El Cálculo Integral

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
Marcela Hecklein

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL

Rector Enrique Mammarella
Director de Planeamiento y Gestión Académica Daniel Comba
Directora Ediciones UNL Ivana Tosti

. . . .

El cálculo integral / Adriana Engler ... [et al.]. -
1a ed . - Santa Fe : Ediciones UNL, 2019.
Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-137-1

1. Cálculo Integral. 2. Matemática. I. Engler,
Adriana
CDD 515.4

. . . .

Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Producción general
Ediciones UNL

—
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

. . . .

hdl.handle.net/11185/2301

El Cálculo Integral

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
Marcela Hecklein

A mi esposo, por su gran amor y paciencia
A mis hijas Larisa, Mailén y Leila
Adriana

A la memoria de Chuchi, mi madre
A mis hijos, María, Magdalena y Martín
Daniela

A Fernando, Melina y Roberto
Silvia

A Carlos y Martín
Marcela

No existe fenómeno en la naturaleza o en la sociedad que escape al fenómeno del cambio. El cálculo es la matemática del cambio, de la variación, de la transformación. Cuando se habla de cálculo, se incluye el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, dado que el primero se ocupa, básicamente, del estudio y las aplicaciones prácticas de razones de cambio, y el segundo ofrece métodos para la determinación de los resultados de estos cambios. A pesar de que la determinación de resultados totales de procesos de cambio (idea fundamental del Cálculo Integral) está presente de una u otra manera en la vida diaria, todo lo relacionado con él resulta muy abstracto y genera inconvenientes y problemas para su enseñanza y aprendizaje. Si bien el cálculo es un dominio donde la actividad matemática se apoya en gran medida en las competencias algebraicas, es necesaria la ruptura con una gran cantidad de prácticas netamente algebraicas para poder acceder a él. Todo esto resulta difícil pues los modos de razonamiento que subyacen a este trabajo son nuevos y las técnicas matemáticas utilizadas son delicadas.

Una de las expectativas de esta propuesta es que se logre interpretar el concepto de integral en diferentes ámbitos y utilizar la información que ésta provee sobre la función para resolver problemas. La conexión entre la expresión analítica de una función y su representación gráfica se utiliza para manipular los procesos de cambio. Buscamos destacar las ideas más importantes del cálculo integral, su potencia, sus conexiones y sus aplicaciones.

Si se enseña el cálculo con la rigurosidad y el formalismo como lo enfrentaron y desarrollaron originalmente Newton y Leibniz en el siglo XVII, o Cauchy, en el siglo XIX, seguramente no se alcanzarían a comprender las ideas fundamentales.

Nos proponemos presentar los principios del cálculo integral con un estilo informal apoyado en la motivación significativa, las explicaciones cuidadosas y numerosos ejemplos, incluyendo la resolución de problemas del mundo real. Consideramos importante el desarrollo intuitivo de muchos conceptos convencidas de que constituyen la base de un estudio más riguroso de leyes y procedimientos. Éste nos parece un camino adecuado para iniciar a los lectores en el Cálculo Integral y resulta una buena motivación para quienes deciden avanzar en los fundamentos teóricos. Aunque no realicemos la demostración de algunos teoremas y propiedades mostramos su utilidad en la demostración de otras, o sus aplicaciones e interpretación.

En esta obra buscamos abordar muchos de los temas propuestos por los reformadores del cálculo según un nuevo enfoque que permite el descubrimiento de los nuevos conceptos y las ideas que dieron origen a esta teoría tan útil e importante especialmente por las aplicaciones en diferentes ciencias. Presentamos una gran cantidad de aplicaciones a la economía, las ciencias biológicas, físicas y los negocios, las ciencias sociales y muchas áreas de interés general.

Relacionamos la teoría y la práctica (y las aplicaciones) organizando la enseñanza a partir de algunos problemas importantes, tratando de promover un enfoque constructivista del aprendizaje.

CARACTERÍSTICAS DE LA OBRA

El texto está diseñado para que el lector comprenda los conceptos y aprenda los procedimientos matemáticos involucrados. Los diferentes contenidos se presentan a partir de los conocimientos que poseen y van desde ejemplos concretos a reglas y fórmulas generales. Usamos vocabulario accesible y consistente lo que permite que se comprenda fácilmente su contenido.
La presentación y análisis de los nuevos temas se diseñó de modo que el proceso de aprendizaje se fundamente en la propia experiencia matemática previa del lector o en una nueva experiencia presentada antes de formalizarlo.
Si bien, no nos alejamos demasiado del contenido tradicional, en esta obra buscamos abordar muchos de los temas propuestos por los reformadores del cálculo según un enfoque nuevo, intuitivo que permite el descubrimiento de los nuevos conceptos y las nuevas ideas.

A lo largo de la misma se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- Los nuevos conceptos se presentan por medio de ejemplos que generan la necesidad de desarrollar nuevas técnicas.
- Un enfoque donde se desarrolla el concepto matemático para después reforzarlo con las aplicaciones.
- Un especial énfasis en la comunicación verbal de los conceptos matemáticos mediante la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje matemático y viceversa.
- Un cuidado especial en las explicaciones de los conceptos más difíciles teniendo en cuenta la necesidad de aplicar distintos caminos según el grado de dificultad. Se trata de guiar el proceso de pensamiento del alumno hacia la meta propuesta, trabajar en forma intuitiva una idea para formalizarla luego tratando de salvar todos los obstáculos.
- Presentación de la teoría con rigurosidad y precisión. En muchos casos, a fin de ganar en claridad, se presentan discusiones intuitivas informales.
- Motivación del alumno a través de valorar la necesidad de saber matemática para, mediante la resolución de problemas, enfrentarse a la futura vida profesional.
- Una gran cantidad y amplia variedad de aplicaciones y problemas para que los estudiantes asuman la utilización de todos los contenidos matemáticos que están aprendiendo.
- Utilización de representaciones gráficas convencidas de que quienes se enfrentan por primera vez a grandes desafíos matemáticos tienen dificultades y, sin embargo, el uso de los gráficos logra un efecto muy importante en la construcción del conocimiento.
- Uso del lenguaje gráfico, numérico y algebraico de manera indistinta.
- Diversas actividades de reflexión mediante el planteo de desafíos que actúan como disparadores para el análisis de una situación determinada que luego se formaliza.
- El planteo de “aprendizaje por descubrimiento” para propiciar el surgimiento de los nuevos contenidos y la construcción de los conocimientos necesarios para los nuevos tópicos. En esta sección se anticipan resultados que se van a desarrollar y se busca el reconocimiento de patrones.

ORGANIZACIÓN DE LA OBRA

En el desarrollo de los capítulos se incluyen las explicaciones teóricas con abundantes ejemplos y desarrollo de aplicaciones en el campo de la física, ingeniería, biología, economía, ciencias sociales, ecología, química, administración y ciencias naturales. Se presenta una gran cantidad de ejemplos y problemas resueltos a fin de que el alumno observe distintos detalles que aparecen en los mismos y que constituyen su quehacer matemático. Están considerados de manera gradual, según las dificultades. En primer lugar aparecen ejemplos rutinarios para adquirir destrezas, principalmente desde el punto de vista de la operatoria y, en un paso posterior, los de mayor dificultad.

En los mismos se presentan además:

- **Ejercicios** de aplicación del nuevo concepto desarrollado. Aparecen todas las respuestas de manera inmediata a fin de fijar los contenidos y poder avanzar con el desarrollo del tema.
- **Ejercicios integradores** de un tema. Están organizados según los diferentes temas que se presentan en cada capítulo. Se incluyen las respuestas de todos al final del libro.
- **Ejercicios de repaso** de cada uno de los capítulos. Se incluyen guías que reúnen numerosos ejercicios cuyas respuestas figuran al final del libro.
- **Problemas de aplicación.** Se incluyen problemas de aplicación de los diferentes contenidos. Los mismos están organizados por temas y por capítulo. Las respuestas se enuncian al final del libro.
- **Autoevaluaciones y pruebas de opción múltiple** para que, según los diferentes temas y capítulos el lector compruebe cómo avanza en la adquisición de los conocimientos y logre la seguridad de que ha alcanzado un buen grado de dominio de los diferentes temas desarrollados. Están integradas por novedosos enunciados y las respuestas se encuentran al final del libro.

En la sección "Al estudiante" que aparece en el libro Matemáticas para administración y economía de Margaret L. Lial y Thomas W. Hungerford (séptima edición, 2000) dice *"La clave para tener éxito en este curso es recordar que las matemáticas no son un deporte para espectadores. Usted no puede aprender matemáticas sin hacer matemáticas, de la misma manera que no puede aprender a nadar sin mojarse. Tiene que participar activamente usando todos los recursos a su disposición: su instructor, sus compañeros y este libro. No es posible que su profesor cubra todos los aspectos de un tema durante la sesión de clase. Simplemente usted no desarrollará el nivel de entendimiento necesario para tener éxito, a menos que lea el texto cuidadosamente... Debe tener un lápiz, papel y una calculadora a mano para resolver los problemas laterales, resolver los enunciados que no entienda y tomar notas sobre las cosas que necesita preguntar a sus compañeros o a su profesor."* Hacemos nuestras estas apreciaciones.

LAS AUTORAS

Desde el año 2005, cuando presentamos con muchas expectativas nuestro trabajo “El Cálculo Diferencial” recibimos numerosas muestras de aliento, sugerencias, comentarios y opiniones que nos motivaron a seguir trabajando, estudiando, discutiendo, debatiendo, descubriendo nuevas formas de enseñar y, principalmente, escribiendo sobre la otra rama del cálculo que completa nuestro trabajo. Hoy, "El Cálculo Integral" es una realidad que nos implica un nuevo desafío.

Este libro, como los anteriores que presentamos en la Serie Cátedra, surge de las experiencias obtenidas del trabajo continuo durante más de veinte años en el aula universitaria y de compartir el camino de enseñar y aprender matemática. Por esto, expresamos un especial agradecimiento a nuestros alumnos de Ingeniería Agronómica que, con todos sus comentarios, inquietudes, aportes, sugerencias y, por qué no, quejas, contribuyeron a mejorar nuestros apuntes de cátedra y a la realización de este trabajo.

También, queremos formular nuestro profundo agradecimiento a las autoridades de la Universidad Nacional del Litoral por permitir que sus docentes publiquen sus obras y, en especial, a las autoridades de la Facultad de Ciencias Agrarias por su aliento y apoyo permanentes.

No podemos dejar de agradecer a nuestros colegas, amigos, graduados y a todas aquellas personas que de una u otra manera nos ayudaron y alentaron a continuar con esta tarea docente.

Las críticas, observaciones, comentarios y sugerencias minuciosas y apasionadas de María Inés nos permitieron mejorar la presentación de los contenidos tanto en lo académico como en su diseño.

Gracias Daniel por acompañarnos y compartir con nosotras tus inquietudes.

Manifestamos especialmente un sincero y enorme "muchas gracias" a nuestras familias por su paciencia, la espera y la comprensión por tantas horas de ausencia.

Por último, nuestro profundo agradecimiento a las autoridades y personal del Centro de Publicaciones de la Universidad Nacional del Litoral por la confianza, el interés y la colaboración que recibimos para poder cumplir con nuestro objetivo: la producción de un texto de cátedra.

Adriana, Daniela, Silvia y Marcela

Contenido

1. IDEAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO INTEGRAL

1.1 El problema del área.

1.2 El problema de la distancia.

> "Así como los objetos más fáciles de ver no son los demasiado grandes ni los demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en matemáticas no son las demasiado complejas ni las demasiado simples".
>
> Bertrand Russell

Introducción

En el cálculo integral, así como en el cálculo diferencial, los conceptos fundamentales están presentes en las experiencias diarias.
Siempre que una magnitud varía en forma continua como ocurre en muchos de los fenómenos de la naturaleza, es posible calcular razones de cambio recurriendo al cálculo diferencial y a partir de la razón de cambio se puede encontrar, con los métodos del cálculo integral, la magnitud inicial. Por ejemplo, las lecturas de velocidad de un automóvil en distintos instantes de un intervalo dado permiten calcular la distancia recorrida en dicho intervalo de tiempo.
El cálculo integral permite encontrar, por ejemplo, la relación entre magnitudes que cambian según ciertas reglas, el cálculo de áreas bajo una curva, etc.

1.1 El problema del área

Probablemente se tiene una idea intuitiva de que el área de una figura geométrica es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada por dicha figura. El área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en que puede ser descompuesto y se puede demostrar que el área obtenida es independiente de cómo se descompuso el polígono en triángulos. Esta idea de trabajo es muy antigua y fue propuesta por primera vez por el sabio griego Antifón alrededor del año 430 a.C. y se conoce como el "método del agotamiento".
Un problema mucho más difícil es hallar el área de una figura curva. Arquímedes desarrolló un método sencillo que consiste en, dada una región cuya área se desea determinar, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea conocida o fácil de calcular. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor, continuándose el proceso tomando cada vez polígonos de mayor número de lados y que tiendan a llenar la región dada inicialmente. Al método se lo conoce como “método de exhaución”. Este método lo hace el precursor del cálculo integral.
Había sido usado ya anteriormente por Eudoxo, quien consiguió de esta manera encontrar la fórmula para calcular el área de un círculo.

Hasta aquí tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región y que calcular áreas de regiones con lados rectos resulta sencillo. También podemos observar, sin mayores inconvenientes, que:

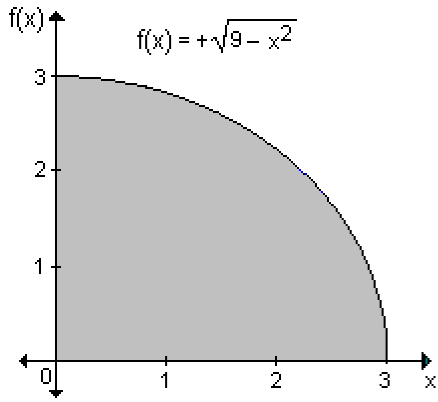
- el área de una región plana es un número (real) no negativo,
- regiones congruentes tienen áreas iguales,
- el área de la unión de dos regiones que se superponen sólo por un segmento es la suma de las áreas de las dos regiones; y
- si una región está contenida en una segunda el área de la primera es menor o igual que el área de la segunda.

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región limitada por lados que son curvos. El problema que comenzamos a tratar es hacer que esta idea sea precisa dando una buena y exacta definición de área.

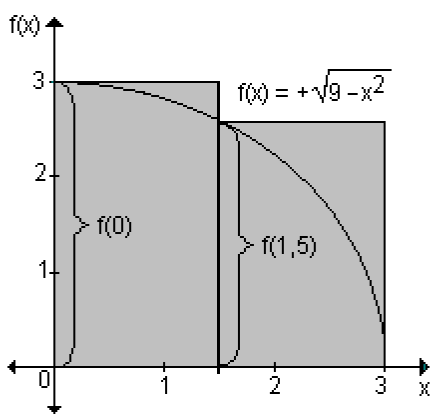
Aprendizaje por descubrimiento

¿Cómo podemos encontrar el área de una región limitada por una función y por los ejes coordenados positivos si conocemos la expresión analítica de la función?

Actividad. Calcule el área de la región representada gráficamente utilizando la fórmula del área de un círculo.



Teniendo en cuenta la forma de trabajo usada por Arquímedes una aproximación de esta región se puede encontrar usando rectángulos. Considere dos rectángulos.

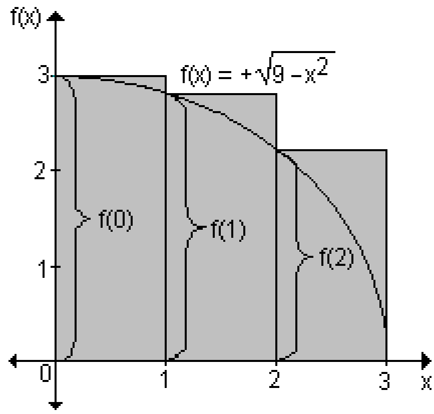


Complete la tabla:

Rectángulo	x	f(x)	Ancho de la base	Área	
1	0				
2	1,5				Área total

¿Cómo resulta esta aproximación con respecto al área real?

Divida el intervalo [0, 3] en tres partes iguales, cada uno de una unidad de ancho.

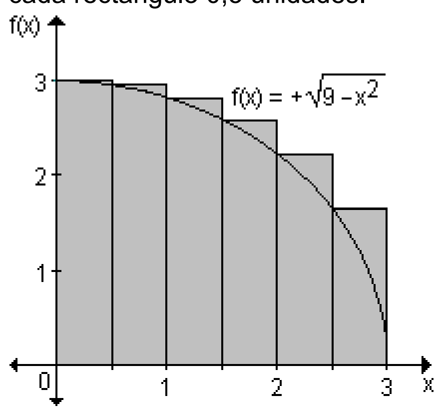


Complete la tabla:

Rectángulo	x	f(x)	Ancho de la base	Área	
1	0				
2	1				
3	2				Área total

¿Cómo resulta esta aproximación con respecto a la aproximación hecha anteriormente y al área real?

Divida el intervalo en seis partes con anchos iguales, es decir considere como medida de la base de cada rectángulo 0,5 unidades.



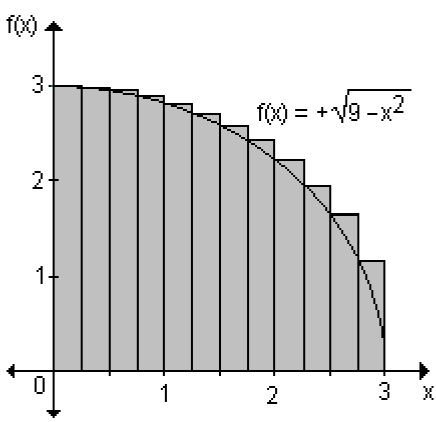
Complete la tabla:

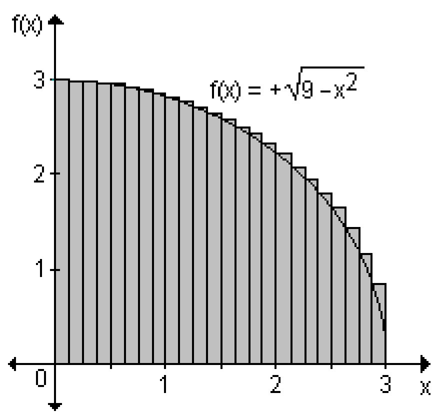
Rectángulo	x	f(x)	Ancho de la base	Área	
1	0				
2	0,5				
3	1				
4	1,5				
5	2				
6	2,5				Área total

Investigue por su cuenta qué hubiese pasado si se elige como altura el valor de la derecha o un punto intermedio del intervalo.

Este proceso de aproximar el área bajo una curva usando más y más rectángulos para obtener cada vez una mejor aproximación puede generalizarse. Para hacer esto podemos dividir el intervalo de $x = 0$ a $x = 3$ en n partes iguales. Cada uno de esos intervalos tiene ancho de medida $\frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ y la altura determinada por el valor de la función en el lado izquierdo del rectángulo es $f_i\left[\frac{3}{n}(i-1)\right]$ donde i = 1, 2 , 3, ..., n, indica el rectángulo considerado. Si utilizamos la computadora podemos realizar los cálculos tomando cada vez más rectángulos.

<table>
<tr><td>n</td><td>Área</td><td></td></tr>
<tr><td>150</td><td>7,09714349</td><td></td></tr>
<tr><td>2500</td><td>7,0703623</td><td></td></tr>
<tr><td>10000</td><td>7,069030825</td><td></td></tr>
<tr><td>45000</td><td>7,068683193</td><td></td></tr>
<tr><td>175000</td><td>?</td><td rowspan="2">¿debemos seguir haciendo tantos cálculos o intentamos buscar otra forma más sencilla para resolver este problema?</td></tr>
<tr><td>720000</td><td>?</td></tr>
</table>





Si visualizamos gráficamente esta situación, a medida que el número n de rectángulos es cada vez más grande la suma de sus áreas se acerca cada vez más al área real de la región.
Podemos decir que el área real es el límite de esas sumas cuando n crece indefinidamente, lo que puede escribirse:

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} (\text{suma de las áreas de los n rectángulos})$$

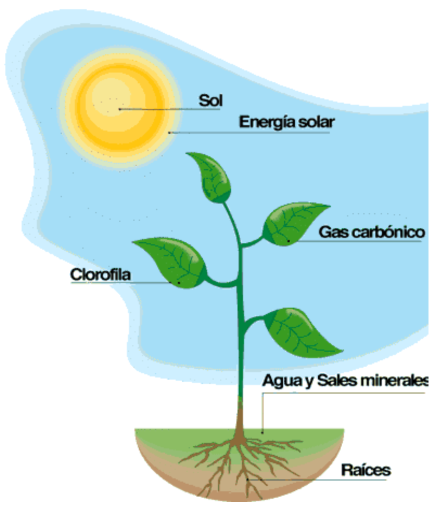
Si calculamos el área utilizando la fórmula del área de un círculo y teniendo en cuenta que el área sombreada es la cuarta parte del área del círculo de radio 3 con centro en el origen resulta:

$$\text{Área} = A = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi\, 3^2 \approx 7{,}068583471.$$

Nota. Para hallar el área debajo de una curva necesitamos resolver un tipo especial de límite que analizaremos más adelante.

Trabajamos en ciencias naturales. La fotosíntesis.

La fotosíntesis es la transformación de la energía lumínica en energía química. Su importancia no es de índole menor, pues prácticamente toda la energía consumida por la vida de la biosfera terrestre procede de la fotosíntesis. La fotosíntesis consta de dos etapas o fases: la *fase inicial* o *lumínica* y la *fase secundaria* u *oscura.*



Primera fase o lumínica: en ella participa la luz solar. La clorofila, que es una sustancia orgánica, capta la energía solar (luz) y ésta provoca la ruptura de la molécula de agua y se rompe el enlace químico que une el hidrógeno con el oxígeno. Debido a esto, se libera oxígeno hacia el medio ambiente. La energía no ocupada se almacena en una molécula especial llamada ATP. El hidrógeno que se produce al romperse la molécula de agua se guarda, al igual que el ATP, para ser ocupado en la segunda etapa de la fotosíntesis.

Segunda fase u oscura: en esta etapa no se ocupa la luz, a pesar de estar presente, dado que ocurre en los cloroplastos. El hidrógeno y el ATP, formados en la etapa lumínica, se unen con el CO_2 (anhídrido carbónico) y comienza a ocurrir una serie de reacciones químicas, en las cuales se van formando compuestos hasta llegar a formar la glucosa. Ésta participa en una serie de reacciones que llevan a la formación del almidón que también es un compuesto orgánico.

La fotosíntesis es seguramente el proceso bioquímico más importante de la biosfera por varios motivos:

- La *síntesis de materia orgánica* a partir de la inorgánica se realiza fundamentalmente mediante la fotosíntesis; luego irá pasando de unos seres vivos a otros mediante las cadenas tróficas, para ser transformada en materia propia por los diferentes seres vivos.
- Produce la *transformación de la energía luminosa en energía química*, necesaria y utilizada por los seres vivos.
- En la fotosíntesis se *libera oxígeno*, que será utilizado en la respiración aerobia como oxidante.

- La fotosíntesis fue causante del *cambio producido en la atmósfera primitiva*, que era anaerobia y reductora.
- De la fotosíntesis depende también la *energía almacenada en combustibles fósiles* como carbón, petróleo y gas natural.
- El equilibrio necesario entre seres autótrofos y heterótrofos no sería posible sin esta transformación.

Se puede concluir que la diversidad de la vida existente en la Tierra depende principalmente de la fotosíntesis.

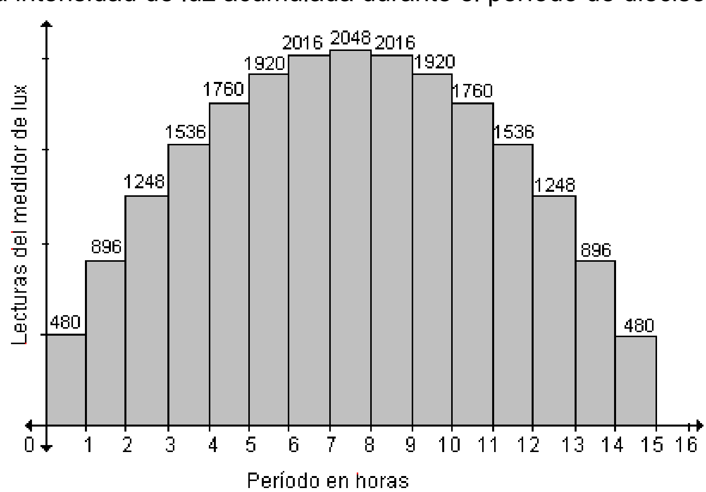
Podemos, después de algunas observaciones hechas sobre la fotosíntesis, decir que es un proceso mediante el cual una planta convierte luz en alimento. La producción de alimento por parte de una planta es una función de la cantidad de luz que recibe. El fotómetro registra (en lux) la intensidad de luz recibida por una planta en un cierto tiempo. La intensidad de luz acumulada se mide lux–hora.

En la siguiente tabla figura la magnitud de la intensidad de la luz, registrada en intervalos de una hora y obtenida de las lecturas de un fotómetro, considerando la hora cero, el amanecer.

Hora	*Intensidad de la luz en lux*	*Hora*	*Intensidad de la luz en lux*	*Hora*	*Intensidad de la luz en lux*
1	480	7	2016	13	1248
2	896	8	2048	14	896
3	1248	9	2016	15	480
4	1536	10	1920	16	0
5	1760	11	1760		
6	1920	12	1536		

(Datos obtenidos en “Cálculo Aplicado” de Baum y otros)

¿Cuál es la intensidad de luz acumulada durante el período de dieciséis horas?



En la gráfica aparecen los datos de la tabla suponiendo que la intensidad de la luz permanece constante en los intervalos de una hora entre dos mediciones consecutivas. La intensidad de la luz acumulada en cada período de una hora es el producto entre la lectura realizada en el fotómetro y el tiempo transcurrido.
De esta forma, para el período completo de dieciséis horas, la intensidad de luz acumulada es el área total, es decir, la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran.

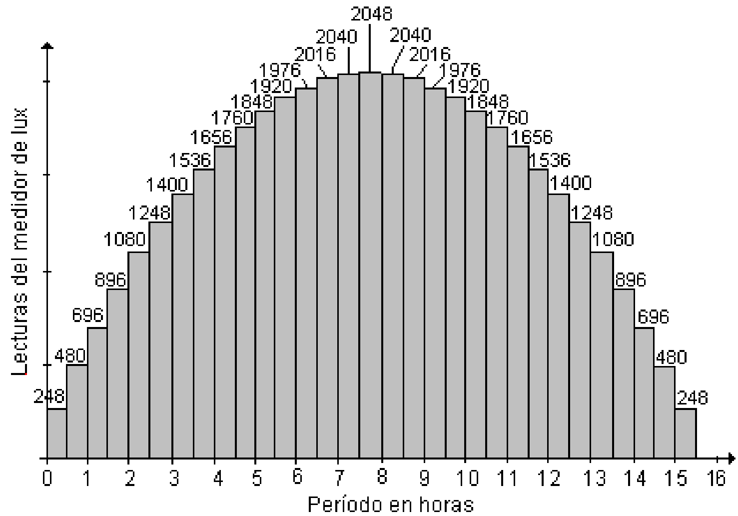
Intensidad de luz acumulada = área total = 480 . 1 + 896 . 1 + 1248 . 1 + 1536 . 1 + 1760 . 1 + + 1920 . 1 + 2016 . 1 + 2048 . 1 + 2016 . 1 + 1920 . 1 + 1760 . 1 + 1536 . 1 + + 1248 . 1 + 896 . 1 + 480 . 1 + 0 . 1 = 21760 lux–hora.

¿Podemos conocer con mejor precisión la intensidad de la luz acumulada?
Como la intensidad de la luz es una función continua en el tiempo, se puede establecer una aproximación más precisa de la intensidad de la luz acumulada, haciendo las mediciones en intervalos de 30 minutos (0,5 hora).
En la tabla siguiente se muestran en forma más detallada los datos y es posible hallar la intensidad de luz acumulada en cada período de media hora como el producto de la intensidad de la luz (en lux) y el tiempo, en este caso 0,5 hora. De esta forma podemos asegurar que la intensidad de luz acumulada durante las dieciséis horas resulta de resolver:

Luz acumulada = área total = suma del área de cada rectángulo

Rectángulo	Base	Altura	Área	Rectángulo	Base	Altura	Área
1	0,5	248	124	17	0,5	2040	1020
2	0,5	480	240	18	0,5	2016	1008
3	0,5	696	348	19	0,5	1976	988
4	0,5	896	448	20	0,5	1920	960
5	0,5	1080	540	21	0,5	1848	924
6	0,5	1248	624	22	0,5	1760	880
7	0,5	1400	700	23	0,5	1656	828
8	0,5	1536	768	24	0,5	1536	768
9	0,5	1656	828	25	0,5	1400	700
10	0,5	1760	880	26	0,5	1248	624
11	0,5	1848	924	27	0,5	1080	540
12	0,5	1920	960	28	0,5	896	448
13	0,5	1976	988	29	0,5	696	348
14	0,5	2016	1008	30	0,5	480	240
15	0,5	2040	1020	31	0,5	248	124
16	0,5	2048	1024	32	0,5	0	0
Área total = 21824							

Esto significa que la intensidad de luz acumulada durante el período de dieciséis horas es 21824 lux–hora.



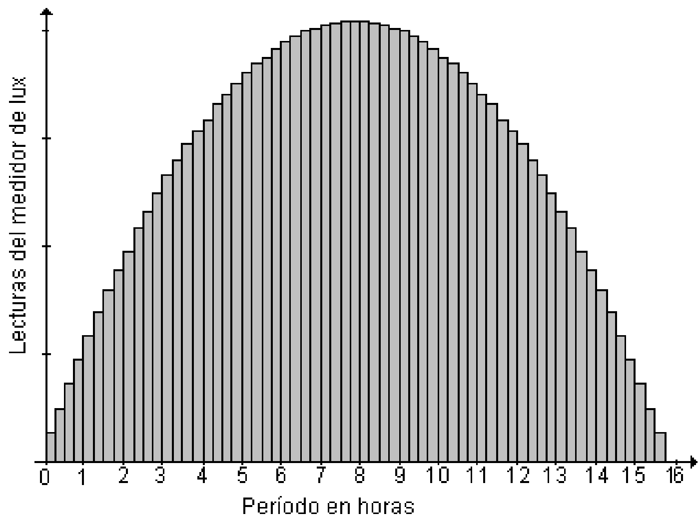
Si queremos encontrar una mejor aproximación a valor de intensidad de luz acumulada, así como lo hicimos en el caso anterior, podemos ahora considerar mediciones realizadas cada quince minutos, es decir 0,25 hora.

Estas mediciones son las que aparecen en la siguiente tabla y se visualizan gráficamente:

Hora	*Intensidad de la luz en lux*	Hora	*Intensidad de la luz en lux*	Hora	*Intensidad de la luz en lux*	Hora	*Intensidad de la luz en lux*
0,25	130	4,25	1590	8,25	2046	12,25	1470
0,5	248	4,5	1656	8,5	2040	12,5	1400
0,75	366	4,75	1710	8,75	2030	12,75	1326
1	480	5	1760	9	2016	13	1248
1,25	590	5,25	1804	9,25	1996	13,25	1164
1,5	696	5,5	1848	9,5	1976	13,5	1080
1,75	796	5,75	1884	9,75	1950	13,75	980
2	896	6	1920	10	1920	14	896
2,25	980	6,25	1950	10,25	1884	14,25	796
2,5	1080	6,5	1976	10,5	1848	14,5	696
2,75	1164	6,75	1996	10,75	1804	14,75	590
3	1248	7	2016	11	1760	15	480
3,25	1326	7,25	2030	11,25	1710	15,25	366
3,5	1400	7,5	2040	11,5	1656	15,5	240
3,75	1470	7,75	2046	11,75	1590	15,75	130
4	1536	8	2048	12	1536	16	0

Si reiteramos los cálculos realizados en los casos anteriores surge ahora que el área total, es decir, la suma de las áreas de cada uno de los rectángulos de base 0,25 y altura igual a la intensidad de la luz en cada período, es igual a 21826. Esto significa que la intensidad de luz acumulada llega a 21826 lux–hora.

Gráficamente se observa lo siguiente:



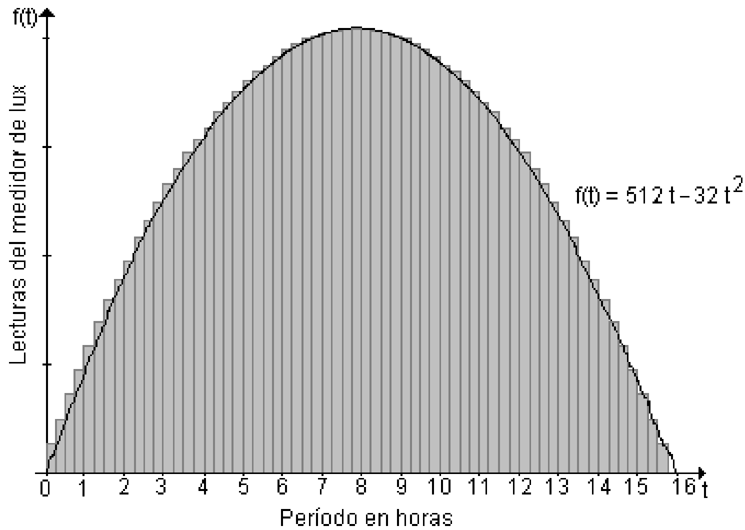
Es de esperar que, con intervalos más pequeños y más lecturas de medición del fotómetro, se obtenga una respuesta más precisa para estimar la intensidad de luz acumulada para las dieciséis horas. Aunque físicamente es prácticamente imposible obtener un número grande de medidas sería deseable que la suma tenga el mayor número de términos.

Hasta ahora se obtuvo una aproximación de la intensidad de la luz acumulada en un cierto experimento sobre fotosíntesis. La primera aproximación se obtuvo utilizando intervalos de una hora para un período de dieciséis horas, después se emplearon las lecturas observadas cada media hora y, por último, las realizadas cada quince minutos.

En cada caso los sumandos se obtuvieron multiplicando la longitud del intervalo de tiempo por la lectura del fotómetro al final de cada intervalo.

Observamos que el valor de la intensidad de la luz acumulada resulta más exacto a medida que hacemos más mediciones.

La gráfica de los datos sugiere, que se puede trazar una curva continua a través de los puntos que representan esos datos. Esa curva es $f(t) = 512\,t - 32\,t^2$, donde t es el tiempo en horas.



Podemos decir entonces, en nuestro problema de fotosíntesis, que el área comprendida entre el eje horizontal y la curva $f(t) = 512\,t - 32\,t^2$ representa la intensidad de la luz acumulada en el período desde $t = 0$ hasta $t = 16$. Pero ¿podemos obtener exactamente ese valor?
Se puede calcular el área total considerando el intervalo [0, 16] dividido en n subintervalos y calculando la suma de las áreas de cada uno de los rectángulos que la aproximan. La medida de la base de cada rectángulo es $\frac{16}{n}$ y como altura se puede considerar el valor de la función en el extremo derecho, en el extremo izquierdo o bien en algún punto de cada subintervalo.

Ya logramos aproximaciones del área considerando las sumas $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$ y sugerimos que la longitud de cada intervalo Δt se hiciera cada vez más pequeña (es decir, el número n de intervalos debe ser cada vez más grande). En ese caso la aproximación es mejor.
Parece razonable que el límite de la suma (cuando $\Delta t \to 0$ y, por lo tanto, $n \to \infty$) representaría el área total bajo la curva f(t), es decir, la intensidad de la luz acumulada durante las dieciséis horas.
Generalizando se puede considerar el intervalo total dividido en n subintervalos. La intensidad de la luz acumulada durante ese período será el límite de las sumas cuando n crece indefinidamente y coincide con el área de la región bajo la gráfica de la función.

$$\text{Intensidad de luz acumulada} = \lim_{n\to\infty} (\text{suma de las áreas de los rectángulos})$$

Nota. Para hallar resultados acumulados necesitamos resolver un tipo especial de límite.

Cálculo del área bajo una curva

Hasta el momento hemos desarrollado dos ejemplos con el objetivo de analizar el problema del área: el cálculo del área bajo la gráfica de $f(x) = +\sqrt{9 - x^2}$ de $x = 0$ a $x = 3$ y el cálculo de la intensidad de la luz acumulada.

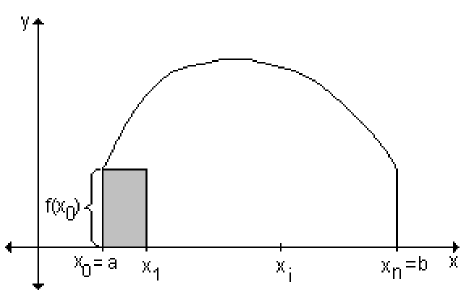
El problema general es encontrar el área entre la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Por ahora suponemos que $f(x) \geq 0$ y que f es continua en el intervalo [a, b].

Para aproximar el área se puede dividir la región bajo la curva en un número de rectángulos cada vez más grande. En cada caso la suma de las áreas de los rectángulos da una aproximación del área bajo la curva. Se obtienen mejores aproximaciones al incrementar el número n de rectángulos.

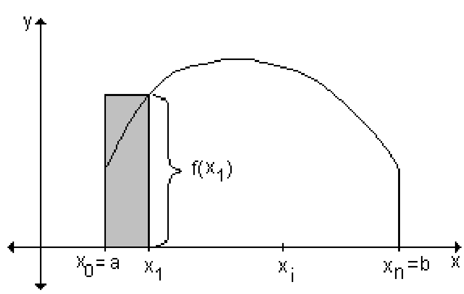
En general procedemos de la siguiente manera. Sea n un entero positivo. Dividimos el intervalo de a a b en n partes de igual longitud. El símbolo Δx se usa tradicionalmente para denotar la longitud de cada subintervalo. Como la longitud del intervalo dado es $(b - a)$, cada una de las n partes tiene longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, las cuales representan las medidas de las bases de todos los rectángulos.

Los puntos extremos de los n intervalos son $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

En cada rectángulo resulta: Área del i-ésimo rectángulo $= f(x_i)\,\Delta x$



Caso 1



Caso 2

El área total bajo la curva es aproximada por la suma de las áreas de todos los n rectángulos, es decir:

Caso 1: Área $\approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x$

Área $\approx [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_{n-1})]\,\Delta x$

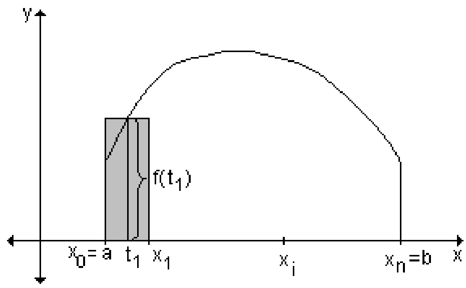
(si se utiliza el valor de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo)

Caso 2: Área $\approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n)\,\Delta x$

Área $\approx [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n)]\,\Delta x$

(si se utiliza el valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo)

También podemos elegir algún punto intermedio en cada uno de los n intervalos y los llamamos t_1, t_2, ..., t_n. En ese caso el área del i-ésimo rectángulo resulta $f(t_i)\ \Delta x$.



Caso 3

Caso 3: $\text{Área} \approx f(t_1)\ \Delta x + f(t_2)\ \Delta x + f(t_3)\ \Delta x + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(t_n)\ \Delta x$

$$\text{Área} \approx [f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(t_n)]\ \Delta x$$

(si se utiliza el valor de la función en cualquier punto de cada subintervalo)

El área se define como el límite de cada una de estas sumas (en caso de que las mismas existan) cuando el número de rectángulos se hace cada vez mayor y tiende a infinito (podemos pensar que la medida de la base de cada rectángulo es un punto).

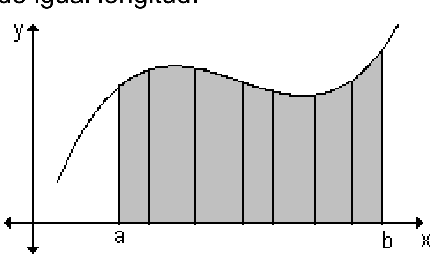
Definición. Dada una función f definida en el intervalo [a, b], si f es mayor igual que cero y continua en ese intervalo, el área de la región determinada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_{n-1})]\ \Delta x$$

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n)]\ \Delta x$$

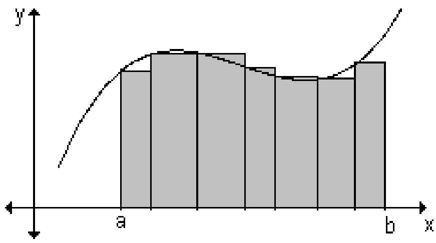
$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} [f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(t_n)]\ \Delta x$$

Nota. Consideramos subintervalos de igual longitud por conveniencia para realizar los cálculos. Sin embargo no es necesario que los intervalos sean todos de igual longitud.



Podemos estimar el área total hallando el área de cada una de las subregiones y sumando los resultados.

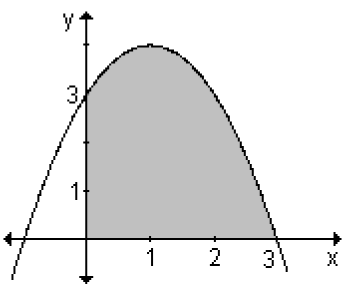
Para ello aproximamos también considerando rectángulos pero teniendo en cuenta que todos tienen distinta base.



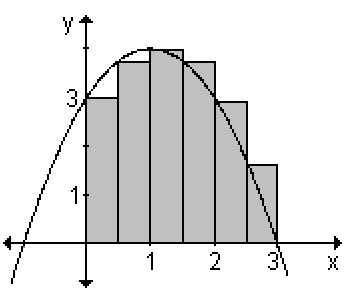
El área exacta será el límite de la suma de las áreas de todos los rectángulos. Para calcular el límite además de requerir que $n \to \infty$ se debe considerar que la longitud del subintervalo más largo tienda a cero.

Ejemplo. Encuentre el valor aproximado del área de la región que determina en el primer cuadrante la gráfica de $y = -x^2 + 2x + 3$ y el eje x utilizando 6 intervalos.

El primer paso es representar gráficamente la situación.

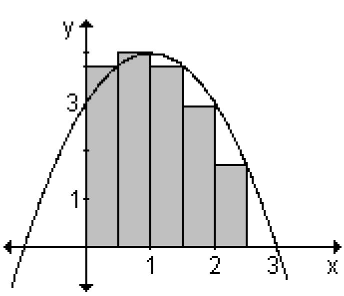


Debemos encontrar el valor aproximado del área de la región sombreada.
Dividiendo el intervalo [0, 3] en seis intervalos, la amplitud de cada uno de ellos es 0,5.
Elegimos como altura de cada rectángulo el valor de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo.



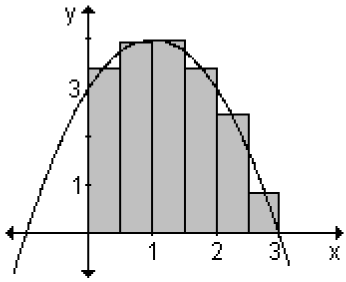
El área aproximada es la suma de las áreas de los rectángulos que quedan determinados.

$$\text{Área} \approx f(0).0,5 + f(0,5).0,5 + f(1).0,5 +$$
$$+ f(1,5).0,5 + f(2).0,5 + f(2,5).0,5 =$$
$$= [f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5)].0,5 =$$
$$= (3 + 3,75 + 4 + 3,75 + 3 + 1,75).0,5 = 9,625$$



Si se considera como altura de cada rectángulo el valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo, el área aproximada resulta:

$$\text{Área} \approx f(0,5).0,5 + f(1).0,5 + f(1,5).0,5 +$$
$$+ f(2).0,5 + f(2,5).0,5 + f(3).0,5 =$$
$$= [f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3)].0,5 =$$
$$= (3,75 + 4 + 3,75 + 3 + 1,75 + 0).0,5 = 8,125$$



Considerando como altura de cada rectángulo el valor de la función en un punto intermedio de cada subintervalo, el área aproximada resulta:
Área ≈ [f(0,2) + f(0,8) + f(1,2) + f(1,8) + f(2,2) + + f(2,8)].0,5 = (3,36 + 3.96 + 3,96 + 3,36 + 2,56 + + 0,76).0,5 = 8,98

Ejemplo. Halle la expresión para el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = e^x$ entre x = 0 y x = 2, con los puntos extremos de la derecha. No evalúe el límite.

Dividiendo el intervalo [0, 2] en n subintervalos, el ancho de uno es:

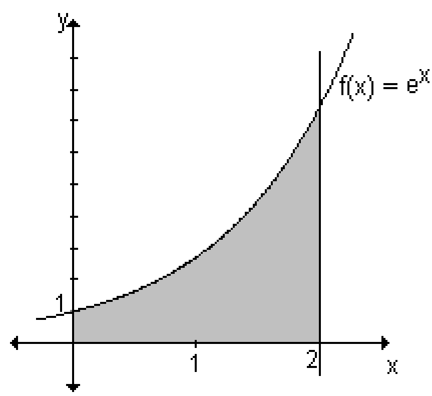
$\Delta x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$. Por lo tanto $x_1 = \dfrac{2}{n}$, $x_2 = \dfrac{4}{n}$, $x_3 = \dfrac{6}{n}$, $x_i = \dfrac{2i}{n}$, $x_n = \dfrac{2n}{n} = 2$.

El área de la región sombreada considerando como altura de cada rectángulo el valor de la derecha es:

$$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + f(x_n)]\,\Delta x$$

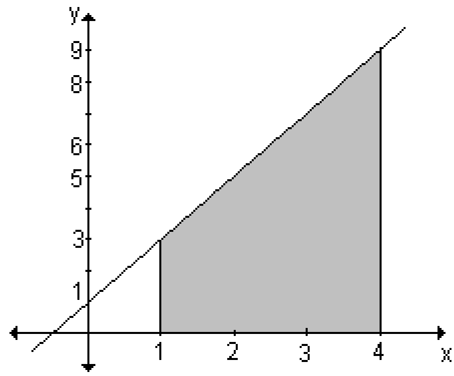
$$A = \lim_{n\to\infty} \left[e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \ldots + e^{x_n} \right].\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{6}{n}} + \ldots + e^{2} \right].\frac{2}{n}$$

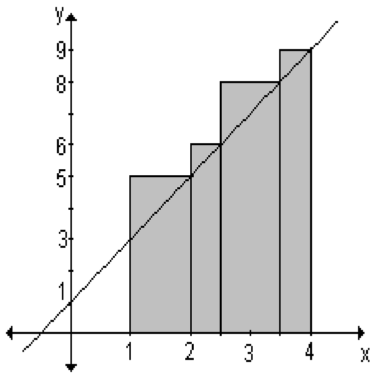


Ejemplo. Estime el área de la región bajo la gráfica de y = 2x + 1 entre x = 1 y x = 4, considerando los rectángulos de extremos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{5}{2}$, $x_3 = \dfrac{7}{2}$, $x_4 = 4$ y evaluando la función en el extremo derecho de cada intervalo.

