FUN

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
Marcela Hecklein

FUN

FUNCIONES

FUNCIONES

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Rector Enrique Mammarella
Director de Planeamiento y Gestión Académica Daniel Comba
Directora Ediciones UNL Ivana Tosti

. . . .

Engler, Adriana
Funciones / Adriana Engler ; YR. - 2a ed . -
Santa Fe : Ediciones UNL, 2019.
Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-134-0

1. Matemática. I. Título
CDD 515

. . . .

Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Producción general
Ediciones UNL

—
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

. . . .

Funciones

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
Marcela Hecklein

A los míos, por su gran amor y paciencia
A mi mamá, siempre conmigo
Adriana

A la memoria de mi madre
A mis hijos, María, Magdalena y Martín
Daniela

A Fernando, Melina y Roberto
Silvia

A Carlos y Martín
Marcela

Prólogo

"Consideramos cómo están relacionados todos los sucesos. Cuando vemos el relámpago, escuchamos el trueno; cuando oímos el viento, miramos las olas del mar; en el otoño frío caen las hojas. En todas partes reina el orden; de manera que cuando observamos algunos fenómenos podemos prever que otros se presentarán. El progreso de la ciencia consiste en observar estas mutuas dependencias y en mostrar con paciente ingeniosidad que los sucesos de este mundo que cambian constantemente no son sino ejemplos de unas pocas dependencias o relaciones generales llamadas leyes. Ver lo general en lo particular y lo constante en lo transitorio es la meta del pensamiento científico." (Alfred North Whitehead)

La influencia, importancia y el papel relevante de la matemática en nuestra sociedad fue en constante crecimiento en especial por el gran aumento de sus aplicaciones. Podemos decir que la matemática está presente en casi todas las actividades humanas. Su presencia en la vida cotidiana de la mayoría de las personas es constante. La universalidad de la matemática hace que hoy resulte indispensable en las ciencias de la naturaleza, ciencias sociales y ciencias económicas. La comprensión del mundo actual con sus avances tecnológicos y la gran cantidad de información hace necesario familiarizarse con ciertas nociones matemáticas. La construcción del conocimiento matemático implica flexibilidad y movilidad. El trabajo matemático es un proceso de descubrimiento continuo para alcanzar a comprender la naturaleza de sistemas matemáticos concretos. Sabemos que es importante desarrollar una forma de conocimiento a través de la cual se organice información, se resuelvan problemas, se interprete la realidad y se tomen decisiones. Como docentes debemos ser reflexivos y analíticos en la selección y aplicación de contenidos y desarrollarlos desde distintos enfoques.

Las nuevas ideas y tendencias en Educación Matemática están centradas en el desarrollo de una disciplina que permita a los alumnos apropiarse del conocimiento matemático fomentando la autonomía de pensamiento, la capacidad de aprender matemáticamente, de razonar, elaborar conclusiones, generalizar, demostrar, descartar y elaborar conclusiones.

Decidimos generar esta nueva obra como desprendimiento de nuestro primer trabajo "Matemática Básica" después de compartir muchos años de experiencia áulica. Si bien la escribimos pensando en nuestros estudiantes, alumnos de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, consideramos que resulta un material también interesante para docentes y estudiantes de los primeros niveles de las carreras de grado y para docentes del polimodal. Nuestro objetivo no es hacer de ellos expertos en matemática sino que buscamos que se sientan cómodos en un ambiente donde cada vez se hace más importante lograr trabajar con la matemática de manera dinámica y valerse de sus contenidos y técnicas para resolver los problemas que se presentan en el área de la especialidad. Pretendemos que descubran el inmenso potencial de la matemática teniendo en cuenta sus propios valores y su carácter instrumental.

Presentamos los contenidos básicos de funciones con énfasis en su aplicación en la resolución de problemas del campo de la administración, economía, biología y ciencias sociales. Los temas desarrollados corresponden a los conceptos básicos de funciones, funciones escalares algebraicas, funciones escalares trascendentes, el estudio de sus principales características y gráfica y su rol indispensable en la formulación de modelos matemáticos. Para la realización de este trabajo tuvimos en cuenta que el estudiante no aprende matemática si sólo maneja símbolos y técnicas de resolución. Teniendo en cuenta la valoración de la matemática como disciplina para resolver problemas, se torna absolutamente necesario que maneje con facilidad el lenguaje matemático. Para los futuros profesionales es fundamental la resolución de problemas durante su período de formación y, en especial, durante su educación matemática a fin de contribuir en el desarrollo de sus capacidades.

Comprometidas en ayudar a desarrollar un pensamiento matemático, estamos convencidas de que este libro constituye en aporte para la educación matemática de nuestros jóvenes. Respeta criterios pedagógicos y didácticos tendientes a una forma de aprendizaje amena y accesible con abundantes ejemplos y busca dar respuestas a la problemática de la motivación intentando vencer el desafío de despertar el entusiasmo para estudiar matemática en alumnos de carreras no matemáticas.

CARACTERÍSTICAS DE LA OBRA

A lo largo de la misma se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- Los nuevos conceptos se presentan por medio de ejemplos que generan la necesidad de desarrollar nuevas técnicas.
- Un enfoque donde se desarrolla el concepto matemático para después reforzarlo con las aplicaciones.
- Un énfasis especial en la comunicación verbal de los conceptos matemáticos mediante la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje matemático y viceversa.
- Un cuidado especial en las explicaciones de los conceptos más difíciles teniendo en cuenta la necesidad de aplicar distintos caminos según el grado de dificultad. Se trata de guiar el proceso de pensamiento del alumno hacia la meta propuesta, trabajar en forma intuitiva una idea para después formalizarla tratando de salvar todos los obstáculos.
- Presentación de la teoría con rigurosidad y precisión. En muchos casos, a fin de ganar en claridad, se presentan discusiones intuitivas informales.
- Motivación del alumno a través de valorar la necesidad de saber matemática para, mediante la resolución de problemas, enfrentarse a la futura vida profesional.
- Una gran cantidad y amplia variedad de aplicaciones y problemas para que los estudiantes asuman la utilización de todos los contenidos matemáticos que están aprendiendo.
- Utilización de representaciones gráficas convencidas de que quienes se enfrentan por primera vez a grandes desafíos matemáticos tienen dificulta-

des y, sin embargo, el uso de los gráficos logra un efecto muy importante en la construcción del conocimiento.

- Uso del lenguaje gráfico, numérico y algebraico de manera indistinta.

ORGANIZACIÓN DE LA OBRA

En el desarrollo de los capítulos se incluyen las explicaciones teóricas con abundantes ejemplos y desarrollo de aplicaciones en el campo de la física, ingeniería, biología, economía, ciencias sociales, ecología, química, administración y ciencias naturales. Se presenta una gran cantidad de ejemplos y problemas resueltos a fin de que el alumno observe distintos detalles que aparecen en los mismos y que constituyen su quehacer matemático. Están considerados de manera gradual, según las dificultades. En primer lugar aparecen ejemplos rutinarios para adquirir destrezas, principalmente desde el punto de vista de la operatoria y, en un paso posterior, los de mayor dificultad.

En los mismos se presentan además:

- **Ejercicios de aplicación** del nuevo concepto desarrollado. Aparecen todas las respuestas de manera inmediata a fin de fijar los contenidos y poder avanzar con el desarrollo del tema.
- **Ejercicios integradores** de un tema. Están organizados según los diferentes temas que se presentan en cada capítulo. Se incluyen las respuestas de todos al final del libro.
- **Ejercicios de repaso** de cada uno de los capítulos. Se incluyen guías que reúnen numerosos ejercicios cuyas respuestas figuran al final del libro.
- **Problemas de aplicación.** Se incluyen problemas de aplicación de los diferentes contenidos. Los mismos están organizados por temas y por capítulo. Las respuestas se enuncian al final del libro.
- **Autoevaluaciones y pruebas de opción múltiple** para que, según los diferentes temas y capítulos el alumno compruebe cómo avanza en la adquisición de los conocimientos. Están integradas por novedosos enunciados y las respuestas se encuentran al final del libro.
- **Guías de estudio** referidas a funciones donde se hace hincapié en las representaciones gráficas y en el uso de la computadora como herramienta fundamental para la elaboración de conclusiones.

Como reflexión final compartimos un párrafo que el Dr. Santaló escribió en 1993 en su libro Matemática I. Iniciación a la creatividad que dice *"Como los alumnos de hoy no son los mismos que los de ayer y las necesidades para poder actuar eficazmente en el mundo actual tampoco son las mismas, es natural que la educación matemática deba estar en continua evolución y que los educadores deban ir ajustando sin pausa la forma y el fondo de sus enseñanzas, para mantener a la escuela acorde a la calle de manera que el alumno no encuentre demasiada discontinuidad entre lo que oye en el aula y lo que encuentre y ve en su casa y en la calle."*

LAS AUTORAS

Agradecimientos

Desde el año 2000 cuando presentamos, con muchas expectativas, nuestro primer trabajo "Matemática Básica" recibimos numerosas muestras de aliento, sugerencias, comentarios y opiniones que nos motivaron a "seguir trabajando, estudiando, debatiendo, escribiendo..." Hoy "Funciones" ya es una realidad que nos implica un nuevo desafío.

Este libro, preparado especialmente para nuestros alumnos, surge de las experiencias obtenidas de nuestro continuo trabajo durante casi veinte años en el aula universitaria y de compartir el camino de enseñar y aprender matemática. Por eso un especial agradecimiento a ellos que con sus: "no entiendo", "¿por qué tengo que estudiar esto?", "qué bueno que la matemática me sirva", "¿me puede dar otro ejemplo?", "¿por qué tenemos que saber teoría?", "este ejercicio no me da", "a este problema le sobran datos", "¿qué significan esos símbolos?", "esa respuesta está mal", "¿ustedes no se habrán equivocado? ...” contribuyeron a mejorar nuestros primeros apuntes de cátedra y nuestro primer trabajo.

También, queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a las autoridades de la Universidad Nacional del Litoral por permitir que sus docentes publiquen sus obras y, en especial, a las autoridades de la Facultad de Ciencias Agrarias por su aliento y apoyo permanente.

Nuestro especial reconocimiento a la profesora Nelly Vázquez de Tapia por sus palabras de aliento y por acompañarnos en nuestros emprendimientos.

No podemos dejar de agradecer a nuestros colegas, amigos, graduados y a todas aquellas personas que de una u otra manera nos ayudaron y alentaron a continuar con esta tarea docente.

Las críticas, observaciones, comentarios y sugerencias de María Inés nos permitieron mejorar la presentación de los contenidos.

Gracias Daniel, Natalia y Emanuel por acompañarnos.

Estamos muy contentas de poder manifestar un sincero y enorme "muchas gracias" a nuestras familias por su paciencia, la espera y la comprensión por tantas horas de ausencia.

Por último, nuestro profundo agradecimiento a las autoridades y personal del Centro de Publicaciones de la Universidad Nacional del Litoral por la confianza, el interés y la colaboración que recibimos para poder cumplir con nuestro objetivo: la producción de un texto de cátedra para los estudiantes.

Adriana, Daniela, Silvia y Marcela

Contenido

1. FUNCIONES

1.1 Funciones.

1.2 Funciones escalares.

1.3 Gráficas de funciones según distintas transformaciones.

> Será necesario haber olvidado completamente la historia de la ciencias para no recordar que el deseo de entender la naturaleza ha tenido sobre el desarrollo de la Matemática la más feliz y la más importante de las influencias ...

Henri Poincaré

1.1 Funciones

El concepto de función surge con fuerza en el campo de la ciencia y de la aplicación de la matemática al estudio y resolución de problemas concretos en biología, administración, economía y ciencias sociales. Su estudio constituye uno de los sustentos de la matemática actual. Se relaciona con la necesidad de considerar situaciones en las que distintas magnitudes variables están relacionadas entre sí, sabiendo que los valores que toman algunas de ellas dependen y están ligados a los valores de las demás.

La noción de correspondencia y la necesidad de establecer relaciones y dependencias, se presenta con frecuencia en nuestro quehacer diario:

- el costo del pasaje varía según la cantidad de kilómetros recorridos por un colectivo;
- manteniendo el área de un triángulo constante, la medida de la altura depende de la medida de la base;
- el costo del envío postal varía según al peso de la carta;
- el costo de un estacionamiento depende del tiempo que está estacionado el vehículo;
- el aumento de peso de un animal depende de la ración de comida consumida;
- el número de personas que contraen una enfermedad depende del tiempo transcurrido desde que se detectó la epidemia;
- la demanda de un producto varía según el precio al que se venda;
- al área de un cuadrado depende de la medida de la longitud de su lado;
- las tarifas de los impuestos en un municipio dependen del nivel de gastos.

El estudio del movimiento fue un desafío que interesó a los científicos del siglo XVII, influidos por los descubrimientos de Kepler y de Galileo en relación con los cuerpos celestes. Gracias a todas las investigaciones en este campo, los matemáticos obtuvieron un concepto fundamental que fue central en casi todos los trabajos de los dos siglos siguientes: el de *función o relación entre variables*.
El concepto de función se encuentra a lo largo de “Dos nuevas ciencias”, el libro en el que Galileo basó la mecánica moderna. Él expresó los resultados de sus investigaciones y obvervaciones en palabras y en el lenguaje de las proporciones.
En aquellos tiempos la simbología del álgebra se estaba extendiendo y por eso se comenzaron a utilizar las expresiones algebraicas en lugar de palabras. Muchas funciones estudiadas en el siglo XVII primero fueron tomadas como curvas en términos de movimientos.
René Descartes en 1637 introdujo la palabra *función* para indicar cualquier potencia entera positiva de una variable x. Newton (1642-1727) fue uno de los matemáticos que más contribuyó al nacimiento y tratamiento de este concepto. Utilizó el término *fluyente* para designar cualquier relación entre variables.
Leibniz (1646-1716) utilizó la palabra *función* para indicar cantidades que dependen de una variable (cantidad asociada con una curva así como las

coordenadas de un punto sobre una curva). Fue él quien enfatizó el lado geométrico de la matemática. A él se debe además la introducción de los términos *constante*, *variable* y *parámetro*. Leonhard Euler (1707-1783) identificó cualquier ecuación o fórmula expresada con variables y constantes con la palabra función. A él se debe la idea utilizada en la actualidad de expresar una función como f(x). Dirichlet (1805-1859) amplió el alcance del término *función* y la describió como una regla de correspondencia entre dos conjuntos.

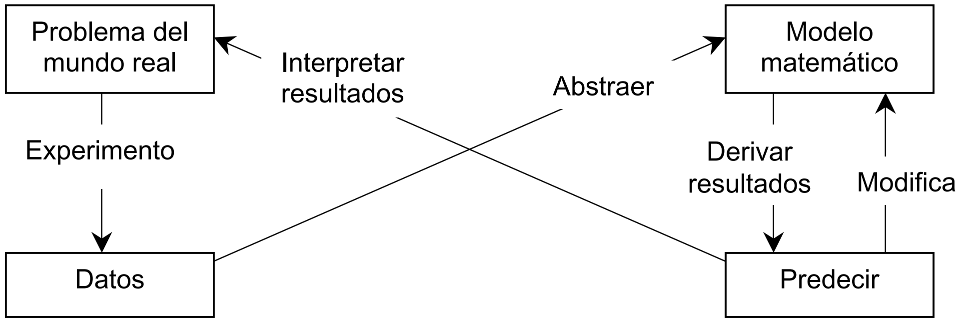
Existe una serie de funciones que, por su sencillez, su relevancia en matemática y su aplicabilidad en otras ciencias resultan de gran importancia y se hace necesario observar y analizar sus gráficas, describirlas, relacionarlas con sus expresiones analíticas, indagar su comportamiento en puntos especiales y sacar conclusiones respecto a transformaciones. ¿Qué representación se les puede dar para tener una mejor idea de sus características y de su significado? Las funciones adecuadas son las que relacionan números reales.

¿Para qué estudiamos funciones?

Con frecuencia, las funciones pueden utilizarse para modelizar problemas del mundo real. Por ejemplo, un fabricante desea conocer la relación entre la ganancia de su compañía y su nivel de producción, un biólogo se interesa por el cambio de tamaño de cierto cultivo de bacterias con el paso del tiempo y a un químico le interesa la relación entre la velocidad inicial de una reacción química y la cantidad de sustrato utilizado. En cada uno de los ejemplos, la pregunta es: ¿cómo depende una cantidad de otra?

A partir de conjeturas y ciertas suposiciones iniciales, un modelo matemático es el resultado de la búsqueda de regularidades presentes en una situación no necesariamente matemática. El modelo es el que le da forma matemática a la situación. Esto permite aplicar reglas y procedimientos matemáticos y es donde las funciones adquieren un rol muy importante.
Al desarrollar un modelo matemático como representación de datos reales se deben perseguir dos objetivos que parecen tener muy poco que ver entre ellos: precisión y sencillez. Esto significa lograr un modelo lo más sencillo posible pero que refleje la realidad de la mejor manera y produzca resultados significativos.

Los procedimientos dentro del modelo matemático proporcionan resultados que permiten predecir lo que sucederá en esa situación tomada de la realidad. Si las predicciones no son precisas o si los resultados que se obtengan de la experimentación no se ajustan al modelo, éste necesitará ciertas modificaciones.



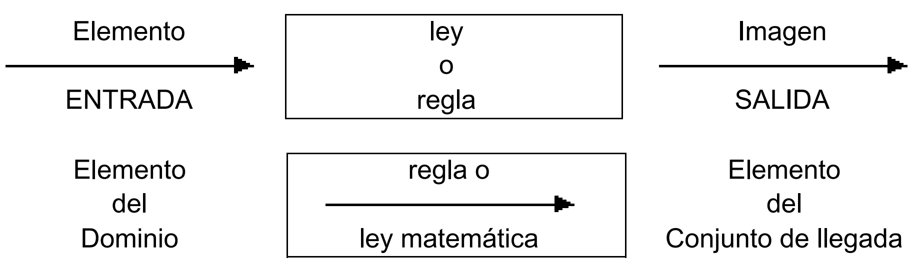
Cuadro extraído del libro Cálculo para ciencias económicas–administrativas, Marvin Bittiger, 7ª ed., ed. Pearson Educación, Colombia, 2002, (página 9)

Existe una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en la realidad. Muchas de ellas serán analizadas en este libro de manera algebraica y gráfica.

Definición de función

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, que llamamos dominio y conjunto de llegada respectivamente. Entendemos por función de A en B a toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio un único elemento del conjunto de llegada.

Se puede pensar que una función es un dispositivo de entrada-salida. Se proporciona un elemento (entrada) a una ley o regla matemática que la transforma en una imagen (salida). Una función es un tipo especial de relación que expresa cómo una cantidad (la salida) depende de otra (la entrada).

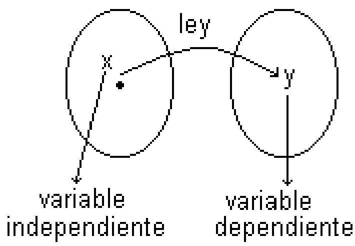


Si tenemos en cuenta esto podemos definir:
Dominio: conjunto de todos los valores de entrada.
Conjunto de imágenes: conjunto de todos los valores de salida.

Notación: En general los signos que denotan funciones son letras minúsculas, como por ejemplo: f, g, h. Para indicar que f es una función de A en B escribimos:

$f : A \rightarrow B$ y se lee "f es una función de A en B" o bien "f es una función con dominio en A y conjunto de llegada en B".

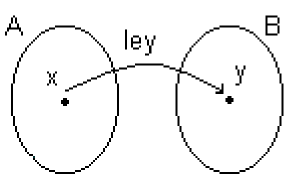
Definición 1: f es una función de A en B sí y sólo sí f es una correspondencia entre dos conjuntos A (dominio) y B (conjunto de llegada) tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B.
Decimos que y es la imagen de x por f y escribimos $y = f(x)$



La variable que representa elementos de entrada para la función se llama *variable independiente*. La variable que representa elementos de salida recibe el nombre de *variable dependiente* pues su valor depende de la variable independiente.

$$x \xrightarrow{\text{aplique la ley f}} f(x)$$

Definición 2: f es una función de A (dominio) en B (conjunto de llegada) sí y sólo sí la ley de correspondencia que relaciona elementos de A con los de B satisface las siguientes condiciones:

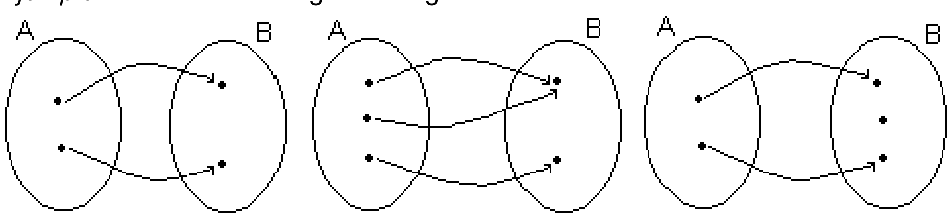


- existencia : $\forall\, x \in A, \exists\, y \in B \,/\, y = f(x)$
- unicidad : $y = f(x) \;\wedge\; z = f(x) \Rightarrow y = z$

Cuando estamos en presencia de una función de A en B todo elemento del dominio tiene un correspondiente o "imagen" en el conjunto de llegada y además esa imagen es única.

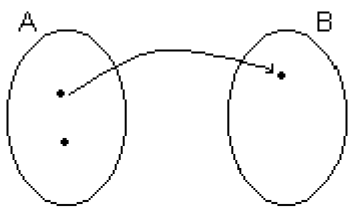
Si x está en el dominio de una función f decimos que “f está definida en x” o que “f(x) existe”. Por otro lado si x no pertenece al dominio de f decimos que “f no está definida en x” o que “f(x) no existe”.

Ejemplo: Analice si los diagramas siguientes definen funciones.

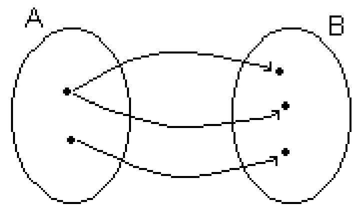


Observemos que, en cada diagrama, se cumple que todos los elementos del dominio tienen imagen y esa imagen es única. Esto nos permite asegurar que los tres ejemplos representan funciones.
Ejemplo: Analice si los diagramas siguientes definen funciones.

a)



b)



Estos diagramas no definen funciones. En el caso **a)** hay un elemento del conjunto A que no tiene imagen (no se verifica la condición de existencia para la ley de definición). En el caso **b)** existe un elemento del conjunto A que tiene dos imágenes (no se cumple unicidad).

Una función queda definida entonces cuando se dan:

- el dominio,
- el conjunto de llegada,
- una ley de correspondencia que satisface las condiciones de existencia y unicidad.

Todos los valores posibles de la variable independiente constituyen el dominio. El dominio de una función es el conjunto determinado por el intervalo de variación de la variable independiente.
Podemos asegurar que una función es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para todos los valores x del dominio tales que x e y satisfacen la ley $y = f(x)$ y para los cuales no existen dos pares diferentes que tengan iguales las primeras componentes. Esto garantiza la condición de unicidad.
Si pensamos en tratar de definir funciones de reales en reales el dominio es el conjunto máximo de números reales para el cual la expresión o regla que se le aplica a x produce un valor real. El conjunto determinado por el intervalo de variación de la variable dependiente se llama conjunto imagen de la función.

¿Cómo podemos expresar una función?

Una función puede expresarse de diferentes maneras:

- Coloquial: a través de un enunciado o texto, mediante una descripción con palabras.
- Numérica: utilizando una tabla de valores.
- Visual: realizando la representación gráfica.
- Algebraica: por medio de una ley o expresión matemática.

Una función se puede representar de las cuatro maneras descriptas y es importante el pasaje de una forma a otra para interpretarla mejor.

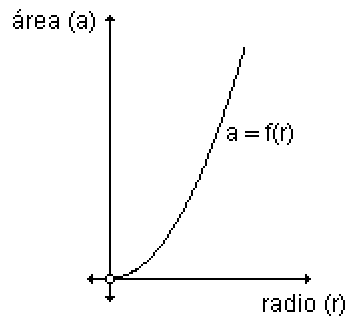
Ejemplo: El área de un círculo depende del valor de su radio y se calcula a través de la fórmula $a = \pi r^2$. Para cada número positivo r encontramos un valor de a asociado. Decimos que a es función de r y se indica $a = f(r)$. Exprese la función según las cuatro formas descriptas.

Coloquial: “el área de un círculo es función del radio y se obtiene multiplicando π por el valor del radio elevado al cuadrado”.

Numérica (el radio, r, puede tomar cualquier valor real positivo)

r	área
1	π
2,5	$6,25\pi$
3	9π
4,02	$16,1604\pi$

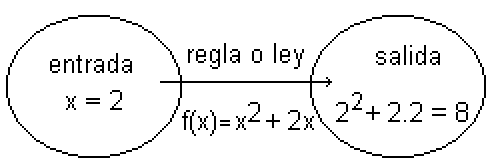
Visual



Algebraica: $a = f(r) = \pi\, r^2$

Ejemplo: Se establece la función que a cada número real le asigna la suma de su cuadrado con su doble. Determine la ley de la función, dominio y conjunto de llegada. Encuentre la imagen de 2.

Si llamamos x a cada número real, la ley de la función que a cada número real le asigna la suma de su cuadrado con su doble es $f(x) = x^2 + 2x$.
El dominio de esta función es el conjunto de los números reales.
Al darle a x cualquier valor real y realizar las operaciones expresadas en la ley de la función se otienen números reales, por lo tanto el conjunto de llegada es también el de los números reales.



Encontrar la imagen de 2 significa reemplazar x por 2 en la ley de la función. La imagen de 2 es 8. Simbólicamente escribimos:
$f(2) = 2^2 + 2.2 = 8$

Ejemplo: Dada $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2 - 3x$, determine $f(a + 1)$ y $f(a^2)$.

Determinar $f(a + 1)$ significa encontrar la imagen de a + 1. Para eso siempre que aparece la variable x en la expresión que define la función debemos reemplazarla por a + 1. Podemos pensar a x como un □ y, visualmente aparecería: $f(\square) = \square^2 - 3\square$
Ahora, en lugar de cada □ escribimos la expresión a + 1 y así resulta:

$f(a + 1) = (a + 1)^2 - 3(a + 1) = a^2 + 2a + 1 - 3a - 3 = a^2 - a - 2$

Resulta $f(a + 1) = a^2 - a - 2$

De la misma forma calculamos $f(a^2) = (a^2)^2 - 3.(a^2) = a^4 - 3a^2$

¿Cómo determinar el dominio y el conjunto de imágenes de una función a partir de su ley?

Cuando una función está definida por una ley es necesario utilizar esa ley y diferentes procedimientos algebraicos para determinar su dominio y conjunto de imágenes.

Ejemplo: Indique el dominio para que la ley $r(x) = 3x - 6$ defina una función. Indique el conjunto de imágenes.

La ley que define a la función es un polinomio. Su dominio es el conjunto de números reales ya que podemos sustituir x por cualquier número real y obtener un valor de y, o sea $D = R$.

La ley establece que cada valor de x se multiplica por 3 y luego se restan 6 unidades al resultado. Como x puede tomar cualquier valor real, al efectuar esas operaciones a cada valor de x se obtendrán como imagen todos los números reales. El conjunto de imágenes es $CI = R$.

Ejemplo: Determine dominio y conjunto de imágenes de la función $i(x) = x^2 + 5$.

Dado que se puede sustituir x por cualquier número real y obtener un valor de y, el dominio es el conjunto de los números reales, $D = R$.

Para obtener cada valor de y se eleva cada valor de x al cuadrado y al resultado se le suman 5 unidades. Si se eleva al cuadrado un número positivo o negativo el resultado siempre resulta positivo. Si se eleva al cuadrado el cero, se obtiene cero. Por lo tanto al elevar al cuadrado cualquier número real se obtiene un número mayor o igual que cero. Si a este número se le suma 5, el resultado es mayor o igual que 5. El conjunto de imágenes son todos los reales mayores o iguales que 5, o sea $CI = \{y \,/\, y \in R \wedge y \geq 5\}$.

Ejemplo: Halle el dominio y el conjunto de imágenes de la función $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$.

Si $x = 4$ entonces $\dfrac{3}{x-4}$ no está definida. Por este motivo, ese valor no pertenece al dominio de la función. El dominio son todos los números reales excepto $x = 4$, o sea $D = R - \{4\} = \{x \,/\, x \in R \wedge x \neq 4\}$.

Como el numerador de $\dfrac{3}{x-4}$ no puede ser cero, entonces $\dfrac{3}{x-4}$ tampoco puede ser cero. El conjunto de imágenes son todos los reales excepto el cero.

$CI = R - \{0\} = \{y/y \in R \wedge y \neq 0\}$.

Ejemplo: Halle el dominio y conjunto de imágenes de $g(x) = \sqrt{5-2x}$.

La ley que define la función g(x) es una raíz de índice par, por lo tanto, su radicando no puede ser negativo.
Por ello planteamos $5 - 2x \geq 0$ y encontramos los valores que puede tomar x.

$5 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -5 \Rightarrow x \leq \dfrac{-5}{-2} \Rightarrow x \leq \dfrac{5}{2}$.

$D = \left\{x / x \in R \wedge x \leq \dfrac{5}{2}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$

La raíz cuadrada de un número es no negativa. Para toda x del dominio, se cumple que $\sqrt{5-2x} \geq 0$. El conjunto de imágenes son todos los reales positivos incluido el cero. $CI = R_0^+ = \{y / y \in R, y \geq 0\} = [0, \infty)$

EJERCICIOS

1) Determine si cada una de las siguientes leyes define una función de $R \to R$. En caso de no ser función, justifique.

a) $s_1 : x \to -2x + 3$ **b)** $s_2 : x \to \dfrac{3x}{x-1}$

c) s_3: "a cada número le asigna su cuadrado aumentado en dos unidades"

2) Establezca el dominio y conjunto de imágenes de cada una de las funciones definidas a continuación:

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 1$ **b)** $g(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

c) $h(x) = \sqrt{x+2}$ **d)** $m(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x-1}}$

RESPUESTAS

1)a) s_1 es función **b)** s_2 no es función porque $x = 1$ no tiene imagen.

c) s_3 es función

2)a) $D = R$ $CI = R$ **b)** $D = R - \{-1\}$ $CI = R^+$

c) $D = \{x / x \in R \wedge x \geq -2\} = [-2, \infty)$ $CI = R_0^+$

d) $D = \{x / x \in R \wedge x > 1\} = (1, \infty)$ $CI = R^+$

Representación gráfica de funciones

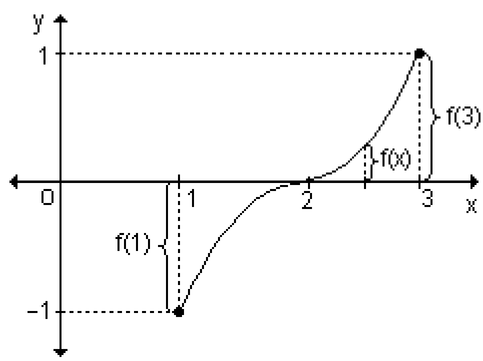
Las ideas, conceptos y métodos en matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables geométricamente que resultan de gran utilidad.
Las funciones cuyos dominios y conjuntos de llegada son subconjuntos de números reales, pueden representarse mediante una curva en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano o en el espacio.
Al trabajar en el plano xy, el dominio se considera sobre el eje de las abscisas (horizontal, eje x) y el conjunto de llegada, sobre el eje de las ordenadas (vertical, eje y).

La gráfica de la función es la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el plano cartesiano, es el conjunto de todos los puntos (x, y) para todo x del dominio de la función y tal que $y = f(x)$. Cada punto de la curva es tal que su primera coordenada x es un elemento del dominio y su segunda coordenada es la imagen correspondiente de esa x bajo la función f.

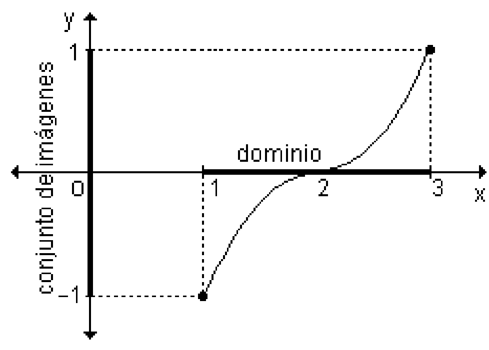
Cada punto que pertenece a la gráfica de una función tiene la forma $(x, f(x))$ para todo valor de x en el dominio de f. Como f asigna un solo valor $f(x)$ a cada valor de x en el dominio, podemos asegurar que en la gráfica de f sólo debe haber una imagen $y = f(x)$ que corresponda a cada uno de esos valores de x. Ésta es la condición de unicidad que se establece en la definición de función.

La gráfica de una función nos permite una visualización rápida de su comportamiento.

Como la ordenada de cualquier punto (x, y) de la gráfica es $y = f(x)$ podemos obtener el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica.



La gráfica también nos permite tener información acerca del dominio y conjunto de imágenes sobre el eje x (eje de abscisas) y el eje y (eje de ordenadas) respectivamente.

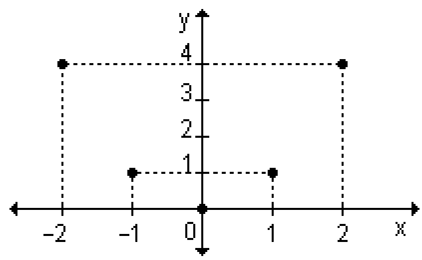


Los valores del dominio que tienen como imagen el cero se llaman *ceros de la función* y gráficamente son los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas.

Ejemplos: Represente gráficamente cada una de las funciones definidas.

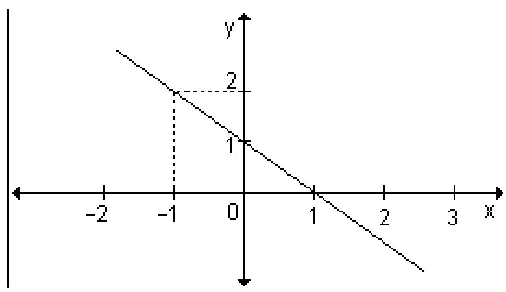
a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $f : A \to R$ tal que $y = f(x) = x^2$

x	y
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4



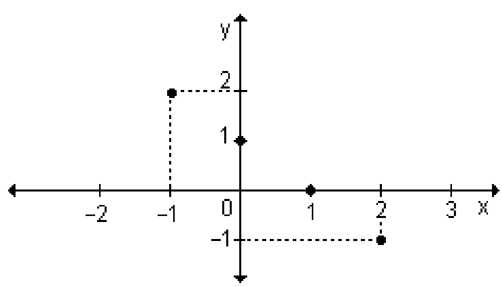
b) $f : R \to R$

$x \to -x + 1$



c) $f : Z \to Z$

$x \to -x + 1$



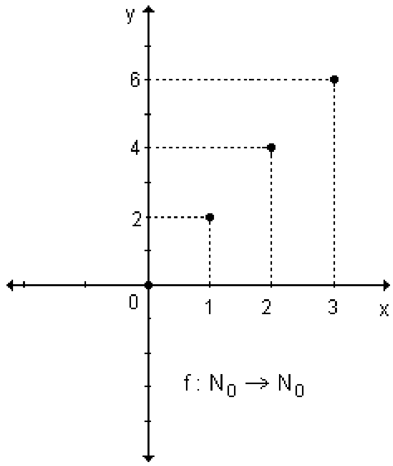
Observamos que en **a)** y **c)** la gráfica es un conjunto de puntos aislados pues el dominio en cada caso es un conjunto de números enteros.
En **b)** el trazo es continuo dado que el dominio es el conjunto de los números reales.

Ejemplo: Grafique la función $f(x) = 2x$ considerando:

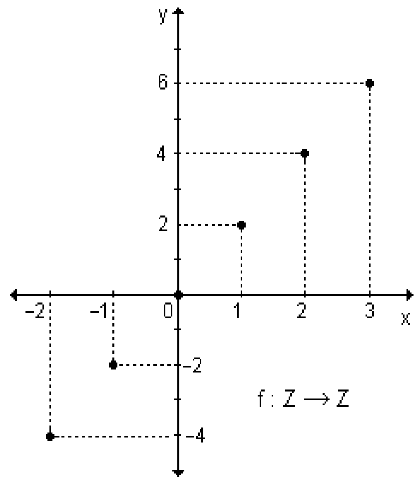
a) $f : N_0 \to N_0$ **b)** $f : Z \to Z$ **c)** $f : R \to R$

En **a)** y **b)** la gráfica consiste en puntos aislados, o sea, en pares ordenados de números naturales incluido el cero en el caso **a)** y en pares ordenados de números enteros en el caso **b).**

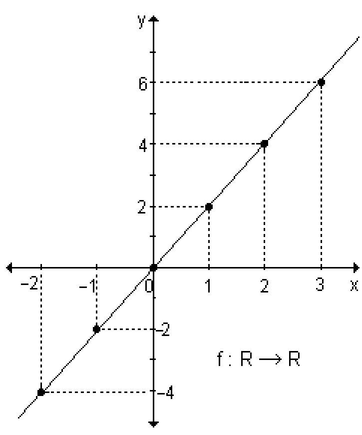
a)



b)



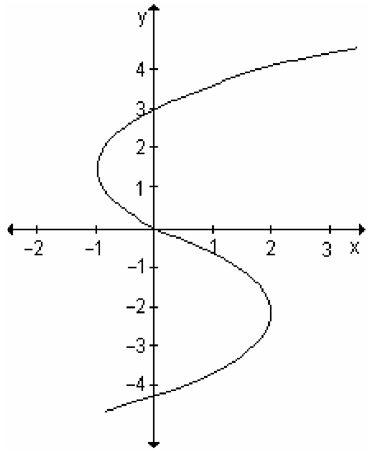
En **c)** los puntos de la recta se unen, el trazo es continuo dado que el dominio son todos los valores de x reales o sea todos los puntos ubicados sobre la recta real.



¿Cómo saber si una gráfica corresponde a la “gráfica de una función”?

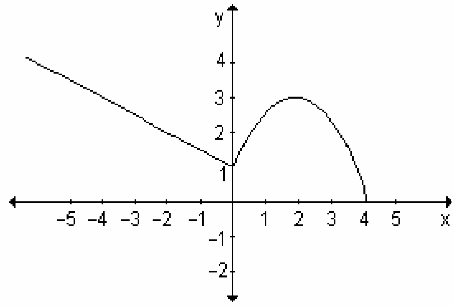
Ejemplo: Dadas las siguientes gráficas analice cuáles de ellas representan una función según el conjunto de partida indicado. Justifique.

a)



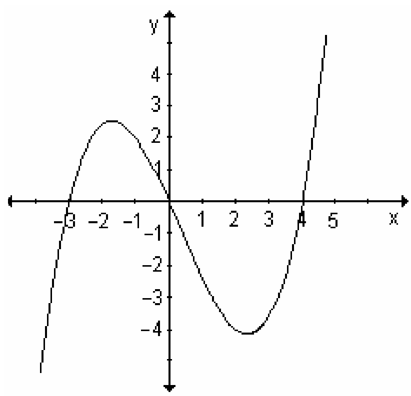
g : R → R

b)



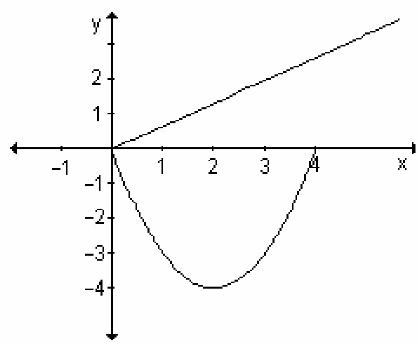
m : R → R^+

c)



f : R → R

d)



h : R_0^+ → R

a) No es función pues los valores de x comprendidos entre −1 y 2 tienen varias imágenes. No cumple con la condición de unicidad.

b) No es función ya que los valores de x mayores a 4 no tienen imagen. No cumple la condición de existencia.

c) Es función. Cumple las condiciones de existencia y unicidad.

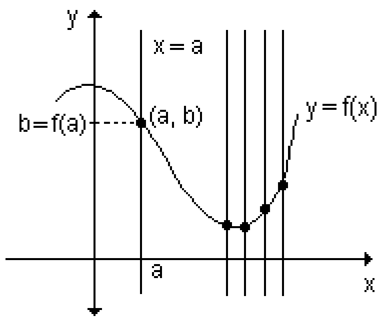
d) No es función pues los valores de x pertenecientes al intervalo [0, 4] tienen dos imágenes. No cumple la condición de unicidad.

Forma práctica para determinar si una gráfica corresponde a la "gráfica de una función"

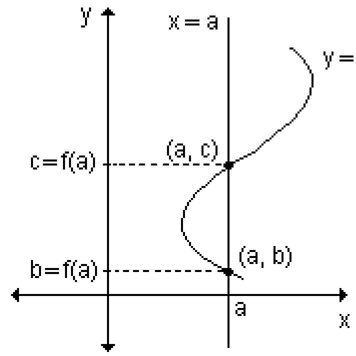
La gráfica de una función no puede presentar dos o más puntos con la misma abscisa "x". Esto significa que, si para cada valor del dominio trazamos una recta vertical, ésta debe cortar a la gráfica en un solo punto.

Esta forma de analizar si una curva es la gráfica de una función se conoce como "la prueba de la recta vertical" y se puede enunciar "para que una gráfica sea la gráfica de una función toda recta vertical, debe intersecar a la gráfica en un solo punto”, o bien, “una curva en el plano es la gráfica de una función sí y sólo sí ninguna recta vertical la corta en más de un punto”.

Gráficamente observamos:



Si cada recta vertical x = a interseca a la gráfica una sola vez existe una sola imagen para x = a definida por f(a) = b. En este caso la gráfica corresponde a una función.

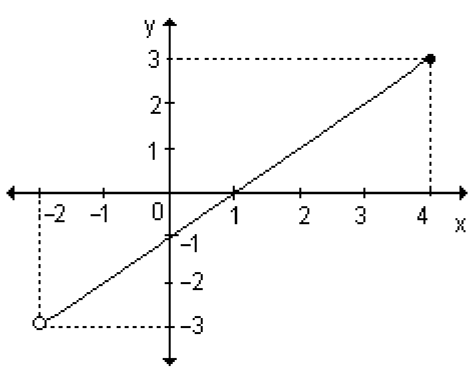


Si una recta x = a corta a la gráfica en dos oportunidades (a, b) y (a, c) no representa una función porque x = a tendría dos imágenes b = f(a) y c = f(a) distintas y no cumple con la condición de “unicidad”.

¿Cómo determinar el dominio y el conjunto de imágenes de una función a partir de su gráfica?

El dominio de una función definida gráficamente lo forman todos los valores del eje horizontal para los que la recta vertical que pasa por ellos interseca a la gráfica en un solo punto.
El conjunto de imágenes está constituido por los valores del eje vertical para los que una recta horizontal que pasa por ellos interseca a la gráfica.

Ejemplo: Dada la función definida gráficamente indique su dominio y su conjunto de imágenes.



El dominio son los valores de x comprendidos entre –2 (sin incluir) y 4 inclusive. El conjunto de imágenes son todos los valores de y mayores que –3 y menores o iguales que 3.

De otra manera podemos escribir:
D = $\{x/x \in R \wedge -2 < x \leq 4\} = (-2, 4]$
CI = $\{ y/y \in R \wedge -3 < y \leq 3\} = (-3, 3]$

Nota: Si el dominio de una función no está dado consideramos como dominio al máximo conjunto de números reales para los cuales f(x) también es un número real.

Funciones definidas por tramos

Todas las funciones que analizamos están definidas a través de una sola ley. Muchas veces, la regla que define una función está dada por más de una expresión matemática. Cuando las funciones están definidas por más de una ley, es decir, por distintas expresiones en distintas partes de su dominio, decimos que es una función definida por tramos.

Problema

> Una empresa textil ha considerado que si su producción no supera los cien metros semanales su costo es (300 + 6x), donde x es la cantidad de metros producidos. Si x es mayor que cien metros deben comprar más máquinas y refaccionar el lugar, el costo aumentará y estará dado por (600 + 5x).
> **a)** Escriba la función costo teniendo en cuenta que puede producir como máximo quinientos metros.
> **b)** ¿Cuál es el costo de fabricar cincuenta metros?, ¿y doscientos ochenta metros?

a) Sea x la cantidad de metros producidos por semana. Para toda $x \leq 100$ el valor de la función f(x) es 300 + 6x. Para valores de x mayores que 100 la función toma el valor 600 + 5x. Se debe tener en cuenta que la producción no puede superar los quinientos metros. Si $100 < x \leq 500$ se define $f(x) = 600 + 5x$.

Definimos la función:

$$c: [0, 500] \to R \,/\, c(x) = \begin{cases} 300 + 6x & \text{si} \quad x \leq 100 \\ 600 + 5x & \text{si} \quad 100 < x \leq 500 \end{cases}$$

b) Para hallar el costo de fabricación de cincuenta metros debemos calcular c(50). Como 50 < 100 debemos considerar el primer tramo de la definición de la función, $c(x) = 300 + 6x$.
Resulta $c(50) = 300 + 6 \,.\, 50 = 600$
El costo de fabricar cincuenta metros asciende a $ 600.

De la misma manera para conocer el costo de producción de doscientos ochenta metros debemos hallar c(280). Como 280 > 100 consideramos el segundo tramo de la definición de la función, $c(x) = 600 + 5x$.
Resolvemos $c(280) = 600 + 5 \,.\, 280 = 2000$
Fabricar doscientos ochenta metros cuestan $ 2000.

¿Cómo representamos gráficamente una función por tramos?

Represente gráficamente $f : R \to R \; / \; x \to \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 4 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

Para trazar la gráfica hallamos las imágenes correspondientes a algunos valores del dominio teniendo en cuenta que se calculan de diferente manera según elijamos valores de x mayores o menores que 3.

La gráfica resulta diferente a la izquierda y a la derecha de x = 3.

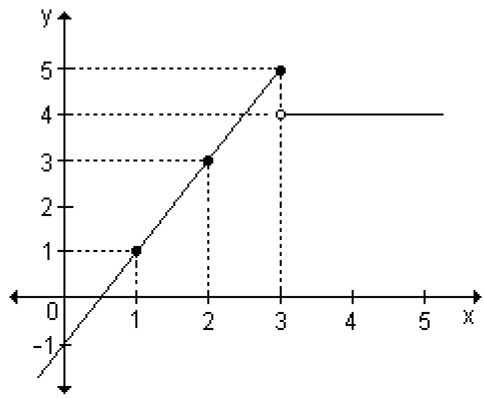
Para $x \leq 3$ consideramos $f(x) = 2x - 1$.

$f(1) = 2 \, . \, 1 - 1 = 1$

$f(2) = 2 \, . \, 2 - 1 = 3$

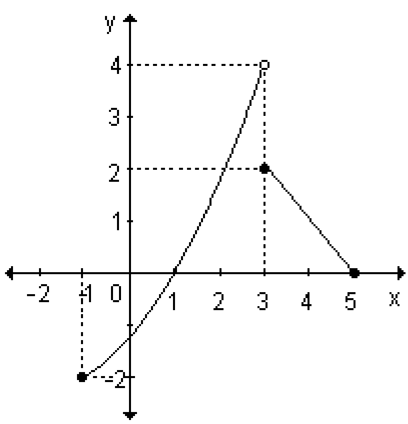
$f(3) = 2 \, . \, 3 - 1 = 5$

Para $x > 3$ corresponde $f(x) = 4$. La imagen de todo número real mayor que 3 es 4.



El punto relleno (3, 5) indica que está incluido en la gráfica. El punto abierto (3, 4) indica que no pertenece a la gráfica.

Ejemplo: Dada la función por tramos definida gráficamente indique su dominio y su conjunto de imágenes. Calcule f(3).



Se trata de una función de dos tramos. El dominio son los valores de x que pertenecen al intervalo cerrado [–1, 5].

El conjunto de imágenes es el intervalo semiabierto a derecha [–2, 4).

Teniendo en cuenta la notación conjuntista:

$D = \{ x/x \in R \wedge -1 \leq x \leq 5\}$

$CI = \{y/y \in R \wedge -2 \leq x < 4\}$

Como el punto (3,2) es relleno, la imagen de 3 es 2, o sea $f(3) = 2$.

EJERCICIOS

1) Represente gráficamente las funciones dadas en cada caso y determine su conjunto imagen.

a) $A = \{x/x \in Z \wedge -3 \leq x < 3\}$

$f_1 : A \to R \; / \; x \to 2x + 4$

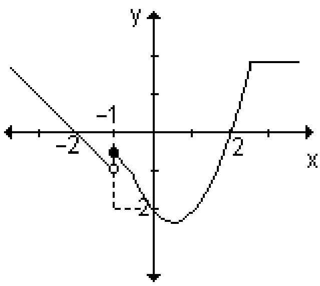
$f_2 : A \to R \; / \; y = 3$

b) $g : R \to R \,/\, g(x) = x^3 + 1$

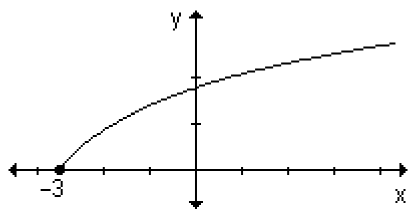
c) $h : R \to R \,/\, h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le -3 \\ x-2 & \text{si} \quad -3 < x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

2) Dadas las siguientes gráficas, diga si representan o no una función. En caso de no serlo, explique por qué. Si resulta función, determine los ceros.

a) $f : R \to R$

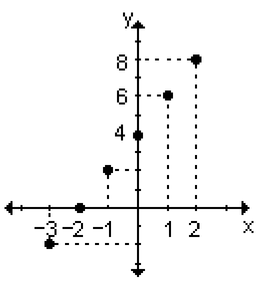


b) $m : R \to R^+$



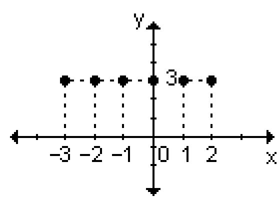
RESPUESTAS

1)a) f_1



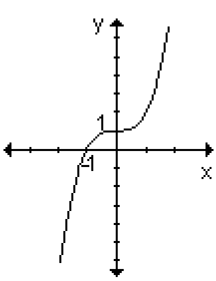
$CI = \{y/y \in Z \wedge -2 \le y \le 8\}$

f_2



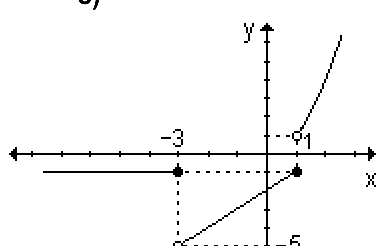
$CI = \{\ 3\ \}$

b)



$CI = R$

c)



$CI = \{y/y \in R, -5 < y \le -1 \vee y > 1\}$

2)a) Sí es función; $x = -2$, $x = 2$ son los ceros de la función.

b) No es función, porque no cumple la condición de existencia.

Clasificación de funciones

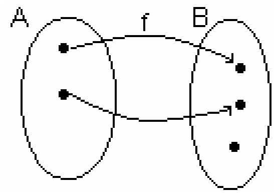
- **Función inyectiva**

La función $f: A \to B$ es *inyectiva, unívoca o uno a uno* si elementos distintos del dominio tienen distintas imágenes.

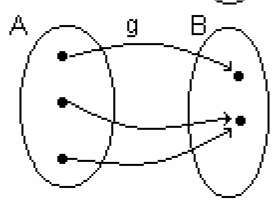
Definición. La función $f: A \to B$ es inyectiva, unívoca o uno a uno si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ para todos los valores de x_1 y x_2 del conjunto A.

Una forma equivalente de escribir la condición es $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A$.

Observación. La función f es inyectiva o uno a uno si no hay dos elementos del dominio que tengan la misma imagen.



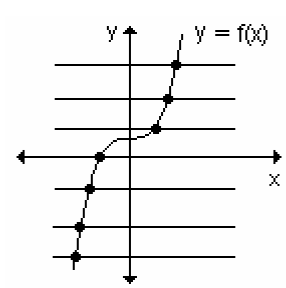
$f: A \to B$
Es función inyectiva ya que elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.



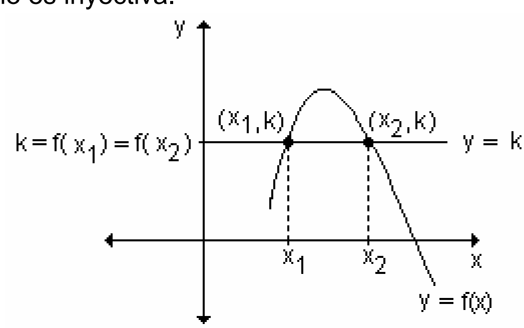
$g: A \to B$
La función no es inyectiva porque elementos distintos de A tienen la misma imagen.

Forma práctica para determinar si una gráfica corresponde a la gráfica de una función inyectiva

Existe un criterio geométrico sencillo para analizar si una gráfica representa una función inyectiva conocido como “criterio de la recta horizontal”. Una función es inyectiva si y sólo si ninguna recta horizontal corta a la gráfica en más de un punto. Dicho de otra manera, si alguna recta horizontal corta a la gráfica de una función más de una vez entonces no es inyectiva.



Las rectas horizontales trazadas por todos los valores de $y = f(x)$ cortan a la gráfica en un solo punto. Aplicamos el criterio de la recta horizontal. La función es inyectiva.

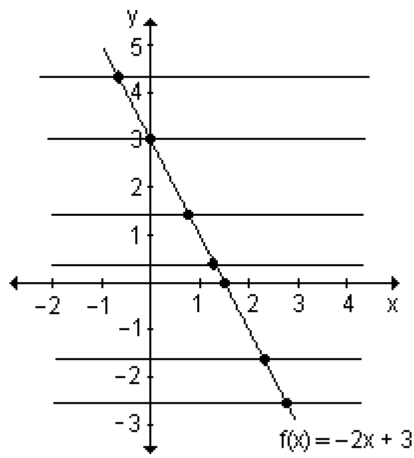


La recta $y = k$ corta a la gráfica en dos puntos (x_1, k) y (x_2, k). Esto significa que $f(x_1) = k$ y $f(x_2) = k$ y por lo tanto dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen. La función no es inyectiva.

Ejemplo: Analice si la función $f(x) = -2x + 3$ es inyectiva.

La función es inyectiva si dados dos elementos distintos del dominio se obtienen dos imágenes distintas. Para analizar si la función cumple con esa condición consideramos dos elementos $x_1 \neq x_2$ del dominio. Si a cada uno de ellos le aplicamos la regla de la función resulta $-2x_1 + 3 \neq -2x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
La función es inyectiva o uno a uno.

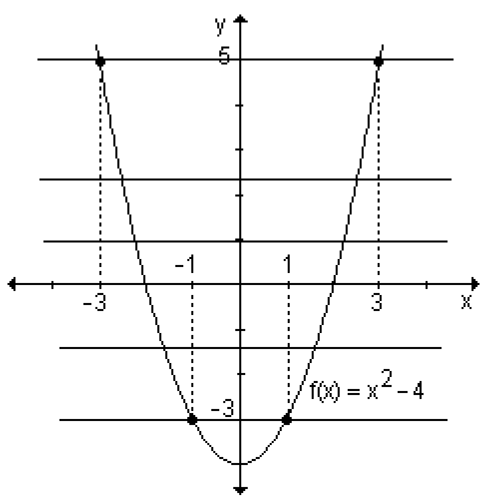
Gráficamente comprobamos que se cumple el "criterio de la recta horizontal".



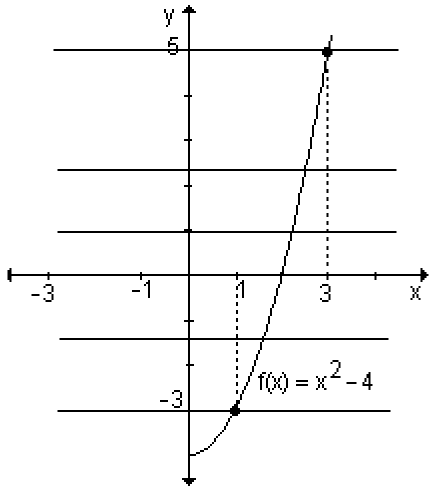
Ejemplo: Analice si la función $f(x) = x^2 - 4$ es inyectiva.

En la gráfica observamos que existen rectas horizontales que cortan a la gráfica de la función más de una vez.

Si elegimos, por ejemplo, dos valores $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ sus imágenes son iguales $f(1) = f(-1) = -3$. O bien $x_3 = 3$ y $x_4 = -3$ sus imágenes son iguales $f(3) = f(-3) = 5$.



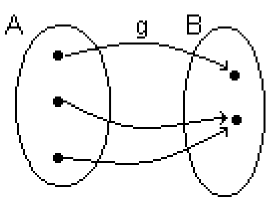
Elementos distintos del dominio tienen la misma imagen. La función no es inyectiva.



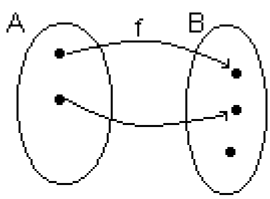
Observación: si en el ejemplo analizado restringimos el dominio y consideramos la función g : $R_0^+ \rightarrow R$ / $g(x) = x^2 - 4$, ésta es inyectiva.

- Función sobreyectiva

Definición: Si todo elemento del conjunto de llegada de una función es imagen de algún elemento del dominio, la función se llama *sobreyectiva, suryectiva o sobre*.



$g : A \rightarrow B$
Es función es sobreyectiva pues todo elemento de B es imagen de algún elemento de A.



$f : A \rightarrow B$
La función no es sobre pues existe un elemento de B que no es imagen de ninguno de A.

Ejemplo: Analice si la función $f(x) = -2x + 3$ es sobreyectiva.

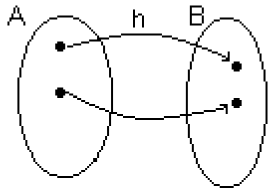
Dada la función $f(x) = -2x + 3$ siempre existe un elemento del conjunto de llegada (reales) que es imagen de algún elemento del dominio, por eso la función es sobreyectiva.

Ejemplo: Analice si la función $f(x) = x^2 - 4$ es sobreyectiva.

El conjunto de imágenes son todos los números reales mayores o iguales que -4, es decir $[-4, \infty)$. Teniendo en cuenta esto resulta que, si la función está definida $f : R \rightarrow R$ / $f(x) = x^2 - 4$ no es sobreyectiva mientras que, si está definida $f : R \rightarrow [-4, \infty)$ la función es sobreyectiva.

- Función biyectiva

Definición: Cuando una función es inyectiva y sobreyectiva se llama *biyectiva o biunívoca*.



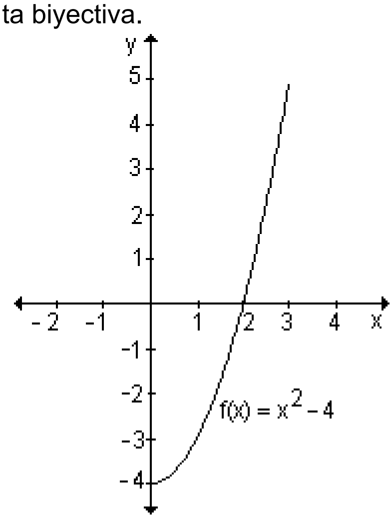
$h : A \rightarrow B$
Es función inyectiva y sobreyectiva y, por lo tanto, es biyectiva.

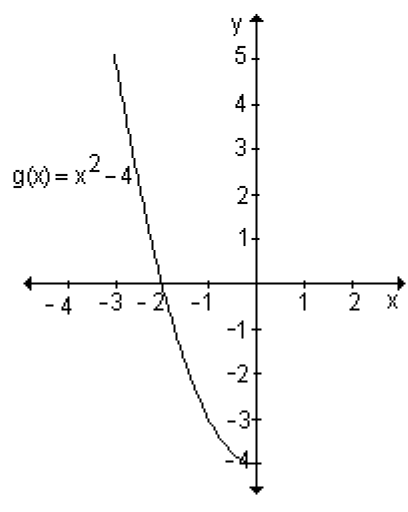
Ejemplo: Teniendo en cuenta lo analizado, surge que la función $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = -2x + 3$ es biyectiva porque es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo: Sabiendo que la función $f : R \rightarrow R$ / $f(x) = x^2 - 4$ no es biyectiva, determine qué conjunto se puede considerar como dominio y conjunto de imágenes para que resulte biyectiva.

Ya concluimos que, para que sea inyectiva, podemos considerar como un dominio posible al conjunto R_0^+. Para que sea sobreyectiva, con ese dominio, el conjunto de llegada debe ser el intervalo $[-4, \infty)$. Si definimos $f : R_0^+ \rightarrow [-4, \infty)$ / $f(x) = x^2 - 4$ resulta biyectiva.

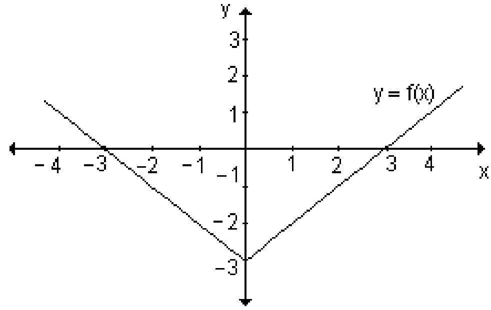
De la misma manera podríamos considerar como dominio el conjunto R_0^- para que la función sea inyectiva y, también en ese caso el conjunto de llegada, que debe coincidir con el conjunto de imágenes para que resulte sobreyectiva deber ser el intervalo $[-4, \infty)$. Si consideramos $g : R_0^- \rightarrow [-4, \infty)$ / $g(x) = x^2 - 4$ resulta biyectiva.



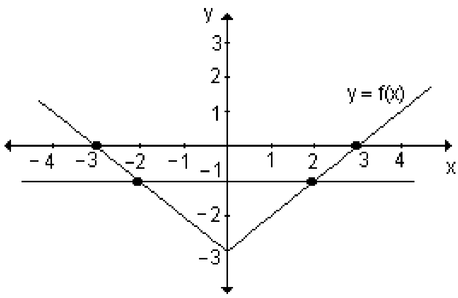


Observación: muchas veces se pueden redefinir el dominio para que la misma resulte inyectiva y el conjunto de llegada para obtener una función sobreyectiva.

Ejemplo: Dada la función $f : R \to R$ definida gráficamente, analice si es biyectiva.



Para analizar si la función es biyectiva debemos ver si es inyectiva y sobreyectiva.



Valores distintos del dominio tienen la misma imagen.

$3 \neq -3$ pero $f(3) = f(-3) = 0$

$1 \neq -1$ pero $f(1) = f(-1) = -2$

Gráficamente observamos que rectas horizontales cortan a la gráfica en dos puntos.

La función no es inyectiva

Tampoco es sobreyectiva pues hay valores del conjunto de llegada que no son imágenes de ningún valor del dominio. Dichos valores son todos los pertenecientes al intervalo $(-\infty, -3)$.

El conjunto de imagen está incluido en el conjunto de llegada. $CI = [-3, \infty) \subset R$.

Ejemplo: Grafique y clasifique la función $f : R \to R \,/\, \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \\ -x + 3 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$

Realizamos una tabla de valores para cada tramo, teniendo en cuenta distintos elementos de cada uno de los tramos:

Primer Tramo

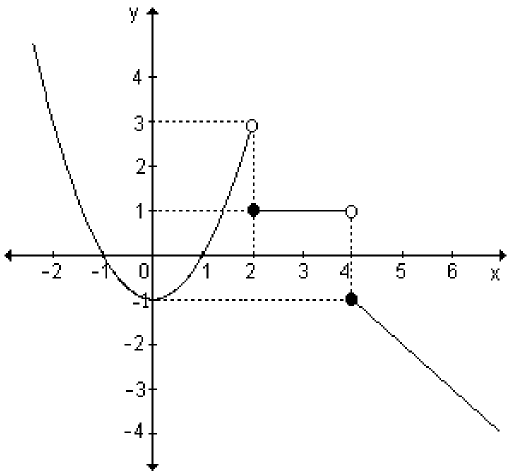
x	$y = x^2 - 1$
–2	3
–1	0
0	–1
1	0
2	3 no se incluye en este tramo

Segundo Tramo

x	$y = 1$
2	1
2,5	1
3	1
3,5	1
4	1 no se incluye en este tramo

Tercer Tramo

x	$y = -x + 3$
4	–1
5	–2
6	–3
7	–4
8	–5

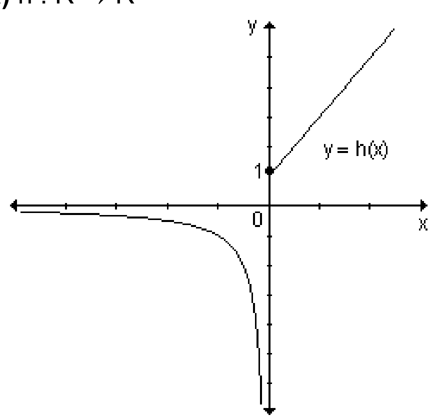


Para clasificar la función debemos tener en cuenta todos los tramos. Para que sea inyectiva y/o sobreyectiva debe serlo en todos.
En el primer tramo no es inyectiva ya que valores distintos de x (excepto el 0) tienen imágenes iguales.
Lo mismo pasa en el segundo tramo donde todos los valores de x tienen como imagen el 1.
Si bien para el tercer tramo la inyectividad se cumple dado que si los valores de x son diferentes los valores que surgen al realizar (–x + 3) serán distintos, al no cumplirse en los dos primeros podemos asegurar que la función no cumple la inyectividad. Pero sí es sobreyectiva porque para todo valor de y encontramos un elemento en el dominio tal que (x, y) pertenece a la función.
Dado que es sobreyectiva pero no inyectiva en todo su recorrido concluimos que no es biyectiva.

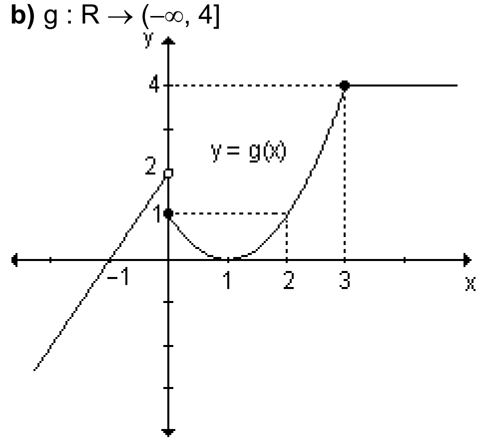
EJERCICIOS

1) Dadas las funciones definidas gráficamente, analice si son biyectivas.

a) h : R → R



b) g : R → (–∞, 4]



2) Analice si las funciones dadas son biyectivas.

a) f : R → [3, ∞) / $f(x) = x^2 + 3$

b) g : R → R/ $g(x) = x + 5$

RESPUESTAS

1)a) Es inyectiva pues valores distintos del dominio tienen distinta imagen, pero no es sobreyectiva pues todos los números reales pertenecientes al intervalo

[0,1) no son imagen de ningún valor del dominio. El conjunto de imágenes está incluido en el conjunto de llegada. CI = $(-\infty, 0) \cup [1, \infty) \subset R$.

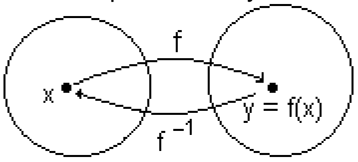
b) No es inyectiva porque valores distintos del dominio tienen la misma imagen (por ejemplo g(0) = g(2) = 1). La función es sobreyectiva porque todos los elementos del intervalo $(-\infty, 4]$ son imagen de algún elemento del dominio. La función g no es biyectiva.

2)a) No es inyectiva porque valores distintos del dominio tienen la misma imagen (por ejemplo f(1) = f(–1) = 4). La función es sobreyectiva porque para todo número real se verifica que su cuadrado es mayor o igual que cero y si se le suman tres unidades resulta $x^2 + 3 \geq 3$. El conjunto de imágenes es el intervalo $[3, \infty)$ que coincide con el conjunto de llegada.

b) Dado que valores de x distintos del dominio tienen imágenes distintas, la función es inyectiva. Como todo número real es imagen de algún elemento del dominio, la función es sobreyectiva. La función es biyectiva.

Función inversa

Una función f está dada por una ley que se aplica a la variable x para obtener su única imagen y = f(x). Podemos pensar que la función inversa de f, que se indica f^{-1} deshace lo que f hace. Es decir, si tomamos la variable independiente x y le aplicamos la función f obtenemos f(x) y si a f(x) le aplicamos la inversa f^{-1} logramos la variable x de la cual partimos.



Ejemplo: Compruebe que $f(x) = 3x$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ son inversas entre sí.

En un diagrama se observa que si $f(x) = 3x$, su inversa es $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$.

$$x \xrightarrow{\text{aplique } f} f(x) = 3x \xrightarrow{\text{aplique } f^{-1}} f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(3x) = \frac{1}{3}(3x) = x$$

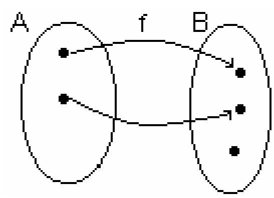
De la misma manera podemos decir que, dada la función $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ su inversa es $f(x) = 3x$. En el diagrama se observa esta situación:

$$x \xrightarrow{\text{aplique } f^{-1}} f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x. \xrightarrow{\text{aplique } f} f[f^{-1}(x)] = f\left(\frac{1}{3}x\right) = 3\left(\frac{1}{3}x\right) = x$$

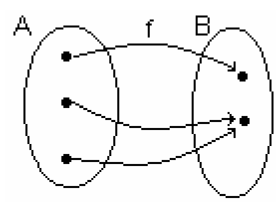
La inversa de una función ¿es también una función?

Consideremos las inversas de las funciones f definidas a la izquierda y analicemos si resultan o no funciones.

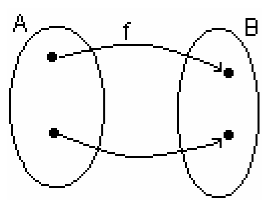
f es función



f es función inyectiva pero no es sobre.

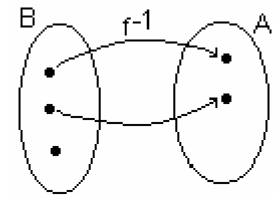


f es función sobreyectiva pero no es inyectiva.

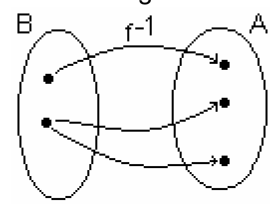


f es función inyectiva y sobreyectiva y, por lo tanto, es biyectiva.

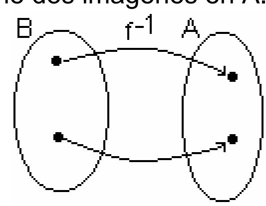
¿f^{-1} es función?



No es una función pues no cumple con la condición de existencia, un elemento de B carece de imagen en A.



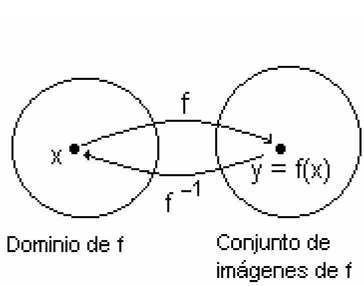
No es una función pues no cumple con la condición de unicidad, un elemento de B tiene dos imágenes en A.

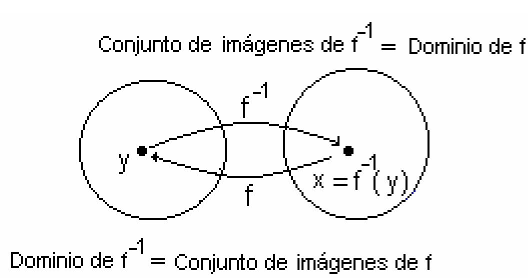


Es función porque cumple las condiciones de existencia y unicidad.

Observamos que la única inversa que resulta función es la que proviene de una función biyectiva.

La función $f: A \rightarrow B$ admite inversa $\Leftrightarrow$ f es biyectiva.





Definición. Dada una función $f: A \rightarrow B$ biyectiva, su inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ es una función biyectiva tal que $f^{-1}[f(x)] = x$ para toda x que pertenece al dominio de f y $f[f^{-1}(x)] = x$ para todo elemento del dominio de f^{-1}.

Es importante reconocer dos aspectos con respecto a una función y su inversa.

El dominio de f coincide con el conjunto de imágenes de f^{-1}.

El conjunto de imágenes de f coincide con el dominio de f^{-1}.

Resulta útil tener presente el siguiente esquema:

$$x \xrightarrow{\text{aplique } f} f(x) \xrightarrow{\text{aplique } f^{-1}} f^{-1}[f(x)] = x$$

Podemos decir que "f^{-1} invierte la correspondencia dada por f".

$$x \xrightarrow{\text{aplique } f^{-1}} f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{aplique } f} f[f^{-1}(x)] = x$$

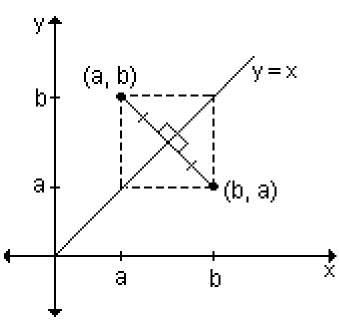
Decimos que "f invierte la correspondencia dada por f^{-1}".

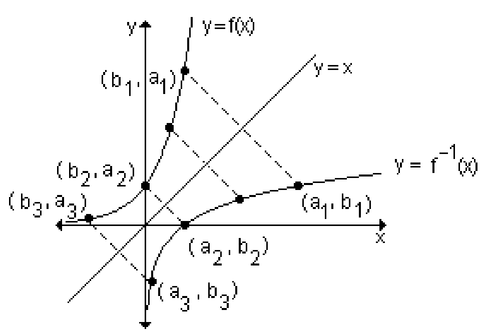
La gráfica de una función y su inversa

Sea (a, b) un punto de la gráfica de la función biyectiva $y = f(x)$. Esto significa que $b = f(a)$. Se sabe además que (b, a) es un punto de la gráfica de la función inversa f^{-1}. Esto significa que $a = f^{-1}(b)$.

En la gráfica se observa que el segmento que une los puntos (a, b) y (b, a) es perpendicular a la recta $y = x$ y la recta divide al segmento en dos partes iguales por la tanto es su bisectriz.

Esto ocurre para todos los puntos (x, f(x)) y (x, f^{-1}(x)) de la función y su inversa.





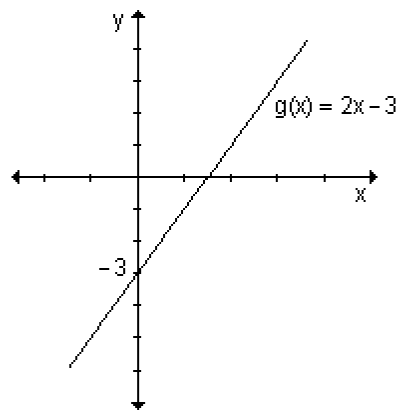
¿Cómo se obtiene la inversa de una función?

Gráficamente la inversa de una función se obtiene construyendo su gráfica simétrica respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, respecto a la recta $y = x$. Esto significa que a cada punto (x, y) de f le corresponde el punto que resulta de cambiar sus coordenadas (y, x) en f^{-1}. Por este motivo, para obtener la expresión analítica de la función inversa f^{-1} efectuamos ese cambio en f y luego despejamos la variable y. Podemos resumir el trabajo de la siguiente manera:

- Se intercambian las variables x e y entre sí.
- Se despeja la variable y.

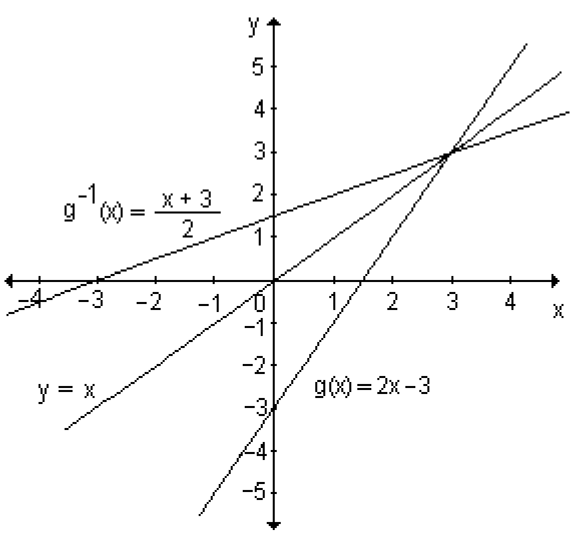
Ejemplo: Determine si la función $g(x) = 2x - 3$ definida en el conjunto de los números reales admite inversa. En caso afirmativo, defina la función inversa.

Tanto el dominio de $g(x) = 2x - 3$, como el conjunto de imágenes son los números reales.
Si consideramos dos valores distintos del dominio, sus imágenes también son distintas, o sea, es inyectiva. Además para todo valor y del eje de ordenadas existe el valor x del eje de abscisas.
Esto asegura que es sobreyectiva. En consecuencia es biyectiva, por lo tanto admite función inversa.



Para calcular la inversa seguimos los dos pasos descriptos:

- Intercambiamos los nombres de las variables, donde dice y colocamos x y donde dice x escribimos y: $y = 2x - 3 \;\Rightarrow\; x = 2y - 3$
- Despejamos la variable y: $x + 3 = 2y \;\Rightarrow\; y = \dfrac{x+3}{2}$



La función inversa está definida por

$g^{-1}: R \to R \,/\, g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

Observemos cómo g^{-1} invierte el efecto de g. La función g es la ley "dada x multiplique por dos y reste tres unidades" mientras que g^{-1} es "dada x sume tres unidades y divida por dos".

Las gráficas de la función g y la de su inversa g^{-1} resultan simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, a la recta $y = x$.

Ejemplo: Sea la ley $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$.

a) Complete la definición para que resulte una función que admita inversa.
b) Defina la función inversa.

a) Para determinar el dominio buscamos el mayor conjunto de números reales para los cuales podemos encontrar su imagen. En este caso el radicando debe ser positivo o nulo. Debemos considerar el conjunto de los números reales mayores o iguales que 3, es decir todos los valores de x que pertenecen al intervalo $[3, +\infty)$. Dado que la imagen de cada x del dominio es el resultado positivo de la raiz, el conjunto de imágenes es el de los número reales positivos con el cero (R_0^+). Si definimos $f : [3, \infty) \to R_0^+ / f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$ la función es biyectiva y admite inversa.

b) Para calcular analíticamente la inversa seguimos los pasos enunciados:

- Se intercambian las variables x e y entre sí:

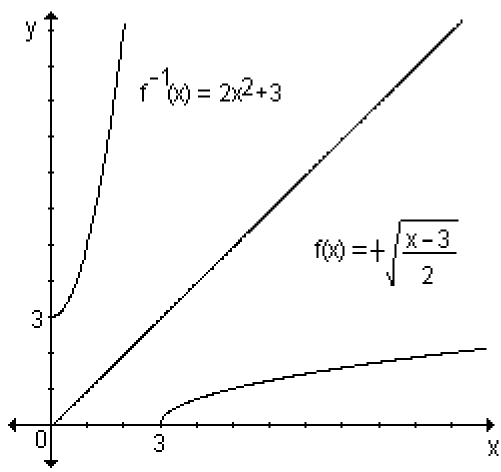
si $y = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$ resulta $x = \sqrt{\frac{y-3}{2}}$

- Se despeja la variable y:

Si $x = \sqrt{\frac{y-3}{2}} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y-3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = y - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2x^2 + 3$

La función inversa se define $f^{-1}: R_0^+ \to [3, \infty) / f^{-1}(x) = 2x^2 + 3$.

Gráficamente la inversa resulta simétrica respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



La función inversa f^{-1} invierte el efecto de f. Mientras que la función f está definida por la ley "dada x reste tres unidades, divida por dos y halle la raíz cuadrada positiva", la inversa f^{-1} se define por la ley "dada x eleve al cuadrado, multiplique por dos y sume tres unidades".

EJERCICIO

Determine si las siguientes funciones $f: R \to R$ admiten inversa y justifique. En caso afirmativo defina la función inversa.

$f_1 : x \to x^2 - 2$ $\qquad$ $f_2 : x \to -4x + 1$

$f_3 : x \to 4$ $\qquad$ $f_4 : x \to \dfrac{-x}{3}$

RESPUESTA

f_1 no es biyectiva (no es inyectiva ni sobreyectiva) y, por lo tanto, no admite inversa.

f_2 es biyectiva y admite inversa. f_2^{-1}: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$

f_3 no es biyectiva (ni inyectiva ni sobre) y, por lo tanto, no admite inversa.

f_4 es biyectiva y admite inversa. f_4^{-1} : $y = -3x$

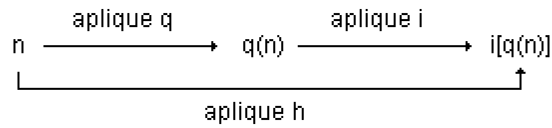
Composición de funciones

En numerosas situaciones una cantidad es función de una variable y esta a su vez resulta ser función de otra variable. Al utilizar las funciones de manera adecuada la cantidad original se puede expresar como función de la segunda variable. Este proceso recibe el nombre de composición de funciones porque la nueva función "se compone" de las funciones dadas.

Analicemos las siguientes situaciones:

- un metal se dilata o se contrae al cambiar la temperatura y la temperatura se modifica a medida que transcurre el tiempo. Podemos pensar entonces que la longitud de una barra metálica varía con el transcurso del tiempo. Dado que la longitud es función de la temperatura y la temperatura es función del tiempo decimos que la longitud es función del tiempo.
- los ingresos totales (i) que consigue un establecimiento maderero depende de la cantidad de unidades que se venden (q) y el número de unidades vendidas depende del número de empleados (n). En términos de función podemos pensar que, si el ingreso depende de la cantidad de unidades y la cantidad de unidades del número de empleados, decimos directamente que el ingreso es función del número de empleados.

Simbólicamente, este último ejemplo resulta:
n: número de empleados
q(n): cantidad de unidades que se venden
i(q): ingresos totales según la cantidad de unidades vendidas
En un diagrama de entrada – salida resulta:

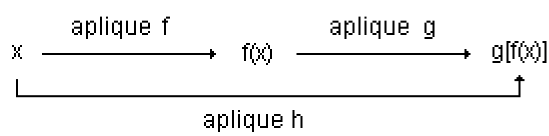


La función h(n) = i[q(n)] se puede plantear como:

- primero aplique la función q,
- luego aplique la función i.

Decimos que la función h resulta de *componer las funciones q con i*, o bien que h se obtiene de la *composición de q e i* o que h es *q compuesta con i.*

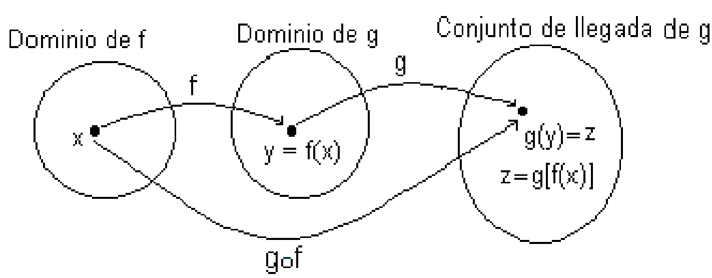
Debemos tener en cuenta que, bajo ciertas condiciones, es posible definir, a partir de dos funciones f y g, una nueva función llamada compuesta de ellas.
En general dadas dos funciones f y g elegimos un valor x en el dominio de f y determinamos su imagen. Si esta imagen pertenece al dominio de g estamos en condiciones de calcular a través de g, la imagen de f(x) es decir, podemos calcular g[f(x)]. La nueva imagen h(x) = g[f(x)] se obtiene de la composición de f y g y se simboliza g o f.
En un diagrama de entrada – salida:



Definición: Dadas dos funciones g y f, la función compuesta g o f está definida por (g o f)(x) = g[f(x)].

El dominio de g o f es el conjunto de todas las x en el dominio de f tales que f(x) esté en el dominio de g.
Podemos decir que (g o f)(x) está definida siempre que f(x) y g[f(x)] estén definidas.

El esquema muestra las relaciones entre f, g y g o f.



Para x en el dominio de f, se determina y = f(x) (esta imagen debe estar en el dominio de g) y luego se calcula g(y) = g[f(x)].
Tener en cuenta que para la función compuesta g o f se calcula primero f(x) y luego g[f(x)].
Una función compuesta es una función de función, es decir, se aplica una función a valores que resultan de otra función.

Nota: es importante tener en cuenta que la composición de funciones no es conmutativa y que (g o f)(x) no es igual a (f o g)(x). En muchos casos tampoco es posible hallar, dadas f y g, las dos composiciones dado que no se cumplen las condiciones exigidas para la composición.

Ejemplo: Dadas las funciones $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2 + 1$ y $g : R \to R \,/\, g(x) = 2x + 4$

a) Encuentre (f o g)(x) y determine su dominio.
b) Halle (g o f)(x) y establezca su dominio.
c) Calcule f[g(3)] por dos caminos distintos, es decir, utilizando las funciones por separado y a través de la función compuesta.

a) Podemos pensar en el siguiente diagrama:

$$x \ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique g}}} \ 2x + 4 \qquad\qquad x \ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique f}}} \ x^2 + 1$$

$$x \longrightarrow \boxed{\ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique g}}} \ 2x + 4 \ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique f}}}\ } \longrightarrow (2x + 4)^2 + 1$$

$$(f \text{ o } g)(x) \underset{\substack{\text{definición}\\ \text{de fog}}}{=} f[g(x)] \underset{\substack{\text{definición}\\ \text{de g}}}{=} f(2x+4) \underset{\substack{\text{definición}\\ \text{de f}}}{=} (2x+4)^2 + 1 = 4x^2 + 16x + 16 + 1$$

$f \text{ o } g : R \to R \,/\, (fog)(x) = 4x^2 + 16x + 17$

b) En el diagrama de entrada-salida resulta:

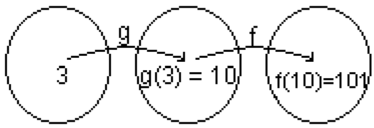
$$x \ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique f}}} \ x^2 + 1 \qquad\qquad x \ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique g}}} \ 2x + 4$$

$$x \longrightarrow \boxed{\ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique f}}} \ x^2 + 1 \ \boxed{\xrightarrow{\text{aplique g}}}\ } \longrightarrow 2(x^2 + 1) + 4$$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) + 4 = 2x^2 + 2 + 4 = 2x^2 + 6$

$g \circ f : R \rightarrow R \ / \ (g \circ f)(x) = 2x^2 + 6$

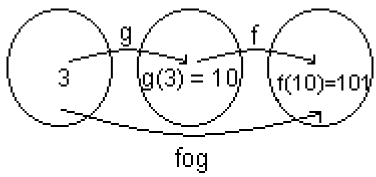
c) Para calcular f[g(3)] teniendo en cuenta las funciones por separado consideramos $g(3) = 2.3 + 4 = 10$ y luego $f(10) = 10^2 + 1 = 101$.



Si lo hacemos mediante la función compuesta debemos tener en cuenta que:

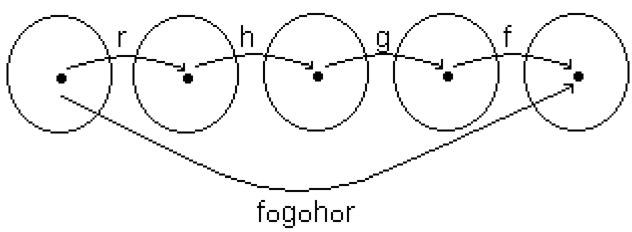
$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 16x + 17$

Entonces: $f[g(3)] = (f \circ g)(3) = 4.3^2 + 16.3 + 17 = 36 + 48 + 17 = 101$



Nota: Como hemos visto en este ejemplo $f[g(x)] \neq g[f(x)]$. Por lo tanto $f \circ g \neq g \circ f$, es decir, la composición de funciones no es conmutativa.

Nota: Se pueden componer más de dos funciones siempre que las imágenes de una se encuentren en el dominio de la otra.

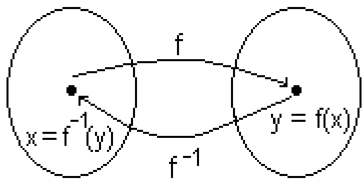


Función inversa y función compuesta

Dada una función f(x) que es biyectiva podemos, según vimos, hallar su inversa f^{-1} teniendo en cuenta que el dominio de f es el conjunto de imágenes de f^{-1} y el conjunto de imágenes de f es el dominio de f^{-1}. Sabemos que $f^{-1}[f(x)] = x$ para toda x que pertenece al dominio de f y $f[f^{-1}(x)] = x$ para todo elemento del dominio de f^{-1}.

Sabemos que la expresión $f^{-1}[f(x)]$ significa "aplique f^{-1} a lo que obtuvo de aplicar f " y, según lo visto en función compuesta, podemos decir que es la composición de la función f con la función f^{-1}.

La expresión $f[f^{-1}(x)]$ significa "aplique f a lo que obtuvo de aplicar f^{-1}" es decir el resultado de componer la función f^{-1} con la función f.



$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x$$

Ejemplo: Dada la función $f: R \to R \,/\, f(x) = 2x + 1$, halle su inversa y verifique que al componerla con la original resulta el mismo valor x, es decir:
$(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

La función f(x) admite inversa porque es biyectiva.
Para hallarla consideramos $y = 2x + 1$.
Intercambiamos las variables y despejamos y, resultando la expresión $y = \dfrac{x-1}{2}$

Luego $f: R \to R / f(x) = 2x + 1$ y $f^{-1}: R \to R / f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

Verificamos: $(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = 2.\dfrac{x-1}{2} + 1 = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(2x+1) = \dfrac{2x+1-1}{2} = x$

EJERCICIOS

1) Dada la función $f(x) = \sqrt{x+4}$ con dominio en el conjunto $[-4, \infty)$ y la función $g(x) = x^2$, encuentre la ley correspondiente a $(g \circ f)(x)$.
2) Dada la función definida por $f: R \to R \,/\, f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$. Halle su inversa y verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
3) Dadas las funciones $f: R \to R / f(x) = 2x + a$ y $g: R \to R / g(x) = bx$, halle los valores de a y b si se sabe que f corta al eje x en 2 y que $(g \circ f)(-1) = 3$.
4) Dadas las funciones $f: R \to R / f(x) = x^2 - 1$; $g: R \to R / g(x) = x + 3$, calcule $(g \circ f)(2 + a)$.
5) Sean las funciones $f: R \to R \,/\, f(x) = 2x + a$ y $g: R \to R \,/\, g(x) = \sqrt[3]{x-b}$.
a) Defina $(g \circ f)(x)$.
b) Calcule los valores de a y b sabiendo que $f(4) = 9$ y $(g \circ f)(12) = 3$.

RESPUESTAS

1) $(g \circ f)(x) = x + 4$

2) La función inversa se define $f^{-1}: R \rightarrow R \ / \ f^{-1}(x) = (x + 1)^3$

3) $a = -4,\ b = -\dfrac{1}{2}$

4) $(g \circ f)(2 + a) = 6 + 4a + a^2$

5) a) $g \circ f : R \rightarrow R \ / \ (g \circ f)\ (x) = \sqrt[3]{2x + a - b}$ **b)** $a = 1,\ b = -2$

Muchos problemas de las ciencias sociales, ciencias naturales, la economía, la medicina, y otros campos, pueden plantearse en términos de una relación funcional.

Un problema es toda situación con un objetivo a lograr, que requiere para su resolución, una serie de acciones que obligan a interpretar contenidos, invirtiendo tiempo, esfuerzo, ingenio, intuición y creatividad.

¿Cómo resolvemos un problema?

En el proceso de resolución de problemas, es posible establecer algunas pautas generales. Las que se presentan a continuación son una adaptación de las establecidas por *George Polya* en el libro *Cómo plantear y resolver problemas*. Se formulan también ciertas preguntas que ayudan a clarificar cada paso del proceso.

- COMPRENDER EL PROBLEMA. Luego de leerlo y asegurarse de que se ha comprendido, establecer las incógnitas, los datos, determinar las condiciones dadas y si es posible, realizar un gráfica en la que se destaquen los datos y las incógnitas.
  ¿Qué está tratando de encontrar? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? Ésta, ¿es suficiente para determinar la incógnita?
- CONCEBIR UN PLAN. Determinar una relación entre la información dada y las incógnitas que permita, con los recursos disponibles, encontrar la solución al problema.
  ¿Ha resuelto alguna vez un problema parecido? ¿Qué estrategias podría utilizar para resolver el problema? ¿Cómo llevar a cabo las estrategias seleccionadas? ¿Ha utilizado todos los datos? ¿Ha empleado la condición establecida?
- EJECUTAR EL PLAN. Al poner en práctica su plan, comprobar cada uno de los pasos.
  ¿Son correctos los pasos realizados?
- EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA.
  ¿Cuál es la respuesta al problema? ¿Puede verificar la solución obtenida? ¿Verifica el razonamiento?
- ELABORAR CONCLUSIONES. La solución que se acepta o rechaza permite llegar a una conclusión, la que resuelve el problema y determina el comienzo de una nueva investigación.
  ¿Cuál es la respuesta al problema? ¿Es razonable la respuesta?

Problema

> Una persona compró un televisor. Por pagarlo en cuotas le hicieron un recargo del 15 % sobre el precio original. Si pagó en total \$ 460, ¿cuál era el precio original del televisor?

COMPRENDER EL PROBLEMA

Identificación de la variable: lo que debemos averiguar es el precio original del televisor, lo representamos con x.

Identificación de datos: el precio aumentó un 15% y se pagó en total (precio original más recargo) \$ 460.

CONCEBIR Y EJECUTAR UN PLAN

Podemos traducir al lenguaje simbólico el enunciado del problema.

precio original más 15% del precio original es el nuevo precio

$$\underbrace{\text{precio original}}_{x}\ \underset{\downarrow\ +}{\text{más}}\ \underbrace{15\ \%}_{0,15}\ \underset{\downarrow\ .}{\text{del}}\ \underbrace{\text{precio original}}_{x}\ \underset{\downarrow\ =}{\text{es el}}\ \underbrace{\text{nuevo precio}}_{460}$$

Se obtiene la ecuación $x + 0,15x = 460$

Resolviéndola $1,15\,x = 460 \quad \Rightarrow \quad x = 460 : 1,15 \quad \Rightarrow \quad x = 400$

La solución de la ecuación es $x = 400$.

EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA Y ELABORAR CONCLUSIONES

Comprobando la solución obtenida en el enunciado del problema calculamos el 15% de 400 y resulta 60, cantidad que representa el recargo sobre el precio original en pesos. Al sumar esa cantidad a 400, resulta 460. Este valor concuerda con los datos del problema, de modo que el precio original del televisor era \$ 400.

Problema

> Un productor tiene una plantación de una hectárea con 40 naranjos. Cada uno de ellos produce 500 naranjas por año. Desea conocer cuál será la evolución de su producción si decide aumentar la cantidad de plantas en esa parcela. Para ello, encarga el estudio a un agrónomo. El profesional concluye que por cada planta que se incorpore, la producción de cada naranjo disminuirá en cinco unidades, dado que los nutrientes del suelo tienen un potencial limitado. Determine la expresión que describe la producción total de la chacra en función de la cantidad de naranjos que se agreguen.

Para resolver el problema podemos pensar en el siguiente esquema:

$$\xrightarrow[\text{cantidad de naranjos a agregar}]{x} \quad \begin{array}{c}\text{ley o regla}\\ f(x) = \ ?\end{array} \quad \xrightarrow[\text{producción total}]{y}$$

Si x es la cantidad de naranjos a agregar en la parcela, entonces (40 + x) es la cantidad total de naranjos.

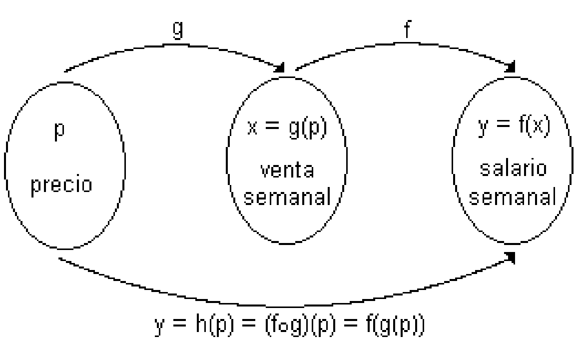
Si por cada planta que se agrega disminuye en cinco la cantidad de naranjas, $(500 - 5x)$ es la producción de naranjas por planta. La producción total de naranjas en la parcela es: $p(x) = (40 + x).(500 - 5x) = -5x^2 + 300x + 20\,000$.
Debemos tener en cuenta que x y $500 - 5x$ deben ser cero o enteros positivos dado que representan cantidad de árboles y de naranjas respectivamente.
Es decir, se debe cumplir $x \geq 0$ y $500 - 5x \geq 0$ de donde $x \leq 100$.
La expresión $p(x) = -5x^2 + 300x + 20\,000$ describe la producción total de la chacra en función de la cantidad de naranjos que se agreguen en la parcela, donde $0 \leq x \leq 100$.

Nota: Tener en cuenta que se siguieron todos los pasos descriptos para la resolución de problemas aunque no se hizo la descripción formal de cada uno de ellos.

Problema

La función $y = f(x) = 3x + 60$ expresa el salario semanal de un vendedor de acuerdo al número de unidades x vendidas cada semana. Además, según los resultados de un análisis, la cantidad vendida semanalmente por un vendedor depende del precio del producto. Esta función está dada por la regla: $x = g(p) = 120 - 1{,}5p$ donde p es el precio, expresado en pesos.
a) Defina la regla que representa el sueldo semanal en función del precio por unidad.
b) Si el precio por unidad es \$ 20, ¿cuánto gana semanalmente?
c) ¿Cuál es el precio por unidad si gana \$ 195 semanalmente?

a) El sueldo semanal depende del número de unidades vendidas semanalmente y éste depende a su vez del precio por unidad, el sueldo semanal puede expresarse directamente en función del precio por unidad. Es decir: $y = h(p)$
Como $y = f(x)$ y $x = g(p)$, entonces $y = h(p) = f(g(p)) = (f \circ g)(p)$



Para definir esta función, se sustituye x por $(120 - 1{,}5p)$ en la función f.

Por lo tanto: $y = h(p) = f(120 - 1{,}5p) = 3.(120 - 1{,}5p) + 60 = 360 - 4{,}5p + 60 \Rightarrow$
$y = h(p) = 420 - 4{,}5p$
b) Si el precio es \$ 20, sustituyendo p por 20 resulta:
$y = 420 - 4{,}5.20 \quad \Rightarrow \quad y = 330$
Si el precio del producto por unidad es \$ 20 gana semanalmente \$ 330.

c) Si gana semanalmente \$ 195, sustituyendo la variable y por 195 y despejando el precio p, se obtiene:

$195 = 420 - 4{,}5p \Rightarrow 4{,}5p = 420 - 195 \Rightarrow p = 225 : 4{,}5 \Rightarrow p = 50$

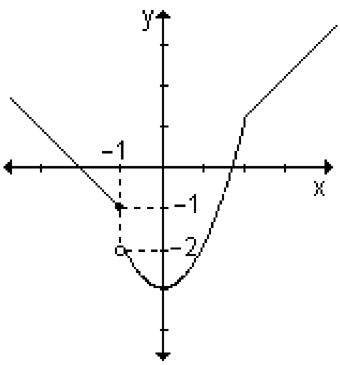
Si semanalmente gana \$ 195, el precio del producto es de \$ 50.

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.1 FUNCIONES

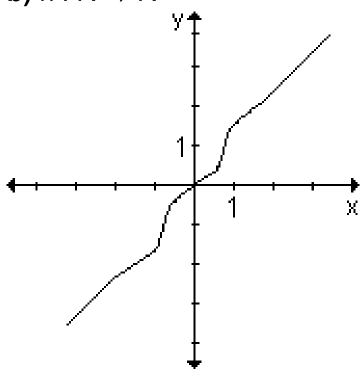
1) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 8\}$ y la función $f : A \to B$ que le asigna a cada elemento del dominio su cuadrado disminuido en uno. Escriba las imágenes de cada elemento, clasifique y represente gráficamente la función.

