Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería Química
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis**

Título de la Tesis

Fórmulas de valor medio en transporte anómalo y aplicaciones

Autor

Gastón Beltritti

Institución donde se realizó la investigación

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral
CONICET – UNL

Director de Tesis: **Hugo Aimar**
Codirectora de Tesis: **Ivana Gómez**

Jurado compuesto por

Ricardo Durán
Pedro Morin
Nicolás Saintier

Año de presentación: **2016**

Resumen

En la investigación asociada a este trabajo de tesis hemos abordado dos problemas naturales del análisis de soluciones de fenómenos de transporte anómalo y hemos obtenido resultados que consideramos relevantes en cada uno de ellos. El primero es el de existencia de soluciones para un problema de Cauchy asociado a CTRW (Continuous Time Random Walks) (Caminos Aleatorios a Tiempo Continuo) y la convergencia de soluciones para reescalamientos parabólicos de dicho problema a soluciones del problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor. El segundo problema que afrontaremos será el de la mejora de regularidad en la escala de espacios de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ sobre un dominio D de $\mathbb{R}^n$. Los hilos conductores entre los dos problemas son: la anomalía de los transportes considerados y las fórmulas de valor medio. En la primera parte de la tesis expondremos los resultados obtenidos en relación con los límites de reescalamientos parabólicos de CTRW. Esto incluye la prueba de existencia para los CTRW a través de estrategias de punto fijo, la convergencia débil de reescalamientos parabólicos hacia la ecuación del calor y, para CTRW generados por núcleos de valor medio parabólico, la convergencia uniforme hacia temperaturas. Los resultados principales contenidos en la primera parte, que al momento de escribir esta monografía han sido aceptados para publicación en Journal d'Analyse Mathématique [1], son los Teoremas 2.2.1, 3.1.2 y 4.1.1.

En la segunda parte de la tesis la anomalía de los procesos en consideración, en vez de estar dada por núcleos con soporte compacto en el espacio-tiempo, como los considerados en la primera parte, tienen colas pesadas en el infinito. Son procesos de Lévy. El propósito de esta segunda parte en este contexto anómalo es investigar si el carácter elíptico de las potencias fraccionarias del Laplaciano, es suficiente para garantizar la mejora de regularidad Besov de soluciones en dominios no regulares del espacio euclídeo. La respuesta es afirmativa. La herramienta más importante es notablemente otra fórmula de valor medio. Ahora no local. Promedios en los que aportan los valores de la solución en todo el espacio. Los resultados más importantes son esa fórmula de valor medio no local

y su uso para probar las estimaciones en norma de gradientes de soluciones en dominios y por consiguiente la mejora de regularidad en la escala de Besov. Estos resultados están contenidos en los Teoremas 6.2.1, 7.2.2 y 8.4.1 y han sido publicados en Constructive Approximation [3].

Índice General

Introducción General

Comenzaremos la introducción a los problemas resueltos en esta tesis comentando los dos conceptos que constituyen al título de esta monografía: fórmulas de valor medio y transporte anómalo. Luego comentaremos cuáles son las aplicaciones a las que el título refiere.

Hay muchos aspectos desde los cuales puede vislumbrarse una profunda relación entre Ecuaciones en Derivadas Parciales y Geometría. Si entendemos a la geometría en un sentido amplio podemos decir que está determinada por relaciones entre distancia y volumen o, para ser más precisos, entre métrica y medida. Sea (X, d, μ) un espacio métrico con medida de Borel μ tal que las bolas $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$, $r > 0$, tienen μ-medida positiva y finita. Si u es una función a valores positivos definida en X tal que satisface una fórmula de valor medio del tipo

$$u(x) = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y) d\mu(y)$$

y si μ satisface la propiedad de duplicación: $\mu(B(x, 2r)) \leq A\mu(B(x, r))$ para todo $x \in X$ y todo $r > 0$, entonces si z_1 y z_2 son dos puntos de $B(x, r)$, como $B(z_2, 2r) \subset B(z_1, 4r) \subset B(z_2, 6r)$ y $u > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
u(z_2) &= \frac{1}{\mu(B(z_2,2r))} \int_{B(z_2,2r)} u(y) d\mu(y) \\
&\leq \frac{\mu(B(z_2,6r))}{\mu(B(z_2,2r))} \frac{1}{\mu(B(z_1,4r))} \int_{B(z_1,4r)} u(y) d\mu(y) \\
&\leq A^3 u(z_1).
\end{aligned}$$

Por consiguiente u satisface una desigualdad de Harnack

$$\sup_{B(x,r)} u \leq A^3 \inf_{B(x,r)} u.$$

Como es usual, de aquí puede deducirse la regularidad Hölder α de u para algún $\alpha > 0$ con respecto a la métrica en el espacio X.

Clásicamente las fórmulas de valor medio valen para difusiones y sus estados estacionarios: temperaturas y funciones armónicas. Si D es un dominio en $\mathbb{R}^n$ en el cual la función u es armónica ($\triangle u = 0$ en D), entonces

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)dy$$

para todo $x \in D$ y todo $0 < r < d(x, \partial D)$. Más todavía, esta fórmula de valor medio es equivalente al carácter armónico de u. Esta versión de la fórmula de valor medio para funciones armónicas es sólo una de las muchas maneras de promediar alrededor del punto x. Todos los promedios que preserven el carácter radial, y que por lo tanto sean invariantes por rotaciones, proveen fórmulas de valor medio para funciones armónicas. A veces es mejor tener versiones diferenciables. Si φ es una función C_c^∞ radial y de integral uno, soportada en la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$, entonces u es armónica en D si y sólo si

$$u(x) = (\varphi_r * u)(x)$$

si $0 < r < d(x, \partial D)$, $x \in D$ y $\varphi_r(y) = r^{-n}\varphi\left(\frac{y}{r}\right)$.

Para la ecuación del calor la situación es algo más compleja aunque sigue el mismo principio de dilatación de un objeto inicial, una de las diferencias es que estas dilataciones son parabólicas. Dado un $\lambda > 0$, denotamos con ρ_λ a la dilatación parabólica de razón λ actuando en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ así: $\rho_\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$. Sea $\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ para $t > 0$ y $\Phi(x,t) = 0$ para $t \leq 0$, la solución fundamental de la ecuación del calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u$. La forma geométrica básica para la fórmula de valor medio parabólico es un conjunto de nivel de Φ que, por su definición, tiene soporte sólo para tiempos positivos. El conjunto $E = \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \geq 0 \text{ y } \Phi(y,s) \geq 1\}$ define la forma básica y sus traslaciones y dilataciones parabólicas la adaptan a dominios. Sea D un dominio de $\mathbb{R}^n$, sea $T > 0$ y $\Omega = D \times (0,T)$. Si $(x,t) \in \Omega$, y si r es tan chico como para que el soporte de la función de (y,s), $\mathcal{X}_E\left(\frac{x-y}{r}, \frac{t-s}{r^2}\right)$ esté contenido en Ω, entonces también el soporte de la función

$$k_r(x-y, t-s) = \frac{1}{4r^{n+2}} \mathcal{X}_E\left(\frac{x-y}{r}, \frac{t-s}{r^2}\right) \left(\frac{|x-y|}{r}\right)^2 \left(\frac{r^2}{t-s}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4r^n} \mathcal{X}_E \left(\frac{x-y}{r}, \frac{t-s}{r^2} \right) \left(\frac{|x-y|}{t-s} \right)^2$$

está contenido en Ω. Entonces si u es una solución de la ecuación del calor en Ω se tiene que

$$u(x,t) = (k_r * u)(x,t)$$

donde ahora la convolución está tomada en $\mathbb{R}^{n+1}$ si pensamos que por ejemplo u se extiende por cero fuera de Ω.

En las ciencias experimentales y algunas ingenierías, los fenómenos de transporte constituyen modelizaciones importantes de una amplia gama de procesos que tratan de describir evolución y conservación de alguna cantidad física como masa o energía en alguna región del espacio. Las difusiones clásicas, asociadas a movimientos brownianos o procesos de Wiener, se modelizan adecuadamente con derivaciones enteras. El punto crucial en estos modelos son las leyes de conservación basadas en el Teorema de la divergencia de Gauss y en ecuaciones constitutivas de tipo Fourier o Darcy que dependen del gradiente de las magnitudes potenciales que caracterizan al transporte. Así, por ejemplo, la ecuación clásica del calor en el espacio $\mathbb{R}^3$ se basa en la conservación de la energía térmica y en la ley de Fourier

$$\overrightarrow{F} = -K \nabla u,$$

donde u es la temperatura, $K \geq 0$ la conductividad térmica y $\overrightarrow{F}$ el flujo térmico. Por otra parte en un dominio D del espacio la cantidad de energía térmica que sale desde o entra a D está controlada por el flujo a través de la pared, ∂D, de D. Así

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\partial D} \overrightarrow{F}(x,t) \cdot \overrightarrow{n} \, d\sigma(x) \\ &= \int_D \operatorname{div} \overrightarrow{F} dx \\ &= -\int_D \operatorname{div} K \nabla u dx. \end{aligned}$$

Como también la energía térmica está dada por $\int_D c\, d\, u(x,t) dx$, donde c es el calor específico del material en D y d es su densidad, tenemos que, si c, d y K son constantes, la tasa de entrada de energía térmica a D en el instante t está dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_D cdu(x,t)dx &= \int_D cd\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = -f(t)\\ &= K\int_D \triangle u dx.\end{aligned}$$

Como el dominio puede tomarse arbitrariamente chico, diferenciando, se tiene la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\triangle u,$$

donde $\kappa = \frac{K}{cd}$ es la difusividad del medio.

Esta ecuación que resume un principio de conservación y una ley constitutiva es el modelo más clásico de lo que entendemos como un proceso de difusión. Tal vez la mejor manera de describir las difusiones clásicas en contraste con las llamadas difusiones anómalas es el enfoque probabilístico que se obtiene usando procesos estocásticos. Para ver esto empecemos considerando el proceso de Wiener que está naturalmente asociado a las difusiones clásicas. Imaginemos que una partícula se mueve en el espacio $\mathbb{R}^n$ de modo que su posición $\overrightarrow{X}(t)$ en el instante t es una variable aleatoria. Supongamos que sabemos que en el instante $t_0 = 0$ la partícula está (con probabilidad uno) en el origen de $\mathbb{R}^n$ ($\overrightarrow{X}(0) = \overrightarrow{0}$). El proceso de Wiener requiere independencia y normalidad de los incrementos. En otras palabras las variables aleatorias $\overrightarrow{X}(t) - \overrightarrow{X}(s)$ son independientes y están distribuidas por la normal $N(0, t-s)$ cuya densidad es la gaussiana

$$(t-s)^{-\frac{n}{2}}(4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t-s)}}.$$

La independencia de los incrementos está asociada a la convolución de las distribuciones. La función característica (transformada de Fourier) tiene a la Gaussiana por punto fijo y, por consiguiente, la función característica asociada a la variable aleatoria $\overrightarrow{X}(t)$ está dada por $e^{-t|\xi|^2}$. Esta función es también la transformada de Fourier de la solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u, \\ u(x,0) = \delta_0; \end{cases}$$

donde δ_0 denota la delta de Dirac en el origen de $\mathbb{R}^n$.

El "límite central" que es la Gaussiana convierte también en central al operador de Laplace. La transformada de Fourier de una función provee una descripción profunda de la dualidad entre suavidad y decaimiento. El tamaño en el infinito de una función se refleja en la regularidad local de su transformada. Así, aunque las funciones $e^{-|\xi|^2}$ y $e^{-|\xi|^{2s}}$ para $0 < s < 1$ lucen muy similares, la segunda no tiene la regularidad de la primera. Vistas como funciones características de distribuciones de variables aleatorias, $e^{-|\xi|^2}$ alude a normalidad (colas livianas), en cambio $e^{-|\xi|^{2s}}$, $0 < s < 1$, a procesos de Lévy (colas pesadas). El caso más clásico es $s = 1/2$ que corresponde a la distribución de Cauchy que en análisis armónico es el núcleo de Poisson $(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$. Los procesos aditivos tales que los incrementos se distribuyen de acuerdo a estas leyes son los procesos de Lévy. La interpretación en términos de una partícula que se mueve en el espacio sugiere movimientos continuos y no diferenciables (Brownianos) cuando $s = 1$ y "vuelos" discontinuos para valores de $s < 1$. Los correspondientes operadores diferenciales son ahora no locales y, en términos de la transformada de Fourier corresponden a multiplicadores potenciales del tipo

$$\widehat{D^s f}(\xi) = |\xi|^{2s}\widehat{f}(\xi),$$

que también pueden expresarse con núcleos no localmente integrables en la forma de valor principal

$$D^s f(x) = v.p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy.$$

Las difusiones anómalas asociadas a los vuelos de Lévy son soluciones de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D^s u.$$

Otras veces la anomalía de la difusión no proviene de la singularidad del núcleo ni del carácter global del mismo. Un caso típico es el de los CTRW (caminatas al azar de tiempo continuo) que procedemos a exponer brevemente. Pensemos en describir, como en mecánica cuántica, la posición de una partícula en cada instante en el espacio en términos probabilísticos. Sea $u(x,t)$ la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en una región del espacio en el instante t. Más precisamente, si E es un subconjunto de Borel de

$\mathbb{R}^n$, $\int_E u(x,t)dx$ es la probabilidad de encontrar a la partícula dentro de E en el instante t. El problema es, conocidos alguna dinámica del sistema y algún estado inicial f, encontrar $u(x,t)$ definida en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Un CTRW está dado por una densidad espacio temporal $J(x,t)$ definida en $\mathbb{R}^{n+1}$. En este modelo la densidad de arribo a x en el instante t, $u(x,t)$, está dada por la convolución de la misma u con el núcleo J

$$u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} J(x-y, t-s)u(y,s)dyds.$$

Puesto que el proceso es difusivo, se espera que la densidad de arribos a x en el instante t dependa sólo de la densidad de arribos a cualquier otro punto y del espacio pero en instantes s anteriores a t ($s < t$). Esto se traduce en que el soporte de J esté contenido en $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} = \{(x,t) : t \geq 0\}$. El soporte de J puede también ser compacto. En este modelo de difusión no está explícita una derivada temporal.

Expuestos brevemente las fórmulas de valor medio y las difusiones anómalas comentamos las aplicaciones a las que hace alusión el título de esta tesis. Uno de los principales resultados de toda la tesis es la fórmula de valor medio para soluciones de potencias fraccionarias del Laplaciano (difusiones de Lévy). Notablemente, la anulación de $(-\triangle)^s f$ en un dominio D de $\mathbb{R}^n$ todavía produce fórmulas de valor medio de f que necesitan de los valores de f en todo el espacio. Si bien se conocen fórmulas de valor medio en la literatura, ver por ejemplo [29] y [33], nuestra técnica se basa en el teorema de extensión de Caffarelli y Silvestre y permite obtener fórmulas diferenciables y explícitas. Este resultado se usa para extender el método de Dahlke y DeVore de mejora de regularidad Besov de soluciones en dominios angulosos peores aún que los de clase Lipschitz. Caracterización con wavelets de espacios de Besov, maximal sharp de Calderón, desigualdades de Poincaré son las herramientas básicas de la técnica que cooperan con la fórmula de valor medio para probar la mejora del índice de regularidad de Besov en un dominio en el que $(-\triangle)^s$ se anula.

Con respecto a los procesos CTRW probaremos un teorema de existencia, un teorema de aproximación débil por reescalamientos parabólicos a ecuaciones de difusión clásicas y un teorema de convergencia de las soluciones de manera uniforme, precisamente cuando los núcleos $J(x,t)$ son los de valor medio parabólicos.

La exposición se plantea en dos partes, la primera explora la relación entre difusiones clásicas y operadores no locales del tipo CTRW. La segunda estudia la mejora de la regularidad Besov de soluciones en dominios con frontera poco regular de potencias fraccionarias de $-\triangle$. La Parte I está compuesta por una introducción y cuatro capítulos. El primero de estos capítulos está destinado a repasar definiciones y resultados de la transformada de Fourier e integral de Bochner, fórmulas de valor medio elíptico y parabólico y aplicaciones del teorema de punto fijo de Banach a ciertas ecuaciones integrales, también se repasarán conceptos generales de espacios de Besov. En el segundo capítulo estudiamos la convergencia débil de operadores no locales de tipo CTRW a ecuaciones de difusión. El tercer capítulo plantea y resuelve el problema de CTRW con dato inicial en $L^p(\mathbb{R}^n)$, en los contextos $p = \infty$ y $1 \leq p < \infty$. En el Capítulo 4 se aborda el problema, más difícil, de la convergencia uniforme de soluciones de CTRW parabólicamente reescalados a temperaturas cuando el núcleo es el de valor medio parabólico. La Parte II está compuesta de una introducción y cuatro capítulos. El primero de esta parte es el Capítulo 5 que incluye preliminares sobre espacios de Sobolev con pesos. Además se repasa la teoría de Fabes, Kenig y Serapioni sobre la desigualdad de Harnack para soluciones positivas de operadores elípticos degenerados. Este capítulo contiene uno de los resultados principales de esta tesis, una fórmula de valor medio para soluciones débiles de $\mathrm{div}(|y|^a \mathrm{grad}\ v) = 0$. El sexto capítulo expone diferentes versiones del operador $(-\triangle)^s$, en particular la de Caffarelli y Silvestre como un operador Dirichlet to Neumann. Además probamos, usando el resultado principal del Capítulo 5 y la técnica de reflexión de Caffarelli y Silvestre, una fórmula de valor medio para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$. El séptimo capítulo está dedicado a aplicar la fórmula de valor medio del Capítulo 6 para obtener estimaciones del gradiente de soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ por maximales de Calderón. El último capítulo contiene la prueba de la mejora de regularidad Besov para soluciones de la ecuación $(-\triangle)^s f = 0$ en dominios de $\mathbb{R}^n$.

Parte I

Transporte anómalo, operadores no locales y difusiones

Introducción de la Parte I

Para introducir el modelo probabilístico básico para difusiones anómalas comenzaremos considerando el movimiento de una partícula ("la partícula") en $\mathbb{R}^n$ con dinámica especificada en términos de distribuciones de probabilidad.

Introducimos primero las caminatas al azar en tiempo continuo, CTRW por sus siglas en inglés (Continuous Time Random Walks) y desde ellas aprovecharemos para inducir otros procesos difusivos anómalos y clásicos como casos límites de adecuados reescalamientos.

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función con integral igual a uno y tal que $\mathrm{sop} J \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. Supondremos que J es continua para esta introducción.

Dados h y τ dos números positivos discretizamos el espacio en la malla $h\mathbb{Z}^n$ y el tiempo en la malla $\tau\mathbb{Z}$ tomando como unidades a h para el espacio (centímetros) y τ para el tiempo (segundos). Sea $J_{h\tau}(x,t) = \frac{J(x,t)}{\sigma_{h\tau}}$, donde $\sigma_{h\tau} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}} J(hk,\tau l)$. Es claro que para h y τ suficientemente chicos $\sigma_{h\tau} > 0$ y que $h^n\tau\sigma_{h\tau} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}} J(hk,\tau l)h^n\tau$ tiende a $\iint J = 1$ cuando h y τ tienden a cero.

Para h y τ fijos consideraremos la partícula describiendo una caminata al azar en $h\mathbb{Z}^n$ de manera que el tiempo de espera en cada nodo no es (necesariamente) fijo, sino que el mismo es aleatorio y que la dinámica de ambas aleatoreidades está descrita fehacientemente por el núcleo $J_{h\tau}$. En el siguiente sentido, la probabilidad $u(x,t)$ de que la partícula se encuentre en el nodo $x \in h\mathbb{Z}^n$ en el instante $t \in \tau\mathbb{Z}$ está dada por la suma

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}} J_{h\tau}(hk,\tau l)u(x-hk,t-\tau l)$$

de las probabilidades ponderadas por $J_{h\tau}$ de que la partícula estuviera en tiempos anteriores $t-\tau l$ (recordar que $J_{h\tau}$ tiene soporte para tiempos positivos) en cualquier otro punto $x-hk$ de la red espacial. Por consiguiente, puesto que $\sum_{x\in h\mathbb{Z}^n, t\in\tau\mathbb{Z}} J_{h\tau}(x,t) = 1$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}} J_{h\tau}(hk,\tau l)\left[u(x-hk,t-\tau l) - u(x,t)\right] = 0$$

para todo $(x,t) \in (h\mathbb{Z}^n) \times (\tau\mathbb{Z})$. O, lo que es lo mismo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}} J_{h\tau}(hk,\tau l)\left[u(x-hk,t-\tau l)-u(x,t)\right]h^n\tau = 0.$$

Tomando límite para h y τ tendiendo a cero y suponiendo continuidad de u, tenemos

$$\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} J(y,s)\left[u(x-y,t-s)-u(x,t)\right]dydt = 0. \tag{0.0.1}$$

Observemos primero que, como la integral de J es uno, la ecuación (0.0.1) se reescribe

$$\left(J-\delta_{(0,0)}\right) * u = 0, \tag{0.0.2}$$

donde $\delta_{(0,0)}$ es la delta de Dirac en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dos aspectos geométricos contenidos en (0.0.2) son fundamentales para distinguir este modelo de uno elíptico: el soporte de J está sesgado hacia los tiempos positivos, la masa puntual $\delta_{(0,0)}$ está concentrada en el "piso" del soporte de J. Como veremos en el Capítulo 2 estos aspectos geométricos junto con la homogeneidad parabólica contenida en las dilataciones no isótropas producen como límites difusiones clásicas. También los operadores locales en el tiempo y no locales en el espacio, como los considerados en [**14**], [**13**] y [**8**] pueden verse como situaciones límites de (0.0.2).

Esta primera parte de la tesis se compone de cuatro capítulos. El primero contiene algunos resultados preliminares que son centrales en la formulación de los resultados y que, aún siendo básicos, pueden no formar parte del bagaje tradicional en el área. El segundo capítulo explora la forma más rudimentaria en la que los reescalamientos parabólicos de CTRWs convergen a difusiones: la convergencia débil. El tercer capítulo aborda, con las herramientas usadas en [**8**], una teoría de existencia de soluciones a un problema de CTRW con dato inicial prescrito de un modo compatible con el enfoque probabilístico subyacente que se plantea y discute en ese mismo capítulo. El cuarto capítulo contiene los resultados de convergencia de soluciones de problemas reescalados a temperaturas clásicas en distintas normas y con distintas condiciones en la densidad de transición J.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene cinco secciones: un repaso de enunciados y resultados de la transformada de Fourier, de la integral de Bochner, el Teorema de Punto Fijo de Banach con una aplicación a una ecuación de Fredholm, los enunciados de las fórmulas clásicas de valor medio elíptica y parabólica, y los rudimentos de la teoría de espacios de Besov y una de sus caracterizaciones.

1.1. Transformada de Fourier

En esta sección listaremos propiedades básicas de la transformada de Fourier sobre los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y en el sentido de las distribuciones definidas sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Empezaremos dando las definiciones de la trasformada de Fourier en los tres espacios mencionados anteriormente

Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ó $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada de Fourier, $\hat{f}$ o $\mathcal{F}(f)$, como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

De modo análogo se define la antitransformada de Fourier, $\check{f}$ o $\mathcal{F}^{-1}(f)$, como

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

La definición de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se define a partir de la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en dicho espacio. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_m \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $m \to \infty$, entonces la transformada de Fourier de f, $\hat{f}$ o $\mathcal{F}(f)$, se define como

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{m\to\infty} \mathcal{F}(\varphi_m),$$

donde el límite es calculado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Se puede ver que dicho límite siempre existe y es independiente de la sucesión que converja a f. Del mismo modo, se puede definir $\mathcal{F}^{-1}(f)$.

Para una distribución $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier es definida como

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

donde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A continuación expondremos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier, las cuales usaremos a lo largo de esta monografía.

- Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f}$ es una función continua que cumple que $\lim\limits_{|x| \to \infty} \hat{f}(x) = 0$ y $\left\| \hat{f} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.
- Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

  $$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g),$$

  el mismo resultado vale para $\mathcal{F}^{-1}$.
- Para $h \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, se tiene que

  $$\mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) = e^{2\pi i h}\mathcal{F}(f)(\xi)$$

  y

  $$\mathcal{F}[f(k\cdot)](\xi) = \frac{1}{|k|^n}\mathcal{F}(f)(\xi).$$
- Si f y $\hat{f}$ están en $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

  $$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x) = f(x)$$

  en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.
- Los operadores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo. Más aún, para toda función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

  $$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})(\varphi) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F})(\varphi) = \varphi$$
- Los operadores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo. Además

  $$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})(T) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F})(T) = T$$

  para toda $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y tiene derivadas integrables y continuas hasta el orden $k \geq 1$, entonces para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, $|\gamma| \leq k$ se tiene que

$$\mathcal{F}(D^\gamma f)(\xi) = (-2\pi i\xi)^\gamma \mathcal{F}(f)(\xi),$$

  análogamente

$$\mathcal{F}^{-1}(D^\gamma f)(\xi) = (2\pi i\xi)^\gamma \mathcal{F}(f)(\xi).$$

- Si f y $|x|^k f$ son integrables para algún $k \geq 1$. Entonces $\hat{f}$ y $\check{f}$ tienen derivadas continuas hasta el orden k. Más aún, para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, $|\gamma| \leq k$, se tiene que

$$D^\gamma \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left((2\pi i x)^\gamma f\right)(\xi)$$

  y

$$D^\gamma \check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\left((-2\pi i x)^\gamma f\right)(\xi).$$

- Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ entonces $T * \varphi$ está bien definida y es una función infinitamente diferenciable.
- Si f es una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ ó $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\hat{f}}.$$

  donde T_f y $T_{\hat{f}}$ denotan la distribuciones inducidas por las funciones f y $\hat{f}$ respectivamente.
- (Identidad de Plancherel) Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Para consultar estos resultados y ampliar conocimientos sobre la transformada de Fourier se puede consultar [7] y [38].

1.2. Integral de Bochner

En esta sección enunciaremos algunas definiciones y resultados relacionados con la integral de Bochner que usaremos a lo largo de esta primera parte de la tesis.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completa, y sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach. Una función $S : \Omega \to X$ se denomina simple si $S(t) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathcal{X}_{E_i}(t)$ donde $x_i \in X$ y $E_i \in \Sigma$ para todo $i = 1, 2 \ldots$. Una función $f : \Omega \to X$ se dice μ-medible si existe una sucesión de funciones simples $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y un conjunto $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ y $\lim_{m\to\infty} \|S_m(t) - f(t)\|_X = 0$ para todo $t \in \Omega \setminus N$.

Para una función simple $S(t) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathcal{X}_{E_i}(t)$ su integral de Bochner se define como

$$\int_E S d\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \mu(E_i \cap E).$$

Se puede ver que la definición de la integral es independiente de la representación de S. Además es fácil probar que $\left\|\int_\Omega S d\mu\right\|_X \leq \int_\Omega \|S\|_X \, d\mu$. Notar que $\int_E S(t)dt$ es un elemento de X.

Una función $f : \Omega \to X$, μ-medible, es integrable Bochner si existe una sucesión $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \|S_m(t) - f(t)\|_X \, d\mu(t) = 0. \tag{1.2.1}$$

Luego, para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\{\int_E S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y dado que X es un espacio de Banach se puede definir la integral de Bochner para f como

$$\int_E f d\mu := \lim_{m\to\infty} \int_E S_m d\mu.$$

Se puede probar que esta definición es independiente de la sucesión $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que cumple (1.2.1).

A continuación enunciaremos un resultado que relaciona la integral de Bochner con la integral de Lebesgue.

Teorema 1.2.1. *Sea $f : \Omega \to X$ μ-medible. Entonces, f es integrable Bochner si y sólo si $\|f\|_X$ es integrable Lebesgue.*

En la siguiente proposición mostraremos algunas propiedades de la integral de Bochner que serán de utilidad en esta tesis.

Proposición 1.2.2. *Sea $f : \Omega \to X$ integrable Bochner. Entonces* *i) Si Y es un espacio de Banach y $T : X \to Y$ es lineal y continua, entonces $T(f)$ es integrable Bochner y*

$$T\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E T(f) d\mu.$$

ii) Para cada $x^* \in X^*$ $x^* f \in L^1(\mu)$ y además

$$x^*\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E x^*(f) d\mu.$$

iii) Para todo $E \in \Sigma$

$$\left\|\int_E f d\mu\right\|_X \leq \int_E \|f\|_X \, d\mu.$$

iv) Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y la unión es disjunta, entonces

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu.$$

Las definiciones y propiedades expuestas en esta sección así como también otros resultados acerca de la integral de Bochner se pueden encontrar en [20] y [32].

1.3. Teorema del punto fijo de Banach. Aplicación a una ecuación integral

Definición 1.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una transformación $T : X \to X$ es una contracción si existe un número real $0 < \tau < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \tau d(x, y).$$

Diremos que τ es la constante de la contracción.

Definición 1.3.2. *Un punto $x^* \in X$ se llama punto fijo de $T : X \to X$ si $T(x^*) = x^*$.*

Para $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por T^k a la composición de T consigo misma k veces.

Teorema 1.3.3 (Punto Fijo de Banach). *Sea (X, d) un espacio métrico completo, y $T : X \to X$ una contracción, entonces*

1) *existe un único $x^* \in X$ tal que $T(x^*) = x^*$;*
2) *para todo $x_0 \in X$, $\{T^k(x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x^* y*

$$d(T^k(x_0), x_0) \leq \frac{\tau}{1-\tau} d(T(x_0), x_0)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y donde τ es la constante de la contracción.

A continuación repasaremos una aplicación clásica del teorema de punto fijo de Banach para demostrar la existencia y unicidad de ciertas ecuaciones integrales de Fredholm. El espacio en el que trabajaremos para encontrar la solución será $\mathcal{C}([a,b],L^2(\mathbb{R}^n))$, el cual resulta ser un espacio de Banach dotado con la norma

$$|||u||| = \max_{t\in[a,b]} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

El resultado de existencia y unicidad contenido en el Teorema 1.3.4 será útil en la teoría L^2 de existencia del Capítulo 3.

Sean a, b y λ números reales, $K \in L^\infty([a,b]\times[a,b],L^\infty(\mathbb{R}^n))$ y $f:[a,b]\to L^2(\mathbb{R})$. Formalmente la ecuación integral dada por

$$\lambda u(t) - \int_a^b K(t,s)u(s)ds = f(t) \tag{1.3.1}$$

se denomina ecuación integral de Fredholm.

Teorema 1.3.4. *Sea $f\in\mathcal{C}([a,b],L^2(\mathbb{R}^n))$. Si $|\lambda| > \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} \|K(t,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}(b-a)$ entonces la ecuación integral de Fredholm (1.3.1) tiene una única solución u en el espacio $\mathcal{C}([a,b],L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Demostración. Consideremos el operador $T_\lambda : \mathcal{C}([a,b],L^2(\mathbb{R}^n)) \to \mathcal{C}([a,b],L^2(\mathbb{R}^n))$ definido por

$$T_\lambda u(t) := \lambda^{-1}\int_a^b K(t,s)u(s)ds + f(t),$$

donde la integral se entiende en el sentido de Bochner. Luego, para u_1 y u_2 funciones en $\mathcal{C}([a,b],L^2(\mathbb{R}^n))$ y $t\in[a,b]$, por el ítem *iii)* de la Proposición 1.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\|T_\lambda u_1(t) - T_\lambda u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \left|\lambda^{-1}\right| \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} \|K(t,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_a^b \|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\le \left|\lambda^{-1}\right| \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} \|K(t,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} (b-a)\, |||u_1-u_2||| .\end{aligned}$$

Como la desigualdad anterior se cumple para todo $t\in[a,b]$ obtenemos que

$$|||T_\lambda u_1 - T_\lambda u_2||| \le \left|\lambda^{-1}\right| \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} \|K(t,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} (b-a)\, |||u_1-u_2||| ,$$

y como por hipótesis $|\lambda^{-1}| \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} \|K(t,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} (b-a) < 1$, entonces T_λ es una contracción. Luego, por el Teorema de punto fijo de Banach, tenemos que existe una única función $u \in \mathcal{C}([a,b], L^2(\mathbb{R}^n))$ tal que $T_\lambda u = u$, y que por lo tanto resuelve (1.3.1). $\square$

1.4. Fórmulas de valor medio

Una fórmula de valor medio para una función es una fórmula de convolución que permite calcular el valor de dicha función en un punto, promediando los valores de ésta en un entorno del mismo. Notablemente, ciertas fórmulas particulares de valor medio son caracterizaciones propias de funciones armónicas y de temperaturas.

1.4.1. Fórmula de valor medio para funciones armónicas. Una función armónica es una solución de $\triangle u = 0$ en algún abierto D del espacio $\mathbb{R}^n$. El operador de Laplace $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ también puede verse como la iteración de los operadores gradiente y divergencia, $\triangle u = \nabla \cdot \nabla u$. La invariancia por rotaciones del operador de Laplace, que puede verse desde la transformada de Fourier $-|\xi|^2$ de $\triangle$, impone simetrías centrales de las fórmulas de valor medio elíptico. En lo que sigue D es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y u es una función armónica en D.

a) **Fórmula de valor medio sobre cáscaras de bolas.** Sea $x \in D$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset D$, entonces

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma(y).$$

b) **Fórmula de valor medio sobre bolas.** Sea $x \in D$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset D$, entonces

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)dy.$$

c) **Fórmula de valor medio con núcleo radial y suave.** Sea $x \in D$ y φ una función radial con soporte en la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ y tal que $\int \varphi(x)dx = 1$, si $B(x,r) \subset D$ entonces

$$u(x) = \int \varphi_r(x-y)u(y)dy,$$

donde $\varphi_r(x) = r^{-n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$.

Las tres fórmulas anteriores son equivalentes. Ver [22].

La fórmula $c)$, al ser una convolución con un núcleo suave, permite estimar los gradientes de la solución u. En [15] estas estimaciones son usadas para lograr mejora de regularidad en la escala de Besov para funciones armónicas en dominios con frontera Lipschitz.

1.4.2. Fórmula de valor medio para temperaturas. Una temperatura en $\Omega = D\times(0,T)$ con D un dominio de $\mathbb{R}^n$ es una solución en Ω de la ecuación del calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u$. En [23] se muestran fórmulas de valor medio para soluciones de ecuaciones parabólicas más generales que la ecuación del calor y se puede ver cómo las curvas de nivel de las soluciones fundamentales de estas ecuaciones parabólicas se relacionan con la geometría de las fórmulas de valor medio. En el caso particular de la ecuación del calor una demostración elegante puede hallarse en [22], ver también [39]. En este caso la solución fundamental es el núcleo de Weierstrass

$$W_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si tomamos $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ y $r > 0$, podemos construir a partir del núcleo de Weierstrass, las "bolas calóricas"

$$E((x,t);r) = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, W_{t-s}(x-y) \geq \frac{1}{r^n}\right\}. \tag{1.4.1}$$

Sea u una temperatura en $\Omega = D\times(0,T)$. Si $E((x,t);r)$ está contenido en Ω entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E((x,t);r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds \tag{1.4.2}$$

La prueba del resultado anterior se puede encontrar en [22].

Por otro lado, fórmulas de valor medio suaves para temperaturas también han sido probadas en [6], a continuación enunciaremos este resultado.

Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$, $0 < T \leq \infty$ y u una temperatura en $D\times(0,T)$. Sea $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ no negativa, con soporte en $[0,1]$ y tal que $n\int \eta(\rho)\rho^{n-1}d\rho = 1$. Sea $K_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$ y $K(x,t) = \eta\left((4\pi t)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4t}}\right) \frac{|x|^2}{t^2}$ para $t > 0$ y $\eta \equiv 0$ para $t \leq 0$. Entonces

$$u(x,t) = \iint u(y,s) K_r(x-y, t-s) dyds, \tag{1.4.3}$$

siempre que $d_p((x,t), \partial(D\times(0,T))) < r$ donde d_p denota la distancia parabólica $d_p((x,t), \partial(D\times(0,T))) = \inf_{(y,s)\in\partial_p\Omega} d_p((x,t),(y,s))$, donde $d_p((x,t),(y,s)) = \max\{|x-y|, \sqrt{t-s}\}$ y $\partial_p\Omega = (\overline{D}\times\{0\}) \cup (\partial D \times [0,T])$ es la frontera parabólica de Ω.

Notemos que de (1.4.3) puede obtenerse la fórmula (1.4.2) como caso límite.

1.5. Espacios de Besov

La literatura sobre espacios de Besov es muy abundante y, desde su introducción a principios de los años setenta por Besov [9] y Taibleson [35] [36] [37], estos espacios aparecen frecuentemente en muchos problemas de análisis armónico y ecuaciones en derivadas parciales. Pero mucho más recientemente se ha detectado el rol central que este tipo de regularidad juega en el análisis de la velocidad de convergencia de métodos numéricos adaptivos no lineales. Este será también el papel más importante para su uso en la Parte II de esta Tesis. En la Parte I, en cambio, se usará como una condición suficiente de regularidad en el dato inicial en el teorema de convergencia de soluciones de problemas reescalados a soluciones de la ecuación del calor.

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \le p \le \infty$ y $t > 0$, la función módulo de continuidad de f se define como

$$\omega_p(f,t) := \sup_{|h|\le t} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Un resultado bien conocido es que cuando $1 \le p < \infty$ entonces

$$\lim_{h\to 0} \omega_p(f,h) = 0. \tag{1.5.1}$$

Veremos ahora como los espacios de Besov se definen a partir de la velocidad con la que el módulo de continuidad de una función tiende a cero. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, y $0 < \lambda < 1$, se define la seminorma de Besov para f como

$$|f|_{B^\lambda_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty \left(t^{-\lambda}\omega_p(f,t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} & 1 \le q < \infty \\ \sup_{t\ge 0} t^{-\lambda}\omega_p(f,t) & q = \infty. \end{cases}$$

Si dicha seminorma es finita para f, entonces se dice que esta función está en el espacio de Besov $B^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. La norma de f se define como

$$\|f\|_{B^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + |f|_{B^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Es fácil probar que si $f, g \in B^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $f + cg \in B^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, y si $\xi \in \mathcal{C}^{\infty}_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $\xi f \in B^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. En el caso $p = q$, para abreviar, escribiremos $B^{\lambda}_{p,p} = B^{\lambda}_{p}$.

En el siguiente teorema enunciamos una caracterización de los espacios de Besov.

Teorema 1.5.1. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, y $0 < \lambda < 1$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *la seminorma de Besov $|f|_{B^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)}$ es finita;*

ii) *la integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{\lambda p + n}} dx dy$$

es finita. Además se cumple que

$$\|f\|_{B^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)} \approx \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{\lambda p + n}} dx dy.$$

Los espacios de Besov pueden definirse también para subconjuntos D abiertos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $f \in B^{\lambda}_{p}(D)$ si f es la traza que deja en D una función de $B^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, si existe una función $\widetilde{f} \in B^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widetilde{f}|_D = f$. Se define además $\|f\|_{B^{\lambda}_{p}(D)} := \text{ínf} \left\| \widetilde{f} \right\|_{B^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)}$, donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones $\widetilde{f}$ cuya restricción a D es igual a f.

Capítulo 2

La ecuación del calor como límite de operadores no locales

En este capítulo consideraremos CTRWs dados por un núcleo de transición J con el modelo descrito en la introducción general. Un núcleo de transición J es una función con valores reales definida en $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$. En cada problema que consideremos en esta primera mitad de la tesis se requerirán diferentes hipótesis sobre J que procedemos a identificar para simplificar los enunciados de los capítulos 2, 3 y 4.

- *(J1)* $J \geq 0$ (positividad);
- *(J2)* $\text{sop} J \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$ (causalidad);
- *(J3)* J es de soporte compacto (localización);
- *(J4)* $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ y $\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} J(x,t)dxdt = 1$ (densidad);
- *(J5)* para cada t fijo $J(x,t)$ es radial como función de x (invariancia por rotaciones espaciales).

Para J que cumple *(J4)*, definimos

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}. \tag{2.0.1}$$

Observemos que si además J satisface *(J3)* entonces α es finito.

Como ejemplos de núcleos que satisfagan las propiedades enunciadas arriba podemos citar el núcleo de la fórmula de valor medio para soluciones de la ecuación del calor $H(x,t) = \frac{1}{4}\mathcal{X}_{E((0,0);1)}(x,t)\frac{|x|^2}{t^2}$, núcleos de la forma $J(x,t) = \frac{1}{a}\mathcal{X}_{[0,a]}(t)\frac{1}{|B(0,b)|}\mathcal{X}_{B(0,b)}(x)$, con a y b números reales positivos, o núcleos a variables separadas más generales que el anterior $J(x,t) = \Phi(t)\Psi(x)$, donde Φ y Ψ son no negativas de soporte compacto, Φ tiene soporte contenido en el conjunto $[0,\infty)$, Ψ es una función radial, y $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x)dx = 1$.

Para funciones $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el operador $\triangle : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cumple que

$$\triangle\varphi(0) = C \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2} \fint_{B(0,r)} (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx.$$

Más generalmente, si J es radial, con soporte en la bola unitaria, $\int J(x)dx = 1$ y $\sigma_r J(x) = \frac{1}{r^n} J\left(\frac{x}{r}\right)$ entonces

$$\triangle\varphi(0) = C(J) \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left(\int \sigma_r J(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right).$$

Luego, tenemos que

$$\triangle\delta_0 = C(J)\lim_{r\to 0} \frac{\sigma_r J - \delta_0}{r^2},$$

y el límite es en el sentido de las distribuciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si ahora definimos los operadores $T_r : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(T_r\varphi)(x) = \frac{C(J)}{r^2}\left((\sigma_r J - \delta_0) * \varphi\right)(x)$ tenemos que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\triangle\varphi(x_0) = \lim_{r\to 0}(T_r\varphi)(x_0).$$

Estos operadores T_r son no-locales, puesto que, para conocer el valor de $T_r\varphi$ en un punto x_0, necesitamos conocer el valor de φ en todo un entorno de x_0, más precisamente en el conjunto $x_0 + \mathrm{sop}T_r$, conjunto "irreducible" en el sentido de que no podemos dejar de considerar valores de φ en ningún subconjunto de medida positiva de éste. Esto, a diferencia de un operador local, como lo es el Laplaciano, en el que si bien necesitamos saber el valor de φ en un entorno de x_0 para poder calcular $\triangle\varphi(x_0)$, este entorno es arbitrariamente chico.

Como se puede observar en las igualdades anteriores, los núcleos $\sigma_r J$, con los que se construyen los operadores T_r, son los que sirven para obtener fórmulas de valor medio para funciones armónicas. En este capítulo consideraremos el caso análogo del operador del calor aproximado por reescalamientos parabólicos de núcleos CTRW. En este sentido podemos decir que el proceso de Wiener que resuelve la ecuación del calor clásica puede verse como límite de reescalados de caminos al azar con tiempo aleatorio (CTRW).

En términos de límites de operadores, los resultados de esta sección nos dicen que

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t} + \nu\triangle\right)\delta_{(0,0)} = \lim_{r\to 0}\frac{\pi_r J - \delta_{(0,0)}}{r^2},$$

donde $\pi_r J(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$ es una dilatación parabólica de un núcleo CTRW J, μ y ν son constantes asociadas a J y el límite es en el sentido de las distribuciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

2.1. El operador no local inducido por el núcleo de valor medio parabólico

Veremos en esta sección que el operador del calor se puede obtener como límite de operadores no locales inducidos por el núcleo de valor medio parabólico $H(x,t) = \frac{1}{4}\mathcal{X}_{E((0,0);1)}(x,t)\frac{|x|^2}{t^2}$, con $E((0,0);1)$ como en (1.4.1). En la demostración usaremos mayormente las propiedades *(J1)* a *(J5)* de H, la forma explícita de H sólo la utilizaremos para obtener la ecuación del calor normalizada con difusión unitaria.

Proposición 2.1.1. *Sea H el núcleo del valor medio para temperaturas y $\pi_r H(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} H\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$. Sea κ tal que $\kappa^{-1} = 2^{-1}\sigma(S^{n-1})n^{\frac{n+2}{2}}(n+2)^{-\frac{n+6}{2}}\pi^{-\frac{n+2}{2}}\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)$. Entonces la familia de distribuciones $\frac{\kappa}{r^2}\left(\pi_r H - \delta_{(0,0)}\right)$ converge débilmente, cuando r tiende a cero, a la distribución de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ dada por $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \triangle\right)\delta_{(0,0)}$. Más aún, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ y $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ entonces*

$$\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \triangle\varphi\right)(x,t) = \kappa \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left(\left(\pi_r H - \delta_{(0,0)}\right) * \varphi\right)(x,t). \tag{2.1.1}$$

Demostración. Para denotar los operadores diferenciales en espacio tiempo usaremos D para el gradiente y D^2 para la matriz Hessiana. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Tomemos $0 < r < 1$, usando el teorema de Taylor para φ alrededor del punto $(0,0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\langle \pi_r H - \delta_{(0,0)}, \varphi\rangle \\
&= \frac{1}{4r^n}\iint_{E((0,0);r)} \varphi(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds - \varphi(0,0) \\
&= \frac{1}{4r^n}\iint_{E((0,0);r)} \left(\varphi(y,s) - \varphi(0,0)\right)\frac{|y|^2}{s^2}dyds \\
&= \frac{1}{4r^n}\iint_{E((0,0);r)} \left(D\varphi(0,0)(y,s) + \frac{1}{2}(y,s)D^2\varphi(0,0)(y,s)^t + R(y,s)\right)\frac{|y|^2}{s^2}dyds \\
&= I + II + III + IV + V + VI + VII,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0,0)\left(\frac{1}{4r^n}\iint_{E((0,0);r)} y_i\frac{|y|^2}{s^2}dyds\right), \\
II &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,0)\left(\frac{1}{4r^n}\iint_{E((0,0);r)} s\frac{|y|^2}{s^2}dyds\right),
\end{aligned}$$

$$III = \sum_{ij=1, i \neq j}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) \left(\frac{1}{8r^n} \iint_{E((0,0);r)} y_i y_j \frac{|y|^2}{s^2} dyds \right),$$

$$IV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(0,0) \left(\frac{1}{8r^n} \iint_{E((0,0);r)} y_i^2 \frac{|y|^2}{s^2} dyds \right),$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t}(0,0) \left(\frac{1}{8r^n} \iint_{E((0,0);r)} y_i s \frac{|y|^2}{s^2} dyds \right),$$

$$VI = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(0,0) \left(\frac{1}{8r^n} \iint_{E((0,0);r)} s^2 \frac{|y|^2}{s^2} dyds \right),$$

$$VII = \left(\frac{1}{4r^n} \iint_{E((0,0);r)} R(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds \right).$$

Los términos I, III y V son iguales a cero ya que las secciones $\{s = cte\} \bigcap E((0,0);r)$ son, respecto de la variable $y \in \mathbb{R}^n$, bolas centradas en $0 \in \mathbb{R}^n$ para todo $r > 0$ y las funciones $y_i \frac{|y|^2}{s^2}$ son impares en dichos conjuntos.