El área buscada es la sombreada:



Subdividiendo en los intervalos pedidos resulta:



$$\text{Área} \approx f(2).(2-1) + f\left(\frac{5}{2}\right).\left(\frac{5}{2}-2\right) +$$

$$+ f\left(\frac{7}{2}\right).\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right) + f(4).\left(4-\frac{7}{2}\right) =$$

$$= 5.1 + 6.\frac{1}{2} + 8.1 + 9.\frac{1}{2} = 5 + 3 + 8 + \frac{9}{2} =$$

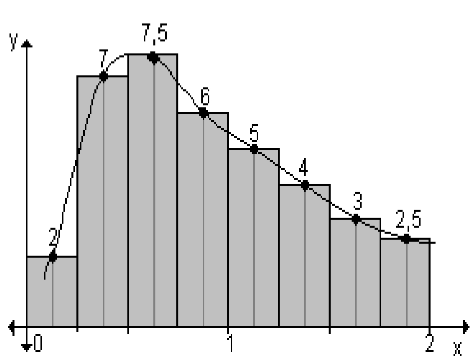
$$= \frac{41}{2} = 20{,}5$$

Como se puede observar en las gráficas esta aproximación es mayor que el área real. La medida real del área es 18 y la podemos calcular utilizando fórmulas geométricas.

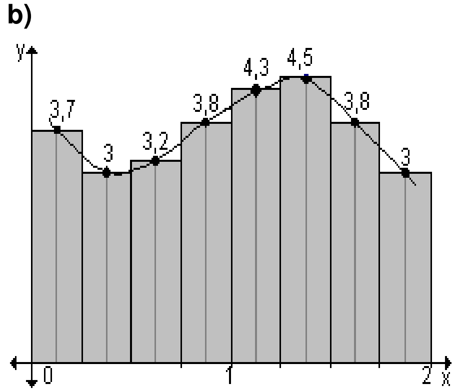
EJERCICIOS

1) La suma de las áreas de los rectángulos sombreados permite hallar una aproximación del área bajo la curva. Encuentre dicha aproximación utilizando los puntos medios de los intervalos como valores representativos.

a)



b)



2) Estime el área bajo la curva de la función y = f(x), teniendo en cuenta los pares de valores dados, usando:
a) evaluación en el extremo izquierdo,
b) evaluación en el extremo derecho.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
f(x)	1	1,2	1,4	1,6	2	2,2	2	1,6

3) Estime el área bajo la curva de la función y = f(x), teniendo en cuenta los pares de valores dados, usando:
a) evaluación en el extremo izquierdo,
b) evaluación en el extremo derecho.

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
f(x)	5	4,5	4,2	4	3,5	3,7	4	4,3

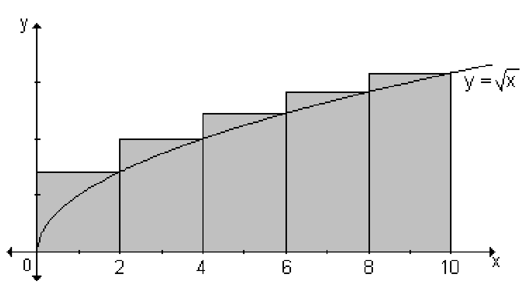
4) A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, use 5 rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área debajo de la gráfica de f(x) en [0, 10]. Repita el procedimiento usando 10 rectángulos. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación.

5) Dibuje la región determinada por la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ y el eje x, desde $x = -1$ hasta $x = 2$. Estime su área usando:
i) los puntos extremos de la izquierda,
ii) los puntos extremos de la derecha,
iii) los puntos medios de cada intervalo.
Considere **a)** tres intervalos, **b)** seis intervalos. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación en cada caso.

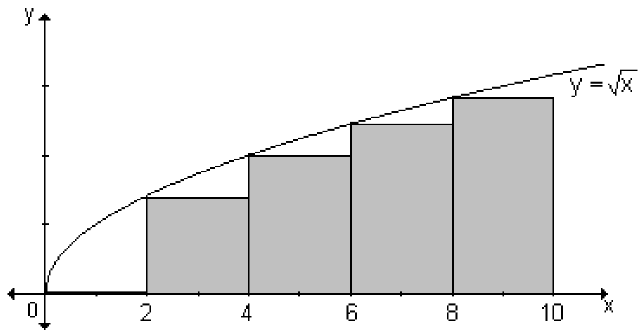
RESPUESTAS

1)a) 9,25 **b)** 7,325 **2)a)** 1,14 **b)** 1,2 **3) a)** 5,78 **b)** 5,64

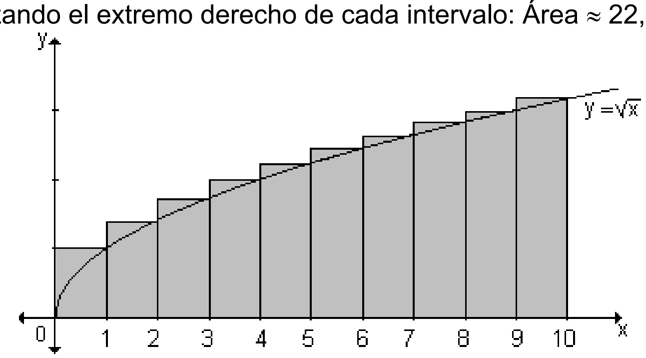
4) Con cinco intervalos:
Utilizando el extremo derecho de cada intervalo: Área ≈ 23,71



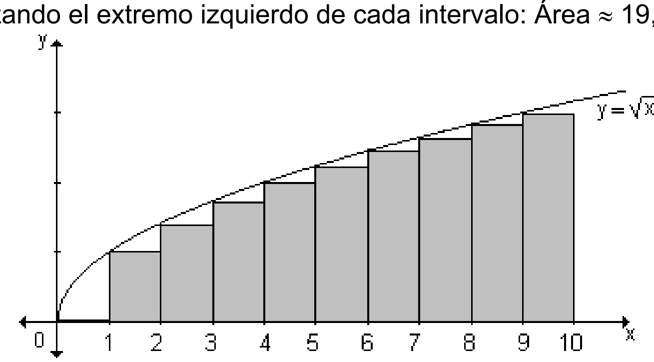
Utilizando el extremo izquierdo de cada intervalo: Área ≈ 17,38



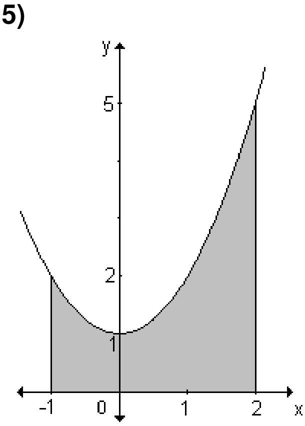
Con diez intervalos:
Utilizando el extremo derecho de cada intervalo: Área ≈ 22,47



Utilizando el extremo izquierdo de cada intervalo: Área ≈ 19,31

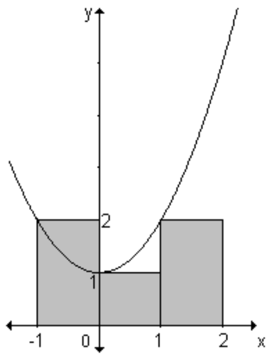


5)

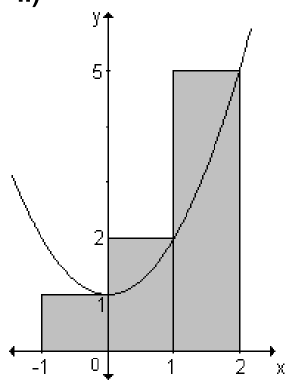


a) Con tres intervalos:
i) tomando el extremo izquierdo de cada intervalo: Área ≈ 5
ii) tomando el extremo derecho de cada intervalo: Área ≈ 8
iii) tomando el punto medio de cada intervalo: Área $\approx \frac{23}{4} = 5{,}75$

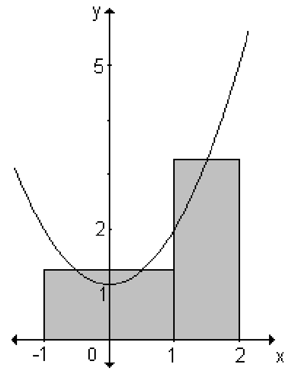
i)



ii)



iii)



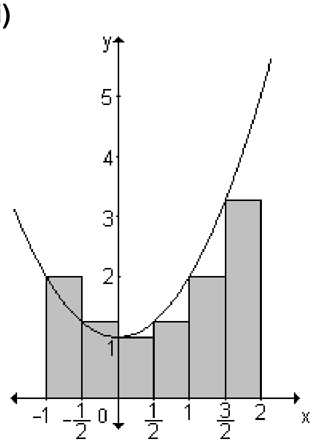
b) Con seis intervalos:

i) tomando el extremo izquierdo de cada intervalo: Área $\approx \dfrac{43}{8} = 5{,}375$

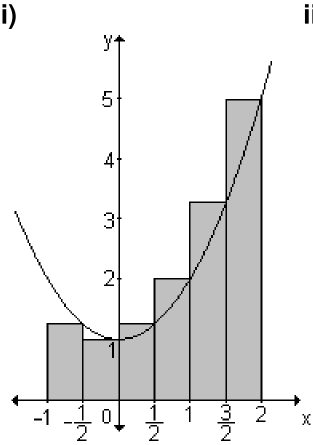
ii) tomando el extremo derecho de cada intervalo: Área $\approx \dfrac{55}{8} = 6{,}875$

iii) tomando el punto medio de cada intervalo: Área $\approx \dfrac{95}{16} = 5{,}9375$

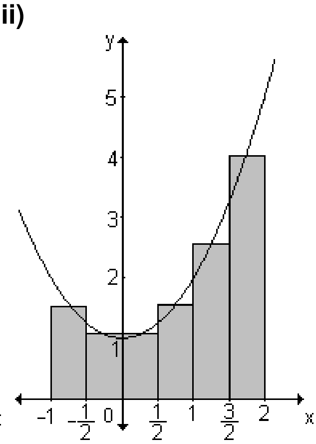
i)



ii)



iii)



1.2 El problema de la distancia

La idea fundamental del cálculo integral es la determinación de resultados o efectos de procesos de cambio. Mientras que en el cálculo diferencial nos interesa el cambio instantáneo de una magnitud, el cálculo integral permite determinar los resultados totales de estos procesos de cambio. A partir del conocimiento del cambio en un instante determinado en un cierto proceso es posible hacer la suma de los cambios durante un intervalo más largo y determinar el resultado.

Conocer los resultados totales de procesos de cambio es muy importante para hacer predicciones. Por ejemplo, el conocimiento de las tasas instantáneas de consumo es fundamental en la planeación de la producción de materias primas.

Podemos, por ejemplo, contestar preguntas como:

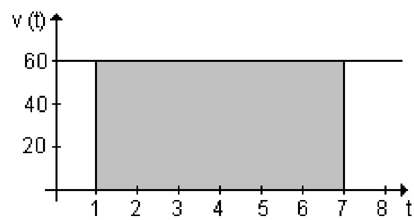
- Si se conoce la velocidad en determinado intervalo de tiempo, ¿cómo calculamos la distancia total recorrida en dicho intervalo?
- Si se conoce el costo marginal, ¿cómo calculamos el costo total o el costo acumulado de producir cierta cantidad de unidades?

La velocidad de una partícula o de un móvil es la razón de cambio del espacio recorrido con respecto al tiempo. Consideremos el problema de hallar la distancia recorrida por un móvil durante cierto período si se conoce la velocidad del objeto en todos los momentos.

Aprendizaje por descubrimiento

Situación 1. El cálculo de la distancia recorrida con velocidad constante en determinado intervalo de tiempo.

Suponga que un auto viaja a lo largo de un camino recto a velocidad constante de 60 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre el auto entre $t = 1$ y $t = 7$, siendo t el tiempo expresado en horas? ¿Qué relación existe entre la distancia recorrida y el área del rectángulo sombreado?



Situación 2. El cálculo de la distancia recorrida con velocidades constantes en intervalos de igual longitud.

La tabla muestra las diferentes velocidades que alcanza una persona que transita en bicicleta por una ruta en la provincia de Santa Fe. Suponemos que en cada intervalo de tiempo la velocidad se mantiene constante.

Hora	Velocidad (km/h)
9 - 10	14
10 - 11	12
11 - 12	8
12 - 13	Descanso
13 - 14	12
14 - 15	10

Considerando $t = 0$ el momento en el que comienza el viaje, complete la tabla y determine la distancia que recorrió el ciclista en cada intervalo de tiempo y la distancia acumulada.

Hora	Tiempo constante en horas	Velocidad promedio	Distancia recorrida por intervalo	Distancia acumulada
9 - 10	1			
10 - 11	1			
11 - 12	1			
12 - 13	1			
13 - 14	1			
14 - 15	1			

Grafique la distancia en función del tiempo. ¿Cuántos kilómetros recorrió al final de su paseo, es decir, cuál es la distancia total recorrida?
En la gráfica de la distancia en función del tiempo, el último punto, ¿qué representa?
Grafique la velocidad en función del tiempo. ¿Qué representa el área de la región que queda determinada entre dicha gráfica y el eje x?

Situación 3. El cálculo de efectos de cambio con razones de cambio constantes en intervalos de distinta longitud.
Una familia viaja desde una ciudad a otra y en su diario de viaje escriben una serie de datos a fin de compartir con sus amigos algunos detalles del mismo. En la primera hoja construyen una tabla donde registran toda la información del desarrollo del viaje y los lugares por donde pasaron.

Lugar	Ciudad A	Parador 1	Parador 2	Ciudad B
Hora	10	11	11:30	12:15
Velocidad	30 km/h	45 km/h	40 km/h	

Consideramos $t = 0$ el momento en el que comienza el viaje.
Complete la siguiente tabla para calcular la distancia total recorrida por la familia.

Hora	Tiempo (en horas)	Velocidad (en km/h)	Distancia recorrida en el intervalo (en km)	Distancia total acumulada (en km)
10 - 11	1			
11 - 11:30	0,5			
11:30 - 12:15	0,75			

Grafique la velocidad y la distancia recorrida en función del tiempo.

Situación 4. El cálculo de la distancia recorrida con velocidades variables
Supongamos que el marcador de la distancia recorrida del automóvil de Juan no funciona y desea estimar la distancia recorrida en 30 minutos. Para eso, observa el velocímetro y anota en una tabla las lecturas realizadas cada cinco minutos.

Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (km/h)	72	84	66	69	78	60	75

Para trabajar el tiempo y la velocidad en unidades que sean coherentes convertimos las diferentes lecturas de la velocidad en kilómetros por minuto (km/min).

Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (km/min)	1,2	1,4	1,1	1,15	1,3	1	1,25

Estime la distancia recorrida durante ese tiempo. Complete la tabla dividiendo el intervalo de treinta minutos en seis subintervalos de igual amplitud y suponiendo que la velocidad se mantiene constante en cada intervalo. Considere la velocidad en el extremo izquierdo como valor representativo de todo el intervalo (por ejemplo, en el primer intervalo, [0,5), la velocidad es 1,2 Km/min.).

Intervalo	Distancia (en kilómetros)
1	$1{,}2 \cdot 5 = 6$
2	
3	
4	
5	
6	
Distancia total recorrida:	

Represente gráficamente la velocidad en función del tiempo, ¿qué podemos decir con respecto a la distancia y el área de los rectángulos de base igual a la longitud de cada intervalo y altura coincidente con el valor conocido de la velocidad en cada uno de ellos?

Situación 5. El cálculo de la distancia recorrida con velocidades variables. Se conoce la relación funcional que vincula la velocidad con el tiempo.

Un joven entrena para su competencia en los próximos juegos deportivos de la ciudad en una bicicleta fija durante una hora cada día de modo que en cualquier tiempo t, medido en horas, su velocidad es $v(t) = 36t^2 + 3$ kilómetros por hora. Encuentre la distancia ficticia recorrida por el ciclista durante su hora de entrenamiento.

Compartimos nuestras conclusiones

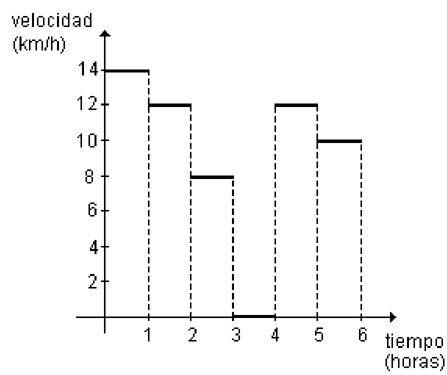
En la situación 1, si el auto viaja a una velocidad constante de 60 km/h, al cabo de 6 horas de trayectoria, habrá recorrido 360 km.

En la representación gráfica observamos que 360 es el área del rectángulo sombreado, es decir el área bajo la gráfica de la función velocidad v(t) entre $t = 1$, $t = 7$ y el eje t.

Sabemos que la función velocidad v(t) es la razón de cambio de la función que indica el espacio o distancia recorrida por el auto en el tiempo t. El espacio recorrido desde el tiempo $t = 1$ a $t = 7$ es la cantidad que la distancia ha cambiado desde $t = 1$ a $t = 7$. Podemos decir que el cambio total de la distancia de t = 1 a t = 7 es el área bajo la gráfica de la función velocidad entre esos valores. El área del rectángulo cuya altura representa la velocidad y la base el tiempo, se interpreta como una distancia.

En la situación 2, interesa conocer la distancia recorrida en cada instante y la distancia total recorrida.
Se puede pensar, utilizando el lenguaje del cálculo, que interesa no sólo los "efectos de los cambios" sino también el "efecto total".
La distancia total recorrida en un intervalo se obtiene multiplicando la velocidad en dicho intervalo por la amplitud del intervalo.
La distancia total recorrida por el ciclista entre las 9 y las 15, se obtiene sumando los productos de las velocidades (razón de cambio de la posición de la bicicleta) en cada intervalo por el tiempo transcurrido (amplitud del intervalo).

$$\text{Distancia} = 14\frac{km}{h}.1h + 12\frac{km}{h}.1h + 8\frac{km}{h}.1h + 12\frac{km}{h}.1h + 10\frac{km}{h}.1h = 56\text{ km.}$$



En la gráfica de la velocidad en función del tiempo, el área de cada rectángulo comprendido entre la gráfica y el eje x, representa la distancia recorrida en el intervalo de tiempo correspondiente. El área total, la suma de las áreas de los rectángulos, indica la distancia total recorrida.

En la situación 3, podemos formalizar el procedimiento y generalizarlo utilizando simbología adecuada.

Longitud del intervalo	Velocidad constante en cada intervalo	Distancia recorrida en cada intervalo	Distancia total recorrida (distancia acumulada)
$t_1 - t_0 = \Delta t_1$	v_1	$d_1 = v_1 \,.\, \Delta t_1$	$d_t = d_1$
$t_2 - t_1 = \Delta t_2$	v_2	$d_2 = v_2 \,.\, \Delta t_2$	$d_t = d_1 + d_2$
$t_3 - t_2 = \Delta t_3$	v_3	$d_3 = v_3 \,.\, \Delta t_3$	$d_t = d_1 + d_2 + d_3$

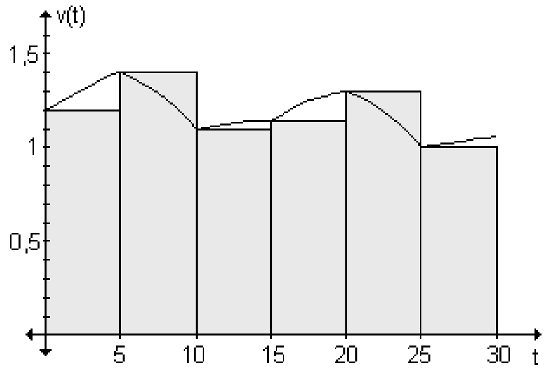
Este cálculo se puede generalizar para un número n de intervalos de la siguiente manera:

$$d_t = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n = v_1 .\Delta t_1 + v_2 .\Delta t_2 + v_3 .\Delta t_3 + \ldots\ldots + v_n .\Delta t_n$$

$$\text{Distancia} = 1{,}2\frac{\text{km}}{\text{min}} \,.\, 5\text{min} + 1{,}4\frac{\text{km}}{\text{min}} \,.\, 5\text{min} + 1{,}1\frac{\text{km}}{\text{min}} \,.\, 5\text{min} + 1{,}15\frac{\text{km}}{\text{min}} \,.\, 5\text{min} +$$

$$+ 1{,}3\frac{\text{km}}{\text{min}} \,.\, 5\text{min} + 1\frac{\text{km}}{\text{min}} \,.\, 5\text{min} = 35{,}75 \text{ km}$$

Representamos la velocidad en función del tiempo y dibujamos los rectángulos .



El área del primer rectángulo calculada como "medida de la base por medida de la altura" (1,2 . 5 = 6) coincide con la distancia recorrida en los primeros cinco minutos, si tomamos la velocidad inicial como constante en todo el intervalo (según los primeros cálculos).

Podemos interpretar el área de cada rectángulo como una distancia dado que la altura representa la velocidad y la base, el tiempo. La suma de las áreas de todos los rectángulos es 35,75 y coincide con la primer estimación realizada de la distancia total recorrida.

Obtuvimos una estimación de la distancia buscada. Si quisiéramos una estimación más exacta podríamos tomar las lecturas de la velocidad cada dos minutos, un minuto, treinta segundos, diez, cinco, tres, dos, uno o fracciones de segundo cada vez más pequeñas. Es decir, para una mejor estimación debemos considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños y la cantidad de sumandos en el cálculo de la distancia acumulada será cada vez mayor.

De la misma manera podemos hacer el análisis tomando la velocidad final de cada intervalo o bien la velocidad en un tiempo intermedio.

Si conocemos la ley que relaciona la velocidad con el tiempo, como en la situación 5, debemos evaluar la velocidad en instantes igualmente espaciados y considerar la velocidad constante en los subintervalos que quedan determinados.

En general, si un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, siendo $f(t) \geq 0$ (de manera que el objeto se mueve siempre en la dirección positiva), la distancia recorrida en cada intervalo resulta $d_i = v_i \,.\, \Delta t$

La distancia total recorrida, es decir los resultados acumulados para razones de cambio variables (velocidad) es aproximadamente,

$d_t \approx v_1 \,.\, \Delta t + v_2 \,.\, \Delta t + v_3 \,.\, \Delta t + \dots\dots\dots + v_n \,.\, \Delta t$, donde Δt es la amplitud del intervalo.

Cuanto mayor es la frecuencia con que se mide la velocidad, más exacta es la aproximación. Considerando Δt cada vez más pequeño, la cantidad n de intervalos tiende a infinito y la distancia total recorrida es el límite de esas sumas.

Distancia total recorrida $= d_t = \lim\limits_{n\to\infty}\left(v_1\Delta t + v_2\Delta t + ... + v_n\Delta t\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[v_i\Delta t\right]$

donde v_i puede ser la velocidad al inicio, al final o en un tiempo intermedio en cada uno de los subintervalos considerados.

Nota. Para hallar la distancia recorrida por un móvil, si se conoce la velocidad del mismo en todos los momentos, necesitamos resolver un tipo especial de límite.
Este límite tiene la misma forma que los encontrados para calcular el área debajo de la gráfica de una función. La distancia total recorrida es igual al área debajo de la gráfica de la función velocidad.

Todo lo visto para la función que describe la velocidad se verifica para cualquier función que expresa una razón de cambio. Es posible enunciar la siguiente definición:

Cambio total en F(x). Sea f una función continua sobre el intervalo [a, b] y $f(x) \geq 0$ para todo x en [a, b]. Si f(x) es la razón de cambio de una función F(x) entonces el cambio total en F(x) cuando x pasa de a a b es el área entre la gráfica de f(x) y el eje x entre $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo. La tasa de aumento de empleos, en miles de personas al año, para cierta ciudad desde 2000 hasta 2005 está dada por el modelo $C(t) = 25t^2 - 12t$, donde t es la cantidad de años desde 2000. Estime el cambio en la cantidad de personas empleadas desde 2002 ($t = 2$) hasta 2005 ($t = 5$), considerando seis subintervalos y evaluando en el extremo izquierdo de los mismos. Interprete gráficamente.

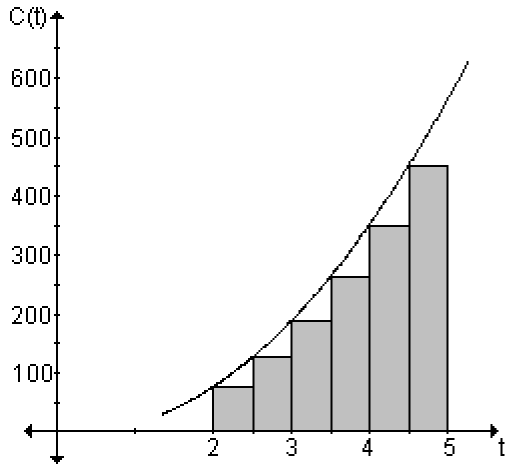
Considerando 6 subintervalos de amplitud 0,5, obtenemos:

t	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
C(t)	76	126,25	189	264,25	352	452,25	565

Entonces, el cambio total en la cantidad de personas empleadas es aproximadamente (76 + 126,25 + 189 + 264,25 + 352 + 452,25).0,5 = = 1459,75 . 0,5 = 729,875.

El cambio total es de aproximadamente 729 875 personas.

Gráficamente:



Nota. Los dos procedimientos, calcular el área debajo de la curva y calcular el efecto total de cambios, son exactamente los mismos.
Ésta es la idea fundamental del cálculo integral: el área debajo de una curva se puede aproximar por rectángulos de cada vez menor amplitud y esta aproximación se puede hacer tan exacta como queramos.

EJERCICIOS

1) Un auto recorrió un tramo sinuoso de un camino. Como el velocímetro funciona pero no el contador de kilómetros, se registró la velocidad del auto a intervalos de 10 segundos según muestra la tabla. Aproxime la longitud del camino utilizando:
a) los valores en los extremos izquierdos,
b) los valores en los extremos derechos.

Tiempo(en segundos)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Velocidad (en m/seg)	0	13	5	12	10	15	12	5	7	8	15	10	12

2) En la tabla se dan las velocidades de un auto que acelera de 0 a 120 $\frac{km}{h}$ en 36 segundos, o sea 0,010 horas o 10 milésimas de hora.

Tiempo (en horas)	Velocidad (en $\frac{km}{h}$)
0	0
0,001	30
0,002	45

0,003	65
0,004	78
0,005	88
0,006	96
0,007	102
0,008	110
0,009	115
0,010	120

a) Aproxime la distancia recorrida durante los 36 segundos utilizando los valores en los extremos izquierdos.
b) ¿Cuántos segundos necesitó el auto para llegar a la mitad del recorrido? ¿A qué velocidad iba el auto en ese instante?

RESPUESTAS
1)a) La longitud del camino es aproximadamente 1120 metros.
b) La longitud del camino es aproximadamente 1240 metros.
2)a) La distancia recorrida fue de aproximadamente 0,729 kilómetros, es decir, 729 metros.
b) Le llevó entre 0,005 y 0,006 horas, es decir entre 18 y 21 segundos aproximadamente. El auto iba a una velocidad entre 88 y 96 $\frac{km}{h}$.

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.1 EL PROBLEMA DEL ÁREA - 1.2 EL PROBLEMA DE LA DISTANCIA

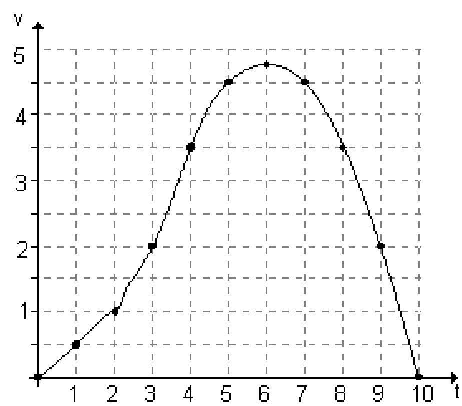
1) El número de litros de sangre que el corazón bombea en un minuto se llama rendimiento cardíaco. Para medir el rendimiento cardíaco existe un método de dilución de colorante en el cual se inyectan de 5 a 10 mg. de colorante en una vena principal, cerca del corazón. El colorante llega al lado derecho del corazón y es bombardeado a través de los pulmones y hacia afuera del lado izquierdo del corazón a la aorta, donde su concentración puede medirse cada pocos segundos de acuerdo la sangre fluye. Para calcular el rendimiento cardíaco se divide la cantidad de colorante por el área que está bajo la curva de la concentración de colorante y se multiplica el resultado por 60 (segundos / minuto).

$$\text{Rendimiento cardíaco} = \frac{\text{cantidad de colorante}}{\text{área bajo la curva}} . 60$$

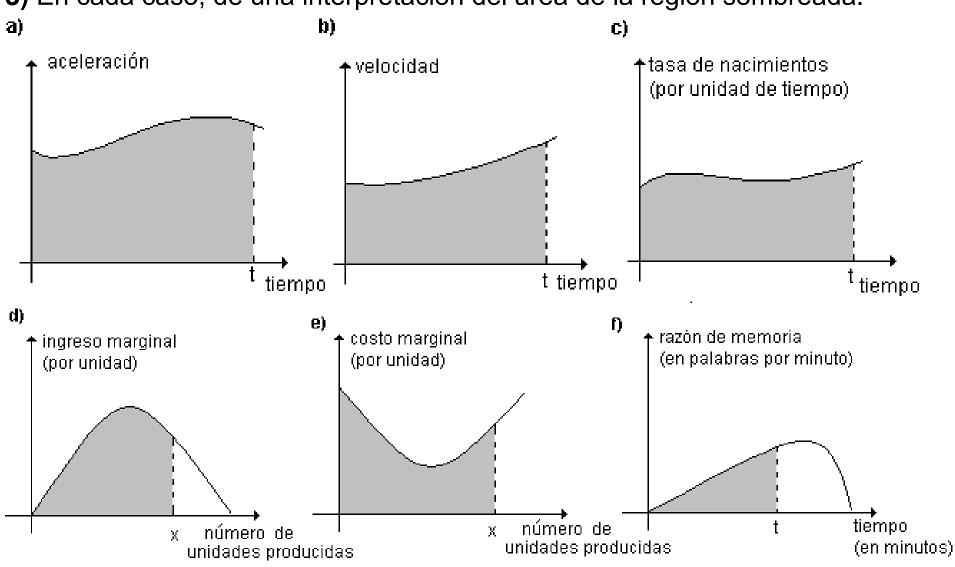
Se administró a un paciente 5 mg. de colorante. La siguiente tabla da las concentraciones de colorante(en mg/litro) a partir del momento de la inyección. Realice una gráfica con los datos, considerando como t = 0 el momento de la inyección y conectando los puntos con una curva suave. Use rectángulos para aproximar el área bajo la curva de concentración de colorante y después aproxime el rendimiento cardíaco del paciente.

Segundos después de la inyección (t)	Concentración de colorante (c)
2	0
4	0,5
6	1,3
8	2,7
10	3,6
12	4
14	3,7
16	2,78
18	1,8
20	1,2
22	0,5
24	0

2) La gráfica muestra la velocidad (en m / seg.) de un objeto en movimiento rectilíneo desde t = 0 hasta t = 10 segundos. Aproxime la distancia recorrida por el objeto en los 10 segundos.



3) En cada caso, dé una interpretación del área de la región sombreada.



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Una empresa telefónica ofrece un sistema por el cual, al hacer una llamada, el costo marginal del t–ésimo minuto de la llamada es $c(t) = \dfrac{10}{t+50}$ dólares por minuto. Se quiere determinar el costo de una llamada de 10 minutos.

a) ¿Cuál es el costo marginal al inicio de la llamada? Suponiendo que ese costo se mantiene constante durante toda la llamada, ¿cuál sería el costo de la misma?

b) ¿El costo marginal se mantiene constante durante toda la llamada? ¿Cómo varía?

c) Escriba el cálculo necesario para determinar el costo total de la llamada y estime dicho valor, calculando el costo de cada minuto, usando para ello el costo marginal al principio de ese minuto.

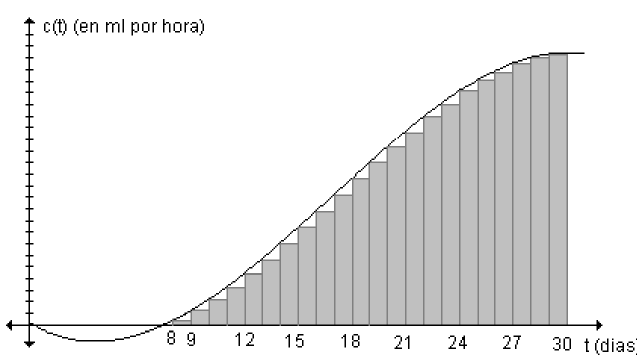
d) ¿Cómo podría obtener una mejor aproximación del costo total de la llamada?

e) Interprete gráficamente los cálculos hechos en los incisos **a)** y **c)**.

f) ¿Cómo se puede decir, a partir de la gráfica, que el costo total está representado por el área debajo de la curva?

2) La función de velocidad de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba es $f(t) = 160 - 10t$. Aproxime la distancia (en metros) que se eleva el proyectil en los tres primeros segundos, considerando seis intervalos y evaluando en el extremo izquierdo.

3) El consumo de oxígeno de un embrión de ave aumenta desde que se pone el huevo hasta que nace el polluelo. En un ave común el consumo aproximado de oxígeno se puede modelar con la función c(t) representada gráficamente, donde t es el tiempo en días a partir de que se puso el huevo y $8 \le t \le 30$. Un huevo común eclosiona más o menos cuando $t = 28$.



a) ¿A qué corresponde el área de cada rectángulo marcado?

b) ¿A qué corresponde la suma de las áreas de los dos primeros rectángulos?

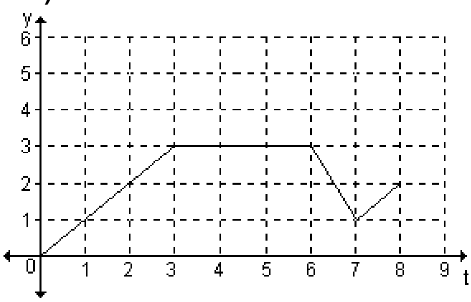
c) ¿Qué representa el área total debajo de la curva?

d) ¿Cómo se puede obtener un resultado más exacto para el área debajo de la curva? (con $8 \le t \le 30$)

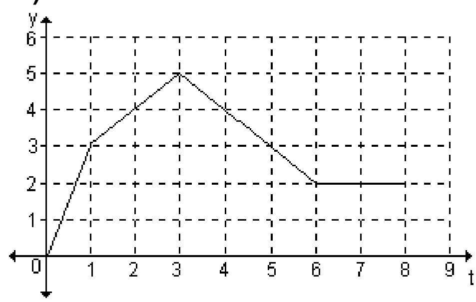
EJERCICIOS DE REPASO

1) Las gráficas muestran la velocidad (en m/ seg.) de dos cuerpos que se mueven a lo largo de una recta coordenada. Halle la distancia total recorrida para el intervalo de tiempo dado (en segundos).

a)



b)



2) Estime el área acotada por la gráfica de la función $f(x) = 2x$ entre $x = 0$ y $x = 3$ considerando:

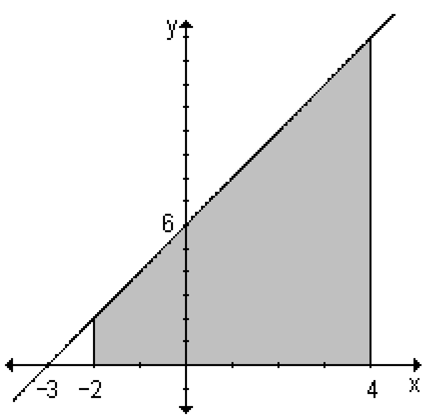
a) seis intervalos y evaluando en el extremo izquierdo.
b) seis intervalos y evaluando en el extremo derecho.
c) cuatro intervalos y evaluando en el extremo izquierdo.
d) cuatro intervalos y evaluando en el extremo derecho.

3) Estime el área acotada por la curvas $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$ y $x = \pi$. Considere cuatro intervalos y evalúe en el extremo derecho.

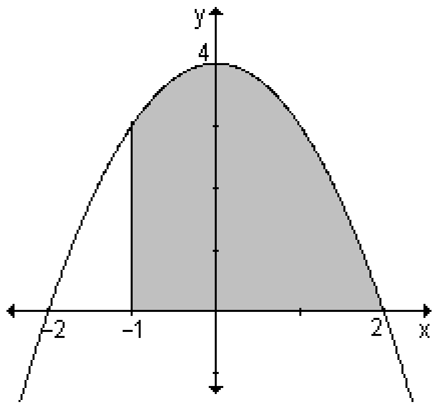
4)a) Halle el área sombreada utilizando área de polígonos.

b) Estime el área de la región sombreada considerando seis y doce intervalos y evaluando en el extremo derecho.

c) ¿Cuál de las áreas calculadas en **(b)** es más próxima a la real? ¿Por qué?



5) Estime el área de la región sombreada considerando cuatro y seis intervalos y evaluando en el extremo izquierdo.


y
4
−2
−1
2
x

2. LA INTEGRAL DEFINIDA

2.1 La integral definida.

2.2 Propiedades de la integral definida.

> "La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles".
>
> René Descartes

2.1 La integral definida

Cuando estudiamos el *problema del área* y el *problema de la distancia* analizamos que tanto el valor del área debajo de la gráfica de una función como la distancia recorrida por un objeto conocida la velocidad del objeto en cualquier instante x, se pueden calcular aproximadamente por medio de sumas o bien exactamente como el límite de una suma.

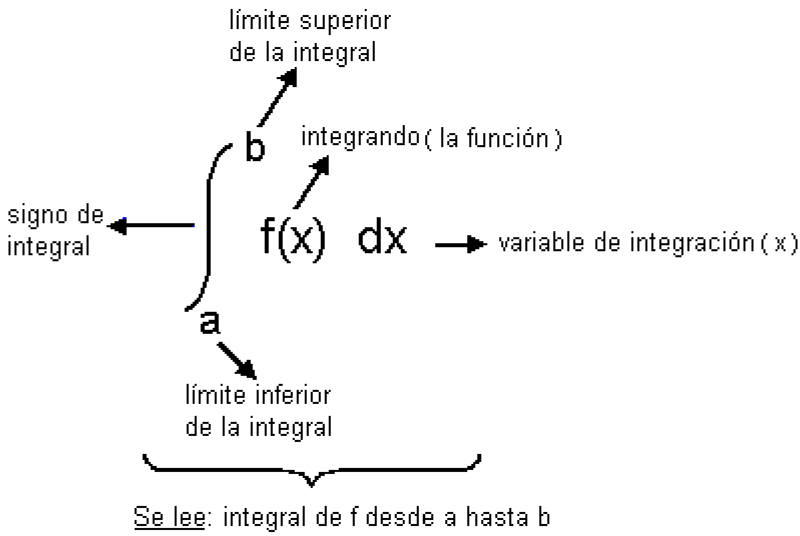
- $\lim\limits_{n\to\infty} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_{n-1})]\,\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$
- $\lim\limits_{n\to\infty} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots + f(x_n)]\,\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
- $\lim\limits_{n\to\infty} [f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \ldots\ldots + f(t_n)]\,\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$

donde x_{i-1} es el extremo izquierdo de cada subintervalo, x_i es el extremo derecho y t_i es un punto cualquiera de cada uno de ellos.
Este tipo de límites aparece en una gran variedad de situaciones incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. Teniendo en cuenta lo expresado surge la necesidad de dar un nombre y una notación a este tipo de límites.

Definición de integral definida.
Sea f(x) una función continua definida para $a \le x \le b$. Dividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual amplitud, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Sean $x_0 = a$, $x_n = b$ y x_0, x_1, ..., x_n los puntos extremos de cada subintervalo. Elegimos un punto t_i en estos subintervalos de modo tal que t_i se encuentra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con i = 1, .., n. Entonces la *integral definida de f(x)* de *a* a *b* es el número $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$.

La única condición para que exista la integral es que la función f(x) sea continua. Según lo analizado en el capítulo anterior, cuando $f(x) \ge 0$, la integral definida da el área de la región comprendida entre la gráfica de f(x), el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.
En caso de que la función f(x) tome valores negativos (es decir, cuando la gráfica se encuentre debajo del eje x), la definición de la integral definida es válida. Sin embargo, en este caso el número resultante no es el área entre la gráfica y el eje x.

Notación y terminología.



Cuando se calcula el valor de la integral se dice que se evalúa la integral definida.
La integral definida es un número que no depende de x. Se puede utilizar cualquier letra en lugar de x sin que cambie el valor de la integral.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

La continuidad de la función integrando asegura que los límites en las tres definiciones existen y dan el mismo valor. Por eso podemos asegurar que el valor de $\int_a^b f(x)dx$ es el mismo independientemente de cómo elijamos los valores de x para evaluar la función (extremo derecho, extremo izquierdo o cualquier punto en cada subintervalo).

Nota. La integral también existe si la función tiene un número finito de discontinuidades evitables o de salto, pero no discontinuidades infinitas.

Observación. La suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ que aparece en la definición de integral definida se llama "suma de Riemann" en honor al matemático alemán Bernhard Riemann. La definición incluye subintervalos de distinta longitud.

Definición de las sumas de Riemann.
Sea f una función definida en el intervalo cerrado [a, b] y sea una división (partición) arbitraria de dicho intervalo:
$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq .... \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ donde Δx_i indica la amplitud o longitud del i-ésimo subintervalo. Si t_i es cualquier punto del i-ésimo

subintervalo la suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ se *llama suma de Rieman*n *de f* asociada a la partición .

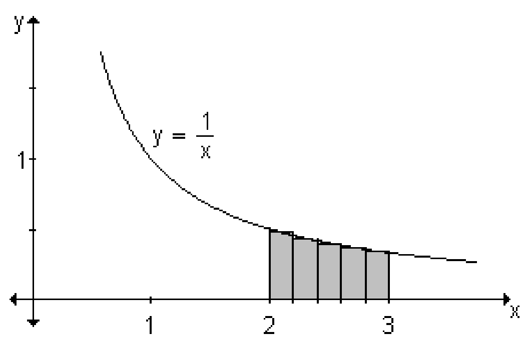
Si bien la integral definida había sido definida y usada con mucha anterioridad a la época de Riemann, él generalizó el concepto para poder incluir una clase de funciones más amplia. En la definición de una suma de Riemann, la función puede tomar cualquier valor (tanto positivos como negativos).

Si f es una función positiva, la suma de Riemann permite aproximar el área de una región calculando la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, mientras que la integral definida se puede interpretar como el área debajo de la curva.

Ejemplo. Encuentre una aproximación de $\int_2^3 \frac{1}{x}dx$ considerando cinco subintervalos, evaluando la función en el punto medio de cada uno de ellos. Grafique. ¿Cómo está relacionada la integral definida con el área bajo la curva?

La función $y = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo [2, 3], por lo tanto es integrable en dicho intervalo.

Como el intervalo es [2, 3], si se consideran 5 subintervalos, la amplitud de cada uno será $\Delta x = \frac{3-2}{5} = 0{,}2$. Los puntos extremos de los subintervalos son 2; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8 y 3. Luego los puntos medios son 2,1; 2,3; 2,5; 2,7 y 2,9.



Por lo tanto la integral será aproximadamente:

$$\int_2^3 \frac{1}{x}dx \approx f(2{,}1).\Delta x + f(2{,}3).\Delta x + f(2{,}5).\Delta x + f(2{,}7).\Delta x + f(2{,}9).\Delta x$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x}dx \approx [f(2{,}1) + f(2{,}3) + f(2{,}5)+ f(2{,}7) + f(2{,}9].\Delta x$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x}dx \approx [f(2{,}1) + f(2{,}3) + f(2{,}5)+ f(2{,}7) + f(2{,}9)] . 0{,}2$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x}dx \approx \left(\frac{1}{2{,}1} + \frac{1}{2{,}3} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2{,}7} + \frac{1}{2{,}9}\right).0{,}2$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x}dx \approx 0{,}4052$$

El procedimiento realizado mediante la suma de las áreas de los rectángulos sombreados, permite calcular el valor aproximado de la integral definida y del área bajo la curva desde x = 2 hasta x = 3.

Ejemplo. Encuentre una aproximación de $\int_2^3 -\frac{1}{x}dx$ considerando cinco subintervalos, evaluando la función en el punto medio de cada uno de ellos. Grafique. ¿Cómo está relacionada la integral definida con el área bajo la curva?

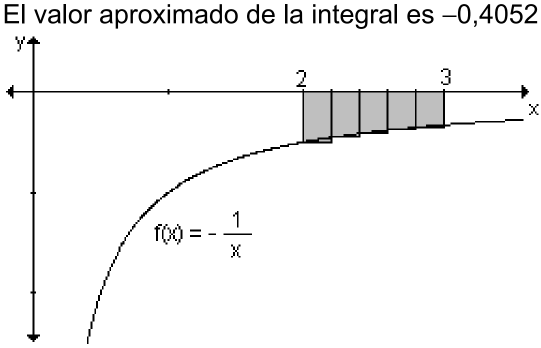
La función $f(x) = -\frac{1}{x}$ es continua en el intervalo [2, 3], entonces es integrable en el intervalo.

Considerando los mismos subintervalos que en el ejemplo anterior, el valor aproximado de la integral se obtiene haciendo:

$$\int_2^3 -\frac{1}{x}dx \approx [f(2{,}1) + f(2{,}3) + f(2{,}5) + f(2{,}7) + f(2{,}9)].\,\Delta x =$$

$$\int_2^3 -\frac{1}{x}dx = \left(-\frac{1}{2{,}1} - \frac{1}{2{,}3} - \frac{1}{2{,}5} - \frac{1}{2{,}7} - \frac{1}{2{,}9}\right).0{,}2 \approx -0{,}4052$$

El valor aproximado de la integral es –0,4052.



La integral tiene un valor negativo porque la gráfica de la función está debajo del eje x y los valores de la función en el intervalo [2, 3] son negativos. Este número no puede representar un área.

Observamos en los dos ejemplos que las áreas de las regiones sombreadas son las mismas.

La gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{x}$ es el reflejo con respecto al eje x de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$. Por esto, los valores absolutos de cada integral son iguales.

Para las funciones con valores negativos, la integral definida da el opuesto, o inverso aditivo, del área entre la curva y el eje x.

Observación. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o nulas.

Ejemplo. Encuentre una aproximación de $\int_{-2}^{1} x^3 dx$ considerando 6 subintervalos, evaluando la función en el extremo derecho de cada uno de ellos. Grafique. ¿Cómo está relacionada la integral definida con el área bajo la curva?

Como $f(x) = x^3$ es continua en el intervalo [–2, 1] es integrable.

Considerando 6 subintervalos en el intervalo [–2, 1], la amplitud de cada uno es $\Delta x = \frac{1-(-2)}{6} = \frac{1}{2}$. Los extremos derechos de los subintervalos son $-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ y 1.

