UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis Real**

Título de la tesis:

Operadores en espacios de Lebesgue Generalizados

Institución donde se realizó:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL)

Autor:

Mauricio Javier Ramseyer

Director de Tesis: Dr. Oscar Salinas

Codirector de Tesis: Dra. Beatriz Viviani

Defendida ante el jurado compuesto por:

Dr. Hugo Aimar

Dr. Julián Fernández Bonder

Dr. Héctor Hugo Cuenya

Año de presentación: 2013

Dedicado a

mi familia

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi esposa “Flor”, por el acompañamiento, la tolerancia y el respeto que ha puesto sobre mí en estos años de estudio. La que todo este tiempo me ha dado fuerzas ayudándome a tomar decisiones importantes. Gracias por eso mi vida. Gracias a mi familia por estar conmigo, a toda mi familia: mi “vieja”, mi “viejo”, la “nené” y el “fede”. A mi “suegra”, mis “cuñaos”, mis primos y tíos y especialmente a mis sobrinos: Vale, Franco y Tomi a los que amo con todo mi corazón.

Agradezco a mis directores Oscar y Nora, por haber confiado y creído en este trabajo. Gracias por los innumerables consejos que me han dado y no dudo seguirán haciendo; por escuchar, alentar, ser pacientes y guiar mis pasos en estos cinco años. Junto con ellos, todos los profesores que he tenido a lo largo de la licenciatura y luego el doctorado han logrado que tenga una visión mucho más amplia de la matemática hoy en día. En especial quiero agradecer a Hugo, que en mis días más cansadores entre mi trabajo y la licenciatura, supo exactamente qué decirme para darme ánimos y así poder recibirme en tiempo para poder estudiar el doctorado.

Agradezco a los miembros del jurado por haber aceptado leer y comentar este trabajo. De manera implícita agradezco a CONICET por darme el sustento económico y a la UNL por otorgarme este título. También agradezco al IMAL por ser un Instituto que apuesta a las nuevas generaciones de matemáticos, dándoles las condiciones necesarias para formar calidad, tanto a nivel profesional como a nivel personal. Agradezco en especial a los becarios que han sido compañeros intachables en estos años. Algunos de los cuales han formado lazos de amistad conmigo que serán difíciles de romper.

Índice general

Resumen

Entre los objetos de estudio del análisis real de los últimos 30 años podemos decir que los espacios de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}$ han cautivado la atención de muchos investigadores. Gran parte de este interés está enfocado en el estudio de operadores, conectados con las propiedades de regularidad de soluciones de problemas asociados a elasticidad, dinámica de fluidos y restauración de imágenes.

En estos estudios, en particular, para dominios acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es común imponer una condición, introducida por Diening en [8], de continuidad de tipo log–Hölder local a la función exponente $p(\cdot)$. Más precisamente, que exista una constante c_0 tal que

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_0}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})}, \qquad \forall\, x, y \in \Omega\,.$$

Para el caso de dominios no acotados, además de la hipótesis anterior, se agrega una condición de decaimiento de tipo log–Hölder en el infinito. Más precisamente, que existan constantes p_∞ y c_1 tales que

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_1}{\log(e + |x|)}, \qquad \forall\, x \in \Omega\,.$$

El principal objetivo de este trabajo de tesis es estudiar el comportamiento del operador Integral Fraccionaria I_α actuando sobre espacios de exponente variable e inclusive espacios más generales. Sobre estos últimos y en la parte final del trabajo, además, analizamos el comportamiento de las Transformadas de Riesz. Para comenzar, en el primer capítulo, hacemos una revisión por las definiciones y herramientas fundamentales de los espacios de exponente variable.

En el segundo capítulo, introducimos los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$, una extensión de los espacios Lipschitz clásicos. Luego estudiamos la acotación desde $L^{p(\cdot)}$ en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ bajo condiciones

necesarias y suficientes sobre la función exponente. Por otro lado, definimos los espacios $L^{p(\cdot)}$–débiles y probamos la acotación respectiva para estos espacios bajo condiciones suficientes sobre $p(\cdot)$.

Abordando un camino más general, en el tercer capítulo presentamos los espacios $\text{bmo}_{w,q}$, introducidos por E. Nakai en [32], los cuales tienen como casos particulares a los $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$. Allí damos condiciones sobre la función w bajo las cuales $\text{bmo}_{w,1} = \text{bmo}_{w,q}$ para cualquier $1 < q < \infty$. Luego, exhibimos una caracterización puntual para las funciones en estos espacios bajo propiedades adecuadas de la función w. Como aplicación, analizaremos la caracterización puntual que resulta para las funciones en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ y estudiamos cómo algunas condiciones sobre $p(\cdot)$ pueden relajarse. Terminamos este capítulo analizando la continuidad de las funciones del espacio en términos de las propiedades de w.

Finalmente, en el cuarto y último capítulo de este trabajo, con el objetivo de generalizar los resultados contenidos en [20], analizamos el comportamiento de la Integral Fraccionaria sobre los espacios generales definidos anteriormente, logrando acotación entre espacios $\text{bmo}_{w,q}$ adecuados. Aquí también se prueban acotaciones para las Transformadas de Riesz, para lograr entonces una generalización, a estos espacios, aunque sin pesos, de los resultados contenidos en [28].

Creemos que los resultados obtenidos en este trabajo, aportarán una herramienta de suma importancia en el tratamiento de los problemas generales mencionados en los primeros párrafos.

Introducción

En los últimos años ha habido un interés creciente en los espacios de Lebesgue con exponente variable, casos particulares de los espacios de Musielak-Orlicz, cuya aparición data de 1983 (ver [30]). Esto se debe a su conexión con problemas asociados a elasticidad, dinámica de fluídos y restauración de imágenes. (ver, por ejemplo, [37], [1] y [5]).

Estos problemas están, a su vez, asociados a ecuaciones diferenciales con crecimiento no estándar. Es allí donde hacen su aparición estos espacios y, además, los espacios de Sobolev definidos a partir de ellos.

La investigación derivada puede dividirse en dos áreas: la relacionada con las ecuaciones diferenciales propiamente dicha y la relacionada con el estudio de operadores conectados con el estudio de regularidad de las soluciones a dichos problemas. Aquí, también se ven las propiedades de los espacios en sí mismos. En esta última dirección los estudios pueden remontarse a 1979 en [40]. En este tema ha habido una gran cantidad de trabajos entre los que se pueden citar [6], [26], [35] y [22] sobre operadores maximales, [12] sobre operadores de tipo potencial, [13] sobre espacios de Sobolev con exponente variable y [24] sobre conmutadores de integrales singulares, entre otros.

En cuanto a los espacios de exponente variable, básicamente, para un dominio Ω, el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es el conjunto de las funciones f para las cuales la integral

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx$$

es finita. Aquí [27], trabajo realizado por Kováčik y Rákosník en el año 1991, es una de las referencias más citadas.

En el año 2000, Diening en [8] resolvió la acotación del operador maximal de Hardy–

Littlewood para dominios acotados, bajo una condición suficiente sobre la función $p(\cdot)$. La misma plantea la existencia de una constante positiva c_0 tal que

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_0}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})}, \qquad \forall\, x, y \in \Omega\,.$$

Diremos entonces que $p(\cdot)$ satisface una condición de continuidad de tipo log–Hölder local. Aún no estaba claro que se pudiera extender el resultado a todo $\mathbb{R}^n$ (ver [35]).

En 2004, Cruz-Uribe, Fiorenza y Neugebauer ([6], Teorema 1.5) prueban el resultado para el caso de un dominio abierto no necesariamente acotado. Además de las hipótesis pedidas, encontraron una condición suficiente extra para hacerlo. Esta nueva condición plantea la existencia de constantes $p_\infty > 1$ y $c_1 > 0$ tales que

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_1}{\log(e + |x|)}, \qquad \forall\, x \in \Omega\,.$$

En este caso, diremos que la función $p(\cdot)$ satisface una condición de decaimiento de tipo log-Hölder en el infinito. Independientemente y con una condición más débil, Nekvinda ([33], Teorema 2.14) prueba el mismo resultado.

Varios autores, por su parte, han trabajado en el operador Maximal Fraccionaria en este contexto, podemos citar [4], [11], [19] entre otros. Ellos hacen uso de propiedades de acotación análogas al caso clásico junto con las propiedades log–Hölder antes vistas.

Si nos referimos ahora al estudio de propiedades de acotación del potencial de Riesz, es muy conocido que en el contexto de los espacios L^p clásicos son innumerables los trabajos. Recordemos que dado un número real $0 < \alpha < n$, el operador Integral Fraccionaria I_α está definido por

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy\,,$$

siempre que la integral sea finita, por ejemplo para funciones acotadas con soporte compacto.

Uno de los primeros resultados puede consultarse en el trabajo de Hardy y Littlewood [21]. Ellos trabajaron con espacios clásicos de Lebesgue y espacios Lipschitz en $\mathbb{R}$ y probaron que $I_\alpha : L^p \hookrightarrow L^q$ para $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$. Además probaron que para $\beta \geq 0$ se tiene que $I_\alpha : \text{Lip}\ (\beta) \hookrightarrow \text{Lip}\ (\beta + \alpha)$.

En 1974, Muckenhoupt y Wheeden en [29] obtuvieron una caracterización de pesos que hacen al operador acotado desde L^p en L^q pesados para el mismo rango de valores de p. El caso $p = \frac{n}{\alpha}$ también fue abordado en este artículo, obteniéndose versiones pesadas del BMO como rango del operador, extendiendo así el resultado conocido $I_\alpha : L^{n/\alpha} \hookrightarrow \mathrm{BMO}$.

Inspirados en resultados anteriores de Gatto y Vagi sin pesos (ver [17]), Harboure, Salinas y Viviani en 1997 (ver [20]) han estudiado el rango de valores de p superiores a $\frac{n}{\alpha}$. En particular, ellos caracterizaron a los pesos para los cuales una extensión del operador Integral Fraccionaria resulta acotado desde los L^p débiles pesados en espacios Lipschitz adecuados. En este trabajo también se prueba una acotación de este operador actuando entre adecuados espacios Lipschitz.

En el contexto variable, los primeros resultados sobre las propiedades de I_α fueron sobre conjuntos acotados. Samko en [39] demostró la acotación desde $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, donde $q(\cdot)$ es una función que puntualmente está definida como antes, $p(\cdot)$ satisfaciendo la condición de continuidad log–Hölder local y el operador maximal acotado (más tarde se probó que la primera hipótesis implica la segunda sobre estos conjuntos). Diening, en [10], lo demostró para dominios no acotados con una hipótesis más fuerte que la continuidad log–Hölder en el infinito: que sea constante fuera de una bola suficientemente grande. Kokilashvili y Samko [25] demostraron en $\mathbb{R}^n$ con $L^{q(\cdot)}$ reemplazado por un cierto espacio L^p variable pesado. Consideraron además un operador más general $I_{\alpha(\cdot)}$ donde la constante α en la definición del operador se sustituye por una función $\alpha(\cdot)$.

Observando estos resultados, en este trabajo daremos una continuación al estudio del comportamiento del operador Integral Fraccionaria actuando sobre espacios de exponente variable e inclusive sobre espacios más generales, en la dirección planteada por [17], [20] y [28]. Más precisamente, para comenzar estudiaremos el rango de dicho operador cuando actúa sobre funciones de $L^{p(\cdot)}$ y veremos condiciones necesarias y suficientes sobre la función exponente (con valores superiores a $\frac{n}{\alpha}$) de manera tal que el mismo este acotado. Queremos destacar que la determinación de condiciones necesarias y suficientes para la acotación de operadores en el contexto variable es no usual. El objetivo de este trabajo es extener resultados logrados en [20] pero sin pesos.

En el primer capítulo daremos una revisión de las definiciones y herramientas fundamentales de los espacios de exponente variable. Además extenderemos la desigualdad de Minkowski en este contexto, lo cual nos resultará de utilidad en los resultados subsiguientes.

En el segundo capítulo, definiremos a los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como extensiones de los espacios Lipschitz clásicos. Puede consultarse el artículo de Peetre [34] como antecedentes de los mismos para el caso p constante. Luego veremos la acotación desde $L^{p(\cdot)}$ en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ bajo condiciones necesarias y suficientes sobre las funciones exponentes. Como corolario, resulta la acotación entre espacios Lipschitz adecuados. Por otro lado, definiremos a los espacios $L^{p(\cdot)}$–débil y probaremos la acotación respectiva para este espacio bajo condiciones sólo suficientes sobre $p(\cdot)$.

Abordando un camino más general, en el tercer capítulo presentaremos a los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$, introducidos por E. Nakai [31], de los cuales, como veremos, los $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ son casos particulares. Daremos condiciones sobre la función w bajo las cuales $\mathrm{bmo}_{w,1} = \mathrm{bmo}_{w,q}$ para cualquier $1 < q < \infty$. Luego, exhibiremos una caracterización puntual para las funciones en estos espacios bajo propiedades adecuadas de la función w. Como aplicación, analizaremos la caracterización puntual que resulta para las funciones en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ y veremos cómo algunas condiciones sobre la función $p(\cdot)$ pueden relajarse. Luego, analizaremos la continuidad de las funciones del espacio en términos de las propiedades de w.

Finalmente, en el cuarto y último capítulo de este trabajo, se analizará el comportamiento de la Integral Fraccionaria sobre los espacios generales definidos anteriormente. Aquí, también incluimos un estudio de propiedades de acotación de las Transformadas de Riesz sobre estos espacios, obteniendo de esta manera una extensión no pesada de resultados contenidos en [28].

Creemos que con los resultados obtenidos en este trabajo, se aportará una herramienta de suma importancia en el tratamiento de los problemas generales mencionados en los primeros párrafos.

Capítulo 1

Espacios con exponente variable

En este primer capítulo daremos una reseña de la evolución de la teoría de los espacios de Lebesgue con exponente variable. Comenzaremos con su definición y luego seguiremos con algunos resultados importantes, unos extraídos de la bibliografía y otros propios, que serán necesarios para nuestro trabajo.

1.1. El espacio $L^{p(\cdot)}$

Sea Ω un conjunto abierto y medible de $\mathbb{R}^n$ y $p : \Omega \to [1, \infty)$ una función medible que llamaremos función exponente. Denotaremos con $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ al espacio de las funciones medibles sobre Ω tales que

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, dx \,<\, \infty\,.$$

La expresión $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$ se denomina función modular y tiene las siguientes propiedades

1. $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) \geq 0$ para toda función f,

2. $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ en casi todo punto $x \in \Omega$,

3. $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(-f) = \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$ para toda función f,

4. $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$ es una función convexa; es decir $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(a\,f + (1-a)\,g) \leq a\,\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) + (1-a)\,\varrho_{p(\cdot),\Omega}(g)$ para todo $0 \leq a \leq 1$ y cualquier par de funciones medibles f y g,

5. si $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) < \infty$, entonces para toda función g tal que $|g(x)| \leq |f(x)|$ c.t.p. $x \in \Omega$ se tiene que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(g) \leq \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$,

6. si $0 < \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) < \infty$ entonces la aplicación $\lambda \to \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)$ es continua y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$,

7. si $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) < \infty$, entonces $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.

Las propiedades 1, 2, 3 y 5 se siguen inmediatamente de la definición de la función modular. Para probar 4 basta observar que la función $t \to t^q$ es convexa para todo $q \geq 1$. Más precisamente, para $0 \leq a \leq 1$ y f y g funciones medibles arbitrarias

$$\begin{aligned} \varrho_{p(\cdot),\Omega}(a\,f + (1-a)\,g) &= \int_\Omega |a\,f(x) + (1-a)\,g(x)|^{p(x)}\,dx \\ &\leq \int_\Omega \left[a\,|f(x)|^{p(x)} + (1-a)\,|g(x)|^{p(x)}\right]\,dx \\ &= a\,\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) + (1-a)\,\varrho_{p(\cdot),\Omega}(g)\;. \end{aligned}$$

Notar que la función del inciso 6 es trivialmente decreciente por la definición. Por otro lado, la continuidad y 7 son consecuencias del Teorema de la Convergencia Dominada. Estas propiedades permiten afirmar que el funcional.

$$\|f\|_{p(\cdot),\Omega} := \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \,/\, \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq 1\right\}\,, \tag{1.1.1}$$

es una norma para el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Esta norma es análoga a la definida para espacios de Orlicz conocida como norma de Luxemburgo. Para un conjunto $A \subset \Omega$ se define

$$p_+(A) := \sup_{x\in A} p(x), \qquad p_-(A) := \text{ínf}_{x\in A}\, p(x),$$

y en el caso $A = \Omega$

$$p_+ := p_+(\Omega), \qquad p_- := p_-(\Omega).$$

Los números p_+ y p_- se conocen como las características de la función exponente.

Observemos que si $p(x) = p$ es una función constante, entonces este espacio coincide con el espacio de Lebesgue L^p clásico. Es claro que si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ entonces $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} < \infty$.

Además, para $f \not\equiv 0$, si tomamos una sucesión $\gamma_n \searrow \|f\|_{p(\cdot),\Omega}$, por el Lema de Fatou tenemos

$$\begin{aligned}
\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)}{\gamma_n}\right|\right) &= \int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)}{\gamma_n}\right|\right)^{p(x)} dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\gamma_n}\right|^{p(x)} dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\gamma_n}\right) \leq 1\,,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale por la propiedad 5. Esto nos dice que

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}\right) \leq 1\,. \tag{1.1.2}$$

Por otro lado, si $p_+ < \infty$, entonces

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}\right) = 1\,.$$

Para ver esto veamos que suponer la desigualdad estricta en (1.1.2) conduce a una contradicción. En efecto, dado que para todo $0 < \lambda < \|f\|_{p(\cdot),\Omega}$ vale

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}\,\frac{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}{\lambda}\right)^{p_+} \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)} dx$$

existe un λ_0 tal que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\lambda_0}\right) \leq 1$ lo que contradice la definición de la norma.

Recordemos que en el caso p constante existe una relación entre la función modular y la norma dada por $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$. En el contexto variable esto no ocurre, sin embargo podemos establecer la siguiente relación

$$\min\left\{\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)^{\frac{1}{p_-}}, \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)^{\frac{1}{p_+}}\right\} \leq \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \leq \max\left\{\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)^{\frac{1}{p_-}}, \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)^{\frac{1}{p_+}}\right\}. \tag{1.1.3}$$

Es trivial ver que esta relación se convierte en igualdad en el caso p constante. Para mayores detalles se puede consultar el trabajo hecho por Kováčik y Rákosník ([27]) en el año 1991. Este es una de las referencias más notables en el estudio de los espacios de Lebesgue con exponente variable. Ellos probaron, entre otras cosas, que si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ entonces $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot),\Omega}\right)$ es un espacio de Banach reflexivo, extendiendo así el concepto de dualidad. Además probaron que si $p \in L^\infty(\Omega)$, entonces resulta ser un espacio separable. Posterior e independientemente, Fan and Zhao en [15] trabajaron sobre este tema.

Por último es interesante resaltar que estos espacios surgen como caso particular de espacios más generales llamados de Muzielac–Orlicz. Estos últimos están definidos a través de una función medible $M : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ tal que para todo $x \in \Omega$, la función $M(x, \cdot)$ es semicontinua inferiormente, convexa, par y satisface $\lim_{u \to 0} M(x, u) = M(x, 0) = 0$. Así, el espacio de Musielak-Orlicz $L^M(\Omega)$ consiste en todas las funciones f definidas sobre Ω tales que

$$\int_\Omega M(x, \lambda f(x))\, dx < \infty\,,$$

para algún $\lambda > 0$ (ver [30]). En particular, si $M(x, u) = u^{p(x)}$, donde la función $p(\cdot)$ es finita c.t.p. $x \in \Omega$ entonces $L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^M(\Omega)$.

En forma análoga, en la definición del modular podríamos tomar medidas diferentes a la medida de Lebesgue y obtener versiones análogas para la norma dada en (1.1.1). Además, puede generalizarse el espacio $\mathbb{R}^n$ a espacios métricos (ver [22]).

Los siguientes son algunos resultados adaptados de [27] que escribiremos por su importancia en las demostraciones de este trabajo de tesis.

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Hölder generalizada)**.** *Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $1 < p_- \le p_+ < \infty$. Entonces la desigualdad*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \le C \ \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \|g\|_{p'(\cdot),\Omega}\,,$$

vale para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, donde $p'(\cdot)$ es tal que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ y la constante C es igual a $1 + 1/p_- - 1/p_+$.

Demostración. Trivialmente podemos suponer $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} \neq 0$ y $\|g\|_{p'(\cdot),\Omega} \neq 0$. Dado que $|f(x)| < \infty$ y $|g(x)| < \infty$ para casi todo $x \in \Omega$, por la desigualdad de Young tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'(\cdot),\Omega}}\, dx &\le \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}} \right|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p'(x)} \left| \frac{g(x)}{\|g\|_{p'(\cdot),\Omega}} \right|^{p'(x)} dx \\
&\le \sup_{x\in\Omega} \frac{1}{p(x)}\ \varrho_{p(\cdot),\Omega} \left(f / \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \right) + \sup_{x\in\Omega} \frac{1}{p'(x)}\ \varrho_{p'(\cdot),\Omega} \left(g / \|g\|_{p'(\cdot),\Omega} \right) \\
&\le 1 + 1/p_- - 1/p_+ .
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.1.2 (Sobre normas equivalentes). *El espacio de Lebesgue generalizado $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ coincide con el conjunto*

$$\left\{ f : |||f|||_{p(\cdot),\Omega} := \sup_{g:\varrho_{p'(\cdot),\Omega}(g)\le 1} \int_\Omega f(x)g(x)\,dx < \infty \right\}.$$

Además, para cada función $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ vale la desigualdad

$$\|f\|_{p(\cdot),\Omega} \le |||f|||_{p(\cdot),\Omega} \le C\ \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \tag{1.1.4}$$

donde $C = 1 + 1/p_- - 1/p_+$.

Demostración. Dado que $\varrho_{p'(\cdot),\Omega}(g) \le 1$ implica que $\|g\|_{p'(\cdot),\Omega} \le 1$, por el Teorema 1.1.1 es fácil ver que la desigualdad de la derecha es válida. En efecto,

$$\begin{aligned} |||f|||_{p(\cdot),\Omega} &= \sup_{g:\varrho_{p'(\cdot),\Omega}(g)\le 1} \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \\ &\le C \sup_{g:\varrho_{p'(\cdot),\Omega}(g)\le 1} \|f\|_{p(\cdot),\Omega}\,\|g\|_{p'(\cdot),\Omega} \\ &\le C\ \|f\|_{p(\cdot),\Omega}\,. \end{aligned}$$

Por otro lado, para ver la desigualdad de la izquierda, si $|||f|||_{p(\cdot),\Omega} = \infty$ nada hay que probar. Si $|||f|||_{p(\cdot),\Omega} = 0$, veamos que $f(x) = 0$, c.t.p. $x \in \Omega$ con lo cual se tendrá que $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = 0$. Por el absurdo, suponiendo que f es positiva sobre una bola $B \subset \Omega$. Entonces, definiendo

$$g(x) = \frac{\chi_B(x)}{\|\chi_B\|_{p'(\cdot),\Omega}} > 0,$$

es claro que $\|g\|_{p'(\cdot),\Omega} = 1$ y por lo tanto

$$|||f|||_{p(\cdot),\Omega} \ge \frac{1}{\|\chi_B\|_{p'(\cdot),\Omega}} \int_B f(x)\,dx > 0\,,$$

lo cual es una contradicción.

Finalmente, si $0 < |||f|||_{p(\cdot),\Omega} < \infty$, tomemos, para f tal que $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} < \infty$ (puesto que si es infinito la desigualdad que queremos demostrar es trivial), la función $g(x) = \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}\right|^{p(x)-1} \operatorname{sig}(f(x))$. Entonces, como

$$\varrho_{p'(\cdot),\Omega}(g) = \int_\Omega |g(x)|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\,dx = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}}\right|^{p(x)} dx = 1\,,$$

tenemos que

$$|||f|||_{p(\cdot),\Omega} \geq \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx = \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \int_\Omega \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),\Omega}} \right|^{p(x)} dx = \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \,,$$

lo que prueba el Teorema.

$\square$

Por último, presentaremos otra expresión para la norma $\|\cdot\|_{p(\cdot),\Omega}$. Recordemos que en el caso constante $1 \leq p < \infty$ vale que

$$\|f\|_p^p \quad = \quad \int_\Omega |f(x)|^p\, dx \quad = \quad \int_0^\infty pt^{p-1} \int_{\{|f|>t\}} dx\, dt \ .$$

Un razonamiento análogo puede hacerse en el caso variable. Por el Teorema de Tonelli podemos escribir para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \quad &= \quad \int_\Omega \left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{\lambda}} p(x) t^{p(x)-1}\, dt \right) dx \\ &= \quad \int_0^\infty \int_\Omega p(x) t^{p(x)-1} \chi_{\left\{\frac{|f|}{\lambda}>t\right\}}(x)\, dx\, dt\,. \end{aligned}$$

Luego es claro que la norma puede calcularse como

$$\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \int_\Omega p(x) t^{p(x)-1} \chi_{\left\{\frac{|f|}{\lambda}>t\right\}}(x)\, dx\, dt \leq 1 \right\}. \tag{1.1.5}$$

Cuando no se especifique el dominio de las funciones entenderemos que es $\mathbb{R}^n$ y escribiremos $L^{p(\cdot)}$ y $\|f\|_{p(\cdot)}$ para el espacio y su norma respectivamente. En nuestro trabajo generalmente trabajaremos con $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Como hemos visto, algunas de las propiedades de los espacios clásicos de Lebesgue realmente siguen valiendo en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. También se mantiene, por ejemplo, la densidad de funciones suaves ([8], [38]). Sin embargo, otras como por ejemplo la continuidad de las traslaciones falla ([27]) y como consecuencia de ello, la convolución de f con una función $g \in L^1(\Omega)$ en general no es continua.

El siguiente resultado es un resultado propio y en él extendemos otra de las desigualdades clásicas. Este teorema será útil en los próximos capítulos.

Teorema 1.1.3 (Desigualdad de Minkowski para integrales)**.** *Sea $p(\cdot)$ una función exponente. Sea f una función a valores reales definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ medible.*

1. *Si $f(\cdot, y) \in L^{p(\cdot)}$ para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$ y la aplicación $y \longrightarrow \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)}$ está en L^1, entonces*
$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y)\, dy \right\|_{p(\cdot)} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)}\, dy$$
donde C sólo depende de las características de p.

2. *Además, si $1 < q < p_-$ entonces*
$$\left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\cdot, y)|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{p(\cdot)} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)}^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. El resultado de dualidad visto en 1.1.2 nos permite escribir
$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y)\, dy \right\|_{p(\cdot)} \leq C \sup \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, dy \right) |g(x)|\, dx\,,$$
donde el supremo se toma sobre todas las funciones g tal que $\int |g(x)|^{p'(x)} dx \leq 1$, luego, aplicando el teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder generalizada (Teorema 1.1.1) podemos escribir
$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y)\, dy \right\|_{p(\cdot)} &\leq C \sup \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) |g(x)|\, dx\, dy \\
&\leq C \sup \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}\, dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)}\, dy\,.
\end{aligned}$$

Para probar *2.* observamos que por la hipótesis sobre q, la función $\frac{p(\cdot)}{q}$ es una función exponente. Además, $\left(\frac{p(\cdot)}{q}\right)_- > 1$ y que para toda $f \in L^{p(\cdot)}$ se tiene que
$$\|f\|_{p(\cdot)}^q = \|f^q\|_{\frac{p(\cdot)}{q}}\,.$$

En efecto
$$\begin{aligned}
\|f\|_{p(\cdot)}^q &= \left(\inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \right)^q \\
&= \inf \left\{ \lambda^q > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\left\{\lambda^q > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)^q}{\lambda^q}\right|^{\frac{p(x)}{q}} dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\nu > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)^q}{\nu}\right|^{\frac{p(x)}{q}} dx \leq 1\right\} \\
&= \|f^q\|_{\frac{p(\cdot)}{q}}
\end{aligned}
$$

De esto y la primera parte podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\cdot,y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{p(\cdot)}^q &= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} |f(\cdot,y)|^q \, dy\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q}} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|\, |f(\cdot,y)|^q \,\|_{\frac{p(\cdot)}{q}} \, dy \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} \|\, |f(\cdot,y)| \,\|_{p(\cdot)}^q \, dy\,,
\end{aligned}
$$

que es nuestra segunda afirmación. □

1.2. Algunas relaciones de interés

Exhibiremos en esta sección una serie de lemas. Los primeros tres son consecuencia de las condiciones de continuidad de la función exponente. Como vimos en la introducción, algunas hipótesis fueron necesarias para lograr acotaciones de operadores maximales en el contexto variable. Recordemos que $p(\cdot)$ satisface la condición log–Hölder local si

$$
\exists\, c_0 > 0 \qquad \text{tal que} \qquad |p(x) - p(y)| \leq \frac{c_0}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})} \qquad \forall\, x, y \in \Omega, \quad (1.2.1)
$$

Por otro lado, $p(\cdot)$ satisface la condicion de decaimiento log-Hölder en el infinito si

$$
\exists\, p_\infty, c_1 > 0 \qquad \text{tal que} \qquad |p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_1}{\log(e + |x|)} \qquad \forall\, x \in \Omega. \quad (1.2.2)
$$

Cuando la función exponente $p(\cdot)$ satisfaga (1.2.1) y (1.2.2) y $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$ diremos que $p(\cdot)$ pertenece a la clase $\mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ y escribiremos $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$. No obstante, en el caso en que $\Omega = \mathbb{R}^n$ escribiremos simplemente $p \in \mathcal{P}^{\log}$.

Diening en [8] se dio cuenta que la importancia de la condición log–Hölder local radica en tener un control sobre las potencias negativas de $|B|$ para bolas B pequeñas. El resultado se resume en el siguiente

Lema 1.2.1. *Dada una función exponente $p(\cdot)$, las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *$p(\cdot)$ satisface la condición log–Hölder local dada por (1.2.1).*

2. *Para una bola B_r de centro x_0 y radio $r > 0$, vale $|B_r|^{p_-(B_r)-p_+(B_r)} \leq C$.*

Demostración. Veamos que *1.* implica *2.* Dada una bola $B(x_0, r)$, observemos primero que existe $0 < \widetilde{r} < \frac{1}{2}$, que depende sólo de la dimensión, que verifica

$$\frac{\ln(|B_r|)}{\ln(2r)} \leq 2n, \qquad \text{para todo } 0 < r < \widetilde{r};$$

basta tomar $\widetilde{r} = \text{mín}\left\{1, \sqrt[n]{w_n}/2\right\}$, donde w_n es la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Luego, si $r \geq \widetilde{r}$ la desigualdad es trivial. Si no, sean x^* y x_* puntos en $\overline{B}_r$ tales que $p_+(B_r) = p(x^*)$ y $p_-(B_r) = p(x_*)$. Luego

$$\begin{array}{rcl} |B_r|^{p_-(B_r)-p_+(B_r)} & = & |B_r|^{p(x_*)-p(x^*)} \\ \leq \quad \left(\dfrac{1}{|B_r|}\right)^{\frac{C_0}{\log\left(e+\frac{1}{|x_*-x^*|}\right)}} & \leq & \left(\dfrac{1}{|B_r|}\right)^{\frac{C_0}{\log\left(\frac{1}{|x_*-x^*|}\right)}} \quad \leq \quad \left(\dfrac{1}{|B_r|}\right)^{\frac{C_0}{\log(\frac{1}{2r})}} \\ = \quad |B_r|^{\frac{C_0}{\log(2r)}} & = & e^{C_0\frac{\log(|B_r|)}{\log(2r)}} \quad = \quad e^{2nC_0} \quad \doteq \quad C. \end{array}$$

Por otro lado, para puntos x e y distintos en $\mathbb{R}^n$, definimos $x_0 = \frac{x+y}{2}$ y $r = |x-y|$. Entonces, por hipótesis para la bola $B = B(x_0, r)$ vale

$$r^{n\left(p_-(B_r)-p_+(B_r)\right)} \leq C\,,$$

tomando logaritmo tenemos

$$\begin{array}{rcl} \big(p_-(B_r) - p_+(B_r)\big)\log r & \leq & C \\ \big(p_+(B_r) - p_-(B_r)\big)\log \dfrac{1}{r} & \leq & C\,. \end{array}$$

Si $r \geq 1$ la desigualdad es trivial. Si no, como $x, y \in B$, por la definición de r es claro que $p(\cdot)$ satisface (1.2.1). □

Para más detalles se puede consultar el trabajo de Diening [8]. Por otro lado, Cruz Uribe, Fiorenza y Neugebauer en [4] observaron que para bolas grandes relativamente lejos del origen, la condición log–Hölder en el infinito asegura el siguiente

Lema 1.2.2. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente que satisface* (1.2.2)*. Sean $\gamma, r \in \mathbb{R}$, con $0 < \gamma < r$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_0| > (1+\frac{1}{\gamma})r$. Existe una constante $C = C(n, C_\infty, \gamma)$ tal que*

$$|B_r|^{p_+(B_r)-p_-(B_r)} \leq C, \qquad \textit{para todo } r > \gamma\,.$$

donde B_r es la bola de centro x_0 y radio r.