2) Dadas las siguientes gráficas, indique si representan o no una función. En caso afirmativo, clasifíquela.

a) $g : R \to R$



b) $h : R \to R$



3) Dada la función $f : N \to N \,/\, y = 2x$.

a) Clasifíquela.

b) Analice si admite función inversa.

c) Si no admite inversa, ¿cómo habrá que definir la función f para que resulte biyectiva y así admitir función inversa?

4) Dada la función $f : R \to R \,/\, f(x) = \dfrac{x+1}{2}$, analice si admite función inversa y en caso afirmativo, hállela y grafique ambas en un mismo sistema de coordenadas.

5) Dados los conjuntos $A = \{ x/x \in R \wedge -2 \le x < 10\}$ y $B = R$; grafique:

a) una función $f : A \to B$, inyectiva pero no sobreyectiva.

b) una función $f : A \to B$, constante.

6) Defina gráficamente una función $f : A \to R$ que sea inyectiva pero no sobre, si se sabe que el conjunto $A = \{x/x \in R \wedge 3 \le x \le 5 \}$

7) Dados los conjuntos $C = \{x/x \in R \wedge -5 \le x \le 3 \}$ y $D = \{x/x \in R \wedge -7 \le x \le 4\}$ y $g : C \to D$. Defina gráficamente una función:

a) inyectiva pero no sobreyectiva.

b) sobreyectiva pero no inyectiva.

c) biyectiva.

8) Dados las funciones $f : R \to R$ y $g : R \to R$, halle gof y fog en cada caso:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 3x$

9) **a)** Si $h(x) = x + m$ y $g(x) = px^2 - 1$ halle el valor de m y p sabiendo que $h(3) = 1$ y $(h \circ g)(-1) = 0$

b) Sea $f(x) = ax + 1$ y $g(x) = bx^2$; determine el valor de a y b si $f(1) = 2$ y $(g \circ f)(2) = 18$

10) Halle m tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, siendo $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x + m$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 1.1 FUNCIONES

1) Se cultivan bacterias en un cierto experimento. El tiempo t (en horas) que se requiere para que se duplique el número de bacterias (tiempo de generación) es función de la temperatura T (en grados Celsius) del cultivo. Si esta función está dada por $t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & \text{si} \quad 30 \le T \le 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & \text{si} \quad 36 < T \le 39 \end{cases}$

a) Determine el dominio de f.

b) Calcule f(30), f(36) y f(39).

2) El índice de contaminación atmosférica c en cierta ciudad varía durante el día de la siguiente manera:

$$c(t) = \begin{cases} 2 + 4t & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ 6 + 2t & \text{si} \quad 2 \le t < 4 \\ 14 & \text{si} \quad 4 \le t < 12 \\ 50 - 3t & \text{si} \quad 12 \le t < 16 \end{cases}$$ donde t es el tiempo en horas.

a) Represente gráficamente la función dada.

b) Indique cuáles son los niveles de contaminación para $t = 2$, $t = 4$ y $t = 14$

3) La Asociación Cooperadora de un establecimiento educativo analiza la posibilidad de adquirir un vehículo que facilite el transporte de alumnos para realizar actividades extra áulicas. El que le han ofrecido cuesta $ 18 000 y han estimado que demandará un gasto adicional promedio de $ 0,40 por kilómetro que recorra.

a) Determine la función matemática que represente el costo total C de esta operación en función de la cantidad x de kilómetros que se recorran.

b) Calcule el costo total estimado para los primeros 5 años si piensan recorrerse 50 000 Km.

c) ¿Cuál será el costo total si se recorren 100 000 Km.?

4) Un fabricante determina que el número total de unidades de producción al día q, es función del número de empleados, m, en donde $q = f(m) = \dfrac{40m - m^2}{4}$.

Los ingresos totales, r (en dólares), que reciben por la venta de q unidades están dados por la función g, en donde $r = g(q) = 40q$.

a) Determine (g o f)(m). ¿Qué es lo que describe esta función obtenida?

b) ¿Cuál será el ingreso que se obtenga si trabajan 12 empleados?

c) Si el fabricante desea que el ingreso total sea de 4000 dólares, ¿cuántos empleados deben trabajar?

5) Se han realizado estudios acerca de las relaciones estadísticas entre la posición social, la educación y los ingresos de las personas. Se utiliza S para denotar un valor numérico para la posición social con base en los ingresos anuales I y se supone que para cierta población $S = f(I) = 0{,}45\ (I - 1000)^{0{,}53}$.
Se considera, además, que los ingresos I de una persona son función del número de años de escolaridad E, en donde $I = g(E) = 7202 + 0{,}29\ E^{3{,}68}$.

a) Obtenga (f o g)(E) e indicar qué es lo que esta función describe.

b) Determine cuál es el índice correspondiente a la posición social de una persona que no ha concurrido nunca a un establecimiento educativo.

6) Una fábrica estima que el costo y (en pesos) para producir u ladrillos semanales está dado por $y = 0{,}1u + 50$. El número de ladrillos producidos por semana depende a su vez del número de obreros x empleados en la producción, siendo $u = 5000x - 4000$.

a) Exprese el costo como función del número de obreros.

b) Si la fábrica cuenta con 25 obreros, ¿cuántos ladrillos se producen por semana? ¿a qué costo?

7) Después de t horas de operación, una empresa ha ensamblado una cantidad x de segadoras de pasto de motor, donde $x = f(t) = 20t - \frac{1}{2}t^2$, siendo $0 \leq t \leq 100$. Sea C el costo de fabricación de esas x unidades (en dólares), dado por $C(x) = 3000 + 80x$.

a) Exprese el costo de fabricación como función del número de horas de ensamble.

b) ¿Cuál es el costo de las primeras dos horas de operación?

c) Si el costo de fabricación es 3000 dólares, ¿cuántas horas le demanda esa operación?

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 1.1 FUNCIONES

1) Sea el conjunto $A = \{x/x \in Z \wedge |x - 1| \leq 1\}$ y la función $g : A \to R$ definida por $g(x) = x - 2$. El conjunto imagen de g es:

a) {–2, –1, 0} **b)** {0, 1, 2}

c) {–2, –1} **d)** ninguno de los anteriores

2) Si la función $f(x) = x^2 - 3$, entonces f(3 + h) es igual a:

a) $h^2 + 6$ **b)** $h^2 + 2h$ **c)** $h^2 + 6h + 6$ **d)** $h^2 + 3$

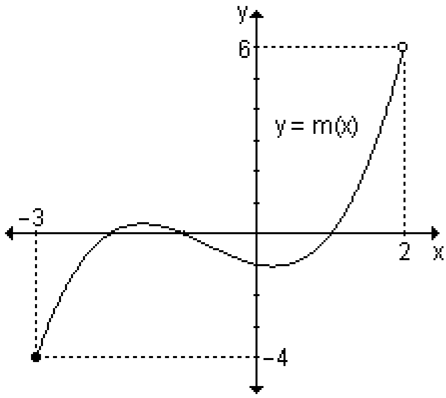
3) Sea la función $g(x) = \frac{2x}{x+1}$. Si $n \in Z^+$, entonces $g\left(\frac{1}{n}\right)$ es igual a:

a) 1 **b)** $\dfrac{2n}{n+1}$ **c)** $\dfrac{2}{1+n}$ **d)** $\dfrac{2}{1+n^2}$

4) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ es:

a) $R - \{1, 2, -2\}$ **b)** $R - \{1\}$ **c)** R **d)** $R - \{2, -2\}$

5) El conjunto de imágenes de la función $y = m(x)$ dada gráficamente es:



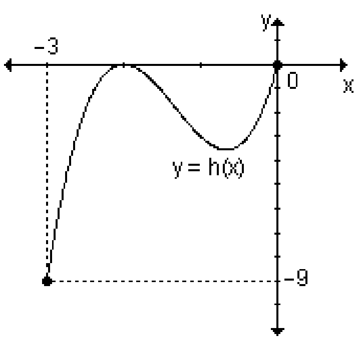
a) $CI = [-3, 2)$

b) $CI = [-3, 2]$

c) $CI = [-4, 6)$

d) $CI = [-4, 6]$

6) El dominio de la función $y = h(x)$ dada gráficamente es:



a) $D = [-3, 0]$

b) $D = [-9, 0]$

c) $D = [0, -3]$

d) $D = [0, -9]$

7) La función que a cada número real le asigna su cuadrado aumentado en cuatro unidades es:

a) $(x + 4)^2$ **b)** $x^2 + 4$ **c)** $x^2 + 16$ **d)** ninguno de los anteriores

8) La función $h(x) = x^2$ admite inversa si está definida en los conjuntos:

a) $R \to R$ **b)** $R^+ \to R$ **c)** $R_0^+ \to R_0^+$ **d)** $R \to R - \{0\}$

9) Sea la función $f : R \to R \,/\, f(x) = 2x - 4$. Su función inversa es:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} - 2$ **b)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + 4$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{2}$ **d)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + 2$

10) Sean las funciones $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2 + 2$ y $g : R \to R \,/\, g(x) = 2x$. El resultado de $(f \circ g)(x)$ es:

a) $4x^2 + 4$ **b)** $2x^2 + 4$ **c)** $4x^2 + 2$ **d)** $2x^2 + 2$

1.2 Funciones escalares

Ampliaremos el estudio de las funciones. Nos interesan aquí aquellas cuyo dominio y conjunto de llegada son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman *"funciones reales de una variable real"* o *"funciones escalares".*

$$f : A \rightarrow B \text{ es una función escalar} \Leftrightarrow A \subset R \wedge B \subset R$$

Las funciones escalares se pueden clasificar según el tipo de operaciones que se realizan sobre la variable en "*algebraicas y trascendentes*".
Llamamos funciones algebraicas a aquellas en que la variable está afectada a las operaciones: suma, resta, producto, cociente, potencia y raíz. En cualquier otro caso la función recibe el nombre de trascendente. A las funciones algebraicas las podemos clasificar en: *racionales* e *irracionales*. En las racionales la variable está afectada a todas las operaciones algebraicas con excepción de la radicación. Si es irracional, sobre la variable se efectúan toda clase de operaciones algebraicas. Las funciones algebraicas racionales a su vez se clasifican en *enteras* y *fraccionarias*. Las primeras son del tipo polinomios y las segundas, cociente de polinomios.
Las funciones trascendentes se clasifican en: trigonométricas, exponenciales, hiperbólicas, logarítmicas, trigonométricas inversas, hiperbólicas inversas. Podemos resumir lo expresado en el siguiente cuadro:

$$\text{Funciones escalares} \left\{ \begin{array}{l} \text{Algebraicas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Racionales} \left\{ \begin{array}{l} \text{Enteras} \\ \text{Fraccionarias} \end{array} \right. \\ \\ \text{Irracionales} \end{array} \right. \\ \\ \text{Trascendentes} \left\{ \begin{array}{l} \text{Trigonométricas} \\ \text{Exponenciales} \\ \text{Logarítmicas} \\ \text{Hiperbólicas} \\ \text{Trigonométricas inversas} \\ \text{Hiperbólicas inversas} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ejemplos: Clasifique las siguientes funciones de acuerdo a las operaciones que afectan a la variable independiente:

a) $f(x) = (2x - 1)^{-3}$

Al ser el exponente negativo, se invierte la base y resulta: $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^3}$.

Como las operaciones que afectan a la variable son producto, resta y división, se trata de una función escalar algebraica racional fraccionaria.

b) $g(x) = \frac{3}{2}x - x^4$

Las operaciones que afectan a la variable son resta y potencia de exponente natural, por lo tanto, g(x) es una función escalar algebraica racional entera.

c) $h(x) = \log_2 (3x+4)$

La variable está afectada por un logaritmo. En consecuencia, h(x) es una función escalar trascendente logarítmica.

d) $m(x) = (x-5)^{\frac{1}{2}}$

En esta función se presenta un exponente fraccionario, que es lo mismo que plantear $m(x) = \sqrt{x-5}$. La función m(x) resulta una función escalar algebraica irracional.

e) $r(x) = 7^{x^2-1}$

La variable se encuentra en el exponente, se trata de una función exponencial de base 7. Corresponde a una función escalar trascendente exponencial.

f) $t(x) = \cos(3x - 1)$

La variable está afectada por el coseno. Por lo tanto, la función t(x) es escalar trascendente trigonométrica.

EJERCICIOS

1) Clasifique las siguientes funciones según las operaciones que afectan a la variable independiente.

a) $y = \text{sen}(x - 3)$ **b)** $y = \sqrt{x} - 3$ **c)** $y = x^3 - 3x + 8$

d) $y = \frac{2x+4}{x-1}$ **e)** $y = \ln(x^2 + 1)$ **f)** $y = (x - 4)^{-2}$

2) Determine el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 + 9$ **b)** $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-4}$

c) $y = +\sqrt{x-3}$ **d)** $y = \frac{1}{x^2-16}$

3) Complete la definición para que resulte función:

$g : .... \to R \,/\, x \to \frac{6}{\sqrt{x^2-4}}$

RESPUESTAS

1) a) Función escalar trascendente trigonométrica; **b)** Función escalar algebraica irracional; **c)** Función escalar algebraica racional entera; **d)** Función escalar algebraica racional fraccionaria; **e)** Función escalar trascendente logarítmica; **f)** Función escalar algebraica racional fraccionaria

2)a) $D = R$

b) $D = \{x/x \in R,\ x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 2\}$

c) $D = \{x/x \in R,\ x \geq 3\}$

d) $D = \{x/x \in R \wedge x \neq \pm 4\}$

3) $D = \{x/x \in R \wedge x < -2 \vee x > 2\}$

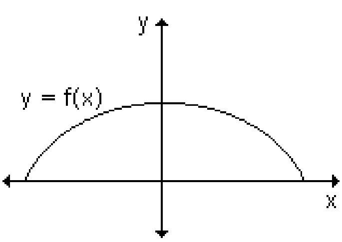
Las funciones describen fenómenos. Para representar adecuadamente un fenómeno o una situación, tenemos que elegir las variables que intervienen y seleccionar adecuadamente las unidades en las que se expresan cada una de ellas.

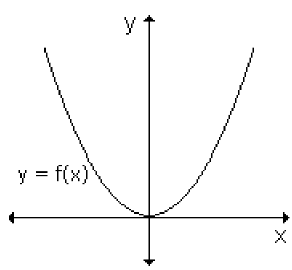
La gráfica de una función permite observar qué valores toma una variable respecto de la otra y seguir la evolución del fenómeno en forma global. De ella se obtiene mucha información sobre su comportamiento. Resulta muy importante entonces analizar las características de las funciones que nos permitan obtener sus gráficas de manera más fácil como así también se torna totalmente necesario aprender a interpretarlas adecuadamente si se presentan a través de sus gráficas.

Función par: es aquella que toma el mismo valor en el punto x y en el –x.

$$f \text{ es par} \Leftrightarrow \forall\ x : f(x) = f(-x)$$

El gráfico de una función par es simétrico respecto al eje de ordenadas.

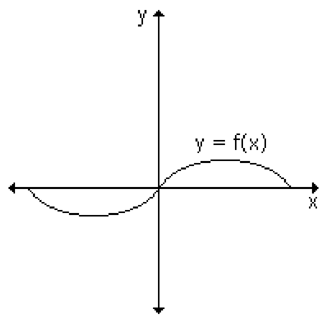


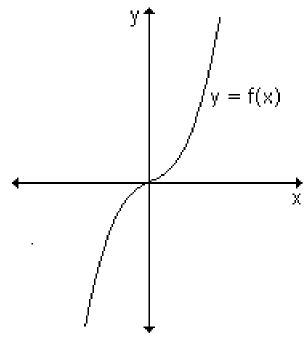


Función impar: a valores opuestos de x corresponden valores opuestos de la función.

$$f \text{ es impar} \Leftrightarrow \forall\ x : f(-x) = -f(x) \text{ o bien } \forall\ x : f(x) = -f(-x)$$

El gráfico de una función impar es simétrico respecto al origen de coordenadas.





Observación: existen funciones que no son pares ni impares.

Nota: Para estudiar la paridad de la función obtenemos la expresión para la función evaluada en –x y la comparamos con la misma evaluada en x y con la opuesta de ésta.

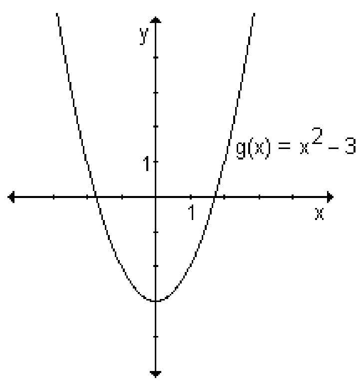
Ejemplo: Determine la paridad de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los reales.

a) $g(x) = x^2 - 3$

$g(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$

Observamos que: $g(-x) = g(x)$, es decir, la función es par.

La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas.



b) $f(x) = 2x^3 - 2x$

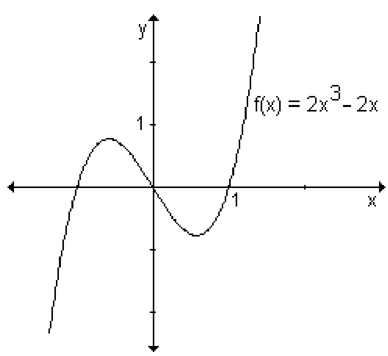
$f(-x) = 2.(-x)^3 - 2(-x) = 2.(-x^3) + 2x = -2x^3 + 2x$

$-f(x) = -(2x^3 - 2x) = -2x^3 + 2x$

Resulta: $f(-x) = -f(x)$.

Por lo tanto la función es impar.

La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.



c) $h(x) = x^3 + x^2$

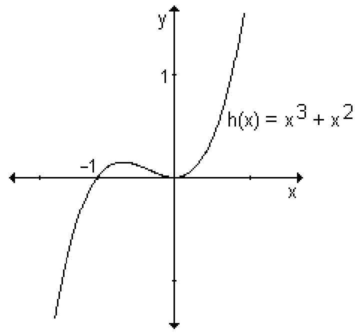
$h(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$

$-h(x) = -(x^3 + x^2) = -x^3 - x^2$

Pero:

$h(-x) \neq -h(x)$ y además $h(-x) \neq h(x)$

Podemos concluir que la función $h(x) = x^3 + x^2$ no es impar ni par.



EJERCICIO

Determine si cada una de las siguientes funciones es par o impar.

a) $f(x) = -3x^2 - 5x$ **b)** $h(x) = x^5 - 6$

c) $g(x) = x^3 - 3x$ **d)** $i(x) = -3x^2$

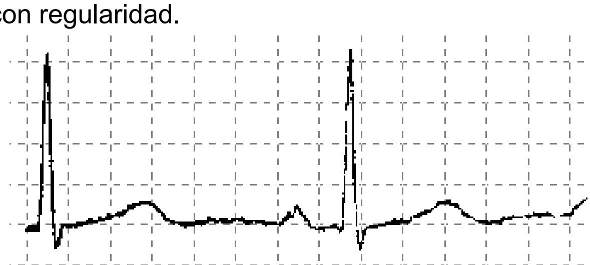
RESPUESTA

a) No es par ni impar. **b)** No es par ni impar. **c)** Impar. **d)** Par.

Función periódica

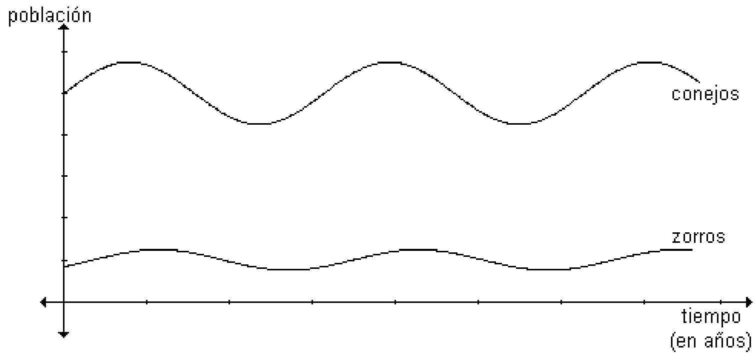
En la naturaleza se presentan muchos fenómenos que se repiten de la misma forma con el paso del tiempo, por ejemplo, la sucesión de los días y las noches, los ciclos lunares, las mareas, etc. Este tipo de fenómenos se llaman periódicos. El electrocardiograma es un estudio que registra la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo. En el electrocardiograma del gráfico se observa que una parte de él se repite con regularidad.

Cada cierta cantidad de cuadraditos se vuelve a repetir la misma curva. Es un ejemplo de una función aproximadamente periódica que produce nuestro propio cuerpo.



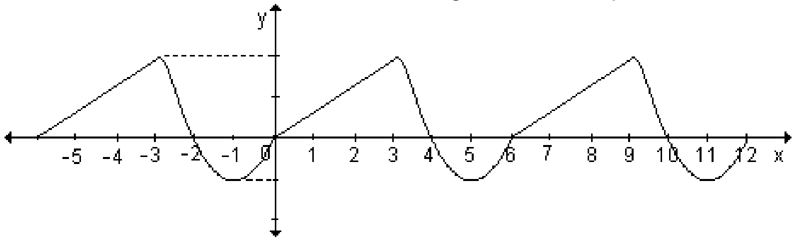
También lo es el electroencefalograma que mide la actividad bioeléctrica del cerebro, o también la función que registra la entrada y salida de aire de los pulmones.

En un ecosistema de presa – depredador, el número de depredadores y el número de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con zorros como depredadores y conejos como presa, las poblaciones de conejos y de zorros se modelan según las funciones definidas gráficamente. Cuando el número de conejos es grande, llegan al lugar zorros para alimentarse. Cuando queda poco alimento, se van a otra comunidad, los conejos entonces se reproducen y el fenómeno vuelve a repetirse.



Definición: f es periódica de período c si $\forall\ x \in D_f : f(x + c) = f(x),\ c \neq 0$

Ejemplo: Dada la función $f : R \rightarrow R$ definida gráficamente por:



a) Determine su conjunto de imágenes y su período.
b) Indique en forma genérica los puntos donde la función alcanza su valor máximo, su valor mínimo y sus ceros.
c) Si $f(1) = 0,5$, ¿en qué otros valores de x alcanza la misma imagen?

a) La función se extiende sobre el eje de ordenadas entre –1 y 2, por lo tanto, el conjunto de imágenes es CI = [–1, 2]. Como la forma de la gráfica se repite exactamente cada 6 unidades, entonces el período es 6.
b) La función alcanza su valor máximo en, por ejemplo, x = 3. Como la función es periódica alcanza de nuevo el valor máximo cuando le sumamos 6 (el período). Podemos seguir obteniendo los valores de x donde se alcanza el máximo sumando a x dos veces 6 (dos períodos), tres veces 6, etc. De igual forma si queremos obtener los puntos a la izquierda de x = 3 donde se alcanza el máximo restamos una vez 6, obteniendo x = –3, dos veces seis, tres veces 6, etc.
A partir de x = 3 podemos escribir si avanzamos hacia la derecha:

$x = 3 + 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 6.1 \quad \Rightarrow \quad x = 9$
$x = 3 + 6 + 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 6.2 \quad \Rightarrow \quad x = 15$
$x = 3 + 6 + 6 + 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 6.3 \quad \Rightarrow \quad x = 21$

Si nos corremos hacia la izquierda:

$x = 3 - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 6.(-1) \quad \Rightarrow \quad x = -3$
$x = 3 - 6 - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 6.(-2) \quad \Rightarrow \quad x = -9$
$x = 3 - 6 - 6 - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 6.(-3) \quad \Rightarrow \quad x = -15$

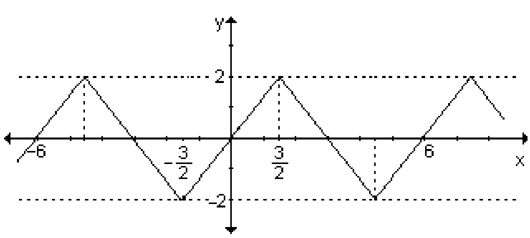
Observando la columna del medio, podemos concluir que la forma genérica de x donde se alcanza el valor máximo es $x = 3 + 6k$, $k \in Z$.
El máximo valor de la función es 2.
De la misma manera podemos analizar dónde se alcanza el valor mínimo. La función alcanza una vez el valor mínimo en $x = 5$. A partir de ahí obtenemos todos los puntos.

$x = 5 + 6$	$\Rightarrow$	$x = 5 + 6.1$	$\Rightarrow$	$x = 11$
$x = 5 + 6 + 6$	$\Rightarrow$	$x = 5 + 6.2$	$\Rightarrow$	$x = 17$
$x = 5 + 6 + 6 + 6$	$\Rightarrow$	$x = 5 + 6.3$	$\Rightarrow$	$x = 23$
$x = 5 - 6$	$\Rightarrow$	$x = 5 + 6.(-1)$	$\Rightarrow$	$x = -1$
$x = 5 - 6 - 6$	$\Rightarrow$	$x = 5 + 6.(-2)$	$\Rightarrow$	$x = -7$

Los valores de x donde alcanza el valor mínimo son $x = 5 + 6k$, $k \in Z$.
El valor mínimo de la función es $y = -1$.
Haciendo el mismo análisis escribimos los ceros como $x = 6k$ y $x = 4 + 6k$ donde $k \in Z$.
c) $f(1) = 0{,}5$ significa que la imagen de $x = 1$ es 0,5. En forma genérica todos los valores de x cuya imagen es 0,5 se pueden escribir como $x = 1 + 6k$, $k \in Z$.

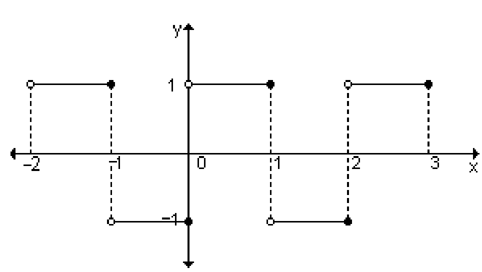
EJERCICIOS

1) La función $f: R \to R$, definida gráficamente por:



a) ¿Es periódica? ¿Cuál es el período de la función?
b) ¿Cuál es el conjunto imagen?
c) ¿Cuál es el valor mínimo? Escriba en forma genérica en qué valores de x lo alcanza.
d) ¿Cuál es el valor máximo? Escriba en forma genérica en qué valores de x lo alcanza.

2) Observe la gráfica de g(x) y conteste:
a) ¿Cuál es su período?
b) ¿Cuál es el valor máximo de la función? Indique en forma genérica en que valores de x se alcanza.
c) ¿Cuál es el valor mínimo de la función? Indique en forma genérica en que valores de x se alcanza.
d) Calcule: **i)** g(3) **ii)** g(2)



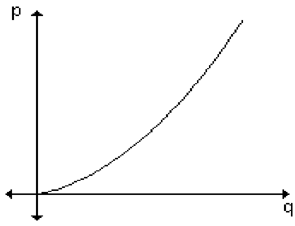
RESPUESTAS
1)a) f es una función periódica de período 6. **b)** $CI = [-2, 2]$.

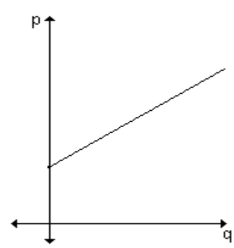
c) El valor mínimo es –2 y se alcanza en $x = \frac{9}{2} + 6k$; $k \in Z$.

d) El valor máximo es 2 y se alcanza en $x = \frac{3}{2} + 6k$; $k \in Z$.

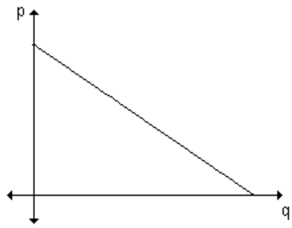
2)a) $p = 2$ **b)** $y = 1$; $2k < x \leq 2k+1$; $k \in Z$ **c)** $y = -1$; $2k+1 < x \leq 2k+2$; $k \in Z$
d)i) 1 **ii)** –1

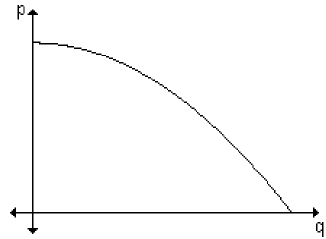
Entre las funciones que se utilizan en economía para hacer modelos de situaciones de mercado se estudian las funciones de oferta y de demanda. Resultan ejemplos interesantes de una función creciente y una función decreciente.
Función de oferta: una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad. Podemos decir que, en respuesta a distintos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún período específico. Cuanto mayor es el precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer. Al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida. Esto nos permite asegurar que la función de oferta es una función creciente. Si p representa el precio por unidad y q la cantidad ofrecida correspondiente entonces a la ley que relaciona p y q se la denomina función de oferta y a su gráfica se la conoce como gráfica de oferta.
A esta función la simbolizamos $p = o(q)$ donde sabemos que p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se ofrece en el mercado.





Función de demanda: La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandada por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda. En general, si el precio aumenta, se produce una disminución de la cantidad demandada del artículo porque no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por adquirirlo. La demanda disminuye al aumentar el precio por eso esta es una función decreciente como lo observamos en los ejemplos gráficos. Podemos asegurar entonces que para cada precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandan en determinado período. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente en unidades está dada por q la ley que los relaciona se denomina función de demanda. A su gráfica se la llama gráfica de demanda.





A esta función la simbolizamos $p = d(q)$ donde sabemos que p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se demanda en el mercado.

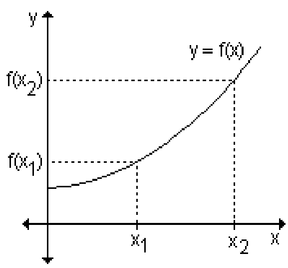
Nota: Resulta claro que, tanto la función oferta como la función demanda, no deberían graficarse con trazo continuo dado que la cantidad de productos son números enteros. Sin embargo, a los fines prácticos, para poder realizar mejores análisis de dichas funciones, es conveniente hacerlo teniendo presente esta situación al momento de la elaboración de conclusiones. Esta tarea de graficar con trazo continuo funciones que no lo son es una práctica común en muchas aplicaciones.

Función creciente: una función $f: A \to B$ es creciente en un intervalo I incluido en A si y sólo si $\forall\, x_1 \in I, \forall\, x_2 \in I$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

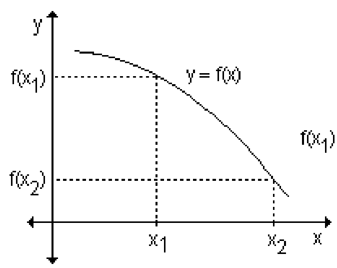
Función decreciente: una función $f : A \to B$ es decreciente en un intervalo I incluido en A si y sólo si $\forall\, x_1 \in I, \forall\, x_2 \in I$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Función constante: una función $f : A \to B$ es constante en un intervalo I incluido en A si y sólo si $\forall\, x_1 \in I, \forall\, x_2 \in I$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

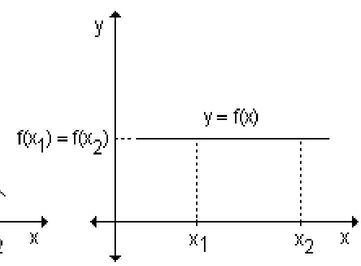
Gráficamente:



Función creciente



Función decreciente



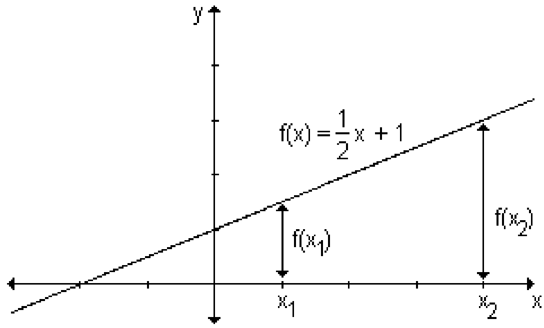
Función constante

Ejemplos: Analice si las funciones dadas son crecientes o decrecientes:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ **b)** $g(x) = -x^3$ **c)** $h(x) = 3$

Consideremos dos números reales del dominio, x_1 y x_2 que verifican $x_1 < x_2$.

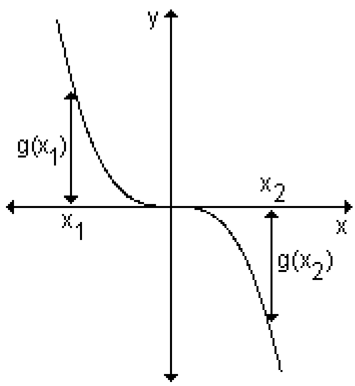
a) Aplicando propiedades de las desigualdades determinamos si $f(x_1) < f(x_2)$ ó $f(x_1) > f(x_2)$.
Multiplicando miembro a miembro por $\frac{1}{2}$ el sentido de la desigualdad no varía:
$\frac{1}{2}x_1 < \frac{1}{2}x_2$.



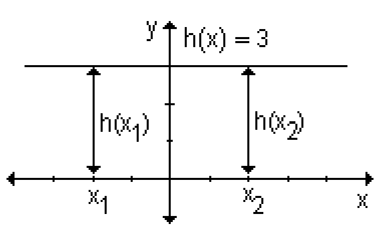
Tampoco varía si sumamos 1 a ambos miembros: $\frac{1}{2}x_1 + 1 < \frac{1}{2}x_2 + 1$

Observemos que el primer miembro de la desigualdad corresponde a $f(x_1)$ mientras que el segundo a $f(x_2)$. Resulta $f(x_1) < f(x_2)$.
Dado que se cumplió que si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, la función es creciente.

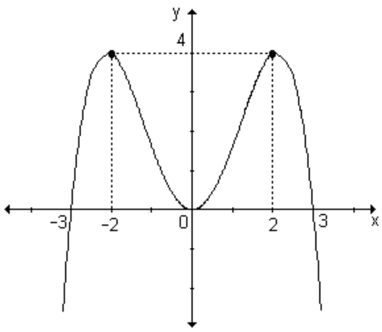
b) Sea $x_1 < x_2$, elevando al cubo a ambos miembros de una desigualdad, ésta mantiene su sentido: $x_1^3 < x_2^3$.
Sin embargo cambia el sentido si se multiplican ambos miembros por un número negativo, es decir $-x_1^3 > -x_2^3$, obteniendo $g(x_1) > g(x_2)$. De esta manera, si $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$, la función es decreciente



c) Si tomamos $x_1 < x_2$ y calculamos sus imágenes a través de la función h resulta $h(x_1) = h(x_2)$. La función es constante.



Ejemplo: Dada la función, cuya gráfica se muestra, responda:



a) ¿Es par? Justifique la respuesta.
b) ¿Cuáles son sus ceros?
c) ¿Dónde es positiva? ¿Dónde es negativa?
d) ¿Para qué intervalo de x, la gráfica de la función es creciente? ¿Para qué intervalo es decreciente?

a) Observamos que la gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas, o sea $f(x) = f(-x)$ para todo valor del dominio, por lo tanto la función es par.
b) Sus ceros son $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$, pues son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x.
c) Como las imágenes de la función están por debajo del eje x, la función es negativa en $(-\infty,-3) \cup (3, \infty)$. Como las imágenes están por encima del eje x, las función es positiva en $(-3, 0) \cup (0, 3)$.
d) Es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y es decreciente en $(-2, 0) \cup (2, \infty)$.

EJERCICIO

Determine si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en todo su dominio.

a) $f(x) = -6 + 2x$ **b)** $g(x) = -x^3 - 5$
c) $h(x) = 2x^5 + 2$ **d)** $i(x) = 6$

RESPUESTA
a) Creciente **b)** Decreciente
c) Creciente **d)** Ni creciente ni decreciente

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.2 FUNCIONES ESCALARES

1) Determine el dominio de las siguientes funciones. Clasifíquelas según las operaciones que afectan a la variable independiente.

a) $y = \dfrac{2x}{3x+1}$ **b)** $y = \ln(2x - 6)$

c) $y = \sqrt{x^2 - 16}$ **d)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 4}$

2) Analice si cada una de las siguientes funciones es par o impar.

a) $f : R \to R \,/\, x \to 3x^3 - 2x^2$ **b)** $f : R \to R/\ y = -2x^4 + 3x^2$

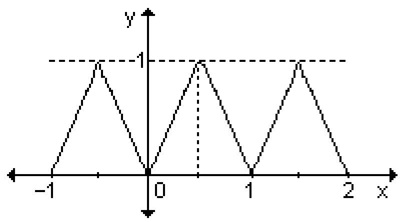
c) $f : R - \{0\} \to \to R / f(x) = \frac{1}{x}$ **d)** $f : R - \{0\} \to \to R / f(x) = \frac{1}{|x|}$

3) Analice si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $y = -3x + 1$ **b)** $y = x^3 - 4$

c) $y = -2x^3 + 1$ **d)** $y = 5 + 2x$

4) Dada la siguiente función f periódica:



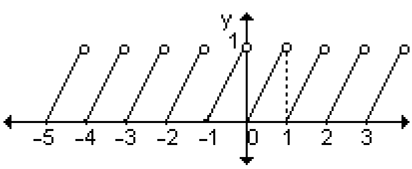
a) Indique su período.

b) ¿Cuál es el valor máximo de la función? Indique en forma genérica en que valores de x se alcanza.

c) ¿Cuál es el valor mínimo de la función? Indique en forma genérica en que valores de x se alcanza.

d) Determine: **i)** $f\left(\frac{7}{2}\right)$ **ii)** f(100)

5) Observe la gráfica de la función periódica f y conteste:



a) ¿Cuál es su período?

b) ¿Cuál es su valor mínimo? Escriba en forma genérica para qué valores de x se alcanza.

c) Si $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ¿Qué otros valores tienen la misma imagen? Escríbalos en forma genérica.

AUTOEVALUACIÓN Nº 1: FUNCIONES. FUNCIONES ESCALARES

1) Señale cuál de las expresiones siguientes permite deducir que f no es función. Justifique.

a) Existe algún elemento m tal que $f(m) = f(-m)$.

b) Existe algún elemento m tal que $f(m) \neq f(-m)$.

c) Existen algunos elementos m y n tal que $f(m) \neq f(n)$ siendo $m = n$.

d) Existen algunos elementos m y n tal que $f(m) = f(n)$ siendo $m = n$.

2) Sea la función $g : R \to R_0^+ / x \to \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -2 \\ b - x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Determine los valores de a y de b si $g(-2) = 0$ y $g(3) = 2$.

b) Para los valores de a y de b hallados realice la gráfica.

c) Indique si es inyectiva o sobreyectiva.

d) ¿Qué función algebraica queda definida en cada tramo?

3) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x < 5 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$:

a) Represéntela gráficamente.

b) Defina su dominio y su conjunto de imágenes.

c) ¿Admite inversa? Justifique la respuesta.

d) Halle f(3) ¿Existe algún otro valor de x tal que su imagen coincida con f(3)?

4) Dada la ley $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$:

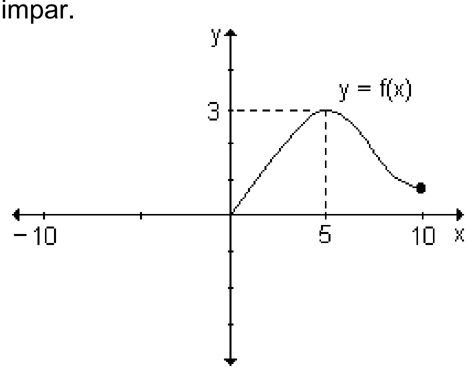
a) Indique el dominio para que sea función y su conjunto de imágenes.

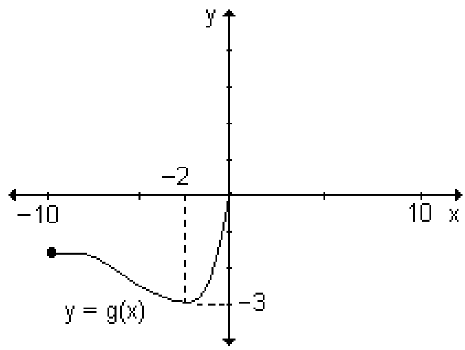
b) ¿Qué sucede cuando x crece indefinidamente? ¿Qué sucede cuando x tiende a cero?

c) El valor –4, ¿pertenece al conjunto de imágenes? En caso afirmativo, ¿de qué valor del dominio es imagen?

d) ¿Admite inversa la función dada? Justifique.

5)a) Complete las gráficas de f(x) y g(x) para $-10 \leq x \leq 10$ si f(x) es par y g(x) es impar.





b) Clasifique cada una de las funciones en:

- Inyectiva, suryectiva y biyectiva.
- Creciente, decreciente. Justifique las respuestas.

c) Calcule f(–5) y g(2).

6) Una empresa privada de transporte puede trabajar con bultos de 25 kg. como máximo y se compromete a realizar entrega inmediata. Su tarifa es función de los kilogramos recibidos según se describe:

Tarifa	*Peso*
$ 4	3 kg. o menos
$ 4,50 más un adicional de $ 0,50 por kg.	de 3 a 15 kg.
$ 7 más un adicional de $ 0,30 por kg.	más de 15 kg.

a) Indique el dominio de la función.

b) Defina la función encontrando la expresión matemática en cada tramo.

c) Grafique y establezca el conjunto de imágenes.

d) ¿Es una función inyectiva? Justifique.

7) Sea la función $f : R \to R \,/\, f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$. Halle su inversa y verifique que $(f o f^{-1})(x) = x$.

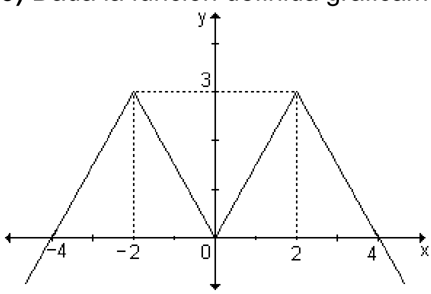
8) El área s (en m^2) de un globo inflado con aire caliente está dado por $s(r) = 4\pi r^2$, donde r es el radio del globo expresado en metros. Si el radio r decrece con el tiempo t (en segundos) según la ley $r(t) = \frac{2}{3}t^3$, siendo $t \geq 0$.

a) Determine el área s del globo como una función del tiempo t.

b) Calcule el área del globo inflado con aire caliente durante tres segundos.

c) ¿Cuántos segundos deben transcurrir para que el área s sea $\frac{1024}{9}\pi$ m^2?

9) Dada la función definida gráficamente responda:



a) ¿es par? Justifique la respuesta.
b) ¿cuáles son sus ceros?
c) ¿dónde es creciente y dónde decreciente?
d) ¿dónde es positiva y dónde negativa?

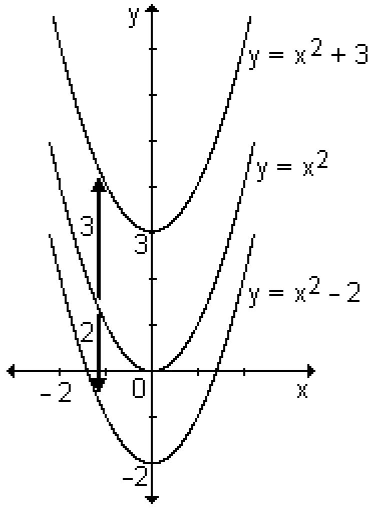
10) Sean las funciones $g(x) = ax + 1$ y $h(x) = b\sqrt{x}$. Determine los valores de a y b de modo que $(hog)(4) = 9$ y $h(1) = 3$.

1.3 Gráficas de funciones según distintas transformaciones

A partir de la gráfica de la función $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2$ analizaremos las características de las gráficas de las funciones $g(x) = f(x) + 3 = x^2 + 3$ y de $h(x) = f(x) - 2 = x^2 - 2$.

Calculemos como ejemplo, algunos valores particulares:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 3$	$h(x) = x^2 - 2$
–3	9	9 + **3** = 12	9 – **2** = 7
–2	4	4 + **3** = 7	4 – **2** = 2
–1	1	1 + **3** = 4	1 – **2** = –1
0	0	0 + **3** = 3	0 – **2** = –2
1	1	1 + **3** = 4	1 – **2** = –1
2	4	4 + **3** = 7	4 – **2** = 2
3	9	9 + **3** = 12	9 – **2** = 7



Para obtener la gráfica de $g(x) = x^2 + 3$ se suma tres unidades a la ordenada de cada uno de los puntos de la gráfica de $y = x^2$. Esto equivale a decir que la gráfica de la función $y = x^2$ se traslada tres unidades hacia arriba.
De la misma manera, para obtener la gráfica de $h(x) = x^2 - 2$ se restan dos unidades a cada una de las ordenadas de los puntos de la gráfica que se toma como base y por lo tanto la gráfica se encuentra desplazada dos unidades hacia abajo respecto de la gráfica de $y = x^2$.

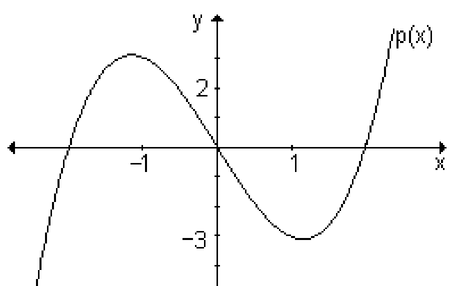
En general, dada la gráfica de la función $y = f(x)$:

Para trazar la gráfica de:	se debe trasladar la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x) - c$	c unidades hacia abajo
$y = f(x) + c$	c unidades hacia arriba

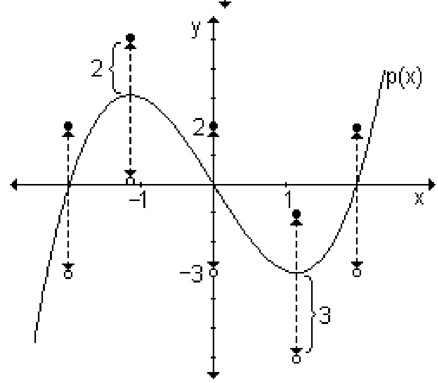
siendo $c > 0$

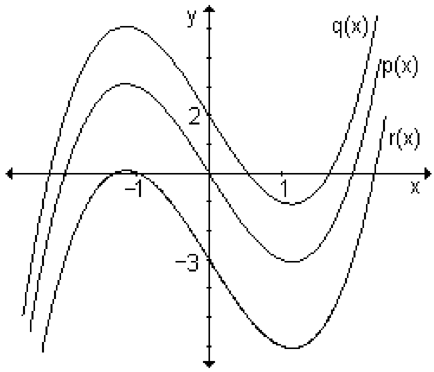
Esto se llama *traslación vertical de las gráficas.*

Ejemplo: Teniendo en cuenta la gráfica de la función $p : R \to R \,/\, p(x) = x^3 - 4x$, obtenga las representaciones gráficas de $q(x) = p(x) + 2$ y de $r(x) = p(x) - 3$.



Para realizar la primera gráfica, se determinan algunos puntos de p(x) y se trasladan dos unidades hacia arriba. Luego, uniéndolos de manera ordenada, se obtiene la gráfica de q(x).
De la misma manera, los puntos elegidos de p(x) se trasladan tres unidades hacia abajo para luego trazar la gráfica de r(x).

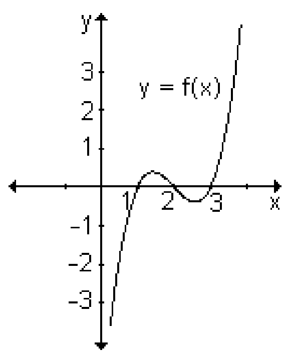


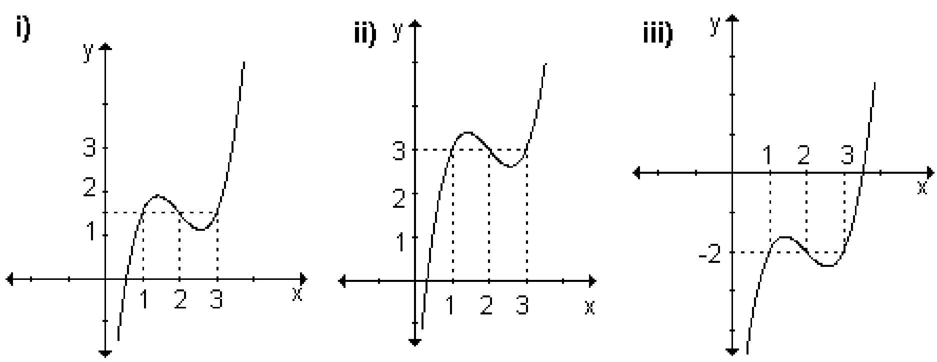


EJERCICIO

Teniendo en cuenta la función f(x) definida gráficamente, relacione cada ecuación con las gráficas que siguen:

a) f(x) + 3
b) f(x) – 2
c) f(x) + 1,5





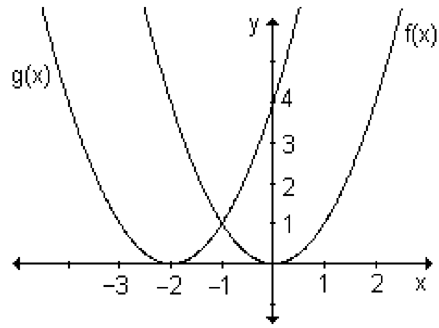
RESPUESTA

a) ii **b)** iii **c)** i

A partir de la gráfica de la función f : R → R / $f(x) = x^2$ analizaremos las características de las gráficas de las funciones $g(x) = f(x + 2) = (x + 2)^2$ y de $h(x) = f(x - 1) = (x - 1)^2$.

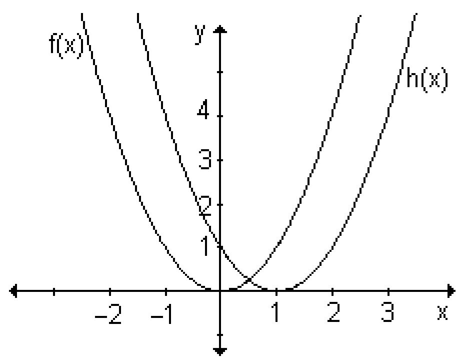
Para representarlas, calculemos algunos valores particulares:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 2)^2$
–3	9	1
–2	4	0
–1	1	1
0	0	4
1	1	9
2	4	16
3	9	25



A partir de las gráficas de f(x) y de g(x) puede observarse que:
f(a) = f(a–2+2) = g(a–2) es decir el punto de abscisa **a** sobre la gráfica de f(x) tiene la misma ordenada que aquel cuya abscisa es (**a** – **2**) sobre la gráfica de la función g(x). Esto significa que se puede obtener la gráfica de $g(x) = (x + 2)^2$ trasladando la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la izquierda.

x	$f(x) = x^2$	$h(x) = (x - 1)^2$
–3	9	16
–2	4	9
–1	1	4
0	0	1
1	1	0
2	4	1
3	9	4



De la misma manera se puede analizar la gráfica de $h(x) = (x - 1)^2$.

Como f(a) = f(a + 1 – 1) = h(a + 1), el punto de abscisa **a** sobre la gráfica de f(x) tiene la misma ordenada que aquel cuya abscisa es (**a + 1**) sobre la gráfica de la función h(x). De aquí que se pueda obtener la gráfica de $h(x) = (x - 1)^2$ trasladando la gráfica de $f(x) = x^2$ una unidad hacia la derecha.

Podemos pensar en *traslaciones horizontales de las gráficas* y en general:

Para trazar la gráfica de	se debe trasladar la gráfica de y = f(x)
y = f(x – c) y = f(x + c)	c unidades a la derecha c unidades a la izquierda

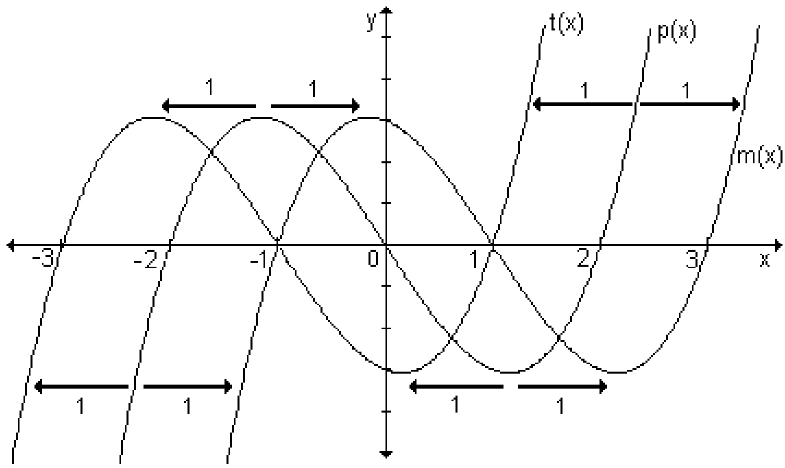
siendo c > 0

Ejemplo: Teniendo en cuenta la gráfica de la función $p : R \to R \,/\, p(x) = x^3 - 4x$, obtenga las representaciones gráficas de $m(x) = p(x - 1)$ y de $t(x) = p(x + 1)$.

$m(x) = p(x - 1) \quad \Rightarrow \quad m(x) = (x - 1)^3 - 4(x - 1)$

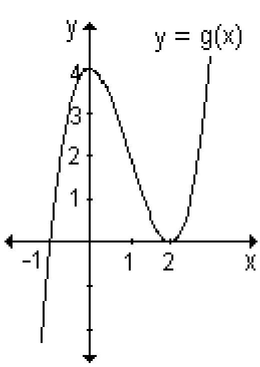
$t(x) = p(x + 1) \quad \Rightarrow \quad t(x) = (x + 1)^3 - 4(x + 1)$

A partir de la gráfica de $p(x) = x^3 - 4x$, la gráfica de la función m(x) resulta de *trasladar una unidad hacia la derecha* la gráfica de p(x), mientras que la gráfica de la función t(x) resulta de *trasladarla una unidad hacia la izquierda*.



EJERCICIO

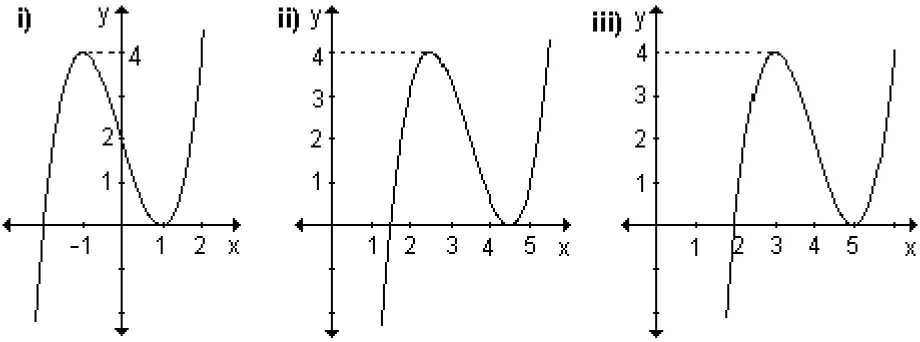
Dada g(x) definida gráficamente, relacione cada una de las siguientes ecuaciones con las gráficas que siguen:



a) $g(x - 3)$

b) $g\left(x - \frac{5}{2}\right)$

c) $g(x + 1)$



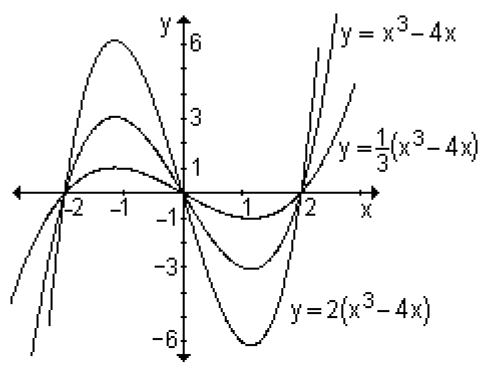
RESPUESTA: **a)** iii **b)** ii **c)** i

A partir de la gráfica de $f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = x^3 - 4x$, analizaremos el comportamiento de las gráficas de las funciones $g(x) = 2.f(x) = 2(x^3 - 4x)$ y de $h(x) = \frac{1}{3} f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 4x)$.

Para representarlas, calculemos algunos valores particulares:

x	$f(x) = x^3 - 4x$	$g(x) = 2(x^3 - 4x)$	$h(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 4x)$
–2	0	0	0
–1	3	6	1
0	0	0	0
1	–3	–6	–1
2	0	0	0

Puede observarse que para graficar $g(x) = 2(x^3 - 4x)$, se multiplica por dos el valor de cada una de las ordenadas de $f(x) = x^3 - 4x$. Esto ocasiona un estiramiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$.



Para representar $h(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 4x)$, cada una de las ordenadas de f(x) se multiplica por $\frac{1}{3}$. Esto produce una reducción de la gráfica de $y = f(x)$.

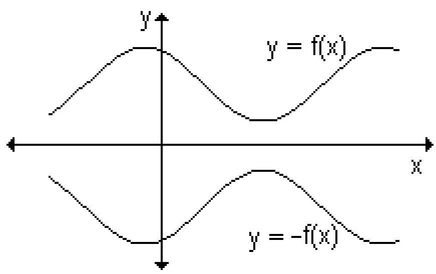
Gráficamente se observa que cambia lo que se llama *la amplitud, dilatación o estiramiento* de la curva.

Genéricamente se puede enunciar que para trazar la gráfica de $y = c.f(x)$ se deben multiplicar por c a cada una de las ordenadas de los puntos de $y = f(x)$.

Si $c > 1$, la gráfica de $y = f(x)$ se amplía en un factor c.

Si $0 < c < 1$, la gráfica de $y = f(x)$ se reduce en un factor $\frac{1}{c}$.

Es importante destacar que con esta transformación se mantienen los ceros de la función.



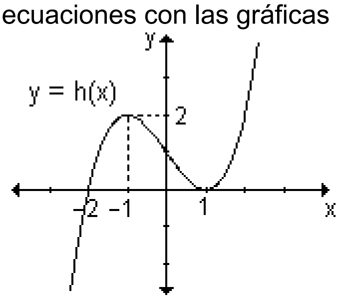
Nota: La gráfica de la función $y = -f(x)$ se obtiene multiplicando por -1 a las ordenadas de cada uno de los puntos de $y = f(x)$.
La gráfica de $y = -f(x)$ es una *reflexión* o *simetría* de la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x.

Si $c < -1$, la gráfica de $y = c.f(x)$ es una reflexión ampliada en un factor $|c|$ con respecto al eje x de la gráfica de $y = f(x)$.

Si $-1 < c < 0$, la gráfica de $y = c.\ f(x)$ es una reflexión reducida en un factor $\left|\frac{1}{c}\right|$ con respecto al eje x de la gráfica de $y = f(x)$.

EJERCICIO

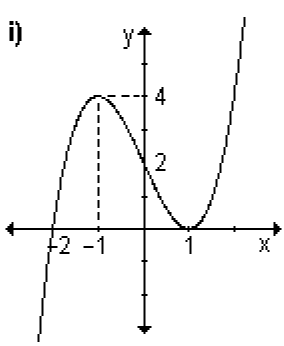
Dada h(x) definida gráficamente, relacione cada una de las siguientes ecuaciones con las gráficas que siguen:



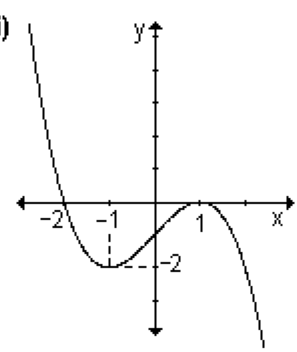
a) $2h(x)$ **b)** $\frac{1}{4}$ $h(x)$

c) $-h(x)$ **d)** $-3h(x)$

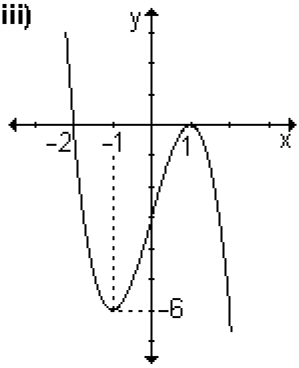
i)



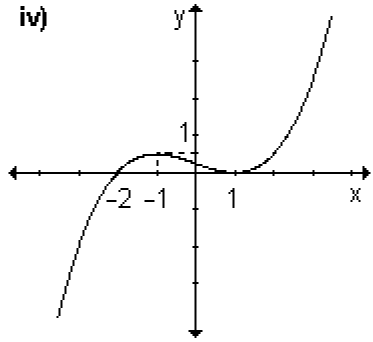
ii)



iii)



iv)



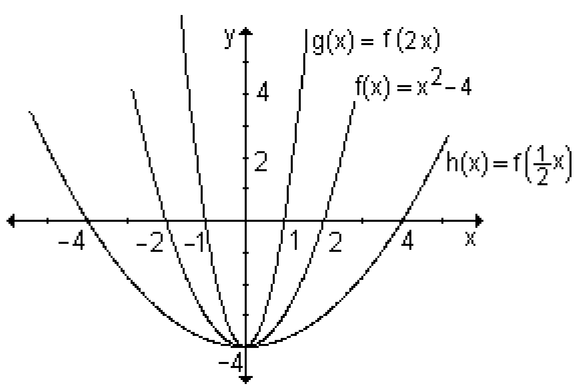
RESPUESTA: a) i **b)** iv **c)** ii **d)** iii

Teniendo como base la gráfica de la función $f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = x^2 - 4$, analizaremos el comportamiento de las gráficas de las funciones:

$g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 4 = 4x^2 - 4$ y de $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}x^2 - 4$

Para representarlas, calculamos algunos valores particulares:

x	$f(x) = x^2 - 4$	$g(x) = (2x)^2 - 4$	$h(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 4$
–4	12	60	0
–2	0	12	–3
–1	–3	0	–3,75
0	–4	–4	–4
1	–3	0	–3,75
2	0	12	–3
4	12	60	0



Observando las gráficas de las funciones f(x) y g(x) resulta:

$f(a) = f\left(\frac{1}{2}a.2\right) = g\left(\frac{1}{2}a\right)$.Es decir, todo punto de abscisa “a” sobre la gráfica de f(x) tiene la misma ordenada que aquel cuya abscisa es $\frac{1}{2}a$ en la función g(x).

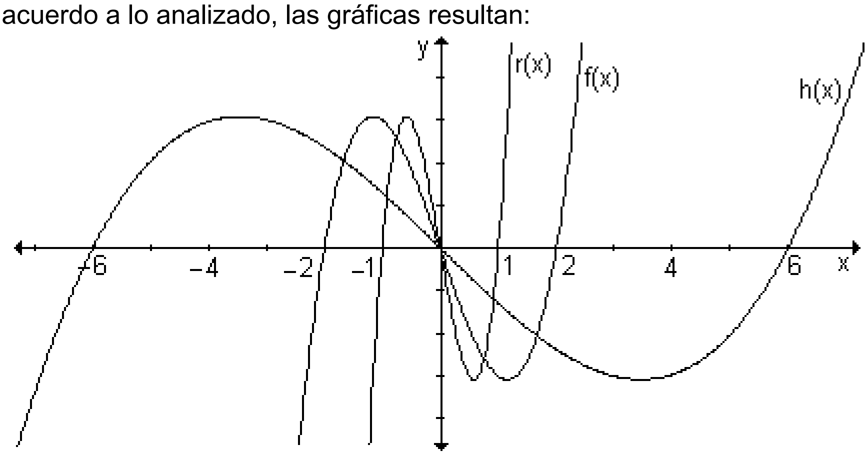
De la misma manera $f(a) = f\left(2a.\frac{1}{2}\right) = h(2a)$. Por lo tanto, todo punto de abscisa a sobre la gráfica de f(x) tiene la misma ordenada que aquel cuya abscisa es 2a en la función h(x).

En general, para trazar la gráfica de $y = f(k.x)$, se comprime horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ en un factor k si $k > 1$, o se expande horizontalmente en un factor $\frac{1}{k}$, si $0 < k < 1$.

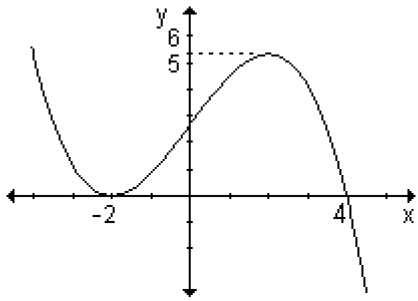
Es importante destacar que con esta transformación se mantiene la intersección de la función con el eje de las ordenadas.

Ejemplo: A partir de la gráfica de la función $f : R \to R$ / $f(x) = x^3 - 4x$, represente: $r(x) = f(2x)$ y $h(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Para representar las funciones r(x) y h(x), se eligen algunos puntos particulares de la función f(x), como por ejemplo las intersecciones con el eje de las abscisas. Para el caso de r(x) se reducen a la mitad dichos puntos de intersección, mientras que para h(x) se triplican. También debe tenerse en cuenta que para las tres funciones, el punto de intersección con el eje de las ordenadas es el mismo.
De acuerdo a lo analizado, las gráficas resultan:



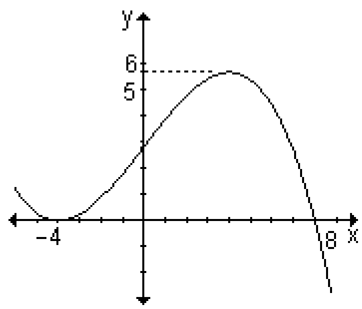
EJERCICIO



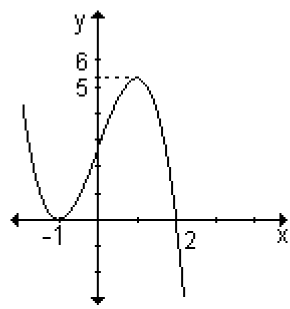
Dada s(x) definida gráficamente, relacione cada una de las siguientes expresiones con las gráficas que siguen:

a) s(2x) **b)** $s\left(\frac{1}{2}x\right)$ **c)** s(4x)

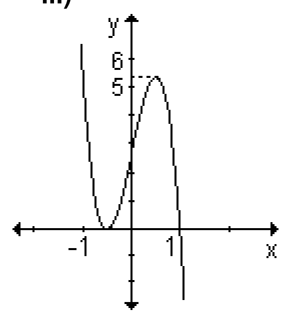
i)



ii)

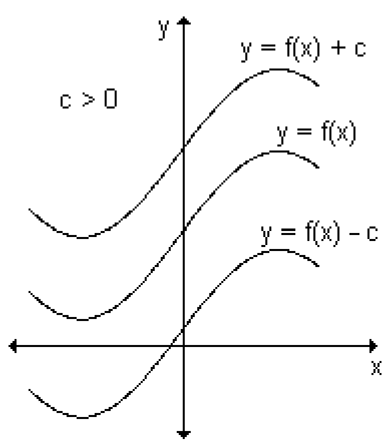


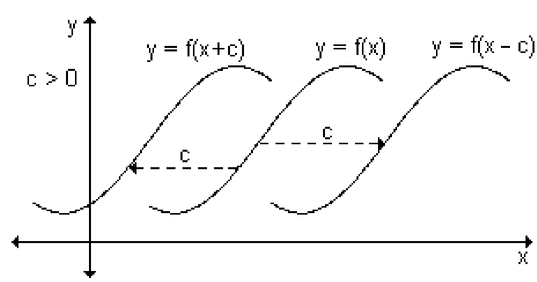
iii)

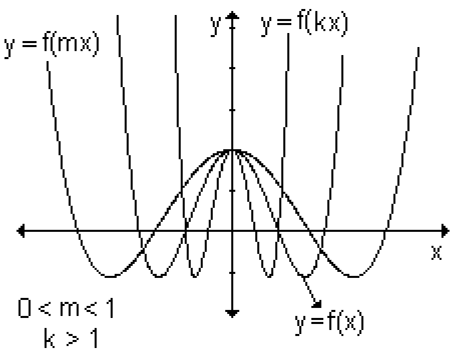


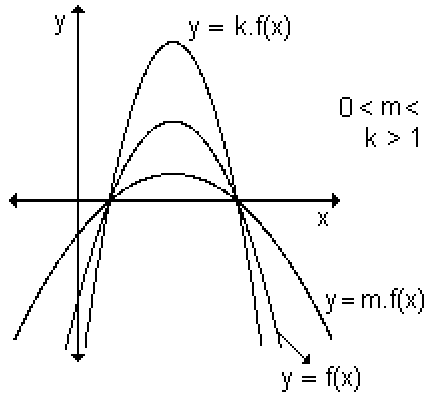
RESPUESTAS:
a) ii **b)** i **c)** iii

RESUMIENDO



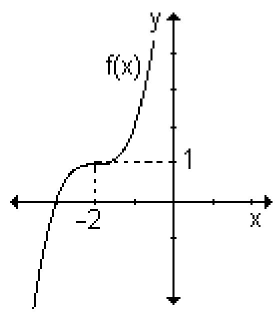






EJERCICIOS INTEGRADORES 1.3 GRÁFICAS DE FUNCIONES SEGÚN DISTINTAS TRANSFORMACIONES

1) Grafique f(x – 2) y f(x) – 3 , si la gráfica de f(x) es:

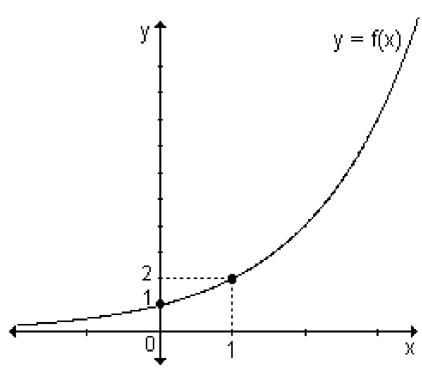


2) Trace la gráfica de y = x. A partir de la misma, grafique las siguientes funciones utilizando transformaciones.

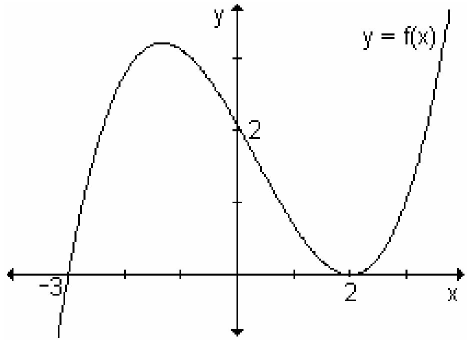
a) y = 4x **b)** y = 4x – 3 **c)** y = 4(x + 2) – 3

AUTOEVALUACIÓN Nº 2: GRÁFICAS DE FUNCIONES SEGÚN DISTINTAS TRANSFORMACIONES

1) Dada la gráfica de la función y = f(x) obtenga gráficamente:
g(x) = 5.f(x), h(x) = f(x + 1), r(x) = f(x) + 1

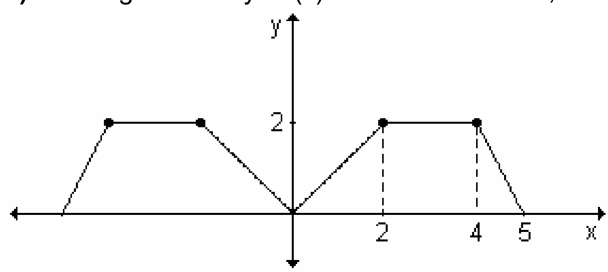


2) Dada la función definida gráficamente por:



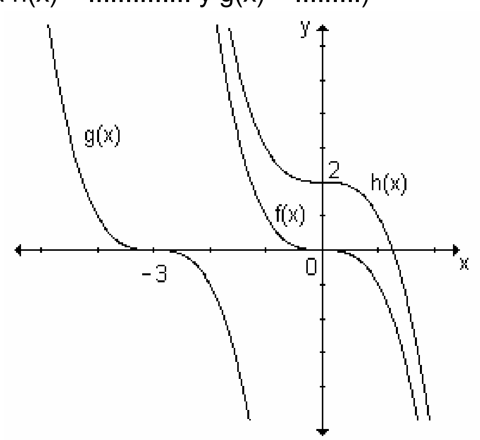
Realice las gráficas de:
g(x) = 2f(x); h(x) = f(x + 1) y
m(x) = f(x) + 1

3) Sea la gráfica de y = f(x) definida de A → R, A = {x /x ∈ R ∧ –5 ≤ x ≤ 5}



Grafique las funciones
g(x) = 2 f(x) y
h(x) = 2 – f(x)
usando transformaciones.

4) Dada la gráfica de la función y = f(x) escriba las leyes de h(x) y g(x) e indique cómo se obtienen sus gráficas teniendo en cuenta transformaciones sobre la función f(x) (Escriba h(x) = ... y g(x) = ...)



PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 1.2 FUNCIONES ESCALARES y 1.3 GRÁFICAS DE FUNCIONES SEGÚN DISTINTAS TRANSFORMACIONES

1) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{9 - x^2}}$ es:

a) $\{x/x \in R \wedge x < -3 \vee x > 3\}$ **b)** $\{x/x \in R \wedge -3 \leq x \leq 3\}$

c) $\{x/x \in R \wedge |x| \neq 3\}$ **d)** $\{x/x \in R \wedge -3 < x < 3\}$

2) La función $f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = 2x^4 - 3x^3$:

a) es par **b)** es impar **c)** no es par ni impar

3) Indique si en todo su dominio, la función $f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = -2(x^3 - 1)$:

a) es creciente **b)** es decreciente **c)** no es creciente ni decreciente

4) Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, el dominio y conjunto de imágenes son:

a) $D_f = R$; $CI_f = R$ **b)** $D_f = R - \{0\}$; $CI_f = R^+$ **c)** $D_f = R - \{0\}$; $CI_f = R$

5) Sea la función $f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = x + 3$, entonces, $f(x + 3)$ es igual a:

a) $x + 3$ **b)** $2x + 3$ **c)** $2x + 6$ **d)** $x + 6$

6) Si $f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = 2x - 4$, entonces, $f(2x)$ es igual a:

a) $4x - 4$ **b)** $4x - 8$ **c)** $2x - 8$ **d)** $2x - 2$

7) Si $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = 2x - 4$, entonces, $2f(x)$ es igual a:

a) $4x - 4$ **b)** $4x - 8$ **c)** $2x - 8$ **d)** $2x - 2$

8) Si $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = 2x - 4$, entonces, $f(x) + 2$ es igual a:

a) $4x - 4$ **b)** $4x - 8$ **c)** $2x - 8$ **d)** $2x - 2$

9) La gráfica de $f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$ es congruente con $f(x) = 2x^2$ pero está:

a) desplazada 3 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia abajo.
b) desplazada 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo.
c) desplazada 3 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia arriba.
d) desplazada 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba.

10) Dada la función $f(x) = (x + 2)^3 - 1$, la gráfica de $g(x) = x^3 - 1$ se obtiene:

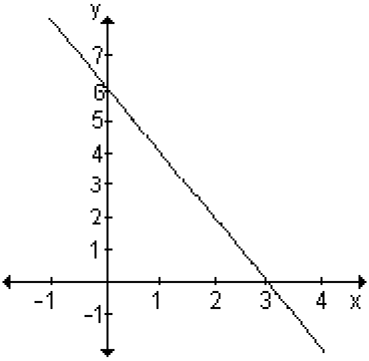
a) desplazando f(x) dos unidades hacia arriba.
b) desplazando f(x) dos unidades hacia la derecha.
c) desplazando f(x) dos unidades hacia abajo.
d) desplazando f(x) dos unidades hacia la izquierda.

GUÍA DE ESTUDIO. CAPÍTULO 1. FUNCIONES

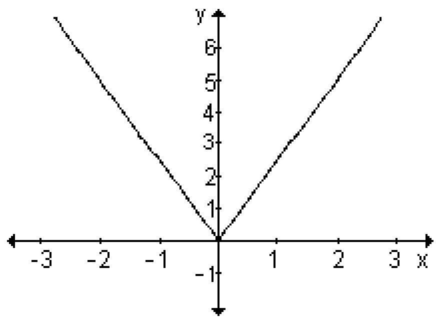
1) Para cada una de las gráficas de funciones que figuran debajo, responda:

a) ¿Es una función creciente o decreciente?
b) ¿Crece o decrece en todo su dominio o por intervalos?
c) Indique el dominio o los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
d) ¿Es una función par?
e) Si la respuesta al ítem **d)** es afirmativa: ¿cuál es el eje de simetría? ¿cuál es la expresión analítica de dicho eje?
f) ¿Es una función impar?
g) Si no es una función par o impar, ¿es una función simétrica con respecto a algún eje?
h) Si la respuesta al ítem **g)** es afirmativa: ¿cuál es el eje de simetría? ¿Cuál es la expresión analítica de dicho eje?

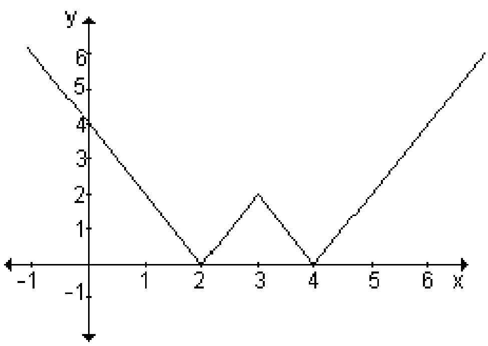
i)



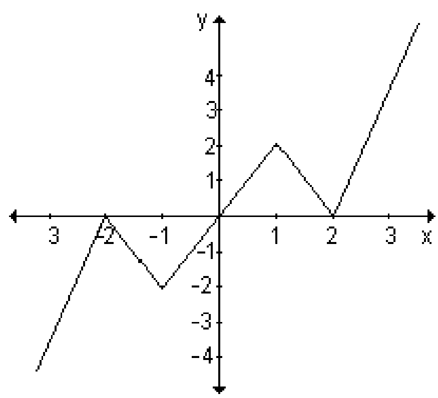
ii)



iii)



iv)



2) Represente la función $y = x^3$. En el mismo sistema cartesiano, represente cada una de las siguientes funciones y compárela con ella.

a) $y = 2x^3$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^3$ **c)** $y = x^3 - 1$

d) $y = x^3 + 2$ **e)** $y = (x + 2)^3$ **f)** $y = (x - 1)^3$

g) $y = -x^3$ **h)** $y = (x - 1)^3 + 2$ **i)** $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^3 + 2$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Sea el conjunto $A = \{x / x \in Z \wedge |x| \leq 2\}$ y la función $g : A \rightarrow R$ definida por $g(x) = x^2 + 1$. Halle el conjunto imagen de g.

2) Represente en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales cada una de las siguientes funciones:

a) $A = \{x/x \in N \wedge x \leq 5\}$; $B = \{y/y \in N \wedge y \leq 10\}$

$f_1 : A \to B \,/\, x \to 2x$

b) $A = \{x/x \in N \wedge 2 \le x \le 5\}; B = \{y/y \in N \wedge y \le 10\}$

$f_2 : A \to B \,/\, x \in A, \;\; y = 1$

3) **a)** Represente en un sistema cartesiano:

$$s : R \to R \,/\, x \to \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \le -3 \\ 5 & \text{si} \quad -3 < x < 1 \\ x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

b) Indique si es o no una función. Justifique.

4) Dada la ley matemática $g(x) = \dfrac{1}{x}$

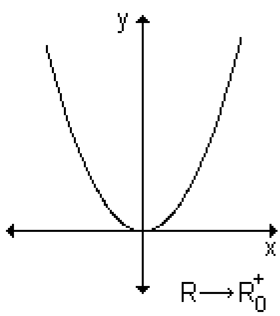
a) ¿Es g una función de $R \to R$? Justifique.

b) En caso de que la respuesta sea negativa, redefinirla para que resulte función.

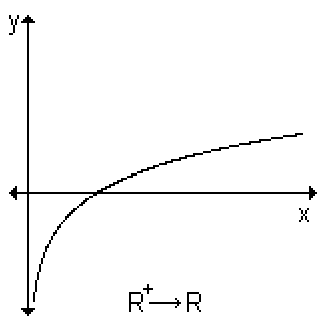
5)a) Determine si cada una de las siguientes gráficas define o no una función.

b) Las que sean función, clasifíquelas.

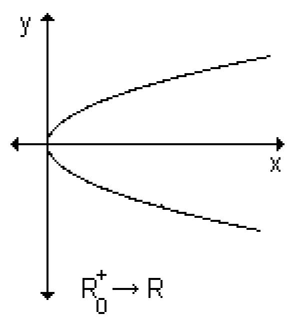
i)



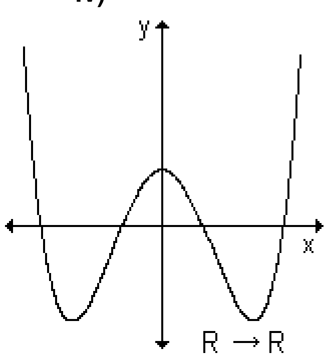
ii)



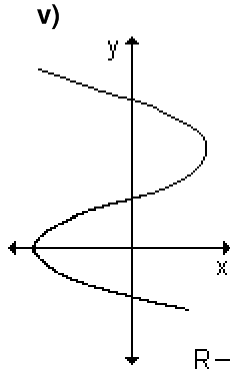
iii)



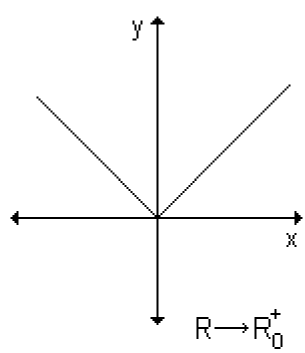
iv)



v)



vi)



6) Clasifique las siguientes funciones y represéntelas en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

a) $f : R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \;\; x \le 4 \\ 2 & \text{si} \;\; x > 4 \end{cases}$

b) $f: R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

c) $f: R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ -3 & \text{si} -1 \leq x \leq 5 \\ x+1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

d) $f: R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

7) Dadas las funciones $f: R \to R$ y $g: R \to R$, halle gof y fog siendo:

a) $f: x \to 3x$; $g: x \to \sqrt{x}$

b) $f: x \to x + 3$; $g: x \to 2x - 1$

8) Sean las funciones $f: R \to R \,/\, f(x) = 2x - 3$ y $g: R \to R \,/\, g(x) = 3x + 2$. Halle:

a) f(1) , g(1) **b)** (f o g)(x) **c)** (g o f)(x)
d) f(0) + g(2) **e)** (g o f)(–1) + g(–4) **f)** (g o f)(–2)

9) Sean las funciones $f: R \to R \,/\, f(x) = x + b$ y $g: R \to R \,/\, g(x) = ax^3$
Halle los valores de a y b si se sabe que $g(-1) = -3$ y $(g \circ f)(0) = 24$

10) Sean las funciones: $f: R \to R \,/\, f(x) = x + a$ y $g: R \to R \,/\, g(x) = \frac{x-b}{2}$

Determine los valores de a y b de modo que $(f \circ g)(0) = 3$ y $(g \circ f)(2) = 4$.

11) Dada la función $f: R \to R \,/\, f(x) = x - 2$

a) Analice si admite función inversa.

b) En caso afirmativo, represente ambas en un mismo sistema de coordenadas.

12) Sean las siguientes funciones definidas de $R \to R$.

a) $f(x) = x^3$ **b)** $f(x) = \frac{x}{2}$

c) $f(x) = x^2 + 1$ **d)** $f(x) = x^4$

Para cada una de ellas determine su conjunto imagen y clasifíquela.

13) Sea la función $f(x) = 3x + 1$ que tiene por dominio el conjunto $D_f = \{x \,/\, x \in R \wedge 0 \leq x \leq 1\}$

a) Halle el conjunto imagen.

b) Indique si la función para ese dominio y conjunto imagen admite función inversa.

c) Si la función admite inversa, halle su expresión algebraica, su dominio, su conjunto imagen y represente ambas en un mismo sistema de coordenadas.

14) i) Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones.

ii) Clasifíquelas de acuerdo a las operaciones que afectan a la variable independiente.

a) $y = \frac{1}{x^2+4}$ **b)** $y = \frac{x-1}{x\,(x+2)}$ **c)** $y = (2x-3)^{-2}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **e)** $y = \dfrac{x-2}{x(2x-1)}$ **f)** $y = \dfrac{3}{|x| - 1}$

g) $y = \ln(2x - 1)$ **h)** $y = +\sqrt{x^2 - 9}$ **i)** $y = \dfrac{|x|}{x}$

15) Determine si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $f(x) = 2x$ **b)** $f(x) = x^2 + 3x$

c) $f(x) = -x + 3$ **d)** $f(x) = x^2 - 3x^4$

16) Determine si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes:

a) $f(x) = 3x$ **b)** $f(x) = -2x + 4$

c) $f(x) = x^3 + 2$ **d)** $f(x) = -x^3 + 5$

17) Trace las gráficas de las funciones que se dan a continuación. Para cada una, considere un número de puntos suficientes para obtener una idea del comportamiento de las mismas y responda las preguntas que se indican.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

- ¿Qué pasa cuando $x = 0$?
- ¿Qué pasa cuando x es próximo a cero?
- ¿Qué ocurre con f(x) cuando x toma valores muy grandes?
- ¿Cuáles son las intersecciones con los ejes coordenados?

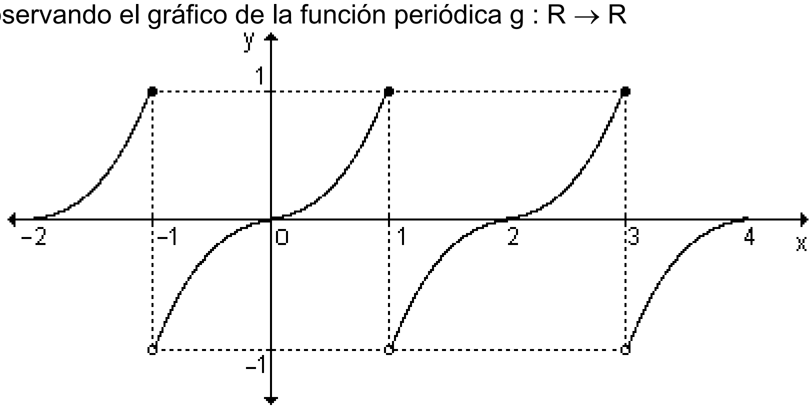
b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

- ¿Está definida g(x) para $x = 0$?
- ¿Para qué valores está definida g(x)?
- ¿Para qué valores es negativa la función?

c) $h(t) = |\ t\ |$

- ¿Para qué valores de t la función es negativa?
- ¿Qué ocurre cuando t es grande negativamente?
- ¿Qué sucede cuando t es grande positivamente?

18) Observando el gráfico de la función periódica $g : R \to R$



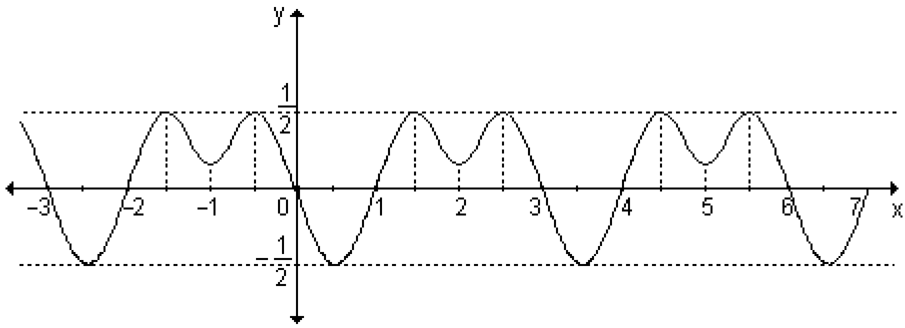
a) ¿Cuál es su período?

b) ¿Cuál es su valor máximo? Escriba en forma genérica en qué valores de x lo alcanza.

c) ¿En qué valores la gráfica corta al eje de las abscisas? Escríbalos en forma genérica.

d) Si $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$, ¿qué otros valores tienen la misma imagen? Escríbalos en forma genérica.

19) Observando el gráfico de la función periódica $f : R \to R$



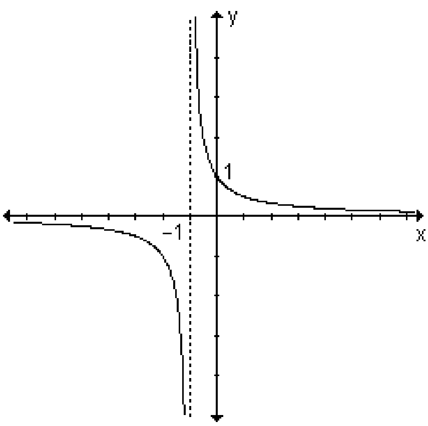
a) ¿Cuál es el período de la función?

b) ¿Cuál es el conjunto imagen?

c) ¿Cuál es el valor mínimo? Escriba en forma genérica en qué valores de x lo alcanza.

d) ¿Cuál es el valor máximo? Escriba en forma genérica en qué valores de x lo alcanza.

20) Analice el siguiente gráfico y conteste las preguntas:



a) ¿Cuál es el punto de intersección de la función con el eje x?

b) ¿Cuál es el punto de intersección con el eje de ordenadas?

c) $x = 1$, ¿pertenece al dominio de la función?

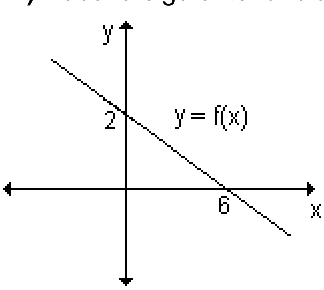
d) $x = -1$, ¿pertenece al dominio?

e) $y = 1$, ¿pertenece al conjunto imagen?

f) ¿Cuáles son los valores de x para los cuales la función es creciente?

g) ¿Cuál es el dominio? ¿Cuál es el conjunto de imágenes?

21) Dada la siguiente función $y = f(x)$ definida gráficamente.

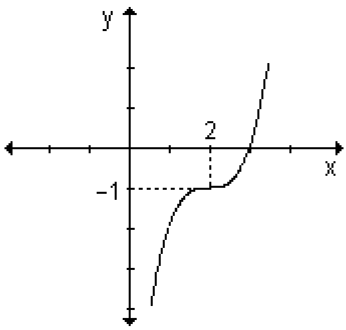


a) Determine los valores de x para los cuales $f(x) < 0$

b) Trace las gráficas de las siguientes expresiones:

i) $f_1(x) = f(x) + 2$ **ii)** $f_2(x) = f(x + 6)$

22) Si la siguiente gráfica corresponde a $f(x) = (x - h)^3 + k$:



a) Determine los valores de h y k

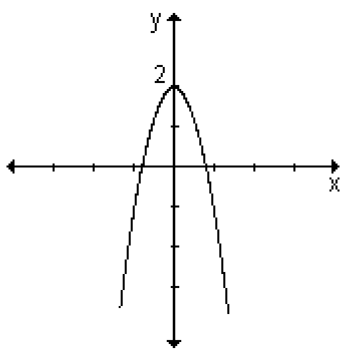
b) Dibuje sin hacer tabla:

i) $f_1(x) = x^3 + k$

ii) $f_2(x) = (x - h)^3$

iii) $f_3(x) = x^3$

23) Si la siguiente gráfica corresponde a $f(x) = -3x^2 + k$:



a) Determine el valor de k

b) Grafique, sin confeccionar tabla:

i) $f_1(x) = 3x^2$

ii) $f_2(x) = -x^2 + k$

iii) $f_3(x) = -3(x - 1)^2$

2. FUNCIONES ESCALARES ALGEBRAICAS

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero existe un poco de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Su problema puede ser modesto; pero si reta a su curiosidad y pone en juego sus facultades de inventiva y lo resuelve por sus propios medios, puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento.

George Polya

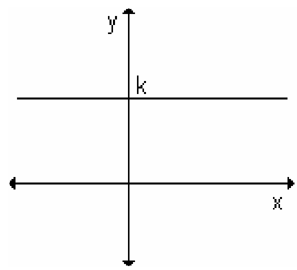
2.1 Funciones algebraicas especiales

Para resolver problemas resultará útil familiarizarse con las características y gráficas de funciones que aparecen frecuentemente.

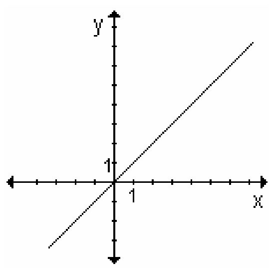
Función constante

f es la función constante $\Leftrightarrow \forall\, x \in D_f,\ \exists\, k \in R / f(x) = k$

$f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = k$



Función identidad



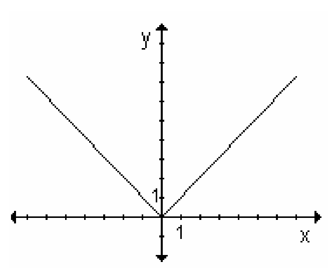
f es la función identidad $\Leftrightarrow \forall\, x \in R : f(x) = x$

$f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = x$

Función valor absoluto

$f : R \rightarrow R$ definida por: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

donde $|x|$ se lee valor absoluto de x.



Función de proporcionalidad directa

Problema

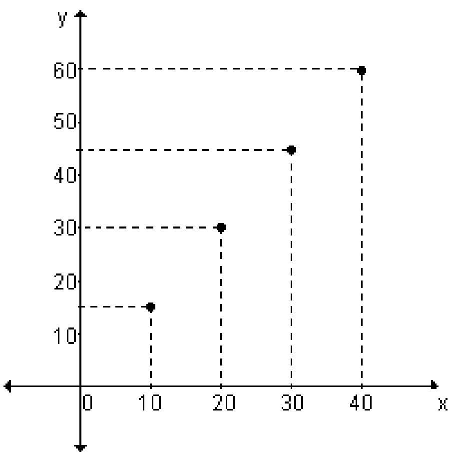
Una empresa de productos lácteos fabrica quesos de todo tipo. La siguiente tabla muestra algunos datos del costo de un queso fundido según la cantidad de unidades.

Cantidad de unidades	10	20	30	40
Costo ($)	15	30	45	60

¿Qué relación vincula a las dos variables? Encuentre la función y represéntela gráficamente.

Podemos observar en la tabla que al duplicar la cantidad de unidades de queso se duplica el costo, al triplicar la cantidad de unidades se triplica el costo, etc. Las dos variables son directamente proporcionales.
Por lo tanto la razón entre dos cantidades que se corresponden se mantiene constante: $\frac{15}{10} = \frac{30}{20} = \frac{45}{30} = \frac{60}{40} = 1{,}5$.
Este valor se llama constante de proporcionalidad y representa la variación de y por cada unidad de variación de x. En este problema la constante es 1,5 y representa el costo por unidad de queso fundido.

Sabiendo que $\frac{y}{x} = 1{,}5$ podemos obtener la expresión de la función: $y = 1{,}5\,x$. Se trata de una función de proporcionalidad directa.
La representación gráfica es:



Representamos solo los valores de la tabla. La variable x puede tomar cualquier valor entero y positivo, incluido el cero, pues representa cantidad de quesos. Observamos que los puntos quedan alineados. Si los uniéramos obtendríamos una recta que pasa por el origen de coordenadas.

<u>Problema</u>

Una locomotora marcha a una velocidad constante de 60 km/h. Complete la siguiente tabla que muestra la distancia recorrida según el tiempo transcurrido.

Tiempo(h)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Distancia(km)				

Encuentre la ley que relaciona a las variables. ¿Es función de proporcionalidad directa? Explique. Represente gráficamente la función. En este problema se pueden unir los puntos, ¿por qué? ¿El punto (0,0) pertenece a la gráfica de la función?

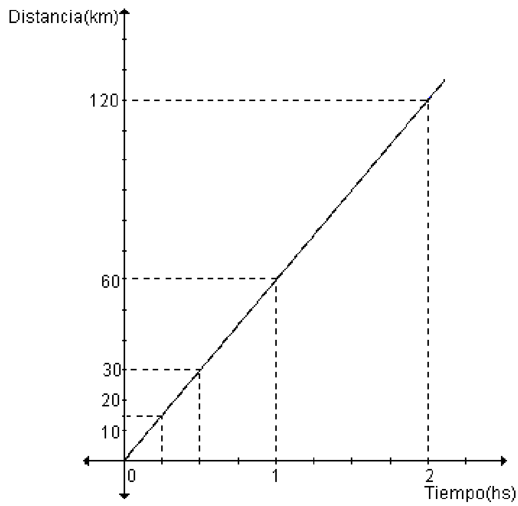
Si completamos la tabla teniendo en cuenta lo enunciado resulta:

Tiempo(h)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Distancia(km)	15	30	60	120

Es función de proporcionalidad directa ya que el cociente $\frac{y}{x}$ se mantiene constante.

$\frac{15}{\frac{1}{4}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = \frac{60}{1} = \frac{120}{2} = 60$. La constante es k = 60, que en este problema representa la velocidad, es decir, la distancia recorrida por unidad de tiempo.

La ley es $y = 60x$.



Al representar gráficamente la función debemos tener en cuenta que se pueden unir los puntos porque la variable independiente representa el tiempo transcurrido y puede tomar cualquier valor real.

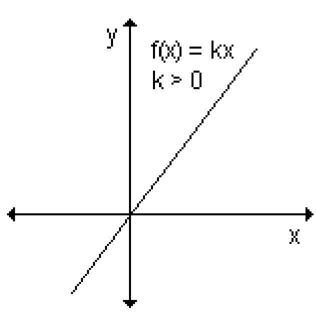
El punto (0,0) pertenece a la gráfica de la función y representa que al tiempo cero la distancia recorrida es cero.

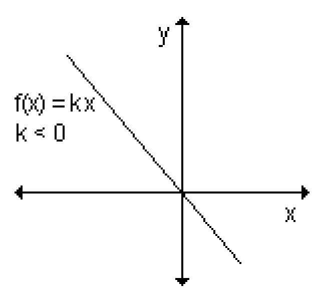
Toda función que relaciona dos variables directamente proporcionales se llama *función de proporcionalidad directa*. Su fórmula es del tipo $y = k.x$, $k \in R \wedge k \neq 0$ y su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas. El valor k recibe el nombre de constante de proporcionalidad. Podemos decir que la constante k representa la variación de y por cada unidad de variación de x.

Las funciones de proporcionalidad directa se corresponden con las proporciones y, por lo tanto, con la regla de tres directa.

A partir de aquí definimos la función de proporcionalidad directa de la siguiente manera:

f de proporcionalidad directa $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : f(x) = kx$ siendo $D_f = R$, $k \in R \wedge k \neq 0$





Problema

Según la ley de Hooke, la fuerza F requerida para mantener estirado un resorte que aumenta x unidades de su longitud natural es directamente proporcional a x. Se necesita una fuerza de 24 kg para que cierto resorte se estire 6 cm más de su longitud natural.

a) Encuentre la ley que relaciona la fuerza F con el estiramiento x.

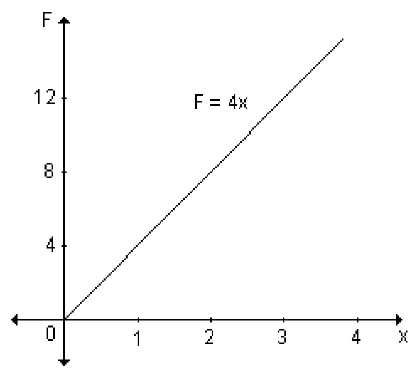
b) ¿A cuánto centímetros más de su longitud natural lo estirará una fuerza de 72 kg?

c) Grafique.

a) Dado que F varía directamente proporcional a x resulta: $F = k.x$, $k \in R$.
Sustituyendo los valores conocidos de F y x obtenemos:
$24 = k.6 \;\Rightarrow\; k = 24:6 \;\Rightarrow k = 4$.
De donde la ley que relaciona la fuerza F con el estiramiento x es $F = 4x$.

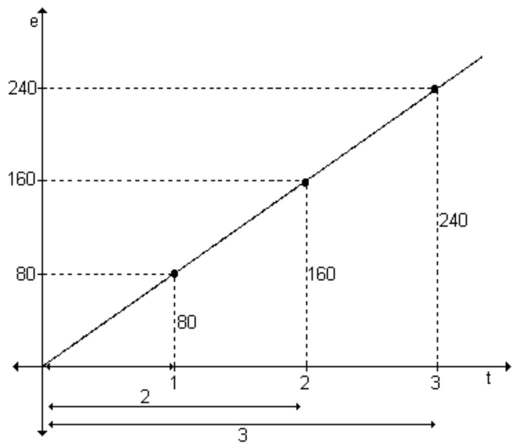
b) Reemplazando la fuerza F por 72: $72 = 4x \;\Rightarrow\; x = 72 : 4 \;\Rightarrow x = 18$.
El resorte se alargará 18 cm más de su largo natural cuando la fuerza sea de 72 kg.

c) Graficamos la función de proporcionalidad directa considerando únicamente los semiejes x y F positivos, para los cuales tiene sentido el problema.