Haciendo ahora el cambio de variables $(y_1, s_1) = (ry, r^2 s)$ tenemos que

$$II = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,0) r^2 \left(\frac{1}{4} \iint_{E((0,0);1)} \frac{|y|^2}{s} dyds \right),$$

$$IV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(0,0) r^2 \left(\frac{1}{8} \iint_{E((0,0);1)} y_i^2 \frac{|y|^2}{s^2} dyds \right),$$

$$VI = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(0,0) r^4 \left(\frac{1}{8} \iint_{E((0,0);1)} |y|^2 dyds \right),$$

$$\begin{aligned} VII &= \frac{1}{4} \iint_{E((0,0);1)} R(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds \\ &\leq C(\varphi) \iint_{E((0,0);1)} \left(\sqrt{|ry|^2 + (r^2 s)^2} \right)^3 \frac{|y|^2}{s^2} dyds. \end{aligned}$$

Claramente $\frac{VI}{r^2} \to 0$ cuando $r \to 0$. Por otra parte, como para $0 < r < 1$ se cumple que $|VII| \leq Cr^3$ también tenemos que $\frac{VII}{r^2} \to 0$ cuando $r \to 0$.

Calculemos las integrales en II y IV. Para la primera

$$\begin{aligned} \iint_{E((0,0);1)} \frac{|y|^2}{s} dyds &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{B\left(0,(2ns\ln(4\pi(-s)))^{\frac{1}{2}}\right)} \frac{|y|^2}{s} dyds \\ &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s} \int_{0}^{(2ns\ln(4\pi(-s)))^{\frac{1}{2}}} \rho^{n+1} \int_{S^{n-1}} d\sigma d\rho ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma(S^{n-1})}{(n+2)} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s} \left(2ns\ln(4\pi(-s))\right)^{\frac{n+2}{2}} ds \\
&= -\frac{\sigma(S^{n-1})}{(n+2)} \int_{0}^{1} \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2\pi} u(-\ln(u))\right)^{\frac{n+2}{2}} du \\
&= -\frac{\sigma(S^{n-1})n^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)2^{\frac{n+2}{2}}\pi^{\frac{n+2}{2}}} \int_{0}^{\infty} e^{-v\left(\frac{n+2}{2}\right)} v^{\frac{n+2}{2}} dv \\
&= -\frac{\sigma(S^{n-1})n^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)2^{\frac{n+2}{2}}\pi^{\frac{n+2}{2}}} \frac{2}{(n+2)} \frac{2^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)^{\frac{n+2}{2}}} \int_{0}^{\infty} e^{-w} w^{\frac{n+2}{2}} dw \\
&= -\frac{2\sigma(S^{n-1})n^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)^{\frac{n+6}{2}}\pi^{\frac{n+2}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) \\
&= -4\kappa^{-1}.
\end{aligned}
$$

Para cada una de las integrales sumadas en IV observamos que por simetría deben ser todas iguales, por lo tanto, cada una de ellas será la n-ésima parte de $\iint_{E((0,0);1)} \frac{|y|^4}{s^2} dyds$. Calculemos estas últimas

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n} \iint_{E((0,0);1)} \frac{|y|^4}{s^2} dyds &= \frac{1}{n} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{B\left(0,(2ns\ln(4\pi(-s)))^{\frac{1}{2}}\right)} \frac{|y|^4}{s^2} dyds \\
&= \frac{1}{n} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s^2} \int_{0}^{(2ns\ln(4\pi(-s)))^{\frac{1}{2}}} \rho^{n+3} \int_{S^{n-1}} d\sigma d\rho ds \\
&= \frac{\sigma(S^{n-1})}{n(n+4)} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{1}{s^2} \left(2ns\ln(4\pi(-s))\right)^{\frac{n+4}{2}} ds \\
&= \frac{\sigma(S^{n-1})}{n+4} \frac{n^{\frac{n+2}{2}} 4\pi}{2^{\frac{n+4}{2}}\pi^{\frac{n+4}{2}}} \int_{0}^{1} \frac{1}{u^2} \left(u(-\ln(u))\right)^{\frac{n+2}{2}} du \\
&= \frac{\sigma(S^{n-1})n^{\frac{n+2}{2}} 4\pi}{(n+4)2^{\frac{n+4}{2}}\pi^{\frac{n+4}{2}}} \int_{0}^{\infty} e^{-v\left(\frac{n+2}{2}\right)} v^{\frac{n+4}{2}} dv \\
&= \frac{\sigma(S^{n-1})n^{\frac{n+2}{2}} 4\pi}{(n+4)2^{\frac{n+4}{2}}\pi^{\frac{n+4}{2}}} \frac{2}{(n+2)} \frac{2^{\frac{n+4}{2}}}{(n+2)^{\frac{n+4}{2}}} \int_{0}^{\infty} e^{-w} w^{\frac{n+4}{2}} dw \\
&= \frac{8\sigma(S^{n-1})n^{\frac{n+2}{2}}}{(n+4)(n+2)^{\frac{n+6}{2}}\pi^{\frac{n+2}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+6}{2}\right) \\
&= 8\kappa^{-1}.
\end{aligned}
$$

La última igualdad sale del hecho que $\frac{z+4}{2}\Gamma\left(\frac{z+4}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{z+6}{2}\right)$ para todo z complejo. Luego, $\frac{II}{r^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\kappa^{-1}$ y $\frac{IV}{r^2} = \triangle\varphi(x,t)\kappa^{-1}$. Resumiendo,

$$\frac{1}{r^2}\langle \pi_r H - \delta_{(0,0)}, \varphi\rangle \to \kappa^{-1}(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \triangle\varphi)(0,0) \tag{2.1.2}$$

cuando r tiende a cero. O equivalentemente

$$\frac{\kappa}{r^2}\left(\pi_r H - \delta_{(0,0)}\right) \to \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \triangle\right)\delta_{(0,0)}$$

cuando r tiende a 0 en el sentido de las distribuciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

La igualdad (2.1.1) se obtiene reemplazando φ por $\varphi(x-\cdot, t-\cdot)$ en (2.1.2). $\square$

2.2. Convergencia de operadores de CTRW generales al operador del calor

En la Proposición 2.1.1 el conocimiento preciso del núcleo H solo se usó para obtener el valor exacto de la constante κ. En realidad para núcleos J radiales en el espacio para tiempo fijo, de soporte compacto y de integral unitaria, es decir si J cumple *(J3)*, *(J4)* y *(J5)*, el límite débil sigue siendo válido con constantes que dependen de los momentos de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio del núcleo J. El resultado está contenido en el siguiente enunciado.

TEOREMA 2.2.1. *Sea J que cumple (J3), (J4) y (J5) y $\pi_r J(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$. Sean $\mu = \iint J(y,s)s\,dyds$ y $\nu = \frac{1}{2}\iint J(y,s)y_1^2\,dyds$. Entonces las distribuciones $\frac{1}{r^2}\left(\pi_r J - \delta_{(0,0)}\right)$ convergen débilmente, cuando r tiende a cero, a la distribución de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ dada por $\left(-\mu\frac{\partial}{\partial t} + \nu\triangle\right)\delta_{(0,0)}$. Más aún, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ y $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ entonces*

$$\left(-\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nu\triangle\varphi\right)(x,t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\left(\left(\pi_r J - \delta_{(0,0)}\right) * \varphi\right)(x,t) \tag{2.2.1}$$

donde el límite es uniforme en $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos primero la igualdad (2.2.1). La convergencia en el sentido de las distribuciones será una consecuencia de ésta. De hecho si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ y aplicamos (2.2.1) a $\widetilde{\varphi}(y,s) = \varphi(-y,-s)$ tomando $(x,t) = (0,0)$ tenemos que

$$\left(-\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0) + \nu\triangle\varphi(0,0)\right) = \lim_{r\to 0}\langle\frac{1}{r^2}\left(\pi_r J - \delta_{(0,0)}\right), \varphi\rangle,$$

y como la igualdad anterior se cumple para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ vale al convergencia débil del enunciado de la proposición.

Probemos entonces (2.2.1). Sea $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ y $0 < r < 1$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\iint \pi_r J(x-y,t-s)\varphi(y,s)dyds - \varphi(x,t) \\
&= \iint \pi_r J(x-y,t-s)(\varphi(y,s)-\varphi(x,t))dyds \\
&= \iint \pi_r J(x-y,t-s)D\varphi(x,t)(y-x,s-t)dyds \\
&\quad + \iint \pi_r J(x-y,t-s)\frac{1}{2}(y-x,s-t)D^2\varphi(x,t)(y-x,s-t)^t dyds \\
&\quad + \iint \pi_r J(x-y,t-s)R(y-x,s-t)dyds \\
&= I + II + III + IV + V + VI + VII,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t)\left(\iint (y_i - x_i)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right), \\
II &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\left(\iint (s-t)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right), \\
III &= \sum_{ij=1, i\neq j}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (y_i - x_i)(y_j - x_j)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right), \\
IV &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (y_i - x_i)^2\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right), \\
V &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (y_i - x_i)(s-t)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right), \\
VI &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (s-t)^2\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right), \\
VII &= \iint R(y-x,s-t)\pi_r J(x-y,t-s)dyds.
\end{aligned}
$$

Como $\pi_r J(\cdot,t)$ es radial para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $\iint (y_i - x_i)\pi_r J(x-y,t-s)dyds = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego, aplicando Fubini, $I = III = V = 0$.

Haciendo ahora el cambio de variables $(z,w) = (\frac{x-y}{r}, \frac{t-s}{r^2})$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
II &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)r^2 \left(\iint -wJ(z,w)dzdw\right),\\
IV &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(x,t)r^2 \left(\frac{1}{2}\iint z_i^2 J(z,w)dzdw\right),\\
VI &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)r^4 \left(\frac{1}{2}\iint w^2 J(z,w)dzdw\right),\\
VII &= \iint R(-rz,-r^2w)J(z,w)dzdw\\
&\le C(\varphi)\iint \left(\sqrt{|rz|^2+(r^2w)^2}\right)^3 J(y,s)dyds.
\end{aligned}
$$

Como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ tenemos que $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ está acotada uniformemente en (x,t), y lo mismo sucede para $C(\varphi)$ (pues esta constante está acotada por la norma infinito de las derivadas terceras de φ). Luego $\frac{VI}{r^2} \to 0$ y $\frac{VII}{r^2} \to 0$ cuando $r \to 0$, y la convergencia es uniforme en (x,t).

Por otro lado $\frac{II}{r^2} = -\mu\varphi_t(x,t)$. Y por la radialidad del núcleo J, $\nu = \frac{1}{2}\iint J(y,s)y_1^2dyds = \frac{1}{2}\iint J(y,s)y_i^2dyds$ para todo $i = 1,\dots,n$ (notemos además que $\nu = \frac{1}{2n}\iint J(y,s)|y|^2dyds$). Así $\frac{IV}{r^2} = \nu\sum_i^n \varphi_{x_ix_i}(x,t)$.

Luego, tenemos que

$$
\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\left(\left(\pi_r J - \delta_{(0,0)}\right) * \varphi\right)(x,t) = \left(-\mu\varphi_t + \nu\triangle\varphi\right)(x,t)
$$

y el límite es uniforme en $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Capítulo 3

Existencia de soluciones para CTRW con dato inicial prescripto

En este capítulo veremos cómo plantear un problema de Cauchy asociado a la ecuación

$$\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} J(y,s)\,[u(x-y,t-s)-u(x,t)]\,dydt = 0 \tag{3.0.1}$$

teniendo en cuenta el fenómeno físico que ésta modela, el cual describimos en la introducción general y la introducción de la primera parte.

La función de densidad en $\mathbb{R}^n$ definida como

$$\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} J(x,t)dt$$

es llamada *función densidad de probabilidad de longitud del salto*. Análogamente la *función densidad de probabilidad de tiempo de espera* se define como

$$\tau(t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x,t)dx.$$

Notemos que si J satisface la propiedad *(J4)* enunciada en la introducción del Capítulo 2, entonces (3.0.1) es equivalente a

$$u(x,t) = \iint J(x-y,t-s)u(y,s)dyds. \tag{3.0.2}$$

Por otra parte si J satisface *(J2)* y $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$ es la altura del soporte esencial de J, entonces para calcular $u(x,0)$ con la fórmula (3.0.2) será preciso conocer u para tiempos negativos (al pasado) hasta $-\alpha$. En particular si tenemos la información de que en el pasado ($t<0$) la partícula se encontraba con certeza en el origen 0 de $\mathbb{R}^n$, $u(y,s) = \delta_0(y)$ para $s<0$, tendremos que en el instante inicial del proceso la distribución de probabilidad de que la misma se encuentre en el instante cero en una región del espacio está dada por la densidad $u(x,0)$ que podemos calcular así

$$u(x,0) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} J(x-y,-s)u(y,s)dyds$$

$$= \int_{s<0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J(x-y,-s)u(y,s)dy \right) ds$$
$$= \int_{s<0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J(x-y,-s)\delta_0(y)dy \right) ds$$
$$= \int_{s<0} J(x,-s)ds$$
$$= \lambda(x).$$

En otras palabras, la situación determinística “la partícula está en el origen para $t<0$” produce “inmediatamente” a tiempo $t=0$ una situación aleatoria modelada por la función densidad de probabilidad de longitud de salto $\lambda(x)$ asociada a la densidad J.

Más generalmente, si la posición de la partícula a tiempo $t<0$ está distribuida de acuerdo a una densidad de probabilidad $f(x)$, entonces $u(x,0)=(\lambda * f)(x)$. Para plantear el problema de valores iniciales de tipo Cauchy que resolveremos conviene, con las observaciones anteriores, tomar el punto de vista de considerar dado, y por lo tanto dato, el pasado $t<0$ y no a $t=0$ como es usual en difusiones clásicas, y dejar que la dinámica del sistema determinada por J conduzca el devenir $(t \geq 0)$ del sistema.

Dada $g(x,t)$ para $t<0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ definimos el operador e sobre funciones $v(x,t)$ para $t \geq 0$ por

$$\mathrm{e}(v)(x,t) = \begin{cases} g(x,t); & t<0 \\ v(x,t); & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.0.3}$$

Con esta notación el problema con valores iniciales natural es el siguiente: sean $J(x,t)$ y $f(x)$ dados, encontrar una función $u(x,t)$ definida en $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ tal que

$$P(J,f) \begin{cases} u(x,t) = (J * \mathrm{e}\,(u))(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ \mathrm{e}\,(u)\,(x,t) = \begin{cases} f(x), & t<0 \\ u(x,t), & t \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Cuando necesitemos destacar la dinámica dada por J o el “dato inicial” dado por f de manera precisa diremos que u resuelve el problema $P(J,f)$. A las soluciones de este problema las denotaremos como $u(J,f)$.

Notemos que si sop$J \subset [0, \alpha]$ entonces para $t \geq \alpha$ las soluciones de $P(J, f)$ cumplen que

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)dyds.$$

El problema $P(J, f)$ se puede pensar también con una condición inicial $g(x,t) : \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ que dependa de las n variables espaciales y la variable temporal t. En este caso también denotaremos sus soluciones de la forma $u(J, g)$.

3.1. Existencia de soluciones de CTRW con dato inicial en L^∞

En el resultado principal de esta sección demostraremos que bajo las hipótesis de que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que J cumple las propiedades de $(J1)$ a $(J4)$ el problema $P(J, f)$ tiene única solución en el espacio de funciones $(\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

En lo que sigue, por simplicidad usaremos la notación de convolución para funciones que no están definidas en todo $\mathbb{R}^{n+1}$, pero que, dado que el soporte de una de ellas es compacto y está contenido en el conjunto $\{(x,t) : t \geq 0\}$, las integrales estarán bien definidas en el dominio en consideración. Con esta observación en mente resolveremos primero un problema de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = (J * \mathrm{e}(a,b,g;u))(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [a,b] \\ \mathrm{e}(a,b,g;u)(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} g(x,t), & t < a \\ u(x,t), & t \in [a,b]. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3.1.1}$$

donde a y b son números reales tales que $b - a < \alpha$, $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$, y el dato inicial $g(x,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (a - \alpha, a))$.

Notemos que en (3.1.1), a diferencia de $P(J, f)$, el dato $g(x,t)$ también depende de $t \in \mathbb{R}$.

Siguiendo las ideas de [8], [**13**] y [**14**] resolveremos (3.1.1) utilizando el Teorema de punto fijo de Banach.

Lema 3.1.1. *Sea J que satisface las propiedades de (J1) a (J4). Sea $g(x,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (a - \alpha, a))$. Entonces existe una única solución u de* (3.1.1) *en $(\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [a,b])$. La* *aplicación que al dato inicial g le asigna la solución u es lineal, continua (no expansiva) y preserva la masa. Más precisamente;*

a) *Si g_1 y $g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (a-\alpha, a))$, $c \in \mathbb{R}$ y si u_1 y u_2 resuelven (3.1.1) con g_1 y g_2 como los datos iniciales respectivos, resulta que $u_1 + cu_2$ resuelve (3.1.1) con dato inicial $g_1 + cg_2$.*

b) $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [a,b])} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times (a-\alpha,a))}$.

c) *Si $\int g(x,t)dx = \overline{g}$ y $\int |g(x,t)|dx \leq \widetilde{g}$ para todo $t \in (a-\alpha, a)$ entonces $\int u(x,t)dx = \overline{g}$ para todo $t \in [a,b]$ y además $\int |u(x,t)|dx \leq \widetilde{g}$.*

Demostración. Notemos que de las propiedades *(J2)* y *(J3)* de J, se deduce que $\alpha = \sup\{\gamma : \iint_{t<\gamma} J(x,t)dxdt < 1\}$ es positivo y finito. El espacio $(\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [a,b])$ con la norma L^∞ es un espacio de Banach.

Dada $v \in (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [a,b])$ la función $\mathrm{e}(a,b,g;u) = g\mathcal{X}_{t<a} + v\mathcal{X}_{a\leq t\leq b}$ es acotada en $\mathbb{R}^n \times (a-\alpha, b]$ y como $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$, la integral

$$G(x,t) := \iint_{\mathbb{R}^n \times (a-\alpha,b]} J(x-y,t-s)\mathrm{e}\,(a,b,g;v)\,(y,s)dyds$$

es absolutamente convergente para $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [a,b]$. Probemos ahora que G pertenece al espacio $(\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [a,b])$. De la definición de G vemos que

$$\begin{aligned} |G(x,t)| &\leq \left(\iint Jdyds\right) \|\mathrm{e}\,(a,b,g;v)\|_\infty \\ &\leq \sup\{\|g\|_\infty, \|v\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Veamos que G es continua. Para $h \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$ tal que $(x+h,t+k) \in \mathbb{R}^n \times [a,b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} &|G(x+h,t+k) - G(x,t)| \\ &\leq \iint |J(x+h-y,t+k-s) - J(x-y,t-s)|\,|\mathrm{e}\,(a,b,g;v)\,(y,s)|\,dyds \\ &\leq \omega_1\left(\sqrt{|h|^2 + k^2}\right) \|\mathrm{e}\,(a,b,g;v)\|_\infty, \end{aligned}$$

donde ω_1 es el modulo de continuidad en L^1 de J. Como $\omega_1(s) \to 0$ cuando s tiende a cero tenemos la continuidad de G.

Definamos $T : (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [a,b]) \to (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [a,b])$ por $Tv = G$.

Probemos que T es una contracción en $(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[a,b])$. Sean v y w dos funciones en $(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[a,b])$. Sea $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[a,b]$. Entonces, como

$$\mathrm{e}\,(a,b,g;w)\,(x,t)=\begin{cases} g(x,t), & t<a \\ w(x,t), & t\in[a,b], \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} Tv(x,t)-Tw(x,t) &= \iint_{s\le b} J(x-y,t-s)(\mathrm{e}\,(a,b,g;v)\,(y,s)-\mathrm{e}\,(a,b,g;w)\,(y,s))dyds \\ &= \iint_{a\le s\le b} J(x-y,t-s)(v(y,s)-w(y,s))dyds. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|Tv-Tw\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[a,b])}\le \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[a,b]}\iint_{a\le s\le b} J(x-y,t-s)dyds\,\|v-w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[a,b])}.$$

De la definición de α, las propiedades *(J1)* y *(J2)* del núcleo J y dado que $b-a<\alpha$ tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{a\le s\le b} J(x-y,t-s)dyds &= \iint_{t-b\le\sigma\le t-a} J(z,\sigma)dzd\sigma \\ &= \iint_{0\le\sigma\le t-a} J(z,\sigma)dzd\sigma \\ &\le \iint_{0\le\sigma\le b-a} J(z,\sigma)dzd\sigma =: \tau<1. \end{aligned}$$

Luego, $\|Tv-Tw\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[a,b])}\le\tau\,\|v-w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[a,b])}$. Entonces T es una contracción en $(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[a,b])$. Por lo tanto existe un único punto fijo $u\in(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[a,b])$ para T; $Tu=u$. En otras palabras

$$u(x,t)=\iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}\,(a,b,g;u)\,(y,s)dyds$$

para $x\in\mathbb{R}^n$ y $a\le t\le b$.

Demostraremos ahora las propiedades *a)* *b)* y *c)* del enunciado.

Veamos primero que vale *a)*. La linealidad de las soluciones respecto del dato inicial sale de la definición misma de lo que significa ser solución de (3.1.1). De hecho si u_1 y u_2

resuelven (3.1.1) con dato inicial g_1 y g_2 respectivamente, c es un número real, y

$$\mathrm{e}(a,b,g_1+cg_2;u_1+cu_2)=\begin{cases} g_1+cg_2 & t<a \\ u_1+cu_2 & t\in[a,b] \end{cases}$$

entonces para todo $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[a,b]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}\left(a,b,g_1+cg_2;u_1+cu_2\right)dyds \\
&=\iint_{s<a} J(x-y,t-s)(g_1(y,s)+cg_2(y,s))dyds \\
&\quad+\iint_{a\le s\le b} J(x-y,t-s)(u_1(y,s)+cu_2(y,s))dyds \\
&=\iint_{s<a} J(x-y,t-s)g_1(y,s)dyds+\iint_{a\le s\le b} J(x-y,t-s)u_1(y,s)dyds \\
&\quad+c\left(\iint_{s<a} J(x-y,t-s)g_2(y,s)dyds+\iint_{a\le s\le b} J(x-y,t-s)u_2(y,s)dyds\right) \\
&=\iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(a,b,g_1;u_1)(y,s)dyds+c\iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(a,b,g_2;u_2)(y,s)dyds \\
&=u_1(x,t)+cu_2(x,t).
\end{aligned}$$

Luego, u_1+cu_2 resuelve (3.1.1) con dato inicial g_1+cg_2.

Probemos ahora el ítem *b)*. Observemos que como u puede ser obtenida por la iteración de T empezando con cualquier función v en $(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[a,b])$, podemos tomar v como la función constante $\frac{s(g)-i(g)}{2}$, donde $s(g)=\sup g$ y $i(g)=\inf g$. Luego $\mathrm{e}\left(a,b,g;v\right)=g\mathcal{X}_{\{t<a\}}+v\mathcal{X}_{\{a\le t\le b\}}$, y así $i(g)\le\mathrm{e}\left(a,b,g;v\right)\le s(g)$. Por las propiedades *(J1)* y *(J4)* de J también tenemos que $i(g)\le Tv\le s(g)$ en $\mathbb{R}^n\times[a,b]$. Con el mismo argumento podemos probar que para toda iteración $T^m v$ de Tv tenemos que $i(g)\le T^m v\le s(g)$. Ya que u es el límite uniforme $T^m v$ obtenemos que

$$i(g)\le u\le s(g)$$

en $\mathbb{R}^n\times[a,b]$. Luego, vale *b)*.

Demostremos por último el ítem *c)*. Es decir que $\int_{\mathbb{R}^n}u(x,t)dx=\overline{g}$ y $\int|u(x,t)|dx\le\widetilde{g}$ para todo $a\le t\le b$. Ya que u puede ser obtenida como límite de sucesivas iteraciones de T aplicada a cualquier función $v\in(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[a,b])$, podemos tomar $v(x,t)=$

$\varphi(x)$ como punto de partida, donde $\varphi(x)$ es una función continua, acotada y tal que $\int \varphi(x)dx = \overline{g}$ y $\int |\varphi(x)|\, dx \leq \widetilde{g}$.

Veremos primero que $\int T^m\varphi(x,t)dx = \overline{g}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $t \in [a,b]$. Luego probaremos que la sucesión $T^m\varphi$ converge a u en el espacio $\mathcal{C}\left([a,b]; L^1(\mathbb{R}^n)\right)$ con la norma $|||v||| = \sup\limits_{t\in[a,b]} \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. De estos dos hechos tendremos como consecuencia la conservación de masa para u.

Observemos primero que $\int T^m\varphi(x,t)dx = \overline{g}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $t \in [a,b]$. Veamos en principio que la integral en la variable x de $|T^m\varphi(x,t)|$ es menor o igual que $\widetilde{g}$. De hecho, de *(J4)*, vemos que

$$\begin{aligned}
\int |T\varphi(x,t)|\, dx &= \int \left| \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}\left(a,b,g;\varphi\right)(y,s)dyds \right| dx \\
&\leq \int \left| \iint_{s<a} J(x-y,t-s)g(y,s)dyds \right| dx \\
&\quad + \int \left(\iint_{a\leq s} J(x-y,t-s)dxds \right) |\varphi(y)|\, dy \\
&= \int \left| \iint_{s<a} J(y,t-s)g(x-y,s)dyds \right| dx \\
&\quad + \int \left(\iint_{a\leq s} J(x-y,t-s)dxds \right) |\varphi(y)|\, dy \\
&\leq \iint_{a<s} J(y,t-s) \left(\int |g(x-y,s)|\, dx \right) dyds \\
&\quad + \int \left(\iint_{a\leq s} J(x-y,t-s)dxds \right) |\varphi(y)|\, dy \\
&\leq \widetilde{g}.
\end{aligned}$$

Inductivamente, asumiendo que $\int |T^m\varphi(x,t)|\, dx \leq \widetilde{g}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int \left|T^{m+1}\varphi(x,t)\right| dx &= \int |T(T^m\varphi)(x,t)|\, dx \\
&= \int \left| \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}\left(a,b,g;T^m\varphi\right)(y,s)dyds \right| dx \\
&= \int \left| \iint J(y,t-s)\mathrm{e}\left(a,b,g;T^m\varphi\right)(x-y,s)dyds \right| dx \\
&= \int \left| \iint_{s<a} J(y,t-s)g(x-y,s)dyds \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \iint_{a\leq s} J(y,t-s)T^m\varphi(x-y,s)dyds\Big|\, dx \\
&\leq \iint_{s<a} J(y,t-s)\int |g(x-y,s)|\, dxdyds \\
&\quad + \iint_{a\leq s} J(y,t-s)\int \left|T^k\varphi(x-y,s)\right| dxdyds \\
&\leq \widetilde{g}.
\end{aligned}
$$

Luego, las funciones $T^m\varphi(x,t)$ son integrables, como función de x, para todo $m\in\mathbb{N}$ y $t\in[a,b]$. Razonando de modo análogo a como lo hicimos para probar la integrabilidad de $T^m\varphi(x,t)$ respecto de la variable x veremos que $\int T^m\varphi(x,t)dx=\overline{g}$ para todo $t\in[a,b]$. Probemos primero el caso $m=1$. Sea $t\in[a,b]$ entonces

$$
\begin{aligned}
\int T\varphi(x,t)dx &= \iiint J(x-y,t-s)\mathrm{e}\left(a,b,g;\varphi\right)(y,s)dydsdx \\
&= \int\iint_{s<a} J(x-y,t-s)g(y,s)dydsdx \\
&\quad + \int\left(\iint_{a\leq s} J(x-y,t-s)dxds\right)\varphi(y)dy \\
&= \int\iint_{s<a} J(y,t-s)g(x-y,s)dydsdx \\
&\quad + \int\left(\iint_{a\leq s} J(x-y,t-s)dxds\right)\varphi(y)dy \\
&= \iint_{s<a} J(y,t-s)\left(\int g(x-y,s)dx\right)dyds \\
&\quad + \left(\iint_{a\leq s} J(x,t-s)dxds\right)\int\varphi(y)dy \\
&= \overline{g}\left(\iint_{s<a} J(y,t-s)dyds+\iint_{a\leq s} J(x,t-s)dxds\right) \\
&= \overline{g}.
\end{aligned}
$$

Análogamente, podemos probar que

$$
\begin{aligned}
\int T^{m+1}\varphi(x,t)dx &= \iint_{s<a} J(y,t-s)\left(\int g(x-y,s)dx\right)dyds \\
&\quad + \iint_{a\leq s} J(y,t-s)\left(\int T^m\varphi(x-y,s)dx\right)dyds
\end{aligned}
$$

para $t \in [a,b]$. Si asumimos que $\int T^m\varphi(x,t) = \overline{g}$, podemos probar que $\int T^{m+1}\varphi(x,t) = \overline{g}$. Luego, por inducción vemos que $\int T^m\varphi(x,t) = \overline{g}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $t \in [a,b]$.

Observemos ahora que $T^m\varphi$ tiende a u en $\mathcal{C}([a,b], L^1(\mathbb{R}^n))$ con la norma $|||v||| = \sup_{t\in[a,b]} \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. De hecho, si probamos que

$$|||T^{m+1}\varphi - T^m\varphi||| \leq \tau^m |||T^1\varphi - \varphi||| \tag{3.1.2}$$

entonces $T^m\varphi$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}([a,b], L^1(\mathbb{R}^n))$, el cual es un espacio de Banach con la norma $|||\cdot|||$, y, ya que $T^m\varphi$ converge uniformemente a u, la convergencia también se da en el espacio $\mathcal{C}([a,b], L^1(\mathbb{R}^n))$ con la norma $|||\cdot|||$. Probemos entonces (3.1.2).

Veamos primero que $T^m\varphi$ es continua como funcion de $t \in [a,b]$ con valores en $L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo m. Tomemos t y $t+h$ dos puntos en $[a,b]$. Luego

$$\begin{aligned}
&\int |T^m\varphi(x,t) - T^m\varphi(x,t+h)|\, dx \\
&= \int \Bigg| \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}\left(a,b,g;T^{m-1}\varphi\right)(y,s)dyds \\
&\quad - \iint J(x-y,t+h-s)\mathrm{e}\left(a,b,g;T^{m-1}\varphi\right)(y,s)dyds \Bigg| dx \\
&= \int \left| \iint \left[J(z,t-s) - J(z,t+h-s)\right] \mathrm{e}\left(a,b,g;T^{m-1}\varphi\right)(x-z,s)dzds \right| dx \\
&\leq \iint |J(z,t-s) - J(z,t+h-s)| \left(\int \left|\mathrm{e}\left(a,b,g;T^{m-1}\varphi\right)(x-z,s)\right| dx \right) dzds \\
&\leq \widetilde{g} \iint |J(z,t-s) - J(z,t+h-s)|\, dzds,
\end{aligned}$$

y el último término de la cadena de desigualdades tiende a cero cuando $h \to 0$ porque $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Del mismo modo, con cuentas similares, podemos ver que vale (3.1.2). De hecho, para $t \in [a,b]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int \left|T^{m+1}\varphi(x,t) - T^m\varphi(x,t)\right| dx \\
&= \int \left| \iint J(x-y,t-s)\left(\mathrm{e}\left(a,b,g;T^m\varphi\right)(y,s) - \mathrm{e}\left(a,b,g;T^{m-1}\varphi\right)(y,s)\right) dyds \right| dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left| \iint_{a\le s\le t} J(x-y,t-s)\left(T^m\varphi(y,s)-T^{m-1}\varphi(y,s)\right) dyds \right| dx \\
&\le \iint_{a\le s\le t} J(z,t-s)\left(\int \left|T^m\varphi(x-z,s)-T^{m-1}\varphi(x-z,s)\right| dx\right) dzds \\
&= \iint_{a\le s\le t} J(z,t-s)\left(\int \left|T^m\varphi(x,s)-T^{m-1}\varphi(x,s)\right| dx\right) dzds \\
&\le \iint_{a\le s\le b} J(z,t-s)dzds\left(\sup_{s\in[a,b]}\int \left|T^m\varphi(x,s)-T^{m-1}\varphi(x,s)\right| dx\right) \\
&= \iint_{t-b\le \sigma\le t-a} J(z,\sigma)dzd\sigma |||T^m\varphi - T^{m-1}\varphi||| \\
&\le \iint_{0\le s\le b-a} J(z,s)dzds |||T^m\varphi - T^{m-1}\varphi||| \\
&= \tau |||T^m\varphi - T^{m-1}\varphi|||,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
|||T^{m+1}\varphi - T^m\varphi||| \le \tau |||T^m\varphi - T^{m-1}\varphi|||.
$$

Iterando obtenemos (3.1.2).

Veamos ahora que $\int u(x,t)dx = \overline{g}$ para todo $t\in[a,b]$. Como $T^m\varphi$ converge a u en $\mathcal{C}([a,b];L^1(\mathbb{R}^n))$ tenemos que $\lim\limits_{m\to\infty}\int T^m\varphi(x,t) = \int u(x,t)dx$ para todo $t\in[a,b]$. Como además $\int T^m\varphi(x,t) = \overline{g}$ para todo $m\in\mathbb{N}$ y todo $t\in[a,b]$ tenemos que $\int u(x,t)dx = \overline{g}$ para todo $t\in[a,b]$. Notemos además que $\int |u(x,t)|dx \le \widetilde{g}$ uniformemente en t. Sea $t\in[a,b]$, luego

$$
\begin{aligned}
\int |u(x,t)|dx &\le \int |u(x,t)-T^m\varphi(x,t)|dx + \int |T^m\varphi(x,t)|dx \\
&\le \int |u(x,t)-T^m\varphi(x,t)|dx + \widetilde{g}.
\end{aligned}
$$

Como $T^m\varphi$ converge a u en $\mathcal{C}\left([a,b];L^1(\mathbb{R}^n)\right)$ entonces, tomando límite cuando m tiende a infinito, tenemos que $\int |u(x,t)|dx \le \widetilde{g}$. □

Ahora probaremos la existencia y unicidad de la soluciones al problema $P(J,f)$ y algunas propiedades de la misma como la linealidad y continuidad del operador que asigna al dato inicial a la correspondiente solución, y la conservación de masa. El resultado será una consecuencia del Lema 3.1.1 aplicado de modo inductivo en las bandas de la forma

$\mathbb{R}^n \times [(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$, donde $j \in \mathbb{N}$. Aunque la idea es sencilla, la notación que usamos en el lema anterior para las distintas franjas temporales necesita una adecuación para que la escritura resulte más simple. Puesto que usaremos como extremos los números $a = (j-1)\frac{\alpha}{2}$ y $b = j\frac{\alpha}{2}$ con $j \in \mathbb{N}$, la función $\mathrm{e}\big((j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}, g; v\big)$ denotará la aplicación que asigna a v la función $g\mathcal{X}_{t<(j-1)\frac{\alpha}{2}} + v\mathcal{X}_{[(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]}$. Como también la "condición inicial" g dependerá de la franja temporal en que estemos aplicando el Lema 3.1.1, será una función g_j que definiremos precisamente en la prueba del teorema, por brevedad $\mathrm{e}_j(v)$ denotará $\mathrm{e}\big((j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}, g_j; v\big)$.

TEOREMA 3.1.2. *Sea J que satisface las propiedades de (J1) a (J4) y $f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sea $\alpha = \sup\Big\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\Big\}$. Entonces existe una única función u en el conjunto $\mathcal{B} = (\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ que resuelve $P(J,f)$. La aplicación que al dato inicial f le asigna la solución u es lineal, continua (no expansiva) y preserva la masa. Más precisamente,*

a) *Si f_1 y $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{R}$ y si u_1 y u_2 resuelven $P(J,f_1)$ y $P(J,f_2)$ respectivamente, entonces $u_1 + cu_2$ resuelve $P(J, f_1 + cf_2)$.*

b) $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

c) *Si f es integrable entonces $\int u(x,t)dx = \int f(x)dx$ para todo $t \in [0,\infty)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este resultado procederemos inductivamentte cubriendo $\mathbb{R}_0^+$ con intervalos $I_j = [(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$ con $j \in \mathbb{N}$. Probaremos que sobre cada banda $\mathbb{R}^n \times [(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$ existe una única solución u_j de un problema del tipo (3.1.1) con dato inicial $g_j = f\mathcal{X}_{t<0} + \sum_{k=1}^{j-1} u_k\mathcal{X}_{\widetilde{I}_k}$, $\widetilde{I}_k = [(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2})$, veremos que las funciones u_j se pegan continuamente en los extremos de dichas bandas, luego $u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\times\widetilde{I}_j}$ será la solución de $P(J,f)$.

El primer paso, cuando $j=1$, ya está hecho y es el Lema 3.1.1 tomando $a=0$, $b=\frac{\alpha}{2}$ y $g(x,t) = f(x)$. En este caso el operador T definido en el Lema 3.1.1 tiene la siguiente forma

$$Tv(x,t) = \iint J(x-y, t-s)\mathrm{e}_1(v)(y,s)dyds,$$

Para v en el espacio $\mathscr{B}_1 = (\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0,\frac{\alpha}{2}])$ y $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\frac{\alpha}{2}]$. Este operador es una contracción en $\mathscr{B}_1$ con la métrica inducida por la norma L^∞. Luego, existe una única función $u_1 \in \mathscr{B}_1$ tal que

$$u_1(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_1(u_1)(y,s)dyds$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \frac{\alpha}{2}]$. Además

$$\|u_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\frac{\alpha}{2}])} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

y si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\int u_1(x,t)dx = \int f(x)dx \tag{3.1.3}$$

para todo $t \in [0, \frac{\alpha}{2}]$. Además la función u_1 cumple que $\int |u_1(x,t)|dx \leq \int |f(x)|dx$ uniformemente en t.

Supongamos que $u_i \in \mathscr{B}_i = (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [(i-1)\frac{\alpha}{2}, i\frac{\alpha}{2}])$ para $i = 1, \ldots, j$ ha sido construida de modo tal que

$$u_i(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_i\left(u_i\right)(y,s)dyds$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I_i$. Más aún, supongamos que $\|u_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times I_i)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, y si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\int_{\mathbb{R}^n} u_i(x,t)dx = \int f(x)dx$ y $\int_{\mathbb{R}^n} |u_i(x,t)|dx \leq \int |f(x)|dx$ para todo $t \in I_i$. Además supongamos que $u_i(x,(i-1)\frac{\alpha}{2}) = u_{i-1}(x,(i-1)\frac{\alpha}{2})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definamos $\mathscr{B}_{j+1} := (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [j\frac{\alpha}{2}, (j+1)\frac{\alpha}{2}])$ con la métrica inducida por la norma L^∞. Para $v \in \mathscr{B}_{j+1}$, definamos

$$T_{j+1}v(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_{j+1}\left(v\right)(y,s)dyds.$$

Como en el Lema 3.1.1, es fácil verificar que $T_{j+1}v \in \mathscr{B}_{j+1}$. Por lo tanto $T_{j+1} : \mathscr{B}_{j+1} \to \mathscr{B}_{j+1}$. Del mismo modo podemos ver que T_{j+1} es una contracción en $\mathscr{B}_{j+1}$ y la constante de la contracción es $\tau = \iint_{0 \leq s \leq \frac{\alpha}{2}} J(y,s)dyds$. Luego, existe una única función u_{j+1} tal que

$$u_{j+1} = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_{j+1}(u_{j+1})(y,s)dyds.$$

Por la hipótesis inductiva asumida sobre las funciones u_i, $i = 1, \ldots, j$, respecto a la acotación de su norma L^∞ por la norma L^∞ de f ($\|u_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times I_i)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$) y la construcción de g_{j+1} tenemos que $\|g_{j+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times (-\infty, j\frac{\alpha}{2}])} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Luego, con el mismo argumento que en el Lema 3.1.1 podemos probar que

$$\|u_{j+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times I_{j+1})} \leq \|g_{j+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times(-\infty,j\frac{\alpha}{2})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Si ahora tenemos además que $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, como por hipótesis inductiva $\int u_i(x,t)dx = \int f(x)dx$ y $\int |u_i(x,t)| \leq \int |f(x)|dx$ para $t\in I_i$, y para $i=1,\dots,j$, tenemos que $\int g_{j+1}(x,t)dx = \int f(x)dx$ y $\int |g_{j+1}(x,t)|dx \leq \int |f(x)|dx$ para todo $t\in(-\infty,j\frac{\alpha}{2})$, luego por el Lema 3.1.1, tenemos que para todo $t\in I_{j+1}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{j+1}(x,t)dx = \int f(x)dx \tag{3.1.4}$$

y $\int_{\mathbb{R}^n} |u_{j+1}|(x,t)dx \leq \int |f(x)|dx$.

Con el fin de comprobar que $u_{j+1}(x,j\frac{\alpha}{2}) = u_j(x,j\frac{\alpha}{2})$ observemos que para $j\frac{\alpha}{2}\leq t\leq (j+1)\frac{\alpha}{2}$, la ecuación de punto fijo está dada por

$$u_{j+1}(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_{j+1}\left(u_{j+1}\right)(y,s)dyds.$$

Para $t=j\frac{\alpha}{2}$, la propiedad *(J2)* nos garantiza que en la integral de arriba sólo están involucrados valores de s que están acotados por $j\frac{\alpha}{2}$. Entonces, para aquellos valores de s, $\mathrm{e}_{j+1}\left(u_{j+1}\right)(y,s) = \mathrm{e}_j\left(u_j\right)(y,s)$. Luego

$$u_{j+1}(x,j\tfrac{\alpha}{2}) = \iint J(x-y,j\tfrac{\alpha}{2}-s)\mathrm{e}_j\left(u_j\right)(y,s)dyds = u_j(x,j\tfrac{\alpha}{2}),$$

que es lo que queríamos ver.

Notemos que la función $u(x,t)$ definida en $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ como $u(x,t)=\sum_{j=1}^\infty u_j(x,t)\mathcal{X}_{\widetilde{I}_j}(t)$ es continua y acotada. Más aún, $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))}\leq\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Esto prueba que $u\in\mathcal{B}=(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Veamos que u resuelve $P(J,f)$. Sea $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$, sea j_0 tal que $t\in\widetilde{I}_{j_0}$. Luego,

$$\begin{aligned}
u(x,t) = u_{j_0}(x,t) &= \iint J(x-y,t-s)e_{j_0}(u_{j_0})(y,s)dyds\\
&= \iint J(x-y,t-s)\left(g_{j_0}(y,s)\mathcal{X}_{s<(j_0-1)\frac{\alpha}{2}}(s) + u_{j_0}(y,s)\mathcal{X}_{\widetilde{I}_{j_0}}(s)\right)dyds\\
&= \iint J(x-y,t-s)\left(f(y)\mathcal{X}_{s<0}(s) + \sum_{j=1}^{j_0} u_j(y,s)\mathcal{X}_{\widetilde{I}_j}(s)\right)dyds.
\end{aligned}$$

Como J satisface *(J2)* entonces $J(x-y,t-s)$ tiene soporte en $\{(y,s): s<t\} \subset \{(y,s): s<j_0\frac{\alpha}{2}\}$, luego

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \iint J(x-y,t-s)\left(f(y)\mathcal{X}_{s<0}(s)+\sum_{j=1}^{j_0} u_j(y,s)\mathcal{X}_{\widetilde{I}_j}(s)\right)dyds \\
&\quad + \iint J(x-y,t-s)\left(\sum_{j=j_0+1}^{\infty} u_j(y,s)\mathcal{X}_{\widetilde{I}_j}(s)\right)dyds \\
&= \iint J(x-y,t-s)\left(f(y)\mathcal{X}_{s<0}(s)+u(y,s)\mathcal{X}_{s\geq 0}(s)\right)dyds \\
&= \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(u)(y,s)dyds.
\end{aligned}$$

La unicidad de u sale del Lema 3.1.1 observando que esta es única en la banda $\mathbb{R}^n \times [0,\frac{\alpha}{2}]$, nuevamente usando el Lema 3.1.1 tenemos que u es única en $\mathbb{R}^n \times [\frac{\alpha}{2},\alpha]$, y así sucesivamente tenemos que u es única en cada banda de la forma $\mathbb{R}^n \times [(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$ con $j \in \mathbb{N}$.

Si además $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de (3.1.3) y (3.1.4) tenemos que

$$\int u(x,t)dx = \int f(x)dx \tag{3.1.5}$$

para todo $t \in [0,\infty)$.

