UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis**

Título de la Tesis:

Caracterización de espacios funcionales, incondicionalidad, democracia y equivalencia de sistemas de Haar en espacios de tipo homogéneo

Institución donde se realizó:
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET, UNL)
Departamento de Matemática, FIQ (UNL)

Autor:
Luis Nowak

Director de Tesis:
Dr. Hugo Aimar
Codirector de Tesis:
Dra. Ana Bernardis

Jurado de la Tesis compuesto por:

Carlos Cabrelli, Sergio Favier, Eleonor Harboure

Año de presentación: 2011

A Maria Eugenia,
Camila y Facundo.
Mis amores

Agradecimientos

A Hugo y Ana, mis directores, mis Maestros. Por lo mucho que disfruté de ellos en nuestras reuniones de trabajo. Por el apoyo, la dedicación y la contención que me brindaron en todo momento. Por buscar siempre lo mejor para mi. Por acompañarme, guiarme, y enseñarme a deleitarme con las bellezas de la matemática.

A Maria Eugenia, por hacer suyos mis sueños, acompañarme en esta hermosa aventura y regalarme esos dos solcitos nuestros, Camila y Facundo.

A mi madre, Nora, y mis hermanos Sergio y Claudia. Porque me quieren y los quiero.

Al CONICET, por otorgarme la beca doctoral y el lugar de trabajo adecuado para realizar este trabajo. Al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue, por darme las licencias solicitadas para realizar el doctorado. Al IMAL, por su gente, que siempre me brindo su apoyo y superó ampliamente mis expectativas.

A Raquel, que me asomó al mundo de las Matemáticas y me anima y estimula permanentemente.

A mis compañeros becarios, por alegrarse con mis alegrias, compartir las suyas conmigo y hacer más fáciles aquellos momentos no tan gratos. En especial a Edu, Gise, Adriana y Pame, mis compañeros de ruta en los inicios y apoyos permanentes. Por sobre todo, gracias por soportarme.

A María Laura, Alejandra, Mariela y Daniela, que desde la Patagonia me acompañan siempre.

Índice general

Resumen

El trabajo de tesis se centra en obtener resultados sobre incondicionalidad en diversos espacios funcionales de sistemas de wavelets de tipo Haar definidos sobre espacios de tipo homogéneo, caracterización de tales espacios via los coeficientes de Haar, democracia y equivalencia de tales sistemas.

En el contexto euclídeo, problemas relacionados con tales tópicos son considerados en la bibliografía, donde la estructura algebraica del espacio euclídeo es la herramienta básica para trabajar en ese marco. La carencia de estructura algebraica sobre un espacio de tipo homogéneo induce a realizar un trabajo geométrico más fino.

En esta teoría se prueba que, para nuestro contexto general, los sistemas de Haar son bases incondicionales para espacios de Lebesgue pesados y para los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mu)$ con $1 < p, q < \infty$. Para el caso de espacios de Lorentz fue necesario primero probar una caracterización de dichos espacios en términos de los coeficientes de Haar. Tal caracterización la obtuvimos por medio de la técnica de extrapolación de Rubio de Francia a partir de la caracterización via coeficientes de Haar de los espacios de Lebesgue pesados $L^p_w(X, \mu)$ con w en la clase de pesos diádicos de Muckenhoupt $A^{\mathcal{D}}_p$.

Para los espacios de Hardy diádicos $H^{\mathcal{D}}_1(X, \mu)$ obtuvimos también la incondicionalidad del sistema de Haar. La incondicionalidad de sistemas de Haar en $H^{\mathcal{D}}_1(X, \mu)$ nos permitió dar, via interpolación, otra prueba de la incondicionalidad de dichos sistemas en los espacios de Lebesgue $L^p(X, \mu), 1 < p < \infty$.

Con respecto a espacios con regularidad adicional, obtuvimos una caracterización via coeficientes de Haar de espacios de tipo Lipschitz sobre espacios de tipo homogéneo. Tal caracterización nos permitió obtener una demostración diferente de la de Macías y Segovia de que las clases de Campanato y las clásicas clases de Lipschitz coinciden.

Dada la generalidad de la definición de sistemas de Haar que adoptamos, es natural preguntarse cuándo sistemas de Haar definidos sobre distintas familias diádicas son equivalentes en el sentido de equivalencia de bases de Schauder. En tal sentido hemos obtenido condiciones geométricas sobre tales familias para tener la equivalencia de dichos sistemas en los espacios de Lebesgue pesados $L^p_w(X, \mu)$ con $w \in A_p$ y $1 < p < \infty$. El mismo resultado de equivalencia para el caso de los espacios $L^p_w(X, \mu)$ con $w \in A^{\mathcal{D}}_p$, pesos

diádicos de Muckenhouopt, y $1 < p < \infty$ requiere condiciones geométricas más rígidas sobre las familias diádicas.

Por último, abordamos el estudio de la democracia de sistemas de Haar en espacios de Lebesgue pesados $L^p_w(X,\mu)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ y en espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mu)$ con $1 < p, q < \infty$. Probamos que todo sistema de Haar es democrático en $L^p_w(X,\mu)$ y analizamos la democracia de los sistemas de Haar en espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mu)$ con $1 < p, q < \infty$.

Introducción

Hacer análisis. Ese es el objetivo general de la presente tesis. Entendemos aquí la expresión *hacer análisis* en un sentido amplio que incluye, entre otros, el estudio de espacios de funciones y las normas que los definen en relación con la acotación de operadores actuando entre tales espacios. En particular, nos interesamos en estudiar sistemas de wavelets en espacios métricos y probar resultados sobre incondicionalidad de tales sistemas como bases de diversos espacios funcionales, caracterización de esos espacios via coeficientes de wavelets, como así también estudiar la equivalencia, la democracia y propiedad greedy de las wavelets sobre dichos espacios.

En la recta real $\mathbb{R}$, una wavelet ortonormal es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que el sistema $\Psi = \{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, con $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}$. Esto es, el sistema Ψ es generado a partir de una función, ψ, por medio de traslaciones enteras y dilataciones diádicas que involucran las estructuras algebraicas usuales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$. Tomando $\psi = \chi_{(0,1/2]} - \chi_{(1/2,1]}$, obtenemos el sistema de Haar en la recta real, el cual es el primer ejemplo de sistema de wavelets. En 1989 Mallat [**40**] introduce un esquema para la construcción de wavelets en $\mathbb{R}^n$ via la noción de análisis multirresolución (AMR). Un AMR es una sucesión de subespacios cerrados $V_j, j \in \mathbb{Z}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

1. $V_j \subseteq V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$;
2. $f \in V_j$ si y sólo si $f(2(.)) \in V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$;
3. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
4. $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$;
5. existe una función $\varphi \in V_0$, llamada función de escala, tal que el sistema $\{\varphi(. - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_0.

Si para cada $j \in \mathbb{Z}$ tomamos el complemento ortogonal W_j de V_j en V_{j+1}, entonces puede probarse que $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$. Para el caso particular en que V_j sea el espacio de todas las funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ que sean constantes sobra cada cubo diádico usual $Q^j_{\vec{k}} = \prod_{i=1}^n I^j_{k_i}$, con $\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $j \in \mathbb{Z}$ donde $I^j_k = (k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, obtenemos que $(V_j : j \in \mathbb{Z})$ es una AMR con función de escala $\varphi = \chi_{(0,1]^n}$ y los espacios W_j están generados por las funciones de Haar de $\mathbb{R}^n$. En general, los sistemas de wavelets en $\mathbb{R}^n$ resultan ser buenas bases para diferentes espacios funcionales. En efecto, por ejemplo para el caso del sistema de Haar se tiene una base incondicional de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$. Más aún, los coeficientes de Haar de una función f definidos como $< f, h >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)dx$ para cada función de Haar h caracterizan tales espacios en el sentido que el tamaño de estos coeficientes garantiza la pertenencia o no de una función f al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, si denotamos con H_n al sistema de Haar usual de $\mathbb{R}^n$, tenemos que las desigualdades

$$C_1 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \left(\sum_{h \in H_n} | < f, h > |^2 |h|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{0.1}$$

valen para dos constantes positivas C_1 y C_2 y cada función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. El mismo resultado puede obtenerse para otros sistemas de wavelets con ciertas condiciones de suavidad para una amplia familia de espacios de funciones que incluyen entre otros a los espacios de Lebesgue con pesos, espacios de Hardy y de Lorentz.

Pretendemos en este trabajo hacer análisis via wavelets en contextos más generales que el caso usual de $\mathbb{R}^n$. Focalizamos nuestro estudio en el contexto general de espacios métricos (X, d) equipados con una medida de Borel sobre X que satisface las siguientes desigualdades

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq A\mu(B(x, r)) < \infty,$$

para todo punto x en X, todo $r > 0$ y alguna constante A que no depende de x ni de r. Toda medida que satisfaga las desigualdades anteriores se dice que es una medida que duplica y que la terna (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo. La noción de espacio de tipo homogéneo es en principio más general porque la estructura métrica puede sustituírse por una casi-métrica. Esto significa que la desigualdad triangular puede asumir una forma más débil: existe k tal que $d(x, y) \leq k(d(x, z) + d(z, y))$ para todo $x, y, z \in X$. Pero un resultado de Macías y Segovia (ver [**43**]) nos permite reducir la situación al caso métrico. Por otro lado, y con el fin de tener a disposición el Teorema de diferenciación de Lebesgue, asumiremos adicionalmente que la medida μ es regular. Tal contexto general incluye al caso euclídeo entre varios otros. En [**21**] se presentan otros ejemplos de espacios de tipo homogéneo. En particular trabajaremos con sistemas de wavelets de tipo Haar definidas sobre espacios de tipo homogéneo. Como hemos señalado, en el caso euclídeo existen otros sistemas de wavelets que poseen propiedades adicionales de suavidad. Sin embargo, sobre un espacio métrico abstracto no se tiene mejor suavidad que la continuidad Lipschitz. Las funciones de tipo Haar son el primer prototipo de sistema de wavelets que puede extenderse a contextos generales. Uno de los desafíos que propone tal contexto es la carencia, en principio, de estructura algebraica sobre el espacio subyacente donde están definidas las funciones. Con tal restricción, la geometría métrica de los espacios de tipo homogéneo juega ahora un papel central y, sorprendentemente, muchos argumentos tipicamente algebraicos se reconstruyen desde estas geometrías.

Las bases de lo que podríamos llamar *teoría de wavelets sobre espacios de tipo homogéneo* fueron dadas por M. Christ, H. Aimar, A. Bernardis, O. Gorosito y B. Iaffei. El aporte de Christ en [**20**] fue el de dotar a cualquier espacio de tipo homogéneo de una descomposición de tipo diádica, que esencialmente posee las mismas propiedades centrales de los cubos diádicos usuales de $\mathbb{R}^n$. El primer paso para tal descomposición es la introducción de una estructura de árbol sobre un conjunto de índices $\mathcal{A}$ que está estrechamente relacionada con la estructura métrica del espacio X. Es decir, M.Christ define un orden parcial satisfaciendo algunas propiedades de árbol controladas por la distancia. El segundo paso es dado por el uso de la mencionada estructura de árbol para definir los denominados cubos diádicos. Más precisamente, si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo, Christ prueba que existe un número real $0 < \delta < 1$ y una familia $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ donde cada $\mathcal{D}^j$ es una familia de subconjuntos abiertos Q de X, llamados cubos diádicos de $\mathcal{D}$, tal que

(d.1) *para todo $j \in \mathbb{Z}$ los cubos en $\mathcal{D}^j$ son disjuntos dos a dos;*
(d.2) *para todo $j \in \mathbb{Z}$ la famila $\mathcal{D}^j$ cubre casi todo X en el sentido que la medida del conjunto $(X - \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j} Q)$ es cero;*
(d.3) *si $Q \in \mathcal{D}^j$ y $i < j$, entonces existe un único $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ tal que $Q \subseteq \tilde{Q}$;*
(d.4) *si $Q \in \mathcal{D}^j$ y $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ con $i \leq j$, entonces o bien $Q \subseteq \tilde{Q}$ o $Q \cap \tilde{Q} = \emptyset$;*
(d.5) *existen dos constantes positivas y finitas a_1 y a_2 tal que para cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $Q \in \mathcal{D}^j$ se tiene que $B(x_j, a_1\delta^j) \subseteq Q \subseteq B(x_j, a_2\delta^j)$, para algún punto $x_j \in Q$.*

Familias de subconjuntos en espacios métricos o casi-métricos con medida que satisfagan *(d.1)* a *(d.4)* pueden ser construídas por un simple proceso de disjunción de bolas. Cuando sólo las propiedades de cubrimiento y encaje de los conjuntos diádicos son relevantes tal proceso es adecuado. Más aún, familias de subconjuntos que satisfagan *(d.1)* a *(d.4)* pueden ser utilizadas para construir bases ortonormales para el espacio $L^2(X, \mu)$ (ver [**31**]) y para ello la estructura métrica del espacio no es relevante. Sin embargo, el control métrico sobre los conjuntos diádicos dado en *(d.5)* permite el uso de resultados analíticos tales como las conocidas desigualdades de Fefferman-Stein para el operador maximal de Hardy-Littlewood a valores vectoriales.

La construccón en [**20**] es la clave para definir luego sistemas de tipo Haar soportados sobre los elementos de la descomposición de Christ. Precisamente en [**1**] se muestra una manera de definir sistemas de funciones de tipo Haar, esto es, funciones simples definidas sobre los elementos de la descomposición de Christ que tienen integral nula y forman una base ortonormal para el espacio $L^2(X, \mu)$ con μ una medida definida sobre X. Más precisamente, dada una descomposición de Christ $\mathcal{D}$, en [**1**] se da un algoritmo para construir sistemas de funciones $\mathcal{H}$ definidas sobre X tal que, si para cada entero j denotamos con $\tilde{\mathcal{D}}^j$ la subfamilia de $\mathcal{D}^j$ formada por todos aquellos cubos en $\mathcal{D}^j$ que contengan más de un cubo de la familia $\mathcal{D}^{j+1}$, se cumplen las siguientes propiedades

(h.1) *Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe un único $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$, y esta propiedad no vale para ningún cubo en $\mathcal{D}^{j+1}$. Más aún, cada función h es una función simple sobre cubos diádicos.*

(h.2) *Para todo $Q \in \tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}^j$ existen exactamente $M_Q = \#(\mathcal{O}(Q)) - 1 \geq 1$ funciones $h \in \mathcal{H}$ tal que (h.1) vale, donde $\mathcal{O}(Q) = \{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}$ para cada $Q \in \mathcal{D}^j$ con $j \in \mathbb{Z}$. Escribiremos $\mathcal{H}_Q$ para denotar el conjunto de todas estas funciones h.*

(h.3) *Para cada $h \in \mathcal{H}$ se tiene que $\int_X h d\mu = 0$.*

(h.4) *Para cada $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ sea V_Q el espacio vectorial de todas las funciones definidas sobre Q que son constantes sobre cada $Q' \in \mathcal{L}(Q)$. Entonces el sitema $\{\frac{\chi_Q}{(\mu(Q))^{1/2}}\} \bigcup \mathcal{H}_Q$ es una base ortonormal para V_Q.*

Es importante destacar aquí que en todo espacio de tipo homogeneo existe un entero positivo N tal que $M_Q \leq N$ para todo cubo Q donde M_Q es la constante dada en *(h.2)*. Más recientemente, Aimar, Bernardis y Iaffei prueban en [**2**] que los sistemas de Haar definidos en [**1**] resultan ser bases incondicionales para los espacios de Lebesgue pesados con pesos diádicos en la clase de Muckenhoupt diádica A_p^{dy} definidos sobre los cubos de Christ en el contexto de espacios de tipo homogéneo. Más aún, en [**2**] se obtiene además una caracterización de los espacios de Lebesgue pesados $L^p_w(X,\mu)$ con $w \in A_p^{dy}$ para $1 < p < \infty$ como la dada en (0.1) con $L^p_w(X,\mu)$ en lugar de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

La construcción de Christ sirve para probar la existencia de sistemas diádicos en espacios de tipo homogéneo generales. Pero la teoría que desarrollaremos es igualmente aplicable a cualquier sistema diádico independientemente del algoritmo de construcción. Lo mismo vale para los sistemas de Haar asociados. Por ejemplo, en el caso Euclídeo, el sistema de Haar ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ dado por $h^j_k(x) = 2^{j/2}h(2^jx - k)$, con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$, donde $h(x) = \chi_{(0,1/2]}(x) - \chi_{(1/2,1]}(x)$ es sólo el más conocido de una amplia familia de bases de tipo Haar en una dimensión. En este caso, la familia de los intervalos diádicos $I^j_k = (k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$ es la familia diádica natural para tal sistema en el sentido que I^j_k es el conjunto donde h^j_k no se anula. Más aún, cada h^j_k es constante sobre los dos subintervalos I^{j+1}_{2k} y I^{j+1}_{2k+1} de I^j_k. Cualquier sistema de funciones de la forma $\{\varphi^j_k = \alpha^j_k h^j_k : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ con $\alpha^j_k = \pm 1$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$, cada función φ^j_k tiene a I^j_k como su soporte esencial y es constante sobre cada subintervalo diádico I^{j+1}_{2k} y I^{j+1}_{2k+1} de I^j_k. Es decir, las funciones φ^j_k, con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$, forman otro sistema de funciones de tipo Haar. Por otro lado, en $\mathbb{R}^n$, la descomposición de Christ resulta en general diferente a la descomposición diádica usual, que claramente satisface *(d.1)* a *(d.5)*. Además, aplicando el método de Aimar a los cubos diádicos usuales de $\mathbb{R}^n$ no se obtiene el sistema de Haar ususal. En efecto, los sistemas de Haar construídos siguiendo el algoritmo en [**1**] dan funciones h que pueden anularse en algún subcubo Q' del cubo soporte de h. Con el fin de desarrollar una teoría general que abarque las posibles distintas descomposiciones del espacio y los posibles distintos sistemas de Haar, tomamos como punto de partida las definiciones axiomáticas de familias diádicas y sistemas de tipo Haar dadas en los capítulos 2 y 4 respectivamente. Los axiomas de tales definiciones están esencialmente dados por *(d.1)* a *(d.5)* y *(h.1)* a *(h.4)*.

Dada la generalidad de nuestras definiciones de familia diádica y sistema de Haar, resulta natural preguntarse si diferentes sistemas de Haar sobre una misma familia diádica, o más generalmente sobre diferentes familias diádicas, son equivalentes en algún sentido. La referencia básica para la equivalencia de sistemas de funciones es el libro de Young [**56**] donde se define la equivalencia de bases de Schauder para espacios de Banach. Precisamente, si $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ son dos espacios de Banach con bases $\mathcal{B}_1 = (f_n : n \in \mathbb{N})$ y $\mathcal{B}_2 = (g_n : n \in \mathbb{N})$ respectivamente, decimos que las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son equivalentes si satisfacen que cada sucesión de escalares (α_n) que hace converger en $\mathbb{B}_1$ la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n$, también hace converger la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n g_n$ en $\mathbb{B}_2$; y recíprocamente. Uno de los problemas abordados en la tesis es el de buscar condiciones sobre dos familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ para que los sistemas de Haar definidos sobre ellos resulten equivalentes sobre los espacios de Lebesgue $L^p_w(X, \mu)$ con $w \in A_p$ y $1 < p < \infty$. Notemos que por ejemplo en el caso euclídeo, es fácil construir simples perturbaciones de intervalos diádicos en $\mathbb{R}$, o de cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$, como imágenes de los intervalos diádicos usuales a través de funciones bi-Lipschitz. Precisamente, si F es un mapeo uno a uno de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$, y $Q^j_{\vec{k}} = \prod_{i=1}^n I^j_{k_i}$, con $\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $j \in \mathbb{Z}$, la familia $\{F(Q^j_{\vec{k}}) : j \in \mathbb{Z}, \vec{k} \in \mathbb{Z}^n\}$ satisface las propiedades básicas de los cubos diádicos usuales. Más aún, si F es bi-Lipschitz; esto es , existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tal que $c_1|x-y| \leq |F(x)-F(y)| \leq c_2|x-y|$ para todo x, y en $\mathbb{R}^n$, entonces los nuevos "cubos" $F(Q^j_{\vec{k}})$ satisfacen *(d.1)* a *(d.5)*. Es de alguna manera natural esperar que bajo ciertas condiciones adicionales sobre F, un sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$ soportado por la familia $\{F(Q^j_{\vec{k}}) : j \in \mathbb{Z}, \vec{k} \in \mathbb{Z}^n\}$ sea equivalente a otro sistema de Haar soportado por la familia $\{Q^j_{\vec{k}} : j \in \mathbb{Z}, \vec{k} \in \mathbb{Z}^n\}$ en $L^p_w(\mathbb{R}^n)$. Un contexto más general es proporcionado por la construcción de Christ dada en [**20**] y los sistemas de Haar definidos sobre ellos. En efecto, la construcción de Christ antes mencionada esta basada, cómo veremos en el Capítulo 5, en diversos procesos de selección de descendencia entre puntos que, para ciertas familias fijas de puntos denominadas redes, pueden producir diferentes descomposiciones diádicas.

Para probar de equivalencia en $L^p_w(X,\mu)$ ($w \in A_p$, $1 < p < \infty$) de sistemas de Haar asociados a diferentes familias diádicas, usamos la desigualdad de Fefferman-Stein para el operador maximal de Hardy-Littlewood

$$\left\| \left(\sum_k |Mf_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p_w(X,\mu)} \leq C \left\| \left(\sum_k |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p_w(X,\mu)}, \tag{0.2}$$

que vale para todo peso $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$, toda sucesión $(f_k : k \in \mathbb{N})$ y alguna constante C que depende de w, donde

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| d\mu.$$

Con el propósito de refinar el resultado de equivalencia de bases de Haar para espacios $L^p_w(X,\mu)$ con $w \in A^{\mathcal{D}}_p$ y $1 < p < \infty$, nos encontramos con la necesidad de probar la desigualdad (0.2) para el operador maximal diádico $M_{\mathcal{D}}$ en lugar del operador maximal M, donde $M_{\mathcal{D}}$ se define como M tomando cubos diádicos en lugar de bolas y con pesos w de $A^{\mathcal{D}}_p$.

La caracterización de espacios de funciones via coeficientes de wavelets y la incondicionalidad de tales bases para estos espacios son dos de las propiedades más importantes de wavelets en el contexto euclídeo. La naturaleza de los espacios de funciones y las propiedades particulares de las wavelets pueden ser muy variadas. Sin embargo, dada la discontinuidad de las funciones de Haar, estos sistemas pueden sólo ser bases de Schauder de espacios de funciones sin regularidad en el sentido clásico. Este es el caso de los espacios de Lebesgue. La misma prueba sobre la incondicionalidad y caracterización de espacios de Lebesgue pesados dada en [**2**] para sistemas de tipo Haar construídos sobre los cubos dados por la descomposición de Christ vale para sistemas de Haar sobre familias diádicas generales como las que definimos en el Capítulo 4. Para avanzar en esta dirección, consideraremos el problema de la incondicionalidad del sistema de Haar en los espacios de Lorentz y de Hardy diádico definidos en el contexto general de espacio de tipo homogéneo. El caso de los espacios de Lorentz en tal contexto es particularmente interesante ya que son admitidos espacios de medida que posean átomos. Por lo tanto los espacios de Lorentz resultan tener propiedades diferentes a la de los usualmente considerados en la bibliografía. La incondicionalidad de los sistemas de Haar en espacios de Lorentz como la cracterización de estos espacios via coeficientes de Haar las obtenemos por medio de la técnica de extrapolación de Rubio de Francia como está generalizada en [**22**].

Los espacios de Hardy diádicos considerados aquí son los construidos via átomos diádicos. La teoría de espacios de Hardy sobre contextos no isotrópicos y sobre espacios no euclídeos no es nueva. Calderón y Torchinsky [**16**] iniciaron el estudio de espacios de Hardy sobre $\mathbb{R}^n$ con dilataciones anisotropicas y Macías y Segovia obtienen en [**44**] la descomposición atómica de los espacios de Hardy en el contexto general de espacio de tipo homogéneo. En 1980 L. Carleson estudia la existencia de bases incondicionales sobre el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$, [**19**]. Más precisamente, da explícitamente una base de wavelets que es incondicional en $H^1(\mathbb{R}^n)$. En la prueba dada en [**19**] la regularidad de las funciones básicas es crucial. En [**34**] y [**55**] se dan condiciones sobre las wavelets para la incondicionalidad en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Estas condiciones están dadas en términos de regularidad de las funciones que forman la base de wavelet y por lo tanto la misma prueba no vale en el contexto diádico para wavelets de Haar. Probamos en este trabajo que los sistemas de Haar son bases incondicionales del espacio de Hardy diádico $H_1^{\mathcal{D}}$ en el contexto general de espacio de tipo homogéneo. El estudio de éstos espacios de Hardy diádicos sobre espacios de tipo homogéneo requiere considerar el espacio $BMO^{\mathcal{D}}$ de las funciones de oscilación media acotada sobre cubos diádicos y estudiar algunas de sus propiedades.

Por otro lado, como es sabido, la prueba de la incondicionalidad de bases de wavelets W sobre espacios de funciones tales como los espacios de Lebesgue, involucra el estudio de la acotación uniforme de los operadores

$$T_F(f) = \sum_{h \in F} < f, h > h = \sum_{h \in F} \left(\int f h d\mu \right) h,$$

con F variando sobre subconjuntos finitos de W. Un conocido resultado de interpolación para el caso de $\mathbb{R}^n$ permite obtener acotaciones sobre espacios de Lebesgue $L^p, 1 < p < 2$ a partir de acotaciones en el espacio de Hardy usual $H_1(\mathbb{R}^n)$ y en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Bajo la condición de regularidad de la medida μ en un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) puede probarse que el espacio de todas las combinaciones lineales finitas de funciones características de cubos diádicos es denso en cada espacio de Lebesgue $L^p(X, \mu)$ cuando $p < \infty$. Es decir, las funciones simples sobre cubos diádicos son suficientes para definir los espacios de Lebesgue clásicos y resulta entonces natural que por interpolación puedan obtenerse acotaciones sobre espacios de Lebesgue a partir de acotaciones sobre el espacio de Hardy diádico como se hace en [**55**] para el contexto clásico. Esto provee una prueba alternativa a la dada en [**2**] de la incondicionalidad de las bases de Haar sobre espacios de Lebesgue $L^p(X, \mu)$ con $1 < p < \infty$.

El hecho de que las funciones de Haar son discontinuas excluye la posibilidad de que tales sistemas sean bases de los espacios de tipo Lipschitz definidos en el contexto de espacio de tipo homogéneo. Sin embargo, en el caso euclídeo, puede darse una caracterización de tales espacios via coeficientes de Haar (ver [**35**] y [**23**]). La clave para obtener tal caracterización es el uso de operadores de traslación y de dilatación definidos en $\mathbb{R}^n$. Abordar el problema de la caracterización de funciones Lipschitz requiere sustituir estructura algebraica por consideraciones geométricas. Consideraremos tres tipos, en principio diferentes, de regularidad α de funciones reales definidas sobre un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ). El parámetro de regularidad α será siempre positivo. En [**43**], Macías y Segovia introducen, en el contexto de espacio de tipo homogéneo, las clases de funciones de tipo Campanato dadas en [**18**] para el caso euclídeo. Ellos prueban que bajo la condición de normalidad sobre el espacio homogéneo, estas clases son exactamente los clásicos espacios Lipschitz. El espacio Lipschitz de orden α, $Lip(\alpha)$, es el espacio de las funciones f definidas sobre X tal que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)^\alpha$$

para todo par de puntos $x, y \in X$. Denotaremos por $\|f\|_{Lip(\alpha)}$ el ínfimo de de todas las posibles constantes C.

Para $1 \leq q < \infty$, se dice que una función real f en $L^q_{loc}(X, \mu)$ pertenece al espacio $Lip(\alpha, q)$ si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - m_B(f)|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leq Cr(B)^\alpha \tag{0.3}$$

vale para toda bola B en X, donde $r(B)$ es el radio de B y $m_B(f) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu$. Con $\|f\|_{Lip(\alpha,q)}$ denotamos el ínfimo de aquellas constantes C.

Destacamos aquí que nuestra definición de $Lip(\alpha, q)$ coincide con la clase $Lip(\alpha, q)$ en [**43**] sólo cuando (X, d, μ) es normal en el sentido que la medida de cualquier bola es comparable a su radio. Es fácil ver que $Lip(\alpha)$ implica $Lip(\alpha, q)$. En verdad, uno de los principales resultados en [**43**] es la recíproca. Mostraremos en este trabajo que ambos, $Lip(\alpha)$ y $Lip(\alpha, q)$ tienen la misma descripción en términos de wavelets de Haar construídas sobre alguna clase amplia de familias diádicas. El primer resultado en esta dirección establece que si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo y $f \in Lip(\alpha, 2)$. Entonces la desigualdad

$$|< f, h >| = \left|\int_X fhd\mu\right| \leq \|f\|_{Lip(\alpha,2)}\ r(B)^\alpha\ \mu(B)^{1/2},$$

vale para toda función h y toda bola $B = B(z, r(B))$ tal que

(i) $\int_X hd\mu = 0$;

(ii) $\int_X |h|^2 d\mu = 1$ y
(iii) $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq B$.