Problema

Recordemos que la velocidad en el movimiento rectilíneo uniforme es constante. La expresión que relaciona la velocidad de un móvil con el espacio recorrido y el tiempo que demora en recorrerlo está dada por $v = \frac{e}{t}$ donde e es el espacio recorrido en el tiempo t. Encuentre la expresión de la función que relaciona el espacio recorrido con el tiempo empleado de un automóvil que viaja a una velocidad constante de $80\frac{km}{h}$.



Si un automóvil viajó a una velocidad constante de 80 $\frac{km}{h}$ podemos escribir:

$80 = \frac{e}{t} \Rightarrow e = 80.t$

El espacio recorrido queda directa–mente afectado por el tiempo, cuando t aumenta, e aumenta en la misma proporción.

$$m = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = 80 = v$$

La constante de proporcionalidad es la velocidad. La expresión $e = 80t$ representa una función de proporcionalidad directa y denota el espacio recorrido por un móvil que se desplaza a velocidad constante ($80\frac{km}{h}$) durante t horas.

Función de proporcionalidad inversa

Discutamos algunos problemas donde se establecen otras relaciones entre variables.

<u>Problema</u>

> Para llenar un depósito con agua cuatro canillas demoraron seis horas. Suponga que pueden abrirse diferentes cantidades de canillas, siendo todas de igual tamaño y forma. Arme una tabla de valores y encuentre la ley que relaciona la variación del tiempo que tarda en llenarse el depósito con la cantidad de canillas que se abren. Represente gráficamente.

Para completar la tabla de valores tenemos en cuenta que x puede tomar cualquier valor entero positivo pues representa número de canillas.

Sabiendo que 4 canillas demoran 6 hs., una canilla (la cuarta parte) demorará 24 hs. (el cuádruple). De igual forma, 8 canillas (el doble) demorarán 3 hs (la mitad de tiempo). Podemos observar que entre las variables existe proporcionalidad inversa.

N° de canillas	Tiempo que demoran(en hs)
1	24
2	12
3	8
4	6
5	4,8 (4hs. 48min.)
6	4
8	3

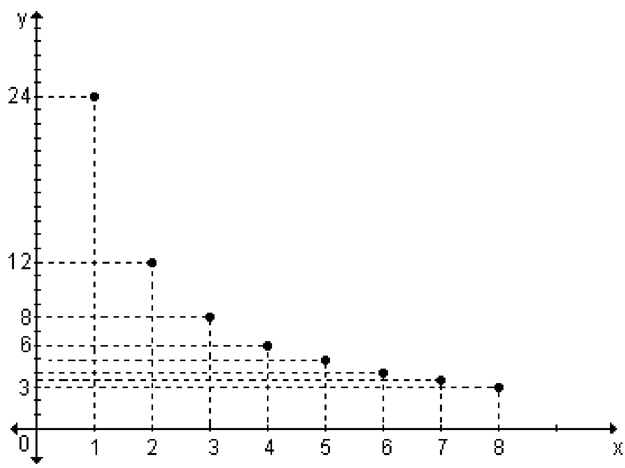
Si efectuamos el producto de dos cantidades que se corresponden, x.y (nº de canillas. tiempo que demoran), vemos que se mantiene constante:

$1.24 = 2.12 = 3.8 = 4.6 = 5.4{,}8 = 6.4 = 8.3 = 24$

Este valor que se mantiene constante se llama constante de proporcionalidad y en este problema representa la capacidad del tanque.

La ley que relaciona la cantidad de canillas con el tiempo que demoran en llenar el depósito es $x \,.\, y = 24$ o bien $y = \dfrac{24}{x}$.

Representamos gráficamente la función:



Problema

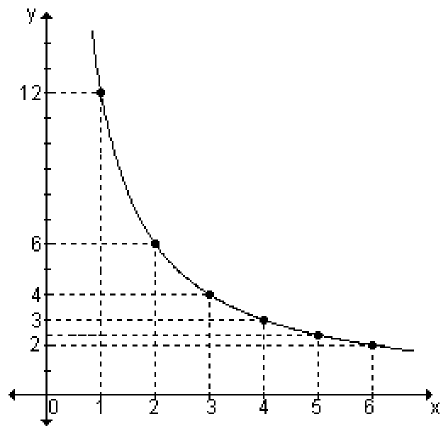
> Dado un triángulo rectángulo de 6 cm^2 de área. Consideremos la variación de uno de los catetos en función de la medida del otro.
> **a)** ¿Qué relación hay entre los catetos de estos triángulos? Arme una tabla de valores.
> **b)** Represente gráficamente dicha relación. ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

a) Si llamamos x al cateto base e y al otro cateto, tenemos, sabiendo que el área es 6: $\dfrac{x.y}{2} = 6 \Rightarrow x.y = 12$ o bien $y = \dfrac{12}{x}$

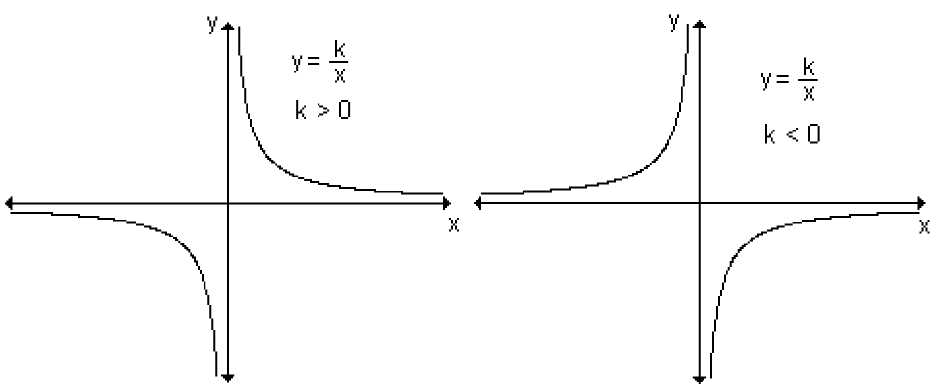
x(cm)	1	2	3	4	5	6
y(cm)	12	6	4	3	2,4	2

Observamos que entre las variables existe proporcionalidad inversa.

b) En este caso tiene sentido unir los puntos pues x puede tomar cualquier valor real positivo, ya que es la medida de uno de los lados del triángulo.



Las funciones analizadas en los problemas pertenecen a la familia $y = \frac{k}{x}$, $k \in R$ y $k \neq 0$. Reciben el nombre de funciones de proporcionalidad inversa. La gráfica que resulta recibe el nombre de *hipérbola* y caracteriza a este tipo de funciones. Esta curva nunca interseca a los ejes coordenados.
Teniendo en cuenta lo analizado definimos la función de proporcionalidad inversa por $f : R - \{0\} \to R \,/\, x \to \frac{k}{x}$ donde $k \in R \wedge k \neq 0$.
Gráficamente:



Se observa que a medida que x tiende a cero la función $f(x) = \frac{k}{x}$ tiende a $\pm\infty$ y que cuando x tiende a $\pm\infty$ la función $f(x) = \frac{k}{x}$ tiende a cero.

Problema

Según la ley de Boyle, la presión P de un gas comprimido es inversamente proporcional al volumen V. Supongamos que existe una presión de $20 \frac{kg}{cm^2}$ cuando el volumen de un gas ocupa 300 cm^3.

a) Encuentre la ley que relaciona la presión con el volumen del gas.
b) Encuentre la presión existente cuando el gas queda comprimido a 250 cm^3.

a) Dado que la presión P varía de manera inversamente proporcional al volumen V resulta: $P = \frac{k}{V}$, $k \in R$.

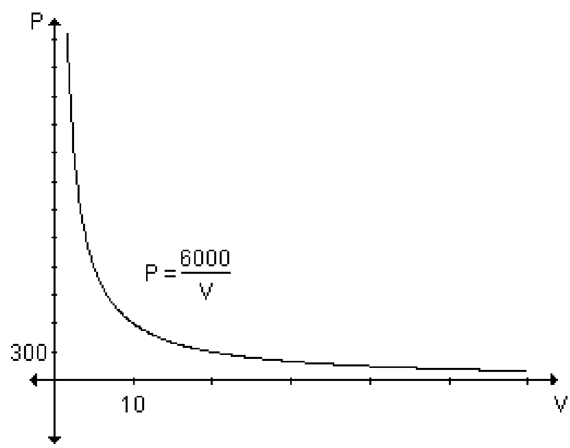
Sustituyendo por los valores conocidos de P y V, obtenemos: $20 = \frac{k}{300} \Rightarrow$

$k = 6000$. Así resulta que $P = \frac{6000}{V}$ es la ley que buscamos.

b) Reemplazando en la ley obtenida en el inciso anterior por 250 al volumen: $P = \frac{6000}{250} \Rightarrow P = 24$.

La presión es de 24 $\frac{kg}{cm^2}$ cuando el volumen del gas comprimido es 250 cm^3.

Para graficar la función empleamos únicamente los semiejes positivos, para los cuales tiene sentido el problema.

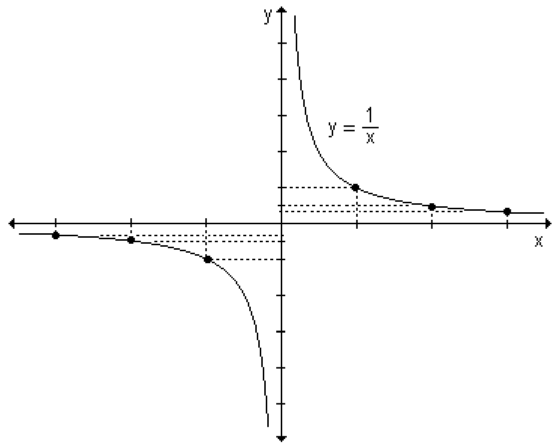


Trasformaciones de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo: Dada la función definida por $f : R - \{0\} \to R \ / \ x \to \frac{1}{x}$.

a) Represéntela gráficamente
b) ¿Qué sucede cuando graficamos $g(x) = f(x - 2)$ y $h(x) = f(x + 1)$?
c)¿Qué sucede cuando graficamos $g(x) = f(x) + 3$ y $h(x) = f(x) - 2$?

a) La representación gráfica es:



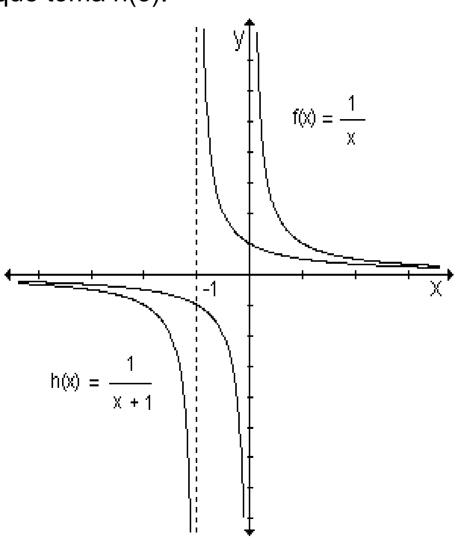
b) Analizamos la función $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\Rightarrow$ $D = R - \{2\}$

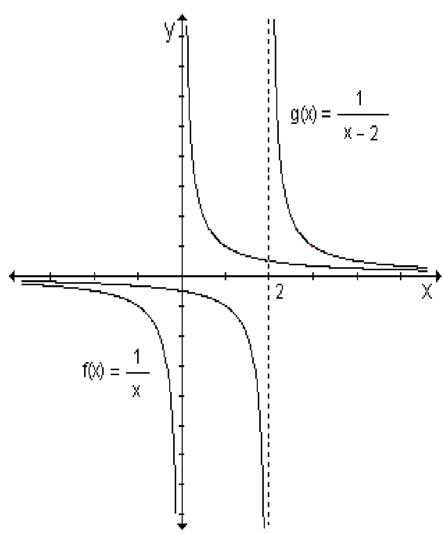
Si calculamos la imagen del 1 según f(x) obtenemos $f(1) = 1$ que es el mismo valor que g(3), lo mismo ocurre si hallamos $f(4) = \dfrac{1}{4}$ que coincide con el valor que toma g(6).

Si comparamos resulta $g(3) = f(3 - 2) = f(1)$ y $g(6) = f(6 - 2) = f(4)$

$h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\Rightarrow$ $D = R - \{-1\}$

Si calculamos la imagen del 1 según f(x) obtenemos $f(1) = 1$ que es el mismo valor que h(0), lo mismo ocurre si hallamos $f(4) = \dfrac{1}{4}$ que coincide con el valor que toma h(3).



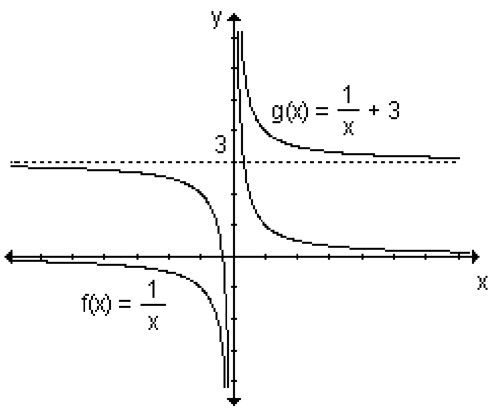


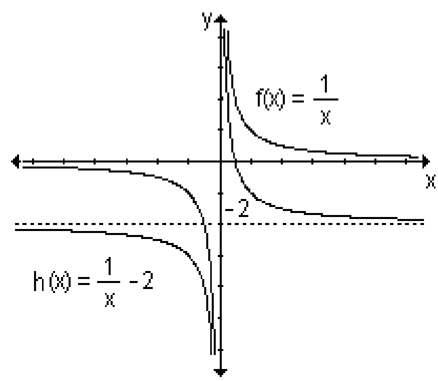
Si comparamos resulta $h(0) = f(0 + 1)$ y $h(3) = f(3 + 1)$

La gráfica de la función g(x) se obtiene al trasladar hacia la derecha dos unidades la gráfica de f(x) mientras que la gráfica de h(x) resulta de trasladar hacia la izquierda una unidad la gráfica de f(x). En el caso de la función f(x) la recta $x = 0$ es una asíntota vertical, mientras que en el caso de la función g(x) la recta $x = 2$ y en la función h(x) la recta $x = -1$ son asíntotas verticales. En todas las gráficas la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal.

c) En $g(x) = \dfrac{1}{x} + 3$ y $h(x) = \dfrac{1}{x} - 2$ debemos tener en cuenta que el dominio de ambas funciones son todos los números reales excepto el cero.
Si hallamos la imagen del 1 según f(x) resulta $f(1) = 1$ y según g(x) le corresponde $g(1) = 4$. En cambio si calculamos la imagen del 1 según h(x) obtenemos $h(1) = -1$.

Si comparamos vemos que $g(1) = f(1) + 3$ y $h(1) = f(1) - 2$ y de la misma forma ocurre para todo valor de x real excepto el 0.





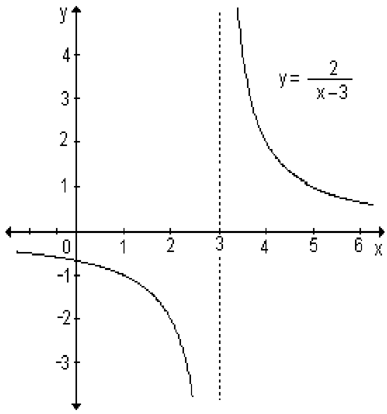
La gráfica de la función g(x) consiste en trasladar hacia arriba tres unidades la gráfica de f(x) y mientras que la gráfica de h(x) consiste en trasladar hacia abajo dos unidades la gráfica de f(x).

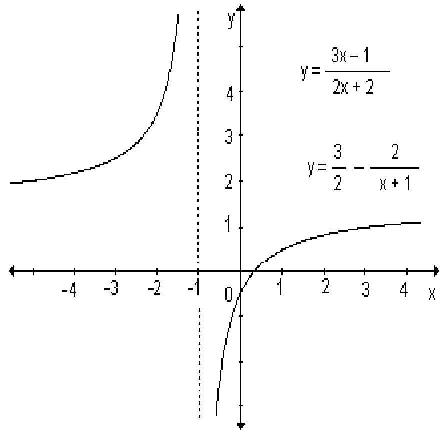
En la gráfica de f(x) la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal mientras que en g(x) la asíntota horizontal es $y = 3$ y en h(x) lo es la recta $y = -2$. En todas las gráficas la recta $x = 0$ es la asíntota vertical.

Nota: También son hipérbolas las gráficas de las funciones

$$f : R - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to R \ / \ x \to \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{siendo } a, b, c, d \in R$$

Ejemplos:





Importancia de la función de proporcionalidad inversa

Existen numerosos fenómenos que ligan dos variables cuya relación es de proporcionalidad inversa. Por ejemplo:

- la presión y el volumen de una masa de gas, a temperatura constante;
- el aumento producido por una lupa y la distancia al foco a que se coloca el objeto;
- la frecuencia de un sonido y su longitud de onda;
- la altura alcanzada por un líquido de un tubo capilar y el diámetro de éste;
- la base y la altura de los rectángulos de área constante.

En otros casos, una variable es inversamente proporcional al cuadrado de otra:

- la atracción entre dos planetas es inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias;
- la repulsión entre dos cargas eléctricas del mismo signo es inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias;
- la intensidad de luz suministrada por un foco luminoso es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco;
- la intensidad de sonido que nos llega procedente de un foco sonoro es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a que estemos del emisor.

EJERCICIO INTEGRADOR 2.1 FUNCIONES ALGEBRAICAS ESPECIALES

Dadas las siguientes funciones, determine dominio y conjunto de imágenes. Grafique.

a) $y = \dfrac{1}{x-2}$ **b)** $y = -3$ **c)** $y = x$

d) $y = |x + 4|$ **e)** $y = \dfrac{1}{x+4} - 1$ **f)** $y = |x| - 3$

2.2 Función de primer grado

Problema

Por alquilar una moto, una empresa cobra \$ 8 por día más un plus de \$ 2 por cada 5 kilómetros recorridos.
a) Halle la función de primer grado que representa el precio abonado por día.
b) ¿Cuántos kilómetros hemos recorrido si abonamos \$ 24?

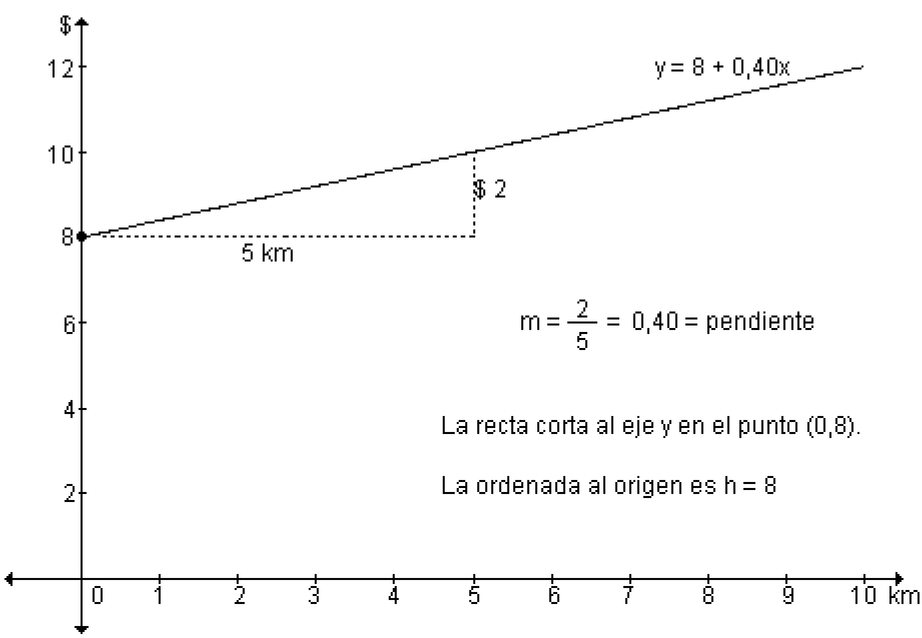
a) Si por cada 5 km cobran \$ 2, entonces por cada kilómetro nos cobran $\frac{2}{5}$, o sea, \$ 0,40 (40 centavos). Construyamos una tabla de valores:

km recorridos	Costo
0	8
1	8 + 0,40 . **1** = 8,40
2	8 + 0,40 . **2** = 8,80
5	8 + 0,40 . **5** = 10
10	8 + 0,40 . **10** = 12
x	8 + 0,40 . **x**

La fórmula sombreada representa a la función costo por cada x kilómetros recorridos. Es decir:

$g : R_0^+ \to R \,/\, g(x) = 8 + 0{,}40\,x$

Graficando la función resulta:



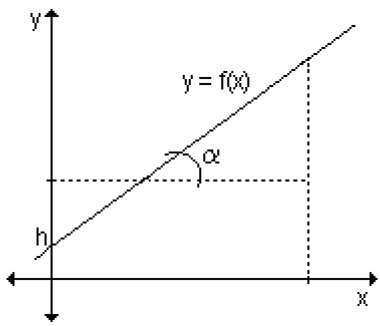
b) Si hemos pagado \$ 24, para hallar los kilómetros recorridos reemplazamos en la fórmula g(x) por 24 y despejando x obtenemos:

$24 = 8 + 0{,}40x \quad \Rightarrow \quad 24 - 8 = 0{,}40\,x \quad \Rightarrow \quad x = 16 : 0{,}40 \quad \Rightarrow \quad x = 40$

Al abonar \$ 24, hemos recorrido 40 km.

Definición: la función de primer grado se define $f : R \to R$

$$x \to mx + h$$



La representación gráfica es una recta.

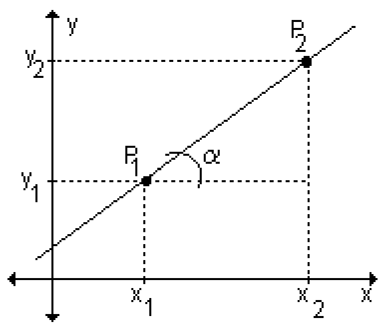
En la expresión $f(x) = mx + h$; m y h son constantes y se llaman:

h: ordenada al origen

m: pendiente de la recta

Si consideramos dos puntos pertenecientes a la recta $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ podemos escribir:

$$y_1 = m\,x_1 + h$$
$$y_2 = m\,x_2 + h$$



Restando estas dos expresiones miembro a miembro resulta:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente m de la recta representa la tangente trigonométrica del ángulo α. Entonces, $m = \operatorname{tg} \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, donde α se llama ángulo de inclinación.

Ejemplo: Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados en cada caso:

a) (0, –3) y (2, 3) **b)** (–1, 3) y (4, 3)

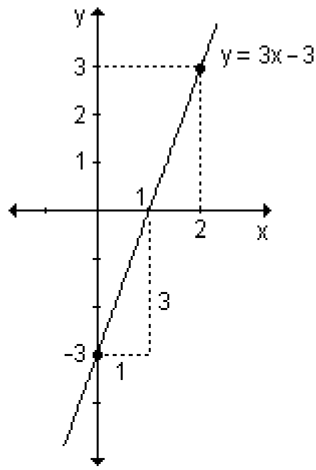
c) (0, 4) y (2, 1) **d)** (3, –1) y (3, 4)

a) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-3)}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$. Como la pendiente es positiva, la función es creciente (la recta "sube")

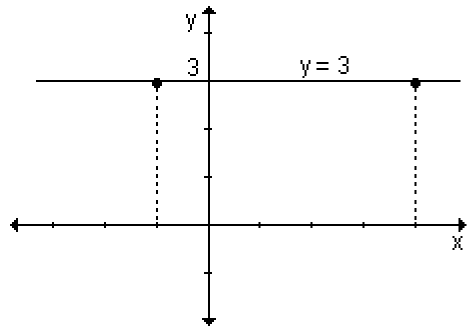
b) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{4-(-1)} = \frac{0}{5} = 0$ Si m = 0, la recta es horizontal.

Gráficamente:

a)



b)



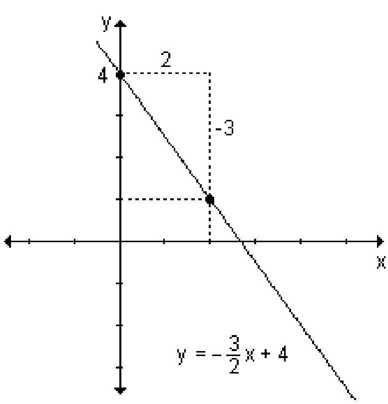
c) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-4}{2-0} = -\dfrac{3}{2}$.

Como la pendiente es negativa la función es decreciente (la recta "baja").

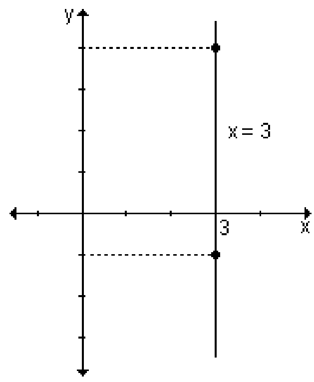
d) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4-(-1)}{3-3} = \dfrac{5}{0}$ no está definida.

Si la pendiente no está definida, la recta es vertical. (*Observación*: en este caso no es función)

c)



d)

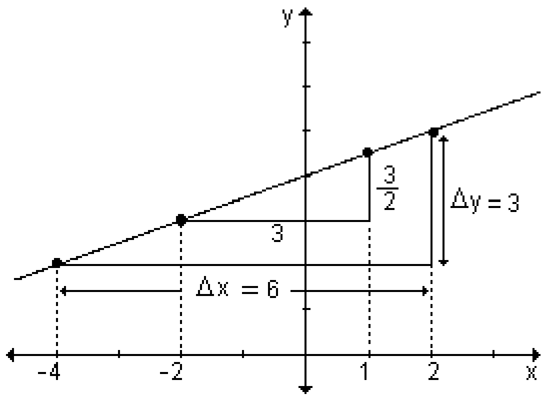


Dibujando rectas en el plano

Ejemplo: Representar la recta que pasa por los puntos (–4, 2) y (2, 5).

Hallando su pendiente resulta: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5-2}{2-(-4)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Para calcular la pendiente de una recta se puede tomar cualquier par de puntos que pertenecen a la misma.



Si tomamos otros puntos que le pertenecen, como por ejemplo, (–2, 3) y $\left(1, \frac{9}{2}\right)$

obtenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{9}{2} - 3}{1 - (-2)} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$.

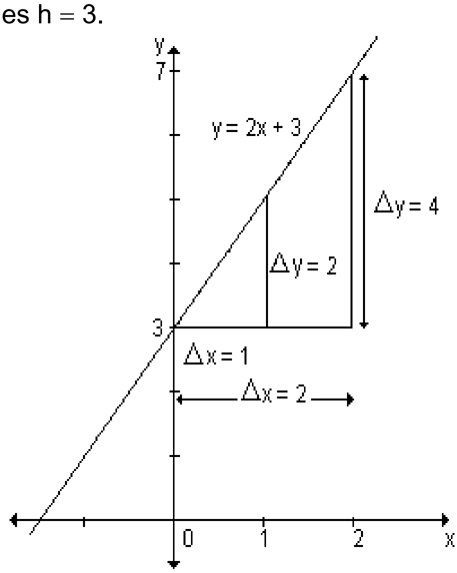
Ejemplo: Represente la gráfica de la función f : R → R / y = 2x + 3.

La intersección con el eje de ordenadas es h = 3.

Como la pendiente es 2, sabemos que la recta sube dos unidades por cada unidad que se mueve a la derecha.
También podemos decir que sube 4 unidades cada dos unidades que se mueve a la derecha.

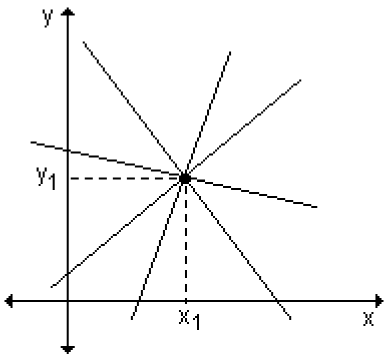
Es decir $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = ...$

En este caso, como la pendiente es positiva, la función resulta creciente.



Ecuación de la familia de rectas que pasan por un punto

La ecuación de la familia de rectas que pasan por un punto (x_1, y_1) está dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$ donde m es la pendiente y es distinta para cada una de las rectas de la familia.



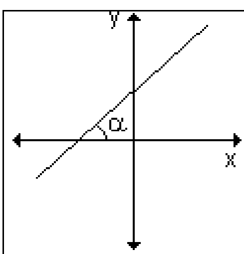
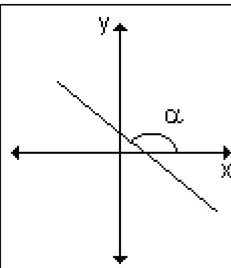
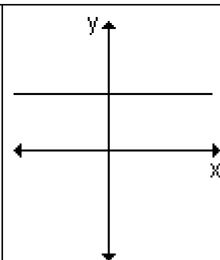
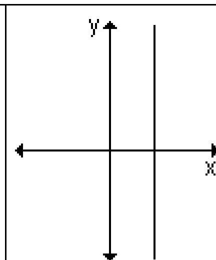
Si además de pasar por $P_1(x_1,y_1)$ la recta pasa por $P_2(x_2,y_2)$, como la pendiente está dada por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

resulta: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

La *ecuación de la recta que pasa por dos puntos* se puede escribir:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

En el cuadro siguiente se resumen los distintos valores que puede tomar la pendiente de una recta y su relación con el ángulo de inclinación:

 $m > 0$, α agudo	 $m < 0$; α obtuso	 $m = 0$, $\alpha = 0$	 la pendiente no está definida $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$
Función creciente	Función decreciente	Función constante	No es función

A continuación resumimos las distintas formas en las que se puede dar la ecuación de una recta:

Forma explícita	Forma punto-pendiente	Forma simétrica	Forma general o implícita
Conocida la pendiente y la ordenada al origen.	Conocida la pendiente y un punto que le pertenece.	Conocidos dos puntos que le pertenecen.	
$y = mx + h$	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$ax + by + c = 0$

Observaciones:

- Si la pendiente es nula ($m = 0$) se obtiene la *función constante*.
- La *función identidad* es un caso especial de la función de primer grado ($m = 1$, $h = 0$)
- Otro caso particular de la función de primer grado es la *función de proporcionalidad directa*, es decir, aquella donde las variables relacionadas son directamente proporcionales. Recordemos que todas las funciones de proporcionalidad directa tienen la forma $y = kx$, su gráfica pasa por el origen de coordenadas y la constante de proporcionalidad es $k = \dfrac{y}{x}$. La constante de proporcionalidad k es la pendiente de la recta.

Ejemplo: Halle la función de primer grado cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos (3, 1) y (–1, 2).

Utilizamos la forma punto–pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{3-(-1)} = \frac{-1}{3+1} = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{4}$$

Tomando el punto (3, 1) y reemplazando resulta: $y - 1 = -\frac{1}{4}(x-3)$.

Aplicando propiedad distributiva y llevando a la forma explícita:

$$y - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

Se llega al mismo resultado si tomamos el punto (–1, 2).

En efecto: $y - 2 = -\frac{1}{4}(x+1) \;\Rightarrow\; y - 2 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

Luego $f : R \to R \;/\; x \to -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ es la función buscada.

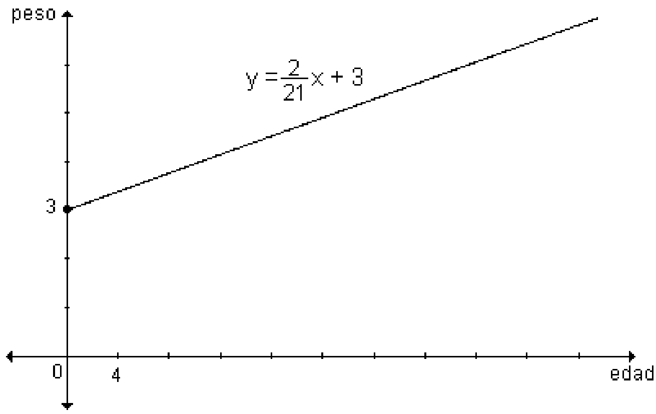
Problema

Las ballenas azules miden al nacer aproximadamente 2,25 m y pesan 3 toneladas. Estas ballenas jóvenes son amamantadas durante 7 meses y cuando se destetan miden 5 metros y pesan 23 toneladas.

a) Exprese el peso como función de primer grado de la edad. Grafique en un sistema de ejes coordenados. ¿Cuál es el aumento diario de peso? (considere un mes equivalente a 30 días)

b) Exprese la longitud como función de primer grado de la edad. ¿Cuánto aumenta la longitud cada día?

a) Debemos encontrar la función $y = f(x)$ donde x representa la edad e y el peso, por eso los puntos (0, 3) y (210, 23) pertenecen a la gráfica de la función buscada y = mx + h. La pendiente es $m = \dfrac{23-3}{210-0} = \dfrac{2}{21}$ y la ordenada al origen es 3, entonces $y = \dfrac{2}{21}x + 3$. Gráficamente:



El aumento diario de peso es de $\dfrac{2}{21} = 0{,}095$ toneladas.

b) Para determinar la función y = f(x) donde x representa la edad e y la longitud resulta que los puntos (0; 2,25) y (210, 5) pertenecen a la gráfica de la función buscada y = mx + h.
Procediendo de manera similar que en **a)** obtenemos:

$m = \dfrac{5-2{,}25}{210-0} = \dfrac{2{,}75}{210} \approx 0{,}013$ y $h = 2{,}25$

Por lo tanto, la función es $y = 0{,}013x + 2{,}25$
El aumento diario de la longitud es de 0,013 metros.

<u>Problema</u>

> Una empresa de correo de primera clase para entrega inmediata acepta, como máximo, bultos de 20 kg. y su tarifa es la siguiente:
>
> | Peso | Tarifa |
> |---|---|
> | 2 kilos o menos | \$ 3 con adicional por seguro incluido |
> | de 2 kg. a 10 kg. | \$ 5 y un adicional por seguro de 0,50 por kilo |
> | más de 10 kg. | \$ 9 y un adicional por seguro de 0,25 por kilo |
>
> Determine la ley de la función en cada tramo y trace la gráfica.

Sea x el peso enviado en kilogramos; x debe ser positivo y menor que 20, que es el máximo peso aceptado. El dominio de la función es el intervalo (0, 20].
Como los precios varían según los pesos enviados, resulta una función por tramos.

Para bultos cuyo peso es hasta 2 kg., la tarifa es \$ 3, f(x) = 3 para $0 < x \leq 2$.
En el primer tramo resulta una función constante.

En el segundo tramo, si el peso varía entre 2 y 10 kg. inclusive, se cobra \$ 5 y un adicional de \$ 0,50 por kilo enviado.
En el tercer tramo, si el peso oscila entre 10 y 20 kg. inclusive, se cobra \$ 9 y un adicional de \$ 0,25 por kilo enviado.
Podemos realizar tablas de valores para $2 < x \leq 10$ y para $10 < x \leq 20$.

Segundo Tramo

Peso	Tarifa
2	$5 + 0{,}50.\ 2 = 6$ (no se incluye en este tramo)
3	$5 + 0{,}50.\ 3 = 6{,}5$
4	$5 + 0{,}50.\ 4 = 7$
6	$5 + 0{,}50.\ 6 = 8$
8,5	$5 + 0{,}50.\ 8{,}5 = 9{,}25$
10	$5 + 0{,}50.\ 10 = 10$
x	$5 + 0{,}50.\ x$

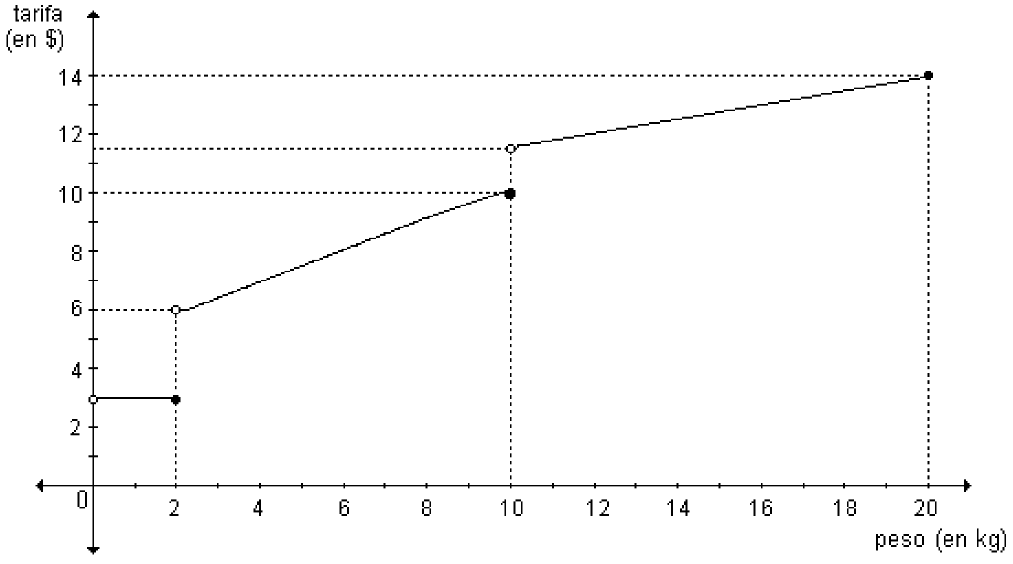
Tercer Tramo

Peso	Tarifa
10	$9 + 0{,}25.10 = 11{,}50$ (no se incluye en este tramo)
11	$9 + 0{,}25.11 = 11{,}75$
14	$9 + 0{,}25.\ 14 = 12{,}5$
16	$9 + 0{,}25.\ 16 = 13$
18	$9 + 0{,}25.\ 18 = 13{,}50$
20	$9 + 0{,}25.\ 20 = 14$
x	$9 + 0{,}25.\ x$

En consecuencia, la función queda definida de la siguiente manera:

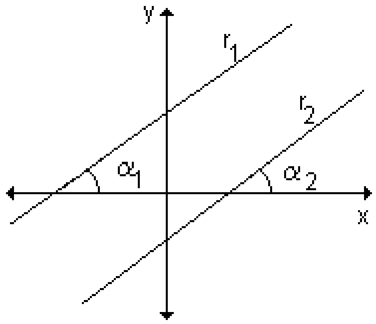
$$f : (0, 20] \to R \,/\, x \to \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 5 + 0{,}50x & \text{si} \quad 2 < x \leq 10 \\ 9 + 0{,}25x & \text{si} \quad 10 < x \leq 20 \end{cases}$$

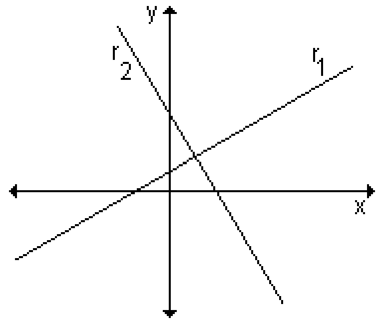
Graficando en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales donde x representa el peso del bulto en kilos e y la tarifa que debe abonarse, obtenemos:



Rectas paralelas y perpendiculares

Sea $r_1 : y = m_1x + h_1$ y $r_2 : y = m_2x + h_2$



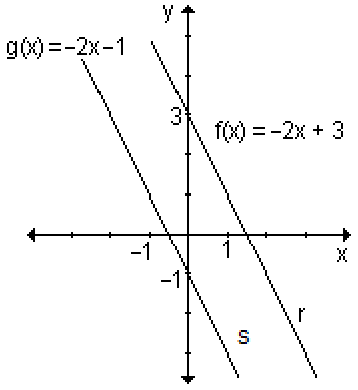


$r_1 \mathbin{//} r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ $\qquad r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Leftrightarrow m_1 \,.\, m_2 = -1$

Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.
Dos rectas no verticales son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1.

Ejemplo: Sea la función $f : R \to R \,/\, f(x) = -2x + 3$. Halle la función cuya gráfica es paralela a la gráfica de f(x) y que pasa por el punto P(–3, 5).

Debemos hallar una función g(x) cuya gráfica, la recta s, sea paralela a la gráfica de f(x), la recta r. Las rectas r y s tienen la misma pendiente, o sea, $m_r = m_s = -2$. La función g(x) tiene la forma $g(x) = -2x + h$.
Pero el punto P(–3,5) pertenece a la gráfica de g(x) y por lo tanto reemplazando sus coordenadas en g(x) deberá verificarse la igualdad, o sea: $5 = -2.(-3) + h$.



Despejando h resulta:

$5 = 6 + h \quad \Rightarrow \quad h = -1$

La función es $g(x) = -2x - 1$

Ejemplo: Sea la función $h : R \to R \,/\, h(x) = 3x - 4$. Halle la función cuya gráfica es perpendicular a la gráfica de h(x) pero que pase por el origen de coordenadas.

Debemos hallar una función t(x) cuya gráfica, la recta s, sea perpendicular a la gráfica de h(x), la recta r.

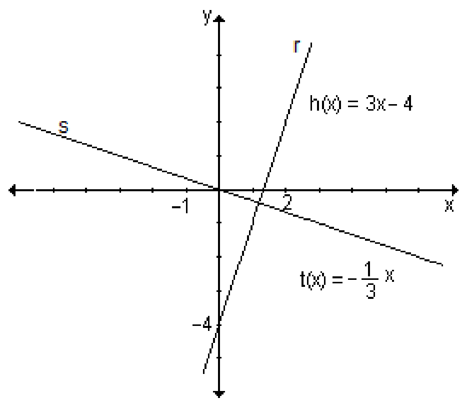
La pendiente de la recta s es el opuesto del recíproco de la pendiente de la recta r. Es decir:

$m_s = -\dfrac{1}{m_r} \;\Rightarrow\; m_s = -\dfrac{1}{3}$

La forma de la función t(x) es

$t(x) = -\dfrac{1}{3}x + h$. Pero sabemos que el origen de coordenadas le pertenece, entonces reemplazando resulta:

$0 = -\dfrac{1}{3}.0 + h \;\Rightarrow\; h = 0.$



La función buscada es $t : R \to R \,/\, t(x) = -\dfrac{1}{3}x$

EJERCICIOS

1) Halle la pendiente de las rectas determinadas por los puntos:

a) (–2, 0) , (–1, –3) **b)** (4, –2) , (3, 5)
c) (2, 3) , (–1, 3) **d)** (–4, 5) , (–4, –3)

2) Calcule la pendiente de las siguientes rectas:

a) $3y + 4x = -1$ **b)** $x - 2y + 6 = 0$

3) Determine la ecuación de la recta de pendiente m y ordenada al origen h.

a) $m = 2$; $h = 5$ **b)** $m = -3$; $h = -10$ **c)** $m = 1$; $h = -8$

4) Halle la ecuación de la recta dada la pendiente m y un punto que pertenece a la misma.

a) $m = 5$; (2, 4) **b)** $m = -3$; (0, 0) **c)** $m = -\dfrac{1}{4}$; (–2, –5)

5) Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

a) (–4, 4) ; (–2, –8) **b)** (2, 1) ; (4, 8) **c)** $\left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$; $\left(2, \dfrac{9}{2}\right)$

6) Analice cuáles de las siguientes rectas son paralelas:

a) $2x + 3y = -6$ **b)** $y = -\dfrac{3}{2}x - 5$ **c)** $y = -2 - \dfrac{2}{3}x$

d) $-2x - 3y = 5$ **e)** $x - \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2}$ **f)** $3x + 2y - 1 = 0$

7) Halle la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas. Grafique.

a) Paralela a $2x - 3y = 4$ y contiene a (–1, 2).
b) Paralela a $x + y = 3$ y contiene a (6, 4).
c) Paralela a $x = -3$ y contiene a (5, –1).
d) Paralela a $y = 5$ y contiene a (–2, –4).

8) Indique cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares:

a) $8 + 2y = 6x$ **b)** $x + 3y - 1 = 0$ **c)** $y = -3x - 2$

d) $y = \frac{1}{3}x + 9$ **e)** $2x + 6y = -3$ **f)** $3x - y + 2 = 0$

9) Halle la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas. Grafique.

a) Perpendicular a $y = -3$ y contiene a $(-2, -1)$.

b) Perpendicular a $x = \frac{3}{5}$ y contiene a $(1, 2)$.

c) Perpendicular a $3x + 4y = 8$ y contiene a $(-7, 3)$.

d) Perpendicular a $y = -2x$ y contiene a $(\frac{1}{2}, -1)$.

RESPUESTAS

1)a) -3 **b)** -7 **c)** 0 **d)** No existe

2)a) $-\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **3)a)** $y = 2x+5$ **b)** $y = -3x - 10$ **c)** $y = x - 8$

4)a) $y = 5x - 6$ **b)** $y = -3x$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x - \frac{11}{2}$

5)a) $y = -6x - 20$ **b)** $y = \frac{7}{2}x - 6$ **c)** $y = \frac{3}{5}x + \frac{33}{10}$

6) a // c // d ; b // f

7)a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ **b)** $y = -x + 10$ **c)** $x = 5$ **d)** $y = -4$

8) a, f $\perp$ b, e ; c $\perp$ d

9)a) $x = -2$ **b)** $y = 2$ **c)** $y = \frac{4}{3}x + \frac{37}{3}$ **d)** $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

Inecuaciones algebraicas

En muchos problemas surgen relaciones de "menor o mayor que" que conducen al planteo de inecuaciones.

Durante mucho tiempo el álgebra se ocupó principalmente de la solución de ecuaciones. Últimamente ha adquirido un nivel de importancia el estudio y análisis de las desigualdades.

Definición: Se llama *inecuación* a la desigualdad que se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Enunciamos dos leyes que se utilizan para obtener inecuaciones equivalentes.

1) Sumando a ambos miembros de una desigualdad entre números reales un mismo número real o una expresión algebraica racional entera de primer grado, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada.

Simbólicamente: si a, b, c $\in$ R

$$\begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a + c > b + c \end{array}$$

2) Multiplicando ambos miembros de una desigualdad entre números reales por un mismo número real, distinto de cero, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada si el número real es positivo, y de sentido contrario, si el número real es negativo. Simbólicamente: si a, b, c $\in$ R, c $\neq$ 0

$$\begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a \, . \, c > b \, . \, c \end{array} \quad \text{si} \quad c > 0 \qquad\qquad \begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a \, . \, c < b \, . \, c \end{array} \quad \text{si} \quad c < 0$$

Inecuaciones de primer grado en una variable

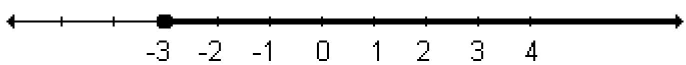
Una inecuación de primer grado en una variable puede escribirse de la forma ax + b < 0 (o bien $\geq$ 0 , $\leq$ 0 , > 0) donde a y b son constantes reales y a es distinta de 0. Gráficamente la solución de una inecuación de primer grado en una variable es un conjunto de puntos sobre la recta real que satisfacen la desigualdad.

Ejemplos: Resuelva analítica y gráficamente las siguientes inecuaciones

a) $3x + 1 \geq x - 5$ **b)** $3(y + 3) \leq 5y - 3$

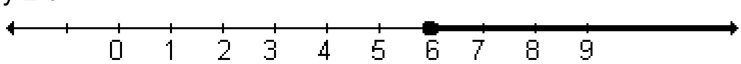
c) $9 + x < 7 - (x - 2)$ **d)** $|3x - 1| > 8$

a) $3x + 1 \geq x - 5 \Rightarrow 3x - x \geq -5 - 1 \Rightarrow x \geq \dfrac{-6}{2} \Rightarrow x \geq -3$



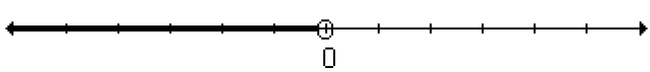
El conjunto solución es A = {x / x $\in$ R $\wedge$ x $\geq$ –3}. El conjunto solución también se puede escribir como el intervalo [–3, ∞).

b) $3(y + 3) \leq 5y - 3 \Rightarrow 3y + 9 \leq 5y - 3 \Rightarrow 3y - 5y \leq -9 - 3 \Rightarrow -2y \leq -12 \Rightarrow y \geq 6$



La solución son todos los números del intervalo [6, ∞).

c) $9 + x < 7 - (x - 2) \Rightarrow 9 + x < 7 - x + 2 \Rightarrow x + x < 7 + 2 - 9 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$



La solución son todos los números del intervalo (–∞, 0).

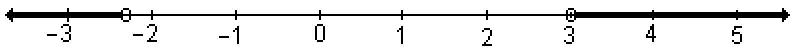
d) $|3x - 1| > 8$

Aplicando las propiedades de valor absoluto, obtenemos que los valores buscados de x deben verificar: $3x - 1 > 8$ ó $3x - 1 < -8$.
Resolviendo las desigualdades resulta:

$3x - 1 > 8 \Rightarrow 3x > 9 \Rightarrow x > 3$

$3x - 1 < -8 \Rightarrow 3x < -8 + 1 \Rightarrow x < -\frac{7}{3}$

Por lo tanto, x puede tomar cualquier valor menor que $-\frac{7}{3}$ ó cualquier valor mayor que 3.



La solución es la unión de dos intervalos, $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup (3, \infty)$.

Problema

> La relación existente entre temperaturas medidas en las escalas Celsius y Fahrenheit está dada por $F = 1{,}8C + 32$. ¿Entre qué valores varía la temperatura en grados Celsius (C) si $68 \leq F \leq 86$?

Si la temperatura en grados Fahrenheit (F) varía entre 68 y 86, debemos hallar entre qué valores lo hace medida en grados Celsius. Si partimos de $68 \leq F \leq 86$ y reemplazamos F por 1,8C + 32, resulta $68 \leq 1{,}8C + 32 \leq 86$.
Despejamos C restando 32 a cada miembro: $68 - 32 \leq 1{,}8C \leq 86 - 32$
Dividiendo por 1,8 la desigualdad no cambia de sentido ya que es positivo y obtenemos: $\frac{68-32}{1{,}8} \leq C \leq \frac{86-32}{1{,}8}$ y resolviendo se obtiene $20 \leq C \leq 30$.
La temperatura en grados Celsius varía entre 20 y 30 mientras que en grados Fahrenheit lo hace entre 68 y 86.

Problema

> Una compañía de transporte tiene una flota de camiones cuyo costo de funcionamiento por cada camión se estima en $c(m) = 0{,}5m + 1400$. Dicho costo está expresado en dólares y m es la cantidad de kilómetros recorridos. Si la compañía quiere que dicho costo por camión no supere los 6000 dólares, ¿cuál es el tope máximo de kilómetros que puede recorrer?

El costo no debe superar los 6000 dólares, es decir, debe ser menor o a lo sumo igual que 6000 dólares. Por ello planteamos:
$c(m) \leq 6000 \Rightarrow 0{,}5m + 1400 \leq 6000 \Rightarrow 0{,}5m \leq 6000 - 1400 \Rightarrow$
$0{,}5m \leq 4600 \Rightarrow m \leq 4600 : 0{,}5 \Rightarrow m \leq 9200$. Cada camión puede recorrer hasta 9200 kilómetros para que el costo no supere 6000 dólares.

Problema

> Ana desea comprar una cartera y un cinto. No puede gastar más de \$ 78. Encuentra un cinto en \$ 15.
> Si lo compra, ¿cuánto es lo máximo que puede gastar en la cartera?

Para dar respuesta a este problema, modelizamos la situación. Llamamos con c al precio máximo de la cartera y como tenemos \$ 78 para gastar debe ser:

$c + 15 \leq 78 \quad \Rightarrow \quad c \leq 78 - 15 \quad \Rightarrow \quad c \leq 63$

Debemos buscar una cartera que, como máximo, cueste \$ 63.

Problema

> Marcelo necesita un televisor y un equipo de música. Puede gastar, en total, \$ 950. El televisor que le interesa vale \$ 450 más el 12 % de impuestos. ¿Cuál es el precio de lista máximo que puede tener el equipo de música sin exceder el dinero disponible? Tener en cuenta que en el precio de lista no está incluido el impuesto.

Si p es el precio de lista del equipo de música podemos escribir:

$$\underbrace{450}_{\text{precioT.V.}} + \underbrace{0{,}12.450}_{\text{impuesto}} + \underbrace{\quad p \quad}_{\text{precioequipo}} + \underbrace{0{,}12p}_{\text{impuesto}} \leq 950$$

$450 + 0{,}12.450 + p + 0{,}12p \leq 950 \Rightarrow 450 + 54 + 1{,}12\, p \leq 950 \Rightarrow$

$1{,}12\, p \leq 446 \Rightarrow p \leq 398{,}21.$

El precio del equipo de música no puede exceder los \$ 398,21.

Problema

> Un automóvil se alquila por \$ 12 diarios más \$ 0,20 por kilómetro. Si nuestro presupuesto diario es de \$ 80, ¿hasta cuántos kilómetros podemos recorrer para mantener el presupuesto?

Si llamamos con x a la cantidad de kilómetros diarios y teniendo en cuenta que el costo fijo es de \$ 12 diarios la expresión (12 + 0,20x) representa el gasto diario. Como disponemos de \$ 80, resulta la inecuación:

$12 + 0{,}20x \leq 80 \quad \Rightarrow \quad 0{,}20x \leq 80 - 12 \quad \Rightarrow \quad x \leq 68 : 0{,}20 \quad \Rightarrow \quad x \leq 340$

Para mantener el presupuesto se pueden recorrer hasta 340 kilómetros diarios.

Problema

> Un vendedor de seguros, por cada seguro de \$ 90 vendido, gana el 12 % de comisión.
> **a)** ¿Cuántos seguros debe vender para ganar por lo menos \$ 270 al mes si trabaja por comisión únicamente? ¿Si percibe \$ 100 mensuales más la comisión?
> **b)** Si le ofrecen elegir entre una comisión directa del 15 % de todas las ventas ó \$ 126 más el 10 % de todas las ventas, ¿cuántos seguros deben ser vendidos para que el plan de la comisión directa sea la mejor elección?

a) Si llamamos con x a la cantidad de seguros vendidos al mes la expresión $0{,}12.90x = 10{,}8x$ representa la ganancia al vender x seguros de \$ 90 cada uno. Si dicha ganancia debe ser por lo menos \$ 270 resulta la inecuación:
$10{,}8x \geq 270 \Rightarrow x \geq 270 : 10{,}8 \Rightarrow x \geq 25$.
Si trabaja únicamente por comisión, debe vender al mes, como mínimo, 25 seguros.
Si percibe \$ 100 mensuales más la comisión, su ingreso mensual está representado por la expresión $(100 + 10{,}8x)$. Si desea ganar por lo menos \$ 270 al mes resulta:
$100 + 10{,}8x \geq 270 \Rightarrow 10{,}8x \geq 270 - 100 \Rightarrow x \geq 170 : 10{,}8 \Rightarrow x \geq 15{,}74$
Como se trata de cantidad de seguros vendidos mensualmente, debe vender como mínimo 16 seguros.

b) Si trabaja únicamente con comisión directa del 15 % la expresión que representa su ingreso mensual $0{,}15.90.x = 13{,}5x$.
Si en cambio gana \$ 126 más el 10 % del total de las ventas su ingreso será $126 + 0{,}10.90.x = 126 + 9x$.Para que le convenga el plan de la comisión directa debe ser: $13{,}5x > 126 + 9x \Rightarrow 13{,}5x - 9x > 126 \Rightarrow 4{,}5x > 126 \Rightarrow x > 28$
Deberá vender más de 28 seguros mensuales.

Problema

> Una agencia de alquiler de automóviles ofrece dos planes: el plan A cuesta \$ 0,20 el kilómetro y el plan B cuesta \$ 7 más \$ 0,15 el kilómetro, ¿hasta cuántos kilómetros conviene el plan A?

Si llamamos con x a la cantidad de kilómetros recorridos la expresión $0{,}20x$ representa al plan A y la expresión $7 + 0{,}15x$ representa el plan B.
Para que convenga el plan A debe ser $0{,}20x < 7 + 0{,}15x$.
Resolviendo: $0{,}20x - 0{,}15x < 7 \Rightarrow 0{,}05x < 7 \Rightarrow x < 7 : 0{,}05 \Rightarrow x < 140$
Para que convenga el plan A debe recorrer menos de 140 kilómetros.

Problema

> El peso esperado (en kilogramos) de una ballena adulta se relaciona con su longitud (en cm), siempre que ésta varíe entre 200 cm y 1000 cm, mediante la expresión de primer grado $p(x) = 1{,}70x - 51$.
> **a)** Unos investigadores marinos encontraron una ballena de 9 metros, ¿cuál es su peso?
> **b)** ¿Cuál debería ser su longitud para superar la tonelada de peso?

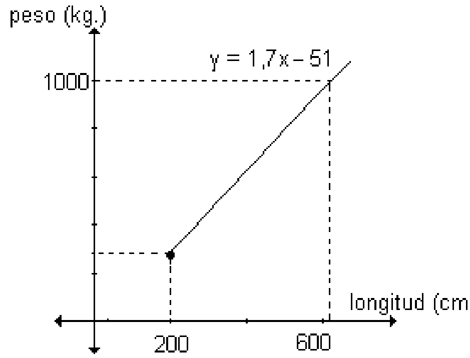
a) Para saber su peso sabiendo que su longitud es de 9 m, o sea, 900 cm, reemplazamos x por 900 y resulta: $p(900) = 1{,}70.900 - 51 \Rightarrow p(900) = 1479$
Es decir, una ballena de 9 metros pesa 1479 kilos.

b) Para determinar la longitud que debe alcanzar para superar la tonelada (1000 kilos) de peso planteamos:

$p(x) > 1000 \Rightarrow 1{,}70x - 51 - 1000 > 0$
$\Rightarrow 1{,}70x - 1051 > 0$

Es una inecuación de primer grado en una variable: $1{,}70x - 51 > 1000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}70\,x > 1051 \Rightarrow x > 618{,}24$

Para que su peso sea mayor a una tonelada, su longitud debe superar los 618,24 cm (6,1824 metros) y, por el dominio de definición de la función, ser menor o igual a 1000 cm (10 metros).



EJERCICIO

Encuentre los números reales que verifican:

a) $x - 1 < 0$ **b)** $x - 2 \leq 2x + 4$ **c)** $x - 1 \geq 2x + 3$
d) $-4 \leq x - 5 \leq 14$ **e)** $|x| < 1$ **f)** $|6 - (x - 3)| \leq 9$

RESPUESTAS

a) $(-\infty, 1)$ **b)** $[-6, \infty)$ **c)** $(-\infty, -4]$
d) $[1, 19]$ **e)** $(-1, 1)$ **f)** $[0, 18]$

Inecuaciones de primer grado con dos variables

Una inecuación de primer grado en las variables x e y es una desigualdad que puede escribirse de la forma:

$ax + by + c < 0$ $ax + by + c \leq 0$
$ax + by + c > 0$ $ax + by + c \geq 0$,
donde a, b y c son constantes y a o b distintas de cero.

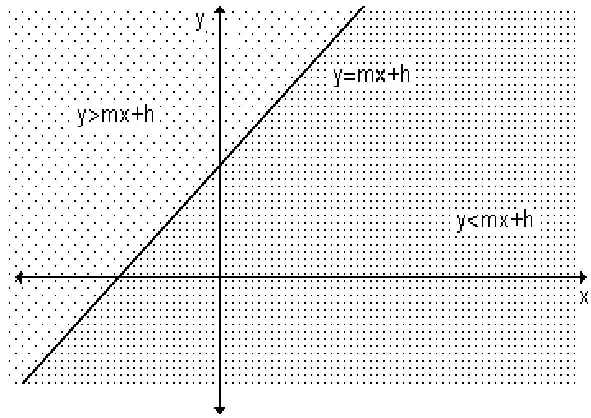
Despejando y en cada uno de los casos planteados surgen las siguientes desigualdades: $y > mx + h$, $y \geq mx + h$, $y < mx + h$ o bien $y \leq mx + h$.
Geométricamente, la solución de una desigualdad de primer grado en x e y consiste en todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

CASO 1: La gráfica de la recta $y = mx + h$ (no vertical) divide al plano en tres partes distintas:

a) la misma recta, que consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen y = mx + h.

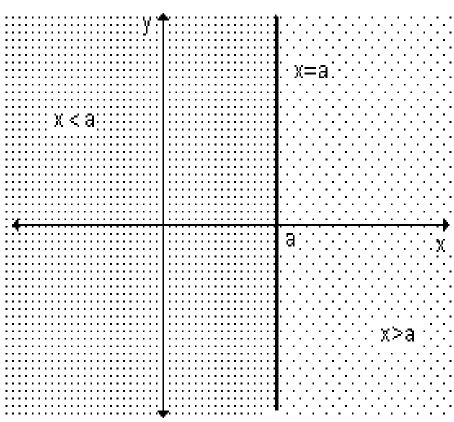
b) la región que se encuentra por encima de la recta y que consiste en todos los puntos (x, y) que satisfacen
y > mx + h.

c) la región que se encuentra por debajo de la recta y que consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen
y < mx + h.

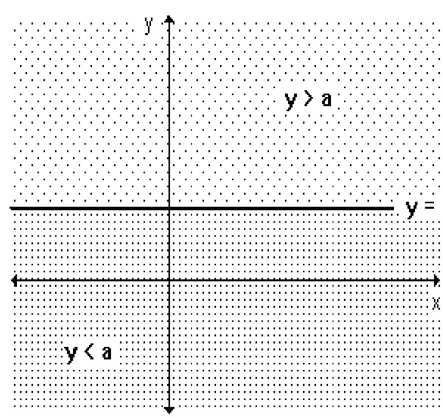


CASO 2: Para una recta vertical (x = a) se consideran tres regiones: la misma recta x = a, la que se encuentra a su derecha (x > a) y la que está a su izquierda (x < a).

CASO 3: Para una recta horizontal (y = a) se consideran tres regiones: la misma recta, la que se encuentra arriba (y > a) y la que está abajo (y < a).



CASO 2



CASO 3

Nota: Como convención adoptamos que las rectas de trazo lleno se incluyen en la solución mientras que las punteadas no se incluyen.

Podemos enunciar y resumir en dos grandes pasos la forma para obtener la solución de desigualdades lineales.

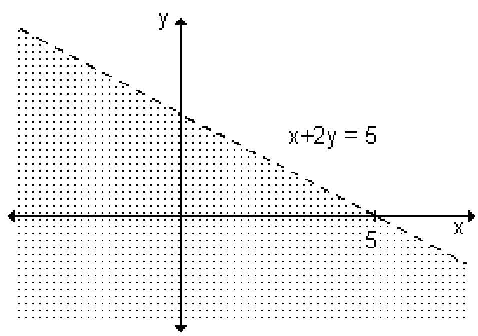
Primer paso: Trazar la gráfica de la recta y = mx + h, teniendo en cuenta que:

- el trazo debe ser continuo si la desigualdad es ≤ ó ≥. Esto significa que los pares de valores (x, y) que están ubicados sobre la recta son parte de la solución.

• el trazo será discontinuo (línea de puntos) si la relación es > ó < para indicar que los pares de valores (x, y) que pertenecen a la recta no son parte de la solución.
Segundo paso: Sombrear la región apropiada arriba o abajo de la recta, a izquierda o derecha. La región a sombrear se puede determinar sustituyendo los valores de cualquier punto en la desigualdad. Debemos tener en cuenta que:
• si al sustituir el punto elegido en la desigualdad ésta resulta verdadera, se debe sombrear el sector en el cual se encuentra el punto,
• si al sustituir el punto elegido en la inecuación ésta resulta falsa se debe sombrear la zona que no contiene al punto elegido.

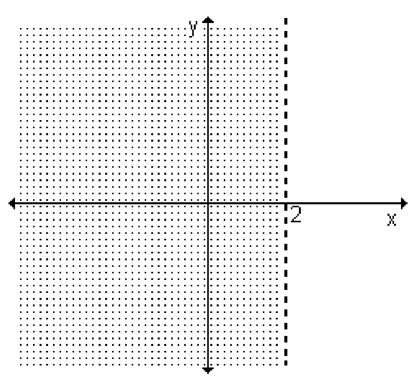
Ejemplos:
a) Halle gráficamente la solución de $x + 2y < 5$.
b) Represente gráficamente el conjunto $x < 2$ para todo valor de y real.
c) Grafique el conjunto de puntos definido por $y \geq 3x - 2$

a) Escribimos la desigualdad de la forma $y < \frac{5-x}{2}$. Graficamos la recta $y = \frac{5-x}{2}$. El trazo de gráfica de la recta es discontinuo (línea punteada) pues se trata de una relación de menor.

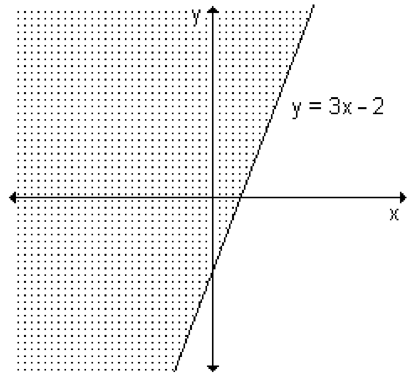


Podemos observar que, si elegimos por ejemplo el punto (0, 0) y reemplazamos sus coordenadas en la inecuación $x + 2y < 5$, resulta válida la desigualdad ya que: $0 + 2.0 < 5$ y por lo tanto el punto (0, 0) pertenece a la región solución.
Mientras que, si elegimos por ejemplo el punto (6, 3), al reemplazar sus coordenadas en la inecuación dada, se obtiene: $6 + 2.3 = 12$ que es mayor que 5 (no cumple la desigualdad planteada). Por lo tanto, el punto (6, 3) no pertenece a la región solución.
La solución consiste en todos los puntos que se encuentran debajo de la recta.

b) Trazamos con línea punteada la recta vertical $x = 2$ y sombreamos el semiplano a la izquierda pues todos los puntos incluidos en él verifican que su primer coordenada es menor que dos.



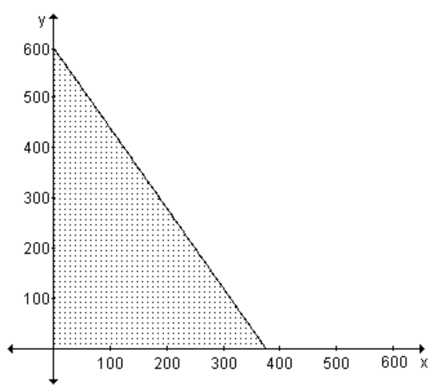
c) Trazamos con línea continua la recta y = 3x – 2.
Quedan determinados dos semiplanos. Tomamos un punto cualquiera para determinar si pertenece al conjunto solución, por ejemplo el
(0, 0).
Al reemplazar en la desigualdad resulta verdadera $0 \geq 3 . 0 - 2$ por lo tanto el semiplano solución es el que incluye al punto (0, 0).



Problema

En un auditorio se va a realizar próximamente un espectáculo musical. Para este evento las entradas costarán $ 8 para ciertos lugares y $ 5 para los demás. La comisión organizadora desea recaudar como máximo $ 3000. Grafique la región del plano que corresponde a las posibles estrategias de venta.

Llamamos con x a la cantidad de entradas que se venden a $ 8 y con y a las que se venden a $ 5. Como se espera recaudar como máximo $ 3000 resulta la desigualdad $8x + 5y \leq 3000$.
Despejando y obtenemos la expresión $y \leq 600 - \frac{8}{5}x$. Como las variables representan cantidad de entradas sólo se consideran los valores enteros mayores o iguales que cero. Los puntos (x, y) de la región sombreada donde, tanto x como y son números naturales incluido el cero, verifican la desigualdad.



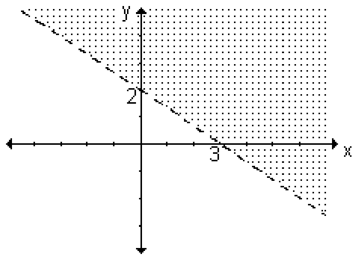
EJERCICIO

Represente gráficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

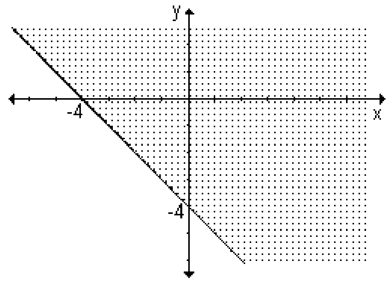
a) $2x + 3y - 6 > 0$ **b)** $y \geq -x - 4$ **c)** $x + 4 \leq 0$ **d)** $-y > 6$

RESPUESTAS

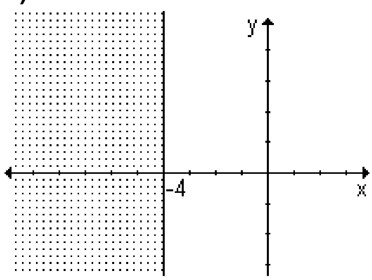
a)



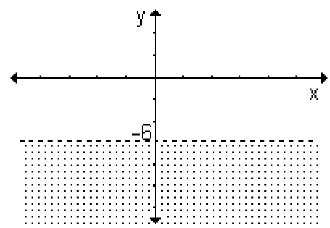
b)



c)

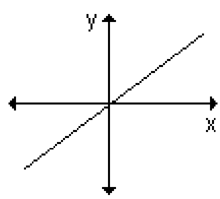
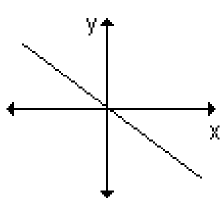
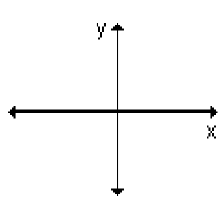


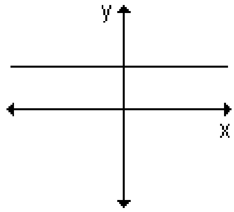
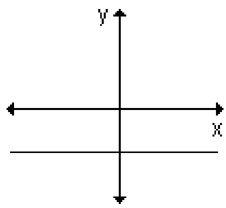
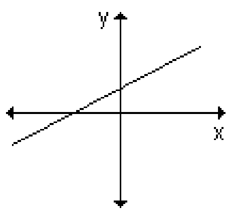
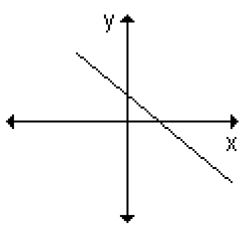
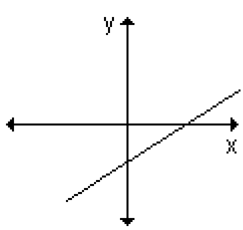
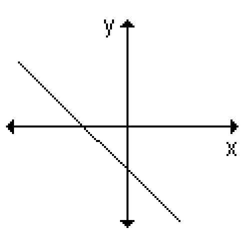
d)



GUÍA DE ESTUDIO 2.2 FUNCIÓN DE PRIMER GRADO

1) Dada la función de primer grado y = mx + h, complete con < 0, > 0 ó = 0 para los valores de m y h, según las siguientes gráficas:

Gráfica	m	h
a) 		
b) 		
c) 		

d) 		
e) 		
f) 		
g) 		
h) 		
i) 		

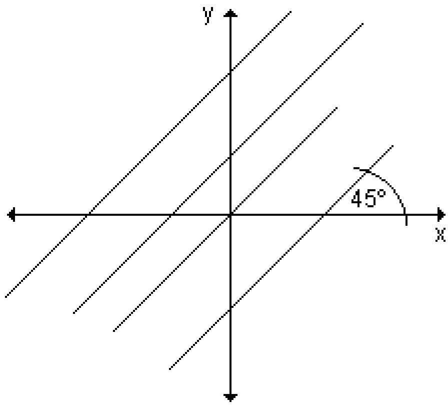
2) Dadas las ecuaciones $y = m_1 x + h_1$; $y = m_2 x + h_2$, ¿qué particularidad tienen sus gráficas en cada caso?

a) Si $m_1 \neq m_2 \wedge h_1 \neq h_2$ **b)** Si $m_1 \neq m_2 \wedge h_1 = h_2$

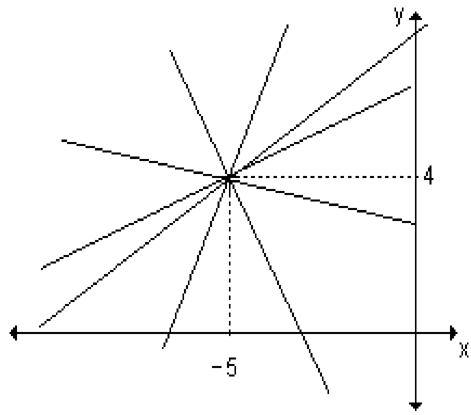
c) Si $m_1 = m_2 \wedge h_1 \neq h_2$ **d)** Si $m_1 = m_2 \wedge h_1 = h_2$

3) ¿Cuál es la ecuación de la familia de rectas?

a)



b)



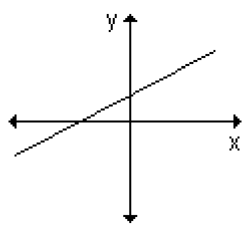
4) Dada la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$

a) Marque la respuesta correcta

a_1) $a < 0$, $b > 0$ y $c < 0$

a_2) $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$

a_3) $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$

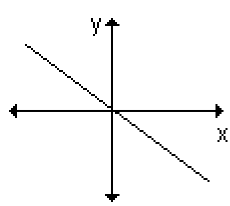


b) Marque la respuesta correcta

b_1) $a < 0$, $b > 0$ y $c = 0$

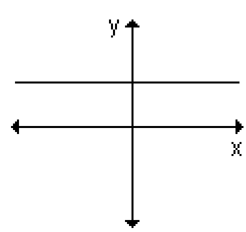
b_2) $a > 0$, $b > 0$ y $c = 0$

b_3) $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$



c) Complete con < , > o =

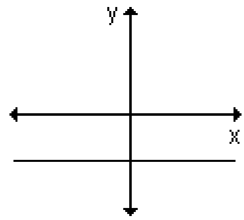
a ..... 0 , b ..... 0 , c 0



d) Complete con < , > o =

d) Complete con < , > o =

a ..... 0 , b ..... 0 , c 0



EJERCICIOS INTEGRADORES 2.2 FUNCIÓN DE PRIMER GRADO

1) Halle la función de primer grado que satisfaga las condiciones dadas y grafique en cada caso:

a) interseca al eje de abscisas en 2 y al eje de ordenadas en -1.

b) es perpendicular a la gráfica de la función $2x + 4y + 3 = 0$ y pasa por el punto (3, 2).

2) **a)** Calcule el valor de k para el cual la recta $4x + ky = 5$ pasa por el punto P(2,1).

b) Halle las intersecciones con los ejes coordenados. Grafique.

3) Sean las funciones de primer grado $f : R \to R \,/\, x \to \frac{k+1}{2}x + 5$ y $g: R \to R \,/\, x \to -\frac{2}{3k}x$, determine el valor de k para que sus gráficas resulten perpendiculares. Para dicho valor de k, grafique ambas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

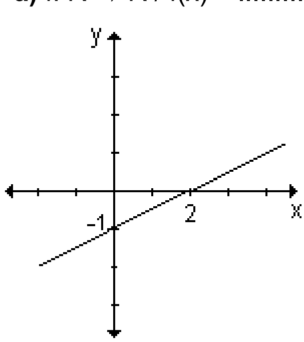
4) Grafique la función e indique sus parámetros: $f : R \to R \,/\, x \to -2x - 1$.

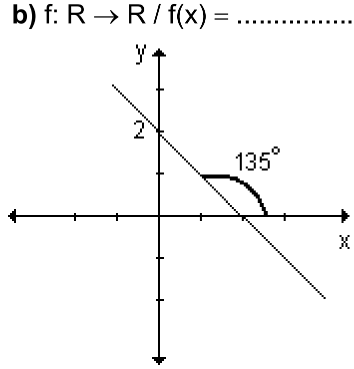
5) Trace la gráfica de $y = 4x$ y a partir de la misma grafique las siguientes expresiones utilizando transformaciones.

a) $y = x$ **b)** $y = 4x - 3$ **c)** $y = 4x + 5$

6) Complete la definición de función dada en cada caso para que la gráfica sea:

a) f: $R \to R$ / f(x) = ... **b)** f: $R \to R$ / f(x) = ...





Indique de qué tipo de función se trata.

7) Dada la función f: $R \to R$/ $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

a) Halle dos puntos que pertenezcan a su gráfica. Grafique.

b) Defina las funciones cuyas gráficas son rectas perpendiculares a la gráfica del ítem a.

c) Determine si los puntos P(3, −1); Q(−3, 3) y R(6, −1) pertenecen a la gráfica de la función.

8) Sea $f : R \to R$ una función de primer grado. Se sabe además que $f(0) = 4$ y $f(2) = -1$. Encuentre la ley que caracteriza a f(x) y grafique.

9) Dada la función de primer grado $f: R \to R \,/\, x \to -2x + p$. Halle el valor de la ordenada al origen para que el punto (1,3) pertenezca a la gráfica de la función.

10) Dados los puntos $P_1\,(t\,,\,3t + 1)$ y $P_2\,(1- 2t\,,\,t)$

a) Halle el valor de t para que la pendiente de la recta determinada sea 4.

b) Para dicho valor de t defina la función de primer grado correspondiente.

c) Grafique.

11) La gráfica de una función de primer grado contiene los puntos P(4, –6) y R(t, 8). Halle:

a) el valor de t para que la pendiente sea −2.

b) la ecuación de la función y determine la ordenada al origen.

c) la ecuación de la recta paralela a la gráfica de la función dada y tal que el origen de coordenadas le pertenezca.

12) Encuentre los valores de x sobre la recta real que verifican:

a) $(x - 2)^2 \geq x^2 - 3x + 1$ **b)** $3 - (x + 3) < 5 - x$

c) $\dfrac{2x+1}{5} - \dfrac{2-x}{3} > 1$ **d)** $|2x - 1| < 5 - x$

13) Resuelva

a) $3x + 2y < 18$ **b)** $x - y \geq -8$ **c)** $-x + y \leq 3$ **d)** $2x + \dfrac{5}{2}y > 20$

14) La relación entre el tiempo de funcionamiento t (en horas) de una bomba y la cantidad de agua y (en hl) de un tanque conectado a dicha bomba está dada por la ley $y = 300t + 500$. ¿Cuánto tiempo debe funcionar la bomba para que en el tanque haya más de 1 100 hectolitros?

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2.2 FUNCIÓN DE PRIMER GRADO

1) En pruebas de dietas experimentales para gallinas, se determinó que el peso promedio w (en gramos) de una gallina en pie era estadísticamente una función de primer grado del número d de días posteriores al inicio de una dieta, en donde $0 \leq d \leq 50$. Supóngase que el peso promedio de una gallina al principio de la dieta fue de 40 grs. y de 675 grs. a los 25 días.

a) Determine la expresión matemática que describe esta función.

b) Calcule el peso promedio de una gallina a los 10 días iniciada la dieta.

2) Un comerciante coloca al mercado 400 unidades de un producto cuando el precio por unidad es \$ 120 y 500 unidades si es de \$ 80. Si el precio es función de primer grado de la oferta,

a) Escriba la función correspondiente.

b) Represéntela gráficamente.

c) Indique qué cantidad de producto se debería ofrecer para que el precio por unidad sea de \$ 180.

3) La demanda semanal de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de \$ 58 por unidad y de 200 unidades si el precio es de \$ 51 por unidad. Si el precio es función de primer grado de la demanda.

a) Escriba la función correspondiente.

b) Represéntela gráficamente.

c) ¿Cuál sería la demanda si el precio del producto es de \$ 44?

4) Un comerciante colocaría en el mercado 50 unidades de un producto si el precio es de \$ 35 y 35 unidades si es de \$ 30 por unidad. Si el precio es función de primer grado de la oferta,

a) Escriba la función correspondiente.

b) Represéntela gráficamente.

c) ¿Qué cantidad de producto se ofrecería para que el precio sea de \$ 33 por unidad?

5) Si los consumidores demandan 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$ 12 por unidad y 25 unidades si el precio es de \$ 18 y considerando que el precio es una función de primer grado de la demanda,

a) Escriba la función correspondiente.

b) Represéntela gráficamente.

c) ¿Cuál sería el precio por unidad si se demandan 30 unidades?

6) En pruebas de dietas experimentales para cerdos, se determinó que el peso promedio w (en Kg.) de un cerdo, es estadísticamente función de primer grado del número de días d posteriores al inicio de la dieta, en donde $0 < d < 100$. Si el peso de un cerdo fue de 20 Kg. al comienzo de la dieta y luego aumentó 6,6 Kg. cada 10 días, **a)** Determine la función correspondiente.

b) Obtenga el peso de un cerdo 50 días después del inicio de la dieta.

7) Los biólogos han descubierto que el número de chirridos que los grillos de cierta especie emiten por minuto está relacionado con la temperatura. La relación es casi de primer grado. A 68 ^{o}F los grillos chirrían 124 veces por minuto aproximadamente, mientras que a 80 ^{o}F, lo hacen más o menos 172 veces por minuto. Obtenga la función que relaciona el número de chirridos c por minuto con la temperatura Fahrenheit t.

8) En una experiencia realizada en invernaderos se determinó que el porcentaje de semillas germinadas depende de la temperatura ambiental. Para una variedad de semillas de tomate el 40 % germina a 12 ^{o}C, mientras que a 15 ^{o}C germina el 70 % de las mismas. Si el porcentaje de semillas germinadas p es función de primer grado de la temperatura t.

a) Obtenga la expresión matemática que relaciona p y t.

b) Calcule el porcentaje de germinación a 10 ^{o}C.

c) Halle la temperatura necesaria para obtener un 90 % de semillas germinadas.

d) Represente todo gráficamente.

9) El ritmo cardíaco r (en latidos por minutos) de un gato es función de primer grado de su temperatura corporal t (expresada en grados Celsius). En condiciones de laboratorio un gato con 37 °C tiene un ritmo cardíaco de 200 y su ritmo es 150 si la temperatura es de 32 °C.

a) Halle la expresión matemática de la función.

b) ¿A qué temperatura corporal su ritmo cardíaco es 100?

c) Represente todo gráficamente.

10) El crecimiento en gramos por día de un pollito varía con la cantidad de antibiótico (en mg./día) que se le da, según una función de primer grado.

a) Encuentre la ecuación que relacione la tasa de crecimiento r (g./día) con la cantidad de antibiótico a (mg./día) si un pollito que recibe 5 mg./día de antibiótico tiene un crecimiento de 50 g./día mientras que uno que recibe 10 mg./día tiene un crecimiento de 60 g/día.

b) Encuentre la tasa de crecimiento para un pollito que no recibe antibiótico.

11) Un departamento de policía estima que el número de delitos graves que se presentaran cada semana depende de la cantidad de oficiales de policía asignados a la vigilancia preventiva. La función que los relaciona está definida por

$c(p) = 850 - 7{,}5p$ donde c es el número de crímenes que se esperan por semana y p representa el número de oficiales asignados a la vigilancia.

a) Grafique la función en un sistema de coordenadas cartesianas.

b) Calcule las intersecciones con los ejes coordenados.

c) Interprete el significado de las intersecciones en términos del problema.

d) Determine la cantidad de policías que deben asignarse para que el número de crímenes que se esperen por semana sea 100.

12) En 1960 se publicó que la longitud total x y la longitud de la cola de serpientes hembras de la especie lampropeltis polyzona están relacionadas por medio de una función de primer grado. Si una serpiente mide 455 mm su cola mide 60 mm, y si mide 1050 mm, 140 mm su cola.

a) Si la longitud máxima de una serpiente de esta especie es 1400 mm, ¿cuál es la longitud de su cola?

b) Si una serpiente tiene una longitud de cola de 100 mm, ¿cuál es su longitud total?

13) La longitud de una varilla metálica es de 108,75 cm a 25 °C y de 109,08 cm a 36 °C. Si esta situación se describe adecuadamente por una función de primer grado, encuentre la ley que define la longitud de la varilla en función de la temperatura.

14) El peso aproximado de la masa muscular del ser humano es función de primer grado del peso total.

a) Determine la ecuación de la función sabiendo que una persona que pesa 90 kg. tiene aproximadamente 36 kg. de masa muscular (tener en cuenta que si el peso total es 0 kg., el de la masa muscular es 0 kg.).

b) Obtenga el peso aproximado de masa muscular de una persona que pesa 70 kg.

c) Obtenga el peso de una persona cuya masa muscular es de 45 kg.

15) La cantidad de calor h (en joules) que se necesita para convertir 1 g de agua en vapor es función de primer grado de la temperatura t (en ^{0}C) de la atmósfera.
A 10 ^{0}C, esta conversión necesita 2480 joules, y cada aumento de temperatura de 15 ^{0}C disminuye en 40 joules el calor necesario. Obtenga la función matemática que describe esta situación.
16) Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y niños. Se tienen dos fórmulas para modificar la dosis de los adultos cuando se trata de niños. Son:

Regla de Cowling: $y = \frac{1}{24}(t+1)a$ y regla de Friend: $y = \frac{2}{25}t\,a$

donde a representa la dosis de adultos (en miligramos) y t la edad del niño (en años).

a) Si a = 100, trace la gráfica de las dos funciones en el mismo sistema coordenado considerando $0 \le t \le 12$.

b) Halle para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis.

17) Un productor agropecuario, a lo largo de distintos manejos de un rodeo de cría, ha comprobado en el transcurso de 10 años que la ganancia en peso por animal/día nunca alcanzó los 500 gramos y como mínimo fue de 200 gramos por animal/día. ¿Cómo interpretaría analítica y gráficamente el rango de variación esperado para dicho productor?
18) Una compañía que construye y vende escritorios tiene gastos generales semanales que incluyen salarios y costos de la planta de \$ 3400. El costo de los materiales para cada escritorio es \$ 40 y se venden a \$ 200 cada uno. ¿Cuántos escritorios deben construirse y venderse cada semana para garantizar que la compañía obtenga ganancia?
19) Una empresa agropecuaria va a decidir cuál de dos modelos de tractores va a comprar. El A cuesta \$ 50 000 y requiere \$ 4000 por año en su conservación. Las cifras correspondientes al modelo B son \$ 40 000 de costo inicial y \$6000 por año en mantenimiento. ¿Por cuántos años ha de usarse el modelo A antes de que resulte más económico que el B?
20) Las entradas para ver un partido de básquet en la Liga Nacional tienen diferentes valores. Las generales cuestan \$ 10 mientras que para estudiantes y/o jubilados \$ 6. Se desea recaudar como mínimo \$ 600 000. ¿Cuántas entradas de cada tipo se deben vender para lograr este objetivo? Indique qué restricciones se deben tener en cuenta para que este problema tenga sentido.
21) Dos tanques A y B, contienen cierta cantidad de agua y se están llenando a través de dos mangueras distintas. El tanque A tiene una cantidad inicial de 400 litros y recibe agua a razón de 20 litros por segundo, el tanque B tiene una cantidad inicial de 120 litros y recibe a una razón de 90 litros por segundo.

a) Determine la función que representa la cantidad de agua de cada tanque en el tiempo t.

b) ¿En qué momento ambos tanques contienen la misma cantidad de agua? ¿Cuál es dicha cantidad?

c) Interprete gráficamente.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.2 FUNCIÓN DE PRIMER GRADO

1) La pendiente y ordenada al origen de 3x + 4y – 8 = 0 son:

a) $m = -\frac{3}{4};\ h = -2$ **b)** $m = -\frac{3}{4};\ h = 2$ **c)** $m = \frac{3}{4};\ h = 2$ **d)** $m = \frac{3}{4};\ h = -2$

2) La ecuación de la recta paralela al eje x, a la que pertenece el punto P(–2, 3) es:

a) x = 2 **b)** y = –3 **c)** y = 3 **d)** x = –2

3) La ecuación de la recta de pendiente m = –1 que pasa por el punto R(1, –4) es:

a) x + y + 3 = 0 **b)** x – y + 3 = 0 **c)** –x + y – 3 = 0 **d)** –x + y + 3 = 0

4) La ecuación de la recta que pasa por el punto A(5, 3) y tiene un ángulo de inclinación $\alpha = 45°$ es:

a) x + y + 2 = 0 **b)** x – y – 2 = 0 **c)** x + y – 2 = 0 **d)** x – y + 2 = 0

5) La forma explícita de la ecuación de la recta a la que pertenecen los puntos P(–1, –2) y Q(–3, 6) es:

a) y = –4x + 6 **b)** y = 4x – 6 **c)** y = 4x + 6 **d)** y = –4x – 6

6) La recta perpendicular a 2x – 3y = 6 que pasa por el punto P(4, –3) es:

a) $y + 3 = \frac{3}{2}(x - 4)$ **b)** $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 4)$

c) $y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 4)$ **d)** $y + 3 = \frac{2}{3}(x - 4)$

7) Una recta paralela a $y = \frac{3}{2}x - 3$ tiene por ecuación:

a) 2y – 3x = 4 **b)** 3x + 2y = 4 **c)** 3y – 2x = 4 **d)** 2x + 3y = 4

8) La gráfica de la recta 2y – 3x + 2 = 0 tiene:

a) pendiente positiva y ordenada al origen positiva
b) pendiente positiva y ordenada al origen negativa
c) pendiente negativa y ordenada al origen positiva
d) pendiente negativa y ordenada al origen negativa

9) Las coordenadas de un punto que pertenece a la gráfica de la función $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ son:

a) $P_1(1, 0)$ **b)** $P_2(3, 1)$ **c)** $P_3(6, -3)$ **d)** $P_4(0, -1)$

10) La ecuación de la recta de abscisa al origen M(–3, 0) y ordenada al origen N(0, 2) es:

a) 2x + 3y = –6 **b)** 3x – 2y = 6 **c)** 3x + 2y = 6 **d)** 2x – 3y = –6

11) Si a ambos miembros de la desigualdad $-\frac{5}{3} < -\frac{13}{8}$ se le suma un número $n \in R^-$, se obtiene:

a) una igualdad.
b) otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada.
c) otra desigualdad de sentido contrario al de la dada.

12) Si los dos miembros de la desigualdad $\frac{7}{4} < \frac{9}{5}$ se multiplican por un número

$m \in R^-$, se obtiene:

a) una igualdad.
b) otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada.
c) otra desigualdad de sentido contrario al de la dada.

13) Los valores que verifican la desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$ son:

a) $-1 < x < 3$ **b)** $-5 < x < 3$ **c)** $0 < x < 3$ **d)** $1 < x < 5$

14) Los valores que verifican la desigualdad $|2x - 3| > 1$ son:

a) $x > 2 \vee x < -1$ **b)** $x > 2 \vee x < 1$ **c)** $x > -2 \wedge x < 1$ **d)** $1 < x < 2$

15) Si $\frac{x-2}{2} < 0$, entonces x pertenece al intervalo:

a) $(-\infty, 1)$ **b)** $(1, +\infty)$ **c)** $(2, +\infty)$ **d)** $(-\infty, 2)$

16) La solución de la desigualdad $|x - 2| < 1$ es:

a) $-1 < x < 3$ **b)** $-3 < x < 1$
c) $1 < x < 2$ **d)** ninguna de las anteriores

17) La gráfica de la desigualdad $3x - 2y < 4$ consiste en:

a) todos los puntos ubicados por debajo de la recta $3x - 2y = 4$
b) todos los puntos ubicados por encima de la recta $y = \frac{3}{2}x - 2$
c) todos los puntos de la recta $3x - 2y = 4$ o por encima de ella
d) ninguna de las anteriores

AUTOEVALUACIÓN Nº 3: FUNCIONES ALGEBRAICAS ESPECIALES. FUNCIÓN DE PRIMER GRADO

1) Dadas las siguientes funciones, indique su nombre, determine su dominio, su conjunto de imágenes y grafique.

a) $y = \frac{1}{x-1} - 2$ **b)** $y = |x + 2| - 1$ **c)** $y = 4$

2) Represente gráficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones de primer grado en dos variables:

a) $x + 3 > 0$ **b)** $y - 2 \leq 0$ **c)** $x + 2y - 3 \geq 0$

3) Una fábrica de heladeras tiene costos fijos diarios de \$ 1300 y paga costos directos (mano de obra y materiales) de \$ 240 por cada heladera.

a) Escriba la ley f(x) que muestra el costo total de producción de x heladeras por día.

b) ¿Cuál es el costo de fabricar 12 heladeras?

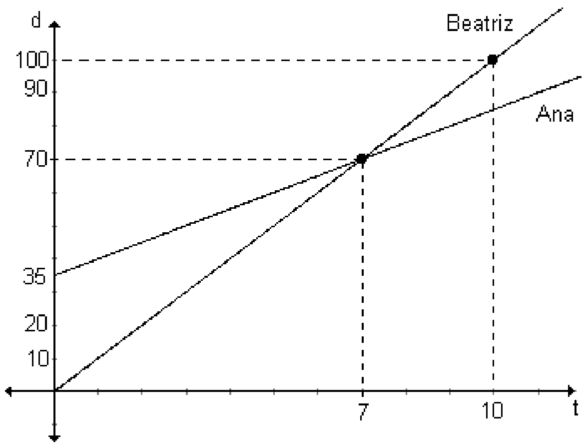
c) ¿Cuántas heladeras se fabricaron si el costo fue de \$ 2980?

d) ¿Cuántas heladeras podrán fabricar si sólo puede gastar entre \$ 4000 y \$ 5000?

4) Dadas las funciones de primer grado $r_1 : 6x + ay + 8 = 0$ y $r_2 : y + \frac{1}{2}x = 0$, determine el valor de a de modo que sean perpendiculares.

5) Sean los puntos P (c, c + 1) y Q (–2, 3c). Halle el valor de c de modo que la pendiente de la recta que forman sea 3.

6) Las rectas de la siguiente gráfica representan funciones que relacionan las distancias (en metros) que Ana y Beatriz recorren en una carrera y el tiempo empleado (en segundos).



a) Halle la función que modeliza la distancia recorrida por cada mujer en función del tiempo.

b) Halle la pendiente de la recta que modeliza la situación de Beatriz y explique su significado en el problema.

c) Explique el significado de la intersección de la recta que modeliza la situación de Ana con el eje y.

d) Si la carrera fue de 100 m, ¿quién ganó? Justifique la respuesta.

7) Un experimento químico generó las siguientes temperaturas (medidas en grados Fahrenheit) para una solución respecto al tiempo t medido en minutos.

Tiempo	Temperatura
15	30
25	130
33	210

a) Encuentre la función de primer grado que determinan estos valores.

b) Halle la temperatura de la solución después de 18 minutos.

c) ¿Cuánto tarda la solución en alcanzar 80 ºF?

8) El costo de alquiler de un automóvil por un día realizando un viaje de 100 km es de $ 30 y si el viaje es de 150 km el costo es de $ 37,50.

a) Halle la función de primer grado que corresponde a los datos dados. Grafique.

b) Determine el costo de alquilar un auto por un día para viajar 200 km.

c) Interprete la pendiente y la ordenada al origen de la función en términos del problema.

2.3 Función de segundo grado

Muchas aplicaciones requieren el conocimiento de funciones en las que la variable independiente está elevada al cuadrado. Analicemos el siguiente problema.

Problema

> Cuando en una semillería el precio de la soja era de \$ 50 el quintal, se vendieron, en promedio, 24 quintales semanales. Se observó que por cada disminución de \$ 1 en el precio se vendían dos quintales más por semana. Obtenga la función que expresa el ingreso semanal en función de la cantidad de veces que disminuye \$ 1 el precio del quintal

Realicemos una tabla y veamos cómo obtenemos una fórmula par hallar cuál es el ingreso semanal:

Precio del quintal	Cantidad de quintales	Ingreso total
50	24	24 . 50
50 – **1**	24 + 2.**1**	(50 – **1**).(24 + 2.**1**)
50 – **2**	24 + 2.**2**	(50 – **2**).(24 + 2.**2**)
50 – **3**	24 + 2.**3**	(50 – **3**).(24 + 2.**3**)
50 – **x**	24 + 2.**x**	(50 – **x**).(24 + 2.**x**)

La fórmula sombreada corresponde a una función de segundo grado, en la cual x es un número natural menor o igual que 50 y representa la cantidad de veces que disminuye \$ 1 el precio del quintal.

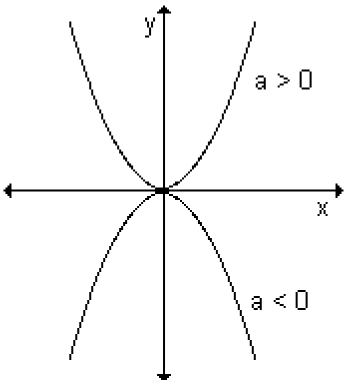
$g(x) = (50 - x).(24 + 2x) \Rightarrow g(x) = 1200 + 100x - 24x - 2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = -2x^2 + 76x + 1200$

La función $g : A \to R \;/\; g(x) = -2x^2 + 76x + 1200$ con $A = \{x/x \in Z \wedge 0 \leq x \leq 50\}$ representa el ingreso semanal en función de la cantidad de veces que disminuye \$ 1 el precio del quintal.

Definición: la función de segundo grado o cuadrática está definida por $f : R \to R \;/$ $x \to ax^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$. La representación gráfica de una función cuadrática recibe el nombre de *parábola*. Analicemos distintos casos.

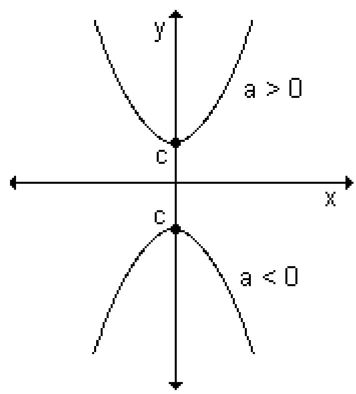
Primer caso: $b = 0 \wedge c = 0 \Rightarrow y = ax^2$.



Es una función par y por eso su gráfica es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

El punto (0,0) se denomina vértice de la parábola.

Segundo caso: $c \neq 0$, $b = 0 \Rightarrow y = ax^2 + c$
Es una función par. Para cualquier x, los valores de $ax^2 + c$ son iguales a los de ax^2 salvo el valor constante c que aparece sumado a todos ellos.



La gráfica que representa a la función $y = ax^2 + c$ es la misma que la de $y = ax^2$ desplazada c unidades hacia arriba o hacia abajo según sea $c > 0$ ó $c < 0$.

El punto (0,c) se denomina vértice de la parábola.

Tercer caso: a, b, c no nulos $\Rightarrow y = ax^2 + bx + c$
Vamos a analizar esta expresión y tratar de llevarla al segundo caso estudiado.

Como $a \neq 0$, sacamos factor común a: $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

Completamos el trinomio cuadrado perfecto sumando y restando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

distribuyendo a resulta:

$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ **(I)** como el cuadrado de cualquier número real es siempre mayor o igual que cero tenemos que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$

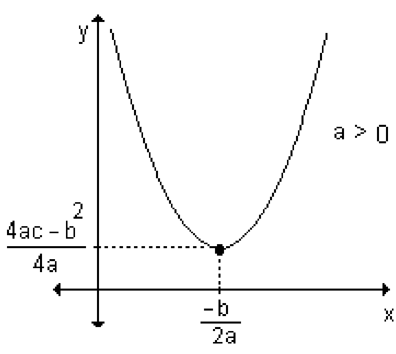
Si $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ y si $x \neq -\frac{b}{2a} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$.

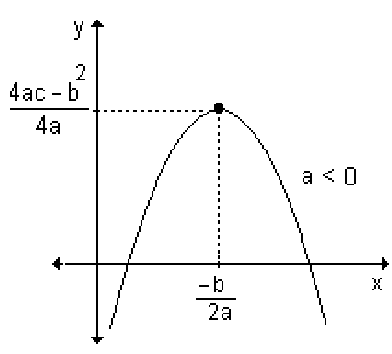
Sea a > 0. Para $x \neq -\frac{b}{2a}$, el valor de y es la suma (ver **(I)**) entre $\frac{4ac-b^2}{4a}$ y el número real positivo a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Como $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$, resulta que para $x=-\frac{b}{2a}$; $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ es el menor valor de la función.