Demostración. Observemos que todo $x \in B_r$ cumple que $|x| \geq |x_0| - |x - x_0| > (1 + \frac{1}{\gamma})r - r = \frac{r}{\gamma} > 1$. Luego, si tomamos x^* y x_* tales que $p_+(B_r) = p(x^*)$ y $p_-(B_r) = p(x_*)$, entonces

$$|B_r|^{p_+(B_r)-p_-(B_r)} \;=\; |B_r|^{p(x^*)-p(x_*)} \;\leq\; |B_r|^{|p(x^*)-p_\infty|}\,|B_r|^{|p(x_*)-p_\infty|}\,,$$

donde p_∞ es la constante de la ecuación (1.2.2). Luego, por esta hipótesis tenemos

$$\begin{aligned}
|B_r|^{p_+(B_r)-p_-(B_r)} &= |B_r|^{\frac{C_\infty}{\log(e+|x^*|)}}\,|B_r|^{\frac{C_\infty}{\log(e+|x_*|)}} \\
&\leq (w_n r^n)^{\frac{2C_\infty}{\log(e+\frac{r}{\gamma})}} \\
&\leq w_n^{2C_\infty}\,\gamma^{2nC_\infty}\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{\frac{2nC_\infty}{\log(e+\frac{r}{\gamma})}} \\
&\leq w_n^{2C_\infty}\,\gamma^{2nC_\infty}\,e^{2nC_\infty\frac{\log(e+\frac{r}{\gamma})}{\log(e+\frac{r}{\gamma})}} \\
&= (w_n\gamma^n e^n)^{2C_\infty} \;\doteq\; C\,,
\end{aligned}$$

lo que prueba el lema. $\square$

Observemos que, en el lema anterior podemos elegir un γ tan chico como queramos a condición de alejar suficientemente el centro de la bola.

Daremos ahora una serie de lemas técnicos que establecen relaciones entre la medida de Lebesgue de un conjunto acotado A y su norma en los espacios de Lebesgue de exponente variable. Generalmente usaremos este resultado para bolas.

Lema 1.2.3 (Estimaciones para conjuntos de medida pequeña)**.** *Para todo conjunto acotado A cuya medida de Lebesgue sea menor que* 1*, se verifica*

$$|A|^{\frac{1}{p_-(A)}} \leq \|\chi_A\|_{p(\cdot)} \leq |A|^{\frac{1}{p_+(A)}}\,. \tag{1.2.3}$$

Demostración. Observemos que

$$1 = \frac{|A|}{|A|} = \int_A \frac{1}{|A|}\, dx \geq \int_A \left[\left(\frac{l}{|A|} \right)^{\frac{1}{p_+(A)}} \right]^{p(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\chi_A(x)}{|A|^{\frac{1}{p_+(A)}}} \right]^{p(x)} dx\, ,$$

con lo cual tomando $\lambda = |A|^{\frac{1}{p_+(A)}}$ se tiene la desigualdad de la derecha de (1.2.3). Un razonamiento análogo permite probar que

$$1 \leq \int_A \left[\left(\frac{1}{|A|} \right)^{\frac{1}{p_-(A)}} \right]^{p(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\chi_A(x)}{|A|^{\frac{1}{p_-(A)}}} \right]^{p(x)} dx\, ,$$

con lo cual tomando $\lambda = |A|^{\frac{1}{p_-(A)}}$ se tiene la desigualdad que queríamos. $\square$

Lema 1.2.4 (Relaciones para conjuntos de medida grande)**.** *Para todo conjunto acotado A cuya medida de Lebesgue sea mayor que 1, se verifica*

$$|A|^{\frac{1}{p_+(A)}} \leq \|\chi_A\|_{p(\cdot)} \leq |A|^{\frac{1}{p_-(A)}}\, .$$

Demostración. La demostración es análoga a la aplicada en la demostración del lema anterior con las modificaciones correspondientes. $\square$

Introducimos ahora, para cada bola B, el número p_B definido como $\frac{1}{p_B} = \frac{1}{|B|} \int_B \frac{1}{p(y)}\, dy$. Esta denifición aparece en la bibliografía en [9]. Los siguientes lemas mostrarán algunas relaciones interesantes.

Lema 1.2.5. *Para toda bola B de radio $r < 1$ se tiene $\|\chi_B\|_{p(\cdot)} \approx |B|^{\frac{1}{p_B}}$.*

Demostración. Dado que $1/p_+(B) \leq 1/p(y) \leq 1/p_-(B)$ para todo $y \in B$, se tiene que $p_-(B) \leq p_B \leq p_+(B)$. Por el lema 1.2.3 y la condición log–Hölder local

$$|B|^{\frac{1}{p_B}} \leq |B|^{\frac{1}{p_+(B)}} \leq C\ |B|^{\frac{1}{p_-(B)}} \leq C\ \ \|\chi_B\|_{p(\cdot)} \leq C\ |B|^{\frac{1}{p_+(B)}} \leq C\ |B|^{\frac{1}{p_-(B)}} \leq C\ |B|^{\frac{1}{p_B}}\, ,$$

con lo que queda probado el lema. $\square$

Lema 1.2.6. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ y satisface la condición log–Hölder en el infinito dada por la ecuación (1.2.2). Luego, para toda bola B de centro x_0 y radio $r > 1/8$ se tiene que $|B|^{\frac{1}{p_B}} \approx |B|^{\frac{1}{p_\infty}}$.*

Demostración. Dada $B = B(x_0, r)$, queremos ver que existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1|B|^{\frac{1}{p_B}} \le |B|^{\frac{1}{p_\infty}} \le c_2|B|^{\frac{1}{p_B}}.$$

Es claro que si $\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty} \le 0$, la desigualdad de la izquierda es inmediata. Por otra parte, si $\frac{1}{p_\infty} - \frac{1}{p_B} \le 0$, lo es la desigualdad de la derecha. Así que para que el resultado quede completamente probado basta ver que

$$|B|^{\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right|} \le C\,.$$

Para ello, observemos el exponente. Por la continuidad log–Hölder de $p(\cdot)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| &= \left|\frac{1}{|B|}\int_B \frac{1}{p(y)}\,dy - \frac{1}{|B|}\int_B \frac{1}{p_\infty}\,dy\right| \\
&= \left|\frac{1}{|B|}\int_B \frac{p_\infty - p(y)}{p(y)p_\infty}\,dy\right| \\
&\le C\,\frac{1}{|B|}\int_B |p(y) - p_\infty|\,dy \\
&\le C\,\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \frac{1}{\log(e+|y|)}\,dy \\
&\le C\,\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} \frac{1}{\log(e+|y|)}\,dy
\end{aligned}$$

Si $n > 1$, haciendo el cambio de variables $y \to rz$, con $z \in B(0,1)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| &\le C\int_{B(0,1)} \frac{1}{\log(e+r|z|)}\,dz \\
&\le \frac{C}{\log(e+r)}\int_0^1 \frac{s^{n-1}\log(e+r)}{\log(e+rs)}\,ds. \qquad (1.2.4) \\
&\le \frac{C}{\log(e+r)}.
\end{aligned}$$

donde la integral en (1.2.4) está acotada por 1 puesto que el integrando es una función positiva creciente que toma el valor 1 en el extremo. En efecto

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^{n-1}\log(e+r)}{\log(e+rs)}\right) = \frac{s^{n-2}\log(e+r)}{\log^2(e+rs)}\left((n-1)\log(e+rs) - \frac{sr}{e+rs}\right) > 0\,,$$

pues

$$(n-1)\log(e+rs) \ge \log(e+rs) \ge 1 > \frac{sr}{e+rs}.$$

Si $n = 1$ en cambio, para $1/8 < r \leq e^e$ la estimación resulta sencilla dado que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| &\leq \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} \frac{dy}{\log(e+|y|)} \\ &= \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \frac{dy}{\log(e+|y|)} \\ &\leq 1 \leq \frac{\log(e+e^e)}{\log(e+r)} = \frac{C}{\log(e+r)}.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $r > e^e$, dado que

$$\begin{aligned}\int_{e^e}^{r} \frac{dt}{\log(e+t)} &= \log(\log t) + \log t + \frac{(\log t)^2}{2.2!} + \frac{(\log t)^3}{3.3!} + \ldots\Big|_{e^e}^{r} \\ &\leq \log(\log r) + \log r + \frac{(\log r)^2}{2.2!} + \frac{(\log r)^3}{3.3!} + \ldots \\ &= H(r),\end{aligned}$$

podemos acotar

$$\int_{B(0,r)} \frac{dy}{\log(e+|y|)} = 2\int_0^r \frac{dt}{\log(e+t)} \leq 2C \ + 2\int_{e^e}^{r} \frac{dt}{\log(e+t)} \leq 2C\ H(r)\,.$$

Para este rango de valores de r, es claro que $e + r \leq 2r \leq r^2$, luego $\frac{\log(e+r)}{\log r} \leq 2$, por lo tanto si probamos que

$$\frac{H(r)}{r} \leq \frac{C}{\log r}\,, \tag{1.2.5}$$

tenemos

$$\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| \leq C\ \frac{H(r)}{r} \leq \frac{C}{\log r} \leq \frac{C}{\log(e+r)}\,.$$

O, equivalentemente

$$\log(e+r)\ \left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right| \leq C \quad \Leftrightarrow \quad (e+r)^{\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right|} \leq C\,,$$

con lo cual

$$|B|^{\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right|} \leq C\ (r^n)^{\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right|} \leq C\ \left[(e+r)^{\left|\frac{1}{p_B} - \frac{1}{p_\infty}\right|}\right]^n \leq C\,.$$

que es lo que queremos probar. Así, sólo nos resta ver (1.2.5). Ahora bien:

$$\frac{\log r\ H(r)}{r} = \frac{1}{r}\left(\log r\ \log(\log r) + (\log r)^2 + \frac{(\log r)^3}{2.2!} + \frac{(\log r)^4}{3.3!} + \ldots\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{r}\left(\log r\ \log(\log r)+\log r+2\frac{(\log r)^2}{2!}+\frac{3}{2}\frac{(\log r)^3}{3!}+\frac{4}{3}\frac{(\log r)^4}{4!}+\dots\right)\\
&\leq \frac{C}{r}\left(\log r\ \log(\log r)+2\,e^{\log r}\right)\\
&= C\left(\frac{\log r\ \log(\log r)}{r}+2\,\frac{r}{r}\right)\\
&= C\,\frac{\log r\ \log(\log r)}{r}+C \quad\leq\quad C.
\end{aligned}
$$

donde la última acotación vale pues la función $\phi(r) = \frac{\log r\ \log(\log r)}{r}$ es decreciente para $r > e^e$. En efecto, veamos que $\phi'(r) = \frac{\log(\log r)+1-\log r\ \log(\log r)}{r^2} < 0$ para dichos valores. Sea $m = \log r$, entonces para $m > e$ tenemos

$$\frac{1}{m-1} < \frac{1}{e-1} < 1 < \log m,$$

luego

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m-1} < \log m \quad &\Rightarrow \quad 1 < \log m\ (m-1)\\
&\Rightarrow \quad \log m + 1 - m\ \log m < 0\\
&\Rightarrow \quad \log(\log r) + 1 - \log r\ \log(\log r) < 0\\
&\Rightarrow \quad \phi'(r) < 0 \quad \text{para todo } r > e^e.
\end{aligned}
$$

□

Necesitaremos ahora del concepto de partición ordenada. Esta fue presentada por Peter Hästo en [23].

Definición 1.2.7. Sea $\{Q_j\}_j$ una partición de $\mathbb{R}^n$ en cubos de igual tamaño. Diremos que es una *partición ordenada de cubos* si los cubos Q_j tienen el siguiente orden: $i > j$ siempre que $\operatorname{dist}(0, Q_i) > \operatorname{dist}(0, Q_j)$.

Para una función exponente $p \in \mathcal{P}^{\log}$ y una partición ordenada, se define la siguiente norma sobre $L^{p(\cdot)}$ mediante la expresión

$$\|f\|_{p(\cdot),\{Q_j\}} = \left\|\|f\|_{p(\cdot),Q_j}\right\|_{l^{p_\infty}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|f\|_{p(\cdot),Q_j}^{p_\infty}\right)^{\frac{1}{p_\infty}}. \tag{1.2.6}$$

Notar que $\|f\|_{p,\{Q_j\}} = \|f\|_p$ en el caso p constante. Exhibiremos ahora un resultado muy importante para nuestro trabajo.

Teorema 1.2.8 (Theorem 2.4 en [23]). *Si $p \in \mathcal{P}^{\log}$, entonces $\|f\|_{p(\cdot),\{Q_j\}} \approx \|f\|_{p(\cdot)}$, donde $\{Q_j\}_j$ son una partición ordenada de cubos.*

Para finalizar expondremos un lema que será de gran utilidad en las demostraciones del siguiente capítulo.

Lema 1.2.9. *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}$, y B una bola de radio $r > 1/8$, entonces*

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot)} \approx |B|^{\frac{1}{p_\infty}}.$$

Demostración. Para $1/8 < r < 1$, el resultado es una simple observación de los lemas 1.2.5 y 1.2.6 puesto que $\|\chi_B\|_{p(\cdot)} \approx |B|^{\frac{1}{p_B}} \approx |B|^{\frac{1}{p_\infty}}$.
Consideremos $\{Q_j\}_j$ la partición ordenada de cubos de tamaño $1/2$ y centros en coordenadas $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$, con n y m enteros. Sea B una bola de radio $r > 1$, entonces $B = \bigcup_j (B \cap Q_j)$, consideremos los conjuntos $E_j = B \cap 2Q_j$ siempre que $B \cap Q_j \neq \emptyset$ y $E_j = \emptyset$ en caso contrario, donde $2Q_j$ es un cubo del mismo centro que Q_j y lado el doble. Como los conjuntos E_j no son bolas, por construcción es posible encontrar bolas B_j^- y B_j^+ de radios $r_- = 1/8$ y $r_+ = \sqrt{n}/2$ tales que $B_j^- \subset E_j \subset B_j^+$. Como la medida de Lebesgue duplica podemos escribir

$$|B_j^-|^{\frac{1}{p_\infty}} \approx \left\|\chi_{B_j^-}\right\|_{p(\cdot)} \leq \|\chi_{E_j}\|_{p(\cdot)} \leq \left\|\chi_{B_j^+}\right\|_{p(\cdot)} \approx |B_j^+|^{\frac{1}{p_\infty}} \leq C\ |B_j^-|^{\frac{1}{p_\infty}}.$$

Luego

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{p_\infty} \approx \sum_{j=1}^{\infty} \|\chi_{B\cap Q_j}\|_{p(\cdot)}^{p_\infty} \leq C\ \sum_{j=1}^{\infty} \|\chi_{E_j}\|_{p(\cdot)}^{p_\infty}$$
$$\leq C\ \sum_{j=1}^{\infty} |B_j^-| \leq C\ \sum_{j=1}^{\infty} |B_j| \leq C\ \sum_{j=1}^{\infty} |B_j^+| \leq C\ |B|,$$

con lo cual $\|\chi_B\|_{p(\cdot)} \leq C|B|^{\frac{1}{p_\infty}}$.

Por otro lado, la familia $\{2Q_j\}_j$ no es una partición ordenada, sin embargo es posible extraer una cantidad finita de subfamilias $\{2Q_j^1\}_j, \{2Q_j^2\}_j, \ldots, \{2Q_j^k\}_j$ que sí lo son, donde la cantidad k depende de la dimensión. Esto es posible porque tienen solapamiento acotado, entonces por el teorema 1.2.8 tenemos

$$|B| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |B \cap Q_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |B_j^+| \leq C\ \sum_{j=1}^{\infty} \|\chi_{E_j}\|_{p(\cdot)}^{p_\infty}$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \chi_{B \cap 2Q_j^i} \right\|_{p(\cdot)}^{p_\infty} \leq C \sum_{i=1}^{k} \|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{p_\infty} \leq C \ \|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{p_\infty} .$$

□

Independientemente y con otra técnica, Cruz-Uribe, Fiorenza y Neugebauer prueban el lema anterior en el contexto pesado (ver [7]).

Capítulo 2

Integral Fraccionaria en espacios $L^{p(\cdot)}$ y $L^{p(\cdot)}$ débil

Como primera instancia definiremos a los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ que para el caso p constante, en cierto rango resultan los espacios Lipschitz clásicos. Veremos luego que, bajo condiciones necesarias y suficientes sobre las funciones exponentes $p(\cdot)$, el operador Integral Fraccionaria resulta acotado desde $L^{p(\cdot)}$ en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$.

Luego, definiremos el espacio de Lebesgue generalizado $L^{p(\cdot)}$–débil y probaremos la acotación respectiva para este espacio bajo condiciones sólo suficientes sobre $p(\cdot)$. En este punto se utiliza una condición más fuerte que en el resultado anterior.

2.1. Definiciones y resultados previos

Definición 2.1.1. Sea $0 < \alpha < n$, $p(\cdot)$ una función exponente tal que $1 < p(x) < \infty$. Definimos el espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como el conjunto de las funciones $f \in L^1_{\text{loc}}$ para las cuales existe una constante C tal que

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}} \int_B |f(x) - m_B f| \, dx \leq C \,, \tag{2.1.1}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, donde $m_B f$ es el promedio de f sobre B. Denotaremos con $\|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}}$ al ínfimo de las constantes que cumplen (2.1.1).

Dado que $\|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} = 0$ no implica que $f \equiv 0$, $\|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}}$ no es una norma, aunque sí lo es sobre el conjunto de las funciones módulo las constantes. Por otro lado, observemos que en el caso constante, si $p = \frac{n}{\alpha}$, entonces $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)} = \mathrm{BMO}$, el espacio de las funciones de oscilación media acotada. Si $p < \frac{n}{\alpha}$ entonces tenemos un espacio de Morrey y en el caso en que $p > \frac{n}{\alpha}$ tenemos un espacio Lipschitz integral. Es interesante consultar [34] para tener una visión unificadora de los espacios de Morrey y Lipschitz clásicos.

Por otra parte, los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ guardan una sútil relación con los espacios de Campanato de exponente variable introducidos en [14].

Definición 2.1.2 (Definición 4.1 de [14])**.** Sea $p : \Omega \to [1,\infty]$ y $\lambda : \Omega \to [0,\infty)$ dos funciones medibles tales que $p, \lambda \in \mathcal{P}^{\log}$. Una definición del espacio de Campanato de exponente variable es

$$\mathcal{L}^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) = \left\{ f \in L^{q(\cdot)}(\Omega) : \sup_{x_0\in\Omega,\rho>0} \rho^{-\lambda(x_0)} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |f(x) - f_{\Omega(x_0,\rho)}|^{q(x)}\, dx < +\infty \right\}.$$

donde $\Omega(x_0,\rho) = \Omega \cap Q(x_0,\rho)$ y $Q(x_0,\rho)$ denota un cubo de $\mathbb{R}^n$ con centro en x_0 y longitud de sus lados 2ρ.

Dado que para bolas de tamaño acotado se cumple que $|B|^{p_-(B)} \approx |B|^{p(x)} \approx |B|^{p_+(B)}$ para cada $x \in B$ siempre que $p(\cdot)$ satisfaga (3.2.6), entonces restringiendo la definición de nuestros espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ a tales dominios acotados Ω los mismos coinciden con $\mathcal{L}^{1,\alpha+n/p'(x)}(\Omega)$.

Volviendo ahora a nuestra definición de los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ notemos que para una función f localmente integrable se verifica que

$$\begin{aligned} \int_B |f(x) - m_B f|\, dx &= \int_B \left| f(x) - \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\, dy \right| dx \\ &\le \frac{1}{|B|}\int_B\int_B |f(x)-f(y)|\, dy\, dx \\ &\le 2\int_B |f(x) - m_B f|\, dx\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos una versión equivalente para el espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como el conjunto de las funciones tales que

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}-1}\, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}} \int_B\int_B |f(x)-f(y)|\, dy\, dx \le C\,. \tag{2.1.2}$$

La siguiente proposición será de gran utilidad en la demostración del Teorema principal de este capítulo.

Proposición 2.1.3. *Dados $0 < \alpha < n$, $p(\cdot)$ una función exponente y f una función en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$, entonces*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \quad\leq\quad \sup_{B\subset\mathbb{R}^n}\inf_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_B\|_{p'(\cdot)}}\int_B|f(x)-a|\,dx \quad\leq\quad \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}}.$$

Demostración. Para cada bola B definimos

$$R_B(f)=\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_B\|_{p'(\cdot)}}\int_B|f(x)-m_Bf|\,dx\,,$$

entonces, por definición tenemos

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}}=\text{ínf}\{C>0:\text{cumplen }(2.1.1)\}=\sup_{B\subset\mathbb{R}^n}R_B(f)\,.$$

Así, bastará probar que para toda bola

$$\frac{1}{2}R_B(f)\quad\leq\quad\inf_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_B\|_{p'(\cdot)}}\int_B|f(x)-a|\,dx\quad\leq\quad R_B(f)\,.$$

La desigualdad de la derecha es trivial. Por otro lado, por tratarse de un ínfimo, para cada $\varepsilon>0$, existe un número $a_B\in\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_B\|_{p'(\cdot)}}\int_B|f(x)-a_B|\,dx\leq\inf_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_B\|_{p'(\cdot)}}\int_B|f(x)-a|\,dx\quad+\quad\varepsilon\,.$$

Puesto que

$$\int_B|m_Bf-a_B|\,dx=\left|\int_B f(x)\,dx-\int_B a_B\,dx\right|\leq\int_B|f(x)-a_B|\,dx\,,$$

se tiene

$$\begin{aligned}\int_B|f(x)-m_Bf|\,dx &\leq \int_B|f(x)-a_B|\,dx+\int_B|m_Bf-a_B|\,dx\\ &\leq 2\int_B|f(x)-a_B|\,dx\,.\end{aligned}$$

Así es claro que

$$R_B(f)\leq 2\inf_{a\in\mathbb{C}}\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_B\|_{p'(\cdot)}}\int_B|f(x)-a|\,dx\quad+\quad 2\varepsilon\,.$$

Como ε es arbitrario queda probada la primera desigualdad y con ello la proposición. $\square$

Definición 2.1.4. Dado $0 < \alpha < n$, diremos que una función exponente $p(\cdot)$ pertenece a la clase P_α, si existe una constante positiva C tal que

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq C \; |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \;, \tag{2.1.3}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, donde x_0 denota el centro de B. En tal caso, escribiremos $p \in P_\alpha$.

Definición 2.1.5. Diremos que una función exponente $p(\cdot)$ satisface la condición D, si existe una constante positiva C tal que

$$\left\|\chi_{B(x,2r)}\right\|_{p(\cdot)} \leq C \; \left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p(\cdot)} \;,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$. Es tal caso, escribiremos $p \in D$.

Proposición 2.1.6. *Si $p \in P_\alpha$ entonces $p' \in D$.*

Demostración. Sea $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$, por la hipótesis sobre $p(\cdot)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} &= |B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} + 1} \left\| \frac{\chi_{2B}}{|B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} + 1}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \; |B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} + 1} \left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n}}{\left(|B|^{\frac{1}{n}} + |x_0 - \cdot|\right)^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \; |B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} + 1} \left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{\left(|x_0 - \cdot|\right)^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} + \; C \; |B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} + 1} \left\| \frac{\chi_B}{\left(|B|^{\frac{1}{n}} + |x_0 - \cdot|\right)^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \; \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} + \; |B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} + 1} \left\| \frac{\chi_B}{|B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} + 1}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \; \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \;.
\end{aligned}$$

Luego, $p' \in D$. □

Observación 2.1.7. Dado que para una función $p(\cdot)$

$$\frac{1}{(p')_+} = \left(\frac{1}{p'}\right)_- = \left(1 - \frac{1}{p}\right)_- = 1 - \frac{1}{p_-} \,,$$

$$\frac{1}{(p')_-} = \left(\frac{1}{p'}\right)_+ = \left(1 - \frac{1}{p}\right)_+ = 1 - \frac{1}{p_+} \,,$$

al considerar $p'(\cdot)$ en lugar de $p(\cdot)$, para un conjunto acotado A cuya medida de Lebesgue es menor que 1, por el lema 1.2.3 podemos concluir que

$$a_1|A|^{1-\frac{1}{p_+(A)}} \leq \|\chi_A\|_{p'(\cdot)} \leq a_2|A|^{1-\frac{1}{p_-(A)}}.$$

Por otro lado, para un conjunto A de medida mayor que 1, por el lema 1.2.4

$$b_1|A|^{1-\frac{1}{p_-(A)}} \leq \|\chi_A\|_{p'(\cdot)} \leq b_2|A|^{1-\frac{1}{p_+(A)}}.$$

La siguiente proposición muestra que la clase de funciones exponente P_α es no vacía.

Proposición 2.1.8. *Consideremos en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, el conjunto $E = \bigcup E_j$ donde E_j son bolas de radio $1/4$ y centradas en $x_j = (j, 0, \ldots, 0), j \in \mathbb{Z}$ y una función continua $p(\cdot)$ no constante sobre cada B_j y $p(x) = p_-$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - E$. Si además*

1. *$p(\cdot)$ satisface la condición log-Hölder local dado por (1.2.1),*
2. *$\frac{n}{\alpha} < p_- < p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$ para $0 < \alpha < n$ y*
3. *$\frac{n}{p_-} - \frac{1}{p_+} \leq n - 1$.*

entonces $p \in P_\alpha$.

Demostración. Es claro que la función $p(\cdot)$ así definida es una función exponente. Ahora, dada una bola $B = B(x_0, r)$ en $\mathbb{R}^n$ debemos ver que

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)},$$

donde C es independiente de la bola B. Consideremos para $k = 1, 2, \ldots$, las coronas crecientes $\Omega_k = \left\{y \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1}r \leq |x_0 - y| < 2^k r\right\}$, y los conjuntos

$$V_k = \Omega_k \cap E, \qquad F_k = \Omega_k \cap E^c, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

es decir, los subconjuntos de cada corona en donde la función $p(\cdot)$ es variable y en donde es constante. Con esta notación escribiremos $B_k = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^k \Omega_i\right)$. Entonces

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{\chi_{\Omega_k}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}r)^{\alpha-n-1}\left\|\chi_{\Omega_k}\right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k})^{\alpha-n-1}\left\|\chi_{\Omega_k}\right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k})^{\alpha-n-1}\left(\left\|\chi_{F_k}\right\|_{p'(\cdot)}+\left\|\chi_{V_k}\right\|_{p'(\cdot)}\right). \quad (2.1.4)
\end{aligned}$$

Estimemos ahora las últimas normas. Para ello, distinguimos dos casos según el tamaño de la bola original $B(x_0,r)$

- $|B|>1$.

  Para estas bolas, es claro que $|F_k|>0$ para todo k. Por otro lado, como $p(x)=p_-$ para todo $x\in\mathbb{R}^n-E$, tenemos que $p_-(B)=p_-$, luego para el primer sumando estimamos

$$\left\|\chi_{F_k}\right\|_{p'(\cdot)}=|F_k|^{1-\frac{1}{p_-}}\leq|B_k|^{1-\frac{1}{p_-}}=2^{kn(1-\frac{1}{p_-})}|B|^{1-\frac{1}{p_-(B)}}\leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})}\left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)},$$

  donde en la última desigualdad usamos la observación 2.1.7. Por otro lado, para estimar $\left\|\chi_{V_k}\right\|_{p'(\cdot)}$ distinguimos

  - $|V_k|<1$. Dado que $V_k\subset B_k$ para todo k, $|B_k|>1$ y $B\subset B_k$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{V_k}\right\|_{p'(\cdot)} &\leq C\ |V_k|^{1-\frac{1}{p_-(V_k)}} \leq C\ |V_k|^{1-\frac{1}{p_-(B_k)}} \\
&\leq C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_-(B_k)}} \leq C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_-(B)}} \\
&\leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_-(B)})}|B|^{1-\frac{1}{p_-(B)}} \leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})}\left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)}.
\end{aligned}$$

  - $|V_k|>1$. Por construcción observamos que la mayor cantidad de bolas E_j que la corona Ω_k puede intersecar es $4\,2^kr$. Luego, es claro que $|V_k|\leq C\ 2^kr$, con lo cual por 3

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{V_k}\right\|_{p'(\cdot)} &\leq C\ |V_k|^{1-\frac{1}{p_+(V_k)}} \leq C\ (2^kr)^{1-\frac{1}{p_+}} \\
&\leq C\ (2^kr)^{n-\frac{n}{p_-}} = C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_-(B)}} \\
&\leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})}\left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)}.
\end{aligned}$$

- $|B| < 1$

Nuevamente, estimemos primero $\|\chi_{F_k}\|_{p'(\cdot)}$. En este caso, dado que B puede estar contenida en E, no necesariamente $p_-(B) = p_-$. Entonces, si $F_k = \varnothing$ la desigualdad es trivial. Si $F_k \neq \varnothing$ entonces $p_-(F_k) = p_- = p_-(B_k)$

$$\begin{aligned}
\|\chi_{F_k}\|_{p'(\cdot)} &= |F_k|^{1-\frac{1}{p_-}} \leq |B_k|^{1-\frac{1}{p_-}} \\
&= |B_k|^{1-\frac{1}{p_+(B_k)}} |B_k|^{\frac{1}{p_+(B_k)}-\frac{1}{p_-(B_k)}} \\
&= 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})} |B|^{1-\frac{1}{p_+(B)}} \left(|B_k|^{p_-(B_k)-p_+(B_k)}\right)^{1/p_-^2} \\
&\leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\ .
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se obtiene mediante la condición de continuidad local (1.2.1) y nuevamente la observación 2.1.7.

Por otro lado, para estimar $\|\chi_{V_k}\|_{p'(\cdot)}$

- $|V_k| < 1$. Como $B_k \subset V_k$, para cada k tenemos que $p_-(B_k) \leq p_-(V_k)$, por lo tanto

$$\|\chi_{V_k}\|_{p'(\cdot)} \leq C\ |V_k|^{1-\frac{1}{p_-(V_k)}} \leq C\ |V_k|^{1-\frac{1}{p_-(B_k)}} \leq C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_-(B_k)}}\ .$$

  En el caso que $|B_k| \leq 1$ hacemos

$$\|\chi_{V_k}\|_{p'(\cdot)} \leq C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_+(B_k)}} \left(|B_k|^{p_-(B_k)-p_+(B_k)}\right)^{1/p_-^2} \leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\ .$$

  Por otro lado, si $|B_k| > 1$

$$\begin{aligned}
\|\chi_{V_k}\|_{p'(\cdot)} &\leq C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_-(B_k)}} \leq C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_-(B)}} \leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})} |B|^{1-\frac{1}{p_-(B)}} \\
&\leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})} |B|^{1-\frac{1}{p_+(B)}} \left(|B|^{p_-(B)-p_+(B)}\right)^{1/p_-^2} \leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\ .
\end{aligned}$$

- $|V_k| > 1$. En este caso, trivialmente $|B_k| > 1$. Por otro lado, aplicando el mismo razonamiento que antes, tenemos una estimación para $|V_k|$. Luego, por 3 y la observación 2.1.7 tenemos

$$\|\chi_{V_k}\|_{p'(\cdot)} \leq |V_k|^{1-\frac{1}{p_+(V_k)}} \leq C\ (2^k r)^{1-\frac{1}{p_+}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\ (2^k r)^{n-\frac{n}{p_-}} \quad \leq \quad C\ |B_k|^{1-\frac{1}{p_+(B)}} \\
&\leq C\ 2^{kn(1-\frac{1}{p_+})}\, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\ .
\end{aligned}$$

Volviendo a (2.1.4), puesto que $p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$, de todas las estimaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} &\leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1} \sum_{k=1}^{\infty} (2^k)^{\alpha-n-1} \left(\|\chi_{V_k}\|_{p'(\cdot)} + \|\chi_{F_k}\|_{p'(\cdot)} \right) \\
&\leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \sum_{k=1}^{\infty} (2^k)^{\alpha-n-1} (2^k)^{n-\frac{n}{p_+}} \\
&\leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\, .
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

2.2. Acotación en $L^{p(\cdot)}$

Con las definiciones que hasta aquí se han dado, enunciaremos uno de los resultados principales de este capítulo: la acotación del operador Integral Fraccionaria bajo una condición necesaria y suficiente de la función exponente.