Notemos que en el contexto euclídeo, cualquier wavelet de soporte compacto satisface las propiedades *(i)* a *(iii)*. Este es también el caso para los sistemas de Haar con los que trabajamos en la presente tesis. Nuestro interés radica en un recíproco del resultado previo en términos de funciones de tipo Haar. Notemos que, para $x \in \mathbb{R}^n$, una traslación $\mathcal{D}_x = \{Q : (Q - x) \in \mathcal{D}\}$ de la familia diádica $\mathcal{D}$ usual de $\mathbb{R}^n$ tiene las mismas propiedades relevantes que $\mathcal{D}$. Además, la familia $\{\mathcal{D}_x : x \in \mathbb{R}^n\}$ tiene una importante propiedad que llamaremos *separadora*. En efecto, es fácil ver que dados dos puntos diferentes x e y en $\mathbb{R}^n$, existen $z \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{Z}$ y $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$ tal que ambos, x e y pertenecen a dos subcubos diferentes $z + Q^{j+1}_{\vec{l}}$ y $z + Q^{j+1}_{\vec{m}}$ de $z + Q^{j}_{\vec{k}}$ y 2^{-j} es comparable con $|x - y|$. La definición precisa de *clases separadoras* se da en el Capítulo 7 donde probaremos también su existencia en nuestro contexto general de espacio de tipo homogéneo. Tal definición viene a sustituir la idea de traslación que se necesita para obtener la caracterización de los espacios Lipschitz via coeficientes de Haar.

Sea $\mathcal{S}$ una clase de familias diádicas $\mathcal{D}$. Escribimos $\mathcal{H}$ para denotar el conjunto de todas las funciones de Haar h que pertenecen a algún sistema de Haar $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ asociado a algún $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$. Definimos ahora nuestra tercer clase de funciones tipo Lipschitz que está dada en términos de coeficientes de Haar. Una función $f \in L^1_{loc}(X, d, \mu)$ se dice que pertenece a la clase de Carleson $\mathcal{C}(\alpha, \mathcal{S})$ si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|< f, h >| \leq C\ diam(Q_h)^{\alpha}\ \mu(Q_h)^{1/2}, \tag{0.4}$$

vale para toda $h \in \mathcal{H}$, donde Q_h es el menor cubo diádico que contiene al conjunto $\{x \in X : h(x) \neq 0\}$ y $diam(E) = sup\{d(x, y) : x \in E, y \in E\}$. El principal resultado con respecto a la caracterización de espacios Lipschitz sobre (X, d, μ) es la igualdad de los espacios

$$Lip(\alpha) = Lip(\alpha, q) = \mathcal{C}(\alpha, \mathcal{S})$$

para todo $1 \leq q < \infty$, $\alpha > 0$ y toda clase separadora $\mathcal{S}$. Aquí la igualdad de espacios es entendida en el sentido de clases de Lebesgue de funciones. Casi con las mismas pruebas, el anterior resultado pueden extenderse a modulos de continuidad $\varphi(t)$ más generales que t^{α}.

En la teoría de aproximación no lineal en el contexto de espacios de Banach surge el concepto de democracia (ver [**38**]). Tal concepto es de importancia para abordar problemas de aproximación ya que aquellas bases que son incondicionales y democráticas resultan ser bases eficientes en un sentido preciso. Dado un espacio de Banach $(\mathbb{B}, \|.\|_{\mathbb{B}})$, un conjunto numerable $\mathcal{B}$ de la esfera unitaria de $\mathbb{B}$ se dice democrático en $\mathbb{B}$ si para alguna constante positiva D la desigualdad

$$\left\| \sum_{h\in F_1} h \right\|_{\mathbb{B}} \leq D \left\| \sum_{h\in F_2} h \right\|_{\mathbb{B}}, \tag{0.5}$$

vale para toda elección de subconjuntos finitos F_1 y F_2 de $\mathbb{B}$ con $|F_1| = |F_2|$. Aquí escribimos $|F|$ para denotar el número de elementos en F.

El ejemplo más clásico de sistema democrático es provisto por cualquier sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert. En efecto, en tal caso (0.5) es una identidad con $D = 1$.

Como Temlyakov mostró en [**51**], la democracia en espacios de Lebesgue L^p, $1 < p < \infty$, sobre espacios euclídeos, es una propiedad común de todas las bases de wavelets que son equivalentes a la base de Haar. En este trabajo exploramos la democracia de los sistemas de tipo Haar en espacios de Banach de funciones definidos sobre espacios métricos con medida. En particular para espacios de Lebesgue pesados y en espacios de Lorentz. Más precisamente, para el caso de los espacios $L^p_w(X,\mu)$ probamos el siguiente resultado.

Teorema 0.1. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{H}$ un sistema de tipo Haar asociado a una familia diádica $\mathcal{D}$. Entonces el sistema $\tilde{\mathcal{H}} = \{\frac{h}{\|h\|_{p,w}} : h \in \mathcal{H}\}$ es una base democrática para $L^p_w(X,\mu)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\mathcal{D}}_p$. Más aún*

$$\left\| \sum_{h\in F} \frac{h}{\|h\|_{p,w}} \right\|_{p,w} \approx |F|^{1/p}, \tag{0.6}$$

para cada subconjunto finito F de $\mathcal{H}$.

Y para el caso de espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mu)$ con $1 < p, q < \infty$ obtenemos condiciones geométricas suficientes sobre familias diádicas bajo las cuales la propiedad de democracia de un sistema de Haar en $L^{p,q}(X,\mu)$ con $1 < p, q < \infty$ implica que $p = q$.

La presente tesis está organizada como sigue. En el Capítulo 1 damos las nociones y resultados previos que se necesitan para el desarrollo del trabajo. El Capítulo 2 contiene la definición de familia diádica y se desarrollan varios conceptos asociados a tal definición. El Capítulo 3 contiene las herramientas básicas para el análisis diádico en el contexto de espacio de tipo homogéneo que incluye desigualdades con pesos para el operador maximal diádico $M_{\mathcal{D}}$. En el capítulo siguiente introducimos lo que entendemos a lo largo del trabajo por sistema de tipo Haar y damos sus propiedades básicas. El problema de la equivalencia de sistemas de Haar en espacios de Lebesgue pesados es abordado en el Capítulo 5. En el Capítulo 6 probamos la incondicionalidad de los sistemas de Haar en espacios de Hardy diádicos y damos una prueba alternativa, via interpolación, de la incondicionalidad de tales sistemas en espacios de Lebesgue. La caracterización de los espacios Lipschitz via coeficientes de Haar es considerada en el Capítulo 7. El Capítulo 8 está dedicado a estudiar la incondicionalidad de los sistemas de Haar en espacios de Lorentz y la caracterización de tales espacios via dichos sistemas. El Capítulo 9 trata sobre la democracia de los sistemas de Haar en espacios de Lebesgue pesados y en espacios de Lorentz.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este primer capítulo enunciamos las nociones y resultados básicos que son necesarios para el desarrollo posterior del trabajo. No incluimos aquí demostraciones de tales resultados. Sin embargo, hay suficiente bibliografíia disponible donde sus pruebas pueden encontrarse. Para la primer sección, que es dedicada a presentar la estructura geométrica de los espacios de tipo homogéneo e incluye las herramientas básicas del análisis en espacios métricos con medida, pueden verse [**21**] y [**29**]. Los resultados de la segunda sección son también clásicos y se refieren a bases sobre espacios de Banach. Damos un breve repaso de la teoría general de bases siguiendo la línea de [**34**] y [**55**].

Cada una de las dos secciones que conforman el presente capítulo está dividida en breves subsecciones para hacer más simple la lectura y las futuras referencias.

1.1. Geometría básica y análisis clásico en espacios de tipo homogeneo

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida donde X es un conjunto, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X y μ una medida no negativa sobre X para la cual los elementos de $\mathcal{A}$ son conjuntos medibles. La coexistencia de tal estructura con una distancia definida sobre X permite obtener resultados analíticos donde intervienen espacios de funciones, normas sobre tales espacios y acotacion de operadores entre otros objetos matemáticos. En esta sección repasamos brevemente las ideas básicas de la teoría de espacios de tipo homogéneo en dos subsecciones. En la primera de ellas se introduce la noción de espacio de tipo homogéneo y se enuncian algunas de sus propiedades más importantes. En la segunda subsección incluimos desigualdades que involucran al operador maximal de Hardy-Littlewood y pesos de la clase de Muckenhoupt.

1.1.1. Espacios de tipo homogéneo.

Definición 1.1. Una casi-métrica sobre un conjunto X es una función ρ definida sobre $X \times X$ a valores reales no negativos satisfaciendo las tres condiciones siguientes

1. Confiabilidad: $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
2. Simetría: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ para todo x, y en X;
3. Desigualdad Λ-triangular: $\rho(x,y) \leq \Lambda(\rho(x,z) + \rho(z,y))$, para alguna constante finita $\Lambda \geq 1$ y para todo x, y, z en X.

Diremos que (X, ρ) es un espacio casi-métrico si ρ es una casi-métrica sobre X. En el caso particular en que $\Lambda = 1$ decimos que ρ es una métrica y que (X, ρ) es un espacio métrico.

Una relación fundamental entre espacios métricos y casi-métricos probada por Maciás y Segovia ([**43**]) es el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Dado un espacio casi-métrico (X, ρ), existen una métrica d sobre X y constantes positivas y finitas c_1, c_2 y $\xi \geq 1$ tal que para todo x, y en X vale la siguiente cadena de desigualdades*

$$c_1\rho(x, y) \leq (d(x, y))^{\xi} \leq c_2\rho(x, y).$$

De ahora en adelante este teorema justificará que trabajemos en espacios métricos. La bola abierta, con respecto a la métrica ρ sobre X, centrada en el punto x y de radio r es el conjunto

$$B_\rho(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}.$$

Un concepto central para nuestros propósitos es el de dimensión métrica finita que pasamos a describir a continuación. Dado un subconjunto E de X, diremos que es ϵ-disperso para $\epsilon > 0$ si $\rho(x, y) \geq \epsilon$ para todo x, y en E con $x \neq y$. Se dice que el espacio métrico (X, ρ) tiene dimensión métrica finita o la propiedad de homogeneidad con constante N si para cada punto x en X y cada número real positivo ϵ la bola $B(x, 2\epsilon)$ contiene a lo sumo N puntos de cualquier conjunto E que sea ϵ-disperso en X. El siguiente resultado probado por Coifman y Weiss (ver [**21**]) da una de las propiedades más importantes que se derivan de la dimensión métrica finita.

Teorema 1.3. *Sea (X, ρ) un espacio métrico que tiene dimensión métrica finita con constante N. Si E es cualquier subconjunto ϵ-disperso en X, entonces para todo punto x en X, todo $\epsilon > 0$ y cada número natural m se tiene que*

$$\#(E \cap B(x, 2^m\epsilon)) \leq N^m,$$

donde con $\#(F)$ denotamos el número de elementos del conjunto F.

Dado un espacio métrico (X, ρ) y μ una medida de Borel sobre X, decimos que μ satisface la propiedad de duplicación con respecto a ρ si existe una constante $C \geq 1$ tal que valen las desigualdades

$$0 < \mu(B_\rho(x, 2r)) \leq C\mu(B_\rho(x, r)) < \infty,$$

para todo punto x en X y todo $r > 0$. En tal caso diremos que (X, ρ, μ) es un espacio de tipo homogéneo si μ es una medida regular. Si bien la definición general de espacio de tipo homogéneo que usualmente aparece en la bibliografía no pide tal condición de regularidad sobre la medida, en este trabajo la incluimos con el objetivo de tener a disposición el Teorema de diferenciación de Lebesgue.

1.1.2. Maximales y pesos.

Dado un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) y una función f que sea integrable sobre cada $d-$bola, definimos la función maximal de Hardy-Littlewood de f como

$$Mf(x) = \underset{B}{sup} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y),$$

donde el supremo se toma sobre la familia de todas las $d-$bolas en X que contienen al punto x. La función Mf es medible para cada f localmente integrable y se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.4. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Entonces el operador M que asocia a cada función localmente integrable f la función maximal de Hardy-Littlewood Mf es de tipo débil (1,1), esto es, existe una constante positiva y finita C tal que la desigualdad*

$$\mu(\{x \in X : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_X |f(x)| d\mu(x)$$

vale para toda función integrable f y todo $\lambda > 0$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Lebesgue $L^p(X, \mu)$ es, como es usual, el espacio de las funciones medibles f sobre X a valores reales tales que $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ si $p < \infty$ y $\|f\|_\infty = \sup |f| < \infty$ si $p = \infty$, donde el supremo es tomado en el sentido del supremo esencial. Dado que se tiene la acotación trivial $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz se obtiene la acotacion del operador M en los espacios de Lebesgue $L^p(X, \mu)$ con $1 < p < \infty$.

TEOREMA 1.5. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Si $1 < p \leq \infty$ entonces el operador M es de tipo fuerte (p,p), esto es, existe una constante positiva y finita C tal que la desigualdad*

$$\|Mf\|_p \leq C\|f\|_p$$

vale para toda función f medible.

Ahora introducimos las clases de Muckenhoupt y enunciamos algunas de sus propiedades más importantes. Una función medible, no negativa y localmente integrable w definida sobre el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), se dice que es un peso de Muckenhoupt de la clase A_p, $1 < p < \infty$ si la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w(x)^{\frac{-1}{p-1}} d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C, \tag{1.1}$$

vale para alguna constante C y toda bola B.

Para $p = 1$ decimos que $w \in A_1$ si existe una constante C tal que la desigualdad

$$\frac{w(B)}{\mu(B)} \leq Cw(x) \tag{1.2}$$

vale para casi todo punto $x \in B$ (respecto de μ) y para toda bola B. La clase A_∞ se define como

$$A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p. \tag{1.3}$$

El siguiente resultado contiene las principales propiedades de pesos en las clases de Muckenhoupt A_p, $1 \leq p \leq \infty$ sobre espacios de tipo homogéneo.

TEOREMA 1.6. *Sean $1 < p < \infty$ y p' tales que $1/p + 1/p' = 1$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

(a) si $w \in A_p$ entonces $w(x) > 0$ para casi todo punto x,
(b) si $w \in A_p$ entonces $wd\mu$ satisface la condición de duplicación,
(c) si $w \in A_p$ entonces $w \in A_q$ para todo $q > p$,
(d) $w \in A_p$ si y sólo si $w^{1-p'} \in A_{p'}$,
(e) si $w \in A_p$ entonces $w \in A_q$ para algún $q < p$.
(f) $w \in A_p$ es necesario y suficiente para la desigualdad de tipo fuerte (p, p) para el operador M con respecto a la medida $wd\mu$,
(g) $w \in A_1$ es necesario y suficiente para la desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ para el operador M con respecto a la medida $wd\mu$.

La demostración del Teorema 1.6 se obtiene como en el clásico caso euclídeo.

Finalizamos esta sección con las desigualdades de Fefferman-Stein a valores vectoriales para el operador maximal. Tales desigualdades constituyen herramientas importantes en analisis armónico. En lo que sigue, para una sucesión dada $\mathbf{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ de funciones definidas sobre X escribiremos $||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} = \left(\sum_n |f_n(x)|^r\right)^{1/r}$, para $1 < r < \infty$ y $x \in X$. Si T es un operador que actúa sobre funciones escalares es posible extenderlo a un operador a valores vectoriales definiendo $T\mathbf{f} = (Tf_n : n \in \mathbb{N})$. La siguiente extensión del resultado de Fefferman-Stein al contexto general de espacio de tipo homogéneo puede hallarse en [**29**].

TEOREMA 1.7. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $1 < r < \infty$. Entonces*

(a) si $1 \leq p < \infty$, entonces existe una constante positiva C tal que

$$w(\{x \in X : ||M\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} > \lambda\}) \leq C \frac{1}{\lambda^p} \int_X ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p \, w(x) d\mu(x)$$

para toda sucesión de funciones medibles $\mathbf{f}$ y todo $\lambda > 0$, si y sólo si $w \in A_p$;

(b) si $1 < p < \infty$, entonces existe una constante positiva C tal que

$$\int_X ||M\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p \; w(x)d\mu(x) \;\leq\; C \int_X ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p \; w(x)d\mu(x)$$

para toda sucesión de funciones medibles $\mathbf{f}$, si y sólo si $w \in A_p$.

1.2. Bases de espacios de Banach

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, la estructura algebraica induce la noción de base de Hamel donde los elemenos del espacio son generados por las combinaciones lineales finitas de los elementos de la base. Sin embargo, cuando tal espacio vectorial está equipado además con una topología, se puede introducir una noción analítica de base donde los elementos del espacio son generados por un proceso de limite con combinaciones lineales de los elementos de la base. En esta sección nos dedicamos a dar un breve repaso sobre bases en este último sentido.

1.2.1. Normas y espacios de Banach.

Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice un espacio normado si existe una aplicación $\|.\|$ que a cada elemento $f \in \mathbb{V}$ le asigna un número real no negativo $\|f\|$ que satisface las siguientes condiciones.

1. $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$;
2. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ si $f \in \mathbb{V}$ y α es un escalar real;
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ para todo f y g en $\mathbb{V}$.

Decimos que la aplicación $\|.\|$ es una norma para $\mathbb{V}$. Todo espacio normado puede ser considerado un espacio métrico con la métrica d definida como $d(f, g) = \|f - g\|$ y así las nociones topológicas usuales adquieren sentido. Más aún, las operaciones de suma y multiplicación por escalares que definen el espacio vectorial $\mathbb{V}$ son continuas con respecto a la topología inducida por la métrica dada por la norma. Diremos que un espacio normado es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica definida por medio de su norma; esto significa que toda sucesión de Cauchy es convergente. En lo que sigue, escribiremos $(\mathbb{B}, \|.\|_{\mathbb{B}})$ para denotar un espacio de Banach $\mathbb{B}$ con norma $\|.\|_{\mathbb{B}}$.

1.2.2. Bases de Schauder.

Sea $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \|.\|_{\mathbb{B}})$ un espacio de Banach. Consideraremos siempre tales espacios sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Una sucesión $\mathcal{B} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ de elementos f_n en $\mathcal{B}$ se dice que es una base de Schauder de $\mathbb{B}$, o brevemente una base de $\mathbb{B}$, si y sólo si para cada elemento $f \in \mathbb{B}$ existe una única sucesión de escalares reales $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ tal que

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n, \tag{1.4}$$

donde la convergencia de la serie es en el sentido de la norma de $\mathbb{B}$; esto es

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j\|_{\mathbb{B}} = 0.$$

Debido a la unicidad en la representación (1.4), se deduce fácilmente que los f_n son linealmente independientes y por lo tanto no nulos. Más aún, puede probarse (ver por ejemplo [**34**]) que los funcionales $f_n^* : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por $f_n^*(f) = \alpha_n$ pertenecen al espacio dual $\mathbb{B}^*$ de $\mathbb{B}$. Esto es, cada f_n^* es lineal y continuo.

Es fácil ver que cualquier sistema ortonormal completo en un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ es una base de Schauder de $\mathbb{H}$. En particular el sistema $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base para el espacio de las funciones $1-$periodicas definidas sobre $\mathbb{R}$ tal que $\|f\|^2_{L^2([0,1))} = \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$.

Otro ejemplo clásico de base de Schauder para los espacios $L^p([0,1])$ con $1 < p < \infty$ es el sistema de Haar en el intervalo $[0,1]$ definido como $\{h_{j,k} : j \in \mathbb{N}_0, k = 0, ..., 2^j - 1\}$ donde $h_{j,k}(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k)$, $h(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x)$ y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tal sistema de Haar es el primer ejemplo de base de wavelets en el contexto euclídeo. Una generalización de tales sistemas sobre espacios de tipo homogéneo, que daremos en el Capítulo 4, serán nuestros objetos básicos y el punto de partida para estudiar luego diferentes espacios funcionales.

1.2.3. Bases incondicionales.

La definición de base involucra la convergencia de una serie. En general cuando se suma una familia de vectores el orden de la sumación es muy importante. Por lo tanto que la suma no dependa del orden en el cual sumamos es una característica de importancia. Las bases incondicionales sirven de ejemplo de tal situacion. Dada una sucesión $(f_n : n \in A)$ de vectores en un epacio de Banach $\mathbb{B}$, decimos que la serie $\sum_{n\in A} f_n$ es incondicionalmente convergente si para cada mapeo biyectivo $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow A$ resulta que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_{\sigma(k)}$ es convergente.

Decimos que una base $\mathcal{B}$ en un espacio de Banach $\mathbb{B}$ es una base incondicional si la convergencia de la serie (1.4) que da la única representacion para cada elemento f de $\mathbb{B}$ es incondicional. Una formulación equivalente de base incondicional está dada por el siguiente resultado (ver [**34**] y [**55**]).

TEOREMA 1.8. *Sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y $\mathcal{B} = (b_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de elementos de $\mathbb{B}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base incondicional de $\mathbb{B}$ si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones*

(*i*1) *Las combinaciones lineales finitas de elementos de $\mathcal{B}$ son densas en $\mathbb{B}$.*

(*i*2) *Existe una suceión $(b_n^* : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{B}^*$, el dual de $\mathbb{B}$, tal que $b_n^*(b_m) = 1$ si $n = m$ y cero en otro caso.*

(*i*3) *Existe una constante positiva C tal que*

$$\left\| \sum_{n\in F} b_n^*(f) b_n \right\|_{\mathbb{B}} \leq C \left\| f \right\|_{\mathbb{B}},$$

para todo subconjunto finito F de $\mathbb{N}$ y todo elemento $f \in \mathbb{B}$.

1.2.4. Equivalencia de bases.

En general, dos objetos matemáticos se dicen que estan *cerca* si ellos comparten propiedades en común. En particular cuando estamos en presencia de bases de Schauder para espacios de Banach una noción de cercanía es la equivalencia (ver [**56**]).

DEFINICIÓN 1.9. Sean $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ dos espacios de Banach con bases $\mathcal{B}_1 = (f_n : n \in \mathbb{N})$ y $\mathcal{B}_2 = (g_n : n \in \mathbb{N})$ respectivamente. Decimos que las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son equivalentes si satisfacen que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n \text{ converge} \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n g_n \text{ converge}$$

El siguiente resultado será de utilidad en los capítulos siguientes (ver [**56**] o [**38**]).

TEOREMA 1.10. *Sean $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ dos espacios de Banach con bases $\mathcal{B}_1 = (f_n : n \in \mathbb{N})$ y $\mathcal{B}_2 = (g_n : n \in \mathbb{N})$ respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases equivalentes.*
2. *Existe un operador lineal $T : \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ invertible y acotado tal que $T(f_n) = g_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Existen dos constantes positivas y finitas C_1 y C_2 tal que*

$$C_1 \left\| \sum_{n\in F} \alpha_n g_n \right\|_{\mathbb{B}_2} \leq \left\| \sum_{n\in F} \alpha_n f_n \right\|_{\mathbb{B}_1} \leq C_2 \left\| \sum_{n\in F} \alpha_n g_n \right\|_{\mathbb{B}_2},$$

para toda sucesión de escalares $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ y todo conjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}$.

1.2.5. Bases voraces y democráticas.

Una base normalizada $\mathcal{B} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathbb{B}$ se dice greedy (voraz) *si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier elemento $f \in \mathbb{B}$ con $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n$, cualquier entero positivo m, todo conjunto $G_1 \subseteq \mathbb{N}$ de cardinalidad m tal que*

$$\min_{n\in G_1}|\alpha_n| \;\geq\; \max_{n\in\mathbb{N}\setminus G_1}|\alpha_n|,$$

todo conjunto $G_2 \subseteq \mathbb{N}$ también de cardinalidad m y toda sucesión de escalares β_n se tiene que

$$\left\| f - \sum_{n\in G_1}\alpha_n f_n \right\|_{\mathbb{B}} \;\leq\; C \left\| f - \sum_{n\in G_2}\beta_n f_n \right\|_{\mathbb{B}}.$$

Una cuestión central en teoría de aproximación es la construcción de algoritmos eficientes para producir aproximaciónes por N-términos en un espacio de Banach $\mathbb{B}$ con una base incondicional numerable $\mathcal{B} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para $f \in \mathbb{B}$, el error de aproximación por N-términos con respecto a la base $\mathcal{B}$ es definido por

$$\sigma_N(f) \;=\; inf\{\|f-g\|_{\mathbb{B}} :\; g \in \Sigma_n\},$$

donde Σ_n denota el conjunto de todos los elementos $g \in \mathbb{B}$ con a lo sumo N coeficientes no nulos en la representación $g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n f_n$. Las bases greedy producen algoritmos que son casi óptimos para aproximación por N-términos (ver [**38**]).
Konyagin y Temlyakov [**38**] dieron una caracterización de bases greedy en términos de algunas nociones básicas. Más presisamente, ellos probaron que tener una base greedy es equivalente a que la base sea incondicional y democrática. El concepto de democracia es relativamente nuevo y fue definido en el contexto general de espacios de Banach en [**38**]. Sea $(\mathbb{B}, \|.\|_{\mathbb{B}})$ un espacio de Banach. Un conjunto numerable $\mathcal{B}$ de la esfera unitaria de $\mathbb{B}$ se dice democrática en $\mathbb{B}$ si para alguna constante positiva D la desigualdad

$$\left\| \sum_{h\in F_1} h \right\|_{\mathbb{B}} \;\leq\; D \left\| \sum_{h\in F_2} h \right\|_{\mathbb{B}}, \tag{1.5}$$

vale para toda elección de subconjuntos finitos F_1 y F_2 de $\mathbb{B}$ con $|F_1| = |F_2|$. Aquí, como es usual, escribimos $|F|$ para denotar el número de elementos en F.

El ejemplo más clásico de sistema democrático es provisto por cualquier sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert. En efecto, en tal caso (1.5) es una identidad con $D = 1$.

CAPÍTULO 2

Familias diádicas en espacios de tipo homogéneo

El presente capítulo está dedicado a introducir y estudiar lo que denominaremos cubos diádicos y familias diádicas. Estos objetos, junto con los sistemas de tipo Haar que introduciremos en el Capítulo 4, serán los elementos básicos sobre los cuales vamos a desarrollar luego en los capítulos siguientes el análisis diádico en espacios de tipo homogéneo. El punto de partida es la definición de una clase de familias diádicas $\mathfrak{D}(\delta)$. Las características geométricas de las familias diádicas que vamos a definir, en particular la condición de control métrico sobre los objetos que llamaremos cubos diádicos, nos permitirán deducir y demostrar propiedades analílicas sobre espacios funcionales en los capítulos siguientes. La definición de la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ será dada en la primer sección donde además daremos varios ejemplos representativos de distintas situaciones posibles en el contexto de espacio de tipo homogéneo. Veremos luego, en la Sección 2, como a partir de este control métrico podemos deducir importantes propiedades geométricas de las familias en $\mathfrak{D}(\delta)$ que serán usadas frecuentemente a lo largo del trabajo. Particular importancia tendrá para lo que sigue la denominada subfamilia de cubos diádicos con descendencia no trivial que introduciremos en la Sección 3. En la Sección 4 introducimos la noción de cuadrante y estudiamos sus propiedades que serán útiles luego cuando definamos espacios de Hardy y BMO diádicos. Por último, la Sección 5 está dedicada a demostrar que la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ que definimos es no vacía. Tal demostración es dada por la construcción de M. Christ ([**20**]).

2.1. Definición y ejemplos

Dedicaremos la primer parte de esta sección a dar la definición de una clase de familias diádicas $\mathfrak{D}(\delta)$ junto con algunos ejemplos. Como es sabido, en el contexto euclídeo usual, la clásica descomposición diádica se puede obtener por medio de traslaciones y dilataciones del cubo unitario $Q_0 = [0,1)^n = \{(x_1,...,x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq x_i < 1, i = 1,...,n\}$. En efecto, para cada j en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y cada n-upla $\vec{k} = (k_1,...,k_n)$ en $\mathbb{Z}^n$, el cubo diádico usual de nivel j y posición $\vec{k}$ se puede definir como $Q_{j,\vec{k}} = 2^{-j}(Q_0 + \vec{k}) = \{2^{-j}(x_1 + k_1,...,x_n + k_n) : (x_1,...x_n) \in Q_0\}$. Estos conjuntos así definidos son de utilidad para abordar diversos problema en análisis y tienen muchas propiedades importantes entre las cuales nos interesa destacar las dos siguientes:

(i) las familias $\{Q_{j,\vec{k}} : \vec{k} \in \mathbb{Z}^n\}$ con $j \in \mathbb{Z}$ están encajadas y cubren todo el espacio $\mathbb{R}^n$;

(ii) existen dos constantes positivas y finitas a y b tales que para cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$ se tiene que $B(x, a(1/2)^j) \subseteq Q_{j,\vec{k}} \subseteq B(x, b(1/2)^j)$ para algún punto $x \in Q_{j,\vec{k}}$.