Luego $\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ es el punto donde la función toma el mínimo valor.

Sea a < 0. Para $x \neq -\frac{b}{2a}$, el valor de y es la suma entre el valor $\frac{4ac-b^2}{4a}$ y el número real negativo a$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Para $x=-\frac{b}{2a}$; $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ es el mayor valor de la función. Luego $\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ es el punto donde la función toma el máximo valor.

En ambos casos el punto $\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ es el vértice de la parábola y la recta de ecuación $x=-\frac{b}{2a}$ se llama eje de simetría.

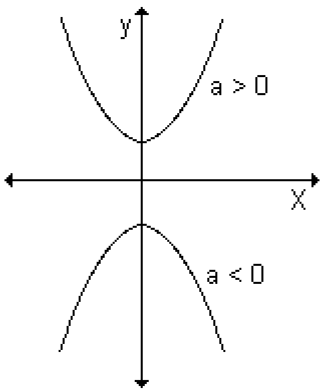




El análisis anterior también se hubiera podido realizar de la siguiente manera:

La expresión $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ se puede escribir de la forma

$y = a\,X^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ que se obtiene reemplazando $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ por X.



En el sistema de coordenadas (X, y), gráficamente resulta una parábola de vértice en el punto $\left(0, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ abierta hacia arriba o hacia abajo según el signo de a. El eje de simetría es la recta de ecuación X = 0. Pero el valor X = 0 se obtiene cuando $x = -\frac{b}{2a}$ y, por lo tanto, si referimos la gráfica al sistema de

coordenadas (x, y), el vértice se ubica en $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ y el eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$.

Ejemplo: Dada la función $f: R \to R \;/\; f(x) = 2x^2 - 3x - 5$, encuentre las coordenadas del vértice y el eje de simetría.

Para encontrar las coordenadas del vértice completamos cuadrados en la expresión $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$. Para ello, seguimos los pasos planteados con anterioridad. Sacamos factor común 2: $f(x) = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right)$

Sumamos y restamos dentro del paréntesis el coeficiente de la x dividido por 2 y elevado al cuadrado: $f(x) = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}\right]$

Los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto y lo podemos factorizar:

$$f(x) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{5}{2}\right] \Rightarrow f(x) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] \Rightarrow f(x) = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

El vértice es el punto $\left(\frac{3}{4},-\frac{49}{8}\right)$. Como a = 2 > 0 la parábola se abre hacia arriba y el vértice constituye el mínimo, es decir, el menor valor que toma la función es $-\frac{49}{8}$ cuando $x=\frac{3}{4}$. El eje de simetría es la recta $x=\frac{3}{4}$.

Nota: Si en la expresión $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, reemplazamos a x por la abscisa del vértice, es decir por $-\frac{b}{2a}$, la correspondiente ordenada de dicho vértice es $y=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Por lo tanto, podemos concluir además que el vértice de la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$ es $V\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

La expresión $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, puede escribirse también de la siguiente manera: $y = a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. Si en ella se reemplazan $-\frac{b}{2a}$ por h y $\frac{4ac-b^2}{4a}$ por k, se obtiene $y = a\,(x-h)^2+k$ cuyo vértice es V (h, k) y el eje de simetría, x = h.

Este método que permite escribir la función cuadrática $y = ax^2+bx+c$ de la forma $y = a\,(x-h)^2+k$, se conoce como el método de completar cuadrados.

Ejemplo: Dada la función $f : R \to R \;/\; f(x) = -3x^2+6x+1$ obtenga las coordenadas del vértice y el eje de simetría.

En este caso, como a = –3 < 0 la gráfica de la parábola se abre hacia abajo y por lo tanto el vértice será el máximo. Teniendo en cuenta que el vértice es $V\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ resulta $-\frac{b}{2a}=\frac{-6}{-6}=1$ y $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(1)=-3(1)^2+6.1+1=4$.

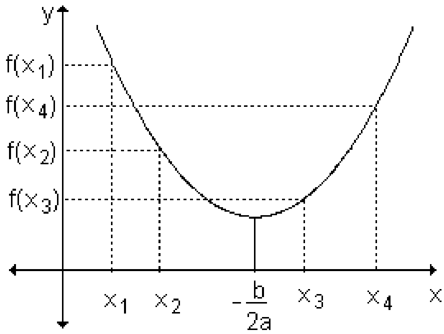
El vértice corresponde al punto (1, 4), esto significa que el mayor valor que toma la función es 4 cuando x = 1. El eje de simetría es x = 1.

Características de la gráfica de una función de segundo grado

Sabemos que si a > 0 la parábola se abre hacia arriba y si a < 0, hacia abajo. En el primer caso, tiene un punto mínimo que se ubica en el vértice y en el segundo, un punto máximo.

Esta función no tiene un único comportamiento en todo su dominio respecto al crecimiento o decrecimiento.

Analicemos sus gráficas:



$a > 0$:

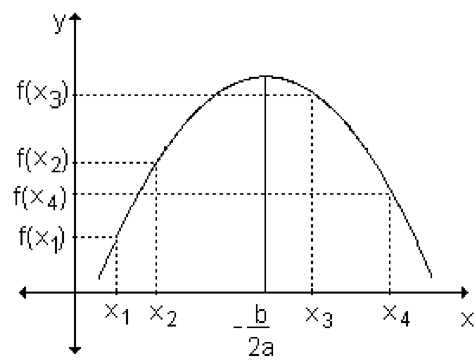
Dado $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) > f(x_2)$
La función es decreciente a la izquierda del vértice.

Dado $x_3 < x_4$ se verifica $f(x_3) < f(x_4)$
La función es creciente a la derecha del vértice.

$a < 0$:

Dado $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) < f(x_2)$
La función es creciente a la izquierda del vértice.

Dado $x_3 < x_4$ se verifica $f(x_3) > f(x_4)$
La función es decreciente a la derecha del vértice.



Problema

Teniendo en cuenta el problema planteado al comienzo: Cuando en una semillería el precio de la soja era de \$ 50 el quintal, se vendieron, en promedio, 24 quintales semanales. Se observó que por cada disminución de \$ 1 en el precio se vendían dos quintales más por semana. ¿Qué precio debe tener el quintal para obtener el ingreso semanal máximo? ¿A cuánto asciende dicho ingreso? Grafique la función obtenida.

Ya encontramos que el ingreso mensual está dado por la función
$g: A \to R / \ g(x) = -2x^2 + 76x + 1200$, donde $A = \{x / x \in Z \wedge 0 \le x \le 50\}$.

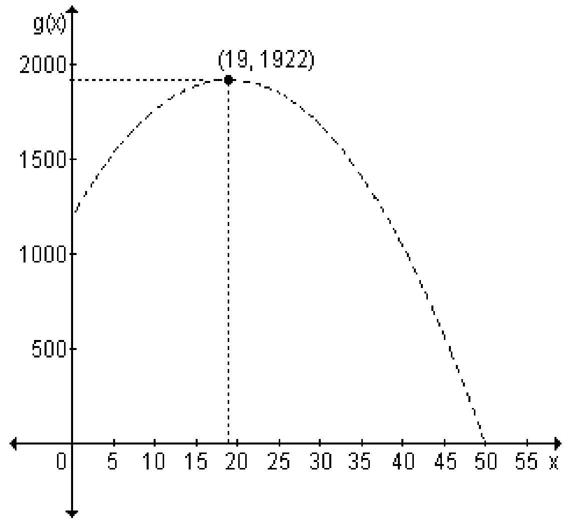
Como $a = -2 < 0$ la función tiene un valor máximo. Para determinarlo debemos encontrar las coordenadas del vértice. Completamos cuadrados:

$y = -2x^2 + 76x + 1200 \;\Rightarrow\; y = -2.[x^2 - 38x - 600] \;\Rightarrow$

$y = -2.[x^2 - 38x + 19^2 - 19^2 - 600] \;\Rightarrow\; y = -2.[(x-19)^2 - 361 - 600] \;\Rightarrow$

$y = -2.[(x-19)^2 - 961] \;\Rightarrow\; y = -2.(x-19)^2 + 1922$

El ingreso máximo semanal es de \$ 1922 y se alcanza al disminuir \$ 19 el precio del quintal.
El dominio de la función g(x) son números enteros no negativos.
Sólo pertenecen a la gráfica los puntos (x, y) donde x es un número entero comprendido entre 0 y 50.



Problema

> La función de demanda para un cierto producto de un fabricante está definida según la ley $p = f(q) = 1200 - 3q$, donde p es el precio en pesos por unidad cuando existe una demanda semanal de q unidades por parte de los consumidores. Defina la función que describe el nivel de producción. Establezca el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y determine dichos ingresos.

El ingreso total se obtiene considerando el producto entre el precio y la cantidad demandada.

ingreso total = precio . cantidad $\Rightarrow$ ingreso = p . q $\Rightarrow$ $i(q) = (1200 - 3q) \cdot q$

La función $i(q) = 1200q - 3q^2$ describe el ingreso total según el nivel de producción.

El ingreso máximo corresponderá a la ordenada del vértice de la parábola que resulta al graficar la función. Para hallar el vértice completamos cuadrados:

$i(q) = -3\,q^2 + 1200\,q \quad \Rightarrow i(q) = -3.(q^2 - 400\,q) \Rightarrow$

$i(q) = -3.[q^2 - 400q + (200)^2 - (200)^2]$

$i(q) = -3.(q - 200)^2 + 120\,000$

El ingreso máximo que el fabricante puede recibir será de $ 120 000 cuando el nivel de producción ascienda a 200 unidades.

Intersecciones con los ejes

Una vez determinadas las coordenadas del vértice, el eje de simetría y el signo de a, para bosquejar la gráfica de la función cuadrática pueden determinarse las intersecciones con los ejes coordenados. Para encontrar dónde corta al eje de ordenadas debemos tener en cuenta que todo punto ubicado sobre el eje y tiene abscisa 0. Buscamos los valores de y para los cuales $x = 0$.

Si $y = ax^2 + bx + c$, resulta $y = a.0^2 + b.0 + c \Rightarrow y = c$. El punto de intersección con el eje de ordenadas es el punto (0, c). Se observa que la segunda componente es el término independiente de la expresión de la función.
Las intersecciones con el eje de abscisas se llaman ceros de la función cuadrática.

Ceros de una función cuadrática

Llamamos ceros de la función cuadrática a los valores del dominio que tienen como imagen el cero, es decir, a aquellos valores para los cuales $y = 0$. Gráficamente, los ceros de la función cuadrática son los puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas.

Ejemplo: Encuentre los ceros de la función $f : R \to R \,/\, f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

Para determinar los ceros debemos encontrar los valores de x para los cuales $f(x) = 0$, es decir, para qué valores de x se verifica $2x^2 + 4x - 6 = 0$.
Para despejar x de la expresión dada, es conveniente escribirla de la forma $a(x - h)^2 + k = 0$, es decir, completar cuadrados para después, mediante pasaje de términos, encontrar él o los valores de x que anulan la función.
Completamos cuadrados siguiendo los pasos que corresponden:

- sacamos factor común 2 entre los coeficientes de x^2 y de x:

$2(x^2 + 2x) - 6 = 0$

- sumamos y restamos el coeficiente de la x dividido 2 y elevado al cuadrado:

$2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 6 = 0$

- reconstruimos el binomio al cuadrado: $2[(x + 1)^2 - 1] - 6 = 0$
- aplicamos la propiedad distributiva: $2(x + 1)^2 - 2 - 6 = 0$
- despejamos x y resulta: $2(x + 1)^2 = 8 \Rightarrow (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = \pm 2 \Rightarrow$

$x = 1$, $x = -3$

La parábola corta al eje de abscisas en dos puntos, P(1, 0) y Q(–3, 0).

Otra forma de obtener las raíces es resolver la ecuación $2x^2 + 4x - 6 = 0$ de la siguiente manera:

- dividimos ambos miembros de $2x^2 + 4x - 6 = 0$ por 2: $x^2 + 2x - 3 = 0$
- dejamos la variable x en el primer miembro: $x^2 + 2x = 3$
- completamos cuadrados en el primer miembro: $x^2 + 2x + 1 - 1 = 3 \Rightarrow$

$(x + 1)^2 - 1 = 3 \Rightarrow (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1$, $x = -3$

Veamos si podemos encontrar una fórmula sencilla que nos permita hallar los ceros de la función $y = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$. Para ello debemos resolver la ecuación $a x^2 + bx + c = 0$ donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$.

Dividimos ambos miembros por a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, restamos a ambos miembros $\frac{c}{a}$: $\quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

Completamos cuadrados:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Debemos despejar x, pero para esto debemos tener en cuenta que el número $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ tiene raíz cuadrada real si y sólo si es positivo.

Como $4a^2>0$, el cociente $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ es no negativo si y sólo si $b^2-4ac\geq 0$, deber ser $b^2\geq 4ac$. El número b^2-4ac se llama *discriminante* de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ donde los coeficientes a, b y c son reales y $a\neq 0$.

Si $b^2-4ac\geq 0$, las dos raíces cuadradas del número serán $\frac{+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Luego: $\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Obtuvimos así una expresión llamada *resolvente* que permite hallar las raíces de cualquier ecuación cuadrática.

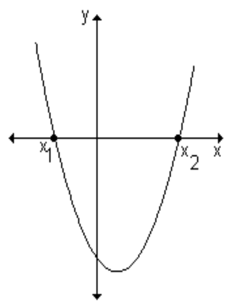
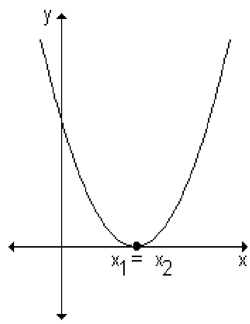
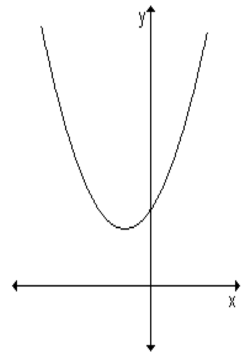
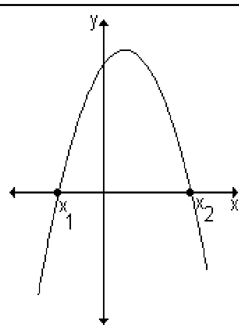
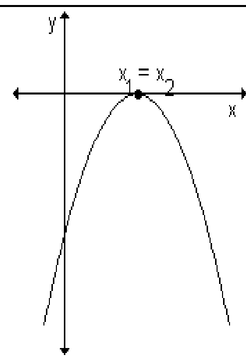
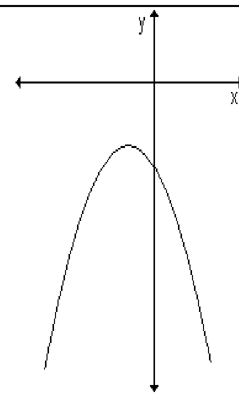
La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, a, b, $c\in R$ y $a\neq 0$ tiene las soluciones:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nota: si el discriminante (b^2-4ac) es cero, las dos raíces son iguales, es decir, $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ y la parábola interseca al eje x en un único punto. Si el discriminante (b^2-4ac) es negativo, la raíz cuadrada será un número complejo y, por lo tanto, no habrá intersección de la gráfica con el eje x.

Discusión de las raíces de una ecuación de segundo grado

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$ y $a \neq 0$

	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
Naturaleza de las raíces	Dos raíces reales y distintas	Dos raíces reales e iguales	Dos raíces no reales (dos raíces complejas y conjugadas)
Gráfica a > 0			
a < 0			

Observación: La gráfica de la función $f: R \to R$ / $f(x) = ax^2 + bx + c$ también la podemos realizar transformando su expresión a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ aplicando el método de completar cuadrados.

Teniendo en cuenta las diferentes transformaciones de funciones que estudiamos podemos decir que la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$ se obtiene utilizando como base la de $y = ax^2$ pero:

- desplazada h unidades hacia la izquierda si $h < 0$ ó hacia la derecha si $h > 0$,
- desplazada k unidades hacia arriba si $k > 0$ ó hacia abajo si $k < 0$.

El eje de simetría es la recta $x = h$ y el vértice es el punto $V(h, k)$ que es un máximo si $a < 0$ y un mínimo si $a > 0$.

Ejemplo: Bosqueje la gráfica de la función $f: R \to R \ / \ f(x) = 3x^2 - 9x - 12$ teniendo en cuenta vértice, eje de simetría e intersecciones con los ejes.

Sea $f(x) = 3x^2 - 9x - 12$. Encontramos las coordenadas del vértice completando cuadrados. En primer lugar sacamos factor común 3 que es el coeficiente de x^2 y es distinto de cero, entonces: $f(x) = 3(x^2 - 3x - 4)$. Para completar el trinomio cuadrado perfecto sumamos y restamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

En nuestro caso es: $\left(\frac{-9}{2.3}\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Podemos observar que este término que sumamos y restamos siempre es el coeficiente de x, después de sacar factor común 3, dividido por 2 y elevado al cuadrado.

Resulta: $f(x) = 3\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$

Aplicando la propiedad distributiva obtenemos: $f(x) = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{75}{4}$ **(1)**

El punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{75}{4}\right)$ es el vértice de la parábola y el eje de simetría es la recta $x = \frac{3}{2}$.

Utilizando la expresión **(1)** podemos hallar los ceros de la función. Teniendo en cuenta que los ceros o raíces son los valores de x para los cuales el valor de y, o sea la imagen, debe ser cero, igualamos toda la expresión a 0.

$$3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{75}{4} = 0$$

Despejando x nos queda: $3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} : 3 \Rightarrow$

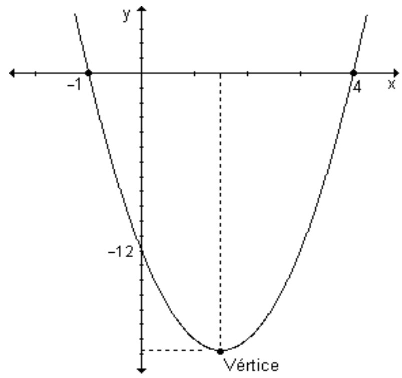
$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = +\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

De la misma forma, si aplicamos la resolvente a la expresión original dada por

$3x^2 - 9x - 12 = 0$ resulta: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{9 \pm \sqrt{225}}{6}$ y de aquí se obtienen las dos soluciones:

$x_1 = \dfrac{9+15}{6} = 4$ $x_2 = \dfrac{9-15}{6} = -1$

Concluimos que los puntos (4, 0) y (–1, 0) son las intersecciones de la gráfica con el eje de abscisas.
Si x = 0, resulta y = –12. El punto (0,–12) representa la intersección de la gráfica de la función con el eje y.
Teniendo en cuenta lo anterior podemos bosquejar la gráfica.



Ejemplo: Encuentre una función tal que la gráfica resulte una parábola con vértice en el punto (–2, 1) y corte al eje de las ordenadas en –1. Bosqueje la gráfica.

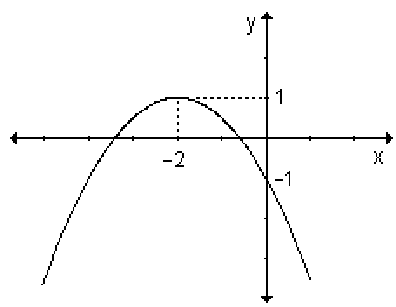
Si el vértice es (–2, 1), teniendo en cuenta la expresión $y = a\,(x - h)^2 + k$, resulta: $y = a\,[x - (-2)]^2 + 1 \Rightarrow y = a\,(x + 2)^2 + 1$
Si corta al eje de ordenadas en –1, el punto (0, –1) debe satisfacer la igualdad anterior $-1 = a\,(0 + 2)^2 + 1 \Rightarrow -1 = a.4 + 1 \Rightarrow -2 = a.4 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Reemplazando: $y = -\dfrac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$.

También, podemos escribir la expresión desarrollada

$y = -\dfrac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 1$

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 2 + 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 1$



La definición de la función resulta $f : R \to R \,/\, x \to -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 1$

Problema

La cantidad q de un producto agrícola que será demandada a un precio p (en pesos) está dada por $q = 20 + 5p - p^2$

a) ¿A qué precio serán demandados 24 productos?.

b) ¿Qué cantidad será demandada si el precio es de $ 2,75?

a) Para averiguar el precio debemos resolver $24 = 20 + 5p - p^2 \Rightarrow$

$$p^2 - 5p + 4 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 = 4 \\ p_2 = 1 \end{matrix}$$

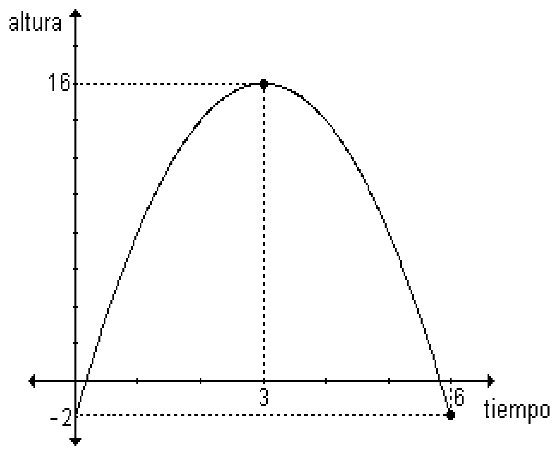
Para que sean demandados 24 productos el precio debe ser \$ 4 o bien de \$ 1.

b) La cantidad demandada será $q = 20 + 5.2{,}75 - (2{,}75)^2$, o sea, $q = 26{,}1875$.

Si el precio es de \$ 2,75 se demandarán aproximadamente 26 productos.

Problema

La gráfica siguiente describe el vuelo de un proyectil disparado desde su plataforma de lanzamiento situada a dos metros por debajo del nivel del suelo. La gráfica indica la altura alcanzada en metros después de t minutos:



a) Defina la función que describe la altura según el tiempo.

b) ¿En qué momento el proyectil alcanza la altura máxima?

c) ¿En qué momento aproximadamente el proyectil llega al nivel del suelo?

a) Podemos considerar la función $f(t) = at^2 + bt + c$ que describe la situación planteada. Como la intersección con el eje de ordenadas es –2, el valor de c coincide con él.

La función resulta $f(t) = at^2 + bt - 2$. Si consideramos otros dos puntos que le pertenecen (3, 16) y (6, –2), reemplazando resulta:

$$\begin{cases} 16 = a.3^2 + b.3 - 2 \\ -2 = a.6^2 + b.6 - 2 \end{cases}, \text{ es decir: } \begin{cases} 9a + 3b = 18 \\ 36a + 6b = 0 \end{cases}$$

Multiplicando por 2 a la primera ecuación y restando miembro a miembro resulta:

$$\begin{array}{l} 18a + 6b = 36 \\ \underline{36a + 6b = 0} \\ -18a \qquad = 36 \Rightarrow a = -2 \end{array}$$

Si $a = -2 \Rightarrow 9.(-2) + 3b = 18 \Rightarrow b = 12$

La función queda definida $f: R_0^+ \to R \,/\, f(t) = -2t^2 + 12t - 2$

También hubiésemos podido usar la expresión $f(t) = a(t - h)^2 + k$ donde sabemos que el punto (3, 16) es el vértice y el (0, –2) pertenece a la gráfica. Reemplazando resulta: $f(t) = a.(t - 3)^2 + 16 \Rightarrow -2 = a.(0 - 3)^2 + 16 \Rightarrow a = -2$

Luego, la función es f : $R_0^+ \to R$ / $f(t) = -2(t-3)^2 + 16$

$f(t) = -2.(t^2 - 6t + 9) + 16 = -2t^2 + 12t - 18 + 16 \Rightarrow f(t) = -2t^2 + 12t - 2$ es la función que describe la altura del proyectil medida en metros después de transcurridos t minutos.

b) El proyectil alcanza 16 metros de altura máxima después de 3 minutos.

c) Para saber cuándo alcanza el nivel del suelo la altura debe ser 0 metros.
Es decir: $0 = -2t^2 + 12t - 2 \Rightarrow -t^2 + 6t - 1 = 0 \Rightarrow$

$$t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{-2} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 0{,}1716 \\ t_2 = 5{,}8284 \end{array}$$

El nivel del suelo lo alcanza transcurridos aproximadamente 10 segundos o, nuevamente, a los 5 minutos 50 segundos.

Problema

> El ingreso i (en millones de dólares) que un gran negocio logra al vender x concesiones está dado por la ley $i(x) = -10 + 10x - x^2$.
> **a)** ¿Qué ingreso tiene si el negocio vende 8 concesiones?
> **b)** ¿Cuántas concesiones debe vender para que el ingreso ascienda a 14 millones de dólares?
> **c)** ¿Cuántas concesiones deberán venderse para obtener el ingreso máximo?
> **d)** Grafique la función.
> **e)** Explique qué significan las intersecciones con los ejes en relación al problema.

a) Como x representa la cantidad de concesiones vendidas, reemplazando x por 8, el ingreso se calcula resolviendo $i(8) = -10 + 10.8 - 8^2 = -10 + 80 - 64 = 6$. Al vender 8 concesiones el ingreso asciende a 6 millones de dólares.

b) Reemplazando i por 14 resulta: $14 = -10 + 10x - x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$
Aplicando la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.1.24}}{2.1} = \frac{10 \pm 2}{2}$$ de donde: $x_1 = 6$, $x_2 = 4$.

Para que el ingreso ascienda a 14 millones de dólares, deben venderse 6 ó 4 concesiones.

c) Para obtener el valor máximo calculamos el vértice completando cuadrados:
$i(x) = -10 + 10x - x^2$

Agrupando y sacando factor común –1 resulta $i(x) = -1(x^2 - 10x) - 10$

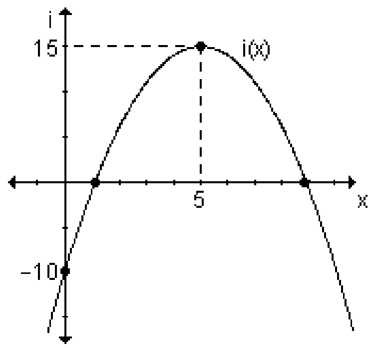
Sumamos y restamos $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25 \Rightarrow i(x) = -1(x^2 - 10x + 25 - 25) - 10$

$\Rightarrow i(x) = (-1)\left[(x-5)^2 - 25\right] - 10 \qquad \Rightarrow i(x) = -(x-5)^2 + 25 - 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow i(x) = -(x-5)^2 + 15$

El vértice es el punto (5, 15). Para obtener el ingreso máximo, que asciende a 15 millones de dólares, deben venderse 5 concesiones.

d) La gráfica resulta:



e) Las intersecciones con el eje de abscisas representan los valores para los cuales el ingreso es nulo. Igualando a cero el ingreso: $0 = -10 + 10x - x^2$
Resolviendo obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4.(-1).(-10)}}{2.(-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{60}}{-2} = \frac{-10 \pm 7{,}75}{-2}$$

de donde $x_1 = 1{,}13$; $x_2 = 8{,}87$
La intersección con el eje de ordenadas es el punto que representa cuando no se vende ninguna concesión, es decir, cuando $x = 0$ y se obtiene $i = -10$. Cuando no se vende ninguna concesión, hay una pérdida de 10 millones de dólares.

Propiedades de las raíces de la ecuación

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, si x_1 y x_2 son sus raíces, se cumple:

1) $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

En efecto, $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$

2) $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \,.\, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac}\,)^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Estas propiedades resultan muy importantes para reconstruir ecuaciones de segundo grado conocidas sus soluciones, o bien para generar funciones cuadráticas que las tengan como ceros.

Nota: El vértice es $V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ o bien $V\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. Según vimos una de las propiedades de los ceros asegura que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

Si dividimos ambos miembros por 2 obtenemos $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$. Esto nos permite asegurar que la abscisa del vértice resulta igual a la semisuma de las raíces de la ecuación.

Factorización del trinomio de segundo grado

Analicemos si podemos factorizar el segundo miembro de la función cuadrática, es decir la expresión $ax^2 + bx + c$. Para que la factorización sea siempre posible, debemos considerar que x puede tomar valores en el conjunto de los números reales y no reales (complejos). Sabemos que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ verifican:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a}$$

Entonces si $y = ax^2 + bx + c$, sacando factor común:

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \Rightarrow y = a\,[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \,.\, x_2] \Rightarrow$$

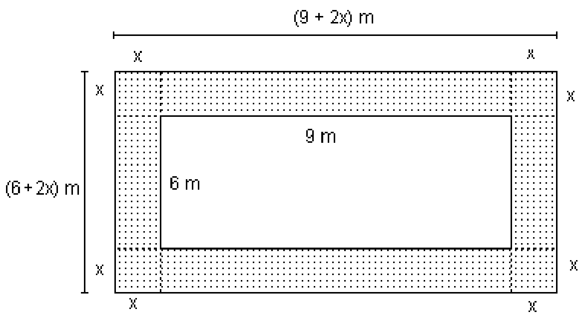
$$y = a\,(x^2 - x_1.x - x_2.x + x_1 \,.\, x_2) \Rightarrow y = a[x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1)] \Rightarrow$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

<u>Problema</u>

Un arquitecto especializado en paisajismo quiere hacer un borde de ancho uniforme con grava alrededor de una pequeña cabaña. La cabaña ocupa nueve metros por seis metros. Se cuenta con suficiente grava para cubrir 34 m^2. ¿Qué ancho debe tener el borde si queremos utilizar toda la grava disponible?

Realizando una figura de análisis de la cabaña con el borde, de x metros de ancho, resulta:



El ancho del rectángulo mayor es de (6 + 2x) m y su longitud es (9 + 2x) m. Plantearemos una ecuación que relacione las áreas y las dimensiones dadas.
El área del rectángulo mayor es (6 + 2x).(9 + 2x) y podemos asegurar que el área de la cabaña es 9.6 = 54.
El área del borde se halla restando el área de la cabaña del área del rectángulo grande. Esta diferencia debe ser 34. Es decir: $(6 + 2x).(9 + 2x) - 54 = 34$

$54 + 12x + 18x + 4x^2 - 54 - 34 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 30x - 34 = 0$

Resolvemos $x = \dfrac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4.4.(-34)}}{2.4} = \dfrac{-30 \pm 38}{8} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -8{,}5$

Como x representa una medida, la respuesta al problema es que el borde alrededor de la cabaña debe tener un metro de ancho.

Problema

El rendimiento (en porcentaje, %) de un generador de placas solares en función de la temperatura está descripto por un modelo matemático que responde a una función cuadrática. El rendimiento es máximo (100 %) para una temperatura de 50 °C y es nulo para 10 °C y 90 °C. Defina la función que describe esta situación.

Los valores donde el rendimiento es nulo son los ceros de la función cuadrática. Luego $f(x) = a(x - 10)(x - 90)$ y como en (50, 100) se encuentra el máximo, este punto pertenece a la función y satisface la igualdad:

$100 = a(50 - 10)(50 - 90) \Rightarrow 100 = a.40(-40) \Rightarrow 100 = -1600a \Rightarrow a = -\dfrac{1}{16}$.

La función queda definida por $f(x) = -\dfrac{1}{16}(x - 10)(x - 90)$.

También podemos resolver el problema utilizando el dato del vértice en la ecuación de la forma $y = a(x - h)^2 + k$. Reemplazando por las coordenadas del vértice (50, 100) resulta $y = a(x - 50)^2 + 100$. Como sabemos además que el punto (10,0) pertenecen a la gráfica de la función resulta posible encontrar el valor de a: $0 = a(10 - 50)^2 + 100 \Rightarrow 0 = a\,1600 + 100 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{16}$.

La función queda definida por $f(x) = -\dfrac{1}{16}(x - 10)(x - 90)$.

EJERCICIOS

1) Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas determine las coordenadas del vértice. Explique si dicho vértice es el valor máximo o mínimo de la función.

a) $f(x) = -6x^2$ **b)** $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = x^2 + 3x$ **d)** $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

2) Calcule los ceros de las siguientes funciones y factorice.

a) $f(x) = 9x^2 - 9x$ **b)** $f(x) = 4x^2 + 1$

c) $f(x) = 25 - x^2$ **d)** $f(x) = 2x^2 - 20x + 50$

3) Determine, sin hallarlas, la naturaleza de las raíces de las siguientes ecuaciones.

a) $-2x^2 - 16x + 3 = 0$ **b)** $t^2 + 2t + 1 = 0$

c) $-9 + 8x - 2x^2 = 0$ **d)** $x^2 - 8x + \frac{35}{2} = 0$

e) $-2x^2 - 6x - \frac{9}{2} = 0$ **f)** $s^2 - 8s + 13 = 0$

RESPUESTAS

1)a) $V(0,\ 0)$ máximo; **b)** $V(0,\ 4)$ máximo; **c)** $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ mínimo; **d)** $V\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ mínimo.

2)a) $f(x) = 9x(x-1)$ **b)** $f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}i\right).\left(x - \frac{1}{2}i\right)$

c) $f(x) = -(x-5)(x+5)$ **d)** $f(x) = 2(x-5)^2$

3)a) Dos raíces reales distintas; **b)** Dos raíces reales iguales; **c)** Dos raíces complejas; **d)** Dos raíces complejas; **e)** Dos raíces reales iguales; **f)** Dos raíces reales distintas.

Inecuaciones de segundo grado en una variable

Definición: Una desigualdad o inecuación de segundo grado en una variable tiene la forma:

$ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \leq 0$

$ax^2 + bx + c > 0$

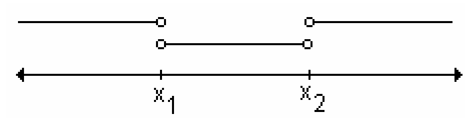
$ax^2 + bx + c \geq 0$ donde $a, b, c \in R \wedge a \neq 0$

Para resolver una inecuación cuadrática introducimos dos nuevos conceptos: el de *número o valor crítico* y el de *valor de prueba*.

Definición: llamamos *número o valor crítico* a cada una de las raíces reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Supongamos que x_1 y x_2 son esos números o valores críticos y que $x_1 < x_2$.
El polinomio $ax^2 + bx + c$ cambia de signo a ambos lados de x_1 y x_2. Por lo tanto el signo positivo o negativo de $ax^2 + bx + c$ será constante en cada uno de los intervalos en los que queda subdividida la recta real:

$$x < x_1, \quad x_1 < x < x_2, \quad x > x_2$$



Para determinar el signo de $ax^2 + bx + c$ en cada intervalo se elige un valor arbitrario en el intervalo. A este se lo denomina *número de prueba*. Los resultados obtenidos sirven para determinar el conjunto solución de la inecuación.
Teniendo en cuenta lo anterior, podemos enunciar los siguientes pasos a seguir para resolver una inecuación cuadrática:

1) Hallar los valores críticos resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

2) Trazar los valores críticos sobre la recta numérica. Estos valores críticos dividen a la recta en dos o tres intervalos según la ecuación tenga una o dos raíces reales.

3) Seleccionar los números de prueba, es decir, los números representativos de cada intervalo y probar cada valor en la desigualdad para ver si resulta un enunciado verdadero. Tener en cuenta para ello que la expresión $ax^2 + bx + c$ se puede escribir $a(x - x_1)(x - x_2)$.

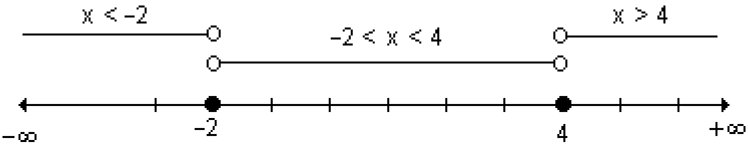
4) Las soluciones de la inecuación son los intervalos que contienen los valores identificados en el paso **3)** como soluciones válidas de la desigualdad dada.

Ejemplo: Halle los valores de x que verifican: $x^2 - 8 < 2x$

Haciendo pasaje de términos, resulta: $x^2 - 2x - 8 < 0$
Para hallar los valores críticos resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$
Aplicando la resolvente obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = -2$$

Los números críticos son $x_2 = -2$ y $x_1 = 4$.
De aquí podemos decir que la recta real queda dividida en tres intervalos: los valores menores que -2, los valores reales entre -2 y 4 y los mayores que 4.

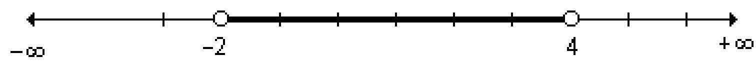


Para resolver la inecuación podemos construir la siguiente tabla:

Intervalo	Número de Prueba	Signo de (x + 2)	Signo de (x – 4)	Signo de x^2–2x–8 = (x + 2)(x – 4)
(–∞, –2)	–3	–	–	+
(–2, 4)	0	+	–	–
(4, ∞)	5	+	+	+

Como la inecuación planteada es $x^2 - 2x - 8 < 0$, la solución son todos los números reales entre –2 y 4. Es decir, todos los números reales pertenecientes al intervalo (–2, 4).

Gráficamente:



Problema

> El costo, en pesos, para enlatar x toneladas de tomates por día está dado por la función ($5x^2 - 15x + 8$) y el ingreso percibido por la venta de x toneladas de tomate por día está dado por la función (2x + 2). ¿Cuántas toneladas deben enlatarse y venderse diariamente para obtener ganancia?

Para obtener ganancia el costo diario debe ser menor que el ingreso diario, es decir:

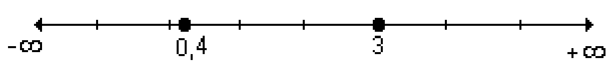
$5x^2 - 15x + 8 < 2x + 2 \;\Rightarrow\; 5x^2 - 15x + 8 - 2x - 2 < 0 \;\Rightarrow\; 5x^2 - 17x + 6 < 0$

Para determinar los valores críticos resolvemos la ecuación $5x^2 - 17x + 6 = 0$

Aplicando la resolvente resulta:

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4.5.6}}{2.5} = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{10} = \frac{17 \pm 13}{10}$$, obtenemos $x_1 = 3$ y $x_2 = 0{,}4$.

Queda planteada la inecuación $5(x - 0{,}4).(x - 3) < 0$. Teniendo en cuenta los valores críticos, la recta real queda dividida en tres intervalos: los valores menores que 0,4; los valores entre 0,4 y 3 y los valores mayores que 3.



Para el problema no tienen sentido los valores negativos y por eso consideramos como primer intervalo el de los comprendidos entre 0 y 0,4.

Para resolver la inecuación, construimos la tabla:

Intervalo	Número de prueba	Signo de 5(x – 0,4)	Signo de (x – 3)	Signo de 5(x – 0,4)(x – 3)
[0, 0,4)	0,2	–	–	+
(0,4, 3)	1	+	–	–
(3, ∞)	5	+	+	+

Como la inecuación planteada es $5x^2 - 17x + 6 < 0$, la solución son todos los números reales comprendidos entre 0,4 y 3, es decir los pertenecientes al intervalo (0,4, 3). Para obtener ganancia deben enlatarse y venderse entre 0,4 y 3 toneladas diarias.

Problema

> La función $c(x) = x^2 - 20x + 6000$ describe el costo de producción de cierto producto, donde c está expresado en pesos y x representa el número de artículos producidos. ¿Cuántos artículos deben producirse si los costos de producción deben mantenerse por debajo de los $ 18 000?

Según lo establecido en el enunciado debe ser $x^2 - 20x + 6000 < 18\,000$, es decir $x^2 - 20x - 12\,000 < 0$.

Hallamos las raíces de la ecuación $x^2 - 20x - 12\,000 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 48\,000}}{2} = \frac{20 \pm 220}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 120 \\ x_2 = -100 \end{array}$$

Quedan definidos tres intervalos (–∞, –100), (–100, 120) y (120, ∞).

Como x representa el número de artículos, sólo consideraremos los intervalos [0, 120) y (120, +∞) y la expresión cuya factorización es (x + 100) (x –120).

Intervalo	Número de prueba	Signo de (x + 100)	Signo de (x – 120)	Signo de (x + 100)(x – 120)
[0, 120)	10	+	–	–
(120, +∞)	150	+	+	+

Como debemos encontrar dónde $x^2 - 20x - 12\,000 < 0$, resulta que el intervalo buscado es [0, 120). Se deben fabricar menos de 120 artículos para que el costo de producción se mantenga por debajo de los $ 18 000.

Problema

> Una empresa puede vender a un precio de $ 100 la unidad, todas las piezas que pueda producir. Si x unidades es la producción diaria, el importe del costo total de la producción diaria es $700 + 20x + x^2$. Halle la función ganancia y grafíquela. ¿Cuántas unidades deben producirse diariamente para que la empresa obtenga ganancias?

Si el precio de venta de una unidad es de $ 100, el ingreso por la venta de las x unidades diarias está representada por la función $i(x) = 100x$.

El costo total diario es la función $c(x) = 700 + 20x + x^2$.

La ganancia g(x) diaria es la diferencia entre el ingreso diario y el costo total,

$g(x) = i(x) - c(x) \Rightarrow g(x) = 100x - (700 + 20x + x^2) \Rightarrow$

$g(x) = y = -x^2 + 80x - 700$

Debemos hallar la región del plano para la cual g(x) es positiva, $g(x) > 0$.

Para graficar la función cuadrática $g(x) = -x^2 + 80x - 700$ hallamos su vértice completando cuadrados y resulta:

$$y = (-1)\,(x^2 - 80x + 700) \Rightarrow y = (-1)\left[\left(x^2 - 80x + \left(\frac{80}{2}\right)^2\right) + 700 - \left(\frac{80}{2}\right)^2\right] \Rightarrow$$

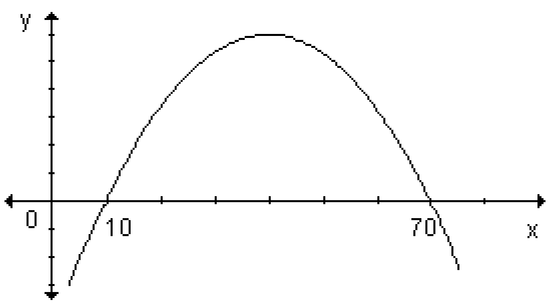
$$y = -\left((x-40)^2 - 900\right) \Rightarrow y = (-1)\,(x-40)^2 + 900 \Rightarrow y = -(x-40)^2 + 900$$

El vértice de la parábola es el punto (40, 900). Como $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Para determinar las intersecciones con el eje de abscisas planteamos $y = 0$ y obtenemos: $(-1)\,(x-40)^2 + 900 = 0 \Rightarrow (x-40)^2 = 900 \Rightarrow x - 40 = \pm 30$

De aquí concluimos que $x_1 = 70$ y $x_2 = 10$ son las intersecciones con el eje x y los valores donde la ganancia es nula.

Para hallar la intersección con el eje de ordenadas reemplazamos x por 0 y resulta $y = g(0) = -0^2 + 80.0 - 700 \Rightarrow y = -700$



Observando la gráfica, podemos concluir que sólo es positiva, es decir, se obtendrán ganancias, cuando se fabriquen más de 10 y menos de 70 unidades diarias.

Analíticamente podemos pensar en resolver una inecuación en una variable planteando:

$-x^2 + 80x - 700 > 0 \Rightarrow (-1).(x-10).(x-70) > 0$

Realizando el cuadro de signos:

Intervalo	Signo de (x–10)	Signo de (x–70)	Signo de (x–10)(x–70)	Signo de –1.(x–10)(x–70)
[0, 10)	–	–	+	–
(10, 70)	+	–	–	+
(70, +∞)	+	+	+	–

Deducimos que deberán producirse diariamente entre 10 y 70 artículos para obtener ganancias.

EJERCICIO

Halle los valores que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $-x + x^2 + 3 < 5$ **b)** $-x^2 - x + 6 > 0$

c) $-2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \leq 0$ **d)** $26 + 21x + 3x^2 \geq -10$

RESPUESTAS

a) $(-1, 2)$ **b)** $(-3, 2)$ **c)** $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **d)** $(-\infty, -4] \cup [-3, \infty)$

Inecuaciones de segundo grado en dos variables

Definición: Una desigualdad o inecuación de segundo grado en dos variables tiene la forma:

$y < ax^2 + bx + c$ ó

$y \leq ax^2 + bx + c$ ó

$y > ax^2 + bx + c$ ó

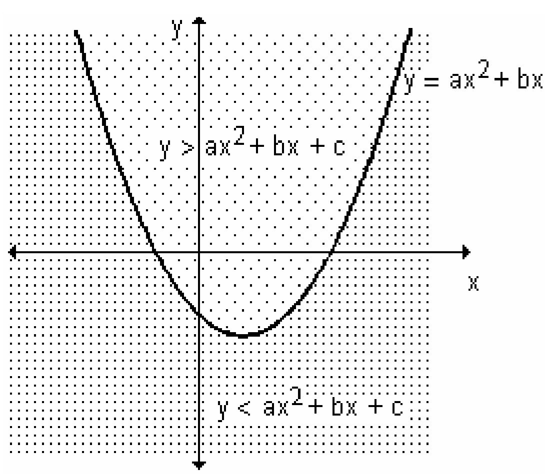
$y \geq ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son constantes reales y $a \neq 0$.

Geométricamente la solución de una inecuación cuadrática en dos variables consiste en todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

Para encontrar estos puntos debemos tener en cuenta que así como cuando estudiamos inecuaciones de primer grado en dos variables vimos que la gráfica de la recta separa al plano en tres conjuntos distintos (la recta misma, una región por encima de ella y una región por debajo de ella) ahora es la parábola la que cumple el mismo rol.

Es decir, la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ divide al plano en tres sectores distintos:

a) la parábola que consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ley $y = ax^2 + bx + c$;

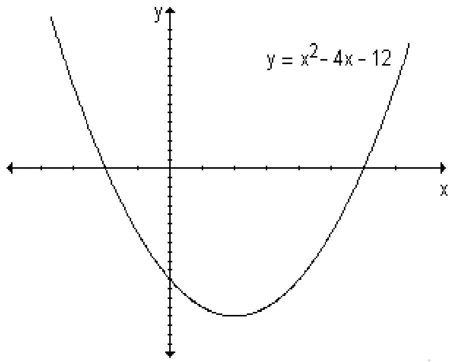


b) la región que se encuentra por encima de la parábola y consiste en todos los puntos (x, y) que satisfacen $y > ax^2 + bx + c$;

c) la región que se encuentra por debajo de la parábola y consiste en todos los puntos (x, y) que satisfacen $y < ax^2 + bx + c$.

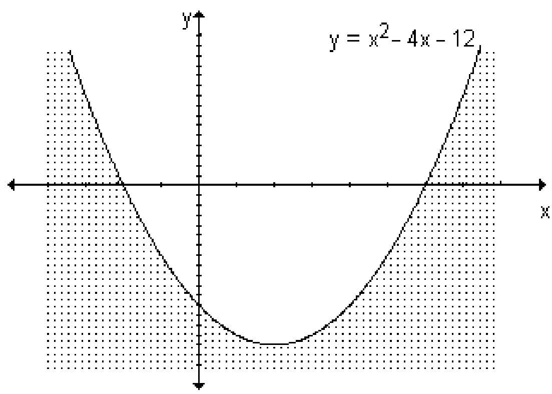
Ejemplo: Grafique el conjunto solución de la inecuación $y \leq x^2 - 4x - 12$

Graficamos la parábola $y = x^2 - 4x - 12$



Elegimos un punto cualquiera del plano, por ejemplo, el (0,0).
Sustituyendo en la desigualdad resulta:
$0 \leq 0^2 - 4.0 - 12$, o sea, $0 \leq -12$, lo que es falso.
Esto significa que la solución no es el sector al que pertenece el punto (0,0) sino el otro.

Gráficamente la solución de la inecuación es:



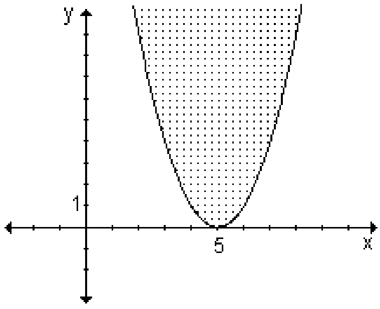
EJERCICIO

Determine gráficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

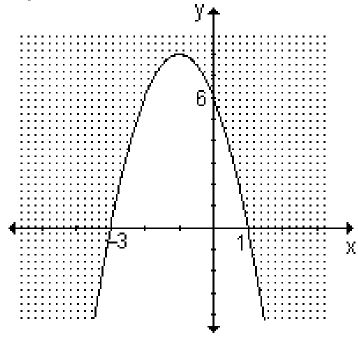
a) $(x-5)^2 \leq y$ **b)** $y \geq -2x^2 - 4x + 6$ **c)** $x^2 > y - 4$ **d)** $y < x^2 + 1$

RESPUESTAS

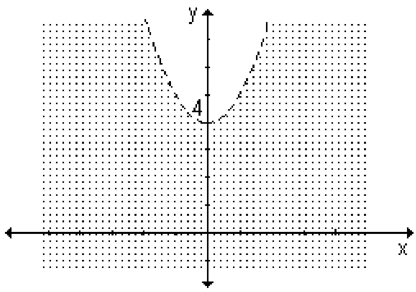
a)



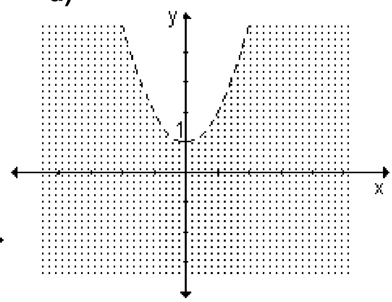
b)



c)



d)



EJERCICIOS INTEGRADORES 2.3 FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

1) Dada la función f: $R \to R$,

a) $y = 2x^2 - 4x$ **b)** $y = -2x^2 - 4x + 6$ **c)** $y = 3x^2 - 9x + 6$

d) $y = 3x^2 - 2x - 1$ **e)** $y = 3x - x^2$ **f)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

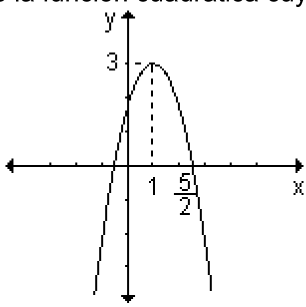
i) Identifíquela.
ii) Complete cuadrados y determine coordenadas del vértice y eje de simetría.
iii) Halle las intersecciones con los ejes coordenados.
iv) Factorice.
v) Determine el valor máximo o mínimo de la función.
vi) Represente gráficamente.

2) Halle el valor de k para que la siguiente ecuación tenga raíces iguales.

$$x^2 + (k-1)x + k^2 = 0 \qquad \text{Verifique}$$

3) **a)** Determine la función cuadrática cuya gráfica corta al eje x en los puntos P(1,0) y Q(–2,0) y al eje y en R(0,2). Verifique.

b) Encuentre la función cuadrática cuya representación gráfica es:



4) Halle el valor de m para que la suma de las raíces sea igual al producto de las mismas en la ecuación:

$$2x^2 + (m + 1)x + (3m - 5) = 0 \qquad \text{Verifique.}$$

5) Calcule el valor de m tal que $x^2 + (m - 1)x + m^2 = 0$ tenga una raíz igual a 1.

6) Represente las siguientes funciones:

a) $A = \{-2, -1, 1, 2\}$; $f : A \to R \,/\, x \to x^2 + 2$

b) $f : R \to R \,/\, x \to x^2 + 2$

7) Sea la función $f : R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 3 \\ 3x - 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) Grafique.

b) Halle: $f(-2)$, $f(4)$, $f(-3)$ y $f(3)$

8) Resuelva las siguientes inecuaciones y represente gráficamente:

a) $-4x^2 + 8x < 0$ **b)** $3x^2 + 18x < -27$

9) Resuelva las siguientes inecuaciones

a) $y + 2 \geq x^2$ **b)** $y - (x + 4)^2 \leq 1$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN. 2.3 FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

1) Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales que se produjeron en ratas que se alimentaron con una dieta que contenía 10 % de proteína. La proteína estaba formada por yema de huevo y harina de maíz. Cambiando el porcentaje P (expresado como decimal) de yema en la mezcla de proteína, el grupo calculó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) de una rata en un cierto período estaba dado por $g = -200\,P^2 + 200\,P + 20$

¿Qué porcentaje de yema produjo un aumento promedio de peso de 70 gramos?

2) En un laboratorio se analizó el aumento promedio del peso de pollitos alimentados con un alimento que contenía 15% de proteína. La proteína consistió en yema de huevo y harina de maíz. Al variar el porcentaje **P** de harina de maíz en la mezcla de proteínas, el grupo de investigadores estimó que el aumento promedio en peso (en gramos) de un pollito durante un cierto período fue de f(P) en donde $f(P) = -\frac{1}{50}P^2 + 2P + 20$, siendo $0 \le P \le 100$.

a) Halle el aumento máximo de peso.

b) Calcule qué porcentaje de harina de maíz produce dicho aumento máximo.

3) La función de demanda para el producto de un fabricante es: $p = 100 - 2q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando existe una demanda semanal q por parte de los consumidores.

a) Obtenga el nivel de producción que maximiza los ingresos totales.

b) Determine dichos ingresos totales.

4) Una empresa estima que n meses después de colocar un producto nuevo en el mercado, f(n) millones de hogares lo estarán utilizando.

Surge que $f(n) = \dfrac{10}{9}n(12 - n)$, $0 \leq n \leq 12$.

a) Calcule el número máximo de casas en las que se empleará dicho producto.

b) Determine cuántos meses han transcurrido desde la introducción del producto para ese número máximo de casas.

5) Se disponen de 24 m de alambre para cercar un jardín rectangular.

a) Exprese el área del jardín en función de la longitud de la base x del mismo.

b) Indique de qué tipo de función se trata.

c) Represente gráficamente la función área.

d) ¿Cuáles son las dimensiones del jardín que hacen que el área abarcada sea máxima?

6) En una empresa se estima que el ingreso p (en dólares) es función del número de obreros n y se comporta según la ley: $p(n) = -0{,}20\ n^2 + 30n$. El costo de producción c se puede estimar también según el número n de obreros según la ley: $c(n) = 0{,}05n^2 + 50$.

a) Halle la función que describe el beneficio o ganancia según el número de obreros.

b)¿Cuántos obreros deben trabajar para obtener máxima ganancia? ¿A cuánto asciende dicha ganancia?

7) La altura s (medida en metros) de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo, está dada por: $s = -5t^2 + 55t$ donde t es el tiempo transcurrido en segundos.

a) ¿De qué tipo de función se trata? ¿Cuál es su representación gráfica?

b) ¿Cuántos segundos han transcurrido cuando la pelota alcanza su altura máxima?

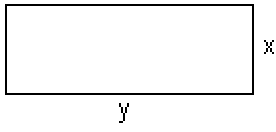
c) ¿Cuál es esa altura? ¿Qué representa esto en la gráfica de la función?

d) ¿Cuántos son los segundos que demora en alcanzar una altura de 50 m?

e) ¿Cuántos segundos han de transcurrir hasta que vuelva a tocar el piso?

f) Represente todo gráficamente.

8) Se desea cercar una superficie rectangular disponiéndose de 1200 m de alambre para cercos.

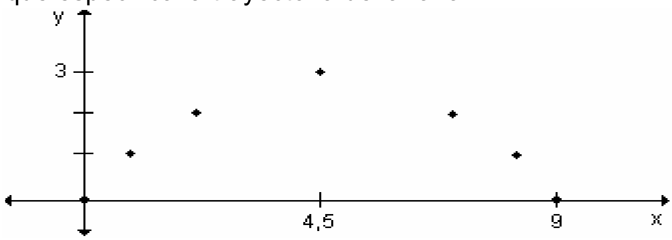


a) Exprese el perímetro en función de las dimensiones.

b) Encuentre el área en función de x. ¿De qué tipo de función se trata?

c) Indique cuál será el área máxima que se puede abarcar con esa cantidad de alambre y cuáles serían las medidas de la superficie.

9) Los animales que saltan siguen al brincar trayectorias parabólicas. La figura muestra el salto de una rana superpuesto a un sistema coordenado. La longitud del salto es de 9 pies y la altura máxima es de 3 pies. Halle una función cuadrática f que especifica la trayectoria de la rana.



10) Una sustancia se distribuye en forma continua. La concentración viene dada por la función: $c(x) = 10x - x^2$ (c medida en $\frac{mg}{cm}$ y el tiempo en horas).

a) Grafique la función.

b) ¿Cuántas horas han de transcurrir para que la concentración sea máxima? Encuentre el valor máximo.

11) Se sabe que el costo de manufactura C en dólares por hacer x mochilas en un día está dado por $C = x^2 - 12x + 50$.

a) ¿De qué tipo de función se trata? ¿Cuál es su representación gráfica?

b) Represente gráficamente la función costo.

c) ¿Cuál es el costo mínimo y cuántas mochilas se producen al día?

d) ¿Cuesta más hacer 4 mochilas o hacer 10?

e) ¿Cuántas mochilas pueden hacerse por $ 50?

12) Una compañía de televisión por cable, de acuerdo a un estudio de mercado, sabe que cuando la tarifa es de x dólares mensuales, el ingreso mensual viene dado por la función $r(x) = 500.(300 - x).x$ con $0 < x < 300$.
¿Cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo?

13) La producción de fruta de cada árbol de un huerto de manzanas decrece cuando la densidad de los árboles plantados se incrementa. Cuando hay n árboles por hectárea se sabe que el número promedio de manzanas por árbol es $y = 900 - 10n$ para una variedad particular de manzanas (si $30 < n < 60$). ¿Qué valor de n da la máxima producción total de manzanas por hectáreas?

14) Una rana al saltar alcanza una altura h (en pulgadas) luego del tiempo t (en décimas de segundo) dada por: $h(t) = -2t^2 + 12t$.

a) ¿En qué momento alcanza la rana su altura máxima?

b) ¿Cuál es la altura máxima?

c) ¿En qué momento está la rana a una altura de 10 pulgadas?

d) ¿Cuánto demora en volver a tocar el suelo?

e) Represente todo gráficamente.

15) El ingreso r (en millones de dólares) de un gran negocio que recibe al vender x artículos está dado por: $r(x) = -10 + 10x - x^2$.

a) ¿Qué ingreso se obtiene si no se vende ningún artículo? ¿Si se venden 7?

b) ¿Cuántos artículos deben venderse para obtener el ingreso máximo? ¿Cuál es ese ingreso?

c) ¿Cuántos artículos deben venderse si el negocio desea tener un ingreso de 6 millones?

d) Represente todo gráficamente.

16) Si una planta recibe una luz de intensidad x, la razón de fotosíntesis y medida en unidades adecuadas, se encontró experimentalmente que está dada por $y = 150x - 25x^2$ para $0 \le x \le 6$.

a) Indique de qué tipo de función se trata.

b) ¿Cuál es su representación gráfica?

c) Indique para qué intensidad se da la razón de fotosíntesis máxima.

d) Represente gráficamente.

17) El libro de los records de Guinness informa que los perros pastores alemanes pueden efectuar saltos verticales de más de 10 pies al escalar muros. Si la distancia S en pies, a los t segundos es $S = -16t^2 + 24t + 1$, determine durante cuántos segundos está el perro a más de 9 pies del piso.

18) La distancia d de frenado, en metros (m), de un cierto auto que viaja a una velocidad v es $d = v + \dfrac{v^2}{20}$. Calcule la velocidad requerida que haga que la distancia de frenado sea menor que 40 m.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.3 FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

1) La gráfica de $y = -2(x - 4)^2 + 3$ tiene el vértice

a) en el primer cuadrante y se abre hacia arriba.

b) en el segundo cuadrante y se abre hacia abajo.

c) en el primer cuadrante y se abre hacia abajo.

d) en el segundo cuadrante y se abre hacia arriba.

2) La gráfica de $y = -3(x - 2)^2 + 1$ es congruente con la de $y = -3x^2$, pero está:

a) desplazada 2 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

b) desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.

c) desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.

d) desplazada 2 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia abajo.

3) El conjunto imagen de la función $y = 2(x + 3)^2 - 1$ es

a) $\{y/y \in R\}$ **b)** $\{y/y \in R \wedge y \ge 1\}$

c) $\{y/y \in R \wedge y \le -3\}$ **d)** $\{y/y \in R \wedge y \ge -1\}$

4) La función $y = -x^2 + 4x + 1$ alcanza un valor máximo

a) 5 en $x = 2$ **b)** -3 en $x = 2$

c) -5 en $x = -2$ **d)** -3 en $x = -2$

5) Las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría de la función $y = (x - 3)^2 - 2$ son:

a) $V(-3, -2)$; $x = -3$ **b)** $V(3, -2)$; $x = -3$

c) $V(3, -2)$; $x = 3$ **d)** $V(-3, 2)$; $x = 3$

6) La gráfica de la función $y = -2x^2 + 12x - 18$ interseca al eje de abscisas en

a) dos puntos **b)** un punto **c)** ningún punto

7) La intersección de la función $y = (x - 2)^2 - 5$ con el eje de las ordenadas es:

a) $(0, -1)$ **b)** $(0, -5)$ **c)** $(0, -9)$ **d)** ninguna de las anteriores

8) Una de las raíces de la función $y = 2x^2 + 8x + 6$ es $x_1 = -1$. La otra raíz es:

a) $x_2 = 3$ **b)** $x_2 = -4$ **c)** $x_2 = 4$ **d)** $x_2 = -3$

AUTOEVALUACIÓN Nº 4: FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

1) Halle él o los valores de k de modo que la gráfica de la función de segundo grado definida por $f(x) = x^2 + kx + 9$ no corte al eje de abscisas.

2) Determine los valores de m, n y t en la función definida por $f : R \to R$ / $f(x) = m(x - n)^2 + t$ para que su gráfica se obtenga trasladando $\frac{5}{2}$ unidades a la izquierda y 3 unidades hacia abajo la gráfica de la función $g(x) = x^2$.

Tenga en cuenta además que el punto $M\left(\frac{7}{2}, -5\right)$ pertenece a la gráfica de la función f(x).

3) Dada la función $f : R \to R$ / $f(x) = 4x^2 + 2kx + k - 1$, determine el valor de k de modo que su gráfica presente un sólo punto de intersección con el eje de abscisas. Para dicho valor de k obtenga el vértice de la parábola y el eje de simetría completando cuadrados.

4) Un granjero desea construir una cerca rectangular próxima al río con 120 m de tirante. El lado que mira al río no será cercado. ¿Cuál es el área de la región más grande que se puede cercar?

5) En una fábrica familiar se estima que el ingreso de producción (i) en dólares es función del número de empleados (n) y sigue la ley $i = 30n - \frac{1}{5}n^2$. Se sabe además que los costos de producción (c) responden a un comportamiento según la función $c = \frac{1}{20}n^2 + 50$.

a) Halle la función que describe el beneficio que genera esta empresa.

b) Obtenga el beneficio máximo e indique cuántos obreros se necesitan para alcanzarlo.

c) ¿Cuántos obreros deben trabajar para que el beneficio no resulte inferior a los $814?

6) La distancia de frenado d (en metros) de un automóvil que se desplaza a una velocidad v (en metros por hora mph) está dada por la ley: $d = 0{,}06\,v^2 + 1{,}1\,v$

a) ¿Cuál es la distancia de frenado para una velocidad de 20 mph?

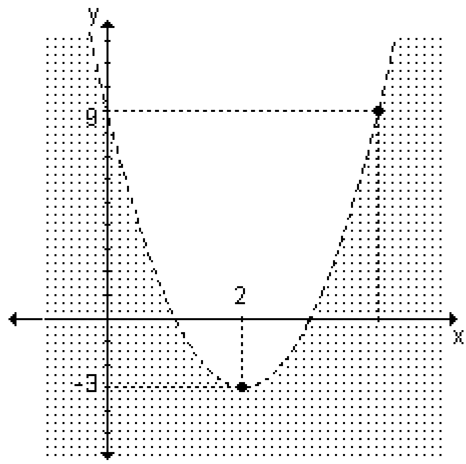
b) ¿A qué velocidad va el auto si tarda 100 m en detenerse?

7) Un campeón clavadista salta de la plataforma con una altura h determinada por $h(t) = 10 - 2t^2$ donde t es el tiempo transcurrido medido en segundos. La altura se mide desde el nivel del agua en metros.
Encuentre cuál es la altura desde la que salta y cuánto tardará el clavadista en tocar el agua.

8) Resuelva las siguientes inecuaciones y represente gráficamente:

a) $x^2 + 5x < 6$ **b)** $-5x \geq x\,(2 - x)$

9) Determine la inecuación cuya solución es la zona sombreada y obtenga analíticamente los puntos de intersección con los ejes coordenados.

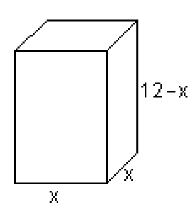


2.4 Función Polinomial

En las aplicaciones de la matemática a las ciencias, economía u otras áreas, muchas situaciones se modelan utilizando funciones polinomiales. Por ejemplo, el volumen de un silo de granos de altura constante, se describe como una función polinomial de su radio.
Una de las ventajas de usar funciones polinomiales es que involucran solamente operaciones de suma, resta y multiplicación por lo que su evaluación se hace rápidamente.

Problema

El volumen de una caja de cartón de base cuadrada, es función de la medida de su arista (en centímetros). Encuentre la ley de la función para la caja de la figura. ¿De qué tipo de función se trata? ¿Cuál es el dominio de la función?

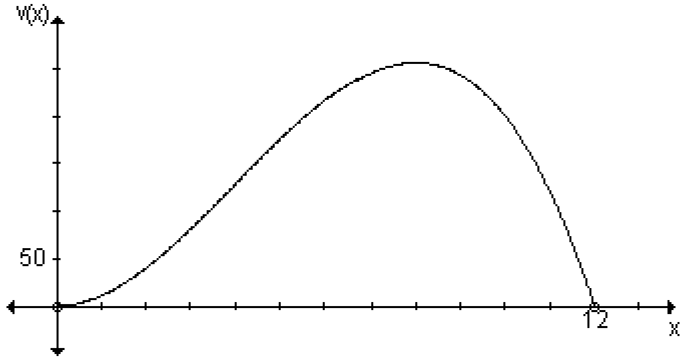


Como la caja tiene forma de prisma rectangular, la medida de su volumen se calcula multiplicando la superficie de la base por la altura.
Por lo tanto el volumen es $v(x) = x\,.\,x.(12 - x)$

Multiplicando se obtiene $v(x) = 12x^2 - x^3$

Se trata de una función polinomial ya que la ley es un polinomio de grado 3.

Debido a que tanto x como v representan cantidades positivas, longitud y volumen, respectivamente, debe ser $x > 0$ y $12 - x > 0$. Luego el dominio de la función está formado por todos los números reales mayores que cero y menores que 12. Escrito como intervalo $D = (0, 12)$.



Definición: Una función polinomial es una función de la forma

$f : R \to R \,/\; x \to a_0x^n + a_1 x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ...+ a_n$, donde a_0, a_1, a_2, a_n son números reales, $a_0 \neq 0$ y n es un entero no negativo.

Una función es polinomial si su ley está dada por un polinomio en una variable. El grado de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable.

Ejemplos:

a) La función constante $f(x) = k$, con $k \neq 0$, es una función polinomial de grado cero.

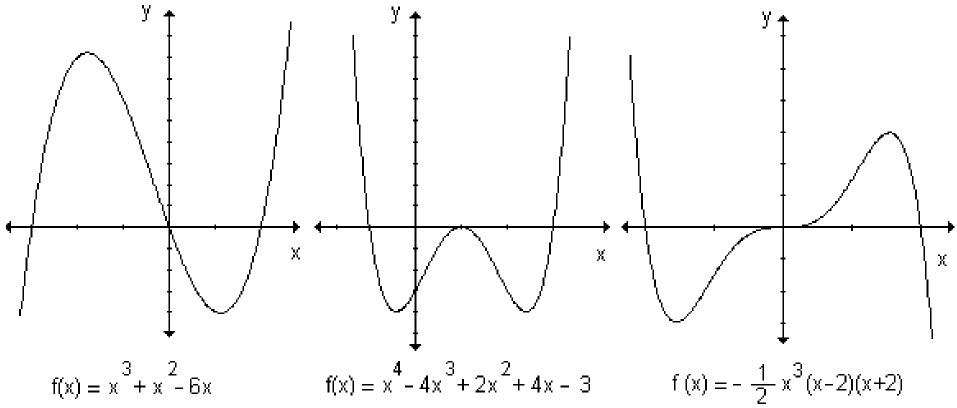
b) La función $f(x) = mx + h$, $m \neq 0$, es una función polinomial de primer grado.

c) La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una función polinomial de segundo grado.

d) La función $f(x) = 6x^4 + 5x^2 + 7x - 8$, es una función polinomial de cuarto grado.

Representación gráfica de la función polinomial

Las gráficas de las funciones polinomiales de grado cero y uno son rectas, la grafica de la función polinomial de grado dos es una parábola. A medida que aumenta el grado, las gráficas tienden a ser más complejas. En el ejemplo que sigue se observan las gráficas de funciones polinomiales de grado tres, cuatro y cinco.

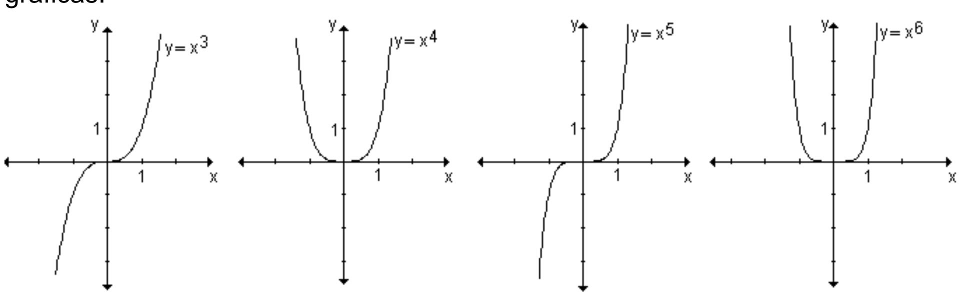


Estudiaremos las características generales de la gráfica de las funciones polinomiales empezando por las más simples, las que corresponden a funciones de la forma $y = x^n$.

Ejemplo: Represente gráficamente las funciones polinomiales siguientes:

a) $y = x^3$ **b)** $y = x^4$ **c)** $y = x^5$ **d)** $y = x^6$

Realizando una tabla de valores para cada función se obtienen las siguientes gráficas:



En general la gráfica de $y = x^n$ tiene una forma parecida a la de $y = x^3$ cuando n es impar, y una forma parecida a la de $y = x^2$ cuando n es par. Conforme el grado n aumenta las gráficas se hacen más planas alrededor del origen y de pendiente más pronunciada en los demás puntos.

Se observa que cuando n es par, la función $y = x^n$ es par, es decir, $f(-x) = f(x)$ y su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. Además, $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Cuando n es impar, la función es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$ y es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ y si $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$.

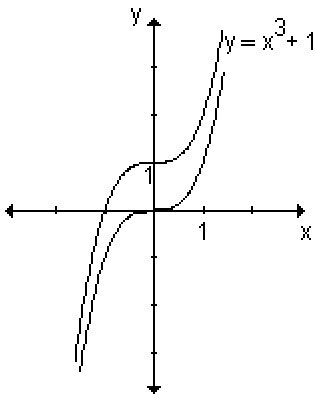
*Ejemplo: t*ransformaciones de funciones polinomiales

Represente gráficamente cada una de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 1$ **b)** $y =(x + 2)^4$ **c)** $y = -2x^5$

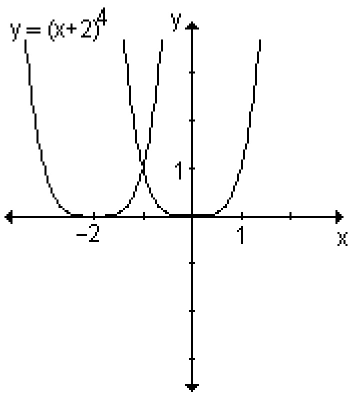
A partir de las gráficas del ejemplo anterior y utilizando las técnicas de transformación estudiadas se obtiene:

a)



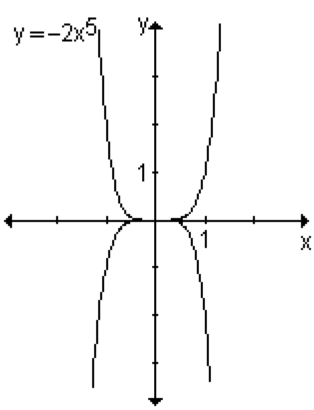
La gráfica de $y = x^3 + 1$ tiene la misma forma de la gráfica de $y = x^3$ trasladada una unidad hacia arriba.

b)



Si se traslada la gráfica de $y = x^4$, dos unidades hacia la izquierda se obtiene la gráfica de $y = (x + 2)^4$.

c)



Partiendo de la representación de $y = x^5$, al multiplicar por dos todas las ordenadas, se alarga verticalmente la gráfica. El signo negativo refleja la gráfica respecto al eje x.

Nota: Las funciones polinomiales de la forma $f(x) = a_0x^n$ donde a_0 es un número real distinto de cero y n es un entero positivo, se llaman funciones potencia de grado n.

Ceros de una función polinomial

Un aspecto que resulta muy importante en el estudio de las funciones polinomiales es encontrar sus ceros, es decir, aquellos valores del dominio que tienen como imagen el cero. Encontrar los ceros de la función polinomial es equivalente a encontrar los ceros del polinomio p(x), es decir, a encontrar las raíces de la ecuación polinómica:

$f(x) = a_0x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + ...+ a_n = 0$

Para encontrar los ceros de una función polinomial o las raíces de una ecuación polinomial resulta útil factorizar polinomios. Para eso, debemos tener en cuenta algunos teoremas que se enuncian a continuación y que tienen mucha importancia en la resolución de ecuaciones polinómicas.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio con coeficientes reales o complejos, de grado no menor que la unidad tiene por lo menos un cero real o complejo.

Consecuencias del Teorema Fundamental

a) Todo polinomio con coeficientes reales o complejos de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros reales o complejos.

b) Si $x_1, x_2, ..., x_n$ son ceros de p(x) entonces podemos escribir:

$$p(x) = a_0.(x - x_1).(x - x_2).........(x - x_n)$$

Nota: Todo polinomio tendrá tantos ceros como lo indica su grado.

Puede ocurrir que dentro del conjunto de ceros de p(x) existan dos o más valores iguales. En ese caso estamos en presencia de ceros múltiples donde el orden de multiplicidad está dado por la cantidad de veces que sea cero del polinomio, o sea, la cantidad de veces que se repite ese número como raíz de la ecuación.

Todo polinomio p(x) de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene n ceros (reales o complejos) contando cada uno de esos ceros tantas veces como su orden de multiplicidad lo indique.

Si p(x) es un polinomio y c es un número tal que $p(c) = 0$, entonces las siguientes expresiones son equivalentes:

- c es un cero de p(x)
- $x = c$ es una raíz de la ecuación $p(x) = 0$
- p(x) es divisible por $x - c$
- $x - c$ es un factor de p(x), es decir existe un polinomio q(x) tal que

$p(x) = (x-c).q(x)$

- $x = c$ es la intersección de la gráfica de p(x) con el eje x, siempre que c sea un número real.

Ejemplo: Dado $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$, compruebe que $x = 2$ es un cero de p(x) y encuentre las demás raíces. Escriba la función en su forma factorizada.

Si $x = 2$ es un cero de la función, significa que $x - 2$ es un factor de $p(x)$ y además que el polinomio $p(x)$ es divisible por $x - 2$. Es decir, al dividir $p(x)$ por $x - 2$, el resto de la división debe ser cero.

Para dividir un polinomio por otro de la forma $x - c$ se puede utilizar la división sintética, aplicando la regla práctica de Ruffini.

En esta forma de dividir se escriben, en una tabla como la que sigue, los coeficientes del polinomio dividendo completo y ordenado en forma decreciente y, en lugar de escribir $x - 2$, se escribe simplemente 2, o sea el posible cero de la función.

	1	–5	6	4	–8
2					

Para dividir se baja el uno (el primer coeficiente), se multiplica $1.2 = 2$ y se escribe el resultado en el renglón del medio, a continuación se suma.

	1	– 5	6	4	–8
2		2			
.	1	–3			

Este proceso de multiplicar y después sumar se repite hasta que se completa la tabla.

	1	–5	6	4	–8
2		2	–6	0	8
	1	–3	0	4	$\boxed{0}$

Los números 1, –3, 0 y 4 son los coeficientes del cociente y el último número, 0, es el resto de la división. Como el cociente debe ser un polinomio de grado tres ya que se dividió uno de grado cuatro por otro de grado uno, resulta:

$c(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ y el resto $r(x) = 0$.

Como el resto es cero, $x - 2$ es factor de $p(x)$, es decir:

$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = (x - 2) . (x^3 - 3x^2 + 4)$

Entonces $x = 2$ es cero de la función y para encontrar los demás podemos determinar los ceros de $x^3 - 3x^2 + 4$. Es decir, cualquier solución de $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ será también cero de $p(x)$.

Probamos nuevamente con $x = 2$ ya que puede ser un cero múltiple.

	1	–3	0	4
2		2	–2	–4
	1	–1	–2	$\boxed{0}$

Luego $x = 2$ es cero nuevamente y:

$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = (x - 2).(x - 2).(x^2 - x - 2) = (x - 2)^2.(x^2 - x - 2)$

Como el último factor es cuadrático, para determinar los ceros del polinomio se puede aplicar la fórmula resolvente a la ecuación de segundo grado:

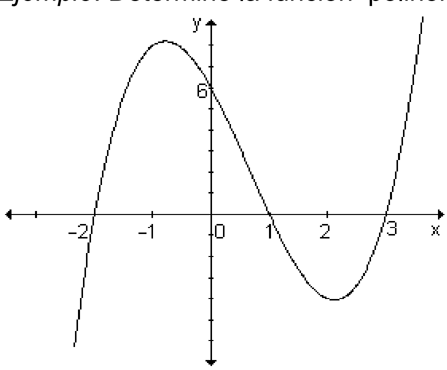
$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} \Rightarrow x = 2,\ x = -1$$

Resulta $x = 2$ un cero de orden de multiplicidad 3 y $x = -1$ un cero simple.
La factorización completa de la función es $p(x) = (x - 2)^3 .(x + 1)$

Ejemplo: Compruebe que $(x - 3)$ es un factor de $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.

Si $x - 3$ es factor de $q(x)$ entonces la división de $q(x)$ por $x - 3$ debe tener resto cero, es decir el polinomio $q(x)$ es divisible por $x - 3$. Una forma de determinarlo es utilizando el teorema del resto.
Dicho teorema afirma: "el resto de la división de un polinomio por otro de la forma $(x - a)$, es el valor numérico del polinomio para $x = a$" .
En este ejemplo se debe calcular el valor numérico de $q(x)$ para $x = 3$, sustituyendo se observa que $q(3) = 3^3 - 3.3^2 + 4.3 - 12 = 0$, por lo que queda comprobado lo pedido.

Ejemplo: Determine la función polinomial de tercer grado cuya gráfica es:



Dado que la función pedida es de grado 3, su forma factorizada es
$p(x) = a.(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3)$.
Las intersecciones con el eje de abscisas, o sea las raíces de la ecuación o ceros del polinomio, son: -2, 1 y 3.
Luego $p(x) = a.(x + 2).(x - 1).(x - 3)$.

Para calcular el valor de a, se utiliza el dato de que la ordenada al origen es 6, o sea $p(0) = 6$.
Reemplazando en la ley de la función resulta:
$p(0) = a.(0 + 2).(0 - 1).(0 - 3) \Rightarrow 6 = a.2.(-1).(-3) \Rightarrow 6 = 6a \Rightarrow a = 1$
La función buscada es: $p(x) = (x + 2).(x - 1).(x - 3)$
Resolviendo los productos resulta $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
Podemos definir entonces la función $p : R \rightarrow R / \ x \rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Problema

Un investigador tiene datos limitados acerca de la temperatura T (en ºC) durante un período de 24 horas.
La medianoche corresponde a la hora $t = 0$. Deduzca la función polinomial de grado tres correspondiente a los datos de la tabla:

t (horas)	0	4	12	20
T (ºC)	0	0	16	0

Como la función polinomial es de grado tres su forma factorizada resulta:
$p(t) = a(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$. Según la tabla vemos que 0, 4 y 20 son ceros de la función pues sus imágenes son nulas, entonces: $p(t) = a(t - 0)(t - 4)(t - 20)$. Como a las 12 horas la temperatura asciende a 16ºC, el punto (12, 16) le pertenece y en consecuencia, verifica la ecuación:
$16 = a(12 - 0)(12 - 4)(12 - 20) \Rightarrow 16 = a.12.8.(-8) \Rightarrow 16 = -768a \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -\dfrac{1}{48}$.
La función polinomial buscada es

$$p : A \to R \;/\; p(t) = -\frac{1}{48}\, t\,(t - 4)(t - 20) \text{ donde } A = \{t \,/\, t \in R \wedge 0 \le t < 24\}$$

EJERCICIOS

1) Encuentre el valor de k para que:

a) la gráfica de $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$, contenga al punto $(-1,4)$.

b) $x = 2$ sea un cero de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$. Encuentre los otros ceros.

2) Escriba la función polinomial que verifique las condiciones dadas en cada caso.

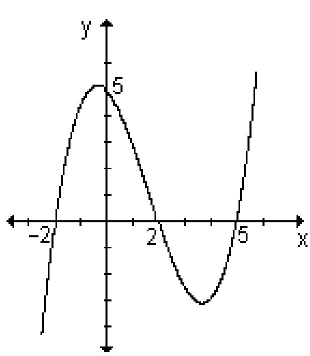
a) Coeficiente principal $a_0 = 2$ y ceros $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

b) Coeficiente principal $a_0 = -1$ y ceros $x_1 = 1$ (multiplicidad 3), $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

c) Grado 3, coeficiente principal $a_0 = 3$, dos de sus ceros son $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$ y el punto $\left(2, \dfrac{21}{4}\right)$ le pertenece.

d) Grado 2, $f(-3) = 0$, $f(0) = -\dfrac{9}{8}$, $f(1) = -\dfrac{7}{2}$.

3) Halle la función polinomial de tercer grado cuya gráfica es:



RESPUESTAS

1)a) $k = -\frac{4}{3}$ **b)** $k = 2;\ x_1 = 4,\ x_2 = -4$

2)a) $p(x) = 2(x-2)(x-3)$ **b)** $p(x) = -(x-1)^3\left(x - \frac{3}{2}\right)$

c) $p(x) = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)$ **d)** $p(x) = -\frac{1}{2}(x+3)\left(x + \frac{3}{4}\right)$

3) $p(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x-2)(x-5)$

Propiedades de los ceros de un polinomio

Para encontrar los ceros de una función polinomial o las raíces de una ecuación polinomial es importante tener en cuenta las siguientes propiedades.

a) Propiedad de los ceros racionales

Sea $p(x) = a_0x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ un polinomio de coeficientes enteros. Si $\frac{\alpha}{\beta}$ (expresión irreducible y $\beta \neq 0$) es un cero racional de $p(x)$ se debe cumplir que α es divisor de a_n y β divisor de a_0.

Consecuencia: si el coeficiente principal $a_0 = 1$, la ecuación polinomial $p(x) = 0$ solamente puede presentar raíces enteras.

Observación: esta condición es necesaria pero no suficiente, es decir para que esos valores sean raíces de la ecuación además de cumplir la condición anterior, deben satisfacer la ecuación.

Ejemplo: Encuentre los ceros de la función p: R $\rightarrow$ R definida según la ley polinomial $p(x) = 12x^3 - 10x^2 - 4x + 2$.

Como la función es de grado 3 debe tener 3 ceros. Para obtener los posibles ceros racionales, escribimos los divisores α del término independiente ($a_4 = 2$) y los divisores β del coeficiente del término de mayor grado ($a_0 = 12$) y efectuamos todos los cocientes posibles $\frac{\text{divisores de 2}}{\text{divisores de 12}}$.

Luego, los posibles ceros racionales son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{12}$.

Falta verificar realizando la división o aplicando el teorema del resto cuáles de ellos son verdaderamente ceros.

Aplicando Ruffini probamos que x = 1 es cero y generamos una ecuación cuadrática que podemos resolver a través de la resolvente.

	12	–10	–4	2
1		12	2	–2
	12	2	–2	$\boxed{0}$

$p(x) = (x-1)\,(12x^2 + 2x - 2)$

Entonces $12x^2 + 2x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{24} = \dfrac{-2 \pm 10}{24} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{array}$

El polinomio presenta tres ceros $1,\ -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{3}$.

Resulta el polinomio factorizado: $p(x) = 12(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

Ejemplo: Encuentre las soluciones de $x^4 - \dfrac{5}{4}x^3 - \dfrac{15}{8}x^2 + \dfrac{5}{8}x + \dfrac{1}{4} = 0$.

Las soluciones de la ecuación polinomial son los ceros de la función polinomial $p(x) = x^4 - \dfrac{5}{4}x^3 - \dfrac{15}{8}x^2 + \dfrac{5}{8}x + \dfrac{1}{4}$. Para aplicar la propiedad de los ceros racionales, el polinomio debe tener coeficientes enteros. Si es un polinomio con coeficientes racionales basta multiplicar por un número que sea múltiplo común de todos los coeficientes para obtener un polinomio que tenga los mismos ceros y todos sus coeficientes enteros.

El polinomio $p(x) = x^4 - \dfrac{5}{4}x^3 - \dfrac{15}{8}x^2 + \dfrac{5}{8}x + \dfrac{1}{4}$ tiene los mismos ceros que $q(x) = 8.\left(x^4 - \dfrac{5}{4}x^3 - \dfrac{15}{8}x^2 + \dfrac{5}{8}x + \dfrac{1}{4}\right) = 8x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 5x + 2$.

Sus posibles ceros racionales son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{4},\ \pm\dfrac{1}{8}$.

Aplicando Ruffini probamos que $x = -1$ y $x = 2$ son ceros del polinomio.

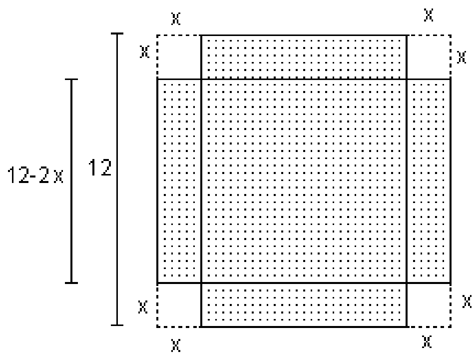
	8	–10	–15	5	2
–1		–8	18	–3	–2
	8	–18	3	2	$\boxed{0}$
2		16	–4	–2	
	8	–2	–1	$\boxed{0}$	

Aplicando resolvente a la ecuación cuadrática $8x^2 - 2x - 1 = 0$ se obtiene $x = \dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{4}$ que son los otros dos ceros.

Luego las soluciones de la ecuación dada son $x = -1$, $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{4}$.

Problema

> Un fabricante produce un modelo de caja de 108 m^3 de volumen con piezas de cartón de 12 m de lado cortando cuadrados en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba, como se puede observar en el dibujo. ¿Cuál es la longitud de lado de cada uno de los cuadrados que se cortan en las esquinas, teniendo en cuenta sólo valores naturales?



De acuerdo a la gráfica, la base de la caja es cuadrada de lado (12–2x) metros y la altura es x metros.
El volumen es el producto de la superficie de la base por la altura, o sea:
$v(x) = (12 - 2x).(12 - 2x).x$
$v(x) = (12 - 2x)^2.x$
Como el volumen debe ser 108 m^3, se obtiene: $(12 - 2x)^2.x = 108$

Despejando: $(144 - 48x + 4x^2).x - 108 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 48x^2 + 144x - 108 = 0$.
Dividiendo ambos miembros por 4 resulta: $x^3 - 12x^2 + 36x - 27 = 0$.
Como el coeficiente principal es 1, las posibles raíces racionales sólo son enteras y divisores del término independiente: ±1, ±3, ±9, ±27. Aplicando la regla de Ruffini obtenemos:

	1	–12	36	–27
3		3	–27	27
	1	–9	9	$\boxed{0}$

Resulta la ecuación de segundo grado $x^2 - 9x + 9 = 0$. Calculamos sus raíces con la resolvente:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{9 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Las soluciones son: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Como el enunciado del problema pide valores naturales, la longitud de cada lado de los cuadrados que se cortan en las esquinas debe ser de 3 m.

b) Propiedad de los ceros complejos: sea p(x) un polinomio de coeficientes reales. Si un número complejo es cero de p(x), su conjugado también lo es.

Ejemplo. Defina un polinomio de grado 4 que tiene como coeficiente principal el valor $-\frac{1}{2}$ y dos de sus ceros son $x_1 = 2 + i$ y $x_2 = 3i$.

La forma factorizada del polinomio buscado es:
$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.
El valor de a es $-\frac{1}{2}$, y, según la propiedad enunciada, si $x_1 = 2 + i$ y $x_2 = 3i$ son dos de sus ceros los otros serán $x_3 = 2 - i$ y $x_4 = -3i$.
El polinomio queda definido por $p(x) = -\frac{1}{2}(x - 2 - i)(x - 2 + i)(x + 3i)(x - 3i)$.

Ejemplo. Resuelva la ecuación $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$.

Dado que el polinomio es de grado tres, la ecuación presenta tres raíces. Como el coeficiente principal es uno, las posibles soluciones racionales son los enteros ±1, ±2, ±4 (divisores de -4).
Probamos la posible raíz 1 utilizando división sintética, aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Como el resto es 0 resulta que 1 es raíz y $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1).(x^2 + 4)$
Las soluciones restantes satisfacen la ecuación $x^2 + 4 = 0$.
Despejando se obtiene $x = \pm 2i$.
Luego las soluciones de la ecuación son $x_1 = 1$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -2i$.

EJERCICIOS

1) Aplicando las propiedades, determine los posibles ceros racionales de cada una de las siguientes funciones polinomiales. Verifique cuáles lo son aplicando Ruffini o el Teorema del Resto.

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

c) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

2) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3x^3 - x^2 - 27x + 9 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

RESPUESTAS

1)a) Los posibles ceros son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Los ceros son 1, 3 y 5.

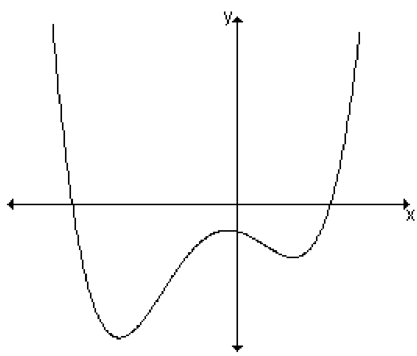
b) Los posibles ceros son $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$. Los ceros son 1, –3 y $\frac{1}{2}$.

c) Los posibles ceros son $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Los ceros son 1, –1, 3, –3.

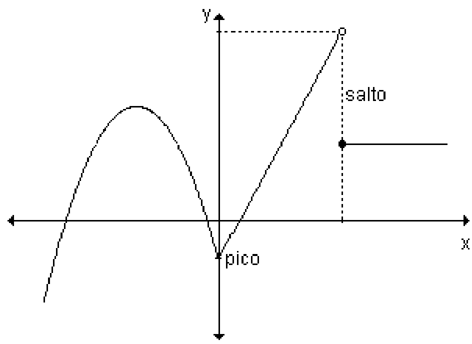
2)a) $\frac{1}{3}$, 3, –3 **b)** 2, –2, i, –i

Gráficas de otras funciones polinomiales

La gráfica de toda función polinomial es suave (sin esquinas o picos) y continua (sin interrupciones o saltos).



Gráfica una función polinomial

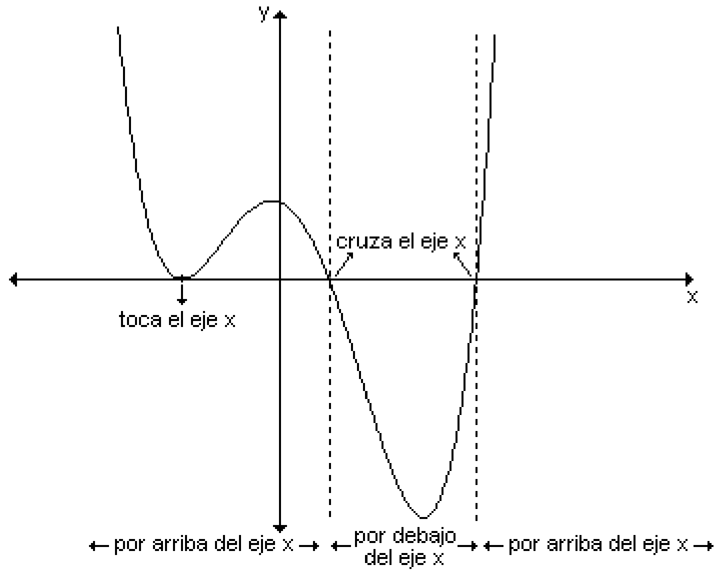


Gráfica de una función no polinomial

Para construir la gráfica de una función polinomial es importante tener en cuenta varios aspectos. Uno de ellos es determinar los ceros de la función y analizar los signos de la función en los intervalos que dichos ceros determinan.
En general, los ceros reales de una función polinomial corresponden a las intersecciones con el eje x de su gráfica. En esas intersecciones, la gráfica debe cruzar o tocar al eje x. Entre dos intersecciones consecutivas la gráfica está por encima o por debajo del eje x.

Factorizar completamente una función polinomial permite resolver fácilmente la ecuación $f(x) = 0$ y localizar las intersecciones con el eje x. Si $x = x_0$ es un cero de multiplicidad par, el signo de $f(x)$ no cambia de un lado al otro de x_0. La gráfica toca al eje x en ese punto.

Si $x = x_0$ es un cero de multiplicidad impar, el signo de $f(x)$ cambia de un lado al otro de x_0. La gráfica cruza al eje x en ese punto.
Entre cualesquiera dos ceros sucesivos, los valores de la función serán todos positivos o negativos. Por lo tanto, entre dos ceros reales sucesivos la gráfica se encontrará en su totalidad por encima o por debajo del eje x.



Ejemplo: Dada la función $p(x) = (x-1)^2(x+2)$,

a) encuentre las intersecciones de la gráfica de la función con los ejes coordenados,

b) determine los intervalos donde la gráfica está por encima del eje x y los intervalos donde la gráfica está por debajo,

c) represente gráficamente la función.

a) Para hallar la intersección con el eje y, debemos hacer $x = 0$ obteniendo $y = 2$, por lo que el punto $(0, 2)$ pertenece a la función.

Los puntos donde la gráfica interseca al eje x son aquellos que satisfacen la ecuación $(x-1)^2(x+2) = 0$, de la cual se obtiene $x = -2$, $x = 1$. Los puntos de intersección son $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

b) Las dos intersecciones con el eje x dividen al mismo en tres intervalos:

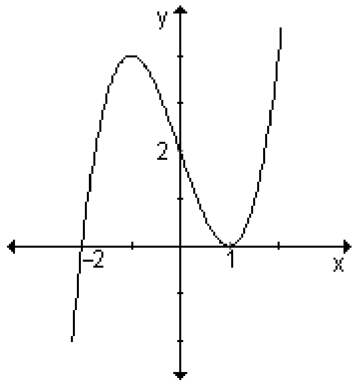
$$-\infty < x < -2 \qquad -2 < x < 1 \qquad 1 < x < \infty$$

Se observa que $x = 1$ es un cero de multiplicidad 2 y $x = -2$ es un cero simple, por lo que la gráfica cruza al eje en $x = -2$ y lo toca en $x = 1$. Como no hay otros puntos de intersección, se deduce que la gráfica está por arriba o por debajo del eje x en los tres intervalos.

Para estudiar el signo de la función en cada uno de esos intervalos conviene armar una tabla analizando el signo de cada factor de la expresión factorizada de la función y utilizando un valor de prueba para cada intervalo.

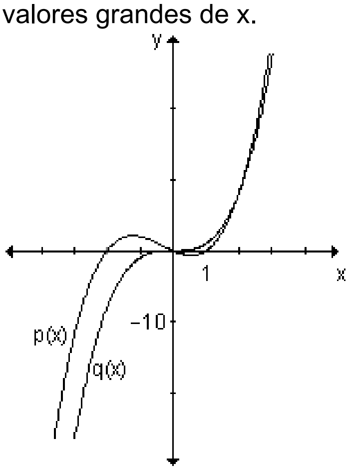
Intervalos	Signo de $(x-1)^2$	Signo de $(x+2)$	Signo de $p(x)$
$(-\infty, -2)$	+	–	–
$(-2, 1)$	+	+	+
$(1, \infty)$	+	+	+

c) Uniendo los puntos (intersecciones con los ejes) con una curva suave y continua, teniendo en cuenta los signos de la función en cada intervalo se obtiene:



Otro aspecto importante para construir la gráfica de una función polinomial es analizar cómo se comporta la función para valores grandes, en valor absoluto, de x.

Ejemplo: Analice el comportamiento de $p(x) = x^3 + x^2 - 2x$ y $q(x) = x^3$ para valores grandes de x.



Graficando ambas funciones en un mismo sistema se observa que el comportamiento para valores grandes de x es similar:

$x^3 + x^2 - 2x \to \infty$ cuando $x \to \infty$

$x^3 + x^2 - 2x \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

$x^3 \to \infty$ cuando $x \to \infty$

$x^3 \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

Para analizar por qué las funciones p y q tienen el mismo comportamiento para valores grandes de x, se factoriza la función p(x) como sigue:

$$p(x) = x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

Cuando el valor absoluto de x es grande, el segundo y tercer términos dentro del paréntesis son muy pequeños por lo que $p(x) \cong x^3 (1+ 0 - 0) = x^3 = q(x)$

Todos los polinomios de grado $n \geq 1$ tienden a $\pm \infty$ cuando x tiende a $\pm \infty$. Para valores grandes en valor absoluto, de x, ya sean positivos o negativos, la gráfica de una función polinomial de grado n,
$f(x) = a_0x^n + a_1 x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ...+ a_n$, se parece a la gráfica de la función potencia $f(x) = a_0x^n$.

Resumen: Para graficar una función polinomial se debe tener en cuenta:

- En un cero de multiplicidad par, la gráfica de f toca al eje x.
- En un cero de multiplicidad impar, la gráfica de f cruza al eje x.
- Entre dos ceros consecutivos, la gráfica de f está por arriba o por debajo del eje x.
- Para valores grandes de x, la gráfica se comporta como la de $g(x) = a_0x^n$.

Ejemplo: Dada la función definida por $p(x) = 2x^4 - 17x^2 - x^3 + 12 + 16x$,
a) obtenga sus ceros y factorice la función,
b) analice los signos de la función en los intervalos que determinan dichos ceros,
c) determine su comportamiento para valores grandes de x, positivos y negativos,
d) halle la ordenada al origen,
e) bosqueje la gráfica.

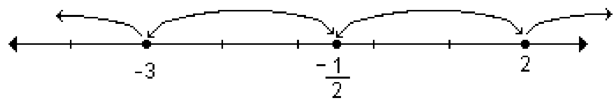
a) El polinomio debe tener 4 raíces ya que es de grado 4. Como el término independiente es 12 y el coeficiente del término principal es 2, las posibles raíces racionales son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.
Completando y ordenando en forma decreciente el polinomio se obtiene
$p(x) = 2x^4 - x^3 - 17x^2 + 16x + 12$. Aplicamos la regla de Ruffini.

	2	–1	–17	16	12
2		4	6	–22	–12
	2	3	–11	–6	0
2		4	14	6	
	2	7	3	0	

Hasta aquí x = 2 es raíz de multiplicidad dos y, aplicando resolvente a lo obtenido, resulta que las demás raíces son –3 y $-\frac{1}{2}$.

La expresión factorizada de la función es $p(x) = 2.(x - 2)^2.(x + 3).\left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) Teniendo en cuenta las raíces indicamos los intervalos determinados



por ellas sobre la recta real y estudiamos el signo de la función en cada uno de ellos. Para ello calculamos el valor numérico de cada factor en algún punto del intervalo.

