la solución de la DRE para tres procesos intermedios con horizontes:  $T = 0.3$ ,  $T = 0.5$ , y  $T = 0.7$ .



**Relevancia con la metodología de control “Two-degrees-of-freedom”.**

“Two-degrees-of-freedom” (2DOF, es su sigla en inglés) es una denominación genérica de los esquemas de control que apuntan a: (i) generar on-line la trayectoria de referencia o deseada para el sistema, y (ii) realizar la compensación de ruidos y perturbaciones para ceñirse a la referencia. Dentro de este contexto, el término “óptimo” será utilizado para indicar que existe un problema de control óptimo subyacente para un sistema no lineal autónomo cuya dinámica y salida están modeladas por:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = Cx, \quad (3.208)$$

sujetas a un funcional de costo general (ecuación (2.5)). Cuando el problema es regular, se vio que el formalismo Hamiltoniano era aplicable, conduciendo a las HCEs expresadas mediante las ecuaciones (2.20, 2.21). También se mostró que las desviaciones  $(\tilde{x}(t), \tilde{\lambda}(t))'$  de la trayectoria óptima seguían aproximadamente una dinámica lineal

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & -\frac{1}{2}W_c \\ -2Q_c & -A'_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0, \\ \tilde{\lambda}(T) &= 2s\tilde{x}(T), \end{aligned} \quad (3.209)$$

donde los coeficientes matriciales toman la forma (véase [21])

$$\begin{aligned} A_c &= f_x - f_u H_{uu}^{-1} H_{ux}; \quad W_c = 2f_u H_{uu}^{-1} f'_u; \\ Q_c &= \frac{1}{2}(H_{xx} - H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux}), \end{aligned} \quad (3.210)$$

con todas las derivadas parciales evaluadas en las trayectorias óptimas  $x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)$ . Se debe notar (ver [17, 106]) que la dinámica en la ecuación (3.209) tiene la misma estructura (Hamiltoniana) que las ecuaciones (3.106) de un problema LQR autónomo. La solución de la ecuación (3.209) verificará  $\tilde{\lambda}(t) = 2P_c(t)\tilde{x}(t)$ , con  $P_c(t)$  solución de la ecuación (3.201) con condición final  $\pi(T) = sI$ .

También se sabe [21] que el control adecuado para hacer las compensaciones es

$$\hat{u} = -H_{uu}^{-1}(H_{ux} + 2f'_u P_c(t)) \hat{x}, \quad (3.211)$$

donde  $\hat{x}$  denota la estimación de las desviaciones  $\tilde{x} = x - x^*$  obtenida via un observador a partir de la desviación de la salida  $y - Cx^*$ . Por lo tanto, se vuelve esencial tener la solución  $P_c(t)$  on-line para la aplicación del esquema 2DOF, y esto es posible si  $P_c(0)$  fuera conocido y de esa manera se pudiera integrar la DRE en paralelo con el esquema y el proceso real. Ahora, se puede verificar fácilmente ([21, 34, 46]) que

$$\mathbf{H}_c(t) \triangleq \begin{pmatrix} A_c(t) & -\frac{1}{2}W_c(t) \\ -2Q_c(t) & -A'_c(t) \end{pmatrix} = D\mathcal{X}_c(x^*(t), \lambda^*(t)), \quad (3.212)$$

donde  $\mathcal{X}_c$  es el campo vectorial Hamiltoniano correspondiente a  $f, L$ . Entonces, denotando  $\mathcal{A}(t, s) = \mathbf{H}_c(t)$ , y renombrando la definición de  $V$  en la ecuación para el flujo  $\phi$  correspondiente

al campo vectorial  $\mathcal{X}_c$ , las ecuaciones (3.186, 3.204) son válidas para los objetos apropiados, es decir,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 2sI \end{pmatrix}, \quad (3.213)$$

$$\sigma = \tilde{\lambda}(0) = 2P_c(0)\tilde{x}_0 = \beta(T, s) [\alpha(T, s)]^{-1} \tilde{x}_0, \quad (3.214)$$

En lo que sigue, siempre que las ecuaciones PDEs variacionales para el sistema lineal variante en el tiempo (3.209) (ver [47, 46]) sean resueltas para  $V$ , el valor de

$$P_c(0) = \frac{1}{2} \beta(T, s) [\alpha(T, s)]^{-1} \quad (3.215)$$

estará disponible, y por lo tanto la matriz  $P_c(t)$  (necesaria en la etapa de compensación de ruidos y perturbaciones del esquema 2DOF) podría ser integrada on-line como un problema de condiciones iniciales, es decir la ecuación (3.201) con  $\Pi(0)=P_c(0)$  dada por (3.215).

### 3.4. Discusión y conclusiones.

En este capítulo se diseñó estrategias eficientes para tratar problemas regulares de cambio de set-point óptimo en el contexto de sistemas no lineales multidimensionales. Se substanció las llamadas “PDEs variacionales” que encuentran las condiciones de borde faltantes de las HCEs: el estado final ( $\rho(T, S)$ ) y el coestado inicial ( $\sigma(T, S)$ ), para un proceso de duración fija  $T$  y un coeficiente matricial de penalización final  $S$ . La importancia teórica de estas PDEs radica en el hecho de que gracias a la recuperación del estado inicial es posible integrar en tiempo real las HCEs. Sin embargo, esta ley de control casi siempre es una ley de feedforward, la cual es muy útil para conducir al proceso no lineal de su equilibrio inicial a otro estado final, aunque no para rechazar posibles perturbaciones de proceso.

A través de las diferentes aplicaciones a procesos se remarcó que las PDEs pueden ser usadas como herramienta de diseño del controlador. Por un lado, los valores de  $T, S$  pueden ser reconsiderados por el diseñador sabiendo qué valores finales del estado  $\rho(T, S)$  obtendrá en esa configuración. Si un cambio en los parámetros ha sido decidido, entonces no será necesario realizar cálculos adicionales para manejar la nueva situación. Además, el valor de  $\sigma(T, S)$  es una medida precisa del costo “marginal” del proceso, es decir, mide cuánto el costo del proceso cambiaría bajo perturbaciones en el estado inicial, lo cual podría influir en la elección del par  $(T, S)$ .

Para sistemas lineales se destacan los siguientes resultados:

- Para el caso autónomo multidimensional se describió las PDEs auxiliares  $\alpha(T, S)$ ,  $\beta(T, S)$  por medio de las ecuaciones (3.124, 3.125) que en conjunto con las relaciones (3.129) permiten calcular las condiciones de borde faltantes de sus respectivas HCEs, para cualquier tipo de matriz  $S$ : escalar, diagonal, o completa cuadrática y definida positiva.

- Sin embargo, el alcance de las soluciones va más allá de eso, también es posible calcular la solución de la DRE on-line a partir de las soluciones de  $\alpha$ ,  $\beta$  utilizando la ecuación (3.144). Este resultado es de gran importancia no sólo en el contexto de sistemas lineales sino también en las estrategias 2DOF descritas en el Capítulo 3, ya que se mostró que la solución de la ecuación variacional  $V(T, S)$  de un sistema no lineal dada por la ecuación (3.105), también verifica una ecuación diferencial para un sistema lineal, que precisamente es la linealización del sistema Hamiltoniano. Posteriormente, este resultado será utilizado para generar la ganancia de retroalimentación y filtrado en las estrategias H2DOF.
- Para sistemas lineales variantes en el tiempo se mostró que es posible resolver el problema de control óptimo utilizando las PDEs no lineales autónomas (3.97-3.98) mediante un cambio de variables estándar, donde el tiempo se toma como un estado adicional.

Y para sistemas no lineales se obtuvo:

- Principalmente, se desarrolló y se ilustró un procedimiento efectivo para la construcción de estrategias óptimas de control implementables totalmente on-line para cambios de set-point y regulación óptimos. La generación de trayectorias es un factor importante en muchos procesos de ingeniería y biomedicina, por ejemplo, en el control de procesos por lotes o “batch”. El núcleo de estas estrategias son las PDEs (3.97-3.98) que permiten calcular las condiciones iniciales de los coestados, y por lo tanto el control óptimo en paralelo con el proceso.
- En el caso de la dinámica del vehículo aéreo se extendió las PDEs del Capítulo 2 que son útiles en problemas de regulación a otras que consideran el problema de cambio de set-point, además se dieron algunas ideas de cómo abatir perturbaciones puntuales a la vez de ir generando la trayectoria del proceso.
- En el caso del problema regular pero con ley implícita de control se desarrolló un esquema que permite resolver el problema de control óptimo al adicionar una ecuación diferencial para la acción de control y una PDE para recuperar sus condiciones de borde, asumiendo suavidad en los controles admisibles.

## Capítulo 4

# Estrategias de control H2DOF

En este Capítulo se condensan la mayoría de las herramientas desarrolladas hasta el momento en un esquema de control que se ha denominado “control Hamiltoniano con dos grados de libertad” (H2DOF por su sigla en inglés), el cual es aplicado en su totalidad a un ejemplo clásico de Ingeniería Química, el reactor tanque agitado continuo (CSTR). Este esquema de control óptimo está construido desde el punto de vista del formalismo Hamiltoniano, donde se optimizan al mismo tiempo dos controles, el de feedforward y el de feedback, con respecto al mismo funcional de costo. El Hamiltoniano original gobierna la dinámica a través del control feedforward, y sus derivadas lo hacen como parte de la ganancia feedback, eliminando cualquier desviación de los estados. Las trayectorias óptimas de salidas y estados son totalmente generadas on-line, y seguidas por una combinación de herramientas óptimas para sistemas determinísticos y estocásticos. Los datos relevantes para poder manipular todas estas herramientas provienen de la llamada “etapa de diseño” del control H2DOF off-line, donde se resuelven las ya conocidas PDEs “variacionales” (ver Capítulo 3) y de las cuales se obtienen las condiciones iniciales necesarias, no sólo para las HCEs sino también para la DRE de la componente de feedback del compensador, dado un respectivo par de valores de  $(T, S)$ . A través del ejemplo práctico se muestra también que esta estrategia es particularmente útil para manejar procesos desde un equilibrio hacia un estado final deseado (no necesariamente otro equilibrio dinámico) en el contexto de optimización con horizonte finito.

### 4.1. Estrategias two-degrees-of-freedom (2DOF) en el contexto de los procesos no lineales. Variante Hamiltoniana (H2DOF).

Las alinealidades de la dinámica en un reactor químico plantean un interesante problema de control, especialmente cuando se requiere optimizar múltiples criterios. El diagrama de espacio de fases para sistemas no lineales adopta diferentes formas, que por lo general son más complejas que las generadas por sistemas lineales, dado que pueden aparecer bifurcaciones, ciclos

límites o atractores extraños en alta dimensiones [109, 29]. Estos diagramas eventualmente pueden cambiar, inclusive estructuralmente, sobre todo cuando los parámetros de la dinámica varían (los valores de equilibrio de control pueden ser considerados como parámetros cuando cada variable manipulada es proporcional a alguna variable física del proceso como temperatura o flujos (véase [8], especialmente Cap. 4). Consecuentemente, cambiar la operación de un punto de estado estacionario hacia otro en reactores químicos, o intentar alcanzar un estado final deseado en algún sentido óptimo como en las operaciones batch, o hacer regulación cuando fuertes desviaciones están presentes, podría implicar trabajar cerca de flujos complicados, puntos de bifurcación u orbitas periódicas, donde la información del modelo y la precisión del controlador son esenciales. Por otra parte, para algunos reactores químicos, el gráfico de valores de equilibrios de control contiene curvas cerradas en el diagrama de los puntos de equilibrio, una situación descrita en la literatura como “sistema con multiplicidad de controles de equilibrio” (o input multiplicity, en inglés, tal como se puede ver en la gráfica 4.3). Por lo tanto, en estos casos, cambios de set-point no siempre involucran cambios en el equilibrio final de la variable manipulada (un parámetro cuyo valor puede ser optimizado a priori). Ese tipo de comportamientos presentan serios problemas operativos y demuestran la necesidad de estrategias de control en lazo cerrado o feedback muy precisas, particularmente cuando el proceso es inestable a lazo abierto, o cuando exhibe oscilaciones no lineales [105]. Otras características comunes en procesos que causan dificultad en su control son las fuertes no linealidades en las interacciones entre las variables manipuladas y las variables a controlar, la existencia de estados no medidos y las frecuentes perturbaciones en las señales de entrada-salida [14].

Los reactores químicos son ejemplos clásicos de procesos no lineales en la literatura de teoría de control ([29, 61, 7, 80], y sus referencias). Varias técnicas de control avanzado para sistemas no lineales han sido desarrolladas (y pueden ser consultadas en un extensa revisión bibliográfica realizada por [14]). El control de reactores CSTR se vuelve importante, sobre todo si se trata de cambios de set-point, ya que al moverse significativamente de sus equilibrios, las trayectorias pueden acercarse a una de las situaciones antes descritas. Otros puntos (por lo general no necesariamente equilibrios) podrían ser deseables de alcanzar, tal como sucede en procesos batch. En tales procesos, la trayectoria nominal y su seguimiento deben ser optimizados hasta que la condición de parada sea alcanzada al final del horizonte propuesto.

Aparte de los métodos heurísticos, existe un rango de técnicas de control basadas en modelos de proceso, tal como lo es el control predictivo basado en modelos (MPC de su sigla en inglés), que se ha convertido en la más citada en la literatura actual de teoría de control. Este método es esencialmente numérico y usualmente implementado on-line, pero requiere de una capacidad y velocidad de cómputo bastante importantes. La mayoría de los procesos industriales donde se la ha aplicado con éxito pertenecen a las plantas petroquímicas y refinerías, donde los procesos se están moviendo cerca de sus estados estacionarios, por lo que las linealizaciones del modelo

resultan aproximaciones muy buenas. Solamente pocos paquetes de softwares comerciales sugieren la utilización de esta técnica para procesos altamente no lineales y procesos batch [99], aunque recientemente varias aplicaciones de MPC no lineal han sido reportadas en [24], [15] y [83].

En este Capítulo, el esquema mostrado en la Figura 4.1 es adaptado al contexto de control óptimo. Este esquema pretende construir una trayectoria de referencia y hacer el seguimiento de la misma en presencia de perturbaciones (véase [89, 43, 46]). Las estrategias 2DOF han sido adaptadas a varios contextos y aplicados a reactores CSTR. En [79], p. ej., la estabilidad asintótica local en estado estacionario es alcanzada en sistemas de control a lazo cerrado. Sin embargo, la metodología es analizada en base a nuevas variables abstractas resultantes de una linealización global del sistema no lineal.

Las principales características de la metodología presentada en este capítulo son: (i) la trayectoria nominal es óptima y generada on-line, y (ii) la etapa de compensación es diseñada bajo el mismo criterio de optimización usada para calcular la trayectoria nominal. En lugar de tener una receta (como es normal en procesos batch, con las curvas de referencia), la trayectoria de estados es solución de las ya introducidas HCEs, las cuales manejan todas las alinealidades del proceso. Esta integración es posible gracias al empleo de las PDEs discutidas en el Capítulo 3, cuyas soluciones proveen las condiciones de contorno faltantes en las HCEs en función de los parámetros  $T$  y  $S$ . Al final un filtro óptimo es diseñado para generar la componente de compensación basado en el error  $\hat{x} = x - x_d$ , donde  $x_d$  es el estado deseado, que en este capítulo será la trayectoria óptima de estados  $x^*$ . En particular, la estimación óptima de las desviaciones  $\hat{x}$ , en el sentido de mínimos cuadrados, es la solución de la ecuación diferencial del filtro Kalman-Bucy (véase [40] para más detalles al respecto).

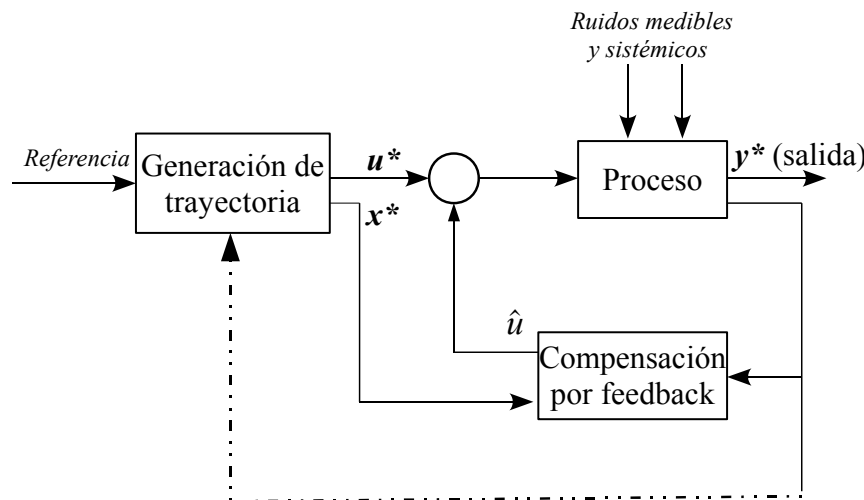


Figura 4.1: Diagrama de bloques general de la estrategia de control “Two-degrees-of-freedom”.

En las próximas secciones se realizará una aplicación del esquema de control H2DOF aplicado al modelo no lineal de un reactor CSTR [105], con el fin de analizar y ampliar las herramientas óptimas desarrolladas hasta el momento. Las ecuaciones del CSTR corresponden a una reacción irreversible que toma lugar en un contenedor perfectamente agitado. Hay claramente dos variables que pueden ser controladas y sólo una para ser manipulada (el flujo de alimentación). Un apareamiento de entrada/salida no es posible ya que ambos estados tienen que ser optimizados. Los estados óptimos (nominales) provienen de la solución de las HCEs, las cuales corren en paralelo con el proceso.

## **4.2. Control óptimo de un reactor químico continuo tipo tanque agitado (CSTR) con reacción exotérmica.**

El caso estudio de este Capítulo es una reacción exotérmica de primer orden e irreversible de la forma ( $A \rightarrow B$ ), con refrigeración, modelada a través de dos ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) obtenidas de los balances de materia y energía (asumiendo que el volumen del tanque es constante, que existe agitación perfecta y que los parámetros son constantes) [105]. Las ecuaciones adimensionales para la composición ( $x_1$ ) y la temperatura ( $x_2$ ) son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\theta x_1 \exp\left(\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}\right) + (q_0 + u)(x_{1f} - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \theta\beta x_1 \exp\left(\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}\right) - \delta x_2 + (q_0 + u)(x_{2f} - x_2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Se ha asumido que el flujo adimensional de alimentación  $q$  es la única variable posible para ser manipulada. Usualmente se elige a la variable manipulada de tal manera que se mueva alrededor de un valor fijo de equilibrio  $q_0$ , por lo que una definición para la variable de control podría ser  $u = q - q_0$ . Valores típicos de los parámetros a utilizar en este modelo son:  $\theta = 0.135$ ,  $\gamma = 20.0$ ,  $x_{1f} = 1.0$ ,  $\beta = 11.0$ ,  $x_{2f} = 0.0$ , y  $\delta = 1.5$ . La variable independiente es un tiempo adimensional definido como  $\tau = t/t_c$ , donde  $t$  es el tiempo real y  $t_c$  es un tiempo característico del reactor que está en el orden de un minuto (véase [105, 40]). Cada simulación numérica consume alrededor de un segundo de tiempo de cómputo, lo cual indica que realmente es factible realizar cálculos online. Cuando la dinámica de enfriamiento en la camisa del reactor se vuelva relevante, entonces el modelo del reactor se convertiría en un sistema MIMO (multiple entrada, multiple salida) con los mismos dos estados, pero con dos controles: el flujo  $q$  y la velocidad de enfriamiento. Sin embargo, el único caso que se tratará será el de una entrada (con  $q$ ), dos estados ( $x_1, x_2$ ) y una salida ( $x_2$ ).

El diagrama de espacio de fases correspondiente al sistema (4.1) para  $q_0 = 3$  se ilustra en la Figura 4.2. Se puede observar el comportamiento cualitativo del sistema asociado a múltiples equilibrios. Dado que  $q$  es el flujo de alimentación adimensional, el problema operacional aparece

cuando se intenta cambiar de un estado a otro (o set-point) sin cambiar el valor final de  $q$  (posiblemente dictado por el funcionamiento en estado estacionario del resto de la planta). Esto es porque la trayectoria de estado tiene que navegar a través de potenciales condiciones adversas dentro de la forma del diagrama de espacio de fases.

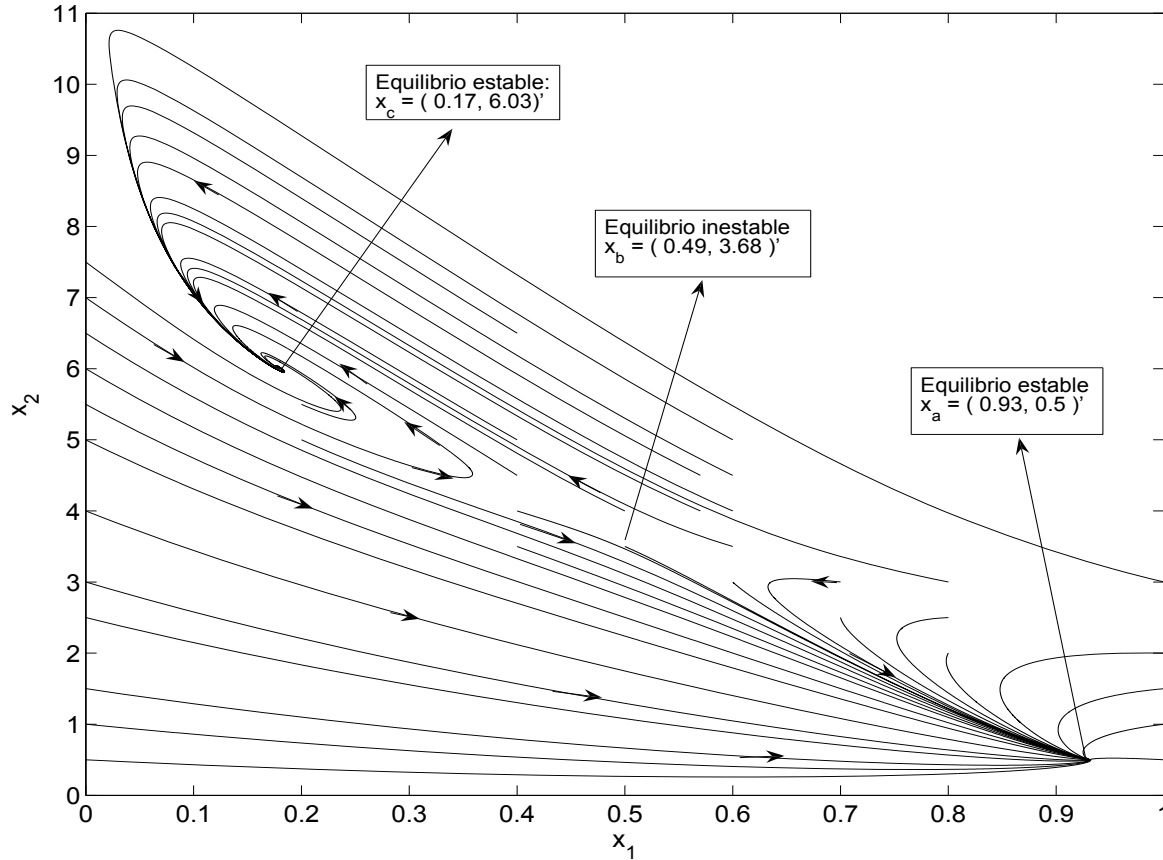


Figura 4.2: Espacio de fases para  $q_0 = 3$ .

El sistema dinámico tiene tres equilibrios los cuales son mostrados en la Figura 4.2:

$$x_a = \begin{pmatrix} 0.9316 \\ 0.5014 \end{pmatrix}, x_b = \begin{pmatrix} 0.4979 \\ 3.68153 \end{pmatrix}, x_c = \begin{pmatrix} 0.1776 \\ 6.0306 \end{pmatrix},$$

donde  $x_a$  y  $x_c$  son los equilibrios estables y  $x_b$  es el inestable.

Este reactor CSTR exhibe multiplicidades de controles de equilibrio tal y como es mostrado en la Figura 4.3. Las multiplicidades de entrada pueden ser vistas en la parte baja de la gráfica en la curva plana de estado estacionario y en la "isla" (la curva cerrada o lazo aislado de soluciones de estado estacionario que comienza en un punto de bifurcación bien definido). Este tipo de comportamiento está bien documentado en [113] y sus referencias. En la Figura 4.3, la línea punteada muestra como la ganancia del proceso en estado estacionario tiene signo diferente en la curva plana de la parte baja y en la parte superior e inferior de la isla. El sistema es



estable a lazo abierto a lo largo de la curva de operación estable en la parte baja del diagrama (denominada “rama estable”).

La presencia de multiplicidades (es decir, múltiples salidas pueden provenir de la misma entrada) e isolas en un sistema podrían degradar severamente el desempeño de controladores en lazo cerrado. Por ejemplo, en el “pico” de la curva de estados estacionarios la ganancia de entrada-salida es cero, así que el sistema sería inherentemente no controlable [105]. Las multiplicidades de salida (como sucede en este reactor) requieren de un análisis más sofisticado cuando se está por diseñar la estrategia de control, ya que el flujo del sistema es cualitativamente más complejo que los sistemas clásicos lineales. Un ejemplo de esta consideración es el siguiente: si la condición inicial es cercana a  $x_b$  (en Figura 4.2), entonces no hay certidumbre sobre hacia dónde llevaría al sistema si el control de equilibrio  $\bar{u} = 0$  fuera aplicado, ya que para ese valor de entrada hay dos equilibrios más  $x_a$  y  $x_c$ . Consecuentemente, es necesario diseñar estrategias alternativas de control, las cuales tomen en cuenta al estado final deseado.

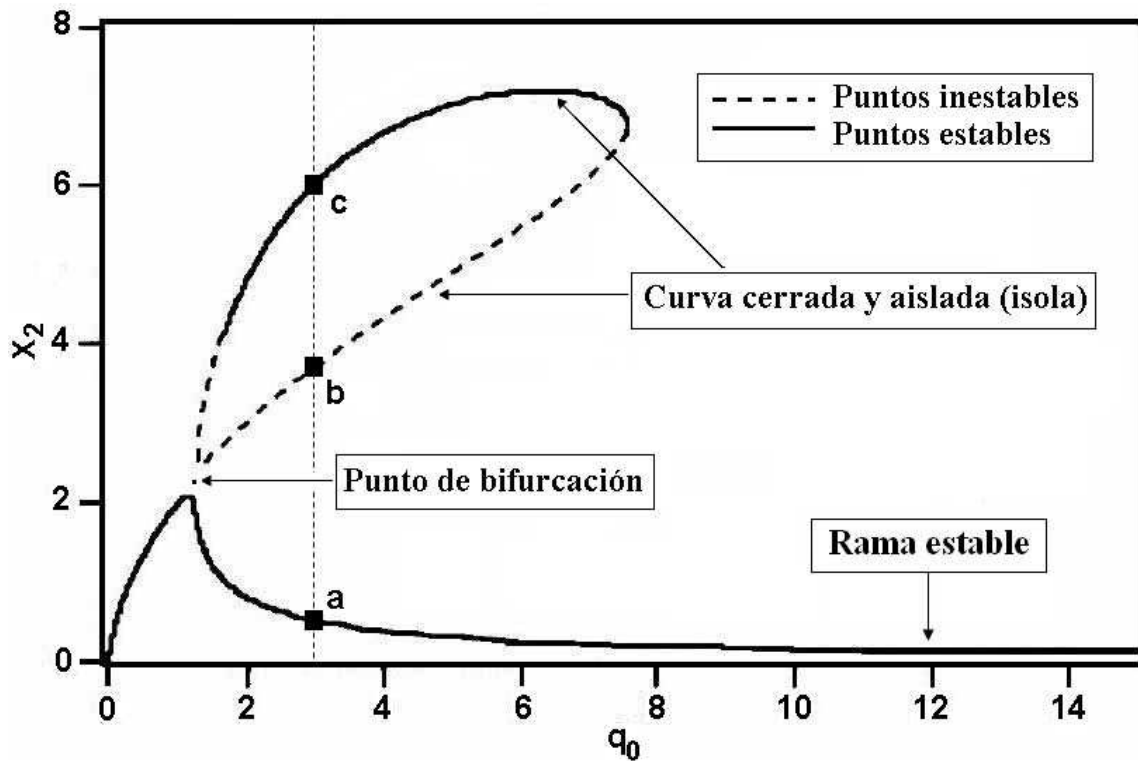


Figura 4.3: Relaciones de entrada-salida del reactor CSTR con reacción exotérmica.

### 4.3. Generación de la trayectoria óptima nominal para el CSTR.

Esta sección describe un cambio de set-point desde un equilibrio estable hacia otro, también estable, correspondientes a diferentes valores de flujo de alimentación  $q_0$ . El estado inicial será

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.8283 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

el cual es un equilibrio con  $q_0 = 1.68812$ . La referencia o set-point es  $\bar{x} = x_a = (0.9316 \quad 0.5014)'$  correspondiente a  $\bar{u}_a = 0$  (o  $q_0 = 3$  según la Figura 4.3), es decir, que todos los valores de la acción de control serán tomados en relación al valor  $q_0 = 3$ . El funcional de costo  $\mathcal{J}$  adoptado para optimizar el reactor CSTR es el típico funcional cuadrático en tiempo finito  $T$  y con coeficiente de penalización final  $S$ ,

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T [(x(t) - \bar{x})'Q(x(t) - \bar{x}) + Ru^2(t)] dt + (x(T) - \bar{x})'S(x(T) - \bar{x}), \quad (4.3)$$

el cual asume un compromiso entre ir lo más rápido posible a su estado estacionario deseado  $\bar{x}$  versus usar el control tan cerca como sea posible a su respectivo valor de equilibrio  $\bar{u}$ , que para este caso es  $q_0 = 3$  o  $u = 0$ . En esta formulación,  $Q \geq 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  penaliza las desviación del estado,  $R > 0 \in \mathbb{R}$  penaliza el esfuerzo de control y  $S \geq 0 \in \mathbb{R}$  penaliza las desviaciones finales del estado de su referencia. Para los cálculos numéricos se eligieron  $Q = 30I_{2 \times 2}$ ,  $R = 4$  y  $\bar{x} = x_a$ .

A continuación se aplicó el procedimiento para resolver el problema de control óptimo de cambio de set-point de acuerdo al formalismo Hamiltoniano detallado en el Capítulo 2, sección 2.2. Según la ecuación (2.12), el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  para este caso resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, \lambda, u) = & 30(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 30(x_2 - \bar{x}_2)^2 + 4u^2 + \lambda_1 \left( -\theta x_1 \exp \left( \frac{x_2}{1 + x_2/\gamma} \right) + \dots \right. \\ & \left. (q_0 + u)(x_{1f} - x_1) \right) + \lambda_2 \left( \theta \beta x_1 \exp \left( \frac{x_2}{1 + x_2/\gamma} \right) - \delta x_2 - (q_0 + u)x_2 \right). \end{aligned}$$

El control  $\mathcal{H}$ -óptimo (ecuación (2.19)), extraída de la condición  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x, \lambda, u) = 0$ , se escribe como

$$u^0(x, \lambda) = \frac{1}{8} (\lambda_1^* (x_1^* - 1) + \lambda_2^* x_2^*). \quad (4.4)$$

La ecuación (4.4) permite calcular el Hamiltoniano óptimo  $\mathcal{H}^0(x^*, \lambda^*)$  utilizando la ecuación (2.15). Se debe notar que esta ley de control no depende exclusivamente de los estados, sino también de los coestados. Como los coestados no son información física que se puede ir recolectando a través de mediciones con el funcionamiento del proceso, es imposible hacer un control retroalimentado o feedback. Por esta razón se dice que el control de la ecuación (4.4) es una ley

feedforward o a lazo abierto. Este control permite plantear el problema Hamiltoniano con condiciones de contorno mixtas, es decir, las HCEs (2.20-2.21), y por lo tanto construir las correspondientes PDEs desarrolladas en el Capítulo 3 y expresadas por las ecuaciones (3.105), (3.97) y (3.98) para la ecuación variacional  $V(T, S)$ , el estado final  $\rho(T, S)$  y el coestado inicial  $\sigma(T, S)$ , respectivamente.

En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran las soluciones de las PDEs para un horizonte de optimización igual a  $T = 2$  y un coeficiente matricial de penalización final caracterizado por  $sI$  en el intervalo  $[0, 10]$ . Estas figuras ilustran cómo el estado final y el coestado inicial cambian para los distintos pares  $(T, S)$ . En este punto se hace hincapié en que dichas soluciones no son evoluciones temporales de los estados o coestados obtenidos de las ODEs (2.20-2.21) (véase capítulos anteriores).

De las soluciones de las PDEs se debe elegir el  $T$  y  $S$  que mejor cumplan con los requerimientos de diseño en cuanto a que valor final se requiere alcanzar y en que período de tiempo. Para la mayoría de los casos tomar grandes valores de  $S$  reducirá el error final entre los estados deseados y finales alcanzados, pero esto, en general, involucra mayores costos  $\mathcal{J}$ .

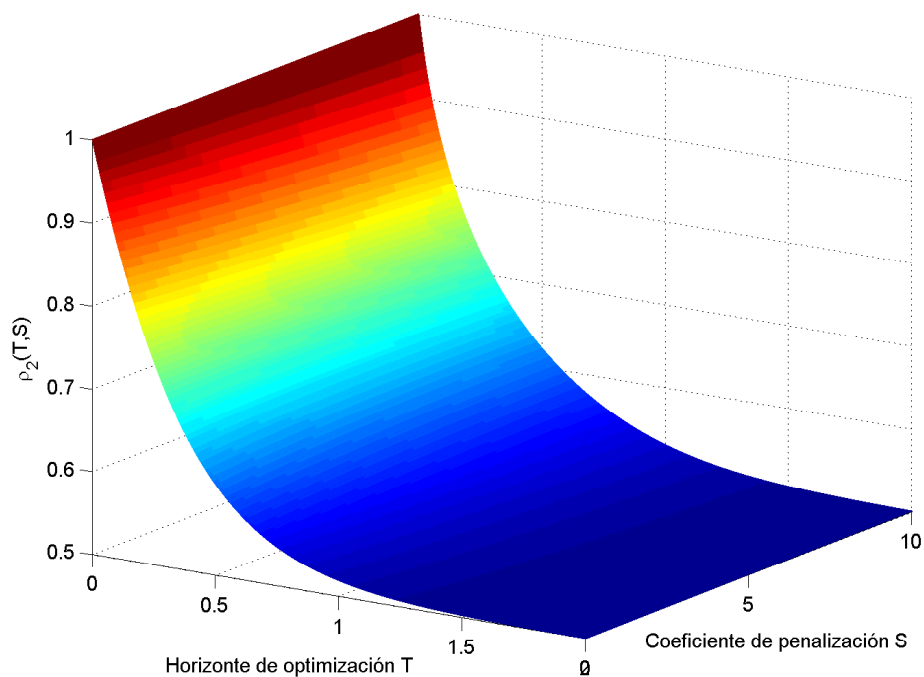


Figura 4.4:  $\rho_2(T, S)$  estado final para el problema de cambio de set-point.

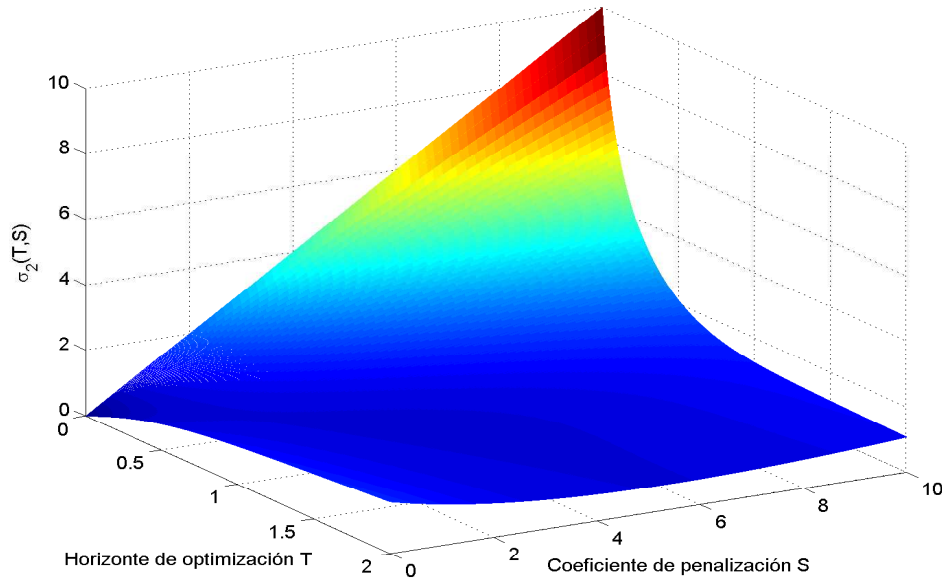


Figura 4.5:  $\sigma_2(T, S)$  coestado inicial para el problema de cambio de set-point.

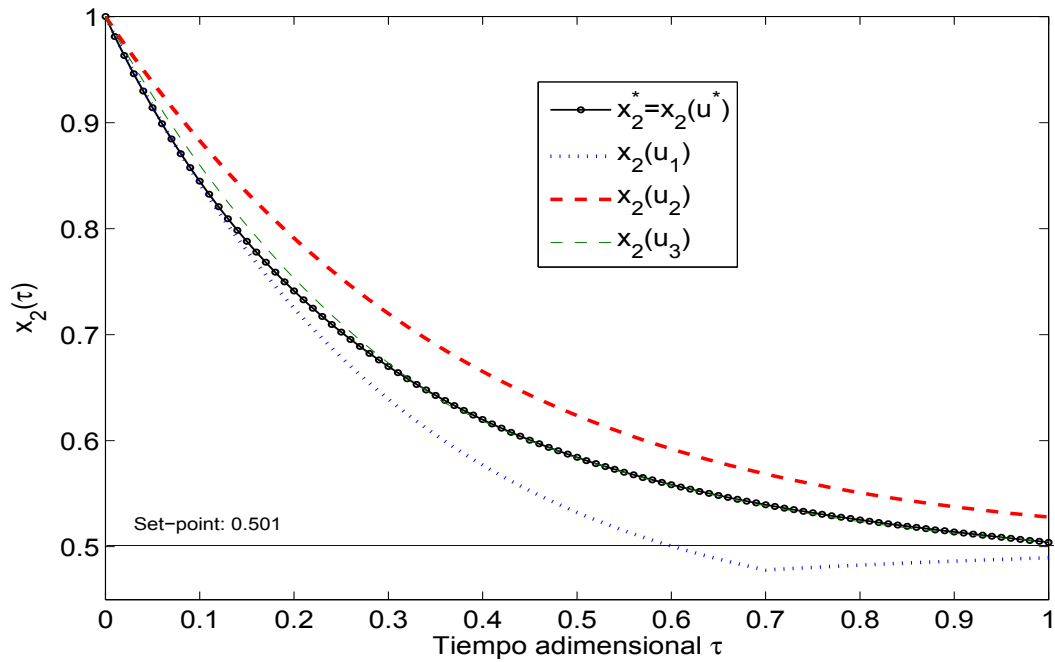


Figura 4.6: Trayectorias de estado  $x_2(\tau)$  correspondientes a los controles de la Figura 4.7.