La propiedad (ii) vale en particular para nuestro caso tomando, para cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, el punto $x = 2^{-j}(k_1 + 1/2, ..., k_n + 1/2)$ y las constantes $a = 2^{-1}$ y $b = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Nuestro propósito en el presente capítulo es introducir una clase de familias diádicas sobre espacios de tipo homogéneo tal que la familia dada anteriormente sea un caso particular. Dado que nuestro contexto general de espacio de tipo homogéneo carece en principio de estructura algebraica, lo relevante para la definición de esta clase de familias diádicas serán las propiedades geométricas de los objetos que forman tal familia y no la manera de construirlas.

Definición 2.1. Dado un conjunto abierto y acotado E en el espacio métrico (X, d) definimos el radio interior de E, $r_i(E)$, y el radio exterior de E, $r_e(E)$, como $r_i(E) = sup\{r : B_d(x, r) \subseteq E$ para algún $x \in E\}$ y $r_e(E) = inf\{r : E \subseteq B_d(x, r)$ para algún $x \in X\}$.

Notemos que puede ocurrir que $r_e(E) < r_i(E)$. En efecto, consideremos el espacio $X = \mathbb{Z}$ de los enteros con la métrica euclídea. Es claro que el conjunto $E = \{-1\}$ es un conjunto abierto en X y que $r_i(E) = 1$ y $r_e(E) = 0$. El conjunto E contiene un único punto que es un punto aislado en el espacio. En general, vale el siguiente resultado que caracteriza aquellos conjuntos abiertos E tales que $r_e(E) = 0$.

Lema 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y E un conjunto abierto y acotado en X. Entonces $r_e(E) = 0$ si y sólo si el conjunto E consiste de un único punto aislado.*

Demostración. Supongamos que $E = \{x\}$. Luego, $E \subseteq B_d(x, 1/n)$, para cada entero positivo n. De la definición de radio exterior tenemos entonces que $r_e(E) \leq 1/n$ para cada entero positivo n, y esto implica que $r_e(E) = 0$.
Para probar la recíproca debemos mostrar que E tiene un único punto, y que ese punto es aislado en X. Veamos la unicidad. Sean x e y dos puntos en E. Puesto que $r_e(E) = 0$, de la definición de radio exterior tenemos que para cada entero positivo n existe un punto z_n en X tal que $E \subseteq B_d(z_n, 1/n)$. Entonces $d(x, y) \leq d(x, z_n) + d(z_n, y) \leq 2/n$, para cada n. Esto implica que $d(x, y) = 0$ y como d es una métrica resulta $x = y$. Por lo tanto el conjunto E tiene un único punto. Como E es abierto, ese punto es aislado. $\square$

Introducimos ahora lo que entenderemos en este trabajo por familia diádica.

DEFINICIÓN 2.3. **Familias diádicas.** Sea (X, d, μ) un espacio métrico de tipo homogéneo. Decimos que $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ es una familia diádica sobre X con parámetro $\delta \in (0,1)$, brevemente que $\mathcal{D}$ pertenece a $\mathfrak{D}(\delta)$, si cada $\mathcal{D}^j$ es una familia de subconjuntos abiertos Q de X, que llamaremos cubos diádicos de $\mathcal{D}$, tal que

(d.1) *para todo $j \in \mathbb{Z}$ los cubos en $\mathcal{D}^j$ son disjuntos dos a dos;*

(d.2) *para todo $j \in \mathbb{Z}$ la familia $\mathcal{D}^j$ cubre casi todo X en el sentido que $\mu(X - \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j} Q) = 0$;*

(d.3) *si $Q \in \mathcal{D}^j$ y $i < j$, entonces existe un único $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ tal que $Q \subseteq \tilde{Q}$;*

(d.4) *si $Q \in \mathcal{D}^j$ y $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ con $i \leq j$, entonces o bien $Q \subseteq \tilde{Q}$ o $Q \cap \tilde{Q} = \emptyset$;*

(d.5) *existen dos constantes positivas y finitas a_1 y a_2 tales que para cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $Q \in \mathcal{D}^j$ se tiene que $a_1\delta^j \leq r_i(Q)$ y $r_e(Q) \leq a_2\delta^j$.*

Familias de subconjuntos en espacios métricos o casi-métricos con medida que satisfagan *(d.1)* a *(d.4)* pueden ser construidas por un simple proceso de disjunción de bolas (ver por ejemplo [**9**]). Cuando sólo las propiedades de cubrimiento y encaje de los conjuntos diádicos son relevantes tal proceso es adecuado. Más aún, familias de subconjuntos que satisfagan *(d.1)* a *(d.4)* pueden ser utilizadas para construir bases ortonormales para el espacio $L^2(X, \mu)$ (ver [**31**]) y para ello la estructura métrica del espacio no es relevante. Sin embargo, el control métrico sobre los conjuntos diádicos dado en *(d.5)* será central para nuestro propósito de deducir propiedades sobre espacios funcionales a partir de propiedades geométricas de familias diádicas. Esta condición es equivalente a la propiedad (ii) que satisfacen los cubos diádicos usuales de $\mathbb{R}^n$.

Una construcción de subconjuntos abiertos sobre un espacio de tipo homogéneo que satisface la Definición 2.3 fue dada por M. Christ en [**20**]. Lo importante de tal construcción es que demuestra la existencia de familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ sobre cualquier espacio de tipo homogéneo. En la última sección de este capítulo vamos a describir tal construcción y estudiaremos en particular algunas de sus propiedades más importantes. Consideramos ahora varios ejemplos que ayudarán a entender la definición de la clase $\mathfrak{D}(\delta)$.

EJEMPLO 2.4. Sean $X = \mathbb{R}^n$, d la métrica usual y μ la medida de Lebesgue n-dimensional. Para cada número entero j y cada $\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ definimos $Q_{j,\vec{k}}$ como $Q_{j,\vec{k}} = \prod_{i=1}^n I^j_{k_i}$, con $I^j_k = (k2^{-j}, (k+1)2^{-j}), k \in \mathbb{Z}$. De esta manera los conjuntos $Q_{j,\vec{k}}$, $\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ cubren X para cada $j \in \mathbb{Z}$ en el sentido de *(d.2)*. Claramente la familia de todos los $Q_{j,\vec{k}}$ satisface *(d.1)*, *(d.3)* y *(d.4)*. Además, tomando $x_{j,\vec{k}} = 2^{-j}(k_1 + 1/2, ..., k_n + 1/2)$, $j \in \mathbb{Z}$ y $\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ tenemos que $B_d(x_{j,\vec{k}}, 2^{-j-1}) \subseteq Q_{j,\vec{k}} \subseteq$

$B_d(x_{j,\vec{k}}, \frac{\sqrt{n}}{2}2^{-j})$. Luego, con $a_1 = 1/2$ y $a_2 = \frac{\sqrt{n}}{2}$ se cumple también la condición *(d.5)* y por lo tanto la familia de los conjuntos $Q_{j,\vec{k}}$ con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}^n$, pertenece a la clase $\mathfrak{D}(1/2)$.

Ejemplo 2.5. Como un ejemplo elemental de familia diádica en un espacio acotado, tomemos $X = [0,1]^2$, el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$ equipado con d, la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ restringida a X y μ la medida de Lebesgue bi-dimensional restringida a X. Consideramos para $j \leq 0$ la familia $\mathcal{D}^j = \{X\}$. Para $j \geq 1$ y cada $\vec{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ definimos el conjunto $U_{j,\vec{k}} = Q_{j,\vec{k}} \cap X$, donde $Q_{j,\vec{k}}$ es el cubo bi-dimensional diádico del Ejemplo 2.4. Consideramos entonces para estos valores de j la familia $\mathcal{D}^j = \{U_{j,\vec{k}} : U_{j,\vec{k}} \neq \emptyset\}$. Claramente $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ pertenece a la clase $\mathfrak{D}(1/2)$.

Ejemplo 2.6. Sea $X = \mathbb{Z}$, el conjunto de todos los enteros, d la distancia usual y μ la medida de contar puntos. Definimos para cada entero $j \geq 0$ la familia $\mathcal{D}^j = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}\}$. Para $j < 0$ y $k \in \mathbb{Z}$ definimos el conjunto $S_{j,k} = \{z \in \mathbb{Z} : k2^{-j} \leq z < (k+1)2^{-j}\}$. Notemos que cada $S_{j,k}$ es la intersección del espacio $\mathbb{Z}$ con el cubo diádico usual $Q_{j,k}$ definido en la introducción de la presente sección para el caso unidimensional. Es fácil ver que la familia $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ satisface las propiedades *(d.1)* a *(d.4)*. Más aún, vale una condición más fuerte que *(d.2)*. En efecto, $X = \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j} Q$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\mathcal{D}$ satisface la condición *(d.5)* con $\delta = 1/2$. Como para $j \geq 0$ cada cubo diádico en $\mathcal{D}^j$ es un conjunto con un único punto, la propiedad *(d.5)* vale para estos casos con cualquier valor de a_1 y a_2. Por otro lado, para cada entero $j < 0$ se tiene que $2^{-j}(1/2) \in \mathbb{Z}$. Entonces para cada $k \in \mathbb{Z}$ y cada entero negativo j tenemos que el punto $x_{j,k} = 2^{-j}(k + 1/2)$ pertenece al conjunto $S_{j,k}$. Tomando luego $a_1 = 1/2$ y $a_2 = 1$ concluimos que $\mathcal{D}$ es una familia diádica en $\mathfrak{D}(1/2)$.

Ejemplo 2.7. Sea $X = \mathbb{Z} \cup [0, 1/2)$ equipado con la distancia usual y la medida de contar puntos sobre $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y la que es dos veces la longitud sobre el intervalo [0,1/2). Más presisamente, si E es un conjunto de Borel en X, $\mu(E) = \#(E\cap(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))+2m(E\cap[0,1/2))$ donde $\#$ es el cardinal y m es la medida de Lebesgue unidimensional. Los conjuntos diádicos en X los definimos como la intersección de los intervalos diádicos usuales en $\mathbb{R}$ con X. Esto es, si $I_k^j = (\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$, entonces los *cubos diádicos* en X son los conjuntos $Q_k^j = I_k^j \cap X, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$. Si definimos $\mathcal{D}^j$ como la familia $\{Q_k^j : k \in \mathbb{Z}\}$, entonces es fácil ver que tales conjuntos Q_k^j forman una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(1/2)$. En esta caso se tiene que $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}^1$ y $\mathcal{D}^j \neq \mathcal{D}^{j+1}$ para todo $j \neq 0$. Además, algunas regiones del espacio tienen resolución ilimitada mientras otras regiones se reducen a puntos para valores de j suficientemente grandes.

EJEMPLO 2.8. Para dar un ejemplo de familia diádica en el contexto de los fractales, consideremos $X = T$ una región triangular equilátera de lado unidad en el plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la métrica usual d en $\mathbb{R}^2$ restringida a X y μ la medida de Lebesgue bidimensional restringida a T. Si $t_i, i \in \{1, 2, 3\}$ son los puntos medios de los lados de T, podemos obtener una subdivisión de T en 4 regiones triangulares congruentes. Llamando T_1 a la región triangular que se forma al unir dos a dos los puntos $t_i, i \in \{1, 2, 3\}$, el conjunto $T \setminus T_1$ es unión de tres regiones triangulares $T_i, i \in \{2, 3, 4\}$ congruentes a T_1. Siguiendo este algoritmo construimos una familia diádica sobre X. Para todo entero $j \leq 0$ consideramos $\mathcal{D}^j = \{X\}$. Luego definimos $\mathcal{D}^1$ como la familia de los subconjuntos $T_{1,i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, donde cada $T_{1,i}$ es el interior con respecto a $\mathbb{R}^2$ de la región triangular T_i que se obtiene por el algoritmo anterior a partir de $T = X$. En general, para $j \geq 2$ definimos $\mathcal{D}^j$ como la familia $\{T_{j,i} : i = 1, ..., 4^j\}$ de los interiores de todos los triángulos obtenidos al aplicar el algoritmo anterior a cada triángulo en $\mathcal{D}^{j-1}$. Entonces la familia $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ pertenece a la clase $\mathfrak{D}(1/2)$. En efecto, de la propia construcción de las familias $\mathcal{D}^j$ se tiene que *(d.1)* a *(d.4)* valen. Por otro lado, no es dificil mostrar que cada uno de los triángulos de la familia diádica contiene una bola centrada en el baricentro de radio $\frac{1}{5}\frac{1}{2^j}$ y está contenido en otra bola concentrica de radio $\frac{5}{3}\frac{1}{2^j}$. Notemos por último que la familia $\mathcal{D} \cap \mathfrak{T}$ es también una familia diádica para el espacio de tipo homogéneo dado por el triangulo de Sierpinsky $\mathfrak{T}$ como es considerado en [**42**].

EJEMPLO 2.9. Sean $X = \mathbb{R}^2$, d la métrica usual y μ la medida de Lebesgue bidimensional. Consideremos el conjunto $V = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para cada entero j y cada $\vec{k} \in \mathbb{Z}^2$ definimos los conjuntos $V_{j,\vec{k}} = A^{-j}(V + \vec{k}) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = A^{-j}(x + \vec{k}), x \in V\}$. Notemos que para $j = 0$ cada conjunto $V_{0,\vec{k}}$ coincide con el conjunto $Q_{0,\vec{k}}$ del Ejemplo 2.4 para $n = 2$ y que esto no pasa para ningún otro $j \neq 0$. Es fácil ver que la familia $\mathcal{D}$ de todos conjuntos $V_{j,\vec{k}}$, $j \in \mathbb{Z}, \vec{k} \in \mathbb{Z}^2$ satisface las propiedades *(d.1)* a *(d.4)*. Sin embargo, para cada $0 < \delta < 1$ se tiene que $\mathcal{D}$ no pertenece a la clase $\mathcal{D}(\delta)$. En efecto, la condición *(d.5)* no se cumple para ningún δ con la distancia euclídea. Para mostrar tal afirmación, notemos que cada conjunto $V_{j,\vec{k}}$ con $j \in \mathbb{Z}$ y $\vec{k} \in \mathbb{Z}^2$ es un rectángulo en el plano $\mathbb{R}^2$ con base de longitud 2^{-j} y altura 4^{-j}. Por lo tanto el cociente entre $r_e(V_{j,\vec{k}})$ y $r_i(V_{j,\vec{k}})$ no puede estar acotado si usamos bolas euclídeas. La real deficiencia de tal familia se debe a que la métrica subyacente en el espacio no es compatible con la dilatación utilizada dada por la matriz A. Aquí se pone de manifiesto la importancia de la estructura métrica en la Definición 2.3. En efecto, cada $V_{j,\vec{k}}$ es una bola de radio 2^{-j-1} con la métrica parabólica

$$d_p(x,y) = d_p((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = max\{|x_1-y_1|,\sqrt{|x_2-y_2|}\}.$$

Por consiguiente, los conjuntos $V_{j,\vec{k}}$ con $j \in \mathbb{Z}$ y $\vec{k} \in \mathbb{Z}^2$ forman una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(1/2)$ para el espacio $(\mathbb{R}^2, d_p, \mu)$

Ejemplo 2.10. Para el presente ejemplo necesitaremos de la siguiente definición. Diremos que una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es bi-lipchitz si existen dos constantes positivas y finitas c_1 yc_2 tales que $c_1|x-y| \leq |F(x)-F(y)| \leq c_2|x-y|$, para todo x e y en $\mathbb{R}$.

Es claro de la desigualdad derecha de la propia definición, que toda función bi-lipchitz F es continua. Por otro lado, de la desigualdad izquierda se tiene que F es inyectiva. En efecto, si $F(x) = F(y)$ entonces $c_1|x-y| \leq |F(x)-F(y)| = 0$ y por lo tanto $x = y$. De estas dos propiedades, inyectividad y continuidad, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.11. *Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función bi-lipchitz, entonces F es estrictamente monótona; esto es, $F(x) < F(y)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$ con $x < y$ o $F(x) > F(y)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$ con $x < y$.*

Demostración. Sea n un entero positivo y consideremos el intervalo real cerrado $J_n = [-n, n]$. Como F es inyectiva tenemos que $F(-n) \neq F(n)$; esto es, $F(-n) < F(n)$ o $F(n) < F(-n)$. Supongamos primero el caso $F(-n) < F(n)$. Valen entonces las siguientes dos propiedades.

(i) $F(-n) < F(z) < F(n)$, para todo número real z tal que $-n < z < n$.
(ii) $F(x) < F(y)$, para todo par de números reales x e y tal que $-n < x < y < n$.

En efecto, supongamos que existe $z \in (-n, n)$ tal que $F(-n) > F(z)$ o $F(z) > F(n)$. Entonces, de la continuidad de F y una simple aplicación del teorema de Bolzano, existen puntos $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ en el intervalo $(-n, n)$ con $x_1 \neq x_2$ y $x_3 \neq x_4$ tales que $F(x_1) = F(x_2)$ y $F(x_3) = F(x_4)$, contradiciendo la inyectividad de F. Por lo tanto, la propiedad (i) vale. La prueba de la propiedad (ii) es ahora una consecuencia de (i). En efecto, usando la propiedad (i) para el intervalo $[x, n]$ tenemos que $F(x) < F(y) < F(n)$. Esto es, F es monótona creciente en el intervalo $[-n, n]$. Puesto que n es arbitrario, F es monótona creciente en $\mathbb{R}$. De forma análoga, si $F(n) < F(-n)$, se cumplen entonces las siguientes propiedades.

(iii) $F(-n) > F(z) > F(n)$, para todo número real z tal que $-n < z < n$,
(iv) $F(x) > F(y)$, para todo par de números reales x e y tal que $-n < x < y < n$,

y resulta que F es monótona decreciente en $\mathbb{R}$ □

Veamos ahora una manera de construir familias diádicas a partir de funciones bi-Lipschitz.

Sean $X = \mathbb{R}$, d y μ la métrica y la medida usual respectivamente. Sea F un mapeo sobreyectivo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es bi-Lipschitz. Consideremos para cada $j \in \mathbb{Z}$ la familia $\mathcal{D}^j = \{F(I_{j,k}) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$, donde $I_{j,k}$ representa el intervalo diádico $(k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$. Veamos que $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ satisface la Definición 2.3. Para ello debemos probar que *(d.1)* a *(d.5)* valen. Esto será una consecuencia de que la familia de todos los intervalos diádicos $I_{j,k}$ con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$ pertenece a la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ y de que toda función bi-Lipschitz es inyectiva. Comencemos probando *(d.1)*. Fijemos los enteros j, k_1 y k_2 con $k_1 \neq k_2$. Luego, dado que los intervalos diádicos satisfacen *(d.1)*, tenemos que $I_{j,k_1} \cap I_{j,k_2} = \emptyset$. Por la inyectividad de F obtenemos entonces que $F(I_{j,k_1}) \cap F(I_{j,k_2}) = \emptyset$ y *(d.1)* queda demostrado.

Notemos por otra parte que para cada entero j, dada la definición de los intervalos diádicos $I_{j,k}$, tenemos que $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} I_{j,k} = \{k2^{-j} : k \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto numerable. Como F es inyectiva, resulta que $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} F(I_{j,k}) = \{F(k2^{-j}) : k \in \mathbb{Z}\}$ también es numerable con lo cual $\mu(\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} F(I_{j,k})) = 0$ y *(d.2)* vale.

Para probar *(d.3)* tomemos un cubo diádico $Q \in \mathcal{D}^j$ y un entero $i < j$. De la definición de $\mathcal{D}^j$ tenemos que $Q = F(I_{j,k})$ para algún entero k. Luego, puesto que los intervalos diádicos satisfacen *(d.3)*, existe un único intervalo I_{i,k_1} tal que $I_{j,k} \subseteq I_{i,k_1}$. Sea $\tilde{Q} = F(I_{i,k_1}) \in \mathcal{D}^i$. Entonces $Q \subseteq \tilde{Q}$. En efecto, sea $y \in Q, y = F(x)$ para $x \in I_{j,k} \subseteq I_{i,k_1}$. De la definición de $\tilde{Q}$ tenemos que $y = F(x) \in \tilde{Q}$. La unicidad de $\tilde{Q}$ es una simple consecuencia de *(d.1)* para la familia $\mathcal{D}^i$.

Probamos ahora *(d.4)*. Sean $Q \in \mathcal{D}^j$ y $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ con $i \leq j$. Supongamos que $Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset$, esto es, existe un punto $x \in Q \cap \tilde{Q}$. De la definición de las familias $\mathcal{D}^i$ y $\mathcal{D}^j$, existen los puntos $y_1 \in I_{j,k}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ e $y_2 \in I_{i,k'}$ para algún $k' \in \mathbb{Z}$ tales que $F(y_1) = x = F(y_2)$. Como F es inyectiva, entonces $y_1 = y_2$, es decir, $I_{j,k} \cap I_{i,k'} \neq \emptyset$. Puesto que la familia de intervalos diádicos satisface *(d.4)*, entonces $I_{j,k} \subseteq I_{i,k'}$. De la definición de imágen de un conjunto via una función obtenemos entonces que $F(I_{j,k}) \subseteq F(I_{i,k'})$ y *(d.4)* queda demostrado.

Finalmente probamos *(d.5)*. La validéz de tal condición será una consecuencia de la propiedad de monotonía de la función F. En efecto, por la monotonía de F tenemos que $F(I_{j,k}) = \{x \in \mathbb{R} : F(k2^{-j}) < x < F((k+1)2^{-j})\}$ ó $F(I_{j,k}) = \{x \in \mathbb{R} : F((k+1)2^{-j}) < x < F(k2^{-j})\}$, cualesquiera sean j y k en $\mathbb{Z}$. Luego, para j y k en $\mathbb{Z}$, usando que F es bi-lipchitz obtenemos que $\frac{c_1}{2}2^{-j} \leq \frac{|F((k+1)2^{-j})-F(k2^{-j})|}{2} \leq \frac{c_2}{2}2^{-j}$ y por lo tanto

$r_i(F(I_{j,k})) \geq \frac{c_1}{2}2^{-j}$ y $r_e(F(I_{j,k})) \leq \frac{c_2}{2}2^{-j}$. Por lo tanto *(d.5)* se satisface con $\delta = 1/2$ tomando $a_1 = \frac{c_1}{2}$ y $a_2 = \frac{c_2}{2}$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ pertenece a la clase $\mathfrak{D}(1/2)$.

2.2. Propiedades de las familias diádicas

En la presente sección nos abocaremos a deducir propiedades de las familias diádicas en la clase $\mathcal{D}(\delta)$ a partir de su definición. Estas propiedades serán de utilidad para lo que sigue del trabajo y el análisis de las mismas nos ayudará a entender más la Definición 2.3. Comenzamos por explorar la condición *(d.5)*. Como ya hemos mencionado, esta propiedad será de suma importancia para nuestro propósito de *hacer análisis* a partir de la geometría de las familias diádicas en espacios de tipo homogéneo. El aporte central que *(d.5)* le otorga a los cubos diádicos es el de dotarlos a todos de cierta regularidad en su forma. Para precisar esta idea introducimos primero la siguiente definición.

Definición 2.12. Dado un conjunto abierto y acotado E en el espacio métrico (X, d) definimos su excentricidad como $\varepsilon(E) = \frac{r_e(E)}{r_i(E)}$, donde $r_i(E)$ y $r_e(E)$ son los radios interior y exterior respectivamente del conjunto E. Notemos que como E es abierto, $r_i(E) > 0$.

Proposición 2.13. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathcal{D}(\delta)$. Entonces*

- *(a) para cada cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ se tiene que $\varepsilon(Q) \leq \frac{a_2}{a_1}$, donde a_1 y a_2 son las constantes en (d.5);*
- *(b) para cada cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ existe un punto $x \in Q$ tal que $B_d(x, \frac{a_1}{2}\delta^j) \subseteq Q \subseteq B_d(x, 2a_2\delta^j)$.*

Demostración. Primero notemos que (a) sigue directamente de *(d.5)*. Para probar (b) notemos que de *(d.5)*, existen un punto x en Q y un punto y en X tal que $B_d(x, \frac{a_1}{2}\delta^j) \subseteq Q \subseteq B_d(y, a_2\delta^j)$. Por lo tanto $B_d(x, \frac{a_1}{2}\delta^j) \subseteq Q \subseteq B_d(y, a_2\delta^j) \subseteq B_d(x, 2a_2\delta^j)$. □

Destaquemos que el punto $x \in Q$ dado en (b) en la proposición anterior puede no ser único. Será importante en algunas ocasiones identificar uno de éstos puntos centrales para cada cubo diádico de la familia $\mathcal{D}$. Para tal fin damos la siguiente definición.

Definición 2.14. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos una función $\mathcal{P}^j$, que llamaremos *función punto central de nivel* j, como $\mathcal{P}^j : \mathcal{D}^j \longrightarrow X$ dada por $\mathcal{P}^j(Q) = x_Q \in Q$ tal que x_Q satisface que $B_d(x_Q, \frac{a_1}{2}\delta^j) \subseteq Q \subseteq B_d(x_Q, 2a_2\delta^j)$.

Se sigue de la misma condición *(d.5)* que para cada entero j la *función punto central de nivel* j, $\mathcal{P}^j$, está bien definida. El siguiente resultado contiene las principales propiedades de esta *función punto central de nivel* j.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sean* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo,* $\mathcal{D}$ *una familia diádica en la clase* $\mathfrak{D}(\delta)$ *y* $\{\mathcal{P}^j : j \in \mathbb{Z}\}$ *una familia de funciones punto central. Entonces*

(1) el conjunto $\mathcal{P}^j(\mathcal{D}^j)$ *es* $\frac{a_1}{2}\delta^j$*-disperso, para cada* $j \in \mathbb{Z}$*;*

(2) el conjunto $\mathcal{P} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}^j(\mathcal{D}^j)$ *es denso en* X*.*

DEMOSTRACIÓN. Primero probamos (1). Sean $j \in \mathbb{Z}$ y x e y dos puntos dados en $\mathcal{P}^j(\mathcal{D}^j)$, con $x \neq y$. Sean $Q_1 = (\mathcal{P}^j)^{-1}(x)$ y $Q_2 = (\mathcal{P}^j)^{-1}(y)$. Notemos que Q_1 y Q_2 pertenecen a $\mathcal{D}^j$ y que $\mathcal{P}_j$ es uno a uno. Luego, de *(d.1)*, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Supongamos que $d(x, y) < \frac{a_1}{2}\delta^j$. Entonces $y \in B(x, \frac{a_1}{2}\delta^j)$ y por lo tanto $y \in Q_1$, que es una contradicción. Por lo tanto $d(x, y) \geq \frac{a_1}{2}\delta^j$ y $\mathcal{P}^j(\mathcal{D}^j)$ es $\frac{a_1}{2}\delta^j$-disperso.

Para probar (2), tomemos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Fijemos $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2a_2\delta^j < \varepsilon/2$. Supongamos primero que $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j} Q$ y tomemos Q, el único cubo diádico en $\mathcal{D}^j$ tal que $x \in Q$. Entonces, de *(d.5)*, tenemos que $x \in B(\mathcal{P}^j(Q), 2a_2\delta^j)$ y por lo tanto, de la elección del entero j, tenemos que $d(x, \mathcal{P}^j(Q)) < \varepsilon$. Por otro lado, si $x \in X \setminus \bigcup_{Q\in\mathcal{D}^j} Q$ entonces $x \in \partial(Q)$ para algún Q en $\mathcal{D}^j$. Puesto que las bolas miden positivo, de *(d.2)* se sigue que $B_d(x, \varepsilon/2) \cap Q' \neq \emptyset$ para algún $Q' \in \mathcal{D}^j$ tal que $\overline{Q} \cap \overline{Q'} \neq \emptyset$. Esto es, existe $y \in Q'$ tal que $d(x, y) < \varepsilon/2$. Luego, de *(d.5)* y la elección de j obtenemos que $d(x, \mathcal{P}^j(Q')) \leq d(x, y) + d(y, \mathcal{P}^j(Q')) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$. □

Finalizamos esta sección enunciando y demostrando las propiedades más importantes sobre familias diádicas en $\mathfrak{D}(\delta)$ que serán usadas en lo que sigue del trabajo. Como veremos en su demostración, la condición *(d.5)* vuelve a ser una propiedad fundamental.