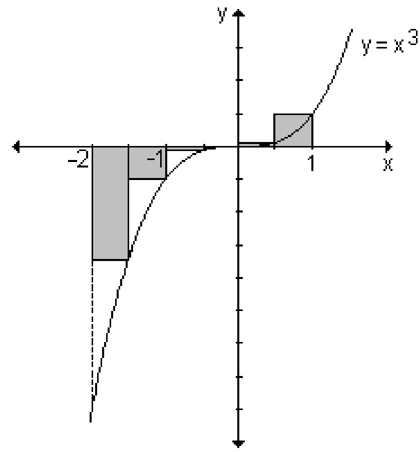
Por lo tanto la integral es aproximadamente:

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx \approx f\left(-\frac{3}{2}\right).\frac{1}{2} + f(-1).\frac{1}{2} +$$

$$+ f\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2} + f(0).\frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2} + f(1).\frac{1}{2} =$$

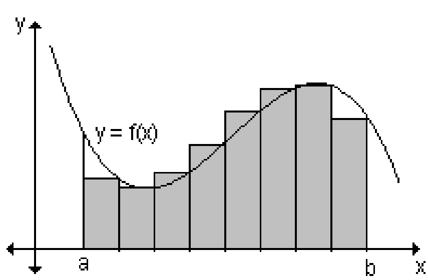
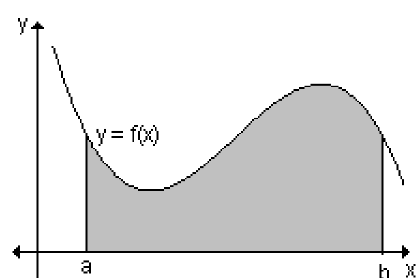
$$-\frac{27}{8}.\frac{1}{2} + (-1).\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{8}\right).\frac{1}{2} + 0.\frac{1}{2} + \frac{1}{8}.\frac{1}{2} +$$

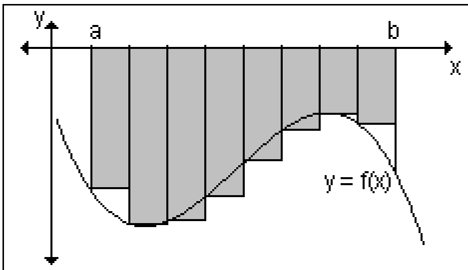
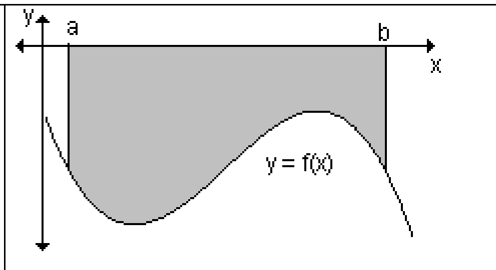
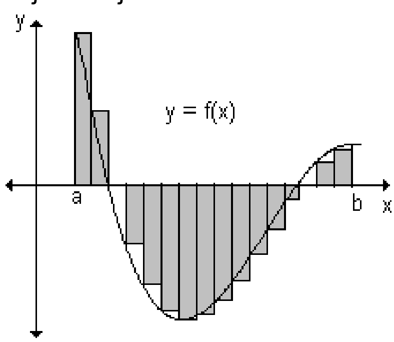
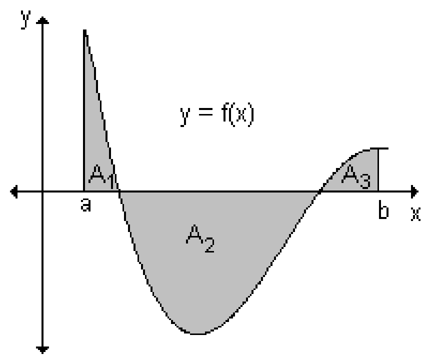
$$+1.\frac{1}{2} = -\frac{27}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = -\frac{27}{16}$$



Como f no es una función positiva, la integral no representa la suma de las áreas de los rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos que están por encima del eje x menos la suma de las áreas de los rectángulos que están por debajo del eje x.

Resumiendo lo analizado hasta el momento:

<table>
<tr>
<td>Si f(x) ≥ 0, la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos.

</td>
<td>Si f(x) ≥ 0, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es el área debajo de la curva y = f(x) desde a hasta b.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Si f(x) ≤ 0, la suma de Riemann es el opuesto de la suma de las áreas de los rectángulos.</td>
<td>Si f(x) ≤ 0, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es el opuesto del área sobre la curva y = f(x) desde a hasta b.</td>
</tr>
</table>

	
Si f toma valores tanto positivos como negativos entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x menos la suma de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x. 	Si f toma valores tanto positivos como negativos entonces la integral definida puede interpretarse como diferencia de áreas. $\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_3 - A_2$ 

Como se define la integral definida en el intervalo [a, b], se supone que a < b. Para determinar la integral definida de una función f de a a b, cuando a > b o a = b se define de la siguiente manera:

Definición. Si a > b y $\int_b^a f(x)\,dx$ existe entonces $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Ejemplo. Sabiendo que $\int_1^3 2xdx = 8$ determine $\int_3^1 2xdx$.

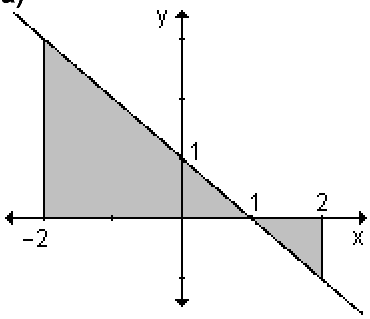
Por definición anterior $\int_3^1 2xdx = -\int_1^3 2xdx = -8$.

Definición. Si f(a) existe, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$.

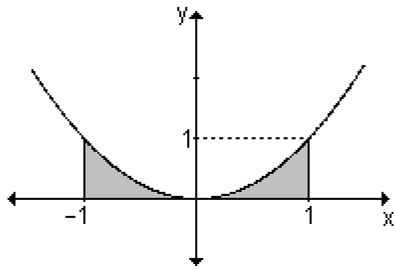
Nota. Para el cálculo de una integral definida se puede aproximar numéricamente con el uso de una calculadora o una computadora. Se utilizan programas (por ejemplo planillas de cálculo) que calculan sumas para valores de n cada vez más grandes. Cualquier integral definida se puede aproximar numéricamente.

Ejemplo. Mediante integrales escriba una expresión que permita calcular el área de la región sombreada.

a)



b)



a) De la gráfica se deduce que la ecuación de la recta es $y = -x + 1$.
El área de la región sombreada se puede expresar como la suma de dos áreas:

- entre $x = -2$ y $x = 1$ es $A_1 = \int_{-2}^{1}(-x+1)dx$ y
- entre $x = 1$ y $x = 2$ es $A_2 = -\int_{1}^{2}(-x+1)dx$

De donde resulta $A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{1}(-x+1)dx - \int_{1}^{2}(-x+1)dx$.

b) La parábola representada gráficamente es $y = x^2$.
El área sombreada se puede expresar de dos formas distintas:

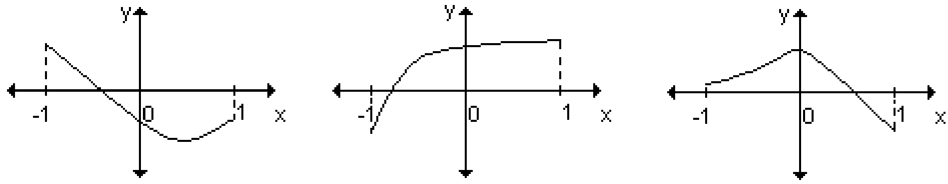
- $A = \int_{-1}^{1}x^2dx$ ó
- $A = 2\int_{0}^{1}x^2dx$, debido a la simetría con respecto al eje de ordenadas.

EJERCICIOS

1) Plantee la suma que permite aproximar el valor de $\int_{-1}^{2}\left(x^2+3\right)dx$ considerando 6 subintervalos y evaluando la función en el extremo izquierdo de cada uno de ellos. Halle su valor. Interprete gráficamente.

2) Plantee la suma que permite aproximar el valor de $\int_{3}^{4}(4-x)dx$ considerando 10 subintervalos y evaluando la función en el extremo derecho de cada uno de ellos. Obtenga su valor e interprete gráficamente.

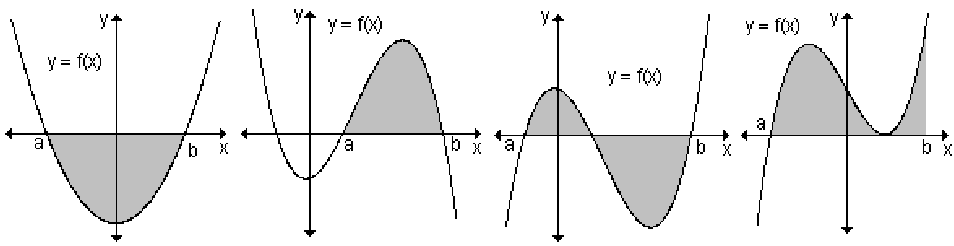
3) Observando la gráfica determine en cada caso si $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ es positiva o negativa:



4) Determine cuál o cuáles de las regiones sombreadas tiene el área dada por:

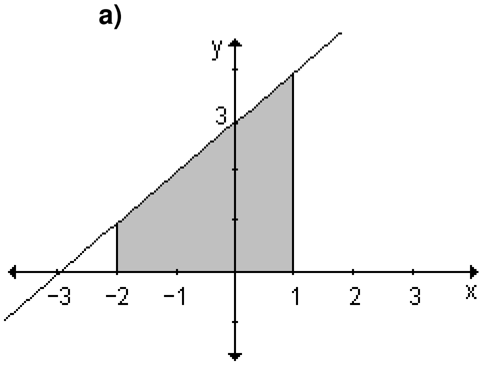
i) $\int_a^b f(x)dx$ **ii)** $-\int_a^b f(x)dx$

a) **b)** **c)** **d)**

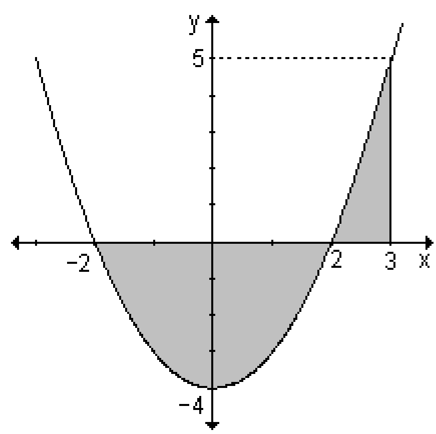


5) Plantee la integral que representa el área sombreada:

a)



b)

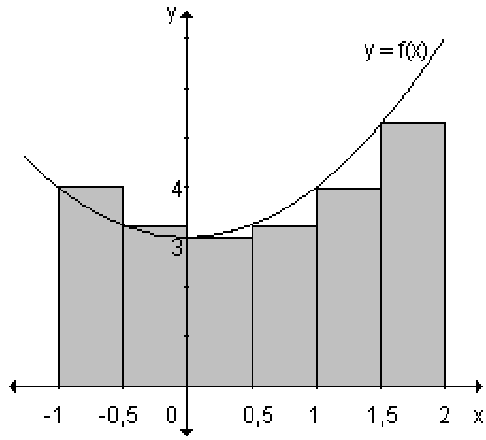


RESPUESTAS

1) La función $y = x^2 + 3$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$ y por lo tanto integrable en dicho intervalo.

$\int_{-1}^{2}\left(x^2+3\right)dx \approx$ f(–1).0,5 +f(–0,5).0,5 + f(0).0,5 + f(0,5) .0,5 + f(1) .0,5 + f(1,5).0,5 = 11,375

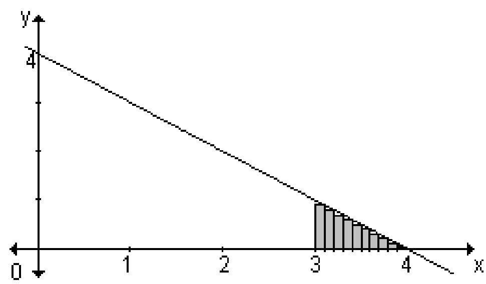
La suma de las áreas de los rectángulos sombreados es 11,375 y representa aproximadamente el área debajo de la función.



2) La función $y = 4 - x$ es continua en el intervalo [3, 4] y por lo tanto integrable en dicho intervalo.

$\int_3^4 (4 - x)dx \approx$ f(3,1).0,1 +f(3,2).0,1 + f(3,3).0,1 + f(3,4) .0,1 + f(3,5) .0,1 + f(3,6).0,1+ f(3,7).0,1+ f(3,8).0,1+ f(3,9).0,1+ f(4). 0,1 $=$ 0,45

La suma de las áreas de los rectángulos sombreados es 0,45 y representa aproximadamente el área debajo de la función.



3)a) Negativa **b)** Positiva **c)** Positiva **4)i)** b y d **ii)** a

5)a) $\int_{-2}^{1} (x + 3)dx$ **b)** $-\int_{-2}^{2} \left(x^2 - 4\right)dx + \int_{2}^{3} \left(x^2 - 4\right)dx$

Surgimiento del símbolo $\int f(x)dx$ *.*

Leibniz creó el símbolo $\int f(x)dx$ en la última parte del siglo XVII. La $\int$ es una S alargada de summa (palabra latina para suma). En sus primeros escritos usó la notación "omn." (abreviatura de la palabra en latín "omnis") para denotar la integración. Después, el 29 de octubre de 1675, escribió, "será conveniente escribir $\int$ en vez de omn., así como $\int l$ en vez de omn.l ...". Dos o tres semanas después mejoró aún más la notación y escribió $\int [\quad]dx$ en vez de $\int$ solamente. Esta notación es tan útil y significativa que su desarrollo por Leibniz debe considerarse como una piedra angular en la historia de la matemática y la ciencia.

La notación de la integral definida ayuda a tener en cuenta el significado de la misma. La expresión dx no se considera por separado sino que forma parte de

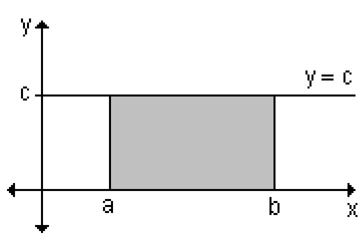
la notación que significa "la integral de *una determinada función* con respecto a x".
De todos modos, desde un punto de vista totalmente informal e intuitivo, algunos consideran que la expresión dx indica "una porción infinitesimalmente pequeña de x" que se multiplica por un valor de la función. Muchas veces esta interpretación ayuda a entender el significado de la integral definida.
Por ejemplo, si v(t) (positiva) es la velocidad de un objeto en el instante t entonces v(t) dt se podría interpretar, según la consideración hecha, como "velocidad por tiempo" y esto sabemos que da por resultado la distancia recorrida por el objeto durante un instante (una porción de tiempo muy pequeña dt). La integral $\int_a^b v(t)dt$ se puede considerar como la suma de todas esas distancias pequeñas que, como ya analizamos, da como resultado el cambio neto en la posición del objeto o la distancia total recorrida desde $t = a$ hasta $t = b$.
Esta notación permite además determinar en qué unidades queda expresada la integral. Como sabemos los términos que se suman son productos de la forma "f(x) por un valor muy pequeño de x". De esta manera la unidad de medida de $\int_a^b f(x)dx$ es el producto de las unidades de f(x) por las unidades de x.
Por ejemplo:

- si v(t) representa la velocidad medida en $\frac{km}{h}$ y t es el tiempo medido en horas, entonces la $\int_a^b v(t)dt$ tiene por unidades $\frac{km}{h} \cdot h = km$. La unidad obtenida es kilómetro y es lo que corresponde porque el valor de la integral representa un cambio de posición.
- si se grafica $y = f(x)$ con las mismas unidades de medida de longitud a lo largo de los ejes coordenados, por ejemplo metros, entonces f(x) y x se miden en metros y $\int_a^b f(x)dx$ tiene por unidad $m \cdot m = m^2$. Esta unidad es la esperada, dado que en este caso la integral representa un área.

2.2 Propiedades de la integral definida

Se enuncian algunas propiedades y teoremas básicos de las integrales definidas que ayudarán a evaluarlas con más facilidad.

- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es una constante.



La integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante multiplicada por la amplitud del intervalo.

- Si f es integrable en [a, b] y c es una constante, entonces:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

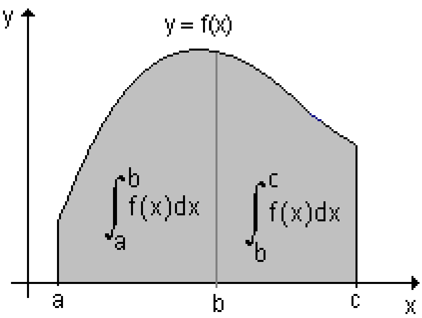
- Si f y g son integrables en [a, b], entonces se verifica:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Esta propiedad se puede generalizar para más de dos funciones.

- Propiedad de aditividad del intervalo: si f es integrable en los tres intervalos cerrados definidos por a, b y c, entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



Ejemplo. Suponiendo que $\int_1^3 f(x)dx = 2$, $\int_2^3 f(x)dx = 1$ y $\int_3^5 f(x)dx = 3$ encuentre $\int_1^5 f(x)dx$ y $\int_1^2 f(x)dx$.

Utilizando la propiedad de aditividad del intervalo se puede escribir:

$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = 2 + 3 = 5.$

Luego $\int_1^5 f(x)dx = 5.$

Para el cálculo de $\int_1^2 f(x)dx$ partimos de la igualdad:

$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx$.

Podemos deducir: $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = 2 - 1 = 1.$

Luego $\int_1^2 f(x)dx = 1.$

Una aplicación particular de la propiedad de aditividad del intervalo se presenta cuando la función está definida por tramos.

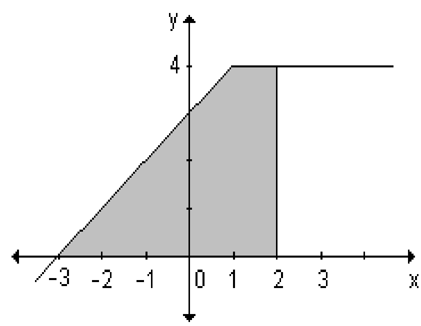
Ejemplo. Halle $\int_{-3}^2 f(x)dx$ si $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \le 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

La función está definida por tramos y es continua. Teniendo en cuenta que el cambio de expresión para la ley se produce en $x = 1$, podemos escribir:

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$$

Representando gráficamente la función se observa que $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ corresponde al área del triángulo determinado por el tramo de recta de ecuación $y = x + 3$ y el eje x entre $x = -3$ y $x = 1$, o sea el triángulo de base y altura 4 unidades. Por lo tanto, recordando que la medida del área del triángulo es $\frac{b.a}{2}$, siendo b la base y a la altura, resulta que el área debe ser 8 unidades. Luego: $\int_{-3}^{1} f(x)dx = 8$.

Además, $\int_{1}^{2} f(x)dx$ corresponde al área del rectángulo determinado por el segmento de recta de ecuación $y = 4$, el eje x, entre $x = 1$ y $x = 2$. Como el área del rectángulo es base por altura, resulta igual a 4. Luego, $\int_{1}^{2} f(x)dx = 4$.



Por lo tanto:

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = 8 + 4 = 12.$$

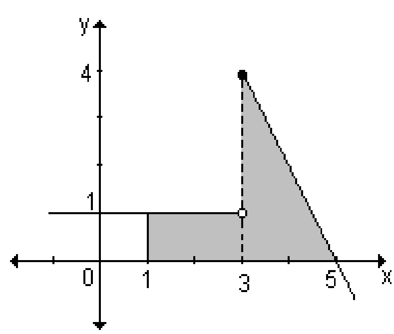
Ejemplo. Calcule $\int_{1}^{5} g(x)dx$ si $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 3 \\ -2x+10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

Representando gráficamente la función es posible observar que la función no es continua. Sin embargo, dado que en ambos tramos es continua, presentando una discontinuidad de salto en $x = 3$, es integrable. Para calcular la integral se aplica el teorema de aditividad.

$$\int_{1}^{5} g(x)dx = \int_{1}^{3} g(x)dx + \int_{3}^{5} g(x)dx$$

La primera integral corresponde al área del rectángulo sombreado de base 2 y altura 1 unidad, por lo que: $\int_{1}^{3} g(x)dx = 2$.

La segunda integral corresponde geométricamente al área del triángulo de base 2 y altura 4, luego: $\int_{3}^{5} g(x)dx = 4$.



Por lo tanto:

$$\int_{1}^{5} g(x)dx = \int_{1}^{3} g(x)dx + \int_{3}^{5} g(x)dx = 2 + 4 = 6.$$

Conservación de desigualdades

- Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado [a, b] entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Demostración. Si $f(x) \geq 0$ entonces $\int_a^b f(x)dx$ representa el área bajo la curva de f y como las áreas son positivas, resulta $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

También se deduce directamente de la definición porque todas las cantidades son positivas.

- Si f y g son integrables en el intervalo cerrado [a, b] con $f(x) \geq g(x)$ para todo x en [a, b] entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Demostración. Si $f(x) \geq g(x)$ podemos asegurar que $f(x) - g(x) \geq 0$. Aplicando la propiedad anterior se deduce que $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0$.

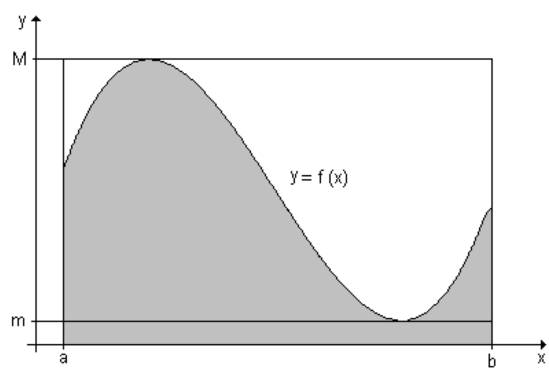
De esta manera $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

- Supongamos que m y M son constantes tales que $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$. La gráfica queda entre las rectas horizontales $y = m$ e $y = M$. Se dice que f está acotada arriba por M y abajo por m. Podemos enunciar el siguiente teorema:

Si f es integrable y $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ entonces

$$m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b - a)$$

(La gráfica ilustra la propiedad cuando $f(x) \geq 0$)



Demostración

Dado que $m \leq f(x) \leq M$ podemos asegurar, por la propiedad anterior, que $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$.

Si se evalúan las integrales de los extremos de la desigualdad resulta:

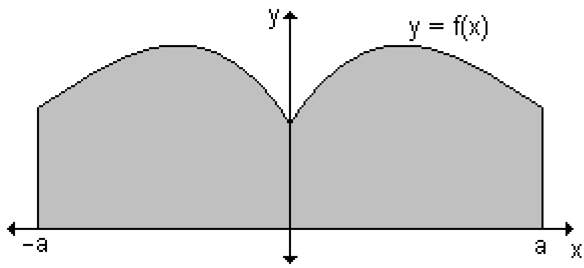
$m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b - a)$.

Si $y = f(x)$ es continua y m y M son los valores mínimos y máximos de la misma en el intervalo [a, b], gráficamente esta propiedad indica que el área debajo de la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que la del rectángulo con altura M.

Simetría

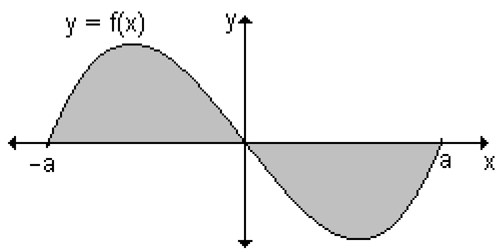
El siguiente teorema permite simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

- Sea f una función continua sobre el intervalo [–a, a].



a) Si f es par se verifica

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.



b) Si f es impar se verifica

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Ejemplo. Sabiendo que $\int_{0}^{2} x^2\,dx = \frac{8}{3}$, calcule las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{0} x^2\,dx$ **b)** $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$ **c)** $\int_{0}^{2} 3x^2\,dx$ **d)** $\int_{0}^{2} -x^2\,dx$

Utilizando propiedades de las integrales resulta:

a) Como x^2 es una función par : $\int_{-2}^{0} x^2\,dx = \int_{0}^{2} x^2\,dx = \frac{8}{3}$

b) Como x^2 es una función par:

$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\int_{0}^{2} x^2\,dx = \frac{16}{3}$

c) $\int_{0}^{2} 3x^2\,dx = 3\int_{0}^{2} x^2\,dx = 3.\frac{8}{3} = 8$

d) $\int_{0}^{2} -x^2\,dx = -\int_{0}^{2} x^2\,dx = -\frac{8}{3}$

Ejemplo. Sabiendo que $\int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}$ calcule:

a) $\int_{-1}^{0} x^3\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$

a) Como x^3 es una función impar resulta:

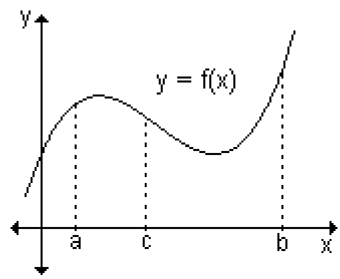
$$\int_{-1}^{0} x^3\,dx = -\int_{0}^{1} x^3\,dx = -\frac{1}{4}$$

b) Como $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx$, $\int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}$ y $\int_{-1}^{0} x^3\,dx = -\frac{1}{4}$

resulta $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0.$

EJERCICIOS

1) En la función definida gráficamente se sabe que $\int_a^b f(x)dx = 8$ y $\int_c^b f(x)dx = 6.$

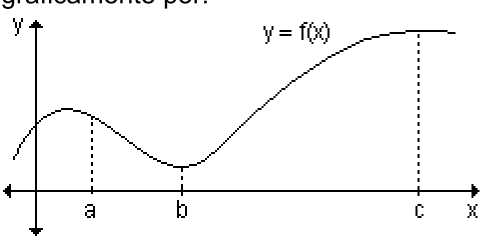


Halle: **a)** $\int_b^c f(x)dx$

b) $\int_a^c f(x)dx$ e indique qué representa.

2) Escriba cómo calcula $\int_1^3 f(x)dx$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}.$

3) Se sabe que $\int_a^c f(x)dx = 6$ y $\int_b^c f(x)dx = 4$ en la función definida gráficamente por:



Evalúe:

a) $\int_a^b f(x)dx$ e indique qué representa gráficamente,

b) $\int_c^b f(x)dx$

RESPUESTAS

1)a) -6

b) 2, representa el área de la región comprendida por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = c$.

2) $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x dx$

3) a) $\int_a^b f(x)dx = 2$ e indica el área de la zona comprendida por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$, **b)** $\int_c^b f(x)dx = -4.$

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.1 LA INTEGRAL DEFINIDA – 2.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1) Determine para cuáles de las siguientes funciones f(x) el valor de la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ da el área entre la gráfica de f(x) y el eje x desde $x = -1$ hasta $x = 1$. Muestre gráficamente y explique.

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = x-1$ **c)** $f(x) = -x^2 + 2x$

2) Encuentre una aproximación de cada integral considerando 5 intervalos y evaluando la función en el extremo izquierdo de cada uno de ellos.

a) $\int_0^2 3x dx$ **b)** $\int_{-1}^{0} (x^2 - 1)dx$

3) Escriba el área de la región comprendida entre las curvas dadas como una integral o suma de integrales. Interprete gráficamente.

a) $y = 3 - x^2$ y el eje x **b)** $y = x^2$, el eje x, las rectas $x = 0$ y $x = 1$

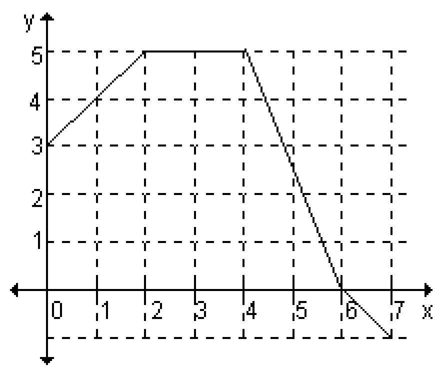
c) $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $x = 0$, $x = 2$ y el eje x.

4) Observando la gráfica de f, evalúe cada integral.

a) $\int_0^2 f(x)dx$

b) $\int_0^4 f(x)dx$

c) $\int_6^7 f(x)dx$



5) Utilice las propiedades de la integral para escribir cada expresión como una única integral.

a) $\int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$ **b)** $\int_2^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$

6) Escriba cómo calcularía $\int_0^4 f(x)dx$ si $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

7) Suponiendo que g(x) es continua y que $\int_{-2}^{1} g(x)dx = 2$ y $\int_{-2}^{4} g(x)dx = 7$, halle:

a) $\int_1^4 g(x)dx$ **b)** $-\int_4^1 g(x)dx$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

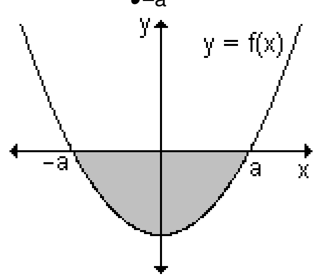
1) Una pelota arrojada al aire tiene una velocidad de $v(t) = -5t + 15$ metros/seg. después de t segundos. Estime el cambio de altura durante el quinto segundo (desde t = 4 hasta t = 5) de ser arrojada. Interprete el significado del signo de ese resultado.

2) La tasa de aumento de empleo de cierta ciudad desde 1988 hasta 1995 viene dado por el siguiente modelo: $C(t) = 25t^2 - 137t + 68$ en miles de personas al año, donde t es la cantidad de años a partir de enero de 1988. Estime el cambio en la cantidad de personas empleadas desde enero de1990 hasta enero de 1995 subdividiendo en intervalos de un año. Esboce la gráfica de la función C(t) e interprete en la misma el significado de los cálculos realizados.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

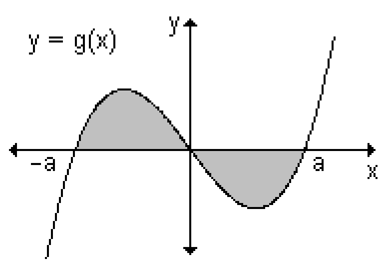
1) La integral definida que permite calcular el área sombreada es:

a) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ **b)** $-\int_{-a}^{a} f(x)dx$ **c)** $\int_{0}^{a} f(x)dx$



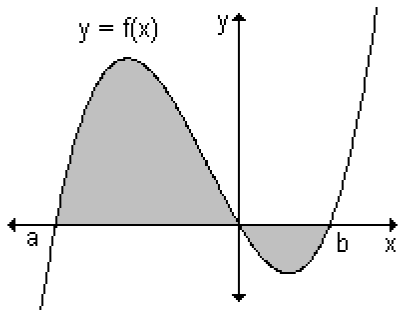
2) La integral definida que permite calcular el área sombreada es:

a) $\int_{-a}^{a} g(x)dx$ **b)** $2\int_{0}^{a} g(x)dx$ **c)** $-2\int_{0}^{a} g(x)dx$



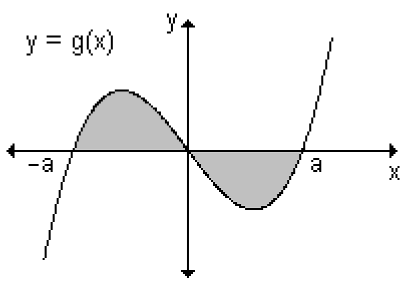
3) La $\int_{a}^{b} f(x)dx$ es

a) positiva **b)** negativa **c)** nula



4) La $\int_{-a}^{a} g(x)dx$ es

a) positiva **b)** negativa **c)** nula



5) Si $\int_{2}^{5} f(x)dx = 7$ y $\int_{3}^{5} f(x)dx = 3$ entonces $\int_{2}^{3} f(x)dx =$ es:

a) 4 **b)** 10 **c)** 21 **d)** $\frac{7}{3}$

6) Si $\int_{-1}^{5} g(x)dx = 8$ y $\int_{2}^{5} g(x)dx = 3$ entonces $\int_{-1}^{2} g(x)dx$ es:

a) 5 **b)** 11 **c)** 8 **d)** 3

7) Si $\int_{1}^{2} g(x)dx = 3$ y $\int_{2}^{6} g(x)dx = 7$ entonces $\int_{1}^{6} g(x)dx$ es:

a) 4 **b)** –4 **c)** 3 **d)** 10

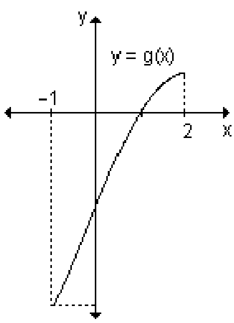
8) Si $\int_{2}^{7} f(x)dx = 9$ entonces $-\int_{2}^{7} 3f(x)dx$ es:

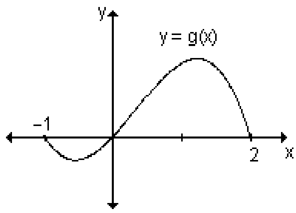
a) 27 **b)** –27 **c)** –9 **d)** 9

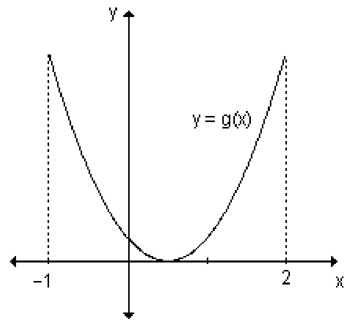
AUTOEVALUACIÓN

1) Observando la gráfica determine en cada caso si $\int_{-1}^{2} g(x)dx$ es positiva, negativa o nula.

a) **b)** **c)**







2) Plantee la suma que permite aproximar el valor de $\int_0^2 \left(x^2 + 1\right) dx$ considerando cinco subintervalos y evaluando la función en el extremo derecho de cada uno de ellos. Halle su valor e interprete gráficamente.

3) Sabiendo que $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_1^2 f(x)dx = 3$, $\int_0^1 g(x)dx = 1$ y $\int_0^2 g(x)dx = 4$; use las propiedades de la integral para calcular:

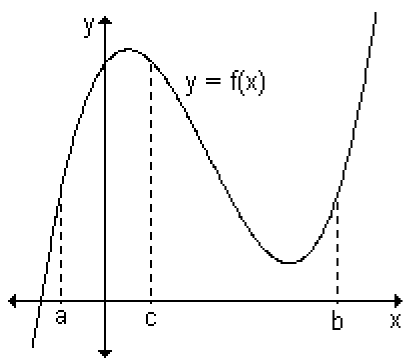
a) $\int_0^2 f(x)dx$ **b)** $\int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx$ **c)** $\int_2^1 3f(x)dx$

4) En la función definida gráficamente se sabe que $\int_a^b f(x)dx = 10$ y $\int_a^c f(x)dx = 4$.

Halle:

a) $\int_c^b f(x)dx$

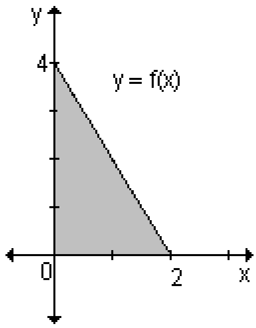
b) $\int_a^c 2f(x)dx$



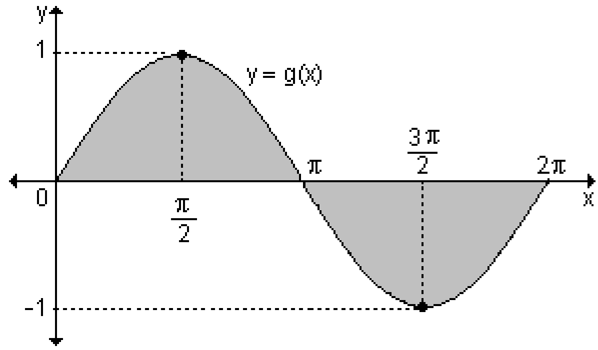
EJERCICIOS DE REPASO

1) Escriba una expresión que indique el área de la región sombreada utilizando integral definida.

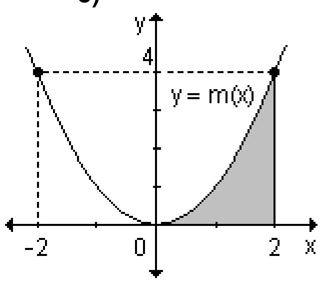
a)



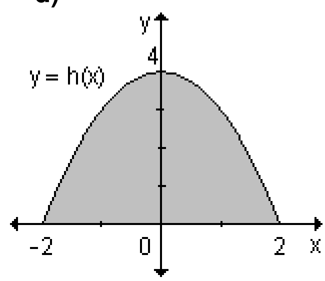
b)



c)



d)



2) Plantee y resuelva la suma que permite aproximar el valor de $\int_{-2}^{2}(2x-1)dx$ considerando ocho intervalos y evaluando la función en el extremo derecho. Interprete el resultado.

3) Calcule $\int_{-2}^{3} g(x)dx$ si $g(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \le 1 \\ 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

4) Determine el valor de $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ siendo $f(x)=\begin{cases} 3^{x} & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$.

5) Utilice las propiedades de la integral definida para escribir cada expresión como una única integral

a) $\int_{2}^{7} f(x)dx - \int_{2}^{5} f(x)dx =$ **b)** $\int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx =$

6) Sabiendo que: $\int_{0}^{9} f(x)\,dx = 15{,}4$; $\int_{4}^{7} f(x)\,dx = 7{,}3$; $\int_{7}^{9} f(x)\,dx = 3{,}5$ halle:

a) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ **b)** $\int_{4}^{9} f(x)\,dx$ **c)** $\int_{4}^{7} 3f(x)\,dx$

d) $\int_{4}^{9} f(x)\,dx + \int_{0}^{4} \frac{1}{4} f(x)\,dx$ **e)** $\int_{0}^{4} \frac{3}{4} f(x)\,dx$ **f)** $\int_{7}^{9} 2f(x)\,dx + \int_{6}^{6} f(x)\,dx$

3. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

3.1 La integral definida como función.

3.2 El teorema fundamental del cálculo.

> "Uno aprende haciendo las cosas; porque aunque piense que lo sabe, no tendrá la certidumbre hasta que lo intente".
>
> Sófocles

3.1 La integral definida como función

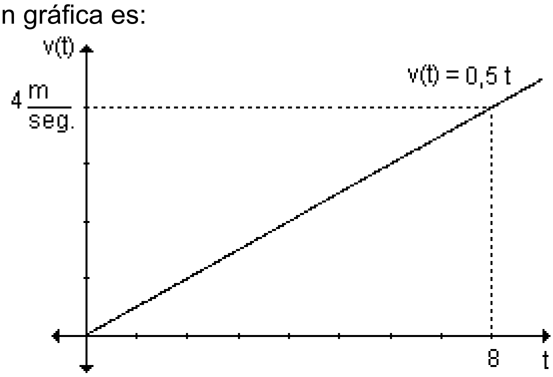
Aprendizaje por descubrimiento

Actividad 1. La velocidad en m/seg de un móvil varía según la ley $v(t) = 0,5t$.
a) Represente gráficamente la velocidad durante los ocho primeros segundos.
b) Obtenga el espacio recorrido por el móvil hasta los 8 segundos (utilice alguna fórmula de área de una figura plana)
c) Obtenga el espacio recorrido por el móvil transcurridos t segundos.

Actividad 2. En un laboratorio se observó que la tasa de crecimiento de bacterias está dada por la ley $g(t) = t^2 + 1$ donde t se expresa en segundos. Se quiere conocer el número de bacterias transcurridos cuatro segundos si la experiencia comenzó con 32 bacterias.
a) Obtenga la función que expresa la cantidad de bacterias en función del tiempo.
b) Indique en la gráfica g(t) qué es lo que pide el problema.
c) ¿Qué cantidad de bacterias hay transcurridos cuatro segundos?

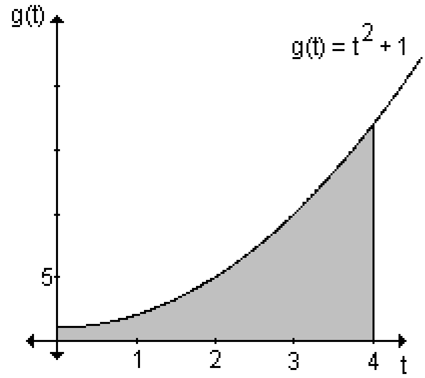
Compartimos nuestras respuestas
Al resolver la primera actividad, observamos que el espacio recorrido es el área del triángulo cuya base está dada por t y y su altura por $v(t) = 0,5t$. Por lo que el espacio recorrido en t segundos es $e(t) = \frac{t.0,5t}{2}$, o sea: $e(t) = \frac{1}{4}t^2$.

La representación gráfica es:



En la segunda actividad se conoce la función que describe la tasa de crecimiento de bacterias. Esta función es la primera derivada de la función que describe la cantidad de bacterias. Debemos encontrar una ley cuya derivada sea $g(t) = t^2 + 1$. Por ejemplo $h(t) = \frac{1}{3}t^3 + t$.

En la gráfica, la cantidad de bacterias está dada por el área de la región determinada por g(t) desde t = 0 hasta el valor de tiempo transcurrido que nos interese averiguar.
Reemplazando en h(t) podemos averiguar que transcurridos 4 segundos hay, aproximadamente, 25 bacterias.

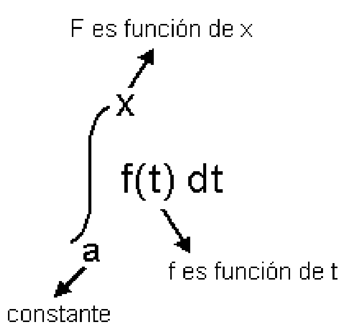


Definición. Sea f una función continua en un intervalo [a, b].

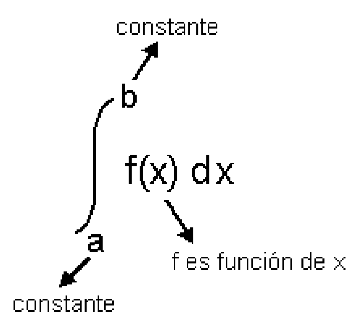
Definimos una nueva función F dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ donde $a \le x \le b$. Se observa que F sólo depende de x, variable que aparece como límite superior en el cálculo de la integral.

Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si hacemos que x varíe, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define una función que depende de x.

La integral como función



La integral como número



Analicemos una función continua f(t) siendo $f(t) \ge 0$. Podemos decir que la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ se puede interpretar como el área debajo de la gráfica de f desde a hasta x, donde x puede variar desde a hasta b (se debe pensar en F como la función "el área hasta").

3.2 El teorema fundamental del cálculo

Aprendizaje por descubrimiento

Actividad 1. El caudal de agua recogido en un recipiente es constante e igual a 3 l/seg. ¿Qué volumen había en el mismo al cabo de un minuto? Escriba una función que defina el caudal de agua recogido en función del tiempo y una función que describa el volumen. ¿Qué conclusiones puede obtener? ¿Reconoce alguna relación entre ellas? Dibuje la gráfica de la función caudal y de la función volumen.

Actividad 2. El caudal de agua, en litros por segundo, aportado por una canilla está dado por $c(t) = 0{,}01\ t$, donde t es el tiempo expresado en segundos.
a) Represente gráficamente la función caudal.
b) Calcule, utilizando el área de una figura geométrica el agua total vertida por la canilla en los primeros 10 segundos.
c) Exprese el volumen de agua recogido en un instante t cualquiera.
d) Derive la expresión obtenida en **c)** ¿Qué conclusiones puede obtener?

Actividad 3.
a) Grafique la recta $y = 3t$. Utilizando las fórmulas de la geometría calcule el área determinada por la recta, el eje t y las rectas $t = 2$ y $t = 5$.
b) Sea $t > 2$. Considere A(x) la función que describe el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 3t$, el eje t y las rectas $t = 2$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para la función A(x).
c) Derive la función de área ¿qué conclusión puede obtener?

Actividad 4
a) Grafique la recta $y = 3t + 2$. Utilizando las fórmulas de la geometría calcule el área determinada por la recta, el eje t y las rectas $t = 2$ y $t = 5$.
b) Sea $t > 2$. Considere A(x) la función que describe el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 3t + 2$, el eje t y las rectas $t = 2$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para la función A(x).
c) Derive la función área. ¿Qué conclusión puede obtener?

Actividad 5

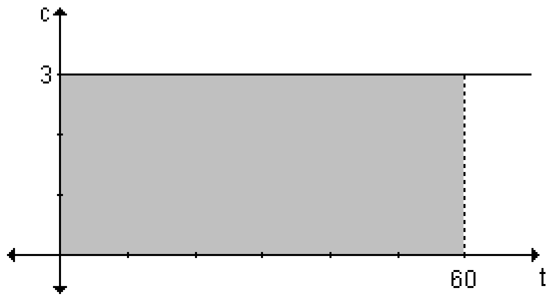
a) Sea $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. La expresión $A(x) = \int_0^x \cos t\, dt$ representa el área de una región. Esquematice la región.

b) Si x representa cualquier número entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y h es un número positivo pequeño, entonces $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y dibuje un esquema de ésta.
c) Dibuje un rectángulo que sea una aproximación para la región del inciso **b)**.
d) Al comparar el área de estas regiones demuestre que $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx \cos x$

¿Será cierto que la función F(x) que representa el área bajo la curva de $y = f(x)$ es tal que $F'(x) = f(x)$?

Compartimos nuestras respuestas

En la primera actividad, si el caudal de agua recogido en un recipiente es constante e igual a 3 l/seg, el volumen que ocupa el agua en el recipiente es de 3l en un segundo, por lo que al cabo de un minuto el volumen será de 180 litros.

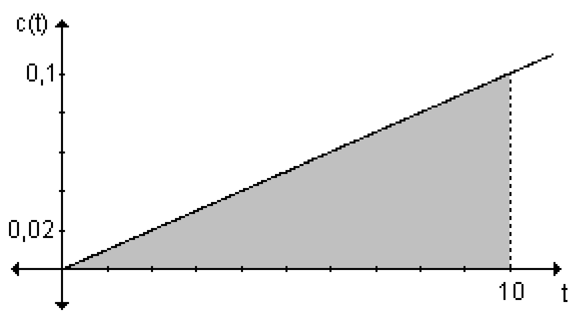


$v = 3 \dfrac{l}{seg.} .60\ seg. = 180\ l$

La ley que define la función caudal es $c(t) = 3$.

El volumen coincide con el área del rectángulo de base t y altura 3, por lo tanto, la ley que lo define es $v(t) = 3t$.
Podemos observar que la función caudal es la derivada de la función volumen, por lo que v(t) es una antiderivada de c(t).

En la actividad 2, el agua total vertida por la canilla en los primeros 10 segundos es el área del triángulo sombreado de la figura. Haciendo los cálculos se obtiene que el agua vertida es de 0,5 litros.



Para determinar el volumen para un tiempo t cualquiera, observamos que la base del triángulo es t y la altura 0,01 t. Luego la ley que describe el volumen es:

$$v(t) = \frac{t.0{,}01t}{2} = 0{,}005\ t^2$$

La derivada de la función volumen es la función que describe el caudal. Luego, v(t) es una antiderivada de c(t).

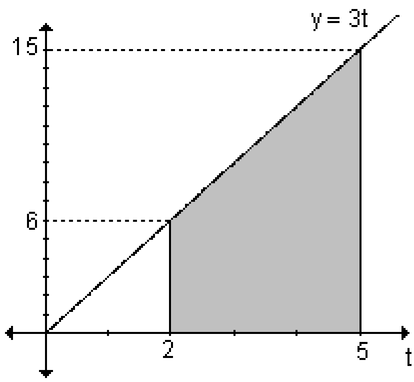
En la actividad 3, al calcular el área pedida utilizando fórmulas geométricas, se obtiene 31,5.
Para expresar el área como función, tenemos en cuenta que la región es un trapecio de base mayor 3x, base menor 6 y altura $x - 2$, por lo que su área es

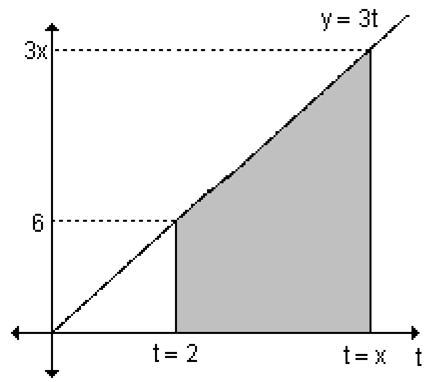
$$A(x) = \frac{(3x+6).(x-2)}{2} = \frac{3.(x+2).(x-2)}{2} = \frac{3}{2}\left(x^2 - 4\right)$$

$A(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6$

Al derivar esta expresión se obtiene $A'(x) = 3x$.
Se observa que la ley que define el área de la región es una antiderivada de la función dada.

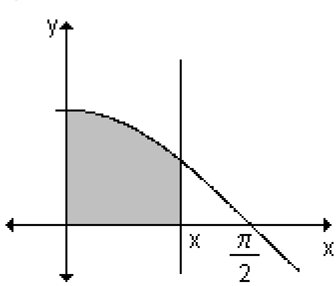
Es posible calcular el área entre t = 2 y t = 5 haciendo $A(5) - A(2) = \int_2^5 f(t)dt$, donde A(x) es una antiderivada de la ley que define la recta. Esto se demuestra en la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo.