De la inspección de las Figuras 4.4 y 4.5, se eligió el par  $(T, S) = (1.0, 3.5)$  para las evaluaciones numéricas concernientes al problema óptimo de cambio de set-point del CSTR. Los estados finales recuperados de las soluciones de las PDEs correspondientes a  $T = 1.0$  y  $s = 3.5$ ,

donde  $x_1 = 0.9275$ ,  $x_2 = 0.504$  extraídas de las PDEs, satisfactoriamente coinciden con los estados deseados  $x_a$ . Los coestados iniciales recobrados son:  $\lambda_1 = 2.05784$  y  $\lambda_2 = 5.19785$ . Las PDEs fueron resueltas utilizando el paquete de software Mathematica.

La Figura 4.6 muestra la evolución óptima del estado  $x_2$  (ya que  $x_2$  fue naturalmente adoptado como la salida del sistema ) resultante de la integración de las HCEs con condiciones iniciales. Claramente,  $x_2$  llega bastante cerca de su referencia, es decir, el off-set final está dentro del 2% a 5% aceptado como norma ingenieril. Se debe aclarar que normalmente el off-set se define como un error de estado estacionario, sin embargo, como la duración del proceso es menor que el tiempo necesario para el estado estacionario, aquí se redefine el off-set como el error final entre el estado alcanzado y el estado deseado al final del horizonte.

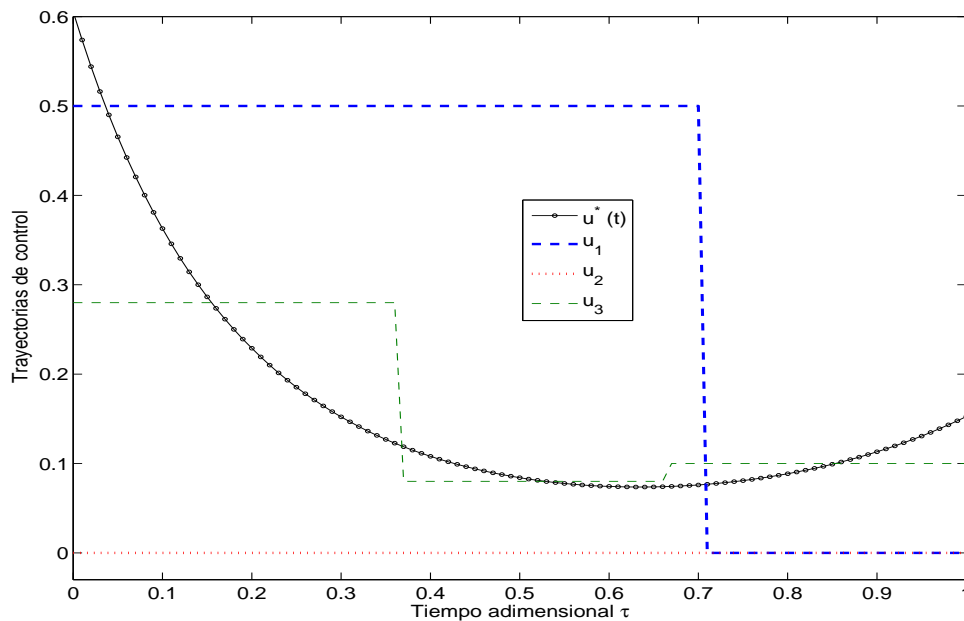


Figura 4.7: Algunas trayectorias de control usadas para verificar optimalidad.

Diferentes estrategias de control (graficadas en la Figura 4.7) fueron aplicadas al sistemas para determinar (al menos numéricamente) si el control obtenido  $u^*$  es realmente el óptimo. Las trayectorias de estado que se obtienen para estos controles son mostradas en la Figura 4.6, y el costo de trayectoria y el total para cada control son ilustrados en la Figura 4.8. Los controles de comparación de optimalidad que se probaron fueron los siguientes:  $u_1(\tau) = \begin{cases} 0.5, & \tau \in [0, 0.7) \\ 0.0, & \tau \in [0.7, 1) \end{cases}$ ,  $u_2(\tau) = 0 \forall \tau$ , y  $u_3(\tau)$  una concatenación de “escalones” con valores intermedios entre los valores iniciales y finales del óptimo  $u^*(\tau)$ . El error relativo u “offset” para las trayectorias de estado estuvo en el orden del 0.3% para la óptima, y mayores para el resto de controles. La trayectoria de control óptima muestra un comportamiento clásico de la optimización en

tiempo finito (véase [21]), es decir, toma valores relativamente altos de control al comienzo y al final del período de optimización. Los valores iniciales altos pueden corresponderse a la fuerte penalización de la diferencia del estado con respecto a su valor deseado expresado en el funcional de costo por medio del coeficiente  $Q = 30I$ . Una vez esta desviación disminuye, lo mismo hace  $u^*$  debido a que posiblemente el costo del esfuerzo de control se vuelve importante (ya que está penalizado por un coeficiente  $R = 4$ ). Sin embargo, la penalización final hace que el control suba su valor nuevamente por encima de 0.15, lo cual es mucho más que su valor de equilibrio  $\bar{u}_a = 0$ . En la zona ampliada de la gráfica 4.8, se puede visualizar el salto de la trayectoria de costo (para todos los controles de la Figura 4.7) debido a la penalización final aplicada al final del horizonte en  $\tau = 1$ .

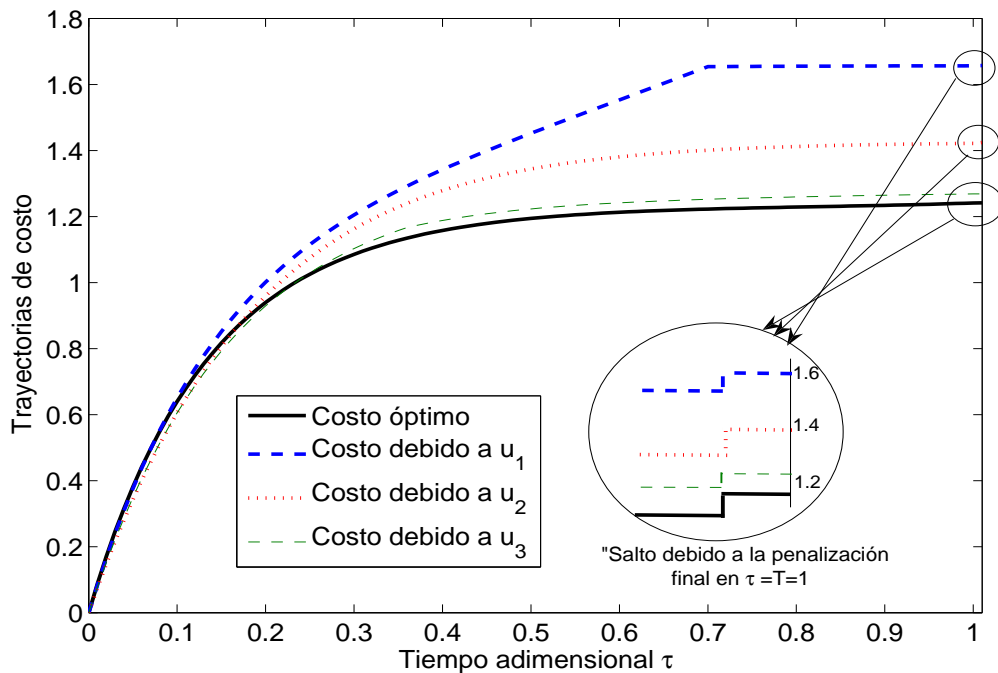


Figura 4.8: Trayectorias de costo y costo total acumulado en  $\tau = 1.0$  correspondientes a los controles de la Figura 4.7.

Por propósitos comparativos de costo y costo computacional, se hizo un intento por tratar el problema visto mediante el contexto de control predictivo basado en modelo (MPC de su sigla en inglés) a través del software llamado “Multi-Parametric toolbox” (MPT) para Matlab. La estrategia de control resultante mostrada en la Figura 4.9, en conjunto con la evolución de la ecuación diferencial del costo correspondiente y a la vez comparada con la evolución del costo óptimo obtenido anteriormente. Como era de esperarse, el costo total final del MPC fue mayor al del óptimo hallado, aunque crece mucho más despacio durante el período inicial. El funcional de costo usado en la comparación fue el mismo (cuadrático) para ambas técnicas. El esfuerzo

computacional entre ambas estrategias fue comparado de la siguiente manera:

- Para el MPC, el tiempo de cálculo reportado por el software MPT para un horizonte de predicción igual al de control de 50 tiempos de muestreo fue de 50 segundos. El esfuerzo de control on-line no pudo ser adecuadamente medido ya que sólo se trata de simulaciones y no de tiempo real. La generación de la trayectoria de estados fue rápida, pero acciones de compensación y/o recalculaciones del control debido a desigualdades entre el estado predicho y el medido no están habilitadas en el software.
- Para el método de las PDEs, el tiempo de cálculo off-line estimado por el software Mathematica fue de 9 segundos. La trayectoria de estados completa on-line (es decir, incluyendo generación y compensación de desviaciones tal como se ilustra en las Figuras 4.10 y 4.11) fue generado en 15 segundos, los cuales están por debajo del tiempo característico de  $t_c = 60$  segundos. Esto implica que las estrategias diseñadas pueden ser realmente implementadas en una aplicación on-line en paralelo con el proceso a controlar.

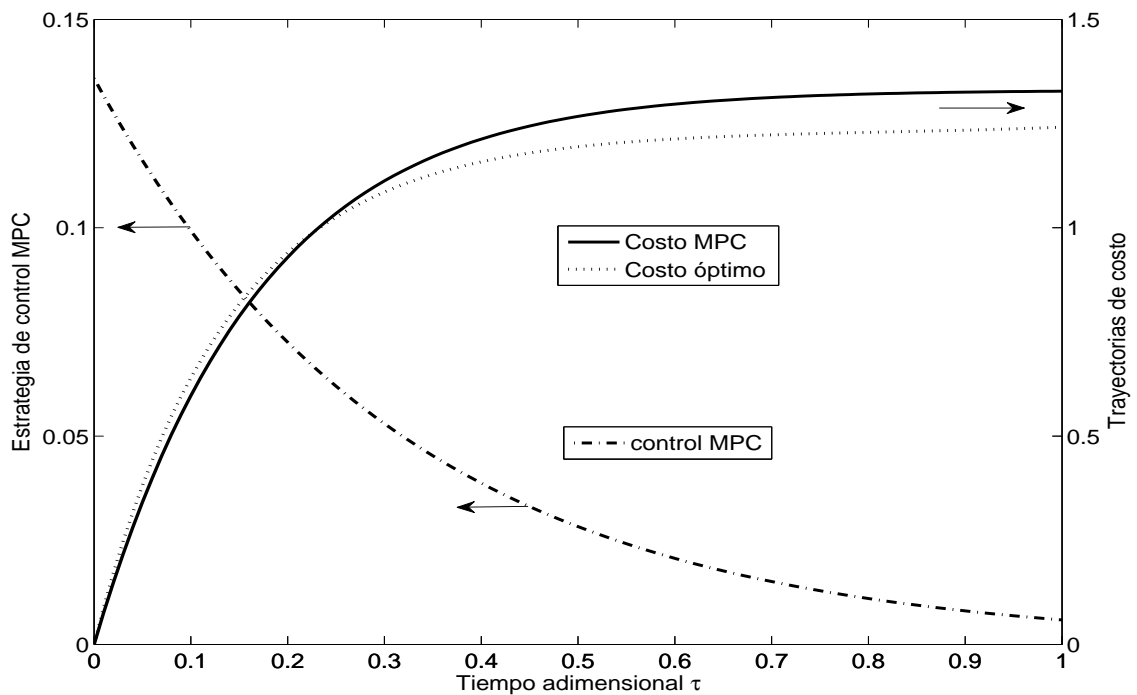


Figura 4.9: Comparación en costos entre la metodología MPC y la óptima desarrollada. La estrategia de control del MPC es dibujada también, con valores en el eje izquierdo.

## 4.4. Compensación on-line de las trayectorias óptimas perturbadas.

### 4.4.1. Compensación Hamiltoniana por feedback y linealización a lo largo de la trayectoria óptima.

La solución óptima del estado  $x^*(\cdot)$  proveniente de la integración de las HCEs provee una trayectoria de referencia o deseada. Pero, en cualquier tiempo  $t$ , el estado  $x(t)$  que viene del proceso real podría diferir del óptimo generado por las HCEs  $x^*(t)$  debido a la presencia de perturbaciones en las señales. Para abatir el efecto de dichas perturbaciones un control de desviación  $\hat{u}(\cdot)$  se debe añadir al control óptimo Hamiltoniano  $u^*(\cdot)$  ( $= u^0$  calculado a partir de la ecuación (4.4)). Si las perturbaciones son relativamente pequeñas, entonces las variables “óptimas” de desviación

$$\hat{x}(t) \triangleq x(t) - x^*(t), \quad \hat{\lambda}(t) \triangleq \lambda(t) - \lambda^*(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.5)$$

tiene que seguir aproximadamente la siguiente dinámica:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^*(t) = f(x, u^0(x, \lambda)) - f(x^*, u^0(x^*, \lambda^*)) \approx (f_x + f_u u_x^0) \hat{x}(t) + f_u u_\lambda^0 \hat{\lambda}(t), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\lambda}}(t) = \dot{\lambda}(t) - \dot{\lambda}^*(t) &= - \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, u^0(x, \lambda)) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*, u^0(x^*, \lambda^*)) \right]' \approx \\ &\approx - \left[ (\mathcal{H}_{xx} + \mathcal{H}_{xu} u_x^0) \hat{x}(t) + (f_x - u_\lambda^0 \mathcal{H}_{uu} u_x^0)' \hat{\lambda}(t) \right]', \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $u_x^0 = -\mathcal{H}_{uu}^{-1} \mathcal{H}_{ux}$  y  $u_\lambda^0 = -\mathcal{H}_{uu}^{-1} f'_u$  (calculados a partir de las derivadas de la condición óptima  $\mathcal{H}_u(x, \lambda, u^0(x, \lambda)) = 0$  con respecto a  $x$  y  $\lambda$ , respectivamente). Todas las derivadas parciales de  $\mathcal{H}$ ,  $f$ ,  $u^0$  están evaluadas a lo largo de las trayectorias óptimas nominales  $(x^*(t), \lambda^*(t))$ .

En este caso de estudio algunas de las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

$$f_x = \begin{bmatrix} -(q_0 + u^*) - \theta E & -\theta x_1^* E \Gamma^2 \\ \theta \beta E & -(q_0 + \delta + u^*) + \theta \beta x_1^* E \Gamma^2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\Gamma \triangleq \frac{\gamma}{\gamma + x_2^*}, \quad E \triangleq \exp(x_2^* \Gamma), \quad u^* = u^0(x^*, \lambda^*), \quad (4.9)$$

$$f_u = \begin{bmatrix} 1 - x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_{uu} = 8 = 2R, \quad \mathcal{H}_{ux} = \begin{bmatrix} -\lambda_1^* & -\lambda_2^* \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Y consecuentemente el sistema expresado en (4.6-4.7) puede ser reescrito como un sistema de primer orden (véase ecuaciones (2.38-2.39), Capítulo 2, Sección 2.2 y Capítulo 3, Sección 3.3.1, por ejemplo)

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\lambda}} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{H}}(t) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$



donde

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = \mathcal{A}(t, S) = D\mathcal{X} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \hat{v}}(x^*(t), \lambda^*(t)) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(t) & -\frac{1}{2}\tilde{W}(t) \\ -2\tilde{Q}(t) & -\tilde{A}'(t) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

con

$$\tilde{A}(t) \triangleq f_x - f_u \mathcal{H}_{uu}^{-1} \mathcal{H}_{ux}, \quad \tilde{W}(t) \triangleq 2 [f_u \mathcal{H}_{uu}^{-1} f_u'], \quad \tilde{Q}(t) \triangleq \frac{1}{2} [\mathcal{H}_{xx} - \mathcal{H}_{xu} \mathcal{H}_{uu}^{-1} \mathcal{H}_{ux}], \quad (4.13)$$

que es un sistema lineal y variante en el tiempo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Siguiendo esta línea de razonamiento, la desviación óptima aproximada  $\hat{u} \triangleq u - u^*$  puede ser

$$\hat{u} \approx u_x^0 \hat{x} + u_\lambda^0 \hat{\lambda} \approx -\mathcal{H}_{uu}^{-1} (\mathcal{H}_{ux} \hat{x} + f_u' \hat{\lambda}). \quad (4.14)$$

Es conocido que, para el sistema (4.11) con condiciones de contorno  $\begin{cases} \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{\lambda}(T) = 2\tilde{S}\hat{x}(T) \end{cases}$ , la desviación para el coestado es

$$\hat{\lambda} = 2\tilde{P}(t)\hat{x}, \quad (4.15)$$

con  $\tilde{P}(t)$  solución de la DRE dado por la ecuación (2.34)

$$\dot{\tilde{P}}(t) = -(\tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}'\tilde{P} + \tilde{Q} - \tilde{P}\tilde{W}\tilde{P}); \quad \tilde{P}(T) = \tilde{S} = S, \quad (4.16)$$

y la ley de control para las desviaciones de la trayectoria óptima puede ser expresado en forma de feedback

$$\hat{u} = -\mathcal{H}_{uu}^{-1} (\mathcal{H}_{ux} + 2f_u' \tilde{P}(t)) \hat{x}. \quad (4.17)$$

Como resultado, el control total es :

$$u(t) = u^*(t) + \hat{u}(t) = u^0(x^*(t), \lambda^*(t)) - \mathcal{H}_{uu}^{-1} (\mathcal{H}_{ux} + 2f_u' \tilde{P}(t)) \hat{x}. \quad (4.18)$$

La condición final en (4.16) parece imposibilitar que la estrategia de control sea implementada on-line, pero considerando el significado de las matrices auxiliares  $(\alpha, \beta)$  en la Sección 3, ecuación (3.118) y su relación con la matriz  $U(T, S)$ , la cual es la inversa de la solución de la ecuación fundamental  $V$  (4.11), entonces la condición inicial  $\tilde{P}(0)$  puede ser calculada como (véase el Capítulo 3, subsección 3.3.1, ecuación (3.144))

$$\tilde{P}(0) = \frac{1}{2}\beta(T, S)\alpha^{-1}(T, S). \quad (4.19)$$

Por lo tanto, para cada problema  $(T, S)$ , la condición inicial (4.19) permite integrar la DRE on-line en conjunto con las otras herramientas desarrolladas en la estrategia.

#### 4.4.2. Reducción óptima de ruidos en señales de entrada-salida y de perturbaciones ambientales.

Las perturbaciones de ahora en adelante serán reinterpretadas como señales de ruido. En otras palabras, el sistema lineal dado por (4.6) modelará el sistema de desviación, pero ya que  $x(t)$  es ahora un variable estocástica, será necesario hacer una estimación de  $\hat{x}$ . En resumen, la dinámica de la desviación  $\hat{x}$  a partir de la medida de la salida del proceso  $y$  será

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{A}(t)\hat{x}(t) - \frac{1}{2}\tilde{W}(t)\hat{\lambda}(t) + r_1, \quad (4.20)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + r_2 = y - Cx^*, \quad (4.21)$$

donde usualmente  $r_1$  y  $r_2$  son las derivadas estocásticas de movimientos Brownianos ( es decir, los  $r_i$  podrían ser considerados como señales Gaussianas de media cero, mejor conocidas en el ámbito de control como ruidos blancos) con matrices de covarianza  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respectivamente. Para el CSTR propuesto en la Sección 4.2, la matriz de salida fue elegida como  $C = (0 \ 1)$ .

De acuerdo a las ecuaciones ( 4.11-4.13, 4.15), el proceso de desviación estocástico podrá reescribirse como

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + r_1, \quad (4.22)$$

con

$$\hat{A}(t) \triangleq \tilde{A}(t) - \tilde{W}(t)\tilde{P}(t). \quad (4.23)$$

En este contexto, el filtro Kalman-Bucy para el modelo aproximado es óptimo y puede ser implementado a través de (ver [40, 51, 106])

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + G(t)[\hat{y} - C\hat{x}]; \quad \hat{x}(0) = \mathbb{E}(x_0) = x_0, \quad (4.24)$$

donde la notación  $\hat{x}$  es también utilizada para la estimación de la desviación estocástica (por simplicidad), y donde  $G(t) \triangleq \Pi(t)C'\sigma_2^{-1}$ , y  $\Pi(t)$  es la solución de otra ecuación parecida a la de Riccati (véase [106]), pero integrable como un sistema con condiciones iniciales

$$\dot{\Pi}(t) = \hat{A}(t)\Pi + \Pi\hat{A}(t)' - \Pi C' C_2^{-1} C \Pi + C_1; \quad \Pi(0) = Cov(x_0), \quad (4.25)$$

donde  $C_1 \triangleq \sigma_1\sigma_1'$ ,  $C_2 \triangleq \sigma_2^2$ .

De acuerdo a los objetivos propuestos en el capítulo, la estrategia de control óptimo está completa (plasmada en en la Figura 4.12, donde se muestra el diagrama de bloques de la estrategia de control H2DOF). Se aplicó lo visto hasta aquí al problema de cambio de set-point del reactor CSTR propuesto en la Sección 4.3, pero adicionando ruidos a las señales de entrada-salida. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 4.10 y 4.11.

También, y sólo por propósitos comparativos, se diseñó otra estrategia de control llamada “control por el método de la curva de referencia” (descrita en [84] y sus referencias). Esta estrategia fue aplicada al proceso para que intente abatir las perturbaciones adicionadas a

la simulación, es decir, se hizo que reemplace a la componente de feedback de la estrategia H2DOF. El propósito implícito del método de la curva de referencia es la de aislar la dinámica de la variable manipulada del comportamiento temporal de las variables principales que caracterizan la operación del proceso, tomando la diferencia con una evolución temporal previa del proceso. Este intento cancela la mayoría de no linealidades capturando de esta manera las dinámicas dominantes. El diseño del control se basa en esta información simulando la conocida “curva de reacción” donde posteriormente se aplican las técnicas empíricas tradicionales para sistemas integrales descritas en [115] para hallar las constantes del controlador. Siguiendo el procedimiento detallado en [84] se calculó la ganancia proporcional ( $k_c = 10.38$ ) para la ley de feedback proporcional provista por el método de la curva de referencia  $\hat{u}_c$  que se utilizará para el seguimiento de la referencia,

$$\hat{u}_c = -k_c (y(t) - y^*(t)) = -k_c \hat{y}(t). \quad (4.26)$$

La Figura 4.10 muestra varias trayectorias de salida ( $y(t) = x_2$  debido a la aplicación de toda la estrategia H2DOF propuesta hasta el momento (la cual considera ruidos y perturbaciones) al problema de cambio de set-point del CSTR con los siguientes parámetros:  $\bar{u}_0 = 1.3119$ ,  $\bar{u}_a = 0$ ,  $Q = I$ ,  $R = 4$ ,  $S = 3I$ ,  $\bar{x} = x_a$ , y  $x_0 = \begin{pmatrix} 0.8283 \\ 1.0 \end{pmatrix}$ .

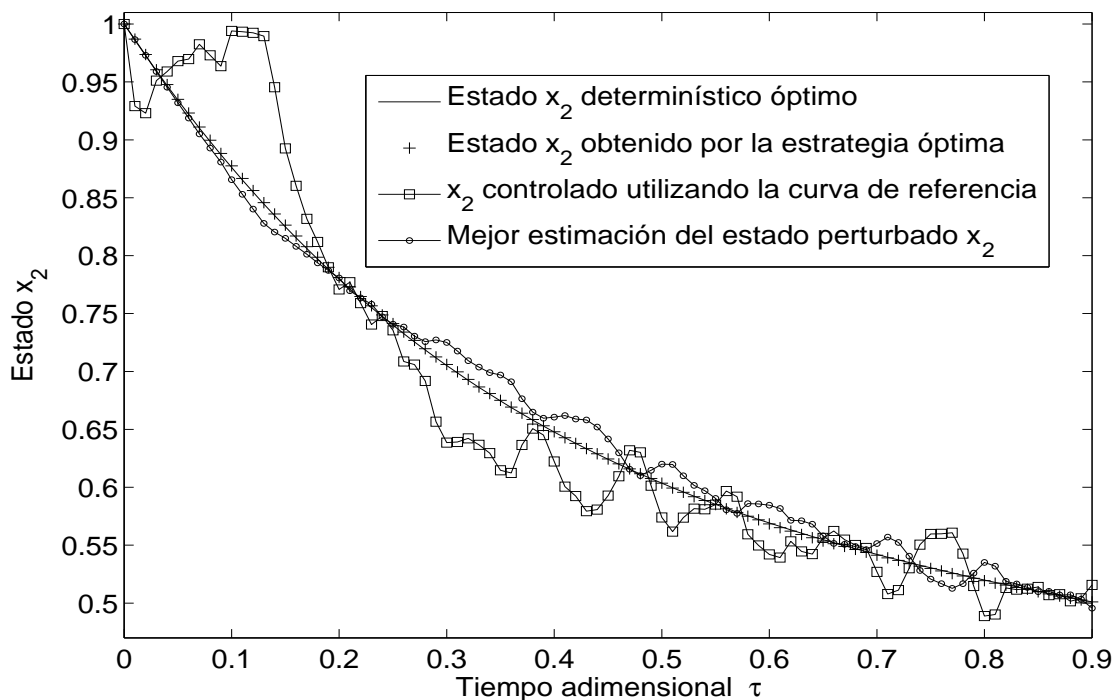


Figura 4.10: Trayectorias del estado  $x_2$  en distintas situaciones de control.

La línea sólida es la trayectoria determinística a seguir (es la óptima obtenida anteriormente). La trayectoria de la salida filtrada  $x_2$  es dibujada con la marca '+' y casi que es indistinguible de la trayectoria óptima. La línea marcada con 'o' describe la mejor estimación de la desviación perturbada de la salida  $\hat{x} = x - x^*$  y la trayectoria de comparación  $x_2$  controlada por el método de la curva de referencia es mostrada con la marca '□'.

La Figura 4.11 ilustra el control total para las trayectorias de salida de la Figura 4.10. El desempeño del esquema ("curva de referencia") no es bueno en relación al propuesto aquí (control Hamiltoniano 2DOF). La acción de control  $\hat{u}_c$  oscila en un rango aproximado de  $-5 \leq u \leq 5$  que en una aplicación real podría fácilmente crear niveles de saturación en los actuadores del proceso, lo cual podría resultar bastante dañino. Por otra parte, en muchos casos  $\hat{u}_c$  produce controles  $u$  no factibles (ya que  $u$  no puede sobrepasar valores negativos a  $-3$  porque físicamente representaría flujos de alimentación negativos dado que  $u$  es la diferencia con  $q_0 = 3$  para el problema de set-point del CSTR considerado), pero esto era de esperarse debido al hecho de que el método de la curva de referencia no fue diseñado para tratar con este tipo de perturbaciones. Esto claramente muestra la necesidad de adicionar una etapa de filtrado.

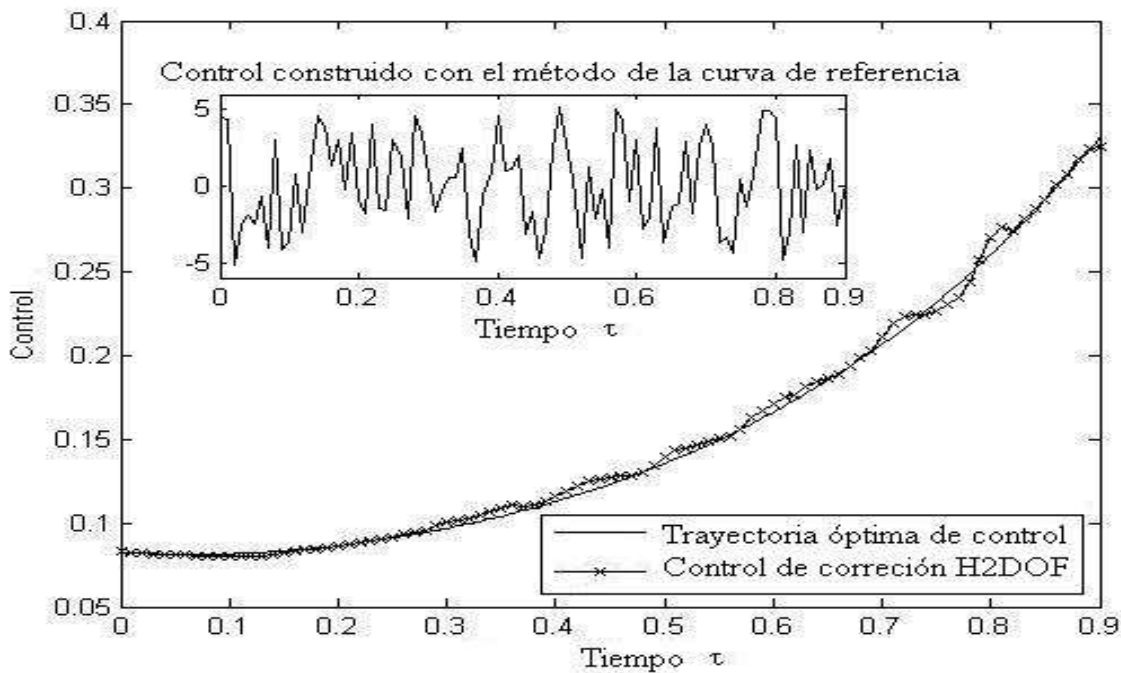


Figura 4.11: Estrategias de control: control óptimo nominal, compensación por feedback y comparación con control PI.

## 4.5. Diagrama de bloques de la estrategia H2DOF.

El diagrama de flujo 4.12 muestra la estrategia global desarrollada en este Capítulo. En una configuración no lineal, el diseño de control “two degrees of freedom” desacopla la generación de la trayectoria y el seguimiento de la referencia. El primer problema fue resuelto a través de las ecuaciones canónicas Hamiltonianas HCEs. La trayectoria de referencia resultante fue precisamente la óptima  $x^*(t)$  (en el ejemplo es solamente el segundo estado ya que es la salida del CSTR) para un correspondiente horizonte finito  $T$  y una matriz de penalización final  $S$  (ver Capítulo 2, [39, 33, 46]). El sistema de compensación de la desviación (representado por la ecuación (4.11)) es entonces escrito como un sistema de control lineal variante en el tiempo (Section 4.4.1) en términos de sus salida  $\tilde{y} = y - Cx^*$ . Sin embargo, la salida está siendo alterada por ruidos sistémicos y perturbaciones inherentes a la observación, y por lo tanto necesitan un filtrado adicional. El seguimiento requiere dos partes: el filtro Kalman-Bucy, el cual es responsable de proveer la mejor estimación de  $x - x^*$  (Sección 4.4.2), y la generación de la ganancia de Riccati  $\tilde{P}(t)$ . Con  $\tilde{P}$  y  $\hat{x}$ , la ley de control óptima estocástica es una ley lineal de feedback que resulta en la ecuación (4.17).

## 4.6. Discusión y conclusiones.

La metodología 2DOF ha sido desarrollada para el control de procesos no lineales e ilustrada a través del control óptimo de un reactor CSTR. A continuación se describirá un esquema de la aplicación de esta estrategia y sus detalles más relevantes:

- (i) Se calculan off-line las condiciones de contorno faltantes para las HCEs para una familia de problemas de control de  $(T, S)$  planteados para la dinámica no lineal. Esto lleva a resolver un conjunto de PDEs de primer orden (ecuaciones (3.105), (3.97) y (3.98)). De este paso se guardan los valores de  $\rho(T, S)$  y  $\sigma(T, S)$ . También, a partir de  $V(T, S)$  se calcula la matriz inicial de Riccati  $\tilde{P}(0)$ .
- (ii) La trayectoria óptima generada on-line vía la integración de las HCEs para el problema de control óptimo (2.20, 2.21) será la trayectoria nominal o de referencia. La integración de las ODEs Hamiltonianas es equivalente a correr el modelo de la dinámica del sistema con control óptimo, y los valores resultantes  $(x^*(t), \lambda^*(t))$  representan el “primer grado de libertad” al decidir la estrategia de control, es decir,  $u^*(t) = u^0(x^*(t), \lambda^*(t))$ . El estado óptimo  $x^*(t)$  es en realidad una aproximación de los valores  $x(t)$  de las variables físicas del proceso, las cuales en general son desconocidas o difíciles de medir. Se asume que las diferencias  $\hat{x}(t) \cong x(t) - x^*(t)$  son perturbaciones provenientes de la interacción aleatoria entre la planta y su medio ambiente por un lado, y de perturbaciones introducidas durante la transmisión de señales por el otro.

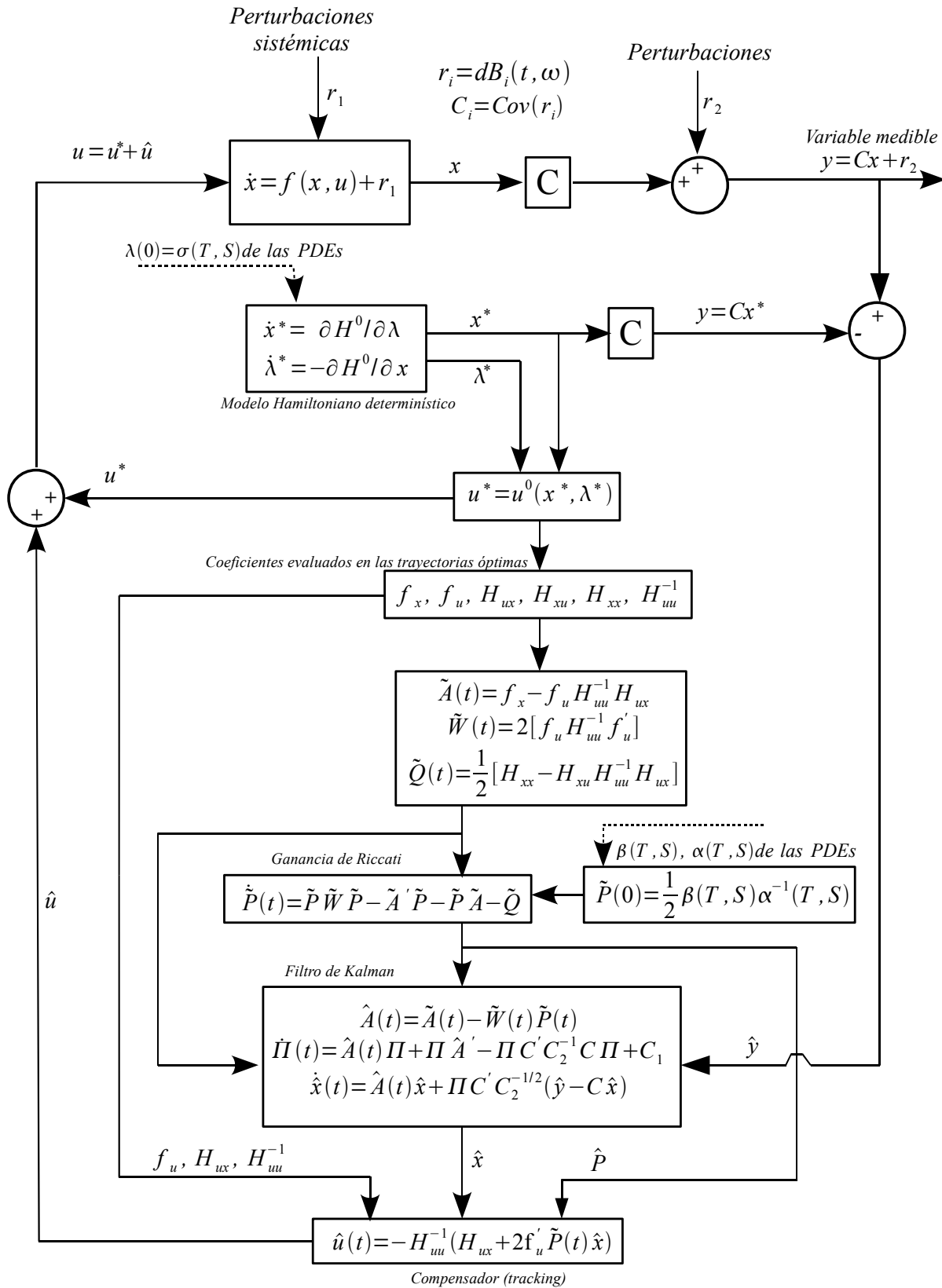


Figura 4.12: Diagrama de bloques de la estrategia de control óptimo Hamiltoniano 2DOF.

- (iii) Dado que sólo los valores de la salida  $y(t)$  están disponibles, usualmente corruptos por ruidos, se va calculando una estimación de la perturbación  $\hat{x}(t)$  a través del filtro Kalman-Bucy (ecuaciones 4.24-4.25), ya que el concepto de “perturbación” asumido hace que las diferencias  $\hat{x}(t)$  sean vistas como un sistema lineal variante y por lo tanto obedecen la dinámica dada por la ecuación (4.11) con coeficientes generados on-line.
- (iv) Las perturbaciones  $\hat{x}(t)$  deben ser abatidas usando el “segundo grado de libertad” al elegir la ganancia del control  $\hat{u}(t) = -k(t)\hat{x}(t)$ , o sea el compensador (4.17). La ganancia incluye una matriz generalizada de Riccati  $\tilde{P}(t)$  (ecuación 4.19) la cual es obtenida a partir de la integración on-line de la ecuación en la etapa (i). Esto es posible porque  $\tilde{P}(0)$  depende únicamente de las matrices auxiliares  $\alpha$ ,  $\beta$ , las cuales por definición toman en cuenta a las derivadas del flujo Hamiltoniano, es decir, la linealización del sistema Hamiltoniano evaluadas en las trayectorias óptimas  $(x^*(t), \lambda^*(t))$ . Se debe notar que la disponibilidad de  $\tilde{P}(0)$  evita la integración usual (de atrás hacia delante y off-line) de las DRE, lo que permite que la estrategia esté totalmente bien planteada on-line. Debería remarcarse que la ganancia variable en el tiempo del compensador (en ecuación (4.17)) incluye a los términos  $\mathcal{H}_{uu}^{-1}\mathcal{H}_{ux}$  los cuales no están en el tratamiento clásico LQR (comparado con la ecuación (2.31)). Esto es debido al hecho de que en esta metodología se unificó el Hamiltoniano para los dos problemas de optimización a tratar (el primero para construir la trayectoria de referencia y el segundo para abatir las perturbaciones) por lo que su dependencia se ve reflejada en dichos términos. Para el caso lineal-cuadrático clásico estos coeficientes son  $\mathcal{H}_{ux} = 0$ ,  $f_u = B$ ,  $\mathcal{H}_{uu} = 2R$ .
- (v) El control óptimo Hamiltoniano H2DOF es entonces  $u(t) = u^*(t) + \hat{u}(t)$ . La aplicación de esta estrategia de control hace que haya una adherencia de la salida hacia la trayectoria nominal  $y^*(t) = Cx^*(t)$ , en general superior a la conseguida aplicando prescripciones clásicas de control como el método de la curva de referencia, o los conocidos controles PI.

Todo el esquema muestra un comportamiento muy satisfactorio y se cumple con los objetivos planteados de combinar las características determinísticas no lineales para el control óptimo nominal del proceso y estocásticas lineales para el control óptimo de las perturbaciones.

## Capítulo 5

# Manejo de restricciones

El regulador lineal-cuadrático (LQR) es uno de los problemas más estudiados en teoría de control, junto a algunos objetos matemáticos relacionados como las ecuaciones de Riccati. En este marco, los coestados se definen como nuevas variables independientes del sistema, ampliando el conjunto original de ecuaciones diferenciales de la dinámica a  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Como se ha visto en el Capítulo 2, dado que el LQR es un problema regular, las ODEs aludidas para el estado y el coestado pueden independizarse del control, dando lugar a las HCEs.