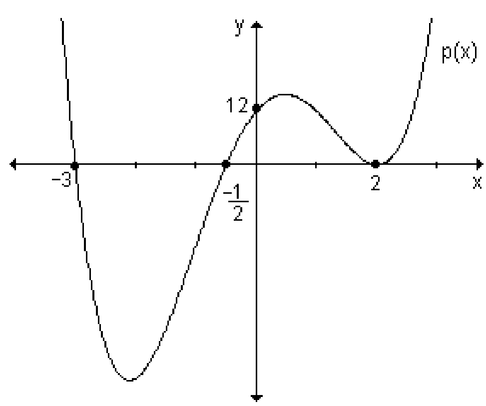
Intervalos	$(x-2)^2$	$(x+3)$	$\left(x+\frac{1}{2}\right)$	$p(x) = 2(x-2)^2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
$(-\infty\,,\ -3)$	+	–	–	+
$\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$	+	+	–	–
$\left(-\frac{1}{2},2\right)$	+	+	+	+
$(2,\infty)$	+	+	+	+

c) Para valores grandes de x, la gráfica de $p(x) = 2x^4 - 17x^2 - x^3 + 12 + 16x$ se comporta igual que la gráfica de $q(x) = 2x^4$.
Luego: $2x^4 - 17x^2 - x^3 + 12 + 16x \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$

d) La intersección con el eje de ordenadas es el punto que pertenece a la función cuya segunda componente es cero. Luego debemos calcular la imagen del cero.
$p\,(0) = 2.(0-2)^2.\ (0+3).\ (0+\frac{1}{2}) = 12$

La ordenada al origen es el punto de abscisa cero y cuya ordenada coincide con el término independiente de la función. El punto es (0,12).

Teniendo en cuenta las intersecciones con el eje x, el signo de la función en los intervalos determinados y el comportamiento para valores grandes de x, podemos bosquejar su gráfica.



Observe que la gráfica de p(x) cruza al eje x en $x = -3$ y $x = -\frac{1}{2}$, ceros de multiplicidad uno, y toca al eje x en $x = 2$, cero de multiplicidad 2, ya que la gráfica está por encima del eje x a ambos lados del punto (2,0).

EJERCICIOS

1) Dada $p(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ determine si $\alpha = -2$ es cero de la función. Factorice.

2) Halle la descomposición factorial de $p(x)= x^3 - 3x^2 + 7x - 5$.

3) Para cada una de las siguientes funciones polinomiales:

a) calcule sus ceros y factorice,

b) analice los signos de la función en los intervalos determinados por los ceros,

c) determine su comportamiento en los extremos,

d) bosqueje la gráfica

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x$

ii) $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$

RESPUESTAS

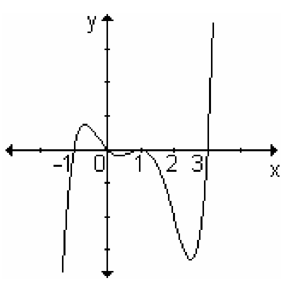
1) $\alpha = -2$ es cero de la función, $p(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 4)$

2) $p(x) = (x - 1+2i)(x - 1-2i)(x - 1)$

3)i)a) $f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x-1)^2(x+1)$

c) $f(x)\to+\infty$ si $x\to+\infty$, $f(x)\to-\infty$ si $x\to-\infty$

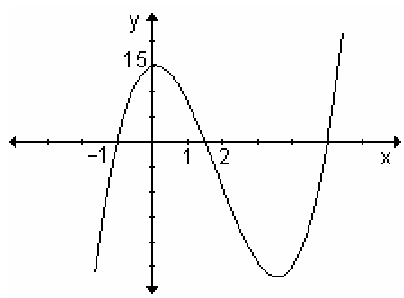
d)



ii)a) $f(x) = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)(x-5)$

c) $f(x)\to+\infty$ si $x\to+\infty$, $f(x)\to-\infty$ si $x\to-\infty$

d)



EJERCICIOS INTEGRADORES 2.4 FUNCIÓN POLINOMIAL

1) Dada la función polinomial $q(x) = (m - 1)x^3 + (2m - 5)x^2 - 2x$

a) halle m sabiendo que $q(1) = -2$,

b) para dicho valor de m factorice la función.

2) Dada la función polinomial $p(x) = ax^3 - x^2 + 2bx$:

a) Indique su grado y el número de raíces.

b) Halle a y b sabiendo que $x = 2$ es un cero y $p(1) = -2$.

c) Para los valores de a y b, escriba la función y halle las demás raíces.

d) Factorice la función.

3) Dada la función polinomial $p(x) = x^4 + 13x^2 - 2kx - kx^3 + k - 2$:

a) Calcule k sabiendo que $\alpha = 1$ es un cero de p(x).

b) Sin efectuar los cálculos indique si –2 y 0,5 podrían ser ceros de p(x).

c) ¿Cuántos ceros tiene p(x)? ¿Por qué?

d) Halle los ceros e indique su orden de multiplicidad.

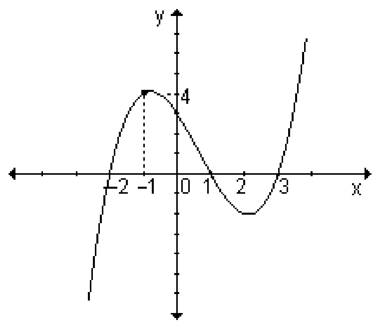
e) Factorice p(x).

4) Dada la gráfica de p(x), conteste verdadero o falso, las expresiones que sean falsas corregirlas:

a) $p(0) = 0$ **b)** $p(-2) = 0$

c) $p(3) < 0$ **d)** $p(-1) = 4$

e) $p(2) < 0$ **f)** $p(1) = -1$



5) Sea la función $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

a) Calcule sus ceros y factorice.

b) Analice el signo de la función en los intervalos determinados por las raíces.

c) Determine su comportamiento en los extremos.

d) Bosqueje la gráfica de la función.

6) Dada la función $q(x) = 3x^2 + x^3 - x - 3$.

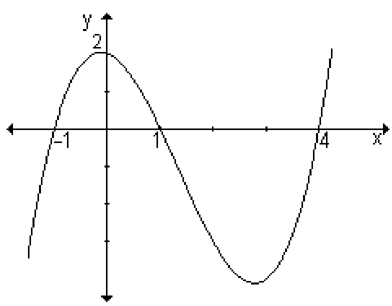
a) Calcule sus ceros y factorice.

b) Analice el signo de la función en los intervalos determinados por las raíces.

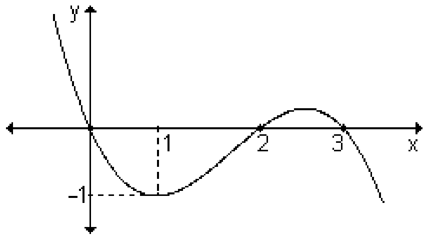
c) Determine su comportamiento en los extremos.

d) Bosqueje la gráfica de la función.

7) Encuentre p(x) si su gráfica es la siguiente:



8) Si bosquejamos la gráfica de p(x) resulta:



Encuentre p(x).

9) Halle la función polinomial de grado 4 que cumple que $x = 1$ es un cero de orden de multiplicidad 3, que $p(3) = 0$ y $p(2) = 4$.

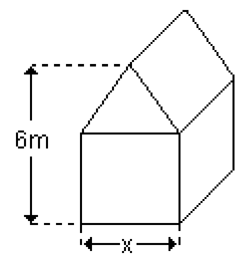
10) Halle la función polinomial p(x) de tercer grado que verifique $p(-3) = 0$, $\alpha = -1$ es cero doble y $p(0) = 12$.

11) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $2x^3 - 18x + 18 = 2x^2$ **b)** $-5x^2 + x^3 + 2x + 8 = 0$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2.4 FUNCIÓN POLINOMIAL

1) Se desea construir una habitación de almacenamiento cuya forma sea la de un cubo con techo en forma de prisma triangular (como muestra la figura). Si la altura total de la estructura debe ser de 6 m,



a) encuentre la ley que expresa su volumen en función del lado de longitud x,

b) determine cuál debe ser la medida del lado de la habitación para que el volumen sea de $80m^3$.

2) Se localizó un globo meteorológico a cierta altura. A partir de ese momento, su altura sobre el nivel del mar se puede describir, en forma aproximada, mediante la ley: $h(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 10x^2 + 31x - 30) + 7$, donde x está medido en días y h, en miles de metros.

a) ¿A qué altura estaba el globo cuando fue localizado?

b) ¿Alcanzó otra vez esa altura?

c) ¿Llegó en algún momento a una altura de 7000m?

d) Represente gráficamente la altura en función del tiempo en un período de 7 días (esboce la gráfica de $g(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 10x^2 + 31x - 30)$ y luego, por transformaciones la de h(x)).

3) La presión del aceite $(\frac{kg}{cm^2})$ en un recipiente tiende a disminuir con el tiempo. Tomando lecturas de la presión en un recipiente particular, los ingenieros petroleros han encontrado que el cambio de presión está dado por $p(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$, donde t es el tiempo en años desde la fecha de la primera lectura.

a) Halle la presión al comienzo de la lectura, a los cuatro meses, al año, a los tres años y a los diez años.

b) ¿En qué momento la presión es de 28 $\frac{kg}{cm^2}$?

c) Grafique p(t).

4) Un fabricante fabrica cajas sin tapa con piezas de cartón de 10 m de lado recortando cuadrados en cada esquina y doblando los bordes. Determine la ley que expresa el volumen de cada caja y encuentre la longitud de cada lado de los cuadrados que recorta, si desea que el volumen sea de $48m^3$.

5) Una compañía de televisión por cable cobra $ 20 mensuales por usuario y da servicio actualmente a 5 000 usuarios. Un estudio de mercado indica que por cada disminución de $ 1 en la tarifa mensual, se suscribirán 500 nuevos clientes. Sea R(x) el ingreso total si la tarifa se reduce x cantidad de veces $1 mensual.

a) Determine la función ingreso R.

b) Trace la gráfica de R y encuentre el valor de x para el que resulta un ingreso máximo mensual. ¿Cuál es dicho ingreso?

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.4: FUNCIÓN POLINOMIAL

1) En la función polinomial $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ se verifica que:

a) $p(-2) < 0$ **b)** $p(-2) > 0$ **c)** $p(-2) = 0$

2) Dado el polinomio $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, el resto que se obtiene al dividirlo por $q(x) = x - 2$ es:

a) 0 **b)** 20 **c)** –20 **d)** 2

3) El polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ es divisible por:

a) $x - 1$ **b)** $x - 3$ **c)** $x - 2$ **d)** $x + 2$

4) En la función polinomial $p(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$, $\alpha = 1$ es un cero de multiplicidad:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 5

5) Dada la función polinomial $p(x) = 3x^3 + 3x^2 - 36x$, sus ceros son:

a) $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 3$ **b)** $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 3$

c) $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -3$ **d)** $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -3$

6) Los posibles ceros enteros de la función polinomial definida por la ley $p(x) = 2x^2 + 2x^3 - 13x + 6$ son:

a) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ **b)** $\pm1, \pm3, \pm6$ **c)** $\pm1, \pm3$ **d)** $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm12$

7) Los posibles ceros fraccionarios de la función $p(x) = 2x^2 + 2x^3 - 13x + 6$ son:

a) $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}$ **b)** $\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}$ **c)** $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ **d)** $\pm\frac{3}{2}$

8) Dos ceros de un polinomio son $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -3i$. El menor grado que puede tener la función dada es:

a) 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 4

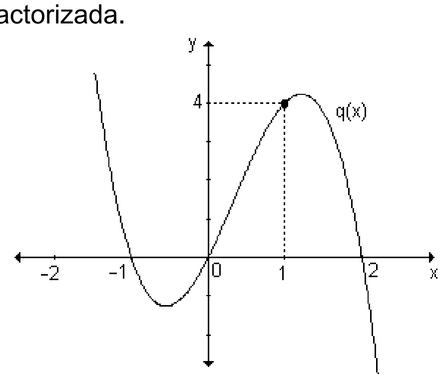
9) Uno de los ceros de la función polinomial $p(x) = 3x^3 + 12x - x^2 - 4$ es $\alpha_1 = -2i$. Los otros ceros son:

a) $\alpha_2 = -2i,\ \alpha_3 = \frac{1}{3}$ **b)** $\alpha_2 = -2i,\ \alpha_3 = -\frac{1}{3}$

c) $\alpha_2 = 2i,\ \alpha_3 = -\frac{1}{3}$ **d)** $\alpha_2 = 2i,\ \alpha_3 = \frac{1}{3}$

AUTOEVALUACIÓN Nº 5 FUNCIÓN POLINOMIAL

1) Dada la función polinomial $f : R \to R \,/\, f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$, escríbala en forma factorizada.
2) Halle el valor de k para que la gráfica de la función polinomial definida por $f : R \to R \,/\, f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$ pase por el punto $(-1, 4)$.
3) Halle el valor de k para que el polinomio $r(x) = 5x^3 + k^2 x^2 + 2kx - 3$ sea divisible por el polinomio $q(x) = x + 1$. Verifique el resultado.
4) Dada la función $f: R \to R \,/\, f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 4x^2$. Indique de qué función se trata y escriba su expresión factorizada.
5) Encuentre la ley de la función polinomial de tercer grado cuya gráfica es:



6) Sea la función $p(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 4x + 3x^2$,

a) calcule sus raíces y factorice.
b) analice el signo del polinomio en los intervalos determinados por sus raíces.
c) determine su comportamiento en los extremos.
d) bosqueje su gráfica.

7) Resuelva las siguientes ecuaciones y verifíquelas:

a) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 20x - 12 = 0$
b) $3x^3 + 17x^2 + 21x - 9 = 0$

2.5 Función racional fraccionaria

Problema

En una tienda de ropa, las ventas diarias (en pesos) después de x días de publicidad en los periódicos están dadas por $v(x) = \dfrac{500x + 4000}{x + 1}$.

a) Complete la tabla determinando las ventas después de x días de publicidad y represente gráficamente la función.

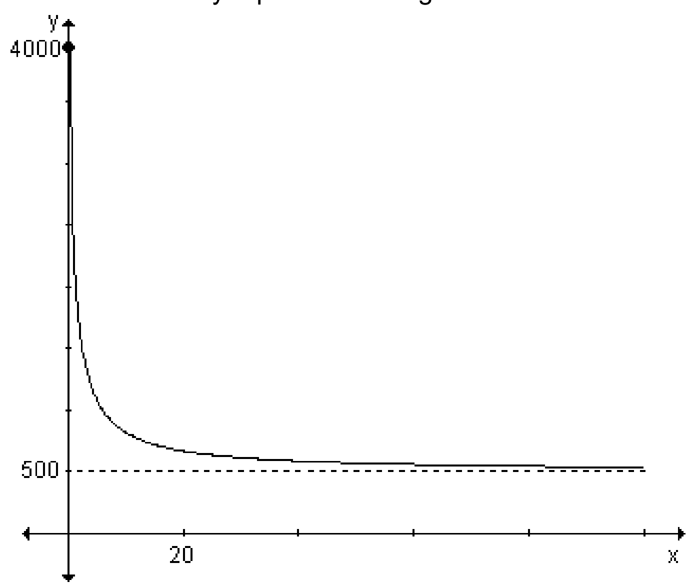
x	0	1	2	3	4	5	6	10	20	30	50	100	200
v(x)													

b) Suponiendo que la publicidad se mantiene, ¿tenderán las ventas a nivelarse? ¿Cuál es la cantidad mínima de ventas esperada?

c) Si la publicidad cuesta $ 1000 diarios, ¿en qué punto conviene suspenderla? ¿por qué?

a) Completamos la tabla de valores y representamos gráficamente la función.

x	v(x)
0	4000
1	2250
2	1667
3	1375
4	1200
5	1083
6	1000
10	818
20	667
30	613
50	569
100	535
200	517



b) A medida que x se hace cada vez más grande las ventas se estabilizan. Las ventas mínimas esperadas son de $ 500.

c) Observamos en la tabla que las ventas luego del sexto día de publicidad son de $ 1000 y a partir de ahí, siguen descendiendo. Si la publicidad cuesta $ 1000 diarios conviene suspenderla luego de 6 días pues las ventas que generan son menores al costo de los anuncios.

Definición: Una función racional fraccionaria es una función $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde p(x) y q(x) son funciones polinomiales y q(x) no es el polinomio nulo.

El dominio de una función racional fraccionaria es el conjunto de los números reales excepto aquellos donde el denominador se hace cero.

De aquí en adelante las llamaremos simplemente funciones racionales.

Ejemplo: Determine el dominio de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

a) El dominio de f(x) es el conjunto de los números reales excepto $x = -3$ pues anula el denominador. Podemos definir el dominio $D_f = R - \{-3\}$.

b) El dominio de g(x) es el conjunto de los números reales excepto $x = 0$ pues anula el denominador. Definimos el dominio de g como $D_g = R - \{0\}$.

c) El dominio de h(x) es el conjunto de los números reales, $D_h = R$.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$, encuentre:

a) el dominio de la función,
b) las intersecciones con el eje de abscisas y con el eje de ordenadas,
c) ¿qué sucede con la función para valores de x muy cercanos a los ceros del denominador?
d) estudie el comportamiento de la función cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto ya sean positivos o negativos,
e) esboce la gráfica de la función.

a) El dominio de la función son todos los números reales excepto $x = 2$ pues anula el denominador. Simbólicamente $D_f = R - \{ 2 \}$.

b) Para encontrar la o las intersecciones de la función con el eje de abscisas debemos hacer $f(x) = 0$, eso ocurre cuando $x + 3 = 0$ es decir $x = -3$.
La intersección con el eje de ordenadas se obtiene haciendo $x = 0$. Para esta función obtenemos $y = -\dfrac{3}{2}$.

La abscisa al origen es el punto $(-3, 0)$ y la ordenada al origen es $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$.

c) En $x = 2$ la función no está definida, veamos qué sucede cuando la variable independiente toma valores cercanos a 2, a la derecha y a la izquierda.

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
x+3	4,9	4,99	4,999	5	5,001	5,01	5,1
x–2	–0,1	–0,01	–0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$	–49	–499	–4999	No está definida	5001	501	51

Podemos observar en la tabla que cuado x se acerca a 2 por izquierda la función toma valores cada vez más grandes en valor absoluto y negativos; cuando x se acerca a 2 por derecha la función toma valores cada vez más grandes en valor absoluto y positivos.

En símbolos se expresa: si $x \to 2^{-}$, $f(x) \to -\infty$ y si $x \to 2^{+}$, $f(x) \to +\infty$

La recta vertical $x = 2$ se llama asíntota vertical de la función.

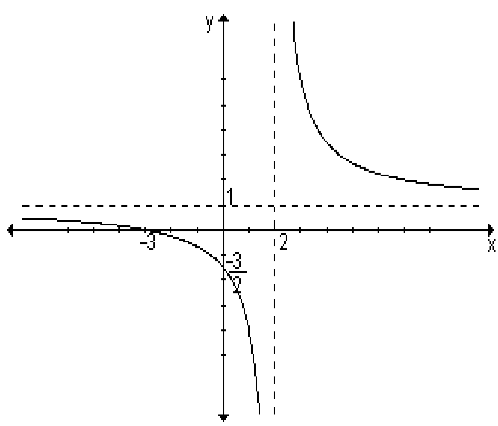
d) Analicemos qué pasa cuando x toma valores cada vez más grandes ya sean positivos o negativos.

x	–10000	–1000	–100	100	1000	10000
$f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$	0,999	0,995	0,951	1,051	1,005	1,0005

A medida que $|x|$ se hace cada vez más grande, f(x) se acerca cada vez más a 1. En símbolos se expresa: si $x\to \pm\infty$, $f(x) \to 1$. La recta horizontal $y = 1$ se llama asíntota horizontal de la función.

e) Teniendo en cuenta el dominio, las intersecciones con los ejes y el comportamiento de la función cerca de $x = 2$ y para valores grandes de x positivos o negativos, se puede esbozar la gráfica de la función.

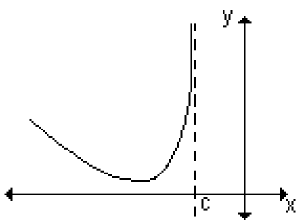
Las líneas punteadas indican las asíntotas de la función.

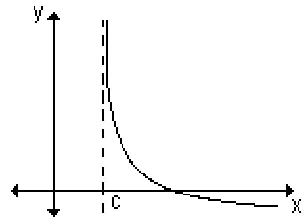


Asíntotas

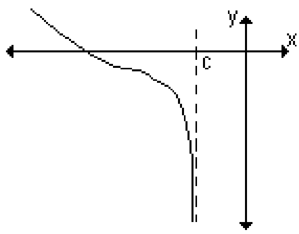
Definición: Una asíntota es una recta a la cual la función se acerca pero nunca la toca. Cuando la gráfica de una función tiene una asíntota, quiere decir que la distancia entre la curva y la asíntota se hace muy pequeña, o sea tiende a cero.

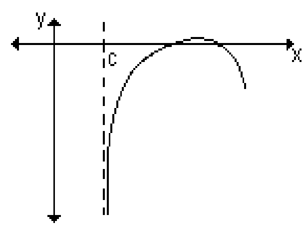
Definición: La recta $x = c$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de una función f(x), si $f(x) \to +\infty$ o $f(x) \to -\infty$, cuando x tiende a c, por la izquierda o por la derecha.





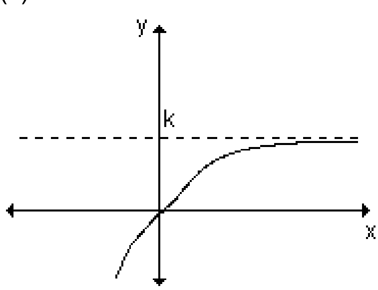
f(x) $\to +\infty$ cuando x $\to c^-$ f(x) $\to +\infty$ cuando x $\to c^+$

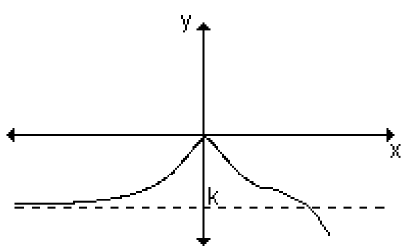




f(x) $\to -\infty$ cuando x $\to c^-$ f(x) $\to -\infty$ cuando x $\to c^+$

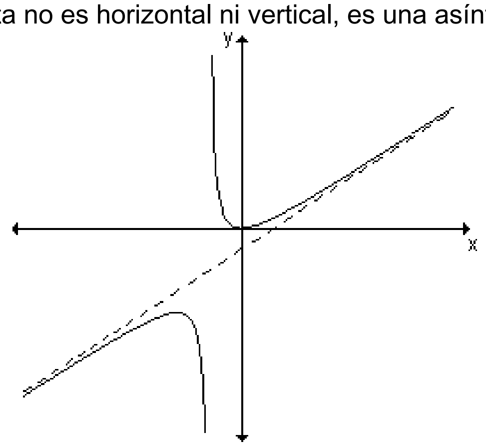
Definición: La recta y = k es una *asíntota horizontal* de la gráfica de una función si f(x) $\to$ k cuando x $\to +\infty$ o cuando x $\to -\infty$.





f(x) $\to$ k cuando x $\to +\infty$ f(x) $\to$ k cuando x $\to -\infty$

Si una asíntota no es horizontal ni vertical, es una asíntota oblicua.



Cómo encontrar asíntotas

Si un número c hace cero al denominador pero no hace cero al numerador en la expresión que define a la función racional, entonces la recta x = c es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}, a_0 \neq 0 \wedge b_0 \neq 0$.

Si el numerador de la función racional f(x) es de grado menor que el denominador, entonces el eje x (la recta y = 0) es la asíntota horizontal de la función.

Si el numerador y el denominador tienen el mismo grado, la recta $y = \dfrac{a_0}{b_0}$ es la asíntota horizontal.

Si el grado del numerador es mayor al grado del denominador, no hay asíntotas horizontales.

Cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la gráfica tiene una asíntota oblicua.

Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde el grado de p(x) es uno más que el grado de q(x). Si se efectúa la división del numerador por el denominador resulta $f(x) = ax + b + \dfrac{r(x)}{q(x)}$, donde ax + b es el cociente y r(x) es el resto.

Como el grado de r(x) es menor que el grado de q(x), el cociente $\dfrac{r(x)}{q(x)} \to 0$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

En consecuencia, $f(x) \to ax + b$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

Luego, y = ax + b es una asíntota oblicua de la función.

Ejemplo. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 2}$,

a) si es posible, factorice el numerador y el denominador,

b) determine el dominio de la función,

c) calcule la abscisa al origen y la ordenada al origen,

d) encuentre, si existen, la o las asíntotas verticales de la función,

e) encuentre, si existe, la asíntota horizontal de la función,

f) encuentre, si existe, la asíntota oblicua de la función,

g) esboce la gráfica de la función.

a) Para factorizar el numerador sacamos factor común x: $x^2 + 2x = x(x + 2)$

Para el denominador, aplicamos resolvente: $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

La función en su forma factorizada es $f(x) = \dfrac{x\,(x+2)}{(x+1)(x-2)}$.

b) El dominio de la función es el conjunto de los números reales excepto $x = -1$ y $x = 2$, valores que anulan el denominador. $D = R - \{-1, 2\}$.

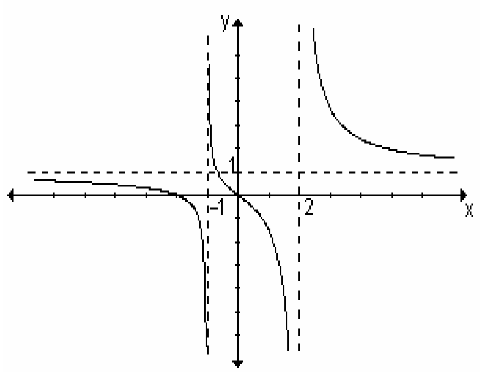
c) Para encontrar la abscisa al origen hacemos $f(x) = 0$, obtenemos $x = 0$, $x = -2$. Los puntos de intersección con el eje x son (0, 0) y (–2, 0).
Para determinar la ordenada al origen, x debe ser cero, entonces:
$f(0) = \frac{0}{-2} = 0$. Obtenemos el punto (0,0).

d) Las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la función ya que ambos valores son ceros del denominador y no son ceros del numerador.

e) Como el grado del numerador es igual al grado del denominador la función tiene asíntota horizontal $y = \frac{1}{1}$ (razón entre el coeficiente principal del numerador y del denominador). La recta horizontal $y = 1$ es la asíntota horizontal.

f) Como el grado del numerador es igual al denominador no existe asíntota oblicua.

g) Teniendo en cuenta el dominio, las intersecciones con los ejes y las asíntotas de la función podemos realizar un bosquejo de la función.
Las líneas punteadas indican las asíntotas de la función.



Ejemplo. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$,
a) si es posible, factorice el numerador y el denominador,
b) determine el dominio de la función,
c) calcule la abscisa al origen y la ordenada al origen,
d) encuentre, si existen, la o las asíntotas verticales de la función.
e) encuentre, si existe, la asíntota horizontal de la función.
f) encuentre, si existe, la asíntota oblicua de la función.
g) esboce la gráfica de la función.

a) Las raíces del numerador son $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. La expresión factorizada del numerador es $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

El denominador ya está en su mínima expresión, luego la función escrita en su forma factorizada es $f(x) = \dfrac{\left(x - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{x-1} = \dfrac{(x-2{,}62)(x-0{,}38)}{x-1}$

b) El dominio de la función es el conjunto de los números reales excepto $x = 1$ el valor que anula el denominador. $D = R - \{1\}$.

c) Para encontrar la abscisa al origen hacemos $f(x) = 0$, obtenemos $x = 0{,}38$ y $x = 2{,}62$. Los puntos de intersección con el eje x son (0,38; 0) y (2,62; 0).
Para determinar la ordenada al origen, x debe ser cero, entonces:
$f(0) = \dfrac{0^2 - 3.0 + 1}{0 - 1} = \dfrac{1}{-1} = -1$. Obtenemos el punto (0,–1).

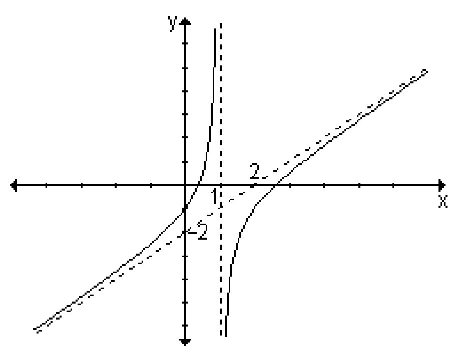
d) La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función ya este valor es cero del denominador y no es cero del numerador.

e) Como el grado del numerador es mayor al grado del denominador la función no tiene asíntota horizontal.

f) Como el grado del numerador y el grado del denominador difieren exactamente en 1, la función tiene asíntota oblicua. Para encontrarla dividimos al numerador, $x^2 - 3x + 1$, por el denominador, $x–1$, y así podemos escribir a la función de esta manera: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} = x - 2 + \dfrac{-1}{x-1} = x - 2 - \dfrac{1}{x-1}$

Como $\dfrac{1}{x-1} \to 0$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$, entonces $f(x) \to x - 2$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Podemos concluir que la recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua de la función racional.

g) Teniendo en cuenta el dominio, las intersecciones con los ejes y las asíntotas de la función podemos realizar un bosquejo de la función.
Las líneas punteadas indican las asíntotas de la función.



Una asíntota vertical, cuando existe, describe cierto comportamiento de la función cuando x se aproxima a cierto valor.

Al graficar, mientras más se acerque la curva a una asíntota vertical, más "inclinada" se vuelve.

Una asíntota horizontal, cuando existe, describe cierto comportamiento de la función cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Mientras mayor se hace $|x|$ más se acerca la curva a la asíntota horizontal, la curva se "aplana".

La gráfica de una función puede cortar a su asíntota horizontal pero nunca cortará a una asíntota vertical.

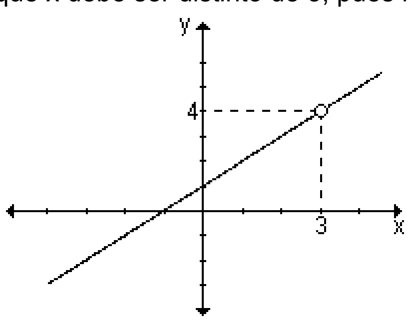
Una función racional puede tener muchas asíntotas verticales, pero a lo sumo una asíntota horizontal, porque si f(x) tiende a un valor finito cuando x tiende a $+\infty$, entonces se aproxima al mismo valor cuando x tiende a $-\infty$.

Algunas funciones racionales no tienen asíntotas.

Ejemplo: Trace la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$.

Al factorizar el numerador se obtiene $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}$. Como el numerador y el denominador tienen factores comunes, se pueden simplificar y escribir la fracción en su forma más simple. $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = x + 1$ cuando $x \neq 3$.

Esta forma simplificada indica que la función es la misma que $y = x + 1$, excepto que x debe ser distinto de 3, pues no es posible realizar la división por cero.



Por lo tanto, la gráfica de la función dada coincide con la de la recta $y = x + 1$ pero con un círculo abierto en (3, 4) que indica que este punto no pertenece a dicha gráfica. La forma reducida, $f(x) = x + 1$, $x \neq 3$, facilita ver que la gráfica de la función no tiene asíntotas. Esto no es obvio en la forma original.

EJERCICIO

Determine, si existen, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

RESPUESTAS

a) La función f(x) no tiene asíntota vertical pues el denominador nunca se hace cero. Como el grado del numerador es igual al grado del denominador la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

b) La recta $x = -3$ es asíntota vertical pues -3 es un cero del denominador y no del numerador. Como el grado del numerador es menor al grado del denominador la asíntota horizontal es la recta $y = 0$.
c) Las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de la función pues en esos valores se anula su denominador. Como el grado del numerador es mayor al grado del denominador exactamente en uno, la función no tiene asíntota horizontal y tiene asíntota oblicua $y = x$.

La gráfica de la función racional

Para trazar la gráfica de una función racional conviene seguir los siguientes pasos:

- Determinar el dominio de la función.
- Factorizar, si es posible, numerador y denominador.
- Simplificar factores comunes del numerador y denominador, si existen.
- Encontrar la abscisa y la ordenada al origen.
- Determinar, si es que existen, las asíntotas verticales.
- Determinar, si es que existe, la asíntota horizontal.
- Determinar, si es que existe, la asíntota oblicua.
- Armar una tabla de signos de la función en los intervalos determinados por los números para los cuales el numerador o el denominador son iguales a cero, usando un valor específico de prueba en cada intervalo.
- Graficar la curva, trazando primero las asíntotas, las coordenadas al origen y usando los signos para completarla.

Ejemplo: Grafique la función $m(x) = \dfrac{4-2x}{x+1}$.

El dominio de la función es el conjunto de los números reales excepto $x = -1$, que anula el denominador: $D_m = R - \{-1\}$.

Sacando factor común -2 en el numerador resulta: $m(x) = \dfrac{-2(x-2)}{x+1}$

La abscisa al origen es aquel valor de x para el cual $m(x) = 0$, es decir:

$$\frac{4-2x}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4-2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

El punto de intersección con el eje de abscisas es (2, 0).

La ordenada al origen es la imagen de $x = 0$, o sea: $m(0) = \dfrac{4-2.0}{0+1} = 4$

La intersección con el eje de ordenadas es (0, 4).

El denominador se anula en $x = -1$ y dicho valor no es cero del numerador, entonces la asíntota vertical es $x = -1$.

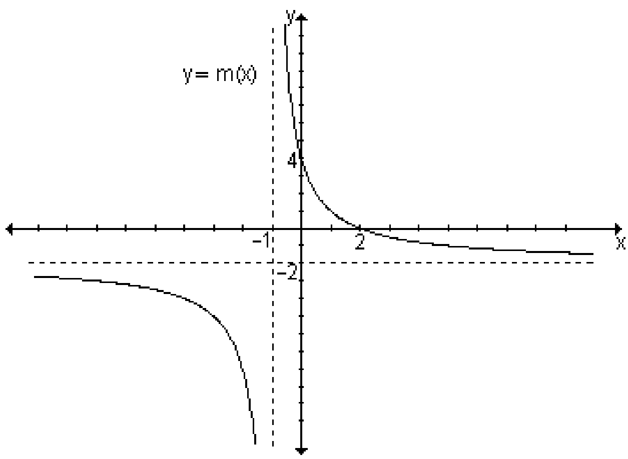
Como el grado del numerador y del denominador son iguales la asíntota horizontal es el cociente de los coeficientes principales de cada polinomio:

$y = \dfrac{-2}{1} \quad \Rightarrow \quad y = -2$ es la asíntota horizontal. La función no tiene asíntota oblicua.

Para analizar los signos de la función en todo su dominio conviene armar una tabla donde se estudien los signos en los intervalos que determinan los ceros del numerador y del denominador. Como los ceros son 2 y –1 respectivamente, obtenemos los intervalos (–∞, –1); (–1, 2) y (2, ∞).

Intervalo	Signo de –2(x – 2)	Signo de (x + 1)	Signo de $\frac{-2(x-2)}{x+1}$
(–∞, –1)	+	–	–
(–1, 2)	+	+	+
(2, ∞)	–	+	–

De toda la información obtenida en los pasos anteriores bosquejamos la gráfica de la función:



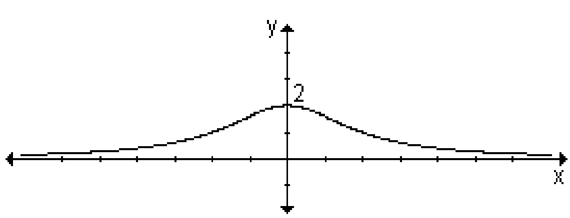
EJERCICIO

Grafique las funciones dadas siguiendo los pasos sugeridos para graficar:

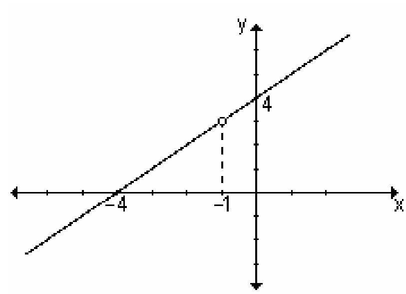
a) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+5x+4}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{2x+6}{x+2}$

RESPUESTAS

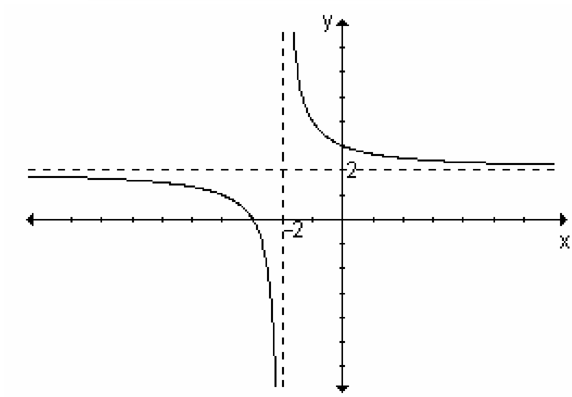
a) D = R; no hay asíntotas verticales porque el denominador es siempre distinto de cero. La recta y = 0, el eje x, es asíntota horizontal pues el grado del numerador es menor al grado del denominador.



b) $D = R - \{-1\}$.
Al factorizar la función resulta $y = \dfrac{(x+4)(x+1)}{(x+1)}$ y al simplificar se obtiene la recta $y = x + 4$, $x \neq -1$.



c) $D = R - \{-2\}$.
La recta $x = -2$ es una asíntota vertical pues -2 anula el denominador pero no el numerador. El grado del numerador es igual al grado del denominador. La función presenta asíntota horizontal, que es $y = \dfrac{2}{1}$.
La recta $y = 2$ es asíntota horizontal de la función.



Inecuaciones racionales

Analizamos la resolución de algunas inecuaciones.

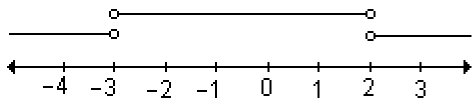
Ejemplo: encuentre los valores reales que verifican la siguiente inecuación $\dfrac{2x+1}{x+3} \geq 1$.

Si a ambos miembros de una desigualdad se suma un mismo número se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada. En este caso sumamos -1 y resulta:

$$\frac{2x+1}{x+3} + (-1) \geq 1 + (-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+1}{x+3} - 1 \geq 0 .$$

Resolviendo la resta se obtiene $\dfrac{2x+1-(x+3)}{x+3} \geq 0$ y de aquí $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$.

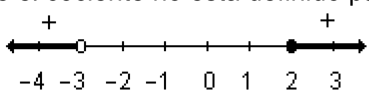
Para que el cociente sea positivo el numerador y el denominador deben tener el mismo signo.
La raíz del numerador es 2 y la del denominador es –3. Ubicándolas en la recta real quedan determinados tres intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$ y $(2, \infty)$. El signo del cociente se mantiene en cada uno de los intervalos.



Construimos una tabla que nos permite analizar los signos de la expresión dada en intervalo. Para ello, tomamos un número o valor de prueba de dicho intervalo y reemplazamos:

Intervalo	Signo de $x - 2$	Signo de $x + 3$	Signo de $\frac{x-2}{x+3}$
$(-\infty, -3)$	–	–	+
$(-3, 2)$	–	+	–
$(2, \infty)$	+	+	+

A partir de la tabla concluimos que el conjunto solución son todos los números reales tales que $x < -3$ o cuando $x \geq 2$. Se incluye el punto extremo 2 porque la desigualdad requiere que el cociente sea mayor o igual que 1, pero no se incluye el –3 porque el cociente no está definido para ese valor.



El conjunto solución de la inecuación dada es $(-\infty, -3) \cup [2, \infty)$.

Nota: Es importante verificar siempre los puntos extremos de los intervalos solución para determinar si satisfacen la desigualdad original.

<u>Problema</u>

Las funciones de oferta y demanda para cierto producto de una empresa de productos lácteos son las siguientes:

oferta: $p = \frac{q^2}{4} + 25$, demanda: $p = \frac{500}{q}$, donde p es el precio en dólares de q cientos de unidades del producto.

a) Encuentre los valores de q para los cuales la oferta excede a la demanda.

b) Encuentre los intervalos de q para los cuales la demanda excede a la oferta.

c) Trace la gráfica de ambas funciones sobre los mismos ejes, estime el punto de equilibrio (punto donde la oferta es igual a la demanda) y compruebe lo determinado en los puntos a y b.

a) Para encontrar los valores para los cuales la oferta supera a la demanda debemos plantear $\frac{q^2}{4} + 25 > \frac{500}{q}$.

Reordenando los términos obtenemos: $\frac{q^2}{4} - \frac{500}{q} + 25 > 0$

Sacando común denominador: $\frac{q^3 - 2000 + 100q}{4q} > 0 \Rightarrow \frac{q^3 + 100q - 2000}{4q} > 0$.

Para resolver esta inecuación debemos analizar los signos de la expresión obtenida en los intervalos que determinan los ceros del numerador y del denominador.
Para encontrar los ceros del numerador usamos la regla de Ruffini y obtenemos que la única raíz real es q = 10.
Su expresión factorizada es $(q - 10).(q^2 + 10q + 200)$. La raíz del denominador es q = 0.

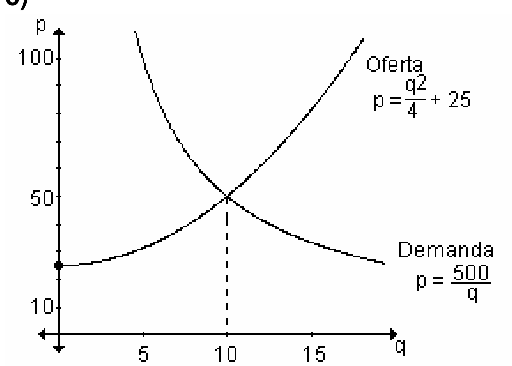
Para armar el cuadro de signos con los valores encontrados, debemos tener en cuenta que q > 0 pues representa cantidad de unidades del producto.

Signos / Intervalos	$q - 10$	$q^2 + 10q + 200$	q	$\frac{(q-10).(q^2+10q+200)}{4q}$
(0, 10)	–	+	+	–
$(10, \infty)$	+	+	+	+

Como buscamos los valores de q para los cuales la expresión dada es mayor que cero, el conjunto solución es el intervalo $(10, \infty)$. O sea que la oferta excede a la demanda para q > 10.

b) La demanda excede a la oferta para 0 < q < 10.

c)



Podemos observar en la gráfica que el equilibrio se alcanza en q = 10.

Además si q > 10 la oferta supera a la demanda y si 0 < q < 10 la demanda supera a la oferta.

EJERCICIO

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{1}{2x-3} < \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{x+3}{x-2} < -1$

c) $\frac{x-4}{3-x} \leq 0$ **d)** $\frac{2x+2}{x-1} \geq 2$

RESPUESTAS

a) $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right) \cup (3, \infty)$ **b)** $\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$ **c)** $(-\infty, 3) \cup [4, \infty)$ **d)** $(1, \infty)$

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.5 FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA

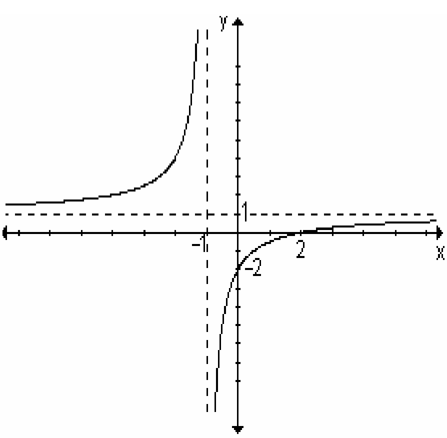
1) Determine el dominio y trace la gráfica de cada una de las funciones dadas. Escriba las ecuaciones de las asíntotas, si es que existen.

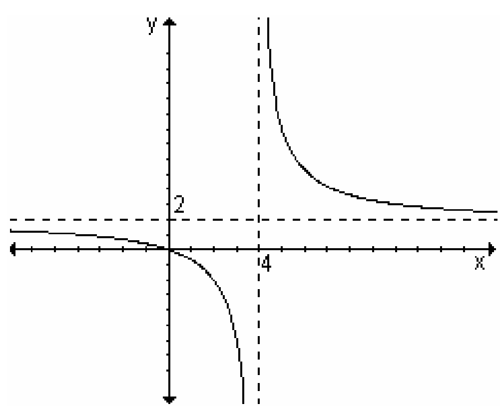
a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{2}{x - 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

2) Observando las gráficas de las funciones racionales, encuentre los valores de los coeficientes a y b.

a) $f(x) = \dfrac{x - a}{x + b}$ **b)** $g(x) = \dfrac{ax}{x - b}$





PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2.5 FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA

1) Una empresa tiene un ingreso de $300 al día resultante de vender x unidades de cierto producto a un precio p (en pesos) por unidad del producto. Escriba la función que describe el precio por unidad en función de las unidades vendidas. ¿De qué tipo de función se trata? Represente gráficamente la función.

2) La función $c(x) = \dfrac{5x}{120 - x}$, $0 \leq x \leq 100$, describe el costo de un programa terapéutico en función del porcentaje de la función recuperada por fisioterapeutas en un proceso de rehabilitación en un caso particular de incapacidad. Se sabe que c se mide en miles de pesos y x es el porcentaje de la funcionalidad recuperada.

a) Encuentre el costo para lograr una recuperación del 10 %.
b) ¿Cuál es el costo de recuperar un 70 % de la funcionalidad?
c) Grafique la función.

3) Para el tratamiento de la arritmia (latidos irregulares), se inyecta de forma endovenosa un medicamento. La concentración c del fármaco luego de t horas está dada por $c = \dfrac{3{,}5t}{t + 1}$ mg/l. Si la concentración terapéutica mínima es 1,5 mg/l, determine cuándo se sobrepasa dicha concentración.

4) Para que un medicamento tenga efectos benéficos, su concentración en la sangre debe ser mayor que determinado valor que se llama concentración terapéutica mínima. Si la concentración c, en mg/l, de un cierto medicamento a las t horas de haber sido ingerido oralmente es $c = \dfrac{20t}{t^2 + 4}$. Si la concentración mínima es 4 mg/l, determine cuándo se supera la misma.

5) La densidad de población d (en personas por km^2) en una gran ciudad, se relaciona con la distancia x, en kilómetros (km), al centro de la ciudad, mediante $d = \dfrac{5000x}{x^2 + 36}$. Obtenga en qué regiones de la ciudad la densidad de población es mayor que 400 personas por km^2.

6) El tamaño de una población de bacterias en función del tiempo puede aproximarse por la función: $p(t) = 750 + \dfrac{500t}{100 + t^2}$, donde t está medido en horas.

a) Indique de qué tipo de función se trata.
b) Halle la población inicial.
c) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 10 hs?
d) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que haya 770 bacterias?

7) El costo promedio por unidad (en pesos) de producir x cartones está modelizado por: $c(x) = \dfrac{650}{2x + 40}$

a) Encuentre el costo promedio al producir 10 cartones.
b)¿Cuántos cartones se deben producir para que el costo supere los $13?

8) Encuentre todos los valores de r tales que la pendiente de la recta a la que pertenecen los puntos P(r, 4) y Q(1, 3 – 2r) sea menor que 5.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.5 FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA

1) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ es:

a) $R - \{2\}$ **b)** $(-2, 2)$ **c)** $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ **d)** $R - \{2, -2\}$

2) Una función cuyo dominio es $D = R - \{1\}$ es:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ **b)** $g(x) = \dfrac{3x-3}{x-1}$ **c)** $h(x) = \dfrac{3x-3}{x^2-1}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x-1}{x}$

3) La gráfica de la función $y = \dfrac{x^3 + 4x^2}{x+4}$ tiene como asíntota vertical a:

a) la recta $x = -4$ **b)** las rectas $x = 0$ y $x = -4$
c) la recta $x = 4$ **d)** no tiene asíntota vertical

4) La gráfica de la función $y = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ tiene como asíntota vertical a:

a) la recta $x = 2$ **b)** las rectas $x = 2$ y $x = -2$
c) la recta $x = 0$ **d)** no tiene asíntota vertical

5) La gráfica de la función $y = \dfrac{3x^3}{x^3 - 8}$ tiene como asíntota horizontal a:

a) la recta $y = 3$ **b)** la recta $y = 0$
c) la recta $y = 2$ **d)** no tiene asíntota horizontal

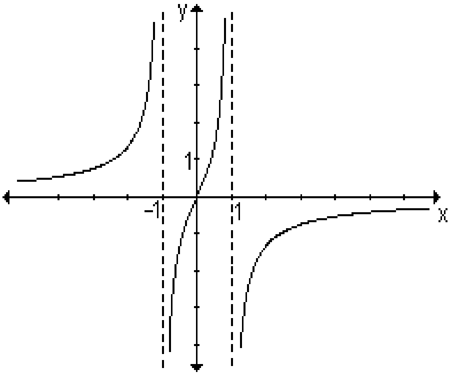
6) La gráfica de la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2}$ tiene como asíntota horizontal a:

a) la recta $y = 1$ **b)** las rectas $y = 1 \wedge y = -1$
c) la recta $y = 0$ **d)** no tiene asíntota horizontal

7) La gráfica representada corresponde a la función racional:

a) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-2x}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$ **d)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$



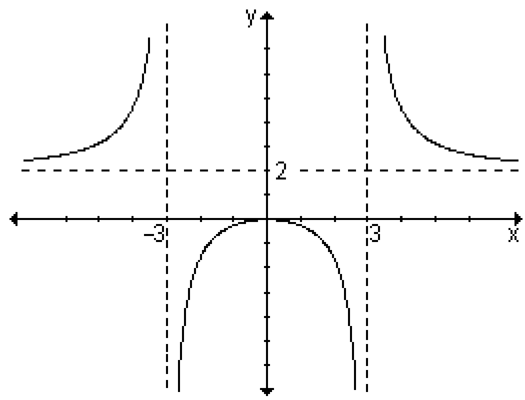
8) La gráfica representada corresponde a la función racional:

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

c) $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$



9) El conjunto solución de la desigualdad $\dfrac{3x}{x-1} < 0$ es:

a) (0,1) **b)** $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ **c)** $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ **d)** $(-1, 0)$

10) El conjunto solución de la desigualdad $\dfrac{x}{x+4} > \dfrac{1}{3}$ es:

a) $(-4, 2)$ **b)** $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ **c)** $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$ **d)** $(-2, 4)$

AUTOEVALUACIÓN Nº 6: FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA

1) Determine el dominio de las siguientes funciones racionales:

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \dfrac{3x^2 - 12}{x + 2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 16}$

2) Determine si las siguientes funciones racionales tienen asíntotas horizontales, oblicuas y/ o verticales y en caso afirmativo encuéntrelas.

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **d)** $y = \dfrac{x - 5}{x^2 - 2x - 15}$

3) Para determinada población de salmones, la relación entre el número s de padres y el número r de descendientes que sobreviven hasta la madurez es $r = \dfrac{4500s}{s + 500}$. ¿Bajo qué condiciones el número de descendientes supera al número de padres?

4) El costo promedio (en pesos) por unidad de producir x unidades de cierto producto está dado por $c(x) = \dfrac{450}{3x + 60}$.

a) Encuentre el costo de hacer 10 productos, 50 productos y 100 productos.

b) Represente gráficamente la función.

5) Las funciones de costo e ingreso (en pesos) para una empresa están dadas por $c(x) = \dfrac{100x + 100}{x + 4}$ y $r(x) = \dfrac{125}{8}x$, donde x se mide en cientos de unidades.

a) Represente ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

b) Él o los valores que hacen que los costos sean iguales a los ingresos se llama punto de equilibrio. ¿Cuál es el punto de equilibrio para esta empresa?

c) Escriba la ley y = p(x) que representa la ganancia. ¿p(1) representa una ganancia o una pérdida? ¿p(6) representa una ganancia o una pérdida?

GUÍA DE ESTUDIO

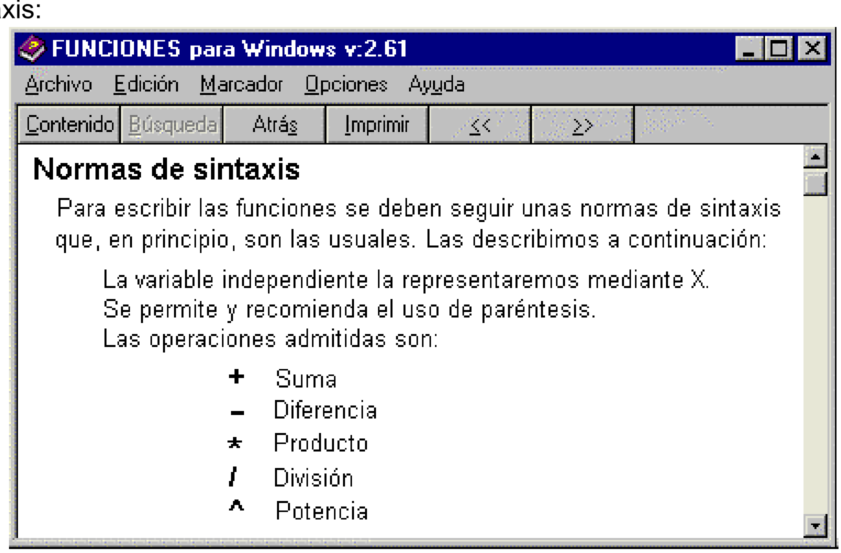
Para el estudio de las transformaciones que sufre una función al cambiar uno o más parámetros de la misma, resulta muy ventajosa la utilización de graficadores matemáticos ya que pueden representarse rápidamente varias funciones en un mismo sistema. A partir de sus gráficas pueden analizarse más fácilmente las relaciones entre ellas y su expresión analítica.

Transformaciones de las FUNCIONES ESCALARES ALGEBRAICAS

Las siguientes actividades se resuelven utilizando **FUNCIONES** para Windows versión 2.7.61 que es un programa de tipo shareware que permite representar gráficamente funciones definidas en forma explícita.

Para optimizar su uso puede obtener más información recurriendo al menú de ayuda del programa presionando la tecla F1.

A continuación, se muestra la pantalla de este menú referida a las normas de sintaxis:

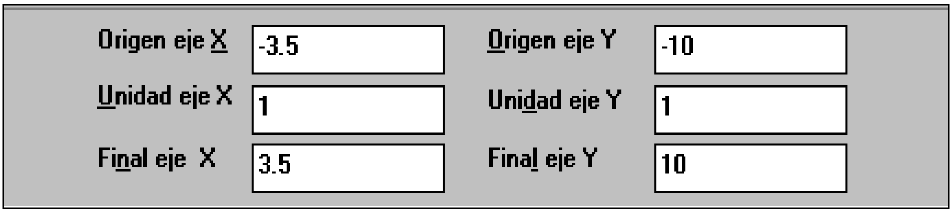


Actividad 1:

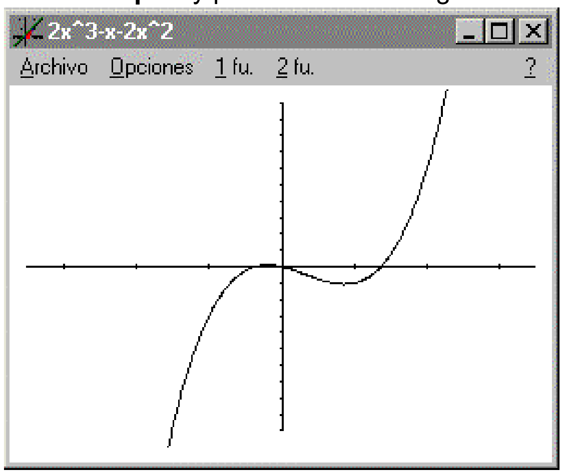
a) Represente gráficamente la función $f : R \to R \,/\, f(x) = 2x^3 - x - 2x^2$

Para ello siga la siguiente secuencia:

- Respetando las normas de sintaxis, introduzca $2x^3 - x - 2x^2$ en el cuadro correspondiente a la función F(x) (el software utiliza mayúsculas para la notación de funciones).
- Considere los siguientes rangos y escalas para los ejes x e y.



- Haga "click" en **Aceptar** y podrá visualizar la gráfica de la función.



- Para volver a la pantalla anterior haga "click" en **Archivo** y luego en **Cambiar funciones o parámetros**.

Importante: De aquí en adelante, para simplificar, se denominará a la función anterior simplemente f(x).

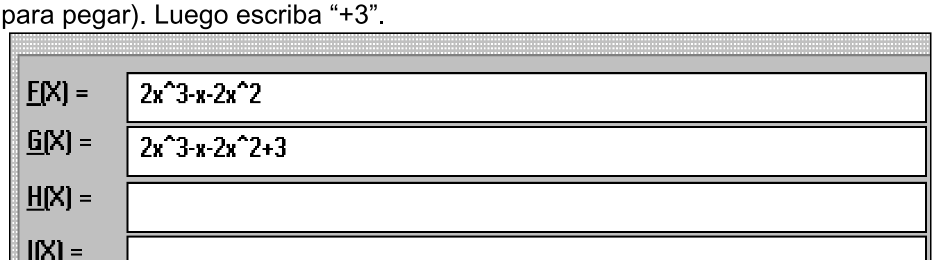
b) Represente gráficamente las siguientes funciones en el mismo sistema coordenado y en el orden dado:

b_1) $g(x) = f(x) + 3$ **b_2)** $h(x) = f(x) + 1$ **b_3)** $i(x) = f(x) - 2$

b_4) $j(x) = f(x) - 5$ **b_5)** $k(x) = f(x) + 5$

Para ello introduzca las ecuaciones en los 5 campos siguientes al de f(x). Si no quiere repetir la expresión $2x^3 - x - 2x^2$, puede ayudarse con los comandos "copiar" (ctrl + c) y luego "pegar" (ctrl + v).

Por ejemplo, para graficar la función pedida en **b_1)** "pinte" la expresión escrita en el cuadro de F(x) arrastrando el mouse y luego presione las teclas "Control" y "c" de manera simultánea (para copiar). Ubique el cursor en el cuadro correspondiente a G(x) y presione simultáneamente las teclas "Control" y "v" (para pegar). Luego escriba "+3".



Observe las gráficas y complete:

- Se ha graficado siempre la misma función pero variando ....
- Con respecto a la gráfica de f(x):
- La gráfica de la función g(x) se traslada .... unidades hacia ....
- La gráfica de la función h(x) se traslada .... unidades hacia ....
- La gráfica de la función i(x) se traslada .... unidades hacia ....
- La gráfica de la función j(x) se traslada .... unidades hacia ....
- La gráfica de la función k(x) se traslada .... unidades hacia ....

¿Qué puede decir con respecto a las gráficas de la función f(x) y f(x) + c, siendo c una constante real distinta de cero?

Actividad 2:

Siguiendo el mismo procedimiento represente gráficamente:

$$f : R - \{1\} \to R \,/\, f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{3x - 3}$$

tomando como unidad sobre los dos ejes: **1**, rango para la variable x: –**4,5** a **4,5** y rango para la variable y: –**10** a **10** .

Grafique en el mismo sistema cinco funciones que cambien con respecto a f(x) únicamente en el término independiente.

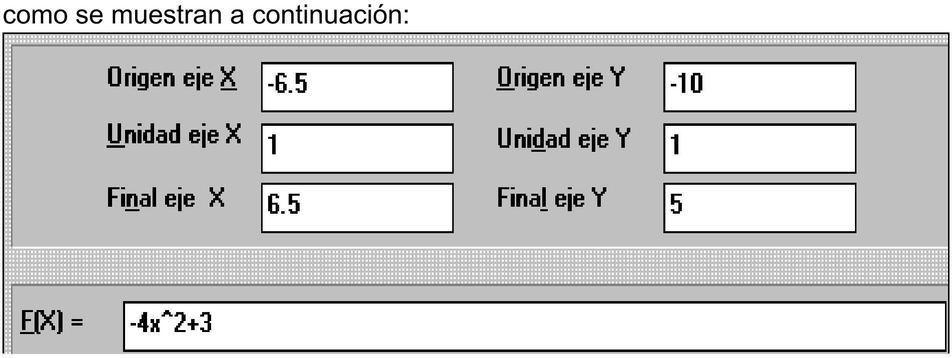
¿Puede observar lo mismo que en la actividad 1?

CONCLUSIÓN:

....

Actividad 3:

Grafique la función f: R → R / x → $-4x^2 + 3$ modificando los valores de los ejes como se muestran a continuación:

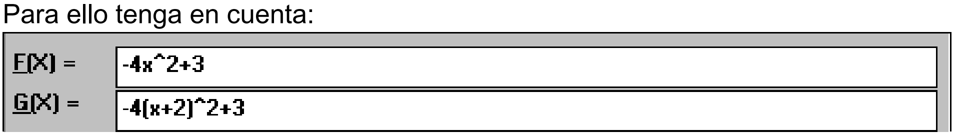


Luego represente:

a) g(x) = f(x + 2) **b)** h(x) = f(x + 3,5) **c)** i(x) = f(x – 1,5)

d) j(x) = f(x – 4) **e)** k(x) = f(x – 5)

Para ello tenga en cuenta:



Observe las gráficas y conteste:

- Al sumar 2 unidades a la variable x, la gráfica de la función f(x) se traslada .... unidades hacia la ....
- Al sumar 3,5 unidades a la variable x, la gráfica de f(x) se traslada .... unidades hacia la ....
- Al restar 1,5 unidades a la variable x, la gráfica de f(x) se traslada .... unidades hacia la ....
- Al restar 4 unidades a la variable x, la gráfica de f(x) se traslada .... unidades hacia la ....
- Al restar 5 unidades a la variable x, la gráfica de f(x) se traslada .... unidades hacia la ....
- ¿Sufre alguna transformación la forma de la gráfica de la función? ....

Actividad 4:

Grafique $f : R \to R \,/\, f(x) = -2x^5 + x$. Luego, en el mismo sistema y en el orden dado represente:

a) $g(x) = f(x + 3)$ **b)** $h(x) = f(x + 1)$ **c)** $i(x) = f(x + 0{,}5)$
d) $j(x) = f(x - 1)$ **e)** $k(x) = f(x - 2{,}5)$

Observe las gráficas y compare los resultados con los de la actividad anterior.

Si, en general, se grafica f(x + c), ¿Cómo influye el parámetro **c** sobre la curva?
Si c > 0 ....
Si c < 0 ....

Actividad 5:

Represente gráficamente la función $f(x) = -2x^2 - 4x$, cuyo dominio D = {.......} y luego, en el mismo sistema:

a) $g(x) = 2.f(x)$ **b)** $h(x) = \frac{1}{2}.f(x)$ **c)** $i(x) = -2.f(x)$ **d)** $j(x) = -\frac{1}{2}.f(x)$

Elija los rangos que resulten adecuados para las funciones a representar.
Complete la siguiente tabla:

x	f(x)	g(x)	h(x)	i(x)	j(x)
–2					
–1					
0					
1					

- Para graficar g(x) = 2.f(x) se debe .... el valor de cada ordenada de f(x) por ....

- Para graficar $h(x) = \frac{1}{2}.f(x)$ se debe .... el valor de cada ordenada de f(x) por ....
- Para graficar $i(x) = -2.f(x)$ se debe .... el valor de cada ordenada de f(x) por ....
- Para graficar $j(x) = -\frac{1}{2}.f(x)$ se debe .... el valor de cada ordenada de f(x) por...............

Actividad 6:
Represente gráficamente en un mismo sistema las siguientes funciones, eligiendo los rangos adecuados:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **b)** $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ **c)** $h(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$

d) $i(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ **e)** $j(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ **f)** $k(x) = \frac{1}{(x+3)^2} + 2$

Exprese simbólicamente las transformaciones que deben aplicarse sobre la función f(x) para obtener las demás funciones y explique las modificaciones que sufren las gráficas.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Grafique las siguientes funciones de primer grado, indicando en cada caso pendiente y ordenada al origen.

a) $y - 2x - 1 = 0$ **b)** $y = -\frac{3}{5}x - 2$ **c)** $y = \frac{1}{2}x$

d) $y - x = 0$ **e)** $y = x + 3$ **f)** $y = -x + 2$

2) Halle y grafique la función de primer grado teniendo en cuenta que:

a) la pendiente es 3 y la ordenada al origen –2.

b) pasa por los puntos $P_1(-1,1)$ y $P_2\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

c) la pendiente es –1 y contiene al punto $P_1(1, -4)$.

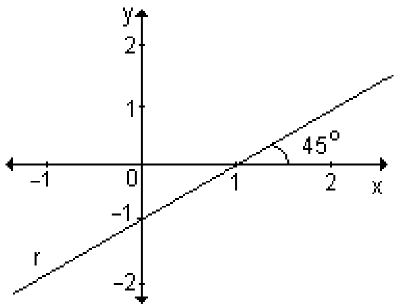
d) el ángulo de inclinación es de 45° y contiene al punto (–2,1).

e) el ángulo de inclinación es 0° y contiene al punto (–3, 5).

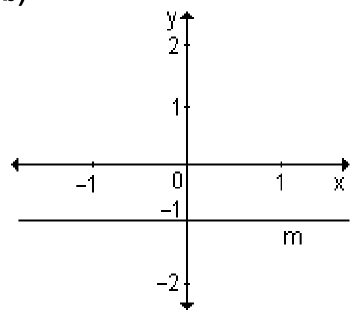
f) contiene a los puntos $P\left(0, -\frac{1}{5}\right)$ y $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{5}\right)$.

3) Halle las expresiones algebraicas correspondientes a cada una de las siguientes gráficas e indique cuáles representan una función.

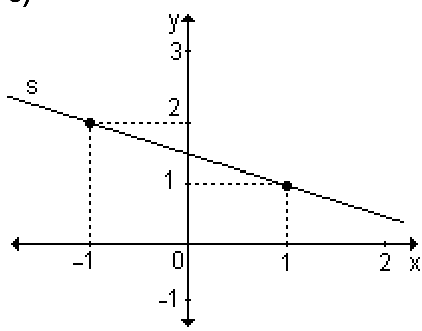
a)



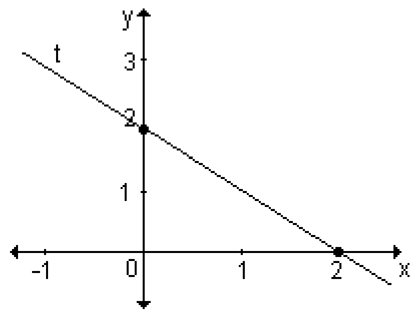
b)



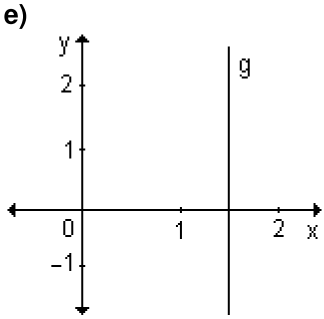
c)



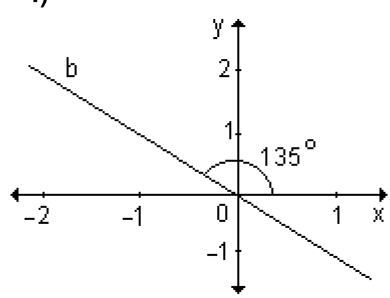
d)



e)



f)



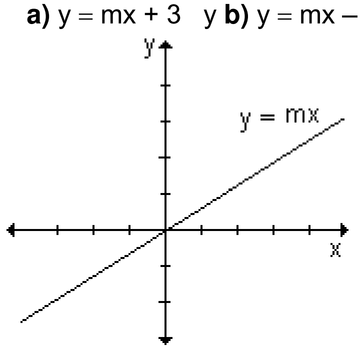
4) Esboce la gráfica de una recta de ecuación y = mx + h que cumple con las condiciones dadas en cada caso:

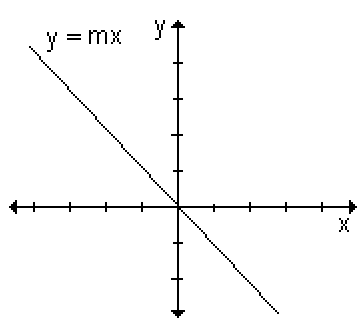
a) m > 0 y h > 0 **b)** m < 0 y h > 0 **c)** m < 0 y h = 0

d) m > 0 y h < 0 **e)** m < 0 y h < 0 **f)** m = 0 y h > 0

5) Para cada una de las siguientes funciones y = mx, grafique

a) y = mx + 3 y **b)** y = mx – 2





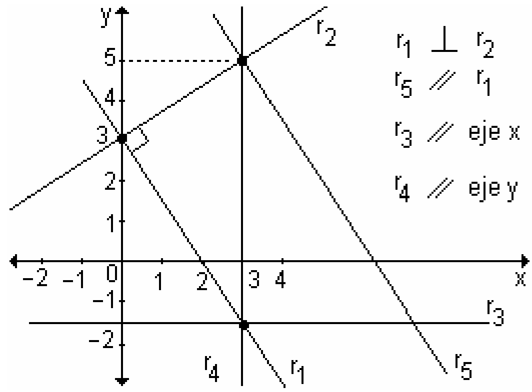
6) Dadas las siguientes funciones, indique cuáles de ellas tienen como representación gráfica rectas paralelas o perpendiculares.

a) $y = \frac{1}{5}x - 2$ **b)** $y + 5x = 8$ **c)** $y = 1 + \frac{1}{5}x$

d) $y - 5x = 1$ **e)** $y = -5x + 3$ **f)** $5y - x - 4 = 0$

7) Complete la tabla teniendo en cuenta los datos de la figura:

Recta	Ecuación Explícita	Ecuación General
r_1		
r_2		
r_3		
r_4		
r_5		



8) Dada la función $g(x) = 3x + \frac{7}{5}$

a) Halle tres puntos que satisfagan la ecuación.

b) Dados los siguientes puntos, indique si pertenecen o no a la gráfica de la función: $P_1\left(\frac{7}{5}, 0\right)$ $P_2\left(\frac{1}{5}, 2\right)$ $P_3\left(\frac{1}{7}, 1\right)$ $P_4\left(0, \frac{7}{5}\right)$

9) Sea $f: R \to R$ una función de primer grado tal que $f(1) = 6$ y $f(-2) = 9$

a) Halle su ecuación.

b) Determine la ecuación de la perpendicular a la que pertenece el punto $P(-1, 3)$.

10) Halle la forma simétrica de la función de primer grado cuya gráfica corte al eje x en el punto de abscisa 2 y pase por el punto de intersección de las gráficas de $r_1: x + y = 3$ y $r_2: y - 2x - 6 = 0$

11) Complete la definición $f: R \to R \ / \ x \to$ .... para que la gráfica de la función sea una recta paralela a : $y = -\frac{1}{2}x + 5$ y pase por el punto (0,–4).

12) Sea la función de primer grado $f: R \to R \ / \ x \to \frac{8}{k+1} - \frac{2k}{k+1}x$. Halle el valor de k para que la gráfica de la función pase por el punto (2,–1). Grafíquela.

13) Dada la función de primer grado $ax + 6y + 1 = 0$, determine el valor de a de manera tal que la gráfica de la función $y = -\frac{2}{3}x$ sea perpendicular a la misma.

14) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado en dos variables:

a) $y > 2x + 1$ **b)** $-y < 2$

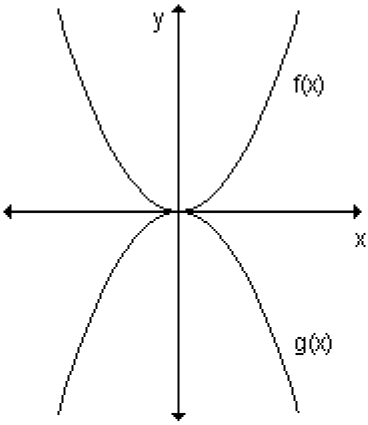
c) $2y - 6x + 8 < 0$ **d)** $x \geq 3$

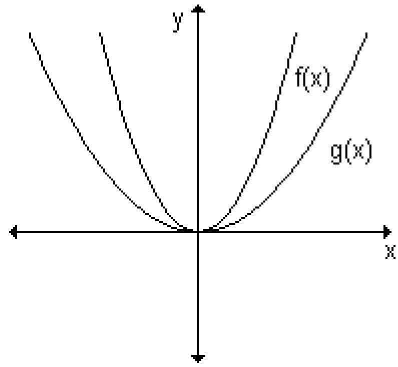
e) $y \leq x + 2$ **f)** $-2x - 5 > 0$

g) $-3y - 6x \leq 0$ **h)** $y - 4 \leq 0$

15) Dadas las gráficas, correspondientes a funciones cuadráticas, complete en cada caso con menor, mayor o igual:

a) $f(x) = a_1 x^2$ y $g(x) = a_2 x^2$





a_1 0

a_2 0

$|a_1|$ ..... $|a_2|$

a_1 0

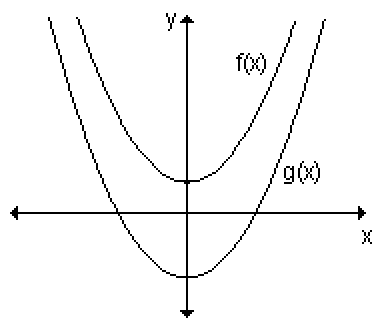
a_2 0

$|a_1|$ .... $|a_2|$

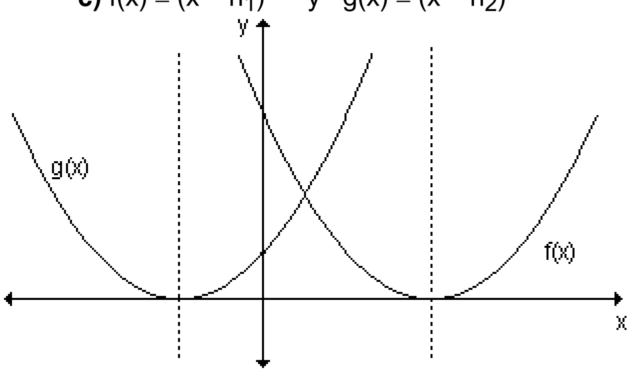
b) $f(x) = x^2 + c_1$ y $g(x) = x^2 + c_2$

c_1 0

c_2 0



c) $f(x) = (x - h_1)^2$ y $g(x) = (x - h_2)^2$



h_1 0

h_2 0

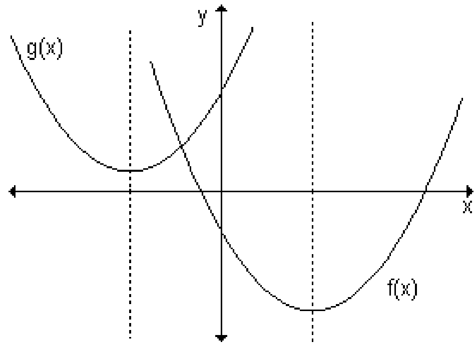
d) $f(x) = (x - h_1)^2 + c_1$ y $g(x) = (x - h_2)^2 + c_2$

h_1 0

c_1 0

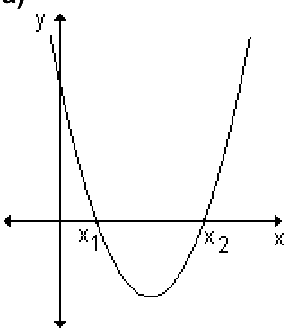
h_2 0

c_2 0

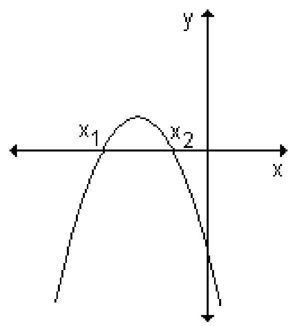


16) Los siguientes gráficos corresponden a funciones del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Indique en cada caso los signos de a, b y c, justificando las respuestas.

a)



b)



17) Dada la función cuadrática $y = -2x^2 + c$, encuentre para qué valores de c la recta $y = x$ interseca a la gráfica de la función.

18) Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

- Complete cuadrados.
- Halle las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
- Halle los puntos de intersección con el eje de abscisas.
- Determine el punto de intersección con el eje de ordenadas.
- Determine el valor mínimo o máximo de la función.
- Factorice el trinomio.
- Represente todo gráficamente.

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ **b)** $y = -4x^2 + 4x - 1$

c) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x$ **d)** $y = x^2 + 6x + 5$

e) $y = x^2 + 6x + 10$ **f)** $y = 2x^2 - 8$

19) Dada la función cuadrática $y = x^2 + x - p$, halle el valor de p para que la gráfica de la función corte al eje x en un punto.

20) Dada la función cuadrática $y = x^2 + hx + 1$, halle el valor de h para que su gráfica corte al eje x en dos puntos.

21) Determine el valor de k para que una de las raíces de la ecuación dada sea el indicado en cada caso. Para dicho valor de k, halle el valor de la otra raíz.

a) $x^2 - 7x + k = 0$ $x_1 = 3$

b) $x^2 + kx + 6 = 0$ $\qquad x_1 = 1$

22) Dadas las siguientes ecuaciones determine el valor de k para que tenga raíces iguales. Para dicho valor de k, halle las raíces.

a) $x^2 - 6x + k = 0$

b) $(k + 4)\, x^2 + (2k + 2)x + (k - 1) = 0$

23) Reconstruya la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

a) $x_1 = 4 \;\; ; x_2 = -3$ $\qquad$ **b)** $x_1 = x_2 = 5$

c) $x_1 = 2 + \sqrt{3} \;\; ; x_2 = 2 - \sqrt{3}$ $\qquad$ **d)** $x_1 = 2 + i \;\; ; x_2 = 2 - i$

24) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$. Calcule:

a) $f(0)$ $\qquad$ **b)** $f(-1)$ $\qquad$ **c)** $g(3)$ $\qquad$ **d)** $f(n^2)$

e) $f(3x)$ $\qquad$ **f)** $f(x + 1)$ $\qquad$ **g)** $f(x - 3)$ $\qquad$ **h)** $g(a + b)$

25) Grafique las siguientes funciones:

a) $f : R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ -3 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $m : R \to R \,/\, m(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le -1 \\ 2x + 1 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

26) Halle el o los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades de segundo grado en una variable, escriba el conjunto solución y represéntelo gráficamente.

a) $8x - 3 > x^2 + 4$ $\qquad$ **b)** $x^2 - x - 6 \le 0$

c) $x^2 > 7x - 10$ $\qquad$ **d)** $10x^2 + 11x \ge 6$

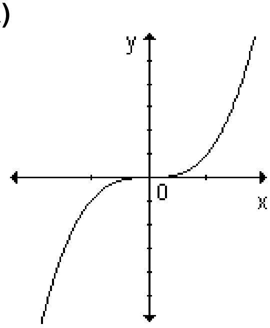
27) Determine gráficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones de segundo grado en dos variables:

a) $y \ge x^2 - 1$ $\qquad$ **b)** $x^2 + 2x - 2y > -3$ $\qquad$ **c)** $y < 3(x^2 + 2)$

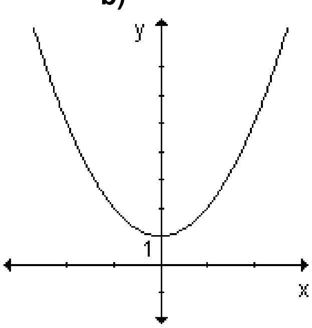
d) $3(x - 6)^2 \le y$ $\qquad$ **e)** $y > 2x - x^2$ $\qquad$ **f)** $x^2 > y + 2$

28) Observe las representaciones gráficas y determine, cuando existan, los ceros de las funciones polinomiales correspondientes:

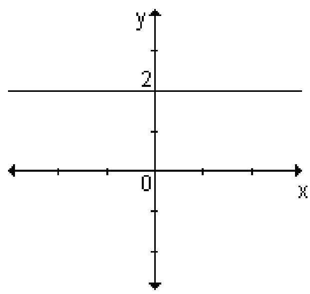
a)



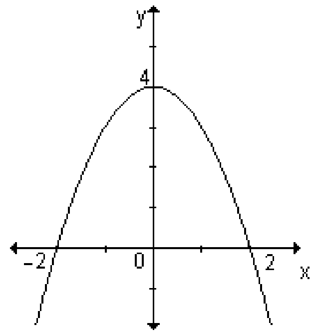
b)



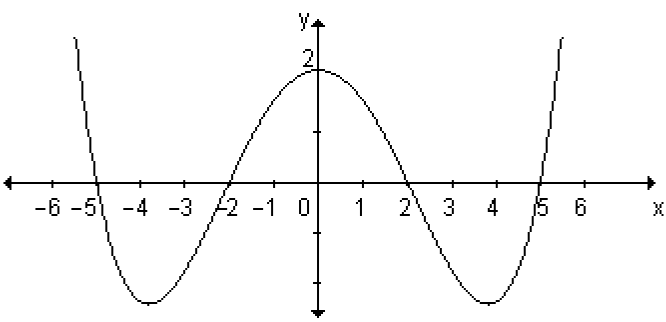
c)



d)



29) Dada la función polinomial p(x)



Determine si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

a) $p(-2) = 0$ **b)** $p(0) = 2$

c) $p(-4) > 0$ **d)** $p(3) = 0$

e) $p(5) = 0$ **f)** $p(4) < 0$

30) Halle el valor de a para que $x = 3$ sea un cero de la función polinomial $p(x) = 2x^2 - ax - 3$.

31) Dada la función $p(x) = 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + mx - 3$:

a) Calcule m para que $x = -2$ sea raíz de p(x)

b) Para dicho valor de m, factorice la función.

32) Obtenga la descomposición factorial de las siguientes funciones polinomiales:

a) $p(x) = -1 - 2x + x^2 + 2x^3$

b) $q(x) = -3x^3 + \frac{11}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

c) $r(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ si $\alpha = 1$ es raíz doble

d) $s(x) = 6x^5 - 5x^4 - 21x^2 - 33x^3 + 7x + 6$ si $\alpha_1 = -1$ es raíz doble y $\alpha_2 = -\frac{2}{3}$ es otra raíz.

33) Dada la función polinomial $p(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ y sabiendo que $\alpha = -2$ es raíz múltiple de p(x):

a) Halle el orden de multiplicidad de α.

b) Calcule las restantes raíces de p(x).

c) Factorice la función.

34) Determine la función polinomial p(x) de grado 3 sabiendo que $p(0) = 4$, $p(1) = 2$ y $\alpha = 2$ es raíz doble.

35) Si la única raíz real de $p(x) = x^3 - ax^2 + xa$ es 2, el valor de a es:

a) -2 **b)** 2 **c)** 4 **d)** ninguna de las anteriores

36) Para cada una de las siguientes funciones polinomiales:

i) $p(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$

ii) $q(x) = 9x - x^3$

iii) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

a) calcule sus cerosy factorice,

b) analice el signo de la función en los intervalos determinados por los ceros,

c) analice el comportamiento de la función en los extremos.

d) bosqueje la gráfica.

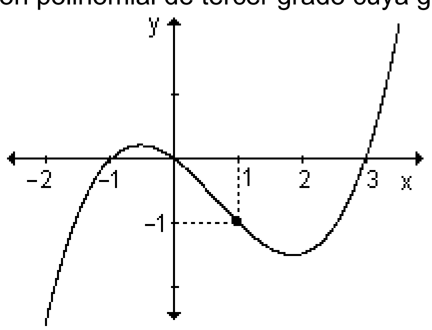
37) Escriba un polinomio que verifique las condiciones dadas en cada caso:

a) grado $n = 2$ y raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$

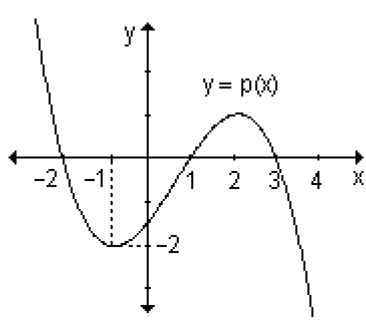
b) grado $n = 5$, cuya única raíz real no nula sea 2.

c) grado $n = 4$, cuyas dos únicas raíces reales sean nulas.

38) Encuentre la función polinomial de tercer grado cuya gráfica es:



39) Halle la función polinomial p(x) cuya gráfica es:



40) Resuelva las siguientes ecuaciones y verifíquelas:

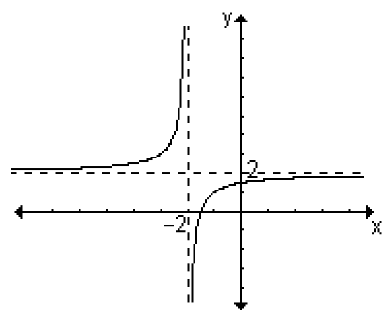
a) $2x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 2x - 12 = 0$
b) $x^2 + 2x^3 - 13x + 6 = 0$
c) $-3x^5 - 9x^3 + 12x = 0$
d) $-9x^3 - 2x^4 + 11x - 6x^2 + 6 = 0$

41) La función $f(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$ aparece en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Trace la gráfica de f después de encontrar en dónde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$.

42) Encuentre el dominio, las ecuaciones de las asíntotas y represente gráficamente las siguientes funciones racionales:

a) $y = \dfrac{x}{2x-4}$ **b)** $y = \dfrac{3x^2}{4x^2+1}$

43) Observando la gráfica, teniendo en cuenta las ecuaciones de las asíntotas y los puntos de intersección con los ejes coordenados que son $P_1\left(0, \frac{3}{2}\right)$ y $P_2\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, determine la ecuación de la función, sabiendo además que es de la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$.



44) Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{2x+1}{x-2} < 1$ **b)** $\dfrac{x+3}{x+2} > \dfrac{2}{3}$ **c)** $\dfrac{-x^2+3x+4}{x-2} \leq 0$

3. FUNCIONES ESCALARES TRASCENDENTES

> Cada problema resuelto se transforma en una regla que después sirve para resolver otros problemas.

Descartes

3.1 Función exponencial

Aplicación. Crecimiento exponencial

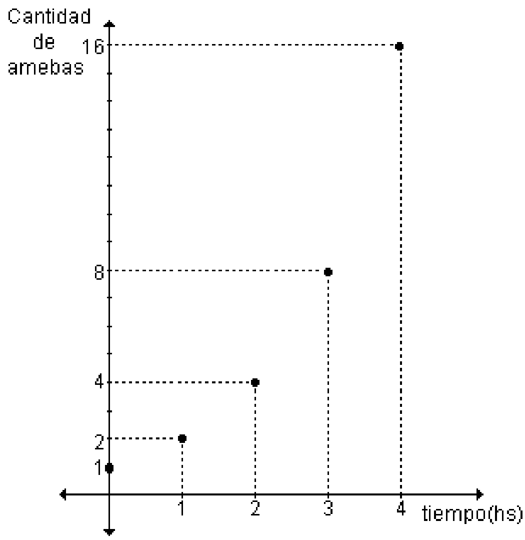
Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición). Cuando el individuo adulto llega a cierto grado de madurez se parte y da lugar a dos individuos jóvenes. Transcurrido cierto tiempo, cada uno de ellos repite el proceso.

Esto se realiza más o menos rápidamente según las condiciones de cultivo o lugar donde se encuentren. Supongamos que las condiciones de cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que inicialmente hay una ameba.

Si con los datos anteriores generamos una tabla resulta:

Tiempo	0	1	2	3	4	5	....	t
Número de amebas	1	2	4	8	16	32	....	?

El número de células es una progresión geométrica de razón 2, es decir en cada período la cantidad de células se multiplica por dos. Si graficamos la cantidad de amebas que existen en función del tiempo transcurrido resulta:



Como el tamaño de la población crece siempre al ritmo de un porcentaje fijo, el crecimiento es exponencial.

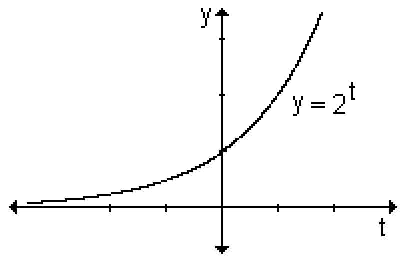
La expresión que da la masa total de células al cabo de t horas, es $y = 2^t$.

Al modelar el crecimiento de células trabajamos con funciones de números reales, aunque estemos contando el número de células que debe ser un número entero. Esto es una práctica común que permite analizar las características de la función.

Considerar valores de t negativos permite tener en cuenta lo que ocurrió antes del instante que se toma como inicial.

La función que describe el crecimiento de una población de amebas cuyo número se duplica cada hora y que tiene como población inicial una ameba se define de la siguiente manera:

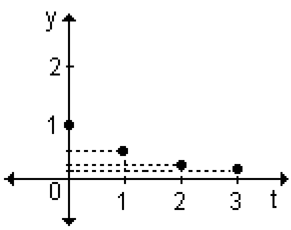
$$f : R \to R$$
$$t \to 2^t$$



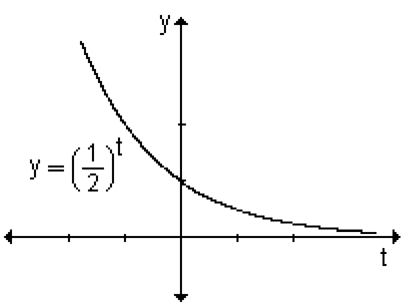
Aplicación. Decrecimiento exponencial

Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo transformándose en otras sustancias, y lo hacen con mayor o menor rapidez según de cuál se trate. Supongamos que tenemos un kilogramo de una sustancia radiactiva que se desintegra reduciéndose a la mitad cada año. El resto de la masa no desaparece sino que se transforma en otro componente químico distinto. Teniendo en cuenta estas condiciones resulta:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	.....	n
kg de sustancia	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	.....	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$



Considerando que tiene sentido para valores de tiempo no enteros dado que la desintegración es continua y pensando que también es válida para valores negativos de t si existe un paso anterior al instante que tomamos como inicial (por ejemplo consideramos como año inicial 1990 y queremos saber qué ocurría en 1989) podemos representar gráficamente y resulta:



$$f : R \to R$$
$$t \to \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ indica la cantidad de sustancia t años después si la cantidad inicial es 1 kg.

Definición: Se llama función exponencial a la dada por:

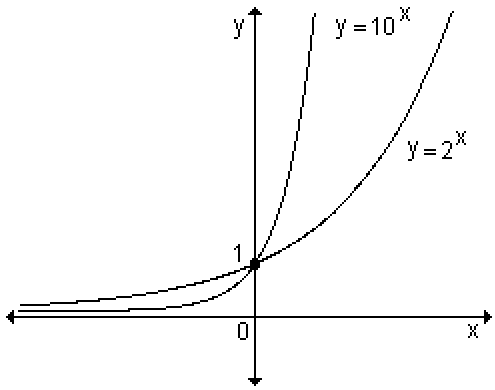
$$f : R \to R$$
$$x \to a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

Nota: a debe ser mayor que cero para que a^x sea real, ya que si a es negativo y x es una expresión fraccionaria de denominador par, estamos en presencia de una raíz de índice par y radicando negativo que no tiene solución en el conjunto de los números reales. Por ejemplo $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$. Además a debe ser distinto de 1 porque en ese caso resulta la función constante, ya estudiada.

Ejemplo: Analice las características de las gráficas de las funciones definidas en el conjunto de los números reales $y = 2^x$ e $y = 10^x$.

Construyendo una tabla de valores para cada función y uniendo los puntos resulta:

x	$y = 2^x$	$y = 10^x$
–2	0,25	0,01
–1	0,5	0,1
0	1	1
1	2	10
2	4	100



En ambos casos la función crece rápidamente.
Cuanto mayor es el valor de a, más rápido es el crecimiento.
Las dos funciones pasan por el punto (0,1).

Si $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$

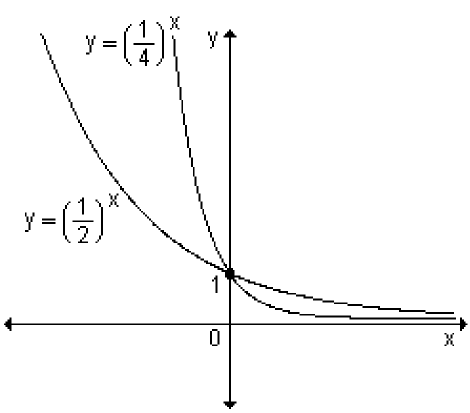
Si $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$

El eje x es una asíntota horizontal.

Ejemplo: Analice las características de las gráficas de las funciones definidas en el conjunto de los números reales $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Armamos una tabla de valores para cada función y representamos gráficamente.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
–2	4	16
–1	2	4
0	1	1
1	0,5	0,25
2	0,25	0,0625



Las funciones decrecen rápidamente.
Cuanto menor es el valor de a, más rápido es el decrecimiento.
Pasan por el punto (0,1).

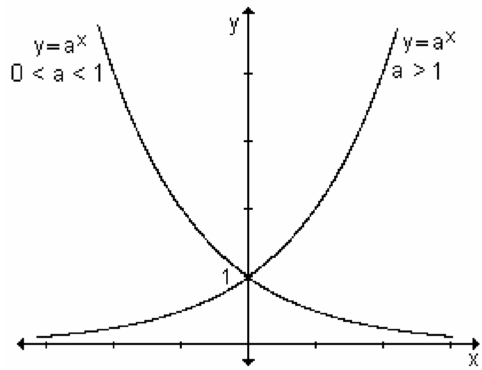
Si $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$

El eje x es una asíntota horizontal.

En general, la función exponencial presenta las siguientes características:

- Su dominio es $(-\infty, \infty)$.
- Su conjunto imagen es $(0, \infty)$.
- Su gráfica pasa por el punto (0, 1).
- Su gráfica es una curva suave, sin esquinas ni saltos.
- Si a > 1, la función es creciente y si 0 < a < 1, la función es decreciente.
- El eje x es asíntota horizontal de la gráfica de la función, por lo que no tiene intersección con el eje x.



- a es el factor por el que se multiplica la función en cada unidad de la variable x.

EJERCICIO

Determine la ecuación de la función exponencial $y = a^x$ que corresponde a la siguiente tabla. Complétela.

a)

x	1	2	3	4	5
y	.....	1,69	2,197	.....	.....

b)

x	1	2	3	4	5
y	.....	4,41	9,261	.....	.....

RESPUESTAS

a) $y = 1{,}3^x$

x	1	2	3	4	5
y	1,3	1,69	2,197	2,8561	3,71293

b) $y = 2{,}1^x$

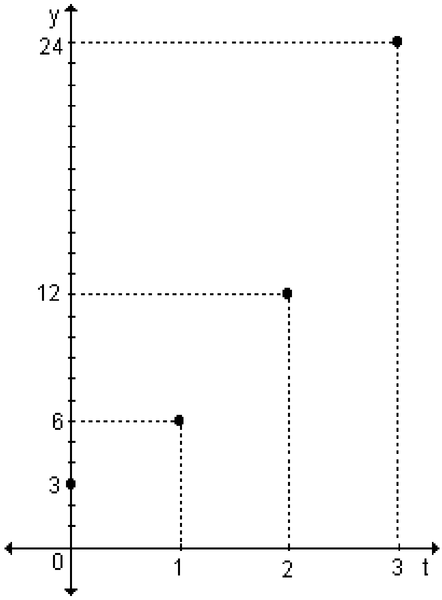
x	1	2	3	4	5
y	2,1	4,41	9,261	19,4481	40,84101

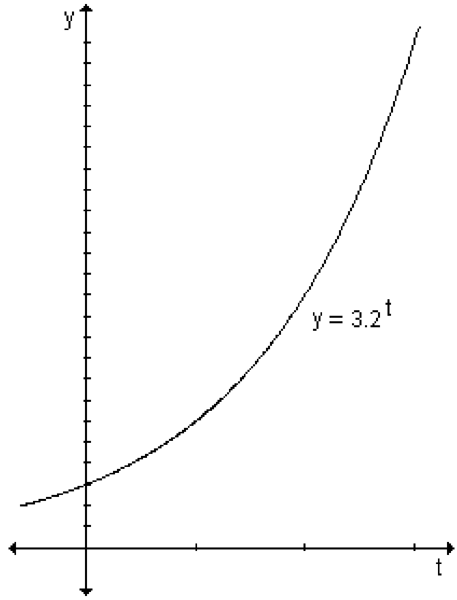
Aplicación. Crecimiento exponencial

Analicemos qué ocurre si en el problema inicial hay tres amebas originalmente.

Tiempo	0	1	2	3	4	5	....	t
Número de amebas	3	6	12	24	48	96	....	3.2^t
	3.2^0	3.2^1	3.2^2	3.2^3	3.2^4	3.2^5	...	3.2^t

Si comparamos esta tabla con la del primer problema, observamos que cada uno de los valores quedan multiplicados por 3. Gráficamente:





La función que describe la masa total de amebas al cabo de t horas considerando que la población inicial es 3 está definida por:

$$f: R \to R \,/\, f(t) = 3.2^t$$

De la misma forma la expresión:

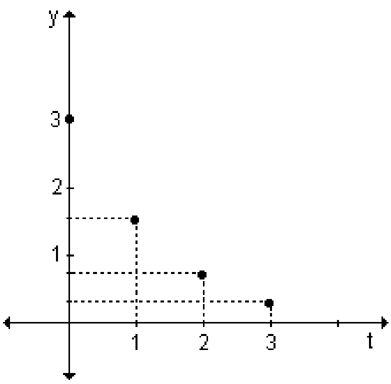
$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ t &\to k.2^t \end{aligned}$$

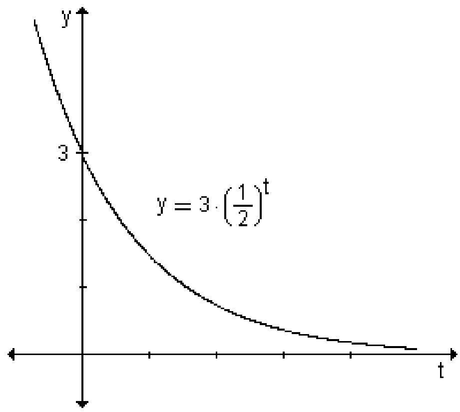
describe el número total de células existentes al cabo de t horas si al comienzo existían k amebas.

Aplicación. Decrecimiento exponencial

Analicemos qué ocurre en el problema de la desintegración radiactiva si la cantidad original es tres kilogramos. La tabla resulta:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	....	n
kg de sustancia	3	1,5	0,75	0,375	0,1875	0,09375	....	$3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

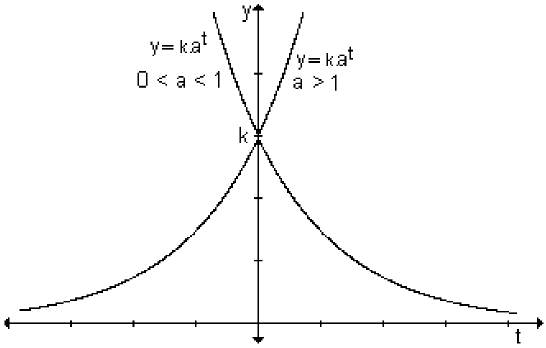




La expresión $y = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^t$ describe la cantidad de sustancia que va quedando al pasar el tiempo t.

En general podemos decir que $f : R \to R \,/\, t \to k.\left(\frac{1}{2}\right)^t$ representa la cantidad de sustancia que queda al cabo de t años si originalmente había k kilos y se desintegra reduciéndose a la mitad cada año.

En general, la expresión $f : R \to R \,/\, t \to k.a^t$ representa cualquier crecimiento exponencial si a > 1 y si 0 < a < 1 se trata de un decrecimiento o decaimiento exponencial.



k es la cantidad inicial (para t = 0)

t es el tiempo transcurrido (en la unidad que convenga)

a es el factor por el que se multiplica la función en cada unidad de tiempo.

¿Por qué aparece la función exponencial y su uso es tan frecuente?
Cada vez que aparece un proceso que evoluciona de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo es proporcional a lo que había al comienzo del mismo, ese proceso se modela mediante una función exponencial. Por ejemplo:

- crecimiento de bacterias,
- aumento de masa vegetal,
- crecimiento de poblaciones animales y vegetales,
- interés del dinero acumulado,
- desintegración de sustancia radiactiva.

Las funciones exponenciales tienen la característica de que, a intervalos iguales de x, se obtienen porcentajes iguales de crecimiento o decrecimiento en y. Por ejemplo, si se sabe que un bosque crece de forma exponencial y además se conoce que en 10 años su masa vegetal ha aumentado un 4%, podemos asegurar que cada 10 años tendrá el mismo 4 % más que al comenzar los mismos, es decir, su masa se multiplicará por 1,04 cada 10 años.
Si se sabe que ha duplicado su masa vegetal en los últimos 150 años, volverá a duplicarse en los próximos 150 años.
Esta propiedad es muy importante desde el punto de vista práctico.