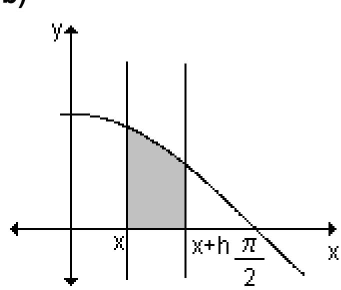


Para resolver la actividad 5, representamos gráficamente las regiones solicitadas en los dos primeros incisos.

a)



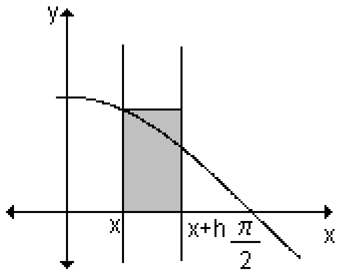
b)



Observando la segunda gráfica podemos afirmar que :

$$A(x+h) - A(x) = \int_0^{x+h} \cos t\, dt - \int_0^{x} \cos t\, dt$$

La primera integral representa el área bajo la gráfica entre 0 y x+h. La segunda integral representa el área bajo la gráfica entre 0 y x. Luego el área de la región sombreada es la diferencia entre ambas integrales.
Al dibujar un rectángulo de aproximación se obtiene:



El área del rectángulo está dado por $A = \cos x.h$

Comparando las dos figuras, se observa que el área real se aproxima al área del rectángulo entonces

$A(x+h) - A(x) \approx \cos x.h$

Luego, $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx \cos x$

De manera intuitiva esperamos que $A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \cos x$

Esto se verifica para cualquier función y es la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo.

El teorema fundamental del cálculo

Primera Parte

Si f es una función continua en [a, b] entonces la función $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, para $a \le x \le b$, es derivable y verifica $A'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ para todo valor de x del intervalo.

Esta igualdad expresa que cada función continua f(x) es la derivada de alguna otra función, $\int_a^x f(t)dt$. Luego, cada función continua tiene una antiderivada. Los procesos de derivación e integración son inversos entre sí.

Demostración. Queremos calcular $A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$

Pero según la definición de A(x) resulta:

$A(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$ y $A(x) = \int_a^x f(t)dt$

De aquí el numerador es: $A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$ **(1)**

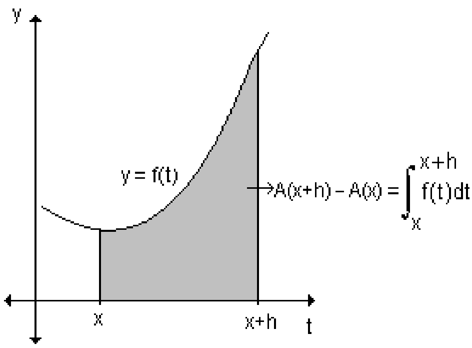
Por propiedades de la integral definida $\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$

Reemplazando en **(1)**, surge $A(x+h) - A(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$

Es decir $A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ y por lo tanto:

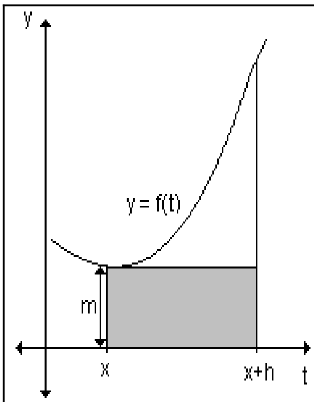
$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Sabemos que $A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$, para el caso de f no negativa, es el área comprendida entre la gráfica de $y = f(t)$ y el eje x entre x y x + h.

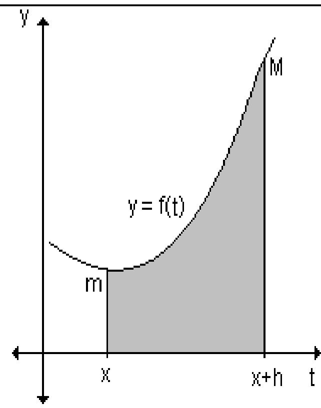


Si m es el mínimo valor y M es el máximo que toma la función en el intervalo [x, x+h], el área de la región sombreada estará comprendida entre el área del rectángulo de base h y altura m,y el área del rectángulo de base h y altura M.

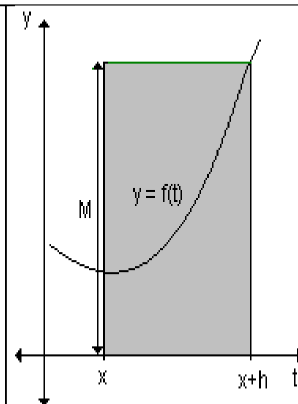
$$m.h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M.h$$



El área sombreada es m.h



El área sombreada es $\int_x^{x+h} f(t)dt$



El área sombreada es M.h

Suponemos que h > 0 (se demuestra de manera análoga para h < 0). Dividiendo por h, resulta: $m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq M$. Pero cuando h $\rightarrow$ 0, el intervalo [x, x+h] tiende a reducirse a un único punto x y por lo tanto los valores m y M tienden a f(x).

Por lo tanto: $A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$.

Luego $A'(x) = f(x)$.

Segunda Parte

Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y F una antiderivada cualquiera, entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Demostración.

Por la primera parte del teorema, la antiderivada existe y es $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Teniendo en cuenta que las funciones con derivadas difieren sólo en una constante, resulte que si F(x) es otra antiderivada, A(x) = F(x) + k.
Si x toma el valor a, se verifica que A(a) = F(a) + k pero como $A(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ entonces F(a) = –k. Luego A(x) = F(x) – F(a).

Si además sustituimos x por b, resulta A(b) = F(b) – F(a) , es decir:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Si F es cualquier antiderivada $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

A esta expresión se la conoce como REGLA DE BARROW:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Observación. El teorema fundamental del cálculo no requiere que la función sea positiva. Sirve para evaluar las integrales definidas y muestra la estrecha relación existente entre la derivada y la integral.

¿Cómo calcular $\int_a^b f(x)dx$ *?*

- Se halla una antiderivada F de f. Como puede ser cualquiera de las infinitas posibles, conviene elegir la más sencilla posible.
- Se calcula F(b) – F(a).

Ejemplo. Determine el valor de $\int_2^4 (x+1)\,dx$.

Como el integrando es una función continua, la integral existe. Para calcularla buscamos una antiderivada cualquiera de f(x).

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$.

Por la segunda parte del teorema fundamental del cálculo debemos hacer:
F(4) – F(2) = 12 – 4 = 8.

De forma práctica se escribe: $\int_2^4 (x+1)\,dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_2^4 = 12 - 4 = 8$

Ejemplo. Halle la función $F(x) = \int_0^x \left(1 - \dfrac{1}{4}t^2\right)dt$ para x = 0, $\dfrac{1}{2}$ y 1.

La integral existe ya que el integrando es una función continua.
Podemos hallar el valor de cada una de las tres integrales definidas cambiando por los límites superiores pedidos, pero es mucho más sencillo fijar x (como una

constante, temporalmente) y aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo con lo que obtenemos la función $F(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{4}t^2\right)dt = \left(t - \frac{t^3}{12}\right)\Big|_0^x = x - \frac{x^3}{12}$.

Si derivamos se obtiene $F'(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ que es el integrando evaluado en x.

Evaluamos F(x) en los distintos valores de x solicitados.

Si $x = 0 \Rightarrow F(0) = 0$

Si $x = \frac{1}{2} \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{96} = \frac{47}{96}$

Si $x = 1 \Rightarrow F(1) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Ejemplo. Encuentre el valor de a si $\int_{-1}^{1}\left[ax^2 + (a+1)x + 4\right]dx = \frac{28}{3}$

Encontrando una antiderivada y aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$\left(a\frac{x^3}{3} + (a+1)\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}(a+1) + 4\right) - \left(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}(a+1) - 4\right) =$$

$$= \frac{2}{3}a + 8$$

Igualando resulta: $\frac{2}{3}a + 8 = \frac{28}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}a = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

Ejemplo. Halle $\int_0^4 f(x)dx$ si $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 4 - x & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$.

La función f(x) es integrable. Por ser una función definida por tramos, usamos el teorema de aditividad para calcular la integral.

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^2 xdx + \int_2^4 (4-x)dx = x\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4$$

$$\int_0^4 f(x)dx = (1-0) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + \left(4.4 - \frac{4^2}{2}\right) - \left(4.2 - \frac{2^2}{2}\right) \Rightarrow \int_0^4 f(x)dx = \frac{9}{2}.$$

Para verificar los cálculos en este caso, puede graficar la función y calcular el área utilizando fórmulas para el cálculo de áreas de figuras geométricas.

¿Es fundamental el teorema fundamental del cálculo?

El teorema fundamental del cálculo es tan importante que alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía vencer el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz moldearon como el teorema fundamental, es posible resolver muchos problemas.
Este teorema recibe este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero, sabemos que surgió del problema de la tangente, mientras que, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado como lo es el problema del área. En Cambridge, el profesor de Newton, Isaac Barrow (1630–1677) fue quien descubrió que estos problemas están íntimamente relacionados. Se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El Teorema Fundamental del Cálculo da la relación inversa precisa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. El descubrimiento de esta asombrosa relación constituye uno de los logros matemáticos más importantes de la historia mundial.
Nos provee de una herramienta poderosa para evaluar integrales definidas. Este eslabón aparece claramente cuando escribimos $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ siendo F(x) una primitiva de f(x).

EJERCICIOS

1) Calcule:

a) $\int_0^3 \left(-x^2 + x - 1\right)dx$ **b)** $\int_{-2}^{1} \left(\frac{1}{3}t - 2\right)^2 dt$

c) $\int_1^3 (2t - 6)dt$ **d)** $\int_0^{\pi} (-3 + 2\operatorname{sen} x)dx$

2) Encuentre el valor de b tal que $\int_0^b 6(x-1)(x+1)dx = 4$.

RESPUESTAS

1)a) $-\frac{15}{2}$ **b)** $\frac{43}{3}$ **c)** -4 **d)** $4 - 3\pi = -5{,}42$ **2)** $b = -1, \quad b = 2$

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO FUNCIÓN – 3.2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1) Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$ **b)** $\int_1^2 x^2 dx$

2) Evalúe la función $F(x)=\int_0^x\left(t^2-6t\right)dt$ en $x=0$, 1 y 3.

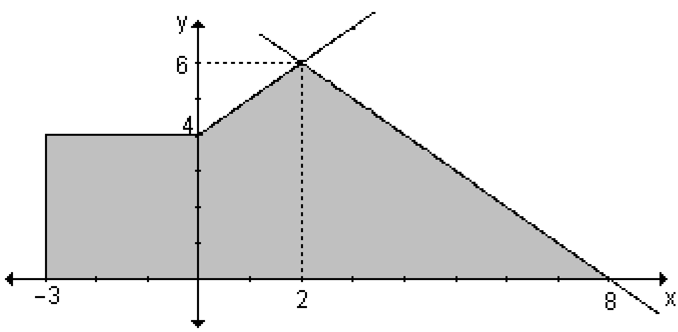
3) Determine el valor de m sabiendo que $\int_{-2}^{1}(mx+3)dx=3$.

4) Calcule el valor de $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ si $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x\le 0\\ 5 & \text{si } x>0\end{cases}$.

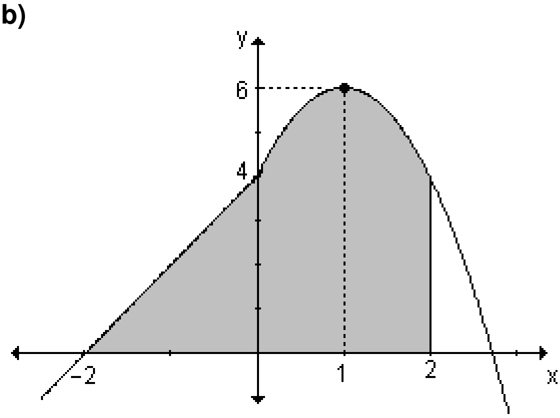
5) Encuentre el valor de a sabiendo que $\int_{a}^{2}(4x+1)dx=9$.

6) En las siguientes gráficas determine el área de la región sombreada:

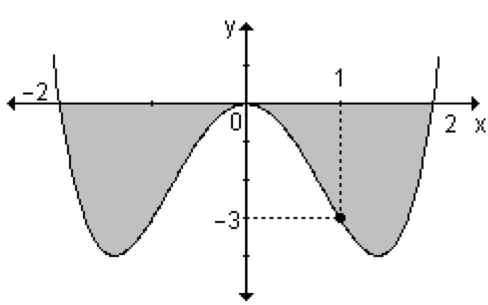
a)



b)



c)



PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1) El valor de $\int_1^4 2x\,dx$ es:

a) 3 **b)** 15 **c)** 2 **d)** 6

2) Para que $\int_0^a (2x-1)\,dx = 12$ el valor de a debe ser:

a) $a = 4$ **b)** $a = -3$ **c)** $a = 4, a = -3$ **d)** $a = 7$

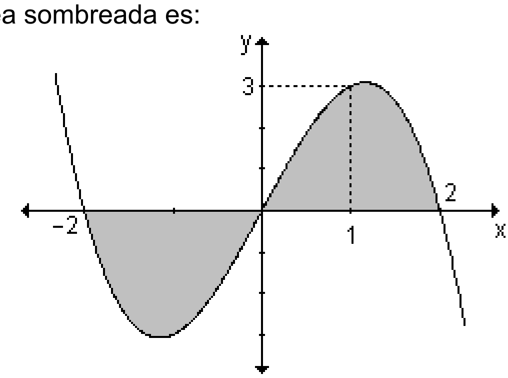
3) Sea la función $f : R \to R / x \to \begin{cases} 4 & \text{si } x < 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. El valor de $\int_0^3 f(x)dx$ es:

a) $\frac{35}{6}$ **b)** $\frac{29}{6}$ **c)** $\frac{16}{3}$ **d)** $\frac{17}{6}$

4) El valor de m para que $\int_0^2 (1 - mx)dx = -6$ debe ser:

a) –1 **b)** 4 **c)** –6 **d)** 2

5) El valor del área sombreada es:



a) 0 **b)** 4 **c)** 8 **d)** –4

6) El valor de $F(x) = \int_0^x (t-4)dt$ para $x = 1$ es:

a) –3 **b)** 0 **c)** $-\frac{3}{2}$ **d)** $-\frac{7}{2}$

AUTOEVALUACIÓN

1) Calcule $\int_0^4 g(x)dx$, si $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$.

2) Dada la función definida por $f: R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, halle el área bajo la curva y por encima del eje x en el intervalo $[-1, 3]$.

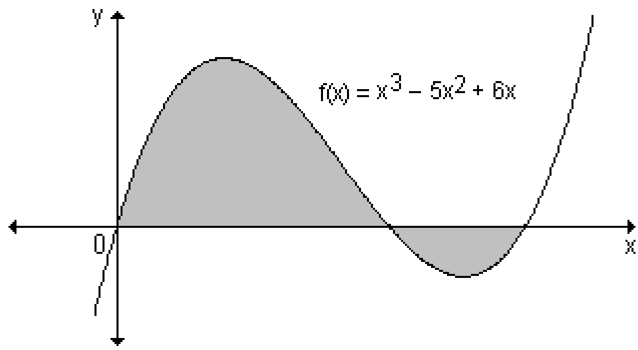
3) Encuentre el valor de a tal que $\int_1^a 2x(3x-1)dx = 44$.

4) Una partícula se mueve de tal forma que su velocidad (expresada en $\frac{m}{seg.}$) en cualquier instante t está dada por $v(t) = 6\sqrt{t}$, donde el tiempo está dado en segundos.

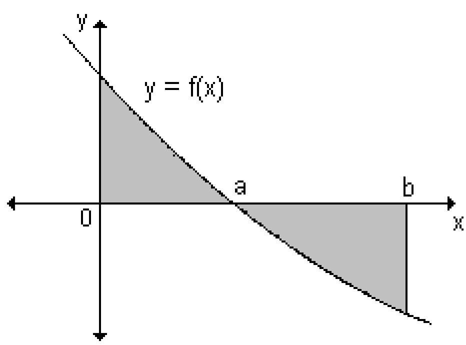
a) Determine la distancia, en metros, que recorre la partícula en los primeros 16 segundos.

b) Encuentre la aceleración a los 9 segundos.

5) Halle el área de la región sombreada.



6) Escriba, usando integrales, una expresión que permita calcular el área de la región sombreada:



EJERCICIOS DE REPASO

1) Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (2x-3)\,dx$ **b)** $\int_1^2 \frac{5-x}{x^3}\,dx$ **c)** $\int_{-2}^0 (x-2)(x+1)\,dx$

2) Obtenga $\int_0^3 f(x)\,dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

3) Halle el valor de b, b > 0, que verifica $\int_{-3}^{b}\left(9-x^2\right)dx = 36$.

4) Calcule $\int_{-1}^{3} g(x)dx$ para $g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2-x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

---

4. LA INTEGRAL INDEFINIDA

4.1 La integral indefinida.

4.2 Métodos de integración.

"Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar".

Hipatia

4.1 La integral indefinida

El problema de, dada la función derivada, hallar la función de la que proviene, o sea su antiderivada, se llama *búsqueda de la función primitiva*. Necesitamos dar una notación para cualquier primitiva F(x) de una función f(x).

Se llama integral indefinida de una función f(x) y se escribe $\int f(x)\ dx$ a una función primitiva de f(x).

$$\int f(x)\ dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

El problema de la búsqueda de la función primitiva no tiene solución única sino que tiene infinitas soluciones.
Si F(x) es una primitiva de f(x) también lo es F(x) + c pues:

$$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$$

Ejemplo. Dada $f(x) = 3\text{senx}$, $F_1(x) = -3\cos x$ y $F_2(x) = -3\cos x + 5$ son dos primitivas de las infinitas posibles.

La constante c se llama *constante de integración* y la integral se dice indefinida porque la constante c es arbitraria y hasta tanto no se de otra información adicional no se le asigna ningún valor definido.

Nota. Debemos distinguir entre una integral definida y una integral indefinida. Una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número, mientras que una integral indefinida $\int f(x)\ dx = F(x)$ es una función.

La regla de Barrow permite establecer la relación entre ambas:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Tabla de integrales indefinidas

1) $\int c.f(x)\,dx = c\int f(x)dx$

2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3) $\int dx = x + c$

4) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

5) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

6) $\int e^x dx = e^x + c$

7) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

8) $\int \text{senx}\,dx = -\cos x + c$

9) $\int \cos x\,dx = \text{senx} + c$

10) $\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}x + c$

11) $\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\text{cotg}x + c$

Ejemplo. Encuentre las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int x^5 dx$ **b)** $\int 5^x dx$

c) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$ **d)** $\int \left(3\operatorname{sen}x - \frac{1}{2x} + x^3 \right) dx$

a) Según la regla **4)** de la tabla anterior $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$.

b) Según la regla **7)** $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$.

c) Escribiendo el denominador como potencia , o sea, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, aplicando propiedad distributiva de la suma con respecto a la división y propiedades de la potencia resulta:

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - 3\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx .$$

Como la integral de la suma algebraica es la suma algebraica de las integrales:

$$\int \left(x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx - 3\int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx .$$

Resolviendo las integrales:

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c .$$

d) Por las reglas **1)** y **2)** de la tabla resulta:

$$\int \left(3\operatorname{sen}x - \frac{1}{2x} + x^3 \right) dx = 3\int \operatorname{sen}x dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} dx + \int x^3 dx .$$

Cada una de estas integrales se puede resolver aplicando una integral inmediata:

$$\int \left(3\operatorname{sen}x - \frac{1}{2x} + x^3 \right) dx = 3(-\cos x) - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{x^4}{4} + c = -3\cos x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{x^4}{4} + c.$$

Ejemplo. Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$ **b)** $\int_{-1}^0 \left(\sqrt{t} + 1\right)^2 dt$ **c)** $\int_0^{\pi} \left(3e^t + \sqrt[5]{t^2} - \cos t \right) dt$

a) Para calcular la integral pedida buscamos la integral indefinida y luego aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^3 x^{-2}dx = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^3 = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^3 = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^3 = -\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}.$$

b) Desarrollando el cuadrado del binomio y aplicando propiedades de la integral indefinida es posible encontrar la integral definida:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{t}+1\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t+2\sqrt{t}+1\right)dt = \int_0^1 t\,dt + 2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt + \int_0^1 dt = \left.\frac{t^{1+1}}{1+1}\right|_0^1 + 2\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1 + t\Big|_0^1$$

$$= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 + t\Big|_0^1 = \frac{17}{6}.$$

c) Aplicando propiedades de la integral se obtiene:

$$\int_0^{\pi}\left(3e^t + \sqrt[5]{t^2} - \cos t\right)dt = 3\int_0^{\pi} e^t dt + \int_0^{\pi} t^{\frac{2}{5}}dt - \int_0^{\pi} \cos t\,dt =$$

$$= 3e^t\Big|_0^{\pi} + \left.\frac{t^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}\right|_0^{\pi} + \operatorname{sen} t\Big|_0^{\pi} = 3e^{\pi} - 3 + \frac{5}{7}\pi^{\frac{7}{5}}.$$

Ejemplo. Determine la función f(x) sabiendo que $f''(x) = 12x$, $f'(-1) = 0$ y $f(0) = 7$.

Al integrar la derivada segunda obtenemos la derivada primera, es decir:

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 12x\,dx = 6x^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 + c_1$

Como $f'(-1) = 0$, reemplazamos para calcular el valor de c_1:

$6.(-1)^2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -6.$

Por lo tanto $f'(x) = 6x^2 - 6$.

Integrando la derivada primera resulta la función f(x), o sea:

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int\left(6x^2 - 6\right)dx = 2x^3 - 6x + c_2.$

Como $f(0) = 7$ sustituimos para obtener el valor de c_2:

$2.0^3 - 6.0 + c_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 7$

En consecuencia $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$.

Problema

Una partícula que se mueve tiene una aceleración dada por $a(t) = 15t + 8$ en el tiempo t expresado en segundos y su velocidad es de 160 $\frac{m}{seg}$ a los 4 segundos. Determine la ley que expresa su posición en cada instante t sabiendo que a los 2 segundos se encuentra a 80 m.

Como la función aceleración es la derivada de la función velocidad, podemos obtener la velocidad en función del tiempo integrando la función aceleración.

$v(t) = \int a(t)dt = \int (15t+8)dt = 15.\frac{t^2}{2} + 8t + c_1$

Como $v(4) = 160$ resulta: $15.\frac{4^2}{2} + 8.4 + c_1 = 160 \Rightarrow c_1 = 8$

Por lo tanto la función velocidad es $v(t) = \frac{15}{2}t^2 + 8t + 8$

Siguiendo el mismo procedimiento con las funciones velocidad y posición en función del tiempo, resulta:

$s(t) = \int v(t)dt = \int \left(\frac{15}{2}t^2 + 8t + 8\right)dt = \frac{5}{2}t^3 + 4t^2 + 8t + c_2$

Como $s(2) = 80$, calculamos c_2: $\frac{5}{2}.2^3 + 4.2^2 + 8.2 + c_2 = 80 \Rightarrow c_2 = 28$

En consecuencia, la posición en el tiempo t está dada por:

$s(t) = \frac{5}{2}t^3 + 4t^2 + 8t + 28$.

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int 3x^7 dx$ **b)** $\int \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{3}}dx$ **c)** $\int \frac{\sqrt{x}+2}{x^2}dx$

d) $\int 3\frac{e^{7x}}{e^{6x}}dx$ **e)** $\int \frac{senx}{tgx}dx$ **f)** $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

2) Determine el valor de b si $\int_0^1 \left(\frac{b}{3}x + \frac{1}{6}\right)dx = 1$.

3) La pendiente de la recta tangente a una curva en cada punto es 3x + 2. Sabiendo que la curva pasa por el punto (–2, 3), halle la ecuación de dicha curva.

4) Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto (–2, 4) sabiendo además que la pendiente de la recta tangente en cada punto es igual a la abscisa del punto de tangencia.

5) La segunda derivada de la función f es $f''(x) = 6x-1$. Halle la función, sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto P(2, 1) y que en ese punto la recta tangente es $4x - y - 1 = 0$.

RESPUESTAS

1) a) $y = \frac{3}{8}x^8 + c$ **b)** $y = -\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{3}} + c$ **c)** $y = -2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-1} + c$

d) $y = 3e^x + c$ **e)** $y = \text{senx} + c$ **f)** $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x - x^{-1} + c$

2) $b = 5$ **3)** $y = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ **4)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

5) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 7$

4.2 Métodos de integración

El teorema fundamental del cálculo proporciona una herramienta poderosa para calcular integrales definidas, pero es necesario calcular primero una primitiva. Desarrollaremos algunas técnicas que nos permiten ampliar el cálculo de las mismas.

Integración por sustitución

Para calcular las derivadas de funciones compuestas se utiliza la regla de la cadena. La integración por sustitución proporciona un método que permite reconocer cuándo un integrando es el resultado de una derivada en la que se ha utilizado la regla de la cadena.

Ejemplo. Halle $\int 2xe^{x^2}dx$.

Debemos encontrar una función F(x) para la cual $F'(x) = 2xe^{x^2}$.
Un indicio importante es que x^2 es una antiderivada de $2x$ y x^2 aparece como exponente de e. Se observa que la derivada de $F(x) = e^{x^2}$ es $F'(x) = 2xe^{x^2}$ que es el integrando, donde el factor $2x$ es la derivada del exponente x^2.
En general, cuando una parte del integrando es la derivada de otra parte del mismo se está en presencia de una derivada que se resolvió aplicando regla de la cadena.

Luego $\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + c$.

Desarrollaremos un procedimiento sencillo utilizando la idea del ejemplo.

La base del método es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que es función de x. En general este método se usa siempre que tengamos una integral de la forma $\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$.

Si $F' = f$ entonces $\int F'[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = F[g(x)] + c$ porque la regla de la cadena de la derivación es $\frac{d}{dx} F[g(x)] = F'[g(x)] \cdot g'(x)$

Si hacemos el "cambio de variable" o "la sustitución" $u = g(x)$, entonces, tenemos:

$$\int F'[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = F[g(x)] + c = F(u) + c = \int F'(u)\,du,$$

O bien si se escribe $F' = f$ se obtiene $\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$.

Se probó lo siguiente:

Regla de sustitución. Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo conjunto de imágenes es un intervalo I y f es continua en I, entonces:

$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$.

Ejemplo. Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int 3x\cos\left(x^2\right)dx$ **b)** $\int e^{3x}dx$ **c)** $\int u^3\sqrt{u^4+2}\,du$

a) Podemos observar que $\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$, que es parte del integrando. Hacemos la sustitución $u = x^2$, de modo que $du = 2xdx$. Entonces:

$$\int \underbrace{3\cos\left(x^2\right)}_{\cos u} \underbrace{xdx}_{\frac{du}{2}} = \int \frac{3}{2}\cos(u)du = \frac{3}{2}\int \cos(u)du = \frac{3}{2}\operatorname{senu} + c$$

Haciendo la sustitución de u obtenemos que $\int 3x\cos\left(x^2\right)dx = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(x^2\right) + c$

b) Sea $u = 3x \Rightarrow du = 3\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$\int e^{3x}dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{e^u}{3} + c$. Luego $\int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

c) Sea $t = u^4 + 2$, diferenciando ambos miembros resulta:

$dt = 4u^3\,du \Rightarrow du = \frac{dt}{4u^3}$.

Procediendo de manera similar a los ejemplos anteriores:

$$\int u^3\sqrt{u^4+2}\,du = \int \underbrace{\sqrt{u^4+2}}_{\sqrt{t}}\,\underbrace{u^3du}_{\frac{dt}{4}} = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c\,.$$

Entonces $\int u^3\sqrt{u^4+2}\,du = \frac{1}{6}\left(u^4+2\right)^{\frac{3}{2}} + c\,.$

La técnica de sustitución consiste en los pasos generales:

- Escoger una expresión para u.
- Calcular du.
- Reemplazar todos los términos en el integrando original con expresiones que involucren a u y du.
- Calcular la integral resultante (en u). Si no se puede calcular, puede ser necesario ensayar una elección diferente de u.
- Reemplazar todos los términos en u de la primitiva con la correspondiente expresión en la variable original.

Integración por sustitución para integrales definidas

Para resolver una integral definida utilizando el método de sustitución pueden seguirse dos caminos.

- Uno es cambiando adecuadamente los límites de integración cuando se hace la sustitución de la siguiente manera:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Con esta fórmula se hace la misma integración que se haría para calcular la integral indefinida. Después se integra respecto a u desde el valor que tiene u en $x = a$ hasta el valor que tiene en $x = b$.
De esta manera, una vez que se ha realizado la sustitución y se obtiene una integral más sencilla en la variable, la evaluación numérica puede realizarse en términos de u.

- Otro es hallar la integral indefinida correspondiente por el método de sustitución y luego usar una de las antiderivadas resultantes para evaluar la integral definida.

Ejemplo: Resuelva: **a)** $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ **b)** $\int_0^2 \frac{x}{\left(6+x^2\right)^2}dx$

Utilizando el primer método, elegimos u para transformar la integral y cambiamos los límites de integración.
Sustituimos $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2dx$
Para hallar los nuevos límites de integración, observamos que cuando $x = -1$, entonces $u = 0$ y cuando $x = 1$, $u = 2$.

Por lo tanto, $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_0^2 u^{\frac{1}{2}}du = = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}.2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.2^{\frac{5}{2}} \approx 1{,}8856.$

b) Sustituimos $u = g(x) = 6 + x^2$ por lo que $du = 2x\,dx$ y $\frac{du}{2x} = dx$.

Entonces si $x = 0$, resulta $u = 6$ y si $x = 2$, $u = 10$.

$$\int_0^2 \frac{x}{\left(6+x^2\right)^2}dx = \int_6^{10}\frac{du}{2u^2} = \frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1}\Big|_6^{10} = -\frac{1}{2u}\Big|_6^{10} = -\frac{1}{20}+\frac{1}{12} = \frac{1}{30}$$

Ejemplo. Halle $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$.

Resolveremos la integral definida determinando primero una primitiva de $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y aplicando luego la segunda parte del teorema fundamental del cálculo.

Calculamos $\int \frac{x}{1+x^2}dx$, para ello sustituimos la expresión $1 + x^2$ por u.

$u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$. Reemplazando:

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c.$$

Estamos en condiciones de resolver:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int (4x+3)^2 dx$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2+6x}}$ **c)** $\int \frac{dx}{8x-1}$

d) $\int 4x^3\left(x^4-3\right)^2 dx$ **e)** $\int x.a^{3x^2}dx$ **f)** $\int \frac{6x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$

2) Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{9+2x}$ **b)** $\int_0^{\pi}\cos(2x)dx$

RESPUESTAS

1)a) $y = \frac{1}{12}(4x+3)^3 + c$ **b)** $y = \frac{1}{3}(2+6x)^{\frac{1}{2}} + c$ **c)** $y = \frac{1}{8}\ln|8x-1| + c$

d) $y = \frac{\left(x^4-3\right)^3}{3} + c$ **e)** $y = \frac{a^{3x^2}}{6\ln a} + c$ **f)** $y = 4\sqrt{x^3+1} + c$

2)a) $\frac{1}{2}\ln 3$ **b)** 0

Integración por partes

Toda regla de derivación tiene una correspondiente de integración. La regla de sustitución de la integración corresponde a la regla de la cadena en la derivación. La regla que corresponde a la regla del producto de la derivación se llama regla de integración por partes. La regla del producto expresa que si f y g son funciones diferenciables entonces $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

Integrando ambos miembros se obtiene:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x).g(x)]dx = \int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx$$

La integral del primer miembro es simplemente f(x) . g(x), luego:

$f(x) \,.\, g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$.

Despejando la primera integral del segundo miembro resulta:

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x) \,.\, g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$.

Ésta es la fórmula de integración por partes.

Para que resulte más fácil de recordar es conveniente utilizar la siguiente notación: $u = f(x)$ y $v = g(x)$.

Entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$.

Sustituyendo resulta: $\int u.dv = u.v - \int v\,du$.

El objetivo al aplicar la integración por partes, es obtener una integral más sencilla que la inicial. Al decidir una selección para u y dv se trata de que $u = f(x)$ sea una función que se simplifique cuando se derive mientras que $dv = g'(x)dx$ se pueda integrar fácilmente para encontrar v.

Ejemplo. Resuelva las siguientes integrales

a) $\int x\cos x\,dx$ **b)** $\int \ln x\,dx$ **c)** $\int x^2e^x dx$ **d)** $\int e^{2x}\cos x\,dx$

a) En primer lugar $\int x\cos x\,dx$ no se puede resolver utilizando alguna de las integrales básicas o la regla de sustitución. Para emplear la integración por partes debemos elegir u (una función para derivar) y dv (una función para integrar).
Si se considera u = x y dv = cosx dx, entonces du = dx e integrando dv se tiene $v = \int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + c$

Al desarrollar la integración por partes se elimina esta constante de integración. Usualmente se escribe toda la información de la siguiente manera:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \text{sen}\,x$

Por lo tanto $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = x\,\text{sen}x - \int \text{sen}x\,dx = x\,\text{sen}x + \cos x + c$

La elección de u y dv es muy importante. Resolveremos la integral invirtiendo la elección de u y dv.

$u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen}x\,dx$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$

De aquí se obtiene:

$$\int x\cos x\,dx = \cos x\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2(-\text{sen}x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cos x + \frac{1}{2}\int x^2\text{sen}x\,dx$$

La situación es más complicada con respecto a la integral original porque la potencia de x en la nueva integral es mayor, por lo que la elección no es adecuada.

b) La integral $\int \ln x\,dx$ parece sencilla pero no es una de las integrales básicas. Para aplicar integración por partes debemos elegir u (para derivar) y dv (para integrar). No sirve elegir dv = lnx dx pues esto es lo mismo que debemos integrar.

Sea $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Aplicando la regla de integración por partes resulta:

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\ln x}_{u}.\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v}.\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

c) La integral pedida no puede resolverse en forma directa ni por el método de sustitución por lo que intentaremos aplicar integración por partes. Elegimos:

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^x\,dx \Rightarrow v = e^x$

Con esta elección la integral resulta: $\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = x^2e^x - 2\int xe^x dx$

Esta última integral no puede resolverse directamente, así que volvemos a integrar por partes. Ahora se elige:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{x}dx \Rightarrow v = e^{x}$

Aplicando integración por partes a la última integral resulta:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Nota. Cuando al aplicar el método de sustitución por partes vuelve a quedar una integral que se resuelve por partes, no podemos designar $u = \int g(x)\,dx$ y $dv = f'(x)\,dx$ pues retrocederíamos al paso inicial.

d) La integral $\int e^{2x} \cos x\, dx$ no es posible resolverla directamente por tabla ni utilizando el método de sustitución. Se elige el método de integración por partes, tomando:

$u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}$

$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

Aplicando integración por partes se obtiene:

$$\int e^{2x} \cos x\, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x - \int 2e^{2x} \operatorname{sen} x dx = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx =$$

La integral obtenida también debe resolverse por partes.

Se elige:

$u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}$

$dv = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow v = -\cos x$

Por lo tanto: $\int e^{2x} \cos x\, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2\left(e^{2x}.(-\cos x) - \int (-\cos x)\, 2e^{2x}\, dx\right)$

$$\int e^{2x} \cos x\, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2\left(-e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cos x\, dx\right)$$

$$\int e^{2x} \cos x\, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x - 4\int e^{2x} \cos x\, dx$$

La última integral es la misma que la que estamos intentando resolver.

Sumando $4\int e^{2x} \cos x\, dx$ a ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$5\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x$$

Dividiendo ambos miembros por 5 y sumando la constante de integración resulta:

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} e^{2x} \operatorname{sen} x + \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + c.$$

Intente resolver la integral considerando $u = \cos x$ y $dv = e^{2x}$.

Al integrar por partes conviene tener presente las siguientes reglas básicas:

Cuando la integral a resolver es de la forma:

a) $\int p(x).f(x)dx$, donde p es un polinomio y f es una función no inversa, conviene designar $u = p(x)$ y $dv = f(x)\,dx$.

b) $\int f^{-1}(x).g(x)dx$, donde $f^{-1}(x)$ es una función inversa y g una función cualquiera, conviene designar $u = f^{-1}(x)$ y $dv = g(x)\,dx$.

c) $\int f(x).g(x)\,dx$, donde ninguna de ellas es un polinomio y ninguna de ellas es una función inversa, se eligen u y dv utilizando un criterio personal.

d) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ se debe respetar la posición que cada función ocupa en la expresión algebraica, designando según convenga: $u = \frac{1}{g(x)}$ o $dv = \frac{dx}{g(x)}$.

Integración por partes para integrales definidas

Para resolver una integral definida utilizando integración por partes pueden seguirse dos caminos. Uno combina la fórmula de integración por partes con el teorema fundamental del cálculo. Evaluando ambos miembros de dicha fórmula entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, aplicamos el teorema fundamental y se obtiene: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$.

Utilizando la notación: $u = f(x)$ y $v = g(x)$, resulta: $\int_a^b u.dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

También es posible aplicar la integración por partes a la integral indefinida correspondiente y luego evaluar la primitiva resultante entre los límites de integración.

Ejemplo. Halle $\int_3^5 x\cos x\,dx$

Sea $u = x \Rightarrow du = dx$. Sea $dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \text{sen } x$

$$\int_3^5 x\cos x\;dx = x\,\text{sen}x\Big|_3^5 - \int_3^5 \text{sen}x\,dx = x\,\text{sen}x\Big|_3^5 + \cos x\Big|_3^5$$

$$\int_3^5 x\cos x\,dx = 5\text{ sen }5 - 3\text{ sen }3 + \cos 5 - \cos 3 \approx -3{,}9443.$$

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int \sqrt{x}\,\log x\,dx$ **b)** $\int x\sqrt{4+x}\,dx$

2) Calcule

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{1} x^2 e^{4x} dx$ **c)** $\int_0^2 \frac{x}{(x+1)^3} dx$

RESPUESTAS

1)a) $y = 0{,}667.x^{\frac{3}{2}} \log x - 0{,}193.x^{\frac{3}{2}} + c$ **b)** $y = \frac{2}{3}x(4+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(4+x)^{\frac{5}{2}} + c$

2)a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{5}{32}e^4 - \frac{13}{32}e^{-4}$ **c)** $\frac{2}{9}$

Integración por descomposición en fracciones simples

Introduciremos un método que nos permitirá calcular la integral de una función racional. El mismo se basa en un teorema del álgebra mediante el cual cualquier cociente de funciones polinomiales se puede escribir como una suma de fracciones más simples que podemos integrar con técnicas ya conocidas.

Ejemplo. Encuentre $\int \frac{3x-3}{x^2-9} dx$

Observemos que si se suman las fracciones $\frac{1}{x-3}$ y $\frac{2}{x+3}$ se obtiene:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{x+3+2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+3+2x-6}{(x-3)(x+3)} = \frac{3x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{3x-3}{x^2-9}$$

Si invertimos el procedimiento resulta: $\frac{3x-3}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3}$

El segundo miembro se llama *descomposición en fracciones simples* del primer miembro.

Resolver $\int \frac{3x-3}{x^2-9} dx$ es lo mismo que resolver:

$$\int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{2}{x+3} dx = \int \frac{1}{x-3} dx + 2\int \frac{1}{x+3} dx$$

Resolviendo cada integral por sustitución resulta:

$$\int \frac{1}{x-3} dx + 2\int \frac{1}{x+3} dx = \ln|x-3| + 2\ln|x+3| + c$$

Toda función racional, es decir, cualquier cociente de dos funciones polinomiales, puede descomponerse en una suma de funciones racionales más sencilla.

La integral de una función racional se puede transformar en la suma de integrales de fracciones más simples.

Para analizar el método consideremos $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$.

Es necesario tener en cuenta los grados de p(x) y q(x).

- Si gr p(x) $<$ gr q(x) se aplica el método de integración por descomposición en fracciones simples que se analizará. Se presentan distintos casos, según la naturaleza de las raíces del denominador. Desarrollaremos los que corresponden a raíces reales.

- Si gr p(x) $\geq$ gr q(x) se divide previamente y luego se aplica el método.

Factores lineales distintos en el denominador

La función polinomial q(x) se puede descomponer en factores lineales simples, es decir, $q(x) = a(x - x_1).(x - x_2)....(x - x_n)$ donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son n raíces *reales* y *distintas*.

Ejemplo. Resuelva $\int \frac{x+8}{x^2 + x - 2} dx$.

El denominador se factoriza $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

Por lo tanto $\frac{x+8}{x^2 + x - 2} = \frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$.

Como el denominador tiene dos factores lineales distintos la descomposición en fracciones simples es

$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$, donde A y B son números reales.

Multiplicando ambos miembros por $(x - 1)(x + 2)$, resulta:

$x + 8 = A(x + 2) + B(x - 1)$

Esta expresión es una identidad que se verifica para todo número real.

Para encontrar los valores de A y B podemos reemplazar x por cualquier número. Conviene reemplazar x por el valor de las raíces de q(x) porque de ese modo se anulan, para cada valor de x, todos los términos excepto uno.

Si $x = 1$ resulta $9 = A.3 \Rightarrow A = 3$

Si $x = -2$ se obtiene $6 = -3B \Rightarrow B = -2$

Luego: $\int \frac{x+8}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \int \frac{3}{x-1} dx - 2\int \frac{1}{x+2} dx =$

$= 3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + c$.

En general, para resolver $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ se factoriza el denominador de la siguiente forma:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{p(x)}{a(x - x_1).(x - x_2)...(x - x_n)} dx = \frac{1}{a} \int \frac{p(x)}{(x - x_1).(x - x_2)...(x - x_n)} dx$$

Se dispone la expresión $\frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}$ como una suma de n fracciones simples en las que el denominador es uno de los n factores de q(x) y el numerador es una constante a determinar.

Así pues: $$\frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} = \underbrace{\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}}_{\text{n fracciones simples}}$$

Se multiplica ambos miembros de la igualdad por $(x - x_1)$. $(x - x_2)$... $(x - x_n)$, obteniéndo dos polinomios iguales. La igualdad se verifica para cualquier número real. Dándole valores reales cualesquiera a x puede obtenerse el valor de las constantes A_1, A_2,..., A_n. La integral de la función racional es igual a la integral de la suma de fracciones simples que se resuelven teniendo en cuenta las reglas de integración.

Factores lineales repetidos en el denominador

La función polinomial q(x) se puede descomponer en factores lineales donde alguno de ellos se repite, es decir, $q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_n)$ donde $x_1, x_2,..., x_n$ son n raíces *reales con un orden de multiplicidad k*: $x_1, x_2,..., x_k, x_{k+1},..., x_n$, o sea, $q(x)=a(x-x_1)^k.(x-x_{k+1})....(x-x_n)$.

Escribimos el cociente de funciones polinomiales de la forma:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{1}{a}\left[\int \frac{p(x)}{(x-x_1)^k(x-x_{k+1})...(x-x_n)}dx\right]$$

Trabajamos con $\frac{p(x)}{(x-x_1)^k(x-x_{k+1})...(x-x_n)}$ que escribiremos como una suma de n fracciones simples de las que se deberán determinar las n constantes del numerador con los denominadores escritos según las siguientes reglas:

- cada uno de los factores que tienen raíces distintas son denominadores de una única fracción.
- para un factor que tiene una raíz de orden de multiplicidad k, se tendrán k sumandos.

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^k}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}}+...+\frac{A_k}{(x-x_1)}$$

Luego: $$\frac{p(x)}{(x-x_1)^k(x-x_{k+1})..(x-x_n)} =$$

$$=\frac{A_1}{(x-x_1)^k}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}}+..+\frac{A_k}{(x-x_1)}+\frac{A_{k+1}}{x-x_{k+1}}+..+\frac{A_n}{x-x_n}$$

De aquí, se multiplica miembro a miembro por el denominador obteniéndose una identidad. Reemplazando x por cualquier número real es posible obtener el valor de las constantes $A_1, A_2,..., A_k,..., A_n$.

Luego se integra según las reglas de integración.

Ejemplo. Encuentre la solución de la integral $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2}dx$.

Factorizando el denominador se obtiene $x^3 - 3x^2 = x^2$ (x − 3). Se observa que tiene una raíz, x = 0, de orden de multiplicidad 2 y otra raíz simple, x = 3.

Se puede escribir: $\frac{x+2}{x^3-3x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-3)}$

Entonces, $\frac{x+2}{x^3-3x^2} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-3}$

Multiplicando ambos miembros por $x^2.(x-3)$ se obtiene:

$x+2 = A_1(x-3) + A_2x(x-3) + A_3x^2$,

Esta es una identidad que se verifica para cualquier número real. Para determinar el valor de A_1, A_2, A_3, sustituimos la variable por valores arbitrarios (para que sea más simple, dos de los valores pueden ser las raíces del denominador, el tercero cualquier otro número real).

Para $x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1(0-3) + A_2.0 + A_3.0 = 2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{2}{3}$

Para $x = 3 \quad \Rightarrow \quad A_1.0 + A_2.0 + 9A_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad A_3 = \frac{5}{9}$

Si consideramos x = 1 nos queda: $1+2 = A_1.(1-3) + A_2.1.(1-3) + A_3.1$

como $A_1 = -\frac{2}{3}$ y $A_3 = \frac{5}{9}$ entonces $3 = -\frac{2}{3}.(-2) + A_2.(-2) + \frac{5}{9}$, de donde se obtiene $A_2 = -\frac{5}{9}$.

Resolver $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2}dx$ es lo mismo que resolver $\int \left(\frac{-\frac{2}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{5}{9}}{x} + \frac{\frac{5}{9}}{x-3} \right) dx$

Aplicando propiedades y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{x+2}{x^3-3x^2}dx = \int \frac{-\frac{2}{3}}{x^2}dx - \int \frac{\frac{5}{9}}{x}dx + \int \frac{\frac{5}{9}}{x-3}dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{5}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{9}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-3x^2}dx = \frac{2}{3x} - \frac{5}{9}\ln|x| + \frac{5}{9}\ln|x-3| + c.$$

Fracción impropia

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador se debe efectuar primero la división. Así se obtiene un polinomio más una fracción propia que podrá escribirse como una suma de fracciones simples.

$\dfrac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ donde c(x) es el cociente y r(x) es el resto.

Luego: $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$ donde gr $r(x) < $ gr $q(x)$

Para hallar $\displaystyle\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$ debemos aplicar lo estudiado en los casos anteriores.

Ejemplo. Halle la solución de la integral $\displaystyle\int \frac{3x^2 - x}{x^2 - 4}\,dx$.

Sea $p(x) = 3x^2 - x$ y $q(x) = x^2 - 4$.

Como gr $p(x) =$ gr $q(x)$ debemos dividirlos:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - x & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} 3x^2 - 12 & 3 \\ \hline -x + 12 & \end{array}$$

Luego: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{3x^2 - x}{x^2 - 4} = 3 + \dfrac{-x+12}{x^2 - 4}$

La fracción $\dfrac{-x+12}{(x+2)(x-2)}$ puede escribirse como $\dfrac{-x+12}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{x+2}$.