En particular, para el regulador LQR de horizonte finito existen algunos métodos (por ejemplo los desarrollados en [17, 106], Capítulo 3, Subsección 3.3.1) para transformar el problema con condiciones de borde de las HCEs a uno de condiciones iniciales. Para el regulador bilineal-cuadrático de horizonte finito también se han bosquejado soluciones que intentan recuperar las condiciones iniciales faltantes para los coestados, lo cual permitiría su integración on-line en conjunto con los estados del proceso (ver [40]).

En [32, 33, 43, 39], la técnica relacionada con “Invariant Imbedding” utilizada en [13] fue ampliada y generalizada. Nuevas ecuaciones en derivadas parciales (PDEs) fueron desarrolladas tanto para sistemas lineales como no lineales de dimensión finita. Principalmente, se definió una PDE para el valor inicial del coestado ( $\sigma \equiv \lambda(t_0)$ ), que puede integrarse luego de la otra PDE para el estado final ( $x(T) \equiv \rho(T, S)$ ), y cuyo valor es crucial en la integración “on-line” de las HCEs. Las variables independientes en estas PDEs son la duración u horizonte de optimización  $T$  y el coeficiente de penalización final  $S$  definido apropiadamente en el funcional de costo del problema.

En este capítulo, estas nuevas PDEs “variacionales” son utilizadas como parte de una estrategia para resolver el problema del regulador lineal-cuadrático con restricciones en el control.



## 5.1. Problemas de optimización con estados finales fijos y flexibles.

El principio del máximo de Pontryagin (PMP [98]) ha sido utilizado ampliamente en teoría de control óptimo, especialmente en presencia de restricciones sobre los estados y/o la variable manipulada. A pesar de la generalidad del PMP, existen situaciones en que la aplicación del principio no conduce a soluciones prácticas, o no puede garantizarse suficiencia, o unicidad de dichas soluciones. En este capítulo se buscará una solución aproximada a esas situaciones utilizando las PDEs descritas en el Capítulo 3, Subsección 3.3.1.

Los resultados se ilustrarán mediante el tratamiento analítico de un ejemplo clásico. Este problema resulta similar a problemas tratados por [66], donde se deben encontrar tiempos de conmutación (“switching times”) para activar diferentes controles compatibles con las restricciones.

### 5.1.1. Caso estudio: conducción de un móvil hacia el equilibrio con esfuerzo mínimo.

El caso estudio tiene la siguiente dinámica (ver [2]) de dimensión dos, lineal y autónoma:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1; \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_2(0) = 1, \quad (5.1)$$

o, en notación matricial,

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x_0, \quad (5.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

donde la variable manipulada o de control  $u$  es una función con valor escalar y se interpreta como la acción de frenado de un móvil (p. ej. un tren) que tiene por estados a  $x_1$ : posición y a  $x_2$ : velocidad. El objetivo de optimización es minimizar la energía de frenado necesaria para que el tren se detenga exactamente, en un lapso de tiempo fijado  $T$ , en una posición final también dada, para este caso  $x_1(T) = 0$  y  $x_2(T) = 0$ .

De esta manera, el problema de control óptimo queda determinado mediante la ecuación (5.1), sus condiciones de borde y la función de costo,

$$\mathcal{J}(T, 0, x_0, u) = \int_0^T [x'(\tau)Qx(\tau) + u'(\tau)Ru(\tau)] d\tau, \quad (5.4)$$

$$L(x, u) \triangleq \frac{u^2}{2}, \quad Q = 0, \quad R = \frac{1}{2}, \quad T = 1, \quad (5.5)$$

donde  $L(x, u)$  es el Lagrangiano del problema. El valor numérico de las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  no se modificará a lo largo del desarrollo.

### 5.1.2. La solución PMP con controles arbitrarios.

En esta subsección se describe la aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin para el problema de llevar la dinámica del tren de su estado inicial  $x_0$  al origen, asumiendo que no hay restricciones en el conjunto de valores de control admisibles  $\mathcal{U}$ . Como es usual en la utilización del PMP, se define el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  del problema de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}(x, \lambda, u) = L + \lambda' f = \frac{u^2}{2} + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u, \quad (5.6)$$

el cual admite una única minimización global con respecto a  $u$ . Entonces el problema es regular y se cuenta con expresiones explícitas para el control óptimo  $u^0$  y el Hamiltoniano ya minimizado  $\mathcal{H}^0$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = u + \lambda_2, \quad (5.7)$$

$$u^0(x, \lambda) = \arg \min_u \mathcal{H}(x, \lambda, u) = -\lambda_2, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{H}^0(x, \lambda) = \mathcal{H}(x, \lambda, u^0(x, \lambda)) = \lambda_1 x_2 - \frac{\lambda_2^2}{2}. \quad (5.9)$$

De estas ecuaciones es posible escribir las ODEs para los coestados del sistema como

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial x_2} = -\lambda_1. \quad (5.10)$$

Dado que son ecuaciones sencillas, pueden integrarse analíticamente. En términos de dos constantes reales  $a$  y  $b$ , los coestados óptimos  $\lambda^*$  y la trayectoria de control óptima  $u^*$  resultan

$$\lambda_1^*(t) = -b, \quad \lambda_2^*(t) = a + bt, \quad (5.11)$$

$$u^*(t) = u^0(x^*(t), \lambda^*(t)) = -a - bt, \quad (5.12)$$

Consecuentemente la dinámica (5.1) de los estados óptimos también se puede integrar analíticamente,

$$\begin{cases} x_2^*(t) = -at - b\frac{t^2}{2} - 1, \\ x_1^*(t) = -a\frac{t^2}{2} - b\frac{t^3}{6} - t + 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

Ya que el sistema es controlable, y aplicando las condiciones finales de los estados, las constantes  $a$  y  $b$  pueden ser determinadas unívocamente:

$$x_1^*(1) = x_2^*(1) = 0 \implies a = 2, \quad b = -6, \quad (5.14)$$

$$u^*(t) = -2 + 6t. \quad (5.15)$$

Nótese que el Hamiltoniano minimizado  $\mathcal{H}^0$  es constante a lo largo de las trayectorias óptimas y es  $\mathcal{H}^0(x^*(t), \lambda^*(t)) = \mathcal{H}^0(x^*(0), \lambda^*(0)) = b - \frac{a^2}{2} = \mathcal{H}^0(x^*(1), \lambda^*(1)) = -\frac{(a+b)^2}{2} = -8$ .

En la Figura 5.1 se ilustran las trayectorias óptimas de los estados y del control. La solución para el problema sin restricciones al control pero con condiciones terminales fijas usa al inicio (aunque no es algo intuitivo) valores negativos de control. En otras palabras, el tren debe primero acelerarse, cada vez menos, para posteriormente presionar el freno cada vez más hasta lograr que el tren se detenga exactamente en el estado final deseado. Dada esa aparente anomalía, es interesante saber qué pasaría si sólo valores positivos del control fueran admitidos, es decir, nos interesa ver cómo la trayectoria de control se deforma si se prohibiese acelerar el tren.

Estas inquietudes serán estudiadas en detalle en las secciones siguientes, pero antes se mostrará que es posible hallar la misma solución proveniente del PMP, utilizando las soluciones de las PDEs variacionales, y luego tomando el límite con  $s$  tendiendo al infinito. Al contrario del PMP, las PDEs consideran estados finales libres o flexibles.

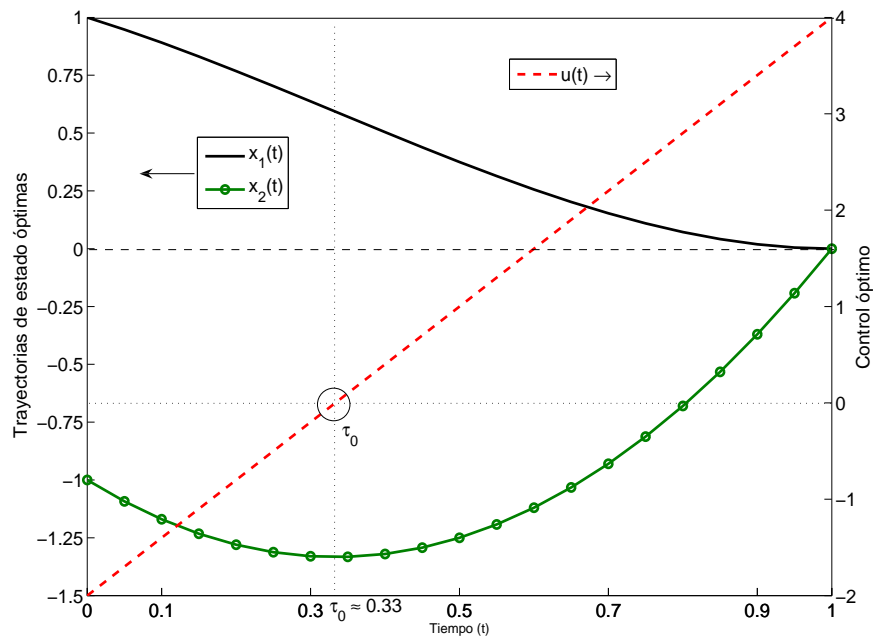


Figura 5.1: Trayectorias óptimas para los estados y el control para el caso con estados finales fijos y controles no acotados. Solución PMP.

### 5.1.3. La solución óptima a partir de las PDEs variacionales. Estados finales flexibles y controles arbitrarios.

El problema de optimización con estados finales flexibles considera un costo

$$\mathcal{J}(T, 0, x_0, u(\cdot)) = \int_0^T [x'(\tau)Qx(\tau) + u'(\tau)Ru(\tau)] d\tau + x'(T)Sx(T). \quad (5.16)$$

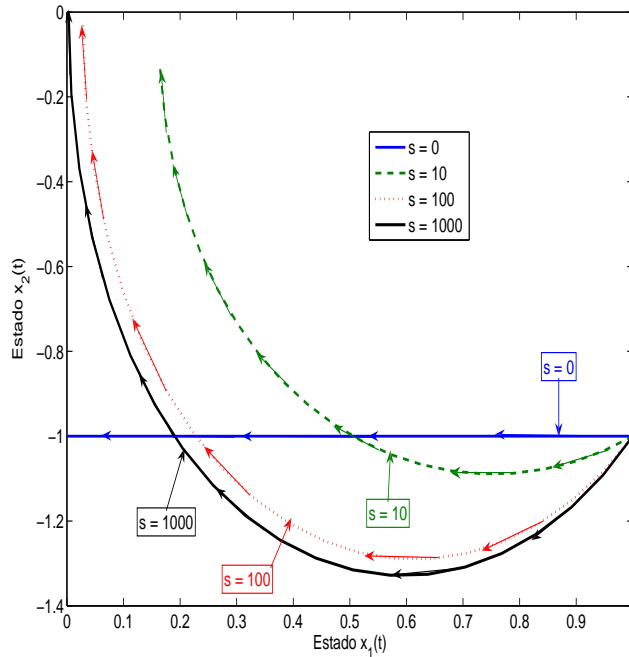


Figura 5.2: Espacio de fases para trayectorias óptimas con diferentes valores de  $s$ , para el problema con condiciones finales flexibles y controles no acotados.

Se considerarán sólo matrices escalares del tipo  $S = sI$  por sencillez.

En sistemas lineales, las apropiadas PDEs “variacionales” para calcular el estado final  $(\rho(T, S))$  y el coestado inicial  $(\sigma(T, S))$  del sistema Hamiltoniano están basadas en las matrices auxiliares  $(\alpha$  y  $\beta$ , ecuaciones (3.124-3.125)), y  $\rho$ ,  $\sigma$  se recuperan mediante las relaciones (3.129). También se sabe (Subsección 3.3.1) que basándose en estas ecuaciones se puede recuperar la solución de la ecuación diferencial de Riccati (DRE)  $P(t)$  mediante la ecuación (3.144). Para el caso que se está tratando, la solución de la ecuación diferencial de Riccati  $P(\cdot)$  es hallada analíticamente utilizando la solución de las ecuaciones (3.124 - 3.125) y la relación (3.144). Al tener la  $P(t)$  es posible calcular luego el control óptimo (ecuación 2.35) y por consiguiente las trayectorias óptimas de estado  $x_s^*(t)$  mediante la integración de las HCEs.

Numéricamente se notó que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x_s^*(t) = x^*(t), t \in [0, T], \quad (5.17)$$

donde  $x^*(t)$  denota a la solución óptima obtenida para el problema de la Sección 5.1.2. Tal comportamiento se muestra en la Figura 5.2. Estrictamente, la convergencia de las soluciones del caso flexible hacia las correspondientes del problema con estados finales fijos puede ser probado a través de objetos matemáticos de las PDEs. De hecho, al tomar el límite de las PDEs (3.124, 3.125) para  $s \rightarrow \infty$  (equivalentemente a reemplazar las derivadas  $\alpha_s = \beta_s = 0$ )

se llega al resultado esperado:

$$\alpha_T \approx -\alpha N, \quad \alpha(0, s) = I, \quad (5.18)$$

$$\alpha \approx e^{-NT} = e^{(sW-A)T}, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} |\alpha| &\approx \left| e^{(sW-A)T} \right| \leq e^{|(sW-A)T|} \leq e^{(|sTW|+T|A|)} \\ &= e^{T|A|} e^{sT|W|} \rightarrow \infty \implies |\alpha^{-1}| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$|\rho| \approx |\alpha^{-1}x_0| \rightarrow 0. \quad (5.21)$$

## 5.2. Problemas de optimización con controles acotados.

### 5.2.1. Caso: $u \geq 0$ . Sólo frenado.

En lo que sigue sólo se admitirán valores no negativos para la variable manipulada. Dado que el Hamiltoniano debe ser minimizado en cada punto, y que el valor óptimo del control empieza en un valor negativo en el caso de controles no acotados (o equivalentemente,  $\lambda_2(0) > 0$ ), de la ecuación (5.6) se infiere que debería existir un intervalo inicial de tiempo donde el control  $u$  tome el valor de su cota inferior, es decir:

$$u(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, \tau] \subset [0, T], \quad (5.22)$$

donde  $\tau$  debe ser determinado.

Mientras la variable manipulada es mantenida en su límite inferior permitido, el sistema evoluciona a través de una trayectoria que será denotada como  $\{x(t), t \in [0, \tau]\}$ . A medida que el tiempo se incrementa es posible ir definiendo sucesivos problemas con controles no acotados que comienzan en  $x(t)$  al tiempo  $t$  y con horizonte de optimización  $[t, T]$ . Por continuidad, cerca de  $t = 0$  las soluciones óptimas  $u(t)$  para dichos problemas con controles no acotados permanecerán siendo negativas. Si el control óptimo para el problema de restricciones en el control no es trivial, entonces debería existir un tiempo de conmutación  $\tau$  donde el control óptimo  $\tilde{u}_\tau(t)$  para el problema con controles no acotados correspondiente a: (i) el horizonte de optimización restante  $\{t \in [\tau, T]\}$ , y (ii) la condición inicial  $x(\tau)$ ; deje de ser negativo, i.e.  $\tilde{u}_\tau(\tau) \geq 0$  (consultar [4, 21] donde se dan varios argumentos que sustentan estas hipótesis). Asumamos que dicho tiempo de conmutación  $\tau \in (0, T]$  existe. Durante el intervalo  $[0, \tau]$  la dinámica puede integrarse con el control igual al valor de su cota inferior, para obtener:

$$x_2(t) = -1, \quad x_1(t) = 1 - t. \quad (5.23)$$

Después del tiempo  $\tau$ , el control óptimo (denotado como  $u_\tau$ ) tiene que ser lineal, ya que se comporta como el control  $u^0$  de un problema regular (donde las ecuaciones (5.7-5.10) tienen que cumplirse), es decir, números reales para  $c, d, m, n$  deben existir de tal forma que  $\forall t \in [\tau, T]$ ,

$$\lambda_1(t) \equiv d, \quad \lambda_2(t) = -c - dt, \quad (5.24)$$

$$u_\tau(t) = c + dt . \quad (5.25)$$

Después de su integración, las trayectorias de estado toman la forma

$$\begin{aligned} x_2(t) &= ct + d\frac{t^2}{2} + m , \\ x_1(t) &= c\frac{t^2}{2} + d\frac{t^3}{6} + mt + n . \end{aligned} \quad (5.26)$$

La concatenación del control de saturación (es decir,  $u \equiv 0$ ) seguido por  $\tilde{u}_\tau$  deber ser una estrategia de control admisible, y entonces los estados obtenidos para ambos tramos tienen que coincidir en  $t = \tau$  por continuidad. Centrándose en las ecuaciones (5.23, 5.26), esto significa que

$$\begin{aligned} x_2(\tau) &= c\tau + d\frac{\tau^2}{2} + m = -1 , \\ x_1(\tau) &= c\frac{\tau^2}{2} + d\frac{\tau^3}{6} + m\tau + n = 1 - \tau . \end{aligned} \quad (5.27)$$

La continuidad en los valores de la variable manipulada o control  $u_\tau(\tau)$  con respecto a  $\tau$  se obtiene gracias a la regularidad del problema de control óptimo para el caso no acotado, lo cual implica que

$$0 = u_\tau(\tau) = c + d\tau \implies \tau = -\frac{c}{d} . \quad (5.28)$$

Las ecuaciones (5.27, 5.28) requieren que los parámetros desconocidos sean soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$m = \frac{c^2}{2d} - 1 , \quad n = \frac{c^3}{6d^2} + 1 . \quad (5.29)$$

Las condiciones finales proveen las dos ecuaciones adicionales necesarias para resolver el problema. Para el estudio del tramo  $[\tau, T]$  diferenciaremos los dos casos siguientes:

**(i) Estados finales fijos:**  $x_1(T) = x_2(T) = 0$ .

En este caso se mantiene  $T = 1$ , la ecuación (5.26) y las condiciones finales requieren que

$$c + \frac{d}{2} + m = 0 , \quad \frac{c}{2} + \frac{d}{6} + m + n = 0 , \quad (5.30)$$

las cuales, en conjunto con las ecuaciones (5.28, 5.29), conducen a

$$(\tau - 1)^3 = 0 \implies \tau = 1, \quad d \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow -\infty . \quad (5.31)$$

Esto significa que, al comenzar con las condiciones iniciales originales, el PMP no admite una solución con trayectoria de control con una línea quebrada, ya que en la práctica sería imposible aplicar “un freno nulo todo el tiempo e infinito al final del horizonte”.

## (ii) Estados finales flexibles.

Se considera aquí la siguiente situación: en el intervalo  $(\tau, T]$  plantear un problema de control óptimo con controles no acotados, de tal manera que las ecuaciones para los estados, coestados y acción de control dadas por las expresiones (5.24, 5.25, 5.26) se verifiquen. Se realiza entonces una extrapolación hacia atrás de esas soluciones hasta completar el intervalo de optimización. Esto implica que para el horizonte completo se puede encontrar la solución a un problema de control óptimo con controles no acotados, el cual tiene como condición inicial  $\tilde{x}_0 = \phi(-\tau, x(\tau), \tilde{u}_\tau)$ , donde  $\phi$  es la función de transición del sistema ([106], Capítulo 2) y  $\tilde{u}_\tau(t) \triangleq c + dt$ ,  $t \in [0, \tau]$  es la continuación hacia atrás del control  $u_\tau$ . Este problema tiene entonces como solución óptima:

$$\tilde{u}^*(t) \triangleq \begin{cases} \tilde{u}_\tau(t), & t \in [0, \tau) \\ u_\tau(t), & t \in [\tau, T] \end{cases}. \quad (5.32)$$

Consecuentemente, los coestados óptimos  $\tilde{\lambda}(\cdot)$  para dicho problema de controles no acotados también obedecerán a las HCEs en el intervalo  $[0, \tau]$ . Al integrarse resultan ser

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \tilde{\lambda}_1(\tau) = \lambda_1(\tau) = d, \quad (5.33)$$

$$\tilde{\lambda}_2(t) = -\tilde{u}_\tau(t) = -c - dt. \quad (5.34)$$

Las trayectorias para los coestados  $\lambda(\cdot)$  de las ecuaciones (5.24) pueden ser vistas como una continuación de las trayectorias  $\tilde{\lambda}(\cdot)$ , es decir, las trayectorias

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} d \\ -c - dt \end{array} \right), t \in [0, T] \right\} \quad (5.35)$$

son las trayectorias óptimas para los coestados que se corresponden con la condición inicial  $\tilde{x}_0$  y el control  $\tilde{u}^*$ . Estas trayectorias son óptimas para ese problema de controles no acotados, y en particular, al final del horizonte de optimización ( $t = T$ ), los coestados satisfacen la ecuación  $\lambda(T) = 2sx(T)$ .

La obtención de los parámetros desconocidos para el problema acotado continua entonces de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d &= \lambda_1(1) = 2sx_1(1) \implies x_1(1) = \frac{d}{2s}, \\ \lambda_2(1) &= -c - d = 2sx_2(1) \implies x_2(1) = -\frac{c+d}{2s}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

y el par de relaciones faltantes se obtienen al combinar las ecuaciones anteriores con (5.26, 5.29),

$$\begin{aligned} c + \frac{d}{2} + \frac{c^2}{2d} - 1 &= -\frac{c+d}{2s}, \\ \frac{c}{2} + \frac{d}{6} + \frac{c^2}{2d} + \frac{c^3}{6d^2} &= \frac{d}{2s}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

En este punto se puede comprobar que, a pesar del valor que tomen los coestados finales, las ecuaciones (5.36) ya reflejan el comportamiento límite esperado para los estados:  $\lim_{s \rightarrow \infty} x_1^{T,s}(T) = \lim_{s \rightarrow \infty} x_2^{T,s}(T) = 0$ .

Para aproximarse a la solución del problema con estados finales fijos, eventualmente es necesario tomar valores grandes de  $s$ . Si por ejemplo, tomamos el valor de  $s = 100$ , existen cinco soluciones para las ecuaciones (5.37) para  $(c, d)$ , pero solo una de ellas está en  $\mathbb{R}^2$ . La solución admisible obtenida es  $c = -13.8331$ ,  $d = 20.069$ ,  $\tau = -\frac{c}{d} = 0.6893$ , con lo cual, utilizando las ecuaciones (5.36), los estados finales calculados para este caso resultan  $x_1(1) = 0.1004$  y  $x_2(1) = -0.0312$ . Se puede comprobar que el Hamiltoniano del problema  $\mathcal{H}(x, \lambda, u)$  (ecuación (5.6)), permanece constante a lo largo de las trayectorias óptimas, con  $\mathcal{H}^0(x^*(t), \lambda^*(t)) = -d \quad \forall t \in [0, 1]$ .

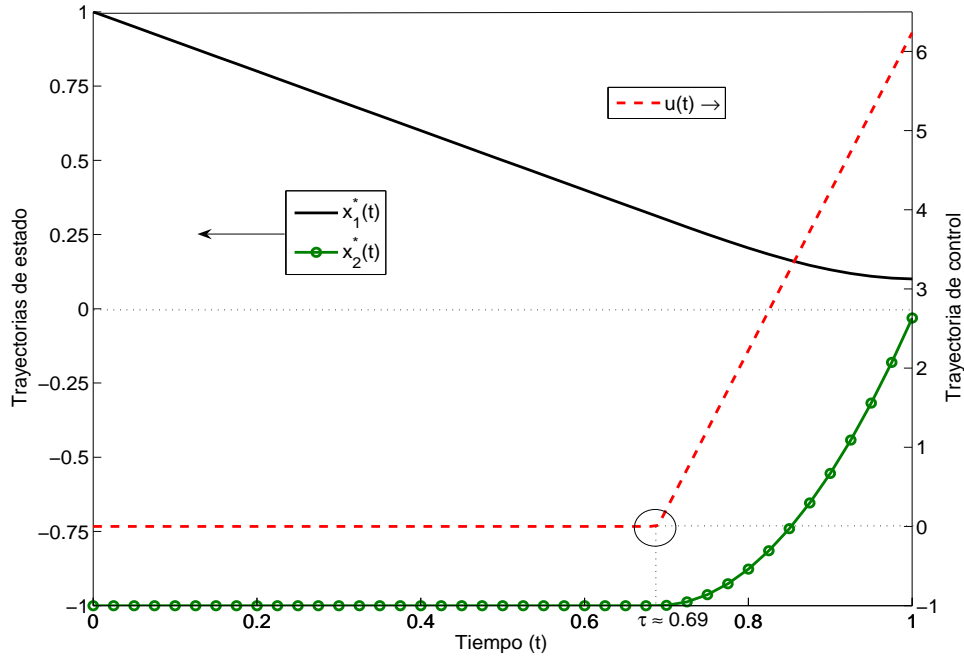


Figura 5.3: Trayectorias de estado y control óptimo para el problema de estados finales flexibles y controles acotados obtenidos para  $s = 100$

Las trayectorias de estado y de control resultantes son ilustradas en la Figura 5.3. A pesar de que el tren no llega exactamente a los estados finales deseados, la solución describe una situación más realista y una que puede ser puesta en práctica: en el tiempo  $T$ , la velocidad  $x_2(T)$  es pequeña, lo suficiente para permitirle al tren continuar de forma inercial del estado real alcanzado hasta el estado final deseado  $x_1(T) = 0$ . Usando software estándar como Mathematica,



se hallaron expresiones analíticas para  $c(s)$ ,  $d(s)$ ,  $\tau(s)$ , que verifican

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \tau \rightarrow 1 \\ d \rightarrow \infty \\ c \rightarrow -\infty \end{cases} . \quad (5.38)$$

En la Figura 5.4 se graficaron las relaciones entre (algunos componentes de)  $x_0$ ,  $\tilde{x}_0$ ,  $x$ ,  $\tilde{x}$ ,  $\lambda$ ,  $\tilde{\lambda}$ ,  $u_\tau$ ,  $\tilde{u}_\tau$ , para un valor fijo de  $s$ .

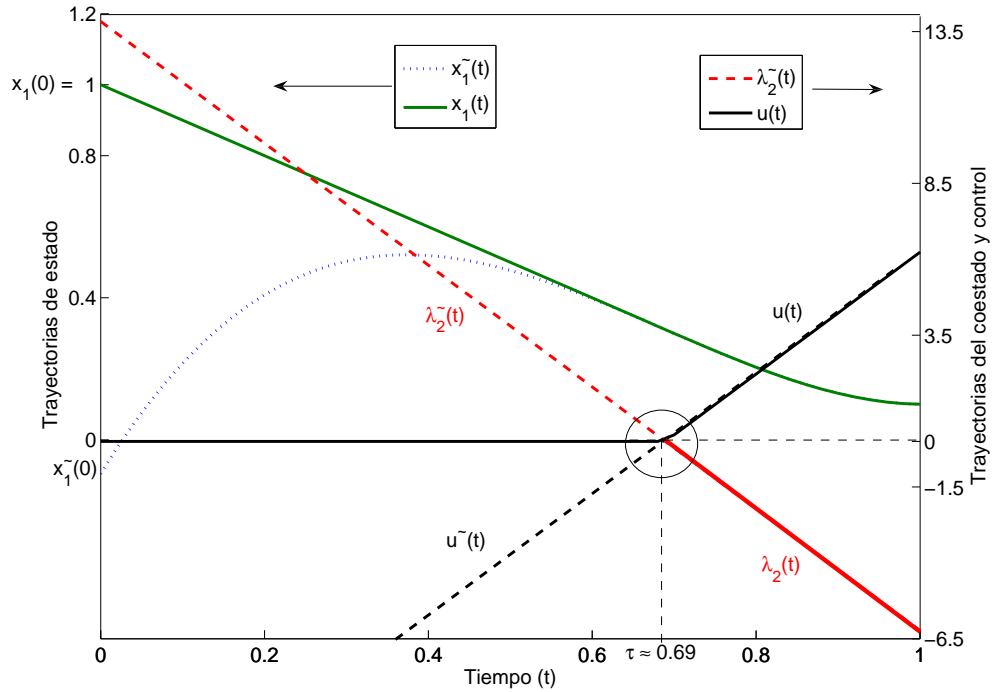


Figura 5.4: Trayectorias del estado  $x_1$ , del coestado  $\lambda_2$ , y el control  $u$  para controles acotados, y sus partes ocultas en el período de saturación.

### 5.2.2. Aproximación del problema con restricción $u \geq 0$ *via* las soluciones provistas por las PDEs.

En esta subsección será asumido y mantenido fijo un valor razonablemente alto de  $s$ . También se hallará el tiempo  $\tau$  de conmutación y se explorarán las estrategias de control de la forma:

$$u(t) = \begin{cases} u_b(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, \tau) \\ u_{s,\tau}(t) \quad \forall t \in [\tau, 1] \end{cases} , \quad (5.39)$$

donde  $u_{s,\tau}(t)$  denota el control óptimo para el caso correspondiente a estados finales libres, horizonte de optimización  $T - \tau = 1 - \tau$ , penalización final  $s \|x\|^2$ , y condiciones iniciales

$x_1(\tau) = 1 - \tau$  y  $x_2(\tau) = -1$ . Entonces, dado que es un sistema lineal y de acuerdo a la ecuación (3.144), el control retroalimentado óptimo se construye como:

$$\begin{aligned} u_{s,\tau}(t) &= -R^{-1}B'P(t)x(t) = \\ &= -\left[\beta(1-t,s)[\alpha(1-t,s)]^{-1}x(t)\right]_2 \quad \forall t \in [\tau, 1], \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde el subíndice  $(2)$  denota a “la segunda componente” del vector dentro de los corchetes.

Aplicando la ecuación (5.40) en  $t = \tau$ , y notando que  $u(t) = u_b(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, \tau)$  implica que  $x(\tau) = e^{A\tau}x_0$ , entonces recurriendo nuevamente a la propiedad de continuidad, deberían coincidir los controles en  $T = \tau$ , es decir

$$\begin{aligned} 0 &= u_{s,\tau}(\tau) = -R^{-1}B'P(\tau)x(\tau) = \\ &= -\frac{1}{2}R^{-1}B'\beta(T-\tau,s)[\alpha(T-\tau,s)]^{-1}e^{A\tau}x_0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

El valor de  $\tau$  es la única variable desconocida en la ecuación (5.41). Asumiendo que  $\alpha(T,s)$  y  $\beta(T,s)$  ya han sido calculadas para un amplio rango de  $(T,s)$ , entonces el problema de calcular  $\tau$  se reduce a encontrar el cero de la función  $\hat{u}_s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$t \rightarrow -\left[\beta(T-t,s)[\alpha(T-t,s)]^{-1}e^{At}x_0\right]_2. \quad (5.42)$$

En la Figura 5.5 se ilustra la curva  $\hat{u}_s(t)$  obtenida a través del método de las PDEs. Se puede ver que efectivamente el punto de cruce es muy cercano al valor de  $\tau = 0.6892$  como fue predicho analíticamente. La curva es una isoclina (correspondiente a  $s = 100$ ) para los controles evaluados al tiempo  $t$  y los valores de los estados en ese tiempo, es decir,  $e^{At}x_0$ . Cada valor de control  $\hat{u}_s(t)$  es óptimo al tiempo  $t$  para un problema de control óptimo con las siguientes condiciones: (i) el estado “inicial” es igual a  $e^{At}x_0$  resultante al no haber aplicado freno hasta el instante  $t$ , (ii) el horizonte de optimización es igual a  $T - t$ , y finalmente (iii) la penalización final  $s$  queda constante en su valor asumido.

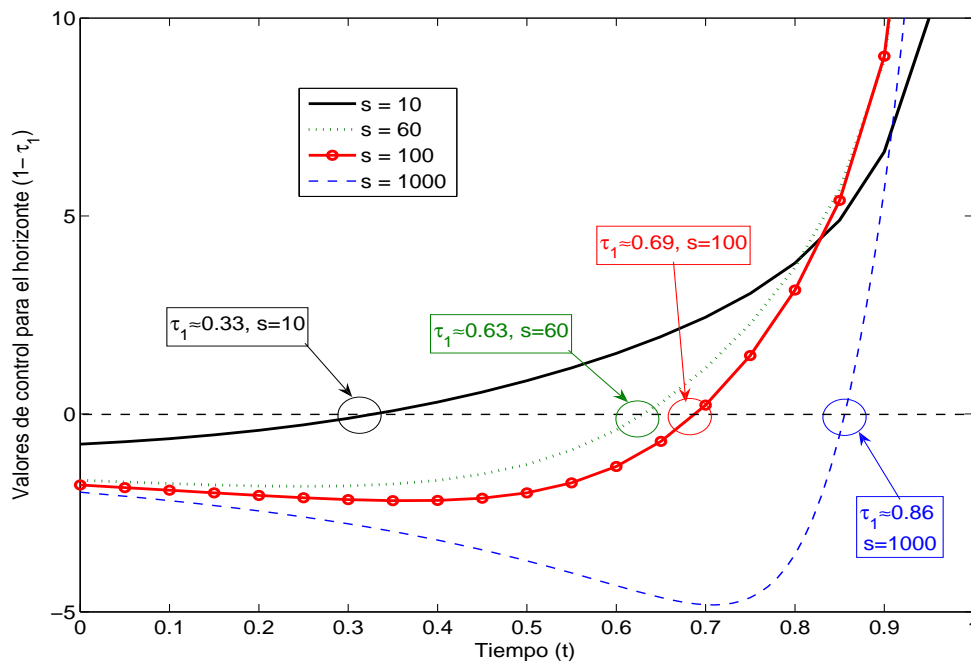


Figura 5.5: Isoclina con diferentes  $s$  para los controles evaluados en  $t$  y con el valor de los estados  $e^{At}x_0$ , cada una de ellas resulta óptima con respecto al horizonte  $T - t$ .

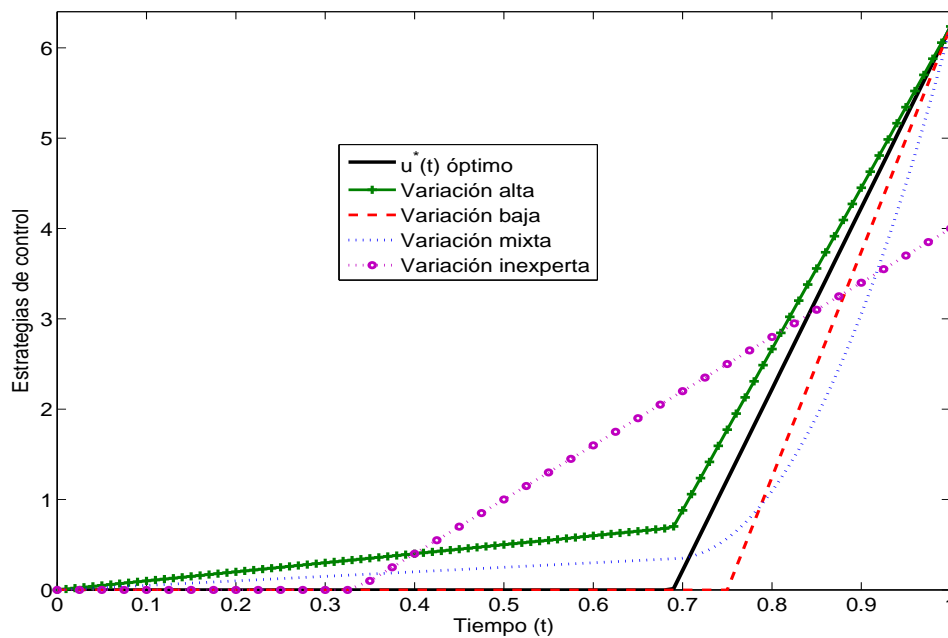


Figura 5.6: Variaciones a la estrategia de control óptima con un único tiempo de conmutación  $\tau$ , usadas para comparar costos.

Variaciones	$\int L(u)dt$	$x'_T S x_T$	$x_1(T)$	$x_2(T)$
$u^*(t)$ óptimo	2.0138	1.1042	0.1004	-0.0312
Variación alta	2.3156	16.1217	0.2509	0.3134
Variación baja	1.6203	5.2845	0.0650	-0.2205
Variación mixta	1.3208	4.3324	0.1282	-0.1640
Variación inexperta	1.7777	19.8903	0.2963	0.3333

Tabla 5.1: Costos y estados finales para el control óptimo y sus variaciones con solo una cota inferior,  $S = 100I$

Para respaldar algunos de los resultados anteriores, varias comprobaciones, sobre todo numéricas, se llevaron a cabo. En la Figura 5.5 se muestran varias isoclinas para diferentes valores de  $s$  y sus correspondientes valores de  $\tau(s)$ , todas calculadas a partir de la solución provista por las PDEs.

Se realizó un test empírico de optimalidad resumido en la Tabla 1. En ésta se registraron los costos parciales para diferentes desviaciones (variaciones) de la estrategia de control óptima. Las variaciones aludidas en la Tabla 1 se ilustran en la Figura 5.6. La variación “inexperta” consiste en aplicar el control de saturación  $u(t) \equiv 0$  hasta el tiempo ( $t = \tau_0 = \frac{1}{3}$ ) donde el control óptimo  $u^*(t)$  para el problema con estados finales fijos deja de ser negativo (ver Figura 5.1 y la ecuación (5.15)), y después de ese tiempo continuar usando el control óptimo  $u(t) = u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  hasta completar el horizonte de optimización.

### 5.2.3. Extensión del problema a controles acotados inferior y superiormente.

En esta subsección se considerará la existencia de dos cotas para la variable manipulada, una inferior ya analizada anteriormente y una nueva superior  $D$ . En este diseño serán estrategias de control admisibles las que se encuentren en el intervalo  $0 \leq u(t) \leq D$ . Además, se forzará una extensión de la hipótesis anterior, es decir, eventualmente el control se saturará en sus dos cotas, por lo que ahora es preciso suponer que existirán dos tiempos de conmutación, representados por  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Asumiendo que  $0 < \tau_1 < \tau_2 \leq T$ , y aplicando los mismos argumentos del ejemplo con una sola cota, aparecen tres subintervalos a ser analizados:

(i) Para  $t \in [0, \tau_1]$ . Este primer intervalo es similar al caso tratado con una sola cota inferior, por lo que las ecuaciones (5.23):  $u \equiv 0$ ,  $x_2(t) = -1$ ,  $x_1(t) = 1 - t$ , siguen siendo válidas.

(ii) Para  $t \in [\tau_1, \tau_2]$ , dado que en este intervalo el problema es regular, el control óptimo será una función lineal en  $t$ . Entonces, después de definir

$$p \triangleq \frac{D}{\tau_2 - \tau_1}, \quad u = p(t - \tau_1), \quad (5.43)$$

y usando  $\hat{c}$ ,  $\hat{d}$ ,  $z$ ,  $w$  para denotar a las incógnitas, se pueden obtener las relaciones necesarias para encontrar el valor numérico de los parámetros desconocidos:

$$x_2(t) = p \left( \frac{t^2}{2} - \tau_1 t \right) + \hat{c}, \quad (5.44)$$

$$x_2(\tau_1) = -1 \implies \hat{c} = -1 + \frac{p\tau_1^2}{2}, \quad (5.45)$$

$$x_1(t) = p \left( \frac{t^3}{6} - \frac{\tau_1 t^2}{2} \right) + \hat{c}t + \hat{d}, \quad (5.46)$$

$$x_1(\tau_1) = 1 - \tau_1 \implies \hat{d} = 1 - \frac{p\tau_1^3}{6}. \quad (5.47)$$

Utilizando los mismos argumentos, las trayectorias de los coestados y control arrojan

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \implies \lambda_1(t) \equiv z, \quad (5.48)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \implies \lambda_2(t) = -zt - w, \quad (5.49)$$

$$u = -\lambda_2 = zt + w \implies \begin{cases} z = p \\ w = -p\tau_1 \end{cases}, \quad (5.50)$$

y por lo tanto, para el próximo tiempo de conmutación se verifican las relaciones

$$x_1(\tau_2) = p \left( \frac{\tau_2^3}{6} - \frac{\tau_1 \tau_2^2}{2} \right) + \hat{c}\tau_2 + \hat{d}, \quad (5.51)$$

$$x_2(\tau_2) = p \left( \frac{\tau_2^2}{2} - \tau_1 \tau_2 \right) + \hat{c}, \quad (5.52)$$

$$\lambda_1(\tau_2) = p, \quad \lambda_2(\tau_2) = -p\tau_2 + p\tau_1 = -D. \quad (5.53)$$

Como fue mostrado cuando  $u$  sólo estaba restringido por una cota inferior, la relación necesaria para el final de este intervalo debería ser:

$$\lambda(\tau_2) = 2P(\tau_2)x(\tau_2), \quad (5.54)$$

donde la expresión para  $P(\tau_2)$  puede ser obtenida de la ecuación (3.144). Entonces, de las ecuaciones (5.43-5.54) se hallan las incógnitas  $\hat{c}$ ,  $\hat{d}$ ,  $z$ ,  $w$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , lo cual se resolvió numéricamente para obtener los valores de  $\tau_1 = 0.689277$  y  $\tau_2 = 0.938417$ .