Teorema 2.2.1. *Dado $0 < \alpha < n$, si $p(\cdot)$ es una función exponente tal que $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, luego las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *El operador I_α puede ser extendido a un operador lineal acotado $\widetilde{I}_\alpha$ desde $L^{p(\cdot)}$ en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ mediante la expresión*

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right) f(y)\, dy\, .$$

2. *La función exponente $p(\cdot)$ está en la clase P_α.*

Demostración. Veamos que *2.* implica *1.* Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, tomemos $B = B(x_0, r)$ y $\widetilde{B} = B(x_0, 2r)$. Definimos, para cada función f localmente integrable, el número

$$a_B = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1-\chi_{\widetilde{B}}(y)}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right) f(y)\, dy\, ,$$

y la función

$$T_B(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{\widetilde{B}}(y)}{|x_0-y|^{n-\alpha}} \right) f(y)\, dy\,.$$

Dado que formalmente $\widetilde{I}_\alpha f(x) = a_B + T_B(x)$, para probar la buena definición del operador, probaremos que $|a_B| < \infty$ y que $|T_B(x)| < \infty$ c.t.p. $x \in B(x_0, r)$. Hecho esto, para una sucesión creciente de bolas B_k con centro en el origen y radio r_k, tenemos asociados conjuntos T_k de medida cero sobre los cuales el operador no está definido. Denotando ahora $T = \cup T_k$, el operador $\widetilde{I}_\alpha f(x)$ resulta finito para todo $x \in \mathbb{R}^n - T$, o equivalentemente, puesto que $|T| = 0$, en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, observemos que la definición de $\widetilde{I}_\alpha f(x)$ no depende de la bola elegida, esto es, para B_1 y B_2 bolas arbitrarias si $|T_{B_1}(x)| < \infty$, entonces también $|T_{B_2}(x)| < \infty$ y además,

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = a_{B_1} + T_{B_1}(x) = a_{B_2} + T_{B_2}(x)\,.$$

Veamos entonces primero que $|a_B| < \infty$. Para ello, tomemos $\rho = \max\{|x_0|, 2r\}$ y escribimos

$$|a_B| \leq |a_B^1| + |a_B^2|\,,$$

donde dividimos el dominio de la integral en $B(0, 2\rho)$ y su complemento. Entonces, por la desigualdad de Hölder generalizada se tiene

$$\begin{aligned}
|a_B^1| &\leq \int\limits_{B(0,2\rho)} \left| \frac{1-\chi_{\widetilde{B}}(y)}{|x_0-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right| |f(y)|\, dy \\
&\leq \int\limits_{\substack{|y|<2\rho \\ |x_0-y|>2r}} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_{\substack{|y|<2\rho \\ |y|>1}} \frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}\, dy \\
&\leq C\ r^{\alpha-n} \int\limits_{|y|<2\rho} |f(y)|\, dy + C \int\limits_{|y|<2\rho} |f(y)|\, dy \\
&\leq C\ r^{\alpha-n} \|f\|_{p(\cdot)} \left\|\chi_{B(0,2\rho)}\right\|_{p'(\cdot)} \quad < \quad \infty\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, vía el Teorema del valor medio, nuevamente la desigualdad de Hölder generalizada y la hipótesis *2.* podemos decir que

$$|a_B^2| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2\rho)} \left| \frac{1-\chi_{\widetilde{B}}(y)}{|x_0-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right| |f(y)|\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\,\rho \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2\rho)} \frac{|f(y)|}{|x_\xi - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \\
&\leq C\,\rho \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2\rho)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \\
&\leq C\,\|f\|_{p(\cdot)} \left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B(0,2\rho)}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} < \infty,
\end{aligned}
$$

donde x_ξ es un punto del segmento que une x_0 con el origen de coordenadas. Dado que

$$|x_0 - y| \leq |x_0 - x_\xi| + |x_\xi - y| \leq |x_0| + |x_\xi - y| \leq \rho + |x_\xi - y| \leq 2|x_\xi - y|,$$

podemos cambiar x_ξ por x_0 en la última estimación. Veamos ahora que $T_B(x)$ es finito en casi todo punto de $B(x_0, r)$. Por definición podemos estimar

$$|T_B(x)| \leq \left| \int_{\widetilde{B}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n - \widetilde{B}} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} \right) f(y)\,dy \right|.$$

Luego, integrando sobre B la desigualdad anterior basta con estimar cada sumando por separado. Para el primero, por el Teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_B \left| \int_{\widetilde{B}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \right| dx &\leq \int_{\widetilde{B}} \Big(\int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-\alpha}} \Big) |f(y)|\,dy \\
&\leq \int_{\widetilde{B}} \Big(\int_B \frac{dx}{|x|^{n-\alpha}} \Big) |f(y)|\,dy \\
&\leq C\, r^\alpha \, \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)} \, \|f\|_{p(\cdot)} < \infty.
\end{aligned}
$$

Para el segundo, nuevamente por el Teorema del valor medio y la hipótesis *2.* tenemos

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n - \widetilde{B}} \left| \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} \right| |f(y)|\,dy &\leq C\,|B|^{\frac{1}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n - \widetilde{B}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \\
&\leq C\,|B|^{\frac{1}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}}\,dy \\
&\leq C\,|B|^{\frac{1}{n}} \left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \\
&\leq C\,|B|^{\frac{\alpha}{n} - 1} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \, \|f\|_{p(\cdot)} < \infty,
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar.

Por lo tanto hemos probado que $\left| \widetilde{I}_\alpha f(x) \right| < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para probar la acotación del operador, tomemos $f \in L^{p(\cdot)}$. Dada $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola de centro x_0 y radio $r > 0$, consideremos la función $T_B(x)$ y las acotaciones antes hechas sobre esta. Podemos afirmar entonces que

$$\begin{aligned}
\int_B |\widetilde{I}_\alpha f(x) - a_B|\, dx &= \int_B |T_B(x)|\, dx \\
&\leq \int_B \left| \int_{\widetilde{B}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \right| dx \\
&\quad + \int_B \left| \int_{\mathbb{R}^n - \widetilde{B}} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_0-y|^{n-\alpha}} \right) f(y)\, dy \right| dx \\
&\leq C\, r^\alpha \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \, \|f\|_{p(\cdot)} \, .
\end{aligned}$$

Con lo cual

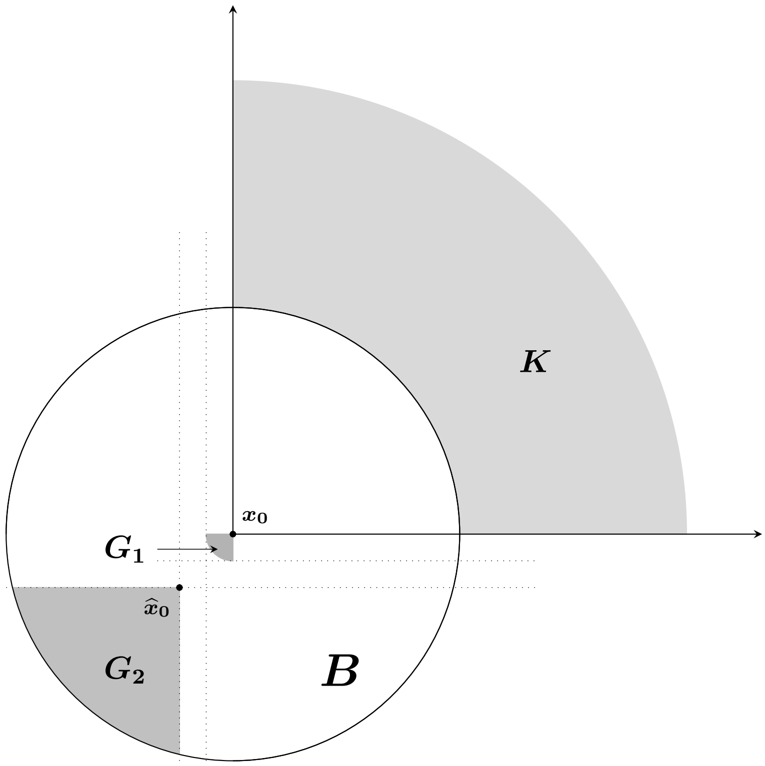
$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}} \int_B |\widetilde{I}_\alpha f(x) - a_B|\, dx \leq C \, ,$$

donde la constante no depende de la bola B ni de la función. Luego, tomando ínfimo sobre todas las constantes en el integrando, por la proposición 2.1.3 tenemos la acotación, y con ello lo que queríamos demostrar.

Veamos ahora que la condición es necesaria, es decir *1.* implica *2.* Para una bola $B = B(x_0, r)$ tomamos el punto $\widehat{x}_0 = x_0 - \frac{r}{3\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$ y los conjuntos

$$\begin{aligned}
K &= \{x_0 + h : h \in \mathbb{R}^n, |h| > r, h_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\} \, ; \\
G_1 &= B(x_0, \frac{r}{6\sqrt{n}}) \cap \{x_0 + h : h \in \mathbb{R}^n, h_i \leq 0, i = 1, \ldots, n\} \, ; \\
G_2 &= B \cap \{\widehat{x}_0 + h : h \in \mathbb{R}^n, h_i \leq 0, i = 1, \ldots, n\} \, .
\end{aligned}$$

como se muestra en la siguiente figura



Observemos que $|x_0 - \widehat{x}_0| = \frac{r}{3\sqrt{n}}|(1,\ldots,1)| = \frac{1}{3}r$. Por otra parte, dado que $|B| = w_n r^n$, tenemos

$$|G_1| = \frac{1}{2^n}|B(x_0, \frac{r}{6\sqrt{n}})| = C_n\, r^n = C_n\,|B|\,.$$

Por otra parte como $B(\widehat{x}_0, \frac{2}{3}r) \subset B$ se sigue que

$$|G_2| \geq \frac{1}{2^n}|B(\widehat{x}_0, \frac{2}{3}r)| = C_n\, r^n = C_n\,|B|\,.$$

La última inclusión es válida puesto que si $y \in B(\widehat{x}_0, \frac{2}{3}r)$ entonces $|y - x_0| \leq |y - \widehat{x}_0| + |\widehat{x}_0 - x_0| < \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r = r$, con lo cual $y \in B$. Además, para cada $u \in G_2$ y cada $v \in G_1$ se tiene que

$$|u - v| \geq |u - x_0| - |x_0 - v| \geq \frac{1}{3}r - \frac{1}{6\sqrt{n}}r = C_n\, r = C_n\,|B|^{\frac{1}{n}}\,.$$

Ahora bien, dada cualquier función f en $L^{p(\cdot)}$, por hipótesis $\widetilde{I}_\alpha f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$, entonces, para dos puntos x e y en B para los cuales el operador esté definido, por (2.1.2) tenemos

$$\infty \quad > \quad \int\limits_B \int\limits_B |\widetilde{I}_\alpha f(x) - \widetilde{I}_\alpha f(y)|\, dy\, dx$$

$$= \int_B \int_B \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|x-z|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(z)}{|z|^{n-\alpha}} \right] f(z)\, dz \right.$$

$$\left. - \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|y-z|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(z)}{|z|^{n-\alpha}} \right] f(z)\, dz \right| dy\, dx$$

$$= \int_B \int_B \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \right] f(y)\, dy \right| dz\, dx$$

Para estimar la diferencia en el integrando utilizamos el teorema del valor medio y escribimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} &= < \nabla(|\cdot - y|^{\alpha-n})(w), x-z > \\ &= (-n+\alpha)\frac{\cos(\widehat{w-y, x-z})}{|w-y|^{n-\alpha+1}}|x-z|\,, \end{aligned}$$

donde w es un punto del segmento que une x con z y $(\widehat{u,v})$ denota el ángulo entre los vectores u y v. Luego, para cualquier punto $y \in K$, $x \in G_1$ y $z \in G_2$ existe $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ dependiendo sólo de la dimensión tal que $-\cos(\widehat{w-y, x-z}) \geq -\cos(\theta) > 0$. Por otro lado $|w-y| \leq |w-x_0| + |x_0-y| \leq 2|x_0-y|$, por lo tanto podemos afirmar

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \geq C\ \frac{|x-z|}{|w-y|^{n-\alpha+1}} \geq C\ \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|x_0-y|^{n-\alpha+1}}\,.$$

Ahora, para una función f no negativa tal que $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$, tomando $f_m = f\chi_{K_m}$, con $K_m = K \cap B(x_0, m)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{I}_\alpha f_m \right\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} &\geq \frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}} \left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)}} \int_B |\widetilde{I}_\alpha f_m(x) - m_B \widetilde{I}_\alpha f_m| dx \\ &\geq \frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}+1}} \left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)} \int_{G_1}\int_{G_2} \left| \int_K \left[\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \right] f_m(y)\, dy \right| dz\, dx \\ &\geq |B|^{-\frac{\alpha}{n}+1+\frac{1}{n}} \left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)} \int_{K_m} \frac{f_m(y)}{|x_0-y|^{n-\alpha+1}}\, dy\,. \end{aligned}$$

Así, dado que

$$\left\| \widetilde{I}_\alpha f_m \right\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \leq C\ \left\|f_m\right\|_{p(\cdot)} \leq C\ \left\|f\right\|_{p(\cdot)}\,,$$

tenemos

$$\int\limits_{K_m} \frac{f_m(y)}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}} \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)},$$

y tomando $m \to \infty$, por el teorema de la convergencia monótona, resulta

$$\int\limits_{K} \frac{f(y)}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}} \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}.$$

Repitiendo el razonamiento en los 2^n cuadrantes podemos concluir que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B} \frac{f(y)}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}} \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)},$$

para toda f tal que $\rho_p(f) \leq 1$. En particular vale para el supremo de tales cantidades, es decir

$$\sup_{f:\rho_p(f)\leq 1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}(y)}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}} f(y)\, dy \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}.$$

Luego, por el Teorema 1.1.2, concluimos que

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}(\cdot)}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)},$$

con lo cual $p \in P_\alpha$ y el teorema queda demostrado. □

2.3. $L^{p(\cdot)}$ débiles

En esta sección introduciremos a los espacios de Lebesgue de exponente variable débiles extendiendo el caso p constante. También probaremos que es un espacio vectorial casi normado.

Definición 2.3.1. Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$. Diremos que una función localmente integrable pertenece al espacio de Lebesgue generalizado $L^{p(\cdot)}$ débil, si la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx < \infty$$

para todo $t > 0$. Denotaremos a este espacio $L^{p(\cdot),\infty}$.

Lema 2.3.2. *Para una función exponente $p(\cdot)$ tal que $p_+ < \infty$, el espacio $L^{p(\cdot),\infty}$ es un espacio casi-normado, donde la casinorma viene dada por la expresión*

$$[f]_{p(\cdot),\infty} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \,:\, \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx \,\leq\, 1\right\}. \tag{2.3.1}$$

Demostración. Probaremos que para cada $f, g \in L^{p(\cdot),\infty}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $\alpha f \in L^{p(\cdot),\infty}$, más aún $[\alpha f]_{p(\cdot),\infty} = |\alpha|\,[f]_{p(\cdot),\infty}$.
2. $f + g \in L^{p(\cdot),\infty}$, más aún $[f+g]_{p(\cdot),\infty} \leq 2^{\frac{p_+ + 1}{p_-}} \Big([f]_{p(\cdot),\infty} + [g]_{p(\cdot),\infty}\Big)$.
3. $f = 0$ c.t.p. si y sólo si $[f]_{p(\cdot),\infty} = 0$.

La afirmación 1. es inmediata dado que

$$\begin{aligned}
[\alpha f]_{p(\cdot),\infty} &= \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \,:\, \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|\alpha f|>t\}}(x)\, dx \,\leq\, 1\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \,:\, \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda/|\alpha|}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx \,\leq\, 1\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{|\alpha|\lambda > 0 \,:\, \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx \,\leq\, 1\right\} \\
&= |\alpha|\,[f]_{p(\cdot),\infty}\,.
\end{aligned}$$

En cuanto a la condición 2, teniendo en cuenta que para cada $t > 0$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > t/2\}\,,$$

se sigue que

$$\chi_{\{|f+g|>t\}} \leq \chi_{\{|f|>t/2\}\cup\{|f|>t/2\}} \leq \chi_{\{|f|>t/2\}} + \chi_{\{|f|>t/2\}}\,.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f+g|>t\}}(x)\, dx \\
\leq\; &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t/2\}}(x)\, dx \quad + \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|g|>t/2\}}(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$\leq \; 2^{p_+}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)}\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dx \quad + \quad \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)}\chi_{\{|g|>t\}}(x)\,dx\right).$$

Tomando a $\lambda = 2^{\frac{p_++1}{p_-}}\left([f]_{p(\cdot),\infty}+[g]_{p(\cdot),\infty}\right)$ y observando que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_++1}{p_-}} < 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)}\chi_{\{|f+g|>t\}}(x)\,dx \;&\leq\; \frac{2^{p_+}}{2^{p_++1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{[f]_{p(\cdot),\infty}}\right)^{p(x)}\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dx\right.\\ &\qquad + \left.\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{[g]_{p(\cdot),\infty}}\right)^{p(x)}\chi_{\{|g|>t\}}(x)\,dx\right)\\ &\leq\; \frac{2^{p_+}}{2^{p_++1}}\cdot 2 \;=\; 1\,.\end{aligned}$$

Al tomar supremo para $t>0$ por definición obtenemos 2.

Por último si $f=0$ c.t.p., entonces $\{|f|>t\}$ tiene medida de Lebesgue nula para todo t, por lo tanto es claro que $[f]_{p(\cdot),\infty}=0$. Por otro lado, supongamos que $[f]_{p(\cdot),\infty}=0$. Luego para cada $k\in\mathbb{N}$, existe $\lambda_k<\frac{1}{k}$ tal que vale la desigualdad:

$$1\geq \sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{\lambda_k}\right)^{p(x)}\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dx \geq \sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}(kt)^{p(x)}\,\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dx \geq k^{p_-}\,C_t|\{|f|>t\}|,$$

para cada t, donde

$$C_t=\begin{cases} t^{p_+} & \text{si} \quad 0<t\leq 1;\\ t^{p_-} & \text{si} \quad\quad\;\; t>1.\end{cases}$$

En cualquier caso tenemos que

$$|\{|f|>t\}|\leq \frac{1}{C_t\,k^{p_-}}\longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k\to\infty\,,$$

con lo cual queda probado 3. y con ello la Proposición 2.3.2. □

La relación entre los espacios $L^{p(\cdot)}$ y $L^{p(\cdot),\infty}$ es la que se espera y la presentamos en el siguiente lema.

Lema 2.3.3. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente, con $1\leq p_-\leq p_+<\infty$. Luego $L^{p(\cdot)}\hookrightarrow L^{p(\cdot),\infty}$; más aún $[f]_{p(\cdot),\infty}\leq \|f\|_{p(\cdot)}$.*

Demostración. Sea $f \in L^{p(\cdot)}$, para cada $t > 0$ y cada $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}$ tenemos que $1 < \frac{|f(x)|}{t} \leq \left(\frac{|f(x)|}{t}\right)^{p(x)}$. Luego, para $\lambda = \|f\|_{p(\cdot)}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\|f\|_{p(\cdot)}} \frac{|f|}{t}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} dx = 1\,. \end{aligned}$$

Tomando ahora supremo sobre $t > 0$ queda demostrado el lema. □

Lema 2.3.4. *Sean p_0, p_1 números reales tales que $1 < p_0 \leq p_1 < \infty$. Sea $p : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ una función exponente tal que $p_0 \leq p_- \leq p_+ \leq p_1$. Si $f \in L^{p_0,\infty} \cap L^{p_1,\infty}$, entonces $f \in L^{p(\cdot),\infty}$.*

Demostración. Dado $\lambda > 0$ fijo, para $0 < t \leq \lambda$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx &\leq \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p_-} |\{|f| > t\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{p_0}} t^{p_0} |\{|f| > t\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{p_0}} [f]_{p_0}^{p_0}\,. \end{aligned}$$

Por otro lado, para $t > \lambda$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx &\leq \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p_+} |\{|f| > t\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{p_1}} t^{p_1} |\{|f| > t\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{p_1}} [f]_{p_1}^{p_1}\,. \end{aligned}$$

Con lo cual resulta inmediato que

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx \leq 2 \,\text{máx} \left\{ \left(\frac{[f]_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0}, \left(\frac{[f]_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1} \right\} < \infty\,,$$

lo que muestra que $f \in L^{p(\cdot),\infty}$. □

Lema 2.3.5. *Si $p(\cdot) = p$ constante, entonces esta expresión* (2.3.1) *coincide con la definición clásica de casi-norma en L^p-débil. Esto es $[f]_{p(\cdot),\infty} = [f]_{p,\infty}$.*

Demostración. Basta observar la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}
[f]_{p(\cdot),\infty} &= \inf\left\{\lambda>0 : \sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)}\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dx \le 1\right\}\\
&= \inf\left\{\lambda>0 : \sup_{t>0}\left(\frac{t^p}{\lambda^p}\right)\left|\chi_{\{|f|>t\}}(x)\right| \le 1\right\}\\
&= \inf\left\{\lambda>0 : \sup_{t>0} t\left|\chi_{\{|f|>t\}}(x)\right|^{\frac{1}{p}} \le \lambda\right\}\\
&= \sup_{t>0} t\left|\chi_{\{|f|>t\}}(x)\right|^{\frac{1}{p}} \quad = \quad [f]_{p,\infty}.
\end{aligned}$$

□

Es necesario mencionar que en [4], Capone, Cruz-Uribe y Fiorenza prueban una desigualdad de tipo débil para el operador maximal de Hardy-Littlewood. Si bien no explicitan la definición de un espacio $L^{p(\cdot)}$ débil, el mismo podría ser definido como sigue:

Definición 2.3.6 ([4])**.** Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $1 \le p_- \le p_+ < \infty$. Diremos que una función f localmente integrable pertenece al espacio $\widetilde{L}^{p(\cdot)}$ débil si

$$[f]^*_{p(\cdot),\infty} = \sup_{t>0} t\left\|\chi_{\{|f|>t\}}(\cdot)\right\|_{p(\cdot)} < \infty\,.$$

Denotaremos a este espacio por $\widetilde{L}^{p(\cdot),\infty}$.

Nos preguntamos qué relación existe entre la definición anterior y la dada en 2.3.1. El siguiente lema prueba que son equivalentes.

Lema 2.3.7. $\widetilde{L}^{p(\cdot),\infty} \sim L^{p(\cdot),\infty}$.

Demostración. Probemos primero que $[f]_{p(\cdot),\infty} \le [f]^*_{p(\cdot),\infty}$. Para esto, sea $\lambda = [f]^*_{p(\cdot),\infty}$ y veamos que

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{[f]^*_{p(\cdot),\infty}}\right)^{p(x)}\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dx \le 1.$$

En efecto, para cada $t>0$ vale que $[f]^*_{p(\cdot),\infty} \ge t\left\|\chi_{\{|f|>t\}}(\cdot)\right\|_{p(\cdot)}$. Luego

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{[f]^*_{p(\cdot),\infty}}\right)^{p(x)}\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\chi_{\{|f|>t\}}(x)}{\left\|\chi_{\{|f|>t\}}(\cdot)\right\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} dx = 1.$$

De donde tomando supremo en $t > 0$ se tiene el resultado. Probemos ahora que $[f]^*_{p(\cdot),\infty} \leq [f]_{p(\cdot),\infty}$. Dado que para cada $t_0 > 0$ resulta

$$\left\{\lambda > 0 : \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t\}}(x)\, dx \leq 1\right\} \subset \left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t_0\}}(x)\, dx \leq 1\right\},$$

tomando ínfimo, por definición tenemos que

$$\text{ínf} \left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^{p(x)} \chi_{\{|f|>t_0\}}(x)\, dx \leq 1\right\} \leq [f]_{p(\cdot),\infty} .$$

Mediante el cambio de variable $\lambda/t_0 \to \lambda$ se tiene

$$t_0 \left\|\chi_{\{|f|>t_0\}}(\cdot)\right\|_{p(\cdot)} = t_0 \ \text{ínf} \left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\chi_{\{|f|>t_0\}}(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\right\} \leq [f]_{p(\cdot),\infty} .$$

Finalmente tomando supremo en $t_0 > 0$ se tiene el resultado. □

2.4. Lemas técnicos

En la definición 2.1.4 de la sección 2.1, hemos establecido la condición P_α sobre el exponente $p(\cdot)$, la cual resultó ser necesaria y suficiente para que una adecuada extensión del operador I_α resulte acotado desde $L^{p(\cdot)}$ en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$. Sin embargo no hemos sido capaces de probar, al igual que ocurre en el caso p constante, que la misma sirve para la acotación sobre los espacios $L^{p(\cdot),\infty}$. Es por esto que debemos considerar una condición ligeramente más fuerte, la cual presentamos ahora en el siguiente lema. Posteriormente, una serie de lemas ayudarán a entender esta nueva condición.

Lema 2.4.1. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$ y $p \in \mathcal{P}^{\log}$, entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t} \leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1} \left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{p'(\cdot)} , \tag{2.4.1}$$

para toda bola B en $\mathbb{R}^n$ de centro x_0 y radio r.

Demostración. Sea $r < 1$ y una bola B de centro x_0 y radio r. Luego

$$\int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t} = \int_r^1 \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t},$$

Por hipótesis $\alpha - \frac{n}{p_+(B)} - 1 < 0$, entonces del lema 1.2.4 y la observacion 2.1.7 tenemos

$$\int_1^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t} \leq \int_1^\infty \frac{t^{n-\frac{n}{p_+}}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t} = \quad C \quad \leq C\ r^{\alpha-\frac{n}{p_+(B)}-1} \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)}.$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t} &\leq \int_1^\infty \frac{t^{n-\frac{n}{p_+(B(x_0,r))}}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t}C_1^{\alpha-\frac{n}{p_\infty}-1}\\ &= C\\ &\leq C\ r^{\alpha-\frac{n}{p_+(B)}-1}\\ &\leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)}.\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $B(x_0,r) \subset B(x_0,t)$ si $r \leq t \leq 1$, aplicamos el lema 1.2.3 y nuevamente la observación 2.1.7 y tenemos

$$\begin{aligned}\int_r^1 \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t} &\leq C\int_r^1 \frac{|B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p_-(B(x_0,t))}}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t}\\ &= C\int_r^1 \frac{|B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p_+(B(x_0,r))}}}{t^{n-\alpha+1}}|B(x_0,t)|^{\frac{1}{p_+(B(x_0,r))}-\frac{1}{p_-(B(x_0,t))}}\frac{dt}{t}\\ &\leq C\int_r^1 \frac{|B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p_+(B(x_0,r))}}}{t^{n-\alpha+1}}\left(|B(x_0,t)|^{p_-(B(x_0,t))-p_+(B(x_0,t))}\right)^{\frac{1}{p_+^2}}\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Ahora bien, por el lema 1.2.1 el término entre paréntesis está acotado, luego

$$\int_r^1 \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t} \leq C\int_r^1 t^{\alpha-\frac{n}{p_+(B(x_0,r))}-1}\frac{dt}{t} \leq C\ r^{\alpha-\frac{n}{p_+(B(x_0,r))}-1} \leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{p'(\cdot)}.$$

Consideremos ahora $r > 1$. Como $p' \in \mathcal{P}^{\log}$ siempre que $p(\cdot)$ lo haga, por el lema 1.2.9 tenemos

$$\begin{aligned}\int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,2t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t} &\leq C\int_r^\infty \frac{t^{n-\frac{n}{p_\infty}}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t}\\ &= C\int_r^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p_\infty}-1}\frac{dt}{t}\\ &= C\ r^{\alpha-n-1}r^{n-\frac{n}{p_\infty}}\\ &= C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}|B|^{\frac{1}{p'_\infty}}\\ &\leq C\ |B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\left\|\chi_{2B}\right\|_{p'(\cdot)}.\end{aligned}$$

con lo cual queda probado el lema. □

Para cada x fijo la función que a cada t en el intervalo $(0,\infty)$ le asigna el número real $\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$ es una función positiva y no decreciente. Si $p(\cdot)$ satisface (2.4.1) entonces la función $\frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha-1}}$ es casi-decreciente. En efecto si $0 < t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned}
\frac{\left\|\chi_{B(x,t_2)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t_2^{n-\alpha+1}} &= 2^{n-\alpha+2} t_2 \frac{\left\|\chi_{B(x,t_2)}\right\|_{p'(\cdot)}}{(2t_2)^{n-\alpha+2}} \leq 2^{n-\alpha+2} \int_{t_2}^{2t_2} \frac{\left\|\chi_{B(x,s)}\right\|_{p'(\cdot)}}{s^{n-\alpha+2}}\, ds \\
&\leq 2^{n-\alpha+2} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\left\|\chi_{B(x,s)}\right\|_{p'(\cdot)}}{s^{n-\alpha+2}}\, ds \leq C\, 2^{n-\alpha+2} \frac{\left\|\chi_{B(x,t_1)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t_1^{n-\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Además, $\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$ como función de t es de tipo superior $n-\alpha+1-\varepsilon$. En el próximo capítulo (Definición 3.1.6) daremos más detalle, por el momento, resumiremos estos resultados en el siguiente lema.

Lema 2.4.2. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente como en el Lema 2.4.1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La función $p(\cdot)$ satisface la desigualdad* (2.4.1).

2. *Existe $a > 1$ tal que*

$$\left\|\chi_{B(x,at)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq \frac{1}{2} a^{n-\alpha+1} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)},$$

para todo $t > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3. *Existe $C > 0$, $\varepsilon > 0$ tales que*

$$\left\|\chi_{B(x,\theta t)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C\, \theta^{n-\alpha+1-\varepsilon} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \tag{2.4.2}$$

para todo $\theta \geq 1$, todo $t > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Un esquema de la prueba puede verse en el trabajo hecho por Harboure, Salinas y Viviani en [20]. Podemos aclarar que la constante $a > 1$ depende sólo de la dimensión n, de α y de la constante de la condición (2.4.1). Enunciaremos ahora la relación que tiene esta condición con la condición P_α dada en el Capítulo 1.

Lema 2.4.3. *Si una función $p(\cdot)$ es tal que satisface* (2.4.1), *entonces $p \in \mathrm{P}_\alpha$.*

Demostración. Bastará probar que

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \leq C \int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t} .$$

En efecto, para una bola B de centro x_0 y radio $r > 0$ y para $k \geq 0$ denotemos $B_k = 2^k B = B(x_0, 2^k r)$, y escribimos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} &\leq C \left\| \frac{\chi_{\bigcup_{k=0}^\infty B_{k+1} \setminus B_k}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq \sum_{k=0}^\infty \left\| \frac{\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty \frac{\left\|\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}\right\|_{p'(\cdot)}}{(2^k r)^{n-\alpha+1}} \qquad (2.4.3) \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\left\|\chi_{B_{k+1}}\right\|_{p'(\cdot)}}{(2^{k+1} r)^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t} \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\left\|\chi_{B(x_0,2t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t} \\
&\leq C \int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}} \frac{dt}{t} . \qquad (2.4.4)
\end{aligned}$$

Donde (2.4.3) se prueba observando que si $z \in B_{k+1} \setminus B_k$ entonces $2^k r \leq |x_0 - z| < 2^{k+1} r$ para cada k. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}}{|x_0 - z|^{n-\alpha+1}} \frac{(2^k r)^{n-\alpha+1}}{\left\|\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}\right\|_{p'(\cdot)}} \right)^{p'(z)} dz \\
\leq &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\frac{2^k r}{|x_0 - z|} \right)^{n-\alpha+1} \frac{\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}}{\left\|\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}\right\|_{p'(\cdot)}} \right)^{p'(z)} dz \\
\leq &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}}{\left\|\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}\right\|_{p'(\cdot)}} \right)^{p'(z)} dz = 1 .
\end{aligned}$$

Basta entonces tomar a $\lambda = (2^k r)^{-n+\alpha-1} \left\|\chi_{B_{k+1} \setminus B_k}\right\|_{p'(\cdot)}$ y por la proposición 2.1.6 se tiene (2.4.4). $\square$

Observación 2.4.4. Por los lemas 2.4.3 y 2.1.6, si $p(\cdot)$ satisface (2.4.1) entonces $p' \in D$, es decir $\left\|\chi_{B(x,2t)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$.