Multiplicando ambos miembros por (x+2)(x–2) resulta: $-x+12 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$

Si $x = 2 \Rightarrow 10 = 4A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \dfrac{5}{2}$

Si $x = -2 \Rightarrow 14 = -4A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -\dfrac{7}{2}$

Por lo tanto: $\dfrac{3x^2 - x}{x^2 - 4} = 3 + \dfrac{5}{2(x-2)} - \dfrac{7}{2(x+2)}$

Luego:

$$\int \frac{3x^2 - x}{x^2 - 4}\,dx = \int 3dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x+2} = 3x + \frac{5}{2}\ln|x-2| - \frac{7}{2}\ln|x+2| + c$$

Integración por descomposición en fracciones simples para integrales definidas

Cuando se evalúa una integral definida por descomposición en fracciones simples se debe encontrar primero una primitiva de la función y evaluar la integral definida aplicando la segunda parte del teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo. Resuelva $\int_{-3}^{2} \frac{2x^2 + x - 18}{x - 3} dx$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, realizamos la división obteniendo $\frac{2x^2 + x - 18}{x - 3} = 2x + 7 + \frac{3}{x-3}$.

Entonces:

$$\int \frac{2x^2 + x - 18}{x - 3} dx = 2\int x dx + 7\int dx + 3\int \frac{1}{x-3} dx = x^2 + 7x + 3 \ln|x-3|.$$

Luego $\int_{-3}^{2} \frac{2x^2 + x - 18}{x - 3} dx = x^2 + 7x + 3\ln|x-3|\Big|_{-3}^{2} = 30 - 3\ln 6.$

EJERCICIO

Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+5}{(x+3)(x-1)} dx$ **b)** $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2 - 1} dx$

c) $\int \frac{2x+1}{x^2(x-2)^2} dx$ **d)** $\int \frac{x-4}{(x+1)^3(x+3)} dx$

RESPUESTAS

a) $y = -\frac{1}{2}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + c$ **b)** $y = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + c$

c) $y = \frac{3}{4}\ln x - \frac{1}{4x} - \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{4(x-2)} + c$

d) $y = \frac{7}{8}\ln|x+3| - \frac{7}{8}\ln|x+1| - \frac{7}{4(x+1)} + \frac{5}{4(x+1)^2} + c$

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.1 LA INTEGRAL INDEFINIDA – 4.2 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1) Halle una función $y = f(x)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

a) $f''(x) = 6$ $f'(2) = 7$ $f(1) = 0$

b) $f''(x) = 6x + 1$ $f'(1) = 2$ $f(0) = 3$.

2) Verifique las siguientes igualdades:

a) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx = 3\sqrt{x^2+1}+c$

c) $\int e^{-x}(x-5)dx = -(x-5)e^{-x} - e^{-x} + c$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}dx = \ln|x-1| + \ln|x+2| + c$

3) Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int (1+3z)z^2 dz$

b) $\int -2x^3 e^{x^4} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{t^2+2}{t^2}dt$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

e) $\int x^2(\ln x)^2 dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x-18}{x-3}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-x^2}dx$

Integración aproximada

Existen dos situaciones en las cuales es imposible hallar el valor exacto de una integral definida.

- La primera proviene del hecho de que, para evaluar $\int_a^b f(x)dx$ aplicando la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, se necesita conocer una primitiva F. Sin embargo en muchos casos hallar una primitiva es difícil o prácticamente imposible. Por ejemplo evaluar $\int_0^3 e^{x^2}dx$ o bien $\int_a^b \sqrt{1+x^3}dx$.
- La segunda situación surge cuando la función se determina a partir de una experiencia científica, por ejemplo en un laboratorio, a través de lecturas de instrumentos o datos recogidos.

En los dos casos planteados se pueden calcular los valores aproximados de la integral definida utilizando lo que se conoce como *integración numérica* o *integración aproximada*.
Estos métodos emplean valores de f(x) en diversos puntos y son especialmente apropiados para computadoras y calculadoras.
Un método para resolver estos casos ya lo conocemos dado que la integral definida se define como un límite de sumas de Riemann de modo que se podría utilizar cualquiera de estas sumas para aproximar la integral.
También es posible emplear la regla del punto medio, la regla trapezoidal o la regla de Simpson.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1) Se sabe que $f'(x) = 2x + 5$ y $f(2) = 11$. Entonces:

a) $f(x) = x^2 + 5x$ **b)** $f(x) = x^2 + 5x + 3$

c) $f(x) = x^2 + 5x - 3$ **d)** $f(x) = x^2 + 5x + 11$

2) Se sabe que $g'(x) = 2e^{2x} - 4$ y $g(0) = 3$. Entonces:

a) $g(x) = e^{2x} - 4x + 1$ **b)** $g(x) = e^{2x} - 4x + 2$

c) $g(x) = e^{2x} - 4x$ **d)** $g(x) = e^{2x} - 4x + 3$

3) Se sabe que $f''(x) = 20x^3 + 4e^{2x}$, $f'(0) = 2$ y $f(0) = -2$, entonces:

a) $f(x) = x^5 + e^{2x} - 3$ **b)** $f(x) = x^5 + e^{2x}$

c) $f(x) = 5x^4 + 2e^{2x}$ **d)** $f(x) = 5x^4 + 2e^{2x} - 3$

4) El resultado de $\int \operatorname{sen}(2x)\,dx$ es:

a) $\frac{1}{2}\cos(2x) + c$ **b)** $-\frac{1}{2}\cos(2x) + c$

c) $\cos(2x) + c$ **d)** $-\cos(2x) + c$

5) El resultado de $\int \frac{e^{5x}}{e^{3x}}\,dx$ es:

a) e^{2x} **b)** $\frac{1}{2}e^{2x} + c$ **c)** $\frac{1}{2}e^{2x}$ **d)** $e^{2x} + c$

6) El resultado de $\int \frac{\operatorname{tg}x}{\sec x}\,dx$ es:

a) $\cos x + c$ **b)** $-\cos x$

c) $-\cos x + c$ **d)** $\cos x$

7) El resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$ es:

a) $2\sqrt{1+2x} + c$ **b)** $\sqrt{1+2x} + c$

c) $\sqrt{1+2x}$ **d)** $2\sqrt{1+2x}$

8) El resultado de $\int \frac{x^2}{4x^3+1}\,dx$ es:

a) $\frac{1}{12}\ln\left|4x^3+1\right| + c$ **b)** $\ln\left|4x^3+1\right| + c$

c) $\frac{x^3}{x^4+x} + c$ **d)** $\frac{1}{12}\ln\left|4x^3+1\right|$

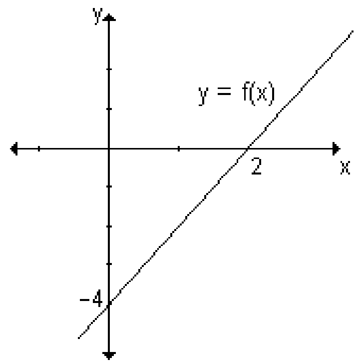
9) El resultado de $\int 2xe^x\,dx$ es:

a) $x^2 e^x + c$ **b)** $xe^x - e^x + c$

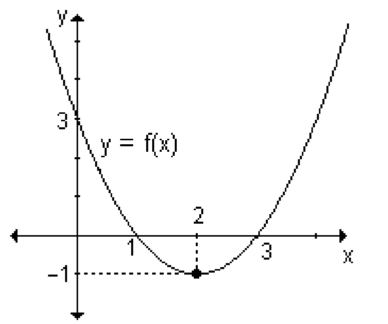
c) $2xe^x - 2e^x + c$ **d)** $2xe^x - e^x + c$

10) Sea la función $f'(x) = 2x - 4$, una de sus posibles primitivas es:

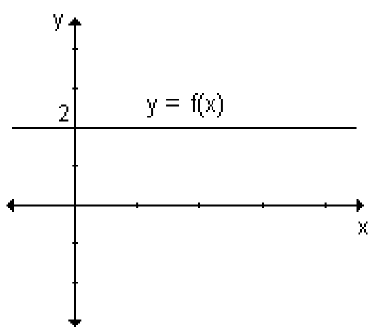
a)



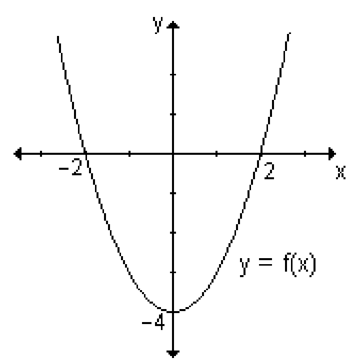
b)



c)

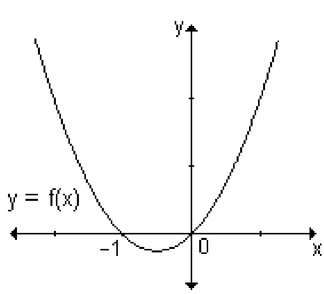


d)

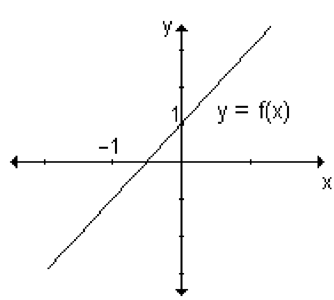


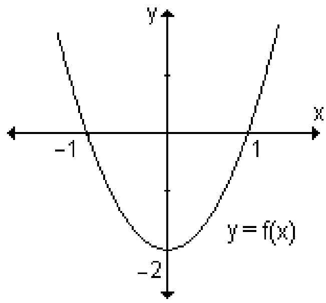
11) Se sabe que $f'(x) = 2x + 1$ y que $f(0) = -2$, entonces f(x) es:

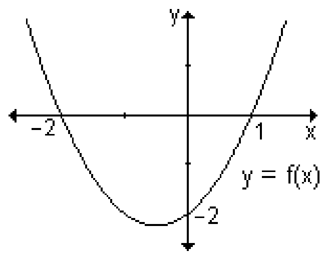
a)



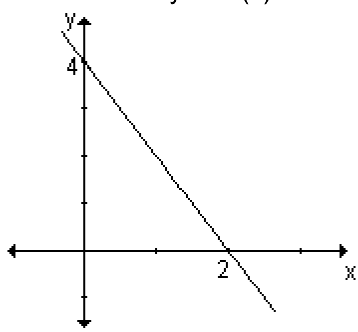
b)



c) 

d) 

12) La gráfica corresponde a la función $y = f'(x)$.



Se sabe que el punto (1, 8) pertenece a la gráfica de $y = f(x)$. Entonces f(x) es:

a) $f(x) = -x^2 + 4x$ **b)** $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ **d)** $f(x) = -2$

13) El valor de $\int \frac{x}{x^2 + 2x - 3} dx$ es:

a) $\frac{1}{4}\ln|x-1| + \ln|x+3| + c$ **b)** $\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+3| + c$

c) $\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+3|$ **d)** $\frac{1}{4}\ln|x-1| + \ln|x+3|$

AUTOEVALUACIÓN

1) Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+7}dx$ **b)** $\int x^2.e^{-x}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{\sqrt{x}}dx$

d) $\int 6x.\cos(x^2+3)\,dx$ **e)** $\int \frac{x+2}{(x+1)^2}dx$ **f)** $\int \frac{x^2 - 4x + 1}{x-1}dx$

g) $\int_0^4 \frac{3y}{\sqrt{2y^2+1}}dy$ **h)** $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\,dx$

2) Calcule $\int_{-1}^{5} m(x)dx$ si $m(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 3 - x & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

3) La velocidad de contaminación de un lago está dada por $v(t) = \frac{3}{4} t^{-\frac{3}{4}} \left(t^{\frac{1}{4}} + 3 \right)^2$ donde t está medido en años. Si en $t = 0$ el nivel de contaminación $c(0) = 10$ (en las unidades adecuadas), ¿a qué nivel llegará la contaminación luego de 5 años?

4) Una pequeña empresa estima que los ahorros logrados con la compra de un equipo se realizarán a una tasa m(x) dólares por año donde $m(x) = 400.e^{-0,5x}$ y x denota el tiempo, medido en años.

a) ¿A qué tasa ahorrará al cabo de dos años?

b) ¿Cuál será el ahorro acumulado al cabo de cuatro años?

EJERCICIOS DE REPASO

1) Calcule la ecuación de la curva que pasa por el punto P(1, 5) y cuya pendiente en cualquier punto es $(3x^2 + 5x - 2)$.

2) Halle la función que toma valor 10 para la abscisa 2 y cuya pendiente en todo punto está dada por la función $y = x - 5$.

3) La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $3\sqrt{x}$. Si el punto (9, 4) pertenece a la curva, obtenga su ecuación.

4) Los puntos (–1, 3) y (0, 2) pertenecen a la función $y = f(x)$ y en cualquier punto (x, y) de la función $f''(x) = 2 - 4x$. Encuentre la función.

Calcule las siguientes integrales:

5) $\int \left(e^x + \text{sen}x - \cos x \right) dx$ **6)** $\int \left(\frac{1}{x} - x^3 + \frac{2}{\cos^2 x} - e^x \right) dx$ **7)** $\int \frac{\ln x}{x} dx$

8) $\int (a+1)(a-2)\, da$ **9)** $\int (x-2)^2 dx$ **10)** $\int x^3 \ln x\, dx$

11) $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ **12)** $\int x\, \text{sen}(3x)\, dx$ **13)** $\int \frac{-2}{t^3} dt$

14) $\int \frac{2-t}{t^3} dt$ **15)** $\int x^2 e^{-2x^3} dx$ **16)** $\int \frac{x^2}{\left(x^2 - 4\right)^2} dx$

17) $\int \cos^2 x\, \text{sen}x\, dx$ **18)** $\int \frac{x^2}{(x+2).(x+1)^2} dx$ **19)** $\int \frac{e^{2x}}{2 - 4e^{2x}} dx$

20) $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$ **21)** $\int \frac{x+5}{x^3-3x+2}dx$ **22)** $\int \frac{1}{(2-3x)^2}dx$

23) $\int \frac{\text{sen}x}{1+2\cos x}dx$ **24)** $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}dx$ **25)** $\int \text{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)dx$

26) $\int x^2\, e^{-2x}\,dx$ **27)** $\int e^x\,\text{sen}x\,dx$ **28)** $\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$

29) $\int x\,2^x dx$ **30)** $\int x\sqrt{x+3}\,dx$ **31)** $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2-4}dx$

32) $\int x^2\left(e^x-1\right)dx$ **33)** $\int x^2\,\text{sen}x\,dx$ **34)** $\int \frac{x^2-1}{(x-2)^3}dx$

35) $\int x\,e^{x^2}\,dx$ **36)** $\int (1-2x)\cos x\,dx$ **37)** $\int \frac{x}{(x-2)^2}dx$

38) $\int \frac{x+2}{x\,(x-1)^3}dx$ **39)** $\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^2}}dx$ **40)** $\int \frac{\left(e^x+2x\right)^2}{2}dx$

41) $\int y\,\text{sen}(3y)\,dy$ **42)** $\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x}dx$ **43)** $\int \frac{x+2}{x^2+x}dx$

44) $\int \frac{x^3+3x^2}{x^2-1}dx$ **45)** $\int 2^x e^x\,dx$ **46)** $\int \frac{x+4}{x^2-2x}dx$

47) Determine la función f que verifica: $f''(x)=6x$, $f'(1)=5$ y $f(-1)=-3$.

48) Halle la función g que verifica: $g''(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, $g'(0)=0$ y $g(0)=1$.

49) Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^5 2\sqrt{x-1}\,dx$ **b)** $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$

c) $\int_0^4 \left(1+2\sqrt{x}\right)^2 dx$ **d)** $\int_0^1 (2a+1)^4\,da$

e) $\int_1^e x.\ln x\,dx$

---

5. APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

5.1 Cálculo de áreas.

5.2 Valor promedio de una función.

5.3 La integral definida como total.

5.4 Aplicaciones en la administración, la economía.

5.5 Aplicaciones en la física.

"Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay más allá".

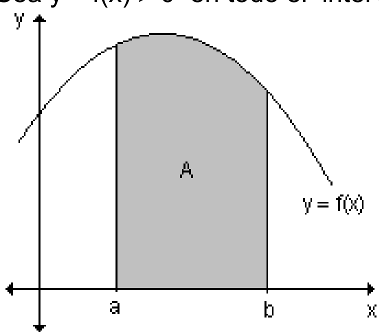
Hipatia

5.1 Cálculo de áreas

Antes hemos analizado que el área bajo una curva puede calcularse mediante una integral definida. Ahora que se han aprendido algunas técnicas para calcular integrales, se considerarán más problemas que impliquen áreas de regiones planas.

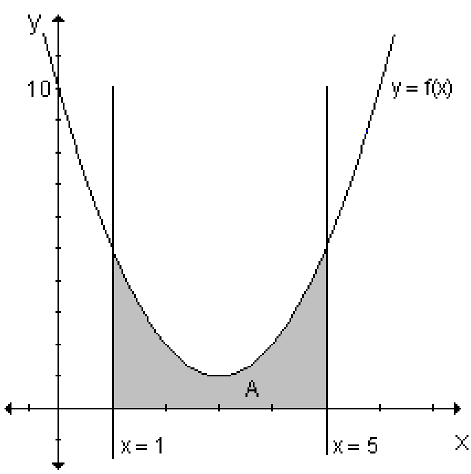
Situación 1. $f(x) > 0$

Sea $y = f(x) > 0$ en todo el intervalo correspondiente al recinto que encierra el área a calcular. Nos interesa el área determinada entre la curva mencionada, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Cuando el valor de una función continua es positivo en el intervalo $a \le x \le b$ (o sea que la gráfica de f se encuentra por encima del eje x), el área que está acotada por f, el eje x, $x = a$ y $x = b$ se determina resolviendo



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo. Determine el área encerrada entre la curva $f(x) = x^2 - 6x + 10$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$.



La medida del área sombreada se obtiene resolviendo la integral $\int_1^5 (x^2 - 6x + 10)\,dx$ que resulta:

$$\text{Área} = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x\right)\Bigg|_1^5 =$$

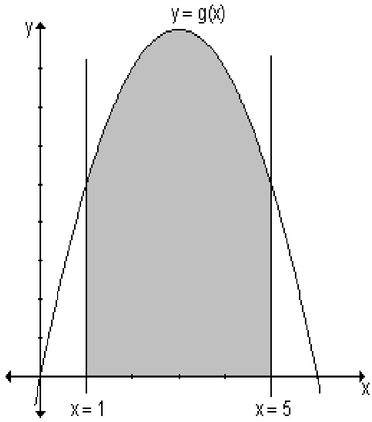
$$= \left(\frac{5^3}{3} - 3.5^2 + 10.5\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3.1^2 + 10.1\right) =$$

$$= \frac{125}{3} - 75 + 50 - \frac{1}{3} + 3 - 10 = \frac{28}{3}.$$

El área es $\frac{28}{3}$.

Ejemplo. Calcule el área determinada entre la curva $y = g(x) = 6x - x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$.

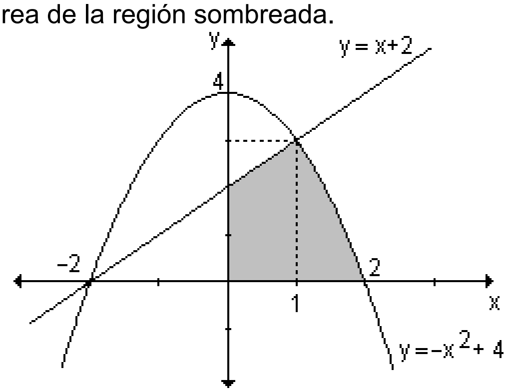
El valor del área se determina resolviendo la integral $\int_1^5 (6x - x^2)\,dx$.



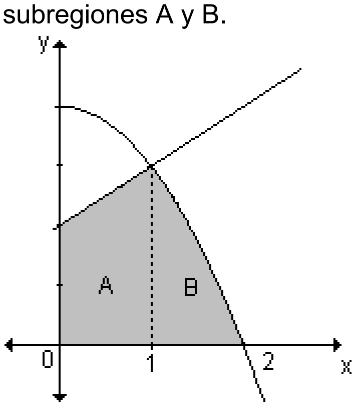
$$A=\left(3x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^5=\left(3.5^2-\frac{5^3}{3}\right)-\left(3.1^2-\frac{1^3}{3}\right)$$

$$A=75-\frac{125}{3}-3+\frac{1}{3}=\frac{92}{3}.\text{ El área es }\frac{92}{3}.$$

Ejemplo. Halle el área de la región sombreada.



La gráfica muestra que la frontera superior cambia de $f(x) = x + 2$ para $0 \le x \le 1$ a $f(x) = -x^2 + 4$ para $1 \le x \le 2$ mientras que la frontera inferior es la gráfica de $g(x) = 0$. Para calcular el área de la región sombreada la subdividimos en dos subregiones A y B.



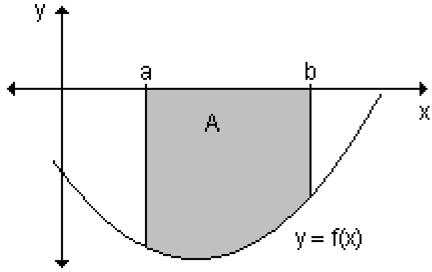
Los límites de integración de la región A son $a = 0$ y $b = 1$ mientras que los de la región B son $a = 1$ y $b = 2$.

Se suman las áreas de las subregiones A y B para encontrar el área total:

$$A=\int_0^1(x+2-0)dx+\int_1^2(-x^2+4-0)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$A = \frac{1}{2} + 2 + \left(-\frac{8}{3}\right) + 8 - \left[\left(-\frac{1}{3}\right) + 4\right] = \frac{25}{6}$$

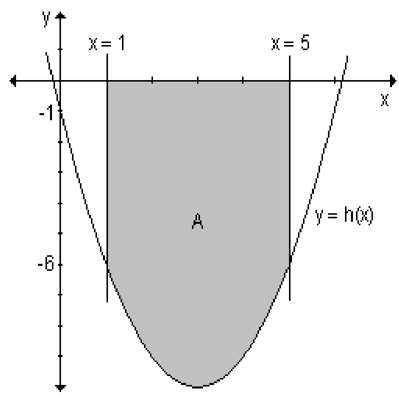
Situación 2. $f(x) < 0$



Cuando el valor de una función continua f es negativo en el intervalo $a \le x \le b$ (o sea que la gráfica de f se encuentra por debajo del eje x), el área que está acotada por f, el eje x, $x = a$ y $x = b$ se determina resolviendo $A = -\int_a^b f(x)dx$.

Ejemplo. Encuentre el área encerrada entre la curva $h(x) = x^2 - 6x - 1$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 5$.

Gráficamente resulta:



Si realizamos los cálculos:

$$A = -\int_1^5 \left(x^2 - 6x - 1\right) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 - x\right)\Bigg|_1^5$$

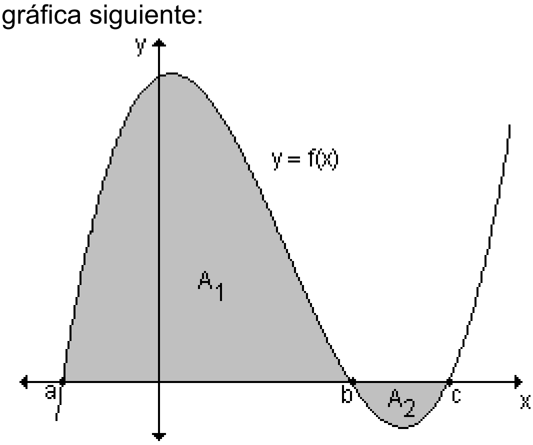
$$A = -\left(\frac{5^3}{3} - 3.5^2 - 5\right) + \left(\frac{1^3}{3} - 3.1^2 - 1\right)$$

$$A = -\left(\frac{125}{3} - 75 - 5\right) + \left(\frac{1}{3} - 3 - 1\right)$$

$$A = -\frac{125}{3} + 80 + \frac{1}{3} - 4 = \frac{104}{3}$$

Situación 3. Cálculo de áreas subdividiéndolas en sectores

Analicemos un nuevo planteo de área generalizando la situación anterior visualizada en la gráfica siguiente:



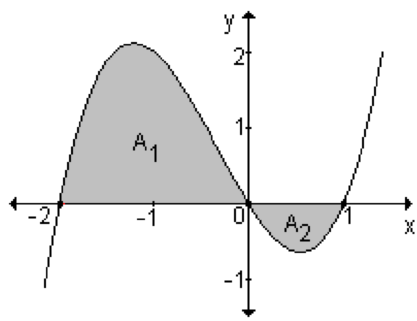
El área sombreada surge de la suma de las áreas de las regiones A_1 y A_2:

- $f(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$ resulta: $A_1 = \int_a^b f(x)dx$
- $f(x) < 0$ en el intervalo $[b, c]$ resulta: $A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$

En consecuencia el área está dada por $\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$

Ejemplo. Encuentre el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ con el eje de abscisas.

Graficamos la curva para obtener gráficamente el área:



Para hallar las intersecciones con el eje de abscisas calculamos las raíces, planteando $f(x) = 0$.

Obtenemos $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Desde $x = -2$ hasta $x = 0$, la curva $y = f(x)$ está por encima del eje de abscisas, luego $A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx$

Desde $x = 0$ hasta $x = 1$, la curva $y = f(x)$ está por debajo del eje x.

Luego $A_2 = -\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -(x^3 + x^2 - 2x)\,dx$.

El área total es $A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0}\left(x^3 + x^2 - 2x\right)dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)\,dx =$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_{0}^{1} = -\left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) + \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} =$$

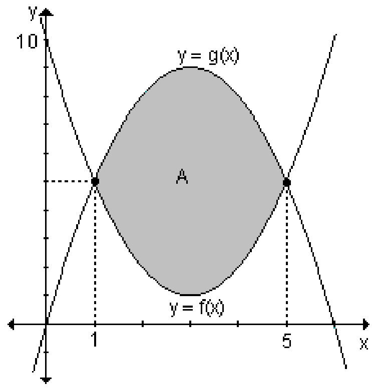
$$= \frac{37}{12} \approx 3{,}08.$$

Situación 4. El área a calcular está comprendida entre la gráfica de dos funciones.

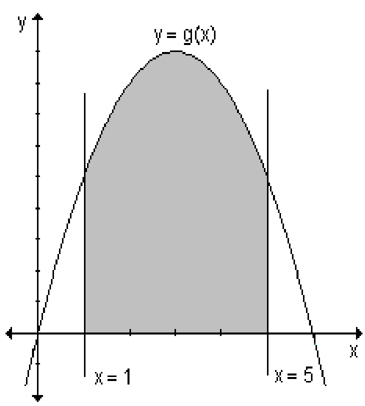
Analicemos a continuación una situación nueva y veamos cómo trabajamos teniendo en cuenta lo desarrollado en la *situación 1.*

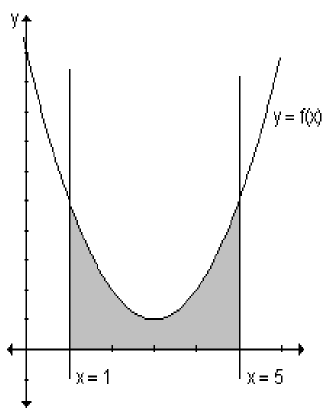
Ejemplo. Halle el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 6x + 10$ y $g(x) = 6x - x^2$.

Realizando la gráfica resulta:



Observando las gráficas de f y g en diferentes sistemas coordenados queda reflejado que el área buscada es la diferencia de las áreas calculadas en los ejemplos anteriores.





El área buscada es igual al área que determina g(x) con el eje x menos el área que determina f(x) con el mismo eje desde $x = 1$ hasta $x = 5$, es decir: $\frac{92}{3} - \frac{28}{3} = \frac{64}{3}$.

Luego el área puede calcularse resolviendo la siguiente integral:

$$A = \int_1^5 g(x)\,dx - \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$A = \int_1^5 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 6x + 10)\right]dx = \int_1^5 \left(6x - x^2 - x^2 + 6x - 10\right)dx$$

$$A = \int_1^5 \left(-2x^2 + 12x - 10\right)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 10x\right)\Big|_1^5$$

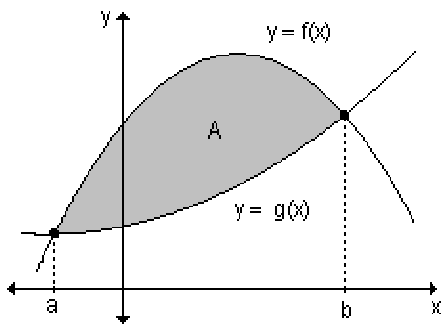
$$A = \left(-\frac{2}{3}.5^3 + 6.5^2 - 10.5\right) - \left(-\frac{2}{3} + 6.1^2 - 10.1\right) = \frac{50}{3} + \frac{14}{3} = \frac{64}{3}$$

Conocidos los puntos de intersección entre las dos curvas el área de la región que las curvas delimitan es la diferencia entre la función que actúa como frontera superior o “techo” de la región y la función que es la frontera inferior o “piso” de la región.

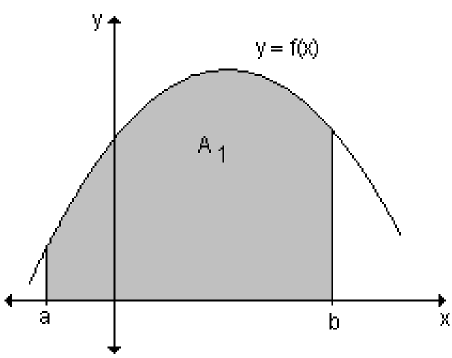
Si a y b son las abscisas de los puntos de intersección de las curvas resulta el área total:

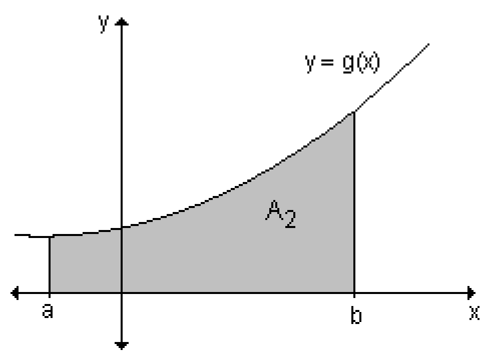
$$A = \int_a^b \text{[frontera superior – frontera inferior] } dx$$

Analicemos el caso general en el que el área a calcular está comprendida entre la gráfica de y = f(x) e y = g(x), ambas de ordenadas positivas en el intervalo de extremos a y b determinados por la intersección de las curvas.



Realizamos las gráficas de cada una de las funciones que delimitan la región de la cual queremos calcular el área:





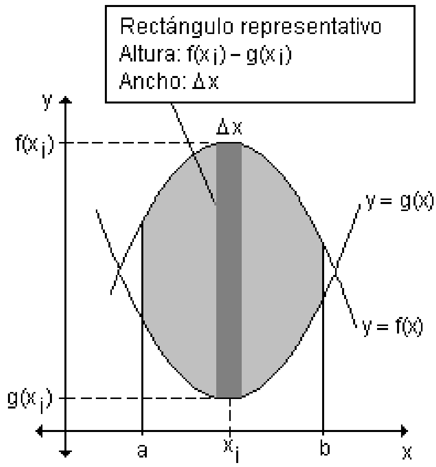
$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx \qquad\qquad A_2 = \int_a^b g(x)\,dx$$

Resulta: $A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Área de una región entre dos curvas

Si f y g son dos funciones continuas en [a, b] y $g(x) \leq f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las rectas verticales x = a y x = b es $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Demostración. Subdividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos cada uno de ancho Δx y dibujamos un rectángulo representativo de alto $f(x_i) - g(x_i)$ donde x está en el i-ésimo intervalo.



Área del rectángulo i = $[f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x$

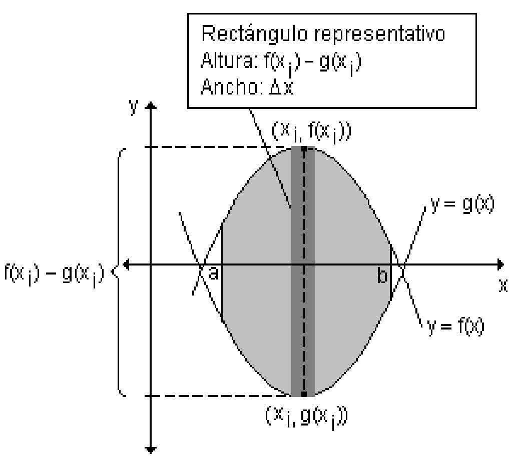
Sumando las áreas y considerando que el número de rectángulos tiende a infinito resulta que el área total es:

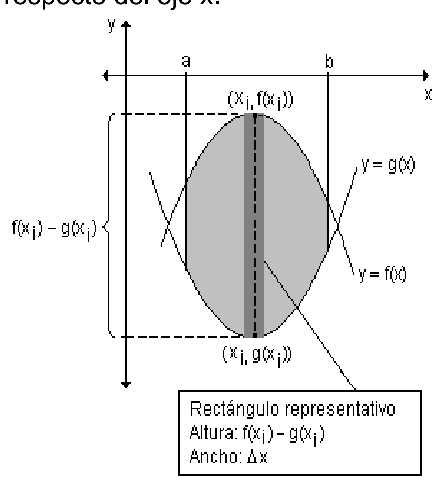
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

Como f y g son continuas en el intervalo, la función diferencia f – g también lo es y el límite existe.

Por lo tanto: $\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

Es importante tener en cuenta que la validez de la fórmula del área depende sólo de que f y g sean continuas y de que $g(x) \leq f(x)$. Las gráficas de f y g pueden estar situadas de cualquier manera respecto del eje x.





¿Cómo encontrar el área entre dos curvas?

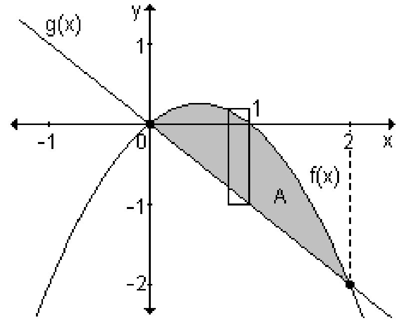
1) Graficar las curvas y calcular puntos de intersección.

2) Dibujar un rectágulo representativo. Esto permite determinar cuál de las dos curvas es la frontera superior f(x) y cuál es la frontera inferior g(x).

3) Hallar los límites de integración a y b.

4) Integrar $[f(x) - g(x)]$ desde a hasta b. El número obtenido es el área buscada.

Ejemplo. Grafique las curvas $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = -x$ en un mismo sistema de ejes y determine el área de la región limitada por ellas.



Graficando ambas curvas en un mismo sistema de ejes y un rectángulo vertical, podemos identificar la frontera superior $f(x) = x - x^2$ y la frontera inferior $g(x) = -x$. Las coordenadas x de los puntos de intersección son los límites de integración.

Hallamos analíticamente la intersección de las curvas resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x - x^2 \\ y + x = 0 \end{cases}$. Despejando la variable y de la segunda ecuación e igualando resulta: $x - x^2 = -x$ entonces $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

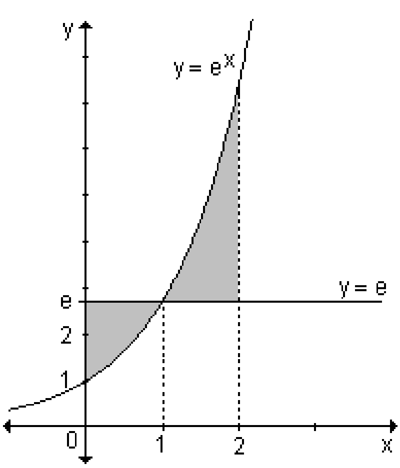
No es necesario trasladarla hacia el semiplano superior porque haciendo la integral de la diferencia entre las dos funciones de la manera conveniente encontramos el área buscada. El área de la región encerrada entre dichas curvas está comprendida entre 0 y 2, resulta:

$$A = \int_0^2 \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_0^2 \left[(x - x^2) - (-x)\right] dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$= \left(2^2 - \dfrac{2^3}{3}\right) - (0) = \dfrac{4}{3}$. El área de la región delimitada por las curvas es $\dfrac{4}{3}$.

Situación 5. Si la fórmula de una curva que limita la región cambia en uno o más puntos, debemos subdividir la región teniendo en cuenta los puntos que corresponden a los cambios de fórmula. El área total es la suma de las áreas de las subregiones.

Ejemplo. Calcule el área de la región sombreada:



El dibujo muestra que quedan determinadas dos regiones.

Para $0 \le x \le 1$, la frontera superior es $f(x) = e$ y la frontera inferior $g(x) = e^x$.

Para $1 \le x \le 2$ la frontera superior es $f(x) = e^x$ y la inferior $g(x) = e$.

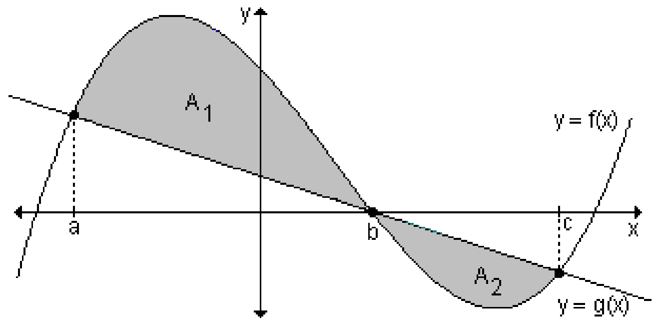
El área buscada se puede expresar de la siguiente forma:

$$A = \int_0^1 \left(e - e^x\right) dx + \int_1^2 \left(e^x - e\right) dx$$

Resolviendo cada integral se obtiene:

$$A = \left(ex - e^{x}\right)\Big|_0^1 + \left(e^{x} - ex\right)\Big|_1^2 = e^2 - 2e + 1 \approx 2{,}95$$

Generalicemos la situación del ejemplo anterior, visualizada en la gráfica siguiente:



Queremos calcular el área comprendida entre f(x) y g(x).
Hallamos los puntos de intersección de las funciones f y g. Esos puntos son a, b y c y nos determinan una subdivisión del intervalo total en dos subintervalos [a, b] y [b, c].
El área de cada subregión es:

$A_1 = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ (Dado que f(x) > g(x) en el intervalo [a, b])

$A_2 = \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$ (Dado que f(x) < g(x) en el intervalo [b, c])

El área sombreada es la suma de las anteriores:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$$

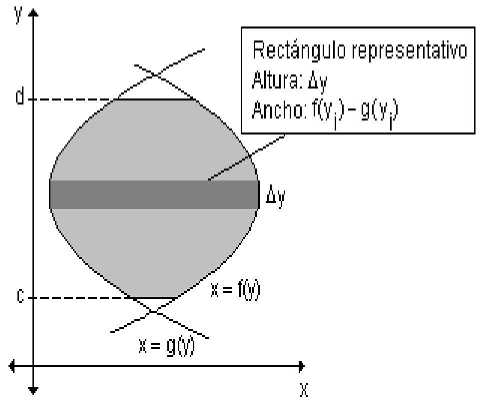
Observación. Es importante destacar que, en todos los casos, para calcular el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las rectas $x = a$ y $x = b$ se debe resolver la $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ teniendo en cuenta que f y g son continuas en [a, b] y que además $g(x) \leq f(x)$ para todo x del intervalo de trabajo.

A modo de resumen. Para calcular el área que queda determinada entre dos curvas debemos:

1) Hallar las intersecciones de las curvas que delimitan el recinto del que se desea calcular el área.
2) Dividir el intervalo total en subintervalos utilizando como extremos las abscisas u ordenadas de las intersecciones halladas según corresponda.
3) Integrar dentro de cada subintervalo para obtener cada subárea.
4) Sumar las subáreas obtenidas para determinar el área total.

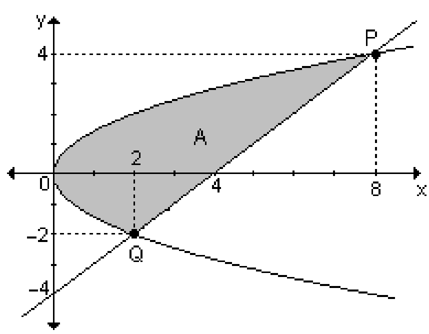
Situación 6. Cálculo de áreas integrando respecto a la variable y

En algunos casos las fronteras de la región a la cual se debe calcular el área no son funciones de x ó funciones de y. Otras regiones se trabajan mejor considerando x como función de y. En estos casos conviene considerar los rectángulos representativos para la aproximación horizontales en lugar de verticales. De esta manera, si una región está limitada por las curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$ y las rectas horizontales $y = c$ e $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$, entonces su área resulta: $A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$.

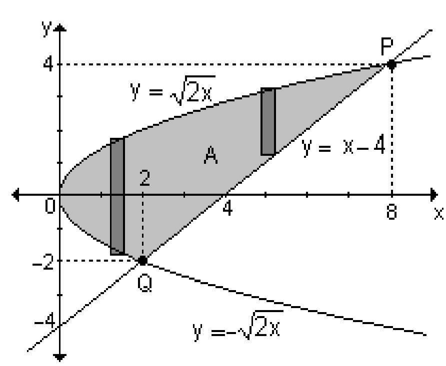


Ejemplo. Grafique y halle el área limitada por las curvas de ecuaciones: $y^2 = 2x$, $y - x + 4 = 0$, integrando: **a)** respecto a x, **b)** respecto a y.

Resolviendo el sistema que forman las dos curvas se obtiene que los puntos de intersección son P (8, 4) y Q(2, −2).
Gráficamente:



a) Para integrar con respecto a x se consideran los rectángulos representativos verticalmente. Despejando y de $y^2 = 2x$ se obtiene $y = \pm\sqrt{2x}$; donde $y = \sqrt{2x}$ es la rama superior de la parábola e $y = -\sqrt{2x}$ es la rama inferior. La ecuación de la recta puede escribirse $y = x - 4$.
La frontera superior de la región es la curva $y = \sqrt{2x}$. La frontera inferior es $y = -\sqrt{2x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$ e $y = x - 4$ desde $x = 2$ hasta $x = 8$.



El área debe calcularse entonces como la suma de dos integrales:

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \left(-\sqrt{2x}\right)\right)dx + \int_2^8 \left(\sqrt{2x} - (x-4)\right)dx =$$

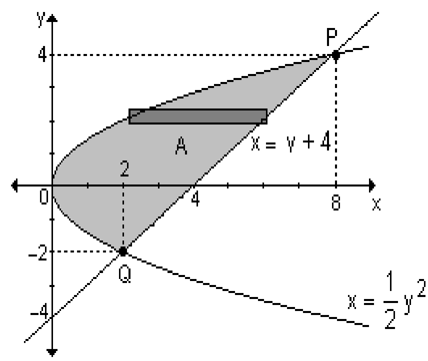
$$= 2\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^8 \left(\sqrt{2x} - x + 4\right)dx =$$

$$= 2\int_0^2 (2x)^{\frac{1}{2}}dx + \int_2^8 \left((2x)^{\frac{1}{2}} - x + 4\right)dx = \frac{2}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^8 = 18$$

b) Para integrar respecto de y consideramos los rectángulos representativos horizontalmente. La frontera de la derecha es la curva $x = y + 4$ y la frontera de la izquierda es la curva $x = \frac{1}{2}y^2$. Dado que y varía desde -2 hasta 4 resulta:

$$A = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$A = \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 18$$

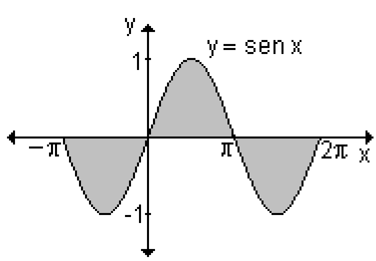


Luego, el área limitada por las curvas es 18.

Observación. Al utilizar integrales para calcular áreas se recomienda, si es posible, trazar las gráficas de las funciones que intervienen. Visualizando las regiones cuyas áreas se deben calcular resulta más fácil la identificación de los límites de integración y se comprende mejor la metodología a seguir para su obtención.

EJERCICIOS

1) Escriba la integral definida que proporciona el área de la región y calcule el valor del área.

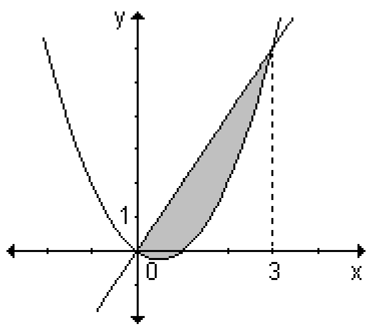


2) Halle el área limitada por la parábola $y = x^2 - x$ y la recta que une los puntos P(1, 2) y Q(–3, –6). Grafique.
3) Determine, sin usar fórmulas, el área del triángulo limitado por las rectas $y - 3x = 0$; $x - 3y = 0$ y $x + y = 4$.
4) Calcule el área de la zona limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ y el eje de abscisas.

RESPUESTAS

1) $A = 3\int_0^{\pi} \text{senx}dx \quad A = 6$

2) $\frac{9}{2}$



3) 4

4) 8

5.2 Valor promedio de una función

Para hallar el promedio de un conjunto de números sólo debemos sumar todos los valores y dividir el resultado por la cantidad de números, o sea, el promedio de n valores es $y_{prom} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n}{n}$.

¿Cómo calculamos la temperatura promedio durante un día si se pueden tener numerosas lecturas de temperatura? ¿Qué pasa si queremos hallar el promedio de un número infinito de valores? ¿Cómo calculamos el valor promedio de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo [1, 2]?

Se propone calcular el valor promedio de la función $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Dividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Si t_i es un punto cualquiera del i-ésimo subintervalo, entonces el promedio aritmético o medio de los valores de la función, $f(t_1)$, $f(t_2)$, ... $f(t_n)$, es: $a_n = \frac{1}{n}\left[f(t_1) + f(t_2) + ... + f(t_n)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$

Multiplicando y dividiendo por (b – a) resulta:

$$a_n = \frac{b-a}{b-a} \cdot \frac{1}{n}\left[f(t_1) + f(t_2) + ... + f(t_n)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{b-a}\left[f(t_1) + f(t_2) + ... + f(t_n)\right]\frac{b-a}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{b-a}\left[f(t_1) + f(t_2) + ...+ f(t_n)\right]\Delta x$$

$$a_n = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

La expresión $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ es una suma de Riemann para f en [a, b]. Podemos asegurar que el promedio de los n valores es $\frac{1}{b-a}$ veces la suma de Riemann de f en [a, b]. A medida que incrementamos la cantidad de subintervalos ($n \to \infty$, $\Delta x \to 0$) y teniendo en cuenta la definición de integral definida, se obtiene:

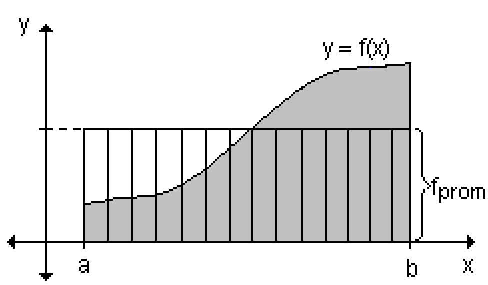
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ .$$

El valor promedio de f sobre el intervalo [a, b] resulta $f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

El concepto del valor promedio de una función en un intervalo es solamente uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma.

Interpretación geométrica del valor promedio de una función

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación $f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ por la expresión b – a, se obtiene: $(b-a)\ .\ f_{prom} = \int_a^b f(x)dx$.



El promedio de una función positiva en el intervalo [a, b] corresponde a la altura del rectángulo cuya base es la amplitud del intervalo. El área de dicho rectángulo coincide con el área que hay bajo la gráfica de f(x), desde x = a hasta x = b.

Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en el intervalo cerrado [a, b], existe un número c en este intervalo tal que $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$.

Este teorema es importante porque asegura que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio al menos en un punto.

Demostración.

Primer caso. Si f es constante en el intervalo [a, b] el resultado es trivial puesto que c puede ser cualquier punto.

Segundo caso. Si f no es constante en [a, b] elegimos m y M como el menor y el mayor valor que toma f en el intervalo. Dado que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a, b]$, por el teorema de conservación de desigualdades $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$.