PROPOSICIÓN 2.16. *Sea* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo y* $\mathcal{D}$ *una familia diádica en* $\mathfrak{D}(\delta)$*. Entonces*

(d.6) existe un entero positivo N *que depende sólo de la constante de duplicación tal que para todo* $j \in \mathbb{Z}$ *y todo* $Q \in \mathcal{D}^j$ *las desigualdades* $1 \leq \#(\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}) \leq N$ *valen;*

(d.7) para todo cubo diádico Q *en* $\mathcal{D}$ *se tiene que* $\mu(\partial Q) = 0$*, donde* ∂Q *es el borde de* Q*;*

(d.8) existe una constante positiva y finita C *tal que para cada* $j \in \mathbb{Z}$ *y todo cubo diádico* Q *en* $\mathcal{D}^j$ *se tiene que* $\mu(Q) \leq C\mu(Q')$ *para todo* Q' *en* $\mathcal{D}^{j+1}$ *con* $Q' \subseteq Q$*;*

(d.9) X *es acotado si y sólo si existe* Q *en* $\mathcal{D}$ *tal que* $X = Q$*;*

(d.10) para todo cubo diádico Q *en* $\mathcal{D}$ *se tiene que* $E = Q \setminus \bigcup_{Q'\in\mathcal{D}} \partial(Q')$ *es denso en* Q*;*

(d.11) existe una constante positiva y finita $\tilde{C}$ *tal que para todo cubo diádico* Q *en* $\mathcal{D}$ *se tiene que* (Q, d_Q, μ_Q) *es un espacio de tipo homogéneo con constante de duplicación* $\tilde{C}$ *, donde* d_Q *y* μ_Q *son las restricciones de* d *y* μ *a* Q *respectivamente.*

Demostración. Comenzamos probando *(d.6)*. Sean $j \in \mathbb{Z}$ y $Q \in \mathcal{D}^j$. Fijemos dos funciones *punto central* $\mathcal{P}^j : \mathcal{D}^j \longrightarrow X$ y $\mathcal{P}^{j+1} : \mathcal{D}^{j+1} \longrightarrow X$. Denotemos con x_Q la imágen del cubo diádico Q via la función $\mathcal{P}^j$ y escribamos $x_{Q'} = \mathcal{P}^{j+1}(Q')$ para cada $Q' \in \mathcal{D}^{j+1}$. De la Proposición 2.15 tenemos que el conjunto $E = \{\mathcal{P}^{j+1}(Q') : Q' \subseteq Q\}$ es $a_1\delta^{j+1}$-disperso. Sean $\tilde{N}$ la constante de homogeneidad de X y m el primer entero positivo tal que $2a_2\delta^j \leq 2^m a_1 \delta^{j+1}$. Luego, del inciso (b) en el Proposición 2.13, la elección para m y el Teorema 1.3 obtenemos que

$$\begin{aligned} \#(E) &= \#(E \cap B(x_Q, 2a_2\delta^j)) \\ &= \#(E \cap B(x_Q, 2^m a_1 \delta^{j+1})) \leq \tilde{N}^m. \end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{P}^{j+1} : \mathcal{D}^{j+1} \longrightarrow \mathcal{P}^{j+1}(\mathcal{D}^{j+1})$ es una biyección, tomando $N = \tilde{N}^m$ tenemos probado *(d.6)*.

Para probar *(d.7)* notemos primero que para todo cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ se tiene que $\partial(Q) = \overline{Q} \setminus \overset{o}{Q} = \overline{Q} \setminus Q$ y por lo tanto $\partial(Q)$ es medible. Por otro lado, por *(d.2)*, para cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $Q \in \mathcal{D}^j$ obtenemos que $\partial(Q) \subseteq X \setminus (\bigcup_{Q' \in \mathcal{D}^j} Q')$ y, nuevamente por *(d.2)* tenemos *(d.7)*.

Probamos ahora *(d.8)*. Sean $j \in \mathbb{Z}$, Q en $\mathcal{D}^j$ y Q' en $\mathcal{D}^{j+1}$ tal que $Q' \subseteq Q$. Fijemos dos funciones punto central $\mathcal{P}^j$ y $\mathcal{P}^{j+1}$ y escribamos $x_Q = \mathcal{P}^j(Q)$ y $x_{Q'} = \mathcal{P}^{j+1}(Q')$ para cada $Q' \in \mathcal{D}^{j+1}$. Elijamos m como el primer entero positivo tal que $\frac{4a_2}{a_1\delta} \leq 2^m$. Entonces $B(x_Q, 2a_2\delta^j) \subseteq B(x_{Q'}, 2^m a_1 \delta^{j+1})$. En efecto, si $z \in B(x_Q, 2a_2\delta^j)$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(z, x_{Q'}) &\leq d(z, x_Q) + d(x_Q, x_{Q'}) \\ &\leq 4a_2\delta \\ &\leq 2^m a_1 \delta^{j+1}. \end{aligned}$$

Luego, aplicando m veces la condición de duplicación para la medida μ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(Q) &\leq \mu(B(x_Q, 2a_2\delta^j)) \\ &\leq \mu(B(x_{Q'}, 2^m a_1 \delta^{j+1})) \\ &\leq C^m \mu(B(x_{Q'}, a_1\delta^{j+1})) \\ &\leq C^m \mu(Q'). \end{aligned}$$

Para la prueba de *(d.9)* notemos que, por la definición de acotación, la definición de función punto central, el hecho de ser $\delta < 1$ y *(d.5)*, tenemos que cada una de las siguientes afirmaciones implica la que sigue

(a) X es acotado;

(b) existe un punto x en X y un número positivo r tal que $X = B(x, r)$;

(c) existen $j \in \mathbb{Z}$, una función punto central $\mathcal{P}^j : \mathcal{D}^j \longrightarrow X$ y un cubo diádico Q en $\mathcal{D}^j$ tal que $X = B(x,r) \subseteq B(\mathcal{P}^j(Q), a_1\delta^j) \subseteq Q$, donde a_1 es la constante en *(d.5)*;

(d) $X = Q \in \mathcal{D}^j$.

Además, por *(d.5)*, tenemos que (d) implica (a) y *(d.9)* queda demostrada.
Para probar *(d.10)* supongamos por el absurdo que E no es denso en Q. Luego, existen un punto $x \in Q$ y un número positivo r tal que $B_d(x,r) \cap E = \emptyset$. Esto implica que

$$B_d(x,r) \cap Q \subseteq Q \setminus E = Q \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{D}} \partial(Q'). \tag{2.1}$$

Como Q es abierto, existe un úmero positivo $r_0 < r$ tal que $B_d(x,r_0) \subseteq B_d(x,r) \cap Q$ y puesto que las bolas miden positivo tenemos que $\mu(B_d(x,r_0)) > 0$. Por otro lado, por ser $\mathcal{D}$ una familia numerable y *(d.7)*, obtenemos de (2.1) que $\mu(B_d(x,r_0)) \leq \mu(Q \cap \bigcup_{Q' \in \mathcal{D}} \partial(Q')) = 0$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto E es denso en Q.
Finalmente probamos *(d.11)*. Sean $j \in \mathbb{Z}$ y Q en $\mathcal{D}^j$. Dado que d_Q es la restricción de una métrica, resulta ser d_Q misma una métrica. Como las bolas son abiertas y acotadas, tenemos que $0 < \mu(B_{d_Q}(x,r)) < \infty$, para todo x en Q y r positivo. Sólo nos resta ver que μ_Q satisface la condición de duplicación. Probemos primero dicho condición sobre bolas centradas en puntos del conjunto $E = Q \setminus \bigcup_{Q' \in \mathcal{D}} \partial(Q')$. El caso general lo obtendremos luego por *(d.10)*. Sean entonces $x \in E$ y $r > 0$. Si $r \geq 4a_2\delta^j$, donde a_2 es la constante dada en *(d.5)*, entonces $B_{d_Q}(x,r) = B_{d_Q}(x,2r) = Q$ y la condición de duplicación vale trivialmente. Supongamos entonces que $0 < r < 4a_2\delta^j$. Tomemos $j_0 \geq j$ tal que $4a_2\delta^{j_0+1} \leq r < 4a_2\delta^{j_0}$ y fijemos una función punto central $\mathcal{P}^{j_0+1} : \mathcal{D}^{j_0+1} \longrightarrow X$. Sea $Q' \in \mathcal{D}^{j_0+1}$ el único cubo diádico tal que $x \in Q' \subseteq Q$ y escribamos $x_{Q'} = \mathcal{P}^{j_0+1}(Q')$. Entonces, de la definición de $\mathcal{P}^{j_0+1}$, el inciso (b) en la Proposición 2.13 para el cubo Q', la elección de j_0 y *(d.5)* tenemos que

$$B_d(x_{Q'}, a_1\delta^{j_0+1}) \subseteq Q' \subseteq B_{d_Q}(x,r), \tag{2.2}$$

donde a_1 es la constante en *(d.5)*. Por otro lado, usado la cota superior para r y la elección de j_0, tenemos que si $z \in B_{d_Q}(x,2r)$ entonces

$$\begin{aligned} d(z,x_{Q'}) &\leq d(z,x) + d(x,x_{Q'}) \\ &\leq 2r + 2a_2\delta^{j_0+1} \\ &\leq 8a_2\delta^{j_0} + 2a_2\delta^{j_0+1} \\ &= (\frac{8}{\delta} + 2)\frac{a_2}{a_1}a_1\delta^{j_0+1}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$B_{d_Q}(x,2r) \subseteq B(x_{Q'}, (\frac{8}{\delta}+2)\frac{a_2}{a_1}a_1\delta^{j_0+1}).$$

Sea m el primer entero positivo tal que $(\frac{8}{\delta}+2)\frac{a_2}{a_1} \leq 2^m$. Notar que m no depende de Q. Luego de la última inclusión, de (2.2) y la condición de duplicación para bolas con respecto a la métrica d obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu(B_{d_Q}(x,2r)) &\leq \mu(B(x_{Q'}, 2^m a_1\delta^{j_0+1}))\\ &\leq C^m\mu(B(x_{Q'}, a_1\delta^{j_0+1}))\\ &\leq C^m\mu(B_{d_Q}(x,r)),\end{aligned}$$

donde C es la constante de duplicación para (X,d,μ). Veamos ahora que la condición de duplicación vale en general para cualquier bola $B_{d_Q}(y,r)$ con $y \in Q$ y $r > 0$. Puesto que, por *(d.10)*, E es denso en Q podemos tomar $x \in E \cap B_{d_Q}(x,r)$ tal que $d(x,y) < r/2$. Entonces tenemos que

$$B_{d_Q}(x,r/2) \subseteq B_{d_Q}(y,r) \qquad \text{y} \qquad B_{d_Q}(y,2r) \subseteq B_{d_Q}(x,5r/2).$$

Luego, de estas últimas inclusiones y la condición de duplicación sobre las bolas centradas en puntos de E tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(B_{d_Q}(y,2r)) &\leq \mu(B_{d_Q}(x,5r/2))\\ &\leq C^3\mu(B_{d_Q}(x,r/2))\\ &\leq C^3\mu(B_{d_Q}(y,r)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, (Q,d_Q,μ_Q) es un espacio de tipo homogéneo con constante de duplicación $\tilde{C} = max\{C^3, C^m\}$. □

2.3. La subfamilia diádica con descendencia no trivial

El Ejemplo 2.7 dado en la sección anterior muestra que pueden darse familias diádicas $\mathcal{D}$ tales que en algunas regiones o en algunas escalas el espacio pueda ser dividido en piezas cada vez más y más pequeñas y tal que en algunas regiones refinar escalas no implique un real refinamiento del espacio. Para nuestro propósito de estudiar propiedades de espacios funcionales via wavelets de tipo Haar será necesaria la identificación de aquellas escalas y lugares de la partición donde el refinamiento de escala implique el refinamiento del espacio. Esto induce a la definición de la subfamilia de $\mathcal{D}$ que contenga todos aquellos cubos diádicos en $\mathcal{D}$ con descendencia no trivial.

DEFINICIÓN 2.17. **La subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$ con descendencia no trivial.** Para $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$ consideramos las familias $\tilde{\mathcal{D}}^j = \{Q \in \mathcal{D}^j : \#(\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}) >$

$1\}$. Definimos la subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$ de todos aquellos cubos diádicos en $\mathcal{D}$ con descendencia no trivial como $\tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\tilde{\mathcal{D}}^j$.

De la definición de la subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ es claro que ésta identifica las regiones donde el espacio es refinado. Esto es, $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ si y sólo si $\#(\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}) \geq 2$. El siguiente resultado muestra que también identifica las escalas donde el refinamiento del espacio es dado.

PROPOSICIÓN 2.18. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$ dado. Entonces*

(d.12) las familias $\tilde{\mathcal{D}}^j$, $j \in \mathbb{Z}$ son disjuntas dos a dos;

(d.13) la función $\mathcal{J} : \tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $Q \mapsto \mathcal{J}(Q)$ si $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^{\mathcal{J}(Q)}$ está bien definida.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que como *(d.13)* es una inmediata consecuencia de *(d.12)* sólo tenemos que probar *(d.12)*.
Sean j e i dos números en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ con $j \neq i$. Si supongamos que $j < i$, es claro por la definición de $\tilde{\mathcal{D}}^i$, que si $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^i$ entonces $Q \notin \tilde{\mathcal{D}}^j$. Por otro lado, para todo cubo diádico $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^j$, de *(d.1)* tenemos que $Q \notin \mathcal{D}^{j+1}$. Más aún, $Q \notin \mathcal{D}^{j+n}$ para cualquier entero positivo n y por lo tanto $Q \notin \tilde{\mathcal{D}}^{j+n}$. Dado que existe un entero positivo n tal que $j + n = i$ obtenemos que $Q \notin \mathcal{D}^i$ si $Q \in \mathcal{D}^j$, con lo cual concluímos la prueba. □

Nos disponemos ahora a dar una propiedad importante de la subfamilia $\tilde{\mathcal{D}}$. Recordemos que un punto x en el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) es un átomo en X si $\mu(\{x\}) > 0$. Un conocido resultado de Macías y Segovia (ver [**43**]) da una caracterización de átomos en términos de la métrica d en un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ). Más precisamente ellos prueban que el punto x es un átomo en X si y sólo si existe una constante positiva y finita r tal que $B(x, r) \cap X = \{x\}$. Usaremos esta caracterización para probar que la subfamilia con descendencia no trivial $\tilde{\mathcal{D}}$ de la familia diádica $\mathcal{D}$ identifica átomos. En efecto, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.19. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en $\mathfrak{D}(\delta)$. Sea $\tilde{\mathcal{D}}$ la subfamilia con descendencia no trivial de $\mathcal{D}$. Entonces*

$$\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}} \bigcup \{\{x\} : \mu(x) > 0\},$$

donde la unión es disjunta.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que $\mathcal{D} \subseteq \tilde{\mathcal{D}} \bigcup \{\{x\} : \mu(x) > 0\}$. Sea Q un cubo diádico en $\mathcal{D}$. Si Q pertenece a $\tilde{\mathcal{D}}$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que Q no pertenece a $\tilde{\mathcal{D}}$. Sea j un entero tal que $Q \in \mathcal{D}^j$. Por la definición de $\tilde{\mathcal{D}}$ y puesto que $Q \notin \tilde{\mathcal{D}}$ tenemos que $Q \in \mathcal{D}^{j+n}$ para todo número natural n. Esto implica que para todo entero positivo n y todo cubo diádico $Q' \in \mathcal{D}^{j+n}$ con $Q' \subseteq Q$ se tiene que $Q' = Q$. Fijemos, para cada entero positivo n una función punto central $\mathcal{P}^{j+n} : \mathcal{D}^{j+n} \longrightarrow X$. Escribamos $x_n = \mathcal{P}^{j+n}(Q)$ y consideremos la bola $B_n = B_d(x_n, 2a_2\delta^{j+n})$, donde a_2 es la constante dada en *(d.5)* para el cubo Q. Entonces, del inciso (b) de la Proposición 2.13 tenemos que $Q \subseteq B_n$ para cada n. Luego, $r_e(Q) \leq r_e(B_n) \leq 2a_2\delta^{j+n}$ para cada entero positivo n, donde $r_e(Q)$ y $r_e(B_n)$ denotan los radios exteriores notables de Q y B_n respectivamente. Como $0 < \delta < 1$, obtenemos entonces que $r_e(Q) = 0$. Aplicando el Lema 2.2 concluimos que el cubo Q tiene un único punto, un punto aislado. De la caracterización de Macías y Segovia se sigue que $Q = \{x\}$, donde x es un átomo en X.

Probemos ahora que $\tilde{\mathcal{D}} \bigcup \{\{x\} : \mu(x) > 0\} \subseteq \mathcal{D}$. Por ser $\tilde{\mathcal{D}}$ una subfamilia de $\mathcal{D}$, sólo tenemos que probar que si x es un átomo entonces $\{x\} \in \mathcal{D}$. Recordemos que, por *(d.7)*, $\mu(\partial Q) = 0$ para todo cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ y esto implica que para cada entero j existe un cubo diádico $Q_j \in \mathcal{D}^j$ tal que $x \in Q_j$. Fijemos para cada entero j una función punto central $\mathcal{P}^j : \mathcal{D}^j \longrightarrow X$. Por la caracterización de Macías y Segovia tenemos que x es un punto aislado y por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_d(x, \varepsilon) \cap X = \{x\}. \tag{2.3}$$

Por otro lado, de la Proposición 2.15 inciso (2), tenemos que el conjunto $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}^j(\mathcal{D}^j)$ es denso en X y podemos tomar $j_0 \in \mathbb{Z}$ y un cubo diádico $Q \in \mathcal{D}^{j_0}$ tal que $d(x, \mathcal{P}^{j_0}(Q)) < \varepsilon/2$ y $2a_2\delta^{j_0} < \varepsilon/2$, donde a_2 es la constante en *(d.5)* para el cubo Q. Por lo tanto $Q = Q_{j_0} = \{x\}$. En efecto, si $y \in Q_{j_0}$, del inciso (b) en la Proposición 2.13 y la elección de j_0 tenemos que

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x, \mathcal{P}^{j_0}(Q)) + d(\mathcal{P}^{j_0}(Q), y) \\ &\leq \varepsilon/2 + 2a_2\delta^{j_0} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es, $y \in B_d(x, \varepsilon)$, lo cual implica, por (2.3) que $x = y$. □

2.4. La noción de cuadrante

En la presente sección seguiremos estudiando la geometía básica de espacios de tipo homogéneo via familias diádicas. En particular introducimos la noción de cuadrante y damos sus propiedades más importantes. Esta definición será de gran utilidad en particular en el capítulo 6 cuando tratemos con espacios de Hardy y BMO diádicos. Cabe destacar que esta sección es una extensión a familias diádicas generales $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$ de resultados obtenidos en [**2**] para el caso particular de los cubos de Christ.

Definición 2.20. **Cuadrantes en una familia $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$.** Dados un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) y una familia diádica $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$ definimos, para cada cubo diádico Q en $\mathcal{D}$, el cuadrante de X que contiene al cubo Q, $\mathcal{C}(Q)$, como

$$\mathcal{C}(Q) = \bigcup_{\{Q'\in\mathcal{D}: Q\subseteq Q'\}} Q'.$$

Notemos que la anterior definición de cuadrante coincide con la nocion geométrica usual de cuadrante cuando consideramos los cubos diádicos usuales de $\mathbb{R}^n$. La siguiente proposición contiene las propiedades centrales en relación a los cuadrantes para un espacio de tipo homogéneo.

Proposición 2.21. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces*

(c1) dos cuadrantes que se intersectan coinciden;

(c2) existe una constante geométrica M tal que $\bigcup_{Q\in\mathcal{D}} Q = \bigcup_{i=1,\dots,M} \mathcal{C}(Q_i)$, donde $Q_1,\dots,Q_M$ son cubos diádicos en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}(Q_i)\cap\mathcal{C}(Q_j)=\emptyset$ para $i\neq j$, $i,j\in\{1,\dots,M\}$;

(c3) si el espacio X tiene medida total finita, estos es, si $\mu(X)<\infty$, entonces existe un único cuadrante que coincide con un cubo Q en $\mathcal{D}$ y con todo X;

(c4) si el espacio X tiene medida total infinita, esto es, si $\mu(X)=\infty$, entonces todo cuadrante tiene medida infinita;

(c5) para cada cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ se tiene que $(\mathcal{C}(Q), d_{\mathcal{C}(Q)}, \mu_{\mathcal{C}(Q)})$ es un espacio de tipo homogéneo, donde $d_{\mathcal{C}(Q)}$ y $\mu_{\mathcal{C}(Q)}$ son las restricciones de d y μ a $\mathcal{C}(Q)$ respectivamente.

Demostración. Comenzamos probando (c1). Sean Q_1 y Q_2 dos cubos diádicos en $\mathcal{D}$ y x un punto en X tal que $x\in\mathcal{C}(Q_1)\cap\mathcal{C}(Q_2)$. De la propia definición de cuadrante resulta que cada $\mathcal{C}(Q_i), i=1,2$, es una unión no decreciente de cubos diádicos. Entonces para cada $i=1,2$, existen cubos diádicos $\tilde{Q}_i$ en $\mathcal{D}$ tal que $x\in\tilde{Q}_1\cap\tilde{Q}_2$ y $Q_i\subseteq\tilde{Q}_i$. Esto implica, por *(d.4)*, que $\tilde{Q}_1\subseteq\tilde{Q}_2$ o $\tilde{Q}_2\subseteq\tilde{Q}_1$. Cualquiera sea el caso obtenemos, nuevamente por la definición de cuadrante, que $\mathcal{C}(Q_1)=\mathcal{C}(\tilde{Q}_1)=\mathcal{C}(\tilde{Q}_2)=\mathcal{C}(Q_2)$, y (1) queda demostrado.

La prueba de (c2) es una consecuencia de la siguiente afirmación: *existe una constante geomértica $\tilde{M}$ tal que*

$$\#(\{\mathcal{C}(Q):\mathcal{C}(Q)\cap B(x,r), Q\in\mathcal{D}\})\leq\tilde{M}, \tag{2.4}$$

para cada punto $x\in X$ y todo $r>0$. En efecto, supongamos que (2.4) vale. Como $B(x,r)\nearrow X$ cuando r tiende a infinito, entonces $\#(\mathcal{C}_{\mathcal{D}})\leq\tilde{M}$, donde $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}=\{\mathcal{C}(Q): Q\in\mathcal{D}\}$. Sean $M=\#(\mathcal{C}_{\mathcal{D}})$ y $Q_1,\dots,Q_M$ cubos diádicos en $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{C}(Q_i)\cap\mathcal{C}(Q_j)=\emptyset$

para $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., M\}$. Veamos que $\bigcup_{Q \in \mathcal{D}} Q = \bigcup_{i=1,\ldots,M} \mathcal{C}(Q_i)$. De la propia definición de cuadrante obtenemos que $\mathcal{C}(Q_i) \subseteq \bigcup_{Q \in \mathcal{D}} Q$ para cada $i = 1, ..., M$. Por otro lado, sean $x \in \bigcup_{Q \in \mathcal{D}} Q$ y $Q \in \mathcal{D}$ un cubo diádico que contiene al punto x. Puesto que $M = \#(\mathcal{C}_{\mathcal{D}})$, entonces $\mathcal{C}(Q) \cap \left(\bigcup_{i=1,\ldots,M} \mathcal{C}(Q_i) \right) \neq \emptyset$. Luego, existe un índice $i \in \{1, ..., M\}$ tal que $\mathcal{C}(Q) \cap \mathcal{C}(Q_i) \neq \emptyset$. De la propiedad (c1) se tiene entonces que $\mathcal{C}(Q) = \mathcal{C}(Q_i)$ y por lo tanto $x \in \bigcup_{i=1,\ldots,M} \mathcal{C}(Q_i)$.

Probemos ahora (2.4). Sean x en X, $r > 0$ y $j \in \mathbb{Z}$ tal que $a_1\delta^{j+1} \leq r < a_1\delta^j$. Fijemos una función punto central $\mathcal{P}^j : \mathcal{D}^j \longrightarrow X$. Consideremos la familia $\mathcal{F}^j(x, r) = \{Q \in \mathcal{D}^j : Q \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$ y escribamos x_Q para denotar la imágen del cubo diádico $Q \in \mathcal{D}^j$ vía la función punto central $\mathcal{P}^j$; esto es, $x_Q = \mathcal{P}^j(Q)$. De la definición de $\mathcal{F}^j(x, r)$ y el inciso (b) de la Proposición 2.13 podemos tomar, para cada cubo diádico $Q \in \mathcal{F}^j(x, r)$, un punto $z_Q \in B(x_Q, 2a_2\delta^j) \cap B(x, r)$, donde a_2 es la constante en *(d.5)*. Sea m el primer entero positivo tal que $2a_2\delta^j \leq 2^m a_1\delta^j$. Entonces $\{x_Q : Q \in \mathcal{F}^j(x, r)\} \subseteq B(x, 2^{m+1}a_1\delta^j)$. En efecto, si $Q \in \mathcal{F}^j(x, r)$ entonces de la elección de j tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_Q, x) &\leq d(x_Q, z_Q) + d(z_Q, x) \\ &\leq 2a_2\delta^j + r \\ &\leq 2^m a_1\delta^j + a_1\delta^j \\ &\leq 2^{m+1}a_1\delta^j. \end{aligned}$$

Luego, si N es la constante de homogeneidad de (X, d, μ) podemos aplicar el Teorema 1.3 para obtener $\#(\{x_Q : Q \in \mathcal{F}^j(x, r)\}) = \#(\{x_Q : Q \in \mathcal{F}^j(x, r)\} \cap B(x, 2^{m+1}a_1\delta^j)) \leq N^{m+1}$. Como $\mathcal{P}^j : \mathcal{F}^j(x, r) \longrightarrow \{x_Q : Q \in \mathcal{F}^j(x, r)\}$ es una biyección y $\#(\{\mathcal{C}(Q) : \mathcal{C}(Q) \cap B(x, r), Q \in \mathcal{D}\}) \leq \#(\mathcal{F}^j(x, r))$, tomando $\tilde{M} = N^{m+1}$ concluimos la prueba de (2.4).

Para probar (c3), notemos que la condición $\mu(X) < \infty$ es equivalente a que X sea acotado. Luego, por *(d.9)* y la definición de cuadrante obtenemos (c3).

Supongamos para probar (c4) que $\mu(x) = \infty$. Sean $j \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathcal{D}^j$ y $\mathcal{P}^j : \mathcal{D}^j \longrightarrow X$ una función punto central. Consideremos la sucesión no decreciente de cubos diádicos $(Q_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ definida a partir de *(d.3)* de la siguiente manera: Q_1 es el único cubo diádico en $\mathcal{D}^{j-1}$ tal que $Q \subseteq Q_1$ y en general para cada entero positivo n, Q_n es el único cubo diádico en $\mathcal{D}^{j-n}$ tal que $Q_{n-1} \subseteq Q_n$. De la definición de cuadrante tenemos que $\mathcal{C}(Q) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} Q_n$. Fijemos ahora, para cada entero positivo n, una función punto central $\mathcal{P}^{j-n} : \mathcal{D}^{j-n} \longrightarrow X$. Entonces para cada n se tiene que $B(\mathcal{P}^j(Q), a_1\delta^{j-n}) \subseteq B(\mathcal{P}^{j-n}(Q_n), (1 + \frac{a_2}{a_1})a_1\delta^{j-n})$, donde a_1 y a_2 son las constantes en *(d.5)* para la familia

$\mathcal{D}$. En efecto, si $x \in B(\mathcal{P}^j(Q), a_1\delta^{j-n})$ entonces del inciso (b) en la Proposición 2.13 y puesto que $Q \subseteq Q_n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} d(x, \mathcal{P}^{j-n}(Q_n)) &\leq d(x, \mathcal{P}^j(Q)) + d(\mathcal{P}^j(Q), \mathcal{P}^{j-n}(Q_n)) \\ &\leq a_1\delta^{j-n} + 2a_2\delta^{j-n} = (1 + \frac{2a_2}{a_1})a_1\delta^{j-n}. \end{aligned}$$

Sea m el primer entero positivo tal que $1 + \frac{2a_2}{a_1} \leq 2^m$. De la propiedad de duplicación para μ y *(d.5)* obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu(B(\mathcal{P}^j(Q), a_1\delta^{j-n})) &\leq \mu(B(\mathcal{P}^{j-n}(Q_n), 2^m a_1\delta^{j-n})) \\ &\leq C^m \mu(B(\mathcal{P}^{j-n}(Q_n), a_1\delta^{j-n})) \\ &\leq C^m \mu(Q_n). \end{aligned}$$

Luego, $\mu(\mathcal{C}(Q) = \lim_{n\to\infty} \mu(Q_n) \geq \frac{1}{C^m} \lim_{n\to\infty} \mu(B(\mathcal{P}^j(Q), a_1\delta^{j-n})) = \frac{1}{C^m}\mu(X) = \infty$.
Finalmente probamos (c5). Sea Q un cubo diádico en $\mathcal{D}$. Puesto que $d_{\mathcal{C}(Q)}$ es la restricción de una métrica, resulta ser $d_{\mathcal{C}(Q)}$ misma una métrica sobre $\mathcal{C}(Q)$. Además, como en la prueba de *(d.11)*, tenemos que para cada x en $\mathcal{C}(Q)$ y cada $r > 0$ se cumple que $0 < \mu_{\mathcal{C}(Q)}(B_{d_{\mathcal{C}(Q)}}(x, r)) < \infty$. Nos resta ver entonces la condición de duplicación que será una consecuencia de que en *(d.11)* la constante de duplicación es uniforme sobre todo cubo diádico en $\mathcal{D}$. Supongamos primero que X es acotado, es decir $\mu(X) < \infty$. De (c3) obtenemos que $\mathcal{C}(Q) = Q'$ para algún cubo diádico $Q' \in \mathcal{D}$. Entonces de *(d.11)* tenemos que $(\mathcal{C}(Q), d_{\mathcal{C}(Q)}, \mu_{\mathcal{C}(Q)})$ es un espacio de tipo homogéneo. Supongamos ahora que X no es acotado. Sean x en $\mathcal{C}(Q)$ y $r > 0$. Pueden pasar los dos siguientes casos:

(a) existe un entero j y un cubo diádico $\tilde{Q}$ en $\mathcal{D}^j$ tal que $Q \subseteq \tilde{Q}$ y $B(x, 2r) \cap \mathcal{C}(Q) \subseteq \tilde{Q}$, ó

(b) para cada entero j y cada cubo diádico $\tilde{Q}$ en $\mathcal{D}^j$ tal que $Q \subseteq \tilde{Q}$, existe un punto $z \in (B(x, 2r) \cap \mathcal{C}(Q)) \setminus \tilde{Q}$.