El cálculo numérico de  $\tau_2$ , asumiendo que  $\tau_1$  es conocido, es posible también realizarlo a partir de la solución de las PDEs. De hecho, se debe resolver:

$$\begin{aligned} D &= u(\tau_2) = u_{s,\tau_1}(\tau_2) = \\ &= -\frac{1}{2}R^{-1}B'\beta(T - \tau_2, s) [\alpha(T - \tau_2, s)]^{-1} x(\tau_2), \end{aligned} \quad (5.55)$$

donde  $x(\tau_2)$  es el estado final óptimo para un horizonte de duración  $\tau_2 - \tau_1$  y la condición inicial  $x(\tau_1)$ , es decir,

$$x(\tau_2) = [\alpha(\tau_2 - \tau_1, s)]^{-1} x(\tau_1), \quad x(\tau_1) = e^{A\tau_1} x_0. \quad (5.56)$$

Utilizando las propiedades de transición de la matrix  $\alpha$ , es decir,

$$\begin{aligned} & [\alpha(T - \tau_2, s)]^{-1} [\alpha(\tau_2 - \tau_1, s)]^{-1} = \\ & = [\alpha(\tau_2 - \tau_1, s)\alpha(T - \tau_2, s)]^{-1} = [\alpha(T - \tau_1, s)]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

la ecuación apropiada a resolver para  $\tau_2$  resulta

$$D = -\frac{1}{2}R^{-1}B'\beta(T - \tau_2, s) [\alpha(T - \tau_1, s)]^{-1} e^{A\tau_1} x_0. \quad (5.58)$$

El valor de  $\tau_2 = 0.938417$ , encontrado de esta forma coincide con el obtenido analíticamente (ver la Figura 5.8).

(iii) Finalmente, para  $t \in [\tau_2, T] = [\tau_2, 1]$ ,

$$u \equiv D, \quad x_2(t) = Dt + E \Rightarrow E = -5.0692, \quad (5.59)$$

$$x_1(t) = D\frac{t^2}{2} + Et + F, \Rightarrow F = 2.6688 \quad (5.60)$$

$$x_1(1) = \frac{D}{2} + E + F = 0.0996, \quad (5.61)$$

$$x_2(1) = D + E = -0.0692. \quad (5.62)$$

Durante los subintervalos regulares el control óptimo es generado nuevamente a través de las soluciones de las PDEs. Los resultados son ilustrados en la Figura 5.7. Las isoclinas de  $s$  usadas para determinar el tiempo  $\tau_2$  de las soluciones de las PDEs son mostradas en la Figura 5.8.

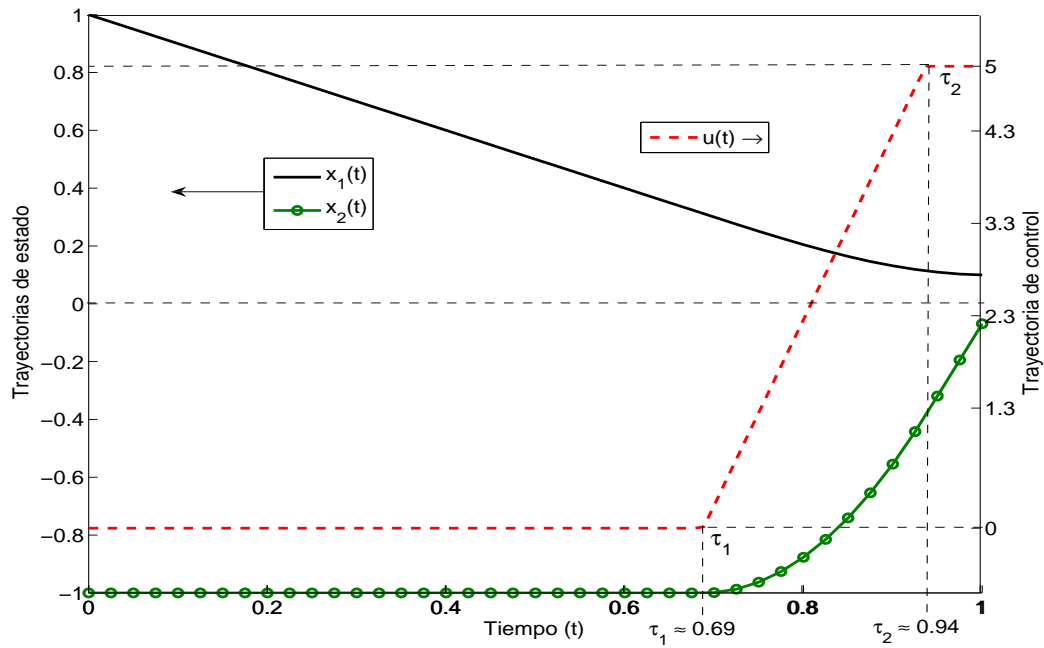


Figura 5.7: Trayectorias óptimas de los estados y el control cuando el control está acotado inferior y superiormente.

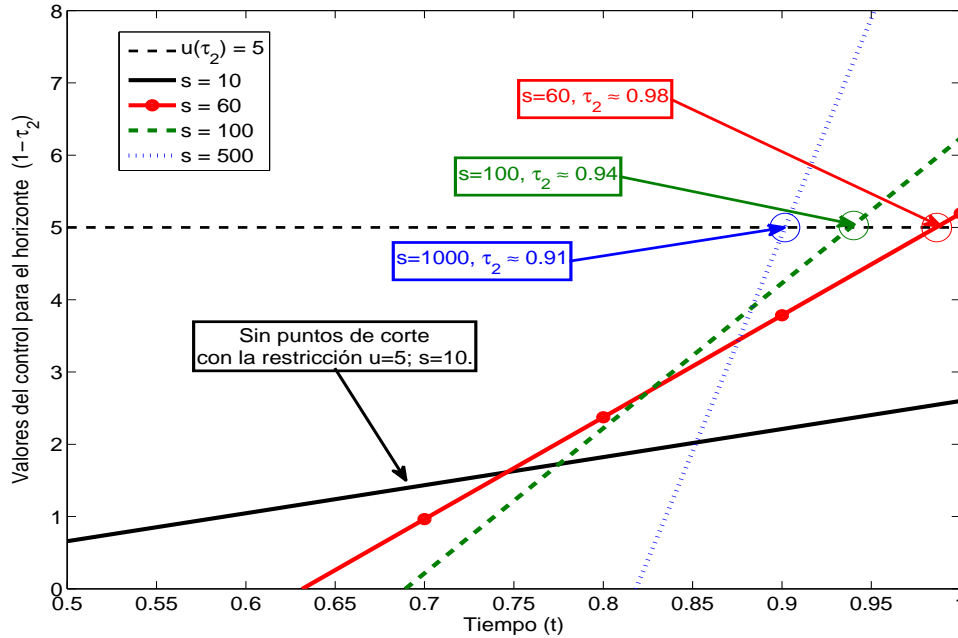


Figura 5.8: Cálculo del segundo tiempo de conmutación  $\tau_2$  y sus correspondientes estrategias de control óptimo para diferentes  $s$ .

### 5.3. Discusión y conclusiones.

Las PDEs variacionales fueron empleadas en el tratamiento del regulador lineal-cuadrático con estados finales flexibles, con penalizaciones del tipo  $x(T)'Sx(T)$ . Se mostró que cuando  $S = sI, s \geq 0$ , y al tomar su límite para  $s \rightarrow \infty$ , sus soluciones aproximan a las dadas por el PMP con estados finales fijos. Esto es aprovechado para estudiar problemas con controles acotados. A través de un ejemplo sencillo se ilustró cómo manejar restricciones en la variable manipulada para sistemas lineales y funciones de costo cuadrática, en las situaciones donde no puede obtenerse una solución sencilla a través del PMP. Las restricciones estudiadas fueron desigualdades del tipo  $u \geq 0$  y  $0 \leq u \leq D$ .

La solución de las PDEs proveen suficiente información útil para calcular, para el caso de estados finales libres, los tiempos de conmutación que indican dónde cambiar la estrategia de control, pasando del control de saturación al control óptimo que verifica las HCEs, y viceversa. Este tipo de estrategia resulta ser una aproximación de la solución esperada para estados finales fijos, y en el caso límite de  $s$  tendiendo a infinito sus soluciones son idénticas. Cuando el control está acotado por ambos lados entonces pueden ser varios los tiempos de conmutación que se deben calcular. Sin embargo, hacerlo es bastante sencillo y se puede lograr de dos maneras: i) off-line mediante las ecuaciones algebraicas (5.41, 5.58) (esto puede ser hecho numéricamente ya

que todos los valores de las matrices  $\alpha$ ,  $\beta$  están guardados en memoria), y ii) on-line evaluando continuamente el lado derecho de las ecuaciones (5.41, 5.58) hasta el  $t$  en el que se igualen con las cotas correspondientes.

De todas maneras, estos temas necesitan mayor investigación, y extensión al tratamiento de sistema no lineales.



## Capítulo 6

# Estrategias aproximadas de control óptimo basadas en desigualdades matriciales lineales (LMIs).

Este capítulo intenta desarrollar estrategias aproximadas de control óptimo basadas en los resultados del formalismo Hamiltoniano obtenidos en los capítulos anteriores y en algunos conceptos provenientes de control robusto aplicados al estudio del control de un reactor “por lotes” (o batch en inglés) que produce penicilina . El objetivo de esta parte es obtener leyes de control tales que demanden menos capacidad de cómputo. En ese contexto, los objetivos de estas estrategias de control (al igual que en la metodología H2DOF, ver Capítulo 4) serán: (i) generar la trayectoria nominal del proceso batch de tal manera que alcance aproximadamente la salida requerida, (ii) que se atenúen perturbaciones aleatorias y ruidos inherentes al sistema del control durante la operación del proceso, y (iii) a pesar de tener restricciones en la variable manipulada  $u(t)$  se alcancen las salidas de producción deseadas y los estados operen dentro de los rangos establecidos. Se mostrará cómo transformar las leyes feedforward no lineales propias del formalismo Hamiltoniano (desarrolladas en los Capítulos 3 y 4) a leyes de feedback de estados lineales. Estas leyes tendrán la forma de las conocidas leyes proporcionales (P) y/o integrales (I), pero adaptables on-line durante el proceso.

Básicamente se diseñarán dos estrategias: la primera minimizará su respectivo costo cuadrático más una penalización final (como las tratadas en capítulos anteriores) en tiempo finito pero sin manejo de restricciones, y la segunda adicionará los conceptos de desigualdades matriciales lineales (LMIs en su uso en inglés) para tener en cuenta las limitaciones físicas de la variable manipulada, aunque esta inclusión obligue a considerar el problema de optimización en tiempo infinito, a pesar de que el proceso batch siga operando en horizonte finito. Finalmente se pondrá a prueba el desempeño de las estrategias aplicándolas al control de un modelo típico de reactor fed-batch.

## 6.1. Control óptimo de procesos batch

Los procesos “batch” han recibido mucha atención durante las pasadas dos décadas debido a los nuevos productos de las industrias química, farmacéutica y de alimentos que están siendo requeridos. Sin embargo, los procesos batch siempre han sido catalogados, desde el punto de vista del control, como procesos difíciles de manejar ya que, en general, al operarse durante tiempos cortos, la dinámica fuertemente no lineal no alcanza a trabajar cerca de puntos de estado estacionario (o equilibrios aislados).

El problema de control en los procesos batch es usualmente tratado como un problema de tracking con trayectorias de referencia variantes en el tiempo (que en la jerga de procesos batch se denominan “recetas”). Normalmente, los ingenieros o encargados del proceso disocian la operación de un batch en tres etapas claramente diferenciadas: arranque, operación o batch, y fin de la operación. Aunque estas tres etapas son bien manejadas desde el diseño por los ingenieros y operarios de cada proceso específico, se debe remarcar que en la mayoría de los casos, las industrias están lejos de operar óptimamente y de forma automática. El mejoramiento de los productos finales por lo general sólo se da debido a la información y experiencia de los operarios adquiridas en innumerables corridas del proceso.

De todas maneras, la falta de optimalidad en el control de procesos batch, no sólo se debe a la ausencia de integración de las industrias con las teorías emergentes de control de procesos, sino que éstas, mayormente desarrollan algoritmos complicados de implementar computacionalmente (ya que deben correr procesos de integración numérica de ODEs, optimización compleja en línea, etc.) y además necesitan de un operario muy calificado para el uso apropiado y mantenimiento de la instrumentación. Así que uno de los retos del control de procesos siempre ha sido el diseño de estrategias simples de control, tanto numéricamente como de implementación, es por eso que los controladores PI debido a su simplicidad se mantienen en la mayoría de las industrias.

El paradigma de control óptimo, donde el formalismo Hamiltoniano juega un papel importante, está en activo desarrollo, sobre todo cuando se persigue llevar todas las herramientas teóricas desarrolladas hacia la implementación automática en procesos. Este marco teórico puede brindar respuesta a la mayoría de necesidades en la operación de sistemas, como por ejemplo, creación de nuevas trayectorias óptimas o recetas, reducción de ruidos, atenuación de perturbaciones, manejo de restricciones, tal y como se ha mostrado a lo largo de los capítulos anteriores.

En este capítulo se adaptará el esquema H2DOF (trabajado en el Capítulo 4) a ciertas simplificaciones que serán fundamentadas en las subsecuentes secciones. El esquema de control final resultante es ilustrado en la Figura 6.1. Este esquema combina las características de control feedforward (asociado con la construcción de la trayectoria de referencia) y el control feedback (relacionado con el filtrado y atenuación de perturbaciones), ver [89, 46, 103], pero se agrega la capacidad de manejar restricciones, cotas superiores e inferiores, en la variables manipulada).

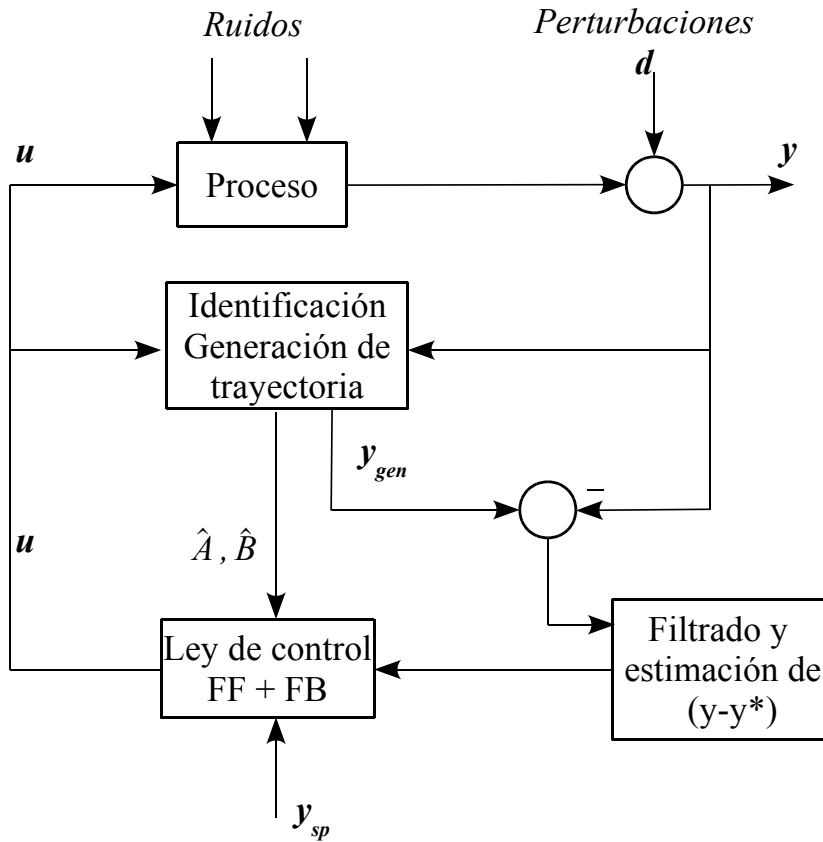


Figura 6.1: Esquema de control H2DOF simplificado.

## 6.2. Ecuaciones de un reactor fed-batch para la producción de penicilina

Como se adelantó en la introducción del capítulo, el caso estudio será un fermentador fed-batch, el cual produce penicilina y está ampliamente detallado en [49, 10]). El proceso (no lineal) está gobernado por cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= h_1 x_1 - u \left( \frac{x_1}{500 x_4} \right), \quad x_1(0) = 1.5, \\
 \dot{x}_2(t) &= h_2 x_1 - 0.01 x_2 - u \left( \frac{x_2}{500 x_4} \right), \quad x_2(0) = 0, \\
 \dot{x}_3(t) &= -\frac{h_1 x_1}{0.47} - x_1 \left( \frac{0.029 x_3}{0.0001 + x_3} \right) - h_2 \frac{x_1}{1.2} + \frac{u}{x_4} \left( 1 - \frac{x_3}{500} \right), \quad x_3(0) = 0, \\
 \dot{x}_4(t) &= \frac{u}{500}, \quad x_4(0) = 7.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde

$$h_1 = 0.11 \left( \frac{x_3}{0.006 x_1 + x_3} \right), \quad h_2 = 0.0055 \left( \frac{x_3}{0.0001 + x_3 (1 + 10 x_3)} \right). \tag{6.2}$$

y se asume una ecuación de observación

$$y = Cx = x_2. \quad (6.3)$$

Las variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$  representan la biomasa, la concentración de penicilina (g/L), la concentración de sustrato (g/L) y el volumen (L), respectivamente. La salida del sistema será la concentración de penicilina, es decir, el estado  $x_2$ , con la matriz de salida  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . En consecuencia se asumirá que los valores de  $x_2$  son medidos continuamente y monitoreados on-line. Los objetivos de producción impuestos para el proceso son:

- Alcanzar en 132 horas ( $T = 132$  sería el horizonte de optimización) la concentración de penicilina final requerida de 8 g/L. Este valor entonces será la salida deseada  $\bar{y} = \bar{x}_2 = 8$ . Estas condiciones operativas fueron extraídas de [10].
- Los estados del proceso deben operar dentro del siguiente rango de valores para  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_4$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq 40, \\ 0 &\leq x_3 \leq 25, \\ 0 &\leq x_4 \leq 10; \end{aligned} \quad (6.4)$$

- y además se restringe el valor de la variable manipulada  $u(t)$  (la cual es la velocidad de alimentación de sustrato) a:

$$0 \leq u \leq 50. \quad (6.5)$$

### 6.3. Generación de la trayectoria nominal del reactor batch.

La generación de la “receta” en un proceso batch es muy importante, ya que ésta le indica al proceso cómo alcanzar la salida deseada y en algún sentido utilizan apropiadamente los recursos del proceso para minimizar costos de operación. Desde el punto de vista de control, el problema que se estudiará será el de cambio óptimo de set-point (aunque los estados finales no son necesariamente equilibrios) aplicando el formalismo Hamiltoniano descrito en la sección anterior. Para este capítulo, se centrará en sistemas no lineales afines en el control que siguen la siguiente dinámica inicializada:

$$\dot{x} = f_1(x) + g_1(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (6.6)$$

Para el fermentador fed-batch se tiene:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} h_1 x_1 \\ h_2 x_1 - 0.01 x_2 \\ -\frac{h_1 x_1}{0.47} - x_1 \left( \frac{0.029 x_3}{0.0001 + x_3} \right) - h_2 \frac{x_1}{1.2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{pmatrix} -\left( \frac{x_1}{500 x_4} \right) \\ -\left( \frac{x_2}{500 x_4} \right) \\ \frac{1}{x_4} \left( 1 - \frac{x_3}{500} \right) \\ \frac{1}{500} \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

con un funcional de costo cuadrático dado por la ecuación (4.3), donde las matrices  $Q$ ,  $R$ , y  $S$  son elegidas para que cumplan las condiciones teóricas para garantizar solución única en el caso de querer obtener la  $P(t)$  de Riccati, estabilidad asintótica, etc. (ver Capítulo 2, [106]) y tengan las dimensiones apropiadas de acuerdo al caso estudio. El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  para este caso resulta, según la ecuación (2.12):

$$\mathcal{H}(x, \lambda, u) = (x - \bar{x})'Q(t)(x - \bar{x}) + u'R(t)u + \lambda'(f_1(x) + g_1(x)u), \quad (6.8)$$

y utilizando la condición de que la derivada de  $\mathcal{H}$  con respecto a  $u$  es cero (véase [106]), el control óptimo para este sistema afín es:

$$u^0(x, \lambda) = u^*(x^*, \lambda^*) = u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1} [g_1(x^*)]'(t)\lambda^*(t). \quad (6.9)$$

Gracias al control óptimo hallado se podrían plantear las HCEs respectivas (ecuaciones (2.20, 2.21)), hallar las PDEs y por ende las condiciones iniciales de los coestados. Sin embargo, el problema se atacará desde una perspectiva diferente, más desde lo aproximativo.

### 6.3.1. Extensión de la ley feedforward Hamiltoniana a un feedback de estados lineal.

Ya en el Capítulo 2 se han descrito las ecuaciones canónicas Hamiltonianas (HCEs), que con las adecuadas condiciones iniciales pueden ser integradas en paralelo con el proceso y de esta manera ir generando la trayectoria óptima y nominal del proceso, de acuerdo al esquema H2DOF estudiado en detalle en el Capítulo 4. Sin embargo, se ha visto en los Capítulos 3 y 4, que tales condiciones son difíciles de calcular para algunos sistemas no lineales con horizontes de optimización largos y de dimensión alta, donde resolver las PDEs podría volverse una tarea complicada de llevar a cabo (ver [36]). Por esa razón y como alternativa de solución cuando el tratamiento riguroso Hamiltoniano se ve obstaculizado por problemas numéricos, se describirán algunas estrategias de control subóptimas que permitan aproximar la solución al problema. Para esto, se construirá una ley de control que dependerá sólo de los estados físicos del proceso. Para lograrlo, se harán algunas suposiciones sobre el sistema y principalmente sobre los coestados del mismo. Estas suposiciones intentan convertir la acción de control (6.9), que depende explícitamente de  $x$  y  $\lambda$ , a una ley pura de los estados y que además sea lineal. Concretamente, las suposiciones son las siguientes:

- (i) Los coestados expresados mediante la ecuación (2.18) en un entorno de  $x^*$ ,  $\lambda^*$  serán asumidos lineales, es decir, verificarán aproximadamente la relación:

$$\lambda \triangleq 2P(t)(x(t) - \bar{x}), \quad (6.10)$$

donde  $\bar{x}$  es el estado deseado (el cual no necesariamente es un equilibrio del sistema), determinado por el encargado de proceso, y  $P(t)$  es la ganancia adaptable on-line del controlador, análoga a la proveniente del problema LQR mediante las ecuaciones de Riccati.

(ii) Únicamente para cuando se calcula la acción de control, el sistema se considerará una aproximación lineal del sistema no lineal (ecuaciones (2.1,  $y = Cx$ ), de tal modo que verifique:

$$\dot{x} \approx A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.11)$$

donde  $A(t)$  y  $B(t)$  son matrices resultantes de una linealización estándar alrededor de una trayectoria del sistema no lineal. Por esta razón, el problema lineal resultante debe ser visto como un problema variante en el tiempo. En esta parte, dado que se conoce el modelo del sistema, se aceptarán los datos provenientes de la integración numérica para ir calculando las matrices  $A(t), B(t)$  usando la linealización explícita del sistema vía las derivadas de la dinámica original.

Al tener en cuenta las anteriores suposiciones, el control óptimo de la ecuación (6.9) se transforma en

$$u \approx \tilde{u} = -R^{-1}B'(t)P(t)(x(t) - \bar{x}) \quad (6.12)$$

Esta acción de control es una aproximación de la ley no lineal, pero se acepta la pérdida de optimalidad a expensas de reducir la carga numérica de los cálculos. El principal problema en este punto es cómo calcular la matriz  $P(t)$  que es parte de la ganancia del controlador.

### 6.3.2. Estrategia subóptima de control en tiempo finito.

Al utilizar la linealización del sistema para calcular el control, en realidad subyacentemente se está buscando optimizar un sistema LQR, con el mismo funcional de costo pero utilizando la dinámica (6.11). En los capítulos previos se ha mostrado que este problema tiene solución a través de las ecuaciones de Riccati, si el problema es de tiempo finito, precisamente, se debe resolver la DRE (ecuación (2.34)) con condición final  $P(T) = S$ .

A continuación repasaremos los principales métodos para resolver la DRE:

- Una integración hacia atrás en el tiempo, pero esta opción no es apropiada para los objetivos planteados ya que se debe resolver la DRE, guardarla en memoria y después aplicarla al sistema, o sea que no se puede aplicar el esquema totalmente on-line.
- Transformando el sistema de condiciones de borde a uno de condiciones iniciales mediante el procedimiento descrito en la sección 3.3.1 del Capítulo 3, y aprovechando la definición de las matrices auxiliares  $(\alpha, \beta)$  y sus respectivas PDEs, se halla  $\rho$  y  $\sigma$  en función de  $(T, S)$ . Después utilizando la ecuación (3.144) o la condición inicial (3.145) se va calculando la  $P(t)$  con el proceso.

Si la linealización utilizada para calcular las condiciones iniciales es “buena” entonces el problema se reduce a resolver el problema LQR y aplicar la acción de control  $u(t)$  dada por la ecuación (6.12), sin embargo, este caso no es el más común. En realidad las linealizaciones cambiarán

a medida que el sistema se aleja de sus condiciones iniciales porque las propiedades físicas y la naturaleza del sistema cambia a medida que el proceso batch avanza. Así que, en vista de esta observación se propone el siguiente algoritmo de resolución:

- (i) En el tiempo  $t = 0$ , se da el “arranque” del proceso batch, se linealiza el sistema, y con las matrices  $A$ ,  $B$  obtenidas se resuelven las PDEs (3.124-3.125) suponiendo que el horizonte de optimización es  $T$ . Para un  $S$  específico se halla la  $P(0)$  (3.145), se calcula la ganancia del controlador y se aplica el valor de la acción de control al sistema.
- (ii) En la operación del proceso batch, es decir, para los tiempos  $0 < t < T$  se van identificando las matrices  $A$ ,  $B$  a medida que el proceso avanza. Cuando se detecta que la linealización ya no es válida, es decir, las  $A_{t_j}$ ,  $B_{t_j}$  calculadas en el tiempo  $t_j$  difieren sustancialmente con las  $A_{t_{j-1}}$ ,  $B_{t_{j-1}}$ , se redefine el horizonte a  $\tilde{T} = T - t_j$ , se calcula las PDEs con las nuevas matrices del sistema, se halla la nueva  $P(0)$  (3.145), y se continua aplicando el control al sistema.
- (iii) Esta actualización continua de las matrices del sistema se realiza hasta que se da el “fin” de la operación batch (es decir, hasta completar el horizonte  $T$ ).

Para el caso estudio se eligieron los siguientes coeficiente matriciales:  $Q = I_{4 \times 4}$ ,  $R = 3$  y  $S = sI_{4 \times 4}$  ( $s = 20$ ). Las matrices iniciales del sistema linealizado  $A$ ,  $B$  son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18.3 & 0 \\ 0 & -0.01 & 82.5 & 0 \\ 0 & 0 & -542.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -0.0004 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{500} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

En la Figura 6.2 se ilustra los resultados de la aplicación del anterior algoritmo para el caso estudio, construyendo la acción de control mediante la ecuación (6.12) y las PDEs. El horizonte de optimización fue de  $T = 132$  horas. La respuesta del proceso fed-batch es acorde a lo descrito en [10], pero aparece un error final u “off-set” (se debe recordar que en esta tesis se definió el off-set como la diferencia  $(x(T) - \bar{x})$  al fin de la operación del proceso) que excede los requerimientos ingenieriles de desempeño impuestos al sistema de control, donde se espera que la salida real no supere un 2-5% en valor absoluto a su estado deseado. Para el caso estudio la salida real obtenida fue de  $x_2(132) = 6.47$  g/L, mientras que la referencia estaba en  $\bar{x}_2 = 8$  g/L. Sin embargo, este error era esperado por la aplicación de controles proporcionales (véase [106, 94]). Los otros estados del sistema están dentro de los límites impuestos a la operación del fermentador en la Sección 6.2.

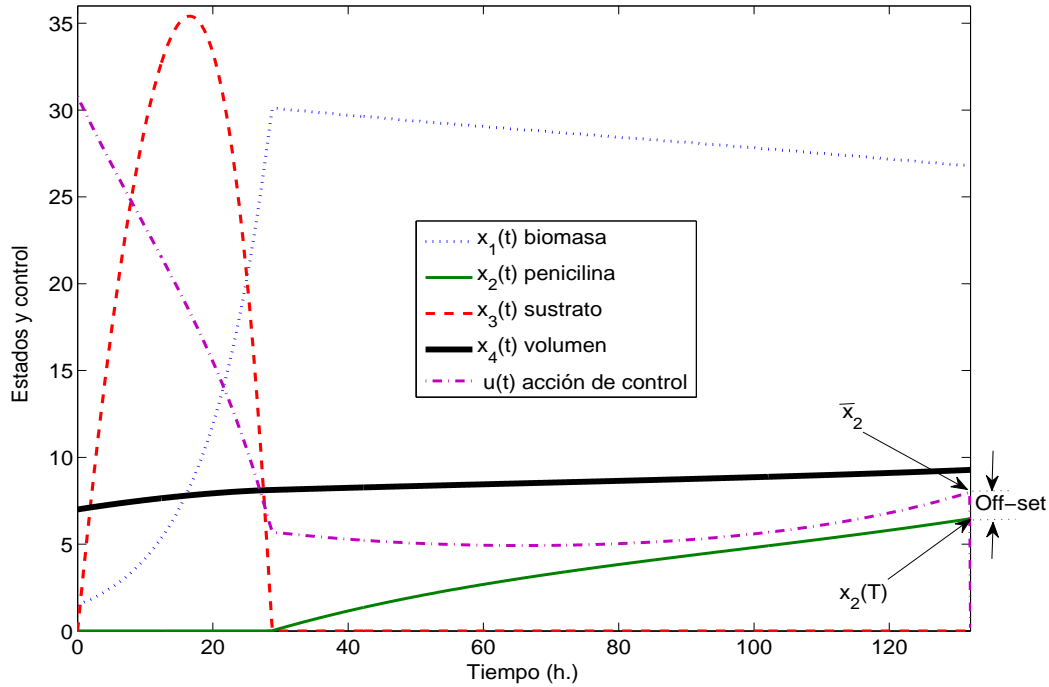


Figura 6.2: Trayectorias nominales de estado y control para el reactor fed-batch.  $T = 132$  y  $s = 20$ .

Para corregir el off-set de salida ( $y_{sp} - y$ ), una práctica común es la de agregar el modo integral al controlador proporcional (véase [94]), adicionando estados ficticios al sistema de acuerdo a las salidas del sistema. Para este caso, ya que la salida es únicamente la concentración de penicilina, se extenderá el modelo del sistema a una dimensión más, lo cual se mostrará en detalle a continuación.

### Controlador PI subóptimo.

De la teoría clásica de control [94], y de algunas referencia actuales [58, 82], se sabe que para reducir el off-set de salida de un proceso con controles proporcionales se debe adicionar el estado ficticio  $\xi$  al sistema expresado mediante la ecuación (6.11), de tal forma que el sistema extendido resulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t), \quad (6.14)$$

$$\dot{\xi} = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t). \quad (6.15)$$

donde  $r(t)$  es la trayectoria de referencia.



Manteniendo el mismo funcional de costo, la ley de control PI se escribe como (abusando un poco de la notación)

$$u = \tilde{u} = -\tilde{k}\tilde{x} = -k_p(t)x(t) + k_i(t)\xi(t) \quad (6.16)$$

donde  $\tilde{k} = R^{-1}\hat{B}'\hat{P}(t) = (k_p(t) \ k_i(t))$ ,  $k_p(t)$  es la ganancia proporcional y  $k_i$  es la ganancia integral, con  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x(t) - \bar{x} \\ \xi(t) \end{pmatrix}$ , cuyos estados  $x(t)$  provienen de las mediciones del proceso real y  $\hat{P}(t)$  es la solución de la DRE (2.34) extendida, con matrices

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que se mantiene las ganancias variables, para actualizarlas en línea con el proceso. Así que la nueva ley de control es la famosa acción P+I, que se implementa en los controladores industriales más básicos.

En la Figura 6.3 se ilustra la aplicación de esta nueva estrategia de control con los coeficientes  $Q = 2.2I_{5 \times 5}$ ,  $R = 0.21$ , y  $s = 0.1$  para el caso estudio aplicando el control de la ecuación (6.16). Se visualiza que efectivamente el off-set al final de la operación del proceso batch es reducido. El nuevo estado final alcanzado es  $x_2(T) = 8.02$ , mientras que la referencia se impuso en  $8 \text{ g/L}$ , por lo que el error final es de aproximadamente 0.25%. Sin embargo, un nuevo problema se plantea: el estado  $x_4$  termina por encima de su cota superior (recordar que el volumen máximo permitido es de  $10 \text{ L}$ ).

### 6.3.3. Estrategia subóptima en horizonte infinito.

Hasta el momento se ha tratado el problema de optimización del reactor fed-batch obviando las restricciones. Sin embargo se mostró que el proceso se salía de las límites impuestos, sobre todo el estado  $x_4$ , el cual no podía sobrepasar el volumen de  $10 \text{ L}$ . Por la relación tan directa con la variable manipulada, se restringirá aún más al control de tal manera que  $x_4$  no llegue a su límite superior. Al considerar ahora el problema de restricciones, este problema formalmente se debería resolver con la aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) [98], por lo cual la acción de control que se describió en las secciones anteriores dejaría de tener validez. Dada la complicación que conlleva la aplicación del PMP (como se ejemplificó en el Capítulo 5), se atacará el problema de forma aproximada mediante la introducción de las desigualdades matriciales lineales.

### Restricciones de entrada via LMIs

En esta parte se introducirán los conceptos de desigualdades matriciales lineales (LMIs) y su relación con problemas de optimización y control. Se verá como las LMIs ayudan a encontrar la ganancia  $P(t)$  que simultáneamente garantice estabilidad asintótica, manejo de restricciones

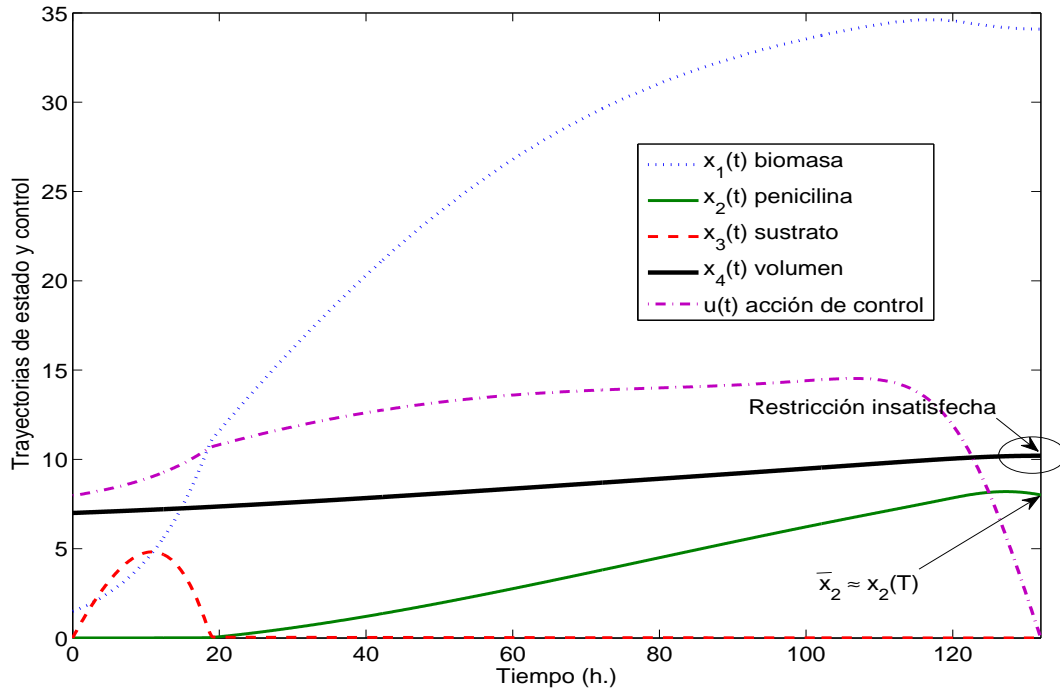


Figura 6.3: Trayectorias nominales de estado y control para la ley de control PI.

y cierto grado de optimalidad. Existe una vasta literatura sobre estas LMIs, se puede consultar [18, 74] para mayores detalles.

Básicamente una LMI se define como una matriz de la forma:

$$\mathcal{F}(\pi) \triangleq \mathcal{F}_0 + \sum_{i=1}^m \pi_i \mathcal{F}_i > 0 \quad (6.17)$$

donde  $\pi \in \mathbb{R}^m$  y  $\pi_i$  son las variables a optimizar, y las matrices simétricas definidas positivas  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , vienen dadas. La LMI (6.17) es una restricción convexa en  $\pi$ , es decir, el conjunto de  $\{\pi \mid \mathcal{F}(\pi) > 0\}$  es convexo. En particular, las desigualdades lineales y cuadráticas, desigualdades de norma de matrices, y restricciones que aparecen en problemas de control, tal como la ecuación de Riccati (6.17), las cotas de la variable manipulada, y la ecuación de Lyapunov de estabilidad para sistemas lineales pueden ser puestas en la forma de una LMI.

Una ventaja importante que provee las LMIs es que el problema con múltiples restricciones puede ser expresado con múltiples LMIs, esto es,  $\mathcal{F}^1(\pi), \dots, \mathcal{F}^n(\pi) > 0$  y entonces estas LMIs a su vez pueden ser escritas como una sola LMI más grande que las abarque. Esta última LMI se escribe como:

$$\text{diag}(\mathcal{F}^1(\pi), \dots, \mathcal{F}^n(\pi)) > 0. \quad (6.18)$$

Nótese que por lo general las inecuaciones que se quiere describir mediante las LMIs no vienen dadas en la forma (6.17), por lo que es necesario contar con un procedimiento para esto. Dicho

procedimiento está basado en los complementos de Schur [18], estos complementos brindan una equivalencia entre ecuaciones cuadráticas y matriciales, explícitamente:

$$\begin{pmatrix} Z(\pi) & D(\pi) \\ D'(\pi) & W(\pi) \end{pmatrix} > 0 \quad (6.19)$$

donde  $Z(\pi) = Z'(\pi)$  y  $W(\pi) = W'(\pi)$ , y  $D(\pi)$  depende de  $\pi$ , es equivalente a

$$W(\pi) > 0, \quad Z(\pi) - D(\pi)W(\pi)^{-1}D'(\pi) > 0 \quad (6.20)$$

o

$$Z(\pi) > 0, \quad W(\pi) - D'(\pi)Z(\pi)^{-1}D(\pi) > 0 \quad (6.21)$$

es decir, el conjunto de desigualdades no lineales (6.20) o (6.21) podrían ser representados como una LMI (6.19). Al resolverse las LMIs por métodos de optimización enteramente numéricos, se debería garantizar que su solución es factible dentro de intervalos relativamente cortos de tiempo (sobre todo si se quiere implementarlos en estrategias de control on-line), y además se debería evaluar su esfuerzo computacional. Sin embargo, para el caso estudio de este capítulo se asume que el período de muestreo es suficientemente amplio y permite realizar dichos cálculos computacionales.

