ZENON DE ELEAS Y EL OBISPO BERKELEY

La matemática es la ciencia del infinito. Toda su larga historia es la accidentada aventura de este concepto, común a poetas y filósofos, a veces presente y triunfante, a veces reprimido y vencido.

Cada vez que el hombre intenta eliminarlo o reducirlo a otros conceptos, se remueven los fundamentos de la matemática, sobrevienen las «crisis», después de las cuales la ciencia parece resurgir purificada, desinfinitizada. hasta que el infinito, como los genios malos de las fábulas, reaparece con otro disfraz.

En este ensayo, a la manera de Spengler, compararemos dos de esas crisis producidas en la Antigüedad y en Occidente, bajo los signos culturales apolíneo y fáustico.

El infinito penetra en el campo de la matemática helénica como los griegos en Troya, pero por su puerta principal: el teorema de Pitágoras.

Este célebre teorema, cuya demostración original no se conoce, fué sin duda demostrado por los pitagóricos sólo para el caso en que los lados del triángulo fueran conmensurables entre sí, como sucede, por ejemplo, en el clásico triángulo, que todas las culturas antiguas conocieron, de lados proporcionales a 3, 4 y 5.

En efecto, los pitagóricos no conocían más números que los enteros y fraccionarios positivos, y en concordancia con su postulado metafísico: «las cosas son números», concebían el punto como «unidad que tiene una posición» y las magnitudes como suma de puntos.

Pero al aplicar el teorema de Pitágoras al armonioso y simétrico cuadrado, encontraron que era imposible expresar mediante un «número» la relación entre la diagonal y el lado, propiedad que hoy enunciamos diciendo que esos dos segmentos son inconmensurables entre sí. Nacieron así esas magnitudes «inexpresables» (alogos) que, debido a la doble acepción del «logos» griego, una mala traducción latina convirtió en «irracionales», nombre con que hoy las designamos.

El descubrimiento de los irracionales, esas cosas que no eran números, conmovió profundamente la escuela pitagórica; la secta impuso el secreto sobre ese escándalo y una leyenda cuenta que Hipaso, que desobedeció la orden, fué alcanzado por la ira de los dioses y pereció en un naufragio.

Las primeras propiedades de esas magnitudes irracionales demostraron su íntima conexión con el infinito. En efecto, al aplicarles el mismo proceso, mediante el cual se obtenía el máximo común divisor de dos números enteros, resultaba, al revés de lo que ocurría con los números, que ese proceso no tenía fin, es decir, era infinito, exigiendo al mismo tiempo, la divisibilidad infinita de esas magnitudes.

Esta última propiedad que, desde el punto de vista puramente matemático, representaba una conquista, contradecía, en cambio, la hipótesis monádica de los pitagóricos, que concebían las magnitudes constituídas por una pluralidad, numerosa pero finita, de partes. A debilitar aun más la posición filosófica de los pitagóricos, contribuyeron los eleatas, especialmente Parménides y Zenón, cuya influencia en la evolución posterior de la matemática es singularmente importante.

Parménides con su doctrina del ser inmutable, contínuo e indivisible y con la distinción neta que establece entre lo inteligible y lo sensible, entre la verdad y la opinión, abre el camino a la concepción idealista de los entes matemáticos, tendiendo un puente entre el «sustratum» pitagórico y el «abstractum» platónico.

La tesis de Parménides fué sostenida brillantemente por su discípulo Zenón, quien con sus célebres argumentos contra la pluralidad y el movimiento da a la razón tal primacía que llega hasta a negar las apariencias de los fenómenos. Con el poderoso recurso lógico que es su dialéctica, al mismo tiempo que sigue las huellas del maestro negando, con la fuerza de la razón, el cambio y el movimiento tal como lo denuncian los sentidos, refuta terminantemente la hipótesis pitagórica de la pluralidad.

De sus cuatro argumentos contra el movimiento, dos tienen un carácter más matemático: la dicotomía y el Aquiles, que sólo difieren en la manera de realizar la división de las magnitudes y en que el segundo está presentado en forma más viva y colorida. Este último argumento es bien conocido: La tortuga, por lento que sea su andar, no será jamás alcanzada por Aquiles, el de los pies ligeros, que la persigue. Pues Aquiles deberá ocupar sucesivamente todas las posiciones que antes ocupó la tortuga y entre los dos corredores existirá siempre una cierta distancia.

Es extraordinaria la habilidad con que Zenón, en este argumento, dramatiza el proceso «técnico» de la divisibilidad infinita, característico de las magnitudes inconmensurables, haciéndolo conocer así a los filósofos no matemáticos, y deduciendo de él la negación de lo más evidente para el común de los mortales: el movimiento. Esta negación tiene un doble alcance, por un lado indica que la verdad no está en los datos sensibles, y por otro lado contradice la hipótesis pitagórica, pues concebidas las distancias como suma de partes, cada una de ellas finita, Aquiles, para alcanzar la tortuga, deberá recorrer infinitas de esas partes y por lo tanto una distancia infinita.