Notemos que en ambos casos, puesto que $Q \subseteq \tilde{Q}$, tenemos que $\mu_{\tilde{Q}}(G) \leq \mu_{\mathcal{C}(Q)}(G)$ para todo conjunto μ-medible G. Luego en el caso en que ocurra (a) podemos usar *(d.11)* para aplicar la condición de duplicación en $(\tilde{Q}, d_{\tilde{Q}}, \mu_{\tilde{Q}})$ y esta última observación para obtener

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{C}(Q)}(B(x, 2r) \cap \mathcal{C}(Q)) &= \mu_{\mathcal{C}(Q)}(B(x, 2r) \cap \tilde{Q}) \\ &= \mu_{\tilde{Q}}(B(x, 2r) \cap \tilde{Q}) \\ &\leq C\mu_{\tilde{Q}}(B(x, r) \cap \tilde{Q}) \\ &\leq C\mu_{\mathcal{C}(Q)}(B(x, r) \cap \tilde{Q}) \\ &\leq C\mu_{\mathcal{C}(Q)}(B(x, r) \cap \mathcal{C}(Q)). \end{aligned}$$

Supongamos por otro lado, que ocurre (b). Usaremos en este caso que la constante de duplicación en cada cubo diádico, considerado éste como espacio de tipo homogéneo como en *(d.11)*, es la misma para todos los cubos. Para ello, fijemos un entero j tal que $Q \in \mathcal{D}^j$ y consideremos una sucesión no decreciente de cubos diádicos $(Q_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ definida como en la prueba de (c4); esto es, $Q \subseteq Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq ...$ y cada Q_n pertenece a $\mathcal{D}^{j-n}$. Luego, dado que $\mathcal{C}(Q) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} Q_n$ tenemos que $B_{d_{\mathcal{C}(Q)}}(x, 2r) = B_d(x, 2r) \cap \mathcal{C}(Q) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} B_d(x, 2r) \cap Q_n$ para todo $x \in \mathcal{C}(Q)$ y $r > 0$. Llamando $\tilde{C}$ a la constante de duplicación dada en *(d.11)* para cada cubo diádico Q_n obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu(B_{d_{\mathcal{C}(Q)}}(x, 2r)) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_d(x, 2r) \cap \mathcal{C}(Q)) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \mu(B_d(x, 2r) \cap \mathcal{C}(Q)) \\ &\leq \tilde{C} \limsup_{n\to\infty} \mu(B_d(x, r) \cap \mathcal{C}(Q)) \\ &= \tilde{C}\ \mu(B_d(x, 2r) \cap \mathcal{C}(Q)), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{C}(Q)$ y $r > 0$. □

El siguiente ejemplo muestra como se puede usar la proposición anterior para determinar que una familia de subconjuntos no está en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$.

Ejemplo 2.22. Consideremos el espacio $X = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < \infty\}$ equipado con la métrica usual y la medida de Lebesgue unidimensional. Para cada entero j y cada $k \geq -1$ definamos $V_{j,k} = (k2^{-j}, (k+1)2^{-j}) \cap X$. Puede demostrarse que la familia $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$, con $\mathcal{D}^j = \{V_{j,k} : k \geq -1\}$ no verifica la condición *(d.5)* para ningún $0 < \delta < 1$, y por lo tanto no pertenece a la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Otra forma de ver que la familia $\mathcal{D}$ no es una familia diádica es a partir de la propiedad (c4) de la proposición anterior. En efecto, $\mathcal{C}(V_{1,-1}) = (-1, 0)$ que tiene medida de Lebesgue uno mientras la medida del espacio total es infinita.

2.5. La construcción de Christ: existencia de familias diádicas

La definición de familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ es el punto de partida para el desarrollo de muchos de los resultados de este trabajo. Aún cuando hemos dado muchos ejemplos diversos de familias diádicas para una importante variedad de situaciones que representan espacios de tipo homogéneo, es natural la siguiente pregunta: *¿existen familias diádicas en cualquier espacio de tipo homogéneo?*. La respuesta, en forma positiva, es dada por M. Christ en [**20**]. El objetivo de la presente sección es mostrar la construcción de Christ. El primer paso en tal construcción es la introducción de una estructura de árbol sobre un conjunto de índices $\mathcal{A}$ que está estrechamente relacionada con la estructura métrica del espacio X. Es decir, M.Christ define un orden parcial sobre $\mathcal{A}$ satisfaciendo algunas propiedades de árbol controladas por la distancia. El segundo paso es dado por el uso de la mencionada estructura de árbol para definir los denominados cubos diádicos. Los motivos de dedicar una sección a recordar tal construcción responden a dos objetivos. Por un lado, como hemos señalado, la definición de familia diádica es nuestro punto de partida para la presente tesis y es entonces importante asegurar la existencia de tales familias para espacios de tipo homogéneos arbitrarios. Por otro lado, como veremos, la construcción de Christ está basada entre otras cosas en un proceso de selección de puntos que puede producir diferentes selecciones posibles aún cuando se fijen ciertas familias de puntos del espacio que llamaremos redes. Estas distintas selecciones producen diferentes familias diádicas y motivan el estudio de la equivalencia de bases de tipo Haar que abordaremos en el Capítulo 5. El resultado de M. Christ puede enunciarse en nuestro contexto del siguiente modo.

Teorema 2.23. *Dado un espacio de tipo homogéneo* (X, d, μ) *existe una constante positiva y finita* δ_0 *tal que para todo* $\delta \leq \delta_0$ *existen familias diádicas* $\mathcal{D}$ *en* $\mathfrak{D}(\delta)$*.*

Para la prueba del Teorema 2.23, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.24. **ε-Red.** Dados un espacio métrico (X, d) y $\varepsilon > 0$, decimos que $\mathcal{N}_\varepsilon$ es una ε-red en (X, d) si $\mathcal{N}_\varepsilon$ es un subconjunto de X ε-disperso maximal de X. Esto es, $d(x, x') \geq \varepsilon$ para todo $x, x' \in \mathcal{N}_\varepsilon$ con $x \neq x'$ y si E es cualquier otro subconjunto de X conteniendo estrictamente a $\mathcal{N}_\varepsilon$ entonces existen $y, y' \in E$ con $y \neq y'$ tal que $d(y, y') < \varepsilon$.

De la propiedad de homogeneidad y el Teorema 1.3 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.25. *Sea* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo. Entonces todo subconjunto* E *que sea* ε*-disperso en* X *es a lo sumo numerable. Más aún, si* $\mathcal{N}_\varepsilon$ *es una* ε*-red en* X *entonces* $\mathcal{N}_\varepsilon$ *es finita si y sólo si* X *es acotado.*

Demostración. La demostración es un consecuencia del Teorema 1.3. Fijemos un punto x en X. Para cada número natural m denotamos con B_m la bola con centro en x y radio $2^m\varepsilon$, es decir, $B_m = B_d(x, 2^m\varepsilon)$. Por Teorema 1.3 tenemos que $\#(B_m \cap E) \leq N^m$, donde N es la homogeneidad del espacio (ver definicion en cap ETH). Luego podemos escribir $B_1 \cap E = \{x_1, ..., x_{\#(B_1 \cap E)}\}$ y en general para cada número natural m escribimos $(B_m \cap E) \setminus (B_{m-1} \cap E) = \{x_{\#(B_{m-1} \cap E)+1}, ..., x_{\#(B_m \cap E)}\}$ con lo cual E es finito si existe m tal que $X = B_m$, es decir si X es acotado, y numerable en otro caso.
Supongamos ahora que $\mathcal{N}_\varepsilon$ es una ε-red finita. Fijemos un punto z en $\mathcal{N}_\varepsilon$. Por la maximalidad de $\mathcal{N}_\varepsilon$ en el sentido de la dispersión tenemos que para todo x en X existe y_x en $\mathcal{N}_\varepsilon$ tal que $d(x, y_x) < \varepsilon$. Definamos $M = sup\{d(y, y^{'}) : y, y^{'} \in \mathcal{N}_\varepsilon\}$. Como $\#(\mathcal{N}_\varepsilon) < \infty$, tenemos que $M = max\{d(y, y^{'}) : y, y^{'} \in \mathcal{N}_\varepsilon\} < \infty$. Luego, para cada x en X tenemos

que $d(x, z) \leq (x, y_x) + (y_x, z) \leq \varepsilon + M$; es decir, $X = B_d(z, M + \varepsilon)$ y entonces X es acotado. $\square$

PRUEBA DEL TEOREMA 2.23. En lo que sigue vamos a usar la notación $\mathcal{N}_\varepsilon = \{x_k : k \in K(\varepsilon)\}$ para denotar los elementos de la ε-red $\mathcal{N}_\varepsilon$, donde $K(\varepsilon)$ es un intervalo inicial de los enteros positivos, que puede ser todo el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de enteros positivos. De la anterior proposición tenemos que $K(\varepsilon) = \mathbb{Z}^+$ si y sólo si X es no acotado. Para un δ fijo y positivo, las anteriores consideraciones con $\varepsilon = \delta^j$, $j \in \mathbb{Z}$, da lugar a una sucesión de δ^j-redes $\mathcal{N}_j = \{x_k^j : k \in K_j\}$, donde $K_j = K(\delta^j)$. El conjunto de índices $\mathcal{A} = \{(j,k) : j \in \mathbb{Z} \text{ and } k \in K_j\}$ juega un rol central en la construcción de Christ. Es importante remarcar aquí que la construcción de Christ no necesita de ninguna propiedad de encaje de la familia de δ^j-redes $\mathcal{N}_j$. De las propiedades de dispersión y maximalidad de cada red $\mathcal{N}_j$ las dos siguientes afirmaciones son fáciles de checkear para cada $(j,k) \in \mathcal{A}$.

(α) Existe **a lo sumo** un $l_0 \in K_{j-1}$ tal que $d(x_k^j, x_{l_0}^{j-1}) < \frac{\delta^{j-1}}{2}$; y

(β) existe **al menos** un $l \in K_{j-1}$ tal que $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \delta^{j-1}$.

Estas propiedades permiten definir ordenes parciales $\preceq$ sobre $\mathcal{A}$, inducidos por la métrica d y la sucesión dada de δ^j-redes siguiendo el siguiente algoritmo que denominaremos *algoritmo de Christ*:

I) tomamos $(j,k) \in \mathcal{A}$

(a) si existe $l_0 \in K_{j-1}$ tal que $d(x_k^j, x_{l_0}^{j-1}) < \frac{\delta^{j-1}}{2}$ entonces decretamos que $(j,k) \preceq (j-1, l_0)$,

(b) si no existe un tal $l_0 \in K_{j-1}$, entonces **seleccionamos cualquier** $l \in K_{j-1}$ para el cual $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \delta^{j-1}$, y decretamos que $(j,k) \preceq (j-1, l)$,

II) decretamos que (j,k) no está relacionado con ningún otro $(j-1, s)$, $s \in K_{j-1}$,

III) extendemos $\preceq$ por transitividad.

Es fácil ver que todo orden parcial $\preceq$ definido con el algoritmo anterior satisface las siguientes propiedades de árbol sobre $\mathcal{A}$

(a1) si $(j,k) \preceq (i,l)$ entonces $i \leq j$;

(a2) para cada $(j,k) \in \mathcal{A}$ e $i \leq j$, existe un único l tal que $(j,k) \preceq (i,l)$;

(a3) if $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \frac{\delta^{j-1}}{2}$ then $(j,k) \preceq (j-1, l)$;

(a4) if $(j,k) \preceq (j-1, l)$, then $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \delta^{j-1}$.

Para una sucesión de δ^j-redes, $\mathcal{N}_j$, $\delta > 0$, diremos que un orden parcial $\preceq$ sobre $\mathcal{A}$ definido por el algoritmo de Christ pertenece a la clase $\mathcal{O}_\delta$, brevemente, $\preceq \in \mathcal{O}_\delta$.

Para un orden $\preceq \in \mathcal{O}_\delta$ dado, el cubo diádico de Christ al nivel j localizado en $k \in K_j$ es definido como

$$Q_k^j = \bigcup_{(i,l)\preceq(j,k)} B(x_l^i, a\delta^i), \tag{2.5}$$

los cuales para pequeños valores de las constantes positivas a y $\delta < 1/2$ satisfacen *(d.1)* a *(d.5)* (ver [**20**]) con lo cual se prueba el Teorema 2.23. □

En lo que sigue, el conjunto Q_k^j será llamado el cubo diádico asociado al punto $x_k^j \in \mathcal{N}_j$. La familia $\mathcal{D}_\preceq$ de todos aquellos Q_k^j será llamada los cubos de Christ asociados a la familia de redes $\{\mathcal{N}_j : j \in \mathbb{Z}\}$ y al orden parcial $\preceq$. Es importante notar que la selección en el caso (b) de la construcción del órden parcial $\preceq$ no es única y por lo tanto hay una gran diversidad de posibles órdenes parciales siguiendo el algoritmo de Christ sobre las mismas redes fijas. Estos diferentes ordenes inducen diferentes formas para los conjuntos Q_k^j correspondientes a los parámetros de nivel-posición $(j,k) \in \mathcal{A}$. En el Capítulo 5 retomaremos este punto y estudiaremos la equivalencia de tales familias diádicas en un sentido que explicitaremos más adelante.

CAPÍTULO 3

Herramientas básicas para el análisis diádico

En el capítulo anterior hemos desarrollado con algún detalle la geometría de las familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Con el propósito de *hacer análisis* via familias diádicas en espacios de tipo homogéneo, dedicamos este capítulo a introducir, como el título lo indica, las herramientas básicas del análisis diádico. Ellas son, una descomposición de tipo Calderón-Zygmund asociada a familias $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$, operadores maximales de Hardy-Litllewood diádicos asociados a estas familias $\mathcal{D}$ y sus correspondientes clases de Muckenhoupt diádicas. En la última sección abordaremos el problema de extender al contexto diádico las clásicas desigualdades de tipo Fefferman-Stein para maximales a valores vectoriales. Los resultados de dicha sección, contenidos en [**8**], han sido aceptados para su publicación en la revista The Royal Society of Edinburg Proceedings, Section Mathematics. Varios de los resultados de las dos primeras secciones son extensiones a nuestro contexto general de familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$, de ciertos teoremas clásicos. Incluiremos en esos casos sólo aquellas pruebas en las que el contexto geométrico adquiera relevancia y daremos referencias bibliográficas donde pueden hallarse las demostraciones que no incluimos. La sección 3 está dedicada a probar desigualdades de tipo Fefferman-Stein diádicas en nuestro contexto que serán usadas en el capítulo 5.

3.1. Descomposición de Calderón-Zygmund

La clásica descomposición de Calderón-Zygmund en el contexto euclídeo es una herramienta central para el análisis real y el estudio de operadores sobre espacios funcionales. Extendemos aquí esta descomposición asociada a familias diádicas $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ en el contexto general de espacio de tipo homogéneo. Para una función f μ-integrable sobre X escribimos $m_Q(f)$ para denotar la media de f sobre el cubo diádico Q, esto es, $m_Q(f) = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$. Definimos además $m_X(f)$ como $m_X(f) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$ si $\mu(X) < \infty$ y $m_X(f) = 0$ si $\mu(X) = \infty$.

TEOREMA 3.1. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en $\mathfrak{D}(\delta)$. Sean además f una función no negativa μ-integrable sobre X y λ una constante positiva y finita tal que $\lambda \geq m_X(f)$. Entonces existe una subfamilia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ tal que*

(CZ1) los cubos diádicos en $\mathcal{F}$ son disjuntos dos a dos;

(CZ2) $m_Q(f) > \lambda$, para todo cubo Q en $\mathcal{F}$;

(CZ3) $m_{\tilde{Q}}(f) \leq \lambda$ *para todo* $\tilde{Q}$ *en* $\mathcal{D}$ *tal que* $Q \subsetneq \tilde{Q}$ *para algún* Q *en* $\mathcal{F}$*;*

(CZ4) $m_{Q'}(f) \leq \lambda$ *para todo* Q' *en* $\mathcal{D}$ *tal que* $Q' \cap (\bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q) = \emptyset$*;*

(CZ5) la desigualdad $m_Q(f) \leq C\lambda$ *vale para todo cubo diádico* Q *en* $\mathcal{F}$*, donde* C *es la constante dada en (d.8);*

(CZ6) la medida total del conjunto cubierto por la familia $\mathcal{F}$ *puede ser estimada en términos de la norma* L^1 *de* f *y* λ*,*

$$\mu\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q\Big) \leq \frac{1}{\lambda}\int_X f d\mu;$$

(CZ7) para casi todo punto x*, con respecto a la medida* μ*, que no pertenezca a* $\bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}} Q$ *se cumple que* $f(x) \leq \lambda$*.*

Demostración. Consideremos la siguiente subfamilia $\mathcal{F}$ de cubos diádicos

$$\mathcal{F} = \{Q \in \mathcal{D} : m_Q(f) > \lambda \text{ y } m_{\tilde{Q}}(f) \leq \lambda \text{ para todo } \tilde{Q} \in \mathcal{D} \text{ con } Q \subseteq \tilde{Q}\}.$$

Si $\mathcal{F} = \emptyset$, las condiciones (*CZ1*), (*CZ2*), (*CZ3*), (*CZ5*) y (*CZ6*) se cumplen trivialmente. Además, en el caso que $\mathcal{F} = \emptyset$, (*CZ4*) es equivalente a

$$m_Q(f) \leq \lambda, \text{ para todo cubo diádico } Q \in \mathcal{D}. \tag{3.1}$$

Por lo tanto, si $\mathcal{F} = \emptyset$ probaremos (*CZ4*) probando que (3.1) vale. Para tal fin, supongamos que existe $Q' \in \mathcal{D}$ tal que $m_{Q'}(f) > \lambda$. Entonces la familia

$$\mathcal{F}_{Q'} = \{Q \in \mathcal{D} : m_Q(f) > \lambda, Q' \subseteq Q\}, \tag{3.2}$$

ordenada por la relación de inclusión de conjuntos, es acotada superiormente. Tal afirmación es una consecuencia inmediata de *(d.9)* para el caso en el que X es acotado. Para el caso en que X no es acotado tomamos un $j \in \mathbb{Z}$ tal que $Q' \in \mathcal{D}^j$. Escribimos $\mathcal{Z}_0^+$ para denotar el conjunto de los enteros no negativos y consideramos la sucesión creciente de cubos diádicos $(Q_n : n \in \mathcal{Z}_0^+)$ definida de la siguiente manera a partir de *(d.3)*: $Q_0 = Q'$; $Q_1 \in \mathcal{D}^{j-1}$ tal que $Q' \subseteq Q_1$; y en general, para un entero positivo n, $Q_n \in \mathcal{D}^{j-n}$ tal que $Q_{n-1} \subseteq Q_n$. Notemos que, de *(d.5)*, para cada entero no negativo n existe un punto $x_n \in Q_n$ tal que $B_d(x_n, a_1\delta^{j-n}) \subseteq Q_n$, donde a_1 es la constante en *(d.5)*. Entonces

$$\begin{aligned} m_{Q_n}(f) &= \frac{1}{\mu(Q_n)}\int_{Q_n} f d\mu \\ &\leq \frac{1}{\mu(Q_n)}\|f\|_1 \\ &\leq \frac{1}{\mu(B_d(x_n, a_1\delta^{j-n}))}\|f\|_1. \end{aligned}$$

Como $0 < \delta < 1$, $\mu(B_d(x_n, a_1\delta^{j-n})) \nearrow \mu(X) = \infty$ cuando n tiende a infinito. Luego, por ser f una función de $L^1(X,\mu)$, tenemos que $m_{Q_n}(f)$ tiende a cero si n tiende a infinito.

Esto es, existe un entero no negativo n_0 tal que $m_{Q_n}(f) \leq \lambda$ para todo $n \geq n_0$. Ya que la media sobre $Q_0 = Q^{'}$ de la función f es acotada superiormente por λ, tomamos $n_1 = max\{0, ..., n_{0-1}\}$ tal que $m_{Q_{n_1}}(f) > \lambda$. Con este n_1 tenemos que $\mathcal{F}_{Q'} \subseteq Q_{n_1}$, es decir, hemos probado que $\mathcal{F}_{Q'}$ es acotada superiormente si X es no acotado. Luego, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathcal{F}_{Q'}$. Esto es, existe $Q \in \mathcal{F}_{Q'}$ tal que $Q^{'} \subseteq Q$, lo cual contradice que $\mathcal{F} = \emptyset$. Por lo tanto (3.1) vale.

Por otro lado, si $\mathcal{F} = \emptyset$, obtenemos (*CZ7*) por una aplicación del Teorema de Diferenciación de Lebesgue de la siguiente manera. Sea $x \in X$. Como $\mathcal{F} = \emptyset$ entonces (3.1) vale. Tomamos ahora, de *(d.2)*, $j \in \mathbb{Z}$ y $Q \in \mathcal{D}^j$ tal que $x \in \overline{Q}$. Nuevamente por *(d.2)*, tomamos una sucesión decreciente de cubos diádicos en $\mathcal{D}$, $(Q_n^{'} : n \in \mathbb{Z}^+)$, de la siguiente manera: $Q_1^{'} = Q$; para $n = 2$ tomamos un cubo diádico $Q_2^{'} \in \mathcal{D}^{j+2}$ tal que $x \in \overline{Q_2^{'}}$, y en general, para cada entero positivo n tomamos un cubo diádico $Q_n^{'} \in \mathcal{D}^{j+n}$ tal que $x \in \overline{Q_n^{'}}$. Luego, por ser $0 < \delta < 1$ y *(d.5)* tenemos que $\overline{Q_n^{'}} \searrow \{x\}$. Del Teorema de Diferenciación de Lebesgue y (3.1) tenemos probado (*CZ7*) si $\mathcal{F} = \emptyset$.

Supongamos ahora que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. De la propia definición de $\mathcal{F}$ se obtienen (*CZ2*) y (*CZ3*). Además, si Q y $Q^{'}$ son dos cubos diádicos en $\mathcal{F}$ con $Q \neq Q^{'}$, de *(d.4)* y la definición de $\mathcal{F}$ tenemos que $Q \cap Q^{'} = \emptyset$, lo cual prueba (*CZ1*).

Para probar (*CZ4*), sea $Q^{'}$ en $\mathcal{D}$ tal que $Q^{'} \cap (\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q) = \emptyset$. Entonces

$$Q^{'} \cap Q = \emptyset \text{ para todo cubo diádico } Q \in \mathcal{F}. \tag{3.3}$$

Supongamos que $m_{Q'}(f) > \lambda$. Entonces, puesto que la familia $\mathcal{F}_{Q'}$ definida en (3.2) es acotada superiormente, aplicando el lema de Zorn tenemos que existe un elemento maximal en $\mathcal{F}_{Q'}$. Esto es, existe $Q \in \mathcal{F}_{Q'}$ tal que $Q^{'} \subseteq Q$, lo cual contradice (3.3). Luego $m_{Q'}(f) \leq \lambda$ y esto concluye la prueba de (*CZ4*).

Para probar (*CZ5*) notemos primero que si Q es un cubo diádico en $\mathcal{F}$, entonces existe un cubo diádico en $\mathcal{D}$ que contiene estrictamente a Q. En efecto, si para todo cubo diádico $\hat{Q}$ que contenga a Q se tuviera que $\hat{Q} = Q$, entonces de la definición de cuadrante asociado al cubo diádico Q, $\mathcal{C}(Q)$, se tendría que $\mathcal{C}(Q) = Q$. Luego, por el contrarrecíproco de la propiedad (5) en la Proposición 2.21 tendríamos que $\mu(X) < \infty$, con lo cual de la propiedad (4) en la Proposición 2.21 obtendríamos que $Q = X$. Esto implicaría, por la hipótesis sobre λ, que $m_Q(f) = m_X(f) \leq \lambda$, contradiciendo el hecho de ser Q un elemento de la familia $\mathcal{F}$. Sea entonces $\hat{Q}$ el menor cubo diádico, en el sentido de la inclusión, que contiene estrictamente al cubo diádico Q. Notemos que $\hat{Q} \in \tilde{\mathcal{D}}^{\mathcal{J}(\hat{Q})}$ y $Q \in \mathcal{D}^{\mathcal{J}(\hat{Q})+1}$, donde $\mathcal{J}$ es la función definida en *(d.13)* y $\tilde{\mathcal{D}}^{\mathcal{J}(\hat{Q})}$ es la subfamilia de $\mathcal{D}^{\mathcal{J}(\hat{Q})}$ formada por los cubos con descendencia no trivial. Como $Q \in \mathcal{F}$, entonces $\hat{Q} \notin \mathcal{F}$. De este hecho, por ser

Q un subconjunto de $\hat{Q}$ y por *(d.8)* obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{1}{\mu(\hat{Q})}\int_{\hat{Q}} f d\mu \\ &\geq \frac{1}{\mu(\hat{Q})}\int_{Q} f d\mu \\ &= \frac{\mu(Q)}{\mu(\hat{Q})}\frac{1}{\mu(Q)}\int_{Q} f d\mu \\ &\geq \frac{1}{C} m_Q(f), \end{aligned}$$

donde C es la constante en *(d.8)*. Luego, $m_Q(f) \leq C\lambda$ y $(CZ5)$ queda probado.
Por otro lado, de la definición de $\mathcal{F}$, de *(d.7)* junto con el hecho de ser $\mathcal{F}$ una familia de cubos disjuntos dos a dos y por ser $\bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}} Q$ un subconjunto de X tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q) &\leq \sum_{Q\in\mathcal{F}} \mu(Q) \\ &\leq \sum_{Q\in\mathcal{F}} \frac{1}{\lambda}\int_{Q} f d\mu \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{\bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}} Q} f d\mu \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_{X} f d\mu, \end{aligned} \tag{3.4}$$

lo que prueba $(CZ6)$.
Finalmente probamos $(CZ7)$. Notemos que de la propia definición de $\mathcal{F}$ se tiene que si $x \notin \bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}} Q$, entonces existen un entero j y un cubo diádico $Q \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}$ tal que $x \in \overline{Q}$. Luego, (7) queda demostrado siguiendo la misma prueba que para el caso $\mathcal{F} = \emptyset$. □

3.2. Maximales diádicas y clases de Muckenhoupt asociadas

En esta sección introducimos el operador maximal de Hardy-Litllewood diádico $M_{\mathcal{D}}$ y sus clases de pesos diádicos asociados $A^p_{\mathcal{D}}$ para una familia $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ en el contexto de espacio de tipo homogéneo y enunciamos sus propiedades más importantes. Comenzamos con la definición del operador maximal de Hardy-Litllewood diádico. Dada una familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ definimos el operador maximal diádico $M_{\mathcal{D}}$ como

$$M_{\mathcal{D}} f(x) = \sup_{Q} \frac{1}{\mu(Q)}\int_{Q} |f(y)| d\mu(y), \tag{3.5}$$

donde el supremo es tomado sobre la familia de todos los cubos diádicos Q en $\mathcal{D}$ que contienen al punto x. Puesto que, de *(d.7)*, $E = \bigcup_{Q\in\mathcal{D}} \partial(Q)$ tiene medida cero, es natural definir $M_{\mathcal{D}}f(x) = 0$ cuando $x \in E$.
De la propia definición del operador maximal se obtiene fácilmente la acotación en el espacio de Lebesgue $L^\infty(X,\mu)$. Más aún, $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ para toda función f en $L^\infty(X,\mu)$. Siguiendo la línea de la demostración dada en [**3**] para el caso particular en que $\mathcal{D}$ sea una familia de cubos diádicos de Christ obtenemos para nuestro contexto general los dos siguiente resultados. El primero de ellos establece una relación entre la descomposición de tipo Calderón-Zygmunhd diádica dada en el Teorema 3.1 y el operador $M_{\mathcal{D}}$. El segundo de ellos, una consecuencia del primero, establece la acotación de tipo débil (1,1) para $M_{\mathcal{D}}$.

LEMA 3.2. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos diádicos en $\mathcal{D}$ dada por el Teorema 3.1 para la función integrable f y el número real positivo λ. Entonces $\{x \in X : M_{\mathcal{D}}f(x) > \lambda\} = \bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}} Q$.*

TEOREMA 3.3. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Existe una constante positiva y finita C tal que para cada función medible f definida sobre X y para todo $\lambda > 0$ se tiene que*

$$\mu\left(\{x \in X : M_{\mathcal{D}}f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_X |f(y)|d\mu(y). \tag{3.6}$$

Luego, la acotación en $L^p(X,\mu)$ para $1 < p < \infty$ del operador maximal $M_{\mathcal{D}}$ sigue a partir de una aplicación del teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

El siguiente resultado será de utilidad en la última sección del presente capítulo cuando tratemos con desigualdades de tipo Fefferman-Stein del operador maximal de Hardy-Litllewood a valores vectoriales. Dada una medida positiva de Borel ν sobre X diremos que ν es $\mathcal{D}$-doblante si existe una constante positiva C tal que $\nu(\tilde{Q}) \leq C\nu(Q)$ para todo cubo diádico $Q \in \mathcal{D}$, donde $\tilde{Q}$ es el primer ancestro de Q; esto es, $Q \subseteq \tilde{Q}$ y $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^{j-1}$ si $Q \in \mathcal{D}^j$.