Concretamente, los problemas de control que serán tratados como un solo problema de optimización utilizando LMIs son:

1. Si el problema de optimización en horizonte infinito es considerado, es bien conocido que cuando los coeficientes de penalización del control  $R$ ,  $Q$  son estrictamente definidos positivos y el sistema lineal es controlable, entonces, el problema LQR está bien planteado y tiene solución mediante la ecuación algebraica de Riccati (ARE) (ver [106] para los detalles). Esta ecuación puede ser escrita como una LMI así:

$$\Pi\hat{A} + \hat{A}'\Pi + Q - \Pi\hat{B}R^{-1}\hat{B}'\Pi > 0, \quad (6.22)$$

con  $\Pi \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $\Pi > 0$  solución de la desigualdad matricial y simétrica. Dado que  $R > 0$ , y usando la ecuación (6.20), la desigualdad algebraica de Riccati es una LMI,

$$\mathcal{F}^1(\Pi) = \begin{pmatrix} \Pi\hat{A} + \hat{A}'\Pi + Q & \Pi\hat{B} \\ \hat{B}'\Pi & R \end{pmatrix} > 0 \quad (6.23)$$

2. Las limitaciones físicas del equipamiento del sistema de actuadores y sensores del sistema de control a menudo imponen restricciones, sobre todo en la variable manipulada  $u(t)$ . Estas restricciones serán incorporadas al problema de optimización como una LMI. Considerando que el sistema lineal (6.11) (cuando  $u(t)$  es una ley de control estabilizante) está dentro de un elipsoide invariante de control como se detalla en [74], las cotas del control puede ser incorporadas por medio de una LMI, en particular:

$$\mathcal{F}^2(\Pi) = \begin{pmatrix} u_{\max}^2 \gamma I & \Pi \hat{B} R^{-1} \\ R^{-1} \hat{B}' \Pi & I \end{pmatrix} > 0. \quad (6.24)$$

es equivalente a

$$\|u(t)\|_2 < u_{\max}, \quad t \geq 0. \quad (6.25)$$

Dado que:

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|u(t)\|_2^2 &= \max_{t \geq 0} \left\| R^{-1} \hat{B} \Pi x(t) \right\|_2^2 \\ &\leq \lambda_{\max}^2(R^{-1} \hat{B}' \Pi \Pi \hat{B} R^{-1}) \\ &= v(R^{-1} B' \Pi \Pi B R^{-1}) < u_{\max}^2, \end{aligned} \quad (6.26)$$

con  $\gamma = \frac{1}{v}$  un constante real positiva que satisface  $x'(t) \Pi x(t) < \gamma$  (ver [18, 74]) para cualquier  $t$ .

Usando la propiedad (6.18), es posible escribir una sola LMI como

$$\mathcal{F}(\Pi) = \begin{pmatrix} \Pi \hat{A} + \hat{A}' \Pi + Q & \Pi B & 0 & 0 \\ \hat{B}' \Pi & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{\max}^2 \gamma I & \Pi \hat{B} R^{-1} \\ 0 & 0 & R^{-1} \hat{B}' \Pi & I \end{pmatrix} > 0 \quad (6.27)$$

Así, el problema de optimización es equivalente a resolver la LMI (6.27). Esta se puede resolver por métodos numéricos ya estandarizados [18] e implementados en software estándar como Matlab. La  $\mathcal{F}(\Pi)$ , para el caso estudio fue resuelta utilizando los coeficientes:  $Q = 5I_{5 \times 5}$ ,  $R = 1$ , y  $u_{\max} = 7.3$ .

El valor de  $\gamma$  es una constante que debería asegurar que el sistema en el último paso permanezca dentro del invariante de control (ya que esto garantiza de alguna manera estabilidad del sistema de control). Sin embargo, hacer esto involucra un problema de optimización mucho más complejo. Ya que estamos haciendo aproximaciones, y desde un punto de vista ingenieril,  $\gamma$  puede ser determinado a priori por ensayo y error. Para sistemas disipativos en lazo abierto, el valor inicial adoptado fue  $v = \|x(0)\|_2^2$  como es sugerido en [26].

Aunque, la restricción inicial en la variable manipulada  $u$  descrita por la ecuación (6.5) es 50, para el problema de optimización es redefinida al valor de 7.3 dado su relación casi directa con el estado  $x_4$ . Esto asegura que el volumen no sobrepase el nivel especificado de 10  $L$ . Además esta nueva limitación de la variable manipulada no debería causar mayores problemas ya que el control tiende a utilizar valores bajos, tal como se ve en las Figuras 6.2 y 6.3.

Así como en la estrategia anterior, ésta se puede mejorar al convertir las matrices (por ahora constantes) de la linealización a matrices variables en el tiempo. A continuación se da una algoritmo de implementación de la estrategia adaptable on-line:

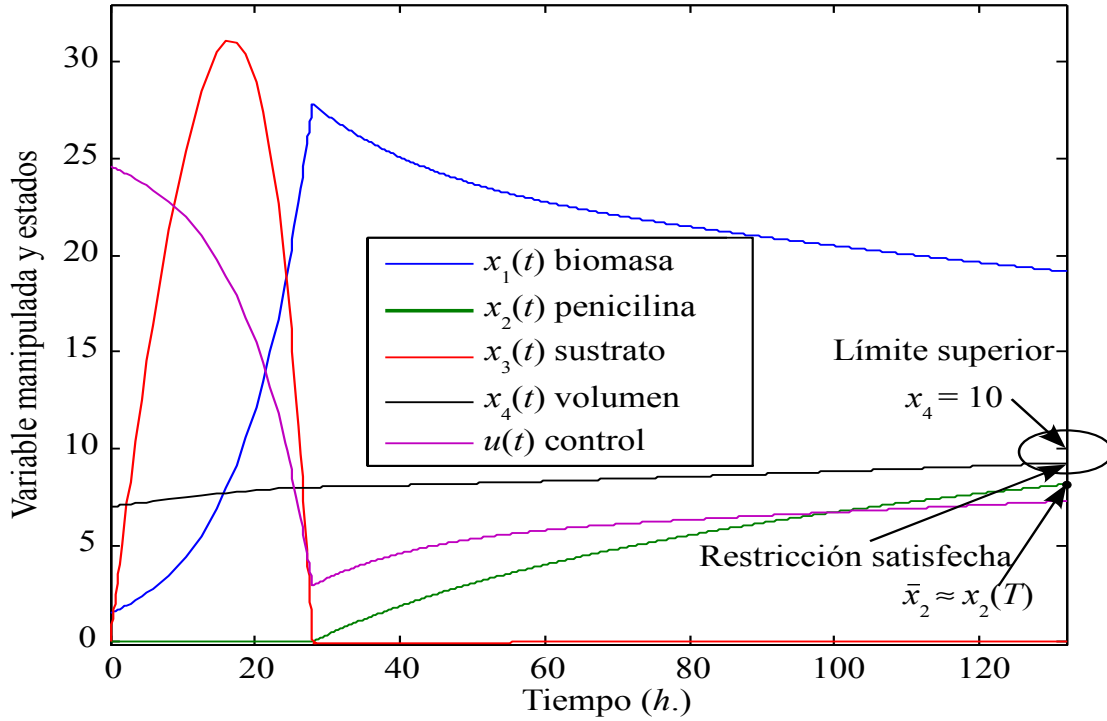


Figura 6.4: Trayectorias nominales de estado y control que cumplen restricciones.

1. Al “arranque” del proceso fed-batch (tiempo  $t = 0$ ) se calcula por primera vez la LMI (6.27) a través de las matrices extendidas para el control PI utilizando la linealización con matrices (6.13). Una vez resuelta la optimización, con la  $\Pi$  obtenida se construye la ganancia del controlador (ganancia proporcional  $k_P$  e integral  $k_i$ ) y se envía al sistema el valor del control.
2. En la “operación” del fermentador, es decir, para los tiempos  $0 < t < T$  se van identificando las matrices  $A$ ,  $B$  a medida que el proceso avanza. Cuando se detecta que la linealización ya no es válida, es decir, las  $A_{t_j}$ ,  $B_{t_j}$  calculadas en el tiempo  $t_j$  difieren sustancialmente con las  $A_{t_{j-1}}$ ,  $B_{t_{j-1}}$ , se recalcula la LMI (6.27) y nuevamente se envía en valor del control aplicando la ecuación ((6.12).
3. Esta actualización continua se realizar durante todo el horizonte de operación, cuando el tiempo es  $t = T$  se da el “fin” del proceso.

La estrategia adaptable usando las LMIs en horizonte de optimización infinito fue aplicada en simulación al proceso fed-batch y los resultados se ilustran en la Figura 6.4. Con esta estrategia se cumple con los objetivos de operación planteados al inicio.

## 6.4. Discusión y conclusiones.

En este capítulo se desarrolló un esquema de control completo, el cual adopta la metodología 2DOF y la modifica adicionando conceptos provenientes de control óptimo a través del formalismo Hamiltoniano, y de control robusto con los conceptos de desigualdades matriciales. El esquema permite construir on-line la trayectoria nominal (o para procesos fed-batch, la “receta”) por medio de una ley lineal que es la aproximación adaptable on-line de la ley feedforward no lineal que es suministrada por el formalismo Hamiltoniano. A su vez esa receta es seguida por el proceso y perturbaciones y ruidos son abatidos aún cuando la variable manipulada tiene limitaciones físicas en su operación.

Con este esquema se refuerza la importancia del uso de las PDEs desarrolladas en el Capítulo 3 en la generación de trayectorias nominales óptimas para procesos no lineales, sobre todo en procesos tipo batch donde éstas juegan un papel importante.

La innovación en esta parte radica en el hecho de incorporar de manera alternativa las restricciones de la variable manipulada en el diseño de la estrategia de control, además de expresar claramente las relaciones entre estado, coestado, ley de control combinándolas con conceptos de control óptimo y robusto, lo cual permitió escribir las leyes aproximadas de control PI adaptables on-line.

Finalmente a través de simulaciones numéricas se demostró el uso de las herramientas desarrolladas aplicándolas a un fermentador fed-batch. Ambas estrategias de control tuvieron un buen desempeño al lograr satisfactoriamente los requerimientos de operación inicialmente impuestos.

## Capítulo 7

# Modelación de la dinámica y Programación Dinámica Híbrida aplicada al tratamiento del SIDA (VIH-1)

Durante los últimos 20 años se ha puesto mucho esfuerzo en el desarrollo de tratamientos para la enfermedad del síndrome de inmunodeficiencia adquirido (SIDA) causada por el virus de inmunodeficiencia humano (VIH). El tratamiento HAART (High Activity Anti-retroviral Treatment), consistente en una combinación individualizada de diferentes tipos de medicamentos que se recetan basándose en factores como la carga viral del paciente, el conteo de linfocitos CD4+ y los síntomas clínicos, ha cambiado radicalmente la cara de la enfermedad [64, 65]. El HAART ha demostrado claramente que desacelera la progresión del SIDA y amplía la esperanza de vida del enfermo, ya que le permite a su organismo reconstruir su sistema inmune en el período de tratamiento. Sin embargo, y a pesar de la mejora clínica asociada al HAART, las drogas actuales muestran la incapacidad de suprimir completamente al VIH imposibilitando la curación total del SIDA. En conjunto con esto, no es recomendable interrumpir por largos períodos el tratamiento HAART, ya que después de algún tiempo el virus del VIH comienza nuevamente a ser perceptible en la sangre [64, 65, 90], de tal modo que el paciente queda atado por el resto de su vida al uso de estos medicamentos.

Las personas que toman las drogas antiretrovirales pueden tener baja adherencia (es decir, el paciente no sigue la prescripción del médico en cuanto a tomar la dosis correcta en el momento adecuado) a regímenes o dosificaciones complicadas. Datos recientes [11] indican que en cada clase terapéutica se da una relación única entre adherencia y resistencia, de ese modo se tiene que la resistencia a una terapia que conste solamente de inhibidores de proteasa

ocurre frecuentemente a niveles moderados y altos de adherencia, la resistencia a inhibidores de transcriptasa reversa ocurre en niveles bajos de adherencia, y la resistencia a inhibidores de fusión ocurre en rangos medios de adherencia. Los regímenes terapéuticos recomendados en la actualidad implican la toma de drogas antiretrovirales varias veces al día y por lo menos de dos clases distintas, algunas de éstas pueden causar efectos secundarios negativos no deseados tales como náusea y vómito. Otros efectos comunes asociados al HAART son: lipodistrofia (es una condición patológica donde las grasas se distribuyen anormalmente en el cuerpo) [6], toxicidad en el hígado, neuropatías, hiperglicemia, riesgos cardiovasculares, diabetes entre otros (véase [65, 27], y sus referencias). Es muy común que la adherencia a una terapia HAART disminuya hasta el punto de no ser factible para muchos individuos infectados con el VIH [90]. De hecho, cerca del 25 % de los pacientes de VIH paran la terapia HAART dentro del primer año debido a los efectos secundarios. Debido a esto, la planeación de tratamientos para la infección VIH necesita evaluar tanto las ventajas de la supresión durable del VIH como los riesgos de toxicidad de la droga [64, 65, 90]. Este hecho motiva la investigación de regímenes terapéuticos que brinden un balance entre supresión del virus y reducción de efectos secundarios nocivos, lo cual se ha convertido en un desafío importante dentro de las ciencias aplicadas como la ingeniería de control.

La aplicación de las herramientas de las ciencias básicas, principalmente el modelado matemático, ha tenido un fuerte impacto en la forma de percibir y comprender la infección VIH-1. Una gran cantidad de modelos determinísticos se han desarrollado para describir al sistema inmune y su interacción con el VIH-1, como también los efectos de la droga y la terapia [92, 93, 96, 75, 76, 97, 25, 5, 19, 69, 48]. En la mayoría de los casos, su expresión matemática se basa en sistemas relativamente complejos de ecuaciones diferenciales no lineales, donde los mecanismos de modelos de poblaciones son los más usados para su descripción.

Utilizando esos modelos matemáticos, distintas estrategias terapéuticas podrían simularse y de ese modo elegir la más adecuada para reducir la carga viral. A su vez, diversos problemas de control pueden ser planteados y solucionados al contar con una forma matemática explícita de la dinámica. Por ejemplo, la generación de terapias óptimas para la supresión de la infección VIH ha sido explorada en varios trabajos [76, 5, 19, 69, 48, 53, 12]. El análisis dinámico de estos problemas teóricos generalmente implica considerar una terapia variable en contraste con lo usado por los médicos actualmente, cuya prescripción de dosis es constante. La dosificación variable de la droga ha sido cuestionada por algunos autores debido a la posibilidad de generar mutantes del virus que sean resistentes a la droga. Sin embargo, estudios empíricos recientes indican que la relación entre adherencia y resistencia hacia la droga es un asunto más complicado de lo previsto. Datos recientes indican que cada terapia terapéutica antiretroviral tiene una relación única entre resistencia y adherencia (ver [11]). Inclusive, se han estudiado casos de medicación interrumpida (períodos significativos con dosis cero) [50], donde se concluye que la



prescripción cero no debe ser parte de un protocolo recomendable. En un consenso generalizado sobre este problema no se ha logrado resultados concluyentes. Por lo tanto, el estudio de dosificaciones óptimas, que considere objetivos múltiples (además de la reducción de la carga viral), puede llegar a ser particularmente constructivo debido a los efectos secundarios nocivos para el enfermo y al alto costo que acarrea el uso de terapias antiretrovirales.

En este contexto, se han utilizado con frecuencia métodos de control óptimo basados en tiempo continuo y en el Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) para determinar tratamientos para el VIH [76, 48]. Sin embargo, estos métodos se basan en sistemas de ecuaciones diferenciales que son difíciles de resolver numéricamente, principalmente debido a que el sistema resultante está sujeto a condiciones de borde mixtas en los denominados coestados del sistema. Sin embargo, aún llegado al caso de encontrar una eventual estrategia de control óptimo continua, ésta no sería para nada factible en situaciones que involucren pacientes reales, ya que ni los análisis de sangre pueden ser realizados continuamente ni se puede aplicar continuamente los cambios de la dosis prescritos por la estrategia. En contraste, versiones en tiempo discreto de éstos métodos (véase por ejemplo [21]) ofrecen algunas características positivas tal como serán ilustradas más adelante.

Otra herramienta de optimización recientemente promocionada es el control predictivo basado en modelo (MPC, véase por ejemplo [24]) sustentado en la metodología del horizonte deslizante: una secuencia de acciones de control futura se elige según una optimización de la evolución futura del modelo, luego se aplica la primera componente de esa secuencia al sistema hasta que las nuevas medidas de la salida del proceso estén disponibles. En aquel momento, basado en dichas medidas, se establece una nueva secuencia que substituye la anterior. Este método es esencialmente numérico y generalmente ejecutado “on-line” por lo que requiere una capacidad y velocidad de cómputo significativa. Métodos alternativos incluyen a la programación dinámica (la cual será adoptada aquí) en su versión continua y discreta. Entre las diferentes ventajas que esta metodología puede presentar, está la de preservar el punto de vista del “control manual” ejercido por el médico sobre la de “piloto automático”. Una característica importante al momento de evaluar y controlar la enfermedad bajo las circunstancias descritas.

## 7.1. Descripción de un modelo simplificado para la dinámica del VIH.

El VIH es una enfermedad muy compleja que implica múltiples interacciones entre el virus y el sistema inmunológico del huésped. Sin embargo, las características principales de la infección se pueden modelar utilizando relaciones matemáticas relativamente simples [93]. Este modelo básico tiene tres variables: las células T (CD4+) sanas, células T (CD4+) infectadas y copias libres del virus o viriones, denotadas por los estados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. Estos estados

coexisten en la sangre, donde muchas de las células sanas al encontrarse con los viriones se convierten en células infectadas. El índice de producción de células infectadas es proporcional al producto de la densidad de las células sanas por la densidad de viriones. La dinámica planteada está basada principalmente en la “ley de acción de masas” y consiste en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (ODEs)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda - \delta x - \beta xz, \\ \dot{y} &= \beta xz - \mu y, \\ \dot{z} &= \kappa y - \gamma z.\end{aligned}\tag{7.1}$$

La siguiente forma resumida con  $X \triangleq (x, y, z)'$  será utilizada para las ecuaciones anteriores,

$$\dot{X} = f(X),\tag{7.2}$$

donde  $f$  es el campo vectorial dado por el lado derecho de las ecuaciones (7.1).

La estructura del modelo de poblaciones está implícita en las ODEs del VIH. El parámetro  $\lambda$  representa el índice de producción constante de las células T (CD4+) no infectadas generadas por el timo. El crecimiento de la infección es representado por el término “presa-predador”  $\beta xz$ , el peso  $\beta$  es interpretado como la “tasa” de producción constante de la infección. El término  $\delta x$  es el índice de mortalidad de las células T (CD4+) sanas. Las células T (CD4+) infectadas  $y$  se producen a la misma tasa  $\beta xz$  de las células T (CD4+) no infectadas. El índice de mortalidad de  $y$  es  $\mu y$ . También se asume que cada célula infectada  $y$  produce  $\kappa$  copias virales por unidad de tiempo, y que el índice de mortalidad de los viriones es de la forma  $\gamma z$ .

La simulación numérica del modelo ilustra la evolución de la infección sin el uso de alguna droga antiretroviral. Se encontró que el sistema tiene dos puntos de equilibrio. El primero denominado “equilibrio sano” o libre de infección  $(x_h, y_h, z_h) = (\frac{\lambda}{\delta}, 0, 0)$  y el segundo llamado “equilibrio endémico”  $(x_e, y_e, z_e) = (\frac{\mu\gamma}{\beta\kappa}, \frac{\lambda - \delta x_e}{\mu}, \frac{\kappa y_e}{\gamma})$ . Resulta que todas las condiciones iniciales que están cerca del equilibrio sano (el cual es inestable) evolucionan libremente hacia el equilibrio endémico (que es estable). El sistema terapéutico (o de control) consiste básicamente en tratar de invertir esta propensión del flujo, es decir llevar al paciente tan cerca como sea posible del equilibrio sano (inestable).

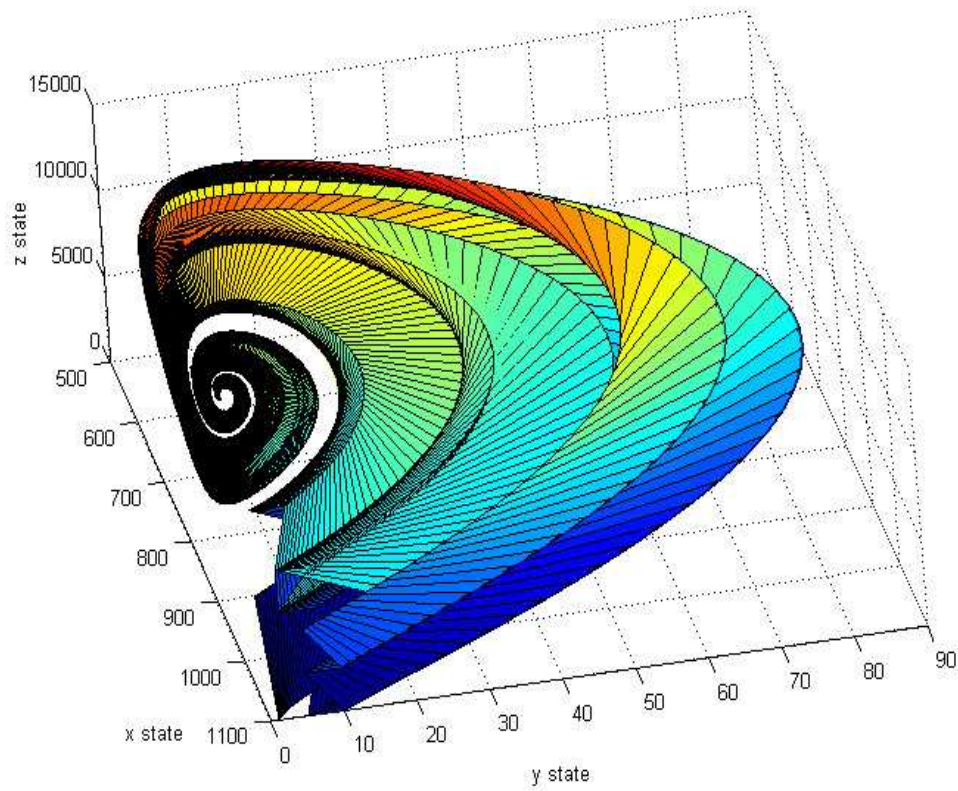


Figura 7.1: Flujo tridimensional de la dinámica libre ( $u \equiv 0$ ).

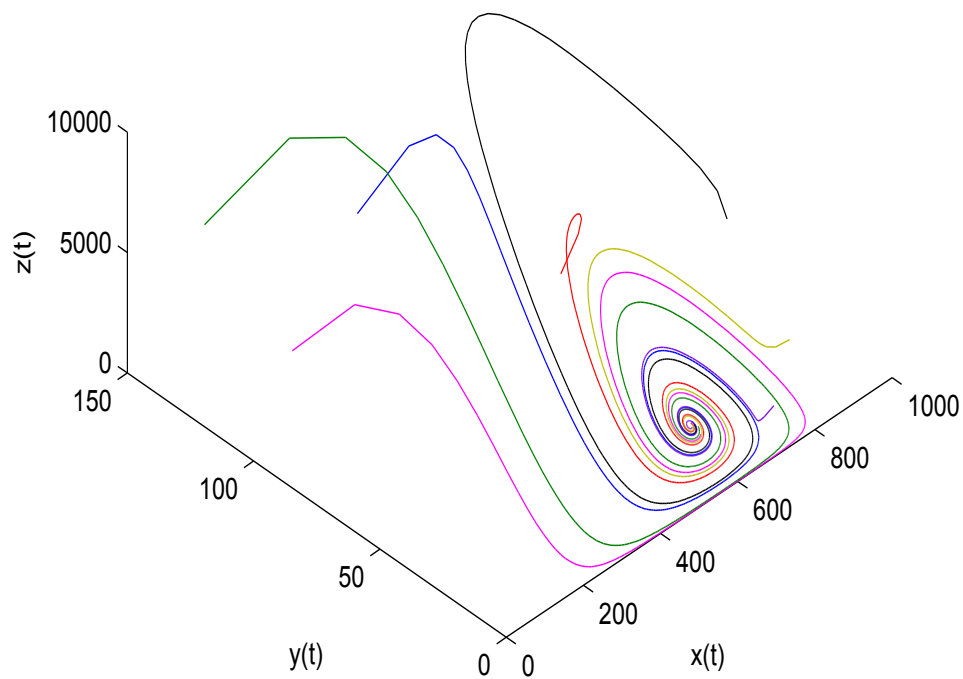


Figura 7.2: Trayectorias individuales de la dinámica libre en el espacio de fases 3D.

Varias trayectorias se muestran en las Figuras 7.1 y 7.2, donde las curvas están parametrizadas con el tiempo. Los rayos en la Figura 7.1 conectan puntos de igual tiempo en las distintas trayectorias que parten de diferentes condiciones iniciales para  $x_0 \geq 500$ . La Figura 7.2 muestra solamente algunas trayectorias individuales, incluyendo algunas con  $x_0 \leq 500$  y sin rayos que unan tiempos simultáneos. Las distintas etapas de la infección HIV-1 pueden ser distinguidas en el flujo. La primera fase, llamada de infección aguda, es caracterizada por un sobre impulso inicial en las células infectadas  $y$  y la carga viral  $z$ . Esto caso también puede ser visualizado en trayectorias individuales de  $x(t)$ ,  $y(t)$ , y  $z(t)$  ([69, 19]). Las células sanas CD4+  $x$  disminuyen a partir de 1000 células por cúbico milímetro a 400 en esta etapa. Después de que se haya alcanzado el “pico viral”, la población de las células no infectadas aumenta, sin embargo al final se estabiliza en un valor más bajo. Una especie de set-point es virtualmente logrado para todas las variables después de 400 días. Esta etapa se conoce como el período asintomático de la enfermedad del SIDA. Para un análisis más completo de la dinámica se puede consultar [93]. En este trabajo es acentuado el hecho de usar interacciones del tipo presa-depredador: la reducción de la abundancia de depredadores (viriones), puede causar un aumento en el número de presa (células T CD4+ no infectadas), que en cambio hace que suba el número de depredadores otra vez llevando las soluciones a oscilaciones sostenidas.

Los parámetros del modelo han sido estimados por diversos autores (ver p. ej. [95, 97, 108], etc.). Los valores nominales adoptados para este estudio son:

$$\begin{aligned}\lambda &= 9 \text{ células mm}^{-3} \text{ día}^{-1} \\ \delta &= 0.009 \text{ día}^{-1} \\ \beta &= 4 \times 10^{-6} \text{ ml copias}^{-1} \text{ día}^{-1} \\ \mu &= 0.3 \text{ día}^{-1} \\ \kappa &= 80 \text{ copias mm}^3 \text{ ml}^{-1} \text{ células}^{-1} \text{ día}^{-1} \\ &= 8 \times 10^{-2} \text{ copias células}^{-1} \text{ día}^{-1} \\ \gamma &= 0.6 \text{ día}^{-1}\end{aligned}$$

Los valores de estos parámetros deberían ser actualizados y validados constantemente usando muchos más datos experimentales. Una de las herramientas que ayudan a diseñar experimentos para mejorar la exactitud de los parámetros estimados es el cálculo de sensibilidad de los estados en los parámetros. La “sensibilidad”  $S_\beta$  del modelo con respecto al parámetro  $\beta$  es definido generalmente por el vector columna,

$$S_\beta \triangleq \frac{\partial \phi}{\partial \beta}, \quad (7.3)$$

donde  $\phi(t, X, P)$  es el flujo del campo vectorial de la dinámica (7.2), en la cual la presencia de los parámetros se hace explícita mediante el vector  $P = (\lambda, \delta, \beta, \mu, \kappa, \gamma)$  en  $f(X, P)$ . La solución

de las ODEs están condensadas en  $\phi$ , es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, X, P) = f(\phi(t, X, P)), \quad (7.4)$$

lo cual permite encontrar [28] una EDO para la matriz  $S_P = (S_\lambda, S_\delta, S_\beta, S_\mu, S_\kappa, S_\gamma)$ ,

$$\dot{S}_P = \frac{\partial f}{\partial X}(\phi(t, X, P), P) \cdot S_P + \frac{\partial f}{\partial P}(\phi(t, X, P), P), \quad S_P(0) = 0. \quad (7.5)$$

El mayor aporte brindado por el comportamiento cualitativo de las soluciones de (7.5) es el tiempo donde se debería hacer la medición de los datos experimentales, tal y como será mostrado en la sección siguiente.

## 7.2. El proceso terapéutico como un sistema de control.

Básicamente, las drogas antiretrovirales pueden ser agrupadas dentro de las tres categorías siguientes ([65]):

- Inhibidores de la enzima transcriptasa inversa (RTIs o Reverse Transcriptasa Inhibitors de su sigla en inglés): Si se inhibe la RT, el VIH puede entrar a una célula pero no la infectará con éxito ya que no será capaz de traducir o transcribir la información genética escrita en el ARN (ácido ribonucleico) del virus al ADN (ácido desoxirribonucleico) del individuo y por lo tanto la célula viral ya no sintetizará las proteínas virales necesarias para integrar dicha información. Esto evita la posterior replicación del virus.
- Inhibidores de la enzima proteasa (PIs o Proteasa Inhibitors del inglés): Si la proteasa del VIH es inhibida, se evita que la célula del enfermo de VIH a pesar de haber creado las partes necesarias para un virion sea capaz de unirlos formando así una nueva célula del virus.
- Inhibidores de fusión (FIs): Esta clase de drogas interfiere con la unión, la fusión y la entrada de un virion del VIH a una célula humana. Bloqueando este paso en el ciclo de replicación del VIH, tales agentes enlentecen la conversión del virus VIH hacia el SIDA.

Aquí solamente consideraremos la acción de RTIs. Aunque el proceso de medicación se ve claramente como una acción de control ejercida sobre el organismo del paciente (que sería la “planta”), la identificación física de la variable manipulada o control no está del todo clara. La mayoría de científicos en el tema trabajan con la eficacia de la droga (definida entre 0 y 1) como la entrada (o control), equivalente a un coeficiente que multiplica al parámetro  $\beta$  [76, 12, 69, 97, 48, 53]). Los resultados obtenidos de los métodos de optimización hasta ahora implementados han estado basados sobre esas eficacias abstractas (dada la ausencia de modelos farmacodinámicos adecuados que relacionen la eficacia de la dosis con la droga real). Esto hace

que dichos resultados simplemente den ideas vagas sobre cómo se debe modificar la prescripción de la dosis real con respecto al protocolo. Por esta razón, en el modelo matemático utilizado aquí, el control  $u$  representa la cantidad de droga (es decir la dosis real) manipulada por los médicos clínicos. Por lo tanto, el parámetro  $\beta$  en las ecuaciones (7.1, 7.2) se debe pensar en función de la dosis  $u$  (sin pérdida de generalidad) como una serie de potencias. A continuación se presenta la aproximación de ese tipo que fue adoptada:

$$\beta \approx \beta_0 - \alpha_1 u - \alpha_2 u^2, \quad (7.6)$$

donde los valores de los parámetros fueron estimados de datos experimentales a través de una regresión de mínimos cuadrados asumiendo lo siguiente:

- Las curvas de reducción de la carga viral para pacientes de VIH-1 bajo una monoterapia (una dosis diaria constante de  $u = 1.2$  g de aprecitabine, un RTI en desarrollo) pueden ser aproximadas usando datos clínicos ([23]) y la observación realizada en ([97]):
- Para un corto período después de que la terapia ha comenzado,  $x$  aproximadamente permanece constante (es decir  $x(t) \approx \tilde{x} \triangleq x(0)$ ).

Entonces, las ecuaciones para  $\dot{y}$  y  $\dot{z}$  en el modelo (7.1) se convierten en ODEs lineales, es decir, para  $v \triangleq \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ , el sistema se ve como  $\dot{v} = Av$ , con  $A = \begin{pmatrix} -\mu & \beta\bar{x} \\ \kappa & -\gamma \end{pmatrix}$ . Para estos cálculos iniciales es utilizado el valor nominal de  $\beta = 4 \times 10^{-6}$  (ver [23, 97]), diagonalizando  $A$  a través de un cambio de coordenadas estándar de los vectores propios de la base por medio de la matriz de transición  $Q$  (ver [63]), entonces  $D \triangleq \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = QAQ^{-1}$  implica que  $w(t) \triangleq Qv(t) = Qe^{At}v(0) = Qe^{At}Q^{-1}w(0) = e^{Dt}w(0)$ . Por lo tanto, las soluciones en las nuevas coordenadas son  $w_i(t) = e^{a_i t}w_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ , y una regresión de mínimos cuadrados puede estimar los valores propios  $a_i$  puede ser recuperados de las ecuaciones lineales  $\ln w_i(t) = ta_i + \ln w_i(0)$ . Esto es realizado para cada valor de  $u \in \tilde{U}$  (el conjunto experimental para  $u$ ) de  $v_u(t)$  en tiempos diferentes  $t$ , en otras palabras, ese conjunto de la forma  $\{(u, a_1(u), a_2(u)), u \in \tilde{U}\}$  es construido. Para las estimaciones de  $a_i(u)$  para cada  $u$ , los valores modificados de  $\beta(u) = \frac{(a_2(u) - a_1(u))^2 - (\gamma - \mu)^2}{4\kappa\bar{x}}$  son calculados, y entonces, de los pares  $\{u, \beta(u)\}$ , con una regresión polinomial de mínimos cuadrados se estima los coeficientes de la ecuación (7.6). Los valores obtenidos fueron:

$$\beta_0 = 4 \times 10^{-6}, \quad (7.7)$$

$$\alpha_1 = 0.88 \times 10^{-6}, \quad (7.8)$$

$$\alpha_2 = 0.3 \times 10^{-6}. \quad (7.9)$$

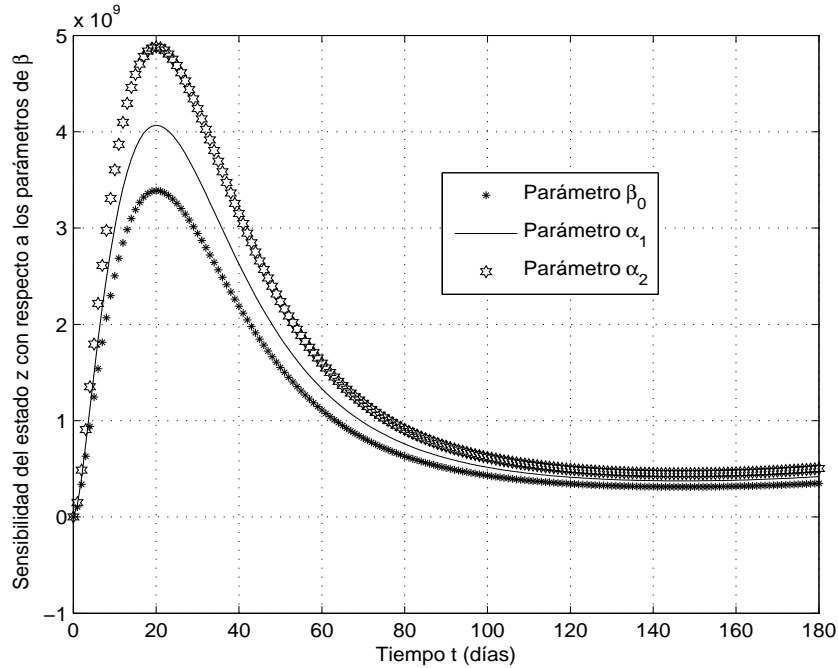


Figura 7.3: Sensibilidad de  $z$  con respecto a los parámetros  $\beta_0$ ,  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$ .

La Figura 7.3 representa la sensibilidad del sistema con respecto a los parámetros  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$ , y  $\alpha_1$  calculados a partir de la ecuación (7.5) con un conjunto de parámetros aumentado  $P$  y un valor constante de  $u = 1.2$  g. A continuación se presentan algunas observaciones y comentarios de éstos resultados numéricos:

- Existe un “pico” en todas las sensibilidades aproximadamente a los 20 días. En el contexto del modelamiento de un proceso (véase [28]) esto significa que las medidas de todas las variables alrededor de  $t = 20$  deberían ser preferidas para determinar valores confiables de  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ .
- Valores similares de sensibilidad fueron obtenidos para  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ , de lo cual se deduce que ambos parámetros son igualmente necesarios en la expansión del parámetro original  $\beta$ .
- El elevado valor de la sensibilidad con respecto a  $\beta_0$  significa que  $\beta$  es el parámetro apropiado para ser “controlado”. Es decir, la administración de drogas (en términos de  $u$ ) que afecta directamente al valor de  $\beta$ , que a su vez influenciará a la dinámica en el grado de relación  $S_\beta$ .

### 7.3. El costo total asociado a una estrategia terapéutica.

Un funcional de costo del tipo previsto en la ecuación (2.5) del Capítulo 2 es utilizado aquí para medir el costo total del proceso de VIH. Se buscará minimizar el siguiente funcional

con respecto a todas las posibles terapias de dosificación de droga  $u(\cdot)$ ,

$$J(u) = \int_{t_0}^T \left\{ \left[ a_1 z(t) + a_2 (x(t) - \bar{x})^2 \right] e^{\alpha t} + a_3 u^2(t) \right\} dt + a_4 z^2(T), \quad (7.10)$$

El Lagrangiano difiere de otros trabajos donde se usó programación dinámica (véase [78] y sus referencias), donde se tomó en cuenta solamente el costo de trayectoria cuadrático del tratamiento terapéutico  $u^2(t)$ . Al adicionar términos que involucran las trayectorias de estados se intenta prevenir la interrupción total de la droga en cualquier tiempo intermedio dentro de las terapias óptimas. Estrictamente el Lagrangiano y la penalización final que se eligieron para este proceso fueron:

$$L(t, x, y, z, u) = \left[ a_1 z + a_2 (x - \bar{x})^2 \right] e^{\alpha t} + a_3 u^2, \quad (7.11)$$

$$K(x, y, z) = a_4 z^2. \quad (7.12)$$

Físicamente se procura abatir la carga viral (o viriones, reflejado en los términos  $a_1 z(t)$  and  $a_4 z^2(T)$ ), y la desviación del estado  $x$ , de su equilibrio sano  $\bar{x} = 1000$  células/mm<sup>3</sup>. El término  $a_3 u^2(t)$  mide el costo efectivo del consumo de droga. Imponer un término cuadrático para la terapia o control  $u$  es sólo una necesidad matemática en la búsqueda analítica del control óptimo tal y como se mostrará más adelante. En economía, es normal para calcular el valor presente de un costo usar un factor de “interés” que modifica el valor del costo con el tiempo, éste término es conocido como factor de descuento. Para este proceso se impondrá un término  $e^{\alpha t}$  opuesto al factor de descuento (es decir, con  $\alpha \geq 0$ ), el cual penaliza la permanencia de la enfermedad, concretamente, penaliza más la desviación de los estados con respecto a sus respectivos equilibrios sanos ( $\bar{x} = 1000$ ,  $\bar{z} = 0$ ) a medida que el tiempo aumenta. Esto se debe a la suposición de que la respuesta inmunológica del paciente se deteriora con el tiempo, y entonces la misma situación infecciosa causa más daño mientras que el tiempo aumenta, así que su “costo” también debería aumentar.