Problema

> Una sustancia radiactiva pierde el 4% de su masa cada día. Ocho días después de comenzada la observación, hay 130 gramos de sustancia. Encuentre la ley de la función que permite calcular la masa de la sustancia en función del tiempo.

Como la masa disminuye un 4% cada día, diariamente queda el 96% de lo que había el día anterior, entonces la masa se multiplica por 0,96.
La función es de la forma $m = k.\ 0{,}96^t$.
Para encontrar la masa que había originalmente se puede usar el dato de que luego de 8 días quedan 130 gramos de sustancia. Reemplazando:

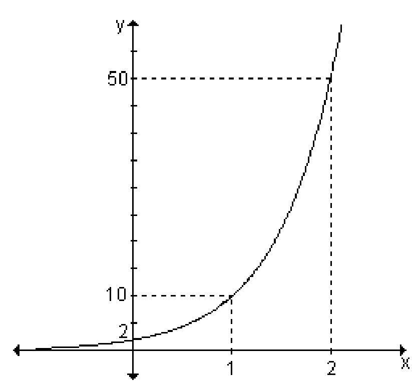
$$130 = k.\ 0{,}96^8 \Rightarrow k = \frac{130}{0{,}96^8} \Rightarrow k = 180{,}2$$

La cantidad de masa que había al comenzar la observación era 180,2 gramos. La función que describe la cantidad de sustancia en función del tiempo transcurrido es $m = 180{,}2\ .\ 0{,}96^t$

EJERCICIOS

1) Determine la ley de la función exponencial $y = k.a^x$ sabiendo que pasa por los puntos (1, 1) y (2, 4).

2) Complete la definición de la función trascendente: $f : R \to R^+ \ / \ x \to$ .... para que la gráfica sea:



3) Una población de bacterias aumenta cada hora respecto de su población actual. Si la población inicial era 1000 bacterias y luego de 3 horas hay 1728 bacterias, ¿cuál es la tasa de crecimiento por hora? Escriba la ley de la función exponencial que modela la situación.

RESPUESTAS

1) $y = \frac{1}{4}4^{x}$ **2)** $f : R \to R^{+} / x \to 2 \;.\; 5^{x}$

3) La tasa de crecimiento por hora es 1,2 y la ley de la función $y = 1000\ 1{,}2^{t}$.

La función exponencial de base e: la función exponencial natural El número e

El número e se define como el valor al que tiende $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ cuando n se hace muy grande. Para determinarlo resulta conveniente analizar qué ocurre con el comportamiento de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ donde n es un entero positivo y aumenta sin límite, es decir, crece hacia ∞.

Cuando n se hace grande la expresión $\frac{1}{n}$ se hace pequeña y tiende a cero: $\frac{1}{n} \to 0$. Resulta que $1+\frac{1}{n} \to 1$. Evaluando la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ para distintos valores naturales de n se observa lo siguiente:

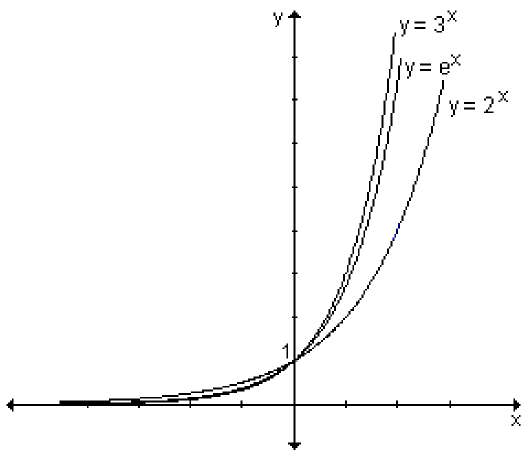
n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$
1	2
5	2,48832
10	2,59374246
100	2,704813829
500	2,715568521
1000	2,716923932
10 000	2,718145927
100 000	2,718268237
1 000 000	2,718280469
10 000 000	2,718281693
100 000 000	2,718281815

A medida que n crece, los valores de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ aumentan y tienden a acercarse al número 2,71828.

Con herramientas del cálculo se puede demostrar que ese número existe y, en honor al matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) que fue su descubridor, se lo llamó e. Es un número irracional y su representación con algunos decimales es *e = 2,7182818284590....*
La base natural e tiene muchas aplicaciones ya que describe crecimiento o decrecimiento continuo.

Función exponencial natural

Definición: La función f: R → R / $f(x) = e^x$, es la función exponencial natural.



Como el número e está comprendido entre 2 y 3, la gráfica de $y = e^x$ se encuentra entre las gráficas de $y = 2^x$ e $y = 3^x$.

La función $y = e^x$ es creciente, pasa por los puntos (0,1) y (1,e).

Interés compuesto

La expresión que genera al número e tiene una gran importancia en la deducción de la fórmula de cálculo del interés compuesto.
Se sabe que una inversión logra interés compuesto cuando el interés ganado en un período fijo se suma a la inversión inicial. A partir de aquí, el nuevo total recibe interés en el siguiente período y así sucesivamente en los siguientes. Si realizamos una inversión de un cierto capital C, ésta gana intereses según una tasa anual de r por ciento y el interés se capitaliza o compone anualmente.
Para calcular el nuevo capital, pasado el primer año, se debe sumar al capital inicial el resultado de multiplicar la tasa de interés por el capital inicial, de la siguiente manera: $C + C.\,r = C.(1 + r)$
Cumplido el segundo año, el capital acumulado resulta:

$$C(1 + r) + [C.(1 + r)].r = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$$

De la misma manera, pasados tres años el total es:

$$C(1 + r)^2 + C.(1 + r)^2.r = C(1 + r)^2.(1 + r) = C.(1 + r)^3$$

y transcurridos t años resulta que el valor final M es: $M = C.\,(1 + r)^t$ donde
C: inversión inicial.
r: tasa anual de interés (como fracción decimal).
t: número de años de inversión.

La fórmula de interés compuesto está dada por $M = C.(1 + r)^t$ donde M es la cantidad que acumulan C pesos en t años si la tasa de interés anual es r.

En general, los períodos de capitalización del interés son menores que un año. En este caso, la tasa de interés por período resulta de dividir la tasa anual r entre la cantidad de períodos de capitalización por año, n, es decir $\frac{r}{n}$.

Esto significa que, después de un año, el total acumulado será: $M = C.\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

si el interés se capitaliza o compone n veces por año y la tasa anual es r ($\frac{r}{n}$ es la tasa por período).

Finalizado el segundo año será: $M = C.\left(1+\frac{r}{n}\right)^{2n}$.

Así hasta obtener la fórmula de interés compuesto $M = C.\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ donde M es la cantidad que acumulan C pesos en t años si la tasa de interés anual es r y se compone n veces al año.

La fórmula para el interés compuesto es $M = C.\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ donde

C: inversión inicial.
r: tasa anual de interés (como fracción decimal).
n: número de períodos anuales de capitalización.
t: número de años de inversión.
M: valor total acumulado transcurridos t años.

Si dejamos crecer arbitrariamente la cantidad de períodos de capitalización, es decir n se hace lo suficientemente grande ($n \to +\infty$), se origina la fórmula de interés compuesto continuo dada por $M = C.e^{rt}$ donde M es la cantidad que se acumula si se invierten C pesos a una tasa de interés anual r durante t años si el interés se compone continuamente.

Si el interés es compuesto continuo resulta la fórmula $M = Ce^{r\,t}$ donde

C: inversión inicial.
r: tasa anual de interés (como fracción decimal).
t: número de años de inversión.
M: total acumulado después de t años.

Tratamos de ver cómo se llega a esta fórmula. Según vimos la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende al número e cuando n se hace cada vez más grande:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e \quad$ cuando $n \to +\infty$.

Se puede probar que $\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \to e^{rt}$, si $n \to +\infty$ dado que la expresión

$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ se puede escribir: $\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{nt} = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}rt}$ (multiplicando y dividiendo por r el exponente).

Además $\frac{n}{r} \to \infty$ cuando $n \to +\infty$ y por lo tanto $\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}} \to e$.

Resulta entonces $\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}rt} \to e^{rt}$.

Reemplazando se llega a la fórmula buscada $M = Ce^{r\,t}$.
Esta expresión establece el total M que se acumula después de invertir una cierta cantidad C a una tasa anual r de interés (como fracción decimal) durante un número t de años.

Problema

> Si \$ 1000 se capitalizan continuamente durante 6 años a una tasa de interés nominal de 10% anual, ¿cuál es el total acumulado después de los 6 años?

Sabemos que el monto acumulado será: $M = Ce^{rt}$. Si la inversión original asciende a los \$ 1000 a una tasa $r = 0{,}10$ durante 6 años, obtendremos:
$M = 1000\ e^{0{,}10.6} = 1822{,}1188$. El monto acumulado transcurrido el tiempo será de aproximadamente de \$ 1822,12.

Problema

> Una inversión de \$ 100 se capitaliza continuamente durante 2 años a una tasa de interés nominal del 9% y luego por 5 años más a una tasa de interés nominal del 11%. Calcule el valor de la inversión después del período de 7 años.

Si la capitalización es continua, pasados los dos primeros años resulta la inversión: $M = Ce^{rt}$.
$M = 100\ e^{0{,}09.2} = 100\ .\ 1{,}197217363 = 119{,}7217363 \approx 119{,}72$

Ahora, la cantidad de dinero a obtener después de invertir en los próximos 5 años será:

$M = 119{,}72\, e^{0{,}11.5} = 119{,}72 \,.\, 1{,}733253018 = 207{,}5050513 \approx 207{,}51$

Por lo tanto, la inversión acumulada después de 7 años será \$ 207,51.

Problema

> Una inversión se capitaliza continuamente a una tasa nominal del 8% anual. ¿Cuál es la inversión original si a los 9 años el monto asciende a \$102 721,67?

Sabemos que $M = Ce^{rt}$. Si la tasa es del 8%, es decir, $r = 0{,}08$ la fórmula se expresa de la siguiente manera $102\,721{,}67 = C\, e^{0{,}08t}$. Debemos despejar C teniendo en cuenta que $t = 9$. Reemplazando: $102\,721{,}67 = C\, e^{0{,}08\,.\,9} \Rightarrow$

$102\,721{,}67 = C.\, 2{,}054433211 \Rightarrow C = 50\,000.$

Invirtiendo \$ 50 000 se logrará un monto acumulado de \$ 102 721,67 después de nueve años con una tasa nominal del 8% anual.

Crecimiento exponencial

La función exponencial natural tiene muchas aplicaciones relacionadas con el crecimiento o decrecimiento exponencial.

En general, la expresión $N(t) = N_0.e^{rt}$ sirve para expresar el crecimiento exponencial de una cierta población de individuos siendo:

$N(t)$: cantidad de individuos de una determinada población después de un intervalo de tiempo t.

N_0 : cantidad inicial de individuos de la población (para $t = 0$).

r : tasa relativa de crecimiento de la población (expresada como una proporción de la población).

t : tiempo transcurrido.

Problema

> El número de bacterias en un cultivo está dado por $n(t) = 150.e^{0{,}3t}$, donde t se mide en horas.
> **a)** ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de esta población de bacterias? Exprese su respuesta como porcentaje.
> **b)** ¿Cuál es la población inicial del cultivo?
> **c)** ¿Cuántas bacterias contendrá el cultivo al tiempo $t = 5$?

a) La tasa relativa de crecimiento es 0,3. Expresado como porcentaje, la tasa de crecimiento es del 30%.

b) La población al inicio es $n(0) = 150$ bacterias.

c) Para calcular la cantidad de bacterias luego de 5 horas, debemos reemplazar t por 5 en la fórmula de la función.

$n(5) = 150 \,.\, e^{0{,}3\,.\,5} = 672{,}253$

La cantidad de bacterias luego de 5 horas será 672.

Decrecimiento exponencial: desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones de manera espontánea. La tasa de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Se demuestra que la masa m(t) que queda en el tiempo t está dada por $m(t) = m_0 \,.\, e^{-rt}$, donde:

m(t) es la masa en cualquier instante t,

m_0 es la masa inicial

r es la tasa de desintegración expresada como una proporción de la masa

Se define como *vida media* de una sustancia al tiempo necesario para que se desintegre la mitad de la masa.
Ésta es una propiedad de las sustancias radiactivas y cada sustancia tiene una vida media determinada. Por ejemplo la vida media del potasio es de 12 horas, la del estroncio es 28,8 años y la del carbono 14, de 5730 años.

Problema

> La ley que determina la masa de radio (en gramos) en función del tiempo transcurrido (en años) es $r = r_0 . e^{-4{,}1.10^{-4} t}$.
>
> **a)** Compruebe que la vida media del radio es 1690 años.
>
> **b)** Si luego de 50 años quedan 10 gramos de sustancia, ¿qué cantidad había originalmente?

a) La vida media es la cantidad de años que deben transcurrir para que la masa se reduzca a la mitad, luego debe ser $r = \frac{1}{2} r_0$.

Reemplazando en la ley de la función se obtiene $\frac{1}{2} r_0 = r_0 . e^{-4{,}1.10^{-4} t}$.

Si la vida media es de 1690 años la igualdad anterior debe ser verdadera para $t = 1690$.

Luego $\frac{1}{2} = e^{-4{,}1.10^{-4}.1690}$, resolviendo $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

La vida media del radio es 1690 años.

b) Si luego de 50 años quedan 10 gramos de sustancia, se verifica:

$10 = r_0 . e^{-4{,}1.10^{-4}.50} \Rightarrow 10 = r_0 \,.\, 0{,}9797 \Rightarrow r_0 \approx 10{,}21$

La cantidad inicial era aproximadamente 10,21 gramos.

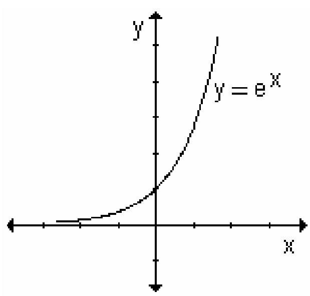
Nota. La fórmula para el interés compuesto continuo es la misma que para el crecimiento de una población. En ambos casos, el crecimiento de una inversión (o de una población) por período es proporcional al tamaño de la inversión (o de la población).
En el caso de decaimiento exponencial (por ejemplo, desintegración radiactiva) el comportamiento es análogo, excepto que la cantidad original disminuye.

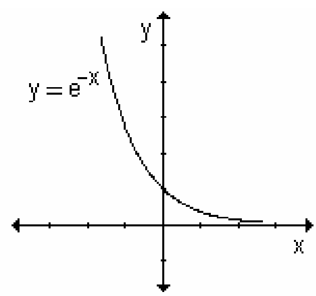
Funciones exponenciales modificadas

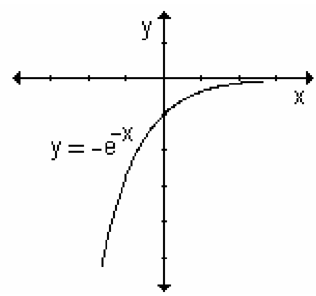
Muchas aplicaciones incluyen funciones exponenciales de la forma

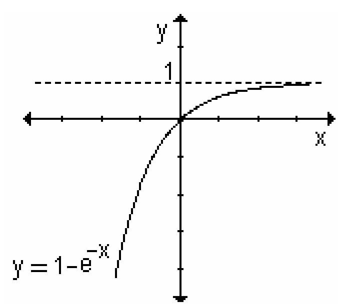
$$f : R \to R \,/\, x \to 1 - e^{-x}$$

Si tenemos en cuenta las distintas modificaciones que sufren las gráficas según los distintos parámetros que modifican su forma original vemos que:





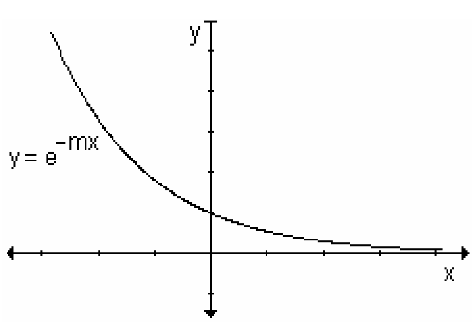


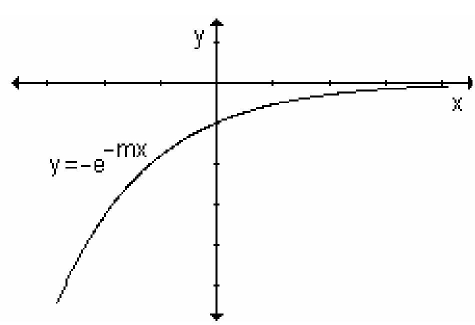


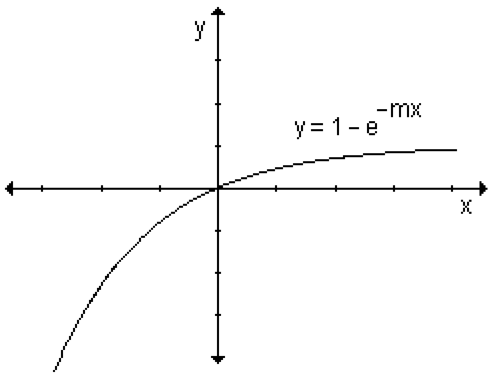
Se nota que la gráfica tiende a hacerse asintótica respecto a la recta $y = 1$. Efectivamente, cuando x crece, la expresión $e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$ tiende a 0 y de aquí $(1 - e^{-x})$ tiende a 1.

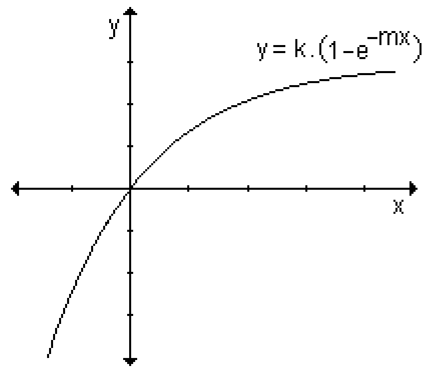
Numerosos modelos se describen siguiendo la expresión anterior pero modificado por algunos parámetros reales.

La función $f: R \to R \,/\, x \to k\,(1 - e^{-mx})$, siendo m una constante positiva.

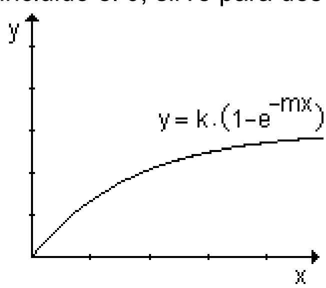








La función $f : R \rightarrow R \,/\, x \rightarrow k\,(1 - e^{-mx})$, donde m es una constante positiva y, en la mayoría de los casos con el dominio restringido a los reales positivos incluido el 0, sirve para describir modelos muy importantes como por ejemplo:



- curvas de aprendizaje,
- velocidad terminal,
- difusión de información por medios masivos de comunicación,
- cobranzas y recaudación de fondos,
- infusión intravenosa de glucosa.

<u>Problema</u>

Un empleado de una fábrica que hace lanzaminas aprende a hacerlos según la curva de aprendizaje $y = 200(1 - e^{-0,1t})$ donde y es el número de lanzaminas hechos por semana después de t semanas de entrenamiento.

a) ¿Cuántos lanzaminas por semana puede hacer un empleado nuevo después de haber sido entrenado una semana?

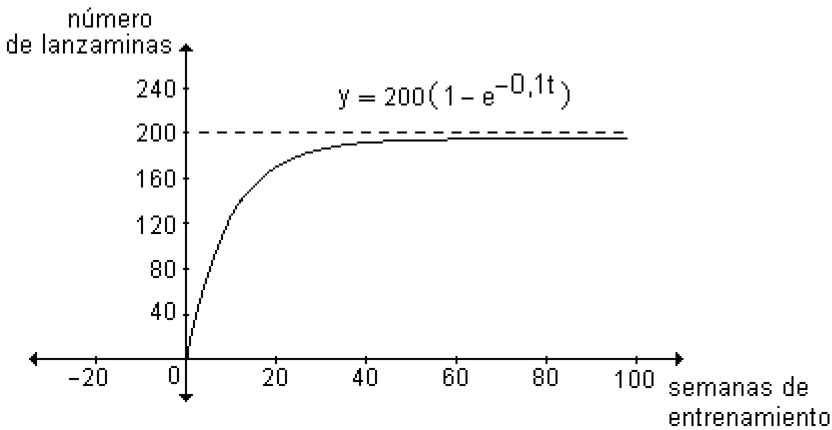
b) ¿Qué pasa después de 10 semanas de aprendizaje?

c) ¿Cuántas unidades puede hacer un trabajador muy experimentado?

a) Reemplazamos t por 1, $y = 200(1 - e^{-0,1t}) = 19{,}03251639$. Luego de una semana de instrucción será capaz de fabricar 19 lanzaminas.

b) Igual que hicimos en el caso anterior reemplazamos el valor de t por 10 y calculamos $y = 200(1 - e^{-0,1.\ 10})$ de donde resulta que podrá fabricar 126 lanzaminas.

c) Un trabajador muy experimentado no podrá fabricar más de 200 unidades dado que al aumentar la cantidad de semanas de aprendizaje $e^{-0,1t} \rightarrow 0$ y entonces la expresión $200(1 - e^{-0,1t})$ se aproxima a 200.



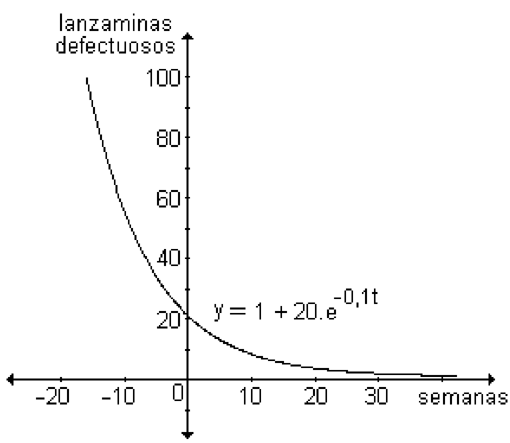
Problema

Existe otro tipo de aprendizaje que tiene lugar cuando se aprende a eliminar errores. En este caso la función $y = 1 + 20 \,.\, e^{-0,1t}$ describe la cantidad de lanzaminas defectuosos que fabricará un trabajador después de t semanas de aprendizaje.

a) ¿Cuántos lanzaminas defectuosos hará un trabajador que fue entrenado durante una semana?

b) ¿Qué ocurre luego de 10 semanas de entrenamiento?

c) ¿Qué cantidad de unidades defectuosas serán hechas por un trabajador muy experimentado ?



a) Para responder esta pregunta reemplazamos t por 1.

$y = 1 + 20.e^{-0,1.1} = 19,0967$

Obtendrá aproximadamente 19 lanzaminas defectuosos.

b) Si $t = 10$, $y = 1 + 20.e^{-0,1.10}$, $y \approx 8,36$ representa la cantidad buscada es decir, después de 10 semanas de entrenamiento fabricar aproximadamente ocho lanzaminas defectuosos.

c) Si el trabajador es muy experimentado, significa que el número de semanas de entrenamiento es muy grande. En ese caso la expresión $e^{-0,1t}$ que puede expresarse como $\frac{1}{e^{0,1t}}$, tiende a cero y entonces, $y = 1 + 20.\ e^{-0,1t}$ tiende a 1 cuando el número de semanas t es muy grande.

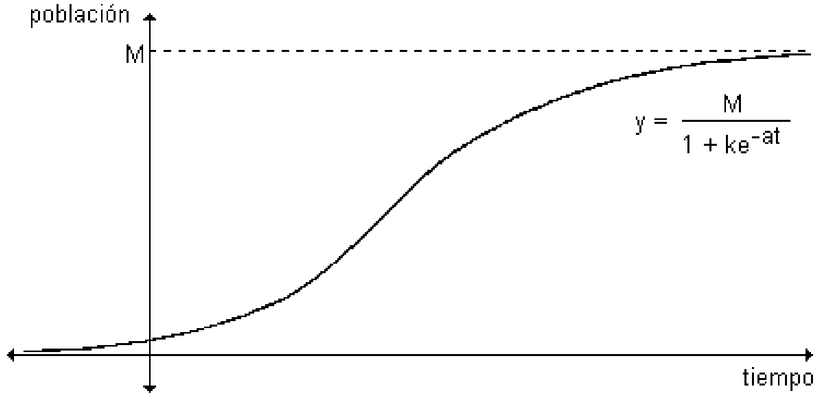
Un trabajador, aunque sea muy experimentado, no puede hacer menos de un lanzaminas defectuoso por semana.

3.2 Función logística

La función exponencial, que resulta válida para describir crecimientos continuos en los que las condiciones son siempre igualmente favorables (aumento de capital depositado, desintegración de sustancias, etc.) no es un modelo del todo válido cuando se trata de poblaciones animales o vegetales que se aproximan a un nivel de saturación y por lo tanto a la necesidad de competir unos individuos con otros por la supervivencia.

En general, las poblaciones de seres vivos comienzan creciendo según la curva exponencial pero si no hay situaciones adversas (epidemias, incendios, depredadores, etc.) llegan a invadir totalmente su espacio vital y su crecimiento se va controlando y amortiguando. El modelo adecuado para describir esta situación es la función logística definida de la siguiente manera:

$f : R \to R \ /\ t \to \frac{M}{1 + ke^{-at}}$, donde M, k y a son constantes positivas.



En la expresión $\frac{M}{1 + ke^{-at}}$ se puede observar que cuando t se hace muy grande e^{-at} se hace muy pequeño, de modo que el denominador se acerca cada vez más a uno. Por lo tanto, el tamaño de la población se acerca cada vez más a M a medida que t crece. En la gráfica se observa como se estabiliza y se aproxima a la recta $y = M$ al tender t a infinito. Entonces M es la población máxima, lo que puede llamarse la población límite, es decir, la cantidad de individuos existentes cuando t tiende a hacerse grande.

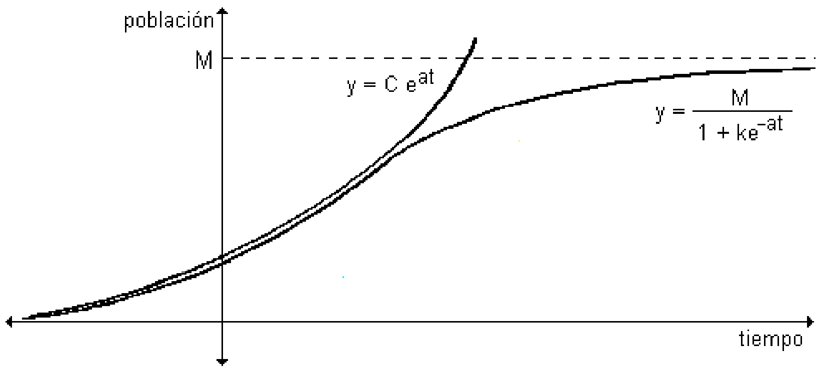
Cuando $t = 0$, la población resulta $y(0) = \frac{M}{1 + ke^{-a.0}} = \frac{M}{1 + k}$ es la población correspondiente al tiempo $t = 0$.

Si el valor inicial es mucho más pequeño que M, para pequeños valores de t, el tamaño de la población crece de manera exponencial.
Gráficamente, comparando las dos funciones

$$f : R \to R \qquad\qquad f : R \to R$$

$$t \to \frac{M}{1+ke^{-at}} \qquad\qquad t \to \frac{M}{1+k}e^{at} = C\,e^{at}$$

puede observarse que sus representaciones gráficas son muy similares para valores pequeños de t.

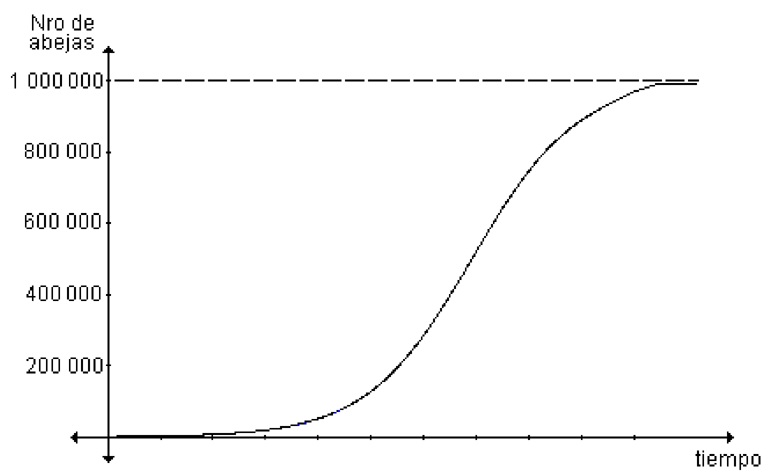


Aplicación: modelo de crecimiento limitado

Pensemos en la siguiente situación: se sueltan 1000 abejas en una isla en la que no existe ninguna y en la que las condiciones son favorables como para que vivan a lo sumo 1 000 000 de abejas. Cada día, el número de abejas se multiplica según el factor $e^{0,02}$. La población de abejas, es decir, el número de abejas existentes al cabo de t días está dado por la función logística:

$$f : R \to R \;/\; f(t) = \frac{1\,000\,000}{1+999e^{-0,02t}}$$

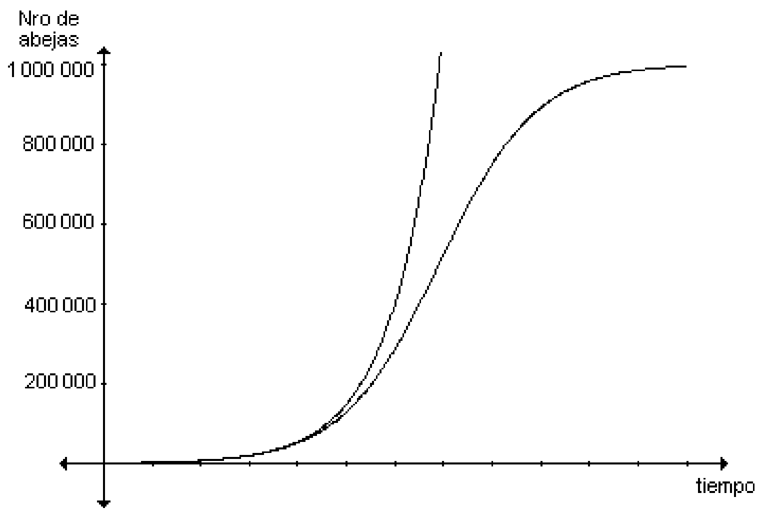
Su representación gráfica es:



Para valores de t pequeños (inferiores a 100) y según lo que se observa en la tabla siguiente, es muy parecida a la de la función exponencial definida por $f: R \to R \,/\, f(t) = 1000\, e^{0,02t}$.

T (días)	Exponencial $y = 1000\, e^{0,02t}$	Logística $y = \dfrac{1\,000\,000}{1+999e^{-0,02t}}$
0	1000	1000
5	1105	1105
10	1221	1221
50	2718	2714
100	7389	7342
200	54 598	51 821
300	403 429	287 664
400	2 980 958	748 992

Si representamos las dos gráficas en un mismo diagrama cartesiano resulta:



Problema

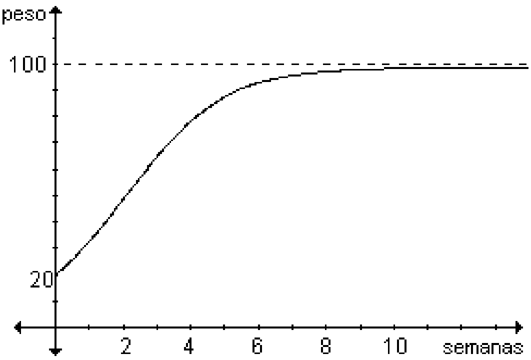
La función $w(t) = \dfrac{100}{1+4e^{-\frac{2}{3}t}}$ define el crecimiento de un ratón hembra criado en laboratorio durante un período medido en semanas desde el inicio de la experiencia. La función indica el peso en gramos transcurridas t semanas.

a) ¿De qué función se trata? Bosqueje su gráfica.
b) ¿Cuál es el peso aproximado del ratón hembra al nacer?
c) ¿Cuánto pesará, como máximo, si sigue este comportamiento cuando llegue a la madurez después de unas cuantas semanas en el laboratorio?

a) La función definida corresponde a una función logística.

b) Para saber cuál es el peso al nacer debemos tener en cuenta que el tiempo transcurrido debe ser 0. Si t = 0 $\Rightarrow$ $w(0) = \dfrac{100}{1+4e^{0}} = 20$. Al nacer, el ratón hembra pesará 20 gramos.

c) Hasta llegar a la madurez, el tiempo tiende a aumentar y, por lo tanto, la expresión $e^{-\frac{2}{3}t} \to 0$.
El peso máximo, al que tiende a alcanzar y estabilizarse, es de 100 gramos.



Aplicación: Difusión de información

Supongamos que una noticia, un rumor o el conocimiento de un nuevo producto acaba de ser lanzado al mercado. La proporción p de población que está enterada de la información, es pequeña para valores pequeños de t y por lo regular crece en forma exponencial. A medida que t se hace más grande, p se acerca cada vez más a 1 cuando la información se difunde a través de la población entera. Usando la ecuación logística podemos modelar p según la ley:
$p = \dfrac{1}{1+ke^{-at}}$.

<u>Problema</u>

> Se ha desarrollado una nueva variedad de soja. Se ha descubierto que la proporción de agricultores dedicados a la soja que han cambiado a la nueva variedad luego de t años, está dado por la ecuación logística $p = \dfrac{1}{1+49e^{-0.9t}}$. Calcule qué proporción de la población cambió a la nueva variedad luego de 5 años.

Reemplazando t por 5 en la ley resulta:
$p = \dfrac{1}{1+49e^{-0,9.5}} = 0,6475$

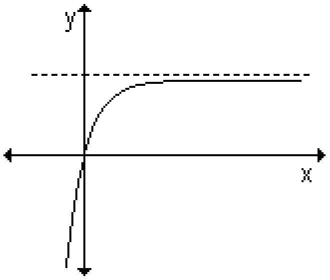
En consecuencia el 64,75% de la población cambió a la nueva variedad luego de 5 años.
La característica principal de la función logística es que para valores pequeños de t, es parecida a la función exponencial, mientras que para valores grandes de t se estabiliza, aproximándose a un valor límite. Esto es común en muchos fenómenos y de ahí que la ecuación logística se utilice en variedad de situaciones.

EJERCICIO

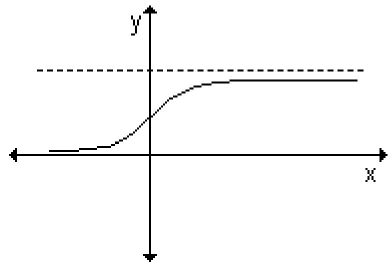
Discuta cuáles de las funciones siguientes corresponden a las gráficas que se muestran a continuación. Suponga que k y c son números reales positivos.

a) $y = c.e^{kx}$ **b)** $y = c.e^{-kx}$ **c)** $y = c.(1 - e^{-kx})$ **d)** $y = \dfrac{c}{1 + e^{-kx}}$

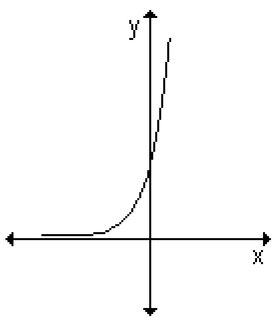
i)



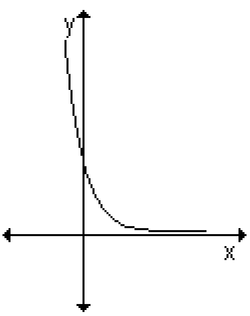
ii)



iii)



iv)



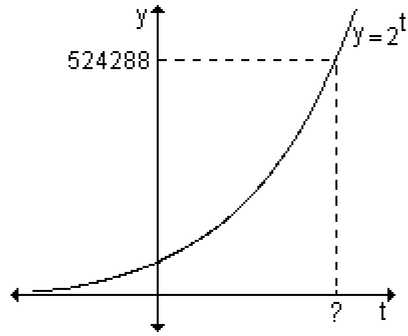
RESPUESTAS

1)a) iii) **b)** iv) **c)** i) **d)** ii)

3.3 Función logarítmica

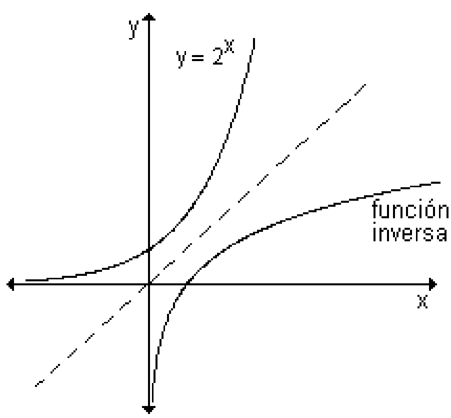
El modelo matemático que describe el crecimiento de una población de amebas cuyo número se duplica cada hora y que tiene una ameba como cantidad inicial es la función exponencial $y = 2^t$. Para distintos valores de t del dominio es posible determinar la cantidad de amebas existentes en ese momento.

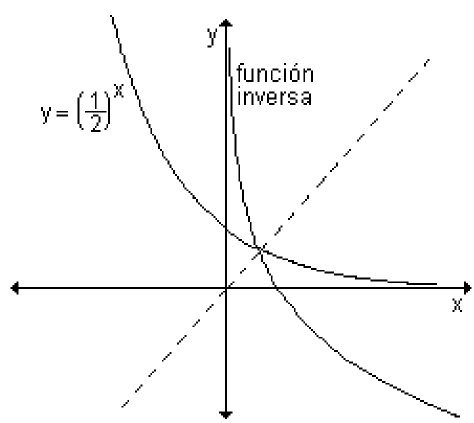
Si se desea determinar cuántas horas han transcurrido para que la población sea por ejemplo de 524288 amebas, es preciso hallar el valor de t del dominio cuya imagen es 524288. Esto podría resolverse fácilmente si se conociera la inversa de la función $f: R \to R \,/\, f(t) = 2^t$.
Recordemos que para que una función admita inversa, debe ser biyectiva.



Restringiendo el conjunto de llegada, resulta que $f: R \to R^+ \,/\, f(t) = 2^t$ es biyectiva y por lo tanto admite inversa.
El razonamiento utilizado en este ejemplo sería el mismo si el modelo matemático del problema correspondería a una función del tipo $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

A partir de las gráficas de $y = 2^x$ y de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es posible obtener las gráficas de sus respectivas inversas teniendo en cuenta que ambas deben ser simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



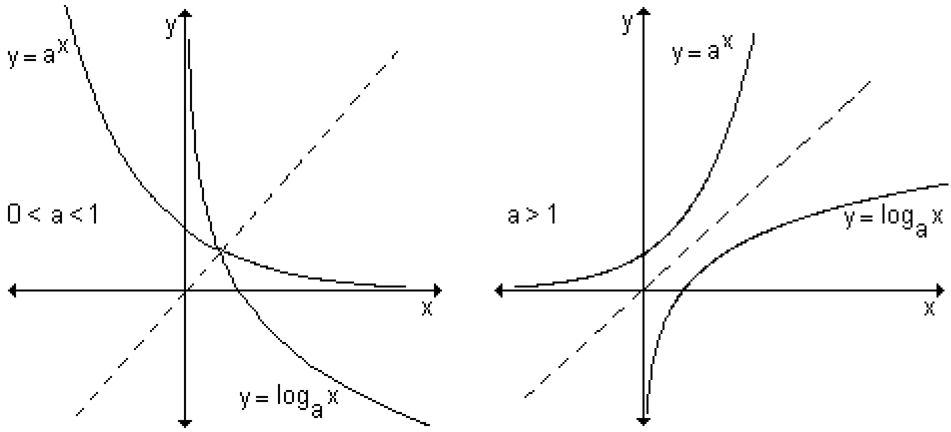


Esta nueva función recibe el nombre de función logarítmica.
Por lo tanto, dada la función exponencial $f: R \to R^+$

$$x \to a^x; \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

la función logarítmica, inversa de la exponencial, es:

$$f: R^+ \to R$$
$$x \to \log_a x, \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$



Nota: Puede observarse que la función logarítmica es creciente si la base es mayor que 1 y decreciente si la base está comprendida entre 0 y 1.

Definición: $y = \log_a x \iff x = a^y$

Dada una función logarítmica, hallar la imagen de un determinado valor de x del dominio, significa encontrar el valor al cual se debe elevar la base a para que resulte igual a x.

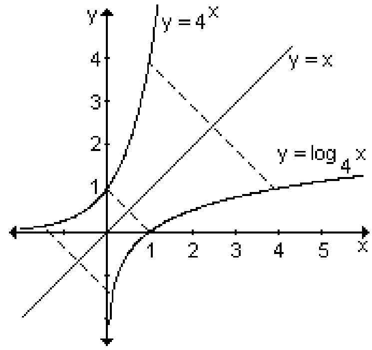
Ejemplo: Sea la función $f(x) = \log_2 x$. Obtenga f(1), f(8), $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

Si $x = 1 \Rightarrow \log_2 1 = y \Leftrightarrow 2^y = 1 \Rightarrow y = 0$. Por lo tanto, $\log_2 1 = 0$
Si $x = 8 \Rightarrow \log_2 8 = y \Leftrightarrow 2^y = 8 \Rightarrow y = 3$. Por lo tanto, $\log_2 8 = 3$
Si $x = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{4} = y \Leftrightarrow 2^y = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -2$. Por lo tanto, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$.

Ejemplo: Sea la función f: $R^+ \to R$ / $f(x) = \log_4 x$, determine su función inversa y represente gráficamente.

Intercambiando las variables resulta $x = \log_4 y$.
Por definición de logaritmo resulta que $y = 4^x$ es la función inversa buscada que está definida de R en R^+.

Conociendo la gráfica de $y = \log_4 x$, la gráfica de su inversa se obtiene reflejando los puntos con respecto a la recta $y = x$

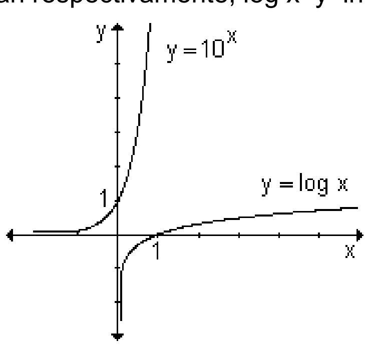


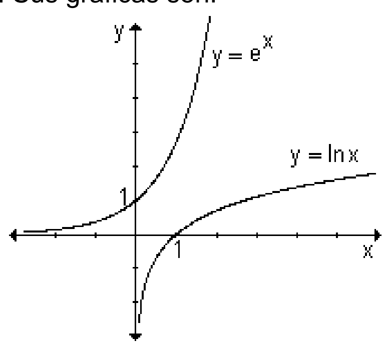
Propiedad: para todo número real positivo a, donde $a \neq 1$ se verifica:

- $a^{\log_a x} = x$, para todo $x \in R^+$.
- $\log_a a^x = x$, para todo $x \in R$.

Para demostrarlas, recordemos que la composición de una función con su inversa es la identidad.
Es decir, $(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x$ y $(f o f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = x$
Con las restricciones necesarias sobre los dominios, las funciones exponencial y logarítmica son inversas una de la otra.
Es decir, si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$.
Por lo tanto, $(f o f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$
Del mismo modo, $(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x$

En los sistemas logarítmicos usuales, el valor de a se toma siempre mayor que la unidad, siendo los más utilizados el *logaritmo decimal* cuya base es 10 y el *logaritmo natural o neperiano* cuya base es el número irracional e = 2,71828... . Se indican respectivamente, log x y ln x. Sus gráficas son:





Se debe observar que:

- El dominio de la función logarítmica es R^+. Por lo tanto, sólo tienen logaritmo los números reales positivos.
- Si la base de la función logarítmica es mayor que 1, los números reales

comprendidos entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos, mientras que los logaritmos de números mayores que la unidad son positivos.

- El logaritmo de 1 en cualquier base es cero.

Ejemplo: Halle el dominio para que $f(x) = \log(2 - 4x)$ defina una función.
La función logarítmica sólo está definida para valores positivos, por lo tanto el dominio de f(x) estará formado por aquellos valores de x tales que:

$$2 - 4x > 0 \;\Rightarrow\; -4x > -2 \;\Rightarrow\; x < (-2):(-4) \;\Rightarrow\; x < 0{,}5$$

Es decir: $D = \{x/x \in R \wedge x < 0{,}5\}$ utilizando notación conjuntista o bien
$D = (-\infty; 0{,}5)$ utilizando notación de intervalos.

Aplicaciones

Nivel de ruido: cuando un objeto vibra, las partículas de aire a su alrededor se ponen en movimiento y transmiten esa vibración formando ondas sonoras. Muchos sonidos, como los producidos por los instrumentos musicales, son periódicos, es decir, se mantiene constante la forma de su onda. Otros sonidos son aperiódicos y reciben el nombre de sonidos complejos, entre los que se encuentra por ejemplo el producido por una persona al hablar.
La intensidad I del sonido es la potencia media que transporta la onda por cada unidad de área. A partir de este concepto se estudia el *nivel de ruido* y sus efectos sobre la salud.
El nivel de ruido N producido en función de su intensidad, está definido mediante la ley $N = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del sonido e I_0 es la mínima intensidad audible por el oído humano (llamado umbral auditivo). N se mide en decibeles que es un número que relaciona el I que se está midiendo con el sonido de referencia I_0.

Problema

> La intensidad del sonido de una máquina lavaplatos es 2 500 000 veces el valor de la mínima intensidad detectable por el oído humano. Encuentre el volumen, en decibeles, del sonido de la máquina.

Sabemos que el volumen buscado es:

$N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en este caso $I = 2\,500\,000\, I_0$ entonces:

$$N = 10\log\left(\frac{2\,500\,000\, I_0}{I_0}\right) = 10 \log 2\,500\,000 \;\Rightarrow\; N \approx 64 \text{ decibeles}$$

El volumen del sonido de la máquina es de aproximadamente 64 decibeles.

Escala de Richter: la magnitud de un terremoto está definida por $m = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ en la escala de Richter donde A es la intensidad (amplitud de sus ondas de choque o amplitud de la vibración de un sismógrafo standard localizado a 100 kilómetros del epicentro) y A_0 es una constante que representa la amplitud de un temblor de intensidad mínima.

<u>Problema</u>

> Encuentre, según la escala de Richter la magnitud de un sismo cuya intensidad es 100 veces la de un temblor de intensidad mínima.

Teniendo en cuenta que la magnitud M está dada por $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ y que además $A = 100A_0$, resulta $M = \log\left(\frac{100A_0}{A_0}\right) = \log 100 = 2$.

Por lo tanto, la magnitud del sismo es 2 según la escala de Richter.

EJERCICIOS

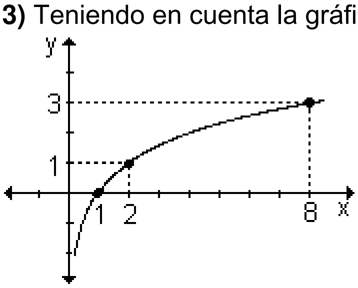
1) Indique el dominio de las siguientes funciones logarítmicas

a) $y = \log(-x - 10)$ **b)** $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4}$ **c)** $y = \log(x^2 - 1)$

d) $y = \ln(x^2 + 5)$ **e)** $y = \ln(x - 2)$ **f)** $y = \log_5 \frac{x+1}{x}$

2) Determine dominio y conjunto imagen para que la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ admita inversa. Defina la función inversa y grafique ambas en un mismo sistema de coordenadas.

3) Teniendo en cuenta la gráfica



a) Determine a qué función trascendente corresponde.

b) Defina y grafique la función inversa.

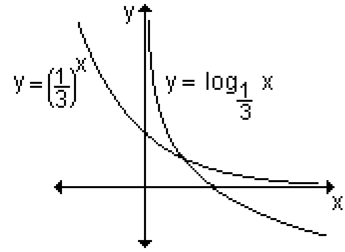
4) Aplicando definición y/o propiedades, calcule:

a) $10^{\log 3}$ **b)** $\log 10^5$ **c)** $e^{2+\ln 3}$

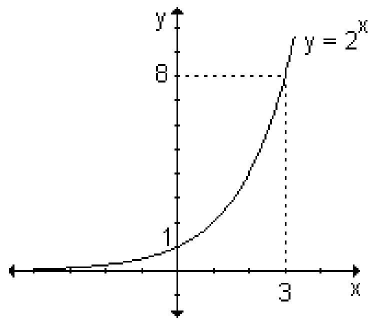
d) $e^{\ln 2}$ **e)** $\ln e^{-3}$ **f)** $e^{1+\ln 5}$

RESPUESTAS

1)a) $(-\infty, -10)$ **b)** $(0, \infty)$ **c)** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **d)** $(-\infty, \infty)$
e) $(2, \infty)$ **f)** $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$



2)a) $D_f = R$; $CI_f = R^+$
b) $f^{-1} : R^+ \rightarrow R \ / \ y = \log_{\frac{1}{3}} x$



3)a) $f : R^+ \rightarrow R \ / \ y = \log_2 x$
b) $f : R \rightarrow R^+ / \ y = 2^x$

4) a) 3 **b)** 5 **c)** $3e^2$ **d)** 2 **e)** -3 **f)** $5e$

Propiedades de los logaritmos

1) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Para todo $a \in R^+$ y $b \in R^+$, se verifica: $\log_c (a.b) = \log_c a + \log_c b$

Esta propiedad se puede demostrar de la siguiente manera:

Sean
$$m = \log_c a \ \Rightarrow \ a = c^m$$
$$n = \log_c b \ \Rightarrow \ b = c^n$$

multiplicando miembro a miembro $\quad a.b = c^{m+n}$

Aplicando logaritmo en base c, resulta $\quad \log_c (a.b) = m + n$

Reemplazando m y n se obtiene: $\quad \log_c (a.b) = \log_c a + \log_c b$

Si en lugar de multiplicar miembro a miembro, se divide, se obtiene: $\frac{a}{b} = c^{m-n}$

Aplicando logaritmo en base c resulta: $\log_c \frac{a}{b} = m - n$ y reemplazando se obtiene $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$. Podemos enunciar una nueva propiedad:

2) El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

3) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base. $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$

Se demuestra siguiendo el razonamiento anterior:

Sea $c = \log_b a \Rightarrow b^c = a$.

Elevando a la potencia n ambos miembros resulta: $a^n = b^{n.c}$.

Aplicando logaritmo en base b a ambos miembros se obtiene $\log_b a^n = \log_b b^{n.c}$

Por propiedad de logaritmos: $\log_b a^n = n.c$ y reemplazando c: $\log_b a^n = n. \log_b a$

Considerando la raíz como un caso particular de la potencia de exponente fraccionario es: $\log_b \sqrt[n]{a} = \log_b a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.\log_b a = \dfrac{\log_b a}{n}$

4) El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice $\log_b \sqrt[n]{a} = \dfrac{\log_b a}{n} = \frac{1}{n}.\log_b a$

Ejemplos. Aplique las propiedades de logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones

a) $\log_2 (5x^3)$ **b)** $\log_3 \dfrac{x}{y^4}$ **c)** $\log_4 \dfrac{\sqrt[3]{a}}{b}$

a) Aplicando la propiedad del logaritmo de un producto, resulta:

$$\log_2 (5x^3) = \log_2 5 + \log_2 x^3$$

En el segundo término del segundo miembro, aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia, se obtiene: $\log_2 5 + \log_2 x^3 = \log_2 5 + 3 \log_2 x$

Por lo tanto: $\log_2 (5x^3) = \log_2 5 + 3 \log_2 x$

b) Aplicando las propiedades del logaritmo de un cociente y de una potencia, se obtiene:

$$\log_3 \frac{x}{y^4} = \log_3 x - \log_3 y^4 = \log_3 x - 4 \log_3 y$$

c) Aplicando las propiedades del logaritmo de un cociente y de una raíz, resulta:

$$\log_4 \frac{\sqrt[3]{a}}{b} = \log_4 \sqrt[3]{a} - \log_4 b = \frac{1}{3}\log_4 a - \log_4 b$$

Ejemplos. Utilice las propiedades de logaritmos para evaluar las siguientes expresiones:

a) $\log_4 2 + \log_4 32$ **b)** $\log_2 80 - \log_2 5$ **c)** $-\frac{1}{3}\log_2 8$

a) Aplicando la propiedad del logaritmo de un producto, se obtiene:

$\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 2.32 = \log_4 64 = 3$

b) Aplicando la propiedad del logaritmo de un cociente, resulta:

$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16 = 4$

c) Teniendo en cuenta la propiedad del logaritmo de una raíz, se obtiene:

$-\frac{1}{3}\log_2 8 = \log_2 8^{-\frac{1}{3}} = \log_2\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

Cambio de base

En ciertas ocasiones resulta conveniente cambiar logaritmos en una cierta base dada por logaritmos en otra base.

Sea la función $y = \log_b x$

Por definición, $b^y = x$

Aplicando a ambos miembros logaritmo en base a, resulta:

$$\log_a b^y = \log_a x$$

Teniendo en cuenta la propiedad del logaritmo de una potencia:

$y \cdot \log_a b = \log_a x$ de donde se obtiene $y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Como $y = \log_b x$, reemplazando resulta: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Ejemplo: Utilice la expresión de cambio de base para evaluar $\log_4 \frac{1}{2}$.

Dado que 4 y $\frac{1}{2}$ pueden expresarse como potencias de base 2, conviene elegir como nueva base $a = 2$ y resulta:

$$\log_4 \frac{1}{2} = \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 4} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

También puede elegirse para el cambio de base, el logaritmo decimal o el logaritmo natural.

$$\log_4 \frac{1}{2} = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log 4} = \frac{-0{,}30103}{0{,}60206} = -0{,}5$$

$$\log_4 \frac{1}{2} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 4} = \frac{-0{,}69315}{1{,}38629} = -0{,}5$$

EJERCICIOS

1) Aplique propiedades del logaritmo para desarrollar las siguientes expresiones:

a) $\log_4 (x.z)$ **b)** $\log \dfrac{y}{x}$ **c)** $\log_2 \sqrt[3]{z}$

d) $\log_a \dfrac{y^5 w^2}{x^4 z^3}$ **e)** $\ln \sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5 z}}$ **f)** $\log \dfrac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$

2) Sabiendo que $\log_3 8 \approx 1{,}9$, calcule:

a) $\log_3 24$ **b)** $\log_3 64$ **c)** $\log_3 2$

RESPUESTAS

1) a) $\log_4 x + \log_4 z$ **b)** $\log y - \log x$ **c)** $\frac{1}{3}\log_2 z$

d) $5\log_a y + 2\log_a w - 4\log_a x - 3\log_a z$ **e)** $\frac{7}{4}\ln x - \frac{5}{4}\ln y - \frac{1}{4}\ln z$

f) $\frac{1}{3}\log z - \log x - \frac{1}{2}\log y$

2) a) 2,9 **b)** 3,8 **c)** $0{,}6\widehat{3}$

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación tal como $2^{3x+1} = \dfrac{1}{4}$, en la que la variable figura en el exponente, recibe el nombre de ecuación exponencial.

Estas ecuaciones pueden resolverse de dos maneras diferentes:

a) Por igualación de bases:

El segundo miembro de la igualdad puede expresarse como una potencia de base 2. Es decir: $2^{3x+1} = 2^{-2}$

Queda planteada la igualdad de dos expresiones exponenciales en las que las bases son iguales. De aquí se deduce la igualdad de los exponentes:

$3x + 1 = -2 \;\Rightarrow\; 3x = -2 - 1 \;\Rightarrow\; 3x = -3 \;\Rightarrow\; x = (-3):3 \;\Rightarrow\; x = -1$

b) Utilizando logaritmos:

Aplicando a ambos miembros de la igualdad logaritmo en una base conveniente, la igualdad no varía. En el ejemplo, conviene elegir la base 2. De esta manera se obtiene: $\log_2 2^{3x+1} = \log_2 \dfrac{1}{4}$.

Por propiedad del logaritmo de una potencia y por definición de logaritmo resulta:

$(3x + 1)\log_2 2 = -2 \;\Rightarrow\; 3x + 1 = -2 \;\Rightarrow\; (3x + 1).1 = -2 \;\Rightarrow\; x = -1$

Observación: En ambos casos, luego de resolver la ecuación, es importante verificar la solución obtenida en la ecuación dada $2^{3x+1} = \frac{1}{4}$

$$2^{3.(-1)+1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{-3+1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \checkmark$$

Ejemplo: Halle x para que $4^{-x^2+4x-3} = 1$

$$4^{-x^2+4x-3} = 1 \Rightarrow 4^{-x^2+4x-3} = 4^0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación aplicando la fórmula resolvente se obtienen las soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

Verificación: Si $x = 1 \Rightarrow 4^{-1^2+4.1-3} \stackrel{?}{=} 1 \Rightarrow 4^{-1+4-3} = 4^0 = 1 \checkmark$

Si $x = 3 \Rightarrow 4^{-3^2+4.3-3} \stackrel{?}{=} 1 \Rightarrow 4^{-9+12-3} = 4^0 = 1 \checkmark$

Nota: La ecuación dada también podría haberse resuelto aplicando logaritmo a ambos miembros. Resuélvala eligiendo una base adecuada y verifique que obtiene las mismas soluciones.

Problema

Poco después de consumir una dosis sustancial de whisky, el nivel de alcohol en la sangre de una persona sube a $0{,}3 \frac{mg}{ml}$. De ahí en adelante, este nivel decrece de acuerdo con la ley $y = 0{,}3.\ 0{,}5^t$ donde t es el tiempo medido en horas a partir del instante en que se alcanza el nivel más alto.

a) Indique de qué función se trata y determine su dominio y conjunto de imágenes.

b) ¿Por qué dice en el enunciado que es decreciente?

c) ¿Cuánto tendrá que esperar esa persona para poder conducir legalmente su automóvil si en su ciudad el límite permitido de alcohol en sangre es de $0{,}08 \frac{mg}{ml}$?

a) Se trata de una función exponencial, su dominio es $[0, \infty)$ y su conjunto de imágenes es $(0; 0{,}3]$.

b) Es decreciente pues la base $a = 0{,}5$ es menor que uno.

c) Como el límite permitido de alcohol en sangre es de 0,08 $\frac{mg}{ml}$, para determinar el tiempo que una persona debe esperar para poder conducir, se plantea la ecuación $0{,}08 = 0{,}3 .\ 0{,}5^t \ \Rightarrow\ \frac{0{,}08}{0{,}3} = 0{,}5^t \ \Rightarrow\ 0{,}5^t = 0{,}267$

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros:

$\ln (0{,}5^t) = \ln 0{,}267 \ \Rightarrow\ t \ln 0{,}5 = \ln 0{,}267 \ \Rightarrow\ t \approx 1{,}9$

La persona deberá esperar aproximadamente 1 hora y 54 minutos para poder conducir legalmente su automóvil.

Problema

> Se adquiere una máquina por $ 10 000 y se devalúa continuamente desde la fecha de su adquisición. El valor de la misma después de t años está dado por la ley $v(t) = 10\,000\ e^{-0{,}2t}$.
> **a)** ¿De qué tipo de función se trata?
> **b)** ¿Es creciente o decreciente? ¿Por qué?
> **c)** Calcule el valor de la máquina luego de 8 años.
> **d)** ¿Cuándo el valor de la misma será la mitad del de la adquisición?
> **e)** Explique cómo graficar v(t) usando transformaciones sobre la función $y = e^t$. Bosqueje la gráfica para valores de $t \geq 0$.

a) Se trata de una función exponencial.

b) Es decreciente pues $e^{-0{,}2t} = \left(e^{-1}\right)^{0{,}2t} = \left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}2t}$. La base de la función exponencial es $\frac{1}{e}$ que es un número comprendido entre 0 y 1.

c) Reemplazando la variable t por 8 resulta: $v(8) = 10\,000\ e^{-0{,}2.8} = 2018{,}96$.
Luego de 8 años la máquina valdrá aproximadamente $ 2019.

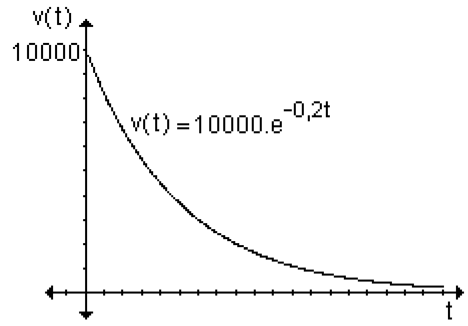
d) Debemos calcular cuando la máquina valdrá $ 5000, la mitad de su valor de adquisición:

$5000 = 10\,000\ e^{-0{,}2t} \ \Rightarrow\ \frac{5000}{10\,000} = e^{-0{,}2t} \ \Rightarrow\ \ln 0{,}5 = -0{,}2\ t \ln e \ \Rightarrow\ \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}2} = t$

$\Rightarrow\ t \approx 3{,}46$

Transcurrirán 3 años, 5 meses y 17 días, aproximadamente para que su valor sea $ 5000.

e) Tomando como base la gráfica de la función $y = e^{t}$ hay una reflexión con respecto al eje de ordenadas (pues la base es menor que 1), corta al eje de ordenadas en 10 000 y decrece más lentamente que la función $y = e^{-t}$ debido al factor 0,2 que multiplica a la variable independiente.



<u>Problema</u>

> Una cierta población de bacterias crece a una tasa exponencial con una constante de crecimiento k = 0,40. El cultivo de la bacteria tiene una población inicial dada por v_0.
> **a)** Determine la función de crecimiento exponencial f(t) donde t se da en horas.
> **b)** ¿En cuánto tiempo se triplica la población inicial?

a) Como el crecimiento es exponencial surge la función $f(t) = v_0\, e^{0,4\, t}$.

b) Nos interesa saber en cuanto tiempo la población será el triple de la inicial, es decir $f(t) = 3v_0$ teniendo en cuenta que $f(t) = v_0\, e^{0,4t}$. Reemplazando:

$$3v_0 = v_0\, e^{0,4t} \;\Rightarrow\; 3 = e^{0,4t} \;\Rightarrow\; \ln 3 = 0,4t \ln e.$$

Como ln e = 1, entonces: $1,098612289 = 0,4t \;\Rightarrow\; 1,098612289 : 0,4 = t$ y de aquí: $t \approx 2,75$ horas. Podemos decir que, aproximadamente transcurridas 2 horas y 45 minutos se triplicará la población.

<u>Problema</u>

> Una inversión se capitaliza continuamente a una tasa nominal del 8% anual ¿Cuánto tiempo tardará la inversión en duplicar su valor?

Si una inversión C se capitaliza continuamente, la fórmula que permite calcular el total acumulado luego de t años es $M = Ce^{rt}$. Si se desea saber en cuánto tiempo la inversión se duplicará, debemos preguntarnos cuándo será M = 2C a una tasa del 8% anual, es decir, r = 0,08.

Reemplazando: $2C = C\, e^{0,08t} \;\Rightarrow\; 2 = e^{0,08t} \;\Rightarrow\; \ln 2 = 0,08t \ln e$

$0,69314718 = 0,08t \;\Rightarrow\; t = 0,69314718 : 0,08 \;\Rightarrow\; t \approx 8,66$

Aproximadamente tardará 8 años y 8 meses en duplicar su valor la inversión realizada.

Nota: el carbono 14 (C14) es un isótopo radiactivo del carbono que está presente en la atmósfera de manera constante. La cantidad de C14 en los tejidos de una planta o animal vivo es constante. Sin embargo, cuando un organismo muere deja de absorber nuevas cantidades de C14 y la cantidad de él en sus restos disminuye debido a la desintegración natural de la sustancia radiactiva. Como se sabe que la vida media del C14 es de 5730 años, la edad aproximada de una planta o de un animal fósil se puede establecer midiendo la cantidad de carbono 14 presente en los restos.
Esta técnica permite determinar la edad de fósiles muy antiguos, por eso es importante en investigaciones de arqueología y paleontología.

<u>Problema</u>

> Se encontraron restos de un hombre prehistórico y utilizando la técnica del C14 se determinó que quedaba el 49% de la cantidad original ¿Cuántos años de antigüedad tienen los restos de dicho hombre?

Si C(0) es la cantidad original de C14, la cantidad C(t) presente a los t años de haber muerto el hombre se describe por la ley $C(t) = C(0)\, e^{kt}$.

Dado que la vida media del C14 es de 5730 años, resulta: $\frac{1}{2}C(0) = C(0)\, e^{k\,5730}$

Resolviendo:

$$\frac{1}{2} = e^{k\,5730} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{2} = k\,5730 \ln e \;\Rightarrow\; k \approx \frac{\ln 1 - \ln 2}{5730} \;\Rightarrow\; k \approx -0{,}000121$$

Por lo tanto, $C(t) = C(0)\, e^{-0{,}000121\,t}$.

Como la cantidad de C14 encontrada en los restos es del 49% de la cantidad original, resulta: $0{,}49\, C(0) = C(0)\, e^{-0{,}000121\,t}$.

Resolviendo, $0{,}49 = e^{-0{,}000121\,t} \;\Rightarrow\; \ln 0{,}49 = -0{,}000121\,t$

$$t = -\frac{\ln 0{,}49}{0{,}000121} \;\Rightarrow\; t \approx 5895$$

El hombre prehistórico vivió hace aproximadamente 5895 años.

EJERCICIO

Halle él o los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x+1} = 32$ **b)** $64^{x} = 8$ **c)** $4^{x} = \frac{1}{16}$

d) $\left(\frac{8}{27}\right)^{x} = \frac{4}{9}$ **e)** $32^{x+2} = 2^{x^2+4}$ **f)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x+2} = 27$

g) $5^{x^2-3x} = 625$ **h)** $e^{x^2} = e^{7x-12}$

RESPUESTAS

a) $x = 4$ **b)** $x = \frac{1}{2}$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = \frac{2}{3}$

e) $x = 6; x = -1$ **f)** $x = -\frac{5}{4}$ **g)** $x = 4; x = -1$ **h)** $x = 4; x = 3$

Ecuaciones logarítmicas

Ejemplo: Encuentre los valores de x que verifican las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 (x - 1) = 3$.

Aplicando la definición de logaritmo: $x - 1 = 2^3 \Rightarrow x = 9$

Verificación: $\log_2 (9 - 1) \overset{?}{=} 3 \Rightarrow \log_2 8 = 3 \Rightarrow \log_2 2^3 = 3 \Rightarrow 3 = 3$ ✓

Por lo tanto, la solución es $x = 9$.

b) $\log_3 x + \log_3 (x + 2) = 1$

Aplicando la propiedad del logaritmo de un producto, resulta $\log_3 x.(x + 2) = 1$.

Aplicando la definición $x.(x + 2) = 3^1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -3$

Verificación:

Si $x = 1 \Rightarrow \log_3 1 + \log_3 (1 + 2) \overset{?}{=} 1 \Rightarrow \log_3 1 + \log_3 3 \overset{?}{=} 1 \Rightarrow 0 + 1 \overset{?}{=} 1 \Rightarrow 1 = 1$ ✓

Si $x = -3 \Rightarrow \log_3 (-3) + \log_3 (-3 + 2) \overset{?}{=} 1$

Por lo tanto, $x = -3$ no es solución ya que el logaritmo sólo está definido para números positivos. Luego, la solución es $x = 1$.

c) Halle los valores de x que verifican $\log_3 (x + 3) = 1 - \log_3 (x + 5)$.

El término 1 del segundo miembro puede escribirse como $\log_3 3$ y resulta:

$\log_3 (x + 3) = \log_3 3 - \log_3 (x + 5)$.

Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente en el segundo miembro, se obtiene: $\log_3 (x + 3) = \log_3 \frac{3}{x+5}$.

Dado que se plantea la igualdad de dos logaritmos de la misma base, debe verificarse que:

$$x + 3 = \frac{3}{x+5} \Rightarrow (x + 3).(x + 5) = 3 \Rightarrow x^2 + 5x + 3x + 15 = 3 \Rightarrow x^2 + 8x + 12 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene $x_1 = -2$, $x_2 = -6$.

Sustituyendo en la ecuación dada para verificar si los valores obtenidos son soluciones de la ecuación:

Si $x = -2 \Rightarrow \log_3 (-2 + 3) \overset{?}{=} 1 - \log_3 (-2 + 5) \Rightarrow \log_3 1 \overset{?}{=} 1 - \log_3 3 \Rightarrow 0 \overset{?}{=} 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

Si x = –6 $\Rightarrow$ $\log_3(-6+3) \overset{?}{=} 1 - \log_3(-6+5)$ $\Rightarrow$ $\log_3(-3) \overset{?}{=} 1 - \log_3(-1)$

Como no existe el logaritmo de números negativos, x = –6 *no es solución*.

Por lo tanto, la solución de la ecuación dada es x = –2.

Nota: Como pudimos observar en los ejemplos, en este tipo de ecuaciones es fundamental la verificación para descartar raíces extrañas.

Problema

La expresión ln w = ln 2,4 + 1,84 h es una fórmula que relaciona la altura h (en metros) con el peso promedio w (en kg) para niños de 5 a 13 años.

a) Exprese el peso en función de la altura h (sin que contenga logaritmo)

b) Estime el peso promedio de niños de 8 años de 1,50 m de estatura.

a) Despejando la variable w resulta:

$\ln w = \ln 2{,}4 + 1{,}84\,h \quad \Rightarrow \quad \ln w - \ln 2{,}4 = 1{,}84\,h$

Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente: $\ln \frac{w}{2{,}4} = 1{,}84\,h$

Por definición de logaritmo: $\frac{w}{2{,}4} = e^{1{,}84h} \quad \Rightarrow \quad w = 2{,}4e^{1{,}84h}$

De otra forma, aplicando la definición de logaritmo $w = e^{\ln 2{,}4 + 1{,}84\,h}$

Por propiedad de producto de potencias de igual base

$w = e^{\ln 2{,}4}\, e^{1{,}84\,h} \quad \Rightarrow \quad w = 2{,}4e^{1{,}84h}$

b) Reemplazando en la función hallada h por 1,5 obtenemos:

$$w = 2{,}4.e^{1{,}84 . 1{,}5} \quad \Rightarrow \quad w = 37{,}92$$

El peso promedio estimado de niños de 8 años y de 1,50m de estatura es de 37, 92 Kg.

EJERCICIO

Halle el o los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones y verifique:

a) $\log_x 32 = 5$ **b)** $\ln x = 3{,}7$

c) $\log_{\frac{3}{2}} x = 2$ **d)** $\log_x 2 = -0{,}5$

e) $\log x = 1{,}8965$ **f)** $\ln x^2 = -2$

g) $e^{-\ln x} = 0{,}2$ **h)** $e^{2\ln x} = 9$

i) $\log(x+1) - \log(x-2) - \log 2 = 0$ **j)** $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln 9$

k) $\frac{1}{3}\log_2(8+7x) = 2$ **l)** $2\log_{\sqrt{3}}(5-x) = 4$

RESPUESTAS

a) $x = 2$ **b)** $x = 40{,}447$ **c)** $x = \frac{9}{4}$ **d)** $x = \frac{1}{4}$

e) $x = 78{,}795$ **f)** $x = 0{,}368 = e^{-1}$ **g)** $x = 5$ **h)** $x = 3$

i) $x = 5$ **j)** $x = 0{,}46$ **k)** $x = 8$ **l)** $x = 2$

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 FUNCIÓN EXPONENCIAL - 3.2 FUNCIÓN LOGÍSTICA - 3.3 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1) Grafique en un mismo sistema coordenado $y_1 = 2^x$ e $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Determine dominio y conjunto imagen de cada una.
b) Establezca semejanzas y/o diferencias entre las dos gráficas.

2) Teniendo en cuenta la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, represente las funciones:

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ **b)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ **c)** $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **d)** $y = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $y = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **f)** $y = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ **g)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ **h)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}x}$

3) Dada la función $f(x) = b.a^x$, determine los valores de los parámetros a y b para que su gráfica pase por los puntos:

a) $(1, 1)$ y $(2, 3)$ **b)** $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-1, \frac{3}{10}\right)$

4) Defina la función inversa de la función dada y grafique ambas en un mismo sistema cartesiano.

a) $y = 4^x$ **b)** $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

5) Teniendo en cuenta la gráfica de $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, sin hacer una tabla de valores, represente las siguientes funciones:

a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ **b)** $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ **c)** $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$

d) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x$ **e)** $y = 2.\log_{\frac{1}{2}} x$ **f)** $y = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x$

6) Si $\log_2 a = 4$ y $\log_2 c = \frac{1}{2}$, sin hallar los valores de a y c calcule $\log_2 8a\sqrt[5]{c}$ y $\log_2 \frac{\sqrt[3]{a}}{c^4}$.

7) Sabiendo que $\log_2 5 \approx 2{,}32$ y $\log_2 3 \approx 1{,}58$ halle:

a) $\log_2 30$ **b)** $\log_2 10$ **c)** $\log_2 40$

d) $\log_2 75$ **e)** $\log_2 12$ **f)** $\log_2 2{,}7$

8) Resuelva y verifique las siguientes ecuaciones:

a) $5^{x+2} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x^2-1}$

b) $3^{2x^2-5x} = 27^{x-2}$

c) $4^{x^2-x} = 16$

d) $2^{1-x} = 4^{2\left(x+\frac{1}{4}\right)}$

e) $\log_3 (x + 5) - \log_3 (x - 1) = 1$

f) $\log_{\frac{1}{2}}\left(20x - 4x^2\right) = -1 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{9}{2}$

g) $\log_x 2 + \log_x 6 = 2 + \log_x 3$

h) $2 \log_{25} x - \log_{25} (25 - 4x) = \frac{1}{2}$

i) $\log x = 1 + \log (x + 1)$

j) $(\log_5 x)^2 = 3.\log_5 x$

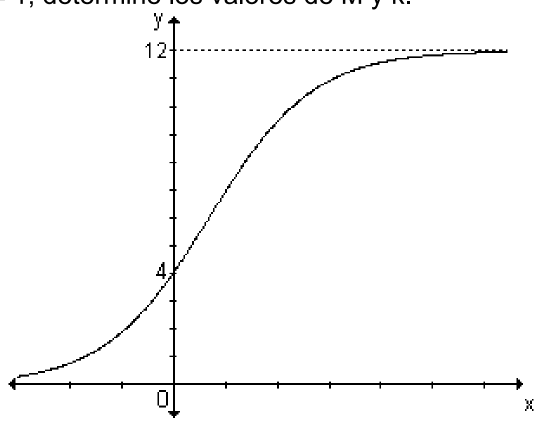
9) Resuelva los sistemas:

a) $\begin{cases} \log_4 (x+1) + \log_4 y = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ \log_3 y^2 = 2 \end{cases}$

10) La gráfica corresponde a una función de la forma $y = \dfrac{M}{1 + k.e^{-ax}}$:

Sabiendo que $a = 1$, determine los valores de M y k.



PROBLEMAS DE APLICACIÓN 3.1 FUNCIÓN EXPONENCIAL - 3.2 FUNCIÓN LOGÍSTICA - 3.3 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1) Debido a una publicidad poco efectiva, una firma comercial encuentra que sus ingresos anuales se han reducido en forma notable. Además, dichos ingresos anuales r (expresados en miles de millones), al final de t años de negocios satisfacen la ecuación: $r = 200.3^{-0,2t}$.

a) Halle los ingresos anuales al final de 3 años de negocios.

b) Calcule cuántos años deben transcurrir para que sus ingresos anuales sean 129 (miles de millones).

2) La población proyectada p de una ciudad está dada por $p = 100\,000\ e^{0,05t}$**,** donde t es el número de años después de 1985. Pronostique la población para el año 2005.

3) La población en Estados Unidos en 1970 era de unos 203 millones de personas y en 1989 de unos 247 millones.

a) Determine el valor de k en el modelo matemático que describe el crecimiento de una población, $p = p_0\, e^{kt}$, donde p_0 es el número de personas en el instante cero (año 1970) y p el número de personas en el instante t.

b) Utilizando dicho valor de k, estime la población en el año 2030.

4) Una sustancia inestable es tal que si n_0 es la cantidad original, pasados t días queda una cantidad n dada por la expresión $n = n_0\, e^{-0{,}023t}$. Determine su vida media, es decir, el tiempo que debe pasar para que se desintegre la mitad de la cantidad original.

5) Un isótopo del uranio tiene una vida media de 73,6 años. Si la ley de desintegración radiactiva es $n = n_0\, e^{-kt}$, con n_0 el número de átomos original y n el número de átomos existentes una vez pasados t años, halle el valor de la constante de desintegración k.

6) Se sabe que en un cierto cultivo de bacterias su número se duplica cada hora.

a) Si al comenzar el experimento hay 1000 bacterias, complete la siguiente tabla de lectura que obtendrá el científico.

t (tiempo en horas)	0	1	2	3	4	5
f(t) (número de bacterias)	....	....	....	....	....	....

b) Determine la función f(t) que describe el crecimiento bacteriano.

c) Calcule cuántas bacterias habrá al cabo de 50 horas.

d) ¿Qué tiempo se necesita para que la población sea 30 000 bacterias?

7) Una persona en una línea de armado de un cierto producto, produce p productos por día, después de haber recibido t días de entrenamiento para tal fin, siguiendo la ley dada por la siguiente función: $p = 400.\,(1 - e^{-t})$

a) Complete la siguiente tabla:

t(tiempo en días)	0	1	2	3	4	5
p(número de productos)	....	....	....	....	....	....

b) Una persona que no ha recibido entrenamiento, ¿podría producir algún producto?

c) ¿Cuántos días de entrenamiento se requerirían para que una persona pueda armar 400 productos por día?

d) ¿Cuántos días de entrenamiento le tomará a una persona para ser capaz de producir 300 productos por día?

8) Un cultivo de la bacteria Eschirichia Coli está creciendo en un medio que consta de sales inorgánicas y glucosa según una función de la forma $p = p_0\, e^{kt}$ donde p_0 indica la población cuando $t = 0$, p es la población en el tiempo t (en días) y k es la constante de crecimiento.

a) Determine la función de crecimiento f(t) si $k = 0{,}8$.

b) Determine el período que se requiere para que la población inicial duplique su tamaño.

9) Una colonia de moscas de la fruta está creciendo con la ley exponencial $p(t) = p_0\, e^{kt}$ donde t se mide en días y p_0 es el número de moscas en $t = 0$.

a) Si el tamaño de la colonia se duplica en 12 días, determine el valor de la constante k de crecimiento.

b) Si el tamaño inicial de la colonia era 300, ¿en cuántos días la colonia tendrá 1800 moscas de la fruta? (Use el valor de k obtenido en el ítem **a)**)

10) Un cultivo de bacterias crece de acuerdo con la expresión $y = 10\, e^{0{,}6x}$, donde x es el tiempo expresado en días.

a) Calcule el número de bacterias que habrá después de una semana.

b) Calcule el número de bacterias después de que ha proliferado durante 12 hs.

c) ¿Cuánto tiempo se necesita para que se triplique el cultivo de bacterias obtenido en **a)**?

d) ¿Cuánto tiempo hará falta para que el número de bacterias llegue a 1000?

11) Una sustancia radioactiva está desintegrándose de acuerdo con la ley $y = A.e^{kt}$ donde t es el tiempo medido en años. Se sabe que la cantidad inicial era 10 gramos y luego de 5 años quedan 8 gramos.

a) Encuentre el valor de k.

b) Calcule la cantidad de sustancia restante después de 10 años

12) La masa de madera de un bosque aumenta en un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (biomasa) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo 100 años, la función $m = 1{,}4^t$ expresa la cantidad de masa vegetal, m, en un instante cualquiera t (expresado en siglos a partir de 1800).

a) Calcular la cantidad de madera que hubo en 1900, 2000, 1600 y 1550.

b) Averigüe cuándo habrá el triple de masa de madera que en 1800 y cuándo hubo la tercera parte.

13) Para describir el primer mes de crecimiento de cultivos de soja, se utiliza la función exponencial $p(t) = p_0\, e^{kt}$, con k > 0, donde p es el peso total en mg, p_0 es el peso en el día del brote o emergencia y t es el tiempo en días. Si se sabe que para una variedad de soja en experimentación, la constante k vale 0,2 y que a los 10 días el peso era de 575 mg, estime el peso al emerger del suelo.

14) La magnitud m de un terremoto y su energía e están relacionadas mediante la ecuación: $1{,}5\, m = \log \dfrac{e}{2{,}5.10^{11}}$ en términos de la escala de Richter de 1958 y e está en ergios.

a) Calcule e.

b) Exprese el resultado en notación científica.

c) Calcule el valor de la energía si la magnitud del terremoto es 2.

15) El modelo matemático que describe el crecimiento bacteriano está dado por $p(t) = p_0\, e^{kt}$ donde p_0 es el número de bacterias en el instante 0 y k es una constante positiva. Al iniciar la experiencia, había 203 millones de bacterias y 19 días después, 247 millones.

a) Con estos datos encuentre el valor de k.

b) Utilice ese valor de k para predecir la población a los 60 días del inicio de la experiencia.

16) El modelo matemático que describe el decaimiento radioactivo está dado por $n = n_0\, e^{-kt}$ donde n_0 es la cantidad de sustancia radiactiva en el instante 0 y k una constante. La vida media del polonio 218 es de 3 minutos. Determine la cantidad de polonio que habrá luego de 30 minutos en una muestra de 410 gramos.

17) La fórmula de interés compuesto continuamente está dada por $m = p\, e^{rt}$, donde p es el monto de dinero inicial, r la tasa de interés (expresada como decimal), t el número de años durante los cuales p está invertido y m el monto total después de t años.

decimal), t el número de años durante los cuales p está invertido y m el monto total después de t años.
Se depositan $ 20 000 en una cuenta de un banco que paga un interés del 8% anual compuesto continuamente.

a) Calcule el saldo de la cuenta luego de 5 años.

b) Determine cuántos años deberá dejar ese capital si desea obtener un monto de $ 25 000.

18) Si se invierten $ 1000 a una tasa anual de 9% de interés compuesto continuamente, determine el tiempo que tardará en duplicarse la inversión.

19) Una inversión de $ 1000 gana intereses a una tasa anual del r% compuesto continuamente. Si la inversión se duplica en 5 años, determine r.

20) Una inversión p gana el 5% de interés anual compuesto continuamente. Luego de 3 años, el valor depositado es $ 5000. Obtenga la cantidad inicial p.

21) Un cultivo de bacterias crece de acuerdo con la fórmula $y = 10\ 000\ e^{0,6x}$, siendo x el tiempo en días.

a) Estime la cantidad de bacterias después de una semana.

b) ¿Cuántas bacterias habrá cuando el cultivo crezca por sólo 12 horas?

c) ¿Cuánto tarda el cultivo en triplicar su población inicial?

22) El crecimiento de los árboles se representa con frecuencia mediante una función. La altura h en pies de un árbol de t años de edad sigue la ley $h(t) = \dfrac{120}{1 + 200e^{-0,2t}}$.

a) Indique de qué tipo de función se trata.

b) Calcule la altura máxima que pueden alcanzar los árboles.

c) ¿Cuál es la altura del árbol a los 10 años de edad?

d) ¿A qué edad su altura es de 50 pies?

23) En un estudio sobre las plantas arraigadas en cierta región geográfica se determinó que en los lotes de tamaño a (en metros cuadrados) el número promedio de especies que se presentaban era S. La expresión que las relaciona está dado por $\log s = \log 12,4 + 0,26 \log a$. Halle s.

24) La ecuación de oferta de un fabricante es $p = \log\left(10 + \dfrac{q}{2}\right)$ donde q es el número de unidades ofrecidas a un precio p por unidad. ¿A qué precio ofrecerá el fabricante 1980 unidades?

25) En la superficie de un portaobjeto de vidrio se encuentra una rejilla que divide la superficie en 225 cuadrados iguales. Al aplicar una muestra de sangre, que contiene n glóbulos rojos, en el portaobjeto, las células se distribuyen en forma aleatoria. En este caso, el número de cuadrados que no contienen ninguna célula está dado (en forma aproximada) por $c = 225e^{-\frac{n}{225}}$. Si 100 de los cuadrados no contienen ningún hematocrito, estime el número de células que contenía la muestra sanguínea.

26) Se llevó a cabo un experimento con un tipo específico de animal pequeño. Se determinó, para diversos animales, la cantidad de oxígeno consumida por hora y se encontró que: $\log y = \log 5,934 + 0,885 \log x$, donde y es el número de microlitros de oxígeno consumidos por hora, y x es el peso del animal (en gramos). Despeje y.

27) La energía e (en ergios) liberada durante un terremoto de magnitud r está dada por la fórmula $\log e = 1,4 + 1,5r$

a) Despeje e en términos de r.

b) Calcule la energía liberada durante el famoso terremoto de Alaska de 1964, que registró una magnitud de 8,4 en la escala de Richter.

28) La ley de Fechner en psicología acerca del estímulo s es $s = s_0.(1 + c)^r$ donde s_0 es un estímulo estándar, c una constante y r una variable. Despeje r.

29) La intensidad (L) en decibeles de un sonido de intensidad I se define por $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, donde I_0 es la mínima intensidad detectable por el oído humano.

Si un auto que tiene un sonido con una intensidad I de 3 100 000 veces I_0, calcule la intensidad en decibeles del mismo.

30) La técnica de datación con carbono 14 se emplea para determinar la edad de muestras arqueológicas y geológicas.

A veces se usa la fórmula $t = -8310 \ln x$ para estimar la edad t, en años, de un hueso fósil, donde x es el porcentaje (expresado como decimal) de carbono 14 todavía presente en el fósil.

a) Estime la edad de un hueso fósil que contiene 4% de carbono 14 que se encuentra en una cantidad igual de carbono en un hueso en la actualidad.

b) Calcule el porcentaje de carbono 14 presente en un fósil de 10 000 años de antigüedad.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 3.1 FUNCIÓN EXPONENCIAL - 3.3 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1) La función $y = \log_2 x$ es la función inversa de:

a) $y = x^2$ **b)** $y = 2^x$ **c)** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ **d)** $y = \log_x 2$

2) La función $y = 2^{-x}$ admite inversa, si está definida de:

a) $R \to R^+$ **b)** $R^+ \to R$ **c)** $R \to R_0^+$ **d)** $R_0^+ \to R$

3) La gráfica de la función $y = a^x$ es creciente si:

a) $a < 1$ **b)** $0 < a < 1$ **c)** $a > 1$ **d)** $a > 0$

4) La función $y = \log_2\left(x^2 - 4\right)$ no está definida para los números reales x tales que:

a) $-2 \le x \le 2$ **b)** $0 \le x \le 2$ **c)** $x \le 2$ **d)** $x \le -2$ o $x \ge 2$

5) La ecuación $2^{3x - x^2} = 1$ se verifica para:

a) $x_1 = 0;\ x_2 = -3$ **b)** $x = -3$ **c)** $x = 3$ **d)** $x_1 = 0;\ x_2 = 3$

6) La gráfica de la función $y = 2^x - 2$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = 2^x$

a) 2 unidades hacia arriba.
b) 2 unidades hacia abajo.
c) 2 unidades hacia la derecha.
d) 2 unidades hacia la izquierda.

7) El punto $P\left(-\frac{3}{2};8\right)$ pertenece a la gráfica de la función

a) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ **b)** $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$ **c)** $y=4^{x}$ **d)** $y=-4^{x}$

8) La solución de la ecuación $\log(3x^2+7)-\log(3x-2)=1$ es:

a) $x_1=-9;\ x_2=-1$ **b)** $x=1$

c) $x_1=9;\ x_2=1$ **d)** $x_1=9;\ x_2=-1$

9) Al calcular **c** en $\log_{\frac{1}{8}} 4=c$, se obtiene:

a) $c=-\frac{3}{2}$ **b)** $c=-\frac{2}{3}$ **c)** $c=\frac{3}{2}$ **d)** $c=\frac{2}{3}$

10) La solución de la ecuación $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}=4$ es:

a) $x=-4$ **b)** $x=4$ **c)** $x=6$ **d)** $x=8$

11) La gráfica de $y=\log_3(x-3)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y=\log_3 x$

a) 3 unidades hacia la derecha
b) 3 unidades hacia la izquierda
c) 3 unidades hacia arriba
d) 3 unidades hacia abajo

12) La gráfica de $y=\log_3 x-3$ se obtiene desplazando la gráfica de $y=\log_3 x$

a) 3 unidades hacia la derecha
b) 3 unidades hacia la izquierda
c) 3 unidades hacia arriba
d) 3 unidades hacia abajo

13) La expresión $(\log_3 x)^2$ es igual a:

a) $2\log_3 x$ **b)** $\log_3 x^2$

c) $\log_3 2x$ **d)** ninguna de las anteriores

14) Sabiendo que $\log_b 2=a$ y $\log_b 3=c$, el valor de $\frac{\log_b 2}{\log_b 9}$ es:

a) $a-2c$ **b)** $a-c^2$ **c)** $\frac{a}{2c}$ **d)** $\frac{a}{c^2}$

15) Sea la ecuación $e^{2\ln x}=9$. Su solución es:

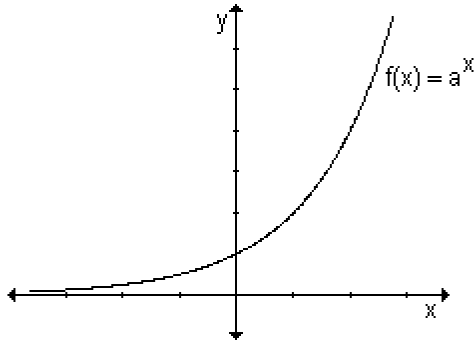
a) $x=9$ **b)** $x=3$ **c)** $x_1=3;\ x_2=-3$ **d)** e^2

16) La solución de la ecuación $\log_8(x-5)=\frac{2}{3}$ es:

a) $x=6$ **b)** $x=8$ **c)** $x=9$ **d)** $x=13$

AUTOEVALUACIÓN Nº 7: FUNCIÓN EXPONENCIAL. FUNCIÓN LOGARÍTMICA. FUNCIÓN LOGÍSTICA

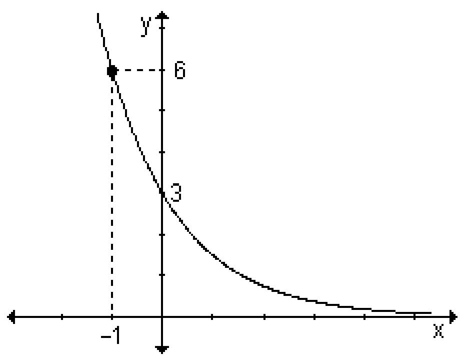
1) La gráfica de la función $f: R \to R\ /\ f(x)=a^{x}$ es la siguiente:



¿Qué tipo de función es? ¿Qué valores puede tomar a?. Según la gráfica anterior represente $g(x) = a^{-x}$ y $h(x) = a^{x+2}$.

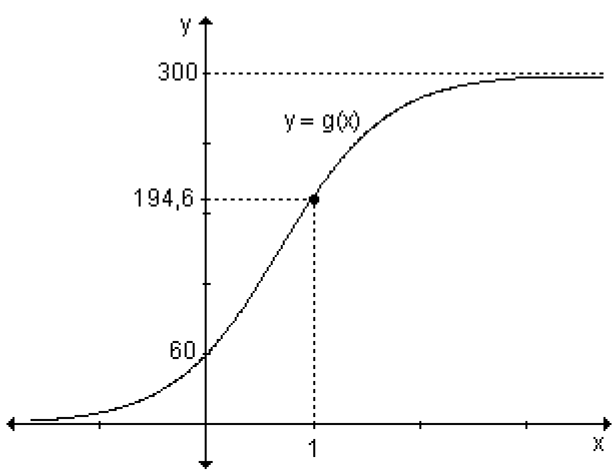
2) Determine el dominio de la función $f(x) = \log_2 (x^2 + x) - \log_2 (x-3)$.

3)a) Complete la definición $f : R \to R^+ \,/\, f(x) =$ ……….. para que la gráfica resulte:



b) ¿Admite inversa?. En caso afirmativo, defínala y grafíquela.

4) Sea la gráfica de la función de la forma $g(x) = \dfrac{M}{1+ke^{-ax}}$, determine los valores de M, k y a.



5) Un modelo para el número n de personas en una comunidad escolar que escuchó cierto rumor es $n(t) = p\left(1 - e^{-0,12t}\right)$.

Se sabe que p es la población total de la comunidad y t el número de días transcurridos desde el inicio del rumor. Si esto ocurre en una comunidad de 1500 estudiantes.

a) ¿cuántos de ellos habían escuchado el rumor después de 4 días?.

b) ¿cuándo lo habían escuchado 852 estudiantes?.

6) Obtenga la solución de la ecuación: $\log_{16} x + \log_{16} (x-4) = \frac{5}{4}$

7) Una sustancia radiactiva decae según la ley $a(t) = a_0\, e^{kt}$ donde el tiempo t está expresado en años. Se sabe que inicialmente existen 10 gramos de sustancia y transcurridos 5 años quedan 8 grs.

a) Indique de qué tipo de función se trata.

b) Determine el valor de la constante k (en términos de logaritmo neperiano)

c) Calcule la cantidad de sustancia después de 10 años.

d) Encuentre su vida media.

8) La temperatura de una pieza de metal caliente al sumergirse en agua a 20 ºC es $T(t) = 20 + 6700.\ e^{-5t}$ al cabo de t minutos.

¿Al cabo de cuántos minutos la temperatura será de 30 ºC?

9) La población de una colonia de células crece exponencialmente según la ley $p(t) = p_0 a^t$. En un cultivo existen 300 células después de dos minutos y asciende a 1400 pasados cinco minutos.

a) Defina la función que describe esta situación.

b) Estime la población después de 20 minutos.

10) Dos personas con gripe visitaron la universidad. El número de días t que transcurrieron para que el virus de la gripe infectara a n personas está dado por: $t = -1{,}43 \ln\left(\frac{10000 - n}{4998n}\right)$. ¿Cuántos días se requieren para que el virus infecte a 5000 personas?

11) La expresión $\ln p = 1{,}8\, a + \ln 4$ es una fórmula que relaciona la altura a (en metros) con el peso promedio p (en kg.) de hombres entre 40 y 50 años.

a) Exprese el peso p en función de la altura a (sin que contenga ln)

b) Estime el peso promedio de una persona de 170 cm de altura.

12) Colocamos 1000 moscas en una isla en la que no hay ninguna. La ley de crecimiento diario (t en días) seguida por la población está dada por la función $n(t) = \dfrac{600\,000}{1 + 599.e^{-0,002t}}$.

a) Indique de qué función se trata

b) ¿En cuántos días la población alcanzará 100 000 individuos?

3.4 Funciones Trigonométricas

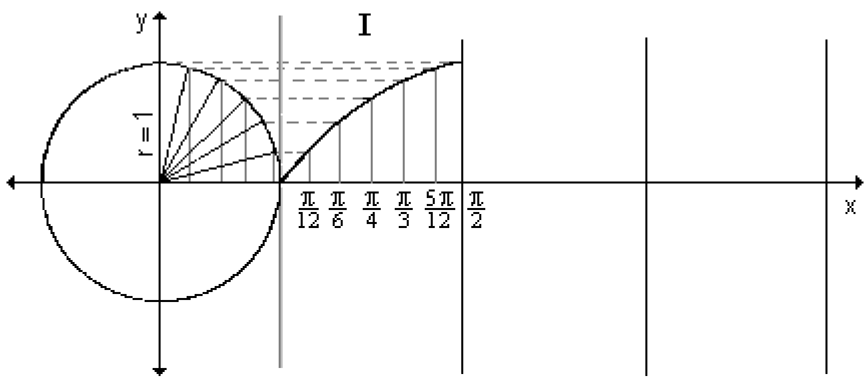
Analizaremos las razones trigonométricas seno, coseno y tangente considerando sus gráficas en un sistema de ejes cartesianos y las líneas trigonométricas correspondientes en la circunferencia trigonométrica. Luego realizaremos un análisis de cada una de estas gráficas como función.

Los ángulos serán los elementos del dominio de las funciones trigonométricas, por lo tanto, se considerarán medidos en radianes.

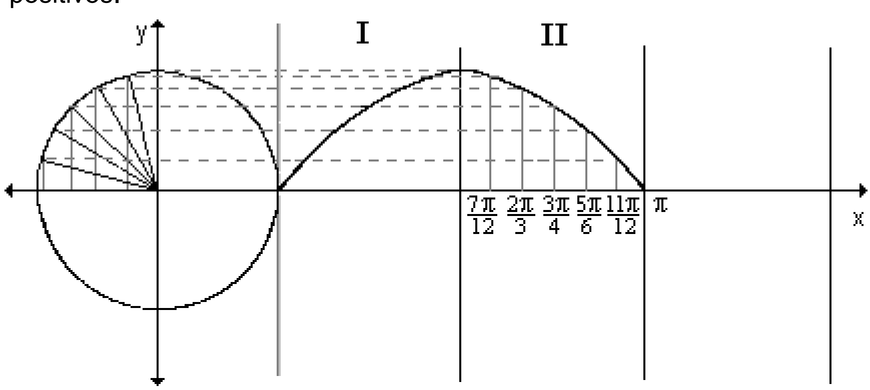
El seno como función. Construcción de la gráfica

La gráfica se traza teniendo en cuenta las líneas trigonométricas que definen la razón seno en los distintos cuadrantes. Para cada cuadrante trasladamos sobre cada valor de ángulo su respectivo seno.

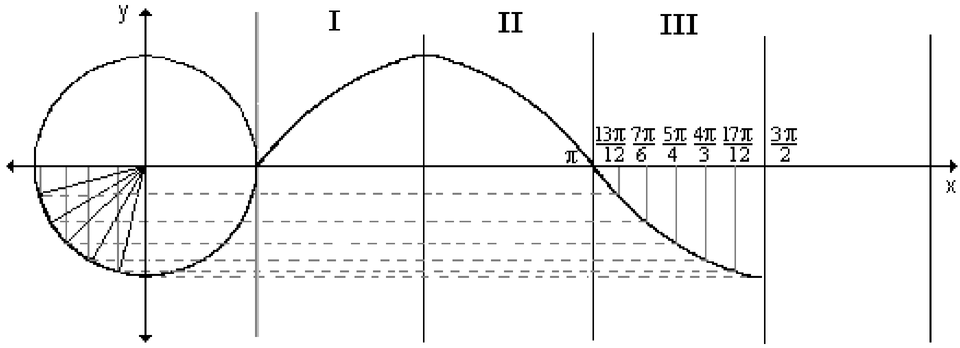
En el primer cuadrante observamos que, a medida que el ángulo crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$, los valores del seno crecen de 0 a 1. En este cuadrante la función es creciente y sus valores son positivos. El máximo valor se obtiene para $\frac{\pi}{2}$.



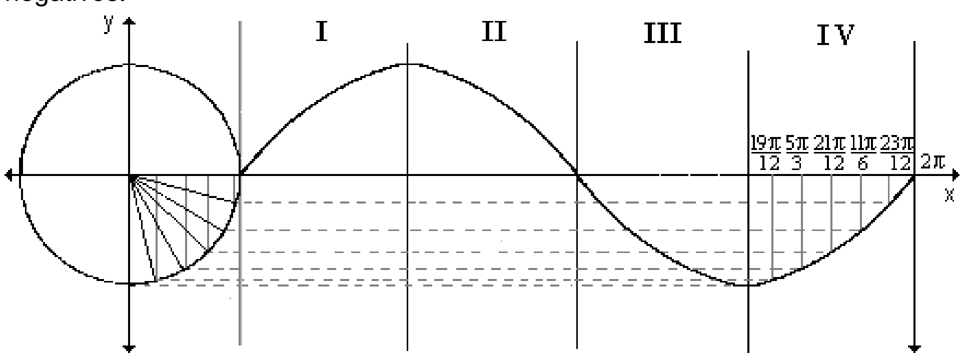
En el segundo cuadrante y a medida que el ángulo crece de $\frac{\pi}{2}$ a π, los valores del seno varían de 1 a 0 y por lo tanto la función es decreciente pero sus valores son positivos.