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Si w es una función no negativa y localmente integrable tal que $wd\mu$ es $\mathcal{D}$-doblante, entonces*

(a) existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$w(\{x \in X : M_{\mathcal{D}}f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_X |f(x)|M_{\mathcal{D}}w(x)d\mu(x)$$

vale para toda función medible f y todo $\lambda > 0$;

(b) dado $1 < p < \infty$, existe una constante positiva C_p tal que la desigualdad

$$\int_X (M_{\mathcal{D}}f(x))^p w(x)d\mu(x) \ \leq C_p \ \int_X |f(x)|^p M_{\mathcal{D}}w(x)d\mu(x)$$

vale para toda función medible f.

Demostración. Notemos primero que el resultado es trivial si $w \equiv 0$. En otro caso, de *(d.7)*, tenemos que $E = \bigcup_{Q\in\mathcal{D}} \partial(Q)$ tiene medida cero y por lo tanto de la definición de $M_{\mathcal{D}}$ tenemos que $M_{\mathcal{D}}w$ es positiva en casi todo punto de X. Entonces $\|M_{\mathcal{D}}f\|_{\infty,w} \leq \|f\|_{\infty,M_{\mathcal{D}}w}$. Por lo tanto, usando el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, sólo tenemos que demostrar (a).
Fijemos un $\lambda > 0$. Asumamos primero que $\lambda \geq m_X(f)$. Entonces aplicamos el Teorema 3.1 para f al nivel λ y el Lema 3.2 y obtenemos una sucesión $\mathcal{F} = \{Q_i\}_{i\in I}$ de cubos diádicos disjuntos en $\mathcal{D}$ tal que $m_{Q_i}(f) > \lambda$ para todo $i \in I$ y $\Omega_\lambda = \bigcup_{i\in I} Q_i = \{x \in X : M_{\mathcal{D}}f(x) > \lambda\}$. Luego, existe una constante positiva C tal que para cada $Q_i \in \mathcal{F}$

$$\int_{\tilde{Q}_i} w(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{Q_i} |f(y)|M_{\mathcal{D}}w(y)d\mu(y), \tag{3.7}$$

donde $\tilde{Q}_i$ es el primer ancestro de Q_i, esto es $Q_i \subseteq \tilde{Q}_i$ y $\tilde{Q}_i \in \mathcal{D}^{j-1}$ si $Q_i \in \mathcal{D}^j$. En efecto, dado que w es $\mathcal{D}$-doblante, para cada $Q_i \in \mathcal{F}$ obtenemos que

$$\int_{\tilde{Q}_i} wd\mu \leq \frac{C}{\lambda} \int_{Q_i} |f| \left(\frac{1}{\mu(\tilde{Q}_i)} \int_{\tilde{Q}_i} wd\mu \right) d\mu \leq \frac{C}{\lambda} \int_{Q_i} |f|M_{\mathcal{D}}wd\mu.$$

Por lo tanto

$$w(\Omega_\lambda) \leq \sum_{i\in I} w(\tilde{Q}_i) \leq \sum_{i\in I} \frac{C}{\lambda} \int_{Q_i} |f|M_{\mathcal{D}}wd\mu \leq \frac{C}{\lambda} \int_X |f|M_{\mathcal{D}}wd\mu.$$

Asumamos ahora que $0 < \lambda < m_X(f)$. Luego $\mu(X) < \infty$ y entonces, de la propiedad (c3) de cuadrantes, X mismo es un cubo diádico en $\mathcal{D}$. Así, como en la prueba de (3.7) concluimos que $\int_X wd\mu \ \leq \ \frac{1}{\lambda} \int_X |f|M_{\mathcal{D}}wd\mu$. Por lo tanto

$$w(\{x \in X : M_{\mathcal{D}}f(x) > \lambda\}) \leq \int_X w(x)d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f|M_{\mathcal{D}}wd\mu.$$

□

Finalizamos esta sección introduciendo las clases de Muckenhoupt y dando algunas de sus propiedades más importantes en nuestro contexto diádico. Primero definimos, como es usual, las clases de funciones de tipo Muckenhoupt asociadas a una familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Se dice que una función medible, no negativa y localmente integrable w

definida sobre el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), es un peso diádico de Muckenhoupt de la clase $A_p^{\mathcal{D}}$, $1 < p < \infty$ si la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C, \tag{3.8}$$

vale para alguna constante C y todo cubo diádico $Q \in \mathcal{D}$.

Para $p = 1$ decimos que $w \in A_1^{\mathcal{D}}$ si existe una constante C tal que la desigualdad

$$\frac{w(Q)}{\mu(Q)} \leq Cw(x) \tag{3.9}$$

vale para casi todo punto $x \in Q$ y para todo cubo diádico $Q \in \mathcal{D}$. La clase $A_\infty^{\mathcal{D}}$ es definida como

$$A_\infty^{\mathcal{D}} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{\mathcal{D}}. \tag{3.10}$$

En general, dada una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos B en X y $1 \leq p \leq \infty$, definimos las clases $A_p^{\mathcal{B}}$ como en (3.8), (3.9) y (3.10) tomando conjuntos $B \in \mathcal{B}$ en lugar de $Q \in \mathcal{D}$.

El siguiente resultado contiene las principales propiedades de los pesos diádicos en las clases de Muckenhoupt $A_p^{\mathcal{D}}$, $1 \leq p \leq \infty$ sobre espacios de tipo homogéneo.

Teorema 3.5. *Sean $1 < p < \infty$ y p' tales que $1/p + 1/p' = 1$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

(a) si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ entonces $w(x) > 0$ para casi todo punto x,
(b) si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ entonces $wd\mu$ es $\mathcal{D}-$doblante,
(c) si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ entonces $w \in A_q^{\mathcal{D}}$ para todo $q > p$,
(d) $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ si y sólo si $w^{1-p'} \in A_{p'}^{\mathcal{D}}$,
(e) si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ entonces $w \in A_q^{\mathcal{D}}$ para algún $q < p$.
(f) $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ es necesario y suficiente para la desigualdad de tipo fuerte (p,p) para el operador $M_{\mathcal{D}}$ con respecto a la medida $wd\mu$,
(g) $w \in A_1^{\mathcal{D}}$ es necesario y suficiente para la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ para el operador $M_{\mathcal{D}}$ con respecto a la medida $wd\mu$.

La demostración del Teorema 3.5 se obtiene como en el caso clásico euclídeo para pesos de Muckenhoupt siguiendo la prueba dada en [**3**] y en [**2**] para los pesos diádicos de Muckenhoupt asociados a los cubos de Christ.

3.3. Desigualdades de tipo Fefferman-Stein diádicas

Las desigualdades de Fefferman-Stein para el operador maximal a valores vectoriales dadas en [**24**] para el contexto euclídeo son herramientas importantes en análisis armónico. En lo que sigue, para una sucesión dada $\mathbf{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ de funciones definidas sobre

X escribiremos $||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} = (\sum_n |f_n(x)|^r)^{1/r}$, para $1 < r < \infty$. Si T es un operador sobre funciones con valores escalares es posible extenderlo a un operador sobre funciones con valores vectoriales definiendo $T\mathbf{f} = (Tf_n : n \in \mathbb{N})$. Una extensión del resultado de Fefferman-Stein al contexto general de espacio de tipo homogéneo es el Teorema 3.6 probado en [**29**]. Aquí nosotros extendemos tal resultado al caso de un operador maximal diádico $M_{\mathcal{D}}$. Más precisamente, probaremos el siguiente enunciado.

TEOREMA 3.6. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica dada en $\mathfrak{D}(\delta)$ y sea $1 < r < \infty$. Entonces*

(a) si $1 \leq p < \infty$, entonces existe una constante positiva C tal que

$$w(\{x \in X : ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} > \lambda\}) \ \leq \ C\ \frac{1}{\lambda^p} \int_X ||\mathbf{f}(x)||^p_{\ell^r}\ w(x)d\mu(x)$$

para toda sucesión de funciones medibles $\mathbf{f}$ y todo $\lambda > 0$, si y sólo si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$;

(b) si $1 < p < \infty$, entonces existe una constante positiva C tal que

$$\int_X ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}(x)||^p_{\ell^r}\ w(x)d\mu(x) \ \leq \ C \int_X ||\mathbf{f}(x)||^p_{\ell^r}\ w(x)d\mu(x)$$

para toda sucesión de funciones medibles $\mathbf{f}$, si y sólo si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$.

Para demostrar el Teorema 3.6 usaremos dos herramientas clásicas. La primera de ellas es la descomposición de Calderón-Zygmund asociada a una familia diádica $\mathcal{D}$ para funciones integrables dada en el Teorema 3.1. La segunda herramienta esta compuesta por los dos siguientes resultados de interpolación. Es importante destacar que la naturaleza del dominio de las funciones es irrelevante para estos resultados de interpolación y por lo tanto omitimos aquí su demostración. Para una prueba pueden verse [**11**], [**12**] y [**17**], donde los autores introducen el contexto básico de operadores valuados vectorialmente y los espacios de Lebesgue con normas mixtas. El espacio mixto $L^p(\ell^r)$ es el espacio de todas las sucesiones $\mathbf{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ para las cuales $\int_X ||\mathbf{f}(x)||^p_{\ell^r} d\mu(x) < \infty$, y decimos que $\mathbf{f}$ pertenece a $L^p_w(\ell^r)$ cuando $\int_X ||\mathbf{f}(x)||^p_{\ell^r} w(x)d\mu(x) < \infty$ para w no negativa y medible sobre X.

Diremos que una función con valores escalares es simple si pertenece al espacio generado por las funciones características de conjuntos medibles acotados. Con S denotamos la clase de todas las sucesiones $\mathbf{f}$ tal que cada f_n es una función simple y $f_n \equiv 0$ para n suficientemente grande. En [**12**] los autores probaron que S es denso en cada $L^p_w(\ell^r)$ $(1 \leq p, r < \infty)$ cuando w es una función no negativa localmente integrable.

LEMA 3.7. *Sean $w(x) \geq 0$ una función localmente integrable definida sobre X, $1 < r < \infty$, $1 \leq p_i < \infty$, $i = 0, 1$, y supongamos que T es un operador sublineal definido sobre*

S que satisface

$$w\left(\{x \in X : ||T\mathbf{f}(x)\|_{\ell^r} > \alpha\}\right) \;\leq\; \frac{N_i^{p_i}}{\alpha^{p_i}} \int_X ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^{p_i} w(x)d\mu(x)$$

para $i = 0, 1$ *y* $\mathbf{f} \in S$ *con* N_0 *y* N_1 *constantes. Entonces* T *se extiende de manera única a un operador sublineal sobre* $L^p_w(l^r)$ *y existe una constante* N_θ *tal que*

$$\left(\int_X ||T\mathbf{f}(x)\|_{\ell^r}^p w(x)d\mu(x)\right)^{1/p} \;\leq\; N_\theta \left(\int_X ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p w(x)d\mu(x)\right)^{1/p}$$

donde $\frac{1}{p} = (1-\theta)\frac{1}{p_0} + \theta\frac{1}{p_1}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

LEMA 3.8. *Sean* $w(x) \geq 0$ *una función localmente integrable definida sobre* X, $1 < p < \infty$, $1 \leq r_i < \infty$, $i = 0, 1$ *y supongamos que* T *es un operador sublineal definido sobre* S *que satisface*

$$\left(\int_X ||T\mathbf{f}(x)\|_{\ell^{r_i}}^p w(x)d\mu(x)\right)^{1/p} \;\leq\; N_i \left(\int_X ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^{r_i}}^p w(x)d\mu(x)\right)^{1/p}$$

para algún N_i, *con* $i = 0, 1$ *y* $\mathbf{f} \in S$. *Entonces* T *se extiende de manera única a un operador sublineal sobre* $L^p_w(\ell^r)$ *tal que*

$$\left(\int_X ||T\mathbf{f}(x)\|_{\ell^r}^p w(x)d\mu(x)\right)^{1/p} \;\leq\; N_\theta \left(\int_X ||\mathbf{f}(x)\|_{\ell^r}^p w(x)d\mu(x)\right)^{1/p}$$

donde $\frac{1}{r} = (1-\theta)\frac{1}{r_0} + \theta\frac{1}{r_1}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Demostración del Teorema 3.6 Si $\mathbf{f} = (f_1, 0, 0, ...)$ entonces $\|\mathbf{f}(x)\|_r = |f_1(x)|$ y $\|M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}(x)\|_r = M_{\mathcal{D}}f_1(x)$. Por consiguiente si vale (a) se tiene el tipo débil (p, p) para $M_{\mathcal{D}}$ con peso w. Esto implica que $w \in A_p^{\mathcal{D}}$. Por lo tanto sólo debemos probar la suficiencia de la pertenencia a la clase $A_p^{\mathcal{D}}$ para (a) y (b). Observemos primero que (b) para el caso $p = r$ se obtiene fácilmente del Teorema de Beppo-Levi y la acotación en $L^p_w(X, d\mu)$ para $M_{\mathcal{D}}f$.

Comenzamos probando (a) para $1 \leq p < r$. Sea $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ y supongamos primero que $\mathbf{f} \in S$. El caso general se obtiene por densidad siguiendo argumentos usuales.

Tomemos $\lambda > 0$ y escribamos $\psi(x) = ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}$. Puesto que $f_n \equiv 0$ para n grande y ya que cada f_n es una función simple con soporte acotado, es claro que ψ pertenece a cada $L^p_w(X, d\mu)$. Como $\lambda > 0$, si el espacio total X es no acotado, o equivalentemente de medida μ infinita, entonces tenemos que $\lambda > m_X(\psi)$.

Puesto que $\mu(X) = \infty$ no es la situación general para espacios de tipo homogéneo, en este punto de la prueba hay que tener especial cuidado en el caso en que X es acotado. Asumamos entonces que $0 < \lambda < m_X(\psi)$. Supongamos primero que $p > 1$. Puesto que

$w \in A_p^{\mathcal{D}}$ y X mismo es un cubo diádico, de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_X \psi d\mu \leq \left(\int_X \psi^p w d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X w^{-\frac{p'}{p}} d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq C \left(\int_X \psi^p w d\mu\right)^{1/p} \frac{\mu(X)}{w(X)^{1/p}}.$$

Con lo cual

$$w(X) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \int_X \psi^p w d\mu.$$

Si $p = 1$,

$$w(X) < \frac{1}{\lambda} \int_X \psi(y) \frac{w(X)}{\mu(X)} d\mu(y) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X \psi(y) w(y) d\mu(y),$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $w \in A_1^{\mathcal{D}}$ y que X es un cubo diádico. Por lo tanto, puesto que $\{x \in X : ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} > \lambda\} \subseteq X$, la desigualdad en (a) queda probada si $0 < \lambda < m_X(\psi)$.

Sólo nos queda ver el caso $\lambda \geq m_X(\psi)$. Sea $\mathcal{F} = \{Q_i : i \in I\}$ la familia de cubos diádicos dada por el Theorem 3.1 aplicado a la función ψ y a λ. Sea $\Omega = \Omega_\lambda = \bigcup_{i \in I} Q_i$. Escribimos cada f_n como $f_n = f_{n,1} + f_{n,2}$, donde $f_{n,1} = f_n \chi_{X \setminus \Omega}$ y $f_{n,2} = f_n \chi_\Omega$. Luego, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, donde $\mathbf{f}_1 = (f_{n,1} : n \in \mathbb{N})$. De la sublinealidad del operador maximal de Hardy-Litllewood diádico y la desigualdad de Minkowski obtenemos que

$$||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} \leq ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r} + ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}_2(x)||_{\ell^r} = I_1(x) + I_2(x).$$

Empecemos por demostrar la desigualdad de tipo débil para $I_1(x)$. Puesto que, del Teorema 3.1, es $\psi(x) = ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} \leq C\lambda$ para casi todo $x \notin \Omega$, tenemos que para tales puntos x vale la siguiente desigualdad

$$||\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r}^r = ||\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r}^{r-p} ||\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r}^p \leq C\lambda^{r-p} ||\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r}^p.$$

Luego, por el Teorema 3.5 (f), tenemos que

$$\begin{aligned} w(\{x \in X : ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r} > \lambda/2\}) &\leq \frac{2^r}{\lambda^r} \int_X ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r}^r w(x) d\mu(x) \\ &\leq \frac{C_r 2^r}{\lambda^r} \int_X ||\mathbf{f}_1(x)||_{\ell^r}^r w(x) d\mu(x) \\ &\leq \frac{C_r 2^r}{\lambda^p} \int_X ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p w(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Con el fin de obtener el resultado para $I_2(x)$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |f_n(y)| d\mu(y) & \text{si } x \in Q_i, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$M_{\mathcal{D}} f_{n,2}(x) \leq C M_{\mathcal{D}} \tilde{f}_n(x), \tag{3.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \notin \Omega$. En efecto, sean $x \notin \Omega$ y $Q \in \mathcal{D}$ un cubo diádico que contenga al punto x. Escribimos $J = \{j : Q_j \in \mathcal{F} \text{ and } Q_j \bigcap Q \neq \emptyset\}$. Notemos que, si $j \in J$, puesto que Q_j y Q son cubos diádicos, entonces $Q_j \subseteq Q$ y de la definición de $f_{n,2}$ obtenemos que

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f_{n,2}| d\mu \;=\; \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{j \in J} \int_{Q_j \cap Q} |f_{n,2}| d\mu \;=\; \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{j \in J} \int_{Q_j} |f_{n,2}| d\mu.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f_{n,2}(y)| d\mu(y) &= \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{j \in J} \int_{Q_j} |f_n(y)| d\mu(y) \\
&= \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{j \in J} \int_{Q_j} \left[\frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} |f_n(y)| d\mu(y) \right] d\mu(z) \\
&= \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{j \in J} \int_{Q_j} |\tilde{f}_n(z)| d\mu(z) \\
&\leq C \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |\tilde{f}_n(y)| d\mu(y) \leq C M_{\mathcal{D}} \tilde{f}_n(x),
\end{aligned}$$

lo cual prueba (3.11).

Ahora escribimos

$$w(\{x \in X : I_2(x) > \lambda/2\}) \leq w(\Omega) + w(\{x \in X \setminus \Omega : I_2(x) > \lambda/2\}) = I + II.$$

Para estimar I comenzamos estimando $w(Q_j)$. Vamos a asumir primero que $p > 1$. De la desigualdad de Hölder's y puesto que $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda &< \frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} \, d\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{\mu(Q_j)} \left(\int_{Q_j} ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p w(x) \, d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_{Q_j} w(x)^{-p'/p} \, d\mu(x) \right)^{1/p'} \\
&\leq C \left(\int_{Q_j} ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p w(x) \, d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_{Q_j} w(x) \, d\mu(x) \right)^{-1/p}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$w(Q_j) \leq C \frac{1}{\lambda^p} \int_{Q_j} ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p w(x) \, d\mu(x).$$

En el caso $p = 1$ usando la condición $A_1^{\mathcal{D}}$ obtenemos que

$$w(Q_j) < \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} \frac{w(Q_j)}{\mu(Q_j)} \, d\mu(x) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r} w(x) \, d\mu(x).$$

Por lo tanto

$$I = \sum_{j\in I} w(Q_j) \leq \sum_{j\in I} \frac{C}{\lambda^p} \int_{Q_j} ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p w(x)\, d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_X ||\mathbf{f}(x)||_{\ell^r}^p w(x)\, d\mu(x).$$

La desigualdad en (a) para $p \leq r$ será una consecuencia de la desigualdad $II \leq cw(\Omega)$. En lo que sigue vamos a escribir $\tilde{\mathbf{f}}$ para denotar la sucesión $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_n : n \in \mathbb{N})$. Notemos que del Teorema 3.5 (f) tenemos que

$$\begin{aligned} II &\leq w(\{x \in X : ||M_{\mathcal{D}}\tilde{\mathbf{f}}(x)||_{\ell^r} > \lambda/2C\}). \\ &\leq \frac{2C}{\lambda^r} \int_X ||M_{\mathcal{D}}\tilde{\mathbf{f}}(x)||_{\ell^r}^r w(x) d\mu(x). \\ &\leq \frac{C}{\lambda^r} \int_X ||\tilde{\mathbf{f}}(x)||_{\ell^r}^r w(x) d\mu(x) \\ &= \frac{C}{\lambda^r} \int_\Omega ||\tilde{\mathbf{f}}(x)||_{\ell^r}^r w(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Denotando con $\tilde{Q}_j$ el primer ancestro del cubo $Q_j \in \mathcal{F}$ obtenemos, de la desigualdad de Minkowski's, que para cada $x \in \Omega$ vale que

$$\begin{aligned} ||\tilde{\mathbf{f}}(x)||_{\ell^r} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} |f_n(y)| d\mu(y) \right]^r \right)^{1/r} \\ &\leq \frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} ||\mathbf{f}(y)||_{\ell^r} d\mu(y) \\ &\leq \frac{C}{\mu(\tilde{Q}_j)} \int_{\tilde{Q}_j} ||\mathbf{f}(y)||_{\ell^r} d\mu(y) \leq C\lambda. \end{aligned}$$

Entonces

$$II \leq \frac{C}{\lambda^r} \int_\Omega \lambda^r w(x) d\mu(x) = Cw(\Omega),$$

como deseábamos.

Empecemos probando (b) para $1 < p < r$. Si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ entonces, del Teorema 3.5 (c) y (e), existen p_1 y p_2 con $1 \leq p_1 < p < p_2 < r$ tales que $w \in A_{p_1}^{\mathcal{D}}$ y $w \in A_{p_2}^{\mathcal{D}}$. Por lo tanto (a) vale para p_1 y p_2. Entonces del Lemma 3.7 obtenemos (b) para todo p tal que $p_1 < p < p_2$, y por lo tanto (b) vale para $1 < p < r$.

La prueba de (b) en el caso $p > r$ se obtiene por un argumento de dualidad si r es pequeño y por el Lemma 3.8 si r es grande. Primero notemos que como $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ con $p > r$, por el Teorema 3.5 (e), $w \in A_{\frac{p}{r_0}}^{\mathcal{D}}$ para algún $1 < r_0 < p$. Si $r_0 < r < p$, como (b) vale para $r = p$, sólo tenemos que probar (b) para r_0 y aplicar el Lema 3.8. Con lo cual sólo necesitamos probar (b) para $1 < r \leq r_0$.

Puesto que $w \in A_{\frac{p}{r_0}}^{\mathcal{D}}$, del Teorema 3.5 (c), $w \in A_q^{\mathcal{D}}$ para todo $q \geq \frac{p}{r_0}$ y del Teorema 3.5 (d) y (a), obtenemos que $w^{1-q'} \in A_{q'}^{\mathcal{D}}$ y $w(x) > 0$ en casi todo punto. Sea $\varphi \geq 0$

tal que $\varphi \in L^{q'}_w(X,\mu)$ con $||\varphi||_{q',w} \leq 1$. De la desigualdad con pesos diádicos para $M_{\mathcal{D}}$ obtenemos que

$$\int_X |M_{\mathcal{D}}(\varphi w)|^{q'} w(x)^{1-q'} d\mu(x) \leq C \int_X |\varphi w|^{q'} w(x)^{1-q'} d\mu(x) \leq C.$$

Luego, de la Proposición 3.4 y la desigualdad de Hölder con q y q'

$$\begin{aligned} \int_X ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}(x)||^r_{\ell^r} \varphi(x) w(x) d\mu(x) &\leq C \int_X ||\mathbf{f}(x)||^r_{\ell^r} M_{\mathcal{D}}(\varphi w)(x) d\mu(x) \\ &\leq CD \left(\int_X ||\mathbf{f}(x)||^{rq}_{\ell^r} w(x) d\mu(x) \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} D &= \left(\int_X \left(\frac{M_{\mathcal{D}}(\varphi w)(x)}{w(x)} \right)^{q'} w(x) d\mu(x) \right)^{1/q'} \\ &= \left(\int_X (M_{\mathcal{D}}(\varphi w)(x))^{q'} w(x)^{1-q'} d\mu(x) \right)^{1/q'} \leq C, \end{aligned}$$

para todo $q \geq \frac{p}{r_0}$ y toda $\varphi \geq 0$ tal que $||\varphi||_{q',w} \leq 1$. Entonces, tomando supremo sobre tales φ tenemos que

$$\left(\int_X ||M_{\mathcal{D}}\mathbf{f}(x)||^{rq}_{\ell^r} w(x) d\mu(x) \right)^{1/q} \leq C \left(\int_X ||\mathbf{f}(x)||^{rq}_{\ell^r} w(x) d\mu(x) \right)^{1/q},$$

para todo $q \geq \frac{p}{r_0}$. Por otro lado, puesto que $1 < r \leq r_0$, la anterior desigualdad vale con $q = p/r \geq p/r_0$, que es la desigualdad deseada (b). $\square$

CAPÍTULO 4

Sistemas de Haar asociados a familias diádicas

El sistema de Haar ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ dado por $h_k^j(x) = 2^{j/2}h(2^jx - k)$, con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$, donde $h(x) = \chi_{(0,1/2]}(x) - \chi_{(1/2,1]}(x)$ es sólo el más conocido de una amplia familia de bases de tipo Haar en una dimensión. En este caso, la familia de los intervalos diádicos $I_k^j = (k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$ es la familia diádica natural para tal sistema en el sentido que I_k^j es el conjunto donde h_k^j no se anula. Más aún, cada h_k^j es constante sobre los dos subintervalos I_{2k}^{j+1} y I_{2k+1}^{j+1} de I_k^j. Es claro que la familia de los intervalos diádicos I_k^j, con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$ forman una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(1/2)$ en el sentido de la Definición 2.3. Más aún, cualquier sistema de funciones de la forma $\{\varphi_k^j = \alpha_k^j h_k^j : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ con $\alpha_k^j = \pm 1$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$, cada función φ_k^j tiene a I_k^j como su soporte esencial y es constante sobre cada subintervalo diádico I_{2k}^{j+1} y I_{2k+1}^{j+1} de I_k^j. Es decir, las funciones φ_k^j, con $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$, forman otro sistema de tipo Haar.

El presente capítulo está dedicado a definir, demostrar la existencia y dar las propiedades básicas de lo que denominaremos sistema de Haar asociado a una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ para nuestro contexto general de espacio de tipo homogéneo. Los objetos que forman tales sistemas son los elementos básicos con los cuales nos dispondremos en los capítulos siguientes a hacer análisis sobre espacios de funciones definidas sobre espacios métricos con medida. Comenzamos en la primer sección dando la definición precisa de sistema de Haar y demostrando algunas propiedades básicas de tales sistemas. En la segunda sección mostramos que toda familia diádica induce una estructura de tipo análisis multirresolución. Para tal fin son claves algunos resultados de densidad que también probamos. La sección siguiente muestra que sobre toda familia diádica pueden construirse siempre sistemas de Haar. Para tal fin seguimos la construcción dada por Aimar (ver tambien [**2**] o [**9**]) para el caso de los cubos de Christ. La última sección está dedicada a enunciar un resultado de caracterización de espacios de Lebesgue pesados con pesos en las clases $A_p^{\mathcal{D}}$, $1 < p < \infty$. Es importante destacar que todos los resultados de las tres útimas secciones del presente capítulo son generalizaciones de resultados dados en [**2**]. Más aún, las demostraciones de los enunciados de tales secciones se siguen como en [**2**] ya que la definición de sistema de Haar que damos en la Sección 1 fue inspirada en los cubos de Christ.

4.1. Los sistemas $\mathcal{H}$

Comencemos dando la definición de sistema de Haar que adoptaremos a partir de aquí y que usaremos a lo largo del presente trabajo.

Definición 4.1. **Sistema de Haar asociado a $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$.** Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en $\mathfrak{D}(\delta)$ sobre (X, d, μ). Un sitema $\mathcal{H}$ de funciones reales simples medibles y borelianas h definidas sobre X es un sistema de Haar asociado a $\mathcal{D}$ si satisface

(h.1) *Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe un único $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$, y esta propiedad no vale para ningún cubo en $\mathcal{D}^{j+1}$.*

(h.2) *Para todo $Q \in \tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}^j$ existen exactamente $M_Q = \#(\mathcal{O}(Q)) - 1 \geq 1$ funciones $h \in \mathcal{H}$ tales que (h.1) vale, donde $\mathcal{O}(Q) = \{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}$ si $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^j$. Escribiremos $\mathcal{H}_Q$ para denotar el conjunto de todas estas funciones h.*

(h.3) *Para cada $h \in \mathcal{H}$ se tiene que $\int_X h d\mu = 0$.*

(h.4) *Para cada $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ sea V_Q el espacio vectorial de todas las funciones definidas sobre Q que son constantes sobre cada $Q' \in \mathcal{O}(Q)$. Entonces el sitema $\{\frac{\chi_Q}{(\mu(Q))^{1/2}}\} \bigcup \mathcal{H}_Q$ es una base ortonormal para V_Q.*

Es importante destacar que de *(h.1)* y *(h.4)* se tiene que las funciones $h \in \mathcal{H}$ son constantes sobre cada cubo diádico $Q' \in \mathcal{O}(Q(h))$, donde $Q(h)$ es el cubo dado en *(h.1)*. Más precisamente, cada $h \in \mathcal{H}$ es de la forma

$$h = \sum_{i\in I} a_i \chi_{Q_i}, \tag{4.1}$$

para algún conjunto de índices I que es un intervalo inicial de los naturales y donde $Q_i \in \mathcal{O}(Q(h))$. Además, valen las siguientes dos propiedades adicionales. Como es usual, para una función medible f escribimos $\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = sup\ ess|f|$.