El valor de los coeficientes se han estimado para obtener costos parciales (cada sumando dentro de (7.10)) proporcionales al 25, 10, 45, y 20 por ciento del costo total asociado a una trayectoria típica, el cual fue normalizado a la unidad, es decir

$$a_1 = 0.25c_1,$$

$$a_2 = 0.10c_2,$$

$$a_3 = 0.45c_3,$$

$$a_4 = 0.20c_4, \text{ con}$$

$$c_1 = 5.970 \times 10^{-6},$$

$$c_2 = 1.2962 \times 10^{-7},$$



$$c_3 = 0.003858,$$

$$c_4 = 0.000164,$$

$$\alpha = 0 ; 0.005,$$

$$t_0 = 0,$$

$$T = 180 \text{ días.}$$

Los tiempo iniciales y finales ( $t_0$  y  $T$ , respectivamente) merecen algunos comentarios adicionales. La adopción de  $t_0 = 0$  es apropiado para modelos y Lagrangianos con parámetros constantes, sin embargo, la inserción del factor de descuento puede cambiar esta perspectiva. En lo concerniente a la adopción del horizonte  $T$  de optimización, su valor se basa en la siguiente evidencia empírica: la reducción de la carga viral a límites por debajo de su detección mediante análisis clínicos (50 copias/ml) en un tratamiento para un paciente promedio usualmente ocurre dentro de las primeras 12 a 24 semanas de haber iniciado la terapia ([111]).

### 7.3.1. La necesidad de discretizar parcialmente el problema.

Plantear el problema de control óptimo de forma continua para el tratamiento del VIH no refleja la práctica, a pesar de que la salud del paciente cambie continuamente y de que el modelo dado por la ecuación (7.2) sea capaz de describir ésta situación apropiadamente. La valoración correcta de la enfermedad sólo puede estar bien realizada si se utilizan análisis periódicos de sangre e inspecciones médicas, además la toma actual de las dosis se hace discretamente y cambia cada cierto tiempo según lo indique la prescripción del médico encargado. Esto significa que, incluso cuando el sistema se desarrolla en tiempo continuo y el objetivo de costo se puede plantear teóricamente en el mismo contexto, la naturaleza discreta de:

- la disponibilidad de mediciones para las variables de estado,
- la forma de la dosificación de la medicación (la variable de control toma valores discretos),
- la existencia de restricciones en los valores admisibles de control, lo cual obstaculiza hallar el control óptimo  $u^0$  de la ecuación (2.13) por la falta de continuidad, y
- el retardo usual entre las intervenciones (visitas) del médico y las decisiones de control,

fuerzan a considerar una metodología híbrida (continua en ciertos aspectos y discreta en otros) para este problema. En lo que sigue, los valores de los estados y el control serán discretizados según el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\triangleq \{x_L, x_L + \Delta x, x_L + 2\Delta x, \dots, x_U\} \\ \mathcal{Y} &\triangleq \{y_L, y_L + \Delta y, y_L + 2\Delta y, \dots, y_U\} \\ \mathcal{Z} &\triangleq \{z_L, z_L + \Delta z, z_L + 2\Delta z, \dots, z_U\} \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\mathcal{U} \triangleq \{u_L, u_L + \Delta u, u_L + 2\Delta u, \dots, u_U\}$$

donde los límites inferiores ( $_L$ ), superiores ( $_U$ ) y la partición del dominio de las variables ( $\Delta$ ) para cada una de ellas dependen de las restricciones reales impuestas por los equipos de medición, la posibilidad de subdividir la dosis de droga, y la capacidad de cómputo. Sin embargo, es importante notar que los valores adoptados para  $y_L$  y  $z_L$  deberían ser estrictamente mayores que cero para evitar que las variables  $y$ ,  $z$  se queden en cero por cuestiones de cálculo y no por situaciones reales (ver la ecuación (7.2)). Igualmente, este punto se discutirá más adelante en conjunto con los resultados de las pruebas numéricas. Dada la discretización anterior, el costo continuo se convierte a la siguiente forma híbrida:

$$\mathcal{J}(u) \triangleq \sum_{k=0}^{T/h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ (a_1 z(t) + a_2 (x(t) - \bar{x})^2) e^{\alpha t} + a_3 u_k^2 \right] dt + a_4 z^2(T) \quad (7.14)$$

$$t_k \triangleq t_0 + hk$$

donde  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  tienen que ser entendidos, en cada intervalo  $[t_k, t_{k+1})$ , como el estado redondeado de la función de transición  $\phi(t, t_0, x, y, z, u(\cdot))$ , asociada con el modelo en tiempo continuo(7.1), siendo

$$(x(t), y(t), z(t))' = \phi(t, t_k, x_k, y_k, z_k, \tilde{u}_k) \quad (7.15)$$

$$(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})' = \text{round}(\phi(t_{k+1}, t_k, x_k, y_k, z_k, \tilde{u}_k)) \quad (7.16)$$

$$\tilde{u}_k(t) \equiv u_k \quad (7.17)$$

y donde “round” actúa sobre los valores  $(x(t_{k+1}), y(t_{k+1}), z(t_{k+1}))' = \phi(t_{k+1}, t_k, x_k, y_k, z_k, \tilde{u}_k)$  para abarcar el peor de los casos de las variables, precisamente

$$x_{k+1} \triangleq \text{cercano al siguiente valor más pequeño de } x(t_{k+1}) \text{ en } \mathcal{X}$$

$$y_{k+1} \triangleq \text{cercano al siguiente valor más grande de } y(t_{k+1}) \text{ en } \mathcal{Y}$$

$$z_{k+1} \triangleq \text{cercano al siguiente valor más grande de } z(t_{k+1}) \text{ en } \mathcal{Z}$$

El tamaño de paso para el tiempo ( $h = 15$  días) toma en consideración el “pico” observado alrededor de los 20 días que ocurre en las variables de estado mostrado con las sensibilidades (ver Figura 7.3). La posibilidad de que un período agudo de infección no sea detectado es descartado con esta adopción de  $h$ , puesto que los resultados de un análisis de sangre que reflejen esa situación llegarían al menos en un punto intermedio del paso.

## 7.4. Resultados numéricos minimizando costos.

Debido a las no linealidades de la enfermedad representadas por el modelo, la identificación y la caracterización del estado del paciente no es una tarea trivial. Es decir, pares de valores de

la carga viral y de las células sanas pueden corresponderse simultáneamente a diversas etapas de la evolución de la infección, tal como puede ser observado en el flujo del sistema de la Figura 7.1. En este marco, la intervención del médico es de gran importancia para asegurar una buena eficiencia de la terapia, ya que utilizando la historia clínica del paciente, la inspección médica y test complementarios, el estado real de la infección puede ser determinado con mayor detalle y de esa manera las correcciones eventuales al protocolo serán realizadas con precisión. En esta sección dos situaciones de pacientes típicas (descrita como condiciones iniciales de la dinámica) serán tratadas, discutidas e ilustradas numéricamente: (i) un paciente con carga viral y células sanas cerca del inicio de la infección (en la parte aguda de la misma), y (ii) un paciente cerca del equilibrio endémico (fase asintomática). Un factor de descuento inverso no trivial ( $\alpha \neq 0$ ) será aplicado únicamente en la subsección 7.4.1.

#### 7.4.1. Tratamiento terapéutico óptimo para la infección aguda del VIH.

En esta subsección se describirá la obtención de tratamientos óptimos para pacientes descritos a través de condiciones iniciales (CI) del modelo (ver Figura 7.1), que abatan la infección y a la vez reduzcan las dosis utilizadas, sin embargo, la reducción de los efectos secundarios debido a que las terapias óptimas consuman menos droga es sólo un “efecto colateral” de ésta subsección. Un tratamiento más adecuado de ese problema estará descrito en la Subsección 7.5.

El algoritmo de programación dinámica fue implementado para un rango de los estados que contienen dichas condiciones iniciales, el cual además cubre los diferentes comportamientos que puede tener el paciente bajo los distintos procesos terapéuticos. El valor numérico de la discretización adoptada ( $\Delta$ ) para las variables de estado y sus límites inferiores ( $L$ ) y superiores ( $U$ ) correspondientes son descritos a continuación:

$$\Delta x = 50, \Delta y = 10, \Delta z = 50, \Delta u = 0.2, \quad (7.18)$$

$$x_L = 600, y_L = 1, z_L = 10, u_L = 0, \quad (7.19)$$

$$x_U = 1000, y_U = 91, z_U = 5010, u_U = 1.6. \quad (7.20)$$

Se debe resaltar que los umbrales inferiores  $y_L$  y  $z_L$  son escalares estrictamente positivos. Esto a fin de evitar que debido al redondeo de sus valores, las trayectorias discretizadas alcancen el equilibrio  $y = z = 0$ , ya que en ese caso la estrategia óptima de control permanecería en el valor de cero  $u \equiv 0$  hasta el final del horizonte de optimización, lo cual ciertamente es erróneo y peligroso. De hecho, el sistema real nunca alcanza el equilibrio sano  $y = z = 0$  desde una condición inicial diferente a dicho equilibrio, lo que significa que con cualquier pequeño remanente de la infección ( $y > 0, z > 0$ ), ésta crecerá si  $u = 0$ , obviamente su crecimiento puede ser controlado y abatido aplicando un tratamiento con  $u > 0$ .

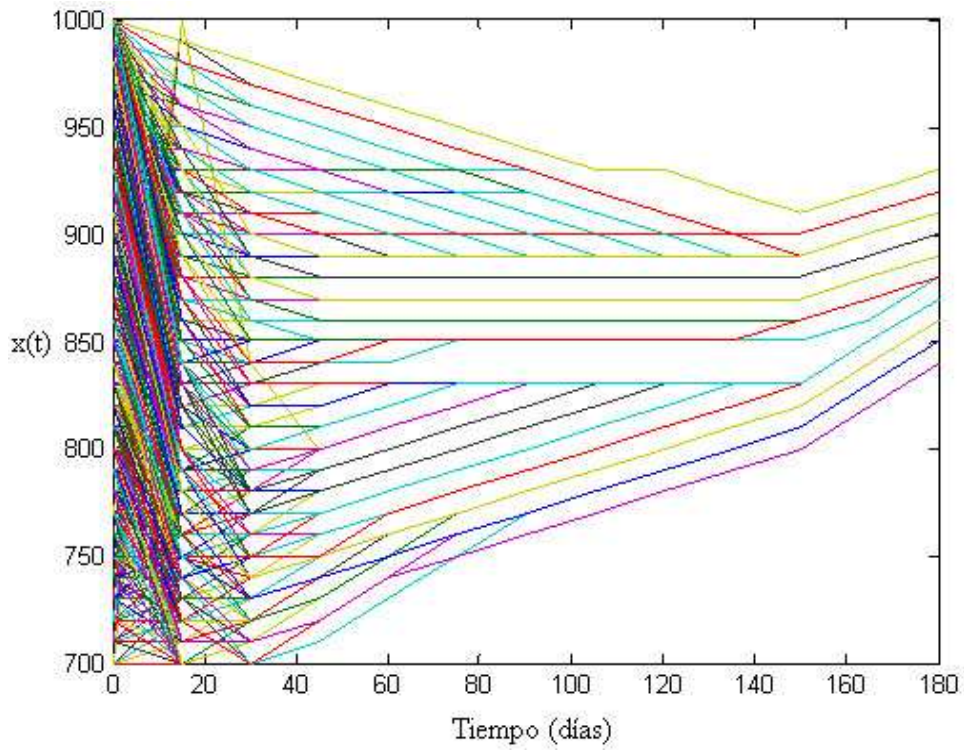


Figura 7.4: Trayectorias óptimas  $x^*(t)$ , para cada valor fijo de  $x^*(0)$  y diferentes  $y^*(0)$ ,  $z^*(0)$ .

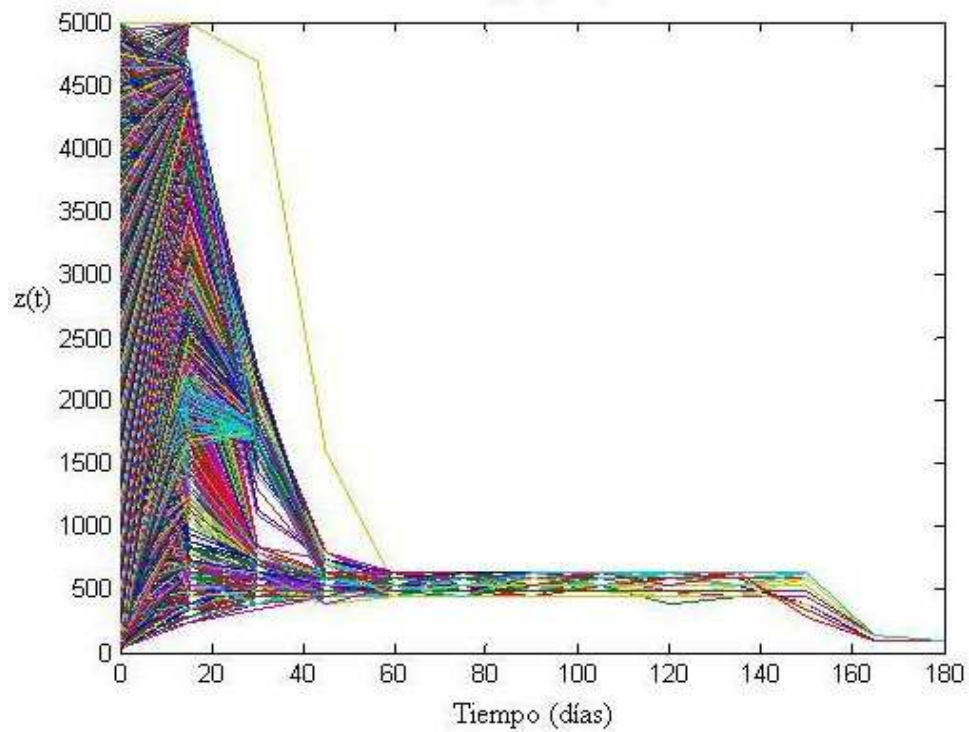


Figura 7.5: Trayectorias óptimas  $z^*(t)$ , para cada valor fijo de  $z^*(0)$  y diferentes  $x^*(0)$ ,  $y^*(0)$ .

Las Figuras 7.4 y 7.5 muestran proyecciones individuales de las trayectorias óptimas discretas  $\{(x^*(t), y^*(t), z^*(t)), 0 \leq t \leq T\}$  sobre los planos  $(t, x)$  y  $(t, z)$  respectivamente. La componente  $y$  no es graficada ya que cualitativamente tiene el mismo comportamiento que la componente  $z(t)$ . Estas trayectorias parecen contraerse en el espacio de fases tridimensional, con  $t$  como parámetro, el flujo óptimo es único, y tiende asintóticamente al equilibrio sano, en el sentido de que todas las trayectorias para diferentes condiciones iniciales confluyen a una en común. Este comportamiento es parcialmente reflejado en las proyecciones: eventuales condensaciones en un punto  $(t, x^*(t))$  indican que existen  $M > 1$  valores diferentes de  $(y^*(t), z^*(t))$  causando  $m \leq M$  trayectorias después del tiempo  $t$ . Pero en general, se puede observar que las variables se dirigen hacia sus valores deseados  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

La Figura 7.6 muestra las trayectorias óptimas discretas correspondientes a diferentes condiciones iniciales de los estados. Se observa que en la etapa final se requiere un control óptimo de  $u = 1.6$  g, el cual refleja la influencia de la fuerte penalización final impuesta en el 20% del costo total  $K(x, y, z) = a_4 z^2$  (los viriones  $z$  tienen valores en el orden de 500 copias cerca del final del tratamiento (véase las Figuras 7.7 y 7.10), lo cual fuerza a tomar valores de droga altos con el fin de abatir la infección, es decir,  $z(T)$  cerca de cero). También se observa que la mayoría de las terapias óptimas requieren en la parte intermedia del tratamiento valores de control ( $0.4 \leq u \leq 1$ ) más bajos que los recomendados en el protocolo ( $u \equiv 1.2$  g, ver [23]), reforzando la posibilidad de utilizar dosis variables con menor impacto en la salud del paciente.

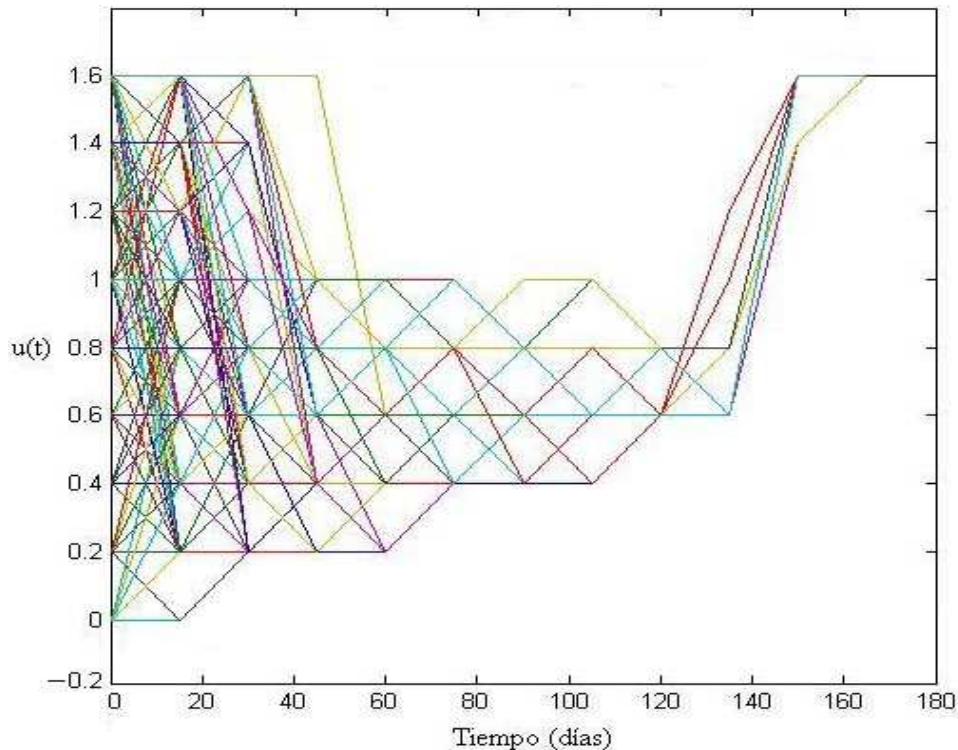


Figura 7.6: Trayectorias óptimas discretas  $u^*(t)$ .

### Trayectorias en lazo abierto para un paciente en particular.

Se asumen las siguientes condiciones iniciales para representar el caso de un paciente en el cual se detectó la infección en su etapa inicial (también llamada como infección aguda),

$$x_0 = 850 \text{ células/mm}^3, y_0 = 41 \text{ células/mm}^3, z_0 = 3710 \text{ copias/ml} . \quad (7.21)$$

La trayectoria de control óptima para estas CI fue recuperada de la solución guardada en memoria provista por la solución de programación dinámica al problema planteado por las ecuaciones (7.47, 7.15, 7.18, 7.19, 7.20), y es ilustrada en la Figura 7.11. La trayectoria discreta de estados correspondiente también fue guardada en memoria, y es la curva a tramos que aparece en las Figuras 7.7, 7.8. En cada instante de muestreo se inicia una curva continua (solución de la ecuación (7.2) con condiciones iniciales tomadas como los estados finales redondeados de la etapa anterior, mostrando así la evolución esperada del sistema para el siguiente período de muestreo. Dicha curva es truncada al final del intervalo de muestreo mediante las reglas definidas en la discretización adoptada para los estados. En las figuras se puede observar que dicho redondeo siempre busca cubrir “el peor caso posible” para cada estado, es decir, redondea hacia abajo para el estado  $x$ , y hacia arriba para los estados  $y$  y  $z$ . Finalmente, en dichas figuras también se ilustra la respuesta del modelo continuo (que representa al paciente) bajo la terapia óptima.

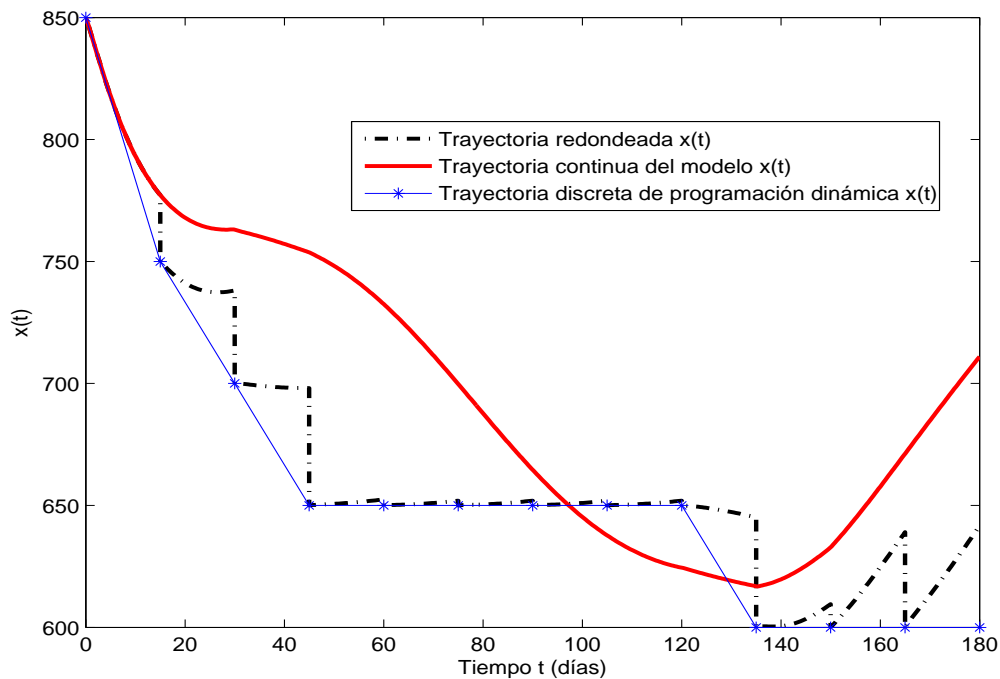


Figura 7.7: Trayectoria óptima  $x^*(t)$  discreta, redondeada y continua.

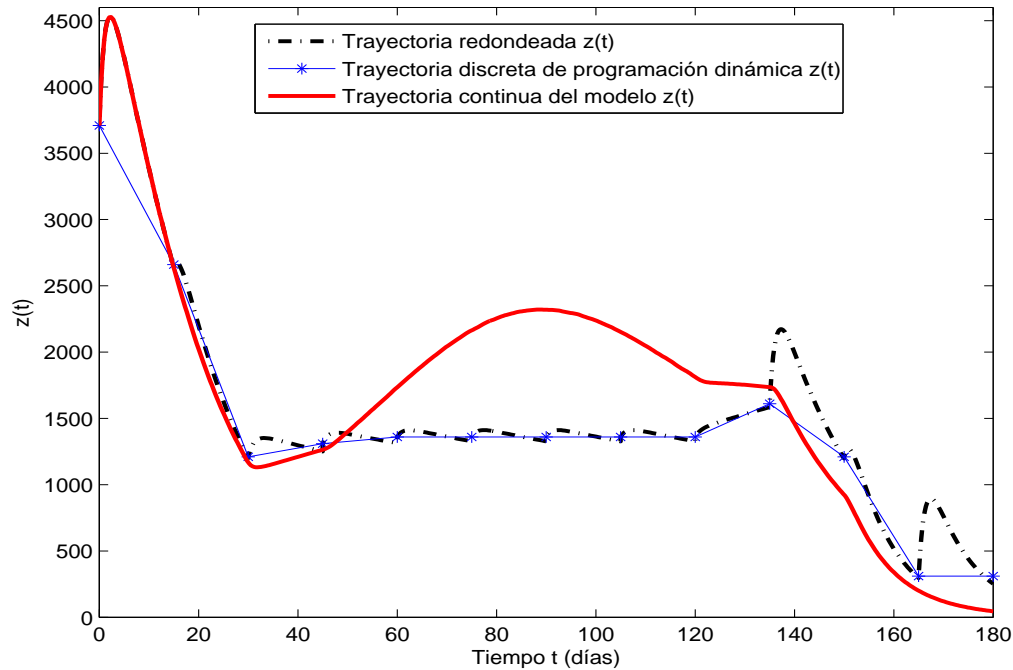


Figura 7.8: Trayectoria óptima  $z^*(t)$  discreta, redondeada y continua.

Las terapias óptimas calculadas así serán referidas como trayectorias de lazo abierto (ya que nunca se actualiza el control prescrito utilizando la información instantánea que se puede obtener del paciente). Estos tratamientos efectivamente logran reducir la carga viral a sus valores indetectables alrededor de 50 copias/ml en el tiempo impuesto de 180 días. Los viriones decrecen fuertemente al inicio y al final de la terapia óptima, permaneciendo la mayor parte del tiempo cercano a las 1200 copias/ml, lo cual no es tan perjudicial siempre y cuando no ocurra un pico nocivo indeseable. En las etapas extremas del tratamiento la droga es alta (1.4 y 1.6 g respectivamente), sin embargo, toma valores cercanos a 0.6 g durante la mayoría del tiempo de optimización, lo cual es la mitad de lo recomendado por el protocolo (véase la Figura 7.11). También, durante la aplicación de la estrategia de control el número de células sanas  $x$  es siempre mayor de 600 células/mm<sup>3</sup>, un valor clínicamente aceptado [65].

### Estrategias en lazo cerrado.

Las trayectorias en lazo abierto (Figuras 7.7 y 7.8) muestran una diferencia significativa entre la evolución real del paciente y su comportamiento discreto esperado, especialmente entre los 45 y 105 días del tratamiento. Las trayectorias discretas al ser óptimas no pueden mejorarse, pero lo que es posible es corregir la evolución continua cuando una desviación considerable es detectada. El estado real  $X_k$  del paciente, evaluado a través de mediciones médicas apropiadas, podría

ser considerado como una “perturbación” del estado esperado  $X_k^*$ . Por lo tanto, es necesario introducir el concepto de lazo cerrado. Esto añade un nuevo problema de optimización desde la etapa  $k$  con el estado  $X_k$  hasta la etapa  $N$ . Sin embargo, el nuevo problema de optimización no necesita cálculos adicionales, únicamente aproximar el estado  $X_k$  al valor  $\widetilde{X}_k$  según la grilla adoptada ( $\Delta$ ) para los estados, ya que al resolver la programación dinámica para hallar las trayectorias en lazo abierto, información útil para cada etapa fue almacenada en memoria. Usualmente, lo que se guarda en cada instante de muestreo es:

- el control óptimo  $u_k^*(\widetilde{X}_k)$  a ser aplicado durante la etapa  $k$ ,
- el valor del costo óptimo para las trayectorias que empiezan en  $\widetilde{X}_k$  y evolucionan durante las etapas de la  $k$  a la  $N$ , y
- El estado  $X_{k+1}^*$  óptimo alcanzado después de haber aplicado el control  $u_k^*(\widetilde{X}_k)$  durante la etapa  $k$ .

Así que basta con seguir todos los pasos óptimos desde  $\widetilde{X}_k, u_k^*(\widetilde{X}_k)$  hasta el final del período de optimización para encontrar la nueva trayectoria óptima de control desde ese punto. En términos prácticos, solamente la información que corresponde a  $u_k^*(\widetilde{X}_k)$  es requerida, es decir, el primer control de la nueva estrategia porque si nuevas medidas de los estados llegan ( $X_{k+1}$ ) para la etapa siguiente y éstos difieren considerablemente de los estados esperados ( $X_{k+1}^*$ ), se debe aplicar otra vez el concepto de feedback (lazo cerrado) para corregirlo.

Las Figuras 7.9 y 7.10 muestran la aplicación de ésta metodología para el mismo problema planteado, pero considerando que el estado continuo ( $X_{k+1} = \phi(t_{k+1}, t_k, X_k, u_k^*)$ ) del paciente es una “perturbación” de los estados discretos óptimos esperados  $X_{k+1}^* = \left[ \phi(t_{k+1}, t_k, \widetilde{X}_k, u_k^*) \right]$ . Note que en general  $X_{k+1}^* \neq \widetilde{X}_{k+1}$ . Las trayectorias en lazo abierto son obtenidas al aplicar las recetas dadas por la programación dinámica al modelo continuo. El comportamiento esperado representado por las trayectorias discretas claramente difieren del modelo en lazo abierto. Cuando se encuentra una primera desviación significativa de lo esperado, entonces hay suficiente motivación para aplicar la estrategia de lazo cerrado para corregir dicha desviación. El resultado de eso es la trayectoria del modelo en lazo cerrado cuando el control corregido es aplicado al paciente.

El control en lazo cerrado reduce la diferencia entre los estados reales del paciente y los esperados, el abatimiento de los viriones  $z$  es mayor aplicando el feedback que el tratamiento en lazo abierto, mientras que las células sanas  $x$  muestran que se recuperan en mayor magnitud. Los cambios de la dosis bajo el concepto de lazo cerrado no es trivial como se aprecia en la Figura 7.11, lo cual fortalece el mérito del monitoreo con la inspección del médico durante el tratamiento.

En la Tabla 7.1, se dan los costos parciales y totales para las diferentes estrategias de control óptimas. Como era de esperarse, el costo del tratamiento de lazo cerrado es mayor al



de lazo abierto, ya que ese no es óptimo con respecto a la configuración original. La decisión de considerar el comportamiento real del paciente como si fuera una “perturbación” de la solución discreta y de realizar correcciones en los tiempos  $t_k$  con los nuevos estados  $X_k$  (para las etapas restantes  $k, k+1, \dots, N$ ), cambia la estrategia de control óptima para lo que falta del horizonte, como se muestra en el ejemplo, esas diferencias pueden ser significativas.

### El efecto de considerar un factor de descuento inverso en el Lagrangiano.

Existe evidencia experimental (y el modelo lo refleja) que soporta la idea de períodos relativamente estables después de que el “pico” de infección ocurre. Aunque eso no debería ser asumido como si el paciente estuviera en una etapa sana (admisible) de la enfermedad, al contrario, después del pico ocurre una inflamación crónica ([27]) que afecta a los vasos sanguíneos en todo el organismo, incrementando de esa manera los riesgos cardiovasculares en conjunto con secuelas en la irrigación de sangre al cerebro, mal funcionamiento de los riñones, hígado y pulmones. Esta inflamación crónica parece bajar la eficacia o generar intolerancia a las terapias subsecuentes. También es sabido que los tratamientos se toleran menos cuando el paciente no comienza a tomar la droga en las primeras etapas de la enfermedad. A pesar de que el modelo que describe la enfermedad tiene parámetros constantes y abarca el comportamiento de las primeras etapas, la necesidad de reforzar el tratamiento en las etapas iniciales (o penalizar más las acciones de control posteriores a estas etapas) podría realizarse explícitamente a través del uso de un “factor de descuento inverso”  $e^{\alpha t}$  en el Lagrangiano.

En las Figuras 7.9 y 7.10 donde se muestra el comportamiento en lazo cerrado correspondientes a  $\alpha = 0$ , fueron adicionadas soluciones óptimas de las trayectorias con costo pesado exponencialmente. En el caso del factor de descuento inverso se utilizó el valor de  $\alpha = 0.005$ , el cual por lo menos duplica el costo diferencial de los estados, al final del horizonte:  $e^{\alpha T} = \exp(0.005 * 180) \approx 2.46$ . Dado que el peso del control  $r$  fue mantenido en su valor original, el factor exponencial agrega una penalización adicional al inicio de los estados, lo cual se traduce al control como una subpenalización de su esfuerzo. Esto provoca que, con  $\alpha > 0$ , las trayectorias óptimas de estado mejoren su comportamiento con respecto al caso con  $\alpha = 0$ , debido a que se fuerza a dosificar droga más alta al inicio del tratamiento. Sin embargo, los costos para los dos casos resultaron muy similares (véase la Tabla 7.1). Una explicación para esto es que a pesar de que el control es mayor, el costo se compensa con los estados que tienden a bajar mucho más rápido.

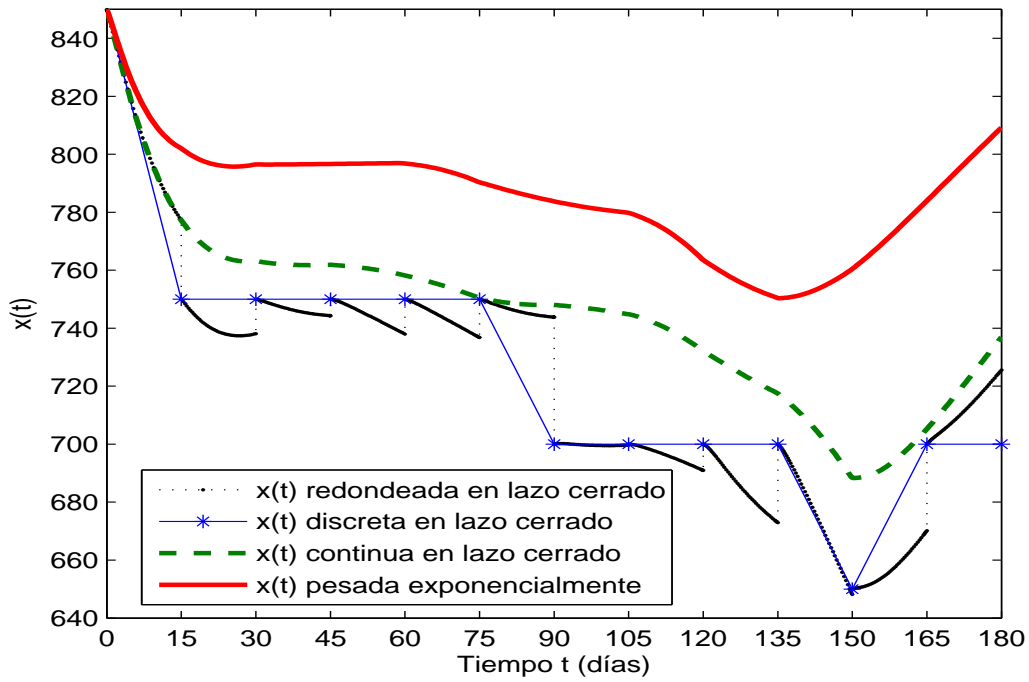


Figura 7.9: Comparación de las distintas trayectorias  $x(t)$ .

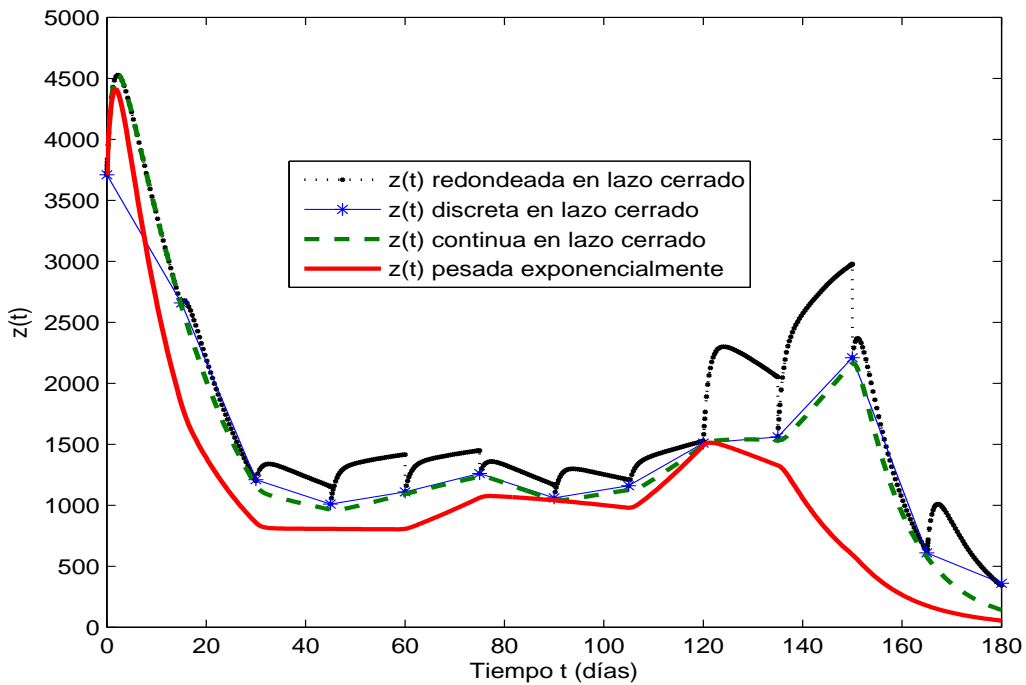
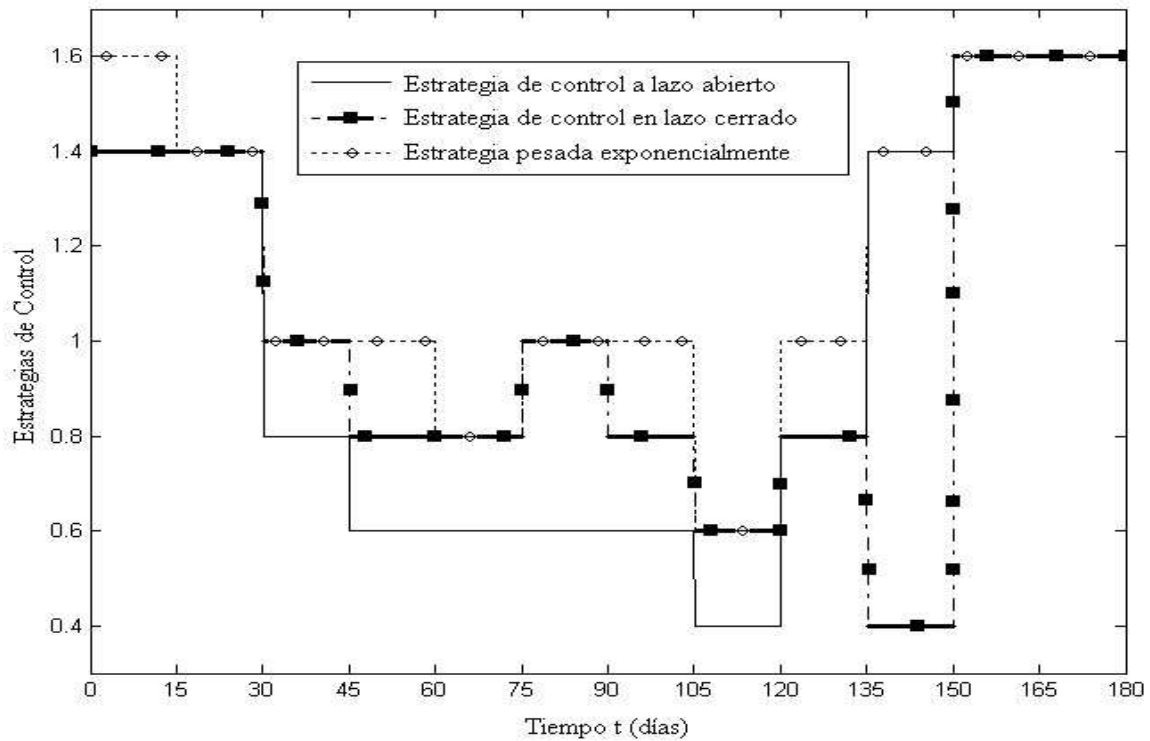


Figura 7.10: Comparación de las distintas trayectorias  $z(t)$ .