La linealidad de las soluciones respecto de los datos iniciales sale de la definición de ser solución de $P(J,f)$, la prueba es idéntica a la hecha en el Lema 3.1.1 y por lo tanto la omitiremos. □

3.2. Existencia de soluciones de CTRW con dato inicial en L^2. El método de Fourier

En esta sección el problema $P(J,f)$ tendrá el mismo aspecto pero lo interpretaremos en el sentido de la integración de funciones con valores en espacios de Banach. Dada una función $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por la desigualdad de Young, la convolución contra φ define un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $J: \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R}^n)$ una función continua de soporte compacto contenido en un intervalo $[0,\alpha]$ con $\alpha > 0$. Estamos usando $*$ para denotar la convolución en $\mathbb{R}^{n+1}$. Usaremos $\star$ para denotar la convolución en $\mathbb{R}^n$. El problema $P(J,f)$ se plantea en este contexto de la siguiente forma, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ buscamos $U: [0,\infty) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, si es posible continua, que satisfaga

$$P(J,f)\begin{cases} U(t) = \int_{\mathbb{R}} J(t-s)\star \mathrm{e}(U)(s)ds, \quad t\in[0,\infty) \\ \mathrm{e}(U)(s) = \begin{cases} f & s<0 \\ U(s) & s\geq 0, \end{cases} \end{cases}$$

donde la integral se entiende en el sentido de Bochner en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$. Puesto que la integral de Bochner en $P(J,f)$ converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es posible transformar Fourier en la variable espacial las igualdades anteriores y obtener el problema

$$\hat{P}(J,f)\begin{cases} \hat{U}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{J}(t-s)\mathrm{e}(\hat{U})(s)ds, \quad t\in[0,\infty) \\ \mathrm{e}(\hat{U})(s) = \begin{cases} \hat{f} & s<0 \\ \hat{U}(s) & s\geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Si definimos $g(t) = \hat{f}\int_{-\infty}^0 \hat{J}(t-s)ds$ y $K(t,s) = \hat{J}(t-s)$, el problema $\hat{P}(J,f)$ puede ser reescrito como un problema de Fredholm

$$V(t) = g(t) + \int_0^\infty K(t,s)V(s)ds. \tag{3.2.1}$$

Esta observación nos permite ver que si queremos encontrar una solución al problema $P(J,f)$ nos basta con resolver (3.2.1). Para obtener una solución a este último problema, utilizaremos los resultados de la Sección 1.3.

Antes de probar la existencia y unicidad de soluciones al problema (3.2.1) enunciaremos un lema con propiedades de las funciones $g(t)$ y $K(t,s)$ definidas arriba, y que serán de uso recurrente en la prueba del resultado final.

LEMA 3.2.1. *Sea $J:\mathbb{R}\to L^1(\mathbb{R}^n)$ continua y con soporte compacto. Sea $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sean $0\leq a<b<\infty$ y $W(s)\in\mathcal{C}([a,b];L^2(\mathbb{R}^n))$. Entonces,*

i) *$g:\mathbb{R}\to L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por $g(t) = \hat{f}\int_{-\infty}^0 \hat{J}(t-s)ds$ es continua en $\mathbb{R}$.*
ii) *Si $K(t,s) = \hat{J}(t-s)$ entonces la función $\int_a^b K(t,s)W(s)ds$ es continua como función de t a valores en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero *i)*. Sean t_1 y t_2 números reales, entonces

$$\|g(t_1)-g(t_2)\|_2 = \left\| \hat{f}\int_{-\infty}^0 \hat{J}(t_1-s)ds - \hat{f}\int_{-\infty}^0 \hat{J}(t_2-s)ds \right\|_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \hat{f} \left(\int_{-\infty}^{0} \hat{J}(t_1 - s)ds - \int_{-\infty}^{0} \hat{J}(t_2 - s)ds \right) \right\|_2 \\
&\leq \left\| \hat{f} \right\|_2 \left\| \int_{-\infty}^{0} \hat{J}(t_1 - s)ds - \int_{-\infty}^{0} \hat{J}(t_2 - s)ds \right\|_\infty \\
&= \|f\|_2 \left\| \int_{-\infty}^{0} \left(\hat{J}(t_1 - s) - \hat{J}(t_2 - s) \right) ds \right\|_\infty \\
&\leq \|f\|_2 \int_{-\infty}^{0} \left\| \hat{J}(t_1 - s) - \hat{J}(t_2 - s) \right\|_\infty ds \\
&\leq \|f\|_2 \int_{-\infty}^{0} \|J(t_1 - s) - J(t_2 - s)\|_1 \, ds.
\end{aligned}
$$

Como $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ tenemos que la última integral es igual a

$$
\|f\|_2 \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} |J(x, t_1 - s) - J(x, t_2 - s)| \, dxds
$$

que tiende a cero cuando t_2 tiende a t_1 pues $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Por lo tanto g es continua.

Veamos ahora que vale *ii)*. Sean t_1 y t_2 en $\mathbb{R}$, luego

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_a^b K(t_1, s)W(s)ds - \int_a^b K(t_2, s)W(s)ds \right\|_2 \\
&= \left\| \int_a^b (K(t_1, s) - K(t_2, s)) W(s)ds \right\|_2 \\
&\leq \int_a^b \|(K(t_1, s) - K(t_2, s)) W(s)\|_2 \, ds \\
&\leq \int_a^b \|K(t_1, s) - K(t_2, s)\|_\infty \|W(s)\|_2 \, ds \\
&\leq \int_a^b \|J(t_1 - s) - J(t_2 - s)\|_1 \|W(s)\|_2 \, ds \\
&\leq \max_{s \in [a,b]} \|W(s)\|_2 \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} |J(y, t_1 - s) - J(y, t_2 - s)| \, dyds
\end{aligned}
$$

como $\|W(s)\|_2$ está acotada en $[a, b]$ y $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ el último término de la cadena de desigualdades tiende a cero cuando t_1 tiende a t_2. Y así *ii)* queda demostrado. □

Ahora probaremos la existencia y unicidad de soluciones al problema $P(J, f)$ con dato inicial $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 3.2.2. *Sea $J : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R}^n)$ continua con soporte contenido en $[0, \alpha]$ para algún $\alpha > 0$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces el problema $P(J, f)$ tiene una única solución en el conjunto $\mathcal{C}([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n))$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la transformada de Fourier es una isometría en L^2, para resolver $P(J, f)$ nos basta con probar que (3.2.1) tiene una única solución en $\mathcal{C}([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n))$.

Construiremos la solución de (3.2.1) por tramos, descomponiendo $\mathbb{R}_0^+$ en conjuntos de la forma $[(k-1)t_0, kt_0]$, para un t_0 adecuado y $k \in \mathbb{N}$, e inductivamente obtendremos la solución en cada uno de estos intervalos.

Observemos en primera instancia que

$$\sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} \|K(t,s)\|_\infty = \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} \left\|\hat{J}(t-s)\right\|_\infty \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} \|J(s)\|_1 =: A < \infty$$

para todos a y b números reales tales que $a < b$. Sea t_0 un número positivo a determinar. Consideremos la ecuación integral de Fredholm

$$W_1(t) = g(t) + \int_0^{t_0} K(t,s)W_1(s)ds \tag{3.2.2}$$

sobre el espacio $\mathcal{C}([0, t_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$. Por el Lema 3.2.1 tenemos que $g \in \mathcal{C}([0, t_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$. Luego, si tomamos $t_0 > 0$ tal que $At_0 < 1$ entonces, por el Teorema 1.3.4, el problema (3.2.2) tiene una única solución V_1 en el conjunto $\mathcal{C}([0, t_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Consideremos ahora la ecuación integral de Fredholm en el espacio de funciones $\mathcal{C}([t_0, 2t_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$

$$W_2(t) = G^1(t) + \int_{t_0}^{2t_0} K(t,s)W_2(s)ds \tag{3.2.3}$$

con $G^1(t) = g(t) + \int_0^{t_0} K(t,s)V_1(s)ds$. En este caso, nuevamente por el Lema 3.2.1, tenemos que la función $G^1(t)$ está en el espacio $\mathcal{C}([t_0, 2t_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$. Luego, razonando análogamente al caso anterior, tenemos que existe una única función $V_2 \in \mathcal{C}([t_0, 2t_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$ que resuelve (3.2.3). Observemos además que como $\mathrm{sop}K(t,s) \subset \{t \geq s\}$ entonces $V_2(t_0) = g(t_0) + \int_0^{t_0} K(t_0,s)V_1(s)ds = V_1(t_0)$.

Inductivamente, asumamos que pudimos construir funciones $V_i \in \mathcal{C}([(i-1)t_0, it_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$ para $i = 2, \ldots, k-1$, soluciones a los problemas

$$W_i(t) = G^{i-1}(t) + \int_{(i-1)t_0}^{it_0} K(t,s)W_i(s)ds \tag{3.2.4}$$

donde $G^{i-1}(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{(j-1)t_0}^{jt_0} K(t,s)V_j(s)ds$, y además $V_{i-1}((i-1)t_0) = V_i((i-1)t_0)$. Probemos entonces que podemos encontrar una única solución V_k al problema

$$W_k(t) = G^{k-1}(t) + \int_{(k-1)t_0}^{kt_0} K(t,s)W_k(s)ds \tag{3.2.5}$$

donde la función $G^{k-1}(t) = g(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(i-1)t_0}^{it_0} K(t,s)V_i(s)ds$. Esta función, por el Lema 3.2.1, está en el espacio $\mathcal{C}([(k-1)t_0, kt_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$. Luego, la existencia y unicidad de la solución V_k al problema (3.2.5) sale nuevamente de aplicar Teorema 1.3.4 a dicha ecuación de Fredholm. Además, como $\text{sop} K(t,s) \subset \{t \geq s\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
V_k((k-1)t_0) &= g((k-1)t_0) + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(i-1)t_0}^{it_0} K((k-1)t_0, s)V_i(s)ds \\
&\quad + \int_{(k-1)t_0}^{k_0 t_0} K((k-1)t_0, s)V_k(s)ds \\
&= g((k-1)t_0) + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(i-1)t_0}^{it_0} K((k-1)t_0, s)V_i(s)ds \\
&= g((k-1)t_0) + \sum_{i=1}^{k-2} \int_{(i-1)t_0}^{it_0} K((k-1)t_0, s)V_i(s)ds \\
&\quad + \int_{(k-2)t_0}^{(k-1)t_0} K((k-1)t_0, s)V_{k-1}(s)ds \\
&= G^{k-2}((k-1)t_0) + \int_{(k-2)t_0}^{(k-1)t_0} K((k-1)t_0, s)V_{(k-1)}(s)ds = V_{k-1}((k-1)t_0).
\end{aligned}$$

Luego, la función $V(t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(t)\mathcal{X}_{[(i-1)t_0, it_0)}(t)$ pertenece al espacio $\mathcal{C}([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))$. Veamos que satisface (3.2.1). Sea $t \in [0,\infty)$, tomemos k_0 el número natural tal que $t \in [(k_0-1)t_0, k_0 t_0)$, así $V(t) = V_{k_0}(t)$ y, ya que $t \in [(k_0-1)t_0, k_0 t_0)$ tenemos que

$$V(t) = V_{k_0}(t) = G^{k_0-1}(t) + \int_{(k_0-1)t_0}^{k_0 t_0} K(t,s)V_{k_0}(s)ds$$

$$
\begin{aligned}
&= g(t) + \sum_{i=1}^{k_0} \int_{(i-1)t_0}^{it_0} K(t,s)V_i(s)ds \\
&= g(t) + \int_0^\infty K(t,s) \sum_{i=1}^{k_0} V_i(s)\mathcal{X}_{[(i-1)t_0,it_0)}(s)ds \\
&= g(t) + \int_0^\infty K(t,s) \sum_{i=1}^{k_0} V_i(s)\mathcal{X}_{[(i-1)t_0,it_0)}(s)ds \\
&\quad + \int_0^\infty K(t,s) \sum_{i=k_0+1}^{\infty} V_i(s)\mathcal{X}_{[(i-1)t_0,it_0)}(s)ds \\
&= g(t) + \int_0^\infty K(t,s)V(s)ds
\end{aligned}
$$

y esto prueba que $V(t)$ resuelve (3.2.1). Supongamos ahora que existen dos funciones U y V en $\mathcal{C}([0,\infty);L^2(\mathbb{R}^n))$ que resuelven (3.2.1). Luego, para $t \in [0,t_0]$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
U(t) &= g(t) + \int_0^\infty K(t,s)U(s)ds = g(t) + \int_0^{t_0} K(t,s)U(s)ds \\
V(t) &= g(t) + \int_0^\infty K(t,s)V(s)ds = g(t) + \int_0^{t_0} K(t,s)V(s)ds
\end{aligned}
$$

Como U y V están en $\mathcal{C}([0,t_0];L^2(\mathbb{R}^n))$ y resuelven la ecuación integral de Fredholm con la misma función g y el mismo núcleo K, tenemos que $U = V$ en $[0,t_0]$. Del mismo modo, inductivamente vemos que U y V son iguales en cada intervalo de la forma $[(k-1)t_0, kt_0]$ para $k = 1, 2 \ldots$. Con lo cual el teorema queda demostrado. $\square$

3.3. Existencia de soluciones de CTRW con dato inicial en L^p, $1 \leq p < \infty$

El resultado central de esta sección es la existencia y unicidad de soluciones para el problema

$$
P(J,f) \begin{cases} U(t) = \int J(t-s) \star e(U)(t), \quad t \in [0,\infty) \\ \qquad e(U)(s) = \begin{cases} f & s < 0 \\ U(s) & s \geq 0. \end{cases} \end{cases}
$$

Las hipótesis que asumiremos sobre J serán que cumpla las propiedades de *(J1)* a *(J4)* y sobre el dato inicial que este f pertenezca al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. El espacio en el cual buscaremos la solución será $(\mathcal{C} \cap L^\infty)([0,\infty);L^p(\mathbb{R}^n))$.

Antes de probar el resultado principal de esta sección enunciaremos un lema de existencia y unicidad de soluciones para el problema $P(J,f)$ en el espacio restringido $\mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$, para $0 \le a < b$. Este espacio resulta ser de Banach con la norma $|||\cdot|||_{a,b} = \max\limits_{a\le t\le b} \|\cdot\|_p$.

Sea $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\le\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$. Asumiendo que J satisface las propiedades de *(J1)* a *(J4)*, en el siguiente lema resolveremos primero el problema en un intervalo $[a,b]$,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
U(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}(a,b,g;U)(s)ds, \quad t \in [a,b] \\
\mathrm{e}(a,b,g;U)(s) = \left\{
\begin{array}{ll}
g(s), & a-\alpha < s < a \\
U(s), & s \in [a,b],
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\tag{3.3.1}
$$

donde $g : (a-\alpha, a) \to L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.3.1. *Sea J que satisface de (J1) a (J4) y $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\le\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$. Sean a y b números reales tales que $0 \le a < b$ y $b - a < \alpha$. Sea $g(t) \in L^\infty((a-\alpha, a); L^p(\mathbb{R}^n))$. Entonces existe una única función $U \in \mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$ que resuelve (3.3.1). Más aun, la aplicación que asigna al dato inicial g la solución U es lineal y continua (no expansiva). Es decir,*

a) *si U_1 y U_2 resuelven (3.3.1) con datos iniciales g_1 y g_2 respectivamente, y $c \in \mathbb{R}$ entonces $U_1 + cU_2$ resuelve (3.3.1) con dato inicial $g_1 + cg_2$.*

b) $|||U|||_{a,b} \le \sup\limits_{t\in(a-\alpha,a)} \|g(t)\|_p$.

Demostración. Definamos en el espacio $\mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$ el operador T de la siguiente forma. Para $t \in [a,b]$ y $V \in \mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$

$$TV(t) = \int_{\mathbb{R}} J(t-s) \star \mathrm{e}(a,b,g;V)(s)ds$$

donde $\mathrm{e}(a,b,g;V)(s) = g(s)\mathcal{X}_{s<a}(s) + V(s)\mathcal{X}_{[a,b]}(s)$.

Veamos que T está bien definido. Como $J(t-s) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\mathrm{e}(a,b,g;V)(s) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces la convolución $J(t-s)\star\mathrm{e}(V)(s)$ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \in [a,b]$ y cada $s \in \mathbb{R}$. Por la desigualdad de Young,

$$\int \|J(t-s) \star \mathrm{e}(V)(s)\|_p \, ds \le \int \|J(s)\|_1 \, \|\mathrm{e}(V)(s)\|_p \, ds < \infty.$$

Luego, por el Teorema 1.2.1 la integral de Bochner $\int J(t-s)\star \mathrm{e}(V)(s)ds$ está bien definida y toma valores en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $TV \in \mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$. Sean t_1 y t_2 elementos de $[a,b]$, luego

$$\begin{aligned}
\|TV(t_1)-TV(t_2)\|_p &= \left\| \int J(t_1-s)\star \mathrm{e}(a,b,g;V)(s)ds - \int J(t_2-s)\star \mathrm{e}(a,b,g;V)(s)ds \right\|_p \\
&= \left\| \int (J(t_1-s)-J(t_2-s))\star \mathrm{e}(a,b,g;V)(s)ds \right\|_p \\
&\leq \int \|J(t_1-s)-J(t_2-s)\|_1 \, \|\mathrm{e}(a,b,g;V)(s)\|_p \, ds \\
&\leq \max_{s\in\mathbb{R}} \|\mathrm{e}(a,b,g;V)(s)\|_p \int_{\mathbb{R}} \|J(t_1-s)-J(t_2-s)\|_1 \, ds,
\end{aligned}$$

y el último término de la cadena de desigualdades tiende a cero cuando $t_2 \to t_1$ porque $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ y por lo tanto su módulo de continuidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ tiende a cero cuando $|t_2-t_1|$ tiende a cero. Luego, $TV \in \mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$.

Probaremos ahora que T es una contracción con la norma $|||\cdot|||_{a,b}$. Sean V y W en $\mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$, y sea $t\in[a,b]$, luego

$$\begin{aligned}
\|TV(t)-TW(t)\|_p &= \left\| \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s)\star \mathrm{e}(a,b,g;V)(s)ds - \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s)\star \mathrm{e}(a,b,g;W)(s)ds \right\|_p \\
&= \left\| \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s)\star \left(\mathrm{e}(a,b,g;V)(s)-\mathrm{e}(a,b,g;W)(s)\right) ds \right\|_p \\
&= \left\| \int_{a}^{t} J(t-s)\star (V(a,b,g;s)-W(a,b,g;s))ds \right\|_p \\
&\leq \int_a^t \|J(t-s)\|_1 \, \|V(s)-W(s)\|_p \, ds \\
&\leq \int_0^{b-a} \|J(s)\|_1 \, ds \, |||V-W|||_{a,b} = \tau \, |||V-W|||_{a,b}
\end{aligned}$$

donde $\tau = \int_0^{b-a} \|J(s)\|_1 \, ds$. Como lo anterior se cumple para todo $t\in[a,b]$ tenemos que

$$|||TV-TW|||_{a,b} \leq \tau \, |||V-W|||_{a,b} \, .$$

Por la definición de α y como $b-a<\alpha$ es claro que $\tau<1$, por lo tanto T es una contracción en $\mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$. Luego, como $\mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$ es un espacio de Banach con la norma $|||\cdot|||_{a,b}$, tenemos que existe una única función $U \in \mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$ que resulta ser un punto fijo de T y que por lo tanto resuelve (3.3.1).

Demostremos ahora el ítem *a)*. Sean U_1 y U_2 soluciones de (3.3.1) con dato inicial g_1 y g_2 respectivamente, y sea $c \in \mathbb{R}$. Si $t \in [a,b]$ entonces

$$\begin{aligned}
&\int J(t-s) \star \mathrm{e}(a,b,g_1+cg_2,U_1+cU_2)(s)ds \\
&= \int_{a-\alpha}^{a} J(t-s) \star (g_1(s)+cg_2(s))ds + \int_a^t J(t-s)(U_1(s)+cU_2(s))ds \\
&= \int_{a-\alpha}^{a} J(t-s) \star g_1(s)ds + \int_a^t J(t-s) \star U_1(s)ds \\
&\quad + c\int_{a-\alpha}^{a} J(t-s) \star g_2(s)ds + c\int_a^t J(t-s) \star U_2(s)ds \\
&= \int J(t-s) \star \mathrm{e}(a,b,g_1;U_1)(s)ds + c\int J(t-s) \star \mathrm{e}(a,b,g_2;U_2)(s)ds \\
&= U_1(t) + cU_2(t).
\end{aligned}$$

Probemos ahora que

$$|||U|||_{a,b} \leq \sup_{t\in(a-\alpha,a)} \|g(t)\|_p .$$

Como la función U es un punto fijo de una contracción T en un espacio de Banach, esta puede obtenerse como límite uniforme de funciones $V^m \in \mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$, que cumplen que $V^m(t) = TV^{m-1}(t) = T^mV^0$, donde V^0 puede ser cualquier función en el espacio $\mathcal{C}([a,b];L^p(\mathbb{R}^n))$. Luego, para $t \in [a,b]$, tenemos que

$$V^m(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}(V^{m-1})(s)ds.$$

De la fórmula anterior podemos obtener la siguiente acotación sobre la norma L^p de las funciones $V^m(t)$. Para todo $t \in [a,b]$, vale que

$$\begin{aligned}
\|V^m(t)\|_p &= \left\| \int J(t-s) \star \mathrm{e}(a,b,g;V^{m-1})(s)ds \right\|_p \\
&\leq \int \|J(t-s)\|_1 \left\|\mathrm{e}(a,b,g;V^{m-1})(s)\right\|_p ds \\
&\leq \max\{\sup_{t\in(a-\alpha,a)} \|g\|_p , \max_{t\in[a,b]} \left\|V^{m-1}(t)\right\|_p\} \int \|J(s)\|_1 ds \\
&= \max\{\sup_{t\in(a-\alpha,a)} \|g\|_p , \max_{t\in[a,b]} \left\|V^{m-1}(t)\right\|_p\},
\end{aligned}$$

luego, si tomamos $V^0(t) \equiv g(\xi_0)$ para algún $\xi_0 \in (a-\alpha, a)$, inductivamente podemos probar que $\max\limits_{t\in[a,b]} \|V^m(t)\|_p \leq \sup_{t\in(a-\alpha,a)} \|g(t)\|_p$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como U es el límite uniforme de estas funciones V^m tenemos que

$$|||U|||_{a,b} \leq \sup_{t\in(a-\alpha,a)} \|g(t)\|_p .$$

$\square$

Probemos ahora la existencia de soluciones de $P(J,f)$ con dato inicial en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. El esquema de la demostración del siguiente resultado es similar al caso en que $p = \infty$. Descomponemos $[0,\infty)$ en intervalos de la forma $[(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$, donde $j \in \mathbb{N}$ y aplicamos de modo inductivo el Lema 3.3.1 sobre cada una de ellas. En cada caso la función $\mathrm{e}((j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}, g; V)$ denotará la aplicación que asigna a V la función $g\mathcal{X}_{t<(j-1)\frac{\alpha}{2}} + V\mathcal{X}_{(j-1)\frac{\alpha}{2}\leq t\leq j\frac{\alpha}{2}}$. Nuevamente la condición inicial g dependerá del intervalo $[(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$ en el cual estemos buscando la solución, por lo tanto, para simplificar la escritura, denotamos $\mathrm{e}_j(V) = \mathrm{e}((j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}, g_j; V)$.

Teorema 3.3.2. *Sea $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, J que satisface de (J1) a (J4) y $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$. Entonces, existe una única función U en el espacio $\mathcal{C}([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n))$ que resuelve $P(J,f)$. Más aún, la aplicación que asigna al dato inicial f la solución U es lineal y continua (no expansiva). Es decir,*

a) *si U_1 resuelve $P(J,f_1)$, U_2 resuelve $P(J,f_2)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $U_1 + cU_2$ resuelve $P(J, f_1 + cf_2)$.*

b) $\sup\limits_{t\in[0,\infty)} \|U(t)\|_p \leq \|f\|_p$.

Demostración. Como mencionamos anteriormente, para probar este resultado descompondremos el intervalo $[0,\infty)$ en intervalos I_j, con $I_j = [(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$. En cada una de ellos aplicaremos el Lema 3.3.1 para encontrar una única solución U_j a un problema de tipo (3.3.1) con dato inicial $g_j(t) = f\mathcal{X}_{t<0}(t) + \sum_{k=1}^{j-1} U_k(t)\mathcal{X}_{\widetilde{I}_k}(t)$, donde $\widetilde{I}_k = [(k-1)\frac{\alpha}{2}, k\frac{\alpha}{2})$. Además veremos que esas funciones U_j se pegan continuamente. Luego, $U(t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j(t)\mathcal{X}_{\widetilde{I}_j}(t)$ será la solución de $P(J,f)$.

Consideremos primero el espacio de Banach $\mathcal{C}([0,\frac{\alpha}{2}], L^p(\mathbb{R}^n))$ con la norma $|||V||| = \max\limits_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \|V(t)\|_p$.

Usando el Lema 3.3.1, con $a = 0$, $b = \frac{\alpha}{2}$ y dato inicial $g(t) = f$, tenemos que existe una única función $U_1 \in \mathcal{C}([0, \frac{\alpha}{2}]; L^p(\mathbb{R}^n))$ tal que

$$U_1(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_1(U_1)(s)ds$$

para $t \in I_1$. Además $\max\limits_{t \in I_1} \|U_1(t)\| \leq \|f\|_p$.

Aplicando de nuevo le Lema 3.3.1, ahora con $a = \frac{\alpha}{2}$, $b = \alpha$ y dato inicial $g_2 = f\mathcal{X}_{t<0} + U_1\mathcal{X}_{\widetilde{I}_1}$, tenemos que existe una única función $U_2 \in \mathcal{C}([\frac{\alpha}{2}, \alpha], L^p(\mathbb{R}^n))$ tal que

$$U_2(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_2(U_2)(s)ds$$

para $t \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$. Además $\max\limits_{t \in I_2} \|U(t)\| \leq \sup\limits_{t<\frac{\alpha}{2}} \|g_1(t)\|_p \leq \|f\|_p$. Notemos además que como $J(t) \equiv 0$ para $t < 0$ entonces

$$U_2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} J\left(\frac{\alpha}{2} - s\right) \mathrm{e}_2(U_2)(s)ds = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} J\left(\frac{\alpha}{2} - s\right) \mathrm{e}_1(U_1)(s)ds = U_1\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{3.3.2}$$

Inductivamente, supongamos que han sido construidas funciones $U_i \in \mathcal{C}([\frac{(i-1)\alpha}{2}, \frac{i\alpha}{2}], L^p(\mathbb{R}^n))$, para $i = 1, 2, \ldots, j$ tales que

$$U_i(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_i(U_i)(s)ds,$$

$\max\limits_{t \in I_i} \|U_i\|_p \leq \|f\|_p$ y además $U_{i-1}(\frac{(i-1)\alpha}{2}) = U_i(\frac{(i-1)\alpha}{2})$.

Utilizando nuevamente el Lema 3.3.1, con $a = \frac{k\alpha}{2}$, $b = \frac{(k+1)\alpha}{2}$ y $g_{j+1} = f\mathcal{X}_{t<0} + \sum_{k=1}^{j} U_k\mathcal{X}_{\widetilde{I}_k}$, como $g_{j+1} \in L^\infty([0, \frac{k\alpha}{2}], L^p(\mathbb{R}^n))$ tenemos que existe una única función $U_{j+1} \in \mathcal{C}([\frac{j\alpha}{2}, \frac{(j+1)\alpha}{2}], L^p(\mathbb{R}^n))$ tal que

$$U_{j+1}(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_{j+1}(U_{j+1})(s)ds.$$

Además $\max\limits_{t \in I_{j+1}} \|U_{j+1}(t)\| \leq \sup\limits_{t<j\frac{\alpha}{2}} \|g_{j+1}\|_p \leq \|f\|_p$. Y razonando como en (3.3.2) tenemos que $U_{j+1}(j\frac{\alpha}{2}) = U_{j-1}(j\frac{\alpha}{2})$.

Si definimos ahora $U(t) = U_{j_0}(t)$, donde j_0 es el único natural tal que $t \in [(j_0 - 1)\frac{\alpha}{2}, j_0\frac{\alpha}{2})$, entonces $U(t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j\mathcal{X}_{\widetilde{I}_j}$. Dado que $J \equiv 0$ para $t < 0$, tenemos que

$$U(t) = U_{j_0}(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_{j_0}(U_{j_0})(s)ds = \int J(t-s) \star \mathrm{e}(U)(s)ds$$

donde

$$\mathrm{e}(U)(s) = \begin{cases} f, & s < 0 \\ U(s), & s \geq 0. \end{cases}$$

Con lo cual U resuelve $P(J, f)$. De la definición de U también tenemos que $\sup_{t \in [0,\infty)} \|U(t)\|_p \leq \|f\|_p$ y así se cumple el ítem b) de la tesis del Teorema.

Probemos ahora la unicidad. Supongamos que existen dos funciones U y V que pertenecen al espacio $\mathcal{C}([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^n))$ y resuelven $P(J, f)$. Entonces, para $t \in [0, \frac{\alpha}{2}]$ tenemos que

$$U(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_1(U)(s) ds$$

y

$$V(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_1(V)(s) ds$$

Luego, U y V son soluciones de un problema del tipo (3.3.1) en el mismo intervalo y con el mismo dato inicial. Como ambas funciones pertenecen al espacio $\mathcal{C}([0, \frac{\alpha}{2}], L^p(\mathbb{R}^n))$, por el Lema 3.3.1, tenemos que $U \equiv V$ en $[0, \frac{\alpha}{2}]$. Inductivamente vemos que $U \equiv V$ en $[(j-1)\frac{\alpha}{2}, j\frac{\alpha}{2}]$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

La demostración del ítem a) de la tesis es análoga a la del Lema 3.3.1 y por lo tanto la omitiremos. $\square$

Capítulo 4

Convergencia a temperaturas de densidades de CTRW parabólicamente reescaladas

En este capítulo se prueban resultados más fuertes que los del Capítulo 2 sobre la convergencia de CTRW a temperaturas bajo reescalamientos parabólicos. En el Capítulo 2 probamos convergencia de operadores, en éste convergencia de soluciones. En efecto probaremos que bajo ciertas condiciones adecuadas en J las soluciones de $P(J,f)$ reescaladas parabólicamente convergen a las soluciones de la ecuación del calor. Los resultados se formulan en dos secciones. En la primera consideraremos el caso de convergencia en L^∞ y la segunda contiene resultados en espacios L^p $(1 \leq p < \infty)$. En el caso $p = \infty$ mostramos dos tipos de resultados. Cuando el núcleo J es un núcleo para el cual vale la fórmula del valor medio parabólico el dato inicial no necesita más regularidad que continuidad uniforme. Para núcleos J más generales que el del valor medio obtenemos convergencia con dato inicial en la clase de Schwartz.

4.1. Convergencia de soluciones en L^∞

En esta sección consideramos $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades de *(J1)* a *(J4)*, y en algunos casos también la propiedad *(J5)*, enunciadas en el Capítulo 2. A continuación las recordamos,

(J1) $J \geq 0$;

(J2) $\mathrm{sop} J \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$;

(J3) J es de soporte compacto;

(J4) $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ y $\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} J(x,t)dxdt = 1$.

(J5) para cada t fijo $J(x,t)$ es radial como función de x.

El número α será el que definimos en (2.0.1), es decir $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$.

Si tomamos para $r > 0$ el operador T_r, de convolución con

$$\frac{1}{r^2}(\pi_r J - \delta_{(0,0)})$$

donde $\pi_r J$ denota la aproximación de la identidad parabólica $\pi_r J(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$, por lo visto en el capítulo anterior, tenemos que existe una única solución al problema

$$P(\pi_r J, f)\begin{cases} u(x,t) = (\pi_r J * \mathrm{e}\,(u))(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ \mathrm{e}\,(u)\,(x,t) = \begin{cases} f(x) & t < 0 \\ u(x,t) & t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

sobre el conjunto $(\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Notar que para $r = 1$ el problema $P(\pi_r J, f)$ es $P(J, f)$.

Si además asumimos sobre J la propiedad *(J5)* y que vale la siguiente igualdad $\iint J(y,s)s\,dyds = \frac{1}{2n}\iint J(y,s)|y|^2 dyds =: C$, sabemos por el Teorema 2.2.1 que

$$T_r \to C\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \triangle\right)$$

débilmente cuando r tiende a 0. Luego, podemos esperar que las soluciones $u\,(\pi_r J, f)$ a los problemas $P(\pi_r J, f)$, para estos núcleos J, converjan en algún sentido a una solución del problema

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

En el resultado principal de esta sección probaremos que si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es uniformemente continua, entonces, para núcleos J para los que vale la fórmula de valor medio de temperaturas, las soluciones de los problemas $P(\pi_r J, f)$ convergen uniformemente en todo el espacio $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ a la función v que se obtiene convolucionando el núcleo de Weierstrarss con f y que resuelve el problema (4.1.1), si además f es Hölder continua damos una cota para la velocidad de convergencia. También probaremos la convergencia de soluciones de los problemas reescalados $P(\pi_r J, f)$ para núcleos J más generales que el de la fórmula de valor medio para temperaturas cuando f es una función de Schwartz.

Precisamente, en esta sección probamos los siguientes teoremas.

Teorema 4.1.1. *Sea $H \geq 0$ un núcleo de valor medio para temperaturas, $\alpha = \sup\{\gamma : \iint_{s\leq\gamma} H(x,t)dxdt < 1\}$ y $\pi_r H(y,s) = \frac{1}{r^{n+2}} H(y,s)\left(\frac{y}{r}, \frac{s}{r^2}\right)$. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uniformemente continua. Consideremos la función $u(\pi_r H, f)$ que resuelve el problema $P(\pi_r H, f)$ y sea v*

la temperatura en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ que se obtiene al convolucionar el núcleo de Weierstrass con el dato inicial f. Entonces

$$\lim_{r\to 0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u(\pi_r H, f)(x,t) - v(x,t)| = 0. \tag{4.1.2}$$

Si además $f \in \mathcal{C}^\lambda(\mathbb{R}^n)$ para algún $0 < \lambda \le 1$ entonces tenemos que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u(\pi_r H, f)(x,t) - v(x,t)| \le C[f]_\lambda r^\lambda \tag{4.1.3}$$

donde la constante C sólo depende de H y $[f]_\lambda$ denota la seminorma de Hölder de f.

Teorema 4.1.2. *Sea J que satisface (J1) a (J5) y además cumple que $\iint J(y,s)s\,dyds = \frac{1}{2n}\iint J(y,s)|y|^2 dyds$. Sea f una función en la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos las funciones $u(\pi_r J, f)$ soluciones del problema $P(\pi_r J, f)$. Sea v la solución del problema*

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

que se obtiene convolucionando el dato inicial f con el núcleo de Weierstrass. Entonces, para todo $L > 0$ se cumple que

$$\lim_{r\to 0} \|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,L])} = 0.$$

La hipótesis $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ puede debilitarse a $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ con derivadas primeras y segundas acotadas y uniformemente continuas.

Corolario 4.1.3. *Sea J que satisface de (J1) a (J5) y además cumple que $\iint J(y,s)sdyds = \frac{1}{2n}\iint J(y,s)|y|^2 dyds$. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ con derivadas parciales primeras y segundas acotadas y uniformemente continuas. Sean $u(\pi_r J, f)$ las soluciones del problema $P(\pi_r J, f)$. Sea v la solución del problema*

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

que se obtiene convolucionando el dato inicial f con el núcleo de Weierstrass. Entonces, para todo $L > 0$ se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,L])} = 0.$$

Antes de demostrar los teoremas enunciados probaremos siete lemas que serán de utilidad para la posterior demostración de los enunciados anteriores.

El primer lema relaciona las soluciones asociadas a reescalamientos parabólicos de núcleo J y dato inicial f con soluciones asociadas al núcleo J con reescalamientos parabólicos del dato inicial.

Precisemos la notación. Como antes $\pi_r J(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$. Para f que depende de (x,t) también $\pi_r f(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} f\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$. Aunque f dependa sólo de x usaremos la notación $\pi_r f(x) = \frac{1}{r^{n+2}} f\left(\frac{x}{r}\right)$.

Lema 4.1.4. *La función u resuelve $P(\pi_r J, f)$ si y sólo si v resuelve $P(J, \pi_{\frac{1}{r}} f)$ y además*

$$u(x,t) = \pi_r v(x,t).$$

Demostración. Si v resuelve $P(J, \pi_{\frac{1}{r}} f)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
r^{-n-2} v\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right) &= r^{-n-2} \iint J\left(\frac{x}{r} - y, \frac{t}{r^2} - s\right) \mathrm{e}\,(v)\,(y,s) dyds \\
&= r^{-n-2} \iint_{s<0} J\left(\frac{x}{r} - y, \frac{t}{r^2} - s\right) r^{n+2} f(ry, r^2 s) dyds \\
&\quad + r^{-n-2} \iint_{s\geq 0} J\left(\frac{x}{r} - y, \frac{t}{r^2} - s\right) v(y,s) dyds \\
&= \iint_{s<0} J\left(\frac{x-y}{r}, \frac{t-s}{r^2}\right) f(y,s) r^{-n-2} dyds \\
&\quad + r^{-n-2} \iint_{s\geq 0} J\left(\frac{x-y}{r}, \frac{t-s}{r^2}\right) v\left(\frac{y}{r}, \frac{s}{r^2}\right) r^{-n-2} dyds \\
&= \iint_{s<0} \pi_r J(x-y, t-s) f(y,s) dyds \\
&\quad + \iint_{s\geq 0} \pi_r J(x-y, t-s) \left(r^{-n-2} v\left(\frac{y}{r}, \frac{s}{r^2}\right)\right) dyds.
\end{aligned}$$

Luego $r^{-n-2}v\left(\frac{x}{r},\frac{t}{r^2}\right)$ resuelve $P(\pi_r J,f)$, y por la unicidad de solución de $P(\pi_r J,f)$ tenemos que $r^{-n-2}v\left(\frac{x}{r},\frac{t}{r^2}\right)=u(x,t)$. □

En el Lema siguiente veremos una acotación, en términos explícitos de J y f, para la diferencia, sobre el conjunto $\mathbb{R}^n\times[0,\alpha]$, entre la solución u del problema $P(J,f)$ y el dato inicial f del mismo.

Lema 4.1.5. *Sea J que satisface las propiedades de (J1) a (J4) y sea el número $\alpha=\sup\left\{\gamma:\iint_{t\le\gamma}J(x,t)dxdt<1\right\}$. Sea $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $u\in(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ es la solución al problema $P(J,f)$ entonces*

$$\begin{aligned}\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha]}|u(x,t)-f(x)| &\le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\iint J(y,s)(f(x-y)-f(x))\right|dyds\\ &\le C\iint J(y,s)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|\,dyds\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

donde la constante C sólo depende de J.

Demostración. Primero mostraremos que (4.1.4) vale cuando $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]$. En el primer intervalo de tiempo, $[0,\frac{\alpha}{2}]$, u coincide con u_1 que se obtiene por el teorema de punto fijo de Banach. La velocidad de convergencia al punto fijo puede estimarse por la constante de la contracción τ. Sea v_1^m la m-ésima iteración de T_1 aplicada a la función inicial $v_1^0=f$, donde $T_1:(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))\to(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$

$$T_1v(x,t)=\iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_1(v)(y,s)dyds$$

y $\mathrm{e}_1(v)(x,t)=f(x)\mathcal{X}_{t<0}(t)+v(x,t)\mathcal{X}_{0\le t\le\frac{\alpha}{2}}(t)$. Luego, ya que $\left\|v_1^{m+1}-v_1^m\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]\right)}\le\tau^m\left\|v_1^1-v_1^0\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]\right)}$, tenemos que

$$\left\|v_1^m-f\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]\right)}\le\left(\sum_{j=0}^m\tau^j\right)\left\|v_1^1-f\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]\right)}\le\frac{1}{1-\tau}\left\|v_1^1-f\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]\right)}$$

para todo $m=1,2,\ldots$.

Veamos ahora que para $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]$ existe una constante C que sólo depende de J tal que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]}|u(x,t)-f(x)|\le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\iint J(y,s)(f(x-y)-f(x))dyds\right|$$

De hecho para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \frac{\alpha}{2}]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|v_1^1(x,t) - f(x)\right| &= |(T_1 f)(x,t) - f(x)| \\
&= \left| \iint J(x-y, t-s)(f(y) - f(x)) dyds \right| \\
&= \left| \iint J(y,s)(f(x-y) - f(x)) dyds \right| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \iint J(y,s)(f(x-y) - f(x)) dyds \right|.
\end{aligned}$$

Luego, si tomamos $C = \frac{1}{1-\tau}$ entonces, para todo $m = 1, 2, \ldots$, tenemos que

$$\|v_1^m - f\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0, \frac{\alpha}{2}]\right)} \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \iint J(y,s)(f(x-y) - f(x)) dyds \right|.$$

Lo mismo es cierto para el límite uniforme u_1 de la sucesión v_1^m, en otras palabras

$$\|u_1 - f\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0, \frac{\alpha}{2}]\right)} \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \iint J(y,s)(f(x-y) - f(x)) dyds \right|. \tag{4.1.5}$$

Veamos ahora cómo obtener la misma estimación en el intervalo de tiempo $[\frac{\alpha}{2}, \alpha]$. Por construcción de u tenemos que en $\mathbb{R}^n \times [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$, $u = u_2$ con

$$u_2(x,t) = \iint J(x-y, t-s) \mathrm{e}(u_2)(y,s) dyds,$$

donde $\mathrm{e}_2(u_2)(x,t) = f(x)\mathcal{X}_{t<0}(t) + u_1(x,t)\mathcal{X}_{0 \leq t < \frac{\alpha}{2}}(t) + u_2(x,t)\mathcal{X}_{\frac{\alpha}{2} < t \leq \alpha}(t)$. En $\mathbb{R}^n \times [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$ la solución u_2 es el único punto fijo del operador T_2, donde $T_2 : (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \to (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$

$$T_2 v(x,t) = \iint J(x-y, t-s) \mathrm{e}(v)(y,s) dyds,$$

con $\mathrm{e}(v)(x,t) = f(x)\mathcal{X}_{t<0}(t) + u_1(x,t)\mathcal{X}_{0 \leq t \leq \frac{\alpha}{2}}(t) + v(x,t)\mathcal{X}_{\frac{\alpha}{2} < t \leq \alpha}(t)$.

Ya que el límite u_2 de las iteraciones v_2^m de $T_2 v_2^0 = v_2^1$ es independiente del punto de partida v_2^0, tomemos nuevamente $v_2^0 = f$. Por lo tanto

$$\|u_2 - f\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [\frac{\alpha}{2}, \alpha]\right)} \leq \frac{1}{1-\tau} \left\|v_2^1 - f\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [\frac{\alpha}{2}, \alpha]\right)}.$$

Notemos que si escribimos $\mathrm{e}_2(f)(y,s) = f(y)\mathcal{X}_{s<0}(s) + u_1(y,s)\mathcal{X}_{[0,\frac{\alpha}{2}]}(s) + f(y)\mathcal{X}_{[\frac{\alpha}{2},\alpha]}(s)$, entonces

$$v_2^1(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_2(f)(y,s)dyds.$$

Comprobemos finalmente que la estimación deseada se cumple para $\|v_2^1 - f\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]\right)}$. Sea $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]$, luego

$$\begin{aligned}
\left|v_2^1(x,t) - f(x)\right| &= |(T_2 f)(x,t) - f(x)| \\
&= \left|\iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}_2(f)(y,s)dyds - f(x)\right| \\
&\le \left|\iint_{s\le 0} J(x-y,t-s)(f(y)-f(x))dyds\right| \\
&\quad + \iint_{0<s<\frac{\alpha}{2}} J(x-y,t-s)\left|u_1(y,s)-f(y)\right| dyds \\
&\quad + \left|\iint_{s\le\alpha} J(x-y,t-s)(f(y)-f(x))dyds\right|.
\end{aligned}$$

El primer y el tercer términos del lado derecho de la desigualdad anterior están acotados por

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\iint J(y,s)(f(x-y)-f(x))dyds\right|.$$

Para el segundo término usamos (4.1.5) y así obtenemos que

$$|v_2^1(x,t) - f(x)| \le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\iint J(y,s)(f(x-y)-f(x))dyds\right|$$

para todo $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]$. Luego

$$\|u_2 - f\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]\right)} \le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\iint J(y,s)(f(x-y)-f(x))dyds\right|, \tag{4.1.6}$$

y así el lema queda demostrado. □

Los lemas 4.1.4 y 4.1.5 permiten probar el siguiente resultado.

Lema 4.1.6. *Sea J que satisface las propiedades (J1) a (J4) y sea el número $a = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\le\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$. Sea $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consideremos $u(\pi_r J, f)\in(\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times$*

$[0,\infty))$ *solución del problema* $P(\pi_r J, f)$*. Entonces, si* f *es uniformemente continua,*

$$\lim_{r\to 0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |u(\pi_r J, f)(x,t) - f(x)| = 0, \tag{4.1.7}$$

si además $f \in \mathcal{C}^\lambda(\mathbb{R}^n)$*,* $0 < \lambda \le 1$*,*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |u(\pi_r J, f)(x,t) - f(x)| \le C[f]_\lambda r^\lambda \tag{4.1.8}$$

donde $[f]_\lambda$ *es la seminorma Hölder de la función* f *y la constante* C *sólo depende de* J*.*

Demostración. Consideremos primero $u \in (\mathcal{C}\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ la solución del problema $P(J, \pi_{\frac{1}{r}} f)$, por el Lema 4.1.4 tenemos que

$$u(\pi_r J, f) = \pi_r u.$$

Y por el Lema 4.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned} &\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |u(\pi_r J, f)(x,t) - f(x)| \\ &= \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} \left| r^{-n-2} u\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right) - f(x)\right| \\ &= r^{-n-2} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} \left| u\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right) - r^{n+2} f\left(r\frac{x}{r}\right)\right| \\ &= r^{-n-2} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha]} \left| u(x,t) - r^{n+2} f(rx)\right| \\ &\le C \iint J(y,s) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(r(x-y)) - f(rx)|\, dyds. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Si f es uniformemente continua, entonces tenemos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(r(x-y)) - f(rx)| = 0$$

Como además $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $J \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que vale (4.1.7).

Si $f \in \mathcal{C}^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \le 1$, de (4.1.9) tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |u(\pi_r J, f)(x,t) - f(x)| &\le C \iint J(y,s) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(r(x-y)) - f(rx)|\, dyds \\ &\le C r^\lambda \iint J(y,s)|y|^\lambda dyds, \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos (4.1.8). □

El siguiente lema contiene resultados clásicos de aproximación al dato inicial para temperaturas en $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Lema 4.1.7. *Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y uniformemente continua. Consideremos $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ la solución del problema*

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

que se obtiene convolucionando la función f con el núcleo de Weierstrass. Entonces,

$$\lim_{r\to 0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |v(x,t) - f(x)| = 0. \tag{4.1.10}$$

Si además $f \in \mathcal{C}^\lambda(\mathbb{R}^n)$ para algún $0 < \lambda \leq 1$ entonces tenemos que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |v(x,t) - f(x)| \leq C[f]_\lambda r^\lambda \tag{4.1.11}$$

donde la constante C no depende de r ni de f.