(h.5) *Existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que las desigualdades*

$$c_1 \mu(Q')^{-1/2} \leq \|h\|_\infty \leq c_2 \mu(Q(h))^{-1/2},$$

valen para cada función $h \in \mathcal{H}$ y cada $Q' \in \mathcal{O}(Q(h))$.

(h.6) *Para cada $h \in \mathcal{H}$ tenemos que*

$$\|h\|_\infty \chi_{Q'_h}(x) \leq |h(x)| \leq \|h\|_\infty \chi_{Q(h)}(x),$$

para todo punto $x \in X$ y algún cubo diádico $Q'_h \in \mathcal{O}(Q(h))$.

En efecto. Sea $h = \sum_{i\in I} a_i \chi_{Q_i}$ como en (4.1). Como los Q_i son disjuntos dos a dos, de *(h.4)* obtenemos que

$$a_{i_0}^2 \mu(Q_{i_0}) \leq \sum_{i\in I} a_i^2 \mu(Q_i) = \|h\|^2_{L^2(X,\mu)} = 1,$$

para cada $i_0 \in I$. Entonces,

$$a_i \leq (\mu(Q_i))^{-1/2},$$

para cada $i \in I$. Así, de *(d.8)*, $a_i \leq C(\mu(Q(h)))^{-1/2}$ para todo $i \in I$ y alguna constante positiva C, lo que prueba la desigualdad derecha de *(h.5)*.
Para probar la desigualdad izquierda de *(h.5)*, notemos primero que a partir de *(d.8)* tenemos que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\mu(Q_i)}{\mu(Q_j)} \leq C, \tag{4.2}$$

para todo $i, j \in I$ y C la constante de *(d.8)*. En efecto, por *(d.8)* tenemos que $\mu(Q_i) \leq \mu(Q(h)) \leq C\mu(Q_i)$. Por otro lado, si para cada $i \in I$ se tuviera que $|a_i| < (N\mu(Q_i))^{-1/2}$, entonces de *(h.4)* tendriamos que

$$1 = \sum_{i \in I} a_i^2 \mu(Q_i) < 1,$$

que es un absurdo. Por lo tanto, existe al menos un $i_0 \in I$ tal que $|a_{i_0}| \geq (N\mu(Q_{i_0}))^{-1/2}$. Luego, puesto que $\|h\|_\infty \geq |a_{i_0}|$, de (4.2) obtenemos la desigualdad izquierda de *(h.5)* con $c_1 = \text{mín}\{(N)^{-1/2}, (CN)^{-1/2}\}$.
La prueba de *(h.6)* es inmediata de (4.1). En efecto, sea $i_0 \in I$ tal que $\|h\|_\infty = a_{i_0}$. Entonces tenemos *(h.6)* tomando $Q_h^{'} = Q_{i_0}$.

4.2. Estructura de multirresolución

Veremos en la presente sección que todo familia diádica induce una estructura de tipo análisis multirresolución sobre un espacio de tipo homogéneo. Comencemos con la prueba del siguiente lema.

Lema 4.2. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces, para cada conjunto abierto y acotado G de X, existe una subfamilia $\mathcal{G}$ de cubos diádicos de $\mathcal{D}$, disjuntos dos a dos, tal que*

$$\mu\left(G \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q\right) = 0.$$

Demostración. Para definir la familia $\mathcal{G}$, fijamos un punto $x \in G \bigcap \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{D}}\right)$ y tomamos $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq G$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande tal que $2a_2\delta^j < r/2$, donde a_2 es la constante dada en *(d.5)*. Entonces existe un único $Q_x \in \mathcal{D}^j$ tal que $x \in Q_x$. Más aún, $Q_x \subseteq B(x, r) \subseteq G$. En efecto, de nuestra elección para j tenemos que si $y \in Q_x$

y $\mathcal{P}^j(Q_x)$ es la imágen del cubo Q_x via la función punto central $\mathcal{P}^j$ definida en el Capítulo 2, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(y,\mathcal{P}^j(Q_x)) + d(\mathcal{P}^j(Q_x),x) \\ &\leq 2a_2\delta^j + 2a_2\delta^j < r. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la familia $\mathcal{D}_x(G) = \{Q \in \mathcal{D} : x \in Q \subseteq G\}$. Puesto que $Q_x \in \mathcal{D}_x(G)$ y G es acotado, resulta ser $\mathcal{D}_x(G)$ acotado superiormente con respecto a la inclusión de conjuntos. Luego, para cada $x \in G \bigcap \left(\bigcup_{Q\in\mathcal{D}}\right)$ denotamos con $Q(x)$ el elemento maximal de $\mathcal{D}_x(G)$. Definiendo entonces la familia $\mathcal{G}$ como

$$\mathcal{G} = \left\{ Q(x) : x \in G \bigcap \left(\bigcup_{Q\in\mathcal{D}} \right) \right\},$$

concluimos la prueba del lema. □

El siguiente resultado establece que las funciones simples sobre cubos diádicos son suficientes para definir los espacios de Lebesgue clásicos sobre espacios de tipo homogéneo con medida regular.

Proposición 4.3. *Sean μ una medida regular, (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica. Entonces el espacio de todas las combinaciones lineales finitas de funciones características de cubos diádicos $Q \in \mathcal{D}$ es denso en cada espacio de Lebesgue $L^p(X,\mu)$ cuando $p < \infty$.*

Demostración. Sean $p < \infty$ y $f \in L^p(X,\mu)$ una función no negativa. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $x_0 \in X$ y $R > 0$ tal que $\|f\chi_{X\setminus B(x_0,R)}\|^p_{L^p} < \varepsilon$. Sea $f_R = f\chi_{B(x_0,R)}$. Puesto que f_R puede ser aproximada de manera creciente por funciones simples de subconjuntos disjuntos de Borel acotados, existe una función

$$g = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \chi_{E_n},$$

con E_n subconjuntos acotados de Borel de X tal que $\|h - g\|^p_{L^p} < \varepsilon$. Puesto que μ es una medida regular, para cada $n = 1,...,N$ existe un conjunto abierto y acotado G_n tal que $E_n \subseteq G_n$ y $\mu(G_n \setminus E_n) < \varepsilon$. Para cada $n = 1,...,N$ denotamos con $\mathcal{G}_n$ la subfamilia de $\mathcal{D}$ dada por el lema anterior para el conjunto abierto G_n. Asumamos que $\mathcal{G}_n = \{Q_{n,l} \in \mathcal{D} : l \in L(n)\}$ donde $L(n)$ es un intervalo inicial de enteros positivos que en general coincide con $\mathbb{Z}^+$. Luego, para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos la función

$$\Psi_j(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \sum_{l\in L(n):l\leq j} \chi_{Q_{n,l}}(x),$$

que resulta ser una combinación lineal finita de características de cubos diádicos y que para j suficientemente grande se tiene que

$$\|g - \Psi_j\|_{L^p}^p < \varepsilon \left(\sum_{n=1}^{N} \beta_n \right)^p .$$

Por lo tanto, las combinaciones lineales de funciones características sobre cubos diádicos son densas en lada espacio de Lebesgue $L^p(X,\mu)$. □

Veamos ahora cómo las familias diádicas inducen cierta estructura de análisis multirresolución. Fijemos $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ sobre un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) dado. Para cada entero j definimos V_j como el subespacio cerrado de $L^2(X,\mu)$ de todas las funciones f que son constantes, salvo en conjuntos de medida nula, sobre cada cubo diádico $Q \in \mathcal{D}_j$.

TEOREMA 4.4. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica. La sucesión $(V_j : j \in \mathbb{Z})$ satisface las siguientes propiedades de análisis multirresolución.*

(a) *Para todo entero j se tiene que $V_j \subseteq V_{j+1}$.*
(b) *La unión de los espacios V_j con $j \in \mathbb{Z}$ es denso en $L^2(X,\mu)$.*
(c) *La intersección de todos los espacios V_j con $j \in \mathbb{Z}$ es el espacio unidimensional de todas las funciones constantes sobre X si $\mu(X) < \infty$.*
(d) *La intersección de todos los espacios V_j con $j \in \mathbb{Z}$ se reduce a la función nula si $\mu(X) = \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. La propiedad (a) es inmediata. Para demostrar (b), tomemos $f \in L^2(X,\mu)$ y $\varepsilon > 0$. De la proposición anterior existe un entero positivo N y una función $\psi = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \chi_{Q_n}$ con $Q_n \in \mathcal{D}$ tal que $\|\psi - f\|_2 < \varepsilon$. Por otro lado, cada cubo diádico Q_n puede ser descompuesto (salvo un conjunto de medida nula) como una unión finita disjunta de cubos diádicos de $\mathcal{D}_j$ donde $j = max\{i \in \mathbb{Z} : Q_n \in \mathcal{D}_i, n = 1, ..., N\}$. Entonces claramente $\psi \in V_j$. Ahora probamos (c). Como la medida del espacio total X es finita, de *(d.10)* se sigue que $X = Q \in \mathcal{D}_{j_0}$ para algún $j_0 \in \mathbb{Z}$. Entonces V_{j_0} es el espacio de todas las funciones constantes sobre X. Por lo tanto, $V_j = Vv_{j_0}$ para cada $j \leq j_0$. Además, de (a), tenemos que $V_{j_0} \subseteq V_j$ para cada $j \geq j_0$. Esto es, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = V_{j_0}$. Finalmente probamos ($d$). Sea f una función que pertenece a cada espacio V_j con $j \in \mathbb{Z}$. Puesto que $f \in V_0$, entonces f es constante sobre cada cubo diádico $Q \in \mathcal{D}_0$. Si alguna de estas constantes fuera diferente de cero, necesariamente deberíamos tener que f toma el mismo valor constante sobre todo el cuadrante que contenga a Q. Pero esto no puede ocurrir para una función de $L^2(X,\mu)$ si $\mu(X) = \infty$ ya que por ($c3$) cada cuadrante tiene medida infinita. Por lo tanto f es la función nula. □

4.3. La construcción de Aimar

La Definición 4.1 es axiomática y cabe entonces preguntarse si existen sistemas de tipo Haar para cualquier familia diádica dada. Dedicamos esta sección a tratar tal cuestión. Para tal fin, aplicamos la misma construcción de wavelets de tipo Haar que H. Aimar hace en [**1**] sobre los cubos de Christ (ver tambien [**9**] y [**2**]) a nuestro contexto general de familia diádica. Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Para cada cubo diádico $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ consideremos el espacio V_Q de todas las funciones sobre Q que son constantes sobre cada cubo $Q' \in \mathcal{O}(Q)$. Entonces el conjunto $\{\chi_Q, \chi_{Q'} : Q' \in \tilde{\mathcal{O}}(Q)\}$ donde $\tilde{\mathcal{O}}(Q) = \mathcal{O}(Q) \setminus \{Q'_0\}$ con Q'_0 cualquier cubo diádico fijo en $\mathcal{O}(Q)$, es una base para V_Q. Aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a partir de la función característica del cubo Q, $\chi_Q(x) = 1$ si $x \in Q$ y $\chi_Q(x) = 0$ si $x \notin Q$, obtenemos una base ortonormal $\mathcal{B}_Q = \{(\mu(Q))^{-1/2}\chi_Q\} \bigcup \{h_{Q,l} : l = 1, ..., \#(\tilde{\mathcal{O}}(Q))\}$ del espacio V_Q. Luego, el sistema $\mathcal{H} = \{h_{Q,l} : Q \in \tilde{\mathcal{D}}^j, l = 1, ..., \#(\tilde{\mathcal{O}}(Q)), j \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema de Haar en el sentido de la Definición 4.1. Más aún, si para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos W_j como la clausura en $L^2(X, \mu)$ de las combinaciones lineales finitas de elementos del conjunto $\{h_{Q,l} : Q \in \tilde{\mathcal{D}}^j, l = 1, ..., \#(\tilde{\mathcal{O}}(Q))\}$ y $W_j = \{0\}$ si $\tilde{\mathcal{D}}^j = \emptyset$, entonces $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ con V_j como en la sección anterior.

4.4. $\mathcal{H}$ como base incondicional de espacios de Lebesgue con pesos

En esta última sección enunciamos el resultado de caracterización via coeficientes de Haar de los clásicos espacios de Lebesgue pesados $L^p_w(X, \mu)$, con $w \in A^{\mathcal{D}}_p$ y $1 < p < \infty$, en el contexto de espacios de tipo homogéneo. Además de tal caracterización, el resultado aquí expuesto muestra que los sistemas de Haar introducidos en la Definición 4.1 resultan ser base incondicional para dichos espacios. La demostración de estos resultados siguen de las pruebas de los Teoremas 7.1 y 9.1 en [**2**].

En lo que sigue denotaremos con $\mathcal{L}^p_w$ al espacio $L^p_w = \{f : (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty\}$ si $\mu(X) = \infty$ y al espacio de aquellas funciones en $L^p_w(X, \mu)$ con integral nula si $\mu(X) < \infty$. Además, usaremos la siguiente notación,

$$T_F(f) = \sum_{h \in F} < f, h > h = \sum_{h \in F} \left(\int_X fh \, d\mu \right) h,$$

donde F es un subconjunto finito de $\mathcal{H}$ y

$$\mathcal{S}(f)(x) = \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} |< f, h >|^2 |h(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

TEOREMA 4.5. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $\mathcal{H}$ un sistema de Haar asociado a la familia diádica $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$. Si $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\mathcal{D}}_p$, entonces*

(1) Existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que para toda $f \in \mathcal{L}^p_w(X,\mu)$ tenemos que

$$C_1\|f\|_{L^p_w} \leq \|\mathcal{S}(f)\|_{L^p_w} \leq C_2\|f\|_{L^p_w};$$

(2) $\mathcal{H}$ es una base incondicional para $\mathcal{L}^p_w(X,\mu)$ en el sentido que

(2.1) Los operadores T_F están uniformemente acotados sobre $\mathcal{L}^p_w$ con F variando sobre subconjuntos finitos de $\mathcal{H}$,

(2.2) para cada $h \in \mathcal{H}$ los funcionales $< f, h >= \int_X fh\, d\mu$, son lineales y continuos para $f \in \mathcal{L}^p_w$,

(2.3) las combinaciones lineales de elementos de $\mathcal{H}$ son densas en $\mathcal{L}^p_w$.

Notemos que, como la condición A_p usual sobre bolas implica la condición $A_p^{\mathcal{D}}$ para cualquier familia diádica $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$, se tiene que el teorema anterior vale para pesos de Muckenhoupt usuales en el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ).

CAPÍTULO 5

Equivalencia de bases de Haar en espacios de Lebesgue

En este capítulo estudiamos la equivalencia, en el sentido de equivalencia de bases de Schauder en el sentido definido en [**56**] (o en [**38**]), de bases de tipo Haar construidas sobre diferentes familias diádicas en espacios de tipo homogéneo. Un contexto muy general de sistemas de Haar definidos sobre diferentes familias diádicas es proporcionado por la construcción de Christ dada en [**20**] y los sistemas de Haar definidos sobre ellos. En efecto, el algoritmo de construcción de los cubos de Christ que brevemente hemos bosquejado en el Capítulo 2, Teorema 2.23, se basa en procesos de selección de puntos sobre una familia fija de redes. Tal selección, si bien está condicionada por la métrica subyacente en el espacio, no es única y por lo tanto se pueden construir en general diferentes descomposiciones del espacio en cubos de Christ.

Abordaremos en este capítulo el problema de determinar condiciones sobre sistemas diádicos para que los sistemas de Haar definidos sobre ellos sean equivalentes en los espacios de Lebesgue pesados. En general, buscamos condiciones geométricas sobre dos familias $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ en $\mathfrak{D}(\delta)$ para algún δ fijo, tales que sistemas de tipo Haar $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ asociados a las familias $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ respectivamente sean equivalentes sobre los espacios de Lebesgue pesados $L^p_w(X,\mu)$, $1<p<\infty$. Cuando el peso w pertenece a la clase de pesos de Muckenhoupt A_p, damos condiciones geométricas simples sobre las familias $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ para obtener la equivalencia de los sistemas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ en tales espacios. Una herramienta central en este caso es la desigualdad de Fefferman-Stein (ver Teorema 1.7). Para el caso de pesos $w\in A_p^{\mathcal{D}_1}$ o $w\in A_p^{\mathcal{D}_2}$ obtenemos condiciones geométricas más restrictivas sobre las familias $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ que implican la equivalencia en $L^p_w(X,\mu)$ de los sistemas de Haar asociados a $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$. Aquí nuevamente la herramienta central es una desigualdad de Fefferman-Stein, pero en este caso tal desigualdad es la dada en el Teorema 3.6 que involucra maximales diádicas.

Algunos de los principales resultados del presente capítulo están contenidos en [**5**] y en [**8**] y han sido aceptados para su publicación en Journal of Geometric Analysis y en los Proceeding de la Royal Society de Edinburgo, respectivamente. El capítulo está organizado como sigue. En la primer sección definimos equivalencia de familias diádicas y demostramos algunas de las propiedades básicas. Las secciones 2 y 3 están dedicadas a estudiar la equivalencia de sistemas de Haar en $L^p_w(X,\mu)$ con $w \in A_p$ y $w \in A_p^{\mathcal{D}}$, respectivamente. Por último, probamos la equivalencia de sistemas de Haar definidos sobre diferentes familias diádicas de Christ construidas sobre una familia fija de redes de puntos del espacio subyacente.

5.1. Equivalencia de familias diádicas

Abordaremos en esta sección el problema de identificar aquellas familias diádicas que son *similares* desde un punto de vista geométrico. Esto nos conducirá a diferentes definiciones de equivalencia de familias diádicas. La idea de similitud que precisaremos en las definiciones se centra en identificar aquellas familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ (δ fijo) que tengan casi el mismo comportamiento tanto en escalas como en posiciones en el espacio.

En lo que sigue vamos a suponer dados δ y dos familias diádicas $\mathcal{D}_1 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_1^j$ y $\mathcal{D}_2 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_2^j$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ sobre un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ). Denotaremos con Q a los elementos de la familia diádica $\mathcal{D}_1$, con R aquellos cubos diádicos en la familia $\mathcal{D}_2$, y con $\mathcal{J}_i$ la función en *(d.13)* para $\mathcal{D}_i, i = 1,2$. Escribiremos además $\tilde{\mathcal{D}}_i, i = 1,2$ para denotar la clase con descendencia no trivial de $\mathcal{D}_i$. La Proposición 2.19 muestra que las familias $\tilde{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{D}$, con $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$, son casi las mismas. En efecto, difieren sólo en cubos que son átomos. Para nuestro propósito bastará entonces dar las definiciones de equivalencia de familias diádicas en términos de las subfamilias diádicas con descendencia no trivial. Comenzamos con la primer definición de equivalencia de familias diádicas.

Definición 5.1. **Equivalencia de familias diádicas.** Decimos que dos familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ para un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) son equivalentes, brevemente $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, si existe una constante positiva y finita C y una relación $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ tales que

(e1) para cada cubo diádico $Q \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ existe un cubo diádico $R \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ tal que $(Q,R) \in \mathfrak{R}$;

(e2) para cada cubo diádico $R \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ existe un cubo diádico $Q \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ tal que $(Q,R) \in \mathfrak{R}$;

(e3) $|\mathcal{J}_1(Q) - \mathcal{J}_2(R)| \leq C$, para todo $(Q,R) \in \mathfrak{R}$ y

(e4) $d(Q,R) = inf\{d(x,y) : x \in Q, y \in R\} \leq C\delta^{\mathcal{J}_1(Q)}$ para todo $(Q,R) \in \mathfrak{R}$.

Las condiciones (e1) y (e2) en la definición anterior indican que el dominio y la imagen de la relación $\mathfrak{R}$ es todo $\tilde{\mathcal{D}}_1$ y $\tilde{\mathcal{D}}_2$ respectivamente. Las condiciones (e3) y (e4) establecen que las familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ describen al espacio X de manera similar en los parámetros de escala y posición. En efecto, (e3) indica que cubos relacionados están en escalas cercanas y (e4) nos dice que cubos relacionados ocupan regiones cercanas en el espacio.

Notemos que la condición (e4) luce no simétrica ya que interviene sólo $\mathcal{J}_1(Q)$ y ningún rol aparenta tener $\mathcal{J}_2(R)$. Sin embargo, podemos obtener el siguiente resultado.

TEOREMA 5.2. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathfrak{D}(\delta)$ la clase de familias diádicas en X para δ fijo. Entonces la relación $\sim$ definida en la Definición 5.1 sobre la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ es una relación de equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba del teorema debemos mostrar las siguientes tres propiedades: reflexividad, simetría y transitividad que caracterizan a una relación de equivalencia. La prueba de la propiedad reflexiva es muy simple. En efecto, tomemos $C = 0$ y la relación $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}} \times \tilde{\mathcal{D}}$ como la relación identidad, esto es, $(Q, Q^{'}) \in \mathfrak{R}$ si y sólo si $Q = Q^{'}$. Luego inmediatamente se tiene que $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}$.
Para probar la simetría tomemos dos familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ tal que $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Sean C_0 una constante positiva y $\mathfrak{R}$ una relación contenida en $\tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ tales que las condiciones (e1) a (e4) valen. Es claro que la relación inversa de $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^{-1}$, satisface las condiciones (e1) a (e3) con la misma constante C_0. Veamos que (e4) también vale para $\mathfrak{R}^{-1}$ con constante $C_0\delta^{-C_0}$. De la condición (e3) para la relación $\mathfrak{R}^{-1}$ tenemos que $-C_0 \le \mathcal{J}_1(Q) - \mathcal{J}_2(R) \le C_0$ para todo par $(R, Q) \in \mathfrak{R}^{-1}$. Entonces por (e4) para la relación $\mathfrak{R}$ y por ser $0 < \delta^{C_0} < 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} d(R, Q) &= d(Q, R) \\ &\le C_0\delta^{\mathcal{J}_1(Q)} \\ &\le C_0\delta^{\mathcal{J}_2(R)-C_0} \\ &\le C_0\delta^{-C_0}\delta^{\mathcal{J}_2(R)}, \end{aligned}$$

para todo par $(R, Q) \in \mathfrak{R}^{-1}$. Por lo tanto $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_1$ y la simetría queda probada.
Por último probamos la transitividad. Sean $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ y $\mathcal{D}_3$ tres familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ tales que $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ y $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_3$. Denotemos con S a los cubos diádicos en $\mathcal{D}_3$ y con $\mathcal{J}_3$ la función en *(d.13)* para la familia $\mathcal{D}_3$. Sean $\mathfrak{R}_i$, $i = 1, 2$ relaciones contenidas en $\tilde{\mathcal{D}}_i \times \tilde{\mathcal{D}}_{i+1}$ y C_i constantes tales que las condiciones (e1) a (e4) valen para la equivalencia entre $\mathcal{D}_i$ y $\mathcal{D}_{i+1}$. Veamos que la relación $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_3$ dada por la composición de las relaciones $\mathfrak{R}_2$ y $\mathfrak{R}_1$, esto es, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_2 \; o \; \mathfrak{R}_1$, satisface las condiciones (e1) a (e4) con constante $C = (1 + \delta^{-C_1})(C_1 + C_2)$. En efecto, a partir de las condiciones (e1) y (e2) para las relaciones $\mathfrak{R}_2$ y $\mathfrak{R}_1$ se cumplen tambén éstas para la relación $\mathfrak{R}$. Para ver (e3) y (e4) fijemos, para cada par $(Q, S) \in \mathfrak{R}$, un cubo diádico $R_{Q,S}$ en la familia diádica $\mathcal{D}_2$ tal que

$(Q, R_{Q,S}) \in \mathfrak{R}_1$ y $(R_{Q,S}, S) \in \mathfrak{R}_2$. Luego, si $(Q,S) \in \mathfrak{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_1(Q) - \mathcal{J}_3(S)| &\leq |\mathcal{J}_1(Q) - \mathcal{J}_2(R_{Q,S})| + |\mathcal{J}_2(R_{Q,S}) - \mathcal{J}_3(S)| \\ &\leq C_1 + C_2 \leq (1 + \delta^{-C_1})(C_1 + C_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(Q,S) &\leq d(Q, R_{Q,S}) + d(R_{Q,S}, S) \\ &\leq C_1 \delta^{\mathcal{J}_1(Q)} + C_2 \delta^{\mathcal{J}_2(R_{Q,S})} \\ &\leq (C_1 + C_2)(1 + \delta^{-C_1}) \delta^{\mathcal{J}_1(Q)}, \end{aligned}$$

donde en la última cadena de desigualdades hemos usado la condición (e4) para las relaciones $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ y la condición (e3) para $\mathfrak{R}_2$. Por lo tanto la transitividad queda demostrada y esto concluye la prueba del teorema. □

El resultado enunciado a continuación del siguiente lema muestra que toda relación dada por la Definición 5.1 es *casi una función invertible*.