Lema 2.4.5. *Para $0 < \gamma < \alpha < n$, si una función exponente $p(\cdot)$ satisface* (2.4.1) *para α entonces también lo hace para γ.*

Demostración. Dado que $\alpha - \gamma > 0$, para $r \leq t$ vale

$$\frac{1}{t^{\alpha-\gamma}} \leq \frac{1}{r^{\alpha-\gamma}}\,.$$

Luego, por la hipótesis

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\gamma+1}}\frac{dt}{t} &= \int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{1}{t^{\alpha-\gamma}}\frac{dt}{t} \\
&\leq r^{\gamma-\alpha}\int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x_0,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\frac{dt}{t} \\
&= C\,|B|^{\frac{\gamma}{n}-\frac{\alpha}{n}}|B|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n}-1}\left\|\chi_{B(x_0,2r)}\right\|_{p'(\cdot)} \\
&= C\,|B|^{\frac{\gamma}{n}-\frac{1}{n}-1}\left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{p'(\cdot)}\,,
\end{aligned}$$

con lo cual queda probado el lema. □

2.5. Acotación en $L^{p(\cdot)}$ débil

Luego de definir a los espacios débiles variables, en esta sección extenderemos el operador Integral Fraccionaria a un operador acotado $\widetilde{I}_\alpha$ de manera análoga a la realizada en [20] y probaremos un teorema de acotación para el mismo. Así, el propósito será recuperar resultados análogos a los realizados por Gatto y Vagi en [17] para espacios de tipo homogéneo. Más concretamente, probaremos el siguiente

Teorema 2.5.1. *Sea $0 < \alpha < n$, $p(\cdot)$ una función exponente tal que $1 < p_- \leq p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$ y $p \in \mathcal{P}^{\log}$. Si, además, $p(x) \leq p_\infty$ fuera de una bola centrada en el origen de radio $r_0 \geq 1$ entonces existe una extensión lineal del operador I_α dado por la expresión*

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}}\right) f(y)\,dy\,.$$

para toda función $f \in L^{p(\cdot),\infty}$. Más aún, este operador es acotado desde $L^{p(\cdot),\infty}$ en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$.

Para esto, enunciaremos algunos resultados necesarios para la prueba del mismo.

Lema 2.5.2. *Sea B una bola en $\mathbb{R}^n$ y $A \subset B$ un conjunto medible. Entonces, para una función exponente $q(\cdot)$ vale que*

$$\int_A |f(x)|\, dx \leq C\ |B|\ \|f\chi_A\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|B|})}\ , \tag{2.5.1}$$

donde $\|\cdot\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|B|})}$ es la norma variable con la medida $\frac{dx}{|B|}$.

Demostración. Para A un conjunto medible contenido en una bola B, el resultado se sigue de la desigualdad de Hölder generalizada (Teorema 1.1.1). En efecto,

$$\begin{aligned} \int_A |f(x)|\, dx &= \int_A |f(x)\chi_A(x)|\, dx = |B| \int_A |f(x)\chi_A(x)| \frac{dx}{|B|} \\ &\leq C\ |B|\ \|f\chi_A\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|B|})} \|\chi_A\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|B|})} \\ &\leq C\ |B|\ \|f\chi_A\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|B|})}\ , \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es inmediata del hecho que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\chi_A(x)}{1}\right)^{q'(x)} \frac{dx}{|B|} = \frac{1}{|B|} \int_A dx = \frac{|A|}{|B|} \leq 1\,.$$

□

Proposición 2.5.3. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente con $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ tal que $p \in \mathcal{P}^{\log}$. Supongamos además que $p(x) \leq p_\infty$ fuera de una bola de radio $r_0 \geq 1$, entonces para toda $f \in L^{p(\cdot),\infty}$, existe una constante $C > 0$ (independiente de f) tal que*

$$\int_B |f(x)|\, dx \quad \leq \quad C\ \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} [f]_{p(\cdot),\infty}\ , \tag{2.5.2}$$

para toda bola B de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $B = B(x_0, r)$ una bola de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$. Por la homogeneidad de la desigualdad es claro que basta suponer $[f]_{p(\cdot),\infty} = 1$. Por la desigualdad de Hölder generalizada observamos que

$$|B| = \int_B dx \leq C\ \ \|\chi_B\|_{p(\cdot)} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\ . \tag{2.5.3}$$

Puesto que $p_- > 1$, sea ε fijo tal que $0 < \varepsilon < p_- - 1$. Definimos entonces la función exponente $q(x) = p(x) - \varepsilon$. Por el Lema 2.5.2, con B y $q(x)$ tenemos

$$\int_B |f(x)|\, dx \leq C\, |B|\, \|f\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|B|})}\ .$$

Luego, teniendo en cuenta (2.5.3), para obtener (2.5.2) bastará probar que

$$\|f\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\frac{dx}{|B|})} \leq C\,\frac{1}{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}}\,.$$

Para ello, haremos uso de la relación (1.1.5). En la integral que aparece allí, hacemos el cambio de variables $u=\lambda t$ y luego tomamos $\lambda^{-1}=\|\chi_B\|_{p(\cdot)}$. Así resulta

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} q(x)t^{q(x)-1}\chi_{\{\frac{|f\chi_B|}{\lambda}>t\}}(x)\,\frac{dx}{|B|}\,dt\\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} q(x)u^{q(x)-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{q(x)}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,\frac{dx}{|B|}\,du\\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} q(x)u^{q(x)-1}\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,dx\,du\,. \qquad (2.5.4)
\end{aligned}$$

Luego, es claro que basta probar que la integral en (2.5.4) está acotada independientemente de f y de B. La idea es acotar el término $\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|}$ por un factor que llamaremos M que dependerá del tamaño de la bola. Hecho esto, entonces para un número real a a elegir, y dado que $f\in L^{p(\cdot),\infty}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} q(x)u^{q(x)-1}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,dx\,du\\
&\leq \int_B\left(\int_0^a q(x)u^{q(x)-1}\,du\right)dx + \int_a^\infty\int_{\mathbb{R}^n} q(x)u^{q(x)-p(x)-1}\,u^{p(x)}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,dx\,du\\
&\leq \int_B a^{q(x)}\,dx + \int_a^\infty u^{-\varepsilon-1}\int_{\mathbb{R}^n} u^{p(x)}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,dx\,du\\
&\leq \int_B a^{q(x)}\,dx + \int_a^\infty u^{-\varepsilon-1}\,du \quad = \quad \int_B a^{q(x)}\,dx + \frac{a^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\,.
\end{aligned}$$

Se puede ver que para $a=\frac{1}{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}}$ se tiene que $\int_B a^{q(x)}\,dx \leq a^{-\varepsilon}$. Esto se sigue del hecho que

$$\int_B\left(\frac{1}{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}}\right)^{q(x)+\varepsilon}dx = \int_B\left(\frac{1}{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)}dx = 1\,. \qquad (2.5.5)$$

Así, la integral (2.5.4) nos queda

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} q(x)u^{q(x)-1}\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,dx\,du \;\leq\; C\;M\;\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{\varepsilon}\,. \qquad (2.5.6)$$

Veamos ahora la cota para M. Para ello, consideremos tres tipos de bolas.

1. Bolas de radio $r \leq 2r_0$. Para cada $x \in B = B(x_0, r)$, por los lemas 1.2.3 y 1.2.1 tenemos
$$\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|} \leq C\, \frac{|B|^{\frac{q(x)}{p_+(B)}}}{|B|} \leq C\, |B|^{\frac{q_-(B)-q_+(B)}{p_+(B)}} |B|^{\frac{q_+(B)}{p_+(B)}-1}$$
$$\leq C\, \left(|B|^{p_-(B)-p_+(B)}\right)^{\frac{1}{p_-}} |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_+(B)}} \leq C\, |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_+(B)}}.$$
Luego, en este caso $M = |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_+(B)}}$, con lo cual, nuevamente por el lema 1.2.3 tenemos que (2.5.6) está acotada por
$$M\ \|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{\varepsilon} \leq C\, |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_+(B)}} |B|^{\frac{\varepsilon}{p_+(B)}} \leq C\,.$$
Es decir, por una constante independiente de f y B como queríamos.

2. Bolas de radio $r > 2r_0$ y centro x_0 tal que $|x_0| \geq 2r$; es decir, bolas grandes de centro relativamente lejos del origen. Si $x \in B = B(x_0, r)$, por los lemas 1.2.4 y 1.2.2 tenemos
$$\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|} \leq C\, \frac{|B|^{\frac{q(x)}{p_-(B)}}}{|B|} \leq C\, |B|^{\frac{q_+(B)-q_-(B)}{p_-(B)}} |B|^{\frac{q_-(B)}{p_-(B)}-1}$$
$$\leq C\, \left(|B|^{p_+(B)-p_-(B)}\right)^{\frac{1}{p_-}} |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_-(B)}} \leq C\, |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_-(B)}}.$$
Luego, en este segundo caso, tenemos que $M = |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_-}}$, y así logramos la acotación de (2.5.6) como
$$M\ \|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{\varepsilon} \leq C\, |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_-}} |B|^{\frac{\varepsilon}{p_-}} \leq C\,.$$

3. Bolas de radio $r > 2r_0$ y centro x_0 tal que $|x_0| < 2r$. Será suficiente probar la acotación para $x_0 = 0$.
Supongamos que esto ocurre, entonces si $x_0 \neq 0$, tomando $\widetilde{r} = 3r$ observamos que $B = B(x_0, r) \subset B(0, \widetilde{r}) = B_{\widetilde{r}}$. Por lo tanto, por el lema 1.2.9
$$\|\chi_{B_{\widetilde{r}}}\|_{p'(\cdot)} \leq C\, |B_{\widetilde{r}}|^{\frac{1}{p'_\infty}} \leq C\, 3^{n-\frac{n}{p_\infty}} |B|^{\frac{1}{p'_\infty}} \leq C\ \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\,,$$
y así
$$\int_B |f(x)|\, dx \leq \int_{B_{\widetilde{r}}} |f(x)|\, dx \leq C\ \|\chi_{B_{\widetilde{r}}}\|_{p'(\cdot)} [f]_{p(\cdot),\infty} \leq C\ \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} [f]_{p(\cdot),\infty}\,.$$

Tomemos entonces B una bola centrada en el origen de radio $r > 2r_0$. Sea B_0 la bola centrada en el origen y radio r_0. Entonces, aplicando el caso 1. al primer sumando tenemos

$$\begin{aligned}\int_B |f(x)|\,dx &= \int_{B_0} |f(x)|\,dx + \int_{B_0^c\cap B} |f(x)|\,dx \\ &\leq C\ \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}\,[f]_{p(\cdot),\infty} + \int_{B_0^c\cap B} |f(x)|\,dx\,.\end{aligned}$$

Bastaría demostrar la acotación para el segundo sumando. Por el lema 2.5.2 con $A = B_0^c \cap B$ y $q(\cdot)$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_{B_0^c\cap B}(x)|\,dx \leq C\ |B|\ \left\|f\,\chi_{B_0^c\cap B}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\frac{dx}{|B|})}\ .$$

Luego, si probamos como antes que

$$\left\|f\,\chi_{B_0^c\cap B}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n,\frac{dx}{|B|})} \leq C\ \frac{1}{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}}\ .$$

Analicemos entonces la expresión

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} q(x)u^{q(x)-1}\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|}\chi_{\{|f\chi_{B_0^c\cap B}|>u\}}(x)\,dx\,du \\ =\ &\int_0^\infty \int_{B_0^c\cap B} q(x)u^{q(x)-1}\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,dx\,du\,.\end{aligned}$$

Por el lema 1.2.9 y la hipótesis sobre el comportamiento de $p(\cdot)$ fuera de B_0, tenemos, para todo $x \in B_0^c \cap B$

$$\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|} = \frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{p(x)-\varepsilon}}{|B|} \leq C\ \frac{|B|^{(p(x)-\varepsilon)/p_\infty}}{|B|} \leq C\ \frac{|B|^{(p_\infty-\varepsilon)/p_\infty}}{|B|} = C\ |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_\infty}}\,.$$

Luego, en este tercer caso $M = |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_\infty}}$. Por lo tanto, con una estimación como la que nos llevó a (2.5.4) tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_{B_0^c\cap B} q(x)u^{q(x)-1}\frac{\|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}{|B|}\chi_{\{|f\chi_B|>u\}}(x)\,dx\,du \\ &\leq M\ \|\chi_B\|_{p(\cdot)}^{\varepsilon} \leq C\ |B|^{\frac{-\varepsilon}{p_\infty}}\ |B|^{\frac{\varepsilon}{p_\infty}} \leq C\,.\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Con este caso queda probada la ecuación (2.5.2) y con ella la proposición. $\square$

Proposición 2.5.4. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente con $1 < p_- \leq p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$ tal que $p \in \mathcal{P}^{\log}$. Supongamos además que $p(x) \leq p_\infty$ fuera de una bola de radio $r_0 \geq 1$, entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n - B} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}}\, dy \leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} [f]_{p(\cdot),\infty}\,. \tag{2.5.7}$$

para toda bola B de centro x_0 y radio r y toda f en $L^{p(\cdot),\infty}$.

Demostración. Sea B una bola de centro x_0 y radio r y tomemos, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, las bolas $B_k = B(x_0, 2^k r)$. Por la proposición 2.5.3 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n - B} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}}\, dy &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_{k+1} - B_k} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}}\, dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^{\alpha-n-1} \int_{B_{k+1} - B_k} |f(y)|\, dy \\
&\leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{\alpha-n-1} \int_{B_{k+1}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{\alpha-n-1} \left\|\chi_{B_{k+1}}\right\|_{p'(\cdot)} [f]_{p(\cdot),\infty}\,.
\end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad (2.4.2) del lema 2.4.2 concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n - B} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}}\, dy &\leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} [f]_{p(\cdot),\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{\alpha-n-1} (2^k)^{n-\alpha+1-\varepsilon} \\
&= C\, |B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} [f]_{p(\cdot),\infty}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Con estas proposiciones estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección.

Demostración del teorema 2.5.1. Para probar la extensión del operador observemos que para funciones $f \in L^{p(\cdot),\infty}$ de soporte compacto, por la Proposición 2.5.3 se tiene que $|I_\alpha f(x)| < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto, tomemos la bola B_m centrada en el origen, de radio m y consideremos B_R una bola de radio R suficientemente grande tal que contiene al soporte de f. Si denotamos con S a dicho soporte, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_m} I_\alpha f(x)\,dx\right| &= \left|\int_{B_m}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy\,dx\right| \\ &\leq C\int_S\left(\int_{B_m}|f(y)|\,dy\right)|x-y|^{\alpha-n}\,dx \\ &\leq C\,R^\alpha\,\|\chi_{B_m}\|_{p'(\cdot)}\,[f]_{p(\cdot),\infty} \quad < \quad \infty\,.\end{aligned}$$

Con lo cual $|I_\alpha f(x)| < \infty$ para casi todo $x \in B_m$. Ahora, tomando una sucesión $\{B_m\}_{m=1}^\infty$ de bolas crecientes tenemos asociado una suceción de conjuntos $\{T_m\}_{m=1}^\infty$ de medida nula en los cuales el operador no está definido. Luego, es claro que $|I_\alpha f(x)| < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - T$, donde $T = \cup_{m=1}^\infty T_m$.

Ahora, hacemos una extensión como en el Teorema 2.2.1, esto es

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}}\right) f(y)\,dy\,.$$

Veamos que está bien definido para toda función $f \in L^{p(\cdot),\infty}$. Para esto, procederemos de manera análoga a lo realizado en la demostración de la existencia en el Teorema 2.2.1. Esto es, para una función $f \in L^{p(\cdot),\infty}$ y una bola $B(x_0, r)$, consideremos el número

$$a_B = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1-\chi_{\widetilde{B}}(y)}{|x_0-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}}\right) f(y)\,dy\,,$$

donde $\widetilde{B} = 2B$, y la función

$$T_B(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{\widetilde{B}}(y)}{|x_0-y|^{n-\alpha}}\right) f(y)\,dy\,.$$

Recordemos que formalmente

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = a_B + T_B(x)\,,$$

si ambos sumandos son finitos. Como se vió en la demostración del Teorema 2.2.1, a_B es finito para toda bola B. Bastará probar entonces que $T_B(x)$ es finito en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, en particular tomando la bola $B(0, m)$ tenemos que $|\widetilde{I}_\alpha f(x)| < \infty$ para casi todo $x \in B(0, m)$. Tomando una sucesión de bolas crecientes centradas en el origen tenemos una sucesión de conjuntos de medida nula en los cuales el operador no está definido. Uniendo estos conjuntos concluimos que $|\widetilde{I}_\alpha f(x)| < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora bien, para $T_B(x)$ tenemos

$$|T_B(x)| \leq \left| \int_{\widetilde{B}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n - \widetilde{B}} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_0-y|^{n-\alpha}} \right) f(y)\, dy \right| ,$$

para el primer sumando, por el Teorema de Tonelli y la proposiciones 2.5.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_B \left| \int_{\widetilde{B}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \right| dx &\leq \int_{\widetilde{B}} \Big(\int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-\alpha}} \Big) |f(y)|\, dy \\ &\leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \, [f]_{p(\cdot),\infty} \,. \end{aligned}$$

Para el segundo sumando para cada $x \in B$, nuevamente por el Teorema del valor medio y la proposición 2.5.4

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n - \widetilde{B}} \left| \frac{1}{|x_0-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \right| |f(y)|\, dy &\leq C\, |B|^{\frac{1}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n - \widetilde{B}} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^{n-\alpha+1}}\, dy \\ &< C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}-1} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \, [f]_{p(\cdot),\infty} \,. \end{aligned}$$

Así resulta $|\widetilde{I}_\alpha f(x)| < \infty$. Más aún, combinando estos resultados tenemos que $\widetilde{I}_\alpha f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$. En efecto

$$\int_B |\widetilde{I}_\alpha f(x) - a_B|\, dx \leq \int_B |T_B(x)|\, dx \leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \, [f]_{p(\cdot),\infty} \, ,$$

y en virtud de la proposición 2.1.3 queda probado el teorema. $\square$

Capítulo 3

Generalización de los espacios Lipschitz integrales

En este capítulo presentaremos a los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$ y veremos que son una generalización de los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ definidos anteriormente. Haremos un estudio de los mismos dando condiciones bajo las cuales $\mathrm{bmo}_{w,1} = \mathrm{bmo}_{w,q}$ para cualquier $1 < q < \infty$.

Luego, daremos una caracterización puntual para las funciones en estos espacios bajo propiedades adecuadas de la función w, siguiendo una técnica desarrollada en [20]. Mostraremos que para dominios acotados se recuperan resultados de la bibliografía. Finalmente, haremos algunas observaciones sobre la influencia de la función w en la continuidad de las funciones del espacio.

3.1. Introducción

Para $1 \leq q < \infty$ y $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función medible, se define el espacio $\mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ de las funciones localmente integrables f sobre $\mathbb{R}^n$ para las cuales

$$\frac{1}{w(a,s)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1.1}$$

es finita para todo cubo $I = I(a,s)$ de centro a y lados de longitud s paralelos a los ejes coordenados, es decir $I(a,s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| < \frac{s}{2}\}$ y $m_I f$ es el promedio de f sobre

I, es decir $m_I f = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy$.

La expresión

$$\|f\|_{w,q} = \sup_I \left\{ \frac{1}{w(a,s)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \tag{3.1.2}$$

es una seminorma para este espacio. Estos espacios fueron definidos en [32] por Nakai y Yabuta, quienes caracterizaron al conjunto de multiplicadores puntuales para los mismos, es decir, al conjunto de las funciones g, definidas en $\mathbb{R}^n$, para las cuales $f\,g \in \mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ siempre que $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$. Usualmente son denotados como $\mathrm{BMO}_{w,q}$. En este trabajo, nos referiremos a $\mathrm{bmo}_{w,q}$ como el espacio de las funciones módulo las constantes, manteniendo la notación vista en [32], el cual equipado con la expresión (3.1.2) resulta un espacio de Banach. Sin embargo, es necesario aclarar que Nakai y Yabuta trabajaron con el espacio cocientado por las funciones que tienen promedio nulo.

Así, en el desarrollo de este trabajo, cuando consideremos una función en el espacio, trabajaremos con una representante de la clase. Además, en lo sucesivo usaremos $\mathrm{bmo}_{w,q}$ para indicar el espacio $\mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ para $q > 1$ y sólo bmo_w para el caso $q = 1$.

Algunas de las propiedades de la función w con las que trabajaron son las siguientes:

3.1.a) Casi creciente en la segunda variable, es decir

$$w(x,t_1) \leq C\ w(x,t_2), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, t_1 < t_2\,.$$

3.1.b) Duplicación en la segunda variable, es decir

$$w(x,2t) \leq C\ w(x,t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, t > 0\,.$$

3.1.c) Comparabilidad en la primer variable, es decir

$$|x-y| < t \quad \Rightarrow \quad w(x,t) \leq C\ w(y,t), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, t > 0\,.$$

Observación 3.1.1. Una consecuencia de la última propiedad es que la función w evaluada en el par (x,t) es esencialmente como el promedio sobre toda bola B de centro x y radio t. En efecto, por 3.1.b)

$$w(x,t) = \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} w(x,t)\,dy \leq C\ \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} w(y,t)\,dy \leq C^2\ w(x,t)\,.$$

Antes de continuar, es importante observar que podemos definir un espacio análogo tomando bolas en lugar de cubos y definir $\mathrm{b\widetilde{m}o}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de las funciones localmente integrables f sobre $\mathbb{R}^n$ para las cuales la expresión

$$\frac{1}{w(a,r)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-m_B f|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1.3}$$

es finita para toda bola $B=B(a,r)$ con centro en a y radio r donde ahora $m_B f$ es el promedio de f sobre B. De la misma manera, si $q>1$ denotaremos $\mathrm{b\widetilde{m}o}_{w,q}$ indicando el espacio $\mathrm{b\widetilde{m}o}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ y sólo $\mathrm{b\widetilde{m}o}_w$ en el caso $q=1$. Asimismo, consideraremos al igual que antes al espacio de las funciones módulo las constantes y en consecuencia denotaremos $\|f\|^*_{w,q}$ a la norma definida de manera análoga. A continuación mostraremos que estas definiciones son equivalentes. Para ello, veamos primero el siguiente resultado.

Lema 3.1.2. *Sean $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $w:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ una función medible y q un número real tal que $1\le q<\infty$.*

a) Supongamos que existe una constante $A>0$ tal que para todo cubo $I=I(x,s)$ existe c_I que verifica

$$\sup_I \frac{1}{w(x,s)}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|^q\right)^{1/q}\le A\,.$$

Entonces $f\in bmo_{w,q}$ y $\|f\|_{w,q}\le 2^q A$.

b) Supongamos que existe una constante $A>0$ tal que para toda bola $B=B(x,r)$ existe c_B que verifica

$$\sup_B \frac{1}{w(x,r)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f-c_B|^q\right)^{1/q}\le A\,.$$

Entonces $f\in b\widetilde{m}o_{w,q}$ y $\|f\|^*_{w,q}\le 2^q A$.

Demostración. Para ver *a).* tomemos un cubo $I=I(x,s)$. Por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
|f-m_I f|^q &\le 2^q|f-c_I|^q+2^q|m_I f-c_I|^q\\
&\le 2^q|f-c_I|^q+2^q\left|\frac{1}{|I|}\int_I (f-c_I)\right|^q
\end{aligned}$$

$$\leq \; 2^q|f-c_I|^q + 2^q\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|^q\,.$$

Promediando sobre I, elevando a la $1/q$ y finalmente dividiendo por $w(x,s)$ tenemos

$$\frac{1}{w(x,s)}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-m_If|^q\right)^{1/q} \leq 2^{1+\frac{1}{q}}\frac{1}{w(x,s)}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|^q\right)^{1/q}.$$

Por lo tanto, tomando supremo sobre todos los cubos tenemos $\|f\|_{w,q} \leq 2^qA$, que es lo que queríamos demostrar. Para probar *b).* el razonamiento es análogo tomando una bola $B = B(x,r)$. En efecto, se ve que

$$\frac{1}{w(x,r)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f-m_Bf|^q\right)^{1/q} \leq 2^{1+\frac{1}{q}}\frac{1}{w(x,r)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f-c_B|^q\right)^{1/q},$$

con lo cual tomando supremo sobre todas las bolas $\|f\|^*_{w,q} \leq 2^qA$. □

Proposición 3.1.3 (Equivalencia de espacios)**.** *Si $w(x,t)$ es una función tal que duplica y es casi creciente en la segunda variable, entonces $bmo_{w,q} = \widetilde{bmo}_{w,q}$ para todo $1 \leq q < \infty$. Equivalentemente, existen constantes c y C que dependen de n y de q tales que*

$$c\,\|f\|_{w,q} \leq \|f\|^*_{w,q} \leq C\,\|f\|_{w,q}\,.$$

Demostración. Sea $f \in \widetilde{\mathrm{bmo}}_{w,q}$ e $I = I(x,s)$ un cubo. Tomemos $B_I = B(x, \frac{\sqrt{n}}{2}s)$ que es la bola más pequeña que contiene a I. Para $c_I = m_{B_I}f$ se verifica la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|^q \leq \frac{|B_I|}{|I|}\frac{1}{|B_I|}\int_{B_I}|f-c_I|^q = \frac{\omega_n n^{n/2}}{2^n}\frac{1}{|B_I|}\int_{B_I}|f-m_{B_I}f|^q\,.$$

Elevando a la $1/q$ y dividiendo por $w(x,\frac{\sqrt{n}}{2}s)$ tenemos que

$$\frac{1}{w(x,\frac{\sqrt{n}}{2}s)}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|^q\right)^{1/q} \leq C\;\|f\|^*_{w,q}\,.$$

Ahora, tomando el menor entero k no negativo tal que $k \geq \log_2\sqrt{n}$, por las hipótesis sobre w tenemos

$$w(x,\frac{\sqrt{n}}{2}s) \leq C\;w(x,2^ks) \leq C\;w(x,s)\,,$$

y así

$$\frac{1}{w(x,s)}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|^q\right)^{1/q} \leq C\;\|f\|^*_{w,q}\,,$$

con lo cual por *a)*. del Lema 3.1.2, $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$. Más aún $\|f\|_{w,q} \leq C \;\; \|f\|^*_{w,q}$.

La demostración de la otra desigualdad es similar. Sea $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$ y $B = B(x,r)$ una bola. Tomemos $I_B = I(x, 2r)$ que es el cubo más pequeño que contiene a B. Para $c_B = m_{I_B} f$ se verifica

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f - c_B|^q \leq \frac{2^n}{\omega_n} \frac{1}{|I_B|} \int_{I_B} |f - m_{I_B} f|^q \,.$$

Con lo cual, por las propiedades de w

$$\frac{1}{w(x,r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f - c_B|^q \right)^{1/q} \leq C \;\; \|f\|_{w,q} \,,$$

por lo tanto por b) del Lema 3.1.2, $f \in \widetilde{\mathrm{bmo}}_{w,q}$ y además $\|f\|^*_{w,q} \leq C \;\; \|f\|_{w,q}$. □

En lo que sigue trabajaremos con los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$ definidos sobre bolas. Recordemos que, en el contexto de los espacios de Lebesgue variable, en el capítulo anterior, definimos el espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como el conjunto de todas las funciones localmente integrables tales que

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}} \int_B |f(x) - m_B f| \, dx \leq C \,. \tag{3.1.4}$$

Por lo tanto, si observamos el promedio de las oscilaciones y consideramos la función $w(x,t) = t^{\alpha - n} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$, entonces el espacio $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ resulta un bmo_w particular. Recordemos que el ínfimo de las constantes C que satisfacen la desigualdad anterior fue denotado por $\|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}}$. Denotaremos ahora con $\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$ al espacio $\mathrm{bmo}_{w,q}$ correspondiente, que consiste en funciones localmente integrables tales que

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}-1} \|\chi_B\|_{p'(\cdot)}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - m_B f|^q \, dx \right)^{1/q} \leq C \,. \tag{3.1.5}$$

De igual manera llamaremos $\|f\|_{\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}}$ al ínfimo de las constantes de la ecuación anterior.

Para finalizar la sección veremos algunas definiciones y propiedades que involucran funciones de una sola variable. Las mismas serán herramientas importantes para las secciones siguientes.

Definición 3.1.4. Sea $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, diremos que h duplica si existe una constante positiva C tal que para todo $t > 0$ se verifica que

$$h(2t) \leq C\ h(t)\,.$$

Lema 3.1.5. *Sea $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ una función casi creciente. Entonces $h(at) \leq A\,h(t)$ para todo $t > 0$ y para algún par de constantes $a > 1$ y $A > 0$ si y sólo si h duplica.*

Demostración. Si $a \geq 2$ entonces $h(2t) \leq C\ h(at) \leq C\,A\,h(t)$. Si $a < 2$ basta tomar el menor k natural tal que $k \geq \log_a 2$ para concluir que $h(2t) \leq C\ h(a^k t) \leq C\,A^k\,h(t)$. Por otro lado, para $a > 1$ fijo, basta tomar el menor k entero tal que $a < 2^k$ para concluir que $h(at) \leq h(2^k t) \leq C^k\,h(t)$, para todo $t > 0$. □

Definición 3.1.6 (tipo superior)**.** Sea $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, si existen constantes positivas β y c tales que para todo $s \geq 1$ y todo $t > 0$

$$h(st) \leq c\,s^{\beta} h(t)\,,$$

diremos que h es de tipo superior β.

Definición 3.1.7 (tipo inferior)**.** Sea h como en la definición anterior. Si existen constantes positivas γ y c tales que para todo $s \leq 1$ y todo $t > 0$

$$h(st) \leq c\,s^{\gamma} h(t)\,,$$

diremos que h es de tipo inferior γ.

Lema 3.1.8. *Sea $h(t)$ una función de tipo superior β con $0 < \beta \leq 1$ entonces h duplica y $\frac{h(t)}{t}$ es casi-decreciente.*

Demostración. Sabemos que existen una constante A positiva y un número real positivo $\beta \leq 1$ tal que $h(st) \leq A\,s^{\beta} h(t)$ para todo $s \geq 1$, para todo $t > 0$, entonces en particular tomando $s = 2$ la duplicación es trivial puesto que

$$h(2t) \leq A\,2^{\beta}\,h(t) \quad \forall\, t > 0\,.$$

Por otro lado para $t_1 > t_2$, existe $s > 1$ tal que $t_1 = st_2$, luego

$$\frac{h(t_1)}{t_1} = \frac{h(st_2)}{st_2} = A\, s^{\beta-1}\frac{h(t_2)}{t_2} \leq A\, \frac{h(t_2)}{t_2}\,,$$

lo que concluye la demostración. □

Lema 3.1.9. *Sea $0 < \beta \leq 1$ y $h(t)$ una función tal que $\frac{h(t)}{t^\beta}$ es casi-decreciente, entonces la función $h(t)$ es de tipo superior β. En particular, h duplica.*

Demostración. Sea $t > 0$ y $s \geq 1$, entonces

$$h(st) = \frac{h(st)}{(st)^\beta}(st)^\beta \leq C\, \frac{h(t)}{t^\beta}(st)^\beta \leq C\, s^\beta h(t)\,.$$

Además, tomando $s = 2$, h duplica. □

3.2. Sobre los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$

En esta sección estudiaremos condiciones suficientes sobre la función w de manera tal que los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$ sean equivalentes. Luego, aplicaremos este resultado a los espacios variables vistos en la sección anterior.

Utilizaremos un corolario extraído del trabajo de Franchii, Pérez y Wheeden, el cual reescribimos en las siguientes líneas para mayor claridad adaptándolo a nuestra notación y cuya demostración puede verse en [16].

Definición 3.2.1. Sea $1 \leq t < \infty$, diremos que la función w satisface la condición D_t si existe una constante finita c tal que para toda bola $B = B(x, r)$ y toda familia $\{B_i\}$ de bolas contenidas en B y disjuntas dos a dos se cumple que

$$\sum_i w(x_i, r_i)^t\, r_i^n \leq c^t\; w(x, r)^t\, r^n\,, \tag{3.2.1}$$

donde x_i y r_i son el centro y el radio de la bola B_i. Denotaremos con $\|w\|$ al ínfimo de las constantes c para las cuales vale (3.2.1).