En el tercer cuadrante, mientras que el ángulo crece entre π y $\frac{3}{2}\pi$ los valores del seno varían de 0 a -1. En este cuadrante la función es decreciente y sus valores son negativos. El mínimo valor se obtiene para $\frac{3}{2}\pi$.



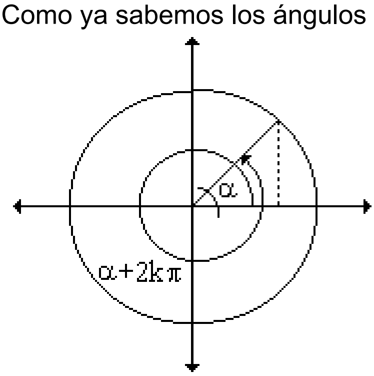
En el cuarto cuadrante, el ángulo crece de $\frac{3}{2}\pi$ a 2π y los valores del seno varían entre -1 y 0. La gráfica es creciente y los valores de la función son negativos.



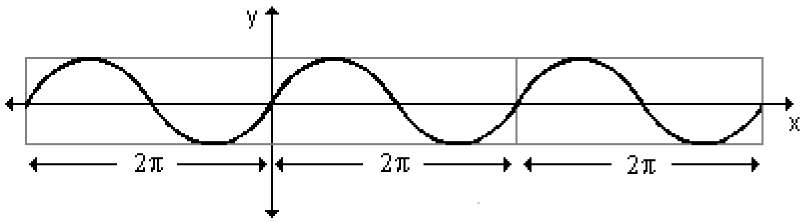
La información anterior nos facilita el camino para definir la función seno de la siguiente manera: $f : R \to R \,/\, x \to \text{sen } x$

Todo el análisis anterior, se realizó en el intervalo $[0, 2\pi]$ pero podríamos pensar en ángulos que no se encuentren en este intervalo y obtener los valores del seno para ellos.

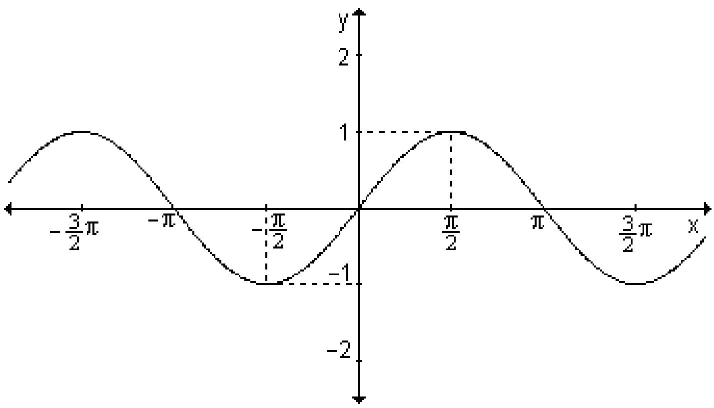
Como ya sabemos los ángulos congruentes son aquellos que difieren en un número exacto de giros. El ángulo α y el $\alpha+2\pi$ tienen el mismo lado terminal, por lo tanto, las funciones son las mismas para ambos. En general, si damos k vueltas, es decir, describimos un ángulo de $\alpha+2k\pi$ radianes, las funciones de este ángulo serán las mismas que las del ángulo α es decir: $\text{sen}(\alpha+2k\pi) = \text{sen } \alpha$, $k \in Z$.



Podemos asegurar entonces que la función seno repite sus valores en intervalos bien definidos. Estos intervalos tienen longitud 2π radianes y, por lo tanto, la función seno es periódica, de período 2π.



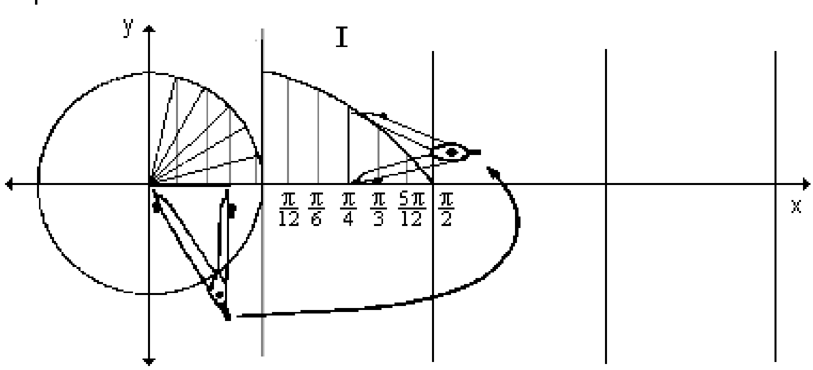
Gráfica de la función seno: $f : R \to R \ / \ f(x) = \text{sen } x$



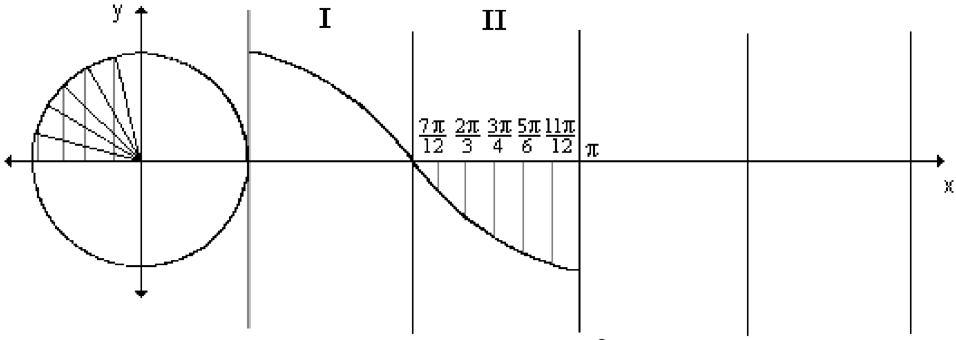
El coseno como función. Construcción de la gráfica

De la misma forma que trabajamos con el seno lo hacemos con el coseno. La gráfica se obtiene teniendo en cuenta las líneas trigonométricas que definen la razón coseno en los distintos cuadrantes.

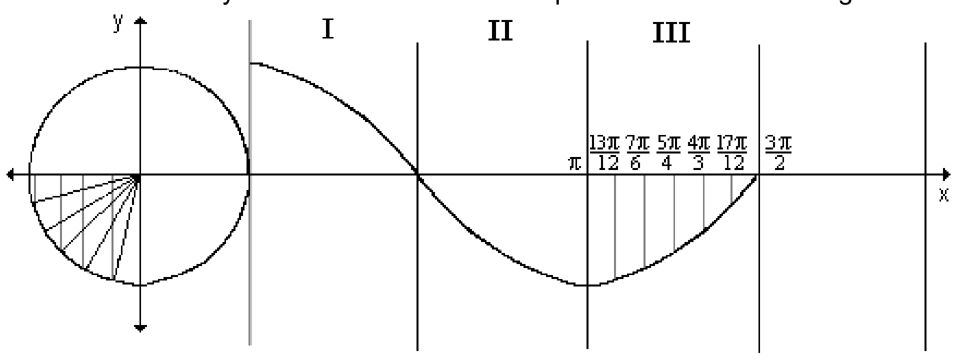
En el primer cuadrante a medida que el ángulo crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$, los valores del coseno decrecen de 1 a 0. En este cuadrante la función es decreciente pero sus valores positivos.



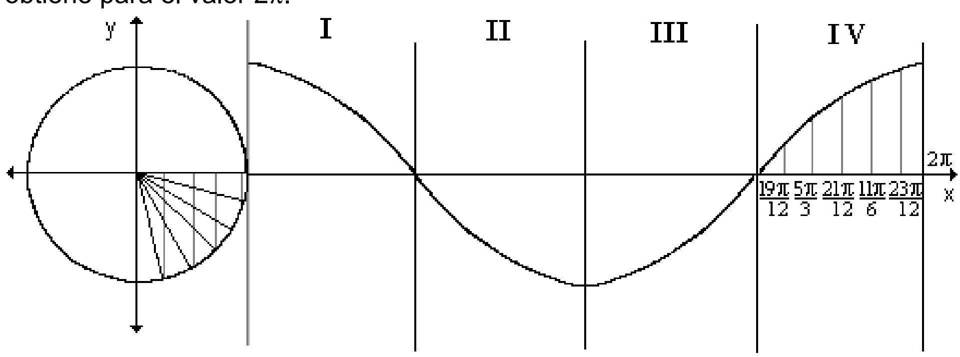
En el segundo cuadrante los valores del coseno son negativos. A medida que el ángulo crece de $\frac{\pi}{2}$ a π, los valores del coseno varían de 0 a -1 y, por lo tanto, la función es decreciente. Además el valor mínimo se obtiene para π.



En el tercer cuadrante, el ángulo crece de π a $\frac{3}{2}\pi$ y los valores del coseno varían entre -1 y 0. La función es creciente pero sus valores son negativos.



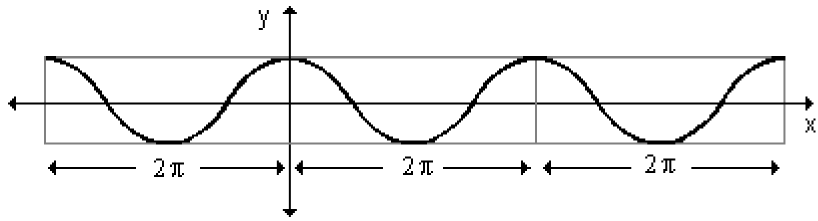
Para el cuarto cuadrante el ángulo crece de $\frac{3}{2}\pi$ a 2π y los valores del coseno son positivos y varían entre 0 y 1. La función es creciente. El valor máximo se obtiene para el valor 2π.



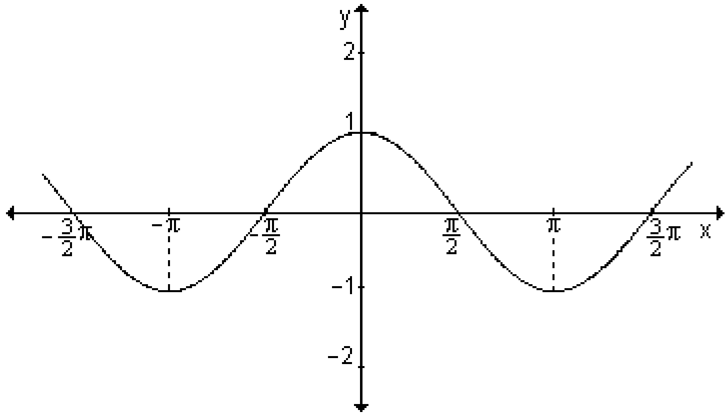
Con todo esto podemos definir la función coseno de la siguiente manera:

$$f : R \to R \ / \ x \to \cos x$$

De la misma manera que analizamos la función seno podemos hacerlo con la función coseno y observar que cada 2π radianes los valores se repiten. De esta forma podemos asegurar que el período de la función coseno es 2π.



Gráfica de la función coseno: $f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = \cos x$



La tangente como función. Construcción de la gráfica

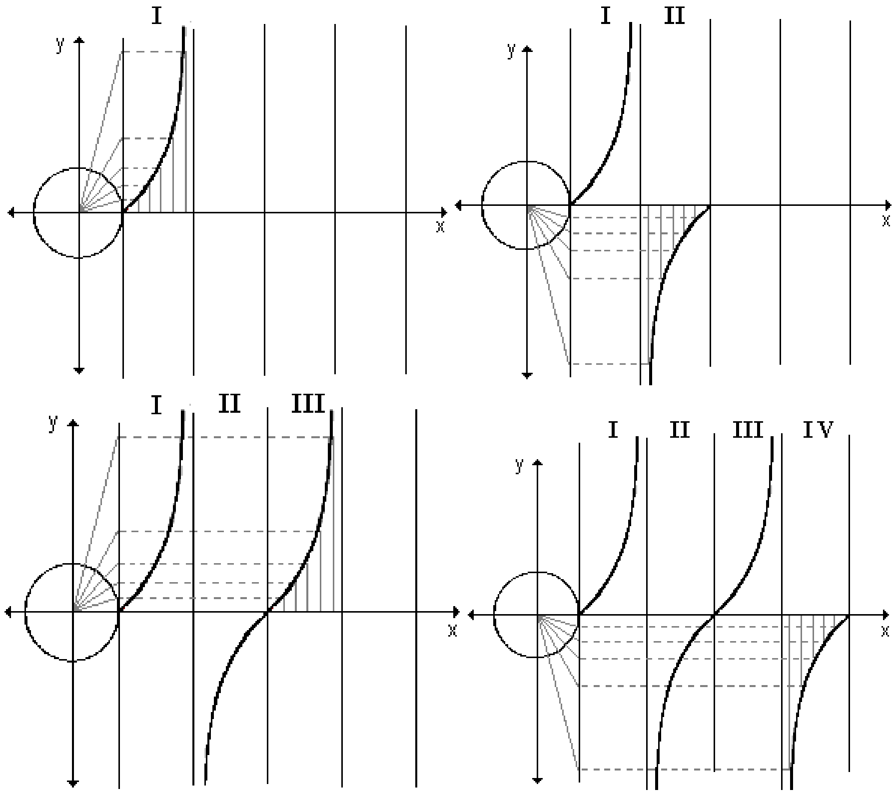
Si procedemos como en los casos anteriores y tenemos en cuenta la línea trigonométrica que representa a la tangente podemos realizar la gráfica en los cuatro cuadrantes.

En el primer cuadrante a medida que el ángulo crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$, los valores de la tangente crecen indefinidamente. La función es creciente y sus valores son positivos.

En el segundo cuadrante a medida que el ángulo aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π, los valores crecen negativamente hacia 0. La función es creciente pero sus valores negativos.

En el tercer cuadrante a medida que el ángulo crece de π a $\frac{3}{2}\pi$, los valores crecen indefinidamente y vuelven a ser los mismos que para los ángulos del primer cuadrante.

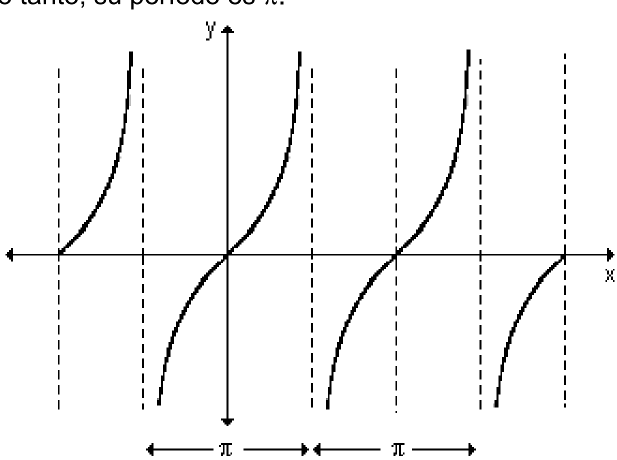
Mientras que en el cuarto cuadrante los valores de la tangente son los mismos que en el segundo cuadrante y, por lo tanto, la función es creciente y sus valores son negativos.



Observamos que no presenta valores máximos ni mínimos. Teniendo en cuenta lo anterior y pensando que la tangente no está definida para los valores de $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k∈Z, podemos definirla como función de la siguiente manera:

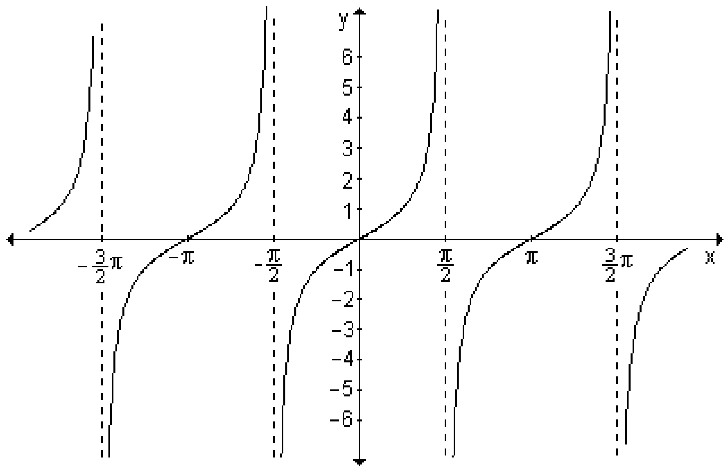
$$f : R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,/\, k \in Z\right\} \rightarrow R \,/\; x \rightarrow \text{tg } x$$

Observamos que la función tangente repite los valores cada intervalo de π radianes, por lo tanto, su período es π.



Gráfica de la función tangente

Si definimos $f : R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} / k \in Z\right\} \rightarrow R \;/\; f(x) = \text{tg } x$, su representación gráfica resulta:



Funciones trigonométricas inversas

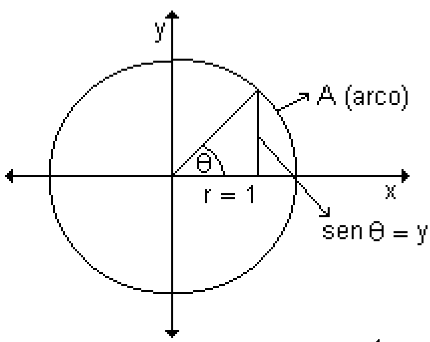
Analizaremos la existencia de las funciones inversas de las funciones trigonométricas.

Supongamos que sen $\alpha = \frac{1}{2}$. Esto significa que α representa cualquier ángulo cuyo seno vale $\frac{1}{2}$. Es decir, α puede tomar los valores 30°, 150°, 390°, 510°, etc. Teniendo en cuenta la notación matemática podemos escribir:

$$30° = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad\qquad 150° = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

En general $y = \text{sen}^{-1}x$ es la inversa de $y = \text{sen } x$. Si consideramos la circunferencia trigonométrica observamos que a todo ángulo medido en radianes le corresponde un único arco de circunferencia.

Geométricamente:



θ es el ángulo cuyo seno vale y

A es el arco de circunferencia cuyo seno vale y, es decir, A = arc sen y

Pero, por la medida en radianes, $\theta = A$ y de aquí $\theta = \text{arc sen } y$.

De la misma manera $y = \cos^{-1}x$; $y = \text{tg}^{-1}x$ son las inversas de $y = \cos x$ e $y = \text{tg } x$ respectivamente.

Como todas las funciones son periódicas y ninguna es inyectiva, sus inversas no son funciones. Haciendo restricciones en sus dominios y conjuntos de llegada se logra que las inversas también resulten funciones.

Función seno

Definición: $f : R \to R$
$x \to \text{sen } x$

Sus características son:

- es periódica de período 2π ya que sen $x =$ sen $(x + 2k\pi)$, $k \in Z$,
- es impar sen $(x) = -$sen $(-x)$. Su gráfica es simétrica con respecto al origen,
- no es inyectiva,
- no es sobreyectiva pues el conjunto de imágenes es: $\{x / x \in R \wedge -1 \le x \le 1\}$.

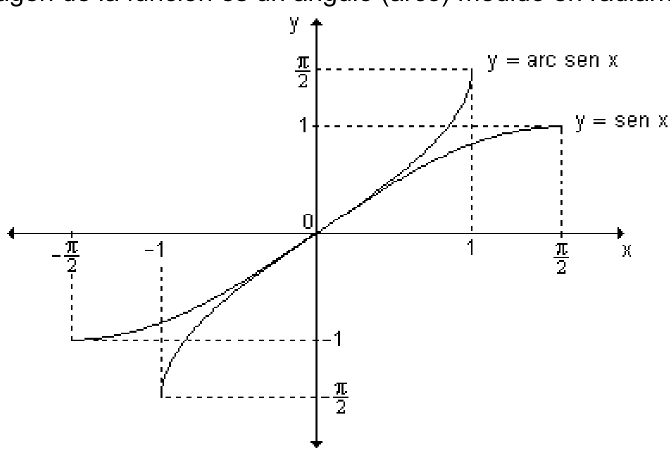
La función así definida no es biyectiva y por lo tanto no admite inversa. Para que lo sea, se debe redefinir haciendo una restricción del dominio y conjunto de llegada.

Si consideramos: $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ / $x \to \text{sen } x$ es una función biyectiva y, por lo tanto, admite inversa que se conoce como *la función arco seno*.

Función arco seno

Definición: $g : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ / $g : x \to \text{arcsen } x$

Se lee: la imagen de la función es un ángulo (arco) medido en radianes.



Función coseno

Definición: $f : R \to R$
$x \to \cos x$

Sus características son:

- es periódica de período 2π ya que $\cos x = \cos (x + 2k\pi)$, $k \in Z$,
- es par $\cos (x) = \cos (-x)$. Su gráfica es simétrica con respecto al eje y,
- no es inyectiva,

- no es sobreyectiva pues el conjunto de imágenes es: $\{x / x \in R \wedge -1 \leq x \leq 1\}$.

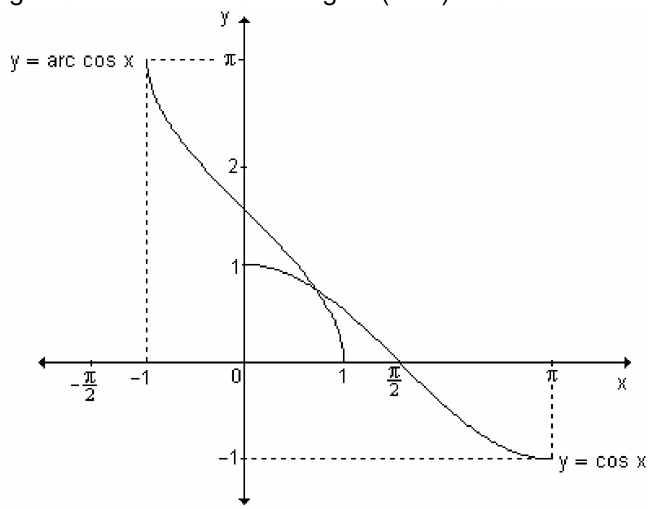
La función así definida no es biyectiva. Para que lo sea, se debe redefinir haciendo una restricción del dominio y conjunto de llegada.

Si consideramos: f : [0; π]→ [–1, 1] / x → cos x, la función coseno es biyectiva y, por lo tanto, admite inversa y es *la función arco coseno*.

Función arco coseno

Definición. g : [–1, 1] → [0; π] / g : x → arc cos x

Se lee: la imagen de la función es un ángulo (arco) medido en radianes.



Función tangente

Definición. f : $R - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) / k \in Z\right\} \rightarrow R$ / f : x → tg x

Sus características son:

- es periódica de período π ya que tg x = tg (x + kπ), k ∈ Z,
- es impar tg (x) = –tg (–x). Su gráfica es simétrica con respecto al origen,
- no es inyectiva,
- es sobreyectiva pues el conjunto de imágenes es el conjunto de los números reales.

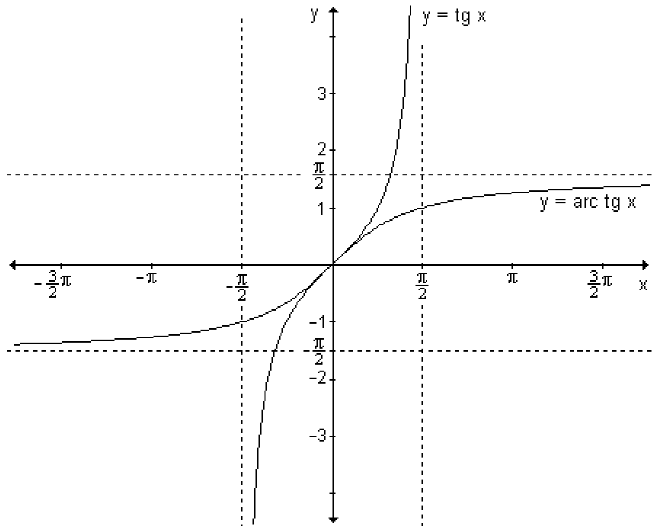
La función así definida no es biyectiva. Para que lo sea, se debe redefinir haciendo una restricción del dominio.

Si consideramos: f : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$ / x → tg x es biyectiva y admite como inversa la función arco tangente.

Función arco tangente

Definición: $g: R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ / $g: x \rightarrow$ arctg x

Se lee: la imagen de la función es un ángulo (arco) medido en radianes.



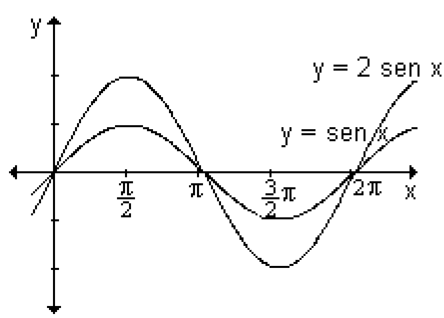
Transformaciones de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas y sus respectivas gráficas presentan algunas modificaciones si la variable independiente o la función se multiplican por algún número real, o a la variable independiente o a la función se le suma algún número real. Por ejemplo podemos pensar en la función y = a sen (bx + c). Analizaremos algunos aspectos relacionados con dichas modificaciones.

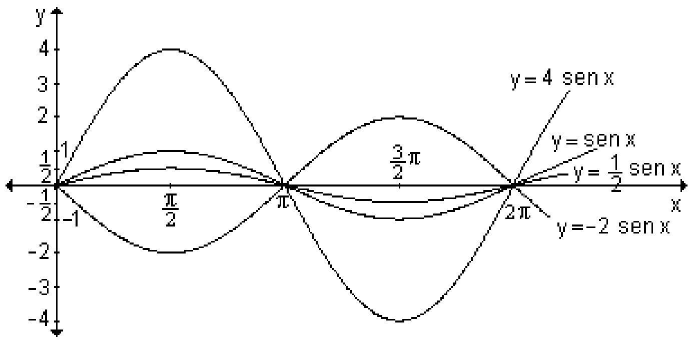
a) Amplitud

Consideremos la función f definida por $f: R \rightarrow R$ / f(x) = 2sen x y comparémosla con la función f(x) = sen x

Observamos que la nueva función considerada f(x) = 2.sen x tiene la misma forma sinusoidal, y el mismo período 2π que la función f(x) = sen x; lo único que cambia es la longitud de las ordenadas, es decir, el valor de la función f(x) = 2 sen x se duplica con respecto a f(x) = sen x.



Si consideramos las funciones f(x) = 4sen x, $f(x) = \frac{1}{2}$ sen x y f(x) = –2 sen x, los valores de la función f(x) = sen x se multiplican por 4 en el primer caso; se reducen a la mitad en el segundo caso, y la curva se invierte multiplicada por dos en el tercero.

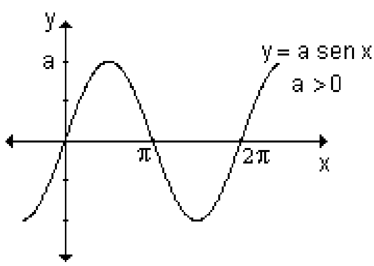


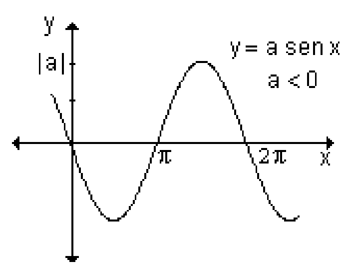
En general, si consideramos la función: f(x) = a sen x, con a ∈ R, podemos concluir que:

- Si a > 1 las ordenadas se amplían.
- Si 0 < a < 1 las ordenadas se reducen.
- Si a < 0 la curva se invierte.

Amplitud de una función trigonométrica, es el valor absoluto del coeficiente de la función. $|a|$ = amplitud

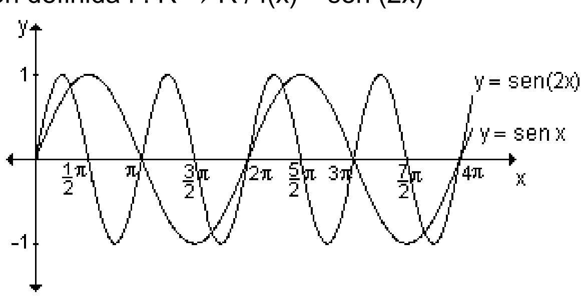
Gráficamente:





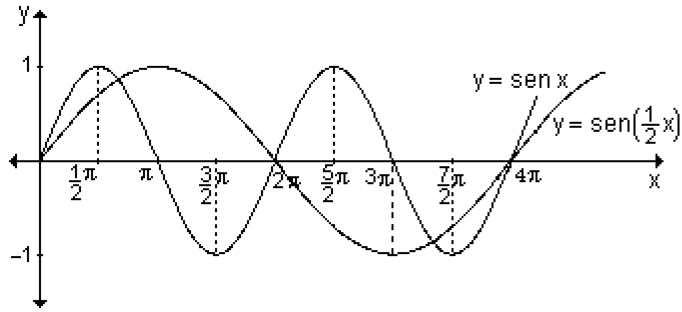
b) Período

Sea f una función definida f : R → R / f(x) = sen (2x)



Observamos que la función considerada f(x) = sen (2x), tiene forma sinusoidal y la misma *amplitud* que la función f(x) = sen x; pero el período se ha reducido a π. En efecto, mientras x, en la función f(x) = sen (2x), toma valores comprendidos entre 0 y π, la variable (2x) toma todos los valores entre 0 y 2π; por lo tanto, la función f(x)= sen (2x) repite sus valores cada π unidades; es decir, su período es π.

Consideremos ahora la función f(x)= sen $\left(\frac{1}{2}x\right)$. La variable $\left(\frac{1}{2}x\right)$ debe recorrer todos los valores comprendidos entre 0 y 2π, por lo cual x debe tomar valores entre 0 y 4π.



La función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ repite sus valores cada 4π unidades. Su período es 4π.

En general, si consideramos la función f(x) = sen(bx), con b ∈ R podemos concluir que el *período* P de la función f está dado por $P = \frac{2\pi}{|b|}$.

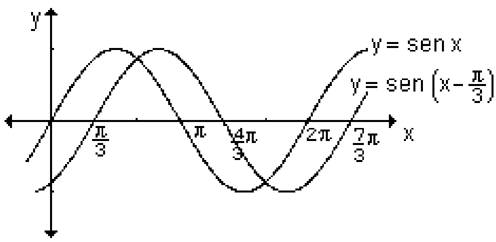
- Si f(x) = sen (bx) y b es un número positivo mayor que uno, el período $\frac{2\pi}{b}$ es pequeño y las senoides (u ondas del seno) están cercanas. Se puede observar que hay b ondas de seno en el intervalo [0, 2π].
- Si b es un número positivo pero menor que uno, el período $\frac{2\pi}{b}$ es grande y las ondas están alejadas unas de otras. En el intervalo [0,2π] entran b ondas de seno.
- Si b < 0 podemos usar el hecho de que sen (–x) = – sen x.

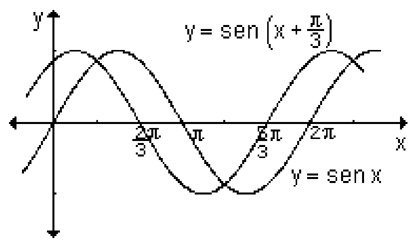
c) Fase

Investigamos ahora la familia de funciones definida de la siguiente forma:

f: R → R / f(x) = sen (x – c), donde c es un número real.

Consideremos dos funciones: f (x) = sen (x – $\frac{\pi}{3}$) y f(x) = sen (x + $\frac{\pi}{3}$) y tracemos sus gráficas.





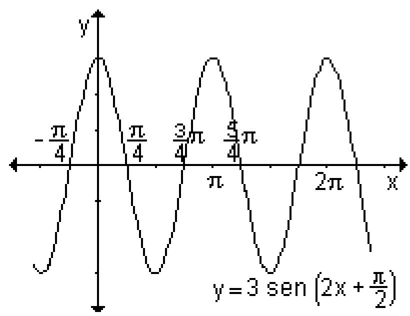
La gráfica de $f(x)=\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ está desplazada $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de la función f(x) = senx.
La gráfica de $f(x)=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ está desplazada $\frac{\pi}{3}$ unidades a la izquierda en relación con la gráfica de la función f(x) = senx.

En general, la función f(x) = sen(x − c), tiene una gráfica desplazada c unidades hacia la derecha si c > 0, y a la izquierda si c < 0.

La *fase* de una función trigonométrica es la constante |c|. La curva está desfasada c unidades a la derecha si c > 0 y c unidades a la izquierda si c < 0.

Ejemplo: Consideremos la gráfica de la función $f: R \to R / x \to 3\ \text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

La expresión $f(x) = 3\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ se puede escribir $f(x) = 3\text{sen}2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Observamos que la amplitud de la onda es 3, el valor de b es 2 por lo que el período es $\frac{2\pi}{2}=\pi$ y en el intervalo [0,2π] entran 2 ondas de seno.



La gráfica de la función está desfasada $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda con respecto a la gráfica de y = sen x.
Para obtener la onda senoidal despejamos x de:

$$0 \le 2x+\frac{\pi}{2} \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le 2x \le 2\pi-\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{3}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3}{4}\pi$$

Esto muestra que el corrimiento de fase o desfasamiento de la onda es $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda.

Si analizamos la gráfica de la función f(x) = a sen b(x − c), podemos concluir que:

- la amplitud es | a |.
- La fase es |c|.
- se obtiene una onda senoidal si: $0 \le b(x-c) \le 2\pi$

$$0 \le x-c \le \frac{2\pi}{b} \quad (b>0)$$

$$c \le x \le c+\frac{2\pi}{b}$$

Esto significa que un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $\left[c\,,\ c+\dfrac{2\pi}{b}\right]$.

- el período es $\dfrac{2\pi}{b}$.

Un análisis similar se puede realizar para b < 0.

Nota: De la misma manera que analizamos las diferentes modificaciones para la función seno, lo podemos hacer para la función coseno.

Ejemplo: Teniendo en cuenta la gráfica de la función $y = \cos x$ indique el período, la amplitud y el desfasamiento de la función $y = 3\cos\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ y represéntela gráficamente.

Escribiremos la ecuación de la función que debemos analizar de la forma $y = a\cos b(x - c)$. Para ello sacamos factor común $\dfrac{1}{2}$ del argumento de la función y obtenemos $y = 3\cos\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Sabemos que:

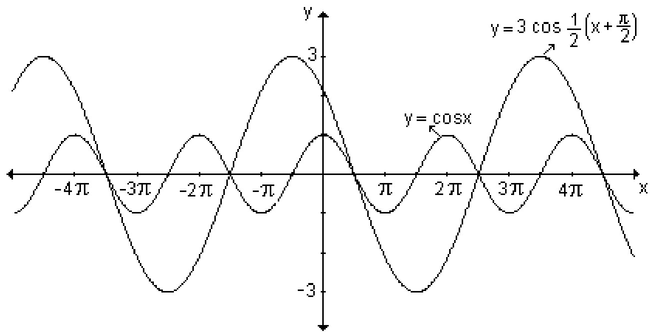
- el período está dado por $\dfrac{2\pi}{|b|}$, por lo tanto para esta función es $\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{2}\right|} = 4\pi$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ entra $\dfrac{1}{2}$ onda de seno.
- la amplitud es $|a| = 3$. Esto quiere decir que los valores de la función $y = 3\cos\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ se triplican con respecto a la función $y = \cos x$.
- el desfasamiento es de $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.

Para obtener la onda cosenoidal despejamos x de la expresión:

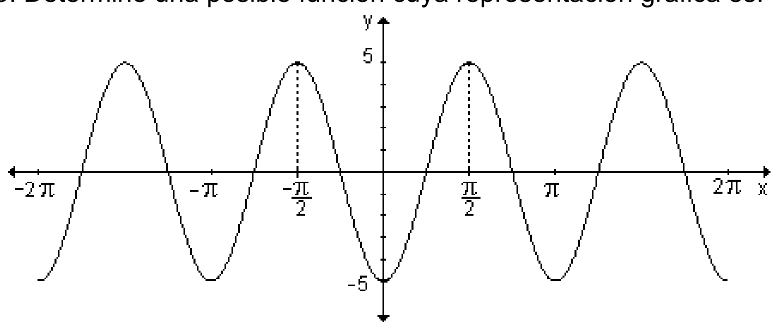
$$0 \le \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4} \le 2\pi \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{4} \le \frac{1}{2}x \le 2\pi-\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{7}{2}\pi.$$

Esto confirma que el corrimiento de fase o desfasamiento de la onda es $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.

La gráfica es:



Ejemplo: Determine una posible función cuya representación gráfica es:



La gráfica se puede ver como una función seno o una función coseno. Consideremos una función de la forma $y = a \text{ sen } b(x - c)$.
Podemos observar en la gráfica que

- la amplitud de la onda es $|a| = |5| = 5$,
- el período es π del cual podemos obtener el valor de b.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

- el desfasamiento con respecto a la función $y = \text{senx}$ es $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la derecha, por lo tanto $c = \frac{\pi}{4}$.

Reemplazando los parámetros encontrados en la función obtenemos:
$y = 5 \text{ sen}2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ o sea $y = 5 \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Si tomamos como base la función cuya expresión es $y = a \cos b(x - c)$, la amplitud y el valor de b no varían con respecto al análisis anterior y observamos que la gráfica está desfasada con respecto a $y = \cos x$, $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda, por lo tanto $c = -\frac{\pi}{2}$, resultando la ecuación $y = 5 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ o $y = 5 \cos(2x + \pi)$.

EJERCICIOS

1) Teniendo en cuenta la gráfica de la función y = cos x, represente las siguientes funciones:

a) $y = 2 \cos x$ **b)** $y = -2 \cos x$ **c)** $y = \frac{1}{2} \cos x$

2) Teniendo en cuenta la gráfica de la función y = cos x, represente las siguientes funciones:

a) $y = \cos (2x)$ **b)** $y = \cos \left(\frac{1}{2}x\right)$ **c)** $y = \cos (3x)$

3) Teniendo en cuenta la gráfica de la función y = tg x, represente las siguientes funciones:

a) $y = \text{tg}\,(x + \pi)$ **b)** $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

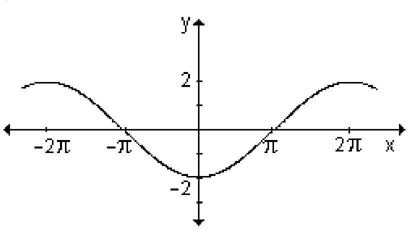
4) Para las siguientes gráficas determine:

a) la amplitud y el período;

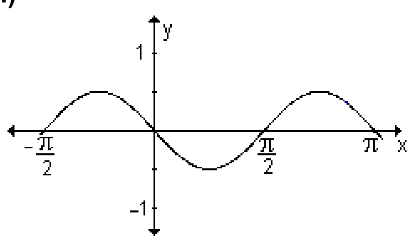
b) una ecuación para la gráfica en la forma y = a sen b(x – c);

c) el desfasamiento.

i)

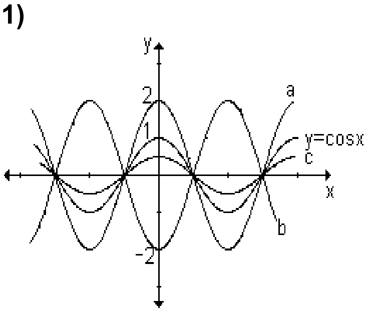


ii)

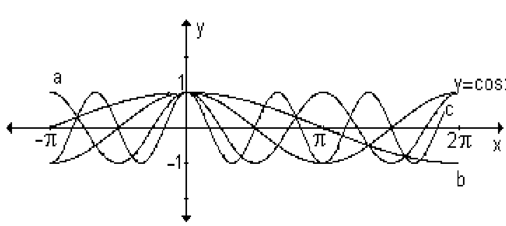


RESPUESTAS

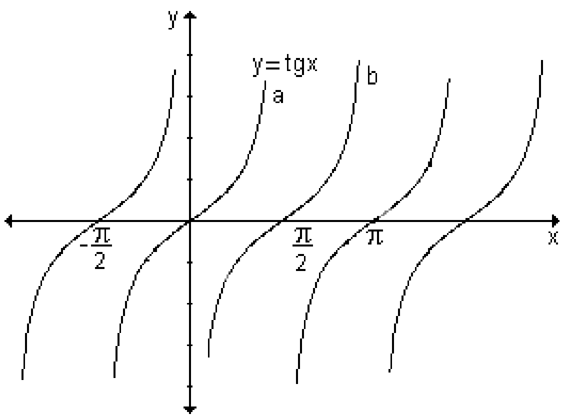
1)



2)



3)



4)i)a) Amplitud 2; período 4π

b)

$$y = 2\text{sen}\frac{1}{2}(x - \pi) = 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

c) π unidades hacia la derecha

ii)a) Amplitud $\frac{1}{2}$; período π

b)

$$y = \frac{1}{2}\text{sen}2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\text{sen}(2x + \pi)$$

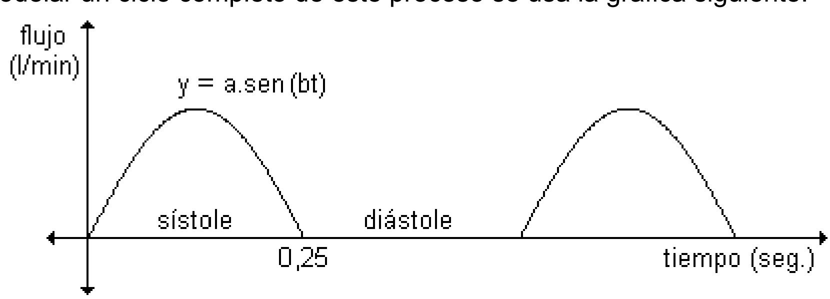
c) $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda

Vimos que las funciones trigonométricas seno, coseno y las que se obtienen a partir de ellas, tienen un comportamiento cíclico y, por lo tanto, son funciones periódicas.

En la naturaleza existen muchos fenómenos que se repiten cíclicamente: el día y la noche, las fases lunares, los momentos de marea alta y baja, las estaciones, el pulso de una persona, las ondas sonoras de un instrumento musical, los latidos del corazón, el movimiento de una molécula de agua en las olas del mar, el voltaje de una corriente alterna.

Problema

La acción de bombeo del corazón consiste en la fase sistólica o sístole en la que la sangre pasa del ventrículo izquierdo a la aorta y la fase diastólica o diástole durante la cual se relaja el músculo cardíaco. Para modelar un ciclo completo de este proceso se usa la gráfica siguiente:



Para un individuo la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y corresponde a una intensidad máxima de 8 litros por minuto (l/min). Encuentre a y b.

Como la intensidad máxima es 8 deducimos que el valor de a, es decir la amplitud es 8, $y = 8$ sen (bt).

¿Cómo se puede hallar el valor de b?

Para calcular b tenemos que tener en cuenta el período de la función seno representada gráficamente. El período $\frac{2\pi}{b}$ será $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{2\pi}{b} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $b = 4\pi$.

Luego $y = 8\ \mathrm{sen}(4\pi t)$ describe la función durante la fase sistólica.

Problema

En un ecosistema de presa - depredador, el número de depredadores y el número de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con zorros como depredadores y conejos como presa, la población de conejos c varía según la ley $c = 1000 + 150\ \mathrm{sen}(2t)$, donde t está medido en años después del 1 de enero de 1960.
El número de zorros z satisface la expresión $z = 200 + 50\ \mathrm{sen}\ (2t - 0{,}7)$.
a) Indique cuál es la máxima población de conejos y de zorros.
b) ¿Cuándo alcanzaron por primera vez ambas poblaciones estas cantidades máximas?
c) ¿Cuáles fueron las poblaciones el 1 de enero de 1964 ?

a) Teniendo en cuenta la expresión $c = 1000 + 150\ \mathrm{sen}(2t)$ y dado que $|\mathrm{sen}(2t)|$ se mantiene menor o igual a uno, el valor máximo de sen(2t) es 1. De aquí, 150.sen(2t) alcanzará como máximo el valor 150 y sumadas las 1000 unidades queda establecida como población máxima 1150 conejos.
Siguiendo el mismo razonamiento con la expresión $z = 200 + 50\ \mathrm{sen}(2t - 0{,}7)$ resulta que la población de zorros alcanzará un máximo de 250.

b) Si la población de conejos asciende a 1150 resulta: $1150 = 1000+150\ \mathrm{sen}(2t)$ y despejando t resulta:

$\frac{1150 - 1000}{150} = \mathrm{sen}(2t)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{sen}(2t) = 1$ $\Rightarrow$ $2t = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $t = \frac{\pi}{4}$ años $\approx$ 0,78 años $\cong$ 287 días.

Para los zorros resulta: $250 = 200 + 50\ \mathrm{sen}\ (2t - 0{,}7)$ y despejando

$$\frac{250 - 200}{50} = \mathrm{sen}\ (2t - 0{,}7) \Rightarrow \mathrm{sen}\ (2t - 0{,}7) = 1 \Rightarrow 2t - 0{,}7 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + 0{,}7}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}35 \approx 414 \text{ días.}$$

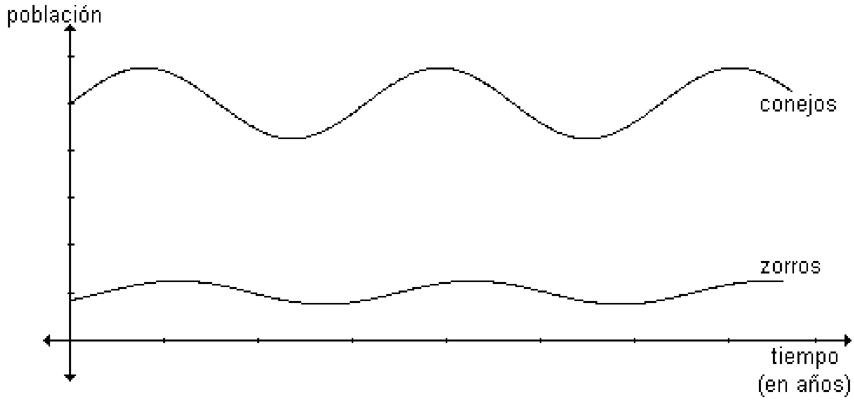
Por lo tanto, a los 287 días la población de conejos alcanzará su valor máximo mientras que la de zorros lo hará a los 414 días a partir del 1 de enero de 1960.

c) Los valores de las poblaciones al 1 de enero de 1964 se obtienen para $t = 4$

$c = 1000+150.\ \mathrm{sen}\ (2.4) \cong 1148$ $\qquad$ $z = 200 + 50\ \mathrm{sen}\ (2.4 - 0{,}7) \approx 242$

La población de conejos ascenderá aproximadamente a 1148 individuos y la de zorros a 242.

Si representamos la variación de las poblaciones a lo largo de los años en un mismo sistema cartesiano resulta:



Problema

En el proceso de la respiración se alterna por períodos de inhalación y exhalación, que se pueden describir por la función $f(t) = 0{,}75 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ siendo t el tiempo medido en segundos y f(t) el caudal de aire en el tiempo t, medido en litros por segundo.

a) Halle el tiempo en el que se completa un ciclo, una exhalación y una inhalación.

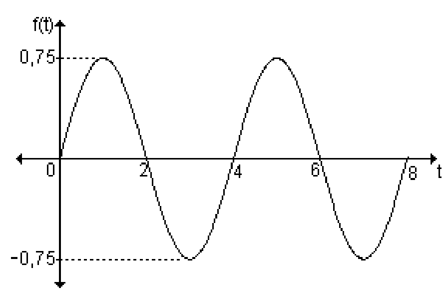
b) Realice el gráfico de la función para dos ciclos.

c) Determine los lapsos en que es positivo y negativo para los dos ciclos.

d) Determine los instantes en que el caudal de aire es nulo, máximo y mínimo durante dos ciclos.

a) El período es $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$. Entonces un ciclo completo se completa en 4 segundos, una exhalación en dos segundos y una inhalación en dos segundos.

b) La gráfica para dos ciclos completos es:



c) El caudal de aire es positivo entre los dos primeros segundos y entre los 4 y los 6 segundos, es decir en los intervalos (0, 2) y (4, 6).

El caudal de aire es negativo entre los dos y cuatro segundos y entre los seis y los ocho6 segundos, es decir en los intervalos: (2, 4) y (6, 8).

d) El caudal de aire es nulo a los 0, 2, 4, 6 y 8 segundos.

El caudal de aire es máximo al segundo y a los cinco segundos.
El caudal de aire es mínimo a los tres segundos y a los siete segundos.

Problema

El voltaje v de un contacto eléctrico doméstico se expresa en función del tiempo t (en segundos) como $v = v_0 \cos(120\pi\, t)$.

a) ¿Cuál es el período de la oscilación?

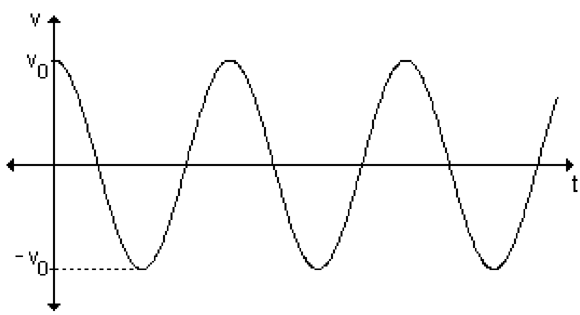
b) ¿Qué representa v_0?

c) Trace una gráfica de v.

a) El período se determina resolviendo $\frac{2\pi}{|b|}$. Como en este caso $b = 120\pi$ resulta que el período de oscilación es $\frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60}$.

b) v_0 representa el voltaje máximo alcanzado por un contacto eléctrico doméstico.

c) Como t representa el tiempo, la gráfica la realizamos en el intervalo $[0, \infty)$.



Las funciones trigonométricas son muy importantes en el conjunto de las funciones periódicas. Cualquier fenómeno cíclico que pueda representarse por medio de una función periódica admite su expresión como combinación lineal de las funciones seno y coseno. Lo que se debe hacer es encontrar una función trigonométrica que tenga un comportamiento aproximadamente igual al de la función periódica que se quiere estudiar.

El matemático Joseph Fourier (1758 –1830) hizo un gran aporte a la matemática contemporánea demostrando que cualquier función periódica podría ser aproximada mediante sumas de funciones trigonométricas. Este aporte posibilitó un gran avance tecnológico contribuyendo al desarrollo de la radio, la televisión, el radar y numerosos instrumentos que permiten estudiar el cuerpo humano, el espacio, el sonido, los fenómenos meteorológicos, etc.

Ecuaciones trigonométricas

En muchos casos interesa resolver ecuaciones donde aparecen las relaciones trigonométricas.

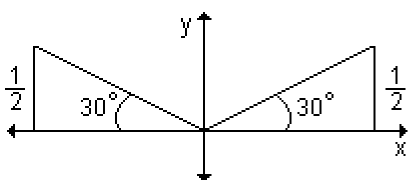
Ejemplo: Encuentre los valores de x que verifican la ecuación trigonométrica $\text{sen}\,(6x) = \frac{1}{2}$.

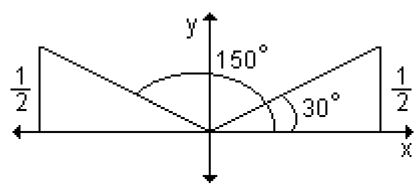
Despejamos el argumento aplicando la inversa correspondiente:

$6x = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Con la calculadora obtenemos siempre una solución, pero debemos buscar para qué otros ángulos se verifica la igualdad.

Por ejemplo en este caso obtendremos $\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) = 30º$. Debemos recordar que el seno es positivo también en el segundo cuadrante, por lo tanto tomará el mismo valor en $180º – 30º = 150º$.





Además debemos tener en cuenta que el seno toma el mismo valor en todos los ángulos congruentes a los obtenidos.

$6x = 30º + 360ºk,\ k \in Z$ o bien $6x = 150º + 360ºk,\ k \in Z$

Despejando x resulta $x = \dfrac{30º + 360º\,k}{6},\ k \in Z$ o bien $x = \dfrac{150º + 360º\,k}{6},\ k \in Z$

$x = 5º + 60ºk,\ k \in Z$ o bien $x = 25º + 60ºk,\ k \in Z$

Verificamos sustituyendo en la ecuación original dándole, a modo de ejemplo, cualquier valor a k, en este caso $k = 0$.

Si $x = 5º \Rightarrow \text{sen}(6.5º) \overset{?}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}(30º) \overset{?}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

Si $x = 25º \Rightarrow \text{sen}(6.\ 25º) \overset{?}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\,(150º) \overset{?}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

Ejemplo: Encuentre los valores de α que verifican la ecuación

$$2\cos^2\alpha - 7\cos\alpha + 3 = 0$$

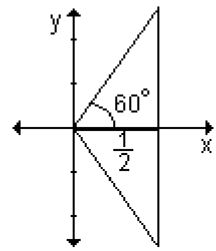
Es una ecuación cuadrática donde la variable es la función trigonométrica coseno de un ángulo. Podemos sustituir $\cos\alpha = z$ y resulta: $2z^2 - 7z + 3 = 0$

Aplicando la fórmula resolvente obtenemos dos soluciones: $z_1 = 3$, $z_2 = \frac{1}{2}$

Teniendo en cuenta que $z = \cos\alpha$ entonces:

- $\cos\alpha = 3$ no es posible pues $-1 \le \cos\alpha \le 1$,
- $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Si calculamos el arc cos $\left(\frac{1}{2}\right)$ obtenemos 60º y como el coseno es positivo en el primer y en el cuarto cuadrante podemos escribir: $\alpha_1 = 60°$ ó $\alpha_2 = 360° - 60° = 300°$



Las soluciones de la ecuación trigonométrica planteada son los ángulos de 60° y 300° y sus congruentes, o sea:

$\alpha_1 = 60° + 360ºk$ ó $\alpha_2 = 300° + 360ºk$, $k \in Z$

Para verificar sustituimos dos valores hallados en la ecuación original:

Si $\alpha_1 = 60° \Rightarrow 2\cos^2 60° - 7\cos 60° + 3 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7.\frac{1}{2} + 3 \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow 2.\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 3 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

Si $\alpha_2 = 300° \Rightarrow 2\cos2\ 300° - 7\cos 300° + 3 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7.\frac{1}{2} + 3 \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow 2.\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 3 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

EJERCICIO

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ **b)** $\text{sen } x = -\cos x$

c) $\text{tg}(3x) = 1$ **d)** $2.\text{sen}(3x) = 1$

RESPUESTAS

a) $x = 210° + n.360°$ ó $x = 330° + n.360°$, $n \in Z$
b) $x = 135° + n.360°$ ó $x = 315° + n.360°$, $n \in Z$
c) $x = 15° + n.120°$ ó $x = 75° + n.120°$, $n \in Z$
d) $x = 10° + n.120°$ ó $x = 50° + n.120°$, $n \in Z$

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) Teniendo en cuenta la gráfica de y = sen x represente las siguientes funciones.

a) $y = 3\text{sen } x$ **b)** $y = \frac{1}{3}\text{sen } x$ **c)** $y = -\frac{1}{3}\text{sen } x$

d) $y = \text{sen}(3x)$ **e)** $y = \text{sen }(-3x)$ **f)** $y = \text{sen}(\frac{1}{3}x)$

g) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **h)** $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$

2) Represente gráficamente las siguientes funciones teniendo en cuenta la gráfica de y = cos x

a) $y = 4\cos x$ **b)** $y = \frac{1}{4}\cos x$ **c)** $y = -\frac{1}{4}\cos x$

d) $y = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$ **e)** $y = \cos(4x)$ **f)** $y = \cos(-4x)$

g) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ **h)** $y = \cos(2x) + 3$

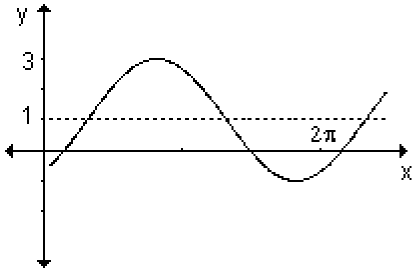
3) Usando transformaciones de la función y = tg x, represente gráficamente:

a) $y = \text{tg}(2x)$ **b)** $y = \text{tg}(-2x)$ **c)** $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $y = \frac{1}{2}\text{tgx}$

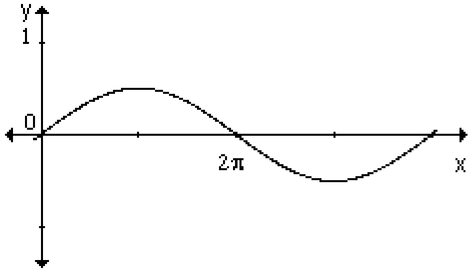
4) Diga qué figura corresponde a la gráfica de y = h + a sen c(x – k) si:

a) 0 < a < 1; h < 0, k = 0, c = 1
b) 0 < a < 1; h = 0, k = 0, c < 1
c) a < –1, h = 0, k < 0, c = 1
d) a > 1, h > 0, k > 0, c = 1

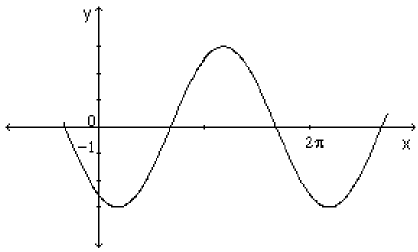
i)



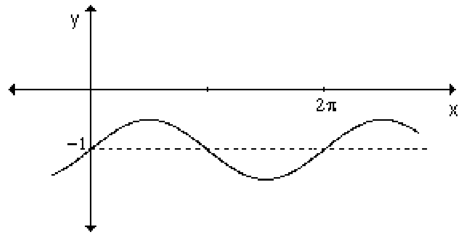
ii)



iii)



iv)



5) Siendo f(x) = a cos c (x – k) + h, esboce la gráfica correspondiente para los valores dados de a, h, c, k :

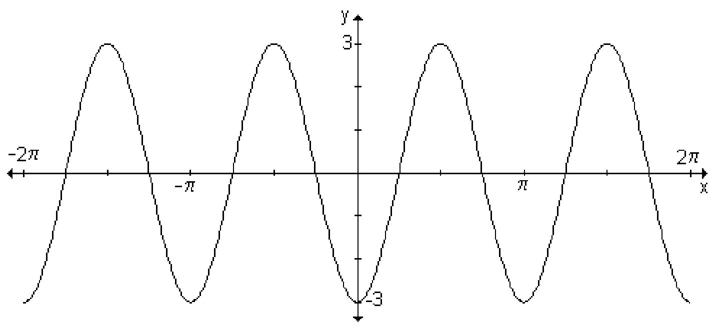
a) $0 < a < 1$, $c > 1$, $h = 1$, $k > 0$

b) $a > 1$, $0 < c < 1$, $h > 0$, $k < 0$

c) $a = 1$, $c > 1$, $h < 0$, $k > 0$

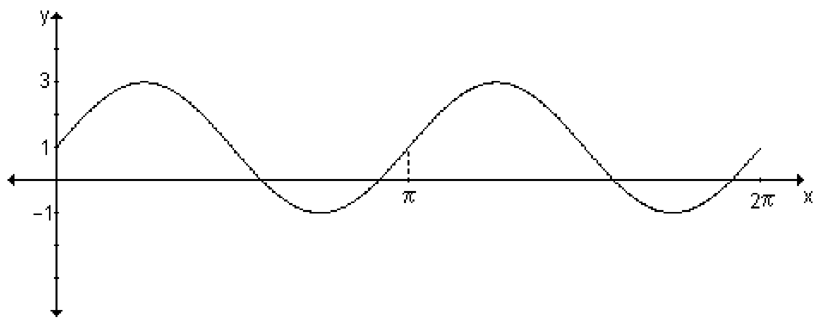
6) Grafique una onda completa de la función $y = 3 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$. Indique período, amplitud y fase.

7) **a)**Escriba la ley para que resulte la gráfica de la función.



b) Determine amplitud, período y fase.

8) Defina la ley cuya gráfica se da a continuación e indique período, fase y amplitud.



PROBLEMAS DE APLICACIÓN 3.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) Los científicos han descubierto un planeta en el cual las temperaturas se repiten cíclicamente y aproximaron la temperatura en función de los meses transcurridos por la ley $f(x) = 5 + 10 \text{ sen } x$.

a) ¿Cuál es la temperatura máxima del planeta?
b) ¿Cuál es la temperatura mínima del planeta?
c) ¿Cada cuánto tiempo se repiten esas temperaturas?
d) ¿Cuándo la temperatura llega a los 5º?

2) La función que da la variación de temperatura diaria en grados centígrados en cierta región está dada por la ley $f(t) = 22 + 5 \text{ sen } \frac{\pi}{12}(t-6)$, donde t es el tiempo en horas.

a) ¿Qué tipo de función es?
b) Encuentre la temperatura a las 6, 12 y 18 horas.
c) ¿Cuál es la temperatura máxima diaria que se registra?
d) ¿Cuál es la temperatura mínima diaria que se registra?
e) ¿Cada cuántas horas se repite la onda sinusoidal?

3) El proceso rítmico de respiración consiste en períodos alternos de aspiración y espiración. Normalmente un ciclo completo dura 5 segundos. Si f(t) representa el flujo de aire en el momento t (en litros por segundo) y el flujo máximo de aire es de 0,6 l/seg, establezca una fórmula que tenga la forma $f(t) = a \text{ sen } (bt)$ y ajuste a esta información.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 3.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) El período de la función $y = \text{sen } x$ es:

a) π **b)** 2π **c)** $\frac{\pi}{2}$ **d)** ninguno de los anteriores

2) Para que la función $y = \cos x$ admita inversa, debe considerarse definida de:

a) $(0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$ **b)** $(0, \pi) \rightarrow [-1, 1]$
c) $[0, \pi] \rightarrow (-1, 1)$ **d)** $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

3) La amplitud de la función $y = -3\text{sen } x$ es:

a) 3 **b)** –3 **c)** 6 **d)** –6

4) El período de la función $y = \text{sen}(\frac{1}{3}x)$ es:

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** 2π **c)** 6π **d)** $\frac{2}{3}\pi$

5) La gráfica de la función $y = \text{sen}(2x - \pi)$ está desfasada:

a) π unidades hacia la derecha con respecto a la gráfica de $y = \text{sen } x$.

b) π unidades hacia la izquierda con respecto a la gráfica de $y = \text{sen } x$.

c) $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha con respecto a la gráfica de $y = \text{sen } x$.

d) $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda con respecto a la gráfica de $y = \text{sen } x$.

6) La gráfica de la función $y = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ tiene:

a) amplitud de onda 2, período $\frac{2}{3}\pi$ y está desfasada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda con respecto a la gráfica de $y = \cos x$.

b) amplitud de onda 2, período $\frac{2}{3}\pi$ y está desfasada $\frac{\pi}{6}$ unidades hacia la izquierda con respecto a la gráfica de $y = \cos x$.

c) amplitud de onda 2, período $\frac{3}{2}\pi$ y está desfasada $\frac{\pi}{6}$ unidades hacia la derecha con respecto a la gráfica de $y = \cos x$.

d) amplitud de onda 6, período $\frac{2}{3}\pi$ y está desfasada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda con respecto a la gráfica de $y = \cos x$.

7) La gráfica de la función $y = \text{tg } x + 1$ se obtiene desplazando la función $y = \text{tg} x$

a) 1 unidad hacia arriba.
b) 1 unidad hacia abajo.
c) 1 unidad hacia la derecha.
d) 1 unidad hacia la izquierda.

AUTOEVALUACIÓN Nº8 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

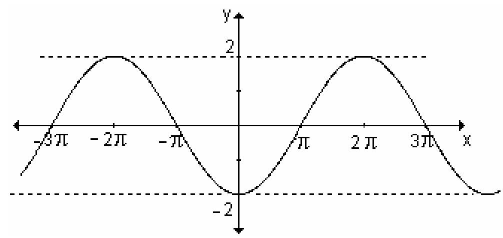
1) Dada la gráfica de la función $y = \cos x$ grafique e indique la amplitud, el período y la fase de la función $g(x) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Represente gráficamente la función $f(x) = 2 + 3\text{sen}(x + \pi)$ tomando como base la función $y = \text{sen } x$. Determine el período, la amplitud y el desfasamiento.

3) La función $g(t) = 20 + 7\,\text{sen}\frac{\pi}{12}(t - 6)$ indica la variación de la temperatura diaria (en grados centígrados) en una determinada región, donde t es el tiempo (en horas)

a) ¿Qué tipo de función es?
b) Encuentre la temperatura a las 12 y a las 18 horas.
c) ¿Cuál es la temperatura máxima durante el día?
d) ¿Cuál es el desfasamiento de la función?

4) Considerando como base la función $y = \text{sen } x$, escriba la ley que corresponde a la gráfica de la función:



Determine la amplitud, el período y el desfasamiento.

5) La corriente e (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t (t en segundos) es e = 220.sen 60πt, donde t ≥ 0 está expresado en segundos.

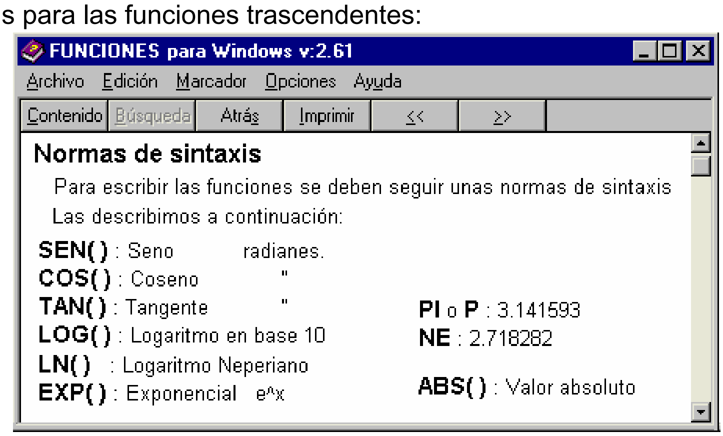
a) Realice la gráfica para dos períodos consecutivos.

b) Determine el período, la amplitud y la fase.

GUÍA DE ESTUDIO Transformaciones de las FUNCIONES ESCALARES TRASCENDENTES

Las siguientes actividades se resuelven utilizando **FUNCIONES** para Windows versión 2.7.61.

A continuación, se muestra la pantalla del menú de ayuda referida a las normas de sintaxis para las funciones trascendentes:



FUNCIÓN EXPONENCIAL

Actividad 1:

Grafique en un mismo sistema cartesiano los pares de funciones:

a)i) $f(x) = 3^x$ **b)i)** $g(x) = 2^x$ **c)i)** $h(x) = e^x$

ii) $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **ii)** $j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **ii)** $k(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

Nota. Para representar gráficamente la función del inciso **c)** se debe escribir en el recuadro correspondiente a la función H(x): **exp(x)** y para el inciso **c)ii)** se debe escribir **1/ exp(x)**

Observe las gráficas anteriores y conteste:

Dominio D = {.........} Conjunto Imagen CI = {..........}

Para $a > 1$

- La gráfica es una función: ➲ creciente ➲ decreciente
  (tache lo que no corresponde)
- La ordenada al origen es y = ...

Para $0 < a < 1$

- La gráfica es una función: ➲ creciente ➲ decreciente
  (tache lo que no corresponde)
- La ordenada al origen es y = ...

Compare las gráficas de dos funciones donde los respectivos valores de a son recíprocos y obtenga conclusiones ....
....

Actividad 2:

Represente en un mismo sistema las siguientes funciones del tipo $y = k.a^x$ para los valores dados en cada caso

a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **b)** $g(x) = 2.\left(\frac{1}{4}\right)^x$ **c)** $h(x) = -3.\left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $i(x) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^x$ **e)** $j(x) = -\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^x$ **f)** $k(x) = -\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Complete:

Dominio D = {..........} Conjunto Imagen CI = {.........}

¿Cómo influye el parámetro k sobre la curva?

- Si $0 < k < 1$ ....

- Si $k > 1$ ....

- Si k es negativo ....

Actividad 3:

Represente en un mismo sistema las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$ **c)** $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1,5$

d) $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$ **e)** $j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$ **f)** $k(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 0,5$

Complete:

Dominio D = {..........} Conjunto Imagen CI = {.........}

Si en general, se representa con $y = a^x + h$ ¿Cómo influye el parámetro h en la función con respecto a $y = a^x$?

• Si h > 0 ....
• Si h < 0 ....

Actividad 4:
Represente gráficamente:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ **b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}$ **c)** $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

d) $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$ **e)** $j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$ **f)** $k(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

Complete:
Dominio D = {..........} Conjunto Imagen CI = {.........}

- Si a la variable x se le suman k unidades, la gráfica de $y = a^{x}$ se traslada ..... unidades hacia la ....

- Si a la variable x se le restan k unidades, la gráfica de $y = a^{x}$ se traslada .... unidades hacia la ....

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Actividad 1:
Represente la función $f(x) = \log_3 x$, y, en un mismo sistema $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Actividad 2:
Represente la función $f(x) = \log_4 x$, y, en un mismo sistema $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Nota: Para graficar cualquier función logarítmica cuya base no sea 10 o el número e, se debe usar la fórmula de cambio de base: $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\log x}{\log b}$.

Por ejemplo, para graficar $\log_3 x$, introduzca en el cuadro correspondiente a F(x): ln(x)/ln(3) o bien F(x): log(x)/log(3)

Complete:
Al representar la función $y = \log_a x$, $a > 0$ y $a \neq 1$
Si $0 < a < 1$

- La función es : ➲ creciente ➲ decreciente
  (tache lo que no corresponde)
- La abscisa al origen es x = ...

Si a > 1

- La función es : ➲ creciente ➲ decreciente
  (tache lo que no corresponde)
- La abscisa al origen es x = ...

Compare las gráficas de dos funciones donde los respectivos valores de a sean recíprocos y obtenga conclusiones.

....

....

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Actividad 1:

Considere como dominio al conjunto D = $[0, 2\pi]$ y conjunto imagen $[-1, 1]$ y grafique las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos x$ **b)** $g(x) = \cos(2x)$ **c)** $h(x) = \cos(3x)$

d) $i(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ **e)** $j(x) = \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$ **f)** $k(x) = \cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

En general, al graficar $y = \cos(cx)$

- Describa cómo influye el parámetro c en la curva

....

....

- Enuncie lo que sucede si c es negativo

....

....

Actividad 2:

Elija el dominio y conjunto imagen adecuado y grafique en un mismo sistema las funciones del tipo $y = a \cos x$

a) $f(x) = \cos x$ **b)** $g(x) = 2\cos x$ **c)** $h(x) = 3\cos x$

d) $i(x) = \frac{1}{2}\cos x$ **e)** $j(x) = -\frac{1}{2}\cos x$ **f)** $k(x) = -\frac{1}{3}\cos x$

Compare la gráfica de la función representada en **a)** con las de los otros incisos y extraiga conclusiones.

- Si $a > 0$

....

- Si $a < 0$

....

Actividad 3:

Grafique las funciones en un mismo sistema cartesiano:

a) $f(x) = \text{sen } x$ **b)** $g(x) = \text{sen}(x - \pi)$ **c)** $h(x) = \text{sen}(x - 2\pi)$

d) $i(x) = \text{sen}(x + \pi)$ **e)** $j(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$

Extraiga conclusiones

4) Con funciones de la forma $y = \text{sen}x + h$ realice un trabajo parecido al ejercicio 3 y extraiga conclusiones.

5) Elija una función $y = a\ \text{sen}[c(x - k)] + h$, con el dominio y conjunto de imágenes adecuado, y analice la influencia de los parámetros.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) **a)** Utilizando un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos, trace las gráficas de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números reales

$$y_1 = 3^x \qquad\qquad y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

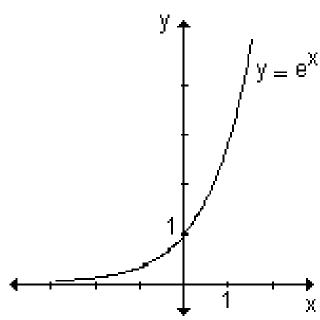
b) Obtenga, observando las gráficas, las características principales de cada una de las funciones anteriores (semejanzas y/o diferencias).

c) Determine dominio y conjunto de imágenes.

d) Indique si las funciones definidas en **a)** admiten o no inversa. Justifique su respuesta.

2) Utilizando la gráfica dada, trace una gráfica aproximada de las siguientes funciones:

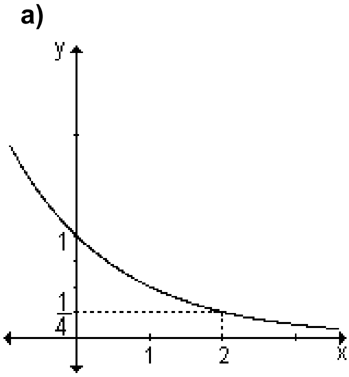
a) $y = e^x + 1$ **b)** $y = e^{x+1}$
c) $y = -e^x$ **d)** $y = e^{-x}$
e) $y = -e^{-x}$ **f)** $y = e^{|x|}$
g) $y = -e^{x-1}$ **h)** $y = 3 - e^{x-1}$



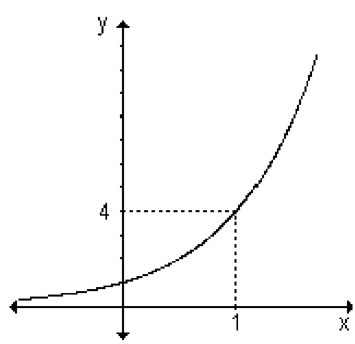
3) Para cada uno de los siguientes gráficos, calcule el valor de a en la función definida por

$f : R \to R \ / \ f(x) = a^x$; $a > 0$ y $a \neq 1$

a)



b)



4) Determine la ecuación de la función exponencial $y = a^x$ que corresponde a cada una de las siguientes tablas. Complételas.

a)

x	1	2	3	5	10
y	.....	.....	1,728	2,48833	.....

b)

x	1	2	3	4	5
y	.....	0,09	0,027	.....	.....

5) Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4^{2x-1}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2}{3^x - 1}$ **c)** $h(x) = \dfrac{1}{4^x + 3}$

6) Represente en un mismo sistema de coordenadas:

a) $y = 2^x$ y su función inversa.

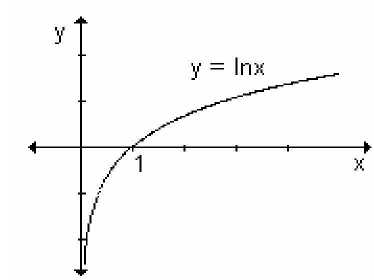
b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ y su función inversa.

7) Dada la gráfica de $y = \ln x$, trace (sin confeccionar tablas) las gráficas de las funciones:

a) $y = -\ln x$

b) $y = \ln(x-2)$

c) $y = \ln(x-2) + 1$



8) Resuelva sin usar calculadora:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 4$

c) $\log_9 81$ **d)** $\log_{27} 9$

e) $\log_9 3$ **f)** $\dfrac{\log_5 \frac{1}{125}}{\log_5 \frac{1}{5}} + \log_{25} \dfrac{1}{5} - \log_{\sqrt{5}} 25$

g) $\log_4 8$ **h)** $\log_2 2\sqrt{2} + \log_2 \dfrac{8}{\sqrt[5]{2}}$

9) Calcule:

a) $\log_3 5$ **b)** $\ln e$ **c)** $\log_5 3$

d) $\ln 8$ **e)** $\ln 15{,}2$ **f)** $\log_4 \dfrac{1}{2}$

10) ¿Existe $x \in R$ tal que $\log_a x = 0$, $a \in R^+$ y $a \neq 1$? En caso afirmativo, hállelo.

11) Si la base del logaritmo es mayor que 1, ¿cuáles son los números cuyos logaritmos son negativos?. De un ejemplo y justifique.

12) Si $\log_a x = y$; $0 < a < 1$, indique para qué valores de x es:

a) $y > 0$ **b)** $y < 0$ **c)** $y = 0$

13) Aplique logaritmo y sus propiedades.

a) $x = 5ab$ **b)** $y = \sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}}$ **c)** $x = \dfrac{1}{a^2\sqrt{b}\,c^3}$

d) $x = \dfrac{3a}{b^2 - a}$ **e)** $y = a^3b^2$ **f)** $x = \dfrac{\sqrt{a}\,b^2}{\sqrt[3]{c^2}}$

14) Sabiendo que $\log_3 10 = 2{,}1$ y $\log_3 2 = 0{,}63$, calcule:

a) $\log_3 20$ **b)** $\log_3 5$ **c)** $\log_3 2{,}5$

d) $\log_3 6$ **e)** $\log_3 0{,}4$ **f)** $\log_3 100$

15) Aplicando propiedades de los logaritmos, simplifique las siguientes expresiones:

a) $\ln e^2$ **b)** $\ln(e^{73\ln e})$ **c)** $\log m - \frac{1}{2}\log a - \log a$

d) $e^{\ln 1{,}37}$ **e)** $3\log a + \frac{1}{3}\log b$ **f)** $\frac{1}{2}(\log x - 3\log y)$

16) Teniendo en cuenta la definición de logaritmo, calcule el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $x = \log_5 0{,}04$ **b)** $\log_3 x = 2$ **c)** $\log_4 x = \frac{2}{3}$

d) $\log_9 27 = x$ **e)** $\log_5 x = 0$ **f)** $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

g) $\ln x = 0{,}75$ **h)** $\ln x = -2$ **i)** $\log_x 256 = \frac{4}{3}$

17) Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-1} = 64$ **b)** $(2^x)^{x+1} = 64$

c) $(0{,}5)^{x^2-3x} = 4$ **d)** $e^{\frac{x}{3}} = 14{,}8$

e) $3^{(x-1)(x+2)} = 81$ **f)** $2^{3x-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x^2}$

g) $e^{-4x} = 0{,}231$ **h)** $4^{x^2-x} = 16$

i) $10^{x^2-5x} = 10^{-6}$ **j)** $9^{3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{-(x+2)}$

k) $x^{x^2-7x+12} = 1$ **l)** $5^x = 26$

18) Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_4(x - 2) - \log_4(2x - 8) = 0$ **b)** $\log(x + 1) - \log(x - 2) = \log 2$

c) $\log_5(2x - 1) + \log_5(x + 2) = 2$ **d)** $2 + \log(x + 1) = \log(4x^2 - 500)$

e) $\log_6(x + 3) + \log_6(x - 2) = 1$ **f)** $2 \log(x-2) - \log\left(x - \frac{3}{4}\right) = \log 4$

g) $1 + \log_2(x - 3) - \log_2(x + 1) = 2$ **h)** $(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x = 0$

i) $(\log x)^2 = \log x^2$ **j)** $\log(3 + x) = \log x^2$

k) $\log(2x - 1) + \log x = \log(2x^2 - 3)$

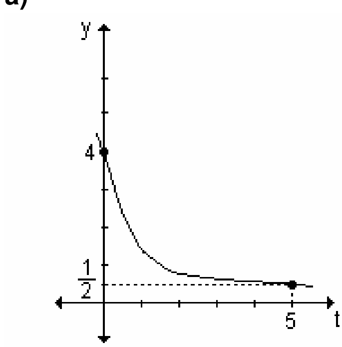
19) Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2\log_3 x + \log_3 y = 3 \\ x.y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log(b-1) = -\log a \\ \frac{1}{2}a = b - \frac{3}{2} \end{cases}$

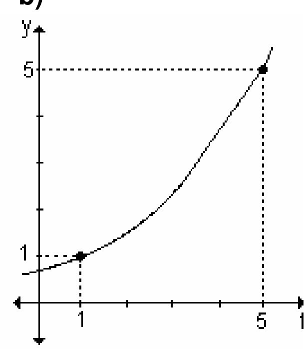
c) $\begin{cases} \log_3(6-x) + \log_3(y+1) = 3 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

20) Para cada uno de los siguientes gráficos, correspondientes a una función exponencial $f(t) = c.e^{kt}$, determine el valor de las constantes c y k.

a)



b)



21) Teniendo en cuenta la gráfica de la función y = sen x, represente las siguientes funciones:

a) $y = 3 \operatorname{sen} x$ **b)** $y = \operatorname{sen}(-3x)$ **c)** $y = 3 \operatorname{sen} x - 1$

d) $y = -3 \operatorname{sen} x$ **e)** $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$ **f)** $y = 3 \operatorname{sen} x + 2$

g) $y = \operatorname{sen}(3x)$ **h)** $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$ **i)** $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

22) Teniendo en cuenta la gráfica de la función y = cosx, represente las siguientes funciones:

a) $y = 3 \cos x$ **b)** $y = -\frac{1}{3} \cos x$ **c)** $y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

d) $y = \cos(3x)$ **e)** $y = \frac{1}{3} \cos x + 1$ **f)** $y = \cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

g) $y = \frac{1}{3} \cos x$ **h)** $y = \cos 3\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **i)** $y = 2 \cos 3\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

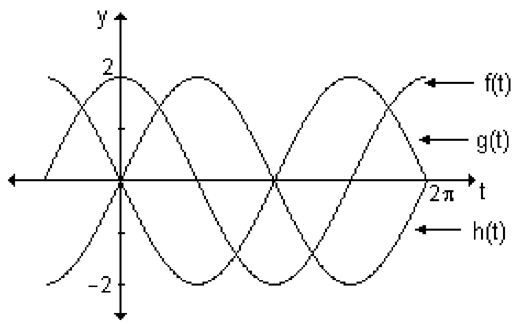
23) Teniendo en cuenta la gráfica de la función y = tg x, represente las siguientes funciones:

a) $y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = \text{tg}(-x)$

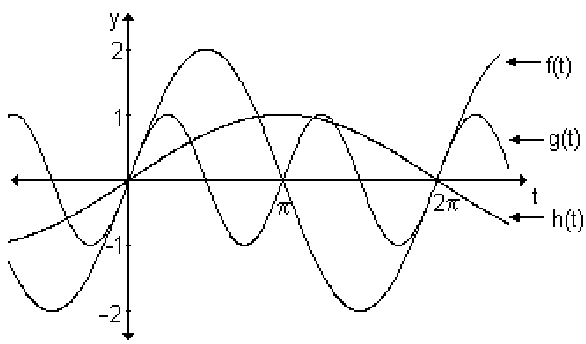
c) $y = \text{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **d)** $y = -2\ \text{tgx}$

24) Determine cuál es la gráfica que corresponde a cada una de las funciones que se detallan a continuación:

i) a) $y = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = 2\cos t$ **c)** $y = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$



ii) a) $y = \text{sen}\ (2t)$ **b)** $y = \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$ **c)** $y = 2\text{sen}\ t$



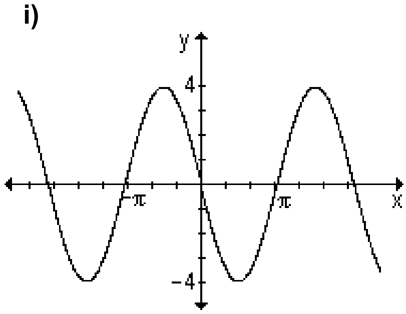
25) Para cada una de las siguientes gráficas indique:

a) la amplitud y el período,

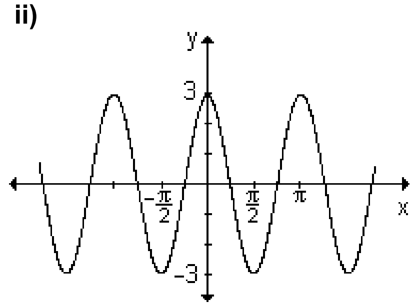
b) una ley para la función teniendo en cuenta transformaciones de la función $y = \text{sen } x$.

c) el desfasamiento.

i)



ii)



PROBLEMAS INTEGRADORES DE FUNCIONES

1) Para un gas a presión constante su volumen es función de primer grado de la temperatura absoluta. Si a una temperatura de 180° el gas ocupa 100 m^3 y a 135° ocupa 75 m^3:

a) Encuentre la función.

b) ¿Cuál es el volumen del gas a una temperatura de 150°?

2) La bióloga de una empresa agropecuaria produce dietas para animales experimentales que necesitan 20% de proteínas y 5% de grasa por kilo ingerido. El costo diario de producir un kilo de esta dieta está representado por la función $c(x) = x^2 + 12$ y el precio de venta de dicho kilo por: $v(x) = x(3x + 10)$.

a) Halle y represente gráficamente la función beneficio.

b) ¿Cuántos kilos de la dieta deberá producir para obtener beneficio?

c) ¿Cuántos kilos deberá vender para ganar $ 156?

3) Un meteorólogo halló que la temperatura T (en °F) en un cierto día frío de invierno estaba dado por: $T = 0{,}05t(t - 12)(t - 24)$ en la que t es el tiempo (en horas) y $t = 0$ corresponde a la hora cero.

a) ¿A qué hora era $T > 0$ y a qué hora era $T < 0$?.

b) Trace la gráfica de T.

4) El carbono 14, representado mediante C14, es un isótopo radioactivo de dicho elemento que tiene una vida media de alrededor de 5730 años. Encontrando qué cantidad de C14 contienen los restos de lo que fue un organismo vivo, es posible determinar qué porcentaje representa de la cantidad original de C14, en el momento de la muerte. Una vez que se tiene esta información, la fórmula que permite calcular la antigüedad de los restos está dada por $y = A\,e^{kt}$.

a) Determine el valor de k.

b) Se encuentra que el esqueleto de un animal contiene la cuarta parte de la cantidad original de C14. ¿Qué antigüedad tiene el esqueleto?

5) Las estrellas se clasifican en categorías de brillo llamadas magnitudes. A las estrellas más débiles (con flujo luminoso I_0) se les asigna magnitud 6. A las estrellas más brillantes se les asigna magnitud conforme a la fórmula $m = 6 - 2{,}5\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ en la que I es el flujo luminoso de la estrella.

a) Determine m si $I = 2{,}5.I_0$

b) Resuelva la fórmula para evaluar I en términos de m y de I_0.

6) El costo en dólares por enlatar x toneladas de espárragos en un día está dado por $c(x) = 5x^2 - 15x + 8$; y el ingreso de estos espárragos está dado por la ley $r(x) = 2x + 2$.

a) ¿Cuántos espárragos deben producirse para que la compañía no pierda ni gane?

b) Suponga que se producen 4 toneladas de espárragos al día, ¿obtiene la compañía una pérdida o una ganancia?

c) ¿Cuál es la variación de toneladas a enlatar que produce ganancia?

d) Grafique ambas funciones en un mismo sistema de ejes.

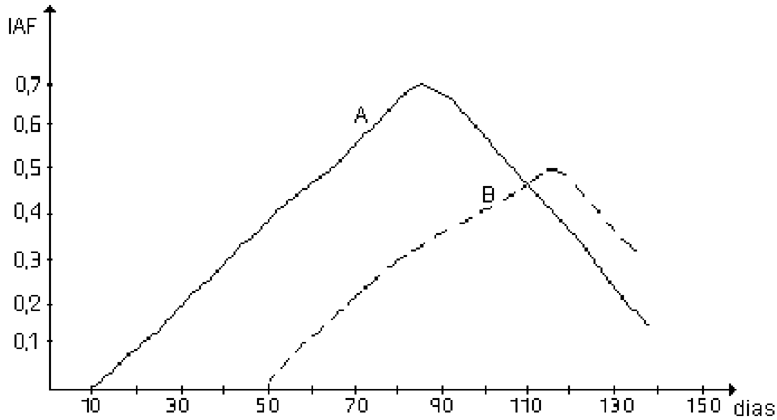
7) Los agrónomos calculan que se necesitan 1000 m^2 de tierra para proveer de alimentos a una persona. Por otro lado se calcula que hay $40x10^{12}$ m^2 de tierra laborable en el mundo y por lo tanto se puede sostener a una población máxima de 40 000 millones de personas, si no hay ninguna otra fuente de alimentos. De acuerdo a estos supuestos la población del mundo (en miles de millones), t años después de 1960, ha sido descripta de acuerdo a un modelo logístico, tomando como tasa efectiva de crecimiento 0,02.

a) Sabiendo que la población en 1980 era de 4500 millones de habitantes, determine la función que cumple las condiciones dadas.

b) Calcule la población para el año 2000.

c) ¿Cuándo la población será de 10 000 millones?

8) La gráfica describe la evolución del IAF (Índice de Área Foliar) de un cultivo de una especie determinada de una variedad A dada y de otra variedad B.



a) Indique en qué día el valor de IAF es el mismo en las dos variedades.

b) ¿Para qué valores el IAF de la variedad B es cero?

c) ¿Para qué valor el IAF de la variedad A alcanza el máximo?

9) Una sustancia radioactiva está desintegrándose de acuerdo al modelo descripto por $f(t) = c.\ e^{-0,045\ t}$. La cantidad inicial es 10 gramos.

a) Escriba la ecuación de la función.

b) Calcule la cantidad restante después de 5 años.

10) Las siguientes ecuaciones describen un mercado competitivo en economía agrícola: $q_s = 6p^2 - 5p - 5$; $q_d = 20 + 5p - p^2$, donde p es el precio en dólares, q_s es la cantidad ofrecida y q_d la cantidad demandada.

a) Grafique ambas funciones en un mismo sistema de ejes.

b) Halle el precio de mercado de equilibrio, o sea, la cantidad ofrecida es igual a la cantidad demandada.

c) Si el precio es $ 4, ¿cuál cantidad será mayor, la ofrecida o la demandada?

11) El porcentaje de árboles en una plantación frutal que ha sido infectada por cierta plaga está dado por $p(t)=\dfrac{100}{1+50e^{-0,1t}}$ donde t es el tiempo en días, medido a partir del día cuando se confirmó la infección. Determine el porcentaje de árboles infectados para $t = 0$, $t = 20$ y $t = 40$.

12) Los milímetros que se estira un resorte están dados en función de primer grado del peso que se le agregue al mismo. Un peso de 300 gramos lo alargará 22 mm, mientras que un peso de 200 gramos lo alargará 16 mm.

a) Defina la función que describe matemáticamente esta situación.

b) Indique qué tipo de gráfica representa esta función.

c) ¿Cuánto se alargará el resorte con un peso de 150 gramos?

d) Si el resorte se alarga 28 mm, ¿qué peso está unido al mismo?

13) La dosis de un fertilizante M(kg/ha) en un medio edáfico tiene sus efectos sobre el rendimiento del trigo (q/ha), según el polinomio: $p(x) = -x^2 + 6x + 8$.

a) Grafique la función.

b) ¿Cuál es el rendimiento máximo?, ¿para qué dosis de fertilizante se obtiene?

c) ¿Para qué dosis de fertilizante el rendimiento es nulo?

14) En una isla pequeña se introdujo una población de 100 venados. Al principio, la manada empezó a crecer rápidamente, pero, después de un tiempo, los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Suponga que el número de venados n(t) a los t años está dado por $n(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$

a) Determine los valores positivos de t para los cuales $n(t) > 0$. ¿Se extingue la población? Si es así, ¿ cuándo ocurre eso?

b) Trace la gráfica de n para $t > 0$.

c) Puede demostrarse que la rapidez r a la que crece (o decrece) la población de venados en el tiempo t está dada por: $r = -4t^3 + 42\,t$ (venados por año). ¿ Cuándo deja de crecer la población? Calcule los valores positivos de t para los cuales $r > 0$.

15) Cuando las organizaciones adquieren equipo, vehículos, edificios y otras clases de “bienes de capital”, los contadores acostumbran asignar el costo del objeto a lo largo del período en que se usa. Se usa el nombre de depreciación al costo asignado a un período determinado y se llama valor actual de un bien a la diferencia entre el costo de compra y la depreciación asignada. El valor actual de un equipo industrial se representa por la función $v = 300\,000\,(2{,}5)^{-0{,}1t}$, donde el valor actual está dado en dólares y t es el tiempo en años transcurrido desde la adquisición del equipo.

a) ¿De qué tipo de función se trata?

b) ¿Cuál era el valor del equipo cuando se compró?

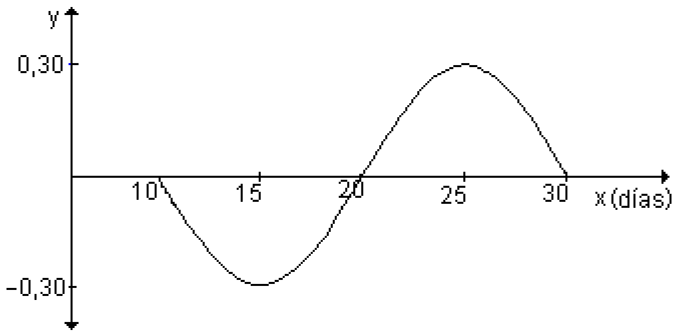
c) ¿Cuál será el valor al cabo de 5 años?

d) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el valor del equipo se reduzca a la mitad?

16) La siguiente gráfica describe el efecto de la edad de la hoja en el movimiento del fósforo (P) hacia adentro y afuera de la hoja.

eje x = edad de la hoja

eje y^+ = exportación de fósforo ; eje y^- = importación de fósforo



a) Especifique para que día no ocurre importación ni exportación de la hoja.

b) Indique cuál es el valor de P importado o exportado para una hoja de 25 días.

17) Las ganancias de una pequeña empresa están representadas por la función $g(x) = -x^2 + 160x - 4800$ donde x representa el número de unidades fabricadas. Determine el número de unidades que se deben fabricar para que la ganancia sea de $ 1200.

18) Cierta población de bacterias crece a una tasa proporcional a su tamaño siguiendo un modelo exponencial $N(t) = N_0\ e^{rt}$, siendo la tasa efectiva de crecimiento 0,6. Pasadas 5 horas en la población existen 400 000 bacterias.

a) Determine la función que expresa el tamaño de la población con respecto al tiempo, medido en horas.

b) ¿Cuál es el tamaño de la población inicialmente?

19) El denominador de una fracción es 3 unidades mayor que el numerador. Si se suma 5 unidades al numerador y se resta 4 al denominador, se obtiene 2. Calcule la fracción original.

20) El crecimiento de dos poblaciones, A y B, responde a las siguientes funciones polinomiales: $p_A(t) = \frac{5}{2}t + 30$ y $p_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t - 8$, donde t es el tiempo de conteo expresado en semanas. Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana.

a) ¿Tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

b) Grafique ambas funciones polinomiales en el mismo sistema.

c) Indique los lapsos en los cuales la población de A es mayor que la población de B y cuándo la población A es menor que la población B.

21) Un aeroplano vuela 1200 km con el viento a favor. En el mismo tiempo puede volar 1040 km con el viento en contra. La velocidad del aeroplano cuando no sopla el viento es de $280 \frac{km}{h}$. Determine la velocidad del viento.

22) La empresa SuperStar Cablevisión comenzó recientemente a dar servicio a una ciudad. Con base en experiencias pasadas, se estimó que el número n(x) de suscriptores (en miles) al final de x meses es $n(x) = \frac{240}{x+6}$.

a) Halle el número de suscriptores al final de los 6 meses, 18 meses y 2 años.

b) Trace la gráfica.

c)¿Cuál es la asíntota horizontal de la gráfica? ¿Qué sugiere esto acerca del número posible de suscriptores que tendrán?

23) Una institución dedicada a obras de caridad está planeando una campaña para recaudar fondos para la instalación de un comedor escolar. Por experiencia en años anteriores sabe que los aportes totales están dados en función de la duración de la campaña. En una ciudad del interior del país se determinó una función de respuesta que indica la proporción p de la población que realiza donaciones en término del número de días t que dura la campaña. Dicha función es $p(t) = 0{,}7(1 - e^{-0{,}05t})$.

a) ¿Que porcentaje de la población hará donaciones después de los 10 días? ¿Y pasados los 20 días?

b) ¿Que porcentaje máximo de población hará donaciones?

24) En un mercado de libre competencia, el volumen de ventas de un producto depende de la cantidad gastada en la publicidad del mismo. Si se gastan x dólares al mes promocionando un producto determinado, se encuentra que para ese producto el volumen de ventas v al mes (en dólares) está dado por la expresión $v = 10\,000(1- e^{-0{,}001x})$.

a) Calcule el volumen de ventas cuando se gastan 1000 dólares en publicidad.

b) Si lo gastado en publicidad decrece de 500 a 100 dólares al mes. ¿Cuál es el porcentaje decreciente resultante en las ventas?

Respuestas a:
Ejercicios Integradores
Problemas de Aplicación
Pruebas de Opción Múltiple
Autoevaluaciones
Ejercicios de Repaso

CAPITULO 1: FUNCIONES

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.1 Funciones (pág. 49)

1) $f(1) = 0$; $f(2) = 3$; $f(3) = 8$
Es inyectiva, no sobreyectiva.
2)a) Sí, no inyectiva, no sobreyectiva
b) Sí, biyectiva.
3)a) Inyectiva, no sobreyectiva.
b) No admite inversa.
c) $f(x) = 2x$, $x \in N$, y natural par
4) f admite inversa:
$f^{-1}: R \to R \,/\, f^{-1}(x) = 2x - 1$
8)a) $(g \text{ o } f)(x) = 2\sqrt[3]{x} + 1$,
$(f \text{ o } g)(x) = \sqrt[3]{2x+1}$
b) $(gof)(x) = 3x^2 - 3$,
$(fog)(x) = 9x^2 - 1$
9)a) $p = 3$; $m = -2$; **b)** $a = 1$; $b = 2$
10) $m = 2$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 1.1 Funciones (pág. 50)

1)a) $D = \{T / T \in R \wedge 30 \le T \le 39\}$
b) $f(30) = 4$; $f(36) = \dfrac{17}{4}$; $f(39) = \dfrac{33}{4}$
2)b) $c(2) = 10$; $c(4) = 14$; $c(14) = 8$
3)a) $C(x) = 0{,}40x + 18\,000$;
b) \$ 38 000; **c)** \$ 58 000
4) a) $(gof)(m) = 400m - 10m^2$.
Describe los ingresos totales en función del número de empleados.
b) 3360 dólares; **c)** 20 empleados.
5)a)
$(fog)(E) = 0{,}45(6202 + 0{,}29E^{3,68})^{0,53}$
Describe la posición social en función de los años de escolaridad; **b)** 46
6)a) $y = 500x - 350$
b) 121 000 ladrillos a \$ 12 150
7)a) $C(t) = 3000 + 1600t - 40t^2$;
b) 6040 dólares;
c) $t_1 = 0$ horas; $t_2 = 40$ horas

PRUEBA DE OPCION MULTIPLE 1.1 Funciones (pág. 51)

1) a; **2)** c; **3)** c; **4)** d; **5)** c; **6)** a; **7)** b; **8)** c; **9)** d; **10)** c

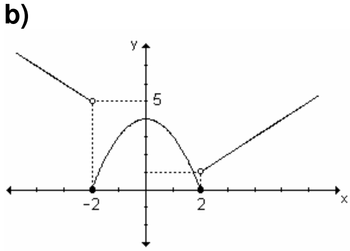
EJERCICIOS INTEGRADORES 1.2 Funciones Escalares (pág. 63)

1)a) Función algebraica racional
fraccionaria; $D = R - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

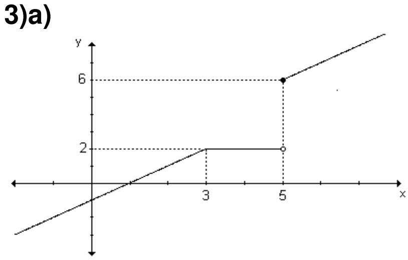
b) Función trascendente;
$D = \{x/x \in R \wedge x > 3\}$,
c) Función algebraica irracional;
$D = \{ x/x \in R , x \geq 4 \vee x \leq -4\}$
d) Función irracional; $D = R_0^+$
2)a) No es par ni impar; **b)** Par;
c) Impar; **d)** Par; **3)a)** Decreciente; **b)** Creciente
c) Decreciente; **d)** Creciente.
4)a) $p = 1$; **b)** $y = 1$; $x = 0{,}5 + k$; $k \in Z$.
c) $y = 0$; $x = k$, $k \in Z$; **d)i)** 1; **ii)** 0
5)a) $p = 1$; **b)** $y = 0$, $x = k$; $k \in Z$
c) $x = \frac{1}{2} + k$, $k \in Z$.