Demostración. Para $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\alpha r^2]$ tenemos que

$$\begin{aligned} |v(x,t) - f(x)| &= \left| \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} (f(y) - f(x))\, dy \right| \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |f(y) - f(x)|\, dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \left| f(x - \sqrt{t}z) - f(x) \right|\, dz. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Luego,

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |v(x,t) - f(x)| \leq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} \left| f(x - \sqrt{t}z) - f(x) \right|\, dz.$$

Veamos ahora que, como la función $e^{-\frac{|z|^2}{4}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es uniformemente continua, entonces vale (4.1.10). Sea $\epsilon > 0$, luego existe $R > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(0,R)} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dz < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.1.13}$$

Por otro lado, como f es uniformemente continua, tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$ entonces $|f(x-z) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea ahora $r < \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}R}$ entonces

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} \left|f(x-\sqrt{t}z) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1.14}$$

para todo $z \in B(0,R)$. Luego, de (4.1.13) y (4.1.14), tomando $r < \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}R}$ tenemos que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |v(x,t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

lo que prueba (4.1.10)

Si ahora $f \in \mathcal{C}^\lambda(\mathbb{R}^n)$ y $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \alpha r^2]$, por (4.1.12) tenemos que

$$\begin{aligned} |v(x,t) - f(x)| &\leq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \left|f(x-\sqrt{t}z) - f(x)\right| \, dz \\ &\leq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} |z|^\lambda dz t^{\frac{\lambda}{2}} \\ &\leq Cr^\lambda \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todos los puntos $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \alpha r^2]$ podemos concluir que vale (4.1.11). $\square$

El próximo lema contiene un principio del máximo para puntos fijos del operador cuyo núcleo es J.

Lema 4.1.8. *Sean J que satisface de (J1) a (J4) y $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$. Sea h una función acotada definida en $\mathbb{R}^n \times [0,c)$, $\alpha < c \leq \infty$ que cumple que*

$$h(x,t) = \iint J(x-y, t-s)h(y,s) \; dyds \tag{4.1.15}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [\alpha, c)$. Entonces

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,c)} |h(x,t)| = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha]} |h(x,t)| . \tag{4.1.16}$$

Demostración. De la definición de α tenemos que $I(\gamma) = \iint_{s\leq\gamma} J(y,s)dyds$ es menor a 1 para todo $\gamma < \alpha$.

Supongamos primero que $c < \infty$, y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $\widetilde{c} := \frac{c-\alpha}{n_0} < \alpha$, consideremos $t_k = \alpha + k\widetilde{c}$, $B_k = \mathbb{R}^n \times [0, t_k)$, y $S_k = \sup\limits_{B_k} |h|$.

Es suficiente probar que $S_k = S_{k+1}$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$. Sea $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_{k-1}, t_k)$, entonces

(4.1.17)

$$
\begin{aligned}
|h(x,t)| &= \left| \iint J(x-y, t-s) h(y,s) dyds \right| \\
&= \left| \iint_{t-\alpha \le s < t_{k-1}} J(x-y,t-s)h(y,s)dyds + \iint_{t_{k-1} \le s \le t} J(x-y,t-s)h(y,s)dyds \right| \\
&\le S_{k-1} \iint_{t-\alpha \le s < t_{k-1}} J(x-y,t-s)dyds + S_k \iint_{t_{k-1} \le s \le t} J(x-y,t-s)dyds \\
&= S_{k-1} \iint_{t-\alpha \le s < t_{k-1}} J(x-y,t-s)dyds + S_k \left(1 - \iint_{t-\alpha \le s < t_{k-1}} J(x-y,t-s)dyds \right) \\
&= S_k - (S_k - S_{k-1}) \left(\iint_{t-\alpha \le s < t_{k-1}} J(x-y,t-s)dyds \right).
\end{aligned}
$$

Luego, tomando ínfimo en $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_{k-1}, t_k)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\inf_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_{k-1}, t_k)} \left(\iint_{t-\alpha \le s < t_{k-1}} J(x-y,t-s)dyds \right) (S_k - S_{k-1}) \\
&\le S_k - \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_{k-1}, t_k)} |h(x,t)|.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\iint_{t-\alpha \le s < t_{k-1}} J(x-y,t-s)dyds &= \iint_{t-t_{k-1} < s_1 \le \alpha} J(x-y,s_1)dyds_1 \\
&\ge \iint_{\widetilde{c} < s_1 \le \alpha} J(x-y,s_1)dyds_1 = 1 - I\left(\widetilde{c}\right)
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\left(1 - I\left(\widetilde{c}\right)\right)(S_k - S_{k-1}) \le S_k - \sup_{B_k \setminus B_{k-1}} |h|.
$$

Supongamos ahora que $S_k > S_{k-1}$, entonces $S_k = \sup_{B_k \setminus B_{k-1}} |h|$, pero por la desigualdad anterior, ya que $1 - I(\widetilde{c})$ es positivo, tenemos que $S_k = S_{k-1}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto (4.1.16) se cumple para $c < \infty$.

Si ahora $c = \infty$ podemos tomar una sucesión creciente de números positivos c_n tal que $c_n \to \infty$. Luego, por el caso anterior, tenemos que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,c_n)} |h(x,t)| = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha]} |h(x,t)|$$

para todo n natural. Entonces también vale (4.1.16) para $c = \infty$. □

El siguiente lema nos da la acotación del supremo de la diferencia entre una solución a la ecuación del calor, v, y un promedio parabólico de ella $\pi_r J * v$, en términos del parámetro de reescalamiento r.

LEMA 4.1.9. *Sea J que satisface las propiedades de (J1) a (J5) y tal que $\iint J(y,s)sdyds = \frac{1}{2n}\iint J(y,s)|y|^2dyds$. Sea $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$ Sea f una función en la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos v la solución del problema*

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

que se obtiene convolucionando f con el núcleo de Weierstrass. Entonces

$$\sup_{(x,t)\in[\alpha r^2,\infty)} \left| \iint \pi_r J(x-y,t-s)v(y,s)dyds - v(x,t) \right| \leq Cr^3 \tag{4.1.18}$$

donde la constante C sólo depende de J y f.

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que todas las derivadas parciales de v están acotadas por sumas de normas L^∞ de derivadas parciales de f. Analicemos primero el caso en el que sólo intervienen derivadas espaciales. Como $v(x,t) = (W_t * f)(x)$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si γ es un multiíndice de $\mathbb{N}_0^n$ entonces $\frac{\partial^{|\gamma|}v(x,t)}{\partial x^\gamma} = \left(W_t * \frac{\partial^{|\gamma|}f}{\partial x^\gamma}\right)(x)$. Luego,

$$\left\| \frac{\partial^{|\gamma|}v(\cdot,t)}{\partial x^\gamma} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|W_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left\| \frac{\partial^{|\gamma|}f}{\partial x^\gamma} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \left\| \frac{\partial^{|\gamma|}f}{\partial x^\gamma} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $t \in (0,\infty)$. Veamos ahora el caso en el que intervienen derivadas temporales. Como $v_t = \triangle v$, si $k \in \mathbb{N}$ y γ es un multiíndice de $\mathbb{N}_0^n$ entonces

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\right) = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma}\triangle^{(k)} v$$

donde $\triangle^{(k)}$ es la composición del operador Laplaciano consigo mismo k-veces. Luego, teniendo en cuenta lo probado en el caso anterior, la norma L^∞ de $\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^k v}{\partial t^k}$ la podemos acotar por sumas de normas L^∞ de derivadas parciales de f, que es lo que queríamos ver.

Con la notación introducida en el Capítulo 2, denotando con D el gradiente en espacio y tiempo, con D^2 la matriz Hessiana y R el resto en el desarrollo de Taylor de v como función de $n+1$ variables, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\iint \pi_r J(x-y,t-s)v(y,s)dyds - v(x,t)\\
&= \iint \pi_r J(x-y,t-s)(v(y,s)-v(x,t))dyds\\
&= \iint \pi_r J(x-y,t-s)Dv(x,t)(y-x,s-t)dyds\\
&\quad + \iint \pi_r J(x-y,t-s)\frac{1}{2}(y-x,s-t)D^2v(x,t)(y-x,s-t)^t dyds\\
&\quad + \iint \pi_r J(x-y,t-s)R(y-x,s-t)dyds\\
&= (I+II)+(III+IV+V+VI)+VII
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}(x,t)\left(\iint (y_i-x_i)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right),\\
II &= \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\left(\iint (s-t)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right),\\
III &= \sum_{ij=1,i\neq j}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (y_i-x_i)(y_j-x_j)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right),\\
IV &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (y_i-x_i)^2\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right),\\
V &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (y_i-x_i)(s-t)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VI &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (s-t)^2 \pi_r J(x-y,t-s)dyds\right),\\
VII &= \iint \pi_r J(x-y,t-s)R(y-x,s-t)dyds.
\end{aligned}$$

Como $J(\cdot,t)$ es radial para todo $t\in\mathbb{R}$ entonces los términos I, III y V se anulan.

Observemos que el carácter radial de J también asegura que $\iint J(y,s)|y|^2dyds = \sum_{j=1}^n \iint J(y,s)y_j^2dyds = n\iint J(y,s)y_i^2dyds$, para todo $i=1,\dots,n$. Como además, por hipótesis, tenemos que $2n\iint J(y,s)sdyds = \iint J(y,s)|y|^2dyds$, entonces $\iint J(y,s)sdyds = \frac{1}{2}\iint J(y,s)y_i^2dyds$ para todo $i=1,\dots,n$. Es también claro que la identidad se preserva por dilataciones parabólicas, es decir

$$\iint \pi_r J(y,s)sdyds = \frac{1}{2}\iint \pi_r J(y,s)y_i^2dyds$$

para todo $i=1,\dots,n$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
II+IV &= -v_t(x,t)\iint (t-s)\pi_r J(x-y,t-s)dyds\\
&\quad + \sum_{i=1}^n v_{x_ix_i}(x,t)\left(\frac{1}{2}\iint (y_i-x_i)^2\pi_r J(x-y,t-s)dyds\right)\\
&= -v_t(x,t)\iint \pi_r J(y,s)sdyds\\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n v_{x_ix_i}(x,t)\right)\iint \pi_r J(y,s)sdyds\\
&= (\triangle v(x,t) - v_t(x,t))\iint \pi_r J(y,s)sdyds = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente VI y VII están acotados por Cr^3 donde la constante C depende de J y la norma infinito de las derivadas de segundo y tercer orden de v están acotadas por sumas de las normas L^∞ de derivadas de f. Luego vale (4.1.18). $\square$

El lema que probaremos a continuación será consecuencia del Lema 4.1.9 y nos da una cota del orden r^3 para el supremo de la diferencia entre dos funciones sobre conjuntos de la forma $[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]$, con $m\in\mathbb{N}$. En este caso las funciones son la solución a un problema $P(J,v)$ en el intervalo cerrado $[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]$ y el dato inicial v, este último es la solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor que se obtiene convolucionando el núcleo de Weierstrass con el valor inicial f.

Para facilitar la lectura y abreviar la notación denotaremos con v_m la restricción de v al intervalo $((m-1)\alpha r^2, m\alpha r^2)$ y $\mathrm{e}_m(w)$ será la función $\mathrm{e}\,(m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2,v;w) = v(x,t)\mathcal{X}_{0\le t<m\alpha r^2}(t)+w(x,t)\mathcal{X}_{m\alpha r^2\le t\le (m+1)\alpha r^2}(t)$.

Las soluciones en este caso se entienden en el sentido del Lema 3.1.1.

Lema 4.1.10. *Sea J que cumple las propiedades de (J1) a (J5) y sea el número* $\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\le\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$. *Sea $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y v la solución del problema*

$$\begin{cases} v_t(x,t)-\triangle v(x,t)=0 & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ v(x,0)=f(x) & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

que se obtiene convolucionando el núcleo de Weierstrass con f. Si $w(\pi_rJ,v_m)$ es la solución de $P(\pi_rJ,v_m)$ en el intervalo $[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]$, es decir

$$w(\pi_rJ,v_m)(x,t)=\iint \pi_rJ(x-y,t-s)\mathrm{e}_m\left(w(\pi_rJ,v_m)\right)(y,s)dyds,$$

entonces

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]} |w(\pi_rJ,v_m)-v(x,t)|\le Cr^3, \tag{4.1.19}$$

donde la constante C sólo depende de J y f.

Demostración. Para demostrar (4.1.19), ya que la función $w(\pi_rJ,v_m)$ se construye con el Teorema de punto fijo de Banach, podemos proceder como en la prueba del Lema 4.1.5 para obtener las desigualdades (4.1.5) y (4.1.6), sólo que en este caso nuestra función de partida en la iteración de punto fijo es la función de $n+1$ variables $v_{m+1}(x,t)$. Así podemos obtener que

$$\begin{aligned}&\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]} |w(\pi_rJ,v_{m+1})(x,t)-v_{m+1}(x,t)|\\ &\le C\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]}\left|\iint \pi_rJ(x-y,t-s)(v_{m+1}(y,s)-v_{m+1}(x,t))dyds\right|\\ &= C\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]}\left|\iint \pi_rJ(x-y,t-s)(v(y,s)-v(x,t))dyds\right|,\end{aligned}$$

donde la constante C sólo depende de J. Luego, del Lema 4.1.9 tenemos que vale (4.1.19). □

Finalmente estamos en condiciones de probar el Teorema 4.1.1.

Demostración del Teorema 4.1.1. Del Lema 4.1.6 y el Lema 4.1.7, tenemos que

$$\lim_{r\to 0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |u(\pi_r H, f)(x,t) - v(x,t)| = 0, \tag{4.1.20}$$

y si $f \in \mathcal{C}^\lambda(\mathbb{R}^n)$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |u(\pi_r H, f)(x,t) - v(x,t)| \leq C[f]_\lambda r^\lambda. \tag{4.1.21}$$

Ya que $\alpha = \sup\{\gamma : \iint_{s\leq\gamma} H(y,s)\ dyds < 1\}$ es fácil demostrar que $\alpha r^2 = \sup\{\gamma : \iint_{s\leq\gamma} \pi_r H(y,s)\ dyds < 1\}$. Como v resuelve $v_t(x,t) - \triangle v(x,t) = 0$ en $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ tenemos que, para $t > \alpha r^2$ vale la fórmula

$$v(x,t) = \iint \pi_r H(x-y, t-s) v(y,s) dyds.$$

Por otra parte como $u(\pi_r H, f)$ resuelve el problema $P(\pi_r H, f)$, también tenemos que para $t > \alpha r^2$

$$u(\pi_r H, f)(x,t) = \iint \pi_r H(x-y, t-s) u(\pi_r H, f)(y,s) dyds.$$

Así, aplicando el Lema 4.1.8 a la función $u(\pi_r, f) - v$ (que está acotada, pues $u(\pi_r, f)$ y v lo están) tenemos que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u(\pi_r H, f)(x,t) - v(x,t)| \leq \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2]} |u(\pi_r H, f)(x,t) - v(x,t)|.$$

Luego, de (4.1.20) concluimos que vale (4.1.2), y de (4.1.21) obtenemos (4.1.3). $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 4.1.2.

Demostración del Teorema 4.1.2. Haciendo uso de los Lemas 3.1.1 y 4.1.10, probaremos que

$$\|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2])} \leq Cr + Cmr^3, \quad m = 0, 1, 2\ldots \tag{4.1.22}$$

donde la constante C sólo depende de J y la norma infinito de las derivadas de f.

El caso $m = 0$ sale como consecuencia de los Lemas 4.1.6 y 4.1.7

Para $m = 1, 2, \ldots$ consideremos en el intervalo $[m\alpha r^2, (m+1)\alpha r^2]$ la función $W(\pi_r J, g_m)$ que resuelve $P(\pi_r J, g_m)$, donde $g_m(x,t) = \left(u\left(\pi_r J, f\right)(x,t) - v(x,t)\right)\mathcal{X}_{t<m\alpha r^2}(t)$. Es decir

$$W(\pi_r J, g_m)(x,t) = \iint \pi_r J(x-y, t-s)\mathrm{e}_m(W(\pi_r J, g_m))(y,s)dyds$$

para $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [m\alpha r^2, (m+1)\alpha r^2]$, con $\mathrm{e}_m(w)(x,t) = g_m \mathcal{X}_{t<m\alpha r^2} + w(x,t)\mathcal{X}_{[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2]}$. Por el Lema 3.1.1, usando la propiedad de linealidad de la solución respecto del dato inicial, tenemos que $W(\pi_r J, g_m) = u(\pi_r J, f) - w(\pi_r J, v_m)$ en $\mathbb{R}^n \times [m\alpha r^2, (m+1)\alpha r^2]$. Y por la propiedad *b)* del Lema 3.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned}(4.1.23) \qquad \|W(\pi_r J, g_m)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2])} &\le \|u(\pi_r J, f) - v_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[(m-1)\alpha r^2, m\alpha r^2])} \\ &= \|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[(m-1)\alpha r^2, m\alpha r^2])}.\end{aligned}$$

Veremos ahora por inducción que vale la desigualdad (4.1.22). Consideremos primero el caso $m = 1$. Del ítem *b)* en el Lema 3.1.1 y la desigualdad (4.1.23) tenemos que

$$\begin{aligned}&\|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[\alpha r^2, 2\alpha r^2])} \\ &= \|W(\pi_r J, g_1) + u(\pi_r J, f) - W(\pi_r J, g_1) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[\alpha r^2, 2\alpha r^2])} \\ &\le \|W(\pi_r J, g_1)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[\alpha r^2, 2\alpha r^2])} + \|w(\pi_r J, v_1) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[\alpha r^2, 2\alpha r^2])} \\ &\le \|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0, \alpha r^2])} + \|w(\pi_r J, v_1) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[\alpha r^2, 2\alpha r^2])}.\end{aligned}$$

Por el Lema 4.1.10 el segundo sumando del último término está acotado por Cr^3. De las desigualdades (4.1.8) del Lema 4.1.6 y (4.1.11) del Lema 4.1.7 el primer sumando está acotado por $Cr + Cr$. Luego

$$\|u\left(\pi_r J, f\right) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,\alpha r^2])} \le Cr + Cr + Cr^3 = 2Cr + Cr^3,$$

donde la constante C sólo depende de J y la norma infinito de las derivadas de f.

Supongamos ahora que la hipótesis es válida para m y veamos que vale para $m+1$. Usando la hipótesis inductiva, el ítem *b)* del Lema 3.1.1 y la desigualdad (4.1.23) tenemos que

$$\|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times([(m+1)\alpha r^2, (m+2)\alpha r^2])}$$

$= \|W(\pi_r J, g_{m+1}) + u(\pi_r J, f) - W(\pi_r J, g_{m+1}) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [(m+1)\alpha r^2,(m+2)\alpha r^2])}$

$\leq \|W(\pi_r J, g_{m+1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [(m+1)\alpha r^2,(m+2)\alpha r^2])} + \|w(\pi_r J, v_{m+1}) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [(m+1)\alpha r^2,(m+2)\alpha r^2])}$

$\leq \|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [m\alpha r^2,(m+1)\alpha r^2])} + \|w(\pi_r J, v_{m+1}) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [(m+1)\alpha r^2,(m+2)\alpha r^2])}$

$\leq 2Cr + Cmr^3 + Cr^3 = 2Cr + C(m+1)r^3.$

Sea ahora $L > 0$ y r_0 suficientemente chico tal que si $r < r_0$ entonces $L < \frac{L}{\alpha r^2}$. Consideremos un número ϵ_r, $0 \leq \epsilon_r < 1$ tal que $m_r = \frac{L}{\alpha r^2} + \epsilon_r$ sea un número natural. Luego, por la desigualdad (4.1.22), para $r < r_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,L])} \\
&\leq \|u(\pi_r J, f) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,m_r\alpha r^2])} \\
&\leq 2Cr + C(m_r - 1)r^3 \\
&= 2Cr + C\left(\frac{L}{\alpha r^2} + \epsilon_r - 1\right) r^3 \\
&\leq 2Cr + C\frac{L}{\alpha} r.
\end{aligned}$$

El último término de la cadena de desigualdades tiende a cero cuando r tiende a cero. Con lo cual el teorema queda demostrado.

Notemos que en este caso, en el cual la función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la velocidad de convergencia es de primer orden. □

4.2. Convergencia de soluciones en L^p, $1 \leq p < \infty$

En esta sección abordaremos el problema de convergencia de soluciones de CTRW a soluciones de la ecuación del calor cuando el dato inicial f está en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. La prueba de dicho resultado es similar al caso $p = \infty$, aunque por completitud será desarrollada. Consideraremos sólo el caso análogo al Teorema 4.1.1. El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema 4.2.1. *Sea H un núcleo de la fórmula de valor medio para temperaturas. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Para $r > 0$ consideremos $U(\pi_r H, f) \in \mathcal{C}([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n))$ la solución al problema $P(\pi_r H, f)$, y sea V la solución de la ecuación $V_t = \triangle V$ en*

$\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ *que se obtiene convolucionando el dato inicial* f *con el núcleo de Weiestrass. Entonces,*

$$\lim_{r\to 0} \sup_{t\in[0,\infty)} \|U(\pi_r H, f)(t) - V(t)\|_p = 0. \tag{4.2.1}$$

Si además $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$ *entonces existe una constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $r > 0$ *se cumple*

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|U(\pi_r H, f)(t) - V(t)\|_p \leq C\,[f]_{B_p^\lambda}\, r^\lambda. \tag{4.2.2}$$

A lo largo de este capítulo denotaremos las dilataciones en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$, de la siguiente forma, $\sigma_r : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\sigma_r g(x) := r^{-n} g\left(\frac{x}{r}\right),$$

y $\tau_r : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$

$$\tau_r h(t) := r^{-1} h\left(\frac{t}{r}\right),$$

Luego, para $J : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R}^n)$, $\pi_r J(t) := \tau_{r^2}(\sigma_r(J))(t) = \sigma_r(\tau_{r^2} J(t))$. También denotaremos con $\star$ la convolución en $\mathbb{R}^n$.

Al igual que en la sección anterior necesitaremos probar algunos lemas previos (y análogos a los del caso $p = \infty$) antes de demostrar el resultado final de convergencia de soluciones.

Empezaremos demostrando el primero de ellos que relaciona las soluciones de problemas con núcleos reescalados con soluciones de problemas con el dato inicial reescalado.

Lema 4.2.2. *Sea* J *que satisface de (J1) a (J4). Sean* $r > 0$, U *solución de* $P(\pi_r J, f)$ *y* V *solución de* $P(J, \pi_{r^{-1}} f)$. *Entonces*

$$U(t) = \pi_r V(t)$$

Demostración. Como V resuelve $P(J, \pi_{r^{-1}} f)$ y σ_r es lineal y continua, por la Proposición 1.2.2 tenemos que

$$\pi_r V(t) = \sigma_r\left(r^{-2} V\left(\frac{t}{r^2}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_r \left(r^{-2} \int_{s<0} J\left(\frac{t}{r^2}-s\right) \star \sigma_{r^{-1}}\left(r^2 f(r^2 s)\right) ds + r^{-2}\int_{s\geq 0} J\left(\frac{t}{r^2}-s\right) \star V(s) ds \right) \\
&= \sigma_r \left(\int_{s<0} J\left(\frac{t}{r^2}-s\right) \star \sigma_{r^{-1}}\left(f(r^2 s)\right) ds + r^{-2}\int_{s\geq 0} J\left(\frac{t}{r^2}-s\right) \star V(s) ds \right) \\
&= \int_{s<0} \sigma_r\left(J\left(\frac{t}{r^2}-s\right)\right) \star f(r^2 s) ds + \int_{s\geq 0} \sigma_r\left(J\left(\frac{t}{r^2}-s\right)\right) \star r^{-2}\sigma_r\left(V(s)\right) ds \\
&= \int_{w<0} r^{-2}\sigma_r J\left(\frac{t-w}{r^2}\right) \star f(w) dw \\
&\quad + \int_{w\geq 0} r^{-2}\sigma_r \left(J\left(\frac{t-w}{r^2}\right)\right) \star r^{-2}\sigma_r\left(V\left(\frac{w}{r^2}\right)\right) dw \\
&= \int_{w<0} \tau_{r^2}\sigma_r\left(J\right)(t-w) \star f(w) dw + \int_{w\geq 0} \tau_{r^2}\sigma_r J\left(t-w\right) \star \tau_{r^2}\sigma_r V\left(w\right) dw \\
&= \int_{w<0} \pi_r J(t-w) \star f(w) dw + \int_{w\geq 0} \pi_r J\left(t-w\right) \star \pi_r V\left(w\right) dw
\end{aligned}
$$

luego $\pi_r V(t)$ resuelve $P(\pi_r J, f)$, y por la unicidad es igual a $U(t)$. □

LEMA 4.2.3. *Sea J que cumple las propiedades de (J1) a (J4) y sean los números $\alpha = \left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t) dx dt < 1\right\}$ y $\beta = \sup\left\{\gamma : \iint_{B(0,\gamma)\times\mathbb{R}} J(x,t) < 1\right\}$. Consideremos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Sea U la solución al problema $P(J,f)$. Entonces,*

$$
\max_{t\in[0,\alpha]} \|U(t) - f\|_p \leq C \sup_{|y|\leq\beta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \,, \tag{4.2.3}
$$

donde la constante C sólo depende de J.

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primera instancia que

$$
\max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \|U(t) - f\|_p \leq C \sup_{|y|\leq\beta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \tag{4.2.4}
$$

donde C sólo depende de J. Si llamamos U_1 a la restricción de U a $[0,\frac{\alpha}{2}]$, como la función U en dicho conjunto se construye por el método de punto fijo de Banach, tenemos que U_1 es límite uniforme de funciones $V_1^m \in \mathcal{C}([0,\frac{\alpha}{2}]; L^p(\mathbb{R}^n)])$, donde $V_1^m = T_1 V_1^{m-1} = T_1^m V_1^0$, y T_1 actúa de la siguiente forma

$$
T_1 V(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_1\left(V\right)(s) ds,
$$

donde $\mathrm{e}_1(V)(s) = f\mathcal{X}_{s<0} + V(s)\mathcal{X}_{[0,\frac{\alpha}{2}]}(s)$. Además la velocidad de convergencia puede estimarse por la constante de la contracción $\tau = \iint_{s\le\frac{\alpha}{2}} J(y,s)dyds$. De hecho, si $V_1^0 = f$, como $\max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \left\|V_1^{m+1}(t) - V_1^m(t)\right\|_p \le \tau^m \max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \|V_1^1(t) - V_1^0(t)\|_p$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \left\|V_1^{m+1}(t) - f\right\|_p &\le \left(\sum_{i=0}^{m} \tau^i\right) \max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \left\|V_1^1(t) - f\right\|_p \\ &\le \frac{1}{1-\tau} \max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \left\|V_1^1(t) - f\right\|_p\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Tomando límite cuando m tiende a infinito tenemos que

$$\max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \|U_1(t) - f\|_p \le \frac{1}{1-\tau} \max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \left\|V_1^1(t) - f\right\|_p.$$

Veamos ahora que para todo $t \in [0, \frac{\alpha}{2}]$ se cumple que

$$\left\|V_1^1(t) - f\right\|_p \le \sup_{|y|\le\beta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p.$$

Para $j \in \mathbb{N}$ consideremos intervalos disjuntos $I_{i,j} \subset [0,\alpha]$ de longitud menor que $\frac{1}{j}$ tales que $\bigcup_i I_{i,j} = [0,\alpha]$. Sea $t \in [0, \frac{\alpha}{2}]$, entonces

$$\begin{aligned}\left\|V_1^1(t) - f\right\|_p &= \left\|\int_{t-s}^{t} J(t-s) \star f ds - f\right\|_p \\ &= \left\|\int_0^{\alpha} J(s) \star f ds - f\right\|_p \\ &= \lim_{j\to\infty} \left\|\sum_{I_{i,j}} |I_{i,j}| J(s_i) \star f - f\right\|_p \\ &\le \lim_{j\to\infty} \sum_{I_{i,j}} \||I_{i,j}| J(s_i) \star f - f\|_p.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Estimemos ahora $\||I_{i,j}|J(s_i) \star f - f\|_p$. Por la desigualdad integral de Minkowski tenemos que

$$\begin{aligned}&\||I_{i,j}|J(s_i) \star f - f\|_p \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_{i,j}| J(s_i,y) f(x-y) dy - f(x)\right)^p dx\right)^{1/p}\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_{i,j}| J(s_i, y) \left(f(x-y) - \frac{f(x)}{|I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1} \right) dy \right)^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_{i,j}| J(s_i, y) \left(\frac{|I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(x-y) - f(x)}{|I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1} \right) dy \right)^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{J(s_i, y)}{\left\| J(s_i) \right\|_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(x-y) - f(x))^p dx \right)^{1/p} dy \\
&= \int_{|y| \leq \beta} \frac{J(s_i, y)}{\left\| J(s_i) \right\|_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(x-y) - f(x))^p dx \right)^{1/p} dy \\
&\leq \left\| \frac{J(s_i)}{\left\| J(s_i) \right\|_1} \right\|_1 \sup_{|y| \leq \beta} \left\| |I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(\cdot - y) - f(\cdot) \right\|_p \\
&= \sup_{|y| \leq \beta} \left\| |I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(\cdot - y) - f(\cdot) \right\|_p \\
&\leq \sup_{|y| \leq \beta} \left\| |I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(\cdot - y) - |I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(\cdot) \right\|_p \\
&\quad + \sup_{|y| \leq \beta} \left\| |I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 f(\cdot) - f(\cdot) \right\|_p \\
&= |I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 \sup_{|y| \leq \beta} \left\| f(\cdot - y) - f(\cdot) \right\|_p + \left| |I_{i,j}| \left\| J(s_i) \right\|_1 - 1 \right| \left\| f \right\|_p .
\end{aligned}
$$

Sumando en i y tomando límite cuando j tiende a infinito en (4.2.6), y teniendo en cuenta que $\iint J(x,t)dxdt = 1$, de (4.2.5) tenemos que

$$
\left\| V_1^1(t) - f \right\|_p \leq \sup_{|y| \leq \beta} \left\| f(\cdot - y) - f(\cdot) \right\|_p .
$$

Con lo cual vale (4.2.4).

Observemos ahora que

$$
\sup_{t \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha]} \left\| U(t) - f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sup_{|y| \leq \beta} \left\| f(\cdot - y) - f(\cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} , \tag{4.2.7}
$$

donde C sólo depende de J.

Llamemos U_2 a la restricción de U en $\mathbb{R}^n \times (\frac{\alpha}{2}, \alpha]$, luego U_2 resuelve

$$
U_2(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}_2 (U_2)(s) ds
$$

para $t \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$, y donde $\mathrm{e}_2(U_2)(s) = f\mathcal{X}_{s<0}(s) + U_1(s)\mathcal{X}_{[0,\frac{\alpha}{2})}(s) + U_2(s)\mathcal{X}_{(\frac{\alpha}{2},\alpha]}(s)$. En $[\frac{\alpha}{2}, \alpha]$ la solución U_2 es el único punto fijo del operador T_2, donde

$$T_2V(t) = \int J(t-s) \star \mathrm{e}(V)(s)ds$$

y $\mathrm{e}_2(V)(s) = f\mathcal{X}_{s<0}(s) + U_1(s)\mathcal{X}_{[0,\frac{\alpha}{2})}(s) + V(s)\mathcal{X}_{[\frac{\alpha}{2},\alpha]}(s)$. Ya que U_2 es el límite de las iteraciones $V_2^m = T_2^m V_2^0$ independientemente del punto de partida V_2^0, podemos tomar nuevamente $V_2^0 = f$. Luego

$$\max_{t\in[\frac{\alpha}{2},\alpha]} \|U_2(t) - f\|_p \leq \frac{1}{1-\tau} \max_{t\in[\frac{\alpha}{2},\alpha]} \left\|V_2^1(t) - f\right\|_p .$$

Si escribimos $\mathrm{e}_2(f)(s) = f\mathcal{X}_{s<0}(s) + U_1(y,s)\mathcal{X}_{[0,\frac{\alpha}{2})}(s) + f\mathcal{X}_{[\frac{\alpha}{2},\alpha]}(s)$ entonces

$$V_2^1(s) = \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star \mathrm{e}_2(f)(s)ds.$$

Veamos ahora que

$$\max_{t\in[\frac{\alpha}{2},\alpha]} \left\|V_2^1(t) - f\right\|_p \leq C \sup_{|y|\leq\beta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p$$

donde la constante C sólo depende de J. Sea $t \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$, luego

$$\begin{aligned}
&\left\|V_2^1(t) - f\right\|_p = \left\|\int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star \mathrm{e}_2(f)(s)ds - f\right\|_p \\
&= \left\|\int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star \mathrm{e}_2(f)(s)ds - \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star f ds + \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star f ds - f\right\|_p \\
&\leq \left\|\int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star \mathrm{e}_2(f)(s)ds - \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star f ds\right\|_p \\
&\quad + \left\|\int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star f ds - f\right\|_p \\
&= \left\|\int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star (\mathrm{e}(f)(s) - f)ds\right\|_p + \left\|\int_{0}^{\alpha} J(s) \star f ds - f\right\|_p \\
&= \left\|\int_{0}^{\frac{\alpha}{2}} J(t-s) \star (U_1(s) - f)ds\right\|_p + \left\|\int_{0}^{\alpha} J(s) \star f ds - f\right\|_p \\
&\leq \int_{0}^{\frac{\alpha}{2}} \|J(t-s)\|_1 \|(U_1(s) - f)\|_p ds + \left\|\int_{0}^{\alpha} J(s) \star f ds - f\right\|_p .
\end{aligned}$$

Análogamente a como probamos la estimación (4.2.4) podemos ver que el segundo sumando del último término de la cadena de desigualdades está acotado por $\sup_{|y|\le\beta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p$. Para acotar el primer sumando, usamos (4.2.4) y obtenemos (4.2.7). Con lo cual el lema queda demostrado. □

Utilizando los lemas 4.2.2 y 4.2.3 probaremos el siguiente resultado.

LEMA 4.2.4. *Sea J que satisface las propiedades de (J1) a (J4). Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Consideremos $U(\pi_r J, f)$ la solución al problema $P(\pi_r J, f)$. Entonces,*

$$\lim_{r\to 0} \max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|U(\pi_r J, f)(t) - f\|_p = 0. \tag{4.2.8}$$

Si además $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \le 1$, entonces

$$\max_{t\in[0,\frac{\alpha}{2}]} \|U(\pi_r J, f)(t) - f\|_p \le C\,[f]_{B_p^\lambda}\, r^\lambda, \tag{4.2.9}$$

donde $[f]_{B_p^\lambda}$ es la seminorma de Besov de la función f y la constante C sólo depende de J.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $U(J, \pi_{r^{-1}} f) \in \mathcal{C}([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n))$ solución del problema $P(J, \pi_{r^{-1}} f)$. Por el Lema 4.2.2 sabemos que que

$$U(\pi_r J, f) = \pi_r U(J, \pi_{r^{-1}} f)(t),$$

y por el Lema 4.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|U(\pi_r J, f)(t) - f\|_p \\
&= \max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|\pi_r U(J, \pi_{r^{-1}} f)(t) - f\|_p \\
&= \max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|\sigma_r \tau_{r^2} U(J, \pi_{r^{-1}} f)(t) - \sigma_r \sigma_{r^{-1}} f\|_p \\
&= \max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|\tau_{r^2} U(J, \pi_{r^{-1}} f)(t) - \sigma_{r^{-1}} f\|_p \\
&= \max_{t\in[0,\alpha r^2]} \left\| r^{-2} U(J, \pi_{r^{-1}} f)\left(\frac{t}{r^2}\right) - \sigma_{r^{-1}} f \right\|_p \\
&= r^{-2} \max_{t\in[0,\alpha]} \left\| U(J, \pi_{r^{-1}} f)(t) - r^2 \sigma_{r^{-1}} f \right\|_p \\
&= r^{-2} \max_{t\in[0,\alpha]} \|U(J, \pi_{r^{-1}} f)(t) - \pi_{r^{-1}} f\|_p
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$\leq r^{-2} C \sup_{|y|\leq\beta} \|\pi_r f(\cdot - y) - \pi_r f(\cdot)\|_p$$

$$= C \sup_{|y|\leq\beta} \|\sigma_r f(\cdot - y) - \sigma_r f(\cdot)\|_p$$

$$= C \sup_{|y|\leq\beta} \|f(\cdot - ry) - f(\cdot)\|_p .$$

Como la función módulo de continuidad es uniformemente continua tenemos que vale (4.2.8). Si ahora $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$, de (4.2.10) también concluimos que vale (4.2.9). □

El siguiente lema contiene resultados clásicos de aproximación al dato inicial en norma L^p para temperaturas en $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Lema 4.2.5. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sea $V \in \mathcal{C}([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n))$ la solución del problema*

$$\begin{cases} V_t(x,t) - \triangle V(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ V(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

que se obtiene convolucionando la función f con el núcleo de Weierstrass. Entonces

$$\lim_{r\to 0} \max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|V(t) - f\|_p = 0. \tag{4.2.11}$$

Si además $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, para algún $0 < \lambda \leq 1$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|V(t) - f\|_p \leq C\, [f]_{B_p^\lambda}\, r^\lambda. \tag{4.2.12}$$

Demostración. La función V del enunciado del lema se puede representar de la siguiente forma

$$V(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy.$$

Luego, para $t \in [0, \alpha r^2]$ tenemos que

$$\|V(t) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_x \left| \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_y e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_x \left| \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_y e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} (f(y) - f(x))dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_x \left| \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_z e^{-\frac{|y|^2}{4t}} (f(x-y) - f(x)) dz \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_x \left| \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_z e^{-\frac{|z|^2}{4}} (f(x-\sqrt{t}z) - f(x)) dz \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \left(\int \left| f(x-\sqrt{t}z) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dz.$$

Veamos ahora que vale (4.2.11). Sea $\epsilon > 0$, como $e^{-\frac{|z|^2}{4}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tenemos que existe $R > 0$ tal que

$$2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(0,R)} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dz < \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.2.13}$$

por otro lado, como la función modulo de continuidad es uniformemente continua, tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$ entonces $\|f(\cdot - z) - f(\cdot)\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. Sea ahora $r < \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}R}$, entonces

$$\max_{t \in [0, \alpha r^2]} \left\| f(\cdot - \sqrt{t}z) - f(\cdot) \right\|_p < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.2.14}$$

para todo $z \in B(0, R)$. Luego, de (4.2.13) y (4.2.14) tenemos que

$$\max_{t \in [0, \alpha r^2]} \|V(t) - f\|_p < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

lo que prueba (4.2.11).

Si ahora $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, para $t \in [0, \alpha r^2]$, tenemos que

$$\|V(t) - f\|_p = \left(\int_x \left| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_y e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_z \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} \left(\int_x |f(x-z) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dz.$$

Consideremos primero $p > 1$. Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, luego

$$\|V(t) - f\|_p \leq \int_z \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} \left(\int_x |f(x-z) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \frac{|z|^{\frac{n}{p}+\lambda}}{|z|^{\frac{n}{p}+\lambda}} dz$$

$$\leq \left(\int_z \left[\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} |z|^{\frac{n}{p}+\lambda}\right]^q dz\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z \frac{1}{|z|^{n+\lambda p}} \int_x |f(x-z)-f(x)|^p \, dxdz\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\int_w \left[e^{|w|^2} |2\sqrt{t}w|^{\frac{n}{p}+\lambda}\right]^q dw (4t)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} [f]_{B_p^\lambda}$$
$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(4t)^{\frac{n}{2}}} (2\sqrt{t})^{\frac{n}{p}+\lambda} (4t)^{\frac{n}{2q}} \left(\int_w \left[e^{-|w|^2} |w|^{\frac{n}{p}+\lambda}\right]^q dw\right)^{\frac{1}{q}} [f]_{B_p^\lambda}$$
$$= C(\sqrt{t})^{-n+\frac{n}{p}+\lambda+\frac{n}{q}} [f]_{B_p^\lambda} = Ct^{\frac{\lambda}{2}} [f]_{B_p^\lambda} \leq Cr^\lambda [f]_{B_p^\lambda}$$

y así vale (4.2.12) para $1 < p < \infty$. Si $p = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|V(t)-f\|_p &\leq \int_z \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} \left(\int_x |f(x-z)-f(x)|dx\right) \frac{|z|^{n+\lambda}}{|z|^{n+\lambda}} dz \\ &\leq \left\|\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} |\cdot|^{n+\lambda}\right\|_\infty \int_z \frac{1}{|z|^{n+\lambda}} \int_x |f(x-z)-f(x)|dxdz \\ &\leq Ct^{\frac{\lambda}{2}} \left\|e^{-\frac{|\cdot|^2}{4}} |\cdot|^{n+\lambda}\right\|_\infty [f]_{B_1^\lambda} \\ &\leq Cr^\lambda [f]_{B_1^\lambda}. \end{aligned}$$

□

El siguiente lema nos da un principio de máximo para soluciones de $P(J, f)$.

Lema 4.2.6. *Sea J que cumple las propiedades de (J1) a (J4). Sea el número $\alpha = \left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t) < 1\right\}$ y c tal que $\alpha < c \leq \infty$. Sea $h \in \mathcal{C}([0,c); L^p(\mathbb{R}^n))$ y acotada en norma $||\cdot||_p$ que satisface*

$$h(t) = \int J(t-s) \star h(s) ds \tag{4.2.15}$$

para todo $t \in (\alpha, c)$. Entonces

$$\sup_{t\in[0,c)} \|h(t)\|_p = \max_{t\in[0,\alpha]} \|h(t)\|_p . \tag{4.2.16}$$

Demostración. Tomemos en primera instancia $c < \infty$, y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{c} := \frac{c-\alpha}{n_0} < \alpha$, sean $t_k = \alpha + k\widetilde{c}$, $B_k = [0, t_k]$, y $S_k = \max_{t\in B_k} \|h(t)\|_p$.

Veamos que $S_k = S_{k+1}$ para todo $k = 0, \ldots, n_0 - 1$. Así entonces valdría (4.2.16). Sea $t \in [t_{k-1}, t_k]$, luego,

$$
\begin{aligned}
\|h(t)\|_p &= \left\| \int_{t-\alpha}^{t} J(t-s) \star h(s) ds \right\|_p \\
&\leq \left\| \int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} J(t-s) \star h(s) ds \right\|_p + \left\| \int_{t_{k-1}}^{t} J(t-s) \star h(s) ds \right\|_p \\
&\leq \int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} \|J(t-s) \star h(s)\|_p \, ds + \int_{t_{k-1}}^{t} \|J(t-s) \star h(s)\|_p \, ds \\
&\leq \int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} \|J(t-s)\|_1 \|h(s)\|_p \, ds + \int_{t_{k-1}}^{t} \|J(t-s)\|_1 \|h(s)\|_p \, ds \\
&\leq S_{k-1} \int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} \|J(t-s)\|_1 \, ds + S_k \int_{t_{k-1}}^{t} \|J(t-s)\|_1 \, ds \\
&\leq S_{k-1} \int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} \|J(t-s)\|_1 \, ds + S_k \left(1 - \int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} \|J(t-s)\|_1 \, ds \right) \\
&= S_k - (S_k - S_{k-1}) \int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} \|J(t-s)\|_1 \, ds.
\end{aligned}
\tag{4.2.17}
$$

Luego,

$$
\int_{t-\alpha}^{t_{k-1}} \|J(t-s)\|_1 \, ds (S_k - S_{k-1}) \leq S_k - \|h(\cdot, t)\|_p .
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\int_{t-\alpha \leq s \leq t_{k-1}} \|J(t-s)\|_1 \, ds &= \int_{t-t_{k-1} \leq s_1 \leq \alpha} \|J(s_1)\|_1 \, ds_1 \\
&\geq \int_{\tilde{c} \leq s_1 \leq \alpha} \|J(s_1)\|_1 \, ds_1 > 0
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [t_{k-1}, t_k]$, entonces

$$
\int_{\tilde{c} \leq s_1 \leq \alpha} \|J(s_1)\|_1 \, ds_1 (S_k - S_{k-1}) \leq S_k - \sup_{B_k \setminus B_{k-1}} \|h(\cdot, t)\|_p .
$$

Supongamos que $S_k > S_{k-1}$, entonces $S_k = \sup_{B_k \setminus B_{k-1}} \|h(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, pero por la desigualdad anterior, ya que $\int_{\tilde{c} \leq s_1 \leq \alpha} \|J(s_1)\|_1 \, ds_1$ es positivo, tenemos que $S_k = S_{k-1}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto vale (4.2.16) en el caso que $c < \infty$.

Si ahora $c = \infty$ podemos tomar una sucesión creciente de números positivos c_n tal que $c_n \to \infty$. Luego, por el caso anterior, tenemos que

$$\sup_{t\in[0,c_n)} \|h(t)\|_p = \max_{t\in[0,\alpha]} \|h(t)\|_p$$

para todo $n = 1, 2 \ldots$. Entonces (4.2.16) vale para $c = \infty$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema 4.2.1.

Demostración del Teorema 4.2.1. Del Lema 4.2.4 y el Lema 4.2.5, tenemos que

$$\lim_{r\to 0} \sup_{t\in[0,\alpha r^2]} \|U(\pi_r H, f)(t) - V(t)\|_p = 0, \tag{4.2.18}$$

y si $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\sup_{t\in[0,\alpha r^2]} \|U(\pi_r H, f)(t) - V(t)\|_p \leq C[f]_{B_p^\lambda} r^\lambda. \tag{4.2.19}$$

Como $\alpha = \sup\{\gamma : \int_{t\leq\gamma} H(x,t)dt < 1\}$ entonces $\alpha r^2 = \sup\{\gamma : \int_{t\leq\gamma} \pi_r H(x,t)dt < 1\}$. Como V resuelve $V_t(x,t) - \triangle V(x,t) = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ tenemos que, para $t > \alpha r^2$ vale la fórmula

$$V(t) = \int \pi_r H(t-s) \star V(s)ds.$$

Y como $U(\pi_r H, f)$ resuelve el problema $P(\pi_r H, f)$, también tenemos que para $t > \alpha r^2$

$$U(\pi_r H, f)(t) = \int \pi_r H(t-s) \star U(\pi_r H, f)(s)ds.$$

Así, aplicando el Lema 4.2.6 a la función $U_r - V$ tenemos que

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|U(\pi_r H, f)(t) - V(t)\|_p \leq \max_{t\in[0,\alpha r^2]} \|U(\pi_r H, f)(t) - V(t)\|_p$$

Luego, por (4.2.18) concluimos que vale (4.2.1), y de (4.2.19) obtenemos (4.2.2). $\square$

Parte II

Laplaciano fraccionario: valores medios y regularidad Besov de soluciones

Introducción de la Parte II

Durante muchos años las potencias fraccionarias de $-\triangle$ han sido objeto de estudio. El modo más elemental de introducir el operador no local $(-\triangle)^s$ para $0 < s < 1$, es el uso de la transformada de Fourier. De hecho, para una función de prueba g de la clase de Schwartz, $(-\triangle)^s g$ está dada por

$$\widehat{(-\triangle)^s} g = |\xi|^{2s}\widehat{g},$$

en términos de la transformada de Fourier. Las propiedades de homogeneidad de la transformada de Fourier nos permiten ver que $(-\triangle)^s$ es un operador de convolución con la distribución

$$v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x)-g(0)}{|x|^{n+2s}} dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{g(x)-g(0)}{|x|^{n+2s}} dx.$$

Por lo tanto para g una función de Schwartz

$$(-\triangle)^s g(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)-g(x)}{|x-y|^{n+2s}} dy.$$

Por dualidad puede ser definida para funciones en $L^1\big(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{(1+|x|)^{n+2s}}\big)$.