Figura 7.11: Comparación de las distintas trayectorias  $u(t)$ .

	Costo de trayectoria	Penalización final	Costo Total
Trayectoria a lazo abierto	1.0344	2.9520	3.9864
Trayectoria a lazo cerrado	1.0128	4.0180	5.0308
Trayectoria pesada	1.0453	2.9520	3.9973

Tabla 7.1: Costos para las trayectoria de control a lazo abierto, a lazo cerrado, y con el factor de descuento inverso.

#### 7.4.2. Tratamiento terapéutico para un enfermo endémico.

El equilibrio “endémico” de la dinámica libre representa a un paciente que está infectado pero no se detectó su enfermedad en las etapas iniciales, por lo que la enfermedad ha alcanzado un aparente estado estable (mientras que los análisis de sangre podrían sugerir un comportamiento regular, el cuerpo estaría sufriendo un deterioro general debido a que no está cerca del equilibrio sano). Por lo tanto, se debe generar un esquema de dosificación de droga que saque al paciente del estado “endémico” y trate de llevarlo al estado “sano”. Desde el punto de vista de teoría de control, esto es similar a un cambio de set-point (véase Capítulo 2). Sin embargo, este caso ya está guardado en las soluciones de la programación dinámica realizadas anteriormente sin el factor de descuento inverso, ya que se la hizo para una gran variedad de condiciones iniciales

(que representan diferentes situaciones de pacientes). En las Figuras 7.12, 7.13, y 7.14, se ilustra la aplicación de las terapias óptimas extraídas de programación dinámica a pacientes en el equilibrio endémico, es decir con condiciones iniciales:

$$x_0 = 600 \text{ células/mm}^3, \quad (7.22)$$

$$y_0 = 11 \text{ células/mm}^3, \quad (7.23)$$

$$z_0 = 1760 \text{ copias/ml}, \quad (7.24)$$

y sin factor de descuento inverso.

Las trayectorias de lazo cerrado muestran un mejor seguimiento del comportamiento real del paciente (dado por el modelo continuo) a expensas de perder algo de optimalidad dada por la solución de programación dinámica (la cual en realidad es la designada como “lazo abierto” en las gráficas). La evolución cualitativa de las trayectorias de  $x(t)$  y  $z(t)$  reflejan su resistencia a abandonar la región endémica. Sin embargo, esto provoca que únicamente dosis suaves de droga sean necesarias en la mayor parte del tratamiento. Sólo al inicio y al final del horizonte se aplican dosis altas.

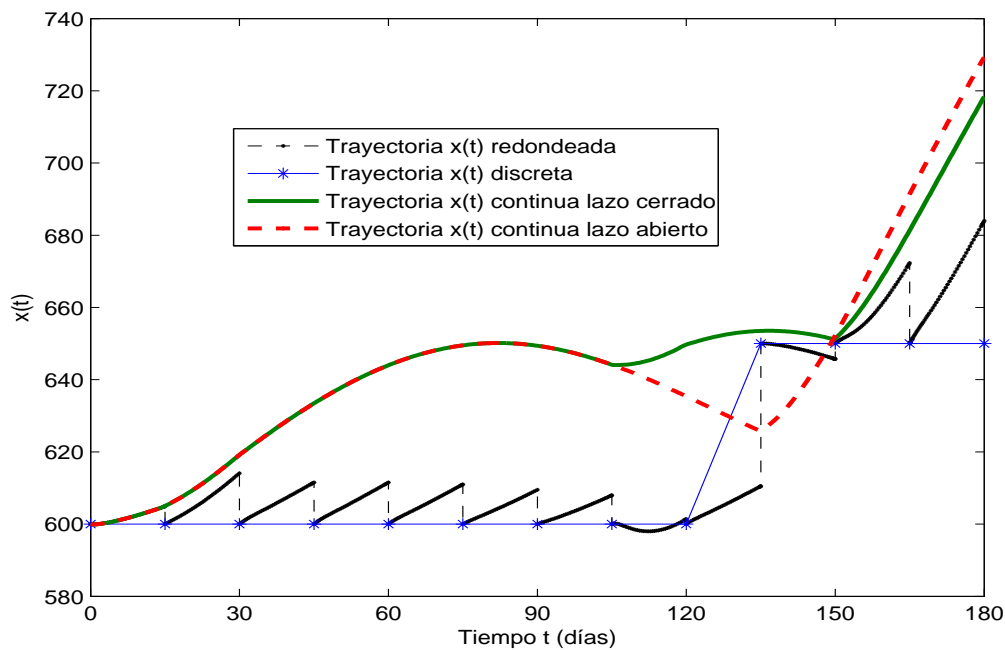


Figura 7.12: Trayectorias  $x(t)$  para el caso endémico. Comparación entre lazo abierto (óptimo) y cerrado.

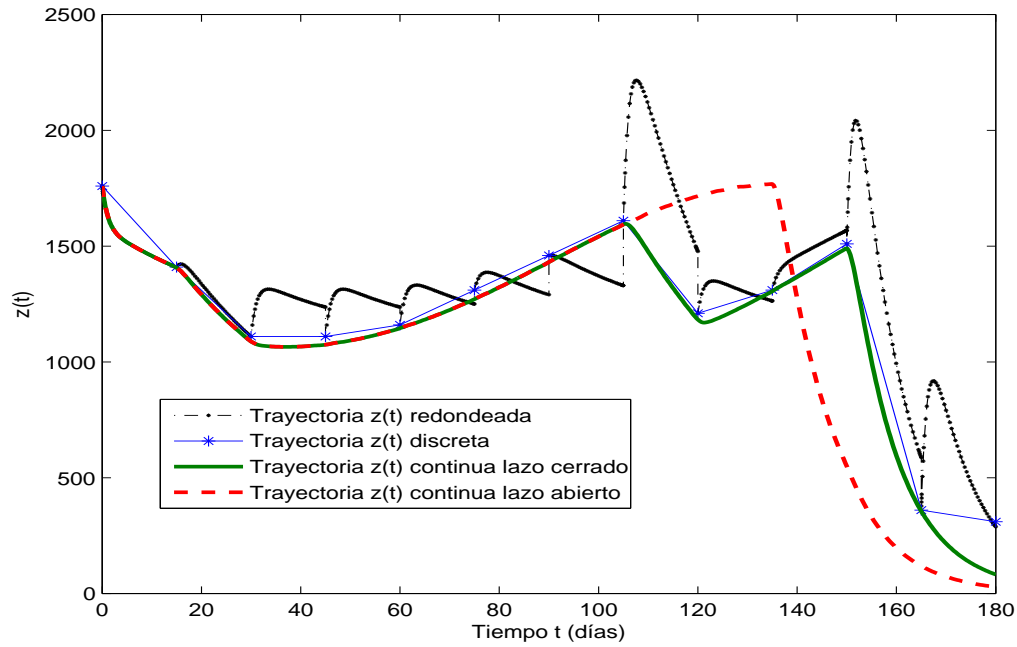


Figura 7.13: Trayectorias  $z(t)$  para el caso endémico. Comparación entre lazo abierto (óptimo) y cerrado.

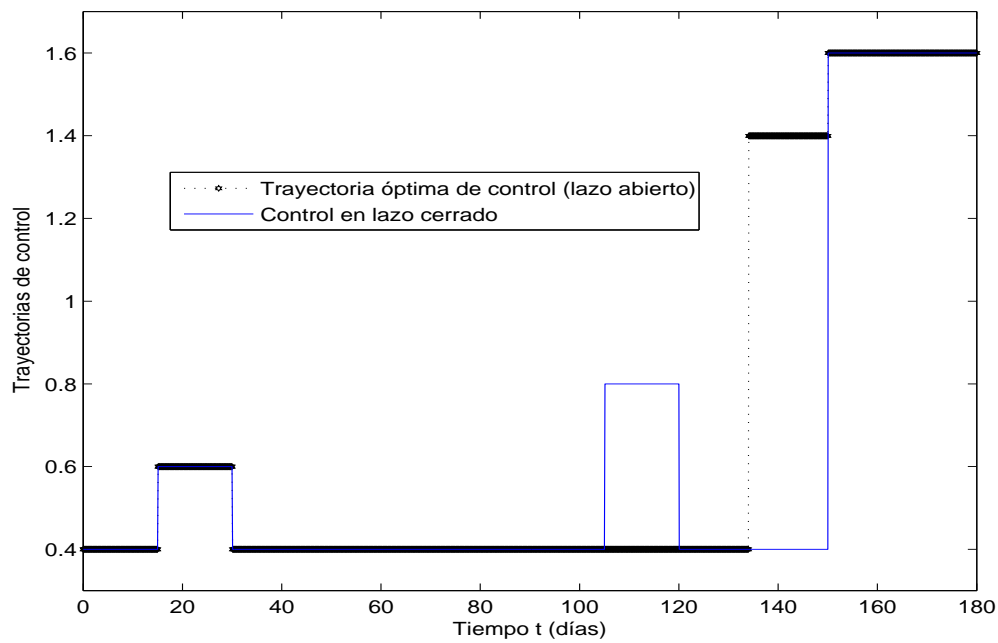


Figura 7.14: Trayectorias  $u(t)$  para el caso endémico. Comparación entre lazo abierto (óptimo) y cerrado.

## 7.5. Consideración explícita de los efectos secundarios de la medicación.

Los efectos secundarios varían considerablemente dependiendo de los pacientes y de las drogas que componen la prescripción. Una terapia crónica, es decir una dosificación con altas dosis de droga constantes durante un largo periodo de tiempo, también puede dar lugar a toxicidad [102]. Consecuentemente, más de la mitad de los pacientes tiene baja adherencia a las terapias en los primeros meses debido a dichos efectos secundarios. Esta situación ha provocado que parte de la comunidad científica especializada en el tema se preocupe por generar metodologías para “sobrellevar” los efectos secundarios (véase [70] y sus referencias), mientras que la otra simplemente ha buscado diseñar estrategias terapéuticas alternativas [104, 22] o combinaciones de drogas ([87] y sus referencias) para controlar la replicación crónica del virus. Sin embargo, en estas secciones se intentará plantear un problema de control óptimo que trate de lograr los dos objetivos simultáneamente: mantener el virus en niveles indetectables y reducir explícitamente la probabilidad de sufrir efectos secundarios no deseados por el uso de la droga.

En trabajos previos ([50, 37], Capítulo 7, sección 7.4), se encontró factible adoptar terapias terapéuticas con dosis variable en el tratamiento de un enfermo de VIH. Las herramientas matemáticas de modelamiento y teoría de control han sido de gran utilidad en la evaluación y modificación de protocolos existentes como en el mejoramiento de resultados previos, tal como lo muestra el artículo [86], donde se presenta un resumen de la situación actual del VIH desde la perspectiva de teoría de control. Principalmente, las técnicas de control más exploradas en muchos trabajos han sido el control óptimo y el feedback de estados aplicados al VIH, recientemente en [37] se describió la forma de generar tratamientos terapéuticos con optimización multiobjetivo, donde terapias en lazo abierto y lazo cerrado han sido descritos. Considerando esos resultados, un intento por ampliar el modelo de tal forma que tenga en cuenta los efectos secundarios, será descrito en la Sección 7.5.1. Algunos resultados adicionales se muestran en [38].

### 7.5.1. Incorporando la probabilidad de efectos secundarios en el modelo.

Los efectos secundarios debidos a la droga aparecen con el inicio de la terapia y desde ese momento continúan evolucionando aún cuando la medicación es discontinuada. Dado el gran número de efectos secundarios que pueden presentarse sería imposible tratar de identificar todos los desórdenes provocados por la droga en el paciente, aún más, la mayoría de veces es difícil predecir que efecto aparecerá y cuando lo hará. Sin embargo, un estudio de comparación entre la eficacia y los efectos secundarios para diversas dosis de la droga zidovudine (AZT) ha demostrado que la incidencia de algunos efectos secundarios moderados y severos son relativos a la dosis. Una estimación de la probabilidad de que un enfermo de VIH presente algún efecto

secundario un tiempo después de haber comenzado el tratamiento podría ser hallada usando la media de los porcentajes de los pacientes afectados por estos efectos secundarios en un período de referencia. Del mismo modo, estos datos podrían ayudar a describir aproximadamente el comportamiento dinámico de dicha probabilidad  $p(t)$  y su dependencia con las otras variables del modelo. A continuación se propone la siguiente dinámica para la probabilidad  $p$ :

$$\dot{p} = (d_0 + d_1u + d_2u^2 + d_3u^3)p(1-p)(z + z_h)^\eta, \quad p(0) = p_0, \quad (7.25)$$

basándose en los siguientes argumentos:

- La variable  $p$  se considera como una probabilidad acumulativa, por lo que su dominio debe ser  $[0, 1]$ . Es consistente pensar que la probabilidad no puede disminuir mientras el consumo de drogas se mantenga, una vez es detectado que existen efectos secundarios debido a la medicación. Como se ha mostrado en secciones anteriores, los tratamientos terapéuticos por lo general mantienen la dosis  $u > 0$  por largos períodos de tiempo, entonces los efectos secundarios deben ser a largo plazo, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 1. \quad (7.26)$$

La curva logística, la cual modeliza a la función sigmoidea de crecimiento de  $p$  asociada al término  $p(1-p)$  en la lado derecho de la ecuación (7.25), refleja este comportamiento requerido.

- El crecimiento de  $p$  como una función de la dosis  $u$  tiene que ser claramente no lineal. Sin pérdida de generalidad, ese comportamiento no lineal podría ser modelado a través de series de potencias. En primera instancia se consideró polinomios de segundo orden, sin embargo, algunas pruebas numéricas han mostrado que dichos polinomios permiten comportamientos anómalos (intersecciones) de las trayectorias  $p_u(t)$  (visto en las soluciones de las ecuaciones (7.1) y (7.25) con  $u$  constante) en etapas tempranas de la medicación. Este inconveniente puede ser evitado al usar polinomios de tercer orden, por lo esta representación se aceptó para caracterizar la relación entre  $u$  y  $p$ . En cualquier caso, al tratarse sólo de una aproximación debe ser adecuadamente validada con datos reales.
- Se considera que inclusive al inicio de la terapia hay una pequeña probabilidad de efectos secundarios, esto fuerza a adoptar  $p_0 \neq 0$ .
- Los efectos secundarios son analizados aquí para pacientes con tratamiento de VIH-1, es decir, personas con carga viral siempre positiva ( $z \neq 0$ ). Las consecuencias de ingestión de drogas anti-VIH en personas que no están infectadas no es considerado. En base a esta observación, es natural pensar que los efectos secundarios debido a las drogas se incrementarán a medida que la infección crezca, es decir, la dinámica de  $p$  se acelerará si

$z$  es alto. Esta hipótesis es reforzada en muchos trabajos de la literatura (p. ej., véase [81, 38]). El valor del parámetro  $\eta$  tiene ser elegido utilizando datos experimentales

- La razón para adicionar el parámetro  $z_h$  es la de evitar la desaparición de la dinámica de  $p$  cuando la carga viral está cercana a cero aunque la persona siga con el tratamiento.
- El parámetro  $d_0$  podría ser pequeño pero siempre positivo, ya que aún cuando la medicación es interrumpida ( $u = 0$  g por un tiempo), los efectos secundarios deberían seguir aumentando debido a su historia previa. Un soporte empírico de esto, es el aumento de frecuencia en la aparición de problemas cardiovasculares cuando enfermos de VIH-1 estratégicamente han interrumpido su tratamiento [88].

Se ha estimado un conjunto de parámetros para la dinámica (7.25) analizando resultados numéricos previos presentados por “Nordic Medical Research Council” en [91] y simulando nuevos casos. Allí se calculó la probabilidad de aparición de efectos secundarios debido a terapias con dosis constantes detectada en pacientes alrededor de la mitad del período de estudio (es decir, aproximadamente después de los 250 días de haber iniciado). Estos datos fueron consignados en la Tabla 7.5.1. El procedimiento (que ciertamente no es único) para estimar los coeficientes

Dosis constante (mg): $u$	% de efectos secundarios: $100 \cdot p_u(250)$
400	58
800	63
1200	71
1400	89

Tabla 7.2: Probabilidad de efectos secundarios (%) detectados al usar dosis de droga constante.

$d_i$  en la ecuación (7.25) fue el siguiente:

- (i) Los valores  $z_h = 10$  copias/ml y  $\eta = 0.05$  fueron adoptados desde el principio (por lo que no necesitaron ser estimados).
- (ii) La ecuación (7.25) toma la forma aproximada (7.27) al considerar una trayectoria de control constante  $u(t) \equiv u$  y un valor medio de la carga viral para ese control  $\bar{z}_u$  en el intervalo de tiempo  $[0, 250]$ ,

$$\dot{p} \approx r_u p(1 - p), \quad (7.27)$$

donde el coeficiente constante  $r_u$  es

$$r_u \triangleq (d_0 + d_1 u + d_2 u^2 + d_3 u^3)(\bar{z}_u + z_h)^\eta. \quad (7.28)$$

- (iii) La solución a la ecuación logística implica (7.27)

$$r_u = \frac{1}{250} \ln \left( \frac{p_u(250)}{p_0} \frac{(1 - p_0)}{[1 - p_u(250)]} \right) \quad (7.29)$$



- (iv) Una vez los valores  $\bar{z}_u$  son estimados de las trayectorias  $z_u$  (las soluciones de  $z$  según la dinámica (7.1) para cada valor de  $u$ , los cuales son independientes de  $p$ ), se obtienen las cuatro ecuaciones lineales para las cuatro incógnitas  $d_i$  al introducir los datos reales de la Tabla 7.5.1. Estas ecuaciones al ser lineales se resuelven fácilmente.
- (v) Usando los valores  $d_i$  aparecen nuevas trayectorias  $p_u(t)$  de la ecuación (7.25), denotadas con  $\tilde{p}_u(t)$ . Si al evaluar  $\tilde{p}_u(250)$  difiere del valor experimental  $p_u(250)$ , entonces el valor medio  $\bar{z}_u$  tendría que corregirse (se debe notar que la dependencia de  $\dot{p}_u$  en  $\bar{z}_u$  sugiere que desviaciones positivas en  $p_u$  deberían ser contrarrestadas con correcciones negativas en  $\bar{z}_u$ , y viceversa), y hallarse nuevos valores de los coeficientes  $d_i$  retornando iterativamente al paso (iv) hasta que los datos estimados  $\tilde{p}_u(250)$  y los datos reales  $p_u(250)$  coincidan (dentro de un error tolerable).

Se aplicó el procedimiento iterativo anterior hasta lograr convergencia. Los resultados de algunas iteraciones son mostradas en la Tabla 7.3.

Iteración	$\bar{z}_u$	$d_i$ ( $i = 0, 1, 2, 3$ )	$\tilde{p}_u(250)$	
1	$u = 0.4$	3000	-0.00019848	0.5634
	$u = 0.8$	2500	0.03844210	0.6070
	$u = 1.2$	2000	-0.0514596	0.6747
	$u = 1.4$	1000	0.02232243	0.8523
2		2000	0.00139919	0.5788
		1500	0.03244877	0.6183
		500	-0.0444852	0.7190
3		500	0.02010791	0.8838
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5		1492	$1.8598 \times 10^{-17}$	0.58
		978	0.03932959	0.63
		342	-0.0535645	0.71
		261	0.02384723	0.89

Tabla 7.3: Estimación de los parámetros  $d_i$  de la dinámica de efectos secundarios

Los valores finales adoptados para estos coeficientes fueron:

$$d_0 = 1.8598 \times 10^{-17}, \quad (7.30)$$

$$d_1 = 0.03932959, \quad (7.31)$$

$$d_2 = -0.0535645, \quad (7.32)$$

$$d_3 = 0.02384723, \quad (7.33)$$

$$\eta = 0.05, \quad (7.34)$$

$$z_h = 10, \quad (7.35)$$

$$p_0 = 0.06, \quad (7.36)$$

las trayectorias resultantes de  $p_u(t)$  son ilustradas en la Figura 7.15. Dichas curvas cumplen con todas las hipótesis supuestas anteriormente. La probabilidad sube rápidamente, tal vez demasiado rápido para ser aceptado intuitivamente. Sin embargo, esto es debido a que las curvas tienen que satisfacer los datos experimentales. Es esperado que la aproximación de la dinámica pueda ser adaptada y mejorada a medida de que se obtengan nuevos datos experimentales.

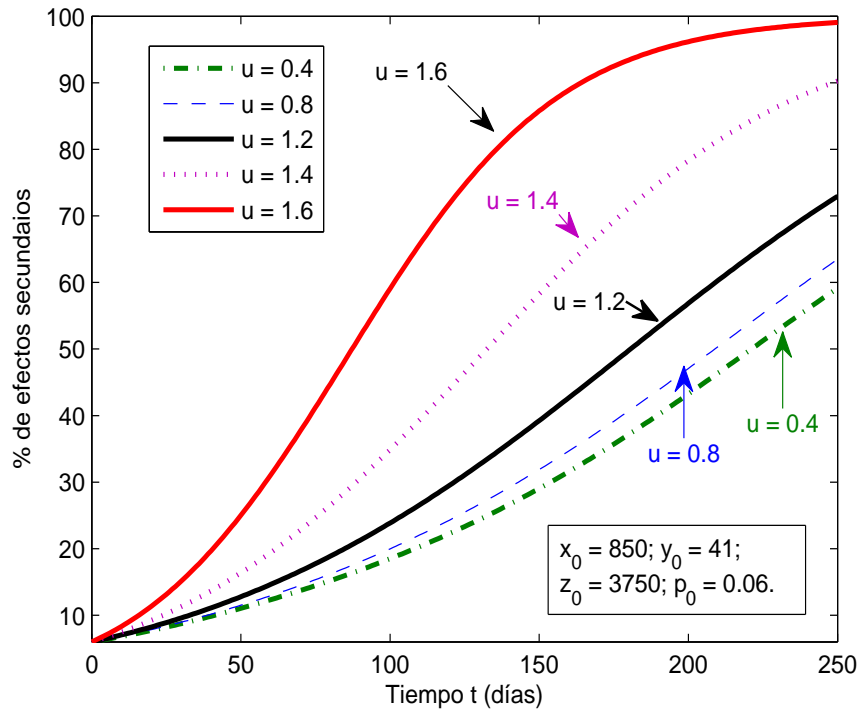


Figura 7.15: Evolución de la probabilidad  $p(t)$  de efectos secundarios, para diferentes terapias constantes y el mismo paciente con CI:  $x(0) = 800$  células/ $mm^3$ ,  $y(0) = 41$  células/ $mm^3$ ,  $z(0) = 3760$  copias/ $ml$  y  $p(0) = 0.06$ .

### 7.5.2. Los efectos secundarios como parte del costo a optimizar.

De ahora en adelante se tendrá en cuenta el siguiente funcional de costo:

$$J(u) = \int_{t_0}^T ([a_1 z(t) + a_2 (x(t) - \bar{x})^2] e^{\alpha t} + a_3 u^2(t) e^{\omega t} + a_4 p(t)) dt + a_5 (z(T) - \bar{z})^2, \quad (7.37)$$

las diferencias con el tratado en la Sección 7.3, es que se adicionó el término  $a_4 p(t)$  y la separación de factor de descuento inverso para diferenciar la forma de penalizar el costo entre la trayectoria

de estados y el control. Los coeficientes  $a_i$  fueron estimados para que los sumandos de la ecuación (7.37) sean proporcionales a 20,10, 35, 20, y 15 por ciento (ver Tabla 7.5.3) del costo total asociado a una trayectoria típica, la cual es normalizada a la unidad. Los coeficientes obtenidos son:

$$a_1 = 1.49 \times 10^{-6} \quad (7.38)$$

$$a_2 = 1.2962 \times 10^{-8} \quad (7.39)$$

$$a_3 = 1.74 \times 10^{-3} \quad (7.40)$$

$$a_4 = 8 \times 10^{-2} \quad (7.41)$$

$$a_5 = 3.28 \times 10^{-5} \quad (7.42)$$

$$\alpha = 0 ; 0.009 \quad (7.43)$$

$$\omega = 0 ; 0.007 \quad (7.44)$$

La solución de este problema de optimización será hallada a través del método de programación dinámica detallado en la Sección 7.3. Los umbrales inferior y superior, y la partición  $\Delta$  del dominio de  $p$  son:

$$\mathcal{P} \triangleq \{p_L, p_L + \Delta p, p_L + 2\Delta p, \dots, p_U\} \quad (7.45)$$

Basados en estos valores, la discretización parcial del costo toma la forma

$$\mathcal{J}(u) \triangleq \sum_{k=0}^{T/h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} ((a_1 z(t) + a_2 (x(t) - \bar{x})^2) e^{\alpha t} + a_3 u_k^2 e^{\omega t} + a_4 p(t)) dt + a_5 (z(T/h) - \bar{z})^2, \quad (7.46)$$

$$t_k \triangleq t_0 + hk, \quad (7.47)$$

donde  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $p(t)$  y  $\phi(t, t_0, x, y, z, p, u(\cdot))$  tienen el mismo significado que en la Subsección 7.3.1 pero incluyendo a  $p$

$$(x(t), y(t), z(t), p(t))' = \phi(t, t_k, x_k, y_k, z_k, p_k, \tilde{u}_k), \quad (7.48)$$

$$(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}, p_{k+1})' = \text{round}(\phi(t_{k+1}, t_k, x_k, y_k, z_k, p_k, \tilde{u}_k)), \quad \tilde{u}_k(t) \equiv u_k, \quad (7.49)$$

y donde “round”

$$(x(t_{k+1}), y(t_{k+1}), z(t_{k+1}), p(t_{k+1}))' = \phi(t_{k+1}, t_k, x_k, y_k, z_k, p_k, \tilde{u}_k)$$

redondea a  $p$  según el valor más cercano a éste

$$p_{k+1} \triangleq \text{el valor más cercano a } p(t_{k+1}) \text{ en } \mathcal{P}$$

### 7.5.3. Tratamiento de un paciente con infección aguda y efectos colaterales.

A continuación se presentará los resultados numéricos de la aplicación de programación dinámica a un paciente en particular minimizando efectos secundarios, costos y llevando al enfermo a la región indetectable de carga viral. Los umbrales inferior  $p_L$ , superior  $p_U$  y la grilla  $\Delta$  para  $p$  se establecieron en 0.05, 0.9 y 0.1, respectivamente. El paciente es el mismo descrito por las CI dadas por 7.13 utilizado en secciones anteriores. Se fija la condición inicial de  $p(t)$  en  $p_0 = 0.05$  según lo expuesto en 7.5.1. En esta subsección no se utilizará el factor de descuento inverso.

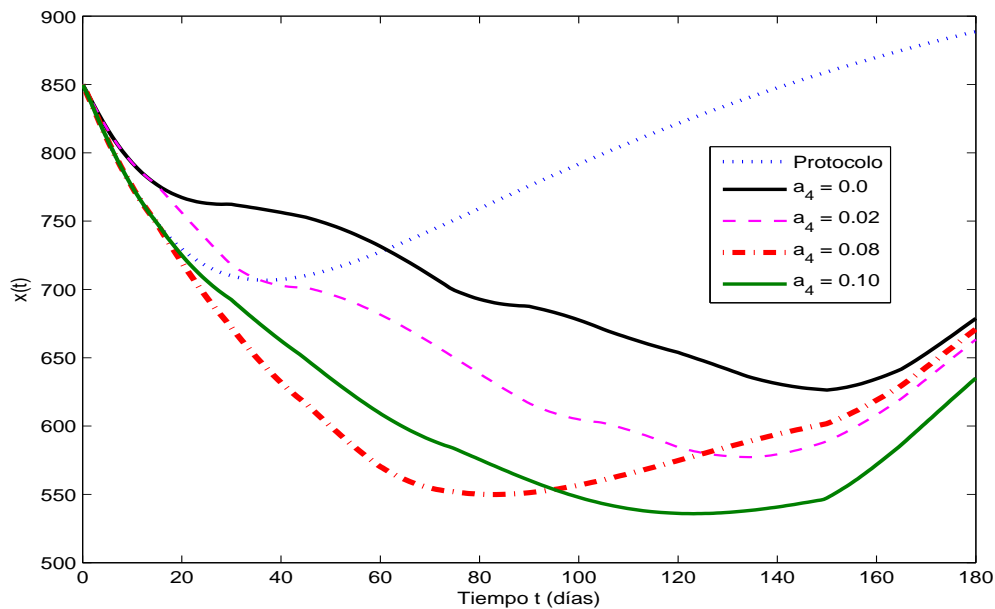


Figura 7.16: Comparación de trayectorias óptimas  $x(t)$  entre las que consideran efectos secundarios y las que no.

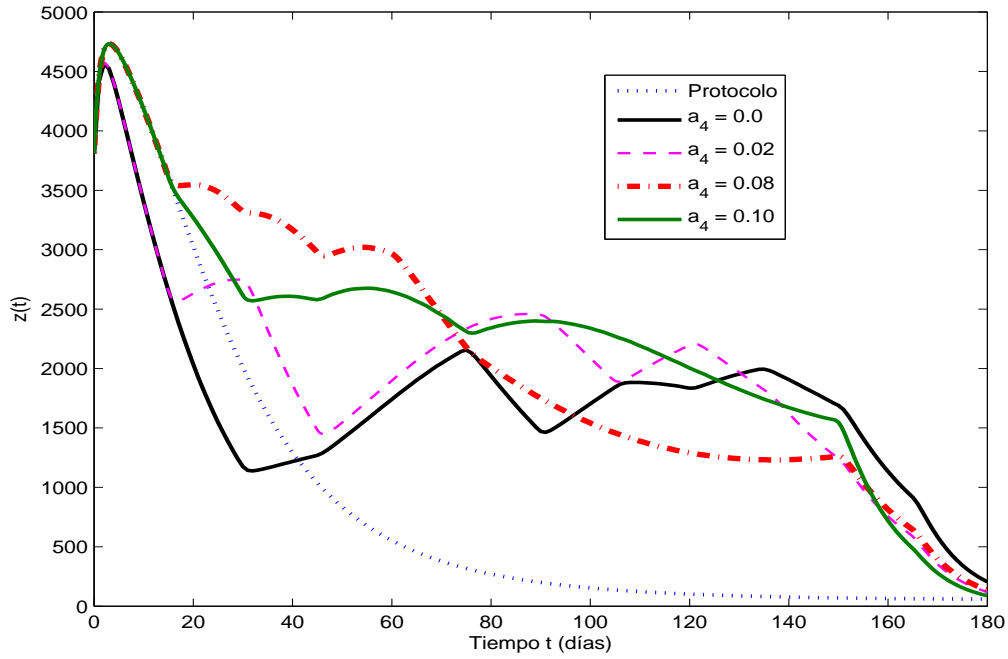


Figura 7.17: Comparación de trayectorias óptimas  $z(t)$  entre las que consideran efectos secundarios y las que no.

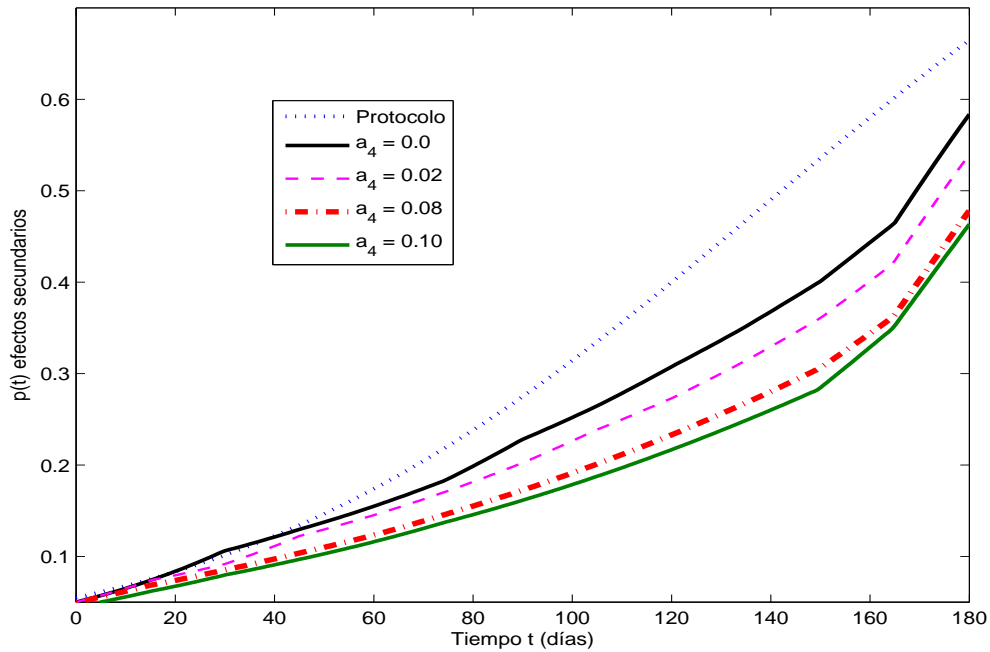


Figura 7.18: Evolución óptima de la probabilidad de efectos secundarios para distintos pesos  $a_4$ .

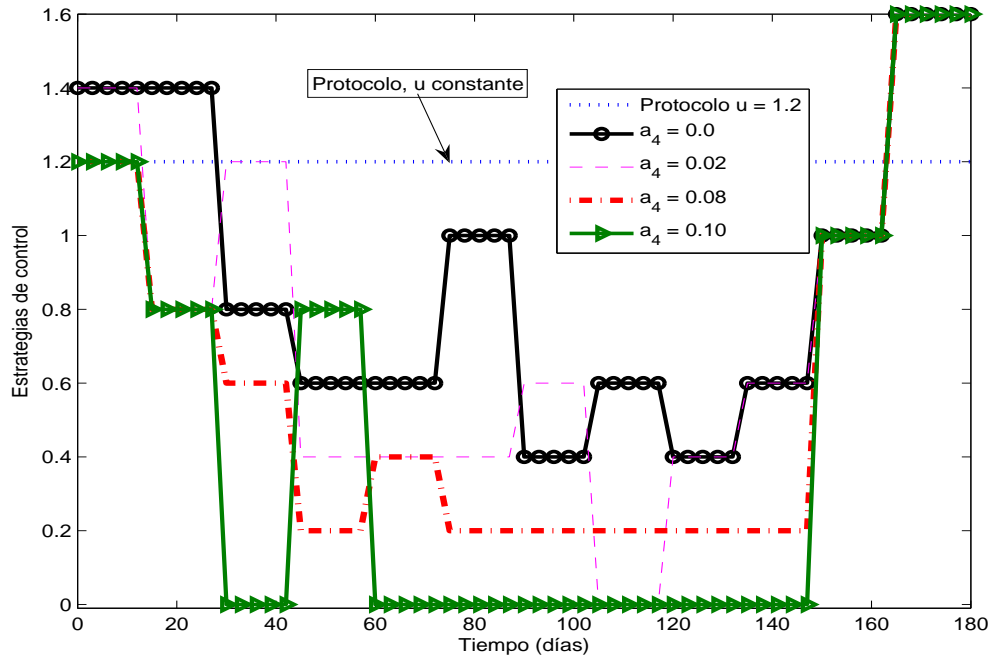


Figura 7.19: Estrategias de control óptimas para distintos valores del peso  $a_4$ .

Como lo muestra las Figuras 7.16-7.18, el énfasis estuvo puesto en abatir la enfermedad de un paciente con infección aguda y simultáneamente reducir los efectos secundarios generados por el tratamiento terapéutico. Este último objetivo es reflejado en el valor del coeficiente  $a_4$  y su importancia relativa en comparación a los demás coeficientes  $a_i$ . Se omite la figura del estado  $y$  ya que cualitativamente se comporta igual al estado  $z$ . En la Figura 7.19 se ilustra los distintos tratamientos para varios valores de  $a_4$ . Estas trayectorias de tratamiento óptimo en “lazo abierto” logran reducir la carga viral hasta el límite imperceptible dentro de los 180 días estipulados. A su vez, el número de células sanas se mantiene en niveles médicamente aceptables ( $x > 600$  todo el tiempo) [65]. Este resultado es particularmente positivo a luz de la siguiente evidencia experimental extraída de [112]:

“The risk of several non-AIDS-defining conditions, including cardiovascular diseases, liver-related events, renal disease, and certain non-AIDS morbidities ... is greater than the risk for AIDS in persons with CD4 T-cell counts 200 cells/mm<sup>3</sup>; the risk for these events increases progressively as the CD4 T-cell count decreases from 350 to 200 cells/mm<sup>3</sup>”

Se comprobó numéricamente la optimalidad de las soluciones al hacer comparación de lo óptimo con trayectorias cercanas. En particular se usó las trayectorias encontradas en la Sección 7.4, las cuales no tuvieron en cuenta los efectos colaterales. Los resultados de la comparación

son mostrados en la Figura 7.20, donde (abusando de la notación) se define los siguientes costos:

$$J_1^u = \int_{t_0}^T (a_1 z^u(t) + a_2 (x^u(t) - \bar{x})^2 + a_3 u^2(t)) dt + a_5 s(z(T) - \bar{z}_h)^2(t), \quad (7.50)$$

y

$$J_2^u = \int_{t_0}^T (a_1 z^u(t) + a_2 (x^u(t) - \bar{x})^2 + a_3 u^2(t) + a_4 p^u(t)) dt + a_5 s(z(T) - \bar{z}_h)^2(t), \quad (7.51)$$

donde  $u_1(z_0)$  es la trayectoria de control óptima con respecto al costo asociado con  $J_1^u$  y la carga viral inicial  $z_0$ ; análogamente se define  $u_2(z_0)$  con respecto al costo  $J_2^u$ . Se muestra que  $J_1^{u_1(z_0)} < J_2^{u_1(z_0)}$ , y  $J_2^{u_2(z_0)} < J_1^{u_2(z_0)}$  para todo  $z_0$  en  $[1000, 4000]$  ( $x^u$ ,  $y^u$ ,  $z^u$  y  $p^u$  son las trayectorias generadas por el correspondiente  $u(t)$  en cada caso). Esto significa que para cualquier condición inicial de la carga viral  $z_0$ , el control  $u_1(z_0)$  es óptimo con respecto el costo  $J_1^u$  (el cual no tuvo en cuenta los efectos secundarios) y en costo no puede ser sobrepasado por la estrategia  $u_2(z_0)$  (el cual si consideró los efectos colaterales). Sin embargo, cuando el costo  $J_2^u$  es adoptado, las estrategias  $u_2(z_0)$  son óptimas con respecto a  $u_1(z_0)$ . En resumen, cada control es óptimo de acuerdo a su costo asociado.