AUTOEVALUACIÓN Nº 1: Funciones. Funciones escalares (pág. 64)

1)c)
2)a) $a = -1$, $b = 4$
b)

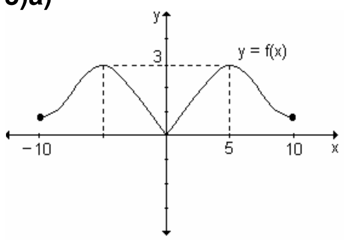


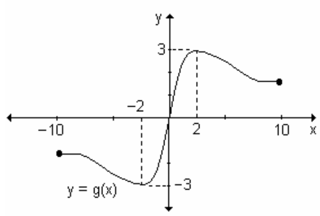
c) Es sobreyectiva pero no inyectiva.
d) Es una función escalar algebraica entera. En el primer y tercer tramo es de primer grado y en el segundo tramo de segundo grado.
3)a)



b) $D = R$,
$CI = \{y / y \in R \wedge y \leq 2 \vee y \geq 6\}$
c) No admite inversa porque no es inyectiva. No es biyectiva.
d) $f(3) = 2$. Hay otros valores, son todos los valores de x entre 3 y 5.
4)a) $D = R - \{0\}$, $CI = R^-$
b) Cuando x crece indefinidamente,
$f(x) \to 0$. Cuando x tiende a cero, f(x) decrece indefinidamente.
c) Pertenece al conjunto de imágenes. Es imagen del $\frac{1}{2}$ y del $-\frac{1}{2}$.
d) No admite inversa pues no es inyectiva, y por lo tanto, no es biyectiva.

5)a)





b) y = f(x): no es inyectiva pues hay valores distintos del dominio que tienen la misma imagen.

No es sobreyectiva, para los valores de ordenadas pertenecientes a los intervalos (–∞, 0) y (3, +∞) no existe x tal que y = f(x). En consecuencia, no es biyectiva.

Es creciente en (–10, –5) U (0, 5) y decreciente (–5, 0) U (5, 10).

y = g(x): no es inyectiva pues hay valores distintos del dominio que tienen la misma imagen.

No es sobreyectiva, para valores de ordenadas pertenecientes a los intervalos (–∞, –3) y (3, +∞) no existe x tal que y = f(x). En consecuencia, no es biyectiva.

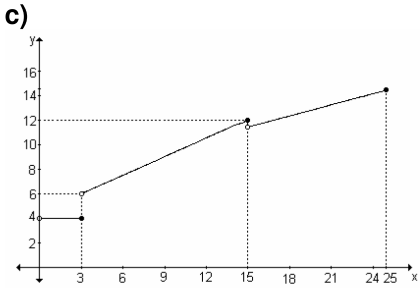
Es creciente en (–2, 2) y decreciente en (–10, –2)U(2, 10).

c) f(–5) = 3; g(2) = 3.

6)a) D = (0, 25]

b) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } \ 0 < x \leq 3 \\ 4{,}5 + 0{,}5x & \text{si } \ 3 < x \leq 15 \\ 7 + 0{,}3x & \text{si } \ 15 < x \leq 25 \end{cases}$

c)



CI = {4} ∪ (6; 14,5]

d) No es inyectiva, pues y = 4, existe x ∈ (0, 3] tal que f(x) = 4.

7) $f^{-1}(x) = (x + 1)^3$ **8)a)** $s(t) = \dfrac{16}{9}\pi t^6$ **b)** $1296\pi \text{ m}^2$ **c)** 2 segundos.

9)a) Es par pues ∀x ∈ D : f(x) = f(–x)

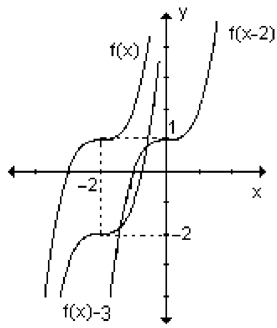
b) Sus ceros son –4, 0 y 4.

c) Es creciente en (–∞, –2) ∪ (0, 2). Es decreciente en (–2, 0) ∪ (2, +∞).

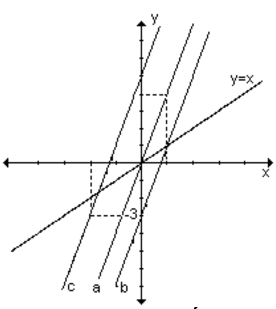
d) Es positiva en (–4, 0) ∪ (0, 4) y es negativa en (–∞, –4) ∪ (4, +∞)

10) a = 2; b = 3

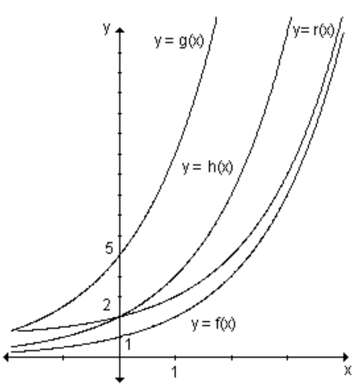
EJERCICIOS INTEGRADORES 1.3 Gráficas de funciones según distintas transformaciones (pág. 76)
1)



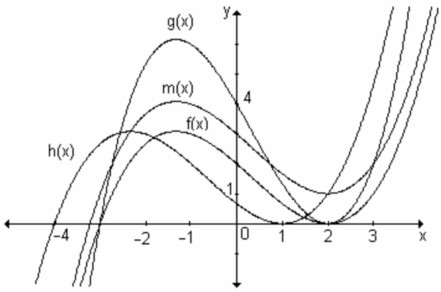
2)



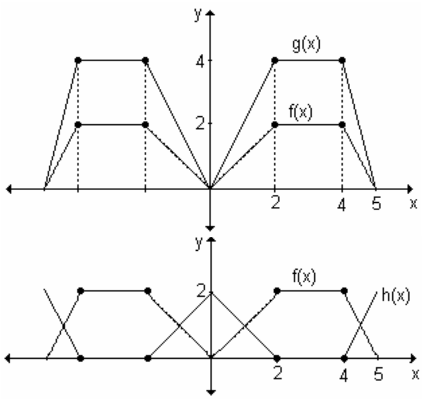
AUTOEVALUACIÓN Nº 2: Gráficas de funciones según distintas transformaciones
1) (pág. 76)



2)



3)



4) h(x) = f(x) + 2 (Se trasladó dos un unidades hacia arriba)
g(x) = f(x + 3) (Se trasladó tres unidades a la izquierda)

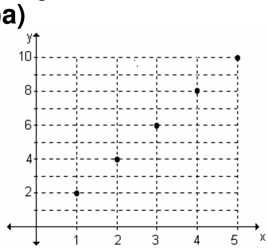
PRUEBA DE OPCION MULTIPLE 1.2 Funciones escalares y 1.3 Gráficas de funciones según distintas transformaciones (pág. 77)

1) d; **2)** c; **3)** b; **4)** b; **5)** d; **6)** a; **7)** b; **8)** d; **9)** d; **10)** b

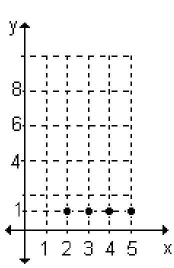
EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO (pág. 79)

1) $CI_g = \{1,2,5\}$

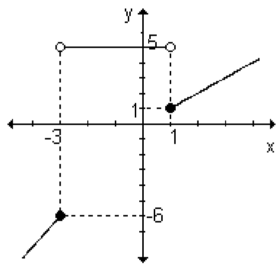
2)a)



b)



3) Es función, cumple existencia y unicidad.

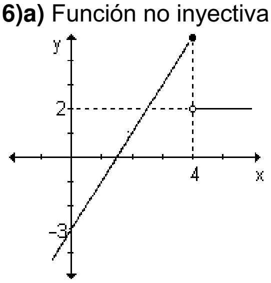


4)a) No es función porque el 0 no tiene imagen.

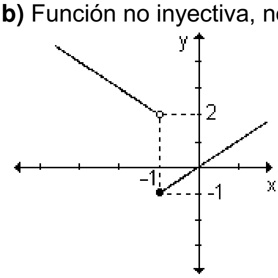
b) $g: R - \{0\} \to R \,/\, y = \dfrac{1}{x}$

5)i) Función no inyectiva, sobreyectiva; **ii)** Función biyectiva; **iii)** No es función; **iv)** Función no inyectiva, no sobreyectiva; **v)** No es función;
vi) Función no inyectiva, sobreyectiva.

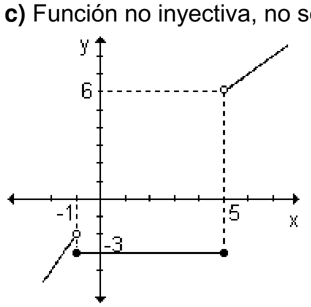
6)a) Función no inyectiva, no sobreyectiva.



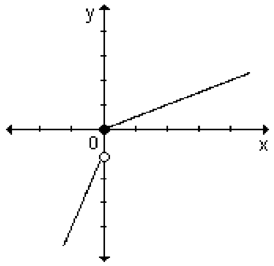
b) Función no inyectiva, no sobreyectiva.



c) Función no inyectiva, no sobreyectiva.



d) Función inyectiva, no sobreyectiva.



7)a) (gof)(x) = $\sqrt{3x}$; (fog)(x) = $3\sqrt{x}$

b) (gof)(x) = 2x+5 ; (fog)(x) = 2x+2

8)a) f(1) = –1; g(1) = 5; **b)** (fog)(x) = 6x+1 **c)** (gof)(x) = 6x–7 ;

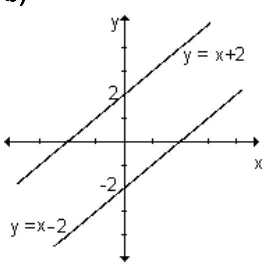
d) 5 ; **e)** –23 ; **f)** –19

9) a = 3; b = 2

10) a = 0; b = –6

11)a) Sí, admite función inversa.

b)



12)a) CI = R. Función biyectiva

b) CI = R. Función biyectiva

c) CI = {y/ y∈R ∧ y ≥ 1}

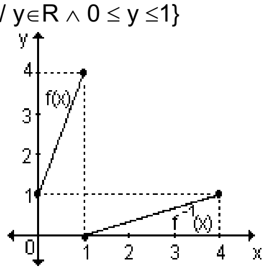
Función no inyectiva, no sobreyectiva.

d) CI = R_0^+ . Función no inyectiva, no sobreyectiva.

13)a) CI_f = {y/ y∈R ∧ 1 ≤ y ≤ 4}; **b)** Sí **c)** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

D_{f-1} = (x/ x∈R ∧ 1 ≤ x ≤ 4}

CI_{f-1} = {y/ y∈R ∧ 0 ≤ y ≤1}



14)a) Función escalar algebraica racional fraccionaria. D = R

b) Función escalar algebraica racional fraccionaria.

D = R – {–2, 0}

c) Función escalar algebraica racional fraccionaria. D = R – $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

d) Función escalar algebraica racional fraccionaria.

D = R – {–2, 2}

e) Función escalar algebraica racional fraccionaria.

$D = R - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

f) Función escalar algebraica racional fraccionaria. $D = R - \{1, -1\}$
g) Función escalar trascendente.

$D = \left\{x / x \in R \wedge x > \frac{1}{2}\right\}$

h) Función escalar algebraica irracional.
$D = \{x/x \in R \wedge x \leq -3 \vee x \geq 3\}$
i) Función escalar algebraica racional fraccionaria. $D = R - \{0\}$
15)a) Función impar; **b)** Función no par, ni impar; **c)** Función no par, ni impar;
d) Función par.
16)a) Función creciente; **b)** Función decreciente; **c)** Función creciente;
d) Función decreciente.
17)a) No existe f(x) en $x = 0$.
Crece o decrece rápidamente (tiende a $+\infty$ o $-\infty$).
f(x) tiende a cero. No existen intersecciones con el eje x;
b) No. $D = R - \{0\}$. Para ningún valor es negativo; **c)** Para ningún valor es negativo. h(t) es positiva y grande en valor absoluto cuando t es grande positiva y negativamente.
18)a) Período: 2; **b)** El valor máximo es 1 en $x = 2k+1,\ k \in Z$;

c) $x = 2k,\ k \in Z$; **d)** $x = \frac{1}{2} + 2k,\ k \in Z$

19)a) Período: 3

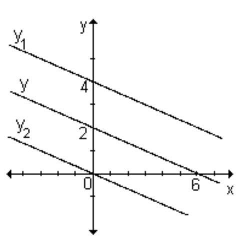
b) $CI = \left\{y / y \in R \wedge -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$

c) El valor mínimo es $-\frac{1}{2}$ en

$x = \frac{1}{2} + 3k\ ,\ k \in Z$;

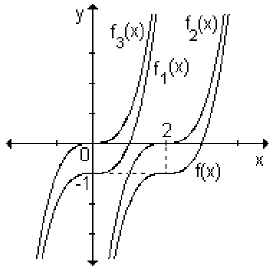
d) El valor máximo es $\frac{1}{2}$ en $x = \frac{3}{2} + 3k$ ó $x = \frac{5}{2} + 3k\ ,\ k \in Z$

20)a) Ninguno; **b)** P(0,1); **c)** Sí;
d) No; **e)** Sí; **f)** Ninguno;
g) $D = R - \{-1\}$, $CI = R - \{0\}$
21)a) $f(x) < 0$ si $x > 6$
b)

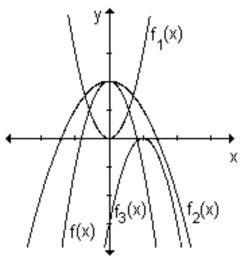


22)a) $h = 2$; $k = -1$

b)



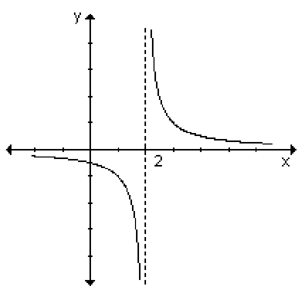
23)a) k = 2



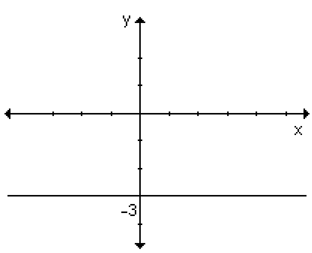
CAPITULO 2: FUNCIONES ESCALARES ALGEBRAICAS

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.1 Funciones algebraicas especiales (pág. 96)

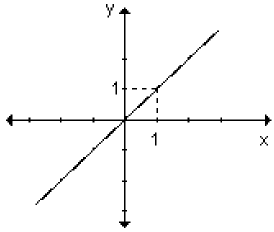
a) D = R – {2}, CI = R – {0}



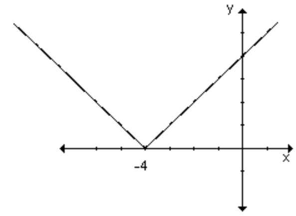
b) D = R, CI = {–3}



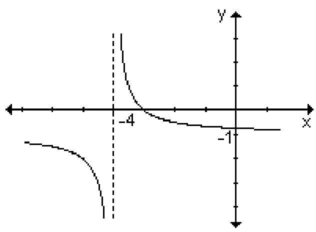
c) D = R, CI = R



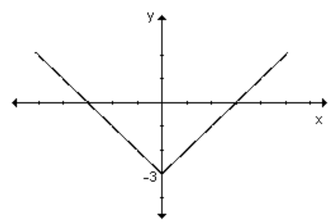
d) D = R, CI = R_0^+



e) D = R – {–4} , CI = R – {–1}



f) D = R, CI = {y/y∈ R ∧ y ≥ –3}

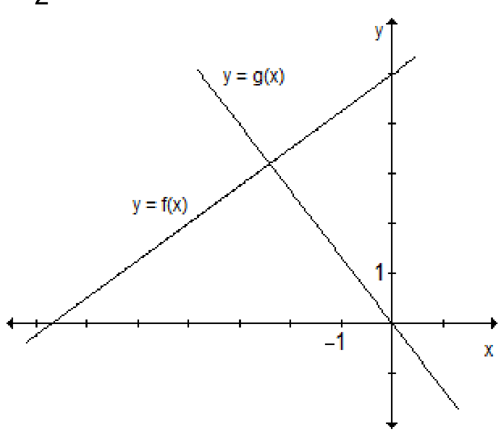


EJERCICIOS INTEGRADORES 2.2 Función de primer grado (pág. 119)

1)a) $y = \frac{1}{2}x - 1$; **b)** $y = 2x - 4$

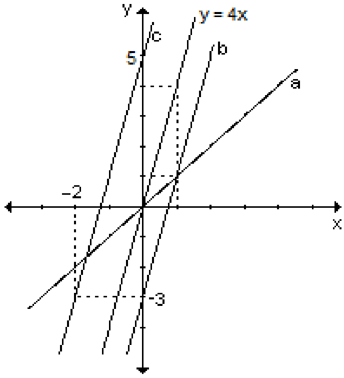
2) a) $k = -3$; **b)** $P\left(\frac{5}{4}, 0\right), Q\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

3) $k = \frac{1}{2}$



4) Pendiente m = –2.
Ordenada al origen h = –1

5)



6)a) $y = \frac{1}{2}x - 1$. Función de primer grado;

b) f(x) = –x + 2. Función de primer grado.

7)a) Podrían ser: $P_1(0, 2)$; $P_2(3, 1)$

b) $y = 3x + h$, $h \in R$

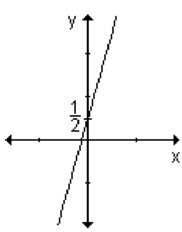
c) $P \notin f$, $Q \in f$, $R \notin f$

8) $y = -\frac{5}{2}x + 4$

9) p = 5

10)a) $t = \frac{1}{2}$; **b)** $y = 4x + \frac{1}{2}$

c)



11)a) t = –3; **b)** y =–2x + 2;

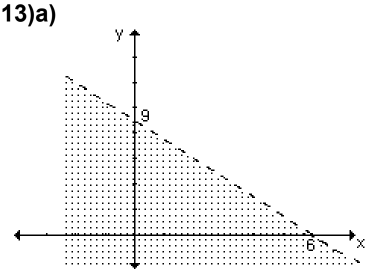
c) y = –2x

12) a) (–∞ , 3]; **b)** (–∞, +∞);

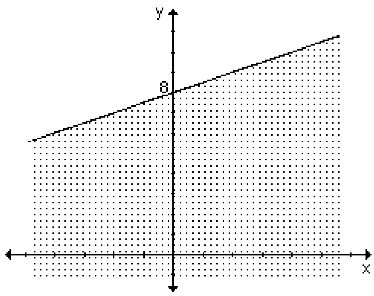
c) (2, +∞);

d) (–4, 2)

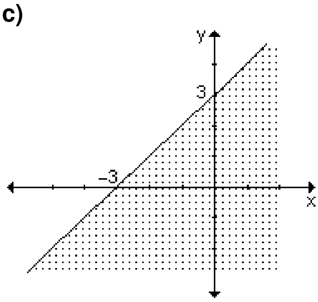
13)a)



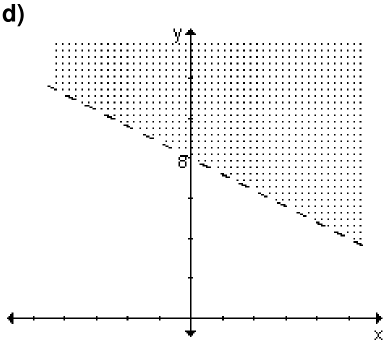
b)



c)



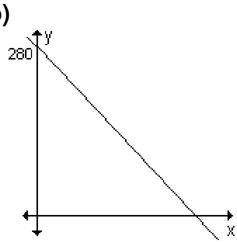
d)



14) Debe funcionar más de dos horas.

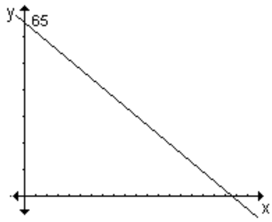
PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2.2 Función de primer grado (pág. 120)

1)a) w = 25,4d + 40;
b) w = 294 g
2)a) y = –0,4x + 280;
b)



c) 250 unidades
3)a) f(x) = –0,07x + 65 ;

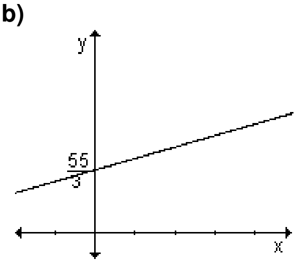
b)



c) 300 unidades

4)a) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{55}{3}$;

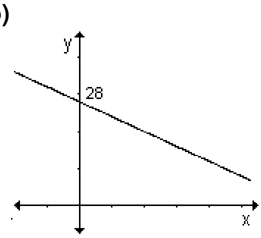
b)



c) x = 44 unidades

5)a) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 28$;

b)



c) $ 16

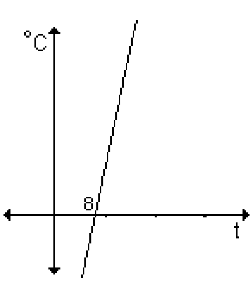
6)a) w = 0,66d + 20; **b)** 53 kg

7) c = f(t) = 4t – 148

8)a) p = 10t – 80; **b)** p = 20%;

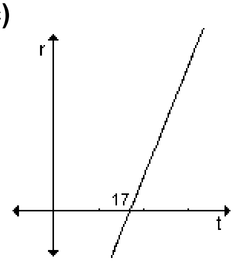
c) $t = 17^0C$

d)



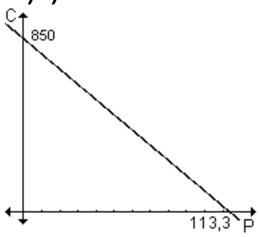
9)a) r = 10t – 170; **b)** $t = 27^0C$;

c)



10) a) $r = 2a + 40$; **b)** $r = 40$ g/día

11)a)



b) $P_1(0,\ 850)$; $P_2(113{,}3;\ 0)$; **c)** P_1: si no hay oficiales, se esperan 850 crímenes por semana. P_2: no habría crímenes si se asignarían 113 oficiales; **d)** 100 oficiales.

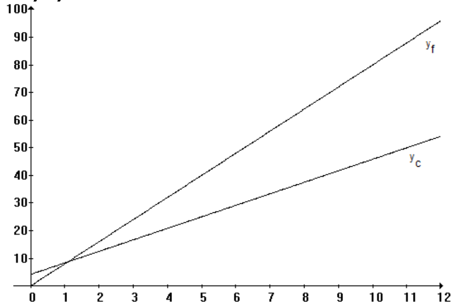
12)a) $y = 186{,}98$ mm; **b)** $x = 752{,}79$ mm

13) $y = 0{,}03x + 108$

14) a) $y = \frac{2}{5}x$; **b)** $y = 28$ kg de masa muscular; **c)** $x = 112{,}5$ kg

15) $h = -\frac{8}{3}t + \frac{7520}{3}$

16)a)



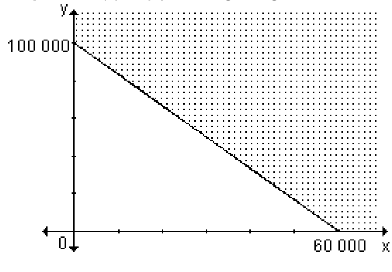
b) $t = 1$ año

17) $x \in [200,\ 500)$

18) Por lo menos 22 escritorios.

19) El modelo A ha de usarse 5 años antes que resulte más económico que B.

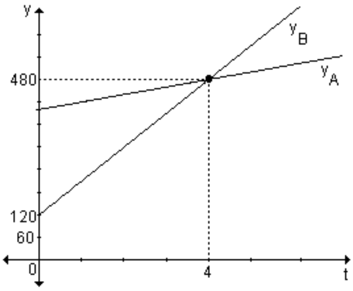
20) $S = \{(x, y) \in N_0 x N_0 \ /\ 10x + 6y \ \geq 600\ 000\}$



21) a) $y_A = 400 + 20t$, $y_B = 120 + 90t$

b) A los 4 segundos contienen la misma cantidad, que es 480 litros.

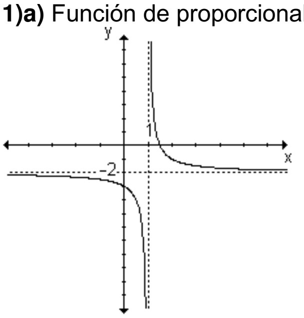
c)



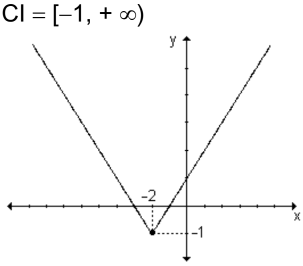
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.2 Función de primer grado (pág. 124)
1) b; **2)** c; **3)** a; **4)** b; **5)** d; **6)** c; **7)** a; **8)** b; **9)** c; **10)** d; **11)** b; **12)** c; **13)** a; **14)** b; **15)** d; **16)** d; **17)** b

AUTOEVALUACIÓN Nº 3: Funciones algebraicas especiales. Función de primer grado (pág. 125)

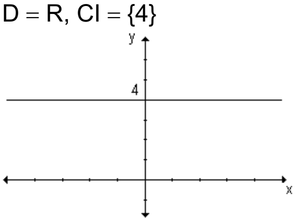
1)a) Función de proporcionalidad inversa. D = R – {1}, CI = R – {–2}



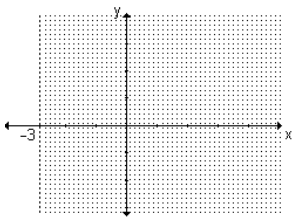
b) Función valor absoluto. D = R,
CI = [–1, + ∞)



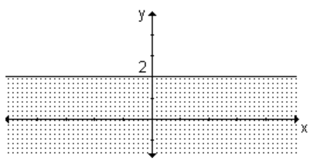
c) Función constante.
D = R, CI = {4}



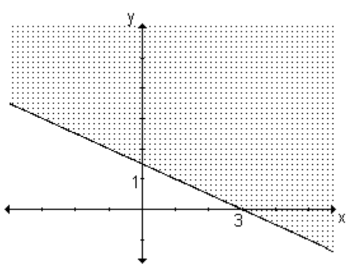
2)a)



b)

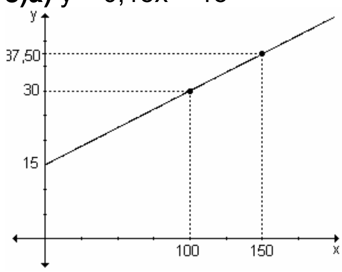


c)



3)a) f(x) = 240x + 1300
b) $ 4180
c) 7 heladeras
d) Se podrán fabricar desde 12 hasta 15 heladeras.
4) a = –3
5) c = –1
6)a) Ana: y = 5x + 35
Beatriz: y = 10x
b) La pendiente es 10 y significa que por cada segundo que pasa Beatriz avanza 10 metros.
c) La intersección con el eje y es 35 e indica que cuando Beatriz comenzó la carrera, Ana estaba a 35 metros de la largada.
d) Ganó Beatriz pues demoró tres segundos menos que Ana.
7)a) y =10x –120
b) 60 ºF
c) 20 minutos

8)a) $y = 0{,}15x + 15$



b) $ 45
c) La ordenada al origen representa el costo de alquilar el auto por un día y no viajar es de $ 15.
La pendiente representa el costo adicional por cada kilómetro recorrido.

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.3 Función de segundo grado (pág. 151)

1)i) Función de segundo grado.

a) $y = 2(x-1)^2 - 2$; $V(1, -2)$;
eje de simetría: $x = 1$;
$P_1(0, 0)$; $P_2(2, 0)$;
$y = 2x(x-2)$; $y = -2$ (mínimo).

b) $y = -2(x+1)^2 + 8$; $V(-1, 8)$;
eje de simetría $x = -1$;
$P_1(-3,0)$; $P_2(1,0)$; $P_3(0,6)$;
$y = -2(x+3)(x-1)$; $y = 8$ (máximo).

c) $y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$; $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$;
eje de simetría $x = \frac{3}{2}$;
$P_1(2,0)$; $P_2(1,0)$; $P_3(0,6)$;
$y = 3(x-2)(x-1)$; $y = -\frac{3}{4}$ (mínimo).

d) $y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$; $V\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$;
eje de simetría $x = \frac{1}{3}$;
$P_1\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$; $P_2(1, 0)$; $P_3(0, -1)$;
$y = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)$;
$y = -\frac{4}{3}$ (mínimo)

e) $y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$; $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$;

eje de simetría $x = \frac{3}{2}$;

$P_1(0, 0)$; $P_2(3, 0)$; $y = -x(x-3)$;

$y = \frac{9}{4}$ (máximo);

f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$; $V\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

eje de simetría $x = 0$;

$P_1(1,0)$; $P_2(-1,0)$; $P_3\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

$y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$;

$y = \frac{1}{2}$ (máximo)

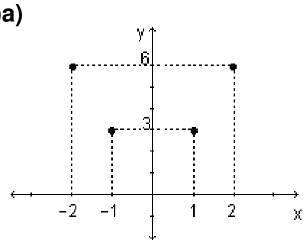
2) $k = -1$ ó $k = \frac{1}{3}$

3)a) $y = -x^2 - x + 2$; **b)** $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}$

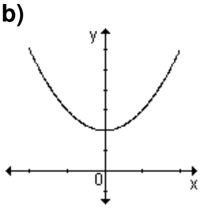
4) $m = 1$

5) $m_1 = 0$ ó $m_2 = -1$

6)a)



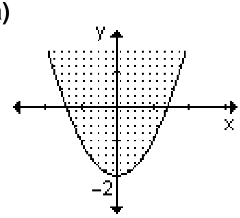
b)



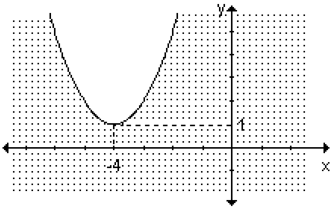
7)b) $f(-2) = 2$; $f(4) = 11$; $f(-3) = -3$;
$f(3) = 7$

8)a) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; **b)** No tiene solución.

9)a)

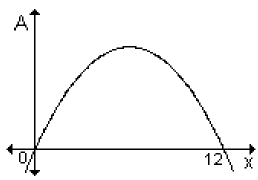


b)

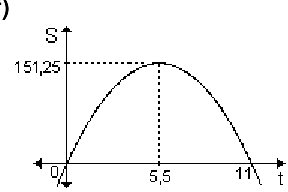


PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2.3 Función de segundo grado (pág. 152)

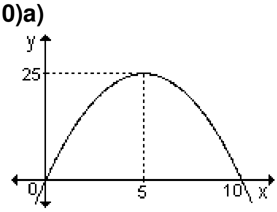
1) 50 % de yema
2)a) 70 grs. ; **b)** 50 %
3)a) 25 unidades; **b)** $ 1250 de ingreso.
4)a) 40 millones de casas.
b) 6 meses.
5) a) $A = x(12-x)$;
b) función de segundo grado
c)



d) $x = 6$. El jardín debe medir 6 m de largo y 6 m de ancho.
6)a) $y = -0,25n^2 + 30n - 50$;
b) 60 obreros, ganancia máxima $ 850.
7)a) Función de segundo grado, su gráfica es una parábola; **b)** 5,5 seg.;
c) 151,25 m. Representa el vértice de la parábola; **d)** 1 seg.; **e)** 11 seg.
f)



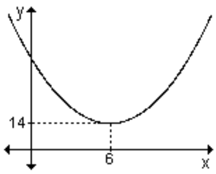
8)a) Perímetro $2x + 2y = 1200$;
b) Área $= 600x - x^2$, función de segundo grado;
c) Área máxima $= 90\,000 m^2$;
medidas: 300m x 300m
9) $f(x) = -0,148x^2 + 1,332x$
10)a)



b) La máxima concentración se alcanza a las 5 horas y es 25 $\frac{mg}{cm}$.

11)a) Función de segundo grado.

b)



c) Costo mínimo $ 14 para 6 mochilas; **d)** Cuesta más hacer 10 mochilas ($ 30); **e)** 0 o 12 mochilas

12) La tarifa mensual debe ser de 150 dólares.

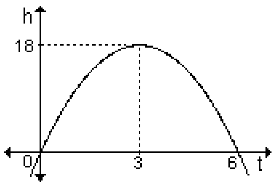
13) $n = 45$ árboles

14)a) $t = 0{,}3$ seg; **b)** $h = 18$ pulg.;

c) $t_1 = 0{,}1$ seg, $t_2 = 0{,}5$ seg;

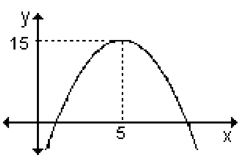
d) $t = 0{,}6$ seg

e)



15)a) $r(0) = -10$ millones (pérdida); $r(7) = 11$ millones; **b)** 5 artículos, 15 millones; **c)** 2 u 8 artículos.

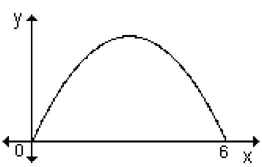
d)



16)a) Función de segundo grado;

b) Parábola; **c)** $x = 3$

d)



17) $0{,}5 < t < 1$

18) $0 < v < 20$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.3 Función de segundo grado (pág. 155)

1) c; **2)** b; **3)** d; **4)** a; **5)** **c**; **6)** b; **7)** a; **8)** d.

AUTOEVALUACIÓN Nº4: Función de segundo grado

1) $-6 < k < 6$

2) $m = -\dfrac{1}{18}$, $n = -\dfrac{5}{2}$, $t = -3$

3) $k = 2$, Vértice: $V\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, Eje de simetría: $x = -\dfrac{1}{2}$

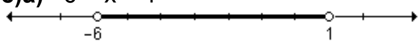
4) Área: 1800 m^2

5)a) $b(x) = -\frac{1}{4}n^2 + 30n - 50$ **b)** El beneficio máximo es de 850 dólares y se alcanza con 60 obreros. **c)** $48 \le n \le 72$.

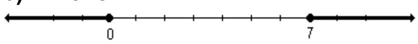
6)a) 46 metros **b)** 32,67 mph

7) El clavadista salta desde los 10 metros y tardará 2,24 segundos en tocar el agua.

8)a) $-6 < x < 1$



b) $x \le 0$ ó $x \ge 7$



9) $y < 3x^2 - 12x + 9$

$P_1(3, 0)$; $P_2(1, 0)$; $P_3(0, 9)$.

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.4 Función polinomial (pág. 174)

1)a) $m = 2$; **b)** $p(x) = x(x - 2)(x + 1)$

2)a) grado 3; tres raíces;

b) $a = 1$; $b = -1$; **c)** $x^3 - x^2 - 2x$; $x_2 = 0$, $x_3 = -1$;

d) $p(x) = x(x - 2)(x + 1)$

3)a) $k = 6$;

b) –2 sí, porque es divisor del término independiente; 0,5 no, porque el término principal es 1, no tiene raíces racionales;

c) tiene 4 raíces, su grado es cuatro;

d) $x_1 = 1$ (multiplicidad 2), $x_2 = 2$ (multiplicidad 2);

e) $p(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2$

4)a) F, $p(0) = 3$; **b)** V; **c)** F, $p(3) = 0$;

d) V; **e)** V; **f)** F, $p(1) = 0$

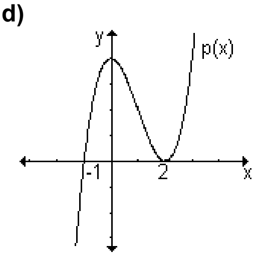
5)a) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (multiplicidad 2)

$p(x) = (x - 2)^2(x + 1)$

b)	$(x + 1)$	$(x - 2)^2$	$(x + 1)(x - 2)^2$
$(-\infty, -1)$	–	+	–
$(-1, 2)$	+	+	+
$(2, +\infty)$	+	+	+

c) $p(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$, $p(x) \to -\infty$ si $x \to -\infty$

d)

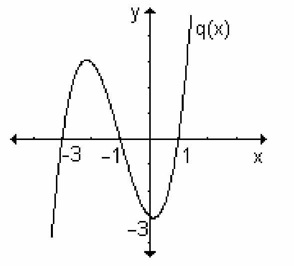


6)a) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ $q(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$

b)	x + 3	x + 1	x –1	q(x)
$(-\infty,-3)$	–	–	–	–
$(-3,-1)$	+	–	–	+
$(-1, 1)$	+	+	–	–
$(1, +\infty)$	+	+	+	+

c) $q(x)\to+\infty$ si $x\to+\infty$, $q(x)\to-\infty$ si $x\to -\infty$

d)



7) $p(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-4)$

8) $p(x) = -\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)$

9) $p(x) = -4\,(x-1)^3(x-3)$

10) $p(x) = 4\,(x+3)(x+1)^2$

11)a) $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 1$

b) $x_1 = 4$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2.4 Función polinomial (pág. 176)

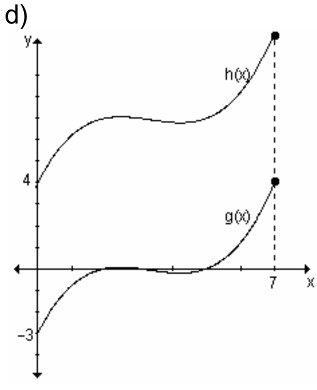
1)a) $V(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6-x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ **b)** Para que el volumen sea de $80m^3$ la medida del lado de la habitación debe ser de 4 m.

2)a) Cuando fue localizado el globo se encontraba a una altura de 4000m;

b) No vuelve a alcanzar esa altura;

c) A los dos días, a los 3 días y a los cinco días.

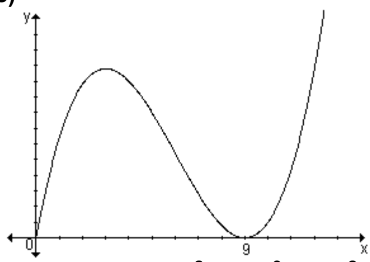
d)



3)a) $0\,\frac{kg}{cm^2}$; $25{,}04\,\frac{kg}{cm^2}$; $64\,\frac{kg}{cm^2}$; $108\,\frac{kg}{cm^2}$; $10\,\frac{kg}{cm^2}$

b) A los 0,39 años (cuatro meses y 20 días), a los siete años y a los10,63 años (10 años, 7 meses y 17 días).

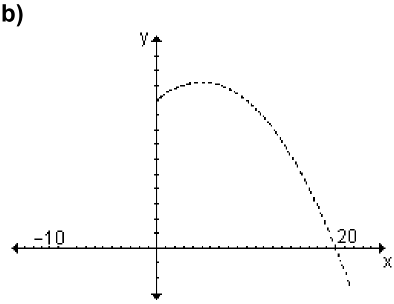
c)



4) $V(x) = (10 - 2x)^2 x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$. La medida de los lados que recorta pueden ser 0, 63 m o 3m.

5)a) $R(x) = (20 - x)(5000 + 500x)$

b)



Para $x = 5$ el ingreso mensual es máximo. El ingreso máximo es $ 112 500.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.4 Función polinomial (pág. 177)

1) c; **2)** b; **3)** c; **4)** d; **5)** a; **6)** a; **7)** c; **8)** b; **9)** d

AUTOEVALUACIÓN Nº 5: Función polinomial (pág. 178)

1) $f(x) = 2(x - 1)(x - 3)(x + 2)$

2) $k = -\dfrac{4}{3}$

3) $k = 4$, $k = -2$

4) Función polinomial de quinto grado. $f(x) = 2\,x^2\,(x + 2)(x + 1)\,(x - 1)$

5) $q(x) = -2x(x + 1)(x - 2)$

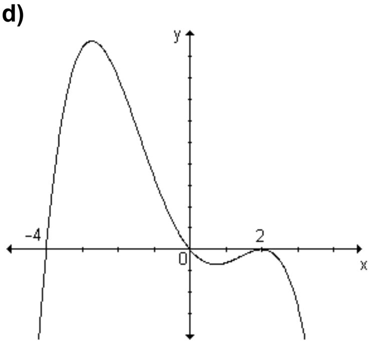
6)a) –4, 0 y 2 (raíz doble)

$p(x) = -\dfrac{1}{4}x(x + 4)(x - 2)^2$

b) Es positivo en $(-4, 0)$ y negativo en $(-\infty, -4) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

c) $p(x) \to -\infty$ si $x \to \pm\infty$,

d)

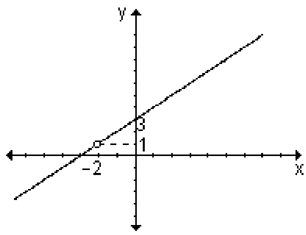


7)a) $x = 3,\ x = -\frac{1}{2},\ x = 2i,\ x = -2i$

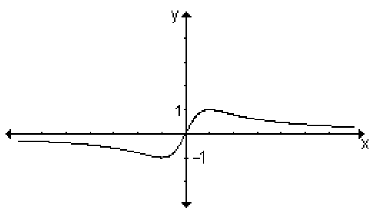
b) $x = -3$ (raíz doble), $x = \frac{1}{3}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.5 Función racional fraccionaria (pág. 192)

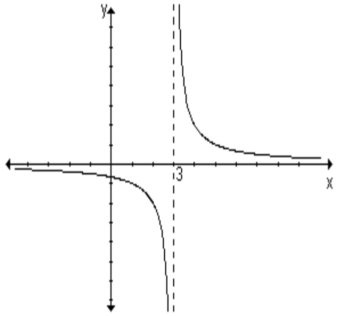
1)a) $D = R - \{-2\}$, no tiene asíntotas



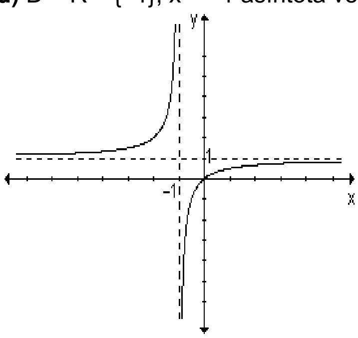
b) $D = R$, no tiene asíntota vertical.
$y = 0$ asíntota horizontal .



c) $D = R - \{3\}$
$x = 3$ asíntota vertical, $y = 0$ asíntota horizontal



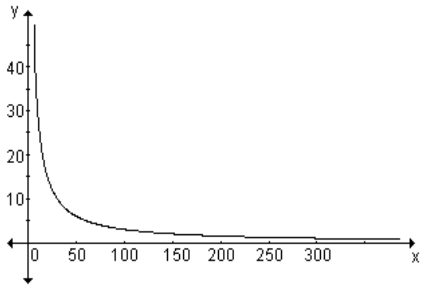
d) $D = R - \{-1\}$, $x = -1$ asíntota vertical, $y = 1$ asíntota horizontal



2)a) $a = 2,\ b = 1$;**b)** $a = 2,\ b = 4$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2.5 Función racional fraccionaria (pág. 192)

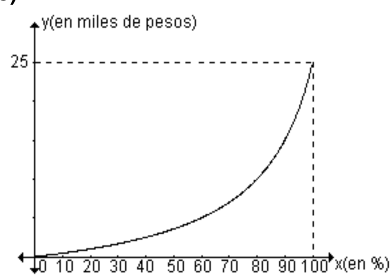
1) $p = \dfrac{300}{x}$, es una función racional fraccionaria.



2)a) El costo de la terapia para lograr una recuperación del 10 % es de 0,454 miles de pesos.

b) El costo de recuperar un 70 % de la funcionalidad es de 7 miles de pesos (7000 pesos).

c)



3) Luego de 45 minutos.

4) $1 < t < 4$ **5)** $4{,}5 < x < 8$

6)a) función escalar algebraica racional fraccionaria; **b)** 750 bacterias

c) 775 bacterias **d)** 20 hs., 5 hs.

7)a) $ 10,83

b) Debe producir menos de cinco cartones.

8) $r < 1$ o $r > 2$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 2.5 Función racional fraccionaria (pág. 194)

1) d; **2)** b; **3)** d; **4)** b; **5)** a; **6)** c; **7)** b; **8)** c; **9)** a; **10)** c

AUTOEVALUACIÓN Nº 6: Función racional fraccionaria (pág. 195)

1)a) $D = R$ **b)** $D = R - \{-2\}$

c) $D = R - \{-4, 4\}$

2)a) $y = 0$ asíntota horizontal, $x = 3$ y $x = -3$ asíntotas verticales.

b) $y = 0$ asíntota horizontal, no tiene asíntotas verticales.

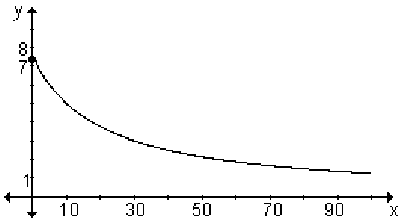
c) $y = 1$ asíntota horizontal, $x = 1$ y $x = -1$ asíntotas verticales.

d) $y = 0$ asíntota horizontal, $x = -3$ asíntota vertical.

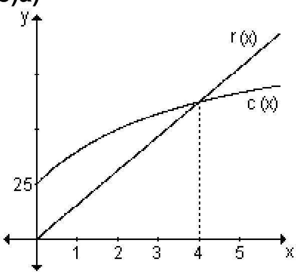
3) El número de descendientes supera al número de padres cuando hay entre 0 y 4000 individuos padres.

4)a) El costo de producir 10 productos es de $ 5, el de producir 50 productos es aproximadamente $ 2,14 y el de producir 100 productos, $ 1,25.

b)



5)a)



b) El punto de equilibrio es en $x = 4$, cuando la empresa produce 400 unidades.

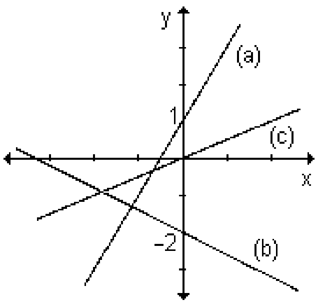
c) $p(x) = \dfrac{125x^2 - 300x - 800}{8(x+4)}$.

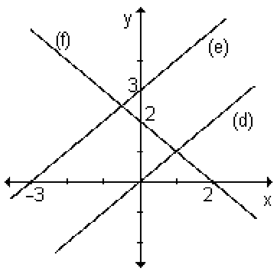
p(1) representa una pérdida y p(6) representa una ganancia.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (pág. 200)

1)a) m = 2, h = 1; **b)** m = $-\frac{3}{5}$, h = –2 **c)** m = $\frac{1}{2}$, h = 0; **d)** m = 1, h = 0

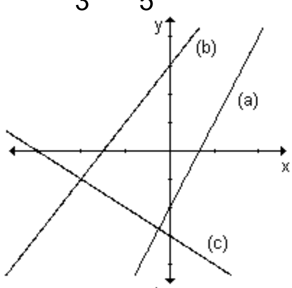
e) m = 1, h = 3; **f)** m = –1, h = 2

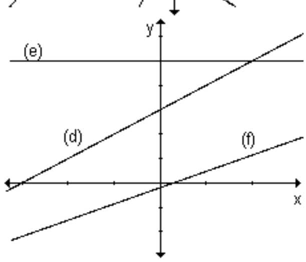




2)a) y = 3x – 2; **b)** y = 2x + 3;
c) y = –x – 3; **d)** y = x + 3; **e)** y = 5;

f) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$



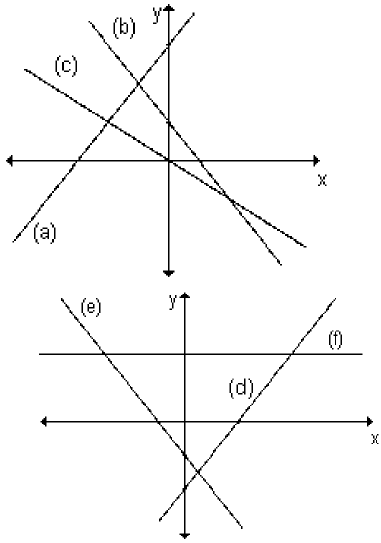


3)a) r : y = x – 1; **b)** m : y = –1;

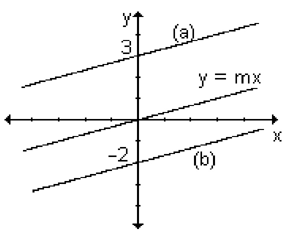
c) s : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; **d)** t : y = 2 – x

e) g : $x = \frac{3}{2}$; **f)** b : y = –x

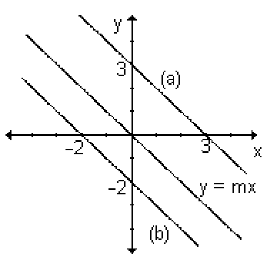
4)



5)a)



b)



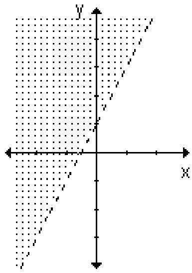
6) Paralelas: a, c y f ; b y e
Perpendiculares: a y b; b y c; c y e; a y e; b y f; e y f
7) r_1: $3x+2y - 6 = 0$; r_2: $2x–3y+9 = 0$; r_3: $2y + 3 = 0$; r_4: $x - 3 = 0$;
r_5: $3x+2y–19 = 0$
8)a) Por ejemplo:

$$P\left(\frac{1}{5}, 2\right); Q\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right); R\left(0, \frac{7}{5}\right)$$

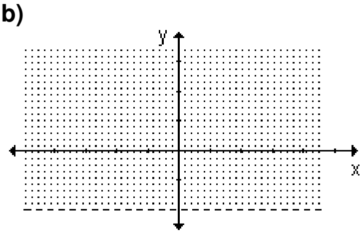
b) Pertenecen P_2 y P_4
9)a) $y = -x + 7$; **b)** $y = x + 4$
10) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{4}$ ó $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-4}$
11) $y = -\frac{1}{2}x - 4$
12) $k = 3$

13) a = –9

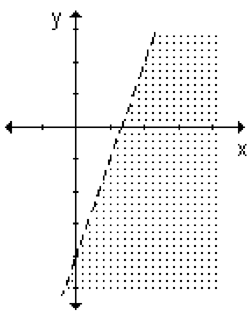
14)a)



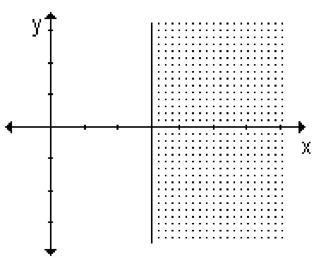
b)



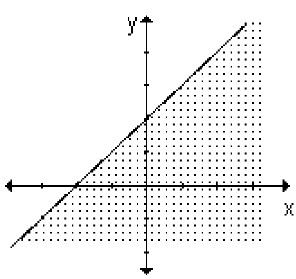
c)



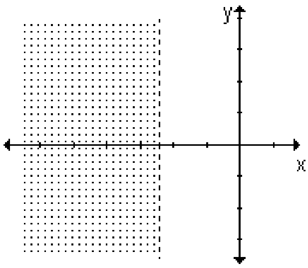
d)



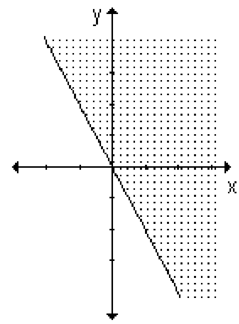
e)



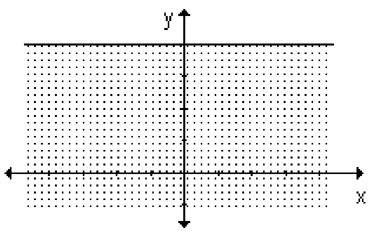
f)



g)



h)



15)a) $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $|a_1| = |a_2|$; $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $|a_1| > |a_2|$
b) $c_1 > 0$, $c_2 < 0$; **c)** $h_1 > 0$, $h_2 < 0$ **d)** $h_1 > 0$, $c_1 < 0$, $h_2 < 0$, $c_2 > 0$
16)a) $a > 0$ (la parábola se abre hacia arriba), $b < 0$ (la abscisa del vértice es positiva y $a > 0$), $c > 0$ (la intersección de la parábola con el eje de ordenadas es positiva)
b) $a < 0$ (la parábola se abre hacia abajo), $b < 0$ (la abscisa del vértice es negativa y $a < 0$), $c < 0$ (la intersección de la parábola con el eje de ordenadas es negativa)

17) $c \geq -\frac{1}{8}$, $c \in R$

18)a) $y = 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$; $V\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$; eje de simetría $x=\frac{2}{3}$;

$P_1\left(\frac{1}{3},0\right)$; P_2 (1,0); P_3 (0,1); $y=-\frac{1}{3}$ (mínimo); $y=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$;

b) $y=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; $V\left(\frac{1}{2},0\right)$; eje de simetría $x=\frac{1}{2}$; $P_1=P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$; $P_3(0,-1)$;

$y=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; $y=0$ (máximo) ;

c) $y=2\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{32}$; $V\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{32}\right)$, eje de simetría $x=-\frac{1}{8}$;

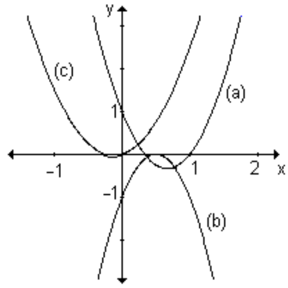
P_1 (0, 0); $P_2\left(-\frac{1}{4},0\right)$; P_3 (0, 0);

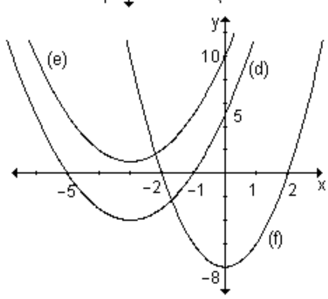
$y = -\dfrac{1}{32}$ (mínimo); $y = 2x\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$

d) $y = (x + 3)^2 - 4$; V(–3, –4); eje de simetría $x = -3$; $P_1(-1, 0)$, $P_2(-5, 0)$, $P_3(0, 5)$;
$y = -4$ (mínimo);
$y = (x + 1)(x + 5)$

e) $y = (x + 3)^2 + 1$; V(–3, 1); eje de simetría $x = -3$; No existe intersección con el eje x; $P_3(0, 10)$; $y = 1$ (mínimo); $y = (x - (-3 + i)).(x - (-3 - i))$

f) $y = 2x^2 - 8$; V(0,–8); eje de simetría; $x = 0$; $P_1(2, 0)$, $P_2(-2, 0)$, $P_3(0, -8)$;
$y = -8$ (mínimo); $y = 2(x - 2)(x + 2)$





19) $p = -\dfrac{1}{4}$

20) $h > 2$ o $h < -2$

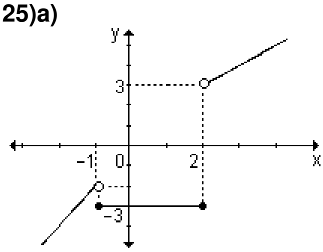
21)a) $k = 12$; $x_2 = 4$; **b)** $k = -7$; $x_2 = 6$

22)a) $k = 9$; $x_1 = x_2 = 3$; **b)** $k = 5$; $x_1 = x_2 = -\dfrac{2}{3}$

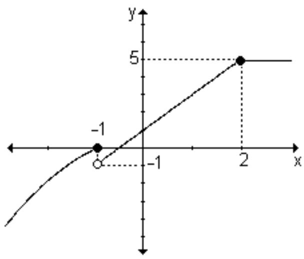
23)a) $x^2 - x - 12 = 0$; **b)** $x^2 - 10x + 25 = 0$ **c)** $x^2 - 4x + 1 = 0$; **d)** $x^2 - 4x + 5 = 0$

24)a) 1; **b)** 4; **c)** 0;
d) $n^4 - 2n^2 + 1 = (n^2 - 1)^2$; **e)** $(3x - 1)^2$;
f) x^2; **g)** $(x - 4)^2$; **h)** $a + b - 3$

25)a)



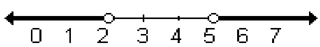
b)



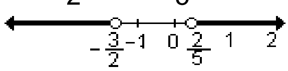
26)a) $1 < x < 7$

b) $-2 \leq x \leq 3$

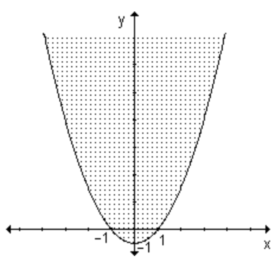
c) $x < 2$ ó $x > 5$



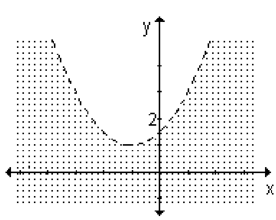
d) $x \leq -\dfrac{3}{2}$ ó $x \geq \dfrac{2}{5}$



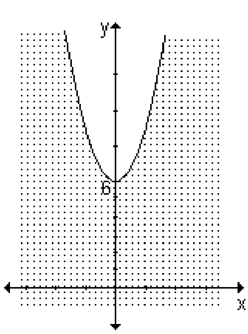
27)a)



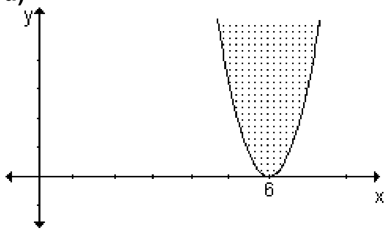
b)



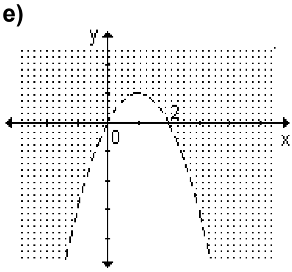
c)



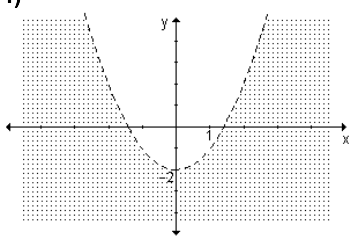
d)



e)



f)



28)a) $x = 0$; **b)** No presenta ceros **c)** No presenta ceros **d)** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

29)a) V; **b)** V; **c)** F; **d)** F; **e)** V; **f)** V

30) $a = 5$;

31)a) $m = -\dfrac{9}{2}$; **b)** $p(x) = 3(x+2)(x-1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

32)a) $p(x) = 2(x - 1)(x + 1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ **b)** $q(x) = -3(x - 1)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$

c) $r(x) = (x-1)^2(x - 3)(x - 2)$

d) $s(x)=6(x+1)^2\left(x + \dfrac{2}{3}\right)(x-3)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

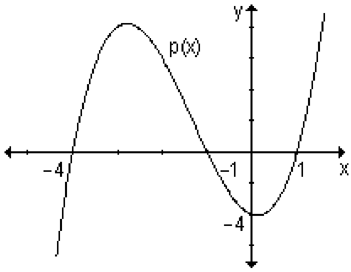
33)a) 4; **b)** $x_5 = 1$; **c)** $p(x)=(x + 2)^4(x - 1)$

34) $p(x) = (x - 2)^2(x + 1)$;

35) c

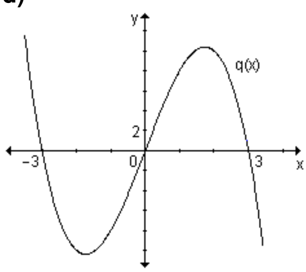
36)i)a) $p(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)$ **b)** En $(-\infty, -4) \cup (-1, 1)$ es negativo.
En $(-4, -1) \cup (1, +\infty)$, positivo. **c)** $p(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$, $p(x) \to -\infty$ si $x \to -\infty$

d)



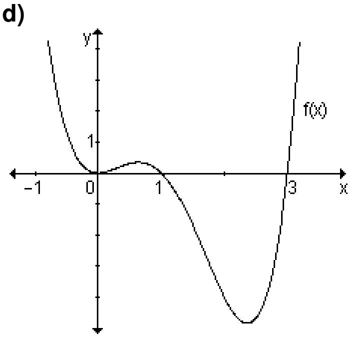
ii)a) $q(x) = -x(x+3)(x-3)$ **b)** En $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ es positivo. En $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$, negativo. **c)** $q(x) \to -\infty$ si $x \to +\infty$, $q(x) \to +\infty$ si $x \to -\infty$

d)



iii)a) $f(x) = x^2 (x-1)(x-3)$ **b)** En $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (3, +\infty)$ es positivo. En $(1, 3)$, negativo.
c) $f(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ si $x \to -\infty$

d)



37)a) $p(x) = (x-1)(x-2)$, la solución no es única.
b) $q(x) = 6x^4 (x-2)$ o bien $q(x) = a_0 (x - 2)^5$, la solución no es única.
c) $r(x) = -9x^2(x+i)(x-i)$ o bien $r(x) = a_0 x^2$ x – 4i) (x + 4i)), la solución no es única.

38) $p(x) = \frac{1}{4} x(x+1)(x-3)$

39) $p(x) = -\frac{1}{4} (x-1)(x-3)(x+2)$

40)a) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -i$, $x_4 = i$

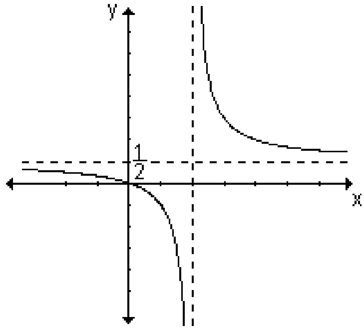
b) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$; **c)** $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2i$, $x_5 = -2i$

d) $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$

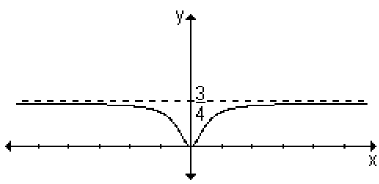
41) $f(x) > 0$ si $-\sqrt{\frac{3}{5}} < x < 0$ o $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$

$f(x) < 0$ si $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$ o $0 < x < \sqrt{\frac{3}{5}}$

42)a) $D = R - \{2\}$, $y = \dfrac{1}{2}$ asíntota horizontal, $x = 2$ asíntota vertical.



b) $D = R$, $y = \dfrac{3}{4}$ asíntota horizontal.



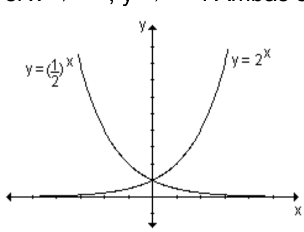
43) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

44)a) $(-3, 2)$ **b)** $(-\infty, -5) \cup (-2, +\infty)$ **c)** $[-1, +2) \cup [4, +\infty)$

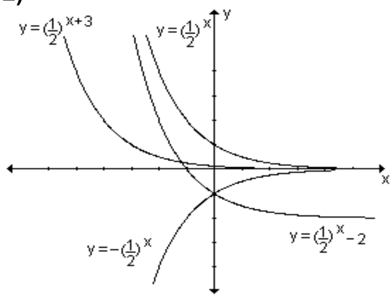
CAPITULO 3: FUNCIONES ESCALARES TRASCENDENTES

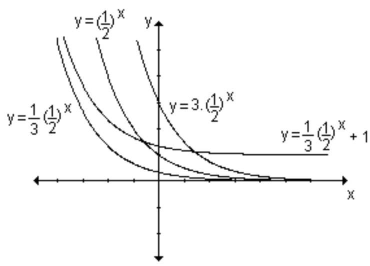
EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 Función exponencial - 3.2 FUNCIÓN LOGÍSTICA - 3.3 Función logarítmica (pág. 246)

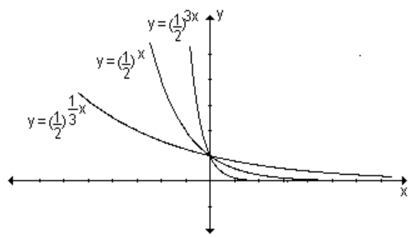
1)a) $D = R$, $CI = R^+$ (para ambas)
b) y_1 es creciente en todo punto, y_2 es decreciente. Las dos funciones pasan por (0, 1). Para y_1: Si $x \to -\infty$, $y \to 0$; si $x \to +\infty$, $y \to +\infty$.
Para y_2: Si $x \to +\infty$, $y \to 0$;
si $x \to -\infty$, $y \to +\infty$. Ambas son simétricas con respecto al eje de ordenadas.



2)



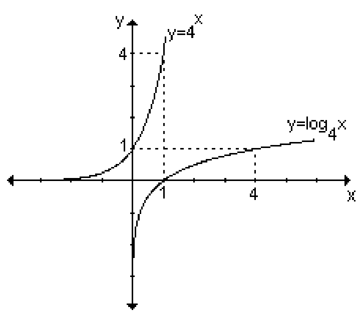




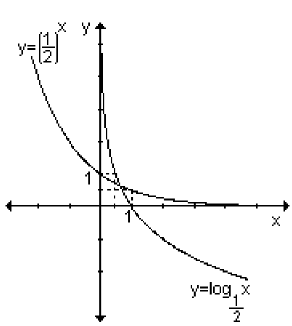
3)a) $a = 3;\ b = \dfrac{1}{3}$;

b) $a = 5;\ b = \dfrac{3}{2}$

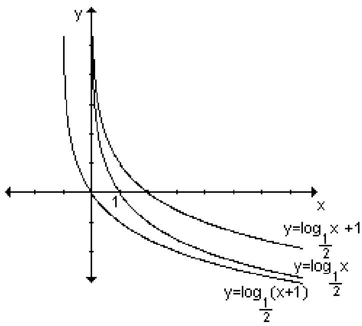
4)a) $f^{-1}: R^{+} \rightarrow R \ /\ y = \log_4 x$

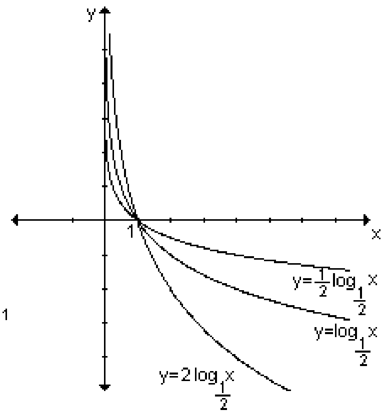


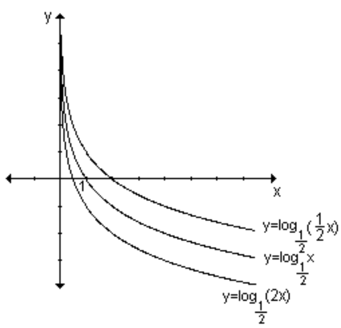
b) $f^{-1}: R \rightarrow R^{+} \ /\ y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$



5)







6) $\frac{71}{10}, -\frac{2}{3}$

7)a) 4,9; **b)** 3,32; **c)** 5,32; **d)** 6,22; **e)** 3,58; **f)**1,42

8)a) $x = 0$ ó $x = -\frac{1}{2}$; **b)** $x = 1$ ó $x = 3$; **c)** $x = 2$ ó $x = -1$; **d)** $x = 0$;

e) $x = 4$; **f)** $x = \frac{1}{2}$ ó $x = \frac{9}{2}$; **g)** $x = 2$; **h)** $x = 5$;

i) no existe solución; **j)** $x = 1$, $x = 125$

9) a) (1, 2); **b)** (2, 3) ó (–2, 3)

10) M = 12, k = 2

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 3.1 Función exponencial – 3.2 Función logística - 3.3 Función logarítmica (pág. 247)

1)a) r = 103,5 miles de millones; **b)** t = 1,99 años.

2) p = 271 828

3)a) $k \approx 0{,}0103$; **b)** $p \approx 376$ millones.

4) $t \approx 30$ días

5) $k = 9{,}37.10^{-3}$

6)a)

t	0	1	2	3	4	5
f(t)	1 000	2 000	4 000	8 000	16000	32000

b) $f(t) = 1000.2^t$;

c) $f(50) = 1{,}126.10^{18}$ bacterias;

d) t = 4,9 horas

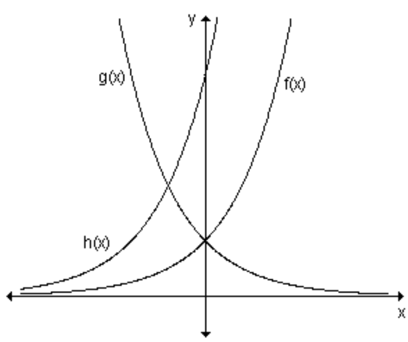
7)a)

t	0	1	2	3	4	5
P	0	252	345	380	392	397

b) no; **c)** no tiene solución; **d)** 1,38 días
8)a) $p = p_0\ e^{0,8t}$; **b)** 0,87 $\approx$ 1 día
9)a) $k = 0{,}058$; **b)** $t = 31$ días
10)a) 667 bacterias; **b)** 13 bacterias; **c)** 8,83 $\approx$ 9 días; **d)** 7,67 $\approx$ 8 días
11)a) $k = -0{,}045$; **b)** $y = 6{,}38$ g
12)a) En 1900: $m = 1{,}4$; en 2000: $m = 1{,}96$; en 1600: $m = 0{,}51$; en 1550: $m = 0{,}43$
b) 2100 y 1500, aproximadamente
13) $p_0 = 77{,}82$ mgrs.
14)a) $e = 2{,}5\ 10^{11}\ 10^{1,5m}$ o bien $e = 10^{1,5m + \log 2,5.10^{11}}$;
b) $e = 2{,}5\ 10^{1,5m+11}$;
c) $e = 2{,}5.10^{14}$ ergios.
15)a) $k \cong 0.0103$; **b)** 376 millones
16) 0,4 g
17)a) $m = \$\ 29\ 836{,}49$; **b)** $t = 2$ años, 9 meses y 14 días.
18) $t = 7$ años, 8 meses y 12 días
19) $r = 13{,}86\%$ **20)** $p = \$\ 4303{,}5$
21)a) 666 863 bacterias; **b)** 13 498 bacterias; **c)** 1,83 días
22)a) Función logística; **b)** h máx = 120 pies; **c)** h $\approx$ 4,27 pies; **d)** t $\approx$ 25 años
23) $s = 12{,}4\ a^{0,26}$
24) $p = 3$
25) $n \cong 182$ células
26) $y = 5{,}934\ x^{0,885}$
27)a) $e = 10^{1,4+1,5r}$; **b)** $e = 10^{14}$ ergios
28) $r = \dfrac{\log s - \log s_0}{\log(1+c)}$
29) 64,9 decibeles
30)a) 26 749 años; **b)** 30 %

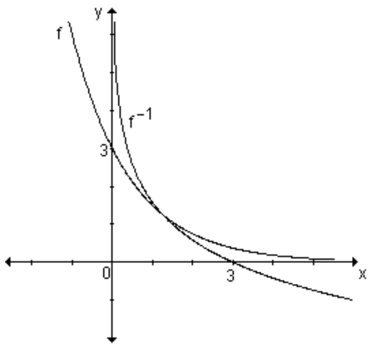
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 3.1 Función exponencial. 3.3 Función logarítmica (pág 251)
1) b; **2)** a; **3)** c; **4)** a; **5)** d; **6)** b; **7)** a; **8)** c; **9)** b; **10)**d; **11)**a; **12)** d;**13)** d; **14)** c; **15)** b; **16)** c

AUTOEVALUACIÓN Nº 7: FUNCIÓN EXPONENCIAL. FUNCIÓN LOGARÍTMICA. FUNCIÓN LOGÍSTICA (pág 252)
1) Se trata de una función exponencial con a > 1, $a \in R$.



2) $D = (3, +\infty)$

3)a) $f(x) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **b)** Admite inversa, $f^{-1} : R^+ \to R \,/\, f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{3}$



4) $M = 300$, $k = 4$, $a = 2$

5)a) escucharon el rumor aproximadamente 571 estudiantes **b)** a los 7 días

6) $x = 8$

7)a) Función exponencial. **b)** $k = \dfrac{\ln 0{,}8}{5}$ **c)** 6,37 gramos **d)** 15,4 años.

8) 1,3 minutos

9)a) $y = 107 \cdot 1{,}67^x$ **b)** 3 045 882 células

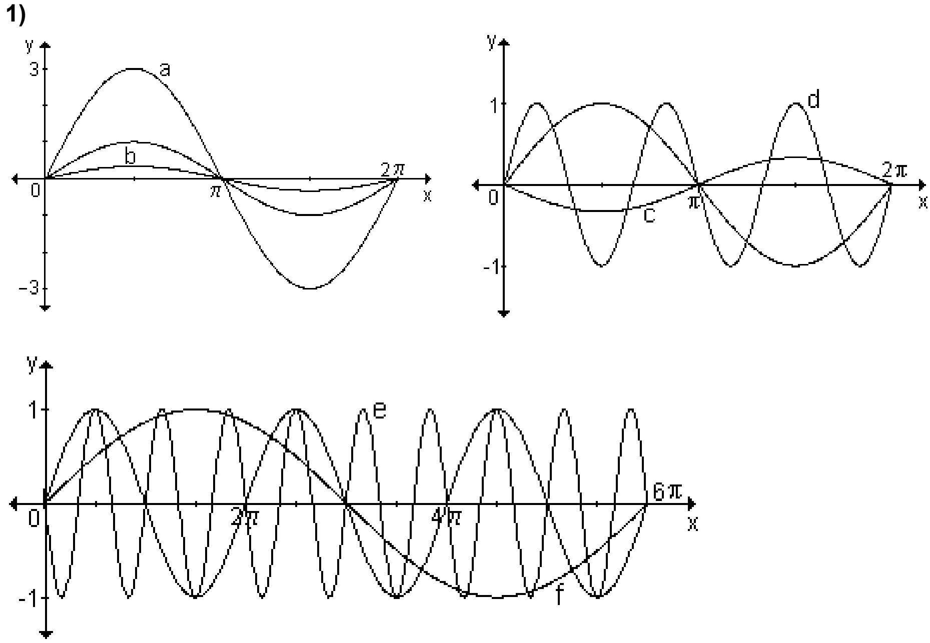
10) 12 días

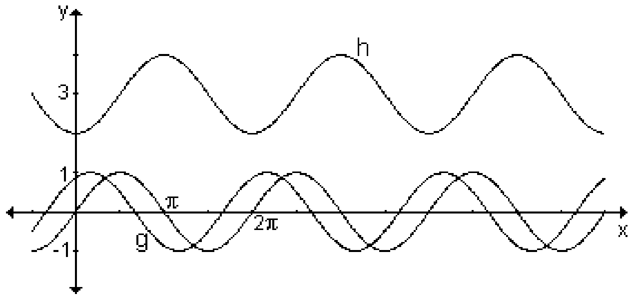
11)a) $p = 4.e^{1{,}8a}$ **b)** 85,3 kg.

12)a) Función logística **b)** 2392 días

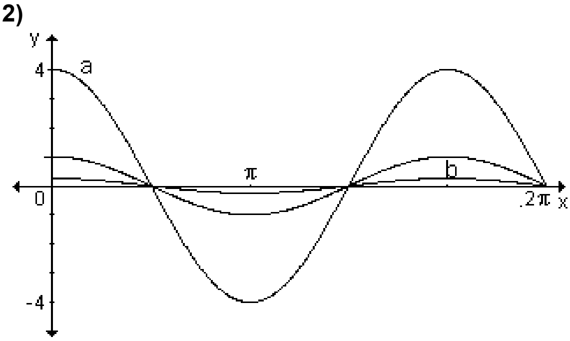
EJERCICIOS INTEGRADORES 3.4 Funciones trigonométricas (pág. 277)

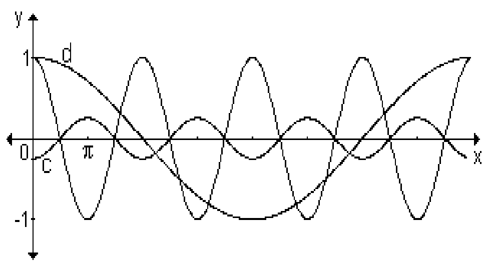
1)

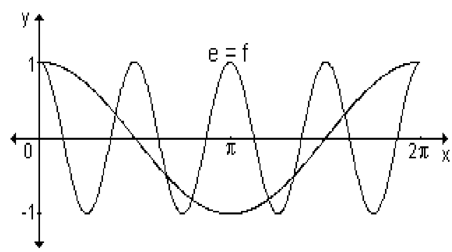


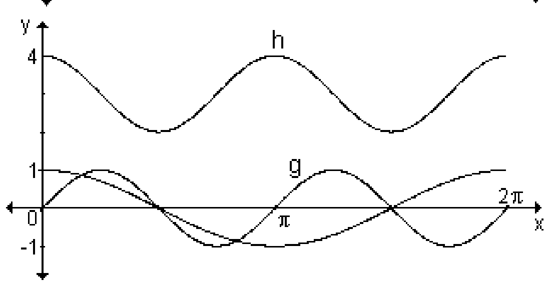

y
h
3
1
π
2π
x
g
-1

2)

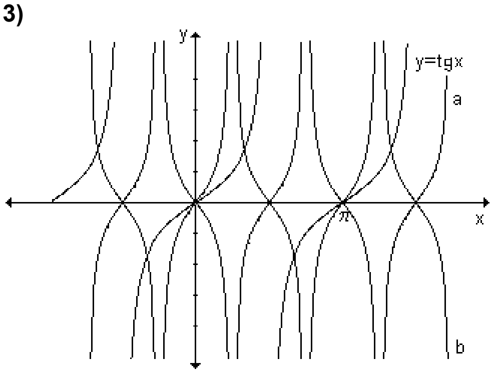

y
4
a
π
b
0
2π
x
-4

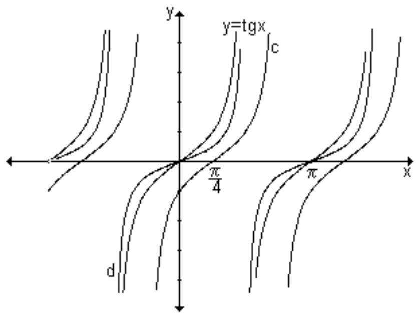

y
1
d
0
c
π
x
-1


y
1
e = f
0
π
2π
x
-1


y
4
h
1
g
0
π
2π
x
-1

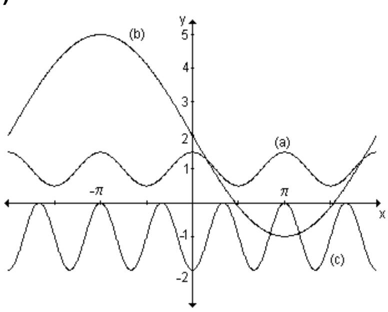
3)


y
y=tgx
a
π
x
b

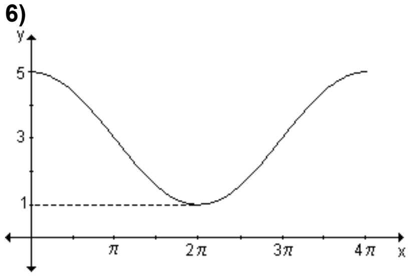


4)a) iv; **b)** ii; **c)** iii; **d)** i

5)



6)



período $p = 4\pi$, amplitud $a = 2$, fase $c = 0$

7) $y = -3\cos(2x)$ amplitud $a = 3$, período $p = \pi$, fase $c = 0$

8) $y = 1 + 2\text{sen}(2x)$ amplitud $a = 2$, período $p = \pi$, fase $c = 0$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN 3.4 Funciones trigonométricas (página 279)

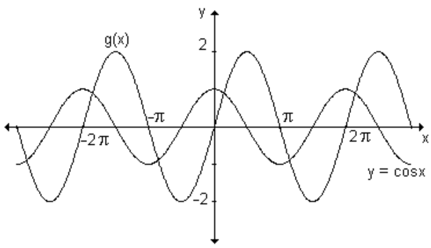
1)a) La temperatura máxima es de 15º; **b)** La temperatura mínima es de –5º;
c) 6,28 meses; **d)** Al inicio y cada 3,14 meses
2)a) función trigonométrica; **b)** $f(6) = f(18) = 22$ºC; $f(12) = 27$ºC
c) La temperatura diaria máxima es de 27ºC **d)** La temperatura diaria mínima es de 17ºC; **e)** cada 24 horas.

3) $f(t) = 0{,}6\ \text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$

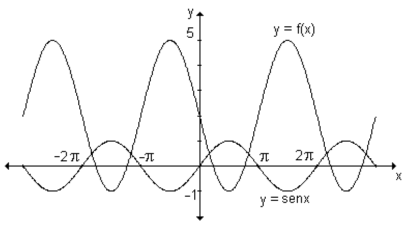
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE 3.4 Funciones trigonométricas (página 279)
1) b; **2)** d; **3)** a; **4)** c; **5)** c; **6)** b ; **7)** a

AUTOEVALUACIÓN Nº 8 Funciones trigonométricas (página 280)

1) Amplitud: 2 Período: 2π Fase: $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda



2) Amplitud: 3
Período: 2π
Fase: π unidades hacia la izquierda

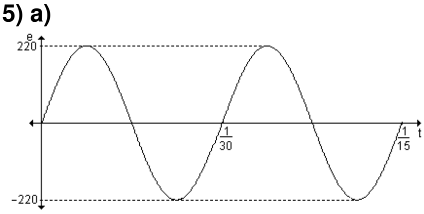


3)a) Función trigonométrica
b) A las 12 hs es de 27 ºC. A las 18 hs es de 20 ºC.
c) La temperatura máxima es 27ºC
d) Desfasamiento: 6 hs

4) $y = 2\text{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

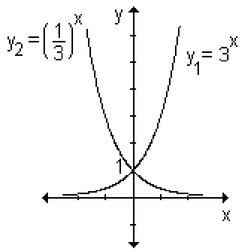
Amplitud: 2
Período: 4π
Fase: π unidades hacia la derecha

5) a)



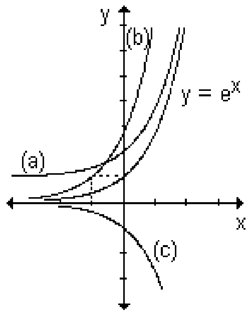
b) amplitud: 220, período: $\frac{1}{30}$, fase: 0

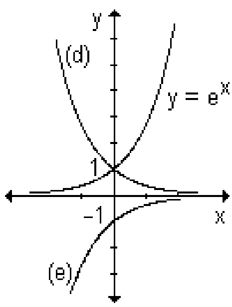
EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (pág. 285)
1)a)

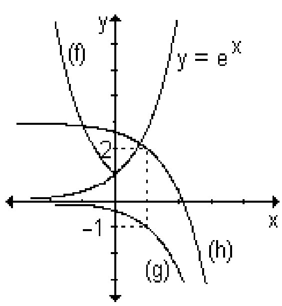


b) y_1 es creciente para todo valor de x, y_2 es decreciente.
Para y_1 : Si $x \to -\infty$, $y \to 0$

Si $x \to +\infty$, $y \to +\infty$
Para y_2 : Si $x \to -\infty$, $y \to +\infty$
Si $x \to +\infty$, $y \to 0$
c) $D = R$, $CI = R^+$
d) Para el dominio y el conjunto de imágenes definidos en **(c)** ambas funciones admiten inversa.
2)







3)a) $a = \frac{1}{2}$, **b)** $a = 4$
4)a) $y = 1{,}2^x$

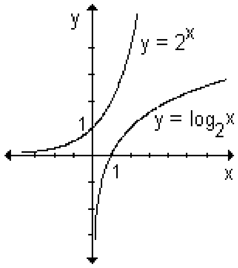
x	1	2	3	5	10
y	1,2	1,44	1,728	2,48833	6,1917364

b) $y = 0{,}3^x$

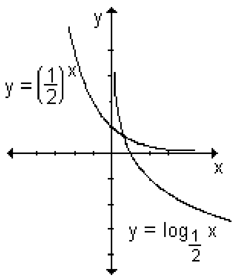
x	1	2	3	4	5
y	0,3	0,09	0,027	0,0081	0,00243

5)a) $D = R$ **b)** $D = R - \{0\}$ **c)** $D = R$

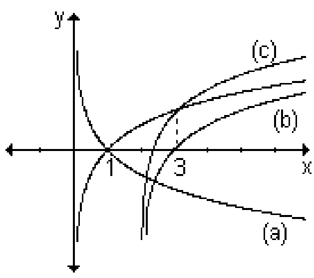
6)a)



b)



7)



8)a) 3; **b)** –2; **c)** 2; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $-\frac{3}{2}$; **g)** $\frac{3}{2}$; **h)** $\frac{43}{10}$

9)a) 1,4650; **b)** 1; **c)** 0,6826; **d)** 2,0794; **e)** 2,7213; **f)** $-\frac{1}{2}$

10) Sí, $x = 1$

11) Los logaritmos son negativos para los valores de x comprendidos entre 0 y 1

12)a) $y > 0$ para los valores de x comprendidos entre 0 y 1;

b) $y < 0$ para los valores de x mayores que 1; **c)** $y = 0$ para $x = 1$.

13)a) $\log x = \log 5 + \log a + \log b$ **b)** $\log y = \frac{1}{3}(\log a + 2\log b - \log c)$

c) $\log x = -2 \log a - \frac{1}{2}\log b - 3 \log c$ **d)** $\log x = \log 3 + \log a - \log (b^2 - a)$

e) $\log y = 3\log a + 2\log b$ **f)** $\log x = \frac{1}{2} \log a + 2\log b - \frac{2}{3}\log c$

14)a) 2,73; **b)** 1,47; **c)** 0,84; **d)** 1,63; **e)** –0,83; **f)** 4,2

15)a) 2; **b)** 73; **c)** $\log m.a^{-\frac{3}{2}}$; **d)** 1,37; **e)** $\log a^3.b^{\frac{1}{3}}$; **f)** $\log \sqrt{\frac{x}{y^3}}$

16)a) –2; **b)** 9; **c)** $\sqrt[3]{16}$; **d)** $\frac{3}{2}$; **e)** 1; **f)** $\frac{1}{8}$; **g)** 2,117; **h)** 0,1353; **i)** 64

17)a) x = –1; **b)** x = –3 ó x = 2; **c)** x = 2 ó x = 1; **d)** x = 8,0839;

e) x = –3 ó x = 2 ; **f)** x = 2 ó x = 1; **g)** x = 0,3663; **h)** x = 2 ó x = –1;

i) x = 3 ó x = 2; **j)** x = 2; **k)** x = 4 ó x = 3; **l)** x = 2,0244

18)a) x = 6; **b)** x = 5;**c)** x = 3; **d)** x = 30; **e)** x = 3; **f)** x = 7; **g)** No tiene solución;

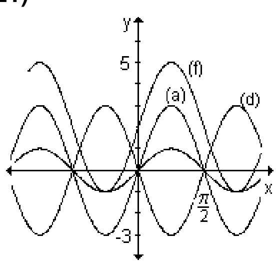
h) x = 1 ó x = 32; **i)** x = 1 ó x = 100; **j)** x = 2,3 ó x = –1,3; **k)** x = 3

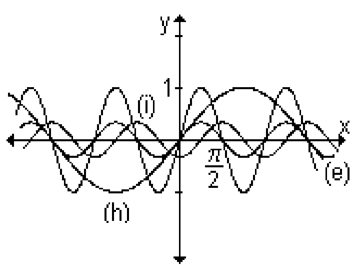
19)a) x = 9 , y = $\frac{1}{3}$; **b)** a = 1 , b = 2; **c)** x = –3 , y = 2

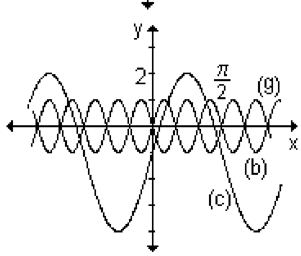
20)a) c = 4, k = –0,416;

b) c = 0,67, k = 0,402

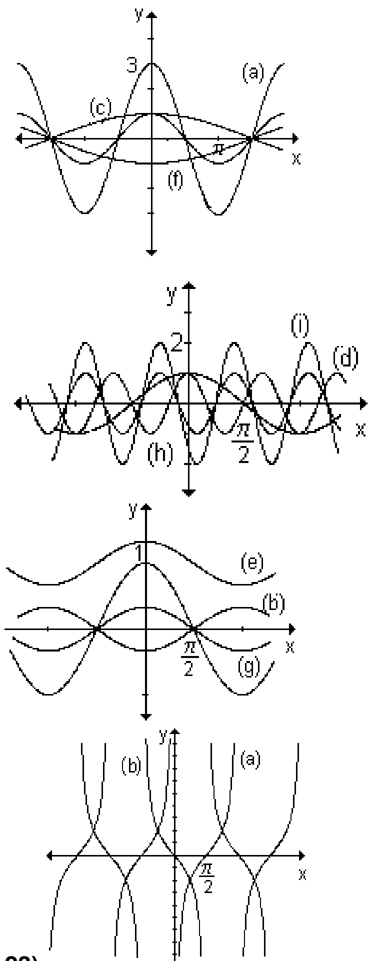
21)



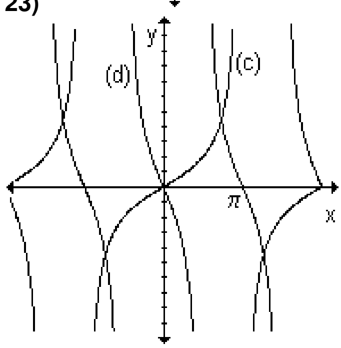




22)



23)

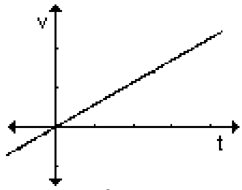


24)i)a) y = h(t); **b)** y = f(t); **c)** y = g(t)
ii)a) y = g(t); **b)** y = h(t); **c)** y = f(t)
25)i)a) Amplitud: 4, Período: 2π **b)** $y = 4\text{sen}(x + \pi)$ **c)** Desfasamiento: π

ii)a) Amplitud: 3, Período: π ; **b)** $y = 3\text{sen}(2x+\frac{\pi}{2})$; **c)** Desfasamiento: $\frac{\pi}{4}$

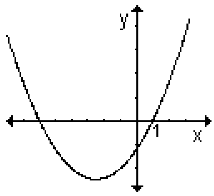
PROBLEMAS INTEGRADORES Funciones (pág. 290)

1)a) $y = \frac{5}{9}x$



b) 83,33 m^3

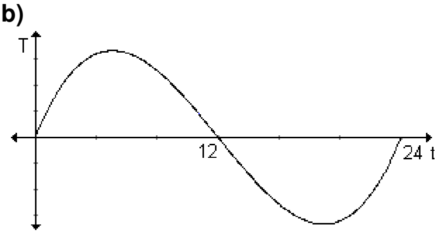
2)a) $b(x) = 2x^2 + 10x - 12$



b) más de un kilo; **c)** 7 kg.

3)a) $T > 0$ si $0 < t < 12$; $T < 0$ si $12 < t < 24$

b)



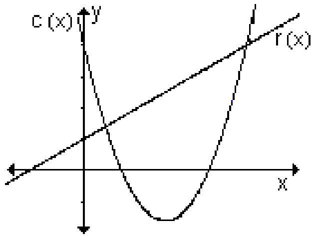
4)a) $k = -0,00012$; **b)** $t = 11\,552$ años

5)a) $m = 5$; **b)** $I = I_0 \,.\, 10^{\frac{6-m}{2,5}}$

$I = I_0 \,.\, 10^{\frac{12-2m}{5}}$

6)a) 0,4 tn y 3 tn; **b)** obtiene una pérdida; **c)** entre 0,4 tn y 3 tn

d)

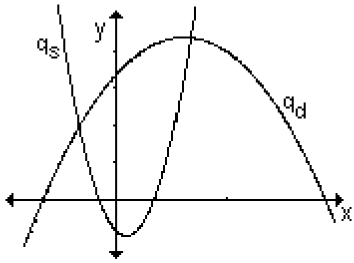


7)a) $p(t) = \dfrac{40}{1+12.e^{-0,02.t}}$; **b)** 6258 millones; **c)** en el año 2030

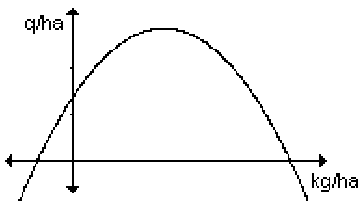
8)a) 110; **b)** $x = 50$; **c)** $x = 85$

9)a) $y = 10.e^{-0,045t}$; **b)** 8 g.

10)a)



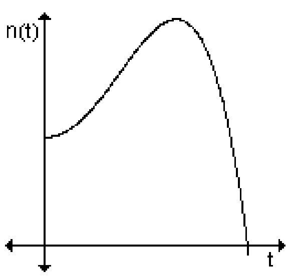
b) \$2,73; **c)** la ofrecida.
11) p(0) = 1,96; p(20) = 12,86; p(40) = 52,15
12)a) y = 0,06x + 4; **b)** recta; **c)** 13 mm; **d)** 400 grs.
13)a)



b) El rendimiento máximo será 17 $\frac{q}{ha}$ para una dosis de 3 $\frac{kg.}{ha}$;

c) el rendimiento será nulo para una dosis de 7,12 $\frac{kg.}{ha}$.

14)a) t < 5. La población se extingue para t = 5.
b)



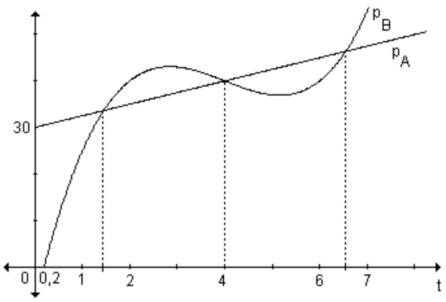
c) r = 0 si $t = \sqrt{\frac{21}{2}}$;

r > 0 para $0 < t < \sqrt{\frac{21}{2}}$

15)a) función exponencial;
b) 300 000 dólares
c) 189 736,66 dólares; **d)** 7,56 años.
16)a) x = 10; x = 20; x = 30;
b) p = 0,30 (exportado)
17) Para que la ganancia sea de \$ 1200 deberá fabricar 60 unidades.
18)a) $y = 19\,915.e^{0,6.t}$; **b)**19 915 ; **19)** $\frac{7}{10}$

20a) Sí, a la semana y media y a las seis semanas y media, aproximadamente.

b)

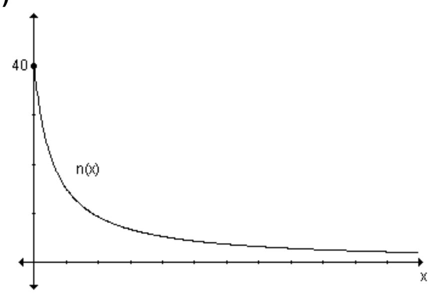


c) La población A es mayor que la población B hasta la semana y media y entre las cuatro semanas y las seis semanas y media, aproximadamente. Es menor entre la semana y media y las cuatro semanas y luego de las seis semanas y media.

21) 20 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

22)a) 20 000, 10 000 y 8000 suscriptores.

b)



c) La asíntota horizontal es y = 0. Con el transcurso de los meses el número de suscriptores tenderá a ser nulo.

23)a) La proporción de la población que hará donaciones después de 10 días de iniciada la campaña es de 0,275428538 es decir el 27,54 % de la población. Después de 20 días ascenderá al 44,25 % aproximadamente.

b) Concluimos que como máximo el 70 % de la población realizará donaciones a medida que transcurran los días de iniciada la campaña.

24)a) El volumen de ventas será aproximadamente 6321,21 dólares al mes.

b) Las ventas descendieron de 3934,70 dólares a 951,63 dólares es decir 2983,07 dólares menos. Podemos decir entonces que las ventas decrecieron prácticamente en un 75,81 %.

Bibliografía

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L.: *Matemática 1. Funciones 1,* Longseller, Buenos Aires, 2002.
Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L.: *Matemática 2. Funciones 2,* Longseller, Buenos Aires, 2002.
Ayra, J. y Larner, R.: *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1992.
Anton, H.: *Cálculo y Geometría Analítica*, Limusa, México, 1991.
Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E.: *Cálculo Diferencial e Integral*, Editorial Síntesis, España, 1996.
Baum, A.; Milles, S. y Schultz, H.: *Cálculo Aplicado*, Limusa, México, 1992.
Bittinger, M.: *Cálculo. Para Ciencias Económicas-Administrativas,* Séptima Edición, Pearson Educación, Colombia, 2002.
Budnick, F.: *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Tercera Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1997.
Burgos, J.: *Funciones I: problemas resueltos y propuestos*, cuaderno de actividades, Mc. Graw Hill, España, 1997.
Burgos, J.: *Funciones II: problemas resueltos y propuestos*, cuaderno de actividades, Mc. Graw Hill, España, 1997.
Cardus, D.: *Introducción a las Matemáticas para Médicos y Biólogos*, Editorial Vicens Vives, España, 1972.
Cordero, F. y Solís, M., *Las gráficas de las funciones como una argumentación al cálculo*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1995.
Douglas Faires, J. y De Franza, J.: *Precálculo*, Segunda Edición, International Thomson Editores, Méjico, 2001.
Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M.: *Matemática Básica - Volumen 1. Funciones*, Centro de Publicaciones. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, 2002.
Farfán, R. y Albert, A.: *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1995.
Fleming, W. y Varberg, D.: *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1991.
Gómez, P. y Mesa, V. (editores): *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas,* Una Empresa Docente, Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, 1995.
Goldstein, L.; Lay, D. y Schneider, D.: *Cálculo y sus Aplicaciones*, Cuarta Edición, Prentice Hall, Méjico, 1990.
Goodson, C. y Miertschin, S.: *Algebra con aplicaciones técnicas*, Limusa, México, 1991.
Guzmán, M.: *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*, Olimpíada Matemática Argentina, Buenos Aires, 1992.
Guzmán, M. y Colera, J.: *Matemáticas I - C.O.U.*, Grupo Anaya, Madrid, 1989.
Guzmán, M. y Colera, J.: *Matemáticas II - C.O.U.*, Grupo Anaya, Madrid, 1989.
Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 1*, Grupo

Anaya S.A., Madrid, 1993.
Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 2*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.
Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 3*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.
Hadeler, K.: *Matemática para Biólogos*, Reverté, Barcelona, 1982.
Haeussler, E. y Paul, R.: *Matemáticas para Administración y Economía*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1987.
Hoffman,L.; Bradley, G.: *Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales,* Séptima Edición, Mc. Graw Hill, Colombia, 2001.
Hughes–Hallet, D.; Gleason, A.; et al.: *Cálculo*, CECSA, Segunda Edición, Méjico, 2001.
Lang, S.: *Cálculo I*, Fondo Educativo Iberoamericano, Méjico, 1986.
Larson, R.; Hostetler, R.; Edwards, B.: *Cálculo y Geometría Analítica*, Volumen 1, Quinta Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1995.
Leithold, L.: *Álgebra*, Editorial Harla, Méjico, 1995.
Leithold, L.: *Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Harla, Méjico, 1987.
Lial, M. y Hungerford, T.: *Matemáticas para administración y economía. En las ciencias sociales, naturales y de administración,* Séptima Edición, Pearson Educación, México, 2000.
Peterson, J.: *Matemáticas básicas. Álgebra, trigonometría y geometría analítica*, CECSA, México,2001.
Phillips, E.; Butts, T.; Shaughnessy, M.: *Álgebra con aplicaciones*, Harla, Méjico, 1988.
Purcell, E. y Varberg, D.: *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1995.
Purcell, E. y Varberg, D.: *Cálculo Diferencial e Integral*, Sexta Edición, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1993.
Salas, Hille y Etgen: *Calculus. Una y varias variables, Volumen I,* 4ta. Edición, Editorial Reverté, Barcelona, 2002.
Smith, S.; Charles, R.; Dossey, J.; Keedy, M. y Bittinger, M.: *Álgebra y trigonometría*, Addison Wesley Longman, Méjico, 1998.
Smith, R. y Minton, R.: *Cálculo. Tomo 1,* Mc. Graw Hill, Colombia, 2000.
Sobel, M. y Lerner, N.: *Álgebra*, Cuarta Edición, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1996.
Stein, S.: *El cálculo con Geometría Analítica*, Mc. Graw Hill, Méjico, 1984.
Stewart, J.: *Cálculo. Conceptos y contextos*, International Thomson Publishing, México, 1999.
Stewart, J.; Redlin, L.; Watson, S.: *Precálculo,* Tercera Edición, Thomson Learning, México, 2001.
Sullivan, M.: *Precálculo*, Cuarta Edición, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley, México, 1997.
Swokowski, E. y Cole, J. : *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Tercera Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico , 1996.
Swokowski, E. : *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1987.
Tan, S.T.: *Matemáticas para administración y economía,* Segunda Edición,

Thomson Learning, Méjico, 2002.
Thomas, G. y Finney, R.: *Cálculo. Una variable,* 9ª Edición, Pearson Educación, Addison Wesley Longman, Méjico, 1998.
Waner, S.; Costenoble, S.: *Cálculo Aplicado,* Segunda Edición, Thomson Learning, México, 2002.