Para nuestros propósitos en esta tesis, el mejor enfoque es el que describe a $(-\triangle)^s$ como un operador que manda el dato de Dirichlet, para un problema en el semiespacio superior, en el dato de Neumann del mismo cuando la solución se obtiene por convolución del dato inicial con un núcleo de Poisson adecuado. Para $s = \frac{1}{2}$ la idea ya es clásica. En [10], L. Caffarelli y L. Silvestre muestran cómo cualquier potencia fraccionaria de $-\triangle$ en $\mathbb{R}^n$ puede ser obtenida como un operador de tipo Dirichlet to Neumann en el dominio extendido $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0\}$. Este resultado permite un mejor enfoque para ecuaciones en derivadas parciales que involucran $(-\triangle)^s$. El operador en el dominio extendido está dado por $\operatorname{div}(y^a \operatorname{grad} u)$, donde $a \in (-1,1)$, $u = u(x,y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^+$ y div y grad son los operadores de divergencia y gradiente en $\mathbb{R}^{n+1}$. El exponente a está relacionado con la potencia fraccionaria de $(-\triangle)^s$ mediante $2s = 1 - a$.

Ya que para $a \in (-1,1)$ el peso $w(x,y) = |y|^a$ pertenece a la clase de Muckenhoupt $A_2(\mathbb{R}^{n+1})$ se puede aplicar la teoría de regularidad en [24] desarrollada por Fabes, Kenig y Serapioni. En particular la desigualdad de Harnack y la regularidad Hölder de soluciones son válidas.

Cuando $a \neq 0$, el peso $w(x,y) = |y|^a$ produce un sesgo que nos hace pensar en valores medios sobre objetos no esféricos en $\mathbb{R}^{n+1}$. Excepto en $y = 0$, donde la simetría de w con respecto al hiperplano $\{y = 0\}$ puede devolver a las esferas su papel clásico. En [23] algunas generalizaciones de fórmulas de valor medio clásicas son consideradas.

Eligiendo funciones suaves adecuadas probaremos la fórmula de valor medio, para bolas centradas en el hiperplano $\{y = 0\}$, para soluciones débiles v de $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$.

Las consideraciones anteriores sólo nos permitirán valores medios para soluciones con bolas centradas en conjuntos tan pequeños como el hiperplano $\{y = 0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pero esto será suficiente para obtener fórmulas de valor medio de soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$.

Aunque [29] y [33] contienen ciertas fórmulas de valor medio, la que obtendremos aquí por el procedimiento brevemente descrito arriba, es más explícita y por consiguiente más apta para probar mejora de regularidad en la escala de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en el espíritu de [15] (ver también [27]) y [5].

Esta segunda parte de la tesis está organizada en cuatro capítulos. El Capítulo 5 está dedicado a probar la fórmula de valor medio para soluciones de $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$. En el Capítulo 6 utilizaremos la fórmula de valor medio probada en el capítulo anterior y la visión de Caffarelli y Silvestre del operador $(-\triangle)^s$ como un operador Dirichlet to Neumann para demostrar una fórmula de valor medio suave para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$. En el Capítulo 7 probaremos estimaciones de los gradientes de soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ utilizando la fórmula de valor medio del Capítulo 6. Finalmente, en el Capítulo 8, demostramos el resultado sobre mejora de regularidad en la escala de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$.

Capítulo 5

Una fórmula de valor medio para soluciones de $\mathbf{div}(|y|^a\mathbf{grad}\ v) = 0$, $-1 < a < 1$

Sea D un dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Sea $\Omega = D \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in D, y \in \mathbb{R}\}$. El operador diferencial en Ω dado por $L_a u = \text{div}(|y|^a \text{grad } u)$ para $-1 < a < 1$, donde div y grad son los operadores divergencia y gradiente en $\mathbb{R}^{n+1}$, no es elíptico en el sentido estricto ya que la forma cuadrática $\xi A \xi^t$ inducida por la matriz $A = |y|^a I$ es comparable con $|\xi|^2$ sólo si $y \neq 0$. Claramente la elipticidad se degrada a medida que nos acercamos al hiperplano $\{y = 0\}$.

La ecuación $L_a u = 0$ es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional $J(u) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} |\text{grad } u|^2 |y|^a dxdy$.

La función $w(x, y) = |y|^a$ tiene la particularidad de ser un peso de Muckenhoupt de la clase $A_2(\mathbb{R}^{n+1})$ cuando $-1 < a < 1$, y sólo en ese intervalo de valores de a. Una teoría de regularidad Hölder para soluciones débiles de ecuaciones elípticas degeneradas, como la que nos ocupa, fue desarrollada en la década de los ochenta por Fabes, Kenig y Seraponi en [**24**]. Fabes y Garófalo en [**23**] por su parte, prueban una fórmula de valor medio para ecuaciones elípticas en forma de divergencia que podría aplicarse en nuestro caso para $y \neq 0$. Pero estas fórmulas promedian sobre los conjuntos de nivel de la solución fundamental. La simetría en el peso $|y|^a$ con respecto al hiperplano $\{y = 0\}$ sugiere que en los puntos de Ω que son de la forma $(x, 0)$ con $x \in D$ las formas geométricas para el valor medio pueden recuperar la simetría y con ella las bolas euclídeas volverían a ser los objetos naturales para la validez de fórmulas de valor medio. Una fórmula de valor medio como esta, válida sólo en el subconjunto de medida nula $D \times \{0\}$ de Ω parece a primera vista inútil. Notablemente, a partir del método de extensión de Caffarelli y Silvestre para el cálculo de potencias fraccionarias de $-\triangle$ en $\mathbb{R}^n$, la información que aporta una fórmula de valor medio en $D \times \{0\}$ es relevante para entender las soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en D.

En la Sección 5.1 introducimos las clases de pesos de Muckenhoupt que en el caso $p = 2$ proveen formulaciones adecuadas sustitutas de la elipticidad uniforme de un operador en forma de divergencia. En la Sección 5.2 se introducen los espacios de Sobolev determinados por espacios de Lebesgue con medidas definidas por pesos de Muckenhoupt y probamos un resultado de extensión simétrica a través de hiperplanos cuando el peso también es simétrico. En la Sección 5.3 repasamos el concepto de solución de ecuaciones elípticas degeneradas como se introduce en [**24**] y enunciamos el teorema de regularidad Hölder de las mismas como consecuencia de la desigualdad de Harnack. La Sección 5.4 contiene lo que entendemos es el resultado original de este capítulo una fórmula de valor medio para soluciones del problema $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$, $-1 < a < 1$, en puntos del hiperplano $\{y = 0\}$.

5.1. Pesos de Muckenhoupt

Se dice que una función medible $w : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$, positiva en casi todo punto, es un peso de Muckenhoupt de la clase $A_p(\mathbb{R}^k)$, $1 < p < \infty$, si y sólo si existe una constante C tal que para toda bola B vale la desigualdad (de Hölder reversa)

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leq C. \tag{5.1.1}$$

En análisis armónico los pesos $A_p(\mathbb{R}^k)$ definen las únicas medidas para las que la maximal de Hardy-Littlewood

$$Mu(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |u(y)|dy \tag{5.1.2}$$

está acotada en $L^p(\mathbb{R}^k, wdx)$. Más precisamente, el próximo enunciado contiene el resultado más conocido y fundamental de los pesos A_p.

Teorema 5.1.1 (Muckenhoupt). *Sea w una función no negativa definida en $\mathbb{R}^k$ localmente integrable. Sea $1 < p < \infty$. Entonces $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$ si y sólo si existe una constante C que sólo depende de p y w tal que*

$$\|Mu\|_{L^p(\mathbb{R}^k,wdx)} \leq C\,\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^k,wdx)}$$

para toda $u \in L^p(\mathbb{R}^k, wdx)$.

Como ejemplos de pesos de Muckenhoupt podemos citar algunas potencias de la función distancia al origen.

LEMA 5.1.2. *La función* $|x|^\gamma$ *está en la clase de pesos* $A_p(\mathbb{R}^k)$ *si y sólo si* $-k < \gamma < k(p-1)$.

Una propiedad que usaremos de los pesos de Muckenhoupt es que el producto tensorial de pesos de A_p es también un peso de A_p.

LEMA 5.1.3. *Si* $w_1 \in A_p(\mathbb{R}^k)$ *y* $w_2 \in A_p(\mathbb{R}^m)$ *entonces* $w(x,y) = w_1(x)w_2(y)$ *está en* $A_p(\mathbb{R}^{k+m})$.

DEMOSTRACIÓN. Es bien conocido que en la definición (5.1.1) se pueden sustituir bolas por cubos y las clases de Muckenhoupt son las mismas. Más generalmente, las bolas euclídeas en (5.1.1) pueden sustituirse por bolas de cualquier otra norma en el espacio. Sea $Q = Q_1 \times Q_2$ un cubo de $\mathbb{R}^{k+m}$ con Q_1 cubo de $\mathbb{R}^k$, Q_2 un cubo de $\mathbb{R}^m$ y los tres con lados de la misma longitud. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x,y)dxdy\right)\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x,y)^{-\frac{1}{p-1}}dxdy\right)^{p-1}\\
&=\left(\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} w_1(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} w_1(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\\
&\quad\left(\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w_2(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w_2(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1}\\
&\le C_1C_2 \le C.
\end{aligned}
$$

Luego, $w(x,y)$ está en la clase de pesos de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^{k+m})$. □

COROLARIO 5.1.4. *Si* $-1 < a < 1$ *entonces* $w(x,y) = |y|^a$, *con* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ *es un peso de Muckenhoupt de* $A_2(\mathbb{R}^{n+1})$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 5.1.2, $|y|^a$ es un peso de $A_2(\mathbb{R})$. Puesto que $w_1(x) \equiv 1$ está en todas las clases de Muckenhoupt, el Lema 5.1.3 prueba que $w(x,y) = w_1(x)w_2(y)$ está en $A_2(\mathbb{R}^{n+1})$. □

El Corolario 5.1.4 podría verse también como un caso particular de una teoría más general de pesos que son funciones de la distancia a un cerrado como en [21] pero nuestra demostración es elemental.

5.2. Espacios de Sobolev con pesos

Para $1 < p < \infty$ y w una función en la clase $A_p(\mathbb{R}^k)$, el espacio $L^p(\Omega, wdx)$ se define como el conjunto de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles tales que $\int_\Omega |u(x)|^p w(x)dx$ es finita. En este espacio se puede definir la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega,wdx)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p}$$

con la que resulta ser de Banach y separable.

Hasta donde sabemos las primeras consideraciones de espacios de Sobolev con medidas ponderadas por pesos singulares se deben a Fabes, Kenig y Serapioni en [24]. Sea $1 < p < \infty$ fijo y sea $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$ un peso dado. En general los espacios de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^k, wdx)$ no están contenidos en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^k, dx)$. Tomar por ejemplo $k = 1$, $w(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ que está en $A_2(\mathbb{R})$, $u(x) = \mathcal{X}_{(-1,1)}(x)|x|^{-1}$ que no es localmente integrable con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, sin embargo $u \in L^{\frac{3}{2}-\epsilon}(\mathbb{R}, |x|^{\frac{1}{2}}dx)$ para ϵ positivo chico. Este hecho muestra que una función $u \in L^q(\mathbb{R}^k, wdx)$ con $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$ ni siquiera define generalmente una distribución de Schwartz en el sentido clásico. Sin embargo, cuando p y q coinciden la situación es otra.

Lema 5.2.1. *Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$ dados. Entonces $L^p(\mathbb{R}^k, wdx) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^k, dx)$.*

Demostración. Sea K un compacto de $\mathbb{R}^k$ y sea p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Tomemos $v \in L^p(\mathbb{R}^k, wdx)$. Como $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$ tenemos que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1(K)$. Luego, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_K |v(x)|dx &= \int_K |v(x)| \frac{w(x)^{\frac{1}{p}}}{w(x)^{\frac{1}{p}}} dx \\
&\le \left(\int_K |v(x)|^p w(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K w(x)^{-\frac{p'}{p}} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_K |v(x)|^p w(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\int_K |v(x)|dx$ es finita. □

Cuando $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$, el Lema 5.2.1 permite calcular el gradiente de cualquier $u \in L^p(\mathbb{R}^k, wdx)$ como distribución de Schwartz. Estamos en condiciones de definir los espacios de Sobolev con pesos de Muckenhoupt en dominios de $\mathbb{R}^k$. Sea Ω un dominio abierto de $\mathbb{R}^k$. Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$ un peso dado. El espacio $W^{1,p}(\Omega, wdx)$ es el subespacio de Banach del espacio de funciones u de $L^p(\Omega, wdx)$ cuyo gradiente, grad u, en el sentido de las distribuciones es un vector cuyas k componentes son funciones en el espacio $L^p(\Omega, wdx)$. La norma en el espacio $W^{1,p}(\Omega, wdx)$ está dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,wdx)} := \|u\|_{L^p(\Omega,wdx)} + \sum_{i=1}^{k} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega,wdx)}. \tag{5.2.1}$$

La prueba de que (5.2.1) define una estructura de espacio de Banach en $W^{1,p}(\Omega, wdx)$ se obtiene por argumentos estándar.

Llamaremos $W^{1,p}_{loc}(\Omega, wdx)$ al conjunto de funciones que están en $W^{1,p}(\Omega', wdx)$ para todo Ω' cuya clausura está contenida en Ω. Cuando $p = 2$ denotaremos $H^1(\Omega, wdx)$ al espacio $W^{1,2}(\Omega, wdx)$ y $H^1_{loc}(\Omega, wdx)$ al espacio $W^{1,2}_{loc}(\Omega, wdx)$.

Con el objeto de probar nuestro resultado de extensión por simetría será importante la caracterización de espacios de Sobolev con peso a través de aproximación por funciones suave, contenido en el próximo enunciado.

Teorema 5.2.2. *Sean Ω abierto y acotado, $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$, $1 < p < \infty$ y $u \in L^p(\Omega, wdx)$ dada. Entonces $u \in W^{1,p}(\Omega, wdx)$ si y sólo si existe una sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω que converge a u en $L^p(\Omega, wdx)$ y tal que la sucesión $\{grad\ \varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de los gradientes clásicos de φ_m es de Cauchy en $L^p(\Omega, wdx)$. Más aún, el límite en $L^p(\Omega, wdx)$ de la sucesión $\{grad\ \varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es el gradiente débil grad u de la función u.*

Antes de demostrar el teorema, enunciaremos otros resultados.

Lema 5.2.3. *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^k$. Si denotamos con $\mathcal{C}(\Omega)$ el conjunto de funciones continuas en Ω, entonces $\mathcal{C}(\Omega) \cap L^p(\Omega, wdx)$ es denso en $L^p(\Omega, wdx)$.*

La prueba de este lema sigue las líneas del caso en que $w \equiv 1$ ya que la medida wdx es regular.

LEMA 5.2.4. *Sea $\eta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una función infinitamente diferenciable, con soporte en la bola unitaria y tal que $\int \eta(x)dx = 1$. Supongamos además que η es radial y decreciente a lo largo de rayos. Entonces*

$$|(\eta * u)(x)| \leq C\,|Mu(x)|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^k$ y toda función u localmente integrable en $\mathbb{R}^k$, donde C es una constante que sólo depende de n, p y w, y con M la maximal de Hardy-Littlewood definida en (5.1.2).

Para una prueba de este resultado ver por ejemplo [**34**].

LEMA 5.2.5. *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^k)$. Sea η como en el Lema 5.2.4 y $\eta_r(x) = \frac{1}{r^k}\eta\left(\frac{x}{r}\right)$. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^k$ y $u \in L^p(\Omega, wdx)$. Entonces, para todo Ω' con clausura compacta contenida en Ω tenemos que $\eta_r * u \to u$ en $L^p(\Omega', wdx)$ y puntualmente, cuando r tiende a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω' con clausura compacta contenida en Ω y sea $r_0 = \frac{d(\Omega', \partial\Omega)}{2}$. Supongamos primero que u es continua y que está en $L^p(\Omega, wdx)$. Sea $\Omega_{r_0} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > r_0\}$, luego la clausura de Ω' está contenida en Ω_{r_0} y para $x \in \Omega'$ y $r < r_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|(\eta_r * u)(x) - u(x)| &= \left| \int_{B(x,r)} \eta_r(x-y)(u(y) - u(x))dy \right| \\
&= \left| \int_{B(0,1)} \eta(y)(u(x-ry) - u(x))dy \right| \\
&\leq \|\eta\|_\infty \int_{B(0,1)} |(u(x-ry) - u(x))|\,dy
\end{aligned}$$

y el último término tiende a cero cuando r tiende a cero por la continuidad supuesta en u. Además la convergencia es uniforme ya que u es uniformemente continua en Ω_{r_0} y $x - ry \in \Omega_{r_0}$ para $y \in B(0,1)$ y $r < r_0$. Luego, $\eta_r * u \rightrightarrows u$ en Ω', cuando r tiende a 0. Como w es integrable en Ω' la convergencia también se da en $L^p(\Omega', wdx)$.

Sea ahora $u \in L^p(\Omega, wdx)$. Observemos que para r menor que r_0, la función $\eta_r * u \in L^p(\Omega', wdx)$. Por el Lema 5.2.4 y el Teorema 5.1.1, si $\overline{u}$ es la extensión de u que vale cero fuera de Ω, entonces

$$\|\eta_r * u\|_{L^p(\Omega',wdx)} \leq \|\eta_r * \overline{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^k,wdx)} \leq C\,\|\overline{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^k,wdx)} = C\,\|u\|_{L^p(\Omega,wdx)}$$

donde la constante C sólo depende de p y w. Luego $\eta_r * u \in L^p(\Omega', wdx)$ uniformemente en r.

Probemos ahora la convergencia. Sea $\epsilon > 0$, por el Lema 5.2.3 existe una función $u_1 \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $\|u - u_1\|_{L^p(\Omega,wdx)} < \epsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\|\eta_r * u - u\|_{L^p(\Omega',wdx)}\\
&\leq \|\eta_r * u - \eta_r * u_1\|_{L^p(\Omega',wdx)} + \|\eta_r * u_1 - u_1\|_{L^p(\Omega',wdx)} + \|u_1 - u\|_{L^p(\Omega',wdx)}\\
&= \|\eta_r * (u - u_1)\|_{L^p(\Omega',wdx)} + \|\eta_r * u_1 - u_1\|_{L^p(\Omega',wdx)} + \|u_1 - u\|_{L^p(\Omega,wdx)}\\
&\leq (C+1)\,\|u_1 - u\|_{L^p(\Omega,wdx)} + \|\eta_r * u_1 - u_1\|_{L^p(\Omega',wdx)}\,,
\end{aligned}$$

donde la constante C es la misma que en la estimación anterior. Eligiendo r suficientemente pequeño, como la función u_1 es continua, podemos lograr que $\|\eta_r * u_1 - u_1\|_{L^p(\Omega',wdx)} < \epsilon$. Luego

$$\|\eta_r * u - u\|_{L^p(\Omega',wdx)} \leq (C+2)\epsilon.$$

Por lo tanto $\eta_r * u$ converge a u en $L^p(\Omega', wdx)$. La convergencia puntual sigue de argumentos estándar de análisis armónico. □

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 5.2.2.

Demostración del Teorema 5.2.2. La demostración de este teorema sigue las líneas clásicas expuestas por ejemplo en [22]. Sea $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, wdx)$ el conjunto de funciones $u \in L^p(\Omega, wdx)$ para las cuales existe una sucesión de funciones $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que tienden a u en $L^p(\Omega, wdx)$ y $\{\text{grad}\ \varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega, wdx)$. Veamos que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, wdx) = W^{1,p}(\Omega, wdx)$.

Probemos primero la inclusión $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, wdx) \subset W^{1,p}(\Omega, wdx)$. Como la sucesión de funciones $\{\text{grad}\ \varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy tenemos que existe un vector $v \in L^p(\Omega, wdx)$ tal que la sucesión $\{\text{grad}\ \varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a v en dicho espacio. Veamos que $v = \text{grad}\ u$. Razonando como en el Lema 5.2.1 podemos ver que las funciones φ_m convergen a u y grad φ_m convergen a v en $L^1(\Omega')$ para todo Ω' de clausura compacta en Ω. Sea ahora

$\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega [u(x)\text{grad }\psi(x) - (-v(x)\psi(x))]\,dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega [(u(x) - \varphi_m(x))\text{grad }\psi(x) - (\text{grad }\varphi_m(x) - v(x))\psi(x)]\,dx\right| \\
&\leq \text{máx}\,|\text{grad }\psi| \int_{\text{sop}\psi} |u(x) - \varphi_m(x)|dx + \text{máx}\,|\psi| \int_{\text{sop}\psi} |v - \text{grad }\varphi_m(x)|dx.
\end{aligned}$$

Como φ_m converge a u en $L^1(\text{sop}\psi, dx)$ y grad φ_m converge a v en el mismo espacio, entonces

$$\int_\Omega [u(x)\text{grad }\psi(x) - (-v(x)\psi(x))]\,dx = 0.$$

Luego, $v =$ grad u. Y así queda demostrado que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega, wdx) \subset W^{1,p}(\Omega, wdx)$.

Probemos ahora que $W^{1,p}(\Omega, wdx) \subset \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, wdx)$. Tomemos η como en el Lema 5.2.4, y para $r > 0$ sea $\eta_r(x) = \frac{1}{r^k}\eta\left(\frac{x}{r}\right)$. Del Lema 5.2.5 y el hecho que si $u \in W^{1,p}(\Omega, wdx)$ entonces grad $(\eta_r * u) = \eta_r *$grad u. Luego, tenemos que para todo Ω' de clausura compacta en Ω, las funciones $u_r = \eta_r * u$ convergen, cuando $r \to 0$, a la función u en el espacio $W^{1,p}(\Omega', wdx)$. Para $i \in \mathbb{N}$ definimos $\Omega_i = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. Consideremos $A_i = \Omega_{i+3} - \overline{\Omega}_{i+1}$ y sea A_0 un abierto contenido en Ω tal que $\Omega = \bigcup_{i=0}^\infty A_i$. Sea $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ una partición suave de la unidad asociada a los conjuntos $\{A_i\}_{i=0}^\infty$. Aplicando la regla de Leibniz tenemos que $\xi_i u \in W^{1,p}(\Omega, wdx)$ y sop$\xi_i u \subset A_i$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$ Fijado ahora un $\epsilon > 0$, usando el Lema 5.2.5, elegimos $r_i > 0$ suficientemente chico tal que $u_i = \eta_{r_i} * (\xi_i u)$ tiene soporte contenido en $G_i = \Omega_{i+4} - \overline{\Omega}_i$, y

$$\|u_i - \xi_i u\|_{W^{1,p}(\Omega, wdx)} = \|u_i - \xi_i u\|_{W^{1,p}(G_i, wdx)} \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$$

para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$

Sea $\widetilde{u} = \sum_{i=0}^\infty u_i$. Ya que para todo Ω' compactamente contenido en Ω sólo una cantidad finita de sumandos es distinta de cero entonces $\widetilde{u}$ está en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Además

$$\|\widetilde{u} - u\|_{W^{1,p}(\Omega', wdx)} \leq \sum_{i=0}^\infty \|u_i - \xi_i u\|_{W^{1,p}(\Omega, wdx)} \leq \epsilon \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{2^{i+1}} = \epsilon.$$

Tomando supremo sobre todos los abiertos Ω' con clausura compacta contenida en Ω tenemos que $\|\widetilde{u} - u\|_{W^{1,p}(\Omega, wdx)} \leq \epsilon$. Luego, concluimos que las funciones $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ son densas en $W^{1,p}(\Omega, wdx)$. Y entonces $W^{1,p}(\Omega, wdx) \subset \mathcal{W}^{1,p}(\Omega, wdx)$. $\square$

El siguiente resultado de extensión a través de hiperplanos de simetría del peso es elemental y será de utilidad en la Sección 6.1. Antes de enunciar y demostrar el lema precisaremos la notación que usaremos en él, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$ denotaremos $X = (x, y)$ el elemento de $\mathbb{R}^{n+1}$.

LEMA 5.2.6. *Sea w un peso de $A_p(\mathbb{R}^{n+1})$ simétrico con respecto al hiperplano $\{y = 0\}$, es decir $w(x, y) = w(x, -y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $y \in \mathbb{R}$. Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $R > 0$. Si $u \in W^{1,p}(D \times (0, R), wdX)$, entonces la función*

$$\overline{u}(x, y) := \begin{cases} u(x, y) & y > 0 \\ u(x, -y) & y < 0 \end{cases}$$

pertenece al espacio $W^{1,p}(D \times (-R, R), wdX)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(D \times (0, R))$ entonces la función

$$\overline{\varphi}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & y \in (0, R) \\ \varphi(x, -y) & y \in (-R, 0) \end{cases}$$

está en el espacio $W^{1,p}(D \times (-R, R), wdX)$. Claramente las derivadas parciales de $\overline{\varphi}$ en la variable x de $\mathbb{R}^n$ son las mismas que las correspondientes derivadas de φ. Calculemos la derivada parcial débil en la dirección de y. Para $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(D \times (-R, R))$ tenemos que

$$\iint \overline{\varphi}(x, y)\psi_y(x, y)dX = \lim_{\epsilon \to 0} \iint_{|y|>\epsilon} \overline{\varphi}(x, y)\psi_y(x, y)dX.$$

Como

$$\begin{aligned}
&\iint_{|y|>\epsilon} \overline{\varphi}(x, y)\psi_y(x, y)dX \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(-\epsilon,\epsilon)^c} \overline{\varphi}(x, y)\psi_y(x, y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \overline{\varphi}(x, y)\psi_y(x, y)dy + \int_{\epsilon}^{\infty} \overline{\varphi}(x, y)\psi_y(x, y)dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \varphi(x, -y)\psi_y(x, y)dy + \int_{\epsilon}^{\infty} \varphi(x, y)\psi_y(x, y)dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Bigg(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \varphi_y(x, -y)\psi(x, y)dy + \varphi_y(x, \epsilon)\psi(x, -\epsilon)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{\epsilon}^{\infty} \varphi_y(x,y)\psi(x,y)dy - \varphi_y(x,\epsilon)\psi(x,\epsilon)\Big)dx \\
= &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{(-\epsilon,\epsilon)^c} \left[\varphi_y(x,-y)\mathcal{X}_{\{y<0\}}(x,y) - \varphi_y(x,y)\mathcal{X}_{\{y\geq 0\}}(x,y)\right] \psi(x,y)dy \right) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_y(x,\epsilon)\psi(x,-\epsilon) - \varphi_y(x,\epsilon)\psi(x,\epsilon)dx \\
= &\iint_{|y|>\epsilon} \left[\varphi_y(x,-y)\mathcal{X}_{\{y<0\}}(x,y) - \varphi_y(x,y)\mathcal{X}_{\{y\geq 0\}}(x,y)\right] \psi(x,y)dX \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_y(x,\epsilon)\psi(x,-\epsilon) - \varphi_y(x,\epsilon)\psi(x,\epsilon)dx,
\end{aligned}
$$

tomando límite cuando ϵ tiende a cero, tenemos que

$$
\iint \overline{\varphi}(x,y)\psi_y(x,y)dX = \iint \left[\varphi_y(x,-y)\mathcal{X}_{\{y<0\}}(x,y) - \varphi_y(x,y)\mathcal{X}_{\{y\geq 0\}}(x,y)\right] \psi(x,y)dX,
$$

y así

$$
\overline{\varphi}_y(x,y) = \begin{cases} \varphi_y(x,y) & y \in (0,R) \\ -\varphi_y(x,-y) & y \in (-R,0). \end{cases}
$$

Luego, como $\overline{\varphi_y} \in L^p(D \times (0,R), wdX)$ y w es simétrico respecto del hiperplano $\{y=0\}$ tenemos que $\overline{\varphi}_y$ está en $L^p(D \times (-R,R), wdX)$. La tesis del lema sigue del Teorema 5.2.2. En efecto para funciones u tales que $u \in W^{1,p}(D \times (0,R), wdX)$ existen funciones $\varphi_m \in \mathcal{C}^\infty(D \times (0,R))$ tales que $\|\varphi_m - u\|_{W^{1,p}(D\times(0,R),wdX)}$ tiende a cero cuando m tiende a infinito. Luego, las funciones $\overline{\varphi}_m$ forman una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(D \times (-R,R), wdX)$, pues, por un lado

$$
\begin{aligned}
&\left\|\overline{\varphi}_{m_1} - \overline{\varphi}_{m_2}\right\|_{L^p(D\times(-R,R),wdX)} \\
&= \left(\iint_{D\times(-R,R)} \left|\overline{\varphi}_{m_1}(x,y) - \overline{\varphi}_{m_2}(x,y)\right|^p w(x,y)dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(2 \iint_{D\times(0,R)} \left|\varphi_{m_1}(x,y) - \varphi_{m_2}(x,y)\right|^p w(x,y)dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \left\|\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2}\right\|_{L^p(D\times(0,R),wdX)},
\end{aligned}
$$

y el último término tiende a cero cuando m_1 y m_2 tienden a infinito. Por otro lado, teniendo en cuenta que las derivadas parciales con respecto a las primeras n variables $x_i \in \mathbb{R}$ de $\overline{\varphi}_m$ son una reflexión par de las derivadas parciales de φ_m, y en la caso de la variable $y \in \mathbb{R}$ la derivada parcial de $\overline{\varphi}_m$ es la reflexión impar de la derivada parcial de φ_m para todo $m = 1, 2, \ldots$, razonando como lo hicimos en la cadena de igualdades anterior tenemos que

$$\left\| \frac{\partial \overline{\varphi}_{m_1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{\varphi}_{m_2}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(D\times(-R,R),wdX)} = C \left\| \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_{m_2}}{\partial x_i} \right\|_{L^p(D\times(0,R),wdX)}$$

y

$$\left\| \frac{\partial \overline{\varphi}_{m_1}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{\varphi}_{m_2}}{\partial y} \right\|_{L^p(D\times(-R,R),wdX)} = C \left\| \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{m_2}}{\partial y} \right\|_{L^p(D\times(0,R),wdX)}.$$

Como los términos de la derecha de ambas igualdades tienden a cero cuando m_1 y m_2 tienden a infinito, los gradientes de $\overline{\varphi}_m$ forman una sucesión de Cauchy en $L^p(D \times (-R,R), wdX)$. Luego, las funciones $\overline{\varphi}_m$ forman una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega, wdX)$. Como $W^{1,p}(D \times (-R,R), wdX)$ es un espacio de Banach, tenemos que las funciones $\overline{\varphi}_m$ convergen a alguna función v en $W^{1,p}(D \times (-R,R), wdX)$, y puesto que la convergencia también se da en casi todo punto entonces $\overline{u} = v$. □

En el resto de esta sección mostraremos cómo los resultados anteriores se pueden aplicar a una familia de funciones u, definidas en el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$, que se obtienen convolucionando un núcleo de tipo Poisson $P^a_y(x)$, $-1 < a < 1$, con una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Veremos más adelante que estas funciones u resultan ser soluciones de un problema elíptico degenerado en el semiespacio superior. Además, bajo ciertas condiciones sobre f, estarán en H^1 de un conjunto Ω^+ contenido en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Los resultados probados en este capítulo nos permitirán luego extender soluciones de forma par y obtener una función v definida en $\mathbb{R}^{n+1}$, la cual seguirá estando en H^1 pero ahora de un conjunto Ω contenido en $\mathbb{R}^{n+1}$ y que atraviesa el hiperplano $\{y = 0\}$. Con hipótesis adicionales sobre f, veremos que v resuelve una ecuación elíptica degenerada en Ω. Estos dos hechos nos permitirán luego obtener una fórmula de valor medio para v en puntos del hiperplano $\{y = 0\}$.

Empezaremos definiendo los núcleos $P^a_y(x)$ y probaremos algunas propiedades de los mismos. Cuando $a = 0$ recuperamos el núcleo de Poisson clásico.

Para $a \in (-1, 1)$ definimos

$$P_y^a(x) = C_{n,a}\frac{y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ y donde la constante $C_{n,a}$ es tal que $\int P_1^a(x)dx = 1$.

PROPOSICIÓN 5.2.7. *El núcleo $P_y^a(x)$ satisface las siguientes propiedades*

a) $\operatorname{div}(y^a \operatorname{grad} P_y^a(x)) = 0$, *donde la divergencia y el gradiente se toman en las dos variables $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$.*

b) *Para todo $y > 0$ se tiene que $P_y^a(x) = \frac{1}{y^n}P_1^a\left(\frac{x}{y}\right)$. Más aún, $\int P_y^a(x)dx = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$.*

c) $\lim\limits_{y\to 0^+} P_y^a = \delta_0$ *en el sentido de las distribuciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

d) $\left|\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x,1)\right| |x|^{n+1-a} \leq C$ *para alguna constante C y para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero a). Calculemos $\operatorname{div}(y^a \operatorname{grad} P_y^a(x))$. Tomando las derivadas primeras de $P_y^a(x)$ tenemos que

$$\frac{\partial P_y^a(x)}{\partial x_i} = -C_{n,a}(n+1-a)\frac{x_i y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}$$

para $i = 1, \ldots, n$, y

$$\frac{\partial P_y^a(x)}{\partial y} = C_{n,a}\left((1-a)\frac{y^{-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} - (n+1-a)\frac{y^{2-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}\right).$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(y^a\frac{\partial P_y^a(x)}{\partial x_i}\right) = -C_{n,a}y(n+1-a)\left[(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}} - (n+3-a)x_i^2(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+5-a}{2}}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^a\frac{\partial P_y^a(x)}{\partial y}\right) &= -C_{n,a}y(n+1-a)\Big[(1-a)(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}} + 2(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}}\\ &\quad - y^2(n+3-a)(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+5-a}{2}}\Big].\end{aligned}$$

Si calculamos ahora $\operatorname{div}(y^a \operatorname{grad} P_y^a(x))$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}(y^a \operatorname{grad} P_y^a(x))\\ &= -C_{n,a}y(n+1-a)\sum_{i=1}^n\left[(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}} - (n+3-a)x_i^2(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+5-a}{2}}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- C_{n,a}y(n+1-a)\Bigg[(1-a)(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}} + 2(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}} \\
&- (n+3-2)y^2(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+5-a}{2}}\Bigg] \\
&= -C_{n,a}y(n+1-a)\left[n(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}} - (n+3-a)(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}}\right] \\
&- C_{n,a}y(n+1-a)\Bigg[(1-a)(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}} + 2(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}}\Bigg] \\
&= -C_{n,a}y(n+1-a)(|x|^2+y^2)^{-\frac{n+3-a}{2}}\left[n-(n+3-a)+(1-a)+2\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

La propiedad b) se obtiene por un cambio de variables y c) sigue de b) de la manera que es usual para el núcleo de Poisson clásico que corresponde al caso $a = 0$. La propiedad d) sale de la forma explícita de $\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x, 1)$. $\square$

A continuación enunciaremos y demostraremos una proposición, que referiremos más adelante, y que da condiciones suficientes para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de modo que la función $u(x, y) = \left(P_y^a * f\right)(x)$ esté en el espacio de Sobolev $H^1(A \times (0, R), y^a dX)$, $-1 < a < 1$, para algún abierto A y R un número real positivo.

Dado un conjunto abierto D contenido en $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \gamma \leq 1$ se define el espacio $\mathcal{C}^{m,\gamma}(D)$ como el conjunto formado por todas las funciones m-veces diferenciables en D tales que sus derivadas de orden m son Hölder γ.

Para $\beta > 0$ y D un abierto de $\mathbb{R}^n$ definimos el espacio F_β de la siguiente manera

$$F_\beta = \left\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^{[\beta],\beta-[\beta]}(D)\right\}, \tag{5.2.2}$$

donde $[\beta]$ denota la parte entera β. Una propiedad que cumplen de estos espacios es que si $\beta_1 \leq \beta_2$ entonces $F_{\beta_2} \subset F_{\beta_1}$.

Proposición 5.2.8. *Sea $-1 < a < 1$ y D un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in F_\beta$ para $1 - a < \beta$ y $u(x, y) = (P_y^a * f)(x)$ entonces para todo abierto A de clausura compacta contenida en D y todo $R > 0$ se tiene que $u \in H^1(A \times (0, R), y^a dX)$.*

Demostración. Dado que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\int P_y^a(x)dx = 1$ para todo $y > 0$, tenemos que $u \in L^\infty(A \times (0, R))$ y por lo tanto $u \in L^2(A \times (0, R), y^a dX)$. Observemos ahora que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(A \times (0,R), y^a dX)$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Para demostrarlo nos basta probar que $\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x_j}\right| \leq Cy^{-a} + C$ para $(x,y) \in A \times (0,R)$. Veamos que esta estimación puntual se cumple. Sea $r = d(A, \partial D) > 0$. Ya que $u(x,y) = (P_y^a * f)(x)$ entonces $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial P_y^a}{\partial x_j} * f\right)(x)$, donde

$$\frac{\partial P_y^a}{\partial x_j}(x) = -C_{n,a}(n+1-a)\frac{x_j y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}.$$

Sea $(x,y) \in A \times (0,R)$. Supongamos primero que $a > 0$. En este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\beta < 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x_j}\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial x_j}(x-z) f(z) dz\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial x_j}(x-z)(f(z) - f(x)) dz\right| \\
&\leq C \left|\int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{(x_j - z_j) y^{1-a}}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}(f(z) - f(x)) dz\right| \\
&\quad + C \left|\int_{B^c(x,\frac{r}{2})} \frac{(x_j - z_j) y^{1-a}}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}(f(z) - f(x)) dz\right| \\
&\leq C y^{1-a} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{|x-z||x-z|^{1-a}}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&\quad + C2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} y^{1-a} \int_{B^c(x,\frac{r}{2})} \frac{|x-z|}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&\leq C \frac{y^{3-2a}}{y^{n+3-a}} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{\left|\frac{x-z}{y}\right|^{2-a}}{\left(\left|\frac{x-z}{y}\right|^2 + 1\right)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&\quad + C2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} R^{1-a} \int_{B^c(0,\frac{r}{2})} \frac{|\bar{z}|}{(|\bar{z}|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} d\bar{z} \\
&= C y^{-a} \int_{B(0,\frac{r}{2y})} \frac{|\bar{z}|^{2-a}}{(|\bar{z}|^2 + 1)^{\frac{n+3-a}{2}}} d\bar{z} \\
&\quad + C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(0,\frac{r}{2})} |\bar{z}|^{-n-2-a} d\bar{z} \\
&\leq C y^{-a} + C.
\end{aligned}$$

Si $a \leq 0$ entonces $\beta > 1$. Así f resulta ser Lipschitz en $B = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{r}{2})$ cuya clausura está contenida en D. Razonando como arriba tenemos que $\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x_j}\right| \leq C$ para todo $(x, y) \in A \times (0, R)$. En efecto, sea $(x, y) \in A \times (0, R)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x_j}\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial x_j}(x-z) f(z) dz\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial x_j}(x-z)(f(z) - f(x)) dz\right| \\
&\leq C \left|\int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{(x_j - z_j) y^{1-a}}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} (f(z) - f(x)) dz\right| \\
&\quad + C \left|\int_{B^c(x,\frac{r}{2})} \frac{(x_j - z_j) y^{1-a}}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} (f(z) - f(x)) dz\right| \\
&\leq C y^{1-a} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{|x-z|^2}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&\quad + C 2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} y^{1-a} \int_{B^c(x,\frac{r}{2})} \frac{|x-z|}{(|x-z|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&\leq C \frac{y^{3-a}}{y^{n+3-a}} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{\left|\frac{x-z}{y}\right|^2}{\left(\left|\frac{x-z}{y}\right|^2 + 1\right)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&\quad + C 2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} R^{1-a} \int_{B^c(0,\frac{r}{2})} \frac{|\bar{z}|}{(|\bar{z}|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} d\bar{z} \\
&= C \int_{B(0,\frac{r}{2y})} \frac{|\bar{z}|^2}{\left(|\bar{z}|^2 + 1\right)^{\frac{n+3-a}{2}}} d\bar{z} \\
&\quad + C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(0,\frac{r}{2})} |\bar{z}|^{-n-2-a} d\bar{z} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Observemos ahora que la acotación puntual que vale para las derivadas en las variables x_j de u también vale en la derivada respecto de y, es decir $\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right| \leq C y^{-a} + C$. Luego, $\frac{\partial u}{\partial y}$ también está en el espacio $L^2(A \times (0, R), y^a dX)$. Supongamos en primera instancia que $a > 0$. Como $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * f\right)(x)$, con

$$\frac{\partial P_y^a}{\partial y} = C_{n,a} \left((1-a) \frac{y^{-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} - (n+1-a) \frac{y^{2-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} \right),$$

si ahora tomamos $(x, y) \in A \times (0, R)$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)f(z)dz\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)(f(z)-f(x))dz\right| \\
&\leq \left|\int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)(f(z)-f(x))dz\right| + \left|\int_{B^c(x,\frac{r}{2})} \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)(f(z)-f(x))dz\right| \\
&\leq C\int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{y^{-a}}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} |f(z)-f(x)|\, dz \\
&\quad + C\int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{y^{2-a}}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} |f(z)-f(x)|\, dz \\
&\quad + C2\, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(x,\frac{r}{2})} \frac{y^{-a}}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dz \\
&\quad + C2\, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(x,\frac{r}{2})} \frac{y^{2-a}}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&= I + II + III + IV.
\end{aligned}
$$

Estimemos I,

$$
\begin{aligned}
I &\leq Cy^{-a} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{|x-z|^\beta}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dz \\
&\leq Cy^{-a} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{|x-z|^\beta}{|x-z|^{n+1-a}} dz \\
&= Cy^{-a} \int_{B(0,\frac{r}{2})} |\bar{z}|^{-n-1+a+\beta} d\bar{z} \\
&= Cy^{-a}.
\end{aligned}
$$

Acotemos ahora II,

$$
\begin{aligned}
II &\leq Cy^{2-a} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{|x-z|^{1-a}}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&= C\frac{y^{3-2a}}{y^{n+3-a}} \int_{B(x,\frac{r}{2})} \frac{\left|\frac{x-z}{y}\right|^{1-a}}{\left(\left|\frac{x-z}{y}\right|^2+1\right)^{\frac{n+3-a}{2}}} dz \\
&= Cy^{-a} \int_{B(0,\frac{r}{2y})} \frac{|\bar{z}|}{(|\bar{z}|^2+1)^{\frac{n+3-a}{2}}} d\bar{z} \\
&\leq Cy^{-a}.
\end{aligned}
$$

Estimemos III,

$$\begin{aligned} III &= C\int_{B^c(0,\frac{r}{2})} \frac{y^{-a}}{(|\bar{z}|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}d\bar{z} \\ &\leq Cy^{-a}\int_{B^c(0,\frac{r}{2})} |\bar{z}|^{-n-1+a}d\bar{z} \\ &= Cy^{-a}. \end{aligned}$$

Por último acotemos IV

$$\begin{aligned} IV &= C\int_{B^c(0,\frac{r}{2})} \frac{y^{2-a}}{(|\bar{z}|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}d\bar{z} \\ &\leq CR^{2-a}\int_{B^c(0,\frac{r}{2})} |z|^{-n-3+a}d\bar{z} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Si $a \leq 0$ entonces $\beta > 1$, y así f es Lipschitz en $B = \bigcup_{x\in A} B(x, \frac{r}{2})$ cuya clausura está contenida en D. Luego, con un razonamiento similar al del caso anterior podemos ver que $\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right| \leq Cy^{-a} + C$. Así vale la acotación puntual que queríamos probar para $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ y por lo tanto esta función resulta estar en $L^2(A \times (0, R), y^a dX)$. De este modo queda demostrada la Proposición. □

Corolario 5.2.9. *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean f y u como en la Proposición 5.2.8. Si*

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y > 0 \\ u(x,-y) & y < 0, \end{cases}$$

entonces $v \in H^1(A \times (-R, R), |y|^a dX)$.

Demostración. La tesis del corolario es consecuencia directa del Lema 5.2.6 y la Proposición 5.2.8. □

5.3. Regularidad Hölder de soluciones de ecuaciones elípticas degeneradas

Un operador de segundo orden L sobre funciones en un dominio Ω de $\mathbb{R}^k$ está en forma de divergencia, si su acción en una función u se escribe

$$Lu = -\text{div}(A\text{grad } u) = -\sum_{ij=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

con $A(z) = a_{ij}(z)$. El operador L es elíptico si $\lambda|\xi|^2 \leq \xi^t A(z)\xi \leq \Lambda|\xi|^2$ para todo z y ξ en $\mathbb{R}^n$, donde $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Asumiendo la hipótesis adicional de que los coeficientes a_{ij} son medibles y acotados, para este tipo de operadores E. De Giorgi y J. Nash probaron que soluciones débiles de la ecuación $Lu = 0$ resultan ser localmente Hölder continuas, con exponente Hölder que no depende de la solución u. Posteriormente, J. Moser prueba la desigualdad de Harnack para dichas soluciones y, como consecuencia, también la regularidad Hölder.