Teorema 3.2.2 (Theorem 2.3, [16]). *Sea B_0 una bola. Supongamos que una función w satisface la condición D_t para algún $1 \leq t < \infty$. Sea f definida al menos sobre la bola $17B_0$ tal que para toda bola B tal que $B \subset 17B_0$,*

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B| \, dy \leq C \ \|f\|_{w,1} \, w(x,r) \, . \tag{3.2.2}$$

Entonces, existe una constante c independiente de f y de B_0 tal que

$$\|f - f_{B_0}\|_{L^{r,\infty}(B_0)} \leq C \ \|w\| \, \|f\|_{w,1} \, w(x, 17r) \, . \tag{3.2.3}$$

Corolario 3.2.3. *Sea $1 < t < \infty$. En las mismas hipótesis que en el Teorema 3.2.2. Si q satisface $1 < q < t$, entonces existe una constante c independiente de f y de B_0 tal que*

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B|^q \, dy \right)^{1/q} \leq C \ \|w\| \, \|f\|_{w,1} \, w(x, 17r) \, . \tag{3.2.4}$$

Con estos resultados, observamos que si tenemos condiciones suficientes sobre w de manera tal que la condición D_t se satisfaga para algún t, entonces garantizamos igualdad de los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$ para todo $1 \leq q \leq t$. La siguiente proposición refleja este hecho.

Proposición 3.2.4. *Sea w una función medible, casi creciente y que duplica en la segunda variable y tiene la propiedad de comparabilidad en la primer variable. Esto es, satisface las condiciones 3.1.a), 3.1.b) y 3.1.c) antes mencionadas. Luego, los espacios $bmo_{w,q}$ coinciden para todo $1 \leq q < \infty$.*

Demostración. La idea es probar que para todo $1 < q < \infty$ tenemos que $\mathrm{bmo}_w = \mathrm{bmo}_{w,q}$. Por la desigualdad de Hölder es trivial que $\mathrm{bmo}_{w,q} \subset \mathrm{bmo}_w$. En efecto para toda bola B de centro a y radio r tenemos

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - m_B f| \, dy \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - m_B f|^s \, dy \right)^{1/s} \leq C \ w(a,r) \, .$$

Por otro lado, si $f \in \mathrm{bmo}_w$, por el corolario 3.2.3 bastaría ver que w satisface la condición D_q para todo q. En efecto, sea B una bola y $\{B_i\}$ una familia de subbolas de B disjuntas dos a dos. Entonces

$$\sum_i w(x_i, r_i)^q \, r_i^n \quad \leq \quad C \ \sum_i w(x_i, r)^q \, r_i^n$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; C \sum_i w(x,r)^q \, r_i^n \\
&\leq \; C \; w(x,r)^q \sum_i |B_i| \\
&\leq \; C \; w(x,r)^q |B| \;\; = \;\; C \; w(x,r)^q \, r^n \, .
\end{aligned}
$$

Luego, puesto que w duplica en la segunda variable tenemos el resultado. □

En la sección anterior, vimos que la función $w(x,t) = t^{\alpha-n} \left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)}$ da lugar a los espacios Lipschitz variables $\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$ para $1 \leq q < \infty$. Recordemos que dichos espacios fueron definidos mediante las desigualdades (3.1.4) y (3.1.5) para $q = 1$ y $1 < q < \infty$ respectivamente.

Recordemos además del capítulo 1 que una función exponente cumple con las condiciones de continuidad Log–Hölder local y en el infinito si

$$
\exists \, c_0 > 0 \qquad / \qquad |p(x) - p(y)| \leq \frac{c_0}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})} \qquad \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n \, , \tag{3.2.5}
$$

$$
\exists \, p_\infty, c_1 > 0 \qquad / \qquad |p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_1}{\log(e + |x|)} \qquad \forall \, x \in \mathbb{R}^n \, . \tag{3.2.6}
$$

También recordemos que la notación $p \in \mathcal{P}^{\log}$ indica que la función exponente $p(\cdot)$ satisface (3.2.5) y (3.2.6). Los siguientes lemas muestran algunas consecuencias de estas propiedades, las cuales serán necesarias antes de continuar con los demás corolarios.

Lema 3.2.5. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. Si $p \in \mathcal{P}^{\log}$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$
\left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)} \leq C \;\; \left\| \chi_{B(y,t)} \right\|_{p'(\cdot)} \, ,
$$

para todo $|x - y| < t$ y todo $t > 0$.

Demostración. Notemos que si $p \in \mathcal{P}^{\log}$ entonces $p' \in \mathcal{P}^{\log}$. Además $\frac{1}{(p_\infty)'} = 1 - \frac{1}{p_\infty}$. Si $t > 1$, por el lema 1.2.9 tenemos

$$
\left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)} \approx C \; |B(x,t)|^{1-\frac{1}{p_\infty}} = C \; |B(y,t)|^{1-\frac{1}{p_\infty}} \approx C \;\; \left\| \chi_{B(y,t)} \right\|_{p'(\cdot)} \, .
$$

Por otro lado, observemos que si $|x-y|<t$ entonces $B(y,t)\subset B(x,2t)$, con lo cual para $t\le 1$, por la observación 2.1.7 y por el lema 1.2.1 se tiene

$$\begin{aligned}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} &\le C\ |B(x,t)|^{1-\frac{1}{p_-(B(x,t))}}\\ &= C\ |B(x,t)|^{1-\frac{1}{p_+(B(y,t))}}|B(x,t)|^{\frac{1}{p_+(B(y,t))}-\frac{1}{p_-(B(x,t))}}\\ &\le C\ |B(y,t)|^{1-\frac{1}{p_+(B(y,t))}}\left(|B(x,t)|^{p_-(B(x,2t))-p_+(B(x,2t))}\right)^{1/p_-^2}\\ &\le C\ \left\|\chi_{B(y,t)}\right\|_{p'(\cdot)},\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el lema. □

Lema 3.2.6. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $p_-\ge\frac{n}{\alpha}$. Si $p\in\mathcal{P}^{\log}$, entonces $w(x,t)=t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$ es casi creciente.*

Demostración. Debemos probar que existe una constante $C>0$ independiente de x, tal que para todo $t<s$ se verifique

$$t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}\le C\ s^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,s)}\right\|_{p'(\cdot)}. \tag{3.2.7}$$

Dividimos la prueba en tres casos.

a) Supongamos que $1<t<s$. Por la acotación de la función exponente y por el Lema 1.2.9 la acotación es inmediata. En efecto

$$\begin{aligned}w(x,t) &= t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}\\ &\le C\ t^{\alpha-n}\ t^{n-\frac{n}{p_\infty}} = C\ t^{\alpha-\frac{n}{p_\infty}}\\ &\le C\ s^{\alpha-\frac{n}{p_\infty}} = C\ s^{\alpha-n}\ s^{n-\frac{n}{p_\infty}}\\ &\le C\ s^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,s)}\right\|_{p'(\cdot)} = C\ w(x,s).\end{aligned}$$

b) Supongamos que $t<s<1$. Por la observación 2.1.7 y nuevamente por la acotación de p_- tenemos

$$\begin{aligned}w(x,t) &= t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}\\ &\le C\ t^{\alpha-n}\ t^{n-\frac{n}{p_-(B(x,t))}} = C\ t^{\alpha-\frac{n}{p_-(B(x,t))}}\end{aligned}$$

$$\leq \; C\; s^{\alpha-\frac{n}{p_-(B(x,t))}} \;=\; C\; s^{\alpha-\frac{n}{p_+(B(x,s))}}\; s^{\frac{n}{p_+(B(x,s))}-\frac{n}{p_-(B(x,t))}}$$

Dado que $B(x,t) \subset B(x,s)$ tenemos que $p_-(B(x,t)) \geq p_-(B(x,s))$. Luego, por el Lema 1.2.1 y nuevamente por la observación 2.1.7 tenemos

$$\begin{aligned} w(x,t) &\leq C\; s^{\alpha-\frac{n}{p_+(B(x,s))}} \left(|B(x,s)|^{p_-(B(x,s))-p_+(B(x,s))}\right)^{\frac{1}{p_-^2}} \\ &= C\; s^{\alpha-n}\; s^{n-\frac{n}{p_+(B(x,s))}} \\ &\leq C\; s^{\alpha-n} \left\|\chi_{B(x,s)}\right\|_{p'(\cdot)} \;=\; C\; w(x,s)\,. \end{aligned}$$

c) Supongamos finalmente que $t < 1 < s$. El resultado es inmediato después de observar las siguientes estimaciones.

$$w(x,t) = t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C\; t^{\alpha-\frac{n}{p_-(B(x,t))}} \leq C\;.$$

$$C\; \leq C\; s^{\alpha-\frac{n}{p_\infty}} \leq C\; s^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,s)}\right\|_{p'(\cdot)} = C\; w(x,s)\,.$$

Con esto queda probado el Lema. □

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente

Corolario 3.2.7. *Sea $0 < \alpha < n$ y $p(\cdot)$ una función exponente tal que $p_- \geq \frac{n}{\alpha}$ y tal que $p' \in D$. Si además $p \in \mathcal{P}^{\log}$, entonces $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)} = \mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$ para todo $1 \leq q < \infty$.*

Demostración. El resultado es consecuencia de observar que por los lemas 3.2.5 y 3.2.6, la función $w(x,t) = t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$ satisface las hipótesis de la proposición 3.2.4. □

Este resultado contiene al caso constante conocido $p = n/\alpha$ en donde $\mathfrak{L}_{\alpha,\frac{n}{\alpha}} = \mathrm{BMO}$. En efecto, la desigualdad (3.2.1) de la definición 3.2.1 se satisface trivialmente para este caso.

Es importante destacar la importancia de las propiedades de la función w. Consideremos en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, para $\beta > 1$, la función

$$w(a,t) = \frac{1}{t}\left|\log^{1-\beta}\frac{1}{|a+t|} - \log^{1-\beta}\frac{1}{|a-t|}\right|\,. \tag{3.2.8}$$

En el siguiente lema veremos que el espacio $\mathrm{bmo}_{w,1}(\mathbb{R})$ es no trivial.

Lema 3.2.8. *Sea $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $\beta > 1$. La función*

$$g(x) = \frac{(\beta - 1)}{x \log^{\beta}\left(\frac{1}{|x|}\right)},$$

es localmente integrable en $\mathbb{R}$. Más aún, pertenece a bmo_w, donde w es como en (3.2.8). Además $g \notin L^q_{\text{loc}}$ para ningún $1 < q < \infty$.

Demostración. Dado que cualquier compacto está incluido en una bola, basta tomar una bola B centrada en el origen y de radio $R > 0$ y ver que

$$\int_B |g(x)|\, dx \quad < \quad \infty\,.$$

En efecto, sea B una tal bola, entonces

$$\begin{aligned}
\int_B |g(x)|\, dx &= (\beta - 1) \int_{-R}^{0} \frac{dx}{|x| \log^{\beta}\left(\frac{1}{|x|}\right)} + (\beta - 1) \int_0^R \frac{dx}{|x| \log^{\beta}\left(\frac{1}{|x|}\right)} \\
&= 2(\beta - 1) \int_0^R \frac{dx}{x \log^{\beta}\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= 2(\beta - 1) \int_{\frac{1}{R}}^{\infty} \frac{du}{u \log^{\beta} u} \\
&= 2(\beta - 1) \int_{\log \frac{1}{R}}^{\infty} \frac{dv}{v^{\beta}} \quad < \quad \infty\,,
\end{aligned}$$

donde se han hecho dos cambios de variables dados por $u = 1/x$ y $v = \log(u)$. Por otro lado, dado cualquier número $1 < q < \infty$, y $R > 1/2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_B |g(x)|^q\, dx &\geq 2(\beta - 1) \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^q \log^{\beta q}\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= 2(\beta - 1) \int_{\log 2}^{\infty} u^{-\beta q}\, e^{u(q-1)}\, du \quad = \quad \infty\,,
\end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variables $u = \log(\frac{1}{x})$. Esto prueba que $g \notin L^q_{\text{loc}}$ para ningún $1 < q < \infty$.

Veamos ahora que $g \in \text{bmo}_w$; dado que

$$\frac{1}{|I|} \int_I |g(x) - g_I|\, dx \quad \leq \quad \frac{1}{|I|} \int_I (|g(x)| + |g_I|)\, dx \quad = \quad 2\,|g_I| \quad \leq \quad C\, w(a,t)\,, \tag{3.2.9}$$

basta probar que g_I está acotado por un múltiplo de $w(a,t)$, para todo intervalo $I = I(a,t)$, con lo cual lograremos el resultado. Para ello, supongamos primero que $I \subset \mathbb{R}^+$.

Entonces, si $0 < \delta < \epsilon$, un cálculo análogo al que hicimos anteriormente nos permite escribir

$$\begin{aligned}\int_\delta^\epsilon \frac{dx}{x\log^\beta\left(\frac{1}{|x|}\right)} &= \int_{-\log\epsilon}^{-\log\delta}\frac{dv}{v^\beta} = \frac{1}{1-\beta}v^{1-\beta}\Big|_{-\log\epsilon}^{-\log\delta}\\ &= \frac{1}{\beta-1}\left[\log^{1-\beta}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)-\log^{1-\beta}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right].\end{aligned}$$

Por otro lado, si $I\subset\mathbb{R}^-$, esto es $\delta<\epsilon<0$, haciendo los cambios de variables adecuados y observando que

$$\delta<\epsilon<0 \quad\Rightarrow\quad 0<-\epsilon<-\delta \quad\Rightarrow\quad 0<-\frac{1}{\delta}<-\frac{1}{\epsilon},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int_\delta^\epsilon \frac{dx}{x\log^\beta\left(\frac{1}{|x|}\right)} &= \int_{-\frac{1}{\delta}}^{-\frac{1}{\epsilon}}\frac{du}{u\log^\beta(u)} = -\int_{\log\left(-\frac{1}{\delta}\right)}^{\log\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)}\frac{dv}{v^\beta}\\ &= \frac{1}{\beta-1}\left[\log^{1-\beta}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)-\log^{1-\beta}\left(-\frac{1}{\delta}\right)\right].\end{aligned}$$

Finalmente, si $\delta<0<\epsilon$, dado que

$$\lim_{t\to0^+}\left(\log^{1-\beta}\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \left(\lim_{t\to0^+}\left(\log\frac{1}{t}\right)\right)^{1-\beta} = 0,$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int_\delta^\epsilon \frac{dx}{x\log^\beta\left(\frac{1}{|x|}\right)} &= \lim_{t\to0^+}\left[\int_\delta^{-t}\frac{dx}{x\log^\beta\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right]+\lim_{t\to0^+}\left[\int_t^\epsilon\frac{dx}{x\log^\beta\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right]\\ &= \frac{1}{\beta-1}\left[\log^{1-\beta}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)-\log^{1-\beta}\left(-\frac{1}{\delta}\right)\right].\end{aligned}$$

Haciendo, en todos los casos anteriores $\delta=a-t$ y $\epsilon=a+t$ tenemos

$$2\,|g_I| = \frac{1}{t}\int_{a-t}^{a+t}g(x)\,dx = \frac{1}{t}\left|\log^{1-\beta}\left(\frac{1}{|a+t|}\right)-\log^{1-\beta}\left(\frac{1}{|a-t|}\right)\right| = w(a,t).$$

Por lo tanto, volviendo a (3.2.9) tenemos que $g\in\mathrm{bmo}_w$. $\square$

Observemos que $\mathrm{bmo}_{w,q}\subset L^q_{\mathrm{loc}}$. En efecto, si B es una bola cualquiera entonces

$$\int_B|f(x)|^q\,dx \le \int_B\left(|f(x)-f_B|+|f_B|\right)^q\,dx$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^q \int_B (|f(x) - f_B|)^q \, dx + |f_B|^q \, |B| \\ &\leq C \; 2^q w(x,r)^q \, |B| + |f_B|^q \, |B| \;\; < \;\; \infty \, . \end{aligned}$$

Luego, por el lema anterior concluimos que $g \notin \mathrm{bmo}_{w,q}$ para ningún $1 < q < \infty$.

3.3. Caracterización puntual de funciones en $\mathbf{bmo}_{w,q}$

Estudiaremos en esta sección las condiciones sobre la función $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bajo las cuales tenemos una representación puntual para las funciones en $\mathrm{bmo}_{w,q}$. Inversamente, estudiaremos cuándo una tal representación, implica que dichas funciones pertenecen al espacio. Las siguientes dos proposiciones establecen esta caracterización.

Proposición 3.3.1 (Condición Puntual). *Sea $w(x,t)$ una función medible tal que existen constantes $0 < A$ y $0 \leq \beta < 1$ de manera que $w(x,st) \leq A\, s^{\beta}\, w(x,t)$ para todo $s \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Para toda función f en $\mathrm{bmo}_{w,q}$, para algún $q \in [1,\infty)$, se tiene que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \;\; \|f\|_{w,q} \int_0^{2|x-y|} \frac{w(x,t) + w(y,t)}{t} \, dt \, , \tag{3.3.1}$$

para casi todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Para probar (3.3.1) tomemos una función $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$ y puntos de Lebesgue x e y en $\mathbb{R}^n$ de f, con $x \neq y$. Considerando las bolas $B = B(x, |x-y|)$ y $B' = B(y, |x-y|)$, tenemos

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - m_B f| + |f(y) - m_{B'} f| + |m_B f - m_{B'} f| \leq I + II + III \, .$$

Estimemos cada término por separado. Definamos, para $i = 0, 1, \ldots$, las bolas $B_i = B(x, 2^{-i}|x-y|)$ de manera de expresar a B como unión de coronas disjuntas, esto es: $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} (B_i \backslash B_{i+1})$. Luego

$$\begin{aligned} |f(x) - m_B f| \;\; &\leq \;\; \lim_{m \to \infty} \left(|f(x) - m_{B_m} f| + \sum_{i=0}^{m-1} |m_{B_{i+1}} f - m_{B_i} f| \right) \\ &= \;\; \sum_{i=0}^{\infty} |m_{B_{i+1}} f - m_{B_i} f| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} \left(|B_i|^{-1} \int_{B_i} |f(z) - m_{B_i} f|^q \, dz \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \ \|f\|_{w,q} \sum_{i=0}^{\infty} w(x, 2^{-i}|x-y|) \\
&\leq C \ \|f\|_{w,q} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{2^{-i-1}|x-y|}^{2^{-i}|x-y|} \frac{w(x, 2^{-i}|x-y|)}{t} \, dt \, .
\end{aligned}
$$

Es claro que para cada t tal que $2^{-i-1}|x-y| \leq t \leq 2^{-i}|x-y|$, existe $s \in [1,2]$ tal que $st = 2^{-i}|x-y|$. Luego

$$
w(x, 2^{-i}|x-y|) = w(x, st) \leq A s^{\beta} w(x,t) \leq A\, 2^{\beta} w(x,t) = C \ w(x,t) \, .
$$

Con lo cual

$$
\begin{aligned}
|f(x) - m_B f| &\leq C \ \|f\|_{w,q} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{2^{-i-1}|x-y|}^{2^{-i}|x-y|} \frac{w(x,t)}{t} \, dt \qquad (3.3.2) \\
&\leq C \ \|f\|_{w,q} \int_0^{|x-y|} \frac{w(x,t)}{t} \, dt \, .
\end{aligned}
$$

Análogamente se estima II obteniendo

$$
|f(y) - m_{B'} f| \leq C \ \|f\|_{w,q} \int_0^{|x-y|} \frac{w(y,t)}{t} \, dt \, .
$$

Por último, observemos que por el lema 3.1.8 la función w duplica, entonces denotando $2B = B(x, 2|x-y|)$, es claro que $B' \subset 2B$. Luego

$$
\begin{aligned}
|m_B f - m_{B'} f| &\leq |m_B f - m_{2B} f| + |m_{B'} f - m_{2B} f| \\
&\leq |B|^{-1} \int_B |f(z) - m_{2B} f| dz + |B'|^{-1} \int_{B'} |f(z) - m_{2B} f| dz \\
&\leq 2^n |2B|^{-1} \int_{2B} |f(z) - m_{2B} f| dz + 2^n |2B|^{-1} \int_{2B} |f(z) - m_{2B} f| dz \\
&\leq C \ \|f\|_{w,q} \int_0^{2|x-y|} \frac{w(x,t)}{t} \, dt \, .
\end{aligned}
$$

Con esto queda probada la estimación para III y con ello la desigualdad (3.3.1). □

Observación 3.3.2. Si suponemos que la función w duplica y es casi creciente en la segunda variable, propiedades enunciadas en la sección anterior en 3.1.a) y 3.1.b), también es posible obtener una estimación puntual para funciones en $\mathrm{bmo}_{w,q}$ como en (3.3.1). En efecto, en la desigualdad (3.3.2), para $t \in (2^{-i-1}|x-y|, 2^{-i}|x-y|)$ tenemos

$$w(x, 2^{-i}|x-y|) \leq C\ w(x, 2^{-i-1}|x-y|) \leq C\ w(x,t)\,,$$

con lo cual es posible armar la integral del lado derecho de la expresión puntual.

La siguiente proposición establece en algún sentido un resultado recíproco al anterior.

Proposición 3.3.3. *Sea $w(x,t)$ una función medible que duplica en la segunda variable, según 3.1.b). Supongamos que para algún $1 \leq q < \infty$ la función*

$$\psi_q(x,r) = \int_{B(x,r)} \left(\int_0^r \frac{w(z,u)}{u}\, du \right)^q dz\,,$$

es finita para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Si f es una función medible que satisface una desigualdad puntual del tipo

$$|f(y) - f(z)| \leq C \int_0^{2|y-z|} \frac{w(y,t) + w(z,t)}{t}\, dt\,, \tag{3.3.3}$$

para casi todos $y, z \in \mathbb{R}^n$, entonces $f \in bmo_{\Psi_q,q}(\mathbb{R}^n)$, donde

$$\Psi_q(x,r) = \left(\frac{\psi_q(x,r)}{r^n} \right)^{1/q}.$$

Más aún, si existe una constante C independiente de x y de r tal que

$$\psi_q(x,r) \leq C\ r^n\, w(x,r)^q\,, \tag{3.3.4}$$

entonces $f \in bmo_{w,q}$.

Demostración. Observemos que la finitud de $\psi_q(x,r)$ implica que $\int_0^r \frac{w(y,t)}{t}\, dt < \infty$ para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Luego, si f satisface (3.3.3) entonces es localmente integrable. En efecto, para $R > 0$ y casi todo $y \in B(0,R)$

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |f(z)|\, dz &\leq \int_{B(0,R)} |f(y)|\, dz + \int_{B(0,R)} |f(y) - f(z)|\, dz \\ &\leq |f(y)|\, |B(0,R)| + C \int_{B(0,R)} \int_0^{2|y-z|} \frac{w(y,t) + w(z,t)}{t}\, dt\, dy \\ &< \infty\,. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $f \in \mathrm{bmo}_{\Psi_q,q}$. Para ello probaremos que para una bola $B = B(x,r)$

$$\frac{1}{\Psi_q(x,r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - m_B f|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \,, \tag{3.3.5}$$

donde C es una constante independiente de B y f. En efecto

$$\begin{aligned}
&\int_B |f(y) - m_B f|^q \, dy \\
\leq\ & \int_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f(z)| \, dz \right)^q dy \\
\leq\ & C \int_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| \int_0^{2|y-z|} \frac{w(y,t) + w(z,t)}{t} \, dt \right| dz \right)^q dy \\
\leq\ & C \int_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(y,t)}{t} \, dt + \int_0^{4r} \frac{w(z,t)}{t} \, dt \right) dz \right)^q dy \\
\leq\ & C \int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(y,t)}{t} \, dt + \frac{1}{|B|} \int_B \int_0^{4r} \frac{w(z,t)}{t} \, dt \, dz \right)^q dy \\
\leq\ & C \left(\int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(y,t)}{t} \, dt \right)^q dy + \frac{1}{|B|^q} \int_B \left(\int_B \int_0^{4r} \frac{w(z,t)}{t} \, dt \, dz \right)^q dy \right) \\
\leq\ & C \left(\int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(y,t)}{t} \, dt \right)^q dy + |B|^{1-q} \left(\int_B \int_0^{4r} \frac{w(z,t)}{t} \, dt \, dz \right)^q \right).
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en el segundo sumando podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
&\int_B |f(y) - m_B f|^q \, dy \\
\leq\ & C \left(\int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(y,t)}{t} \, dt \right)^q dy + |B|^{1-q} \, |B|^{\frac{q}{q'}} \int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(z,t)}{t} \, dt \right)^q dz \right) \\
\leq\ & C \left(\int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(y,t)}{t} \, dt \right)^q dy + \int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(z,t)}{t} \, dt \right)^q dz \right).
\end{aligned}$$

Ambos sumandos son idénticos, luego por la hipótesis sobre w tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B |f(y) - m_B f|^q \, dy &\leq C \int_B \left(\int_0^{4r} \frac{w(z,t)}{t} \, dt \right)^q dz \\
&\leq C \int_B \left(\int_0^{r} \frac{w(z,4u)}{u} \, du \right)^q dz \\
&\leq C \int_B \left(\int_0^{r} \frac{A\, w(z,u)}{u} \, du \right)^q dz \\
&\leq C \int_{B(x,r)} \left(\int_0^{r} \frac{w(z,u)}{u} \, du \right)^q dz \\
&= C \, \psi_q(x,r) \,.
\end{aligned}$$

De aquí es clara la desigualdad (3.3.5). Si además se satisface (3.3.4) entonces la desigualdad anterior permite afirmar que

$$\int_{B(x,r)} |f(x) - m_B f|^q \, dx \leq C \; \psi_q(x,r) \leq C \; r^n \, w(x,r)^q \,,$$

de donde $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$ como queríamos demostrar. □

Ahora estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3.4. *Sea w una función medible casi creciente y que duplica en la segunda variable. Si para algún $q \in [1,\infty)$ se satisface la desigualdad (3.3.4), entonces $bmo_w = bmo_{w,s}$ para todo $1 \leq s \leq q$.*

Demostración. Es claro, por la desigualdad de Hölder, que $\mathrm{bmo}_{w,s} \subset \mathrm{bmo}_w$. Por otro lado, si $f \in \mathrm{bmo}_w$, por la proposición 3.3.1 y la observación 3.3.2, f satisface una desigualdad puntual dada por (3.3.3), en la cual el lado derecho es finito c.t.p. puesto que w satisface (3.3.4). Además, esta última nos permite probar, aplicando la desigualdad de Hölder, que dada una bola B de centro a y radio r, tenemos

$$\begin{aligned} \int_B \left(\int_0^r \frac{w(x,u)}{u} \, du \right)^s dx &\leq \left(\int_B \left(\int_0^r \frac{w(x,u)}{u} \, du \right)^q dx \right)^{\frac{s}{q}} \left(\int_B dx \right)^{1-\frac{s}{q}} \\ &\leq C \; w(a,r)^s \, |B|^{\frac{s}{q}} |B|^{1-\frac{s}{q}} \\ &\leq C \; w(a,r)^s \, r^n \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la proposición 3.3.3, $f \in \mathrm{bmo}_{w,s}$ que es lo que queríamos demostrar. □

De acuerdo al teorema anterior, para una función w con las propiedades mencionadas, si se verifica la desigualdad (3.3.4), tenemos una caracterización puntual para los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$. Más aún, todos ellos coinciden. Observemos que este resultado se obtuvo en forma general y con otra técnica en la proposición 3.2.4.

El siguiente lema brinda condiciones suficientes para garantizar la desigualdad (3.3.4).

Lema 3.3.5. *Sea $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función tal que*

a) $w(x,sr) \leq C s^\gamma w(x,r)$, para algún $\gamma > 0$ y para todo $s \leq 1$;

b) $w(x,r) \leq C\ w(y,r)$, *siempre que* $|x-y|<r$,

entonces w *satisface la condición* (3.3.4) *para cualquier* $1 \leq q < \infty$.

Demostración. Sea $B = B(x,r)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_B \left(\int_0^r \frac{w(z,u)}{u}\, du \right)^q dz &= \int_B \left(\int_0^r \frac{w(z, r\,u/r)}{u}\, du \right)^q dz \\
&= \int_B \left(\int_0^1 \frac{w(z,rt)}{t}\, dt \right)^q dz \\
&\leq C \int_B \left(\int_0^1 \frac{t^\gamma w(z,r)}{t}\, dt \right)^q dz \\
&\leq C \int_B \left(\int_0^1 t^{\gamma-1}\, dt \right)^q w(z,r)^q\, dz \\
&\leq C \int_B w(x,r)^q\, dz \\
&\leq C\ w(x,r)^q\, r^n\,.
\end{aligned}$$

Esto demuestra (3.3.4). □

Bajo las hipótesis mencionadas, las proposiciones 3.3.1 y 3.3.3 en conjunto establecen una caracterización puntual para los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$.

Si $w \equiv 1$ el espacio bmo_w es el BMO usual. Tal función satisface trivialmente las hipótesis de la proposición 3.3.1, pero el lado derecho de la desigualdad puntual no es finito. Esto concuerda con el hecho conocido de que el espacio BMO no tiene una representación puntual.

Como vimos en la sección anterior, la función $w(x,t) = t^{\alpha-n} \left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)}$ genera a los espacios $\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$ para $1 \leq q < \infty$. En lo que sigue enunciaremos las proposiciones anteriores para este caso y analizaremos condiciones suficientes sobre $p(\cdot)$ para obtener representación puntual.

Proposición 3.3.6. *Sea* $0<\alpha<n$ *y* $p(\cdot)$ *una función exponente tal que* $p' \in D$ *(definición 2.1.5). Si* $p \in \mathcal{P}^{\log}$, *entonces para* $1 \leq q < \infty$ *y toda función* $f \in \mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$, *existe una constante* C *tal que*

$$|f(x)-f(y)| \leq C\ \|f\|_{\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{2|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(y,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\, \frac{dt}{t}\,, \tag{3.3.6}$$

para casi todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Dado que $p' \in D$

$$w(x,2t) = (2t)^{\alpha-n} \left\|\chi_{B(x,2t)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C\ t^{\alpha-n} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} = C\ w(x,t)\,.$$

Por otro lado, por el lema 3.2.6, $w(x,t) = t^{\alpha-n}\left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)}$ es casi creciente para cada x y por la observación 3.3.2 se obtiene la estimación puntual (3.3.6). □

Lema 3.3.7. *Sea $p(\cdot)$ una función exponente tal que $p_- > \frac{n}{\alpha}$. Si $p \in \mathcal{P}^{\log}$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^r \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t} \leq C\ \frac{\left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)}}{r^{n-\alpha}}\,, \tag{3.3.7}$$

para todo $r > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos primero $r \leq 1$. Por la observación 2.1.7, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ fijo se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t} &\leq C \int_0^r \frac{|B(x,t)|^{1-\frac{1}{p_-(B(x,t))}}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t} \\
&\leq C \int_0^r \frac{|B(x,t)|^{1-\frac{1}{p_+(B(x,t))}}}{t^{n-\alpha}} |B(x,t)|^{\frac{1}{p_+(B(x,t))}-\frac{1}{p_-(B(x,t))}} \frac{dt}{t} \\
&\leq C \int_0^r \frac{|B(x,t)|^{1-\frac{1}{p_+(B(x,t))}}}{t^{n-\alpha}} \left(|B(x,t)|^{p_-(B(x,t))-p_+(B(x,t))}\right)^{\frac{1}{p_-^2}} \frac{dt}{t}\,.
\end{aligned}$$

Por el lema 1.2.1, el factor del penúltimo renglón siguiente está acotado. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t} &\leq C \int_0^r t^{\alpha-\frac{n}{p_+(B(x,t))}-1}\, dt \\
&\leq C \int_0^r t^{\alpha-\frac{n}{p_-(B(x,r))}-1}\, dt \\
&= C\ r^{\alpha-\frac{n}{p_+(B(x,r))}} \left(r^{\frac{n}{p_+(B(x,r))}-\frac{n}{p_-(B(x,r))}}\right) \\
&\leq C\ \frac{\left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)}}{r^{n-\alpha}}\,.
\end{aligned}$$

Donde nuevamente, hemos usado la observación 2.1.7. Por otro lado, si $r > 1$ dividimos la integral en dos partes

$$\int_0^r \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t} + \int_1^r \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t}\,. \tag{3.3.8}$$

Para el primer sumando, por la estimación anterior, se verifica

$$\int_0^1 \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\,\frac{dt}{t} \quad\leq\quad C\,\left\|\chi_{B(x,1)}\right\|_{p'(\cdot)} \quad=\quad C\,.$$

Además, si mostramos que $r^{n-\alpha} \leq C\,\left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)}$, entonces

$$\int_0^1 \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\,\frac{dt}{t} \quad\leq\quad C\,\frac{\left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)}}{r^{n-\alpha}}\,. \tag{3.3.9}$$

En efecto, puesto que $\alpha p_- - n > 0$ y $(p_-)' = (p')_+$ (ver observación 2.1.7), resulta

$$1 \quad<\quad r^{\alpha p_- - n} \quad=\quad r^{(\alpha-n)(p_-)'+n} \quad=\quad C\int_{B(x,r)} r^{(\alpha-n)(p_-)'}\,dy$$

$$=\;C\int_{B(x,r)} r^{(\alpha-n)(p')_+}\,dy \;<\; C\int_{B(x,r)} r^{(\alpha-n)p'(y)}\,dy \;=\; C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\chi_{B(x,r)}}{r^{(n-\alpha)}}\right)^{p'(y)} dy\,,$$

lo que significa que $r^{(n-\alpha)}$ es una cota inferior para $\left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)}$.