A la objeción que también el tiempo, concebido entonces como suma de instantes, podía ser dividido al infinito, lo que no impediría la correspondencia entre tiempo y espacio, opone Zenón los otros dos argumentos: la flecha en el aire y el estadio.

La crítica de Zenón fué de una gran importancia para la matemática y, a través de su aspecto negativo, contribuyó a adquirir varios resultados positivos; así el método por reducción al absurdo, tan frecuente en la matemática, es una consecuencia del principio de contradicción, eje de los raciocinios de Zenón; el proceso dicotómico fué utilizado como recurso de demostración; y, por último, se desprendió de esos argumentos, un resultado «técnico»: el valor de la suma de una serie geométrica convergente, primera contribución de carácter infinitesimal que se debe a los griegos.

Por otra parte, esa crítica mostró los peligros que encerraba, para la matemática, la presencia del infinito, ese indeseado y tan poco grato huésped para el espíritu helénico, y que algunas pseudo-demostraciones de sofistas posteriores acentuaron.

Se dispusieron, pues, los matemáticos griegos, a desterrar el infinito de su ciencia, lográndolo por obra especialmente de Eudoxo del IV antesiglo. La labor científica de Eudoxo muestra una vez más la vinculación entre el problema de los irracionales y el infinito, pues con su teoría de las proporciones, en íntima conexión con su método de exhaución, logra al mismo tiempo evitar el Scilla de las magnitudes inconmensurables y el Caribdis del infinito. Con Eudoxo las magnitudes irracionales adquieren iguales derechos que las conmensurables y el uso del infinito queda eliminado de la matemática, que alcanzará entonces por obra de Euclides, Apolonio y Arquímedes, su máximo esplendor.

Sobre todo en manos de Arquímedes adquiere el método de exhaución un valor extraordinario, permitiéndole alcanzar resultados que trascienden de nuestra geometría elemental y son hoy del dominio del análisis infinitesimal. Pero con Arquímedes ya se notan los síntomas de la decadencia: Arquímedes es el más gran matemático de la antigüedad, pero es también lo que hoy llamaríamos un matemático profesional, un especialista, un sabio típico con sus excentricidades y sus abstracciones. Su trágica muerte lo comprueba.

La cultura antigua decae, la cultura mágica recorre su ciclo y aporta su contribución a la matemática: el cero y el álgebra. El alma fáustica contempla admirada la matemática griega y árabe, se apodera de ellas, las mezcla y les imprime su sello propio. Surge entonces avasalladora y fecunda una nueva ciencia: Newton con su «cálculo de las fluxiones» y Leibniz con su «cálculo diferencial» hablan un nuevo idioma.

Pero en el entusiasmo de la creación, en la embriaguez del triunfo, se descuidan los fundamentos, no se repara en sutilezas lógicas y de nuevo, con sus peligros y contradicciones, asoma el infinito.

Es ahora Jorge Berkeley, obispo de Cloyne, quien da la voz de alarma. Como Parménides, Berkeley es idealista, aunque, más radical que el aleata, llega hasta la negación de la existencia en sí de las cosas corporales. Como Zenón, Berkeley apela a la razón y utiliza la crítica a la matemática de la época, como un medio y no como un fin. Zenón quería sostener la tesis del maestro y refutar la hipótesis pitagórica, Berkeley quiere salvar la fe, librándola de los ataques de los librepensadores.

La crítica a los fundamentos del nuevo cálculo la expone Berkeley en una publicación: «The Analyst» del 1734, que lleva por subtítulo: «Discurso dirigido a un matemático infiel». Se refiere al astrónomo Halley, cuya «impiedad» había llegado al extremo de convencer a un amigo de Berkeley que las doctrinas cristianas eran inconcebibles y lograr que, en su lecho de muerte, rehusara los últimos sacramentos. Esto induce a Berkeley a escribir «The Analyst», que, en realidad, más que contra Halley, se dirige a todos los librepensadores.

El propósito de Berkeley es examinar «si los objetos, principios y consecuencias del nuevo análisis, son concebidos más claramente o deducidos con mayor evidencia que los misterios de la religión o los puntos de la fe», llegando a la conclusión que los matemáticos aceptan en su propia ciencia lo que rechazan en la religión, pues los conceptos en que se funda el nuevo análisis deben aceptarse, lo mismo que los misterios de la religión, como artículos de fe, pues trascienden los límites del entendimiento humano.

Para eso analiza los conceptos de fluxión, fluente, momento, etc., de los matemáticos ingleses, así como el de infinitamente pequeño de los matemáticos continentales, y, dada la obscuridad y vaguedad que envolvían esos conceptos, que se hacían aún más confusos debido a la enconada lucha que sostenían entonces newtonianos y leibnizianos, es indudable que no resistieran racionalmente ante los hábiles ataques de Berkeley.