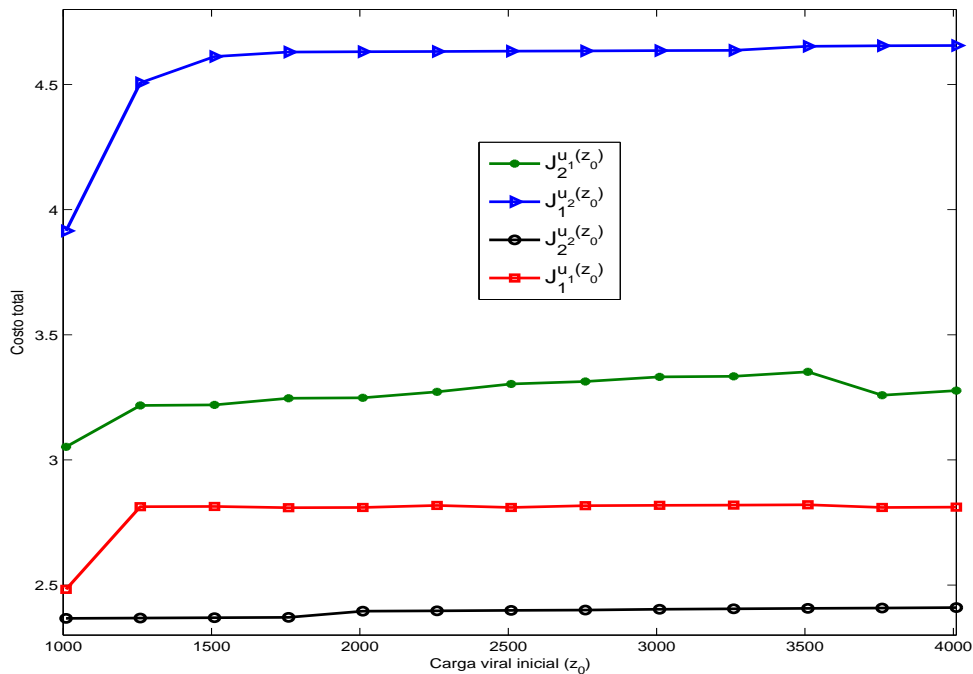


Figura 7.20: Verificación de optimalidad de las trayectorias con y sin considerar efectos secundarios, para varios valores de carga viral inicial  $z_0$ .

Las trayectorias para el valor de  $a_4 = 0.08$  se toman como lo recomendable con este estudio, ya que son las que minimizan más los efectos colaterales, a la vez de llevar la carga viral a niveles imperceptibles sin utilizar dosis nulas. En cuanto a costos el valor de  $a_4 = 0.08$  produce trayectorias de control cuyos costos parciales (diferentes términos del costo total dado por la ecuación (7.37)) tuvieron una mayor importancia a lo esperado cuando se estimó el valor de los parámetros en la Subsección 7.5.2. La incidencia de esos costos individuales en el costo total no indica un comportamiento totalmente monotónico con la variación del peso  $a_4$ , tal como puede observarse en la Tabla 7.5.3. Sin embargo, en términos generales, se puede apreciar que el crecimiento de  $a_4$  provoca al mismo tiempo: (i) un trayectoria  $p(t)$  óptima menos significativa que la esperada (Figura 7.18), pero (ii) un incremento en la incidencia relativa de los costos de efectos secundarios (Tabla 7.5.3, 4ª. columna) del costo total, el cual no es un resultado trivial, ya que se esperaría pagar más para reducir los efectos y así darles más importancia. Una probabilidad  $p(t)$  pequeña está asociada a un control pequeño, y dado que  $a_3$  está fijo, un decremento en la incidencia del costo de droga es asociado a un incremento de  $a_4$  (3ª. columna), mientras, y como una contraparte, la importancia de la penalización de las desviaciones de los estados deseados aumenta (5ª. column). Manteniendo fijo los pesos en el costo, el valor de  $a_4 = 0.1$  debería ser tomado como un límite superior aceptable, ya que sus correspondientes controles óptimos dan trayectorias con interrupciones transitorias del tratamiento (para  $t \in \{[30, 45] \cup [60, 150]\}$ ) ver Figura 7.19). Se ha mostrado que dichas interrupciones resultan en un incremento dramático de la incidencia en la resistencia del virus hacia la droga, por lo que esos casos deberían ser evitados.

Costos parciales	$\int_{t_0}^T a_1 z + a_2 (x - \bar{x})^2$	$\int_{t_0}^T a_3 u^2$	$\int_{t_0}^T a_4 p$	$a_5 z^2(T)$
$a_4 = 0.00$	0.198	0.506	0.000	0.296
$a_4 = 0.02$	0.287	0.517	0.060	0.136
$a_4 = 0.08$	0.300	0.346	0.198	0.156
$a_4 = 0.10$	0.309	0.378	0.246	0.067

Tabla 7.4: Incidencia en el costo de cada objetivo particular para diferentes valores del peso  $a_4$ . Los valores están normalizados a la unidad.

## 7.6. Discusión y conclusiones.

En este capítulo se optimizó la enfermedad VIH/SIDA desde el punto de vista de teoría de control. Se tomó como planta al paciente, como variable de control la prescripción de droga real zidovudine (AZT) y como estados, en principio, las células sanas, las células infectadas y la carga viral. En la sección 7.5 se adicionó otro estado más para considerar la probabilidad de



tener efectos secundarios debido a la ingestión de droga y el virus. En este contexto, se debe resaltar lo siguiente:

- Según los resultados obtenidos parece apropiado considerar tratamientos con dosis de droga variable. Sin embargo, evidencia experimental ha mostrado que terapias terapéuticas de este tipo puede agravar la relación entre la adherencia y resistencia a los fármacos. Por lo tanto, todavía es necesario realizar estudios más profundos en pacientes con VIH para determinar si estos tratamientos son adecuados.
- Las herramientas desarrolladas aquí podrían asistir a los médicos encargados del paciente en lo que concierne a prescripción de terapias y control manual de la enfermedad mediante análisis de sangre y la propia inspección que el profesional realice. Además, algunos beneficios extra se podrían obtener con la aplicación de estas terapias, concretamente, podría ser posible una reducción en los gastos y fondos públicos destinados al cuidado de enfermos de VIH debido a que en promedio estos tratamientos consumen menos cantidad de droga. A su vez se estarían reduciendo los efectos colaterales negativos en el paciente.
- Las soluciones óptimas halladas mediante este esquema no deben pensarse como “recetas” a ser aplicadas siempre, por el contrario, la supervisión de un profesional médico es esencial durante la terapia debido a la existencia de “perturbaciones” que alteran el valor de los estados. Para abatir esas perturbaciones se debe recurrir al modo en lazo cerrado, el cual le permitiría al médico determinar la dosis óptima de droga a administrar en base a las soluciones guardadas de programación dinámica para el resto del horizonte sin cálculos adicionales.
- Cuando se toman en cuenta los efectos secundarios dentro del costo a optimizar, se logra terapias que en promedio recomiendan menos droga (en comparación con el protocolo y aún con las de la Sección 7.4). Estas terapias no comprometen tanto la salud del paciente ya que se aprecia en los resultados que las células T CD4+ se recuperan satisfactoriamente bajo estos tratamientos. Sin embargo, la trayectoria óptima de control sigue una curva en forma de U: altas drogas en los extremos del tratamiento y pequeñas en el intermedio del mismo.
- Los pesos relativos en el funcional de costo deberían ser ajustados según recomendaciones de un médico. Las trayectorias podrían ser simuladas y mejoradas para que reflejen la necesidad y prioridades del profesional antes de elegir los pesos definitivos del funcional de costo. Con respecto a esto, no existe una estrategia para ajustar los parámetros, ni aún para los Lagrangianos más comunes como el caso del LQR (véase [21] y Capítulo anteriores).

- La adición del factor de descuento inverso en los funcionales de costo obliga a que la infección se abata más rápidamente, además parece que las trayectorias de control en algunos casos usan menos medicación y mejoran la respuesta dinámica de los estados. Sin embargo, el tiempo y el esfuerzo de cálculo aumentan considerablemente ya que el Lagrangiano deja de ser autónomo en el tiempo.
- Los parámetros del modelo de la dinámica y las restricciones deberían validarse y en lo posible actualizarse periódicamente según sea la situación de los pacientes en los que se aplique el método. Un análisis de sensibilidad puede ayudar a determinar el tiempo apropiado para realizar las mediciones adecuadas a fin de estimar los mejores parámetros del modelo.
- La combinación de un funcional de costo discreto y trayectorias continuas en el interior de cada etapa de optimización ha mostrado ser más práctico en la implementación de un esquema de programación dinámica. Los resultados proveen trayectorias óptimas que comienzan en cada nodo del espacio de estados discretizado y en cada punto intermedio del horizonte de optimización hasta el final del mismo. Esto permite utilizar acciones correctivas en la perspectiva de lazo cerrado y feedback de estados cuando es aplicado a un enfermo real, a la vez le devuelve al médico el control de la situación del paciente. Con el fin de que las herramientas desarrolladas aquí sean aplicables en el uso cotidiano de enfermos de VIH se debería generar un software. Sin embargo, una vez el software este disponible, el médico debería tener un entrenamiento corto en las bases de programación dinámica permitiéndole explotar al máximo las herramientas generadas.

## Capítulo 8

# Conclusiones y perspectivas.

A lo largo de esta tesis se fundamentaron teóricamente nuevas estrategias de control óptimo y su efectividad se mostró en aplicaciones a procesos de ingeniería química y biomédica. En los distintos capítulos se enfatizó el hecho de que las estrategias de control admiten procesos representados por modelos determinísticos de dimensión finita lineales y no lineales, autónomos o variantes en el tiempo. Del mismo modo, en el criterio de optimización de cada problema, el Lagrangiano fue considerado de forma general. La penalización final de las estrategias de horizonte finito fue obligada a ser cuadrática para simplificar su tratamiento. Se ilustraron las siguientes aplicaciones: (i) un sistema de reacciones electroquímicas (HER) en el Capítulo 3, donde el funcional de costo es la potencia del sistema, (ii) un reactor tanque agitado continuo CSTR en el Capítulo 4 y un fermentador alimentado continuamente para la producción de penicilina en el Capítulo 6, donde el Lagrangiano fue del tipo cuadrático en los estados y el control, y (iii) el tratamiento del control de VIH, donde se usa un Lagrangiano que involucra, además de términos lineales y cuadráticos de los estados y el control, una exponencial que amplifica el costo a medida que el tiempo avanza sobre el horizonte.

El formalismo Hamiltoniano fue la base teórica de gran parte de los desarrollos realizados. Un aporte teórico fue el de ampliar y sustentar ecuaciones en derivadas parciales para encontrar las condiciones de borde faltantes (estado óptimo final y coestado óptimo inicial) del sistema Hamiltoniano de ODEs correspondiente al problema de control óptimo con estados finales libres. Los valores aludidos permiten construir las trayectorias óptimas del proceso totalmente en tiempo real, lo cual significa un avance importante para la aplicación de control óptimo. Paralelamente, se explicó cómo puede utilizarse las soluciones de las PDEs como herramienta de diseño, para generar las trayectorias óptimas on-line, para calcular la ganancia de compensación de perturbaciones en tiempo real, y para generar el control óptimo en sistemas lineales cuando existen de las restricciones en la variable manipulada.

Los resultados arrojados por las PDEs fueron convalidados por las aplicaciones a procesos con fuertes alinealidades. Se mostró que efectivamente, una vez las condiciones iniciales de

los coestados son halladas, las HCEs pueden integrarse en línea con el proceso y de ese modo construir en tiempo real tanto las trayectorias óptimas de estado como de la variable manipulada. En la mayoría de los procesos la ley óptima depende de los coestados del proceso, es por eso que esa acción de control no admite una retroalimentación exclusiva de los estados (feedback clásico).

En torno a estos resultados se reformuló un esquema conocido como “2DOF” en la literatura, y se integró su filosofía al contexto del enfoque Hamiltoniano. En particular, las nuevas estrategias desarrolladas (denominadas “H2DOF”) generan en línea (i) la trayectoria óptima (o nominal) de las señales de entrada y salida del sistema, y (ii) simultáneamente, en base a la linealización del sistema Hamiltoniano y a ciertos resultados provenientes de las PDEs variacionales, la ganancia de un compensador lineal para abatir perturbaciones y realizar el filtrado óptimo de las señales. Este sistema de rechazo de perturbaciones y filtrado se obtiene minimizando el mismo funcional de costo utilizado para lograr las trayectorias óptimas.

Otro avance de mucha importancia en el estudio de sistemas de control óptimo fue el haber mostrado que cuando en sistemas lineales y sobre la variable manipulada se imponen restricciones, las PDEs brindan información para encontrar el control óptimo. Principalmente, se ilustró que en la presencia de limitaciones físicas, el control se puede saturar, pero no necesariamente cuando el control óptimo del problema irrestricto entra en contacto directo con las cotas, sino que se debe encontrar previamente el tiempo de saturación, que en la tesis se denominó tiempo de conmutación (o “switching time”, ya que en ese tiempo se hace el cambio del control óptimo a la saturación). Sin embargo, y a pesar de las restricciones, las estrategias de control siguen siendo generadas on-line.

También en esta tesis se aplicó la técnica “Programación Dinámica Híbrida” al control del virus de inmunodeficiencia humana. El principal resultado de esta aplicación es una metodología que podría asistir a los médicos encargados de la atención a pacientes infectados puesto que: (i) lograron diseñar estrategias terapéuticas que, al reducir en promedio la medicación consumida en el tratamiento de la enfermedad, también disminuyen el costo de mantenimiento y los efectos secundarios que causa la droga en el paciente, y (ii) la información generada permite al médico hacer correcciones del tratamiento si él detecta que la predicción de la evolución del virus no concuerda con la evolución real medida. En otras palabras, el médico puede realizar un control de lazo cerrado, o de retroalimentación de estado, sin necesidad de recalcular las trayectorias óptimas ante desviaciones. Por primera vez en la literatura se propuso un modelo empírico de modelización de los efectos secundarios (side-effects) debidos a las drogas ingeridas por el paciente. En esta tesis se sustentó ese modelo y se generaron tratamientos terapéuticos que minimizan explícitamente los side-effects.

Los siguientes trabajos publicados en revistas internacionales con referato: [43, 44, 46, 47, 37, 38, 39], tienen estrecha relación con el contenido de la tesis, así como los que están en revisión:

[45, 103] y los siguientes trabajos presentados en congresos:

1. Costanza, V. y P. S. Rivadeneira, 2006. Control subóptimo del cambio de consignas en procesos no-Lineales. Anales del XX Congreso Argentino de Control Automático (AADECA, Buenos Aires).
2. Costanza, V. y P. S. Rivadeneira, 2007. Regular Hamiltonian problems with implicit  $\mathcal{H}$ -optimal controls. Anales de la XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (XII RPIC, Río Gallegos).
3. Costanza, V. y P. S. Rivadeneira, 2008. Feedback óptimo del problema lineal-cuadrático invariante con condiciones flexibles. Anales del XXI Congreso Argentino de Control Automático (AADECA, Buenos Aires).
4. Costanza, V. y P. S. Rivadeneira, 2009. Variational PDEs and the time-variant LQR problem. Anales de la XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (XIII RPIC, Rosario).
5. Rivadeneira, P. S. y E. J. Adam, 2009. Suboptimal control strategies applied to nonlinear batch reactor with constraints. Anales de la XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (XIII RPIC, Rosario).
6. Costanza, V. y P. S. Rivadeneira, 2010. El problema lineal-cuadrático con controles acotados. Anales del XXII Congreso Argentino de Control Automático (AADECA, Buenos Aires).
7. Rivadeneira, P. S. y E. J. Adam, 2010. Nonlinear fed-batch reactor PI control with constraints. Anales del XXII Congreso Argentino de Control Automático (AADECA, Buenos Aires).

## 8.1. Perspectivas de trabajo futuro.

A partir de los resultados de la tesis sobre las PDEs variacionales, varias líneas de investigación se activan significativamente, por ejemplo:

1. La integración numérica de las PDEs plantea la necesidad de modificar o crear nuevos métodos numéricos que brinden confianza en la resolución de las mismas, ya que se ha mostrado (por ejemplo, con los métodos de shooting vistos en el Capítulo 3) que los  $\sigma(T, S)$  deben tener varios dígitos significativos para que las HCEs (ODEs muy sensibles a las condiciones iniciales) puedan integrarse sin inconvenientes. En [36] se mostró que los paquetes de cómputo estándar (como Matlab o Mathematica) no siempre resuelven adecuadamente las PDEs numéricamente. Se da un ejemplo donde claramente la solución

numérica de estos paquetes difiere enormemente de la solución analítica. Así que parece imprescindible tener mejores métodos de integración. En el grupo de trabajo se ha iniciado el diseño de un algoritmo de resolución de PDEs basado en el método de Picard para ecuaciones diferencias ordinarias.

2. El problema de manejo de restricciones en sistemas lineales y no lineales sigue siendo un problema abierto. Si bien algunos resultados (mostrados en la tesis) se obtuvieron para sistemas lineales, todavía no hay gran certeza de cómo encontrar el control óptimo en otras situaciones. En sistemas lineales se consideró el problema en que la variable manipulada se satura al inicio y/o al final del horizonte. Para estos casos se encontraron los tiempos de conmutación del control. Sin embargo, no se consideró la situación en que el control se satura en el medio del horizonte. Para sistemas no lineales no se obtuvo ningún resultado óptimo (aunque la inclusión de las LMIs generó una solución aproximada), por lo que se podría pensar en la forma de cómo trasladar la metodología usada en sistemas lineales, y de ese modo tratar de hallar los tiempo de conmutación para estos sistemas basados en las adecuadas PDEs. Por ejemplo, se podría utilizar el sistema (3.1) para estudiar este problema, dado que se mostró que el control óptimo al final del horizonte de optimización aumenta considerablemente (entonces un problema de control óptimo a plantear es el de hallar la trayectoria de control óptimo limitando superiormente a la variable manipulada). Éste es un tema que generaría con seguridad una línea de estudio con resultados promisorios.
3. Dada la posibilidad de generar trayectorias óptimas en línea, otra investigación a seguir promueve el estudio de distintos Lagrangianos. Por ejemplo, aquéllos que brinden estabilidad de entrada-salida, donde el costo de trayectoria es

$$\int_0^T \left[ \|y(t)\|^2 - \gamma^2 \|u(t)\|^2 \right] dt. \quad (8.1)$$

Este nuevo marco de estudio persigue un balance óptimo entre desempeño del sistema de control y estabilidad, un problema que merece ser estudiado en detalle [73].

Con respecto al estudio de la dinámica del virus de inmunodeficiencia adquirido (VIH), las necesidades de trabajos futuros son amplias.

1. Es esencial pensar en el mejoramiento de las herramientas desarrolladas en el Capítulo 7, como también la de generar relaciones con las instituciones encargadas de los pacientes de (VIH/SIDA), para que estas herramientas puedan llegar a una instancia de aplicación al tratamiento de enfermos “reales”. Lo desarrollado aquí tiene el potencial de convertirse en un paquete de asistencia médica, con la capacidad de: (i) dadas las condiciones iniciales con las que entra el paciente a tratamiento, diseñar una terapia óptima para su caso, (ii)

- ya que el cambio de dosificación de droga es cada quince días o un mes, el enfermo podría realizarse periódicamente análisis de sangre, y en base a estos resultados corroborar que los valores predichos por el modelo son o no son adecuados. En caso de haber diferencias se debe generar una terapia correctora recurriendo a la base de datos de programación dinámica y utilizando la experiencia del médico a cargo.
2. Los modelos utilizados en esta tesis fueron desarrollados fundamentalmente para la descripción de un enfermo de VIH cuando ya está en la etapa “activa de la enfermedad”, es decir, cuando las células sanas han decrecido mucho y los viriones tiene un valor elevado luego del pico de la infección. En esta etapa, en el virus principalmente predomina un tipo de cepa conocido como *X4*. Sin embargo, al inicio de la infección la cepa que domina es la llamada *R5*. Así que una de las principales motivaciones actuales en el estudio del VIH es poder detectar el momento en que el virus cambia de “cepa”. Actualmente, las terapias protocolo consideran dar distintas drogas que desactivan estas cepas, por lo que los pacientes de VIH normalmente ingieren un “cocktail” de drogas. Como ya se conoce, los efectos colaterales de estas medicaciones son significativos. Esto, visto desde el punto de vista de teoría de control es interesante, ya que si existieran modelos adecuados que predigan esta conmutación de cepa, podría plantearse el problema de optimización para definir la proporción adecuada de las drogas a recetar al paciente dependiendo de la cepa predominante en el momento.
  3. En la literatura especializada las cohortes de pacientes estudiados por lo general son adultos. Sin embargo, se ha notado que la respuesta de pacientes pediátricos puede ser bastante diferente, y el problema de regular la enfermedad es muy importante, dado que dichos enfermos están formando sus diferentes órganos y las drogas suministradas podrían afectar este crecimiento. En base a estas ideas surge una línea de investigación donde el objetivo es adaptar las diferentes herramientas existentes a estos pacientes: tanto el modelo de la infección, de la conmutación de cepa, y de efectos colaterales, como su posterior control y optimización.

# Bibliografía

- [1] Abraham, R. y J. E. Marsden (1978). *Foundations of Mechanics*. second ed.. Benjamin / Cummings. Reading, Massachusetts.
- [2] Agrachev, A. y Y. Sachkov (2004). *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.
- [3] Al-Faqeer, F.M. y H.W. Pickering (2001). An analysis procedure for hydrogen absorption under Frumkin adsorption conditions.. *Journal of Electrochemical Society* **E**(248), 148–256.
- [4] Alt, W. (2003). Approximation of optimal control problems with bound constraints by control parameterization. *Control and Cybernetics* **32**(3), 451–472.
- [5] Alvarez-Ramirez, J., M. Meraz y J. X. Velasco-Hernandez (2000). Feedback control of the chemotherapy of HIV. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**, 2207–2219.
- [6] Ammassari, A., R. Murri et al. (2001). Self-reported symptoms and medication side effects influence adherence to highly active antiretroviral therapy in persons with HIV infection. *Journal of Acquired Immune Deficiency Syndromes* **28**(5), 445–9.
- [7] Antonelli, R. (1999). *Output Feedback Regulation of Nonlinear Chemical Processes with Input Constraints*. AIChE. New York.
- [8] Aris, R. (1999). *Mathematical Modeling. A Chemical Engineer's Perspective*. Academic Press. New York.
- [9] Åström, K.J. y B. Wittenmark (1994). *Adaptive control*. second ed.. Prentice Hall. Massachusetts.
- [10] Banga, J., E. Balsa-Canto, C. G. Moles y A. A. Alonso (2005). Dynamic optimization of bioprocesses: Efficient and robust numerical strategies. *Journal of Biotechnology* **117**, 407–419.
- [11] Bangsberg, D., A. Moss y S. Deek (2004). Paradoxes of adherence and drug resistance to HIV antiretroviral therapy. *Journal of Antimicrobial Chemotherapy* **53**, 696–699.



- [12] Barão, M. y J. M. Lemos (2007). Nonlinear control of HIV-1 infection with a singular perturbation model. *Biomedical Signal Processing and Control* **2**, 248–257.
- [13] Bellman, R. y R. Kalaba (1963). A note on Hamilton's equations and invariant imbedding. *Quarterly of Applied Mathematics* **XXI**, 166–168.
- [14] Bequette, B.W. (1991). Nonlinear control of chemical processes: a review. *Industrial Engineering Chemical Research* **30**, 1391–1413.
- [15] Bequette, B.W. (2007). Non-linear model predictive control: A personal retrospective. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **85**, 408–415.
- [16] Bergallo, M., V. Costanza y C.E. Neuman (2006). La ecuación generalizada de riccati en derivadas parciales. aplicación al control de reacciones electroquímicas. *Mecánica Computacional* **XXV**, 1565–1580.
- [17] Bernhard, P. (1972). *Introducción a la Teoría de Control Óptimo*. Instituto de Matemática “Beppo Levi”, Cuaderno Nro. 4. Rosario, Argentina.
- [18] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [19] Brandt, M. E. y G. Chen (2001). Feedback control of a biodynamical model of HIV-1. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **48**(7), 754–759.
- [20] Bruni, C., G. Di Pillo y K. Koch (1974). Bilinear systems: An appealing class of ‘nearly linear’ systems in theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC**(19), 334–348.
- [21] Bryson, A. y Y. Ho (1975). *Applied Optimal Control*. revised printing ed.. John Wiley and Sons. New York.
- [22] Caetano, M. A. y J. A. Felipe de Souza (2003). Model based analysis of AIDS treatment. En: *Proc. Western Multiconference (WMC') on Health Sciences Simulation*. Orlando, Florida, USA. pp. 65–70.
- [23] Cahn, P. et al. (2006). Efficacy and tolerability of 10-day monotherapy with aprecitabine in antiretroviral-naive, HIV-1 infected patients. *AIDS* **20**(9), 1261–1268.
- [24] Camacho, E.F. y C. Bordons (2003). *Model Predictive Control*. second ed.. Springer-Verlag. London.
- [25] Campello de Souza, F.M. (1999). Modeling the dynamics of HIV-1 and cd4 and cd8 lymphocytes. *IEEE Engineering in Medicine and Biology* **18**, 21–24.

- [26] Cappelletti, C A. y E. J. Adam (2008). Diseño de un control de nivel de un sistema hidráulico con restricciones utilizando lmi. En: *XXI Congreso Argentino de Control Automático, AADECA 2008*. Buenos Aires, Argentina.
- [27] Caramelli, B. (2008). Cardiovascular risk and metabolic effects in HIV patients. En: *Proc. 29th World Congress of Internal Medicine*. Buenos Aires, Argentina. pp. 16–20.
- [28] Cheruy, A. (1988). Méthodologie de la modélisation. *Les Cahiers d'EDORA (Reports INRIA-Sophia Antipolis, France)* **816**, 23–48.
- [29] Costanza, V. (2005a). Optimal state-feedback regulation of the hydrogen evolution reactions. *Latin American Applied Research* **35**(4), 327–335.
- [30] Costanza, V. (2005b). A variational approach to the control of electrochemical hydrogen reactions. *Chemical Engineering Science* **60**, 3703–3713.
- [31] Costanza, V. (2007). Parametric uncertainty and disturbance attenuation in the suboptimal control of a non-linear electrochemical process. *Optimal Control Applications and Methods* **28**, 209–228.
- [32] Costanza, V. (2008a). Finding initial costates in finite-horizon nonlinear-quadratic optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods* **29**, 225–242.
- [33] Costanza, V. (2008b). Regular optimal control problems with quadratic final penalties. *Revista de la Unión Matemática Argentina* **49**(1), 43–56.
- [34] Costanza, V. (2009). Optimal two-degrees-of-freedom control of nonlinear systems. *Latin American Applied Research*. En revisión.
- [35] Costanza, V., A. C. Tuncelli y C. E. Neuman (1996). Rotational speed tracking for hydraulic-motor-driven-machine-tools. *Optimal Control Applications and Methods* **17**, 309–327.
- [36] Costanza, V., M. I. Troparevsky y P. S. Rivadeneira (2009a). Numerical solution of the variational pdes arising in optimal control theory. *Anales de la XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control*.
- [37] Costanza, V., P. S. Rivadeneira, F. L. Biafore y C. E. D'Attellis (2009b). A closed-loop approach to antiretroviral therapies for HIV infection. *Biomedical Signal Processing and Control* **4**(2), 139–148.
- [38] Costanza, V., P. S. Rivadeneira, F. L. Biafore y C. E. D'Attellis (2010a). Taking side-effects into account for HIV medication. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*.

- [39] Costanza, V., P. S. Rivadeneira y R. D. Spies (2010*b*). Equations for the missing boundary values in the hamiltonian formulation of optimal control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. En prensa.
- [40] Costanza, V. y C. E. Neuman (2006). Optimal control of nonlinear chemical reactors via an initial-value Hamiltonian problem. *Optimal Control Applications and Methods* **27**, 41–60.
- [41] Costanza, V. y C. E. Neuman (2009). Partial differential equations for missing boundary conditions in the linear-quadratic optimal control problem. *Latin American Applied Research* **39**(3), 207–212.
- [42] Costanza, V. y P. S. Rivadeneira (2008*a*). Feedback óptimo del problema lineal-cuadrático invariante con condiciones flexibles. *Anales del XXI Congreso Argentino de Control Automático*.
- [43] Costanza, V. y P. S. Rivadeneira (2008*b*). Finite-horizon dynamic optimization of nonlinear systems in real time. *Automatica* **44**(9), 2427–2434.
- [44] Costanza, V. y P. S. Rivadeneira (2009). Minimal-power control of hydrogen evolution reactions. *Optimal Control Applications and Methods* **31**(2), 105–115.
- [45] Costanza, V. y P. S. Rivadeneira (2010*a*). Approximating the solution to LQR problems with bounded controls. *Latin American Applied Research*. En revisión.
- [46] Costanza, V. y P. S. Rivadeneira (2010*b*). Hamiltonian two-degrees-of-freedom control for chemical reactors. *Optimal Control Applications and Methods*. En prensa.
- [47] Costanza, V. y P. S. Rivadeneira (2010*c*). Initial values for Riccati ODEs from variational PDEs. *Computational and Applied Mathematics*. En prensa.
- [48] Culshaw, R. V., S. Ruan y R. J. Spiteri (2004). Optimal HIV treatment by maximizing immune response. *Journal of Mathematical Biology* **48**, 545–562.
- [49] Cuthrell, J. y L. Biegler (1989). Simultaneous optimization and solution methods for batch reactor control profiles. *Comput. Chem. Engng.* **13**(1), 49–62.
- [50] Davey, R. T. et al. (1999). HIV-1 and t-cell dynamics after interruption of highly active antiretroviral therapy (HAART) in patients with a history of sustained viral suppression. En: *Proc. Nat Acad. Sci.*. Vol. 98. USA. pp. 15109–15114.
- [51] Fleming, W. H. y Rishel R. W. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer. New York.
- [52] Folland, G. B. (1995). *Introduction to Partial Differential Equations*. 2nd ed.. Princeton University Press. Princeton.

- [53] Ge, S. S., Z. Tian y T. H. Lee (2005). Nonlinear control of a dynamic model of HIV-1. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **52**(3), 353–361.
- [54] Gennero de Chialvo, M.R. y A.C. Chialvo (1996). The polarisation resistance, exchange current density and stoichiometric number for the hydrogen evolution reaction: theoretical aspects. *Journal of Electroanalytical Chemistry* **415**, 97–106.
- [55] Gennero de Chialvo, M.R. y A.C. Chialvo (1998). Kinetics of hydrogen evolution reaction with frumkin adsorption: re-examination of the volmer-heyrovsky and volmer-tafel routes. *Electrochimica Acta* **44**, 841–851.
- [56] Goh, C. J. y K. L. Teo (1998). Control parametrization: a unified approach to optimal control problems with general constraints. *Automatica* **24**(1), 3–18.
- [57] Golbert, J. y D.R. Lewin (2004). Model-based control of fuel cells: (1) regulatory control. *Journal of Power sources* **135**, 135–151.
- [58] González, H. A., E. J. Adam y J. L. Marchetti (2008). Conditions for offset elimination in state space receding horizon controllers: A tutorial analysis. *Chemical Engineering and Processing* **47**, 2184–2194.
- [59] Green, T. y D. Britz (1986). Kinetics of the deuterium and hydrogen evolution reactions at palladium in alkaline solution. *Journal of Electroanalytical Chemistry* **412**, 59–66.
- [60] Harrington, D.A. y B.E. Conway (1987). Kinetic theory of the open circuit potential decay method for evaluation of behavior of adsorbed intermediates. analysis for the case of the H<sub>2</sub> evolution reaction. *Journal of Electroanalytical Chemistry* **221**, 1–21.
- [61] Henson, M.A. y D.E. Seborg (1997). *Nonlinear Process Control*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs.
- [62] Herstein, I.N. (1970). *Álgebra Moderna*. Editorial Trillas. México.
- [63] Hirsch, M. W. y S. Smale (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press. New York.
- [64] HIVInfoSource (2008). HIV treatment options. [www.hivinfosource.org](http://www.hivinfosource.org).
- [65] Hoffmann, C., J. K. Rockstroh y B. S. Kamps (2007). *HIV Medicine 2007*. Flying Publishers. <http://hivmedicine.com/hivmedicine2007.pdf>.
- [66] Howlett, P.G., P.J. Pudney y Xuan Vu (2009). Local energy minimization in optimal train control. *Automatica* **45**(11), 2692–2698.
- [67] Isidori, A. (1999). *Nonlinear Control Systems II*. Springer-Verlag. London.

- [68] Jacobson, N. (1974). *Basic Algebra I*. W.H. Freeman and Co. San Francisco, USA.
- [69] Jeffrey, A. M., X. Xia y I. K. Craig (2003). When to initiate HIV therapy: A control theoretic approach. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **50**(11), 1213–1220.
- [70] Johnson, M. O. y T. B. Neilands (2007). Coping with HIV treatment side effects: Conceptualization, measurement, and linkages. *AIDS and Behavior* **11**(4), 575–585.
- [71] Kalman, R. E., P. L. Falb y M. A. Arbib (1969). *Topics in Mathematical System Theory*. McGraw-Hill. New York.
- [72] Katok, A. y B. Hasselblatt (1999). *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press. Cambridge, U.K.
- [73] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. 3rd ed.. Prentice-Hall. Upper Saddle River, New Jersey.
- [74] Khotare, M., V. Balakrishman y M. Morari (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica* **32**(10), 1361–1379.
- [75] Kirschner, D. (1996). Using mathematics to understand HIV immune dynamics. *Notices of the AMS* **43**(2), 191–202.
- [76] Kirschner, D., S. Lenhart y S. Serbin (1997). Optimal control of the chemotherapy of HIV. *Journal of Mathematical Biology* **35**, 775–792.
- [77] Kiss, I.Z., V. Gáspár, L. Nyikos y P. Parmananda (1997). Controlling electrochemical chaos in the cooper-phosphoric acid system. *Journal of Physical Chemistry A*(101), 8668–8674.
- [78] Ko, J. H., W. H. Kim y C. C. Chung (2006). Optimized structured treatment interruption for HIV therapy and its performance analysis on controllability. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **53**(3), 380–386.
- [79] Kravaris, C. y R. Wright (1997). Two-degree-of-freedom output feedback controllers for nonlinear processes. *Chemical Engineering Science* **60**, 4323–4336.
- [80] Kumar, A. y P. Daoutidis (1999). *Control of Nonlinear Differential Algebraic Equations with Applications to Chemical Processes*. Chapman & Hall/CRC. London.
- [81] Lyons, L. (1999). The effect of high viral load on drug metabolism. En: *Proc. 39th Inter-science Conference on Antimicrobial Agents and Chemotherapy (ICAAC)*. San Francisco, USA. pp. 26–29. <http://www.catie.ca>.
- [82] Maeder, U., F. Borrelli y M. Morari (2009). Linear offset-free model predictive control. *Automatica* **45**(10), 2214–2222.

- [83] Magni, L., D.M. Raimonodo y F.. Allgöwer (2009). *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.
- [84] Marchetti, J. L. (2004). Referential process-reaction-curve for batch operations. *AIChE Journal* **50**, 3160–3168.
- [85] Marozzi, C.A., M.R. Canto, V. Costanza y A.C. Chialvo (2005). Analysis of the use of voltammetric results as a steady state approximation to evaluate kinetic parameters of the hydrogen evolution reaction. *Electrochimica Acta* **51**, 731–738.
- [86] Mhaweji, M. J., C. H. Moog, F. Biafore et al. (2010). Mathematical modeling of HIV dynamics after antiretroviral therapy initiation. *submitted to Biomedical Signal Processing and Control*.
- [87] Mhaweji, M. J., C. H. Moog, F. Biafore y C. Brunet-Franc (2009). Control of the HIV infection and drug dosage. *Biomedical Signal Processing and Control*. Early view doi:10.1016/j.bspc.2009.05.001.
- [88] Murphy, R. y D. Costagliola (2008). Increased cardiovascular risk in HIV infection: drugs, virus and immunity. *AIDS* **22**(13), 1625–1627.
- [89] Murray, R. (2010). *Optimization Based-Control*. California Institute of Technology. California. [http://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/Supplement:\\_Optimization-Based\\_Control](http://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/Supplement:_Optimization-Based_Control).
- [90] National Institute of Allergy and Infectious Diseases (2008). Treatment of hiv infection. [www.niaid.nih.gov/factsheets/treat-hiv.htm](http://www.niaid.nih.gov/factsheets/treat-hiv.htm).
- [91] Nordic Medical Research Council's HIV Therapy Group (1992). Double blind dose-response study of zidovudine in AIDS and advanced HIV infection. *British Medical Journal* **304**, 13–17.
- [92] Nowak, M. A. y R. M. May (1991). Mathematical biology of HIV infections-antigenic variation and diversity threshold. *Mathematical Biosciences* **106**, 1–21.
- [93] Nowak, M. A. y R. M. May (2000). *Virus Dynamics: Mathematical Principles of Immunology and Virology*. Oxford University Press Inc.. New York.
- [94] Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall.
- [95] Ouattara, D. A. y C. H. Moog (2007). Modeling of the HIV/AIDS infection: An aid for an early diagnosis of patients. En: *Biology and control theory: current challenges* (I. Queinnec et al., Eds.). Vol. 357. pp. 21–43. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

- [96] Perelson, A. S., D. E. Kirschner y R. De Boer (1993). Dynamics of hiv infection of cd4+ t-cells. *Mathematical Biosciences* **114**, 81–125.
- [97] Perelson, A. S. y P. W. Nelson (1999). Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo. *SIAM Review* **41**(1), 3–44.
- [98] Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze y E. F. Mischenko (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley. New York.
- [99] Qin, S.J. y T.A. Badgwell (2003). A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice* **11**, 733–764.
- [100] Rao, A. V. y K. D. Mease (1999). Dichotomic basis approach to solving hyper-sensitive optimal control problems. *Automatica* **35**, 633–642.
- [101] Rao, A. V. y K. D. Mease (2000). Eigenvector approximate dichotomic basis method for solving hyper-sensitive optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods* **21**, 1–19.
- [102] Richman, D. D. (2001). HIV chemotherapy. *Nature* **410**(6831), 995–1001.
- [103] Rivadeneira, P. S. y Adam E. J. (2010). Nonlinear fed-batch reactor pi control with constraints and noises. *ISA Transactions*.
- [104] Siegel, L. y W. El-Sadr (2006). New perspectives in HIV treatment interruption: The smart study. *The PRN Notebook* **11**(2), 8–9.
- [105] Sistu, P.B. y B.W. Bequette (1995). Model predictive control of processes with input multiplicities. *Chemical Engineering Science* **50**, 921–936.
- [106] Sontag, E. D. (1998). *Mathematical Control Theory*. second ed.. Springer. New York.
- [107] Srinivasan, B. y D. Bonvin (2006). Stability and controllability of batch processes. En: *Proceedings of the IFAC Symposium ADCHEM*. Gramado, Brasil. [http://infoscience.epfl.ch/record/76769/files/adchem06\\_keynote.pdf](http://infoscience.epfl.ch/record/76769/files/adchem06_keynote.pdf).
- [108] Stafford, M. A. et al. (2000). Modeling plasma virus concentration during primary HIV infection. *Journal of Theoretical Biology* **203**(3), 285–301.
- [109] Strogatz, S.H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Reading. Massachusetts.
- [110] Sussmann, H. J. (1976). Semigroup representations, bilinear approximations of input-output maps, and generalized inputs. *Springer Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **131**, 172–192.

- [111] U. S. Department of Health and Human Services (2005). “Side effects of anti-HIV medications”. [http://aidsinfo.nih.gov/contentfiles/SideEffectAnitHIVMeds\\_cbrochure\\_en.pdf](http://aidsinfo.nih.gov/contentfiles/SideEffectAnitHIVMeds_cbrochure_en.pdf).
- [112] U. S. Department of Health and Human Services (2008). “Guidelines for the use of antiretroviral agents in HIV-1-Infected adults and adolescents”. <http://www.aidsinfo.nih.gov/ContentFiles/AdultandAdolescentGL.pdf>.
- [113] Uppal, A., W. H. Ray y A. B. Poore (1974). On the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science* **29**, 967–985.
- [114] Zenchuk, A. I. y P. M. Santini (2007). *Dressing method based on homogeneous Fredholm equation: quasilinear PDEs in multidimensions*. <http://arxiv.org/pdf/nlin/0701031>.
- [115] Ziegler, J. G. y Nichols N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A.S.M.E.* (64), 759–769.