Para el segundo sumando, teniendo en cuenta el lema 1.2.9 la estimación es inmediata

$$\begin{aligned}\int_1^r \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\,\frac{dt}{t} &\leq C\int_1^r \frac{|B(x,t)|^{1-\frac{1}{p_\infty}}}{t^{n-\alpha}}\,\frac{dt}{t} \\ &\leq C\int_1^r t^{\alpha-\frac{n}{p_\infty}-1}\,dt \\ &\leq C\,r^{\alpha-\frac{n}{p_\infty}} \quad\leq\quad C\,\frac{\left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)}}{r^{n-\alpha}}\,.\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Así, de (3.3.8), (3.3.9) y (3.3.10) se sigue (3.3.7). □

Proposición 3.3.8. *Sea $p(\cdot)$ una función tal que $p_- > \frac{n}{\alpha}$ y $p' \in D$. Supongamos además que $p \in \mathcal{P}^{\log}$. Entonces, toda función f medible que satisfaga una desigualdad puntual del tipo*

$$|f(y)-f(z)| \leq C\int_0^{2|y-z|} \frac{\left\|\chi_{B(y,t)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(z,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\,dt\,,$$

para casi todos $y, z \in \mathbb{R}^n$, pertenece a $\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$ para cualquier $1 \leq q < \infty$.

Demostración. El lema 3.3.7 asegura que

$$\int_0^r \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\,\frac{dt}{t} < \infty\,,$$

para todo x. Por otro lado, para $1 \le q < \infty$ fijo, nuevamente por los lemas 3.3.7 y 3.2.5 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} \left(\int_0^r \frac{\left\|\chi_{B(z,u)}\right\|_{p'(\cdot)}}{u^{n-\alpha}} \frac{du}{u} \right)^q dz &\le C \int_{B(x,r)} \frac{\left\|\chi_{B(z,r)}\right\|_{p'(\cdot)}^q}{r^{(n-\alpha)q}} dz \\ &\le C \left(r^{\alpha-n} \left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)} \right)^q r^n , \end{aligned}$$

con lo cual se verifica la desigualdad (3.3.4). Luego, por la proposición 3.3.3 se tiene que $f \in \mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$, que es lo que queríamos demostrar. □

Corolario 3.3.9. *En las mismas hipótesis del corolario anterior, $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)} = \mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$ para todo $1 \le q < \infty$.*

Demostración. Seguiremos el esquema del teorema 3.3.4. En efecto, es trivial que $\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)} \subset \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$. Por otro lado, si $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$, por la proposición 3.3.6 satisface una desigualdad puntual como en (3.3.6). Finalmente, por la proposición 3.3.8 se tiene el resultado. □

Como dijimos, estas condiciones son suficientes pero no necesarias para garantizar igualdad de espacios. Utilizando la teoría de funciones a valores vectoriales podemos relajar las hipótesis de continuidad obteniendo una colección menor de espacios equivalentes. Esto se ve reflejado en la siguiente

Proposición 3.3.10. *Sea $0 < \alpha < n$ y $p(\cdot)$ una función exponente tal que $p_- > \frac{n}{\alpha}$. Supongamos además que $p' \in D$. Entonces, si f es una función medible, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$.

b) *f satisface una desigualdad puntual del tipo*

$$|f(x) - f(y)| \le C \int_0^{2|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(y,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \frac{dt}{t} ,$$

para casi todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Que a) implica b) se sigue de la proposición 3.3.6. Supongamos ahora que b) se cumple para una función medible f. Sea $r > 0$ y x_0 un punto de $\mathbb{R}^n$. Consideremos la bola $B = B(x_0, r)$. Probaremos que

$$\int_B |f(x) - m_B f|\, dx \leq C\, |B|^{\frac{\alpha}{n}} \left\| \chi_B \right\|_{p'(\cdot)}\,, \tag{3.3.11}$$

para una constante C independiente de B. Para ello, observemos que por las hipótesis sobre f y $p(\cdot)$ resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_B |f(x) - m_B f|\, dx \\
&\quad\leq \frac{1}{|B|} \int_B \int_B |f(x) - f(y)|\, dy\, dx \\
&\quad\leq C\, \frac{1}{|B|} \int_B \int_B \left(\int_0^{2|x-y|} \frac{\left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)} + \left\| \chi_{B(y,t)} \right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\, \frac{dt}{t} \right) dy\, dx \\
&\quad\leq C \int_B \int_0^{4r} \frac{\left\| \chi_{B(x,2t)} \right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\, \frac{dt}{t}\, dx + C \int_B \int_0^{4r} \frac{\left\| \chi_{B(y,2t)} \right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\, \frac{dt}{t}\, dy \\
&\quad\leq C \int_0^r \int_B \left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)} dx\, \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}}\,.
\end{aligned}$$

Luego, para un $q > 1$ finito a elegir, por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B |f(x) - m_B f|\, dx &\leq C\, |B|^{\frac{1}{q'}} \int_0^r \left(\int_B \left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)}^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\leq C\, |B|^{\frac{1}{q'}} \int_0^r \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x_0,r)}(x) \left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{p'(\cdot)}^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\leq C\, |B|^{\frac{1}{q'}} \int_0^r \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left\| \chi_{B(x_0,r)}(x) \chi_{B(x,t)}(\cdot) \right\|_{p'(\cdot)}^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}}\,.
\end{aligned}$$

Entonces, con notación de espacios de funciones a valores vectoriales, podemos escribir

$$\int_B |f(x) - m_B f|\, dx \leq C\, |B|^{\frac{1}{q'}} \int_0^r \left\| \chi_{B(x_0,r)}(x) \chi_{B(x,t)}(z) \right\|_{L^q_{L^{p'(\cdot)}}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}}\,, \tag{3.3.12}$$

donde la variable x corresponde al espacio L^q y la variable z, al $L^{p'(\cdot)}$. Dado que el dual topológico de $L^q_{L^{p'(\cdot)}}$ es $L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}$, se verifica

$$\left\| \chi_{B(x_0,r)}(x) \chi_{B(x,t)}(z) \right\|_{L^q_{L^{p'(\cdot)}}} = \sup_{\|g_t(x,z)\|_{L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x_0,r)}(x) \chi_{B(x,t)}(z) g_t(x,z)\, dx\, dz\,.$$

Observemos que para $0 < t < r$ fijo y $x \in B(x_0, r)$, si $\chi_{B(x_0,r)}(x) = 1$ entonces $\chi_{B(x_0,2r)}(z) = 1$ para todo $z \in B(x,t)$. Además, $\chi_{B(x,t)}(z) = \chi_{B(z,t)}(x)$. Con lo cual, usando nuevamente la desigualdad de Hölder en el contexto clásico con q y el hecho que $p' \in D$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{B(x_0,r)}(x)\chi_{B(x,t)}(z)\right\|_{L^q_{L^{p'(\cdot)}}} &\leq \sup_{\|g_t(x,z)\|_{L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}}\leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x_0,2r)}(z) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(z,t)}(x)|g_t(x,z)|\,dx\,dz \\
&\leq C \sup_{\|g_t(x,z)\|_{L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}}\leq 1} \int_{B(x_0,2r)} \|g_t(\cdot,z)\|_{q'}\, t^{\frac{n}{q}}\,dz \\
&\leq C\, t^{\frac{n}{q}} \sup_{\|g_t(x,z)\|_{L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}}\leq 1} \left\|\chi_{B(x_0,2r)}\right\|_{p'(\cdot)} \|g_t(x,z)\|_{L^{p(\cdot)}_{L^{q'}}} \\
&\leq C\, t^{\frac{n}{q}} \left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{p'(\cdot)} \sup_{\|g_t(x,z)\|_{L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}}\leq 1} \|g_t(x,z)\|_{L^{p(\cdot)}_{L^{q'}}}\,.
\end{aligned}$$

Elegimos ahora q tal que $\frac{n}{\alpha} < q' < p_-$. Por esta cota superior para q' y por el Teorema 1.1.3 (Desigualdad de Minkowski para integrales) podemos acotar el último factor de la desigualdad anterior y concluir que

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{B(x_0,r)}(x)\chi_{B(x,t)}(z)\right\|_{L^q_{L^{p'(\cdot)}}} &\leq C\, t^{\frac{n}{q}} \left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{p'(\cdot)} \sup_{\|g_t(x,z)\|_{L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}}\leq 1} \|g_t(x,z)\|_{L^{q'}_{L^{p(\cdot)}}} \\
&\leq C\, t^{\frac{n}{q}} \left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{p'(\cdot)}\,. \qquad (3.3.13)
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $q' > \frac{n}{\alpha}$ sí y sólo sí $0 < \frac{n}{q} - n + \alpha$, volviendo a la desigualdad (3.3.12) y denotando ahora con B a la bola $B(x_0, r)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B |f(x) - m_B f|\,dx &\leq C\, |B|^{\frac{1}{q'}} \int_0^r \left\|\chi_{B(x_0,r)}(x)\chi_{B(x,t)}(z)\right\|_{L^q_{L^{p'(\cdot)}}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\leq C\, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} |B|^{\frac{1}{q'}} \int_0^r t^{\frac{n}{q}-n+\alpha-1}\,dt \\
&= C\, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} |B|^{\frac{1}{q'}} r^{\alpha-\frac{n}{q'}} \\
&= C\, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} |B|^{\frac{\alpha}{n}}\,.
\end{aligned}$$

Luego, $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ como queríamos demostrar. □

La proposición anterior nos afirma que si la función exponente no tiene las propiedades de continuidad, aún es posible obtener una representación puntual para $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$. Al relajar las hipótesis sobre $p(\cdot)$ es de esperar que los espacios $\mathfrak{L}^q_{\alpha,p(\cdot)}$ no coincidan para todos los valores de q; sin embargo, esto sí ocurre para un determinado rango. El siguiente corolario refleja esto con más detalle.

Corolario 3.3.11. *Sea $0 < \alpha < n$ y $p(\cdot)$ una función exponente tal que $p_- > \frac{n}{\alpha}$. Si $p' \in D$ entonces los espacios $\mathfrak{L}^s_{\alpha,p(\cdot)}$ coinciden para todo $1 \leq s < \frac{n}{n-\alpha}$.*

Demostración. El resultado se logra aplicando un razonamiento análogo al visto en el corolario 3.3.9, pero con la función $w(x,t) = t^{\alpha-n} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$. Sólo bastaría probar que se verifica la desigualdad (3.3.4) para $1 \leq s < \frac{n}{n-\alpha}$. Utilizando la estimación (3.3.13) de la proposición anterior para la norma de funciones a valores vectoriales, observamos que, para una bola $B = B(x_0, r)$ y $1 < s < \frac{n}{n-\alpha}$, aplicando la desigualdad de Minskowski integral en el contexto clásico y luego el Teorema 1.1.3, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_B \left(\int_0^r t^{\alpha-n-1} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} dt\right)^s dx \\
&\leq \left(\int_0^r \left(\int_B t^{(\alpha-n-1)s} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|^s_{p'(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{s}} dt\right)^s \\
&= \left(\int_0^r t^{\alpha-n-1} \left\|\chi_{B(x_0,r)}(x)\chi_{B(x,t)}(z)\right\|_{L^s_{L^{p'(\cdot)}}} dt\right)^s \\
&\leq C \left(\int_0^r t^{\alpha-n-1} t^{\frac{n}{s}} \left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|_{p'(\cdot)} dt\right)^s \\
&= C \left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|^s_{p'(\cdot)} \left(\int_0^r t^{\alpha-n-1+\frac{n}{s}} dt\right)^s \\
&= C \left\|\chi_{B(x_0,r)}\right\|^s_{p'(\cdot)} r^{(\alpha-n)s} r^n \\
&= C \left(\left\|\chi_B\right\|_{p'(\cdot)} r^{(\alpha-n)}\right)^s r^n .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los espacios $\mathfrak{L}^s_{\alpha,p(\cdot)}$ coinciden para todo $1 \leq s < \frac{n}{n-\alpha}$ como queríamos demostrar. ☐

Es importante destacar que las funciones en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ poseen un cierto grado de suavidad local dependiente del comportamiento de $p(\cdot)$ relacionada, en algún sentido, con las condiciones Lipschitz usuales, como veremos en el siguiente lema.

Lema 3.3.12. *Sea $0 < \alpha < n$ y $p(\cdot)$ una función exponente tal que $p_+ > \frac{n}{\alpha}$. Sea Ω el mayor conjunto tal que $p_-(\Omega) > \frac{n}{\alpha}$ y $\mathfrak{B} = \{B(x,t) : B(x,2t) \subset \Omega\}$. Si $p' \in D$ para toda bola $B \in \mathfrak{B}$, entonces existe una constante C tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} |x-y|^{\alpha - \frac{n}{p_-(2B)}},$$

para toda función $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ *y casi todos* $x, y \in B$ *con* $B \in \mathfrak{B}$ *y* $|B| \leq 1$*, donde* $C = C(p(\cdot), n, \alpha)$.

Demostración. Sea $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$. Sea $B \in \mathfrak{B}$ una bola de centro x_0 y radio r tal que $|B| \leq 1$. Tomemos x e y puntos de Lebesgue de f en B. Por el corolario 3.3.6 sabemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq C \ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{2|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(y,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \, \frac{dt}{t} ,$$

para casi todos x e y en B. Usando el cambio de variables $t = 4u$ y luego la condición D sobre p' tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq C \ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{\frac{1}{2}|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,4u)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(y,4u)}\right\|_{p'(\cdot)}}{(4u)^{n-\alpha}} \, \frac{du}{u} \\ &\leq C \ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{\frac{1}{2}|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,u)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(y,u)}\right\|_{p'(\cdot)}}{u^{n-\alpha}} \, \frac{du}{u} \qquad (3.3.14) \end{aligned}$$

Observamos que para todo $x, y \in B(x_0, r)$ y para todo $0 < t < \frac{1}{2}|x - y| < r$ se tiene

$$B(x,t) \subset B(x_0, 2r) = 2B \qquad \text{y} \qquad B(y,t) \subset B(x_0, 2r) = 2B \, ,$$

en efecto, si $z \in B(x,t)$ y $w \in B(y,t)$ entonces

$$|z - x_0| < |z - x| + |x - x_0| < t + r < 2r, \qquad |w - x_0| < |w - y| + |y - x_0| < t + r < 2r \, .$$

Además, como $|B(x,t)| \leq 2^n |B(x_0, r)| \leq 2^n$ y análogamente $|B(y,t)| \leq 2^n$, por la observación 2.1.7 sabemos que

$$\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C \, |B(x,t)|^{1 - \frac{1}{p_-(B(x,t))}} \leq C \, t^{n - \frac{n}{p_-(B(x_0,2r))}} = C \, t^{n - \frac{n}{p_-(2B)}} \, ,$$

y de la misma forma

$$\left\|\chi_{B(y,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C \, t^{n - \frac{n}{p_-(2B)}} \, .$$

Retomando ahora la desigualdad (3.3.14) concluimos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq C \ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{\frac{1}{2}|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(y,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}} \, \frac{dt}{t} \\ &\leq C \ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{\frac{1}{2}|x-y|} \frac{t^{n - \frac{n}{p_-(2B)}} + t^{n - \frac{n}{p_-(2B)}}}{t^{n-\alpha}} \, \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= C\ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{\frac{1}{2}|x-y|} t^{\alpha-\frac{n}{p_-(2B)}-1}\,dt \\ &= C\ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} |x-y|^{\alpha-\frac{n}{p_-(2B)}}\,, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

En el lema anterior la hipótesis $p' \in D$ permite tener un exponente más ajustado en la condición Lipschitz. Sin embargo y como veremos a continuación, si $p' \notin D$, siguiendo los mismos pasos de la demostración de la proposición 3.3.1 tenemos

$$|f(x) - m_B f| \ \le\ C\ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,4t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\,\frac{dt}{t}\,.$$

Por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| \le C\ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} \int_0^{2|x-y|} \frac{\left\|\chi_{B(x,4t)}\right\|_{p'(\cdot)} + \left\|\chi_{B(y,4t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha}}\,\frac{dt}{t}\,.$$

Luego, para $0 < t < 2|x-y| < 4r$ tenemos que $B(x,4t) \subset B(x,16r) \subset B(x_0,17r)$, con lo cual

$$|f(x) - f(y)| \le C\ \|f\|_{\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}} |x-y|^{\alpha-\frac{n}{p_-(17B)}}\,,$$

para casi todos $x, y \in B$. Es decir, el exponente Lipschitz empeora y el conjunto de bolas para las cuales vale la estimación es menor.

Con respecto a la suavidad local, debemos mencionar que muchos trabajos se concentran en el estudio de los espacios de funciones con suavidad local variable. Una de las primeras generalizaciones de los espacios Hölder H^λ, con $0 < \lambda \le 1$, data de 1995 y es [36], de Ross y Samko. Aquí, los autores definen para un intervalo $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$, con $-\infty < a < b < \infty$ y $\lambda(x)$ una función tal que $0 < \lambda(x) \le 1$, el espacio $H^{\lambda(x)}(\Omega)$ como el conjunto de las funciones tales que

$$|f(x+h) - f(x)| \le C\ |h|^{\lambda(x)}, \quad x, x+h \in \Omega\,.$$

Luego, estos espacios han sido definidos sobre dominios acotados de $\mathbb{R}^n$ y con distintas métricas (ver por ejemplo [14], [2],[3]).

En particular, a continuación presentamos una interesante conexión de nuestro trabajo con resultados de [13]. Para ello, en primer lugar, introducimos la siguiente

Definición 3.3.13 (Definición 2.4 en [14]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $\gamma(\cdot) : \bar{\Omega} \to [0,\infty)$ una función. El espacio Hölder de exponente variable $C^{0,\gamma(\cdot)}(\bar{\Omega})$ es definido por

$$C^{0,\gamma(\cdot)}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\bar{\Omega}) : [u]_{\gamma(\cdot),\bar{\Omega}} := \sup_{x,y\in\bar{\Omega}, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma(x)}} < +\infty \right\},$$

con la norma $\|u\|_{C^{0,\gamma(\cdot)}} = |u|_{C^0(\bar{\Omega})} + [u]_{\gamma(\cdot),\bar{\Omega}}$.

Es fácil ver que para todo $x, y \in \bar{\Omega}$ se tiene que

$$|u(x)-u(y)| \leq C \ \|u\|_{C^{0,\gamma(\cdot)}} |x-y|^{\gamma(x)}, \qquad \text{y} \qquad |u(x)-u(y)| \leq C \ \|u\|_{C^{0,\gamma(\cdot)}} |x-y|^{\gamma(y)}.$$

Es importante observar que como corolario de nuestro lema 3.3.12 podemos lograr resultados de suavidad local similares a los contenidos en el Teorema 5.4 en [13], como vemos en el siguiente

Corolario 3.3.14. *Sea Ω un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Sea $p(\cdot)$ una función exponente que satisface la condición de continuidad local* (3.2.5)*, con $p(x) > n$ para todo $x \in \Omega$. Sea $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ con $|\nabla f| \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, entonces existe una constante C tal que*

$$|f(x)-f(y)| \leq C \ \| \, |\nabla f| \, \|_{p(\cdot)} |x-y|^{1-\frac{n}{p(x)}},$$

para todos $x, y \in B$, tal que $2B \subset \Omega$, $|B| \leq 1$.

Demostración. Notemos que por el lema 3.3.12 y el lema 1.2.1, tenemos

$$|f(x)-f(y)| \leq C \ \|f\|_{\mathfrak{L}_{1,p(\cdot)}} |x-y|^{1-\frac{n}{p(x)}}.$$

Entonces, sólo necesitamos probar que $\|f\|_{\mathfrak{L}_{1,p(\cdot)}} \leq C \ \| \, |\nabla f| \, \|_{p,\Omega}$. Para esto, usando una conocida desigualdad puntual

$$|f(x)-f_B| \leq C \int_B \frac{|\nabla f(z)|}{|x-z|^{n-1}}\, dz,$$

(ver [18], lema 7.16), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_B |f(x)-f_B|\, dx &\leq C \int_B \int_B \frac{|\nabla f(z)|}{|x-z|^{n-1}}\, dz\, dx \\ &\leq C \int_B |\nabla f(z)| \left(\int_{|x-z|<2r} \frac{dx}{|x-z|^{n-1}} \right) dz \\ &\leq C \, |B|^{\frac{1}{n}} \, \| \, |\nabla f| \, \|_{p(\cdot)} \, \|\chi_B\|_{p'(\cdot)} \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Hölder generalizada. □

3.4. Algunas observaciones

Es innegable que una acotación puntual del tipo de la que acabamos de probar, esto es, para alguna función $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$|f(x) - f(y)| \leq C \, \Big(\eta(x, |x - y|) + \eta(y, |x - y|)\Big),$$

adquiere mayor importancia cuando el lado derecho garantiza continuidad de las funciones del espacio. Esto puede darse de varias maneras, por ejemplo en el caso de funciones $\eta(x, t)$ que sean continuas en la primer variable, con $\eta(x, 0) = 0$ para todo x y que satisfagan que la aplicación $t \to \eta(x, t)$ sea continua a derecha en cero para cada x. Para la generalización de los espacios Lipschitz integrales, la función que consideramos es

$$\eta(x, t) = \int_0^t \frac{w(x, u)}{u} \, du\,,$$

y para garantizar la continuidad será suficiente suponer por ejemplo, para una familia $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ de bolas, cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ con solapamiento acotado (esto es: $\sum \chi_{E_j}(x) \leq m$ para todo x y algún $m \in \mathbb{N}$), la existencia de funciones $g_j : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$, tales que $w(x, \cdot) \leq C \; g_j(\cdot)$, para todo $x \in E_j$, con

$$\int_0^1 \frac{g_j(t)}{t} \, dt < \infty\,. \tag{3.4.1}$$

En efecto, por la proposición 3.3.1 el conjunto de puntos que verifica la desigualdad puntual (3.3.1) es denso; por lo tanto para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ en dicho conjunto que converge a y. Entonces, si consideramos k y l suficientemente grandes se tiene que $|y_k - y_l|$ es suficientemente pequeño, y así el valor de la integral en (3.4.1) es arbitrariamente pequeño. En estas condiciones es claro que existe un j_0 tal que y_k e y_l pertenecen a una bola E_{j_0}, con lo cual

$$\begin{aligned} |f(y_k) - f(y_l)| &\leq C \int_0^{2|y_k - y_l|} \frac{w(y_k, t) + w(y_l, t)}{t} \, dt \\ &= C \int_0^{2|y_k - y_l|} \frac{w(y_k, t)}{t} \, dt + \int_0^{2|y_k - y_l|} \frac{w(y_l, t)}{t} \, dt \\ &= C \int_0^{2|y_k - y_l|} \frac{g_{j_0}(t)}{t} \, dt \quad < \quad \epsilon\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{f(y_j)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y converge, digamos a un valor $f(y)$. Además, si $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión de Cauchy que converge a y, entonces $|y'_n - y_n| < \epsilon$ con tal de tomar n suficientemente grande. Con lo cual

$$\lim_{j\to\infty} |f(y'_n) - f(y)| \leq \lim_{j\to\infty} |f(y'_n) - f(y_n)| + \lim_{j\to\infty} |f(y_n) - f(y)| = 0\,.$$

Luego, es claro que la función coincide en casi todo punto con una función continua.

Observación 3.4.1. En el caso $w(x,t) = t^{\alpha-n} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$, con $p_- > \frac{n}{\alpha}$, podemos considerar la bola $B_j = B(z_j, 2n)$, donde $z_j \in \left\{\frac{i}{2}, i \in \mathbb{Z}\right\}^n$ y definir $g_j(t) = t^{\alpha - \frac{n}{p_-(B_j)}}$ para $0 < t < 1$. Luego, para cada x elegimos z_j tal que $\operatorname{dist}(x, z_j)$ sea mínima. Así, $\operatorname{dist}(x, z_j) \leq \sqrt{n}/2$, y $B(x,t) \subset B_j$ para todo $0 < t < 1$. Por la observación 2.1.7, tenemos que

$$\begin{aligned} w(x,t) = t^{\alpha-n} \left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} &\leq C\ t^{\alpha-n} t^{n - \frac{n}{p_-(B(x,t))}} \\ &\leq C\ t^{\alpha-n} t^{n-\frac{n}{p_-(B_j)}} = C\ t^{\alpha - \frac{n}{p_-(B_j)}} = C\ g_j(t)\,, \end{aligned}$$

Por otro lado, el rango de la función $p(\cdot)$ asegura (3.4.1), con lo cual sabemos, de (3.3.6) que toda función $f \in \mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ posee una representante continua.

Volviendo a la condición puntual dada en (3.3.1), veremos ahora que la hipótesis de la finitud c.t.p. del lado derecho no es suficiente para garantizar la continuidad de las funciones del espacio. Más precisamente, si tan solo existe un punto, digamos x_0, para el cual

$$\int_0^1 \frac{w(x_0,t)}{t}\, dt = \infty\,,$$

entonces es posible definir una función que pertenece al espacio y no es continua. Más aún, las funciones en estos espacios no admiten acotación puntual del tipo

$$|f(x) - f(y)| \leq C\ \Big(\eta(x, |x-y|) + \eta(y, |x-y|)\Big)\,,$$

para ninguna función η. Las siguientes proposiciones daran más claridad a lo antes mencionado.

Proposición 3.4.2. *Sea $w(x,t)$ una función no negativa, que duplica y es casi-creciente en la segunda variable, que satisface $w(x,t) \leq C\ w(y,t)$, siempre que $|x-y| < t$ y tal* *que* $\frac{w(x,t)}{t}$ *es casi-decreciente para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*, entonces para cualquier punto* x_0 *de* $\mathbb{R}^n$*, la función*

$$h_{x_0}(x) = \int_{|x-x_0|}^{1} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) \frac{dt}{t^{n+1}}\,,$$

está en bmo_w*. Más aún, veremos que existen dos constantes positivas* C_1 *y* C_2 *tales que*

$$C_1 \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{w(x,r)} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y) - m_{B(x,r)} h_{x_0}|\, dy \le C_2\,, \tag{3.4.2}$$

para todo $r > 0$*.*

Demostración. Observemos primero que $h_{x_0}(x) < \infty$ para todo punto $x \neq x_0$. En efecto, dado x, para un entero m tal que $2^{-m} \le |x - x_0|$, tenemos

$$h_{x_0}(x) = \int_{|x-x_0|}^{1} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) \frac{dt}{t^{n+1}} \le C \int_{|x-x_0|}^{1} \frac{w(x_0,t)}{t}\, dt$$

$$\le C \int_{2^{-m}}^{1} \frac{w(x_0,t)}{t}\, dt \le C\ m \sup_{0\le t\le 1} w(x_0,t) = C\ m\, w(x_0,1) < \infty\,.$$

Probaremos entonces que h_{x_0} es localmente integrable. Para ello, veremos que si $x \neq x_0$ y $r > 0$ tenemos

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(z)|\, dz\, dy < \infty\,, \tag{3.4.3}$$

con lo cual

$$\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(z)|\, dz < \infty \qquad \text{c.t.p. } y \in B(x,r)\,,$$

y así

$$\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y)|\, dy \le \int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(z)|\, dz + |B(x,r)|\ |h_{x_0}(z)| < \infty\,.$$

Por otro lado, si $x = x_0$, tomando cualquier punto de $B(x_0, r)$ distinto de x_0, digamos s

$$\int_{B(x_0,r)} |h_{x_0}(y)|\, dy \le \int_{B(s,2r)} |h_{x_0}(y)|\, dy < \infty\,.$$

Probemos entonces (3.4.3). Consideremos $x \neq x_0$, $r > 0$ fijos y la bola $B(x,r)$. Sea $a = x + r\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$, esto es, el punto más alejado de la bola respecto de x_0. Dado que x_0, x y a están alineados se tiene

$$|a - x_0| = |a - x + x - x_0| = |a - x| + |x - x_0| = r + |x - x_0|\,.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\int_{B(x,r)}|h_{x_0}(y)-h_{x_0}(z)|\,dz\,dy \qquad (3.4.4)\\
&\leq\ 2\int_{B(x,r)}|h_{x_0}(y)-h_{x_0}(a)|\,dy\\
&\leq\ 2\int_{B(x,r)}\left|\int_{|y-x_0|}^{1}\left(\int_{B(x_0,t)}w(z,t)\,dz\right)\frac{dt}{t^{n+1}}-\int_{|a-x_0|}^{1}\left(\int_{B(x_0,t)}w(z,t)\,dz\right)\frac{dt}{t^{n+1}}\right|dy\\
&=\ 2\int_{B(x,r)}\int_{|y-x_0|}^{|x-x_0|+r}\left(\int_{B(x_0,t)}w(z,t)\,dz\right)\frac{dt}{t^{n+1}}\,dy\\
&\leq\ 2\int_{0}^{|x-x_0|+r}\int\limits_{B(x_0,t)\cap B(x,r)}\left(\int_{B(x_0,t)}w(z,t)\,dz\right)dy\,\frac{dt}{t^{n+1}}\,, \qquad (3.4.5)
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado el Teorema de Tonelli para intercambiar el orden de integración de las variables. Basta entonces acotar la última integral. Para ello consideramos dos casos.

I : $|x-x_0|\leq 2r$.

Debido a que las variables de integración verifican

$$0<t<|x-x_0|+r<3r, \qquad |y-x_0|<t, \qquad |y-x|<r\,,$$

entonces, para todo $z\in B(x_0,t)$, tenemos

$$|z-x|\leq|z-x_0|+|x_0-x|\leq t+2r<5r\,.$$

Por las propiedades de w se tiene

$$w(z,t)\leq C\ w(z,5r)\leq C\ w(x,5r)\leq C\ w(x,r)\,.$$

Luego, de los cálculos anteriores, voviendo a la desigualdad (3.4.5)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\int_{B(x,r)}|h_{x_0}(y)-h_{x_0}(z)|\,dz\,dy\\
&\leq\ 2\int_{0}^{|x-x_0|+r}\int\limits_{B(x_0,t)\cap B(x,r)}\left(\int_{B(x_0,t)}w(z,t)\,dz\right)dy\,\frac{dt}{t^{n+1}}\\
&\leq\ C\int_{0}^{3r}w(x,r)\left(\int_{B(x_0,t)\cap B(x,r)}dy\right)\frac{dt}{t}\\
&\leq\ C\int_{0}^{3r}w(x,r)\left(\int_{B(x_0,t)}dy\right)\frac{dt}{t}
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad C\ w(x,r) \int_0^{3r} t^{n-1}\, dt = C\ r^n w(x,r) \quad < \quad \infty\,.$$

II : $|x - x_0| > 2r$.