Aplicando propiedades y resolviendo las integrales:

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ entonces $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$, por lo que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ es un número comprendido entre el menor y el mayor valor que toma f en el intervalo.

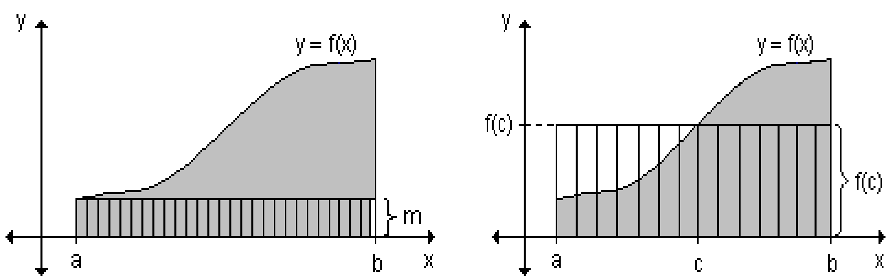
Por el teorema del valor intermedio de las funciones continuas, existe al menos un número real c perteneciente al intervalo (a, b), en el que la función alcanza el valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Queda demostrado que existe algún c del intervalo [a, b] tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para las funciones no negativas en [a, b] es que existe un valor c del intervalo tal que el rectángulo de base (b − a) y altura f(c) tiene la misma área que la región debajo de la gráfica de la función, desde a hasta b.

$$A = \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

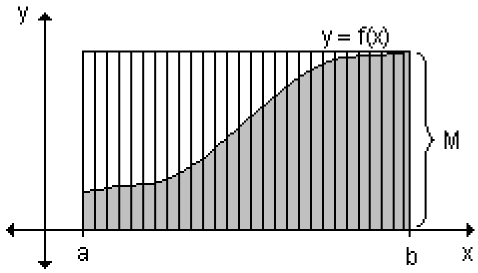


rectángulo inscripto (área menor que la de la región)

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

rectángulo del valor medio (área igual que la de la región)

$$\int_a^b f(x)dx$$

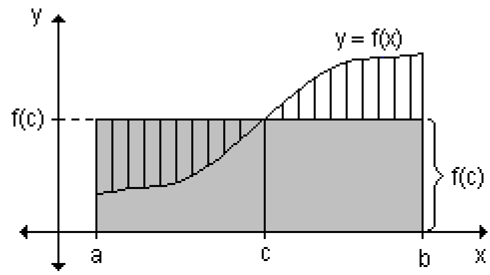


rectángulo circunscripto (área mayor que la de la región)

$$\int_a^b M dx = M(b-a)$$

El valor de c no es necesariamente único. Este teorema no especifica cómo determinar c. Solamente garantiza la existencia de algún número c en el intervalo.

El valor f(c) hallado según el teorema del valor medio para integrales coincide con el valor promedio o medio de una función por eso a $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se lo llama valor promedio de f en el intervalo [a, b].



Ejemplo. Halle el valor promedio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo [1, 4] y encuentre un punto en el cual la función toma como valor dicho promedio. Interprete gráficamente.

Calculamos $f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}\left(x^3 - x^2\right)\Big|_1^4 =$

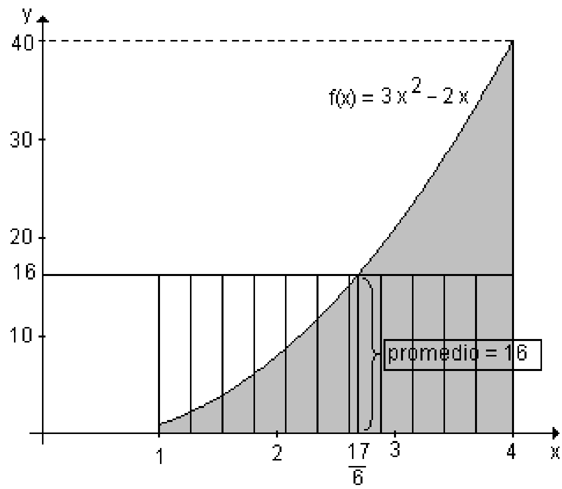
$= \frac{1}{3}\ (64 - 16 - 1 + 1) = 16.$

Si queremos encontrar para qué valor o valores de x se alcanza dicho promedio debemos hacer $3x^2 - 2x = 16$.

Resolviendo la ecuación resulta $x = -2$ que no pertenece al intervalo dado y $x = \frac{17}{6} \approx 2{,}8\widehat{3}$.

Luego, el valor promedio de f en [1, 4] es 16 y se alcanza para $x = \frac{17}{6} \approx 2{,}8\widehat{3}$.

Sabemos que el área de la región es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor promedio. Se puede observar gráficamente.



Problema

Suponga que la población mundial actual es de 5 mil millones y que la población dentro de t años está dada por la ley de crecimiento exponencial $p(t) = e^{0,023t}$. Encuentre la población promedio mundial en los próximos 30 años.

Es importante tener en cuenta este valor dado que permite hacer planes a largo plazo de las necesidades de producción y en la distribución de bienes y servicios.

Para resolver este problema debemos hallar el valor promedio de la población P(t) desde $t = 0$ hasta $t = 30$.

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} 5.e^{0,023t}dt = \frac{1}{30}\left[\frac{5}{0,023}e^{0,023t}\right]_0^{30}$$

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{30}\left[\frac{5}{0,023}e^{0,023.30} - \frac{5}{0,023}\right] = \frac{1}{30}.\frac{5}{0,023}\left[e^{0,69} - 1\right]$$

Valor promedio $\approx 7,2$.

Luego, la población mundial promedio en los próximos 30 años será de 7,2 mil millones.

Problema

Se inyecta una dosis de 2 miligramos de cierta droga en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad de droga que queda en la sangre después de t horas está dada por $f(t) = 2e^{-0.32t}$. Halle la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo durante la segunda hora.

Para responder este problema debemos encontrar el valor promedio de f(t) en el intervalo desde t = 1 a t = 2.

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{2-1}\int_1^2 2e^{-0,32t}dt = 2\left[\frac{e^{-0,32t}}{-0,32}\right]_1^2$$

Valor promedio ≈ 1,24.
La cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo es de aproximadamente 1,24 miligramos.

Investigue y busque otras situaciones dónde resulta posible la aplicación del Teorema del Valor Medio.

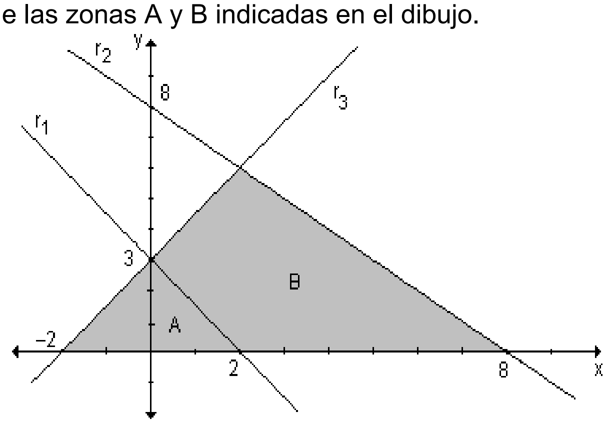
EJERCICIO

Halle el valor promedio de la función g(x) = 2x – 1 en el intervalo [2, 6]. ¿Para qué valor o valores se alcanza este promedio?

RESPUESTA
El valor promedio es 7 y se alcanza en x = 4.

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.1 CÁLCULO DE ÁREAS – 5.2 VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

1) Halle el área encerrada por las curvas $y = x^2 - 4x$ e $y = 6x - x^2$. Grafique.
2) Dada la siguiente gráfica encuentre:
  a) las ecuaciones de las rectas
  b) el área de las zonas A y B indicadas en el dibujo.



3) a) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senx} dx$.

b) Halle el área de la región comprendida entre la curva y = sen x, el eje x y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$. Grafique.

c) Analice por qué no se obtiene el mismo resultado en **a)** y **b)**.

4) Calcule el área bajo la curva $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ desde 0 hasta 3. Interprete gráficamente.

5) Determine el valor promedio de la función en el intervalo indicado y halle un punto en el cual la función tome dicho valor promedio.

a) $f(x) = 3x - x^2, \quad x \in [-1, 1]$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad x \in [0, 8]$

c) $f(x) = 3x - 2, \quad x \in [-2, 0]$

5.3 La integral definida como total

Si f(x) ≥ 0 en [a, b] y es la razón de cambio de la función F(x), entonces la integral definida tiene la siguiente interpretación: $\int_a^b f(x)dx =$ cambio total en F(x) cuando x cambia de a a b.

Decir que f(x) es la razón de cambio de F(x) significa que f(x) es la derivada de F(x) o equivalentemente que F(x) es una antiderivada de f(x). El cambio total en F(x) cuando x cambia de a a b es la diferencia entre el valor de F en b y el valor de F en a, es decir, F(b) – F(a).

Cambio total en F(x) = $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Esta definición o principio se puede aplicar a todas las razones de cambio en las ciencias sociales y naturales. A modo de ejemplo podemos citar:

- Si v(t) es el volumen de agua de un depósito, en el instante t, entonces su derivada $v'(t)$ es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Así $\int_{t_1}^{t_2} v'(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.
- Si [c](t) es la concentración del producto de una reacción química en el instante t entonces la velocidad de reacción es la derivada $[c]'(t)$. De esta manera $\int_{t_1}^{t_2} [c]'(t)dt = [c](t_2) - [c](t_1)$ es el cambio en la concentración [c] desde el instante t_1 hasta el t_2.
- Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto x, es m(x) entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Podemos decir que la

expresión $\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b)-m(a)$ es la masa del segmento de la varilla entre $x = a$ y $x = b$.

- Si la tasa de crecimiento de una población es $\frac{dp}{dt}$ entonces $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dp}{dt}\,dt$ $= = p(t_2) - p(t_1)$ es el aumento de población durante el período desde $t_1$hasta t_2.
- Si $c(x)$ es el costo para producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada $c'(t)$. Por consiguiente $\int_{x_1}^{x_2} c'(t)\,dt = c(x_2) - c(x_1)$ es el incremento en el costo cuando la producción aumenta desde x_1 hasta x_2 unidades.
- Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$ de modo que $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio de la posición, o desplazamiento, de la partícula durante el período desde t_1 hasta t_2.
- Dado que la aceleración de un objeto es $a(t) = v'(t)$, podemos asegurar que la expresión $\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la velocidad en el instante t_1 hasta el t_2.
- La potencia $P(t)$ indica la razón de cambio de la energía $E(t)$. Esto permite decir que $P(t) = E'(t)$ y por lo tanto resulta $\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = E(t_2) - E(t_1)$ indica la energía utilizada en el tiempo entre t_1 y t_2.

Problema

> La razón con la que se vendieron artículos para el hogar en cierto país, desde 1995 hasta 2000, se puede calcular de manera aproximada con $r(t) = t^4 - 8t^3 + 10t^2 + 100$, expresada en miles de unidades al año, siendo t la cantidad de años desde 1995 (considerando $t = 0$ enero de 1995). Calcule las ventas totales de 1995 a 2000.

Dado que $r(t)$ representa la razón a la que se vendieron los artículos, las ventas totales desde que comienza 1995 ($t = 0$) hasta que termina 2000 ($t = 6$) se expresan por:

$$\text{Venta total} = \int_0^6 \left(t^4 - 8t^3 + 10t^2 + 100\right)dt = \left.\frac{t^5}{5} - 8\frac{t^4}{4} + 10\frac{t^3}{3} + 100t\right|_0^6 =$$

$= 1555,20 \; - 2\,592 + 720 + 600 = 283,20$

Se vendieron en total 283 200 unidades.

Problema

La tasa de aumento de empleos, en miles de personas al año desde 1998 hasta 2005 en cierto país, está determinada aproximadamente por la ley $e(t) = 60t^2 - 110t + 60$ miles de personas al año. Calcule $\int_2^5 e(t)dt$ e interprete el resultado.

$$\int_2^5 \left(60t^2 - 110t + 60\right)dt = \left. 60\frac{t^3}{3} - 110\frac{t^2}{2} + 60t \right|_2^5 = 1425 - 60 = 1365$$

El cambio total en la cantidad de personas empleadas desde 2000 hasta 2003 es 1 365 000.

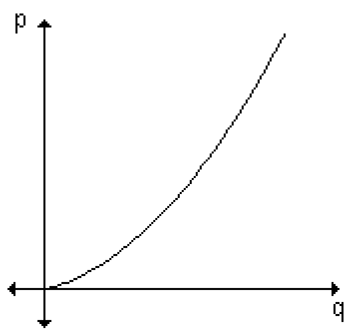
5.4 Aplicaciones en la administración y la economía

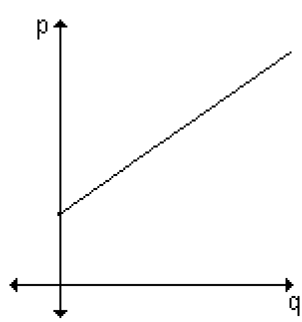
Existen numerosas aplicaciones de la integral definida en diferentes disciplinas. A modo de ejemplo, presentamos algunas de las más importantes en la administración y la economía.

Entre las funciones que se utilizan en economía para hacer modelos de situaciones de mercado se estudian las funciones de oferta y de demanda.

Función de oferta. Una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad. Podemos decir que, en respuesta a distintos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún período específico.

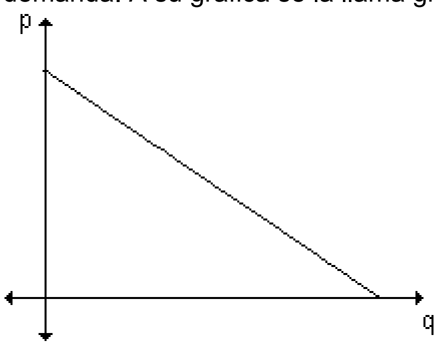
Cuanto mayor es el precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer. Al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida. Esto nos permite asegurar que la función de oferta es una función creciente. Si p representa el precio por unidad y q la cantidad ofrecida correspondiente entonces la ley que relaciona p y q se la denomina función de oferta y su gráfica se la conoce como gráfica de oferta.

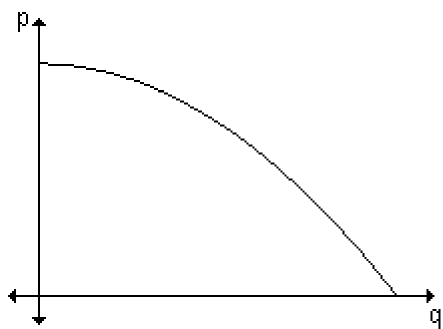




A esta función la simbolizamos $p = o(q)$ donde sabemos que p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se ofrece en el mercado.

Función de demanda. La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandada por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda. En general, si el precio aumenta, se produce una disminución de la cantidad demandada del artículo porque no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por adquirirlo, por eso esta es una función decreciente como lo observamos en los ejemplos gráficos. Podemos asegurar entonces que para cada precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandan en determinado período. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente en unidades está dada por q la ley que los relaciona se denomina función de demanda. A su gráfica se la llama gráfica de demanda.





A esta función la simbolizamos $p = d(q)$ donde sabemos que p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se demanda en el mercado.

Superávit de consumidores y productores

El mercado determina el precio al que un producto se vende. El punto de intersección de la curva de la demanda y de la curva de la oferta para un producto da el precio de equilibrio. En el precio de equilibrio, los consumidores comprarán la misma cantidad del producto que los fabricantes quieren vender. Sin embargo, algunos consumidores aceptarán gastar más en un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas esas personas aceptan pagar se considera como un ahorro de esas personas y se llama superávit o ganancia de los consumidores.

Se denota con p_0 y q_0 al precio en el mercado y la demanda correspondiente. El área bajo la curva de demanda desde $q = 0$ hasta $q = q_0$ es la cantidad total que los consumidores están dispuestos a pagar por q_0 artículos. El área sombreada bajo la recta $y = p_0$ muestra la cantidad total que los consumidores realmente gastarán en el precio p_0 de equilibrio. El área entre la curva y la recta representa el superávit de los consumidores.

Problema

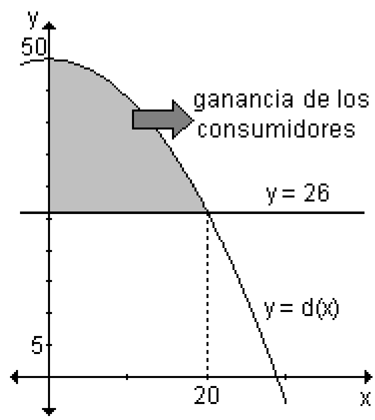
> La curva de demanda de un producto está dada por $d(x) = 50 - 0{,}06x^2$, donde x son las unidades. Encuentre el superávit o ganancia de los consumidores (en pesos) si el nivel de venta asciende a veinte unidades.

Para resolverlo tenemos en cuenta que, como la cantidad de unidades es 20, su precio asciende a $p = d(20) = 50 - 0{,}06\ 20^2 = 26$.
Resolviendo la integral, la ganancia de los consumidores resulta:

$$\int_0^{20}\left[50 - 0{,}06x^2 - 26\right]dx =$$

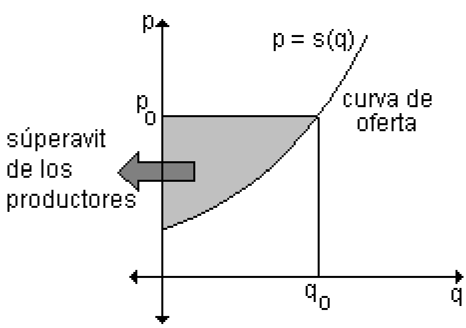
$$= \int_0^{20}\left[24 - 0{,}06x^2\right]dx =$$

$$= (24x - 0{,}02x^3)\Big|_0^{20} = 320$$



La ganancia de los consumidores asciende a \$ 320 si el nivel de venta asciende a veinte unidades.

De la misma manera si algunos fabricantes estuviesen dispuestos a proporcionar un producto a un menor precio que el precio p_0 de equilibrio, el total de las diferencias entre el precio de equilibrio y los precios más bajos a los que los fabricantes venderían el producto se considera como una entrada adicional para los fabricantes y se llama superávit o ganancia de los productores.



El área total bajo la curva de oferta entre $q = 0$ y $q = q_0$ es la cantidad mínima total que los fabricantes están dispuestos a obtener por la venta de q_0 artículos. El área total bajo la recta $p = p_0$ es la cantidad realmente obtenida. La diferencia entre esas dos áreas, el superávit de los productores, también está dada por una integral definida.

Si s(q) es una función de oferta con precio p_0 de equilibrio y oferta q_0 de equilibrio, entonces:

superávit de los productores $= \int_0^{q_0} [p_0 - s(q)]\,dq$

Problema

Se conoce que la curva de la oferta para un producto es $s(x) = \frac{x}{2} + 7$, donde x son los artículos. Halle la ganancia (en pesos) de los productores si la producción asciende a diez artículos.

Si la producción asciende a 10 artículos el precio es $s(10) = \frac{10}{2} + 7 = 12$ pesos.

La ganancia o superávit de los productores se calcula resolviendo:

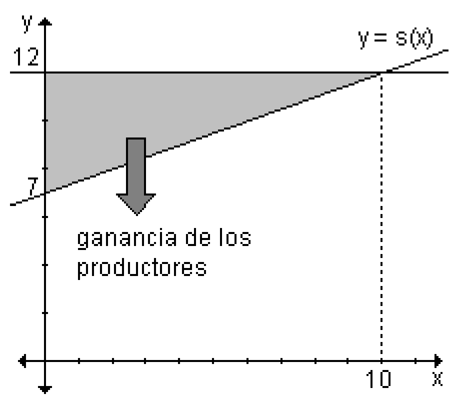
$$\int_0^{10} \left[12 - \left(\frac{x}{2} + 7\right)\right] dx =$$

$$\int_0^{10} \left[12 - \frac{x}{2} - 7\right] dx = \int_0^{10} \left[5 - \frac{x}{2}\right] dx$$

G = Ganancia de las productores

$$G = \left[5x - \frac{x^2}{4}\right]_0^{10} = 25$$

La ganancia de los productores asciende a $ 25 si la producción es de diez artículos.



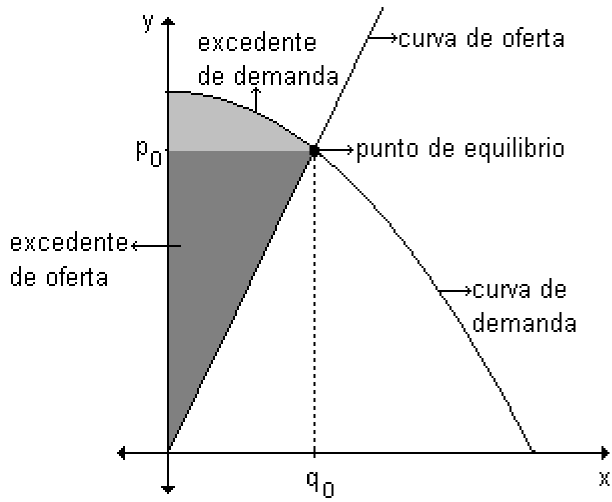
Problema

Calcule el exceso de oferta y el exceso de demanda para las curvas de demanda y oferta dadas.

Función de demanda: $p_1(q) = 1000 - 0{,}4\,q^2$.

Función de oferta: $p_2(q) = 42q$

El exceso de oferta y el de demanda están representados por las áreas que muestra la gráfica:



La oferta coincide con la demanda en (q_0, p_0) , es decir,:

$p_1(q) = p_2(q) \quad \Rightarrow \quad 1000 - 0{,}4q^2 = 42q \quad \Rightarrow \quad -0{,}4q^2 - 42q + 1000 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \; q_1 = -125, \; q_2 = 20$

Como los valores de las abscisas corresponden a números de artículos ofrecidos o demandados, la única solución posible es $q_0 = 20$ y, por lo tanto, $p_0 = 840$.

El excedente de demanda o superávit de los consumidores es la región comprendida entre $p_1(q)$ y la recta $p = 840$, entre 0 y 20, o sea,:

$$\int_0^{20}\left(1000 - 0{,}4q^2 - 840\right)dq = \int_0^{20}\left(160 - 0{,}4q^2\right)dq = \left(160q - 0{,}4\frac{q^3}{3}\right)\Bigg|_0^{20} =$$

$= 2133{,}33$

El excedente de demanda asciende a \$ 2133,33.

El excedente de oferta es la región comprendida entre las rectas $p = 840$ y $p = 42q$ entre 0 y 20, o sea:

$$\int_0^{20}(840 - 42q)\,dq = \left(840q - 21q^2\right)\Big|_0^{20} = (840{,}20 - 21{,}20^2) = 8400$$

El superávit de oferta alcanza \$ 8400.

Análisis marginal

La derivada y, en consecuencia la integral, tienen aplicaciones en administración y economía en la construcción de las *tasas marginales*.

Es importante para los economistas el trabajo con el análisis marginal porque permite calcular el punto de maximización de utilidades.

En el análisis marginal se examinan los efectos incrementales en la rentabilidad. Si una firma está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende una unidad más.

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Deberá ser posible identificar por separado las funciones de ingreso total y de costo total.
- Las funciones de ingreso y costo deben formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

Damos algunas definiciones importantes para nuestro trabajo.

Costo marginal. Es el costo adicional que se obtiene al producir y vender una unidad más de un producto o servicio.
También se puede definir como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero.
Podemos pensar al costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida.
Debemos tener en cuenta que si c(x) es la función costo, el costo promedio de producir x artículos es el costo total dividido por el número de artículos producidos.

Costo promedio por artículo $= \dfrac{c(x)}{x}$

Costo marginal $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta c}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c(x+\Delta x) - c(x)}{\Delta x}$

Costo marginal $= c'(x) = \dfrac{dc}{dx}$

El costo marginal mide la tasa con que el costo aumenta con respecto al incremento de la cantidad producida.

Ingreso marginal. El ingreso marginal es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio. Para una función de ingreso total r(x), la función $r'(x)$ representa la tasa instantánea de cambio en el ingreso total con un cambio del número de unidades vendidas. Podemos decir que el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Representa la tasa con que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

Utilidad marginal. La utilidad marginal que obtiene una empresa está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es r(x) cuando se venden x artículos y si la función de costo es c(x) al producirse esos mismos artículos, entonces la utilidad p(x) obtenida por producir y vender x artículos está dada por $p(x) = r(x) - c(x)$.

La función $p'(x)$ se denomina utilidad marginal y representa la utilidad por artículo si la producción sufre un pequeño incremento.

Problema

Durante los primeros cinco años que un producto se puso a la venta en el mercado, la función f(x) describe la razón de ventas cuando pasaron x años desde que el producto se presentó en el mercado por primera vez: $f(x) = 2700\sqrt{x} + 900$ si $0 \le x \le 5$. Calcule las ventas totales durante los primeros cuatro años.

Debemos plantear: venta total $= \int_0^4 \left(2700\sqrt{x} + 900\right)dx$

$$\text{Venta total} = \left(\frac{2700x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 900x\right)\Bigg|_0^4 = \frac{5400}{3}4^{\frac{3}{2}} + 900.4 = 18000$$

Las ventas totales durante los primeros cuatro años ascienden a 18000 unidades.

Problema

Se espera que la compra de una nueva máquina genere un ahorro en los costos de operación de modo que, cuando la máquina tenga x años de uso, la razón de ahorro sea de f(x) = 1000 + 5000x pesos al año.

a) ¿Cuánto se ahorra en costos de operación durante los primeros seis años?

b) Si la máquina se compró a \$ 67500 ¿cuánto tiempo tardará la máquina en pagarse por sí sola?

a) Para conseguir el ahorro durante los primeros seis años calculamos

$$\int_0^6 \left(1000 + 5000x\right)dx = \left[1000x + 2500\,x^2\right]\Big|_0^6 = 96000$$

Al cabo de seis años el ahorro asciende a \$ 96000.

b) Dado que el precio de compra es de \$ 67500, el número de años de uso que se requieren para que la máquina se pague sola es n, entonces:

$$\int_0^n \left(1000 + 5000x\right)dx = 67500 \quad \Rightarrow \left[1000x + 2500\,x^2\right]\Big|_0^n = 67500$$

$1000n + 2500\,n^2 = 67500 \Rightarrow 2500\,n^2 + 1000n - 67500 = 0 \Rightarrow 5\,n^2 + 2n - 135 = 0$

Hallamos los valores de n aplicando la resolvente y resulta $n^1 = -5{,}4$ (imposible para nuestro problema) y $n^{2} = 5$.

Se tardarán 5 años para que la máquina se pague sola.

5.5 Aplicaciones en la física

Muchas leyes físicas se descubrieron durante el mismo período histórico en el que estaba siendo desarrollado el cálculo. Durante los siglos XVII y XVIII existía poca diferencia entre ser un físico o un matemático.

Distancia recorrida en un movimiento rectilíneo

Para un objeto con movimiento rectilíneo la función posición, s(t), y la función velocidad, v(t), se relacionan por $s(t) = \int v(t)dt$.

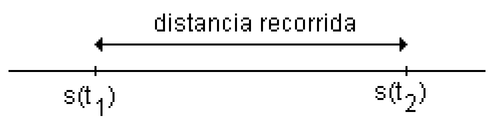
De este hecho y del teorema fundamental del cálculo se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1).$$

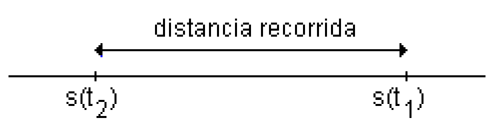
La posición del objeto en el instante t_1 está expresada por $s(t_1)$ y $s(t_2)$ es la posición en el instante t_2, la diferencia $s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio de posición o desplazamiento del objeto durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$.

Un desplazamiento positivo significa que el objeto está más a la derecha en el instante t_2 que en el instante t_1, y un desplazamiento negativo significa que el objeto está más a la izquierda.

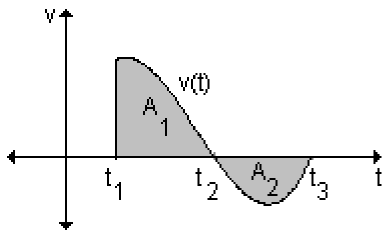
En el caso en que $v(t) \geq 0$ en todo el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, el objeto se mueve en la dirección positiva solamente, de este modo el desplazamiento $s(t_2) - s(t_1)$ es lo mismo que la distancia recorrida por el objeto.



En el caso en que $v(t) \leq 0$ en todo el intervalo de tiempo, el objeto se mueve en la dirección negativa solamente, por tanto, el desplazamiento $s(t_2) - s(t_1)$ es el negativo de la distancia recorrida por el objeto.



En el caso en que v(t) asuma valores tanto positivos como negativos durante un intervalo de tiempo $[t_1, t_3]$, el objeto se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda y el desplazamiento es la distancia recorrida en la dirección positiva menos la distancia recorrida en la dirección negativa. Si quiere encontrarse la distancia total recorrida en este caso debe sumarse la distancia recorrida en la dirección positiva y la distancia recorrida en la dirección negativa.



Desplazamiento en el intervalo de tiempo $[t_1, t_3]$: $A_1 - A_2 = \int_{t_1}^{t_3} v(t)dt$.

Distancia total recorrida durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_3]$:

$$A_1 + A_2 = = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt - \int_{t2}^{t_3} v(t)dt .$$

Problema

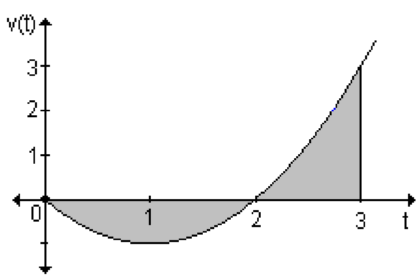
Un objeto se mueve con movimiento rectilíneo de modo tal que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - 2t$ metros por segundo. Halle:

a) el desplazamiento del objeto durante los tres primeros segundos,

b) la distancia recorrida durante ese tiempo.

a) El desplazamiento del objeto luego de 3 segundos de recorrido es:

$$s = \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (t^2 - 2t)dt = \left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\Bigg|_0^3 = 0.$$



¿Qué significa este resultado?

El objeto no se mueve en una dirección constante. Esto se puede comprobar escribiendo la velocidad en forma factorizada $v(t) = t\ (t - 2)$ de modo que $v(t) \geq 0$ si $2 \leq t \leq 3$ y $v(t) \leq 0$ si $0 \leq t \leq 2$. El objeto cambia de dirección en el instante $t = 2$.

El desplazamiento resulta igual a cero porque el objeto se encuentra en la misma posición en el instante $t = 3$ que en el instante $t = 0$.

b) La distancia recorrida para $2 \leq t \leq 3$ viene dada por el valor de la integral $\int_2^3 (t^2 - 2t)dt$.

La distancia recorrida para $0 \leq t \leq 2$ viene dada por el valor de $-\int_0^2 (t^2 - 2t)dt$.

Resolviendo cada una se obtiene $\int_2^3 (t^2 - 2t)dt = \frac{4}{3}$ y $-\int_0^2 (t^2 - 2t)dt = \frac{4}{3}$

Luego, la distancia recorrida por el objeto es $\frac{8}{3}$ metros.

Trabajo

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros cuando necesitan determinar la energía necesaria para realizar diferentes tareas físicas. Es útil conocer la cantidad de trabajo realizado cuando una guía eleva una viga de acero, cuando se comprime un muelle, cuando se lanza un cohete o cuando un camión transporta una carga por una carretera. En el lenguaje cotidiano, coloquial, el término trabajo se usa para indicar la cantidad total de esfuerzo requerido para realizar una tarea. En física tiene un significado técnico que está en relación con la idea de fuerza. Intuitivamente se puede pensar una fuerza como el hecho de empujar un objeto o tirar de él. Decimos que se hizo un trabajo cuando una fuerza mueve un objeto. Si la fuerza aplicada al objeto es constante, tenemos la definición siguiente de trabajo.

- *Trabajo realizado por una fuerza constante*

Si un objeto se mueve una distancia *d* en la dirección de una fuerza constante *F* aplicada sobre él, entonces el trabajo *w* realizado por la fuerza se define como $w = F \,.\, d$

Existen muchos tipos de fuerzas: centrífuga, gravitacional, etc. Una fuerza cambia el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitacionales en la tierra se suelen utilizar unidades de medida correspondientes al peso de un objeto.

Cuando la fuerza es constante todo parece sencillo pero cuando se aplica una fuerza variable a un objeto se necesita el cálculo para determinar el trabajo realizado ya que la fuerza varía según el objeto cambia de posición.

- *Trabajo realizado por una fuerza variable*

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta desde $x = a$ hasta $x = b$ debido a una fuerza F(x) que varía continuamente. Consideramos una partición que divide al intervalo [a, b] en n subintervalos determinados por $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots\ldots\ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ donde Δx_i indica la amplitud o longitud del i-ésimo subintervalo, es decir $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Para cada i escogemos c_i tal que $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$. En c_i la fuerza está dada por $F(c_i)$. Dado que F es continua y suponiendo que n es grande, Δx_i es pequeño. Los valores de f no cambian demasiado en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y podemos concluir que el trabajo realizado w_i al mover el objeto por el subintervalo i-ésimo (desde x_{i-1} hasta x_i) es aproximadamente el valor $F(c_i).\ \Delta x_i$

Sumando el trabajo realizado en cada subintervalo, podemos aproximar el trabajo total realizado por el objeto al moverse desde a hasta b por:

$$w \approx \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i \,.$$

Esta aproximación mejora si aumentamos el valor de n. Tomando el límite de esta suma cuando $n \to \infty$ resulta $w = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx$

Si un objeto se mueve a lo largo de una recta debido a la acción de una fuerza que varía continuamente F(x), entonces el trabajo realizado por la fuerza conforme el objeto se mueve desde x = a hasta x = b está dado por $w = \int_a^b F(x)\,dx$.

Presión y fuerza ejercidas por un fluido

- *Presión de un fluido*

Los nadadores saben que cuanto más profundo se sumerge un objeto en un fluido mayor es la presión sobre el objeto. Las compuertas de las represas se construyen más gruesas en la base que en la parte superior porque la presión ejercida contra ellas se incrementa con la profundidad. Para calcular la presión de un fluido se emplea una ley física importante que se conoce como el principio de Pascal. Muchos de los trabajos de Pascal fueron intuitivos y carentes de rigor matemático pero anticiparon muchos resultados importantes. El principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido a una profundidad h es la misma en todas direcciones. La presión en cualquier punto depende únicamente de la profundidad a la que se halla el punto. En un fluido en reposo, la presión *p* a una profundidad *h* es equivalente a la densidad *w* del fluido por la profundidad, $p = w \,.\, h$. Definimos la presión como la fuerza que actúa por unidad de área sobre la superficie de un cuerpo.

- *Fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie con profundidad constante*

Dado que la presión de un fluido aparece en términos de fuerza por unidad de área, $p = \dfrac{F}{A}$, la fuerza total que ejerce el fluido contra la base en un recipiente con base plana horizontal se puede calcular multiplicando el área de la base por la presión sobre ella $F = p \,.\, A = presión \,.\, área$. Teniendo en cuenta la fórmula para calcular la presión resulta el valor de la fuerza $F = w \,.\, h \,.\, A$

- *Fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie con profundidad variable*

Supongamos que una placa sumergida verticalmente en un fluido de densidad w se desplaza desde y = a hasta y = b, sobre el eje y. La fuerza ejercida por el fluido contra un lado de la placa es $F = w \,.\int_a^b h(y)\,L(y)\,dy$ donde h(y) es la profundidad y L(y) es la longitud horizontal medida de izquierda a derecha sobre la superficie de la placa al nivel y.

Se enuncian algunas de las muchas aplicaciones de la integral definida a la resolución de problemas, sólo se pretende motivar para una indagación e investigación más profunda.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Se lanza una piedra hacia arriba con una aceleración de $-32\dfrac{m}{seg^2}$. Sabiendo que la velocidad inicial es de $64\dfrac{m}{seg}$ y la altura desde la que es lanzada es de 96 m:

a) halle la expresión de la velocidad t segundos después.

b) determine la expresión que describe el espacio recorrido t segundos después.

c) ¿cuántos segundos tarda en alcanzar la altura máxima?, ¿cuál es dicha altura?

d) ¿en que momento toca el suelo?

2) Una epidemia de gripe ataca una población. Sea P(t) el número de personas enfermas de gripe al tiempo t, donde t se mide en días a partir del inicio de la epidemia y P(0) = 100. Suponga que después de t días la gripe se está extendiendo a razón de $120t - 3t^2$ personas por día.

a) Encuentre la expresión para P(t).

b) ¿Cuántas personas afectadas habría 4 días después de haber comenzado la epidemia?

3) Un móvil se desplaza por un camino. Su aceleración en el instante t es: $a(t) = t.(t - 100)\dfrac{km}{h^2}$. Si en el instante inicial t = 0 el móvil se encuentra a una distancia de 50 km y parte con una velocidad de $30\dfrac{km}{h}$, ¿cuál es la expresión que describe la posición s(t) para $0 \leq t \leq 100$?

4) Una pelota es lanzada hacia arriba desde una altura de 256 pies sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. Por las leyes físicas se sabe que la velocidad al tiempo t es $v(t) = 96 - 32t$ pies por segundo.

a) Encuentre s(t), es decir, la función que expresa la altura de la pelota al tiempo t.

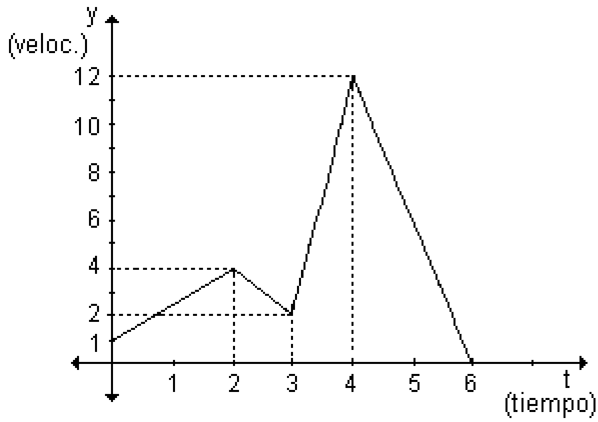
b) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al piso?

5) La velocidad de un móvil viene dada por $v(t) = t^2 + 4t + 2$. Si se sabe que en el instante inicial el móvil no ha realizado ningún recorrido.

a) Encuentre la función que describe la posición del móvil en el instante t.

b) ¿Cuál fue el espacio recorrido por el móvil entre t = 1 y t = 3 segundos?

6) Una partícula cuya velocidad es v = f(t) (medida en metros por segundo), se mueve en línea recta según se indica en el gráfico. Halle el recorrido durante su desplazamiento en los primeros 6 segundos.



7) El precio de un artículo es \$ 700 y su valor disminuye según la cantidad de años t posteriores a su compra. $R = -500\,(t+1)^{-2}$ describe la razón de cambio del precio P de dicho artículo con respecto a t. Determine el valor del artículo 3 años después de su compra.

8) Durante los 10 primeros días de diciembre, una célula vegetal creció de manera tal que a los t días del mes de diciembre, el volumen de la misma estuvo creciendo a razón de $(12 - t)^{-2}$ micras cúbicas por día. Si el 3 de diciembre el volumen de la célula era de 3 μm^3, calcule el volumen el día 8 del mismo mes.

9) El volumen de un globo crece a razón de $\sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t$ cm^3 por segundo. Si a los 3 segundos el volumen es 3 cm^3, halle:

a) la expresión que describe el volumen V en función del tiempo t,

b) el volumen del globo a los 8 segundos.

10) La pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto P(x, y) es $m = 10 - 4x$. Determine la ecuación de la curva sabiendo que el punto R(1, –1) le pertenece.

11) La matrícula de una escuela se ha incrementado a razón de $1000\,(t+1)^{-\frac{1}{2}}$ alumnos por año desde 1993. Si la matrícula en 1996 fue de 10 000 alumnos, indique:

a) la cantidad de alumnos en 1993 y en el 2001,

b) la matrícula esperada para el año 2008, suponiendo que se seguirá incrementando a la misma tasa.

12) Una fábrica de cortadoras de césped ha incorporado una nueva línea de montaje. Después de t semanas, la expresión $3000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)$ describe la cantidad de máquinas por semana que se arman.

a) Halle la cantidad de máquinas producidas durante la primera semana.

b) Encuentre la cantidad de máquinas que se pueden producir desde principios de la tercera semana hasta el final de la quinta.

c) Si han transcurrido muchas semanas desde la implementación de la línea de montaje, calcule la cantidad de máquinas por semana que se estarán produciendo.

13) En una panadería, al sacar el pan del horno con una temperatura de 90º, se lo coloca en un recinto hasta que adquiera la temperatura ambiental. La temperatura del pan varía según la expresión $-7e^{-0,1t}$ grados por minuto.

a) Obtenga la función que describe la temperatura T del pan en función de los minutos posteriores a ser retirado del horno.

b) Calcule la temperatura del pan a los 10 minutos.

14) Una partícula se mueve a lo largo de una recta y su velocidad (en cm por segundo) a los t segundos de comenzar el desplazamiento, está dada por la expresión $v(t) = 10\cos(2\pi t)$. Se sabe que al inicio del movimiento la partícula se encuentra a 5 cm a la derecha del origen.

a) Determine la expresión que describe la posición en cualquier instante t.

b) Calcule la posición de la partícula cuando $t = 0,3$ seg. y $t = 1,4$ seg.

15) La herida producida por una quemadura está sanando de manera tal que t días después de haber iniciado la curación, el área de la misma ha disminuido a razón de $-3.(t + 2)^{-2}$ cm^2 por día. Al día siguiente de iniciar el tratamiento, el área de la herida era de $2cm^2$.

a) Obtenga la función que describe el área afectada por la quemadura.

b)Calcule el área de la herida en el momento de producirse la quemadura y el área prevista para 4 días después de haber iniciado el tratamiento.

16) La variación de la carga eléctrica (medida en coulombs) recibida por un condensador a los t segundos, está dada por la expresión 5.sen(60t).

a) Determine la función q(t) que describe la carga eléctrica del condensador en función del tiempo, sabiendo que $q\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$.

b) Halle la mayor carga positiva posible del condensador y los segundos que demora en alcanzarla.

17) El precio de una obra de arte aumenta respecto al tiempo de acuerdo a la expresión $5t^{\frac{3}{2}} + 10t + 50$, siendo t el número de años posteriores a su adquisición. Si la misma es adquirida por $ 1000, calcule el precio p estimado para 4 años después.

18) El volumen de agua de un tanque es v m^3 cuando la profundidad del agua es de h metros. Si la tasa de variación de v con respecto a h es $\pi(4h^2+12h+ 9)$, determine el volumen de agua en el tanque cuando la profundidad es de tres metros.

19) Una función de costo marginal está definida por $c'(x) = 3x^2 + 8x + 4$ y el costo fijo es de $ 6. Obtenga la función costo total correspondiente.

20) Para un artículo particular, la función de ingreso marginal es $i'(x) = 15 - 4x$, donde x es la cantidad de unidades demandadas. Determine la función que modela el ingreso total.

21) Una curva de demanda está dada por $p(x) = \frac{450}{x+8}$. Halle el superávit del consumidor cuando el precio de venta es de \$ 10.

22) Una curva de oferta está dada por $p(x) = 5 + \frac{1}{10}\sqrt{x}$. Calcule la ganancia del productor cuando el precio de venta es de \$ 10.

23) Una partícula se mueve de modo que su velocidad en cualquier instante t se da por $v(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}$, para $t \geq 1$. Determine la distancia que recorre para $1 \leq t \leq 4$.

24) Una colonia de bacterias crece a razón de $12e^{t}$, t se mide en años. ¿Cuál es la población total para el período $0 \leq t \leq 15$?

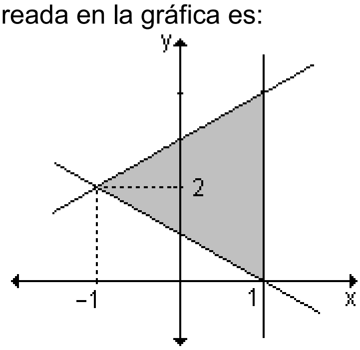
25) Un ciclista hace un viaje de seis horas y en cada instante t (en horas) su velocidad (en $\frac{km}{h}$) está dada por $v(t) = \frac{3}{2}t^3 - 15t^2 + 36t$.

a) Encuentre a qué distancia del punto de partida se encuentra el ciclista luego de seis horas.

b) Halle la distancia total recorrida en esas seis horas.

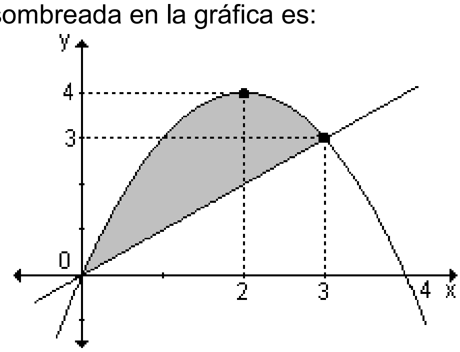
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1) El valor del área sombreada en la gráfica es:



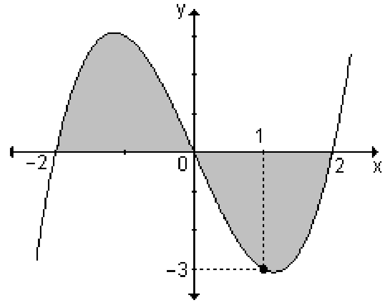
a) 4 **b)** 8 **c)** 1 **d)** 2

2) El valor del área sombreada en la gráfica es:



a) 9 **b)** 4,5 **c)** 18 **d)** 22,5

3) El valor del área sombreada en la gráfica es:



a) 4 **b)** 16 **c)** 8 **d)** 0

4) El valor promedio de la función f(x) = x – 2 en el intervalo [1, 5] es:

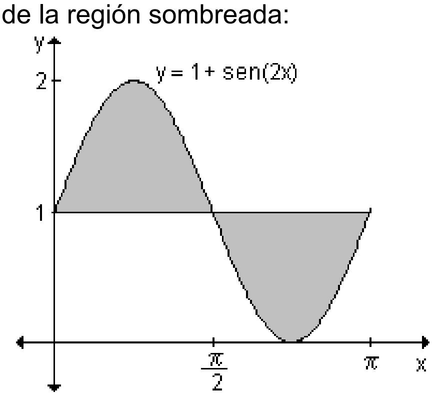
a) 4 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{x^2}{2} - 2x$ **d)** 1

5) El valor promedio de la función $f(x) = 1 - 3x^2$ en el intervalo [3, 5] es:

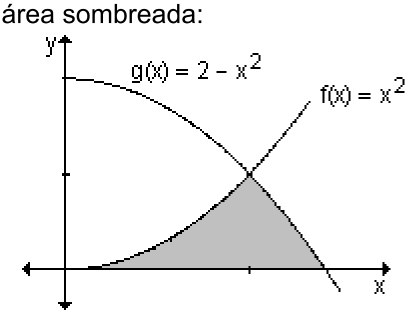
a) 2 **b)** –48 **c)** 48 **d)** $\frac{1}{2}$

AUTOEVALUACIÓN

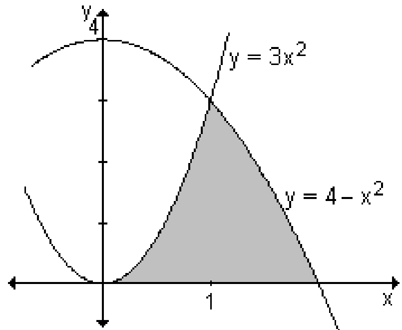
1) Encuentre el área de la región sombreada:



2) Calcule el valor del área sombreada:



3) Calcule el valor del área sombreada:



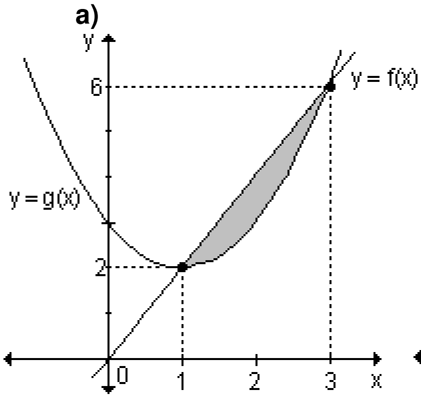
4) Encuentre el área encerrada por la función $p(x) = (x^2 - 1).(x - 3)$ y el eje x.