E. Fabes, C. Kenig y R. Serapioni prueban en [24] que el mismo resultado que demostró Moser vale si se considera la matriz $A(z)$ elíptica degenerada, es decir si existen constantes $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ tales que

$$\lambda w(z)|\xi|^2 \leq \xi^t A(z)\xi \leq \Lambda w(z)|\xi|^2$$

para todo $z \in \Omega$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^k$, donde w es un peso de Muckenhoupt de $A_2(\mathbb{R}^k)$. En este caso se dice que el operador L es elíptico degenerado.

En esta sección daremos primero la definición de solución débil para la ecuación $Lu = 0$ donde L es un operador elíptico degenerado con un peso w que está en la clase de Muckenhoupt $A_2(\mathbb{R}^k)$. Teniendo en cuenta que en la Sección 5.2 vimos que si $w \in A_2(\mathbb{R}^k)$ entonces toda función de $H^1(\Omega, wdx)$ y su gradiente están en $L^1_{loc}(\Omega)$, el espacio natural para definir dichas soluciones será $H^1(\Omega, wdx)$.

Para nuestras aplicaciones posteriores enunciaremos el resultado de Fabes, Kenig y Serapioni de regularidad Hölder para soluciones de $Lu = 0$.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^k$. Una función $u \in H^1_{loc}(\Omega, wdx)$ es solución débil de la ecuación div$(A(x)$grad $u) = 0$ si cumple que

$$\int_\Omega \sum_{ij=1}^{k} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = 0$$

para toda función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Notemos que en la igualdad anterior la integral está bien definida ya que, como vimos en el Lema 5.2.1, el gradiente débil de u, grad u, está en $L^1_{loc}(\Omega)$.

Para probar la desigualdad de Harnack y posterior regularidad Hölder para soluciones de $Lu = 0$, Fabes, Kenig y Serapioni [24] se basaron en el método de iteración de Moser. Las desigualdades de Sobolev con pesos como así también desigualdades de Poincaré con pesos fueron probadas en [24]. Una condición suficiente para que estos resultados se cumplan es la hipótesis $w \in A_2(\mathbb{R}^k)$.

Teorema 5.3.1. a) *Sea $u \geq 0$ una función en $H^1_{loc}(\Omega, wdx)$ solución débil de la ecuación* $\operatorname{div}(A(x)\text{grad } u) = 0$ *en Ω. Entonces existe una constante C tal que la desigualdad de Harnack*

$$\sup_B u \leq C \inf_B u$$

vale para toda bola B tal que $2B$ está contenida en Ω.

b) *Si $u \in H^1_{loc}(\Omega, wdx)$ es solución débil de* $\operatorname{div}(A(x)\text{grad } u) = 0$ *en Ω entonces u es localmente Hölder α en Ω para algún $\alpha > 0$.*

5.4. Fórmula de valor medio para soluciones de div$(|y|^a$grad $v) = 0$ en el hiperplano $\{y = 0\}$

Esta sección contiene dos resultados. El primero de ellos es una fórmula de valor medio suave para soluciones débiles de $\operatorname{div}(|y|^a \text{grad } v) = 0$ en puntos del hiperplano $\{y = 0\}$. El segundo consiste en aplicar el primero al caso particular de soluciones que se obtienen por convolución con núcleos de tipo Poisson P_y^a con adecuadas funciones definidas en $\mathbb{R}^n$. Este último resultado será de suma importancia en el capítulo siguiente para demostrar una fórmula de valor medio para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$.

La idea de la demostración del primer resultado es similar a otras pruebas para obtener fórmulas de valor medio, por ejemplo para funciones armónicas y temperaturas, ver [22], aunque nosotros partiremos de la formulación débil del problema y por lo tanto no es necesario suponer previamente regularidad de la solución v. Denotaremos las variables de $\mathbb{R}^{n+1}$ con mayúsculas $X = (x, y)$, $Z = (z, y)$ y $\bar{X} = (x, 0)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. La función $\delta(x)$ denotará la distancia de x al borde de D.

TEOREMA 5.4.1. *Sea v solución débil del problema* $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$ *en* $\Omega = D \times \mathbb{R}$, *donde D es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $\varphi(X) = \eta(|X|)$, $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ soportada en el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ y tal que $\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(X)|y|^a dX = 1$. Si $x \in D$ y $0 < r < \delta(x)$, entonces*

$$v(x,0) = \iint_\Omega \varphi_r(x - z, -y)v(z,y)|y|^a dzdy$$

donde

$$\varphi_r(X) = \frac{1}{r^{n+1+a}} \varphi\left(\frac{X}{r}\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \int_0^\infty \rho\eta(\rho)d\rho$ y $\zeta(t) = \int_0^t \rho\eta(\rho)d\rho - A$. Notemos que $\zeta(t) \equiv 0$ para $t \geq \frac{3}{4}$ y $\zeta(t) \equiv -A$ para $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$. Entonces, la función $\psi(X) = \zeta(|X|)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ y tiene soporte compacto en la bola unitaria $S((0,0),1)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Es fácil ver que grad $\psi(X) = \varphi(X)X = \eta(|X|)X$. Tomemos ahora $x \in D$ y $0 < r < \delta(x)$. Sea $\varphi_r(Z) = r^{-n-1-a}\varphi(r^{-1}Z)$, y definamos

$$\Phi_x(r) = \iint_\Omega \varphi_r(\bar{X} - Z)v(Z)|y|^a dZ,$$

donde v es solución débil de $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$ en Ω. Probaremos que la función de r $\Phi_x(r)$ es constante y que además $\lim_{r \to 0} \Phi_x(r) = v(\bar{X})$. Del Teorema 5.3.1, tenemos que v es Hölder continua sobre cada compacto contenido en Ω. Luego, la convergencia $\Phi_x(r) \to v(\bar{X}) = v(x,0)$ cuando $r \to 0$, se sigue del hecho que

$$\iint \varphi_r(Z)|y|^a dZ = \frac{1}{r^{a+1+n}} \iint \varphi\left(\frac{z}{r}, \frac{y}{r}\right)|y|^a dzdy = 1.$$

Como queremos probar que $\Phi_x(r)$ es constante como función de r calculemos su derivada con respecto a r para x fijo. Notemos primero que

$$\Phi_x(r) = \iint_{S((0,0),1)} \varphi(Z)v(\bar{X} - rZ)|y|^a dzdy.$$

Ya que grad $v \in L^2(\Omega', |y|^a dX)$ para todo Ω' con clausura compacta en Ω, tenemos que

$$\frac{d}{dr}\Phi_x(r) = -\iint_{S((0,0),1)} \varphi(Z) \operatorname{grad} v(\bar{X} - rZ) \cdot Z|y|^a dZ$$

$$= -\iint_{S((0,0),1)} \text{grad } v(\bar{X} - rZ) \cdot \text{grad } \psi(Z)|y|^a dZ$$
$$= -\frac{1}{r^{a+1+n}} \iint_{\Omega} \text{grad } v(Z) \cdot \text{grad } \psi \left(\frac{\bar{X} - Z}{r}\right) |y|^a dZ$$
$$= \iint_{\Omega} \text{grad } v(Z) \cdot \text{grad } \left[\frac{1}{r^{n+a}} \psi \left(\frac{\bar{X} - Z}{r}\right)\right] |y|^a dZ.$$

Ya que $\frac{1}{r^{n+a}}\psi\left(\frac{\bar{X}-Z}{r}\right)$, como función de Z, es una función de prueba con soporte contenido en Ω y además v resuelve débilmente div$(|y|^a$grad $v) = 0$ en Ω, entonces $\frac{d}{dr}\Phi_x(r) = 0$ para todo $0 < r < \delta(x)$. Como por otra parte $\lim\limits_{r\to 0} \Phi_x(r) = v(\bar{X})$, tenemos que

$$v(\bar{X}) = \iint \varphi_r(\bar{X} - Z)v(Z)|y|^a dZ.$$

□

A continuación enunciamos y demostramos el segundo teorema de esta sección.

Teorema 5.4.2. *Sea D un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea f tal que* $\int \frac{|f(x)|}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}dx < \infty$ *y* $u(x, y) = \left(P_y^a * f\right)(x) \in H^1(A \times (0, R), y^a dX)$ *para todo A abierto con clausura compacta contenida en D y todo R positivo. Si*

$$\lim_{y\to 0^+} y^a \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\varphi(x)dx = 0 \tag{5.4.1}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ *entonces*

a) *la función*

$$v(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{en } D \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, -y) & \text{en } D \times \mathbb{R}^- \end{cases}$$

está en el espacio $H^1_{loc}(D \times \mathbb{R}, |y|^a dX)$ *y resuelve débilmente* div$(|y|^a$grad $v) = 0$ *en $D \times \mathbb{R}$.*

b) *Para la función v del ítem a) vale la fórmula de valor medio del Teorema 5.4.1 en puntos $(x, 0)$, con $x \in D$.*

Para citas posteriores diremos que una función f definida en $\mathbb{R}^n$ satisface la propiedad M_D^a, o brevemente $f \in \mathrm{M}_D^a$, si satisface las hipótesis del Teorema 5.4.2. Es decir, $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}dx < \infty$ y $u(x, y) = \left(P_y^a * f\right)(x) \in H^1(A \times (0, R), y^a dX)$ para todo A abierto con clausura compacta contenida en D y todo R positivo.

Demostración. Por el Teorema 5.4.1 sólo es necesario demostrar el ítem *a)*. Del Lema 5.2.6 tenemos que $v \in H^1_{loc}(D\times\mathbb{R}, |y|^a)$. Probemos ahora que v resuelve débilmente $\mathrm{div}(|y|^a \mathrm{grad}\ v) = 0$ en $D\times\mathbb{R}$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(D\times\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathrm{sop}\varphi} \mathrm{grad}\ v(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)|y|^a dX \\
&= \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{|y|\geq\epsilon\}} \mathrm{grad}\ v(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)|y|^a dX \\
&\quad + \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{|y|<\epsilon\}} \mathrm{grad}\ v(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)|y|^a dX \\
&= \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{y\geq\epsilon\}} \mathrm{grad}\ u(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)y^a dX \\
&\quad + \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{y\leq-\epsilon\}} \mathrm{grad}\ (u(x,-y))\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)(-y)^a dX \\
&\quad + \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{|y|<\epsilon\}} \mathrm{grad}\ v(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)|y|^a dX \\
&= \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{y\geq\epsilon\}} \mathrm{grad}\ u(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)y^a dX \\
&\quad + \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{y\geq\epsilon\}} \mathrm{grad}\ u(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,-y)y^a dX \\
&\quad + \iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{|y|<\epsilon\}} \mathrm{grad}\ v(x,y)\mathrm{grad}\ \varphi(x,y)|y|^a dX \\
&= I(\epsilon) + II(\epsilon) + III(\epsilon).
\end{aligned}$$

Luego, para demostrar el lema nos basta ver que $I(\epsilon)$, $II(\epsilon)$, $III(\epsilon)$ tienden a 0 cuando ϵ tiende a cero. El término $III(\epsilon)$ tiende a cero cuando ϵ tiende a cero ya que $\mathrm{grad}\ v(x,y)|y|^a \in L^2(\mathrm{sop}\varphi)$. Veamos que $I(\epsilon)$ tiende a cero. Ya que para todo $\epsilon > 0$, la función $u = P^a_y * f$ es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}^n\times(\epsilon,\infty)$ y además $\mathrm{div}(y^a \mathrm{grad}\ u) = 0$ en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|I(\epsilon)| = \Bigg| &\iint_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{y\geq\epsilon\}} \mathrm{div}\left(y^a \mathrm{grad}\ u(x,y)\right)\varphi(x,y)dX \\
&- \int_{\mathrm{sop}\varphi\cap\{y=\epsilon\}} \varphi(x,\epsilon)\epsilon^a \mathrm{grad}\ u(x,\epsilon)\cdot(0,\dots,0,-1)d\sigma(X)\Bigg|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{\text{sop}\varphi\cap\{y=\epsilon\}} \varphi(x,\epsilon)\epsilon^a u_y(x,\epsilon) d\sigma(X) \right| \\
&= \left| \int_{\text{sop}\varphi\cap\{y=\epsilon\}} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \epsilon^a u_y(x,\epsilon) d\sigma(X) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\text{sop}\varphi\cap\{y=\epsilon\}} \left[\varphi(x,0) + \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \epsilon^a u_y(x,\epsilon) d\sigma(X) \right| \\
&\leq \left| \int_{\text{sop}\varphi\cap\{y=\epsilon\}} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \epsilon^a u_y(x,\epsilon) d\sigma(X) \right| \\
&\quad + \left| \int_{\text{sop}\varphi\cap\{y=\epsilon\}} \left[\varphi(x,0) + \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \epsilon^a u_y(x,\epsilon) d\sigma(X) \right|.
\end{aligned}
$$

Por (5.4.1) el segundo sumando tiende a cero cuando ϵ tiende a cero. Veamos ahora que el primer sumando tiende a cero cuando ϵ tiende a cero. Sea $\widetilde{R}$ tal que $\overline{D} \subset B(0, \frac{\widetilde{R}}{2})$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\int_{\text{sop}\varphi\cap\{y=\epsilon\}} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \epsilon^a u_y(x,\epsilon) d\sigma(X) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \left[\epsilon^a \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z,\epsilon) f(z) dz\right] dx \\
&= \epsilon^a \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z,\epsilon) dx\right] f(z) dz \\
&= \epsilon^a \int_{B(0,\widetilde{R})} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z,\epsilon) dx\right] f(z) dz \\
&\quad + \epsilon^a \int_{B^c(0,\widetilde{R})} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z,\epsilon) dx\right] f(z) dz \\
&= i(\epsilon) + ii(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Puesto que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y por la homogeneidad de $\frac{\partial P_y^a}{\partial y}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&|i(\epsilon)| \\
&= \left| \frac{\epsilon^a}{\epsilon^{n+1}} \int_{B(0,\widetilde{R})} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon\right] \frac{\partial P_y^a}{\partial y}\left(\frac{x-z}{\epsilon}, 1\right) dx\right] f(z) dz \right| \\
&= \left| \epsilon^{a-1} \int_{B(0,\widetilde{R})} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(z+\epsilon\bar{x},\epsilon) - \varphi(z+\epsilon\bar{x},0) - \varphi_y(z+\epsilon\bar{x},0)\epsilon\right] \frac{\partial P_y^a}{\partial y}\left(\bar{x},1\right) d\bar{x} f(z) dz \right|
\end{aligned}
$$

$$\leq \epsilon^{a-1} \int_{B(0,\widetilde{R})} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z+\epsilon\bar{x},\epsilon) - \varphi(z+\epsilon\bar{x},0) - \varphi_y(z+\epsilon\bar{x},0)\epsilon| \left| \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(\bar{x},1) \right| d\bar{x} |f(z)| dz$$
$$\leq \epsilon^{a-1} \int_{B(0,\widetilde{R})} \int_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_{yy}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \epsilon^2 \left| \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(\bar{x},1) \right| d\bar{x} |f(z)| dz$$
$$= \epsilon^{1+a} \|\varphi_{yy}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \left\| \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(\cdot,1) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(B(0,\widetilde{R}))}.$$

Luego, $i(\epsilon)$ tiende a cero cuando ϵ tiende a cero. Estimemos $ii(\epsilon)$. Cómo $\overline{\text{sop}\varphi} \subset \overline{D} \subset B(0,\widetilde{R})$ tenemos que existe una constante C tal que $|z| \leq C|x-z|$ para todo $x \in \text{sop}\varphi$ y $z \notin B(0,\widetilde{R})$. Luego,

$$|ii(\epsilon)|$$
$$= \left| \frac{\epsilon^a}{\epsilon^{n+1}} \int_{B^c(0,\widetilde{R})} \int_{\text{sop}\varphi} [\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon] \frac{\partial P_y^a}{\partial y} \left(\frac{x-z}{\epsilon}, 1 \right) |z|^{n+1-a} dx \frac{f(z)}{|z|^{n+1-a}} dz \right|$$
$$\leq C \int_{B^c(0,\widetilde{R})} \int_{\text{sop}\varphi} |\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon| \, G\left(\frac{x-z}{\epsilon} \right) dx \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1-a}} dz,$$

donde $G(z) = \left| \frac{\partial P_y^a}{\partial y} \left(\frac{x-z}{\epsilon}, 1 \right) \right| \left| \frac{x-z}{\epsilon} \right|^{n+1-a}$. Por el ítem d) de la Proposición 5.2.7 $G(\bar{z}) \leq C$ para todo $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, además f es tal que $\int_{B^c(0,\widetilde{R})} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1-a}} dz < \infty$, luego por el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} |ii(\epsilon)| \leq C \int_{B^c(0,\widetilde{R})} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\text{sop}\varphi} |\varphi(x,\epsilon) - \varphi(x,0) - \varphi_y(x,0)\epsilon| \, dx \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1-a}} dz$$
$$\leq C \int_{B^c(0,\widetilde{R})} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\text{sop}\varphi} \|\varphi_{yy}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \epsilon^2 dx \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1-a}} dz = 0.$$

Así $ii(\epsilon) \to 0$, y queda demostrado que $I(\epsilon) \to 0$ cuando ϵ tiende a cero. Que $II(\epsilon) \to 0$ se deduce de la convergencia a cero de $I(\epsilon)$ cambiando $\varphi(x,y)$ por $\widetilde{\varphi}(x,y) = \varphi(x,-y)$. $\square$

Notemos que la función v del teorema anterior se puede escribir de la forma $v(x,y) = (P_{|y|}^a * f)(x)$.

Capítulo 6

Fórmulas de valor medio para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$, $0 < s < 1$

Dedicaremos este capítulo a probar una fórmula de valor medio no local, suave, y con un núcleo explícito para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$. Antes formularemos, en el sentido de las distribuciones, con cierto detalle la teoría desarrollada por Caffarelli y Silvestre que permite ver al operador $(-\triangle)^s$ como un operador que aplica la condición de Dirichlet en una condición de Neumann de un problema elíptico degenerado en el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Esta teoría junto con la fórmula de valor medio para soluciones de $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$, obtenida en el capítulo anterior, nos posibilitarán luego probar las fórmulas de valor medio para soluciones de potencias fraccionarias del laplaciano.

En la Sección 6.1 presentaremos a modo de repaso tres formulaciones de la construcción de potencias fraccionarias del operador de Laplace. Luego, con más detalle precisaremos la formulación débil del laplaciano fraccionario, como derivada normal extendida, que es precisamente la formulación de Caffarelli y Silvestre de las potencias fraccionarias de $-\triangle$ escrita en términos de la teoría de distribuciones de Schwartz. Finalmente probaremos la desigualdad de Harnack para soluciones no negativas de $(-\triangle)^s f = 0$. Por último, en la Sección 6.2, demostraremos la fórmula de valor medio suave para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ que contiene el principal aporte original de este capítulo y que constituye el insumo esencial de los dos capítulos finales.

6.1. Potencias fraccionarias del operador $-\triangle$

Sea $0 < s < 1$, el operador $(-\triangle)^s$ puede ser definido de varias maneras. En el sentido Fourier por la acción del multiplicador $|\xi|^{2s}$, o puede ser expresado como una integral “super” singular. Existe otro modo de entender al laplaciano fraccionario: como un operador que manda la condición de Dirichlet en una condición de tipo Neumann para un problema de Dirichlet en el semiespacio superior. Esta última será fundamental para nuestros propósitos. Para $s \neq \frac{1}{2}$ fue introducida por Caffarelli y Silvestre en [10].

En esta sección describiremos brevemente las primeras dos definiciones y expondremos con detalle la tercer definición.

En el sentido de Fourier $(-\triangle)^s$ puede ser definido como el operador tal que

$$\mathcal{F}((-\triangle)^s\varphi)(\xi) = |\xi|^{2s}\hat{\varphi}(\xi)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Antitransformando, el operador $(-\triangle)^s$ es una integral "super" singular. Más precisamente, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el operador $(-\triangle)^s$ es el valor principal

$$(-\triangle)^s\varphi(x) = C_{n,s} v.p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{|x - z|^{n+2s}} dz,$$

donde $C_{n,s}$ es una constante que sólo depende de la dimensión y de s. Notar que cuando $0 < s < 1/2$ la función de z

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{|x - z|^{n+2s}}$$

es absolutamente integrable y no se necesita tomar valor principal. Cuando $1/2 \leq s < 1$ el operador $(-\triangle)^s$ se puede escribir como

$$(-\triangle)^s f(x) = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(z) + \nabla\varphi(x) \cdot (x - z)\mathcal{X}_{B(0,1)}(x - z)}{|x - z|^{n+2s}} dz.$$

Observemos que la expresión de $(-\triangle)^s$ dada por el valor principal se puede escribir como la convolución de una distribución $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con la función φ, donde T está definida como

$$\langle T, \psi \rangle = C_{n,s} v.p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{|x|^{n+2s}} dx,$$

con $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Cualquiera de esas fórmulas permite ver inmediatamente la naturaleza no local del operador. Esto quiere decir que, para saber cuanto vale $(-\triangle)^s f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, se necesita conocer la función f en todo el espacio $\mathbb{R}^n$, y no sólo en cualquier entorno de x, como sucede para operadores diferenciales con derivadas de orden entero.

Un modo más amplio de ver el operador $(-\triangle)^s$ es en el sentido de las distribuciones. Definamos primero el espacio $\mathcal{M}_s$ formado por todas las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $(1 + |x|^{n+2s})D^\gamma f(x)$ está acotada para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. La topología de $\mathcal{M}_s$ está dada por la familia de seminormas $\rho_m(\eta) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\gamma|\leq m} |(1+|x|^{n+2s})D^\gamma\eta(x)|$, que da a $\mathcal{M}_s$ una estructura de espacio de Frechet. A continuación veremos que la acción del operador $(-\triangle)^s$ sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tiene como imágenes funciones de $\mathcal{M}_s$. Además esta acción es continua. Este resultado está esencialmente contenido en la tesis de Luis Silvestre [33] y lo incluimos porque su demostración nos servirá para obtener en el sentido de las distribuciones una formulación débil del operador Dirichlet to Neumann.

Una herramienta de uso recurrente en esta sección será la desigualdad de Peetre. La enunciamos a continuación.

Desigualdad de Peetre: Sea $t \in \mathbb{R}$ y x y z vectores de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\left(\frac{1+|x|^2}{1+|z|^2}\right)^t \leq 2^{|t|}(1+|x-z|^2)^{|t|}.$$

Lema 6.1.1. *Sean $0 < s < 1$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

a) $(-\triangle)^s\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;

b) $(-\triangle)^s$ *conmuta con derivaciones, es decir* $(-\triangle)^s D^\gamma\varphi = D^\gamma(-\triangle)^s\varphi$ *para todo multiíndice* $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$;

c) $(-\triangle)^s\varphi \in \mathcal{M}_s$;

d) $(-\triangle)^s$ *es continuo como operador de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *en* $\mathcal{M}_s$;

e) $\int(-\triangle)^s\varphi(x)\psi(x)dx = \int \varphi(x)(-\triangle)^s\psi(x)dx$.

Demostración. Probemos primero los ítemes *a)* y *b)*. Como $\int |\xi|^{|\gamma|}|\xi|^{2s}\hat{\varphi}(\xi)d\xi < \infty$ para todo multiíndice $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ tenemos que $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\hat{\varphi}(\xi))(x) = (-\triangle)^s\varphi(x)$ es infinitamente diferenciable. Además

$$\begin{aligned} D^\gamma(-\triangle)^s\varphi(x) &= D^\gamma\left(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\hat{\varphi}(\xi))(x)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left((-2\pi i\xi)^\gamma|\xi|^{2s}\hat{\varphi}(\xi)\right)(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2s}(-2\pi i\xi)^\gamma\hat{\varphi}(\xi)\right)(x) \\ &= (-\triangle)^s\mathcal{F}^{-1}\left((-2\pi i\xi)^\gamma\hat{\varphi}(\xi)\right)(x) \\ &= (-\triangle)^s D^\gamma\varphi(x). \end{aligned}$$

Para demostrar el ítem *c)* necesitamos probar que para todo muntiíndice $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ se cumple que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^{n+2s})D^\gamma(-\triangle)^s\varphi(x)\right| \leq C_\gamma \tag{6.1.1}$$

para alguna constante C_γ. Por *b)* sólo necesitamos demostrar el caso $\gamma = (0,\dots,0)$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left|(1+|x|^{n+2s})(-\triangle)^s\varphi(x)\right| \\
&= C_{n,s}\left|(1+|x|^{n+2s})\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x)}{|x-z|^{n+2s}}dz\right| \\
&\leq C_{n,s}(1+|x|^{n+2s})\int_{B(x,1)}\frac{|\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)|}{|x-z|^{n+2s}}dz \\
&\quad + C_{n,s}(1+|x|^{n+2s})\int_{B^c(x,1)}\frac{|\varphi(x)|}{|x-z|^{n+2s}}dz \\
&\quad + C_{n,s}(1+|x|^{n+2s})\int_{B^c(x,1)}\frac{|\varphi(z)|}{|x-z|^{n+2s}}dz \\
&= A_1(x)+A_2(x)+A_3(x).
\end{aligned}$$

Probaremos ahora que A_1, A_2 y A_3 están uniformemente acotados.

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= C_{n,s}(1+|x|^{n+2s})\int_{B(x,1)}\frac{|-(z-x)^tH\varphi(\xi_{xz})(z-x)|}{|x-z|^{n+2s}}dz \\
&= C_{n,s}\int_{B(x,1)}\frac{(1+|x|^{n+2s})}{(1+|\xi_{xz}|^{n+2s})}\frac{(1+|\xi_{xz}|^{n+2s})\,|-(z-x)^tH\varphi(\xi_{xz})(z-x)|}{|x-z|^{n+2s}}dz,
\end{aligned}$$

donde ξ_{xz} está en el segmento que une x con z. Como $\xi_{xz} \in B(x,1)$ entonces el factor $(1+|x|^{n+2s})(1+|\xi_{xz}|^{n+2s})^{-1}$ está acotado por una constante C que no depende de x ni z, luego

$$\begin{aligned}
A_1(x) &\leq C\int_{B(x,1)}(1+|\xi_{xz}|^{n+2s})\sup_{ij=1,\dots,n}\left|\frac{\partial^2\varphi(\xi_{xz})}{\partial x_i\partial x_j}\right|\frac{|x-z|^2}{|x-z|^{n+2s}}dz \\
&\leq C\sup_{ij=1,\dots,n}\left\|(1+|\cdot|^{n+2s})\frac{\partial^2\varphi(\cdot)}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B(x,1)}\frac{|x-z|^2}{|x-z|^{n+2s}}dz \\
&= C\sup_{ij=1,\dots,n}\left\|(1+|\cdot|^{n+2s})\frac{\partial^2\varphi(\cdot)}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B(0,1)}\frac{1}{|\bar{z}|^{n+2s-2}}d\bar{z}
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

$$= C \sup_{ij=1,\dots,n} \left\| (1+|\cdot|^{n+2s}) \frac{\partial^2 \varphi(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Acotemos ahora A_2. Como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_2(x) &= C_{n,s} \int_{B^c(x,1)} (1+|x|^{n+2s}) \frac{|\varphi(x)|}{|x-z|^{n+2s}} dz \\ &\leq C_{n,s} \left\| (1+|\cdot|^{n+2s})\varphi(\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(x,1)} \frac{1}{|x-z|^{n+2s}} dz \\ &= C_{n,s} \left\| (1+|\cdot|^{n+2s})\varphi(\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(0,1)} \frac{1}{|\bar{z}|^{n+2s}} d\bar{z} \\ &\leq C \left\| (1+|\cdot|^{n+2s})\varphi(\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Veamos por último que A_3 está uniformemente acotado. Aplicando la desigualdad de Peetre, tenemos que

$$\begin{aligned} A_3(x) &= C_{n,s}(1+|x|^{n+2s}) \int_{B^c(x,1)} \frac{|\varphi(z)|}{|x-z|^{n+2s}} dz \\ &= C_{n,s} \int_{B^c(x,1)} \frac{1+|x|^{n+2s}}{1+|x-z|^{n+2s}} (1+|x-z|^{n+2s}) \frac{|\varphi(z)|}{|x-z|^{n+2s}} dz \\ &\leq C \int_{B^c(x,1)} (1+|z|^{n+2s})(1+|x-z|^{n+2s}) \frac{|\varphi(z)|}{|x-z|^{n+2s}} dz \\ &= C \int_{B^c(x,1)} (1+|z|^{n+2s}) \, |\varphi(z)| \, \frac{1+|x-z|^{n+2s}}{|x-z|^{n+2s}} dz. \end{aligned}$$

Como $z \in B^c(x,1)$ entonces $(1+|x-z|^{n+2s})|x-z|^{-(n+2s)}$ está acotado por una constante que no depende de x ni z, luego

$$\begin{aligned} A_3(x) &\leq C \int_{B^c(x,1)} (1+|z|^{n+2s}) \, |\varphi(z)| \, dz \\ &= C \int_{B^c(x,1)} (1+|z|^{n+2s})^2 \, |\varphi(z)| \, \frac{1}{1+|z|^{n+2s}} dz \\ &\leq C \left\| (1+|\cdot|^{n+2s})^2 \varphi(\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(x,1)} \frac{1}{1+|z|^{n+2s}} dz \\ &\leq C \left\| (1+|\cdot|^{n+2s})^2 \varphi(\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

De las estimaciones de $A_1(x)$, $A_2(x)$ y $A_3(x)$ concluimos que vale (6.1.1).

Las estimaciones (6.1.2), (6.1.3) y (6.1.4) nos permiten probar también el ítem d). De hecho, si $\varphi_m \to 0$ cuando $m \to \infty$ en la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left||x|^k D^\gamma \varphi_m(x)\right|$ tiende a cero cuando m tiende a infinito para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, entonces $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^{n+2s})(-\triangle)^s D^\gamma \varphi_m(x)|$ tiende a cero cuando m tiende a infinito para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, lo que implica que $(-\triangle)^s \varphi_m \to 0$ en $\mathcal{M}_s$. Por último el ítem e sale como consecuancia de que la transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Un funcional lineal T con valores complejos, definido sobre $\mathcal{M}_s$ es continuo si y sólo si $\langle T, \psi_k\rangle \to 0$ cuando $k \to \infty$ para $\rho_m(\psi_k) \to 0$, $k \to \infty$ para cada m. El espacio dual $\mathcal{M}_s'$ es entonces un buen ambiente para definir el operador $(-\triangle)^s$. En efecto, dada $T \in \mathcal{M}_s'$ definimos $(-\triangle)^s T$ como la distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dada por $\langle (-\triangle)^s T, \varphi\rangle = \langle T, (-\triangle)^s \varphi\rangle$, con $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Del Lema 6.1.1 se deduce que $(-\triangle)^s T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. El espacio $\mathcal{M}_s'$ contiene en particular el espacio $\mathcal{E}'$ de las distribuciones de soporte compacto. Pero cuando estamos interesados en subespacios funcionales de $\mathcal{M}_s'$ es conveniente considerar como se hace en [33] un espacio de tipo L^1 pesado en el infinito por potencias de $|x|^{-n-2s}$. Precisamente

$$\mathcal{L}_s := L^1_{loc} \cap \mathcal{M}_s' = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+2s}} < \infty \right\}.$$

En este contexto la solución fundamental de $(-\triangle)^s$ tiene la extensión natural para $0 < s < 1$ del potencial de Newton.

Lema 6.1.2. *La solución fundamental del operador* $(-\triangle)^s$ *es la función* $\Gamma(x) = |x|^{-n+2s}$. *Es decir* $(-\triangle)^s \Gamma = \delta_0$ *en el sentido de las distribuciones de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

En la formulación Dirichlet to Neumann de Caffarelli y Silvestre [10] juega un papel muy importante la familia de núcleos P_y^a de Poisson, introducida en el capítulo anterior, si los miramos desde el análisis clásico, o de Cauchy desde el punto de vista probabilístico. Justamente esta familia vista desde los procesos estocásticos es la que pone en el centro de la escena a los procesos de Lévy no gaussianos.

En la siguiente proposición enunciamos dos propiedades que cumplen los núcleos P_y^a y que serán de mucha utilidad para probar la formulación Dirichlet to Neumann de

Caffarelli y Silvestre para el operador $(-\triangle)^s$, donde $1-a=2s$. Recordemos que

$$P_y^a(x) = C_{n,a}\frac{y^{1-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}.$$

Proposición 6.1.3. *El núcleo $P_y^a(x)$ satisface las siguientes propiedades*

a) *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $u(x,y) = (P_y^a * \varphi)(x)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ entonces $y^a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{M}_s$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$.*

b) *Si $f \in \mathcal{L}_s$ entonces la convolución $(P_y^a * f)(x)$ está bien definida para $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Más aún $\left(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * f\right)(x)$ define una distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para todo $y > 0$.*

Demostración. Veamos primero que vale a). Como $\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $y > 0$ entonces $y^a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ como función de la variable x. Luego, para probar que $y^a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{M}_s$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$ basta ver que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|x|^{n+2s})D_x^\gamma(y^a u_y(x,y))\right| \leq C_\gamma(y) \tag{6.1.5}$$

para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ y todo $y \in \mathbb{R}_+$.

Como $y^a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = y^a(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * \varphi)(x)$ entonces $D_x^\gamma(y^a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)) = y^a(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * D_x^\gamma\varphi)(x)$ para todo multiíndice γ. Probaremos entonces (6.1.5) sólo para el caso en que $\gamma = (0,\ldots,0)$.

Puesto que

$$\frac{\partial P_y^a(x)}{\partial y} = C_{n,a}\left((1-a)\frac{y^{-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} - (n+1-a)\frac{y^{2-a}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}\right),$$

y teniendo en cuenta que $\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(\cdot)$ es radial y $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial P_y^a(x)}{\partial y}dx = 0$ para todo y positivo, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|(1+|x|^{n+2s})y^a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right| \\
&= (1+|x|^{n+2s})y^a\left|\int\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)\varphi(z)dz\right| \\
&= (1+|x|^{n+2s})y^a\left|\int\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)(\varphi(z)-\varphi(x))dz\right| \\
&= (1+|x|^{n+2s})y^a\left|\int\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)(\varphi(z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x))dz\right| \\
&\leq (1+|x|^{n+2s})y^a\int\left|\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)\right|\left|\varphi(z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x))\right|dz
\end{aligned}$$

$$\leq (1+|x|^{n+2s})C_{n,a}|1-a| \int \frac{\left|\varphi(z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x))\right|}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}dz$$

$$+ (1+|x|^{n+2s})C_{n,a}(n+1-a)y^2 \int \frac{\left|\varphi(z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x))\right|}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+3-a}{2}}}dz$$

$$=: B_1(x)+B_2(x).$$

Teniendo en cuenta que $a = 1-2s$ los denominadores de los integrandos en cada una de las integrales anteriores son del orden de $\frac{1}{|x|^{n+2s}}$ y $\frac{1}{|x|^{n+2s+2}}$ en el infinito. Luego, razonando como lo hicimos en el Lema 6.1.1, para obtener las estimaciones (6.1.2), (6.1.3) y (6.1.4) podemos acotar uniformemente $B_1(x)$ y $B_2(x)$.

Probemos *b)*. Sea $f \in \mathcal{L}_s$. Aplicando la desigualdad de Peetre veremos que la convolución $(P_y^a * f)(x)$ está bien definida. Recordemos que $1-a = 2s$.

$$\begin{aligned}
\left|(P_y^a * f)(x)\right| &= \left|C_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y^{2s}}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} f(z)dz\right| \\
&\leq C_{n,a}\frac{1}{y^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{\left(\left|\frac{x-z}{y}\right|+1\right)^{\frac{n+2s}{2}}}dz \\
&= C_{n,a}\frac{1}{y^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(\left|\frac{z}{y}\right|^2+1\right)^{\frac{n+2s}{2}}}{\left(\left|\frac{x-z}{y}\right|^2+1\right)^{\frac{n+2s}{2}}} \frac{1}{\left(\left|\frac{z}{y}\right|^2+1\right)^{\frac{n+2s}{2}}}|f(z)|dz \\
&\leq C_{n,a}\frac{1}{y^n}C\left(\left|\frac{x}{y}\right|^2+1\right)^{\frac{n+2s}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{\left(\left|\frac{z}{y}\right|^2+1\right)^{\frac{n+2s}{2}}}dz \\
&\leq C_{n,a}\frac{1}{y^n}C\left(\left|\frac{x}{y}\right|^2+1\right)^{\frac{n+2s}{2}} C(y)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{\left(|z|^2+1\right)^{\frac{n+2s}{2}}}dz < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, $(P_y^a * f)(x,y)$ está bien definida para $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Veamos ahora que $\left(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * f\right)$ es una distribución de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para todo $y > 0$. Ya que $\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^{n+1}}\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x,1)$ es suficiente hacer sólo el caso $y = 1$. Recordando que $1-a = 2s$

tenemos que

$$\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x,1) = C_{n,a}\left(2s\frac{1}{(|x|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}} - (n+2s)\frac{1}{(|x|^2+1)^{\frac{n+2+2s}{2}}}\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(\cdot,1) * f\right)(x)\\
&= C_{n,a}\left(\left(2s\frac{1}{(|\cdot|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}} - (n+2s)\frac{1}{(|\cdot|^2+1)^{\frac{n+2+2s}{2}}}\right) * f\right)(x)\\
&= C_{n,a}2s\left(\frac{1}{(|\cdot|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}} * f\right)(x) - C_{n,a}(n+2s)\left(\frac{1}{(|\cdot|^2+1)^{\frac{n+2+2s}{2}}} * f\right)(x).
\end{aligned}$$

Veremos solamente que $(|x|^2+1)^{-\frac{n+2s}{2}} * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, el otro caso sale de forma análoga. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por la desigualdad de Peetre

$$\begin{aligned}
&\left|\int \left(\frac{1}{(|\cdot|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}} * f\right)(x)\varphi(x)dx\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x-z|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}} f(z)dz\varphi(x)dx\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|z|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}}{(|x-z|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}}\frac{1}{(|z|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}} f(z)dz\varphi(x)dx\right|\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{(|z|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}}dz\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n+2s}{2}}|\varphi(x)|\,dx\\
&= C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{(|z|^2+1)^{\frac{n+2s}{2}}}dz\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^{n+2s}|\varphi(x)|\,\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}dx\\
&\le C\left\|\left(1+|\cdot|^2\right)^{\frac{n+2s}{2}}\varphi(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}dx\\
&= C\left\|\left(1+|\cdot|^2\right)^{\frac{n+2s}{2}}\varphi(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Esta estimación muestra que la integral de $(|x|^2+1)^{-\frac{n+2s}{2}} * f$ contra una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está bien definida y además es continua como función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{R}$, como además la integral es una operación lineal tenemos que $(|x|^2+1)^{-\frac{n+2s}{2}} * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

El descubrimiento clave de Caffarelli y Silvestre es que aunque s no sea igual a $1/2$, lo mismo el operador $(-\triangle)^s$ puede verse desde una perspectiva Dirichlet to Neumann, que involucra por un lado una generalización del operador de Laplace en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y una redefinición de la condición de Neumann por otro. A continuación precisaremos esto para un dato φ en la clase de funciones de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Analicemos formalmente el siguiente problema de Dirichlet con dato de borde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Si se considera el operador $\mathcal{T}$ definido de la forma $(\mathcal{T}\varphi)(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$, ya que $-u_y$ resuelve también el problema anterior, se tiene que

$$\mathcal{T}(\mathcal{T}(\varphi))(x) = \mathcal{T}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x) = -(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0)) = -\triangle_x u(x,0) = -\triangle_x \varphi(x).$$

Luego, $\mathcal{T} = (-\triangle)^{1/2}$, y esto muestra que el operador $(-\triangle)^{1/2}$ es el operador que manda la condición de Dirichlet en una condición de Neumann para el problema considerado anteriormente.

Para ilustrar la generalización de Caffarelli y Silvestre consideramos primero el siguiente problema de Dirichlet en el semiespacio superior

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \operatorname{grad} u(x,y)) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.1.6}$$

donde $a \in (-1,1)$.

Para la solución $u(x,y)$ que se obtiene convolucionando el núcleo de tipo Poisson $P^a_y(x)$ con el dato de borde φ, vale la siguiente igualdad

$$\lim_{y\to 0^+} -y^a \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \widetilde{C}(-\triangle)^s \varphi(x) \tag{6.1.7}$$

donde s es tal que $1-a = 2s$ y $\widetilde{C} = \frac{C_{n,a}2s}{C_{n,s}}$, donde $C_{n,a}$ y $C_{n,s}$ son las constantes de las definiciones del núcleo P^a_y y $(-\triangle)^s$ como un valor principal. La ventaja de tener este resultado es que ahora aquellos problemas no locales, debido a la naturaleza no local del operador $(-\triangle)^s$, pueden analizarse localmente en una dimensión más y así aplicar las técnicas y resultados ya conocidos para el análisis de ecuaciones diferenciales locales aunque degeneradas.

El próximo lema es el que nos habilita a extender (6.1.7) a funciones de $\mathcal{L}_s$ puesto que probamos que para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el límite es en el sentido fuerte de $\mathcal{M}_s$.

LEMA 6.1.4. *Sea* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *y* $u(x,y) = (P_y^a * \varphi)(x)$, *entonces*

$$\lim_{y\to 0^+} -y^a \frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, y) = \widetilde{C}(-\triangle)^s \varphi \tag{6.1.8}$$

donde el límite se entiende en la topología de $\mathcal{M}_s$, *con* $\widetilde{C} = \frac{C_{n,a}2s}{C_{n,s}}$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que

$$\lim_{y\to 0^+} -y^a \frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, y) = \widetilde{C}(-\triangle)^s \varphi$$

en la topología de $\mathcal{M}_s$ necesitamos ver que para todo γ multiíndice se cumple que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|x|^{n+2s}) D^\gamma \left(-y^a \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \widetilde{C}(-\triangle)^s \varphi(x)\right)\right] \to 0$$

cuando y tiende a cero. Como $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * \varphi\right)(x)$ y el operador $(-\triangle)^s$ conmuta con las derivaciones tenemos que probar que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^{n+2s}) \left(-y^a \frac{\partial P_y^a}{\partial y} * D^\gamma \varphi(x) - \widetilde{C}(-\triangle)^s D^\gamma \varphi(x)\right)\right| \to 0$$

cuando y tiende a cero. Es suficiente entonces probar solamente el caso en que $\gamma = (0,\dots,0)$. Recordando que $1-a = 2s$, tenemos que

$$\frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x) = C_{n,a}\left(2s \frac{y^{2s-1}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} - (n+2s)\frac{y^{1+2s}}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+2s+2}{2}}}\right).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
-y^a \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -y^{1-2s}\left(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * \varphi\right)(x) \\
&= -y^{1-2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)\varphi(z)dz \\
&= -y^{1-2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial P_y^a}{\partial y}(x-z)(\varphi(z)-\varphi(x))dz \\
&= C_{n,a}2s \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}}dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- C_{n,a}(n+2s)y^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s+2}{2}}} dz \\
&=: A_y(x) + B_y(x).
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que la función $A_y(x) - \widetilde{C}(-\triangle)^s\varphi(x)$ tiende a cero cuando y tiende a cero, en la topología de $\mathcal{M}_s$.

$$
\begin{aligned}
&(1+|x|^{n+2s})(A_y(x) - \widetilde{C}(-\triangle)^s\varphi(x)) \\
&= (1+|x|^{n+2s}) \left[C_{n,a} 2s \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz - \widetilde{C}(-\triangle)^s\varphi(x) \right] \\
&= (1+|x|^{n+2s}) \left[C_{n,a} 2s \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz - \widetilde{C}(-\triangle)^s\varphi(x) \right] \\
&= (1+|x|^{n+2s}) C_{n,a} 2s \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)\mathcal{X}_{B(0,1)}(z-x)}{|x-z|^{n+2s}} dz \right] \\
&= C_{n,a} 2s \left[I_y(x) + II_y(x) + III_y(x) \right],
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
I_y(x) &= (1+|x|^{n+2s}) \left[\int_{B(x,1)} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz \right. \\
&\quad \left. - \int_{B(x,1)} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)}{|x-z|^{n+2s}} dz \right] \\
II_y(x) &= (1+|x|^{n+2s}) \left[\int_{B^c(x,1)} \frac{\varphi(x)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz - \int_{B^c(x,1)} \frac{\varphi(x)}{|x-z|^{n+2s}} dz \right] \\
III_y(x) &= (1+|x|^{n+2s}) \left[\int_{B^c(x,1)} \frac{-\varphi(z)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz - \int_{B^c(x,1)} \frac{-\varphi(z)}{|x-z|^{n+2s}} dz \right].
\end{aligned}
$$

Definamos

$$
G(x,y) = \left(\frac{1}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} - \frac{1}{|x|^{n+2s}} \right).
$$

Aplicando las mismas estrategias que usamos para probar las estimaciones (6.1.2),(6.1.3) y (6.1.4) del Lema 6.1.1 probaremos que cuando y tiende a cero, $I_y(x) \to 0$, $II_y(x) \to 0$ y $III_y(x) \to 0$ uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
|I_y(x)| &= (1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}} \left| \int_{B(x,1)} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz \right. \\
&\quad \left. - \int_{B(x,1)} \frac{\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x)}{|x-z|^{n+2s}} dz \right| \\
&= (1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}} \left| \int_{B(x,1)} (\varphi(x)-\varphi(z)+\nabla\varphi(x)\cdot(z-x))G(x-z,y)dz \right| \\
&= \left| \int_{B(x,1)} (1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}} (z-x)^t H\varphi(\xi_{xz})(z-x)G(x-z,y)dz \right| \\
&\leq \int_{B(x,1)} \frac{(1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{(1+|\xi_{xz}|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} (1+|\xi_{xz}|^2)^{\frac{n+2s}{2}} \left|(z-x)^t H\varphi(\xi_{xz})(z-x)\right| |G(x-z,y)|\, dz,
\end{aligned}$$

donde ξ_{xz} está en el segmento que une x con z. Luego, como $(1+|\cdot|^2)^{\frac{n+2s}{2}} \sup_{ij=1,\ldots,n} \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i x_j}(\cdot)\right|$ está acotada uniformemente, tenemos que

$$(6.1.9) \qquad |I_y(x)| \leq C \int_{B(x,1)} |x-z|^2 |G(x-z,y)|\, dz = C \int_{B(0,1)} |\bar{z}|^2 |G(\bar{z},y)|\, d\bar{z}$$

y él último término de la derecha tiende a cero cuando y tiende a cero, además la convergencia es uniforme en $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora

$$(6.1.10) \qquad |II_y(x)| \leq C \int_{B^c(x,1)} |G(x-z,y)|\, dy = C \int_{B^c(0,1)} |G(\bar{z},y)|\, d\bar{z} \to 0$$

cuando y tiende a cero.