Pero no se limita a eso su análisis. Agudamente desmenuza las demostraciones, cuyas conclusiones rechaza, sin más que aplicar el siguiente postulado lógico: «Si en una demostración y en virtud de un determinado principio se deducen ciertas consecuencias, y se admite luego el principio contrario, esas consecuencias deben rechazarse». En efecto; en las demostraciones del nuevo análisis se utilizaban incrementos finitos, con los cuales se realizaban operaciones y se deducían ciertas consecuencias; luego, y en esto consistía la esencia de los nuevos métodos, se desvanecían los incrementos hasta anularse y en ese caso las consecuencias anteriores adoptaban la forma de la propiedad que se deseaba demostrar.

Pero, dice Berkeley, si el incremento se anula, lógicamente todas las consecuencias derivadas de su existencia deben anularse con él. Un incremento, agrega, puede ser algo o nada, pero jamás algo y nada en la misma demostración. (He aquí esgrimido nuevamente el principio de contradicción). ¿Que son, se pregunta Berkeley, estos incrementos? No son cantidades finitas, ni infinitamente pequeños, ni son nada. Y termina irónicamente: ¿Podríamos llamarlos entonces fantasmas de las cantidades desaparecidas?

Reconoce Berkeley en su crítica que el simbolismo oculta frecuentemente las dificultades, pero insiste que ella es independiente de los signos, pues las reglas del bien razonar son las mismas, utilizando símbolos o palabras, y que seguramente, a este respecto, la matemática no constituye una excepción. Por eso critica también a los sucesores del «gran autor del método de las fluxiones» (Newton) que se han preocupado más en seguir las reglas y métodos que en examinar los principios.

Finalmente, a los que argumentaban que los resultados obtenidos aplicando esos métodos y reglas eran exactos (y el clamoroso triunfo de la mecánica newtoniana lo comprobaba) contestaba Berkeley que las conclusiones debían ser demostradas por los principios y no éstos por aquellas, y que operar con reglas y métodos sin reconocer los principios en que se fundaban, era hacer meramente técnica y obrar por «Inducción y Autoridad, dos motivos reconocidos suficientes para lograr una fe racional o una persuación moral, pero no para algo más».

Hasta aquí la incisiva crítica de Berkeley es inobjetable y se explica la apasionada controversia que entre los matemáticos ingleses suscitó la publicación del «The Analyst», que puede considerarse el acontecimiento matemático más importante ocurrido en Inglaterra en el siglo

XVIII. Algunos matemáticos que creyeron ver en esa publicación un ataque a Newton, ya convertido en ídolo, replicaron indignados, pero sin agregar a su inútil indignación, ningún argumento que refutara las críticas de Berkeley; en cambio Mac-Laurin, para escapar a los ataques lógicos que contenía «The Analyst», realiza el extraordinario esfuerzo de demostrar el método de las fluxiones, siguiendo los procedimientos de los antiguos.

Sin duda impresionado por el hecho paradójico de lograr resultados exactos mediante raciocinios falsos, intenta Berkeley explicarlo, embarcándose en una teoría de la «compensación de los errores», luego compartida por matemáticos posteriores. Según esa teoría en los raciocinios del nuevo análisis se cometían varios errores que, compensándose luego entre sí, explicaban la exactitud del resultado. Esta parte constructiva del «The Analyst», según la cual la ciencia considerada más exacta descansaba sobre bases tan aleatorias, es sin duda la más débil.

Lo que ocurría en realidad era que la intuición genial de los creadores del nuevo análisis se había adelantado al rigor lógico y que los conceptos infinitesimales aparecían envueltos en esa penumbra vaga y confusa que acompaña al infinito, cuando no se le precisa rigurosamente.

A esa tarea, a la cual mucho contribuyó indirectamente Berkeley, se dedicaron los matemáticos del siglo pasado, y así como más de veinte siglos antes, Eudoxo sistematizara la matemática antigua, la labor de Cauchy, Abel y Weierstrass logra aritmetizar el análisis reduciendo, mediante una adecuada definición de límite, los conceptos infinitesimales a conceptos finitos, con lo cual, una vez más, el infinito queda eliminado, o mejor dicho reprimido, de la matemática.

Pero ahora, cuando la cultura fáustica decae y no parece aún surgir en Occidente ninguna cultura nueva, se vuelve a hablar de «crisis de la matemática». Es que ha reaparecido el infinito, esta vez a rostro descubierto, bajo la forma de una audaz creación humana: la teoría de los conjuntos. Ya aparecieron las inevitables paradojas: las antinomias lógicas, y una lucha ya se ha entablado entre tres bandos: logicistas, intuicionistas y formalistas; lucha que remueve no sólo los fundamentos de la matemática, sino también de la lógica.

Pero este hecho no encuadra en la concepción spengleriana y no cabe pues en este ensayo.

JOSE BABINI.