Observemos que si $t < |x - x_0| - r$ entonces la intersección $B(x_0, t) \cap B(x, r) = \emptyset$. En efecto, si existiera y en la intersección entonces

$$|x - x_0| \leq |x - y| + |y - x_0| < r + t < |x - x_0| - r + r = |x - x_0|\,,$$

lo que es absurdo. Así tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(a)|\, dy \\
&\leq \int_0^{|x-x_0|+r} \int_{B(x_0,t)\cap B(x,r)} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) dy\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&= \int_{|x-x_0|-r}^{|x-x_0|+r} \int_{B(x_0,t)\cap B(x,r)} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) dy\, \frac{dt}{t^{n+1}}\,, \qquad (3.4.6)
\end{aligned}$$

Ahora bien, para $|x - x_0| - r \leq t \leq |x - x_0| + r$ se sigue

$$t > |x - x_0| - r > |x - x_0| - \frac{|x - x_0|}{2} = \frac{1}{2}|x - x_0|\,,$$

$$t < |x - x_0| + r < |x - x_0| + \frac{|x - x_0|}{2} = \frac{3}{2}|x - x_0|\,,$$

con lo cual $t \approx |x - x_0|$. Además observemos que para todo $z \in B(x_0, t)$ y $t \in (|x - x_0| - r, |x - x_0| + r)$ se verifica

$$|z - x| \leq |z - x_0| + |x - x_0| \leq t + |x - x_0| < \frac{3}{2}|x - x_0| + |x - x_0| < 4|x - x_0|,$$

con lo cual, por las propiedades de w,

$$w(z,t) \leq C\ w(z, 4|x - x_0|) \leq C\ w(x, 4|x - x_0|) \leq C\ w(x, \frac{1}{2}|x - x_0|) \leq C\ w(x,t)\,.$$

Finalmente, de (3.4.6), como $w(x,t)/t$ es casi decreciente

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(a)|\, dy \quad &\leq \quad C \int_{|x-x_0|-r}^{|x-x_0|+r} \int_{B(x_0,t)\cap B(x,r)} \frac{w(x,t)}{t}\, dy\, dt \\
&\leq \quad C \int_{|x-x_0|-r}^{|x-x_0|+r} \int_{B(x,r)} \frac{w(x,r)}{r}\, dy\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= C\left(\int_{|x-x_0|-r}^{|x-x_0|+r} dt\right) r^n\frac{w(x,r)}{r} \\ &= C\, r^n\, w(x,r) \;<\; \infty\,. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y)-h_{x_0}(z)|\,dz\,dy \;\leq\; C\, r^n w(x,r) \;<\; \infty\,.$$

De las estimaciones en I : y II : y de la desigualdad

$$\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y)-m_{B(x,r)}h_{x_0}|\,dy \leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y)-h_{x_0}(z)|\,dz\,dy\,,$$

tenemos que

$$\frac{1}{w(x,r)}\,\frac{1}{|B|}\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y)-m_{B(x,r)}h_{x_0}|\,dy \leq C\,, \tag{3.4.7}$$

donde C no depende de r, de x ni de x_0. Tomando supremo sobre $x\in\mathbb{R}^n$ se tiene la cota superior en (3.4.2). Así, es claro que h_{x_0} está en bmo_w. Para probar la otra desigualdad observamos que para una función arbitraria f y una bola B en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &\int_B\int_B |f(x)-f(y)|\,dy\,dx \\ &\leq \int_B\int_B |f(x)-m_Bf|\,dy\,dx + \int_B\int_B |m_Bf-f(y)|\,dy\,dx \\ &= 2|B|\int_B |f(x)-m_Bf|\,dx\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{w(x,r)}\frac{1}{r^n}\int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y)-m_{B(x,r)}h_{x_0}|\,dy \\ &\geq \frac{1}{w(x_0,r)}\frac{1}{r^n}\int_{B(x_0,r)} |h_{x_0}(y)-m_{B(x_0,r)}h_{x_0}|\,dy \\ &\geq C\,\frac{1}{w(x_0,r)}\frac{1}{r^n\,r^n}\int_{B(x_0,r)}\int_{B(x_0,r)} |h_{x_0}(y)-h_{x_0}(u)|\,du\,dy \\ &\geq C\,\frac{1}{w(x_0,r)}\frac{1}{r^n\,r^n}\int_{|y-x_0|<\frac{r}{4}}\int_{\frac{r}{2}<|u-x_0|<r} |h_{x_0}(y)-h_{x_0}(u)|\,du\,dy\,. \end{aligned}$$

Ahora, para el integrando, dado que $|y-x_0| < \frac{r}{4} < \frac{r}{2} < |u-x_0|$, podemos hacer la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(u)| &= \left| \int_{|y-x_0|}^{1} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) \frac{dt}{t^{n+1}} - \int_{|u-x_0|}^{1} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) \frac{dt}{t^{n+1}} \right| \\ &= \int_{|y-x_0|}^{|u-x_0|} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\geq \int_{\frac{r}{4}}^{\frac{r}{2}} \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\, dz \right) \frac{dt}{t^{n+1}} . \end{aligned}$$

Dado que $|z-x_0| < t$ tenemos

$$w(z,t) \geq C\ w(x_0,t) \geq C\ w(x_0, \frac{r}{4}) \geq C\ w(x_0,r) .$$

Así podemos escribir

$$\begin{aligned} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(u)| &\geq C\ w(x_0,r) \int_{\frac{r}{4}}^{\frac{r}{2}} \left(\int_{B(x_0,t)} dz \right) \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &= C\ w(x_0,r) \int_{\frac{r}{4}}^{\frac{r}{2}} \frac{dt}{t} \quad = \quad C\ w(x_0,r) . \end{aligned}$$

Luego, la estimación final nos queda

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{w(x,r)} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |h_{x_0}(y) - m_{B(x,r)} h_{x_0}|\, dy \\ &\geq \frac{C}{w(x_0,r)} \frac{1}{r^n\, r^n} \int_{|y-x_0|<\frac{r}{4}} \int_{\frac{r}{2}<|u-x_0|<r} |h_{x_0}(y) - h_{x_0}(u)|\, du\, dy \\ &\geq \frac{C}{r^n\, r^n} \int_{|y-x_0|<\frac{r}{4}} \int_{\frac{r}{2}<|u-x_0|<r} du\, dy \\ &\geq C_1 , \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

El resultado probado indica que h_{x_0} es, de alguna manera, la función "típica" de este espacio. Observemos que una de las hipótesis sobre w para tener acotación puntual de las funciones en $\mathrm{bmo}_{w,q}$ es que

$$\int_0^r \frac{w(x,t)}{t}\, dt < \infty ,$$

c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Sin embargo, y como veremos, esta condición no garantiza continuidad de las mismas. En la siguiente proposición se verá esto con más detalle.

Proposición 3.4.3. *Sea w como en la Proposición 3.4.2. Supongamos que existe un punto x_0 para el cual*

$$\int_0^1 \frac{w(x_0,t)}{t}\,dt = \infty\,, \tag{3.4.8}$$

entonces existen funciones en bmo_w que no son continuas.

Demostración. Tomando el punto x_0 de la hipótesis, consideremos la función

$$h_{x_0}(x) = \int_{|x-x_0|}^1 \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\,dz\right)\frac{dt}{t^{n+1}}\,.$$

Por la Proposición 3.4.2, h_{x_0} está en bmo_w y por las propiedades de w, para $x \neq x_0$ podemos acotar

$$h_{x_0}(x) = \int_{|x-x_0|}^1 \left(\int_{B(x_0,t)} w(z,t)\,dz\right)\frac{dt}{t^{n+1}} \geq C\int_{|x-x_0|}^1 \frac{w(x_0,t)}{t}\,dt\,,$$

con lo cual claramente cuando $x \to x_0$ tenemos que $h_{x_0}(x) \to \infty$. Es más puede verse que sobre coronas de la forma $\{x : 2^{-i+1} < |x| < 2^{-i}\}$ la función es finita y toma valores tan grandes como uno quiera. Por lo tanto, no puede ser continua en x_0 y más aún, no puede tener una representante continua. $\square$

Capítulo 4

Acotación de operadores entre espacios $\mathbf{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$

4.1. Introducción

En este capítulo presentaremos extensiones para los operadores Integral Fraccionaria y Transformada de Riesz y probaremos que estos operadores son acotados cuando actúan entre espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$ bajo ciertas condiciones sobre la función w.

Recordemos entonces, que para $1 \leq q < \infty$ y $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, una función medible f localmente integrable pertenece al espacio $\mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{w(a,r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - m_B f|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \, , \tag{4.1.1}$$

para toda bola B de centro a y radio r, donde $m_B f$ es el promedio de f sobre B. Hemos trabajado en general con tres propiedades sobre w, las cuales fueron enunciadas en 3.1.a), 3.1.b) y 3.1.c); o sea

- Casi creciente en la segunda variable, es decir

$$w(x,t_1) \leq C \; w(x,t_2), \qquad \forall \, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \, t_1 < t_2 \, .$$

- Duplicación en la segunda variable, es decir

$$w(x,2t) \leq C\ w(x,t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, t > 0\,.$$

- Comparabilidad en la primer variable, es decir

$$|x-y| < t \quad \Rightarrow \quad w(x,t) \leq C\ w(y,t), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, t > 0\,.$$

Introduciremos ahora una clase de funciones que tiene conexión con las acotaciones que vamos a estudiar más adelante.

Definición 4.1.1. Sea w una función medible. Diremos que $w \in \mathcal{W}_\infty$ si existe una constante C tal que

$$\int_r^\infty \frac{w(x,t)}{t}\,\frac{dt}{t} \leq C\ \frac{w(x,r)}{r}\,, \tag{4.1.2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$.

Observación 4.1.2. El caso particular en que $w(x,t) = t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}$ lo hemos estudiado en el capítulo 2 de este trabajo. Concretamente, si la función exponente $p \in \mathcal{P}^{\log}$ y satisface que $p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$, entonces por el lema 2.4.1 sabemos que

$$\int_r^\infty \frac{\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}}{t^{n-\alpha+1}}\,\frac{dt}{t} \leq C\ \frac{\left\|\chi_{B(x,r)}\right\|_{p'(\cdot)}}{r^{n-\alpha+1}}\,,$$

para todo $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Esto último equivale a decir que $t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \in \mathcal{W}_\infty$. Recordemos además, que por el lema 2.4.2, para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ y $s \geq 1$, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que

$$\left\|\chi_{B(x,st)}\right\|_{p'(\cdot)} \leq C\ s^{n-\alpha+1-\varepsilon}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)}\,.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} w(x,st) &= (st)^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,st)}\right\|_{p'(\cdot)} \\ &= s^{\alpha-n}\,t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,st)}\right\|_{p'(\cdot)} \\ &\leq C\ s^{\alpha-n}\,s^{n-\alpha+1-\varepsilon}\,t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \\ &\leq C\ s^{1-\varepsilon}t^{\alpha-n}\left\|\chi_{B(x,t)}\right\|_{p'(\cdot)} \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$$\leq \; C\, s^{1-\varepsilon} w(x,t)\,.$$

Esto prueba la desigualdad (3.3.6), puesto que valen las hipótesis de la proposición 3.3.1. Por lo tanto para tales funciones exponentes, también tenemos una representación puntual para las funciones del espacio.

A continuación presentaremos un ejemplo de una función exponente que satisface las hipótesis pedidas hasta el momento.

Ejemplo 4.1.3. Sea $0 < \alpha < n$ y consideremos números $p_\infty > \frac{n}{\alpha}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{n}{\alpha} < b + p_\infty < \frac{n}{(\alpha-1)^+}\,.$$

Definimos la función

$$p(x) = p_\infty + \frac{b}{\log(e+|x|)}, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

La función anterior satisface la ecuación (3.3.7). Para verificarla, basta ver que $p(x)$ satisface las hipótesis del lema 3.3.7. En efecto, observemos que

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x) = p_\infty\,,$$

y que $\min\{p(0), p_\infty\} \leq p(x) \leq \max\{p(0), p_\infty\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, con lo cual es claro que $\frac{n}{\alpha} < p_- \leq p_+ < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$. Por otro lado, trivialmente $p(x)$ cumple con (3.2.6). Sólo resta ver que satisface la condición de continuidad log-Hölder local. Para ello, por el Teorema del valor medio se tiene que

$$|p(x) - p(y)| \leq |\nabla p(\tau)|\, |x-y| \leq \frac{b}{e+|\tau|}\, |x-y| \leq C\, |x-y| \leq \frac{C}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})}\,,$$

donde τ es un punto intermedio en el segmento que une x con y. Luego $p(\cdot)$ satisface (1.2.1) como queríamos mostrar.

4.2. Integral Fraccionaria sobre espacios $\text{bmo}_{w,q}$

En esta sección obtendremos acotaciones de una extensión del operador Integral Fraccionaria, desde espacios $\text{bmo}_{w,q}$ en ciertos espacios $\text{bmo}_{w^*,q}$, donde la función w^* queda determinada por w. Para ello, antes veremos el siguiente lema técnico.

Lema 4.2.1. *Sea $0<\alpha<n$ y $w(x,t)$ una función que duplica y es casi-creciente en la segunda variable. Entonces para toda $f\in bmo_{w,q}$ con $1\le q<\infty$ tenemos que*

$$\int_B \frac{|f(y)-m_Bf|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \;\le\; C\;\|f\|_{w,q}\int_0^r \frac{t^\alpha\,w(x,t)}{t}\,dt\,, \tag{4.2.1}$$

donde C es independiente de la bola $B=B(x,r)$.

Demostración. Sea B una bola cualquiera de centro x y radio r, denotemos $B_k=2^{-k}B=B(x,2^{-k}r)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{|f(y)-m_Bf|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_k-B_{k+1}} \frac{|f(y)-m_Bf|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy\\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(n-\alpha)}\,r^{\alpha-n}\int_{B_k-B_{k+1}} |f(y)-m_Bf|\,dy\\
&= C\,|B|^{\frac{\alpha}{n}}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}\,(2^{-k}r)^{-n}\int_{B_k-B_{k+1}} |f(y)-m_Bf|\,dy\\
&\le C\,|B|^{\frac{\alpha}{n}}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}\,|B_k|^{-1}\int_{B_k} |f(y)-m_Bf|\,dy\,.
\end{aligned}$$

Ahora, sumando y restando los promedios intermedios $m_{B_j}f$ para $j=1,\dots,k$ dentro del módulo del integrando podemos ver que

$$\begin{aligned}
&|B_k|^{-1}\int_{B_k}|f(y)-m_Bf|\,dy\\
&= |B_k|^{-1}\int_{B_k}|f(y)-m_{B_k}f+m_{B_k}f-\ldots-m_{B_1}f+m_{B_1}f-m_Bf|\,dy\\
&\le |B_k|^{-1}\int_{B_k}|f(y)-m_{B_k}f|\,dy+\sum_{j=0}^{k-1}|B_k|^{-1}\int_{B_k}\left|m_{B_{j+1}}f-m_{B_j}f\right|\,dy\\
&\le |B_k|^{-1}\int_{B_k}|f(y)-m_{B_k}f|\,dy+\sum_{j=0}^{k-1}|B_{j+1}|^{-1}\int_{B_{j+1}}\left|f(y)-m_{B_j}f\right|\,dy\\
&= |B_k|^{-1}\int_{B_k}|f(y)-m_{B_k}f|\,dy+\sum_{j=0}^{k-1}2^n|B_j|^{-1}\int_{B_j}\left|f(y)-m_{B_j}f\right|\,dy\\
&\le C\sum_{j=0}^{k}2^n|B_j|^{-1}\int_{B_j}\left|f(y)-m_{B_j}f\right|\,dy\,.
\end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta que $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$ y las hipótesis sobre w, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{|f(y)-m_B f|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy &\leq C\,|B|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \sum_{j=0}^{k} |B_j|^{-1} \int_{B_j} \left|f(y)-m_{B_j} f\right|\,dy \\
&\leq C\,|B|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \sum_{j=0}^{k} \Big(|B_j|^{-1} \int_{B_j} \left|f(y)-m_{B_j} f\right|^q\,dy\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\,\|f\|_{w,q}\,|B|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \sum_{j=0}^{k} w(x,2^{-j}r) \\
&= C\,\|f\|_{w,q}\; r^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k\alpha}\Big) w(x,2^{-j}r) \\
&= C\,\|f\|_{w,q} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j}r)^{\alpha}\, w(x,2^{-j}r) \\
&\leq C\,\|f\|_{w,q} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}r}^{2^{-j}r} 2^{\alpha} t^{\alpha}\, w(x,2^{-j-1}r)\,\frac{dt}{t} \\
&\leq C\,\|f\|_{w,q} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}r}^{2^{-j}r} t^{\alpha}\, w(x,t)\,\frac{dt}{t} \\
&\leq C\,\|f\|_{w,q} \int_0^r \frac{t^{\alpha}\, w(x,t)}{t}\,dt\,,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Enunciamos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.2. *Sea $0<\alpha<1$ y $w(x,t)$ una función no negativa que duplica y es casi-creciente en la segunda variable. Supongamos que, además satisface $w(x,t) \leq C\ w(y,t)$, siempre que $|x-y|<t$. Consideremos $w^*(x,t) = t^{\alpha}\, w(x,t)$. Si $w^* \in \mathcal{W}_\infty$ entonces el operador Integral Fraccionaria I_α puede extenderse sobre funciones de $bmo_{w,q}$ como*

$$\widetilde{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\right) f(y)\,dy\,. \tag{4.2.2}$$

Más aún, es un operador lineal y acotado desde $bmo_{w,q}$ en $bmo_{w*,q}$, con $1 \leq q < \infty$.

Demostración. Primeramente, veremos que el operador definido como en (4.2.2) está bien definido para funciones en $\mathrm{bmo}_{w,q}$, es decir, $|\widetilde{I}_\alpha f(x)| < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para ello, tomemos una función f en $\mathrm{bmo}_{w,q}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > |x|$. Puesto que la expresión entre paréntesis de (4.2.2) tiene integral nula sobre $\mathbb{R}^n$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_\alpha f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \right) (f(y) - m_B f)\, dy \\
&= \int\limits_{2B} \qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^n - 2B} \qquad = I_1(x) + I_2(x)\,,
\end{aligned}$$

donde $2B = B(0, 2r)$. Haremos una estimación para cada término por separado. Para I_1 consideremos la bola $\widetilde{B} = B(x, 4r)$, entonces

$$\begin{aligned}
|I_1(x)| &\le \int\limits_{2B} \frac{|f(y) - m_{2B} f|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_{2B} \frac{|f(y) - m_{2B} f|}{|y|^{n-\alpha}}\, dy \\
&\le \int\limits_{2B} \frac{|f(y) - m_{2B} f|}{|y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{\left|f(y) - m_{\widetilde{B}} f\right|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{\left|m_{2B} f - m_{\widetilde{B}} f\right|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \\
&= I + II + III\,.
\end{aligned}$$

Para III tenemos que

$$\begin{aligned}
III &\le C \left(\frac{1}{|\widetilde{B}|} \int_{\widetilde{B}} |f(z) - m_{\widetilde{B}} f|\, dz \right) \left(\int_{\widetilde{B}} |x-y|^{\alpha - n}\, dy \right) \\
&\le C \left(\frac{1}{|\widetilde{B}|} \int_{\widetilde{B}} |f(z) - m_{\widetilde{B}} f|^q\, dz \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^{4r} \rho^{\alpha-1}\, d\rho \right) \\
&\le C \; \|f\|_{w,q}\, w(x, 4r)\; r^\alpha \;<\; \infty\,. \qquad (4.2.3)
\end{aligned}$$

Por el lema 4.2.1, los sumandos I y II tienen la siguiente acotación

$$\begin{aligned}
I = \int\limits_{2B} \frac{|f(y) - m_{2B} f|}{|y|^{n-\alpha}}\, dy &\le C \; \|f\|_{w,q} \int_0^{2r} \frac{t^\alpha\, w(0,t)}{t}\, dt \\
&\le C \; \|f\|_{w,q} \int_0^{r} \frac{t^\alpha\, w(0,t)}{t}\, dt \\
&\le C \; \|f\|_{w,q}\, w(0, r)\; r^\alpha \;<\; \infty\,, \qquad (4.2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II = \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{\left|f(y) - m_{\widetilde{B}} f\right|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy &\le C \; \|f\|_{w,q} \int_0^{4r} \frac{t^\alpha\, w(x,t)}{t}\, dt \\
&\le C \; \|f\|_{w,q} \int_0^{r} \frac{t^\alpha\, w(x,t)}{t}\, dt \;<\; \infty\,, \qquad (4.2.5)
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado las propiedades de w. Observemos que I resulta acotado por un término que es independiente de x.

Para estimar $I_2(x)$, recordamos que $x \in B = B(0,r)$, aplicando el Teorema del Valor Intermedio podemos escribir

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n - 2B} \left| \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \right| |f(y) - m_B f| \, dy \qquad (4.2.6) \\ &\leq C\, |B|^{\frac{1}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n - 2B} \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_{\xi_x} - y|^{n-\alpha+1}} \, dy \\ &\leq C\, |B|^{\frac{1}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B} \frac{|f(y) - m_B f|}{|y|^{n-\alpha+1}} \, dy \,, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad podemos cambiar $|x_{\xi_x} - y|$ por $|y|$ puesto que si $x, x_{\xi_x} \in B(0,r)$ e $y \in \mathbb{R}^n - 2B$ se tiene

$$|x_0 - x_{\xi_x}| < r < |x_{\xi_x} - y| \quad \Longrightarrow \quad |y| < |x_{\xi_x}| + |x_{\xi_x} - y| < 2|x_{\xi_x} - y| \,,$$

y así

$$|x_{\xi_x} - y| > \frac{1}{2}|y| \,.$$

Ahora, considerando bolas crecientes $B_k = 2^k B = B(0, 2^k r), k \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\leq C\, |B|^{\frac{1}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_{k+1} - B_k} \frac{|f(y) - m_B f|}{|y|^{n-\alpha+1}} \, dy \qquad (4.2.7) \\ &\leq C\, |B|^{\frac{1}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} (2^k r)^{-n+\alpha-1} \int\limits_{B_{k+1}} |f(y) - m_B f| \, dy \\ &\leq C\, |B|^{\frac{1}{n} + \frac{\alpha-1}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-1)} |B_{k+1}|^{-1} \int\limits_{B_{k+1}} |f(y) - m_B f| \, dy \\ &\leq C\, |B|^{\frac{1}{n} + \frac{\alpha-1}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{k+1} \left(|B_j|^{-1} \int\limits_{B_j} \left| f(y) - m_{B_j} f \right|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C\, \|f\|_{w,q} |B|^{\frac{1}{n} + \frac{\alpha-1}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{k+1} w(0, 2^j r) \\ &\leq C\, \|f\|_{w,q} |B|^{\frac{1}{n} + \frac{\alpha-1}{n}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\alpha-1)} w(0, 2^j r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \ \|f\|_{w,q}\, r \sum_{j=1}^{\infty} (2^j r)^{\alpha-1} w(0,2^j r)\\
&\leq C \ \|f\|_{w,q}\, r \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j r}^{2^{j+1}r} (2^j r)^{\alpha} \frac{w(0,2^j r)}{2^{k+1} r}\, \frac{dt}{t}\\
&\leq C \ \|f\|_{w,q}\, r \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j r}^{2^{j+1}r} \frac{t^{\alpha} w(0,t)}{t}\, \frac{dt}{t}\\
&\leq C \ \|f\|_{w,q}\, r \int_{r}^{\infty} \frac{t^{\alpha} w(0,t)}{t}\, \frac{dt}{t}\,.
\end{aligned}$$

Luego, dado que $w \in \mathcal{W}_\infty$ se concluye que

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq C \ \|f\|_{w,q} \ r\, \frac{r^{\alpha} w(0,r)}{r}\\
&= C \ \|f\|_{w,q} \ r^{\alpha} w(x_0,r)\,. \qquad (4.2.8)
\end{aligned}$$

De esta manera, por las estimaciones hechas en (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5) y (4.2.8) tenemos que $|\widetilde{I}_\alpha f(x)| < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Veamos ahora la acotación de este operador. Por las propiedades de w, para $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $1 \leq q < \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} \Big(\int_0^r \frac{t^{\alpha}\, w(z,t)}{t}\, dt \Big)^q dz &\leq \int_{B(x,r)} w(z,r)^q \Big(\int_0^r t^{\alpha-1}\, dt \Big)^q dz\\
&\leq C \ w(x,r)^q \int_{B(x,r)} r^{\alpha\, q}\, dz\\
&\leq C \ \big(r^{\alpha} w(x,r) \big)^q \ r^n\,.
\end{aligned}$$

Luego, $w^*(x,t) = t^{\alpha} w(x,t)$ satisface (3.3.4) de la proposición 3.3.3. Si probamos que $\widetilde{I}_\alpha f$ tiene una acotación puntual como (3.3.1) con w^* en lugar de w, tendremos probado el teorema.

Tomemos una función $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$ y dos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Consideremos la bola $B = B(x_1, 2|x_1 - x_2|)$, luego

$$\begin{aligned}
|\widetilde{I}_\alpha f(x_1) - \widetilde{I}_\alpha f(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-\alpha}} \right| |f(y) - m_B f|\, dy\\
&= \int_B \quad + \int_{\mathbb{R}^n - B} \quad = \quad I_1 + I_2\,.
\end{aligned}$$

Para el primer sumando consideramos $\widetilde{B} = (x_2, 4|x_1 - x_2|)$ y actuamos de manera análoga a lo hecho anteriormente. Esto es

$$\begin{aligned} I_1 &\le \int\limits_B \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_1 - y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_B \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_2 - y|^{n-\alpha}}\, dy \\ &\le \int\limits_B \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_1 - y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{|f(y) - m_{\widetilde{B}} f|}{|x_2 - y|^{n-\alpha}}\, dy + \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{\left|m_B f - m_{\widetilde{B}} f\right|}{|x_2 - y|^{n-\alpha}}\, dy \\ &= I + II + III\,. \end{aligned}$$

Para los dos primeros sumandos razonamos como en la demostración de la finitud del operador. De esta manera

$$\begin{aligned} \int_B \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_1 - y|^{n-\alpha}}\, dy &\le C\ \|f\|_{w,q}\ |B|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k\alpha} \right) w(x_1, 2^{-j}|x_1 - x_2|) \\ &\le C\ \|f\|_{w,q}\ |B|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha}\, w(x_1, 2^{-j}|x_1 - x_2|) \\ &\le C\ \|f\|_{w,q} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j}|x_1 - x_2|)^{\alpha}\, w(x_1, 2^{-j}|x_1 - x_2|) \\ &\le C\ \|f\|_{w,q} \int_0^{2|x_1 - x_2|} \frac{t^{\alpha} w(x_1, t)}{t}\, dt\,. \end{aligned}$$

En la misma forma,

$$\int_{\widetilde{B}} \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_2 - y|^{n-\alpha}}\, dy \ \le\ C\ \|f\|_{w,q} \int_0^{2|x_1 - x_2|} \frac{t^{\alpha} w(x_2, t)}{t}\, dt\,.$$

Por último, para el tercer sumando, dado que $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$ se tiene

$$\begin{aligned} |m_B f - m_{\widetilde{B}} f| &\le |B|^{-1} \int_B |f(y) - m_{\widetilde{B}} f|\, dy \\ &\le \left(|\widetilde{B}|^{-1} \int_{\widetilde{B}} |f(y) - m_{\widetilde{B}} f|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le C\ \|f\|_{w,q}\, w(x_2, 4|x_1 - x_2|) \\ &\le C\ \|f\|_{w,q}\, w(x_2, 4|x_1 - x_2|) \int_{4|x_1 - x_2|}^{8|x_1 - x_2|} \frac{dt}{t} \\ &\le C\ \|f\|_{w,q} \int_{4|x_1 - x_2|}^{8|x_1 - x_2|} \frac{w(x_2, t)}{t}\, dt\,, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\int\limits_{\widetilde{B}} \frac{\left|m_B f - m_{\widetilde{B}} f\right|}{|x_2 - y|^{n-\alpha}}\, dy \ =\ \left|m_B f - m_{\widetilde{B}} f\right| \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{1}{|x_2 - y|^{n-\alpha}}\, dy$$

$$\begin{aligned} &\leq \; C \; \|f\|_{w,q} |x_1 - x_2|^\alpha \int_{4|x_1-x_2|}^{8|x_1-x_2|} \frac{w(x_2,t)}{t}\, dt \\ &\leq \; C \; \|f\|_{w,q} \int_0^{4|x_1-x_2|} \frac{t^\alpha w(x_2,t)}{t}\, dt\,, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene gracias a un cambio de variables y la duplicación. Así queda probado el resultado para III.

Por otro lado, para I_2, dado que $x_1, x_2 \in B$ e $y \in \mathbb{R}^n - B$ se verifica que $|x_1 - y| \approx |x_2 - y|$, con lo cual razonando como en (4.2.6) y en (4.2.7) y aplicando las propiedades de w tenemos

$$\begin{aligned} I_2 \;&\leq\; \int\limits_{\mathbb{R}^n - B} \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-\alpha}} \right| |f(y) - m_B f|\; dy \\ &\leq\; C\; |B|^{\frac{1}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B} \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_1 - y|^{n-\alpha+1}}\, dy \quad , \\ &\leq\; C\; \|f\|_{w,q}\; |x_1 - x_2| \int_{2|x_1-x_2|}^{\infty} \frac{t^\alpha w(x_1,t)}{t} \frac{dt}{t} \\ &\leq\; C\; \|f\|_{w,q}\; |x_1 - x_2|\; \frac{|x_1 - x_2|^\alpha w(x_1, 2|x_1 - x_2|)}{|x_1 - x_2|} \\ &\leq\; C\; \|f\|_{w,q}\; |x_1 - x_2|^\alpha w(x_1, 2|x_1 - x_2|) \\ &\leq\; C\; \|f\|_{w,q} \int_0^{4|x_1-x_2|} \frac{t^\alpha w(x_1,t)}{t}\, dt\,. \end{aligned}$$

Entonces hemos demostrado que

$$\begin{aligned} |\widetilde{I}_\alpha f(x_1) - \widetilde{I}_\alpha f(x_2)| \;&\leq\; C\; \|f\|_{w,1} \int_0^{4|x_1-x_2|} \frac{t^\alpha w(x_1,t) + t^\alpha w(x_2,t)}{t}\, dt \\ &\leq\; C\; \|f\|_{w,1} \int_0^{2|x_1-x_2|} \frac{t^\alpha w(x_1,t) + t^\alpha w(x_2,t)}{t}\, dt\,. \end{aligned}$$

donde con un cambio de variables y la condición de duplicación una vez más queda probado (3.3.3) y con esto el Teorema 4.2.2. □

Para evitar confusión en las variables, en el siguiente corolario denotaremos para un número σ la función $w_\sigma = w_\sigma(x,t) = t^\sigma w(x,t)$.

Corolario 4.2.3. *Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que $0 < \alpha+\beta < 1$ y $w(x,t)$ una función que duplica y es casi-creciente en la segunda variable. Supongamos además que $w(x,t) \leq C\; w(y,t)$,* *siempre que* $|x-y|<t$. *Si* $w_{\alpha+\beta}\in\mathcal{W}_\infty$ *entonces el operador Integral Fraccionaria* I_α *puede extenderse sobre funciones de* $bmo_{w_\beta,q}$ *como*

$$\widetilde{I}_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\right)f(y)\,dy\,.$$

Más aún, es un operador lineal y acotado desde $bmo_{w_\beta,q}$ *en* $bmo_{w_{\alpha+\beta},q}$, *para* $1\le q<\infty$.

Demostración. Para $0<s<t$ y $x,y\in\mathbb{R}^n$, la función w_β satisface

a) $t^\beta w(x,t)\le C\ t^\beta w(x,s)\le C\ s^\beta w(x,s)$,

b) $(2t)^\beta w(x,2t)\le 2^\beta C\ t^\beta w(x,t)=C\ t^\beta w(x,t)$,

c) $t^\beta w(x,t)\le C\ t^\beta w(y,t)$.

Luego, basta aplicar el teorema 4.2.2 con la función w_β. $\square$

Observación 4.2.4. Notar que w identicamente 1 satisface trivialmente las propiedades mencionadas, así el teorema 4.2.2 incluye el caso clásico $I_\alpha:\mathrm{BMO}\to\mathrm{Lip}(\alpha)$ y para $\beta>0$ tal que $0<\alpha+\beta<1$, por el corolario anterior se tiene $I_\alpha:\mathrm{Lip}(\beta)\to\mathrm{Lip}(\alpha+\beta)$.