Veamos ahora que $III_y(x) \to 0$ cuando y tiende a cero. Usando la desigualdad de Peetre, tenemos que

(6.1.11)

$$\begin{aligned}
|III_y(x)| &= (1+|x|^{n+2s}) \left| \int_{B^c(x,1)} \frac{-\varphi(z)}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} dz - \int_{B^c(x,1)} \frac{-\varphi(z)}{|x-z|^{n+2s}} dz \right| \\
&\leq \int_{B^c(x,1)} (1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}} |\varphi(z)|\, |G(x-z,y)|\, dz
\end{aligned}$$

$$= \int_{B^c(x,1)} \frac{(1+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{(1+|x-z|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} (1+|x-z|^2)^{\frac{n+2s}{2}} |\varphi(z)|\,|G(x-z,y)|\,dz$$

$$\leq C \int_{B^c(x,1)} (1+|z|^2)^{\frac{n+2s}{2}} |\varphi(z)|\,(1+|x-z|^2)^{\frac{n+2s}{2}} |G(x-z,y)| dz$$

$$\leq C(\varphi) \int_{B^c(x,1)} \frac{1}{(1+|z|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} (1+|x-z|^2)^{\frac{n+2s}{2}} |G(x-z,y)| dz$$

$$= C(\varphi) \int_{B^c(x,1)} \frac{1}{(1+|z|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} \left| \frac{(1+|x-z|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} - \frac{(1+|x-z|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{|x-z|^{n+2s}} \right| dz,$$

como $|x-z| \geq 1$, si viéramos que las funciones $g_y(R) = \frac{(1+|R|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{(|R|^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}}$ convergen uniformemente a $g(R) = \frac{(1+|R|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{|R|^{n+2s}}$ para R en $[1,\infty)$ cuando y tiende a cero, tendríamos que $|III_y(x)| \to 0$ uniformemente en x. Sea $y < 1$, como $R \geq 1$ tenemos que $(1+R^2)^{\frac{n+2s}{2}}(y^2+R^2)^{-\frac{n+2s}{2}} \leq C$, donde C no depende de y. Luego,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(1+R^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{(R^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} - \frac{(1+R^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{R^{n+2s}} \right| &= (1+R^2)^{\frac{n+2s}{2}} \left| \frac{R^{n+2s} - (R^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{(R^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}} R^{n+2s}} \right| \\
&= \frac{(1+R^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{(R^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}} \left| \frac{R^{n+2s} - (R^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{R^{n+2s}} \right| \\
&\leq C \left| \frac{R^{n+2s} - (R^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{R^{n+2s}} \right| \\
&= C \left| \frac{(R^2+0)^{\frac{n+2s}{2}} - (R^2+y^2)^{\frac{n+2s}{2}}}{R^{n+2s}} \right| \\
&= C \frac{\frac{n+2s}{2}(R^2+\xi_y)^{\frac{n+2s-2}{2}} y^2}{R^{n+2s}} \\
&\leq C \frac{y^2}{R^2} \leq C y^2 \to 0
\end{aligned}$$

cuando y se va a cero y la convergencia es uniforme en R.

De las estimaciones (6.1.9), (6.1.10) y (6.1.11) concluimos que $A_y(x) - C(-\triangle)^s\varphi(x)$ tiende a cero cuando y tiende a cero, en la topología de $\mathcal{M}_s$.

Razonando análogamente como lo hicimos para $A_y(x)$, se puede demostrar que $B_y(x)$ tiende a cero cuando y tiende a cero, en la topología de $\mathcal{M}_s$. □

Veamos ahora, que para $f \in \mathcal{L}_s$, $-y^a \frac{\partial y}{\partial y}(\cdot, y)$ tiende a un múltiplo de $(-\triangle)^s f$ en el sentido de las distribuciones en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Lema 6.1.5. *Sea $f \in \mathcal{L}_s$, $0 < s < 1$, y $u(x,y) = (P_y^a * f)(x)$, entonces para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\lim_{y\to 0}\langle -y^a \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi\rangle = \langle C(-\triangle)^s f, \varphi\rangle$$

Demostración. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\langle -y^a \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi\rangle = -y^a \langle \frac{\partial P_y^a}{\partial y} * f, \varphi\rangle = \langle f, -y^a \frac{\partial P_y^a}{\partial y} * \varphi\rangle = \langle f, -y^a \frac{\partial v}{\partial y}\rangle$$

donde $v(x,y) = (P_y^a * \varphi)(x)$. Del Lema 6.1.4 y el hecho que $f \in \mathcal{L}_s \subset \mathcal{M}_s'$, se tiene que

$$\lim_{y\to 0^+}\langle -y^a \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi\rangle = \lim_{y\to 0^+}\langle f, -y^a \frac{\partial v}{\partial y}\rangle = \langle f, \widetilde{C}(-\triangle)^s \varphi\rangle = \langle \widetilde{C}(-\triangle)^s f, \varphi\rangle.$$

□

Antes de terminar esta sección mencionamos que la técnica de reflexión de Caffarelli y Silvestre permite probar la desigualdad de Harnack para soluciones no negativas de la ecuación $(-\triangle)^s f = 0$.

Teorema 6.1.6. *Dado D un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in \mathrm{M}_D^{1-2s}$, no negativa que cumple que $(-\triangle)^s f = 0$ en D, y toda bola $B(x_0, r)$ tal que $B(x_0, 2r)$ está contenida en D, se cumple que*

$$\sup_{x\in B(x_0,r)} f(x) \le C \inf_{x\in B(x_0,r)} f(x).$$

Demostración. Sea $x \in D$ y $r > 0$ tal que $B(x, 2r) \subset D$. Por el Teorema 5.4.2 tenemos que $v(x,y) = (P_{|y|}^a * f)(x)$ resuelve débil $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$ en $D \times \mathbb{R}$. Y por el Teorema 5.3.1, como v es no negativa (ya que $f \ge 0$), tenemos que existe una constante $C > 0$ que sólo depende de la dimensión $n+1$ y del peso $w(x,y) = |y|^a$ tal que

$$\sup_{(x,y)\in B((x,0),r)} v(x,y) \le C \inf_{(x,y)\in B((x,0),r)} v(x,y).$$

Por el Teorema 5.3.1 sabemos también que v es Hölder continua en $D \times \mathbb{R}$. Entonces $f(x) = v(x,0)$ para todo $x \in D$. Luego,

$$\sup_{x\in B(x,r)} f(x) \le \sup_{(x,y)\in B((x,0),r)} v(x,y) \le C \inf_{(x,y)\in B((x,0),r)} v(x,y) \le C \inf_{x\in B(x,r)} f(x).$$

$\square$

6.2. Fórmula de valor medio suave para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$

Esta sección contiene el resultado principal de este capítulo. Una fórmula de valor medio para una función f y puntos de un dominio D en el cual se cumple que $(-\triangle)^s f = 0$, $0 < s < 1$. Obtendremos esta fórmula combinando la fórmula de valor medio para soluciones de $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$, $a = 1 - 2s$, en puntos de la forma $D \times \{0\}$ obtenida en la Sección 5.4 con la visión de Caffarelli y Silvestre del operador $(-\triangle)^s$ como un operador del tipo Dirichlet to Neumann.

Como ya mencionamos fórmulas de valor medio en este contexto se pueden encontrar en [29] y [33]. La que probamos aquí provee una forma explícita para el núcleo. Esta formulación será útil al momento de estimar el ∇f como lo veremos en el Capítulo 7.

En esta sección usaremos fuertemente los resultados de la Sección 6.1. Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$, tomemos $f \in \mathrm{M}_D^{1-2s}$ y tal que $(-\triangle)^s f = 0$ en D. Luego, si $u(x, y) = \left(P_y^a * f\right)(x)$, donde $P_y^a(x) = C_{n,a} y^{1-a} \left(|x|^2 + y^2\right)^{-\frac{n+1-a}{2}}$, entonces la función

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{en } D \times \mathbb{R}^+ \\ f(x) & \text{si } y = 0 \\ u(x,-y) & \text{en } D \times \mathbb{R}^- \end{cases}$$

es una solución débil de $\operatorname{div}(|y|^a \operatorname{grad} v) = 0$ en $D \times \mathbb{R}$. En particular, por el Teorema 5.3.1, v es localmente Hölder continua en $D \times \mathbb{R}$. El Teorema 5.4.1 nos garantiza que, para $0 < r < \delta(x)$ y $x \in D$,

$$f(x) = u(x,0) = v(x,0) = \iint \varphi_r(\bar{X} - Z) v(Z) |y|^a dZ \tag{6.2.1}$$

donde $\bar{X} = (x, 0)$ y $Z = (z, y)$. Por otro lado, las definiciones de v y u, nos dan la fórmula

$$v(Z) = v(z,y) = \left(P_{|y|}^a * f\right)(z). \tag{6.2.2}$$

Reemplazando (6.2.2) en (6.2.1) obtenemos el principal resultado de esta sección.

Teorema 6.2.1. *Sea $0 < s < 1$. Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $f \in \mathrm{M}_D^{1-2s}$ tal que $(-\triangle)^s f = 0$ en D. Entonces, para todo $x \in D$ y $0 < r < \delta(x)$ tenemos que $f(x) =$*

$(\Phi_r * f)(x)$, *donde* $\Phi_r(x) = r^{-n}\Phi\left(\frac{x}{r}\right)$,

$$\Phi(x) = \iint \varphi(z,-y) P^a_{|y|}(x-z)|y|^a dzdy,$$

$\varphi_r(x,y) = r^{-(n+1+a)}\varphi\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)$, *$\varphi$ es una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ radial, soportada en la bola unitaria de $\mathbb{R}^{n+1}$ y que cumple* $\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(x,y)|y|^a dxdy = 1$.

Demostración. Reemplazando (6.2.2) en (6.2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) = v(x,0) &= \iint \varphi_r(x-z,-y)v(z,y)\ |y|^a dzdy \\ &= \iint \varphi_r(x-z,y)(P^a_{|y|} * f)(z)|y|^a dzdy \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}}\int_{z\in\mathbb{R}^n} \varphi_r(x-z,-y)\left(\int_{\bar z\in\mathbb{R}^n} P^a_{|y|}(z-\bar z)f(\bar z)\ d\bar z\right)|y|^a dzdy \\ &= \int_{\bar z\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}}\int_{z\in\mathbb{R}^n} \varphi_r(x-z,-y)P^a_{|y|}(z-\bar z)|y|^a dzdy\right) f(\bar z)d\bar z \\ &= \int_{\bar z\in\mathbb{R}^n} \Phi_r(x,\bar z)f(\bar z)d\bar z, \end{aligned}$$

con $\Phi_r(x,\bar z) = \iint \varphi_r(x-z,-y)P^a_{|y|}(z-\bar z)\,|y|^a\,dzdy$. La última igualdad de la fórmula de arriba se sigue del hecho que $|f(\bar z)|(1+|\bar z|^2)^{-\frac{n+1-a}{2}}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ y $\Phi_r(x,\bar z) \le C(x,r)\,(1+|\bar z|^2)^{-\frac{n+1-a}{2}}$. Esta última desigualdad se cumple ya que

$$\Phi(x,\bar z) = \iint |\varphi(x-z,-y)|P^a_{|y|}(z-\bar z)|y|^a dzdy \le \frac{C}{(1+|\bar z|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$$

para alguna constante positiva C. De hecho, por un lado

$$\begin{aligned} &\iint |\varphi(x-z,-y)|P^a_{|y|}(z-\bar z)|y|^a dzdy \\ &\le \int_{-1}^{1} \|\varphi(x-\cdot,y)\|_{L^\infty}\left\|P^a_{|y|}(\cdot-\bar z)\right\|_{L^1}|y|^a\,dy \le C; \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

y por otro lado, para $|\bar z - x| > 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\iint \varphi(x-z,-y)|P^a_{|y|}(z-\bar z)|y|^a dzdy \\ &\le C\iint_{S((x,0),1)} \frac{|y|}{(y^2+|z-\bar z|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}dzdy \\ &\le \frac{C}{|x-\bar z|^{n+1-a}}. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Luego, $\Phi_r(x,\bar{z}) \leq \frac{C(r)}{(1+|x-\bar{z}|)^{n+1-a}} \leq \frac{C(x,r)}{(1+|\bar{z}|)^{n+1-a}}$. Y así $\int \Phi_r(x,\bar{z}) f(\bar{z}) d\bar{z}$ es absolutamente convergente. Ahora sólo nos queda probar que $\Phi_r(x,\bar{z}) = \frac{1}{r^n}\Phi(\frac{x-\bar{z}}{r})$ con $\Phi(x) = \iint \varphi(z,-y) P^a_{|y|}(x-z)|y|^a dz dy$. Calculemos entonces $\Phi(\frac{x-\bar{z}}{r})$, haciendo primero el cambio de variable en $\mathbb{R}^n$ $\nu = x - rz$, y luego en $\mathbb{R}$ con $t = ry$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{x-\bar{z}}{r}\right) &= \iint \varphi(z,-y) P^a_{|y|}\Big(\frac{x-\bar{z}-rz}{r}\Big)|y|^a dz dy \\
&= \iint \frac{1}{r^n}\varphi\Big(\frac{x-\nu}{r},-y\Big) P^a_{|y|}\Big(\frac{\nu-\bar{z}}{r}\Big)|y|^a d\nu dy \\
&= \iint \frac{1}{r^{n+1+a}}\varphi\Big(\frac{x-\nu}{r},-\frac{t}{r}\Big) P^a_{\left|\frac{t}{r}\right|}\Big(\frac{\nu-\bar{z}}{r}\Big)|t|^a d\nu dt \\
&= r^n \iint \varphi_r(x-\nu,-t) P^a_{|t|}(\nu-\bar{z})|t|^a d\nu dt \\
&= r^n \Phi_r(x,\bar{z}),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Capítulo 7

Estimaciones del gradiente de soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$

El objetivo de este capítulo es probar que, para funciones f que están en un espacio de Besov $B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, con $0 < \lambda < 1$ y $1 < p < \infty$, tales que $(-\triangle)^s f = 0$ en D, $0 < s < 1$, su gradiente pesado por una potencia de la función distancia al borde de D, $\left\|\delta^{1-\lambda}\nabla f\right\|_{L^p(D)}$, está acotado por la norma Besov $\|f\|_{B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$ para $1 < p < \infty$. Observemos que el carácter no local del operador $(-\triangle)^s$ otra vez se pone en evidencia, ahora en que la norma de Lebesgue en D está acotada por la norma de Besov en todo el espacio. En el caso elíptico local y el parabólico local, ([27] [15] [5]) la norma de Besov a la derecha se toma sólo sobre D. Este resultado será usado para probar la mejora de regularidad en la escala de espacios de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ que abordaremos en el Capítulo 8.

La fórmula de valor medio obtenida en el Capítulo 6 para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ junto con la estimación de DeVore y Sharpley de la maximal sharp de Calderón, serán de vital importancia para demostrar la estimación.

En la sección 7.1 probaremos algunas propiedades del núcleo del valor medio para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$. En la Sección 7.2 definimos la maximal de Calderón y enunciamos un resultado que la relaciona con los espacios de Besov, finalmente obtenemos la acotación de la norma L^p ponderada del gradiente.

7.1. Propiedades del núcleo del valor medio no local

Como vimos en el la Sección 6.2, si $f \in \mathrm{M}_D^{1-2s}$ es una función tal que $(-\triangle)^s f = 0$ en D, $0 < s < 1$, $x \in D$ y $0 < r < \delta(x)$, siendo $\delta(x)$ la distancia de x al borde de D, vale la fórmula de valor medio

$$f(x) = (\Phi_r * f)(x),$$

donde $\Phi_r(x) = \frac{1}{r^n}\Phi\left(\frac{x}{r}\right)$ y

$$\Phi(x) = \iint \varphi(z, -y) P_{|y|}^a(x - z)|y|^a dz dy \tag{7.1.1}$$

con $P^a_{|y|}(x) = C_{n,a}\frac{|y|^{1-a}}{(|x|^2+|y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$, $a = 1-2s$, y φ una función infinitamente diferenciable, radial, con soporte en la bola unitaria $S((0,0),1)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\iint \varphi(x,y)|y|^a = 1$.

En esta sección nos ocuparemos de probar varias propiedades del núcleo Φ de la fórmula de valor medio para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$.

Proposición 7.1.1. *La función Φ satisface las siguientes propiedades.*

a) $\Phi(x)$ *es radial;*

b) $(1+|x|)^{n+1-a}|\Phi(x)|$ *está acotada;*

c) $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)dx = 1$*;*

d) $\sup_{r>0}|(\Phi_r * f)(x)| \le cMf(x)$, *donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}^n$ y c es una constante que no depende de f ni x;*

e) si $\Psi^i(x) := \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x)$ *entonces* $|x|^{n+2-a}|\Psi^i(x)|$ *está acotada para* $|x| > 2$ *y para* $i = 1,\dots,n$*;*

f) $\Psi^i(0) = 0$, $\Psi^i \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\int \Psi^i(x)dx = 0$ *para todo* $i = 1,\dots,n$*;*

g) $|\nabla\Psi^i(x)|$ *está acotada en* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $i = 1,\dots,n$.

Demostración. Sea ρ una rotación de $\mathbb{R}^n$, entonces usando el carácter radial de φ y de P^a_y y luego cambiando las variables tenemos

$$\begin{aligned}\Phi(\rho x) &= \iint \varphi(z,-y)P^a_{|y|}(\rho x - z)|y|^a dzdy\\ &= \iint \varphi(\rho^{-1}z,-y)P^a_{|y|}(\rho^{-1}(\rho x - z))|y|^a dzdy\\ &= \iint \varphi(\rho^{-1}z,-y)P^a_{|y|}(x-\rho^{-1}z)|y|^a dzdy\\ &= \iint \varphi(\bar z,-y)P^a_{|y|}(x-\bar z)|y|^a d\bar z dy\\ &= \Phi(x),\end{aligned}$$

lo que prueba *a)*. El ítem *b)* sale de las desigualdades (6.2.3) y (6.2.4) de la demostración del Teorema 6.2.1. Para probar *c)* basta con tomar $f \equiv 1$ en el Teorema 6.2.1 y aplicarle la fórmula de valor medio a dicha función. De *a)* y *c)* la estimación del operador maximal es un resultado clásico (ver [**34**]). Veamos ahora que $|x|^{n+2-a}|\Psi^i(x)| \le C$ para $|x| > 2$, en efecto

$$
\begin{aligned}
|\Psi^i(x)| &= 2\left|\int_0^1 \int_{z\in B(0,1)} \varphi\,(z,y)\,\frac{\partial P_y^a}{\partial x_i}(x-z)y^a dzdy\right| \\
&\le C\int_0^1 \int_{z\in B(0,1)} |\varphi(z,y)|\frac{y}{|x-z|^{n+2-a}}dzdy \\
&\le \frac{C}{(|x|-1)^{n+2-a}}\int_0^1 \int_{z\in B(0,1)} |\varphi(z,y)|ydzdy \\
&\le \frac{C}{|x|^{n+2-a}}. \qquad (7.1.2)
\end{aligned}
$$

Veamos que vale *f)*. En efecto, para todo $x\in\mathbb{R}^n$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Psi^i(x) &= 2\int_0^1 \int_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(z,y)P_y^a(x-z)y^a dzdy \\
&\le 2\int_0^1 \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\cdot,y)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left\|P_y^a(x-\cdot)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} y^a dy \\
&\le C\int_0^1 y^a dy \le C.
\end{aligned}
$$

Luego, de la estimación anterior y (7.1.2), $\Psi^i\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y así el ítem *f)* se sigue del hecho que Φ es radial y de *c)*. Para probar *g)* procediendo como antes se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi^i}{\partial x_j}(x) &= 2\int_0^1 \int_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i x_j}(z,y)P_y^a(x-z)y^a dzdy \\
&\le 2\int_0^1 \left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i x_j}(\cdot,y)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left\|P_y^a(x-\cdot)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} y^a dy \\
&\le C\int_0^1 y^a dy \le C,
\end{aligned}
$$

para todo $j=1,\dots,n$. □

7.2. Estimaciones maximales de gradientes de soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en dominios abiertos

En esta sección nos dedicaremos a demostrar el resultado principal de este capítulo, la acotación de la norma $L^p(D)$, $1<p<\infty$, de los gradientes de las soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$, multiplicados por potencias de la función distancia al borde de D, por la norma Besov $B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ de f.

A. P. Calderón introdujo en [12] un operador maximal que es capaz de medir regularidad de funciones. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $\lambda > 0$ y un cubo Q de $\mathbb{R}^n$ se considera la oscilación de f alrededor de un polinomio $P_Q f$ que se obtiene proyectando (en $L^1(Q)$) f en el conjunto de polinomios definidos en Q de grado menor o igual que λ y, en vez de promediar como en BMO cuando no se espera regularidad de f se toma una media de tipo fraccionario

$$\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\lambda}{n}}} \int_Q |f(y) - P_Q f(y)| dy.$$

La maximal de Calderón de f es el supremo sobre todos los cubos Q de esas expresiones:

$$M^{\sharp,\lambda} f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\lambda}{n}}} \int_Q |f(y) - P_Q f(y)| dy. \tag{7.2.1}$$

Se puede demostrar que si f es suave dicho polinomio $P_Q f$ es el polinomio de Taylor $P_x(y) = \sum_{|\gamma|<\lambda} D^\gamma f(x) \frac{(y-x)^\gamma}{\gamma!}$.

Un resultado muy importante que relaciona los espacios de Besov con la maximal de Calderón es el siguiente.

Teorema 7.2.1. *Si* $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda < 1$ *y* $1 < p < \infty$, *entonces*

$$\left\| M^{\sharp,\lambda} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| f \right\|_{B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \tag{7.2.2}$$

donde la constante C *no depende de* f.

Ver [19] para una demostración de esta desigualdad.

El siguiente es el resultado principal de esta sección y es una consecuencia de la acotación puntual del gradiente de f en términos del operador maximal de Calderón.

Teorema 7.2.2. *Sea* D *un abierto de* $\mathbb{R}^n$, $0 < \lambda < 1$ *y* $1 < p < \infty$. *Sea* $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{M}_D^{1-2s}$ *solución de* $(-\triangle)^s f = 0$ *en* D, δ *la función distancia a la frontera de* D. *Entonces existe una constante* C *que sólo depende de* n, λ *y* Ψ *tal que*

A)

$$|\nabla f(x)| \leq C r^{\lambda-1} M^{\sharp,\lambda} f(x)$$

para todo $0 < r < \delta(x)$ *y* $x \in D$;

B)

$$\left(\int_D \left|\delta(x)^{1-\lambda}\nabla f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\, \|f\|_{B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}.$$

La diferencia principal del resultado en el Teorema 7.2.2 con el caso local en [**15**] y nuestra estimación no local está en el hecho de que nuestra fórmula de valor medio no está localizada en D y así el operador maximal de Calderón necesita ser evaluado en todo $\mathbb{R}^n$, no sólo en D.

Demostración. Probemos *A)*. Aplicando la fórmula de valor medio para f, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi_r * f\right)(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\Psi_r^i(z)dz\right| \\
&= \left|\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x-z) - f(x)\right)\Psi_r^i(z)dz\right| \\
&= \left|\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(z) - f(x)\right)\Psi_r^i(x-z)dz\right| \\
&\leq \frac{1}{r}\int\limits_{B(x,2r)} |f(z)-f(x)||\Psi_r^i(x-z)|dz + \frac{1}{r}\int\limits_{B^c(x,2r)} |f(z)-f(x)||\Psi_r^i(x-z)|dz \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Para estimar I, de *f)* en la Proposición 7.1.1 tenemos que $\Psi^i(0) = 0$, y de *g)* en la misma proposición obtenemos que

$$|\Psi_r^i(x)| = \left|\Psi_r^i(x) - \Psi_r^i(0)\right| \leq |x| \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\nabla\Psi_r^i(\xi)| \leq \frac{C}{r^{n+1}}|x|, \tag{7.2.3}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{r}\int_{B(x,2r)} |f(z)-f(x)||\Psi_r^i(x-z)|dz \\
&\leq \frac{C}{r^{n+2}}\int_{B(x,2r)} |f(z)-f(x)||x-z|dz \\
&= \frac{C}{r^{n+2}}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\left\{z:\, 2^{-j-1}\leq\frac{|x-z|}{2r}<2^{-j}\right\}} |f(z)-f(x)||x-z|dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{r^{n+2}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{-j+1}r)} |f(z)-f(x)| 2^{-j+1} r dz \\
&= \frac{C}{r^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j+1} \left(2^{-j+1}r\right)^{n+\lambda} \frac{1}{\left(2^{-j+1}r\right)^{n+\lambda}} \int_{B(x,2^{-j+1}r)} |f(z)-f(x)| dz \\
&\leq C r^{\lambda-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-j+1}\right)^{n+\lambda+1} M^{\sharp,\lambda} f(x) \\
&= C r^{\lambda-1} M^{\sharp,\lambda} f(x).
\end{aligned}$$

Ahora, de *e)* en la Proposición 7.1.1, obtenemos

$$\begin{aligned}
II &= \frac{1}{r} \int_{B^c(x,2r)} |f(z)-f(x)| |\Psi_r^i(x-z)| dz \\
&\leq \frac{C}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\left\{z:\, 2^j \leq \frac{|x-z|}{2r} < 2^{j+1}\right\}} |f(z)-f(x)| \frac{r^{2-a}}{|x-z|^{n+2-a}} dz \\
&\leq C r^{1-a} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\left\{z:\, 2^j \leq \frac{|x-z|}{2r} < 2^{j+1}\right\}} |f(z)-f(x)| \frac{1}{(2^{j+1}r)^{n+2-a}} dz \\
&\leq \frac{C}{r^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j+1}\right)^{-n-2+a} \frac{(r2^{j+2})^{n+\lambda}}{(r2^{j+2})^{n+\lambda}} \int_{B(x,2^{j+2}r)} |f(z)-f(x)| dz \\
&\leq C r^{\lambda-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j+2}\right)^{\lambda-2+a} \right) M^{\sharp,\lambda} f(x) \\
&= C r^{\lambda-1} M^{\sharp,\lambda} f(x),
\end{aligned}$$

lo que prueba *A)*.

Finalmente demostremos *B)*. De *A)* y el Teorema 7.2.1 podemos concluir que para $0 < \lambda < 1$ se tiene que que

$$\left\| \delta^{1-\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p(D)} \leq C \|f\|_{B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Capítulo 8

Regularidad Besov de soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$

En este capítulo nos proponemos extender a soluciones de potencias fraccionarias del laplaciano el resultado de mejora de regularidad en la escala de Besov que, para funciones armónicas, prueban S. Dahlke y R. DeVore en [15]. Las estimaciones del gradiente de f que probamos en el Capítulo 7 serán fundamentales para demostrar dicho resultado.

Este capítulo se divide en cuatro secciones. En la Sección 8.1 introducimos los dominios abiertos y acotados donde probaremos la mejora de regularidad en la escala de Besov. La Sección 8.2 contiene los enunciados de los resultados básicos de la caracterización de espacios de Lebesgue y de Besov usando wavelets de Daubechies de soporte compacto y suficientemente regulares. En la Sección 8.3 se presenta brevemente el problema de aproximación no lineal en L^p para expansiones en bases de wavelets en su relación con las normas Besov como indicadores de la velocidad de convergencia. Por último, en la Sección 8.4 demostramos el resultado principal del capítulo, la mejora de regularidad en la escala de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en dominios con frontera poco regular.

8.1. Descomposición diádica y dominios Lipschitz de $\mathbb{R}^n$

Sea $[0,1]^n$ el cubo unitario en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^n$. Un cubo diádico $I = I^j_{\overrightarrow{k}}$ se obtiene por un reescalamiento diádico de la forma 2^j y una traslación entera $\overrightarrow{k} \in \mathbb{Z}^n$. En otras palabras, un cubo diádico tiene la forma

$$I = I^j_{\overrightarrow{k}} = 2^{-j}[0,1]^n + 2^{-j}\overrightarrow{k}.$$

Es claro que cada cubo diádico I identifica unívocamente su escala 2^j y su posición $\overrightarrow{k}$. Para $N \in \mathbb{N}$ y $Q = [-N, N]^n$ definimos

$$Q(I) = 2^{-j}Q + 2^{-j}\overrightarrow{k}$$

donde $I = I^j_{\overrightarrow{k}}$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathcal{D}_j = \left\{ I = I^j_{\overrightarrow{k}} : \overrightarrow{k} \in \mathbb{Z}^n \right\}$ y $Q(\mathcal{D}_j) = \{Q(I) : I \in \mathcal{D}_j\}$. Los elementos de $\mathcal{D}_j$ se llaman cubos diádicos correspondientes al nivel

j. Luego $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_j$ es la familia de todos los cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$. En lo que sigue de esta monografía generalmente trabajaremos sólo con la familia de cubos diádicos cuyo volumen no exceda a uno, y la denotaremos con $\mathcal{D}^+$. En otras palabras

$$\mathcal{D}^+ = \bigcup_{j\geq 0} \mathcal{D}_j.$$

Lema 8.1.1. *El solapamiento de cada familia $Q(\mathcal{D}_j)$ es uniformemente acotado. Más precisamente, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$f_j(x) := \sum_{I\in\mathcal{D}_j} \mathcal{X}_{Q(I)}(x) \leq 4^n N^n.$$

Demostración. Notemos que como $f_j(2^i x) = f_{j+i}(x)$ basta probar la acotación para el caso $j = 0$. Ya que $I_0 = [0,1]^n$ y $Q(I_0) = [-N, N]^n$ tenemos que

$$Q(I_0) = \bigcup_{\overrightarrow{l}\in L} (I_0 + \overrightarrow{l}),$$

con $L = \{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n : -N \leq l_i < N\}$. Luego

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\mathcal{D}_0} \mathcal{X}_{Q(I)}(x) &= \sum_{\overrightarrow{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{X}_{Q(I_0)+\overrightarrow{k}}(x) \leq \sum_{\overrightarrow{k}\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{\overrightarrow{l}\in L} \mathcal{X}_{I_0+(\overrightarrow{k}+\overrightarrow{l})}(x) \right) \\ &= \sum_{\overrightarrow{l}\in L} \left(\sum_{\overrightarrow{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{X}_{I_0+(\overrightarrow{k}+\overrightarrow{l})}(x) \right) \leq 2^n \sharp(L) = 2^n (2N)^n = 4^n N^n.\end{aligned}$$

□

Sea D un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo. Para $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 0$ consideramos los cubos diádicos I de $\mathcal{D}_j$ tales que $Q(I)$ interseca a la clausura del dominio D. Precisamente

$$\Lambda_j := \left\{ I \in \mathcal{D}_j : Q(I) \cap \overline{D} \neq \emptyset \right\}.$$

En el siguiente lema daremos una acotación superior para la cantidad de elementos de Λ_j.

Lema 8.1.2. *Sea D un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\sharp(\Lambda_j) \leq C 2^{nj}$$

para alguna constante C que sólo depende de D y N.

Demostración. Como D es acotado existe un $R>0$ tal que $D\subset[-R,R]^n$. Luego, si $I\in\mathcal{D}_j$ entonces $I\subset Q(I)\subset[-R-N,R+N]^n$. Como para cada j fijo los cubos $I\in\mathcal{D}_j$ no se solapan tenemos que

$$[2(R+N)]^n=\mathrm{vol}\,[-R-N,R+N]^n\geq\sum_{I\in\mathcal{D}_j}\mathrm{vol}\,I=2^{-jn}\sharp(\Lambda_j).$$

□

En la demostración del Teorema 8.4.1 necesitaremos una estimación superior del número de elementos de las "capas de Whitney" cercanas a la frontera que necesariamente se relacionan con cierta regularidad del dominio D abierto y acotado. Sea d una métrica en $\mathbb{R}^n$. Para $j\in\mathbb{Z}$, $j\geq 0$ y $k=0,1,2,\ldots$ consideramos la familia de cubos diádicos de nivel j asociada a d, dada por

$$\Lambda_{j,k}^{(d)}=\left\{I\in\Lambda_j : k2^{-j}\leq\delta^d_{Q(I)}<(k+1)2^{-j}\right\},$$

donde $\delta^d_{Q(I)}=\inf\{d(x,z):x\in Q(I),z\notin D\}$.

Con el objeto de dar el marco más general posible para los dominios en los cuales probar la mejora de regularidad en la escala de Besov de soluciones de $(-\triangle)^s f=0$, introducimos la siguiente definición. Notemos que, como nuestro argumento no local no necesita usar el teorema de extensión de espacios de Besov, la regularidad en la frontera de nuestros dominios puede ser más general que Lipschitz, siempre que haya alguna estabilidad en el cardinal de las capas interiores de Whitney cercanas a la frontera.

Definición 8.1.3. *Sea D un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Sea $0<\beta\leq 1$. Decimos que D satisface la propiedad $\mathcal{R}_\beta$ o, brevemente, que $D\in\mathcal{R}_\beta$ si existen una métrica d en D equivalente a la euclídea y dos constantes positivas y finitas ν y C tales que*

$$\sharp(\Lambda_{j,k}^{(d)})\leq C2^{(n-\beta)j} \tag{8.1.1}$$

para todo $j\geq 0$ y k tal que $k2^{-j}\leq\nu$.

A continuación mostraremos que la propiedad $\mathcal{R}_1$ se satisface para dominios que son subgráficos de funciones Lipschitz. En lo que sigue denotaremos con B' a las bolas euclídeas de $\mathbb{R}^{n-1}$ y con B a las bolas euclídeas de $\mathbb{R}^n$.

Decimos que un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$ es un subgráfico Lipschitz, si existe una bola abierta $B' := B'(0, R)$ en $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que

$$D = \{x = (x', x_n) : x' \in B', 0 < x_n < \varphi(x')\}$$

donde $\varphi : \overline{B'} \to \mathbb{R}^+$ es una función de clase Lipschitz. Precisamente existe $M > 0$ tal que

$$|\varphi(x') - \varphi(z')| \leq M\, |x' - z'| \tag{8.1.2}$$

para todo x' y para todo z' en $\overline{B'}$.

Un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ de dimensión de Hausdorff $n-\beta$ se dice $(n-\beta)$-Ahlfors regular si para cada $x \in K$ se tiene que $\sigma(K \cap B(x,r)) \simeq r^{n-\beta}$ para r chico y donde σ es la medida de área $n-\beta$ dimensional. Más precisamente, si existen $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ y γ_3 tales que $\gamma_1 r^{n-\beta} \leq \sigma(K \cap B(x,r)) \leq \gamma_2 r^{n-\beta}$ para $0 < r \leq \gamma_3$. Una propiedad de estos conjuntos es que, para β fijo, la unión finita de conjuntos $(n-\beta)$-Ahlfors es también un conjunto $(n-\beta)$-Ahlfors.

Lema 8.1.4. *Sean K_1, K_2,..., K_m conjuntos $(n-\beta)$-Ahlfors. Entonces $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ es $(n-\beta)$-Ahlfors.*

Demostración. Como los conjuntos K_i son $(n-\beta)$-Ahlfors regulares, para $i = 1, 2, \ldots, m$ existen constantes γ_1^i, γ_2^i y γ_3^i tales que si $x \in K_i$

$$\gamma_1^i r^{n-\beta} \leq \sigma\left(B(x,r) \cap K_i\right) \leq \gamma_2^i r^{n-\beta},$$

para todo $0 < r \leq \gamma_3^i$. Sea $\gamma_1 = \text{mín}\{\gamma_1^i : i = 1, 2, \ldots, m\}$, $\gamma_2 = \text{máx}\{\gamma_2^i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ y $\gamma_3 = \text{mín}\{\frac{\gamma_3^i}{2} : i = 1, 2, \ldots, m\}$. Entonces, si $x \in K$, como este pertenece a algún K_{i_0} para $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tenemos que

$$\sigma\left(B(x,r) \cap K\right) \geq \sigma\left(B(x,r) \cap K_{i_0}\right) \geq \gamma_1^{i_0} r^{n-\beta} \geq \gamma_1 r^{n-\beta},$$

para todo $0 < r \leq \gamma_3$. Por otro lado, si $B(x,r) \cap K_j \neq \emptyset$ para $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tenemos que existe $z_j \in B(x,r) \cap K_j$ y tal que $B(x,r) \subset B(z_j, 2r)$. Sea $J \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $j \in J$ si y sólo si $B(x,r) \cap K_j \neq \emptyset$. Luego, para todo $0 < r \leq \gamma_3$,

$$\sigma\left(B(x,r) \cap K\right) \leq \sigma\left(\left(\bigcup_{j \in J} B(z_j, 2r)\right) \cap K\right) \leq \gamma_2 2^{n-\beta} r^{n-\beta} \sharp(J) \leq \gamma_2 2^{n-\beta} r^{n-\beta} m.$$

□

En la siguiente proposición demostraremos algunas propiedades de los dominios que son subgráficos Lipschitz, entre ellas la propiedad $\mathcal{R}_1$. Precisemos la notación antes de enunciar el resultado. Las letras x y z denotarán puntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $x=(x',x_n)$ y $z=(z',z_n)$ con $x',\ z'\in\mathbb{R}^{n-1}$, y $x_n,\ z_n\in\mathbb{R}$.

Proposición 8.1.5. *Sea D un subgráfico Lipschitz en $\mathbb{R}^n$, M la constante de la desigualdad (8.1.2) y R el radio de la bola B'. Sea $d=d(x,z):=M|x'-z'|+|x_n-z_n|$ y $D_\epsilon=\{x\in D: d(x,\partial D)>\epsilon\}$ para $0\leq\epsilon<R$, entonces*

i) D_ϵ es un subgráfico Lipschitz para todo $0\leq\epsilon<R$;

ii) $\sigma(\partial D)\geq\sigma(\partial D_\epsilon)$ para $0\leq\epsilon<R$;

iii) si $0\leq\epsilon_1<\epsilon_2<R$ entonces $d(\partial D_{\epsilon_1},\partial D_{\epsilon_2})\geq\epsilon_2-\epsilon_1$;

iv) ∂D_ϵ es $(n-1)$-Ahlfors regular para todo $0\leq\epsilon<R$, y con las mismas constantes, es decir

$$\gamma_1 r^{n-1}\leq\sigma\left(\partial D_\epsilon\cap B(x,r)\right)\leq\gamma_2 r^{n-1}$$

para todo $0<r\leq\gamma_3$, $x\in\partial D_\epsilon$ y todo $0\leq\epsilon<R$;

v) $D\in\mathcal{R}_1$. Más precisamente $\sharp(\Lambda^{(d)}_{j,k})\leq C2^{j(n-1)}$ para todo $k=0,1,\ldots$ y todo $j\geq0$.

Demostración. Probemos primero *i)*. Para ello nos bastaría demostrar que los conjuntos

$$D_\epsilon=\{x\in D: d(x,\partial D)>\epsilon\}$$

y

$$\widetilde{D}_\epsilon=\left\{x\in D: |x'|<R-\frac{\epsilon}{M},\ \epsilon<x_n<\varphi(x')-\epsilon\right\}$$

son iguales.

Observemos primero que $D_\epsilon\subset\widetilde{D}_\epsilon$, es decir veamos que si $x\in D$ y $d(x,\partial D)>\epsilon$ entonces $|x'|<R-\frac{\epsilon}{M}$ y $\epsilon<x_n<\varphi(x')-\epsilon$. Hagamos la prueba por el absurdo. Supongamos en primera instancia que $|x'|\geq R-\frac{\epsilon}{M}$, entonces existe $z'\in\overline{B'(0,R)}$ tal que $(z',x_n)\in\partial D$ y $|x'-z'|\leq\frac{\epsilon}{M}$, luego $d(x,(z',x_n))=M|x'-z'|\leq\epsilon$, lo que es un absurdo pues $d(x,\partial D)>\epsilon$. Asumamos ahora que $0<x_n\leq\epsilon$, entonces $d(x,(x',0))=|x_n|\leq\epsilon$, lo

cual nuevamente es un absurdo ya que $(x', 0) \in \partial D$. Si ahora suponemos que $\varphi(x') - \epsilon \leq x_n$ entonces $d(x, (x', \varphi(x'))) = |x_n - \varphi(x')| \leq \epsilon$, en este caso también tenemos un absurdo pues $(x', \varphi(x')) \in \partial D$.

Veamos ahora que $\widetilde{D}_\epsilon \subset D_\epsilon$, es decir si $|x'| < R - \frac{\epsilon}{M}$ y $\epsilon < x_n < \varphi(x') - \epsilon$ entonces $d(x, \partial D) > \epsilon$. Notemos primero que

$$\begin{aligned}
\partial D = &\{(x', x_n) : |x'| < R \text{ y } x_n = \varphi(x')\} \\
&\cup \{(x', x_n) : |x'| < R \text{ y } x_n = 0\} \\
&\cup \{(x', x_n) : |x| = R \text{ y } 0 < x_n < \varphi(x')\} \\
= &F_1 \cup F_2 \cup F_3,
\end{aligned}$$

donde las uniones son disjuntas. Sea $x = (x', x_n) \in \widetilde{D}_\epsilon$. Para demostrar que $d(x, \partial D) > \epsilon$ vamos a ver que $d(x, F_i) > \epsilon$ para $i = 1, 2, 3$. Hagamos primero el caso $i = 1$. Sea $w \in F_1$, es decir $w = (w', \varphi(w'))$ con $w' \in B'(0, R)$. Si $\varphi(x') = \varphi(w')$ entonces $d(x, w) = M|x' - w'| + |x_n - \varphi(w')| = M|x' - w'| + |x_n - \varphi(x')| \geq |x_n - \varphi(x')| > \epsilon$, si ahora $\varphi(x') \neq \varphi(w')$ entonces

$$\begin{aligned}
d(x, w) &= M|x' - z'| + |x_n - \varphi(w')| \\
&= M|\varphi(x') - \varphi(w')| \frac{|x' - w'|}{|\varphi(x') - \varphi(w')|} + |x_n - \varphi(w')| \\
&\geq |\varphi(x') - \varphi(w')| + |x_n - \varphi(w')| \\
&\geq |\varphi(x') - x_n| > \epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, $d(x, w) > \epsilon$ para todo $w \in F_1$. Como $\epsilon < x_n$ entonces para todo $w' \in B'(0, R)$ tenemos que $d(x, (w, 0)) = M|x' - w'| + x_n > \epsilon$, con lo cual $d(x, F_2) > \epsilon$. Por último, como $|x'| < R - \frac{\epsilon}{M}$, entonces para todo $w = (w', w_n) \in F_3$ tenemos que $d(x, w) = M|x' - w'| + |x_n - w_n| > \epsilon + |x_n - w_n| > \epsilon$, con lo cual $d(x, F_3) > \epsilon$. Así concluimos que $\widetilde{D}_\epsilon \subset D_\epsilon$. Por lo tanto vale *i)*.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\partial D_\epsilon = &\left\{x : |x'| < R - \frac{\epsilon}{M},\ x_n = \varphi(x') - \epsilon\right\} \\
&\cup \left\{x : |x'| < R - \frac{\epsilon}{M},\ x_n = \epsilon\right\}
\end{aligned}$$

$$\cup \left\{ x : |x'| = R - \frac{\epsilon}{M},\ \epsilon < x_n < \varphi(x') - \epsilon \right\}.$$

Luego $\sigma(\partial D) \geq \sigma(\partial D_\epsilon)$ para todo $0 \leq \epsilon < R$, y así probamos *ii)*.

Observemos ahora que se cumple *iii)*. Razonemos por el absurdo. Supongamos que $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < R$ y $d(\partial D_{\epsilon_2}, \partial D_{\epsilon_1}) < \epsilon_2 - \epsilon_1$, entonces existen $x \in \partial D_{\epsilon_2}$ y $w \in \partial D_{\epsilon_1}$ tales que $d(x,w) < \epsilon_2 - \epsilon_1$. Luego, para todo $z \in \partial D$ tenemos que $d(x,z) \leq d(x,w) + d(w,z) < \epsilon_2 - \epsilon_1 + d(w,z)$. Tomando ínfimo en $z \in \partial D$ vemos que $\epsilon_2 = d(x, \partial D) < \epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_1 = \epsilon_2$, lo cual es un absurdo.

Probemos *iv)*. Para demostrar este ítem usaremos que D_ϵ es un subgráfico Lipschitz. Sólo basta analizar el caso $\epsilon = 0$ (notar que $D_0 = D$). Recordemos que $D = \{(x', x_n) : |x'| < R,\ 0 < x_n < \varphi(x')\}$ y su borde

$$\begin{aligned}
\partial D &= \{(x', x_n) : |x'| < R \text{ y } x_n = \varphi(x')\} \\
&\quad \cup \{(x', x_n) : |x'| < R \text{ y } x_n = 0\} \\
&\quad \cup \{(x', x_n) : |x| = R \text{ y } 0 < x_n < \varphi(x')\} \\
&= F_1 \cup F_2 \cup F_3.
\end{aligned}$$

Veamos que F_i es $(n-1)$-Ahlfors para $i = 1, 2, 3$. Luego, por el Lema 8.1.4, ∂D es $(n-1)$-Ahlfors. Probemos primero que F_1 es $(n-1)$-Ahlfors. Dado $\rho > 0$ la medida $n-1$ dimensional de Lebesgue de una bola de radio ρ está dada por $\omega_{n-1}\rho^{n-1}$, donde ω_{n-1} es la medida $n-1$ dimensional de la bola unitaria $\mathbb{R}^{n-1}$. Resulta claro que dada una bola B' de radio $R > 0$ en $\mathbb{R}^{n-1}$ y dado $z' \in \overline{B'}$ se tiene que

$$\sigma(B' \cap B'(z', r)) \geq \frac{2}{2^n}\sigma(B'(z', r)) = 2^{1-n}\omega_{n-1}r^{n-1} = c_n r^{n-1} \tag{8.1.3}$$

si $0 < r < R$. Como

$$|F_1 \cap B(z, r)| = \int_{B'(z',r)\cap B'(0,R)} \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}\, dx',$$

tenemos que

$$|F_1 \cap B(z, r)| \geq \int_{B'(z',r)\cap B'(0,R)} 1\, dx' = \sigma(B'(z', r) \cap B'(0, R)) \geq c_n r^{n-1}$$

y como $|\nabla\varphi| \le M$,

$$|F_1 \cap B(z,r)| \le \int_{B'(z',r)\cap B'(0,R)} \sqrt{1+M^2}dx' \le \sqrt{1+M^2}\sigma(B'(z',r)) = a_2 r^{n-1}.$$

Luego F_1 es $(n-1)$-Ahlfors. Es fácil probar que F_2 es $(n-1)$-Ahlfors, de hecho por (8.1.3) tenemos que

$$|B(z,r)\cap F_2| = |B(z,r)\cap(B'(0,R)\cap\{0\})| = \sigma(B'(z',r)\cap B'(0,R)) \ge c_n r^{n-1},$$

por otra parte

$$|B(z,r)\cap F_2| = \sigma(B'(z',r)\cap B'(0,R)) \le \sigma(B'(z',r)) = \sigma(B'(0,1))r^{n-1}.$$

Para ver que F_3 es $(n-1)$-Ahlfors podemos cubrir a este conjunto con cartas locales que pueden verse como gráficos de funciones Lipschitz. Luego, sobre cada carta procedemos de modo similar a como lo hicimos en el caso de F_1 y obtenemos que cada una de ellas es $(n-1)$-Ahlfors. Luego, del Lema 8.1.4 tenemos que F_3 es $(n-1)$-Ahlfors.