5) Determine el valor promedio de la función $m(x) = x + 3$ en el intervalo $[-2, 0]$. ¿para qué valor se alcanza este valor promedio? Interprete gráficamente.

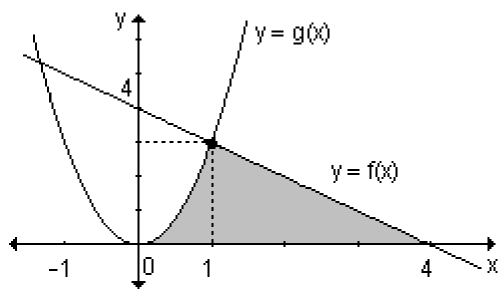
EJERCICIOS DE REPASO

1) En los siguientes gráficos determine la medida del área sombreada:

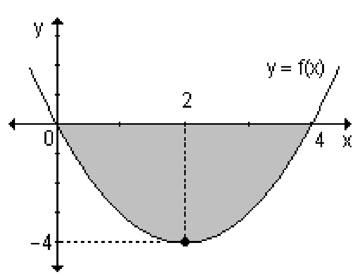
a)



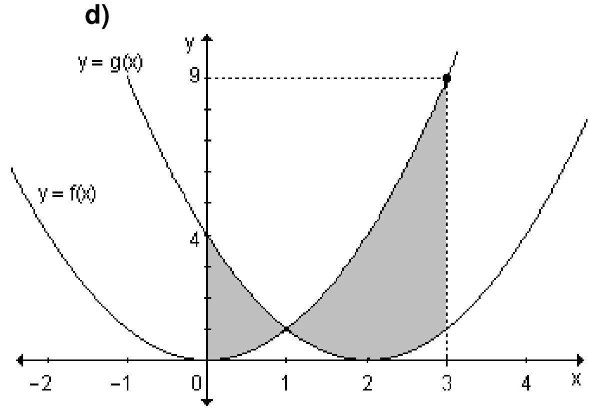
b)



c)



d)



2) Grafique la región limitada por las siguientes curvas y calcule el área determinada por ellas.

a) $y = x^2$ con la recta $y = 2x + 3$,

b) el eje de abscisas, la recta $y = x + 1$ y la recta $x = 4$,

c) el eje de abscisas, la curva $y = x^2 - 1$ y la recta $x = 2$,

d) $y = x^2 + 2x - 1$ con la recta $y = -x - 1$,

e) $y^2 = 4x$ con la recta $y = 2x - 4$,

f) $y = \ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 10$,

g) $y = x^2$ con la recta $y = 3 - 2x$,

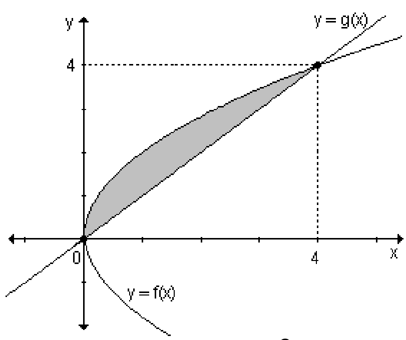
h) $y = \sqrt{x}$ con $y = x^2$,

i) $y = 4 - x^2$ con la recta $y = x + 2$.

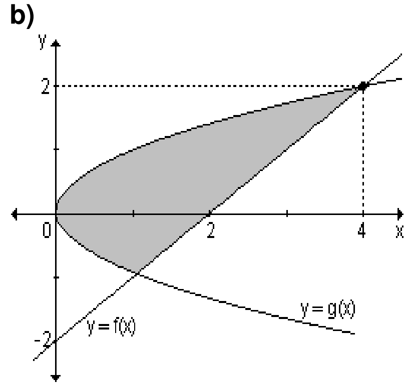
3) Halle el área limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y el segmento determinado por los puntos A(–2, –6) y B(4, 6).

4) Determine el área sombreada en las siguientes gráficas:

a)



b)



5) Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ para $x \in [-2, 1]$:

a) halle el valor medio de f en ese intervalo,

b) estime un valor c en el que f toma ese valor medio,

c) interprete gráficamente.

6) Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \in [1, 4]$:

a) halle el valor medio de f en ese intervalo,

b) estime un valor c en el que f toma ese promedio,

c) interprete gráficamente.

6. NOCIONES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES

6.1 Introducción a la teoría de modelos.

6.2 Referencias históricas.

6.3 Conceptos básicos.

6.4 Ecuaciones diferenciales de primer orden.

"El Cálculo es así una puerta abierta milagrosamente; y aún las teorías físicas más complejas y profundas, llevan un rastro de sus más simples ecuaciones diferenciales y una huella de su arquitectura global".

David Berlinski

En el mundo real, con frecuencia ocurren cambios y muchas veces se desea predecir el comportamiento futuro de un proceso o fenómeno a partir de cómo cambian los valores actuales. Surgen así ecuaciones que contienen una función desconocida y una o algunas de sus derivadas. Este tipo de ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones diferenciales* y son una de las aplicaciones más importantes del cálculo integral. Su estudio constituye una de las ramas de la Matemática que más aplicaciones tiene. Muchos fenómenos físicos y biológicos pueden ser descriptos por una ecuación diferencial. En diferentes situaciones de distintas áreas como la medicina, la ecología o la economía, surgen aplicaciones relacionadas con problemas de bacterias, insectos, mamíferos o personas.
Otros problemas están relacionados con:

- el movimiento de un proyectil, cohete, satélite o planeta,
- la carga o la corriente en un circuito eléctrico,
- la conducción de calor en una barra o una plancha,
- las vibraciones de un alambre o una membrana,
- la posición de una partícula móvil conociendo su velocidad o aceleración,
- la rapidez de descomposición de una sustancia radiactiva o la rapidez del crecimiento de una población,
- las curvas que tienen ciertas propiedades geométricas.

La formulación matemática de estos problemas da lugar al planteo de *ecuaciones diferenciales.*
Cuando una ecuación diferencial se utiliza para describir un fenómeno físico, se dice que es un modelo matemático.

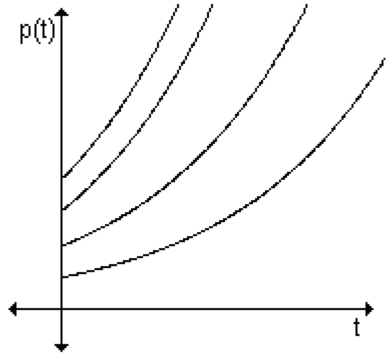
6.1 Introducción a la teoría de modelos

Un modelo es la representación de los aspectos relevantes de una situación desde el punto de vista del problema que se quiere resolver. Es una colección de afirmaciones cuyas consecuencias se derivan de argumentos lógicos que se construye para estudiar algún fenómeno o situación en el mundo real.
Todo modelo que utiliza el lenguaje matemático es un modelo matemático. Los modelos matemáticos son muy importantes en las ciencias fácticas y en especial tienen un rol relevante en biología donde resultan indispensables en la búsqueda de las leyes que explican los procesos biológicos. Formular problemas biológicos en lenguaje matemático, resulta de fundamental importancia ya que contribuye a aclarar las componentes del sistema en estudio y a predecir su comportamiento.
A modo de ejemplo, se tratarán algunos de ellos en los que la *ecuación diferencial* es la herramienta matemática empleada.

Modelo de crecimiento de poblaciones

Imaginemos una población constituida enteramente por organismos idénticos que se reproducen a una razón que es la misma para cada individuo y que no varía con el tiempo.
Si suponemos que cada individuo vive para siempre, que ningún organismo interfiere con algún otro, que existe suficiente espacio y recursos para sostener

a todos los individuos, estamos en lo que en términos de ecología es un *modelo de crecimiento puro.*
Con las hipótesis anteriores, la rapidez con que una población crece, en un instante cualquiera, es proporcional a la población presente en dicho instante.
Este modelo se usó para estudiar por ejemplo: propagación de nuevas ideas, incremento del número de científicos, crecimiento celular, propagación de rumores, transferencia de calor, decaimiento radiactivo y muchos otros fenómenos.
El modelo matemático para este proceso se expresa mediante la ecuación:
$\frac{dp}{dt} = bp$. Es una ecuación diferencial de primer orden porque contiene una función desconocida p y su derivada $\frac{dp}{dt}$. En la ecuación dada, p = p(t) es la población en el tiempo t y b es la constante de proporcionalidad que representa la razón de crecimiento o disminución de la población, dependiendo si b es positiva o negativa.
Consideremos el caso en que la constante es positiva. Si se descarta una población de cero, p(t) > 0 para todo t. La ecuación indica que $\frac{dp}{dt}$ es positiva para todo t. Esto implica que la población crece siempre.
Además, a medida que p(t) aumenta, $p'(t)$ se hace más grande. O sea que la razón de crecimiento aumenta al aumentar la población.
La solución de la ecuación $\frac{dp}{dt} = bp$ es una función que debe verificar que su derivada es un múltiplo constante de ella. Las funciones exponenciales tienen esta característica.
Cualquier curva de la familia de funciones $p(t) = ke^{bt}$ donde $k > 0$ es solución de la ecuación diferencial dado que $\frac{dp}{dt} = ke^{bt}b$. Como $ke^{bt} = p$, resulta: $\frac{dp}{dt} = bp$. En el gráfico se muestra la familia de soluciones de $\frac{dp}{dt} = bp$ (siendo b positiva).



Nota.

a) *Crecimiento exponencial*. La población crece en forma exponencial. En el caso de que la constante b sea positiva, el modelo predice que la población crece constantemente y llegaría a ser infinitamente grande. Dado que el modelo asegura que no existe límite en el número de individuos en esta población, esto no presenta un cuadro completamente realista.
b) *Decaimiento exponencial*. si el signo de la constante b es negativo, la función p(t) es positiva para todo t pero decrece muy próxima a cero a medida que t aumenta. Si la población considerada consiste de individuos pertenecientes a una especie en particular, el modelo indica que la especie se va a extinguir cuando todos los individuos eventualmente estén muertos.

Modelo de población logística

La suposición básica del modelo exponencial puro es que la razón del incremento de la población es proporcional al tamaño de la misma. La razón de crecimiento es constante.
Además supone que hay disponibles suficientes recursos para obtener cualquier nivel de población, es decir, no hay interferencia entre los individuos de la población. Estas hipótesis no son muy realistas. Las especies en general habitan ambientes restrictos, con una cantidad finita de espacio y un suministro limitado de recursos. El medio ambiente tiene una capacidad limitada, un límite superior referido al número de organismos individuales que pueden existir sobre recursos disponibles. Cuando la medida de la población se aproxima a ese límite superior, la razón de crecimiento disminuye lentamente. Para tener en cuenta esas restricciones, es apropiado un modelo que tenga en cuenta que la población comienza creciendo exponencialmente, pero se nivela a medida que tienden a su capacidad máxima o decrece hacia ese valor máximo si llegara a sobrepasarlo. Es decir que el modelo apropiado debe considerar:

- $\frac{dp}{dt} \approx bp$, si p es pequeña (al inicio la razón de crecimiento es proporcional a la población presente en el instante t).
- $\frac{dp}{dt} \to 0$, si la población tiende a la capacidad de contención $(p \to M)$.

En este modelo se supone que la razón de crecimiento no es constante, depende del tamaño de la población y por lo tanto esta razón es función de la población, es decir: $\frac{dp}{dt} = f(p)$

Consideremos una población en condiciones de ambiente y suministro limitado de alimentos de modo que no puede sobrepasar un tamaño máximo M. Si se supone que la rapidez de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la misma y a la diferencia entre la población máxima y la población existente, se obtiene la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = kp.(M - p), \text{ donde k es una constante.}$$

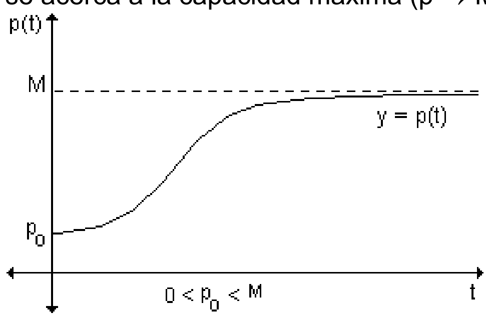
Este es un modelo logístico y la ecuación se llama ecuación logística diferencial o ecuación de Verhulst, en honor al biólogo matemático holandés Verhulst quien en 1837 la utilizó para modelar el crecimiento demográfico mundial.

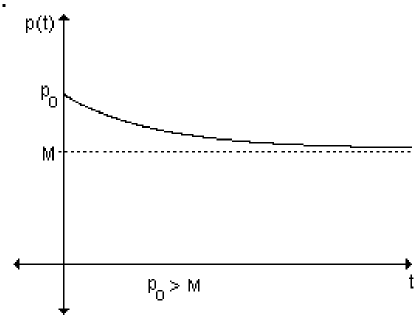
Observemos que las funciones constantes $p(t) = 0$ y $p(t) = M$ son soluciones de la ecuación. Esto tiene sentido ya que si la población es cero o se encuentra en la capacidad de contención, ahí permanece. Estas dos soluciones se llaman soluciones de equilibrio.

Si la población inicial p_0 se encuentra entre 0 y M, el segundo miembro de la ecuación es positivo, por lo que $\frac{dp}{dt} > 0$ y la población crece. Para valores pequeños de t, la gráfica es cóncava hacia arriba y prácticamente exponencial. Luego se hace cóncava hacia abajo y la población límite tiende a M.

Si la población inicial sobrepasa la capacidad de contención ($p > M$) entonces $M - p$ es negativa por lo que $\frac{dp}{dt} < 0$ y la población decrece.

En cualquiera de los dos casos, la curva tiende a la horizontal $y = M$ cuando p se acerca a la capacidad máxima ($p \to M$).





Decaimiento radiactivo

Las sustancias decaen por la emisión espontánea de radiación. Si q(t) es la masa restante a partir de una masa inicial q_0 de sustancia después del tiempo t, se ha demostrado experimentalmente que la rapidez relativa de decaimiento $-\frac{1}{q}\frac{dq}{dt}$ es constante. Se deduce que $\frac{dq}{dt} = rq$, donde r es una constante negativa.

O sea que las sustancias radiactivas decaen con una rapidez proporcional a la masa restante. Se puede demostrar que la masa decae en forma exponencial $q(t) = q_0 e^{rt}$.

Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos de la vida media, el tiempo necesario para que decaiga la mitad de cualquier cantidad dada.

<u>Problema</u>

> El isótopo radiactivo plutonio 241 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente del mismo. Si 50 mgrs. de este material se reducen a 29,6 mgrs. en 10 años, encuentre una expresión para la cantidad presente en cualquier instante.

Sea q(t) la cantidad de plutonio 241 presente en cualquier instante t, en donde q se mide en mgrs. y t en años. La observación física de que el plutonio 241 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente significa que la razón de cambio $\frac{dq}{dt}$ es proporcional a q. Por lo tanto, q satisface la ecuación diferencial $\frac{dq}{dt} = rq$, donde la constante r < 0 se conoce como razón de decaimiento.

Cualquier curva de la familia de funciones $q(t) = q_0\, e^{rt}$, $q_0 > 0$ es solución de la ecuación diferencial.

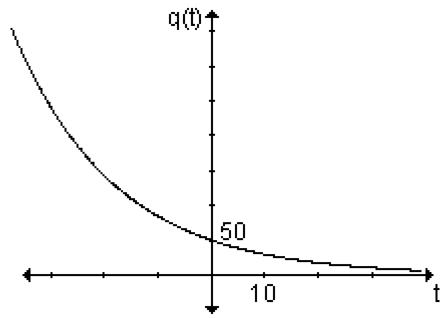
Como la cantidad inicial es 50 mgrs. se obtiene la solución particular $q(t) = 50\, e^{rt}$.

Sabiendo que luego de 10 años quedan 29,6 mgrs. de sustancia se verifica:

$$29{,}6 = 50\, e^{r.10} \Rightarrow 29{,}6 : 50 = e^{r.10} \Rightarrow 0{,}592 = e^{r.10}$$

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros: $\ln 0{,}592 = 10r \Rightarrow -0{,}524 : 10 \approx r \Rightarrow r \approx -0{,}0524$

Utilizando este valor de r se obtiene $q(t) = 50\, e^{-0{,}0524t}$ cuya gráfica es:



Modelo para el movimiento de un resorte

Considerando un objeto con masa m en el extremo de un resorte vertical, la ley de Hooke expresa que si se estira o comprime el resorte x unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza proporcional a su alargamiento.

Además, la segunda ley del movimiento de Newton afirma que la fuerza neta que actúa sobre el sistema en movimiento es igual a masa por aceleración (F = ma).

Por lo tanto, en ausencia de amortiguación o de otras fuerzas exteriores (como resistencia del aire), la ecuación diferencial del movimiento es $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ o bien $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$, la cual expresa que la segunda derivada de x es proporcional a x pero con signos opuestos.

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden porque aparecen segundas derivadas.

6.2 Referencias históricas

El estudio de las ecuaciones diferenciales se inició con Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) en el siglo XVII.

Newton trabajó relativamente poco las ecuaciones diferenciales en sí, pero su desarrollo del cálculo y su aclaración de los principios fundamentales de la mecánica proporcionaron una base para una aplicación de aquellas en el siglo XVIII, de modo más notable por Euler.

Leibniz llegó a los resultados fundamentales del cálculo de manera independiente. Desarrolló algunos métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Los hermanos Jacob (1654–1705) y Johann (1667–1748) Bernoulli de Basilea, encontraron métodos para resolverlas y ampliar el alcance de sus aplicaciones, resolviendo varios problemas de la mecánica.

El matemático más grande del siglo XVIII, Leonhard Euler (1707–1783), hizo importantes contribuciones a los métodos de resolución. Así también Joseph Lagrange (1736–1813) y Laplace (1749–1827).

A fines del siglo XVIII se habían descubierto muchos métodos para resolver ecuaciones diferenciales. En el siglo XIX el interés se dirigió más hacia la investigación de cuestiones de existencia y unicidad y al desarrollo de métodos menos elementales.

Las ecuaciones diferenciales que no podían ser resueltas por métodos analíticos originaron la investigación de métodos de aproximaciones numéricas. Los problemas que se pueden resolver por estos métodos se han ampliado mucho gracias al desarrollo de computadoras cada vez más poderosas.

En el siglo XX se han creado métodos geométricos o topológicos. Se han descubierto fenómenos inesperados a los que se les ha dado el nombre de caos, fractales, los cuales están dando lugar a más aplicaciones.

Aunque las ecuaciones diferenciales constituyen un tema muy antiguo, siguen siendo una fuente de problemas que aún no se han resuelto.

6.3 Conceptos básicos

Definición. Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función $y = f(x)$ y sus derivadas y', y'', ..., y^n se llama *ecuación diferencial.*

Una ecuación diferencial se puede escribir simbólicamente:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$$

o bien:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Ejemplos. $y'' + xyy'^2 = 0$; $y^{(iv)} + 2y'' = \cos x$; $y'' - 2y' + x = \operatorname{sen} x$

Nota. Si la función desconocida es de una sola variable independiente la ecuación se llama *ordinaria*.

El orden de la derivada de mayor orden que contiene una ecuación diferencial determina el *orden de la ecuación diferencial*.

Ejemplos. $y' + 3xy - 5 = 0$ es de primer orden

$y'' + 2y' - 5y + \operatorname{sen} x = 0$ es de segundo orden

Solución de una ecuación diferencial

Problema

> El costo marginal de cierto artículo x está dado por $\frac{dC}{dx} = 3x + 10$.
>
> **a)** Encuentre la función de costo de dicho artículo.
>
> **b)** Si los costos fijos de la empresa son de \$1000, ¿cuál es la función costo?

a) El costo marginal está dado por $\frac{dC}{dx} = 3x + 10$. Como el miembro izquierdo de la ecuación es la derivada de C con respecto a x, es posible resolver la ecuación para C integrando ambos miembros: $\int\left(\frac{dC}{dx}\right)dx = \int(3x + 10)dx$.

La integral del primer miembro es $C + c_1$ y la del segundo es

$\int(3x + 10)dx = \frac{3}{2}x^2 + 10x + c_2$.

Por lo tanto $C + c_1 = \frac{3}{2}x^2 + 10x + c_2$ o bien $C = \frac{3}{2}x^2 + 10x + c_2 - c_1$.

Reemplazando la diferencia de las constantes $c_2 - c_1$ por la constante única c se obtiene la función costo $C(x) = \frac{3}{2}x^2 + 10x + c$, donde c es una constante arbitraria.

Nota. De ahora en adelante se sumará sólo una constante, entendiendo que ésta representa la diferencia entre las dos constantes obtenidas de las dos integraciones.

b) Si los costos fijos de la empresa ascienden a \$1000, esto significa que $C(0) = 1000$ de donde se obtiene que $c = 1000$ y por lo tanto $C(x) = \frac{3}{2}x^2 + 10x + 1000$.

La ecuación $\frac{dC}{dx} = 3x + 10$ es un ejemplo sencillo de una ecuación diferencial.

La función $C(x)=\frac{3}{2}x^2+10x+c$ es la solución de la ecuación diferencial ya que si se sustituye en la misma se obtiene una expresión verdadera. Se llama solución general de la ecuación dada pues tiene una constante arbitraria.
Al reemplazar c por 1000 se obtiene una solución particular de la ecuación.

Definición. La función y = f(x) que introducida en una ecuación diferencial la transforma en una identidad se denomina *solución* o *integral* de la ecuación diferencial.

Ejemplo. La función f definida para todo real x por f(x) = 2 senx + 3 cos x es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0,\ \forall\ x \in R$.
En efecto, calculando la derivada segunda de la función y reemplazando en la ecuación dada, se obtiene una identidad:

$$y' = f'(x) = 2\cos x - 3\,\text{sen}x$$
$$y'' = f''(x) = -2\text{sen}x - 3\cos x$$

Por lo tanto:

$$-2\text{sen}x - 3\cos x + 2\,\text{sen}x + 3\cos x \overset{?}{=} 0,\ \forall\ x \in R$$
$$0 = 0\ \checkmark$$

Luego f(x) = 2senx + 3cosx es una solución de la ecuación dada.

Ejemplo. Verifique que $y=\frac{2+\ln x}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1,\ \forall\ x \in R^+$.
En efecto, calculando la derivada primera de la función resulta:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}.x-(2+\ln x)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Reemplazando en la ecuación dada, se obtiene una identidad:

$$x^2.\left(\frac{-1-\ln x}{x^2}\right) + x.\left(\frac{2+\ln x}{x}\right) = 1$$
$$(-1 - \ln x) + (2 + \ln x) = 1$$
$$1 = 1\ \checkmark$$

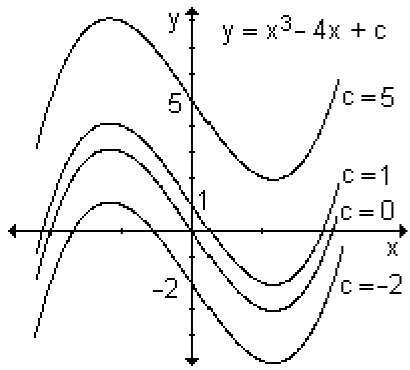
*Nota. U*na ecuación diferencial tiene en general un número infinito de soluciones.

Ejemplo. Resuelva la ecuación diferencial $y' = 3x^2 - 4$.

La solución de la ecuación diferencial es una función y = f(x) cuya derivada debe ser $3x^2 - 4$. Por lo tanto, para resolver la ecuación diferencial dada, se buscan todas las antiderivadas de $3x^2 - 4$.

La *solución general* es $y = x^3 - 4x + c$, donde c es una constante arbitraria.

Dándole a c valores particulares, es posible generar infinitas soluciones de la ecuación dada. Algunas de ellas se encuentran representadas en el siguiente gráfico:



Al aplicar ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas, por lo general nos interesa hallar la solución general de la misma y a partir de ella determinar la familia de soluciones que resultan de considerar valores particulares de la constante c.
En muchos problemas se desea encontrar sólo una solución particular que satisfaga ciertas condiciones adicionales llamadas *condiciones iniciales*.
Estas condiciones iniciales especifican los valores de una solución $[y(x_0) = y_0]$ y de alguna de sus derivadas para un determinado valor de x (x_0).

Ejemplo. Resuelva la ecuación diferencial $y' = 3x^2 - 4$ con la condición inicial $y(2) = 5$.
La ecuación diferencial ya fue resuelta en el ejemplo anterior y se obtuvo la solución general $y = x^3 - 4x + c$.
Se desea encontrar la solución particular que satisfaga la condición $y(2) = 5$.
Geométricamente, establecer una condición inicial, significa seleccionar de las infinitas curvas aquella que pasa por el punto (2, 5). Reemplazando en la función, se obtiene:
$5 = 2^3 - 4.2 + c \quad \Rightarrow \quad 5 = 8 - 8 + c \quad \Rightarrow \quad c = 5$
Por lo tanto la solución buscada es $y = x^3 - 4x + 5$.

Observación. Resolver una ecuación diferencial significa:
a) encontrar la solución o integral general.
b) hallar la solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

Problema

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x de tal manera que su aceleración en cualquier instante t ≥ 0, está dado por $a(t) = (16 - 24t)\ \frac{m}{seg}$.

Encuentre la posición x de la partícula en cualquier momento t > 0 si en el instante inicial (t = 0) está ubicada a dos metros del origen y viajando a una velocidad de $5\frac{m}{seg}$.

La velocidad v es la primera derivada con respecto al tiempo de la función que describe la posición de la partícula y la aceleración es la derivada segunda.

Es decir: $v(t) = \frac{dx}{dt}$ $\qquad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$

Teniendo en cuenta el enunciado del problema resulta que $\frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t$ es la ecuación diferencial del problema.

En el momento inicial se encuentra a 2 metros y está viajando a una velocidad de $5\frac{m}{seg}$, es decir $x(0) = 2$ y $x'(0) = v(0) = 5$. La formulación matemática del problema es una ecuación diferencial de segundo orden con condiciones iniciales: $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 5 \end{cases}$

Integrando ambos miembros de la ecuación diferencial con respecto a t, se obtiene la función que describe la velocidad en cualquier instante t:

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = \int (16 - 24t)\,dt = 16t - 12t^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 + c_1$$

Como $x'(0) = v(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad 16.0 - 12.0^2 + c_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 5$

Por lo tanto: $x'(t) = 16t - 12t^2 + 5$

Integrando nuevamente con respecto a t se obtiene la función que describe la posición:

$$\int \frac{dx}{dt} = \int \left(16t - 12t^2 - 5\right)dt = 8t^2 - 4t^3 + 5t + c_2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 8t^2 - 4t^3 + 5t + c_2\ .$$

Como $x(0) = 2$ entonces: $8.0^2 - 4.0^3 + 5.0 + c_2 = 2 \;\Rightarrow\; c_2 = 2.$

Por lo tanto, $x(t) = 8t^2 - 4t^3 + 5t + 2$ es la función que describe la posición de la partícula en cualquier instante t > 0.

Problema

Una curva en el plano xy tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier punto (x, y) de ella es igual a 4x. Halle la ecuación de la curva si ésta pasa por el punto (2, 11).

La pendiente de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto (x, y) es la derivada de la función en dicho punto, es decir: $\frac{dy}{dx} = 4x$. La curva pasa por el punto (2, 11), por lo que $y(2) = 11$.
De esta manera, la formulación matemática del problema es una ecuación diferencial de primer orden con condición inicial: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4x \\ y(2) = 11 \end{cases}$.

Integrando ambos miembros de la ecuación con respecto a x resulta $y = 2x^2 + c$.
La solución general de la ecuación dada es la familia de parábolas con vértice sobre el eje de ordenadas y coeficiente principal 2.
Usando la condición inicial es posible determinar que $c = 3$.
La solución particular es la parábola de ecuación $y = 2x^2 + 3$.

EJERCICIOS

1) Demuestre que cada una de las funciones dadas es solución de la ecuación diferencial correspondiente.

a) $f(x) = x + 3e^{-x}$; $\frac{dy}{dx} + y = x + 1$

b) $f(x) = (x^3 + c).e^{-3x}$; $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

c) $f(x) = 2 + c\,e^{-2x^2}$; $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$

2) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$ para $y(1) = 4$ **b)** $\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^4$ para $y(0) = 6$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x}$ para $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

3) La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x, y) del plano está dada por (4–2x).

a) Establezca la ecuación diferencial. Resuélvala.

b) Determine una ecuación para aquel miembro de la familia que pasa por el origen.

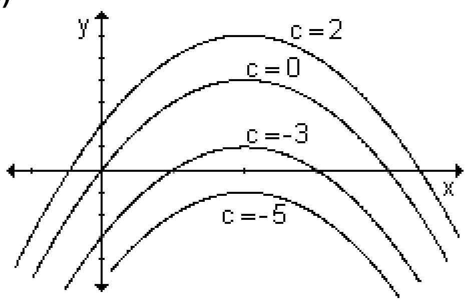
c) Grafique varios miembros de la familia, incluyendo el hallado en **(b)**.

RESPUESTAS

2) a) $y = x^3 + x + 2$ **b)** $y = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + \frac{59}{10}$ **c)** $y = e^{2x} + 3x + 2$

3)a) $y = 4x - x^2 + c,\ c \in R$ **b)** $y = 4x - x^2$

c)



6.4 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden tiene la forma

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{(forma implícita)}$$

Es posible escribir también esta ecuación despejando la derivada de mayor orden y dando lugar a lo que se llama *forma explícita* de una ecuación diferencial.

Para el caso de una ecuación diferencial de primer orden resulta: $y' = f(x, y)$.

Ecuación diferencial de variables separables

Cuando una ecuación diferencial se puede expresar como $g(y)dy = f(x)dx$ decimos que la ecuación es separable.

La solución de una ecuación diferencial separable se obtiene integrando ambos miembros de la ecuación, después de separar las variables.

Ecuaciones diferenciales de este tipo son por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - 5x}{y^2} \quad \text{donde } f(x) = 2x^3 - 5x,\ \ g(y) = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2y}(3x+2) \quad \text{donde } f(x) = 3x + 2,\ \ g(y) = e^{-2y}$$

La principal característica de este tipo de ecuaciones es que es posible *separar las variables*, es decir, permite expresarla de manera tal que en un miembro de la igualdad figure sólo la variable x y en el otro, sólo la variable y.

Ejemplo. Encuentre la solución general de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$.

La ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$ es de variables separables ya que es posible escribirla de la siguiente manera: $ydy=-xdx$
Integrando ambos miembros:

$\int y\,dy=-\int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow \frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}=c$ es la solución general de la ecuación dada.

Ejemplo. Resuelva la ecuación diferencial: $y'=\frac{1+x}{xy}$.

Como $y'=\frac{dy}{dx}$ resulta: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x}{xy}$ que es una ecuación diferencial de variables separables. La misma puede escribirse: $y\,dy=\frac{1+x}{x}dx$.

Integrando ambos miembros:

$$\int ydy=\int\frac{1+x}{x}dx \quad\Rightarrow\quad \int ydy=\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2}{2}=\ln|x|+x+c$$

Expresando la solución en forma explícita se obtiene: $y=\pm\sqrt{2(\ln|x|+x+c)}$, es decir: $y=-\sqrt{2(\ln|x|+x+c)}$ o $y=\sqrt{2(\ln|x|+x+c)}$

Ejemplo. Resuelva la ecuación $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$

Para separar las variables, la ecuación se escribe de la siguiente manera:

$(1+x)y\,dx=-(1-y)x\,dy \Rightarrow \frac{1+x}{x}dx=\frac{y-1}{y}dy$. Esta expresión puede escribirse de la forma $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$. Luego, integrando ambos miembros resulta:

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy \Rightarrow \ln|x|+x+c=y-\ln|y| \Rightarrow y-\ln|y|-\ln|x|-x=c\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ y-\ln|x.y|-x=c$ es la *solución general* de la ecuación diferencial dada.

Observación. La ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx}=f(x)$ es la más simple. Es un caso particular de las ecuaciones de variables separables. Para resolverla se escribe de la forma $dy=f(x)\,dx$ y se integran ambos miembros. Su solución general es: $y=\int f(x)\,dx$

Problema

El ingreso marginal de una compañía por la manufactura y venta de cierto producto es $\frac{di}{dx} = \frac{12}{\sqrt[3]{12x+12}}$, donde i es el ingreso por la venta de x unidades. Encuentre una expresión para el ingreso si la producción y venta de 17 artículos es $ 100.

La ecuación diferencial $\frac{di}{dx} = \frac{12}{\sqrt[3]{12x+12}}$ es una ecuación que separando las variables, resulta: $di = \frac{12}{\sqrt[3]{12x+12}} dx$. También puede expresarse de la siguiente manera: $di = 12(12x+12)^{-\frac{1}{3}} dx$.

Integrando ambos miembros: $\int di = 12\int (12x+12)^{-\frac{1}{3}} dx$

La integral del primer miembro es i y la del segundo miembro se realiza aplicando el método de sustitución:

$t = 12x+12 \quad \Rightarrow \quad dt = 12\ dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{12} = dx$. Reemplazando se obtiene:

$$i = 12\int t^{-\frac{1}{3}} \frac{dt}{12} \quad \Rightarrow \quad i = \int t^{-\frac{1}{3}} dt \quad \Rightarrow \quad i = \frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c \quad \Rightarrow \quad i = 3\frac{(12x+12)^{\frac{2}{3}}}{2} + c$$

El ingreso por 17 productos es $100, entonces (17, 100) pertenece a i(x):

$$100 = 3\frac{(12.17+12)^{\frac{2}{3}}}{2} + c \quad \Rightarrow \quad 100 = 54 + c \quad \Rightarrow \quad c = 46.$$

En consecuencia $i(x) = 3\frac{(12x+12)^{\frac{2}{3}}}{2} + 46$ expresa el ingreso por la producción y venta de x unidades.

Problema

La tasa de crecimiento de cierta tribu del Amazonas satisface la ecuación $\frac{dy}{dt} = 0{,}0016.(50 - y)$, donde una unidad de y representa 100 personas y t se mide en años. Al inicio (t = 0) la población ascendía a 200 personas.

a) Encuentre la forma general que expresa la población en función del tiempo.

b) ¿A cuánto asciende la población luego de 20 años?

a) $\frac{dy}{dt} = 0,0016\ (50 - y)$ es una ecuación diferencial de variables separables.

Como al inicio había 200 personas, la formulación matemática completa del problema es:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0,0016\,(50 - y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Separando variables e integrando ambos miembros:

$$\int \frac{dy}{50 - y} = \int 0,0016\, dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{50 - y} = 0,0016 \int dt \;\Rightarrow\; -\ln|50 - y| = 0,0016t + c$$

Dado que en $t = 0$ $y = 2$, resulta: $-\ln 48 = c$.

Sustituyendo:

$-\ln|50 - y| = 0,0016t - \ln 48$ de donde $\ln|50 - y| = -0,0016t + \ln 48$

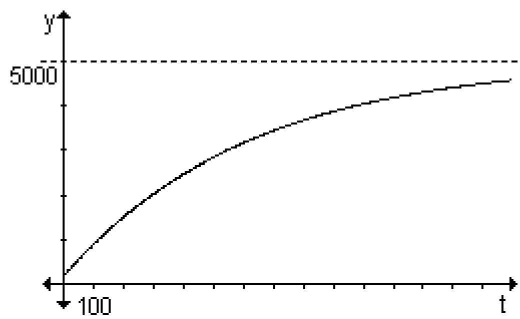
Por definición de logaritmo: $|50 - y| = e^{-0,0016t + \ln 48}$

Aplicando propiedades $|50 - y| = e^{-0,0016t}.e^{\ln 48} \;\Rightarrow\; |50 - y| = 48e^{-0,0016t}$

Como y(t) es una función continua, $y(0) = 2$ y el segundo miembro nunca es cero, se deduce que $50 - y$ es siempre positiva, o sea que $|50 - y| = 50 - y$.

Luego, $50 - y = 48e^{-0,0016t} \;\Rightarrow\; y = 50 - 48e^{-0,0016t}$ es la ley que expresa la población en función del tiempo.

En la gráfica se observa la función y(t). Con el transcurso del tiempo, y tiende a 50, pero como cada unidad de y corresponde a 100 personas, puede decirse que con el transcurso del tiempo la población se acerca a 5000.



b) La población luego de veinte años es:

$y(20) = 50 - 48e^{-0,0016.\,20} \;\Rightarrow\; y(20) \approx 3,511684$

Luego de 20 años la población asciende, aproximadamente, a 351 personas.

Problema

Si para vaciar el agua de un depósito cilíndrico vertical se abre una válvula instalada en la base del mismo, el agua fluye rápidamente cuando el depósito está lleno y más despacio a medida que se vacía. La razón a la cual desciende el nivel es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua, p. Suponiendo que el tiempo se mide en minutos y la constante de proporcionalidad es $k = 0,1$,

a) encuentre la ley que expresa la profundidad del pozo en cualquier instante.

b) ¿cuánto tardará en vaciarse el depósito si el agua tiene inicialmente nueve metros de profundidad?

a) Si la profundidad del agua es p, la razón a la cual cambia a medida que transcurre el tiempo es $\frac{dp}{dt}$. Ya que el agua desciende proporcionalmente a la raíz cuadrada de la profundidad, debe ser $\frac{dp}{dt} = -k\sqrt{p}$, donde k es la constante de proporcionalidad. Si reemplazamos k = 0,1, se obtiene $\frac{dp}{dt} = -0{,}1\sqrt{p}$ que es una ecuación diferencial de variables separables.

Separando variables resulta: $p^{-\frac{1}{2}}dp = -0{,}1dt$

Integrando ambos miembros se obtiene:

$$\int p^{-\frac{1}{2}}dp = -0{,}1\int dt \quad \Rightarrow \quad 2p^{\frac{1}{2}} = -0{,}1t + c$$

Reemplazando por la condición inicial p(0) = 9, resulta:

$$2.9^{\frac{1}{2}} = -0{,}1.0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 6.$$

Luego $2p^{\frac{1}{2}} = -0{,}1t + 6$, o sea, $p(t) = \frac{(-0{,}1t + 6)^2}{4}$.

b) Para encontrar el tiempo que el depósito demora en vaciarse se debe sustituir p por 0.

$$0 = \frac{(-0{,}1t + 6)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad -0{,}1t + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 60$$

Tardará 60 minutos, o sea, una hora, en vaciarse.

Problema

Se administró a una persona un fármaco con una dosis de 100 miligramos. La cantidad del medicamento contenida en la corriente sanguínea disminuye con el tiempo, según lo describe una función de decaimiento exponencial. Al cabo de 6 horas, una muestra de sangre revela que la concentración en el organismo es de 40 miligramos. Si V denota la cantidad del fármaco en la corriente sanguínea después de t horas y si 100 es la cantidad en la corriente sanguínea cuando t = 0, el decaimiento se presenta a una tasa descripta por la función:

$$\frac{dV}{dt} = -100ke^{-kt}.$$

a) Encuentre la función que describe la concentración del medicamento en la sangre luego de t horas.

b) Al cabo de 10 horas ¿cuál es la concentración del fármaco en el organismo?

a) La ecuación $\frac{dV}{dt} = -100ke^{-kt}$ es de variables separables. Teniendo en cuenta que al comienzo (t = 0) se suministró una dosis de 100 miligramos y al cabo de 6 horas (t = 6) hay 40 miligramos, la formulación matemática es:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -100ke^{-kt} \\ V(0) = 100 \\ V(6) = 40 \end{cases}$$

Separando variables resulta: $dV = -100ke^{-kt}\,dt$

Integrando ambos miembros: $\int dV = -100k \int e^{-kt}dt$

Integrando ambos miembros resulta:

$V = -100k\dfrac{e^{-kt}}{-k} + c \quad \Rightarrow \quad V = 100e^{-kt} + c$

Como $V(0) = 100 \Rightarrow 100 = 100e^{-k.0} + c \Rightarrow c = 0$

Además $V(6) = 40$, entonces:

$40 = 100e^{-k.6} \Rightarrow 0{,}40 = e^{-k.6} \Rightarrow \ln 0{,}40 = -6k \Rightarrow k = \dfrac{\ln 0{,}40}{-6} \approx 0{,}152715$

Por lo tanto, $V(t) = 100e^{-0{,}152715\,t}$ es la ley que expresa la cantidad de droga en la sangre luego de t horas.

b) Reemplazando t por 10 resulta: $V(10) = 100e^{-0{,}152715.10} \approx 21{,}7153$

Al cabo de 10 horas, la concentración de fármaco en el organismo será aproximadamente de 21,7153 mgrs.

Problema

> Una persona infectada de un virus regresa a su pueblo que tiene 5000 habitantes. La rapidez con que el virus se propaga es proporcional al número x de personas contagiadas y también, al número de personas no contagiadas. Luego de 5 días hay 10 personas enfermas.
> **a)** Encuentre la ley que determina la cantidad de personas contagiadas luego de t días.
> **b)** ¿Cuántas personas contagiadas habrá a los 7 días?

a) Suponiendo que nadie sale del pueblo durante el transcurso de la enfermedad, la formulación matemática del problema es una ecuación diferencial.

Para plantearla se designa con p a la cantidad de personas contagiadas. Luego las personas no contagiadas serán (5000 – p).

Si k es la constante de proporcionalidad se verifica que: $\dfrac{dp}{dt} = kp(5000 - p)$

En el momento inicial hay una persona enferma y luego de 5 días el número de contagiados asciende a 10 por lo que las condiciones iniciales del problema son: $p(0) = 1$ y $p(5) = 10$.

Para resolver la ecuación se separan las variables: $\dfrac{dp}{p(5000 - p)} = kdt$

Con el objetivo de facilitar su resolución se multiplican ambos miembros por (–1) y se obtiene: $\frac{dp}{p(p-5000)} = -kdt$

Integrando ambos miembros: $\int \frac{dp}{p(p-5000)} = \int -kdt$

La integral del primer miembro se resuelve por descomposición en fracciones simples.

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{p(p-5000)} = \frac{\frac{-1}{5000}}{p} + \frac{\frac{1}{5000}}{p-5000}$, resulta:

$$\int \frac{dp}{p(p-5000)} = \int \frac{\frac{-1}{5000}}{p}dp + \int \frac{\frac{1}{5000}}{p-5000}dp = \frac{-1}{5000}\ln\left|\frac{p-5000}{p}\right|.$$

Retomando la resolución anterior:

$$\int \frac{dp}{p(p-5000)} = \int -kdt \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{5000}\ln\left|\frac{p-5000}{p}\right| = -kt + c.$$

p(t) es siempre positiva y menor que 5000 por lo que $\frac{p-5000}{p}$ es negativa, es decir que: $\left|\frac{p-5000}{p}\right| = -\frac{p-5000}{p} = \frac{5000-p}{p}$.

Luego: $\frac{-1}{5000}\ln\frac{5000-p}{p} = -kt + c.$

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene $c = -0{,}0017$ y $k = -0{,}00009$.

Por lo que: $\frac{-1}{5000}\ln\frac{5000-p}{p} = 0{,}00009t - 0{,}0017 \Rightarrow \ln\frac{5000-p}{p} = -0{,}45t + 8{,}5$

$$\Rightarrow \frac{5000-p}{p} = e^{-0{,}45t+8{,}5} \Rightarrow \frac{5000}{p} - 1 = e^{-0{,}45t}e^{8{,}5} \Rightarrow$$

$$\frac{5000}{p} = 1 + 4914{,}8.e^{-0{,}45t} \Rightarrow \frac{p}{5000} = \frac{1}{1+4914{,}8.e^{-0{,}45t}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p(t) = \frac{5000}{1+4914{,}8.e^{-0{,}45t}}$ es la ley que expresa las personas infectadas luego de t días.

b) Reemplazando t por 7 se obtiene $p = 23{,}63 \approx 24$

Luego de 7 días habrá 24 personas infectadas.

Aplicación

En los problemas relacionados con mezclas una solución de concentración dada entra a un tanque lleno con la solución a una razón fija y la mezcla, totalmente agitada, sale a razón fija, la cual puede ser diferente a la de entrada. Es decir, hay una sustancia cuya cantidad en el tanque cambia con el tiempo y es necesario determinar la cantidad de la sustancia en cualquier momento t, por lo que la descripción matemática de esta situación conduce muchas veces a una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales que modelan estos problemas tienen la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix}\text{Razón de cambio de la}\\ \text{cantidad de sustancia}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Razón con que la}\\ \text{sustancia entra}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Razón con que la}\\ \text{sustancia sale}\end{pmatrix}$$

Este razonamiento permite modelar otros fenómenos como reacciones químicas, inyección de una droga en la sangre o descarga de productos contaminantes en un lago.

Problema

> Un tanque contiene 15 kg de sal disueltos en 4000 litros de agua. Se bombea salmuera con 0,02 kg de sal por litro de agua al tanque a razón de 20 litros por minuto. La solución se mantiene adecuadamente mezclada y se bombea fuera del tanque con la misma rapidez.
> **a)** Determine la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.
> **b)** ¿Cuánta sal hay después de 20 minutos?

a) Sea y(t) la cantidad de sal (en kg) que hay en el tanque después de t minutos. La razón neta con que y(t) cambia está dada por la diferencia entre la razón a la cual la sal entra al tanque y la razón a la que sale del mismo.

$$\frac{dy}{dt} = \text{razón de entrada} - \text{razón de salida}$$

La razón con la que la sal entra al tanque es: $0{,}02\frac{kg}{l}.20\frac{l}{min} = 0{,}4\frac{kg}{min}$

Como el tanque siempre contiene 4000 litros de líquido, la concentración en el instante t es $\frac{y(t)}{4000}$ kg por litro. Además la salmuera sale a razón de $20\frac{l}{min}$, por lo que:

$$\text{razón de salida} = \frac{y(t)}{4000}\frac{kg}{l}.20\frac{l}{min} = \frac{y(t)}{200}\frac{kg}{min}$$

Luego $\frac{dy}{dt} = \left(0{,}4 - \frac{y(t)}{200}\right)\frac{kg}{min}$

La formulación matemática del problema es la ecuación diferencial anterior, la cual se puede expresar: $\frac{dy}{dt} = \frac{80-y}{200}$.

Separando variables e integrando ambos miembros: $\int\frac{dy}{80-y} = \int\frac{1}{200}dt$.

Integrando ambos miembros: $-\ln|80-y| = \frac{1}{200}t + c$

Como la condición inicial es $y(0) = 15$ entonces $c = -\ln 65$

Luego: $-\ln|80-y| = \frac{1}{200}t - \ln 65$

$$\ln|80-y| = -\frac{1}{200}t + \ln 65 \Rightarrow |80-y| = e^{-\frac{1}{200}t+\ln 65} \Rightarrow |80-y| = 65e^{-\frac{1}{200}t}$$

Como $y(t)$ es continua, $y(0) = 15$ y el segundo miembro nunca es cero, se verifica que $|80-y| = 80-y$.