4.3. Transformada de Riesz

Consideremos para una función medible f en $\mathbb{R}^n$ y para $1\le j\le n$, el operador

$$\mathcal{R}_j f(x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon}\left[\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}+\frac{y_j\Upsilon(y)}{|y|^{n+1}}\right]f(y)\,dy\,, \tag{4.3.1}$$

donde $\Upsilon(y)$ es la función característica del conjunto $|y|>1$, siempre que el límite exista en casi todo punto x. Para $1\le j\le n$ denotaremos con $\mathrm{R}_j f$ a la Transformada de Riesz usual dada por

$$\mathrm{R}_j f(x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}f(y)\,dy\,.$$

Si suponemos que ambos operadores existen en casi todo punto para una determinada función f entonces es fácil ver que estos valores difieren en una constante. Esto ocurre, por ejemplo, si f pertenece a algún espacio L^p con $p > 1$ constante. En efecto, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}} f(y)\, dy \;=\; \int\limits_{|y|>1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(y)\, dy\,,$$

Luego, por la desigualdad de Hölder clásica

$$\int\limits_{|y|>1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(y)\, dy \;\le\; C\ \|f\|_p \;<\; \infty\,,$$

donde C es independiente de x. Esto sumado al resultado ya bien conocido de acotación en L^p con p constante refleja lo que queríamos ver. Enunciamos ahora el resultado de esta sección.

Teorema 4.3.1. *Sea $1 \le q < \infty$, w una función que duplica y es casi creciente en la segunda variable. Además $w(x,t) \le C\ w(y,t)$, siempre que $|x-y| < t$. Si $w \in \mathcal{W}_\infty$, entonces $\mathcal{R}_j f(x)$ está bien definida en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, para funciones f en $bmo_{w,q}$. Más aún, existe una constante C tal que*

$$\frac{1}{w(a,r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\mathcal{R}_j f(x) - m_B(\mathcal{R}_j f)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C\ \|f\|_{w,q}\,. \tag{4.3.2}$$

para toda bola B de centro x_0 y radio r. Esto es, el operador es acotado en $bmo_{w,q}$.

Demostración. Por la proposición 3.2.4, bastará probar el resultado para $1 < q < \infty$. En efecto, si logramos esto, tendremos

$$\|\mathcal{R}_j f\|_w \le C\ \|\mathcal{R}_j f\|_{w,q} \le C\ \|f\|_{w,q} \le C\ \|f\|_w\,,$$

lo que afirma que el teorema vale para $q = 1$.

Sea entonces $1 < q < \infty$. La idea para probar la buena definición del operador es ver que $\mathcal{R}_j 1 = 0$. Luego, por la linealidad del mismo probar que $|\mathcal{R}_j f(x)| = |\mathcal{R}_j (f - m_B f)(x)| < \infty$ para casi todo x.

Comenzaremos entonces, probando que para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}} \right) dy = 0\,.$$

Para ello, tomemos $0 < \varepsilon < r$ y consideremos las funciones

$$g_{\varepsilon,r}(y) = \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}} \right) \chi_{\{\varepsilon < |x-y| < r\}}(y) \, .$$

Trivialmente, cuando $r \to \infty$ tenemos que

$$g_{\varepsilon,r}(y) \longrightarrow g_\varepsilon(y) = \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}} \right) \chi_{\{\varepsilon < |x-y|\}}(y) \, .$$

Si probamos que $g_\varepsilon \in \mathrm{L}^1$ para cada x, entonces por el Teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(y) \, dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{r \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{\varepsilon,r}(y) \, dy \, . \tag{4.3.3}$$

Ahora bien, observando la definición del integrando escribimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |g_\varepsilon(y)| \, dy &= \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}} \right| dy \\ &\leq \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|<1}} \frac{|x_j - y_j|}{|x-y|^{n+1}} \, dy + \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|>1}} \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \right| dy \quad = \quad \mathrm{I} + \mathrm{II} \, . \end{aligned}$$

Para I, dado que $|x-y| \leq |x| + |y| \leq |x| + 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \quad &\leq \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|<1}} \frac{dy}{|x-y|^n} \quad \leq \int\limits_{\varepsilon < |x-y| < |x|+1} \frac{dy}{|x-y|^n} \\ &= \int\limits_{\varepsilon < |u| < |x|+1} \frac{du}{|u|^n} \quad = \quad c_n \ln \left(\frac{|x|+1}{\varepsilon} \right) \quad < \quad \infty \, . \end{aligned}$$

Por otro lado, para acotar II observemos que para cada y fijo, por el Teorema del valor medio, la función $F(x) = \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}$ verifica

$$\left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \right| = \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{-y_j}{|y|^{n+1}} \right| = |\nabla F(\xi_x) \cdot x| \leq |\nabla F(\xi_x)||x| \, , \tag{4.3.4}$$

donde ξ_x es un punto del segmento que une x con el origen de coordenadas. Ahora bien, dado que

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} \frac{-(n+1)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|x-y|^{n+3}}, & k \neq j \, ; \\ \\ \frac{|x-y|^2 - (n+1)(x_j - y_j)^2}{|x-y|^{n+3}}, & k = j \, , \end{cases}$$

el primer factor del miembro derecho de (4.3.4) puede estimarse teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
|\nabla F(\xi_x)| &= \big(\nabla F(\xi_x)\cdot\nabla F(\xi_x)\big)^{1/2}\\
&= \left(\frac{\big(|\xi_x-y|^2-(n+1)(\xi_{x_j}-y_j)^2\big)^2}{|\xi_x-y|^{2(n+3)}}+\sum_{k\neq j}\frac{(n+1)^2(\xi_{x_j}-y_j)^2(\xi_{x_k}-y_k)^2}{|\xi_x-y|^{2(n+3)}}\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\frac{C}{|\xi_x-y|^{2(n+1)}}+\sum_{k\neq j}\frac{C}{|\xi_x-y|^{2(n+1)}}\right)^{1/2}\\
&= \frac{C}{|\xi_x-y|^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Luego, dividimos el dominio adecuadamente y estimamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon\\ |y|>1\ ,\ |y|>2|x|}}\left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}-\frac{-y_j}{|y|^{n+1}}\right|dy+\int\limits_{\substack{\varepsilon<|x-y|<3|x|\\ 1<|y|<2|x|}}\left|\frac{|x_j-y_j|}{|x-y|^{n+1}}+\frac{|y_j|}{|y|^{n+1}}\right|dy\\
&\leq C\,|x|\int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon\\ |y|>1\ ,\ |y|>2|x|}}\frac{dy}{|\xi_x-y|^{n+1}}+\int\limits_{\substack{\varepsilon<|x-y|<3|x|\\ 1<|y|<2|x|}}\frac{dy}{|x-y|^{n}}+\int\limits_{\substack{\varepsilon<|x-y|<3|x|\\ 1<|y|<2|x|}}\frac{dy}{|y|^{n}}\\
&\leq C\,|x|\int\limits_{|y|>2|x|}\frac{dy}{|y|^{n+1}}+\int\limits_{\varepsilon<|x-y|<3|x|}\frac{dy}{|x-y|^{n}}+\int\limits_{1<|y|<2|x|}\frac{dy}{|y|^{n}}\ <\ \infty\,,
\end{aligned}$$

donde en el primera integral podemos poner $|y|$ en el denominador puesto que

$$|\xi_x-y|>|y|-|\xi_x|>|y|-\frac{1}{2}|y|=\frac{1}{2}|y|\,.$$

Bastará entonces ahora ver que el límite doble en (4.3.3) tiende a cero, esto es

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\varepsilon<|x-y|<r}\left(\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}+\frac{y_j\Upsilon(y)}{|y|^{n+1}}\right)dy=0\,.$$

Observamos cada sumando por separado. En el primero, por ser la integral de una función impar sobre un dominio simétrico, es nulo. En efecto

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-y|<r}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\,dy=\int\limits_{\varepsilon<|u|<r}\frac{u_j}{|u|^{n+1}}\,du=0\,. \tag{4.3.5}$$

Para el segundo, recordando la definición de $\Upsilon(y)$, observamos que

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-y|<r}\frac{y_j\Upsilon(y)}{|y|^{n+1}}\,dy=\int\limits_{\substack{|x-y|<r\\ |y|>1}}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\,dy-\int\limits_{\substack{|x-y|<\varepsilon\\ |y|>1}}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\,dy\,.$$

En la segunda integral, si $|x| > 1$, entonces $B(x,\varepsilon) \subset \{y : |y| > 1\}$ para ε suficientemente chico. Luego, por el Teorema de la convergencia dominada converge a cero. Por otro lado, cuando $|x| < 1$, tomando ε suficientemente chico tenemos que $B(x,\varepsilon) \cap \{y : |y| > 1\} = \emptyset$ y en este caso nada hay que probar.

Veamos ahora la primera integral. Tomemos $r > \max\{1, 2|x|\}$ y $z \in B(0, r - |x|)$. Como $|z - x| \leq |z| + |x| < r - |x| + |x| = r$, entonces $z \in B(x,r)$, con lo cual podemos dividir la integral en

$$\int\limits_{\substack{|x-y|<r\\ |y|>1}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\, dy \;=\; \int\limits_{1<|y|<r-|x|} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\, dy \;+\; \int\limits_{\substack{|x-y|<r\\ |y|>r-|x|}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\, dy\,.$$

Ahora, el primer sumando es nulo por la misma razón que en (4.3.5). Para el segundo, usando coordenadas polares generalizadas, denotemos por $(r,\theta) = (r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ al vector de las variables, de esta manera $(y_1, \ldots, y_n) = (rh_1(\theta), \ldots, rh_n(\theta))$, donde $h_j(\theta)$, con $j = 1, \ldots, n$ es la función del cambio de variables que sólo depende de la parte angular. De esta manera, el jacobiano es $r^{n-1}J(\theta)$, donde nuevamente $J(\theta)$ es la función que depende sólo de la parte angular. Entonces

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|x-y|<r\\ |y|>r-|x|}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\, dy &= \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{r-|x|}^{g(\theta)} \frac{s\, h_j(\theta)}{s^{n+1}} s^{n-1} J(\theta)\, ds\, d\theta \\
&= \int\limits_{S^{n-1}} h_j(\theta)\, J(\theta) \int\limits_{r-|x|}^{g(\theta)} \frac{ds}{s}\, d\theta \\
&= \int\limits_{S^{n-1}} h_j(\theta)\, J(\theta) \ln\left(\frac{g(\theta)}{r-|x|}\right) d\theta \quad\longrightarrow\quad 0\,,
\end{aligned}$$

cuando $r \to \infty$. En efecto, por la continuidad del logaritmo y dado que $g(\theta)$ satisface que $1 < r - |x| \leq g(\theta) \leq r + |x|$, tenemos

$$0 \leq \ln\left(\frac{g(\theta)}{r-|x|}\right) \leq \ln\left(\frac{r+|x|}{r-|x|}\right) \quad\longrightarrow\quad 0\,,$$

cuando $r \to \infty$. Por lo tanto, por el Teorema del emparedado tenemos

$$\int\limits_{\substack{|x-y|<r\\ |y|>1}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\, dy \longrightarrow 0\,,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ahora probaremos la buena definición del operador. Para esto, sea f una función del espacio $\mathrm{bmo}_{w,q}$ y veamos que $\mathcal{R}_j f(x)$ es finito para casi todo punto x de la bola centrada en el origen y radio r fijo y arbitrario. Como $\mathcal{R}_j$ es un operador lineal que se anula en las constantes bastará ver que

$$|\mathcal{R}_j f(x)| = |\mathcal{R}_j(f - m_B f)(x)| < \infty, \qquad \text{c.t.p. } x \in B(0,r)\,.$$

Para esto, partimos la integral de la definición en

$$\mathrm{T}_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|<2r}} \left[\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}}\right] (f(y) - m_B f)\, dy\,,$$

$$\mathrm{T}_2(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|>2r}} \left[\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}}\right] (f(y) - m_B f)\, dy\,,$$

y veremos su finitud en casi todo punto de la bola $B(0,r)$.

Para T_1 separamos el integrando y estimamos

$$|\mathrm{T}_1(x)| \leq \left| \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|<2r}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} (f(y) - m_B f)\, dy \right| + \left| \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ 1<|y|<2r}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} (f(y) - m_B f)\, dy \right|.$$

Como $f \in \mathrm{bmo}_{w,q}$ tenemos que $(f(y) - m_B f)\chi_{2B} \in L^q$, en efecto

$$\int_{2B} |f(y) - m_B f|^q\, dy \;\; \leq \;\; C\;\; \|f\|_{w,q}^q\, w(0,2r)^q\, |B| \;\; < \;\; \infty\,.$$

Luego, por la acotación de la Transformada de Riesz en L^q, el primer sumando es finito c.t.p. $x \in B(0,r)$. Para el segundo sumando, puesto que el integrando es independiente de x, es claro que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} (f(y) - m_B f)\chi_{\{|x-y|>\varepsilon\}\cap\{1<|y|<2r\}}(y) = \frac{y_j}{|y|^{n+1}} (f(y) - m_B f)\chi_{\{1<|y|<2r\}}(y)\,.$$

Además

$$\left| \frac{y_j}{|y|^{n+1}} (f(y) - m_B f)\chi_{\{|x-y|>\varepsilon\}\cap\{1<|y|<2r\}}(y) \right| \leq \frac{|f(y) - m_B f|}{|y|^n} \chi_{\{1<|y|<2r\}}(y)$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{\{1<|y|<2r\}} \frac{|f(y)-m_B f|}{|y|^n}\,dy &\leq \int_{\{|y|<2r\}} |f(y)-m_B f|\,dy \\
&\leq C\,|B| \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-m_B f|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

donde la finitud está garantizada por la pertenencia de f al espacio $\mathrm{bmo}_{w,q}$. Con lo cual, por el Teorema de la convergencia dominada

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ 1<|y|<2r}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}(f(y)-m_B f)\,dy\right| \leq \int_{1<|y|<2r} \left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|f(y)-m_B f|}{|y|^n}\chi_{\{|x-y|>\varepsilon\}}(y)\right) dy < \infty,$$

por (4.3.6). Para T_2, tomando ε suficientemente chico tal que $B(x,\varepsilon)\subset B(0,2r)$ entonces la integral no depende de ε y el límite es trivial. En efecto, si $\varepsilon < r$ entonces $|y| \leq |x| + |x-y| < r+\varepsilon < 2r$. Por otro lado, como $|y| > 2r$, un razonamiento análogo al hecho en (4.3.4) permite estimar

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}_2(x)| &\leq \int_{|y|>2r} \left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j\Upsilon(y)}{|y|^{n+1}}\right| |f(y)-m_B f|\,dy \\
&\leq C\,r \int_{|y|>2r} \frac{|f(y)-m_B f|}{|x-y|^{n+1}}\,dy\,.
\end{aligned}$$

Ahora, tomando la sucesión de bolas crecientes de la forma $B_k = B(0,2^k r)$ para $k = 1,2,\ldots$, escibimos

$$\begin{aligned}
|T_2(x)| &\leq C\,r\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r<|y|<2^{k+1}r} \frac{|f(y)-m_B f|}{|x-y|^{n+1}}\,dy \\
&\leq C\,r\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r<|y|<2^{k+1}r} \frac{|f(y)-m_B f|}{|y|^{n+1}}\,dy \\
&\leq C\,r\sum_{k=1}^{\infty}(2^k r)^{-n-1} \int_{|y|<2^{k+1}r} |f(y)-m_B f|\,dy \\
&= C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,|B_{k+1}|^{-1}\int_{B_{k+1}} |f(y)-m_B f|\,dy \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{k+1}|B_j|^{-1}\int_{B_j} |f(y)-m_{B_j} f|\,dy
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2^k}\left(|B_j|^{-1}\int_{B_j}|f(y)-m_{B_j}f|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2^k}\,w(0,2^jr)\\
&= C\ \|f\|_{w,q}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,w(0,2^jr)\\
&= C\ \|f\|_{w,q}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\,w(0,2^jr)\int_{2^jr}^{2^{j+1}r}\frac{dt}{t}\\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\sum_{j=1}^{\infty}r\,w(0,2^jr)\int_{2^jr}^{2^{j+1}r}\frac{dt}{t^2}\\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\ r\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jr}^{2^{j+1}r}\frac{w(0,t)}{t}\,\frac{dt}{t}\\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\ r\int_{r}^{\infty}\frac{w(0,t)}{t}\,\frac{dt}{t}\\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\,w(0,r)\ <\ \infty\,,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es en virtud de la pertenencia de w a la clase $\mathcal{W}_\infty$.

Esto asegura que $\mathcal{R}_jf(x)$ es finito c.t.p. $x\in B(0,r)$. Ahora, si tomamos una sucesión creciente $\{r_m\}$ de números naturales, existe una colección $\{T_m\}$ de conjuntos crecientes de medida nula sobre los cuales el operador es infinito. Luego, por el Teorema de la convergencia monótona, tenemos que $\mathcal{R}_jf(x)$ es finito c.t.p. $x\in\mathbb{R}^n$.

Hasta acá hemos probado la buena definición del operador en casi todo punto, actuando sobre funciones en $\mathrm{bmo}_{w,q}$ con $1<q<\infty$. Veamos ahora la acotación.

Dado que $\mathcal{R}_j1=0$ y $\mathcal{R}_j$ es lineal, para una bola B de centro x_0 y radio r tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_B|\mathcal{R}_jf(x)-m_B(\mathcal{R}_jf)|^q\,dx\\
&= \int_B\left|\mathcal{R}_jf(x)-\mathcal{R}_j(m_Bf)-\frac{1}{|B|}\int_B\Big(\mathcal{R}_jf(y)-\mathcal{R}_j(m_Bf)\Big)\,dy\right|^q\,dx\\
&= \int_B\big|\mathcal{R}_j(f-m_Bf)(x)-m_B\big(\mathcal{R}_j(f-m_Bf)\big)\big|^q\,dx\,.
\end{aligned}$$

Así basta probar que $\mathcal{R}_j(f-m_Bf)\in\mathrm{bmo}_{w,q}$. Para esto, si hacemos $g=f-m_Bf$, $g_1=g\chi_{2B}$ y $g_2=g-g_1$, bastará ver que

$$\mathcal{R}_jg_1=\mathcal{R}_j\big[(f-m_Bf)\chi_{2B}\big]\in\mathrm{bmo}_{w,q}\,, \tag{4.3.8}$$

$$\mathcal{R}_j g_2 = \mathcal{R}_j\big[(f - m_B f)\chi_{\mathbb{R}^n-2B}\big] \in \mathrm{bmo}_{w,q}\,. \tag{4.3.9}$$

En efecto, si esto ocurre tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B |\mathcal{R}_j f(x) - m_B(\mathcal{R}_j f)|^q\, dx &= \int_B |\mathcal{R}_j g(x) - m_B(\mathcal{R}_j g)|^q\, dx \\
&\leq 2^q \int_B |\mathcal{R}_j g_1(x) - m_B(\mathcal{R}_j g_1)|^q\, dx \\
&\quad + 2^q \int_B |\mathcal{R}_j g_2(x) - m_B(\mathcal{R}_j g_2)|^q\, dx \\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}^q\ |B|\, w(x_0,r)^q\,,
\end{aligned}$$

y con esto la demostración del Teorema. Para (4.3.8) haremos uso de la integrabilidad local de f para afirmar que $g_1 \in L^q$, luego por la acotación de la Transformada de Riesz tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_B |\mathcal{R}_j g_1(x) - m_B(\mathcal{R}_j g_1)|^q\, dx \\
&= \int_B |\mathrm{R}_j g_1(x) - m_B(\mathrm{R}_j g_1)|^q\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{R}_j g_1(x)|^q\, dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g_1(x)|^q\, dx \\
&\leq C \int_{2B} |f(x) - m_B f|^q\, dx \\
&\leq C \int_{2B} |f(x) - m_{2B} f|^q\, dx + C\ |B|\, |m_B f - m_{2B} f|^q \\
&\leq C \int_{2B} |f(x) - m_{2B} f|^q\, dx + C\ |B|^{1-p} \int_{2B} |f(x) - m_{2B} f|^q\, dx\ |B|^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq C \int_{2B} |f(x) - m_{2B} f|^q\, dx \\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}^q\, w(x_0, 2r)^q |B|\,.
\end{aligned}$$

Luego, por las propiedades de w

$$\frac{1}{w(x_0,r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\mathcal{R}_j g_1(x) - m_B(\mathcal{R}_j g_1)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C\ \|f\|_{w,q}\,.$$

Para (4.3.9), consideremos primero la acotación

$$\int_B |\mathcal{R}_j g_2(x) - m_B(\mathcal{R}_j g_2)|^q\, dx \ \leq\ \frac{1}{|B|} \int_B \int_B |\mathcal{R}_j g_2(x) - \mathcal{R}_j g_2(z)|^q\, dz\, dx\,.$$

Observando el integrando, dado que g_2 está soportada en $\mathbb{R}^n - 2B$, para x y z en la bola y nuevamente $\varepsilon < r$, el límite es trivial. Luego, por el Teorema del valor medio, podemos escribir

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_j g_2(x) - \mathcal{R}_j g_2(z)| &= \left| \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \left[\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}} \right] g_2(y)\, dy \right. \\
&\quad \left. - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|z-y|>\varepsilon} \left[\frac{z_j - y_j}{|z-y|^{n+1}} + \frac{y_j \Upsilon(y)}{|y|^{n+1}} \right] g_2(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n - 2B} \left[\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{z_j - y_j}{|z-y|^{n+1}} \right] (f(y) - m_B f)\, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n - 2B} \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} + \frac{z_j - y_j}{|z-y|^{n+1}} \right| |f(y) - m_B f|\, dy \\
&\leq C\, r \int_{\mathbb{R}^n - 2B} \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_0 - y|^{n+1}}\, dy\,.
\end{aligned}$$

Considerando la sucesión de bolas $B_k = B(x_0, 2^k r)$, con $k = 1, 2, \ldots$, de manera similar a (4.3.7) estimamos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_j g_2(x) - \mathcal{R}_j g_2(z)| &\leq C\, r \int_{\mathbb{R}^n - 2B} \frac{|f(y) - m_B f|}{|x_0 - y|^{n+1}}\, dy \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^k} \left(|B_j|^{-1} \int_{B_j} |f(y) - m_{B_j} f|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\ r \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, w(x_0, 2^j r) \\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\ r \int_r^{\infty} \frac{w(x_0,t)}{t} \frac{dt}{t} \\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}\, w(x_0, r) \ < \ \infty\,,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la hipótesis sobre w. Por lo tanto, por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B |\mathcal{R}_j g_2(x) - m_B(\mathcal{R}_j g_2)|^q\, dx &\leq \frac{1}{|B|} \int_B \int_B |\mathcal{R}_j g_2(x) - \mathcal{R}_j g_2(z)|^q\, dz\, dx \\
&\leq C\ \|f\|_{w,q}^q\, \frac{1}{|B|} \int_B \int_B w(x_0, r)^q\, dz\, dx \\
&= C\ \|f\|_{w,q}^q\, |B|\, w(x_0, r)^q\,.
\end{aligned}$$

y con esto queda demostrado el teorema. □

Conclusiones

En esta tesis hemos obtenido importantes resultados de acotaciones del operador Integral Fraccionaria en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable siguiendo la línea de investigación tomada de [17] y [20]. Además, hemos trabajado en un contexto más amplio estudiando espacios más generales y obteniendo las acotaciones correspondientes. Hemos podido seguir la dirección de [28] acotando las Transformadas de Riesz.

En el capítulo 1 expusimos la definición de los espacios $L^{p(\cdot)}$, fijamos la notación usualmente utilizada y estudiamos las propiedades desprendidas de las condiciones de continuidad impuestas a la función exponente. Además extendimos a este contexto la desigualdad de Minkowski, la cual no se concocía previamente y fue necesaria en la demostración de una de las proposiciones.

En el capítulo 2, definimos a los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$, con $0 < \alpha < n$ y $p(\cdot)$ una función exponente. Probamos que la condición P_α sobre $p(\cdot)$ es necesaria y suficiente para la acotación desde $L^{p(\cdot)}$ en $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ de una adecuada extensión del operador Integral Fraccionaria I_α. Por otro lado, definimos a los espacios $L^{p(\cdot)}$–débil y pudimos probar la acotación respectiva para funciones en estos espacios pero esta vez bajo condiciones sólo suficientes sobre $p(\cdot)$.

En un contexto más general, en el capítulo 3 presentamos a los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$, donde $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $1 \leq q < \infty$. Estudiamos condiciones suficientes sobre la función w bajo las cuales $\mathrm{bmo}_{w,1} = \mathrm{bmo}_{w,q}$ para cualquier $1 < q < \infty$. Luego, con el objetivo de probar acotación de I_α entre adecuados espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$, obtenemos una caracterización puntual para las funciones en estos espacios. Luego, observamos que $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ es un caso particular y estudiamos las aplicaciones correspondientes. La restricción de estos últimos a dominios acotados nos permitió recuperar resultados conocidos de inmersión para espacios de Sobolev con exponente variable relativos a suavidad. También, dado que estamos en un caso particular, estudiamos más en detalle las condiciones sobre la función exponente y pudimos probar que algunas de ellas pueden relajarse. En la última sección, analizamos la continuidad de las funciones en $\mathrm{bmo}_{w,q}$ en términos de las propiedades de w y las respectivas hipótesis sobre $p(\cdot)$ en el caso de los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$.

Finalmente, en el capítulo 4 de esta tesis analizamos el comportamiento de la Integral Fraccionaria sobre los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}$, extendiendo a este contexto, aunque sin pesos, resultados contenidos en [20]. Además, probamos extensiones no pesadas de resultados contenidos en [28] en lo que hace a las Transformadas de Riesz actuando sobre $\mathrm{bmo}_{w,q}$.

En vista de los resultados obtenidos en esta tesis, han surgido nuevos interrogantes que serán motivo de un futuro estudio. Tal es así la obtención de versiones pesadas de las acotaciones aquí expuestas, así como también las correspondientes aplicaciones a espacios de Sobolev con pesos. En un contexto más general, podrían estudiarse estas propiedades de acotaciones de operadores sobre espacios de exponente variable definidos sobre espacios métricos.

Esperamos que los resultados expuestos en esta tesis, aporten una herramienta de suma importancia en el tratamiento de los problemas generales mencionados en los primeros párrafos y exprese, de alguna manera, la infinita necesidad de descubrir nuevas técnicas matemáticas del análisis moderno.

Bibliografía

[1] Emilio Acerbi and Giuseppe Mingione, *Regularity results for a class of functionals with non-standard growth*, Arch. Ration. Mech. Anal. **156** (2001), no. 2, 121–140. MR 1814973 (2002h:49056)

[2] Alexandre Almeida and Stefan Samko, *Pointwise inequalities in variable Sobolev spaces and applications*, Z. Anal. Anwend. **26** (2007), no. 2, 179–193. MR 2314160 (2008f:46038)

[3] ______, *Embeddings of variable Hajlasz-Sobolev spaces into Hölder spaces of variable order*, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), no. 2, 489–496. MR 2508952 (2010b:46060)

[4] Claudia Capone, David Cruz-Uribe, and Alberto Fiorenza, *The fractional maximal operator and fractional integrals on variable L^p spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **23** (2007), no. 3, 743–770. MR 2414490 (2009c:42025)

[5] Yunmei Chen, Stacey Levine, and Murali Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math. **66** (2006), no. 4, 1383–1406 (electronic). MR 2246061 (2007d:94004)

[6] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, and C. J. Neugebauer, *The maximal function on variable L^p spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), no. 1, 223–238. MR 1976842 (2004c:42039)

[7] ______, *Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces*, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), no. 2, 744–760. MR 2927495

[8] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(\cdot)}$, Math. Inequal. Appl. **7** (2004), no. 2, 245–253. MR 2057643 (2005k:42048)

[9] L. Diening and Peter Hästö, *Muckenhoupt weights in variable exponent spaces*, (2008).

[10] Lars Diening, *Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces* $L^{p(\cdot)}$ *and* $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **268** (2004), 31–43. MR 2054530 (2005d:46071)

[11] ______, *Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), no. 8, 657–700. MR 2166733 (2006e:46032)

[12] D. E. Edmunds and A. Meskhi, *Potential-type operators in* $L^{p(x)}$ *spaces*, Z. Anal. Anwendungen **21** (2002), no. 3, 681–690. MR 1929426 (2003h:47087)

[13] David E. Edmunds and Jiří Rákosník, *Sobolev embeddings with variable exponent*, Studia Math. **143** (2000), no. 3, 267–293. MR 1815935 (2001m:46072)

[14] Xianling Fan, *Variable exponent Morrey and Campanato spaces*, Nonlinear Anal. **72** (2010), no. 11, 4148–4161. MR 2606774 (2011b:46053)

[15] Xianling Fan and Dun Zhao, *On the spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$ *and* $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), no. 2, 424–446. MR 1866056 (2003a:46051)

[16] Bruno Franchi, Carlos Pérez, and Richard L. Wheeden, *Self-improving properties of John-Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal. **153** (1998), no. 1, 108–146. MR 1609261 (99d:42042)

[17] A. Eduardo Gatto and Stephen Vági, *Fractional integrals on spaces of homogeneous type*, Analysis and partial differential equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 122, Dekker, New York, 1990, pp. 171–216. MR 1044788 (91e:42032)

[18] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition. MR 1814364 (2001k:35004)

[19] O. Gorosito, G. Pradolini, and O. Salinas, *Boundedness of the fractional maximal operator on variable exponent lebesgue spaces: a short proof*, Preprint. arXiv:0908.1421v1 [math.AP] (2009).

[20] Eleonor Harboure, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani, *Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 1, 235–255. MR 1357395 (97d:42014)

[21] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals. I*, Math. Z. **27** (1928), no. 1, 565–606. MR 1544927

[22] Petteri Harjulehto, Peter Hästö, and Mikko Pere, *Variable exponent Lebesgue spaces on metric spaces: the Hardy-Littlewood maximal operator*, Real Anal. Exchange **30** (2004/05), no. 1, 87–103. MR 2126796 (2005k:42039)

[23] Peter A. Hästö, *Local-to-global results in variable exponent spaces*, Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 2, 263–278. MR 2496743 (2010h:46037)

[24] Alexei Yu. Karlovich and Andrei K. Lerner, *Commutators of singular integrals on generalized L^p spaces with variable exponent*, Publ. Mat. **49** (2005), no. 1, 111–125. MR 2140202 (2006a:42023)

[25] V. Kokilashvili and S. Samko, *On Sobolev theorem for Riesz-type potentials in Lebesgue spaces with variable exponent*, Z. Anal. Anwendungen **22** (2003), no. 4, 899–910. MR 2036935 (2005a:42012)

[26] Vakhtang Kokilashvili and Stefan Samko, *Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 2, 493–515. MR 2073129 (2005e:42057)

[27] Ondrej Kováčik and Jiří Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czechoslovak Math. J. **41(116)** (1991), no. 4, 592–618. MR 1134951 (92m:46047)

[28] Marcela Morvidone, *Weighted* BMO$_\phi$ *spaces and the Hilbert transform*, Rev. Un. Mat. Argentina **44** (2003), no. 1, 1–16. MR 2051034 (2005g:42048)

[29] Benjamin Muckenhoupt and Richard Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274. MR 0340523 (49 #5275)

[30] Julian Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR 724434 (85m:46028)

[31] Eiichi Nakai, *Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation*, Studia Math. **105** (1993), no. 2, 105–119. MR 1226621 (94h:42026)

[32] Eiichi Nakai and Kôzô Yabuta, *Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), no. 2, 207–218. MR 780660 (87d:42020)

[33] Aleš Nekvinda, *Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R})$*, Math. Inequal. Appl. **7** (2004), no. 2, 255–265. MR 2057644 (2005f:42045)

[34] Jaak Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\ \lambda}$ spaces*, J. Functional Analysis **4** (1969), 71–87. MR 0241965 (39 #3300)

[35] Luboš Pick and Michael Růžička, *An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded*, Expo. Math. **19** (2001), no. 4, 369–371. MR 1876258 (2002m:42016)

[36] Bertram Ross and Stefan Samko, *Fractional integration operator of variable order in the Hölder spaces $H^{\lambda(x)}$*, Internat. J. Math. Math. Sci. **18** (1995), no. 4, 777–788. MR 1347069 (96j:26014)

[37] Michael Růžička, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR 1810360 (2002a:76004)

[38] S. G. Samko, *Density of $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ in the generalized Sobolev spaces $W^{m,p(x)}(\mathbf{R}^n)$*, Dokl. Akad. Nauk **369** (1999), no. 4, 451–454. MR 1748959 (2001a:46036)

[39] Stefan G. Samko, *Convolution and potential type operators in $L^{p(x)}(\mathbf{R}^n)$*, Integral Transform. Spec. Funct. **7** (1998), no. 3-4, 261–284. MR 1775832 (2001d:47076)

[40] I. I. Šarapudinov, *The topology of the space $\mathcal{L}^{p(t)}([0,1])$*, Mat. Zametki **26** (1979), no. 4, 613–632, 655. MR 552723 (81c:46021)