Veamos ahora que vale *v)*, es decir $\sharp(\Lambda_{j,k}^{(d)}) \le C2^{j(n-1)}$. Probemos que si $I \in \Lambda_{j,k}^{(d)}$ entonces $Q(I)$ interseca al menos uno de los conjuntos $\partial D_{k2^{-j}}$, $\partial D_{(k+1)2^{-j}}$. De hecho, si suponemos que $Q(I)$ no interseca ninguno de estos conjuntos entonces $k2^{-j} < d(x,\partial D) < (k+1)2^{-j}$ para todo $x \in Q(I)$. Luego, si $x, z \in Q(I)$ tenemos que $d(x,z) \le d(x,\partial D) - d(z,\partial D) < (k+1)2^{-j} - k2^{-j} = 2^{-j}$. Tomando supremo sobre x y z en $Q(I)$ obtenemos que $\operatorname{diam}_d(Q(I)) < 2^{-j}$, lo que es un absurdo, pues si $\overline{x} = (\overline{x'}, x_n)$ es el centro de $Q(I)$ entonces $\operatorname{diam}_d(Q(I)) \ge d(\overline{x}, \overline{x} + 2^{-j}(N,\ldots,N,N)) = M|\overline{x'} - 2^{-j}(N,\ldots,N)| + |N2^{-j}| > 2^{-j}$. Dado $i = 0,1$ y $I \in \Lambda_{j,k}^{(d)}$, si existe $x_{i,I} \in \partial D_{(k+i)2^{-j}} \bigcap Q(I)$ entonces $B(x_{i,I}, 2^{-j}) \subset \widetilde{Q}(I) := 3Q(I)$. Los cubos $\widetilde{Q}(I)$ tienen solapamiento acotado, sea L una cota superior para este solapamiento. Definiendo ahora $\Lambda_{j,k,i}^{(d)} = \left\{ I \in \Lambda_{j,k}^{(d)} : \widetilde{Q}(I) \bigcap \partial D_{(k+i)2^{-j}} \neq \emptyset \right\}$ por *ii)* tenemos que

$$\begin{aligned}
2\sigma(\partial D) &\ge \sigma(\partial D_{k2^{-j}}) + \sigma(\partial D_{(k+1)2^{-j}}) \\
&\ge \frac{1}{L} \sum_{I\in\Lambda_{j,k,0}^{(d)}} \sigma(\partial D_{k2^{-j}} \cap \widetilde{Q}(I)) + \frac{1}{L} \sum_{I\in\Lambda_{j,k,1}^{(d)}} \sigma(\partial D_{(k+1)2^{-j}} \cap \widetilde{Q}(I)) \\
&\ge \frac{1}{L} \sum_{I\in\Lambda_{j,k,0}^{(d)}} \sigma(\partial D_{k2^{-j}} \cap B(x_{i,I}, 2^{-j})) + \frac{1}{L} \sum_{I\in\Lambda_{j,k,1}^{(d)}} \sigma(\partial D_{(k+1)2^{-j}} \cap B(x_{i,I}, 2^{-j}))
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{L}\sum_{I\in\Lambda^{(d)}_{j,k,0}} \gamma_1 2^{-j(n-1)} + \frac{1}{L}\sum_{I\in\Lambda^{(d)}_{j,k,1}} \gamma_1 2^{-j(n-1)}.$$

Ya que cada $I \in \Lambda^{(d)}_{j,k}$ pertenece a algún $\Lambda^{(d)}_{j,k,i}$ $(i = 0, 1)$ tenemos que

$$\sigma(\partial D) \geq \frac{\gamma_1}{L}\sharp(\Lambda^{(d)}_{j,k})2^{-j(n-1)}.$$

Como $\sigma(\partial D) < \infty$ entonces $\sharp(\Lambda^{(d)}_{j,k}) \leq C2^{j(n-1)}$, donde $C = \sigma(\partial D)\frac{L}{\gamma_1}$. □

El resultado principal de esta segunda parte de la tesis es el Teorema 8.4.1, en el cual probaremos la mejora de regularidad en la escala de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en dominios que pertenecen a la familia $\mathcal{R}_\beta$, $0 < \beta \leq 1$. Como corolario de este resultado, también obtendremos la mejora de regularidad sobre dominios Lipschitz que sean acotados. A continuación definimos estos dominios.

Definición 8.1.6. *Sea D un conjunto abierto contenido en $\mathbb{R}^n$ y sea ∂D su respectivo borde. Diremos que D es un dominio Lipschitz, si existen un $\epsilon > 0$, un natural L, un número real $M > 0$, y una sucesión de conjuntos abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots$ tal que*

i) Si $x \in \partial D$, entonces $B(x, \epsilon) \subset U_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$.

ii) No existen puntos en $\mathbb{R}^n$ contenidos en más de L conjuntos de la familia $\{U_i\}_{i=1}^\infty$.

iii) Para todo $i \in \mathbb{N}$, existe un dominio D_i que es subgráfico Lipschitz de la forma $D_i = \{x = (x', x_n) : |x'| \leq R_i,\ 0 < c_i < x_n < \varphi_i(x')\}$, donde $R_i > 0$, $c_i > 0$ la constante Lipschitz de φ_i no excede M y tal que

$$U_i \cap D = U_i \cap D_i.$$

8.2. Espacios de Besov y wavelets en $\mathbb{R}^n$

El éxito del análisis de Fourier clásico en $\mathbb{R}^n$ asociado a la teoría de ecuaciones diferenciales, se debe en esencia a que las funciones exponenciales complejas son autofunciones de los operadores elípticos. Las ondículas o wavelets, que son mejores, en sus propiedades de localización y de caracterización de espacios funcionales no hilbertianos, no se han usado mucho en análisis de ecuaciones en derivadas parciales.

Entre los espacios que las wavelets de Daubechies, suaves y de soporte compacto, describen de una manera concisa a través del tamaño y la sumabilidad de los coeficientes de una función, se encuentran en particular los de Lebesgue y los Besov. Una fuente ya clásica para obtener una imagen completa de los espacios funcionales que se caracterizan por sus coeficientes de wavelets es [**26**]. En la próxima sección veremos cómo los espacios de Besov sirven para medir velocidad de convergencia de aproximación en espacios de Lebesgue en métodos no lineales.

Uno de los pocos momentos de interacción entre las teorías de wavelets y la de ecuaciones en derivadas parciales es precisamente el contexto que Dahlke y DeVore exploran al probar que el carácter armónico de una función de dominio Lipschitz, automáticamente garantiza un exponente de regularidad mejorado en la escala de Besov.

En esta sección introducimos brevemente las wavelets de Daubechies, escribimos en la manera clásica expuesta en [**26**] la caracterización de espacios de Lebesgue y de Besov y finalmente reescribimos la caracterización de espacios de Besov (diagonales $p = q$) de la forma en que lo hacen Dahlke y DeVore, que se adapta de manera muy natural para facilitar la prueba del resultado principal en la Sección 8.4.

Un análisis multiresolución en $L^2(\mathbb{R})$ (MRA por su sigla en inglés) es una sucesión $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ de subespacios de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ tal que

a) $V_{j-1} \subset V_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}$;

b) la clausura en $L^2(\mathbb{R})$ de la unión de los V_j es $L^2(\mathbb{R})$;

c) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, no hay funciones no triviales que pertenezcan a todos los V_j;

d) $f \in V_j$ si y sólo si $f(2^j x) \in V_0$, los espacios V_j son autosimilares;

e) $f \in V_0$ si y sólo si $f(x-k) \in V_0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$;

f) para alguna función $\phi \in V_0$, la sucesión $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0.

A la función ϕ del ítem *f)* se la denomina función de escala.

La técnica para la construcción de una wavelet asociada a un MRA consiste en encontrar una función η tal que la sucesión $\{\eta(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sea una base ortonormal del espacio W_0 que es el complemento ortogonal de V_0 en V_1, considerados todos como subespacios de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$. Las propiedades de autosimilaridad de los V_j se heredan en los espacios de detalles W_j ($V_j \oplus W_j = V_{j+1}$) de manera que las funciones $\eta_I(x) = 2^{\frac{j}{2}}\eta(2^{\frac{j}{2}}x-k)$, $I = 2^{-j}[0,1]+2^{-j}k$, para j fijo y $k \in \mathbb{Z}$ forman una base ortonormal de W_j. Así la sucesión $\{\eta_I : I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ si $\mathcal{D}$ es la familia de todos los intervalos diádicos de $\mathbb{R}$. La notable construcción de Daubechies es la que permite obtener una η suave con soporte compacto y suficientes momentos nulos. El grado de suavidad es proporcional al necesario tamaño del soporte. Para la construcción que sigue será importante destacar las propiedades elementales de una función η de Daubechies que procederemos a enunciar en el caso que usaremos que es de baja regularidad.

En lo que sigue η será una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con soporte en el intervalo $[-N, N]$, con media nula $\left(\int_{\mathbb{R}} \eta(x)dx = 0\right)$ y tal que la sucesión $\{\eta_I : I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. La función η se obtiene de un MRA con función de escala ϕ (ver *f)*) que también es de clase $\mathcal{C}^1$ y con soporte en $[-N, N]$.

Una vez construida la wavelet para $L^2(\mathbb{R})$ se puede construir a partir de ella una base de wavelets para $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea V el conjunto de $2^n - 1$ vértices no nulos del cubo unitario $[0,1]^n$ en $\mathbb{R}^n$. Cada $v \in V$ es una secuencia de longitud n no trivial de ceros y unos. Si definimos $\eta^1 := \eta$ y $\eta^0 = \phi$, entonces el conjunto Ψ, formado por las $2^n - 1$ funciones

$$\psi^v(x) = \prod_{i=1}^{n} \eta^{v_i}(x_i),\ \ x = (x_1, \dots, x_n)$$

donde $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$, es una base de wavelets de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente el conjunto de funciones generado por dilataciones diádicas y traslaciones enteras de las funciones $\psi \in \Psi$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Es decir, si ahora I denota un cubo diádico de $\mathbb{R}^n$ de la forma $I = 2^{-j}[0,1]^n + 2^{-j}\overrightarrow{k}$ con $j \in \mathbb{Z}$ y $\overrightarrow{k} \in \mathbb{Z}^n$, escribiendo, para $\psi \in \Psi$, $\psi_I = 2^{\frac{jn}{2}}\psi(2^j x - \overrightarrow{k})$ resulta que

$$\{\psi_I : I \in \mathcal{D} \text{ y } \psi \in \Psi\}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ si $\mathcal{D}$ es la familia de todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$.

De las propiedades de ϕ y η como funciones en $\mathbb{R}$ tenemos que cada $\psi \in \Psi$ está soportada en $[-N, N]^n$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0$.

El hecho que Ψ sea una base de wavelet de $L^2(\mathbb{R}^n)$ nos dice que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$f = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi_I \rangle \psi_I. \tag{8.2.1}$$

Sea V_0 el espacio generado por traslaciones enteras $\varphi(x - \overrightarrow{k})$ de $\varphi(x) = \prod_{i=1}^n \phi(x_i)$. Si consideramos P_0 el proyector ortogonal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en V_0, se tiene que

$$f = P_0 f + \sum_{I \in \mathcal{D}^+} \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi_I \rangle \psi_I. \tag{8.2.2}$$

Observemos que $P_0 f(x) = \sum_{\overrightarrow{k} \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \varphi_{\overrightarrow{k}} \rangle \varphi_{\overrightarrow{k}}(x)$, donde $\varphi_{\overrightarrow{k}}(x) = \varphi(x - \overrightarrow{k})$.

Las descomposiciones (8.2.1) y (8.2.2) convergen en la norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ y, bajo las actuales hipótesis también lo hacen puntualmente [**28**]. La capacidad del soporte y la acotación de cada ψ y de φ permiten obtener el análisis (la lista $\{\langle f, \psi_I \rangle, \langle f, \varphi_{\overrightarrow{k}} \rangle\}$) para funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y aún para ciertas distribuciones como medidas localmente finitas. Cuando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $1 < p < \infty$, no sólo es posible probar la convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$ sino que el análisis caracteriza a las funciones del espacio L^p. El siguiente teorema es el resultado clásico en este sentido y puede encontrarse en [**40**].

Teorema 8.2.1. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces existen constantes c y C tales que las desigualdades*

$$c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 2^{jn} \mathcal{X}_{Q(I)}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

valen para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Aquí, como antes, $Q(I)$ denota el N entorno de $I \in \mathcal{D}$. Es decir $Q(I) = 2^{-j}[-N, N]^n + 2^{-j}\overrightarrow{k}$.

Para finalizar esta sección veremos como los espacios de Besov pueden caracterizarse por sus coeficientes de la descomposición de wavelets. Sea $\psi_{I,p} = |I|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \psi_I$, luego podemos reescribir la igualdad (8.2.2) de la siguiente manera

$$f = P_0 f + \sum_{I \in \mathcal{D}^+} \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi_{I,p'} \rangle \psi_{I,p}, \tag{8.2.3}$$

donde p' es el conjugado de Hölder de p.

El siguiente resultado caracteriza por medio de wavelets a funciones en el espacio de Besov $B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda < 1$ y $1 < p < \infty$, y lo usaremos en la prueba del teorema final de esta sección en el que demostramos la mejora de regularidad en la escala de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$.

TEOREMA 8.2.2. *Sea* $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < 1$ *y* $s_j^p(f) = \inf\{\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} : g \in V_j\}$ *el error de la mejor aproximación de* f *por elementos de* V_j. *Entonces, las siguientes condiciones sobre* f *son equivalentes:*

i) $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$;

ii) $\|P_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(\sum_{j\geq 0}\left[2^{j\lambda}s_j^p(f)\right]^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$;

iii) $\left(\sum_{\overrightarrow{k}\in\mathbb{Z}^n}\left|\langle f, \varphi(x - \overrightarrow{k})\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{I\in\mathcal{D}^+}\sum_{\psi\in\Psi}|I|^{-\frac{1}{n}\left(\lambda p + \frac{p}{2} - 1\right)}|\langle f, \psi_I\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$;

iv) $\|P_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(\sum_{I\in\mathcal{D}^+}\sum_{\psi\in\Psi}|I|^{-\frac{\lambda p}{n}}|\langle f, \psi_{I,p'}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

8.3. Regularidad Besov y aproximación no lineal

Es muy poco probable que alguna vez exista una exposición mejor que la de Ronald DeVore en "Nonlinear Approximation" [17] sobre el tema y sobre el profundo papel de los espacios funcionales de Besov en este contexto. Y, ciertamente, no será esta tesis el trabajo en el que aquella exposición se mejore. No obstante, resumiremos en esta sección en forma breve, la idea más básica que refleja claramente la utilidad del conocimiento de regularidad Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en dominios, cuando se intente aproximarlas por métodos no lineales.

En la teoría de aproximación el problema fundamental es estimar una función f (función objetivo) por otras (funciones aproximantes) que sean más simples y sencillas de computar.

Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable en el cual queremos estimar f. Sea $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots\}$ una base de Schauder de $\mathbb{X}$. Si definimos los subespacios de $\mathbb{X}$, $E_m = \operatorname{span}\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m\}$, el error $\mathfrak{E}_m(f)$ de aproximar f por elementos de E_m está dado por

$$\mathfrak{E}_m(f) = \inf_{g\in E_m}\|f - g\|.$$

Cuando este ínfimo es un mínimo, un elemento $g \in E_m$ tal que $\mathfrak{E}_m(f) = \|f - g\|$ se denomina aproximación lineal de f en E_m.

Una manera menos clásica de aproximar $f \in \mathbb{X}$ es la siguiente. Consideremos para m fijo en $\mathbb{N}$ el conjunto F_m de todas las combinaciones lineales de a lo sumo m elementos de la base $\{\eta_k : k \in \mathbb{N}\}$. Es decir $F_m = \left\{g = \sum_{j\in J} a_j\eta_j : J \subset \mathbb{N} \text{ y } \sharp(J) \leq m\right\}$. Notar que F_m es cerrado por multiplicación por escalares, pero es claro que la suma de dos elementos de F_m no está en general en F_m. Así los conjuntos F_m no son subespacios vectoriales de $\mathbb{X}$ aunque al menos heurísticamente resultan aproximaciones de $\mathbb{X}$. De aquí deriva la expresión de aproximación no lineal (en este caso particular). Denotaremos con $\mathfrak{F}_m(f)$ el error de aproximación de f por elementos de F_m. Precisamente,

$$\mathfrak{F}_m(f) = \inf_{g \in F_m} \|f - g\| .$$

Cualquier función $g \in F_m$ tal que $\|f - g\| = \mathfrak{F}_m(f)$ se llama aproximación no lineal a $f \in \mathbb{X}$.

Una pregunta que surge en la teoría de aproximación lineal es: dado un número $\alpha > 0$, ¿qué elementos de $\mathbb{X}$ cumplen que

$$\mathfrak{E}_m(f) \leq M m^{-\alpha} \tag{8.3.1}$$

para $m = 1, 2, \ldots$ y M una constante fija? El conjunto de elementos f de $\mathbb{X}$ que cumplen (8.3.1) es un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$ que se lo denomina espacio de aproximación $\mathcal{A}^\alpha(\{E_m\})$. La correspondiente pregunta no lineal es: ¿qué elementos de $\mathbb{X}$ satisfacen que

$$\mathfrak{F}_m(f) \leq M m^{-\alpha} \tag{8.3.2}$$

para $m = 1, 2 \ldots$ y M fijo? Luego $\mathcal{A}^\alpha(\{F_m\})$ es el conjunto de elementos que cumplen (8.3.2).

Poder caracterizar las clases $\mathcal{A}^\alpha(\{E_m\})$ y $\mathcal{A}^\alpha(\{F_m\})$, es decir saber que propiedades de f garantizan que pertenezca a estos conjuntos, es de suma importancia ya que de lograrlo se podría saber con qué eficiencia esperar aproximar f, o qué método de aproximación requiere propiedades más débiles sobre la función objetivo para lograr una velocidad de aproximación prefijada, la velocidad de aproximación está dada por el parámetro α. En distintos métodos de aproximación de funciones la pertenencia a espacios definidos por la velocidad con la que el método converge está caracterizada por la regularidad de la función objetivo f en espacios de Lipschitz, de Sobolev, de Besov o espacios de interpolación entre los mismos.

En vez de definir clases de aproximación a través del decaimiento monótono (casi) de los errores, al crecer el número de parámetros, un método más robusto está dado por la sumabilidad de ciertas series. Para unificar los dos enfoques, lineal y no lineal, en lo que sigue X_m denota a E_m ó F_m según sea el caso, supondremos que $X_m \subset X_{m+1}$ para todo m y que la unión de todos los X_m es denso en $\mathbb{X}$. En este caso el error (lineal o no lineal) es $\mathfrak{X}_m(f) = \inf\limits_{g \in X_m} \|f - g\|$. Para α y q positivos definimos la clase de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\{X_m\})$ como el conjunto de todos los elementos $f \in \mathbb{X}$ tales que

$$\sum_{m=1}^{\infty} [m^\alpha \mathfrak{X}_m(f)]^q \frac{1}{m} < \infty.$$

Cuando $\mathbb{X} = L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ y $\{\eta_k\}$ es una base de wavelets de Daubechies que resulta incondicional en $\mathbb{X} = L^p(\mathbb{R}^n)$, en [18], R. DeVore, B. Jawerth y V. Popov, muestran su descubrimiento: las clases de aproximación $\mathcal{A}_\tau^{\frac{\alpha}{n}}$ coinciden con el espacio de Besov $B_\tau^\alpha(\mathbb{R}^n)$ cuando $0 < \alpha < 1$ y $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}$. Por consiguiente si una función f pertenece al espacio de Besov $B_\tau^\alpha(\mathbb{R}^n)$ tendremos que la aproximación no lineal es tan rápida como para que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[m^{\frac{\alpha}{n}} \mathfrak{F}_m(f)\right]^\tau \frac{1}{m} < \infty.$$

Por esta razón, conseguir aumento en el índice α de Besov, sobre la función que se quiere aproximar redundará en una mayor velocidad de convergencia.

En la última sección probamos que las soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ comparten con las funciones armónicas y temperaturas clásicas la propiedad de "mejora de regularidad Besov" con la consiguiente interpretación sobre la velocidad de convergencia al aproximarla por métodos no lineales.

8.4. Mejora de la regularidad Besov de soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en dominios no suaves

Como antecedentes de resultados que establecen mejora de regularidad en la escala de Besov para soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas y parabólicas podemos citar los trabajos de S. Dalhke y R. DeVore [15] y H. Aimar e I. Gómez [5].

En [15] los autores prueban que si una función u está en el espacio $B_p^\lambda(D)$, $1 < p < \infty$ con $\lambda > 0$, y resuelve $\triangle u = 0$ sobre en un dominio D Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ entonces, por ser armónica, $u \in B_\tau^\alpha(D)$, $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}$ y $0 < \alpha < \lambda \frac{n}{n-1}$.

Para el caso parabólico, en [5] se demuestra que si una temperatura u sobre un dominio $\Omega = D \times (0, T)$, donde D es un dominio Lipschitz y $T > 0$, que inicialmente se encuentra en el espacio $L^p((0,T); B^\lambda_p(D))$ entonces, por satisfacer la ecuación del calor, se tiene que $u \in L^\tau((0,T); B^\alpha_\tau(D))$, $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}$ y $0 < \alpha < \text{mín}\{l, \lambda\frac{n}{n-1}\}$ donde l es el mayor entero menor o igual que $\lambda + n$.

En ambos casos la hipótesis de la pertenencia de la solución u a una clase de Besov inicial $B^\lambda_p(D)$ en el caso elíptico y a $L^p((0,T); B^\lambda_p(D))$ en el caso parabólico, está garantizada cuando u resuelve el problema de Dirichlet con datos de borde (o inicial) en adecuadas clases de Besov. Ver [27] para el caso elíptico y [2] para el caso parabólico.

En esos trabajos una de las herramientas centrales para probar la mejora de regularidad en la escala de Besov son las fórmulas de valor medio suave para funciones armónicas y temperaturas, que permiten estimar puntualmente los gradientes de las soluciones por la maximal sharp de Calderón y luego acotar la norma L^p de los gradientes de éstas pesados por potencias de la distancia al borde por la norma de Besov de las mismas. Este resultado permite probar después la mejora de regularidad en la escala de espacios de Besov. Teniendo en cuenta las estimaciones en norma L^p de los gradientes pesados por potencias de la distancia al borde que probamos en el Capítulo 7 estamos en condiciones de demostrar el resultado de mejora de regularidad en la escala de Besov para funciones que satisfacen $(-\triangle)^s f = 0$ en un dominio D. Es preciso mencionar que, puesto que en nuestro argumento no usaremos teoremas de extensión de funciones de Besov, la regularidad de la frontera de D puede ser aún menor que la necesaria en los casos locales.

TEOREMA 8.4.1. *Sea $0 < \beta \leq 1$ y $D \in \mathcal{R}_\beta$. Sean $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ y $0 < \lambda < \frac{n-\beta}{1+n-\beta}$. Sea $f \in B^\lambda_p(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{M}^{1-2s}_D$ tal que $(-\triangle)^s f = 0$ en D, entonces $f \in B^\alpha_\tau(D)$ con $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}$ y $0 < \alpha < \lambda\frac{n}{n-\beta}$.*

Es importante notar que, en contraste con el caso local asociado a las funciones armónicas en [15], ahora la regularidad B^λ_p es requerida en todo el espacio $\mathbb{R}^n$ y la mejora es sólo en D donde f es solución.

El siguiente lema, que caracteriza a funciones de $B^\alpha_\tau(\mathbb{R}^n)$ en términos de las funciones $\psi_{I,p}$ y $\psi_{I,p'}$, será usado en la demostración del Teorema 8.4.1.

Lema 8.4.2. *Si* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$ *y* $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}$, *entonces* $f \in B^\alpha_\tau(\mathbb{R}^n)$, *si y sólo si,*

$$f = P_0(f) + \sum_{I \in \mathcal{D}^+} \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi_{I,p'} \rangle \psi_{I,p} \tag{8.4.1}$$

y

$$\|P_0 f\|_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} + \left(\sum_{I \in \mathcal{D}^+} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} < \infty. \tag{8.4.2}$$

Prueba del Teorema 8.4.1. Como $D \in \mathcal{R}_\beta$ tenemos que existe una métrica d equivalente a la usual y un $\theta > 0$ tal que

$$\sharp(\Lambda^{(d)}_{j,k}) \leq C 2^{(n-\beta)j} \tag{8.4.3}$$

si $k \leq \theta 2^j$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $D_\theta = \{x \in D : d(x, \partial D) > \theta\} \neq \emptyset$. Observemos primero que sólo basta probar la mejora de regularidad en $D^c_\theta \cap D$, por simplicidad denotaremos este conjunto como D^c_θ teniendo en cuenta que el complemento es tomado sólo en D. En efecto si tenemos que $f \in B^\alpha_\tau(D^c_\theta)$ entonces existe $f_\theta \in B^\alpha_\tau(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_\theta|_{D^c_\theta} = f$. Por otro lado, ya que $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D \setminus D^c_\theta})$ (pues en $\overline{D \setminus D^c_\theta}$ vale la fórmula de valor medio para f), si $\xi \in \mathcal{C}^\infty_c(D_\theta)$ entonces $\xi f \in \mathcal{C}^\infty_c(D_\theta)$. Luego, $\xi f \in B^\alpha_\tau(\mathbb{R}^n)$. Consideremos dos conjuntos abiertos y acotados U y V tales que $\overline{D \setminus D_\theta} \subset U$ y $\overline{D_\theta} \subset V$ y sean ξ_θ y ξ dos funciones infinitamente diferenciables con soporte en U y V respectivamente y tales que $\xi_\theta(x) + \xi(x) = 1$ para todo $x \in D$. Luego, la función $\xi_\theta f_\theta + \xi f \in B^\alpha_\tau(\mathbb{R}^n)$ y $\xi_\theta f_\theta + \xi f|_D = f$ con lo cual $f \in B^\alpha_\tau(D)$.

Para probar que $f \in B^\alpha_\tau(D^c_\theta)$ seguiremos las líneas de la demostración de Dahlke y DeVore de mejora de regularidad Besov para funciones armónicas.

Sean $\psi \in \Psi$ las funciones de la base de wavelets de Daubechies y ϕ la función de escala todas de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$. Ya que las funciones $\psi \in \Psi$ tienen soporte compacto, existe un cubo $Q = [-N, N]^n$ que contiene sus soportes. Luego, los cubos $Q(I) = 2^{-j}Q + 2^{-j}\overrightarrow{k}$, $I = 2^{-j}[0,1]^n + 2^{-j}\overrightarrow{k}$ contienen a los soportes de ψ_I, para todo $I \in \mathcal{D}$. Consideremos Γ el conjunto formado por los cubos $Q(I)$ tales que, $I \in \mathcal{D}^+$ y $Q(I) \cap D^c_\theta \neq \emptyset$. Luego, si definimos

$$g := P_0 f + f_0, \quad f_0 = \sum_{I\in\Gamma}\sum_{\psi\in\Psi}\langle f, \psi_I\rangle\psi_I,$$

donde P_0 es el proyector sobre V_0, tenemos que $g = f$ en D_θ^c. Notemos primero que la función $P_0 f\big|_{D_\theta^c}$ está en $\mathcal{C}^1(D_\theta^c)$, tiene derivadas acotadas y soporte compacto, pues, en D_θ^c es combinación lineal y finita de funciones de V_0. Luego, para completar la demostración del teorema necesitamos probar que $f_0 \in B_\tau^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Así $g \in B_\tau^\alpha(\mathbb{R}^n)$, lo que implica que $f \in B_\tau^\alpha(D_\theta^c)$.

Por el Lema 8.4.2, sólo nos queda mostrar que

$$\sum_{I\in\Gamma}\sum_{\psi\in\Psi}|\langle f, \psi_{I,p'}\rangle|^\tau < \infty. \tag{8.4.4}$$

Para demostrar (8.4.4) separaremos la consideración de los cubos estrictamente contenidos en D (y que intersecan a D_θ^c) de los cubos restantes en Γ. Para las primeras usaremos la desigualdad de Poincaré y la propiedad $\mathcal{R}_\beta$ y para la segunda la regularidad de la frontera. Más precisamente, para $j = 0, 1, 2, \ldots$, si $\Gamma_j = \{I \in \Gamma : |I| = 2^{-jn}\}$ y $\Gamma_j^0 = \Gamma_j \setminus \Lambda_{j,0}^{(d)}$, probaremos que $I = \sum_{j=0}^\infty \sum_{I\in\Gamma_j^0}\sum_{\psi\in\Psi}|\langle f, \psi_{I,p'}\rangle|^\tau$ y $II = \sum_{j=0}^\infty \sum_{I\in\Lambda_{j,0}^d}\sum_{\psi\in\Psi}|\langle f, \psi_{I,p'}\rangle|^\tau$ son finitas.

Desigualdad de Poincaré: Sea $1 \le p \le \infty$, y Q un cubo de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante C que sólo depende de p tal que la desigualdad

$$\|v - C(Q, v)\|_{L^p(Q)} \le C\,|Q|^{\frac{1}{n}}\,\|\nabla v\|_{L^p(Q)}$$

vale para alguna constante $C(Q, v)$, para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$ y para toda función v para la cual el lado derecho de la desigualdad es finito.

Luego, ya que $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$, pues en D vale la fórmula de valor medio, tenemos que existe una constante $C(I, f)$ tal que

$$\|f - C(I, f)\|_{L^p(Q(I))} \le C|Q(I)|^{\frac{1}{n}}\,\|\nabla f\|_{L^p(Q(I))} \le C|I|^{\frac{1}{n}}\,\|\nabla f\|_{L^p(Q(I))},$$

para todo $Q(I) \subset D$. Como $\psi_{I,p'}$ tiene integral nula, entonces

$$|\langle f, \psi_{I,p'}\rangle| \le |\langle f - C(I, f), \psi_{I,p'}\rangle| \le \|f - C(I, f)\|_{L^p(Q(I))}\,\|\psi_{I,p'}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \tag{8.4.5}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C|I|^{\frac{1}{n}} \|\nabla f\|_{L^p(Q(I))} \\
&\leq C|I|^{\frac{1}{n}} \delta_{Q(I)}^{\lambda-1} \left(\int_{Q(I)} \left|\delta(x)^{1-\lambda} \nabla f(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C|I|^{\frac{1}{n}} \left(\delta_{Q(I)}^d\right)^{\lambda-1} \left(\int_{Q(I)} \left|\delta(x)^{1-\lambda} \nabla f(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

donde $\delta_{Q(I)}^d$ denota la distancia de $Q(I)$ al borde de D en términos de la métrica d en la definición de $\mathcal{R}_\beta$.

Probemos la finitud de $I = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau$. De (8.4.5) tenemos que

$$
\sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau \leq C \sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} 2^{-j\tau} \left(\delta_{Q(I)}^d\right)^{(\lambda-1)\tau} \left(\int_{Q(I)} \left|\delta(x)^{1-\lambda} \nabla f(x)\right|^p dx \right)^{\frac{\tau}{p}}.
$$

Aplicando la desigualdad de Hölder discreta, con exponentes $\frac{p}{\tau}$ y $\frac{p}{p-\tau}$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau \\
&\leq C \left(\sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} 2^{\frac{-p\tau j}{p-\tau}} \left(\delta_{Q(I)}^d\right)^{\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau}} \right)^{\frac{p-\tau}{p}} \left(\sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} \int_{Q(I)} \left|\delta(x)^{1-\lambda} \nabla f(x)\right|^p dx \right)^{\frac{\tau}{p}}.
\end{aligned}
$$

Como los cubos $Q(I)$ tienen solapamiento acotado, usando el Teorema 7.2.2 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} \int_{Q(I)} \left|\delta(x)^{1-\lambda} \nabla f(x)\right|^p dx \right)^{\frac{\tau}{p}} &\leq C \left(\int_D \left|\delta(x)^{1-\lambda} \nabla f(x)\right|^p dx \right)^{\frac{\tau}{p}} \\
&\leq C \|f\|_{B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}^\tau \leq C.
\end{aligned}
$$

Luego, para j fijo, descomponiendo la suma $\sum_{I \in \Gamma_j^0}$ en $\sum_{k=1}^{\theta 2^j} \sum_{I \in \Lambda_{j,k}^{(d)}}$ (notemos que como los cubos $Q(I)$ fueron elegidos de tal forma que intersecan D_θ^c entonces la suma en k es hasta $\theta 2^j$) y aplicando la desigualdad (8.4.3), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\text{(8.4.6)} \qquad \sum_{I \in \Gamma_j^0} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau &\leq C \left(\sum_{k=1}^{\theta 2^j} \sum_{I \in \Lambda_{j,k}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} 2^{\frac{-p\tau j}{p-\tau}} \left(\delta_{Q(I)}^d\right)^{\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau}} \right)^{\frac{p-\tau}{p}} \\
&\leq C \left(\sum_{k=1}^{\theta 2^j} \sum_{I \in \Lambda_{j,k}^{(d)}} 2^{\frac{-p\tau j}{p-\tau}} \left(\delta_{Q(I)}^d\right)^{\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau}} \right)^{\frac{p-\tau}{p}}
\end{aligned}
$$

$$\leq C \left(\sum_{k=1}^{\theta 2^j} 2^{j(n-\beta)} 2^{\frac{-p\tau j}{p-\tau}} (k2^{-j})^{\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau}} \right)^{\frac{p-\tau}{p}}$$

$$\leq C \left(2^{j\left((n-\beta)-\frac{p\lambda\tau}{p-\tau}\right)} \sum_{k=1}^{\theta 2^j} k^{\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau}} \right)^{\frac{p-\tau}{p}}.$$

Por las relaciones entre τ, α y λ tenemos que $\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau} < -1$ (o equivalentemente $(1-\lambda)\tau > 1 - \frac{\tau}{p}$). De hecho

$$(1-\lambda)\tau > 1 - \frac{\tau}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{p(1-\lambda)+1}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}\right) < 1,$$

y por las hipótesis en α y λ tenemos que

$$\frac{p}{p(1-\lambda)+1}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{p(1-\lambda)+1}\left(p\left(\frac{\lambda}{n-\beta}\right) + 1\right).$$

Como $\lambda < \frac{n-\beta}{1+n-\beta}$ resulta que $1-\lambda > \frac{\lambda}{n-\beta}$ y entonces $\frac{1}{p(1-\lambda)+1}\left(p\left(\frac{\lambda}{n-\beta}\right)+1\right) < 1$. Luego,

$$\sum_{k=1}^{\theta 2^j} k^{\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{(\lambda-1)p\tau}{p-\tau}} \leq C.$$

Entonces de la cadena de desigualdades (8.4.6) obtenemos que

$$\sum_{I\in\Gamma_j^0} \sum_{\psi\in\Psi} |\langle f, \psi_{I,p'}\rangle|^\tau \leq C \left(2^{j\left((n-\beta)-\frac{p\lambda\tau}{p-\tau}\right)}\right)^{\frac{p-\tau}{p}} = C2^{j\left(\frac{(n-\beta)(p-\tau)}{p}-\lambda\tau\right)}.$$

Sumando ahora sobre $j = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{I\in\Gamma_j^0} \sum_{\psi\in\Psi} |\langle f, \psi_{I,p'}\rangle|^\tau \leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\left(\frac{(n-\beta)(p-\tau)}{p}-\lambda\tau\right)}.$$

Esta serie es sumable si

$$\frac{(n-\beta)(p-\tau)}{p} - \lambda\tau < 0,$$

o equivalentemente si

$$\tau > \frac{p(n-\beta)}{p\lambda + n - \beta}. \tag{8.4.7}$$

Pero (8.4.7) es consecuencia de las hipótesis sobre α y τ,

$$\tau = \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}\right)^{-1} > \left(\frac{\lambda n}{n(n-\beta)} + \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{p(n-\beta)}{p\lambda + n - \beta}.$$

Para terminar la demostración probaremos que $II = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{I \in \Lambda_{j,0}} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau$ es finita. Usando la desigualdad de Hölder discreta y (8.4.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau &= \sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} 1 |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau \\
&\leq \left(\sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} 1 \right)^{\frac{p-\tau}{p}} \left(\sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^p \right)^{\frac{\tau}{p}} \\
&\leq C 2^{j(n-\beta)(\frac{p-\tau}{p})} \left(\sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^p \right)^{\frac{\tau}{p}} \\
&= C 2^{j(n-\beta)(\frac{p-\tau}{p})} 2^{-j\lambda\tau} \left(\sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} 2^{\lambda p j} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^p \right)^{\frac{\tau}{p}} \\
&= C 2^{j((n-\beta)(\frac{p-\tau}{p}) - \lambda\tau)} \left(\sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} 2^{\lambda p j} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^p \right)^{\frac{\tau}{p}}
\end{aligned}$$

Sumando sobre j y usando nuevamente la desigualdad de Hölder discreta obtenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^\tau \leq C \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(n-\beta-\frac{p\lambda\tau}{p-\tau})} \right)^{\frac{p-\tau}{p}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{I \in \Lambda_{j,0}^{(d)}} \sum_{\psi \in \Psi} 2^{\lambda p j} |\langle f, \psi_{I,p'} \rangle|^p \right)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Por el Teorema 8.2.2, el segundo término de la derecha es finito. El primer término es finito si el exponente de 2^j es negativo, o equivalentemente si

$$\tau > \frac{p(n-\beta)}{p\lambda + n - \beta},$$

que es la misma condición que pedimos en (8.4.7). □

Corolario 8.4.3. *Sea D un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz. Sean $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ y $0 < \lambda < \frac{n-1}{n}$. Sea $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{M}_D^{1-2s}$ tal que $(-\triangle)^s f = 0$ en D, entonces $f \in B_\tau^\alpha(D)$ con $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}$ y $0 < \alpha < \lambda \frac{n}{n-1}$.*

Conclusiones generales

✓ Las difusiones clásicas pueden verse como límite de CTRW con reescalamientos parabólicos.

✓ Los CTRW tienen solución si se interpreta adecuadamente el dato inicial.

✓ No sólo los operadores asociados a CTRW convergen a la ecuación del calor sino también las soluciones de los correspondientes problemas convergen en las normas adecuadas.

✓ Las soluciones de ciertos operadores elípticos degenerados satisfacen fórmulas de valor medio clásicas en subconjuntos de dimensión menor con respecto a bolas euclídeas.

✓ Las soluciones de potencias fraccionarias de $-\triangle$ satisfacen fórmulas de valor medio explícitas en términos de funciones conocidas.

✓ Los gradientes de soluciones de potencias fraccionarias de $-\triangle$ se pueden acotar por maximales de Calderón como en el caso de las funciones armónicas.

✓ Las funciones en una clase de Besov de $\mathbb{R}^n$ que son soluciones en un dominio D con poca regularidad de potencias fraccionarias de $-\triangle$, son necesariamente más suaves en la escala de los espacios de Besov de D.

Bibliografía

1. Hugo Aimar, Gastón Beltritti, and Ivana Gómez, *Continuous time random walks and the Cauchy problem for the heat equation*, Journal d'Analyse Mathématique. (2015). En prensa. Disponible en Preprints del IMAL http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/publicaciones/preprints/2014-0025.pdf.
2. ———, *Besov regularity of solutions of the fractional Laplacian*, Proceedings of the XIIth "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress, Univ. Nac. Sur Dep. Mat. Inst. Mat., Bahía Blanca, 2014, pp. 37–40. MR 3306999
3. ———, *Improvement of Besov regularity for solutions of the fractional Laplacian*, Constr. Approx. **41** (2015), no. 2, 219–229. MR 3315676
4. Hugo Aimar, Gastón Beltritti, Ivana Gómez, and Cristián Ríos, *Potencias fraccionarias de operadores parabólicos y la desigualdad de Harnack*, LXIII Reunión de Comunicaciones Científicas de la UMA (2014).
5. Hugo Aimar and Ivana Gómez, *Parabolic Besov regularity for the heat equation*, Constr. Approx. **36** (2012), no. 1, 145–159. MR 2926308
6. Hugo Aimar, Ivana Gómez, and Bibiana Iaffei, *Parabolic mean values and maximal estimates for gradients of temperatures*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 8, 1939–1956. MR 2462582 (2009j:35119)
7. Lolina Alvarez Alonso, *Distribution theory and Fourier transform*, IMAL-CIMEC, 2000, Cuadernos de Matemática y Mecánica del IMAL-CIMEC.
8. Fuensanta Andreu-Vaillo, José M. Mazón, Julio D. Rossi, and J. Julián Toledo-Melero, *Nonlocal diffusion problems*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 165, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2722295 (2011i:35002)
9. Oleg V. Besov, Valentin P. Il′in, and Sergey M. Nikol′skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems. Vol. I*, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont.-London, 1978, Translated from the Russian, Scripta Series in Mathematics, Edited by Mitchell H. Taibleson. MR 519341 (80f:46030a)
10. Luis Caffarelli and Luis Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260. MR 2354493 (2009k:35096)
11. ———, *Hölder regularity for generalized master equations with rough kernels*, Advances in analysis: the legacy of Elias M. Stein, Princeton Math. Ser., vol. 50, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014, pp. 63–83. MR 3329847

12. A. P. Calderón, *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions*, Studia Math. **44** (1972), 563–582, Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, VI. MR 0348555 (50 #1053)
13. Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, and Julio D. Rossi, *Nonlocal diffusion problems that approximate the heat equation with Dirichlet boundary conditions*, Israel J. Math. **170** (2009), 53–60. MR 2506317 (2010e:35197)
14. Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski, *How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **187** (2008), no. 1, 137–156. MR 2358337 (2008k:35261)
15. Stephan Dahlke and Ronald A. DeVore, *Besov regularity for elliptic boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), no. 1-2, 1–16. MR 97k:35047
16. Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992. MR 1162107 (93e:42045)
17. Ronald A. DeVore, *Nonlinear approximation*, Acta numerica, 1998, Acta Numer., vol. 7, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 51–150. MR 1689432 (2001a:41034)
18. Ronald A. DeVore, Björn Jawerth, and Vasil Popov, *Compression of wavelet decompositions*, Amer. J. Math. **114** (1992), no. 4, 737–785. MR 1175690 (94a:42045)
19. Ronald A. DeVore and Robert C. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc. **47** (1984), no. 293, viii+115. MR 727820 (85g:46039)
20. J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15. MR 0453964 (56 #12216)
21. Ricardo G. Durán and Fernando López García, *Solutions of the divergence and analysis of the Stokes equations in planar Hölder-α domains*, Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (2010), no. 1, 95–120. MR 2606245 (2011h:35219)
22. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002)
23. Eugene B. Fabes and Nicola Garofalo, *Mean value properties of solutions to parabolic equations with variable coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), no. 2, 305–316. MR 872228 (88b:35088)
24. Eugene B. Fabes, Carlos E. Kenig, and Raul P. Serapioni, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), no. 1, 77–116. MR 84i:35070
25. Paul Fife, *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions*, Trends in nonlinear analysis, Springer, Berlin, 2003, pp. 153–191. MR 1999098 (2004h:35100)
26. Michael Frazier, Björn Jawerth, and Guido Weiss, *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 79, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. MR 1107300 (92m:42021)

27. David Jerison and Carlos E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **130** (1995), no. 1, 161–219. MR 1331981 (96b:35042)

28. Susan E. Kelly, Mark A. Kon, and Louise A. Raphael, *Pointwise convergence of wavelet expansions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **30** (1994), no. 1, 87–94. MR 1248218 (95a:42048)

29. N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, New York, 1972, Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 180. MR 0350027 (50 #2520)

30. Ralf Metzler and Joseph Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*, Phys. Rep. **339** (2000), no. 1, 77. MR 1809268 (2001k:82082)

31. Yves Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, Translated from the 1990 French original by D. H. Salinger. MR 1228209 (94f:42001)

32. Jan Mikusiński, *The Bochner integral*, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1978, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 55. MR 0492147 (58 #11296)

33. Luis Enrique Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2005, Thesis (Ph.D.)–The University of Texas at Austin. MR 2707618

34. Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. MR 0290095 (44 #7280)

35. Mitchell H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. I. Principal properties*, J. Math. Mech. **13** (1964), 407–479. MR 0163159 (29 #462)

36. ———, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. II. Translation invariant operators, duality, and interpolation*, J. Math. Mech. **14** (1965), 821–839. MR 31 #5087

37. ———, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. III. Smoothness and integrability of Fourier tansforms, smoothness of convolution kernels*, J. Math. Mech. **15** (1966), 973–981. MR 33 #6381

38. François Trèves, *Basic linear partial differential equations*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006, Reprint of the 1975 original. MR 2301309 (2007k:35004)

39. Neil A. Watson, *Introduction to heat potential theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 182, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2907452

40. P. Wojtaszczyk, *A mathematical introduction to wavelets*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR 1436437 (98j:42025)