Por lo tanto $80 - y = 65e^{-\frac{1}{200}t} \Rightarrow y = 80 - 65e^{-\frac{1}{200}t}$ expresa la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

b) Reemplazando t por 20 en la expresión obtenida se obtiene $y = 21{,}2$. Por lo tanto, luego de 20 minutos hay 21,2 kg de sal en el tanque.

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} = \cos(2x)$ **b)** $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2$

c) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ **d)** $dx - x^2\,dy = 0$

2) Resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica:

a) $\begin{cases} \frac{dy}{dt} + ty = y \\ y(1) = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (2+x)y' = 3y \\ y(-3) = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = 0 \\ y(2) = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y' + (2x-1)y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

RESPUESTAS

1) a) $y = \frac{1}{2}\text{sen}(2x) + c$ **b)** $y = \frac{1}{3}(x+1)^3 + c$

c) $y = -\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{2}{3}e^{3x} - 2c\right)$ **d)** $y = -\frac{1}{x} + c$

2) a) $y = 3e^{-\frac{1}{2}}e^{t-\frac{t^2}{2}}$ **b)** $y = |2+x|^3$ **c)** $y = \frac{4}{x}$ **d)** $y = 2e^{x-x^2}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 6.3 CONCEPTOS BÁSICOS - 6.4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1) Verifique que $y = 2 + e^{-x^3}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 3x^2 y = 6x^2$.

2)a) Encuentre la función $y = f(t)$ tal que $\frac{dy}{dt} = e^{\frac{t}{2}}$ si $f(0) = 1$.

b) Halle la función $y = g(x)$ tal que $y' = \frac{3x^2}{y^2}$.

3) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\begin{cases} y' = \cos(2x) \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+1)y' = x^2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y\,e^{-x}y' = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x}{x^2 + 1} \\ y(2) = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = 25\,e^{5x} \\ y'(8) = 4 \\ y(0) = -2 \end{cases}$

4) Determine para qué valores de k la función $y = e^{kx}$ es solución de la ecuación $y'' + y' - 6y = 0$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que su velocidad instantánea (en $\frac{m}{seg}$) está dada como una función del tiempo t por $v(t) = 12 - 3t^2$.

Al instante $t = 1$, está localizada en $x = 5$.

a) Establezca un problema con condiciones iniciales que describa la posición de la partícula en cualquier instante t.

b) Resuelva el problema planteado.

c) ¿Cuál es la posición de la partícula a los dos segundos? ¿Y a los tres segundos?

2) Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo tal que su aceleración instantánea (en $\frac{m}{seg^2}$) está dada por la función $a(t) = 10 - 12t^2$. En los instantes $t = 2$ y $t = 3$, la partícula está localizada en $x = 0$ y $x = -40$, respectivamente.

a) Encuentre la posición de la partícula en cualquier instante t.

b) Determine la posición de la partícula luego de un segundo.

c) Grafique la función que describe la posición en cualquier instante t.

3) Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales observados en ratas a las que se alimentó con una dieta que contenía el 10% de proteínas. La proteína estaba formada por yema de huevo y harina de maíz. Durante cierto tiempo el grupo descubrió que la tasa de cambio (aproximada) en el aumento promedio en peso g (en gramos) de una rata con respecto al porcentaje p de yema que contenía la mezcla de proteína es: $\frac{dg}{dp} = -\frac{p}{25} + 2$, $0 \le p \le 100$. Si $g(10) = 38$, determine $g(p)$.

4) Para un grupo urbano específico, algunos sociólogos estudiaron los ingresos anuales promedio en esos momentos y (en pesos) que una persona puede esperar recibir con x años de educación antes de buscar empleo regular. Estimaron que la tasa a la cual el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por:

$\frac{dy}{dx} = 10\,x^{\frac{3}{2}}$ para $4 \le x \le 16$, en donde $y = 5872$ cuando $x = 9$. Determine y.

5) Se hizo un estudio acerca de la polilla de invierno. Las preninfas de la polilla caen al suelo desprendiéndose de los árboles hospedantes. Se descubrió que la tasa (aproximada) a la cual cambia la densidad y de las preninfas (número de preninfas por pie cuadrado de terreno) con respecto a la distancia x de la base de los árboles hospedantes es: $\frac{dy}{dx} = -1{,}5 - x$ para $1 \le x \le 9$. Si $y = 57{,}3$ cuando $x = 1$ determine y.

6) Si la temperatura es constante, entonces la razón de cambio de la presión atmosférica p respecto a la altura h es proporcional a p. Suponiendo que p = 145 al nivel del mar y p = 140 a una altura de 300m.

a) Escriba una ecuación diferencial que modele la situación.

b) Determine la expresión que permite hallar p a cualquier altura h.

c) Encuentre la presión a una altura de 1500 m.

7) Dado un depósito de salmuera se sabe que q (en kg) es la cantidad de sal que hay en el mismo al cabo de t minutos y $\frac{dq}{dt} = -1{,}5 + 0{,}03q$ es la velocidad de variación de dicha cantidad con el tiempo t, (suponga que $-1{,}5 + 0{,}03q > 0$). Si en el instante inicial la cantidad de sal es de 100 kg, halle la cantidad de sal que contendrá el depósito al cabo de 90 minutos.

8) El volumen V de un globo cambia con el tiempo t y su razón de cambio está dada por $\frac{dV}{dt} = \sqrt[3]{t} + \frac{t}{4} \frac{m^3}{min}$. Encuentre la expresión del volumen en función de t suponiendo que cuando $t = 4$ minutos el volumen es 20 m^3.

9) La razón de cambio de la temperatura T de una solución está dada por: $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4}t + 10$ donde t es el tiempo en minutos y T está medida en grados Celsius. Suponiendo que la temperatura es 5°C en $t = 0$ encuentre una expresión para la temperatura (T) en función del tiempo (t).

10) Se supone que la tasa de crecimiento de una población de ciertos conejos está dada por la fórmula: $\frac{dN}{dt} = 1000 \cos\left(\frac{1}{5}\pi t\right)$ conejos por año, donde N denota el tamaño de la población al tiempo t (en años) y $t = 0$ corresponde al inicio del ciclo. Se estima que la población a los 5 años es de 3000 conejos. Encuentre una fórmula para N al tiempo t.

11) El peso en gramos P(t) después de t años de cierta sustancia radiactiva satisface la ecuación $P'(t) = -0{,}8\ P(t)$.

a) Encuentre la fórmula para P(t) si $P(0) = 30$.

b) Determine el peso de la sustancia 10 años después.

12) La ley de enfriamiento de Newton establece que la razón a la que un objeto se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la del medio ambiente. Se saca del horno un objeto y se deja enfriar en un cuarto donde la temperatura ambiente es 75°F.

a) Escriba la ecuación diferencial que modeliza la situación si T es la temperatura después de t horas.

b) Resuélvala suponiendo que el objeto se saca del horno a 300°F y su temperatura decae a 200°F en media hora.

c) ¿Cuál será su temperatura después de 3 hs?

13) Considere la diseminación de una enfermedad que tiene la propiedad de que una vez que un individuo se infecta permanece todo el tiempo infectado. Mientras que una pequeña proporción de la población esté infectada con la enfermedad, su diseminación es proporcional al número de individuos infectados. Exprese y como función de t (donde y es el número de individuos infectados al tiempo t), suponiendo que en el instante $t = 0$ hay 587 individuos infectados y en $t = 1$ año hay 831 individuos infectados en la población.

14) La capacidad límite de un rebaño en vida salvaje es de 900 individuos. El ritmo de crecimiento del rebaño es proporcional a las oportunidades de crecimiento todavía sin utilizar de acuerdo con la ecuación $\frac{dL}{dt} = k(900 - L)$. Encuentre la ley que exprese el tamaño de la población en función del tiempo (en años) si se sabe que al inicio había 200 ejemplares y tras dos años ha crecido hasta 300 animales.

15) Una población de bacterias p crece a una razón proporcional a su magnitud. Al principio la población es de 10 individuos y después de 10 días es de 24.

a) Halle la expresión de la población p en función del tiempo t.

b) ¿Cuál será la población después de 25 días?

16) La ley de enfriamiento de Newton establece que la razón de cambio con respecto al tiempo t de la temperatura T(t) de un objeto es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura A del medio ambiente que lo rodea. Si bien esta ley se aplica en general a situaciones de enfriamiento, también permite modelar fenómenos de calentamiento.

Si T > A, la velocidad a la que cambia la temperatura T del objeto es negativa, la temperatura decrece y el objeto se está enfriando.

Si T < A, la velocidad a la que cambia la temperatura T es positiva, entonces T se está incrementando. Escriba y resuelva la ecuación diferencial que describe la situación y analice el signo que debe tener la constante de proporcionalidad.

17) En un bosque natural se crea basura, como las hojas y ramas que caen, animales muertos, etc. Empleando A(t) para denotar la cantidad de basura presente en el tiempo t, en donde A(t) se expresa en $\frac{gr}{m^2}$ y t en años y suponiendo que no existe basura en t = 0, la razón de cambio de la cantidad de basura presente con respecto al tiempo está dada por: $\frac{dA}{dt} = 200 - 0{,}5A$. Despeje A. Redondeando a unidades, calcule la cantidad de basura por m^2 después de un año.

18) Suponga que q es la cantidad de penicilina que se encuentra en el cuerpo en el tiempo t y q_0 la cantidad cuando t = 0. Además, la tasa de cambio de q con respecto a t es proporcional a q y q disminuye al aumentar t. Escriba y resuelva la ecuación diferencial que describe la situación.

19) Se inyecta por vía intravenosa una solución de glucosa a una razón de C unidades por minuto. El cuerpo elimina del flujo sanguíneo la glucosa a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si A es la cantidad de glucosa presente en el instante t, entonces la razón de cambio de la cantidad de glucosa en la sangre en el instante t está dada por $\frac{dA}{dt} = C - kA$, donde k es constante. Resuelva la ecuación diferencial para la condición inicial $A(0) = A_0$, suponiendo que $C - kA > 0$. Analice qué sucede con la cantidad de glucosa cuando el tiempo transcurre indefinidamente.

20) La población de una colonia de levaduras satisface la ecuación diferencial: $\frac{dP}{dt} = -0{,}0008P(P - 655)$ donde t se mide en horas y 655 es la capacidad límite de la población. Halle la ecuación de la población para la colonia.

21) Una población de bacterias está cambiando al ritmo $\frac{dP}{dt} = \frac{3000}{1 + 0{,}25t}$ donde t es el tiempo en días. Suponiendo que la población inicial es 100, halle:

a) la función que describe la población en todo instante t.

b) la población al cabo de tres días.

22) Un tanque contiene 300 litros de un líquido en el cual se disuelven 40 gramos de sal. Una salmuera que contiene un gramo de sal por litro se bombea al tanque con una intensidad de 3 litros por minuto. La solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con la misma rapidez.

a) Escriba la ecuación diferencial que describe la situación.

b) Encuentre el número de gramos s(t) de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1) La función $y = 2x + e^{-x}$ es solución de la ecuación diferencial:

a) $y + y' = 2x$ **b)** $y - 2y'' = xe^{-x}$ **c)** $y + y' = 2(x + 1)$ **d)** $y - y'' = 2(x + 1)$

2) La función $y = C\,e^{x^2}$ es solución de la ecuación diferencial:

a) $y' - y = 0$ **b)** $y' + 2xy = 0$ **c)** $y' - 2xy = y$ **d)** $y' - 2xy = 0$

3) La función $y = 5 - x^2$ es solución de la ecuación diferencial

a) $y'' + 2y' = -2 - 4x$ **b)** $2y' + y = 5 - 4x$ **c)** $y'' - y' = -2$ **d)** $y + y'' = x^2$

4) La solución de la ecuación diferencial $dy - (2x-5)dx = 0$ es:

a) $y = x^2 - x$ **b)** $y = x^2 - 5x + c$ **c)** $y = x^2 - 5x$ **d)** $y = x^2 - 5x + 2$

5) La solución de la ecuación diferencial con condición inicial $e^{-x}.\ y' = 1$, $y(0) = 4$ es:

a) $y = e^x + 3$ **b)** $y = e^x + c$ **c)** $y = e^x - 3$ **d)** $y = e^x + 4$

6) La solución de la ecuación diferencial con condición inicial $dy - e^{x-y}dx = 0$, $y(0) = 0$ es:

a) $y = e^{-x}$ **b)** $y = e^x$ **c)** $y = x$ **d)** $y = x + 2$

7) La solución de la ecuación diferencial con condición inicial $y' = \dfrac{x}{y^2}$,

$y(0) = 2$ es:

a) $y = \left(x^2 + 8\right)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 8\right)^{-\frac{1}{3}}$ **c)** $y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 8\right)^{3}$ **d)** $y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 8\right)^{\frac{1}{3}}$

8) La solución de la ecuación diferencial con condición inicial $x\,y' = y$, $y(1) = 2$ es:

a) $y = x + 1$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = 2 - x$ **d)** $y = x + 2$

AUTOEVALUACIÓN

1) Determine si la función $y = x^2 - 4x + 1$ es solución de la ecuación diferencial $y' + y = x^2 - 3$.

2) La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x, y) del plano está dada por $(2x - 1)$.

a) Establezca la ecuación diferencial y resuélvala.
b) Determine una ecuación para aquel miembro de la familia que pasa por (2, 5).
c) Grafique tres miembros de la familia.
3) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

a) $\frac{dy}{dx} = e^{2x}$ si $y(0) = 2$ **b)** $\frac{dy}{dx} + 2x - 4 = 0$ si $y(0) = 0$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$ si $y'(0) = 1$, $y(1) = 5$ **d)** $y' = \text{sen}(2x)$ si $y(\pi) = \frac{1}{2}$

e) $y'.y = x+1$ si $y(0) = 2$ **f)** $y' - 3y = 6$ si $y(0) = 0$, $3y + 6 > 0$.

4) La electricidad de un condensador fluye a una razón proporcional al voltaje V a través de sus terminales y, si t se mide en segundos, $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V$. Obtenga la expresión de V(t) considerando V_0 el voltaje inicial.

5) El valor de reventa de cierta máquina industrial decrece durante un período de 10 años a una razón que depende de la edad de la máquina. Cuando la máquina tiene x años, la razón a la cual cambia su valor es 220.(x–10) dólares al año (es decir $\frac{dV}{dx} = 220.(x-10)$). Si la máquina costaba originalmente 12 000 dólares, ¿cuánto costará cuando tenga 10 años?

6) La población de una ciudad satisface la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P}$, donde P es la población y t es la cantidad de años transcurridos desde 2000. Si en ese año la población fue de 160 000 habitantes y en 2006 es de 184 900 habitantes, resuelva la ecuación diferencial. ¿En qué año la población será de 202 500 habitantes?

EJERCICIOS DE REPASO

1) Indique si las siguientes funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales dadas.

a) $y' + 2xy = 0$ siendo $y = ce^{-x^2}$ **b)** $y' = y\,\text{senx}$ siendo $y = ce^{\cos x}$

c) $(1 + x)\,y' = 4y$ siendo $y = c(1+x)^4$ **d)** $y' = 2x$ siendo $y = 5x^2 + c$

2) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = e^x y^2$ **b)** $\frac{dy}{dx} = -xe^x$ **c)** $y' = 2xy^2$ **d)** $x^2 y\,dx + x\,y^2\,dy = 0$

e) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ **f)** $e^x \frac{dy}{dx} = 2x$ **g)** $y' = \frac{1}{(x^2 - 4)y}$

3) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

a) $\begin{cases} y' - 3y = 0 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y(1) = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

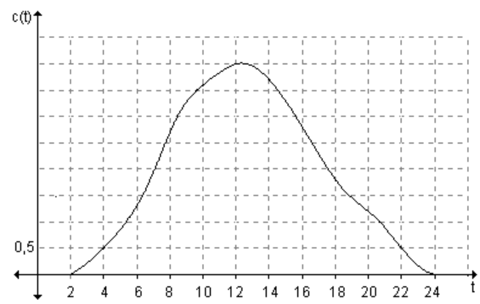
d) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + xy = y \\ y(1) = 3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y' - 4y^2 x e^{x^2 - 1} = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y^2 y' = 4x \\ y(0) = -2 \end{cases}$

Respuestas a:
Ejercicios Integradores
Problemas de Aplicación
Pruebas de Opción Múltiple
Autoevaluaciones
Ejercicios de Repaso

CAPÍTULO 1: IDEAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO INTEGRAL

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.1 El problema del área – 1.2 El problema de la distancia (página 39)

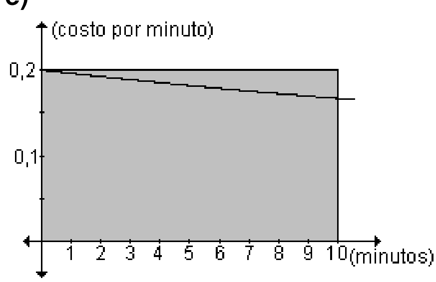
1) Rendimiento cardíaco = 6,78 litros/min. (en una persona en reposo puede ser de 5 o 6 litros por minuto, durante un ejercicio intenso puede llegar a 30 litros por minuto, también puede alterarse en personas con ciertas enfermedades).

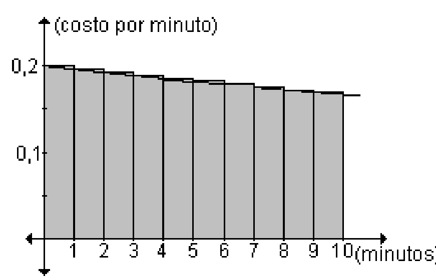


2) Área ≈ 26,25 metros.
3)a) velocidad **b)** distancia recorrida en el tiempo t
c) cantidad total de nacimientos en el tiempo t **d)** ingresos totales
e) costos totales **f)** número de palabras memorizadas en el tiempo t.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 41)

1)a) c(0) = 0,20 dólares por minuto.
Si ese costo se mantiene constante el costo total sería C = 2 dólares
b) El costo va disminuyendo a medida que el tiempo pasa, según la ley de la función. **c)** C ≈ 1,84 dólares
d) Considerando intervalos de amplitud cada vez más pequeña.
e)





f) Las gráficas anteriores permiten visualizar por qué la suma de los costos para períodos sucesivos equivale a sumar las áreas de los rectángulos. El área del primer rectángulo es el costo del primer minuto ($\frac{\text{costo}}{\text{minuto}}$. minuto = costo) y así sucesivamente.

2) 442,5 metros

3)a) El área de cada rectángulo marcado corresponde a la cantidad de oxígeno consumido durante cada día. Se expresa en $\frac{\text{ml}}{\text{hora}}.\text{día}$.

b) La suma de las áreas de los dos primeros rectángulos corresponde a la cantidad de oxígeno consumido desde t = 8 hasta t = 10, es decir durante los días 9 y 10.

c) El área debajo de la curva corresponde al consumo total de oxígeno durante todo el desarrollo embrionario del polluelo.

d) Para obtener un resultado más exacto para el área debajo de la curva podemos subdividir en intervalos más pequeños.

EJERCICIOS DE REPASO (página 42)

1)a) La distancia total recorrida fue 17 metros.

b) La distancia total recorrida fue de 24 metros.

2)a) 7,5 **b)** 10,5 **c)** 6,75 **d)** 11,25

3) $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}\pi \approx 1{,}8961$

4)a) 48 **b)** Si n = 6, A = 54. Si n = 12, A = 51.

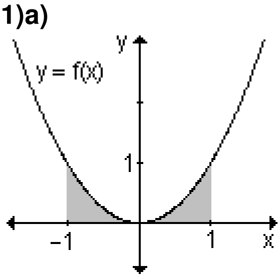
c) Cuando se consideran doce intervalos, pues a mayor cantidad de intervalos mayor exactitud.

5) Si n = 4, A = 9,84375. Si n = 6, A = 9,625.

CAPÍTULO 2: LA INTEGRAL DEFINIDA

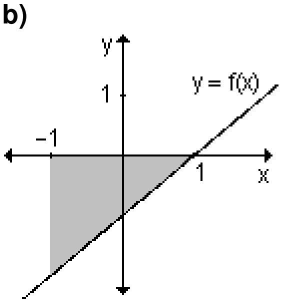
EJERCICIOS INTEGRADORES: 2.1 La integral definida – 2.2 Propiedades de la integral definida (página 61)

1)a)



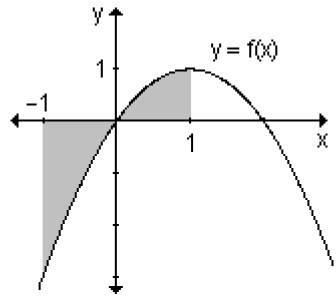
Para esta función, la integral coincide con el área de la región sombreada.

b)



Para esta función, la integral no representa el área pues la región sombreada se encuentra por debajo del eje x. El valor de la integral es el opuesto del valor del área de la región sombreada.

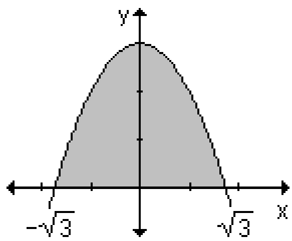
c)

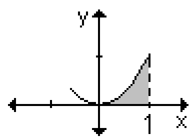


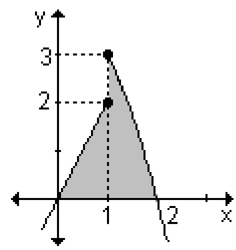
Para esta función la integral no representa el área pues la región sombreada se encuentra por arriba y por debajo del eje x.

2)a) 4,8 ; **b)** –0,56

3)a) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)dx$ **b)** $\int_0^1 x^2dx$ **c)** $\int_0^1 2xdx+\int_1^2\left(-x^2+4\right)dx$







4) a) $\int_0^2 f(x)dx=8$; **b)** $\int_0^4 f(x)dx=18$; **c)** $\int_6^7 f(x)dx=-\dfrac{1}{2}$

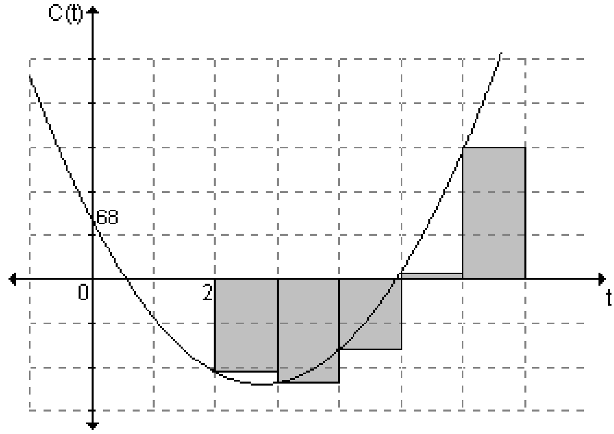
5)a) $\int_0^5 f(x)dx$; **b)** $\int_2^4 f(x)dx$ **6)** $\int_0^1 2xdx+\int_1^4\left(x^2+2\right)dx$ **7)a)** 5; **b)** 5

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 61)

1) Resolviendo la integral subdividiendo el intervalo en 5 subintervalos y evaluando en el extremo izquierdo el cambio total de altura es de –7 metros. El signo negativo (–) quiere decir que la pelota está 7 metros más abajo cuando t = 5 segundos de lo que estaba cuando t = 4 segundos.

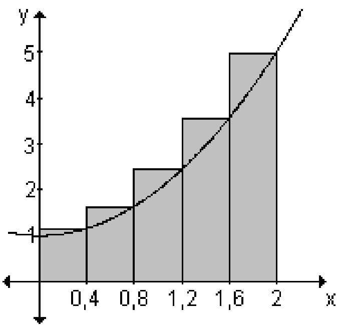
2) Los empleados disminuyeron en 150000.

La suma de las áreas de los rectángulos que están por encima del eje x menos la suma de las áreas de los rectángulos que están por debajo del eje x es –150.



PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 62)
1)b; **2)**c; **3)**a; **4)**c; **5)**a; **6)**a; **7)**d; **8)**b

AUTOEVALUACIÓN (página 64)
1)a) negativa **b)** positiva **c)** positiva
2) S = 0,4.f(0,4) + 0,4.f(0,8) + 0,4.f(1,2) + 0,4.f(1,6) + 0,4).f(2) = = 0,4.(f(0,4) + f(0,8) + f(1,2) + f(1,6) + f(2)) = 0,4.(1,16 + 1,64 + 2,44 + 3,56 + 5) = = 5,52 Este valor representa la suma de las áreas de los rectángulos sombreados.
3)a) 5 **b)** 13 **c)** –9
4)a) 6 **b)** 8



EJERCICIOS DE REPASO (página 64)

1)a) $\int_0^2 (4-2x)dx$; **b)** $2\int_0^{\pi} \text{sen}x dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}x dx$;

c) $\int_0^2 x^2 dx$; **d)** $\int_{-2}^2 (4-x^2)dx = 2\int_0^2 (4-x^2)dx$

2) Llamando f(x) = 2x–1, resulta: $\int_{-2}^2 (2x-1)dx \approx$ [f(–1,5)+f(–1) + f(–0,5) + f(0) + + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2)].0,5 = –2
Como la función no es positiva, la integral no represente la suma de las áreas de los rectángulos. Sino que representa la suma de las áreas de los rectángulos que están por encima del eje x menos la suma de las áreas de los rectángulos que están por debajo del eje x.

3) $\frac{31}{2}$; **4)** $\frac{2}{\ln 3} + 6$; **5)a)** $\int_5^7 f(x)dx$ **b)** $\int_0^4 f(x)dx$

6)a) 4,6 **b)** 10,8 **c)** 21,9 **d)** 11,95 **e)** 3,45 **f)** 7

CAPÍTULO 3: EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 La integral definida como función – 3.2 El teorema fundamental del cálculo (página 77)

1)a) 1 **b)** $\frac{7}{3}$; **2)** $F(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2$, $F(0)=0$, $F(1)=-\frac{8}{3}$, $F(3)=-18$; **3)** $m=4$

4) $A=16$; **5)** $a=-1$, $a=\frac{1}{2}$; **6)a)** $A=40$; **b)** $A=\frac{44}{3}$; **c)** $A=\frac{128}{15}$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 79)

1) b; **2)** c; **3)** a; **4)** b; **5)** c ; **6)** d

AUTOEVALUACIÓN (página 79)

1) $\frac{137}{6}$; **2)** $\frac{20}{3}$; **3)** $a=3$; **4)a)** 256 metros; **b)** $1\frac{m}{seg^2}$

5) $\frac{37}{12}$; **6)** $\int_0^a f(x)dx+\int_a^b(-f(x))dx$ **ó** $\int_0^a f(x)dx+\int_b^a f(x)dx$

EJERCICIOS DE REPASO (página 80)

1)a) -2; **b)** $\frac{11}{8}$; **c)** $\frac{2}{3}$ **2)** $\frac{2}{\ln 3}+6$ **3)** $b=3$; **4)** $\frac{17}{3}$

CAPÍTULO 4: LA INTEGRAL INDEFINIDA

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.1 La integral indefinida – 4.2 Métodos de integración (página 101)

1)a) $f(x)=3x^2-5x+2$; **b)** $f(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-2x+3$;

3)a) $\frac{z^3}{3}+\frac{3}{4}z^4+c$; **b)** $-\frac{1}{2}e^{x^4}+c$; **c)** $t-2t^{-1}+c$; **d)** $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

e) $\frac{1}{3}(\ln x)^2x^3-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2}{27}x^3+c$; **f)** $x^2+7x+3\ln|x-3|+c$

g) $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c$; **h)** $-6\ln|x|+\frac{5}{x}+6\ln|x-1|+c$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 103)

1) c; **2)** b; **3)** a; **4)** b; **5)** b; **6)** c; **7)** b; **8)** a; **9)** c; **10)** b; **11)** d; **12)** c; **13)** b;

AUTOEVALUACIÓN (página 105)

1)a) $\frac{2}{3}\left(x^2+7\right)^{\frac{3}{2}}+c$ **b)** $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c$

c) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+c$ **d)** $3\text{sen}(x^2+3)+c$

e) $\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+c$ **f)** $\frac{x^2}{2}-3x-2\ln|x-1|+c$

g) 3 **h)** $\frac{122}{9}$; **2)** $\frac{9}{2}$; **3)** 73,84

4)a) 147,15 dólares por año. **b)** 692 dólares.

EJERCICIOS DE REPASO (página 106)

1) $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2}$; **2)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 18$

3) $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 50$; **4)** $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$

5) $e^x - \cos x - \operatorname{sen} x + c$; **6)** $\ln|x| - \frac{x^4}{4} + 2\operatorname{tg} x - e^x + c$

7) $\frac{\ln^2 x}{2} + c$; **8)** $\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - 2a + c$; **9)** $\frac{(x-2)^3}{3} + c$

10) $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + c$; **11)** $\frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + c$

12) $-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x) + c$; **13)** $t^{-2} + c$; **14)** $-t^{-2} + t^{-1} + c$

15) $-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + c$; **16)** $-\frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{8}\ln|x+2| - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{8}\ln|x-2| + c$

17) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$; **18)** $4\ln|x+2| - 3\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + c$

19) $-\frac{1}{8}\ln|2-4e^{2x}| + c$; **20)** $\frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$

21) $-\frac{2}{x-1} - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + c$; **22)** $\frac{1}{3(2-3x)} + c$

23) $-\frac{1}{2}\ln|1+2\cos x| + c$; **24)** $-3\ln|x| + \ln|x+1| + 3\ln|x-1| + c$

25) $-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + c$; **26)** $-\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$

27) $\frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + c$; **28)** $\frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$

29) $x\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + c$; **30)** $\frac{2}{3}x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+3)^{\frac{5}{2}} + c$

31) $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-2| + c$; **32)** $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - \frac{x^3}{3} + c$

33) $-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + c$; **34)** $-\frac{3}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} + \ln|x-2| + c$

35) $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$; **36)** senx – 2xsenx – 2cosx + c

37) $\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + c$; **38)** $2\ln\frac{|x-1|}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$

39) $-\frac{1}{9}\sqrt{4-9x^2} + c$; **40)** $\frac{1}{4}e^{2x} + 2xe^x - 2e^x + \frac{2}{3}x^3 + c$

41) $-\frac{1}{3}y\cos 3y + \frac{1}{9}\operatorname{sen}3y + c$; **42)** $e^x - x + c$

43) $2\ln|x| - \ln|x+1| + c$; **44)** $\frac{x^2}{2} + 3x + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + c$

45) $\frac{e^x 2^x}{1+\ln 2} + c$; **46)** $-2\ln|x| + 3\ln|x-2| + c$

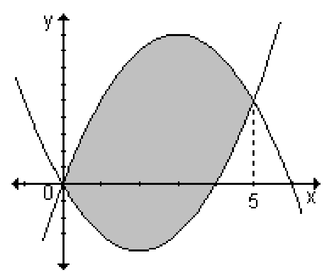
47) $f(x) = x^3 + 2x$; **48)** $g(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$;

49)a) $\frac{32}{3}$ **; b)** $\frac{a^2}{6}$; **c)** $\frac{172}{3}$; **d)** 24,2 ; **e)** $\frac{e^2+1}{4}$

CAPÍTULO 5: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

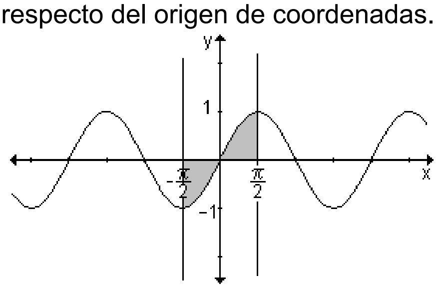
EJERCICIOS INTEGRADORES 5.1 Cálculo de áreas – 5.2 Valor promedio de una función (página 126)

1) $A = \frac{125}{3}$

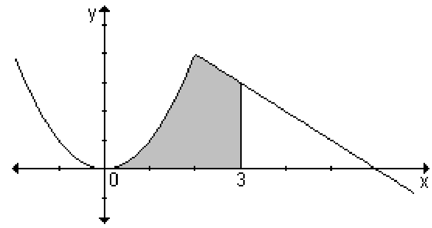


2)a) $R_1 : y = 3 - \frac{3}{2}x$; $R_2 : y = -x + 8$; $R_3 : y = \frac{3}{2}x + 3$ **b)** $A = 6$ $B = 24$

3)a) 0 **b)** 2 **c)** No se puede calcular el área como la integral planteada en **(a)** ya que da 0. Esto ocurre porque la función es impar y por lo tanto simétrica respecto del origen de coordenadas.



4) $\frac{37}{6}$



5)a) $f_{prom} = -\frac{1}{3}$, se alcanza en $x = -0{,}107$

b) $f_{prom} = \frac{3}{2}$, se alcanza en $x = \frac{27}{8}$

c) $f_{prom} = -5$, se alcanza en $x = -1$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 140)

1)a) $v(t) = -32t + 64$ **b)** $e(t) = -16t^2 + 64t + 96$

c) $t = 2$seg, $e(2) = 160$m **d)** $t = 5{,}16$ seg.

2)a) $P(t) = 60t^2 - t^3 + 100$ **b)** 996 personas

3) $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{50}{3}t^3 + 30t + 50$

4)a) $s(t) = -16t^2 + 96t + 256$ **b)** $t = 8$ seg

5)a) $e(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 2t$ **b)** 28,67 m

6) 27 m **7)** \$ 325 **8)** 3,1 μm^3

9)a) $V(t) = \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + \frac{1}{3}t^2 - \frac{16}{3}$ **b)** 34 cm^3; **10)** $f(x) = -2x^2 + 10x - 9$

11)a) 8000 alumnos en 1993, 12 000 en el 2001. **b)** 14 000 alumnos

12)a) 272 máquinas. **b)** 4000 máquinas **c)** 3000 máquinas.

13)a) $T(t) = 70e^{-0,1t} + 20$ **b)** $T(10) = 45{,}8$ºC

14)a) $e(t) = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi t) + 5$ **b)** $e(0{,}3) = 6{,}51$ cm; $e(1{,}4) = 5{,}94$ cm

15)a) $A(t) = \frac{3}{t+2} + 1$ **b)** $A(0) = 2{,}5\ cm^2$; $A(4) = 1{,}5\ cm^2$.

16)a) $q(t) = -\frac{1}{12}\cos(60t) + \frac{1}{12}$ **b)** q máxima = $\frac{1}{6}$ coulombs a los 3 seg.

17) $p(4) = \$\ 1344$; **18)** $v(3) = 117\pi\ m^3$; **19)** $c(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$

20) $i(x) = 15x - 2x^2$ **21)** \$ 407, 2494

22) \$ 4 166, 66; **23)** 4; **24)** 39 228 196 bacterias aproximadamente.

25)a) 54 km. **b)** 74 km.

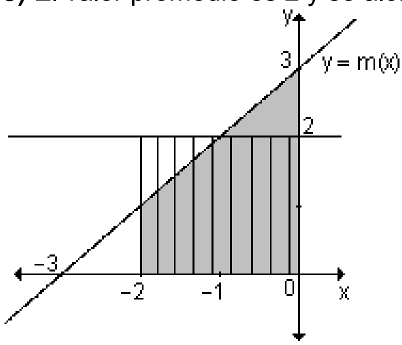
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 143)

1) a; **2)** b; **3)** c; **4)** d; **5)** b

AUTOEVALUACIÓN (página 144)

1) 2; **2)** 0,55; **3)** $\frac{8}{3}$ **4)** 8

5) El valor promedio es 2 y se alcanza para $x = -1$.



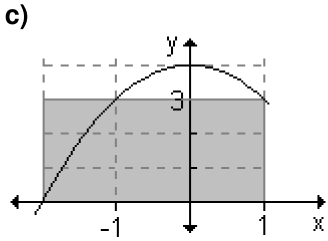
EJERCICIOS DE REPASO (página 145)

1)a) $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{11}{2}$ **c)** $\frac{32}{3}$ **d)** 10; **2)a)** $\frac{32}{3}$ **b)** $\frac{25}{2}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{9}{2}$ **e)** 9 **f)** 13, 64

g) $\frac{32}{3}$ **h)** $\frac{1}{3}$ **i)** $\frac{9}{2}$; **3)** 36; **4)a)** $\frac{8}{3}$; **b)** $\frac{9}{2}$;

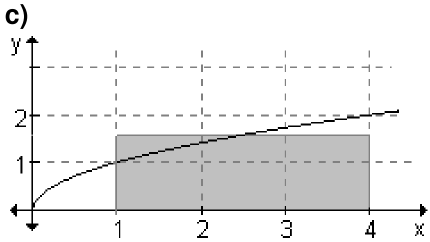
5)a) $f_{prom} = 3$ **b)** $c = -1$ o $c = 1$

c)



6)a) $f_{prom} = \frac{14}{9}$, **b)** $c \approx 2{,}42$

c)



CAPÍTULO 6: NOCIONES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES

EJERCICIOS INTEGRADORES 6.3 Conceptos básicos – 6.4 Ecuaciones diferenciales de primer orden (página 168)

2) a) $y = 2e^{\frac{t}{2}} - 1$ **b)** $y = \sqrt[3]{3\left(x^3 + c\right)}$

3)a) $y = \frac{1}{2}\text{sen}(2x) + \frac{5}{2}$ **b)** $y = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 4$

c) $y^2 = 2.(x-1).e^x + 3$ **d)** $\ln|y+3| = \frac{1}{2}\ln\left(5x^2 + 5\right)$

e) $y = e^{5x} + \left(4 - 5e^{40}\right).x - 3$

4) $k = 2$ ó $k = -3$

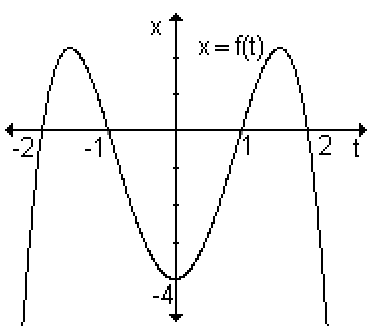
PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 168)

1)a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 12 - 3t^2 \\ x(1) = 5 \end{cases}$ **b)** $x(t) = 12t - t^3 - 6$

c) A los dos segundos está a diez metros del punto de partida. A los tres segundos está a tres metros.

2)a) $x(t) = 5t^2 - t^4 - 4$ **b)** 0 m

c)



3) $g = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20$; **4)** $y = 4x^{2,5} + 4900$; **5)** $y = -1,5x - 0,5x^2 + 59,3$

6) a) $\frac{dp}{dh} = Kp$ **b)** $p = 145e^{-0,000117h}$ **c)** La presión a los 1500m es 121,47

7) 793,64 kg.; **8)** $V = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + \frac{t^2}{8} + 13,24$; **9)** $T = 0,125t^2 + 10t + 5$

10) $N = \frac{5000}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 3000$

11) a) $P = 30e^{-0,8t}$; **b)** $P = 0,01006$

12) a) $\frac{dT}{dt} = k\left(T - 75\right)$ **b)** $T = 75 + 225e^{-1,16t}$

c) Al cabo de tres horas la temperatura será de 81,6º.

13) $y = 587\left(\frac{831}{587}\right)^t$; **14)** $L(t) = 900 - 700e^{-0,076t}$

15) a) $P(t) = 10e^{0,0875t}$ **b)** 89 bacterias

16) $\frac{dT}{dt} = k(T - A)$ En cualquier caso, enfriamiento o calentamiento, si la temperatura del ambiente A es constante, la constante k debe ser negativa.

Si $T < A \Rightarrow T(t) = A - e^{kt+c}$; si $T > A \Rightarrow T(t) = e^{kt+c} + A$.

17) $A = 400 - 400\, e^{-\frac{t}{2}}$; $157,38\,\frac{grs.}{m^2}$; **18)** $\frac{dq}{dt} = -kq,\ k > 0$; $q = q_0.e^{-kt}$

19) $A(t) = \frac{C}{k} + \left(A_0 - \frac{C}{k}\right)e^{-kt}$, Si $t \to \infty$ la cantidad de glucosa tiende a $\frac{C}{k}$.

20) $P(t) = \frac{655}{1 - e^{-0,524\,t + 655\,c}}$; **21)a)** P(t) = 12000 ln(1+0,25t) + 100 **b)** 6815

22)a) $\frac{ds}{dt} = \frac{300 - s}{100}$ **b)** $s = 300 - 260e^{-\frac{1}{100}t}$

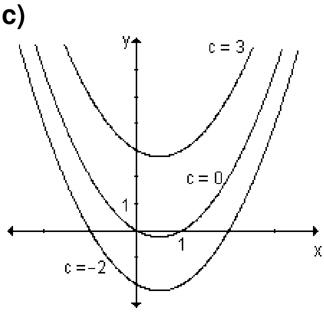
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 172)

1) c; **2)** d; **3)**a; **4)** b; **5)** a; **6)** c; **7)** d; **8)** b

AUTOEVALUACIÓN (página 173)

1) No es solución; **2)a)** $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$, $y = x^2 - x + c$ **b)** $y = x^2 - x + 3$

c)



3)a) $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$ **b)** $y = -x^2 + 4x$ **c)** $y = 2x^2 + x + 2$

d) $y = -\frac{1}{2}\cos(2x) + 1$ **e)** $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ **f)** $y = 2e^{3x} - 2$

4) $V(t) = V_0.e^{-\frac{1}{40}t}$; **5)** 1 000 dólares

6) $P(t) = (5t + 400)^2$. En 2010 la población será de 202 500 habitantes.

EJERCICIOS DE REPASO (página 174)

1)a) Es solución **b)** No es solución **c)** Es solución **d)** No es solución

2)a) $y = -\dfrac{1}{e^x + c}$ **b)** $y = e^x - xe^x + c$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x^2 + c}$

d) $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + c$ **e)** $y = \ln(e^x + c)$ **f)** $y = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

g) $y = \left(\dfrac{1}{2}\ln|x-2| - \dfrac{1}{2}\ln|x+2| + 2c\right)^{\frac{1}{2}}$

3)a) $|y| = e^{3x - \ln 2}$ **b)** $y = x^2 + 3$ **c)** $|y| = e^{2\sqrt{x} + \ln 2}$

d) $|y| = e^{x - \frac{x^2}{2} + \ln 3 - \frac{1}{2}}$ **e)** $y = -\dfrac{1}{2e^{x^2-1} - 0{,}23}$ **f)** $y = \left(6x^2 - 8\right)^{\frac{1}{3}}$

Bibliografía

Aguilar Sánchez,G.; Castro Pérez,J., I. (2001): *Problemario de cálculo integral*, México, Thomson Learning.

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2001): *Matemática 6: Análisis 2*, Buenos Aires, Longseller.

Anton, H. (1991): *Cálculo y Geometría Analítica*, México, Limusa.

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor) (1995): *Ingeniería didáctica en educación matemática. Una Empresa Docente*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayra, J. y Larner, R. (1992): *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. Tercera Edición, Méjico, Prentice Hall Hispanoamericana.

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E. (1996): *Cálculo Diferencial e integral*, España, Editorial Síntesis.

Baum, A.; Milles, S. y Schultz, H. (1992): *Cálculo Aplicado*, Limusa.

Bellone, C. H., Solbes, D. R. y Abdelnur. V. (editores) (2000): *La Biomatemática en Agronomía*, Facultad de Agronomía y Zootecnia, Universidad Nacional de Tucumán.

Bittinger, M. (2002): *Cálculo. Para Ciencias Económicas-Administrativas*. Séptima Edición, Colombia, Addison Wesley.

Boyce, W., DiPrima, R. (1998): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera,* Cuarta Edición, Méjico, Limusa, Grupo Noriega Editores.

Budnick, F. (1997): *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Tercera Edición, Méjico, Mc. Graw Hill.

Cantoral Uriza, R. y Farfán Márquez, R. M. (2004): *Desarrollo conceptual del Cálculo*, México, Thomson.

Cantoral, R. (2000): *El futuro del Cálculo Infinitesimal – ICME – 8 Sevilla, España*. Méjico, Grupo Editorial Iberoamérica.

Castro Pérez, J. y González Nucamendi, A. (2002): *Problemario de matemáticas para administración y economía*, México, Thomson.

Cordero, F. y Solís, M. (1995): *Las gráficas de las funciones como una argumentación al cálculo*, Méjico, Grupo Editorial Iberoamérica.

Douglas Faires, J. y De Franza, J. (2001): *Precálculo*, Segunda Edición, Méjico, International Thomson Editores.

Edwards, C. y Penney, D. (1994): *Cálculo con Geometría Analítica*, Cuarta Edición, México, Pearson - Prentice Hall.

Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M. (2005): *Funciones*, Santa Fe, Ediciones UNL.

Faires, D.; DeFranza, J. (2000): *Precálculo,* Segunda Edición, México, Thomson, Learning.

Farfán Márquez, R. (1997): *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*, Méjico, Grupo Editorial Iberoamérica.

Goldstein,L.; Lay, D. y Schneider, D. (1990): *Cálculo y sus Aplicaciones*, Cuarta Edición, México, Prentice Hall Hispanoamericana.

Gómez, P. y Mesa, V. (editores) (1995): *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*, Bogotá, Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica.

Harshbarger, R.; Reynolds, J. (2005): *Matemáticas Aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales,* Séptima Edición, México, Mc Graw Hill.

Hoffman,L.; Bradley, G. (2001): *Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales*, Séptima Edición, Colombia, Mc. Graw Hill.

Hughes–Hallet, D.; Gleason, A.; et al. (2001): *Cálculo*, Segunda Edición, Méjico, CECSA.

Kilpatrick, J.; Gómez, P. y Rico, L. (1995): *Educación Matemática*, Méjico, Grupo Editorial Iberoamérica.

Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (1995): *Cálculo y Geometría Analítica, Volumen 1*, Quinta Edición, España, Mc. Graw Hill.

Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (2006): *Cálculo I,* Octava Edición, México, Mc. Graw Hill.

Lial, M. y Hungerford, T. (2000): *Matemáticas para administración y economía. En las ciencias sociales, naturales y de administración*, México, Pearson Educación.

Nagle, R; Saff, E. y Snider, A. (2005): Ecuaciones Diferenciales y *problemas con valores en la frontera,* Cuarta Edición, México, Pearson Educación.

Pita Ruiz, C. (1998): *Cálculo de una variable*, Méjico, Prentice Hall Hisponoamericana.

Purcell, E. y Varberg, D. (1993): *Cálculo con Geometría Analítica,* Sexta Edición, México, Prentice Hall Hispanoamericana.

Purcell, E. y Varberg, D. (1993): *Cálculo Diferencial e Integral*, Sexta Edición, Méjico, Prentice Hall Hispanoamericana.

Sadosky, M.; Guber, R. (2004): *Elementos de cálculo diferencial e integral,* Vigésimosegunda Edición, Argentina, Librería y Editorial Alsina.

Salas, Hille y Etgen. (2002): *Calculus. Una y varias variables. Volumen I*, 4ª Edición, Barcelona, Editorial Reverté.

Simmons, G. (2002): *Cálculo y Geometría Analítica*, Segunda Edición, México, Mc Graw Hill.

Smith, R. y Minton, R. (2000): *Cálculo. Tomo 1*, Colombia, Mc. Graw Hill.

Stewart, J. (1999): *Cálculo. Conceptos y contextos*, México, International Thomson Publishing.

Stewart, J.; Redlin,L. y Watson, S. (2001): *Precálculo,* Tercera Edición, México, Thomson Learning.

Sullivan, M. (1997): *Precálculo,* Cuarta Edición, México, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley.

Tan, S.T. (2002): *Matemáticas para administración y economía*, Segunda Edición, Méjico, Thomson Learning.

Thomas, G. y Finney, R. (1998): *Cálculo. Una variable*, 9ª Edición, Méjico, Pearson Educación, Addison Wesley Longman.

Waner, S. y Costenoble, S. (2002): *Cálculo Aplicado*, Segunda Edición, México, Thomson Learning.

Wrede, R.; Spiegel, M. (2004): *Cálculo Avanzado,* Segunda Edición, España, Mc Graw Hill.