Lema 5.3. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ para algún $0 < \delta < 1$. Si un subconjunto $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ satisface las condiciones (e3) y (e4) con constante C, entonces existe una constante positiva y finita $\tilde{C}$ tal que para cada par $(Q,R) \in \mathfrak{R}$ se tiene que las inclusiones*

(a) $R \subseteq B_d(\mathcal{P}_1^{\mathcal{J}_1(Q)}(Q), \tilde{C}\delta^{\mathcal{J}_1(Q)})$ y

(b) $Q \subseteq B_d(\mathcal{P}_2^{\mathcal{J}_2(R)}(R), \tilde{C}\delta^{\mathcal{J}_2(R)})$,

valen para cualquier par de funciones punto central $\mathcal{P}_1^{\mathcal{J}_1(Q)}$ y $\mathcal{P}_2^{\mathcal{J}_2(R)}$

Demostración. Debido a la simetría entre las inclusiones (a) y (b), basta con probar una de ellas. Probamos (a). Sea $(Q,R) \in \mathfrak{R}$ y fijemos $\mathcal{P}_1^{\mathcal{J}_1(Q)}$, una función punto central. Denotemos con x_Q la imágen del cubo diádico Q via la función $\mathcal{P}_1^{\mathcal{J}_1(Q)}$, esto es, $x_Q = \mathcal{P}_1^{\mathcal{J}_1(Q)}(Q)$. Notemos que como $\overline{Q}$ y $\overline{R}$, las clausuras de los cubos diádicos Q y R respectivamente, son conjuntos cerrados y acotados, entonces de (e4) existen puntos $\overline{x} \in \overline{Q}$ y $\overline{y} \in \overline{R}$ tales que $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(Q,R) \leq C\delta^{\mathcal{J}_1(Q)}$. Por otro lado, de (e3) y por ser $0 < \delta < 1$ tenemos que $\delta^{\mathcal{J}_1(R)} \leq \delta^{\mathcal{J}_1(Q) - C}$. De las últimas dos desigualdades y *(d.5)* obtenemos la inclusión en (a). En efecto, si $z \in R$, entonces

$$\begin{aligned} d(z, x_Q) &\leq d(z, \overline{y}) + d(\overline{y}, \overline{x}) + d(\overline{x}, x_Q) \\ &\leq (4a_2\delta^{-C} + C + 2a_2)\delta^{\mathcal{J}_1(Q)}, \end{aligned}$$

donde a_2 es la constante en la cota para el radio exterior de los cubos diádicos dada en *(d.5)*. □

PROPOSICIÓN 5.4. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo con $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Sea $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ una relación tal que las condiciones (e3) y (e4) valen para alguna constante positiva y finita C. Entonces, existe otra constante positiva y finita C_1 tal que $\#(\{R \in \tilde{\mathcal{D}}_2 : (Q,R) \in \mathfrak{R}\}) \le C_1$ y $\#(\{Q \in \tilde{\mathcal{D}}_1 : (Q,R) \in \mathfrak{R}\}) \le C_1$, para todo cubo diádico $Q \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ y todo cubo diádico $R \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos la primer estimación. Sea Q un cubo diádico en la familia $\tilde{\mathcal{D}}_1$. Definimos, para cada entero j, el conjunto $\mathcal{V}(Q,j) = \{R \in \tilde{\mathcal{D}}_2 : (Q,R) \in \mathfrak{R}$ y $\mathcal{J}_2(R) = j\}$. Notemos que $\{R \in \tilde{\mathcal{D}}_2 : (Q,R) \in \mathfrak{R}\} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}(Q,j)$. Más aún, de la condición (e3) tenemos que si $|j - \mathcal{J}_1(Q)| > C$ entonces $\mathcal{V}(Q,j) = \emptyset$. Por lo tanto bastará con probar que existe una constante $\hat{C}$, independiente de Q y j, tal que si $|j - \mathcal{J}_1(Q)| \le C$ entonces $\#(\mathcal{V}(Q,j)) \le \hat{C}$. Para tal fin, fijemos una función punto central $\mathcal{P}_2^{\mathcal{J}_2(R)} : \mathcal{D}_2 \longrightarrow X$. De la Proposición 2.15 tenemos que el conjunto $E = \{\mathcal{P}_2^{\mathcal{J}_2(R)}(R') : (Q,R') \in \mathfrak{R}\}$ es $a_1\delta^{\mathcal{J}_2(R)}$-disperso. Como $0 < \delta < 1$, de (e3) tenemos que $\delta^{\mathcal{J}_2(R)} \ge \delta^C \delta^{\mathcal{J}_1(Q)}$ y entonces E es $a_1\delta^C\delta^{\mathcal{J}_1(Q)}$-disperso. Del lema anterior se sigue que $E \subseteq B_d(\mathcal{P}_1^{\mathcal{J}_1(Q)}(Q), \hat{C}a_1\delta^C\delta^{\mathcal{J}_1(Q)})$, donde $\hat{C} = \tilde{C}/a_1\delta^C$ y $\tilde{C}$ como en dicho lema. Sea $\tilde{N}$ la constante de homogeneidad del espacio (X,d,μ) y m el primer entero positivo tal que $\hat{C} \le 2^m$. De la definición de $\hat{C}$, la elección de m y el Teorema 1.3 obtenemos que $\#(E) = \#(E \cap B_d(\mathcal{P}_1^{\mathcal{J}_1(Q)}(Q), 2^m a_1\delta^C\delta^{\mathcal{J}_1(Q)})) \le \tilde{N}^m$. Puesto que la preimagen del conjunto E via la función $\mathcal{P}_2^{\mathcal{J}_2(R)}$, $\left(\mathcal{P}_2^{\mathcal{J}_2(R)}\right)^{-1}(E)$, es $\mathcal{V}(Q,j)$ y toda función punto central es inyectiva, tenemos que $\#(\mathcal{V}(Q,j)) \le \tilde{N}^m$. La demostración de la otra estimación se obtiene de manera análoga fijando un cubo diádico $R \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ y estimando, igual que antes, $\#(\mathcal{V}(R,j))$. □

En diversas ocasiones la condición (e4) deberá cambiarse por una condición más restrictiva con respecto a la distancia. Tal condición está contenida en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.5. **Familias diádicas rígidamente equivalentes.** Decimos que dos familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ en un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) son rígidamente equivalentes, brevemente $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$, si existe un entero positivo n y una relación $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ tal que

($\tilde{e}1$) para cada cubo diádico $Q \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ existe un cubo diádico $R \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ tal que $(Q,R) \in \mathfrak{R}$;

($\tilde{e}2$) para cada cubo diádico $R \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ existe un cubo diádico $Q \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ tal que $(Q,R) \in \mathfrak{R}$;

($\tilde{e}3$) $|\mathcal{J}_1(Q) - \mathcal{J}_2(R)| \le n$, para todo $(Q,R) \in \mathfrak{R}$;

($\tilde{e}4$) para todo $(Q,R) \in \mathfrak{R}$ existen dos cubos diádicos $Q' \in \mathcal{D}_1^{\mathcal{J}_1(Q)+n}$ y $R' \in \mathcal{D}_2^{\mathcal{J}_2(R)+n}$ tales que $Q' \cup R' \subseteq Q \cap R$.

La denominación *rígidamente equivalentes* viene sugerida por el inciso (b) en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 5.6. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Sea además $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ una relación que satisface $(\tilde{e1})$ a $(\tilde{e4})$ con constante n. Entonces*

(a) $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$*;*

(b) para todo par $(Q, R) \in \mathfrak{R}$ se tiene que $\mathcal{C}(Q) \cap \mathcal{C}(R) \neq \emptyset$, donde $\mathcal{C}(Q)$ y $\mathcal{C}(R)$ son los cuadrantes asociados a Q y R respectivamente;

(c) existen dos constantes positivas y finitas c_1 y c_2 tales que $c_1\mu(Q) \leq \mu(Q \cap R) \leq c_2\mu(Q)$, para todo par $(Q, R) \in \mathfrak{R}$;

(d) existen dos constantes positivas y finitas c_3 y c_4 tales que $c_3\mu(R) \leq \mu(Q \cap R) \leq c_4\mu(R)$, para todo par $(Q, R) \in \mathfrak{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (a) notemos que $(\tilde{e}i)$ implica (ei), $i = 1, 2, 3, 4$. Por otro lado, si $(Q, R) \in \mathfrak{R}$, de $(\tilde{e4})$ y la definición de cuadrante tenemos que $Q' \cup R' \subseteq \mathcal{C}(Q)$ y $Q' \cup R' \subseteq \mathcal{C}(R)$, lo cual demuestra (b). Dada la simetría entre las propiedades (c) y (d) sólo tenemos que probar una de ellas. Probamos (c). Sea $(Q, R) \in \mathfrak{R}$ y sea $Q' \in \mathcal{D}^{\mathcal{J}_1(Q)+n}$ el cubo diádico dado por $(\tilde{e}4)$. Aplicando n veces la propiedad *(d.8)* obtenemos que $\mu(Q) \leq C^n\mu(Q')$, donde C es la constante en *(d.8)*. De ésta última desigualdad y dado que $Q' \subseteq Q \cap R \subseteq Q$ concluimos la prueba de (c) con $c_1 = C^{-n}$ y $c_2 = 1$. $\square$

5.2. Equivalencia en L^p_w con $w \in A_p$, $1 < p < \infty$

En esta sección probaremos que sistemas de tipo Haar asociados a dos familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, equivalentes en el sentido de la Definición 5.1, son equivalentes. La equivalencia de tales sistemas será abordada en el contexto de espacios de Lebesgue pesados L^p_w con $w \in A_p$ y $1 < p < \infty$.

En lo que sigue vamos a suponer dadas dos familias diádicas $\mathcal{D}_1 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_1^j$ y $\mathcal{D}_2 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_2^j$ en $\mathfrak{D}(\delta)$ sobre X. Denotaremos con Q los elementos de $\mathcal{D}_1$, con R aquellos en $\mathcal{D}_2$, y con $\mathcal{J}_i$ la función en *(d.8)* para $\mathcal{D}_i, i = 1, 2$.

Introducimos ahora algo más de notación. Sean $\mathcal{H}_1 = \{h\}$ y $\mathcal{H}_2 = \{\psi\}$ dos sistemas de Haar asociados $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ respectivamente, con $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Sean $Q(h)$ y $R(\psi)$ los cubos diádicos en *(h.1)* (ver Capítulo 4) para $h \in \mathcal{H}_1$ y $\psi \in \mathcal{H}_2$ respectivamente. Diremos que Ψ es una función selección en $\mathcal{H}_2$ asociada a $\mathfrak{R}$ si $\Psi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ y para toda $h \in \mathcal{H}_1$ se tiene que $(Q(h), R(\Psi(h))) \in \mathfrak{R}$. Aquí $\mathfrak{R}$ denota la relación dada por la equivalencia de las familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$. Notemos que de las propiedades de $\mathfrak{R}$ todas estas funciones selección están conectando wavelets de un sistema con el otro de manera que tengan soportes similares en escala y localización. Denotaremos con $\mathcal{S}_{1,2}$ el conjunto de todas tales funciones selección. Diremos además que $h \in \mathcal{H}_1$ y $\psi \in \mathcal{H}_2$ están $\mathcal{S}_{1,2}$-relacionadas si existe $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ tal que $\Psi(h) = \psi$. Simétricamente decimos que una función $\mathfrak{h} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ es una función selección en $\mathcal{H}_1$ asociada a $\mathfrak{R}^{-1}$ si $(Q(\mathfrak{h}(\psi)), R(\psi)) \in \mathfrak{R}$. Con $\mathcal{S}_{2,1}$ denotamos el conjunto de todas tales funciones selección.

El siguiente teorema es un resultado para espacios de Lebesgue $L^p(X, \mu), 1 < p < \infty$ que será una consecuencia inmediata del Teorema 5.9 que probaremos luego.

Teorema 5.7. *Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos familias diádicas sobre (X, d, μ) tales que $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos sistemas de Haar asociados a $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ respectivamente. Entonces, para cada $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ como en la Definición 5.1, existe una constante positiva C tal que las desigualdades*

$$\left\| \sum_{h \in F} \lambda_h h \right\|_p \leq C \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h \Psi(h) \right\|_p \tag{5.1}$$

y

$$\left\| \sum_{\psi \in G} \nu_\psi \psi \right\|_p \leq C \left\| \sum_{\psi \in G} \nu_\psi \mathfrak{h}(\psi) \right\|_p \tag{5.2}$$

valen para todo par de subconjuntos finitos F de $\mathcal{H}_1$ y G de $\mathcal{H}_2$, toda elección de sucesiones $(\lambda_h : h \in \mathcal{H}_1)$ y $(\nu_\psi : \psi \in \mathcal{H}_2)$ de números reales y todo par de funciones selección $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ y $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}_{2,1}$ asociadas a $\mathfrak{R}$.

Notemos que si existe $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ tal que Ψ es uno a uno y sobre, usando (5.2) con $\mathfrak{h} = \Psi^{-1}$ obtenemos el resultado contenido en el siguiente enunciado.

Corolario 5.8. *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dados como en el Teorema 5.7. Asumamos que en $\mathcal{S}_{1,2}$ existe una función selección Ψ que es uno a uno y sobre. Entonces existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tal que las desigualdades*

$$C_1 \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h h \right\|_p \leq \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h \Psi(h) \right\|_p \leq C_2 \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h h \right\|_p$$

valen para todo subconjunto finito F de $\mathcal{H}_1$ y toda suceción $(\lambda_h : h \in \mathcal{H}_1)$ de números reales.

La situación dada en el corolario anterior se aplica para el caso de diferentes sistemas de Haar construidos sobre los cubos diádicos usuales en espacios euclídeos. Más aún, como veremos luego, esto vale para dos sistemas de Haar construídos sobre dos diferentes, pero equivalentes, familias diádicas de Christ sobre las mismas δ^j-redes.

Describimos ahora el resultado contenido en el Corolario 5.8 en términos de la noción usual de equivalencia de vectores en un espacio de Banach. Sea $\mathcal{B}_1$ cualquier sucesión conteniendo una vez cada elemento de $\mathcal{H}_1$, en otras palabras, $\mathcal{B}_1 = (h_k : k \in \mathbb{Z}^+)$ con $h_k \neq h_j$ si $k \neq j$ y $\mathcal{H}_1 = \{h_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$. Una vez elegida la suceción $\mathcal{B}_1$, con $\mathcal{B}_2 = (\psi_k = \Psi(h_k) : k \in \mathbb{Z}^+)$, tenemos que $\mathcal{H}_2 = \{\psi_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$, que $\psi_k \neq \psi_j$ si $k \neq j$ y que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son equivalentes en el sentido de [**38**]. En otras palabras

$$C_1 \left\| \sum_{k\in F} \lambda_k h_k \right\|_p \leq \left\| \sum_{k\in F} \lambda_k \psi_k \right\|_p \leq C_2 \left\| \sum_{k\in F} \lambda_k h_k \right\|_p$$

para todo subconjunto finito F de $\mathbb{Z}^+$ y cualquier sucesión de escalares $(\lambda_k : k \in \mathbb{Z}^+)$.

El rol que juegan las propiedades $(e3)$ y $(e4)$ es crucial. En efecto, es bien conocido (ver [**38**]) que una particular permutación del sistema de Haar no es equivalente al sistema de Haar mismo.

Por otro lado, puesto que nuestra herramienta básica, la desigualdad vectorial de Fefferman-Stein para el operador maximal de Hardy-Littlewood, es válida sobre espacios de Lebesgue pesados y puesto que también se tiene la caracterización de tales espacios con pesos de Muckenhoupt, podemos obtener la siguiente extensión pesada del Teorema 5.7.

Teorema 5.9. *Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos familias diádicas sobre (X, d, μ) tales que $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos sistemas de Haar asociados a $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ respectivamente. Sea w un peso en la clase de Muckenhoupt A_p, $1 < p < \infty$. Entonces, para cada $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ como en la Definición 5.1, existe una constante positiva C tal que las desigualdades*

$$\left\| \sum_{h\in F} \lambda_h h \right\|_{p,w} \leq C \left\| \sum_{h\in F} \lambda_h \Psi(h) \right\|_{p,w} \tag{5.3}$$

y

$$\left\| \sum_{\psi\in G} \nu_\psi \psi \right\|_{p,w} \leq C \left\| \sum_{\psi\in G} \nu_\psi \mathfrak{h}(\psi) \right\|_{p,w} \tag{5.4}$$

valen para todo par de subconjuntos finitos F de $\mathcal{H}_1$ y G de $\mathcal{H}_2$, toda elección de sucesiones $(\lambda_h : h \in \mathcal{H}_1)$ y $(\nu_\psi : \psi \in \mathcal{H}_2)$ de números reales y todo par de funciones selección $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ y $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}_{2,1}$ asociadas $\mathfrak{R}$.

Notemos que ahora el Teorema 5.7 sigue del Teorema 5.9 con $w \equiv 1$.

Para probar el Teorema 5.9 usaremos los siguientes dos lemas técnicos. El primero de ellos da una comparación de los valores máximos de dos funciones de Haar. El segundo contiene una consecuencia geométrica elemental de la propiedad de duplicación escrita en términos del operador maximal de Hardy-Litllewood.

LEMA 5.10. *Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos familias diádicas sobre (X, d, μ) tales que $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos sistemas de Haar asociados a $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ respectivamente. Entonces, para cada $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ como en la Definición 5.1, existen dos constantes positivas c y C tales que*

$$c \ \leq\ \frac{\|h\|_\infty}{\|\psi\|_\infty} \ \leq\ C, \tag{5.5}$$

para toda función $h \in \mathcal{H}_1$ y toda $\psi \in \mathcal{H}_2$ con $(Q(h), R(\psi)) \in \mathfrak{R}$.

LEMA 5.11. *Para toda elección de constantes positivas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ con $\alpha_1 \leq \alpha_2$, existe otra constante $\beta \geq 1$, que depende sólo de $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ y las constantes geométricas tal que la desigualdad*

$$\chi_{B(y,r)}(x) \ \leq\ \beta\ M(\chi_{B(z,R)})(x)$$

vale para todo $x \in X$, todo par de radios r y R con $\alpha_1 \leq \frac{R}{r} \leq \alpha_2$ y todo $y, z \in X$ con $d(y, z) < \alpha_3 r$.

Usaremos los lemas anteriores para la demostración del Teorema 5.9 y luego daremos la prueba de los mismos. Notemos antes que para los elementos h en cualquier sistema de tipo Haar $\mathcal{H}$ se tiene la siguiente propiedad

(h.6$'$) Para cada $h \in \mathcal{H}$ existen dos bolas $B_*(h) \subseteq B^*(h)$ con radios comparables tales que $\|h\|_\infty \chi_{B_*(h)}(x) \leq |h(x)| \leq \|h\|_\infty \chi_{B^*(h)}(x)$ para todo punto $x \in X$.

En efecto, de *(h.6)* (ver Capítulo 4) tenemos que

$$\|h\|_\infty \chi_{Q'}(x) \leq |h(x)| \leq \|h\|_\infty \chi_{Q(h)}(x)$$

para todo punto $x \in X$ y algún cubo diádico $Q' \in \mathcal{O}(Q(h))$, donde $Q(h)$ es el cubo dado en la condición *(h.1)* de la definición de sistema de Haar para la función $h \in \mathcal{H}$. Luego, de la Proposición 2.13 inciso (b), existen dos constantes positivas c y C tales que

$$B(y, c\delta^j) \subseteq Q' \subseteq Q(h) \subseteq B(y, C\delta^j),$$

para algún $y \in X$ y cierto $j \in \mathbb{Z}$. Así, *(h.6$'$)* vale tomando $B_*(h) = B(y, c\delta^j)$ y $B^*(h) = B(y, C\delta^j)$.

Demostración del Teorema 5.9. Observemos que es suficiente probar una de las desigualdades deseadas. Probaremos (5.7). Primero notemos que, como ambas familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ pertenecen a $\mathfrak{D}(\delta)$ y *(e3)* y *(e4)* valen, la propiedad *(h.6$'$)* para las dos funciones de Haar h y $\Psi(h)$ correspondientes a $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente con $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$, involucra bolas que están todas en las condiciones del Lema 5.11. En otras palabras, las cuatro bolas $B_*(h), B^*(h), B_*(\Psi(h)) y B^*(\Psi(h))$ tienen radios comparables y la distancia de un centro a otro está acotada por una constante veces cualquiera de los radios de la bolas.

Sean $F \subset \mathcal{H}$ finito, $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ y (λ_h) una sucesión de escalares. Para evitar interrumpir en la siguiente cadena de siete desigualdades involucradas en la prueba de (5.7), describimos ahora los argumentos usados en cada una de ellas. En la primera aplicamos el Teorema 4.5 con $f = \sum_{h\in F}\lambda_h h$. En la segunda usamos la cota superior en *(h.6$'$)*. La tercera proviene de la cota superior para la desigualdad en el Lema 5.10. La cuarta está basada en el Lema 5.11 y la homogeneidad positiva del operador maximal de Hardy-Littlewood. La quinta no es más que la desigualdad de Fefferman-Stein con $r = 2$. La sexta es la cota inferior en *(h.6$'$)*. La última es nuevamente una aplicación del Teorema 4.5 para $f = \sum\limits_{h\in F}\lambda_h \Psi(h)$.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{h\in F}\lambda_h\ h\right\|_{p,w} &\leq C\left\|\left(\sum_{h\in F}\lambda_h^2\ |h|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,w}\\
&\leq C\left\|\left(\sum_{h\in F}\lambda_h^2\ \|h\|_\infty^2\chi_{B^*(h)}\right)^{1/2}\right\|_{p,w}\\
&\leq C\ \left\|\left(\sum_{h\in F}\lambda_h^2\ \ \|\Psi(h)\|_\infty^2\chi_{B^*(h)}\right)^{1/2}\right\|_{p,w}\\
&\leq C\ \left\|\left(\sum_{h\in F}\left[M\left(\lambda_h\ \ \|\Psi(h)\|_\infty\chi_{B_*(\Psi(h))}\right)\right]^2\right)^{1/2}\right\|_{p,w}\\
&\leq C\ \left\|\left(\sum_{h\in F}\lambda_h^2\ \ \|\Psi(h)\|_\infty^2\chi_{B_*(\Psi(h))}\right)^{1/2}\right\|_{p,w}\\
&\leq\ C\ \left\|\left(\sum_{h\in F}\lambda_h^2\ \ |\Psi(h)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,w}\\
&\leq\ C\ \left\|\sum_{h\in F}\lambda_k\ \ \Psi(h)\right\|_{p,w}.
\end{aligned}$$

Las constantes en las desigualdades anteriores pueden diferir de una linea a otra. $\square$

Ahora probamos los Lemas 5.10 y 5.11.

Demostración del Lema 5.10. De *(h.5)* (ver Capítulo 4) aplicado al sistema $\mathcal{H}_1$ tenemos que la norma L^∞ de la función de Haar h es equivalente a $\mu(Q(h))^{-1/2}$. Para $\mathcal{H}_2$ en cambio, $\|\psi\|_\infty$ es del orden de $\mu(R(\psi))^{-1/2}$. Puesto que todas las constantes en estas equivalencias dependen sólo de las constantes geométricas y las dos familias $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ están relacionadas por $\mathfrak{R}$, obtenemos la equivalencia deseada de $\|h\|_\infty$ y $\|\psi\|_\infty$ cuando $(Q(h), R(\psi)) \in \mathfrak{R}$, con constantes independientes de h y ψ. $\square$

Demostración del Lema 5.11. Notemos primero que no tenemos nada que probar cuando $x \notin B(y, r)$ puesto que en tal caso el lado izquierdo de la desigualdad deseada se anula. Asumiendo que $x \in B(y, r)$, tenemos que $B(z, R) \subseteq B(x, \gamma r)$ con $\gamma = \alpha_2 + \alpha_3 + 1$. En efecto, si $u \in B(z, R)$ entonces

$$\begin{aligned} d(u,x) &\leq d(u,z) + d(z,y) + d(y,x) \\ &\leq R + \alpha_3 r + r \leq \gamma r. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$M(\chi_{B(z,R)})(x) \geq \frac{\mu(B(x,\gamma r) \cap B(z,R))}{\mu(B(x,\gamma r))} = \frac{\mu(B(z,R))}{\mu(B(x,\gamma r))}.$$

Puesto que $B(x, \gamma r) \subseteq B(z, \frac{2\gamma}{\alpha_1} R)$, de la propiedad de duplicación para μ finalizamos la prueba del Lema. $\square$

5.3. Equivalencia en L^p_w con $w \in A^{\mathcal{D}}_p$, $1 < p < \infty$

En esta sección estudiaremos la equivalencia en L^p_w de ciertos sistemas de tipo Haar asociados a familias diádicas que sean equivalentes en el sentido de la Definición 5.5 con $w \in A^{\mathcal{D}}_p$, $1 < p < \infty$. Dado un sistema diádico $\mathcal{D}$, recordemos que $\mathcal{O}(Q) = \{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}$ para $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ y $j \in \mathbb{Z}$. Diremos que el cubo $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ es el primer ancestro de Q' si $Q' \in \mathcal{O}(Q)$.

Centraremos nuestra atención sobre una clase particular de sistemas de tipo Haar que pasamos a definir a continuación. Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica sobre (X, d, μ), $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}(\delta)$. En la presente sección consideraremos sistemas de tipo Haar $\mathcal{H}$ de funciones reales simples de Borel h sobre X satisfaciendo las siguientes condiciones.

($\tilde{h}$.1) *Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe un único $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} = \bigcup_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} Q'$, y esta propiedad no vale para cualquier otro cubo en $\mathcal{D}^{j+1}$. Más aún, cada función h es constante en cada cubo $Q' \in \mathcal{O}(Q(h))$.*

($\tilde{h}$.2) *Para todo $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ existen exactamente $M_Q = \#(\mathcal{O}(Q)) - 1 \geq 1$ funciones $h \in \mathcal{H}$ tales que ($\tilde{h}$.1) vale. Escribiremos $\mathcal{H}_Q$ para denotar el conjunto de todas estas funciones h.*

($\tilde{h}$.3) *Para cada $h \in \mathcal{H}$ tenemos que $\int_X h d\mu = 0$.*

($\tilde{h}$.4) *Para cada $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ escribamos V_Q para denotar el espacio de todas las funciones sobre Q que son constantes sobre cada $Q' \in \mathcal{O}(Q)$. Entonces el sistema $\{\frac{\chi_Q}{(\mu(Q))^{1/2}}\} \bigcup \mathcal{H}_Q$ es una base ortonormal para V_Q.*

($\tilde{h}$.5) *Existe una constante positiva y finita C tal que la desigualdad $|h(x)| \leq C|h(y)|$ vale para casi todo par de puntos x e y en $Q(h)$ y toda función $h \in \mathcal{H}$.*

Notemos primero que tales sistemas asociados a $\mathcal{D}$ tienen condiciones más restrictivas que las consideradas en el Capítulo 4. En efecto, aquellas wavelets de Haar pueden anularse en uno o varios de los cubos hijos de su soporte esencial. Ahora, la propiedad *($\tilde{h}$.5)* induce una situación que luce más similar al caso clásico euclídeo donde el valor absoluto de las funciones básicas es uno. No es difícil ver que la mayoría de las bases ortonormales de V_Q que contienen a la función $\frac{\chi_Q}{(\mu(Q))^{1/2}}$ satisfacen *($\tilde{h}$.5)* en el sentido que *($\tilde{h}$.5)* es una propiedad genérica de los sistemas de tipo Haar.

El siguiente resultado será crucial para la demostración del principal resultado de la presente sección

LEMA 5.12. *Sea $\mathcal{H}$ un sistema de tipo Haar asociado a $\mathcal{D}$ que satisface ($\tilde{h}$.1) a ($\tilde{h}$.5). Entonces existen dos constantes positivas y finitas c_1 y c_2 tales que las desigualdades*

$$\frac{c_1}{\sqrt{\mu(Q(h))}} \leq |h(x)| \leq \frac{c_2}{\sqrt{\mu(Q(h))}},$$

valen para toda función $h \in \mathcal{H}$ y para casi todo $x \in Q(h)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea h una función en $\mathcal{H}$ como en el enunciado del lema. De *($\tilde{h}$.4)* y *($\tilde{h}$.1)* obtenemos que existe una familia finita de escalares $\{a_{Q'} : Q' \in \mathcal{O}(Q(h))\}$ tal que $h(x) = \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q(h))} a_{Q'} \chi_{Q'}$ y

$$\|h\|^2_{L^2(X,\mu)} = \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q(h))} |a_{Q'}|^2 \mu(Q') = 1. \tag{5.6}$$

Luego, puesto que $|a_{\tilde{Q}}|^2 \mu(\tilde{Q}) \leq \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q(h))} |a_{Q'}|^2 \mu(Q')$ para todo $\tilde{Q} \in \mathcal{O}(Q(h))$, obtenemos, de la propiedad de duplicación, la cota superior.

Sea $\tilde{Q} \in \mathcal{O}(Q(h))$ fijo. De *($\tilde{h}$.5)*, tenemos que $|a_{Q'}| \leq C|a_{\tilde{Q}}|$ para todo $Q' \in \mathcal{O}(Q(h))$. Entonces, de (5.6) obtenemos que

$$1 \leq C^2 \mu(Q(h)) |a_{\tilde{Q}}|^2,$$

donde C es la constante dada por *($\tilde{h}$.5)*. Por lo tanto, la cota inferior vale con $c_1 = \frac{1}{C\sqrt{\mu(Q(h))}}$. □

Para lo que sigue sean $\mathcal{H}_1 = \{h\}$ y $\mathcal{H}_2 = \{\psi\}$ dos sistemas de tipo Haar que satisfacen *($\tilde{h}$.1)* a *($\tilde{h}$.5)*, asociados a las familias diádicas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ respectivamente. Supongamos que $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$. Esto es, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son equivalentes en el sentido de la Definición 5.5. Sean $Q(h)$ y $R(\psi)$ los cubos diádicos en *($\tilde{h}$.1)* para $h \in \mathcal{H}_1$ y $\psi \in \mathcal{H}_2$ respectivamente. Diremos que Ψ es una función selección en $\mathcal{H}_2$ asociada a la relación $\mathfrak{R}$ dada por la equivalencia $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$ si $\Psi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ y para toda $h \in \mathcal{H}_1$ tenemos que $(Q(h), R(\Psi(h))) \in \mathfrak{R}$. Notemos que de las propiedades de $\mathfrak{R}$, todas estas funciones selección están conectando wavelets de un sistema a otro que tienen soportes similares en escala y los soportes espaciales se intersectan. Denotaremos por $\mathcal{S}_{1,2}$ al conjunto de todas estas funciones seleción. Simétricamente diremos que una función $\mathfrak{h} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ es una función selección en $\mathcal{H}_1$ asociada a $\mathfrak{R}^{-1}$ si $(Q(\mathfrak{h}(\psi)), R(\psi)) \in \mathfrak{R}$. Con $\mathcal{S}_{2,1}$ denotamos el conjunto de todas tales funciones selección.

El principal resultado de la presente sección está contenido en el siguiente enunciado.

Teorema 5.13. *Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos familias diádicas sobre (X, d, μ) tales que $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos sistemas de tipo Haar asociados a $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ respectivamente que satisfacen ($\tilde{h}$.1) a ($\tilde{h}$.5). Entonces, para cada relación $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ como en la Definición 5.5 y para cada elección de pesos $w_i \in A^{\mathcal{D}_i}_p, i = 1, 2$, existen dos constantes positivas $C_i, i = 1, 2$, dependiendo de las constantes $A^{\mathcal{D}_i}_p$ del peso w_i tales que para todo par de subconjuntos finitos F de $\mathcal{H}_1$ y G de $\mathcal{H}_2$, toda elección de suseciones $(\lambda_h : h \in \mathcal{H}_1)$ y $(\nu_\psi : \psi \in \mathcal{H}_2)$ de números reales y toda dupla de funciones selección $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ y $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}_{2,1}$ asociadas a $\mathfrak{R}$ tenemos las desigualdades*

$$\left\| \sum_{h \in F} \lambda_h h \right\|_{p,w_1} \leq C_1 \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h \Psi(h) \right\|_{p,w_1} \tag{5.7}$$

y

$$\left\| \sum_{\psi \in G} \nu_\psi \psi \right\|_{p,w_2} \leq C_2 \left\| \sum_{\psi \in G} \nu_\psi \mathfrak{h}(\psi) \right\|_{p,w_2}. \tag{5.8}$$

Notemos que si existe $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ que sea uno a uno y sobreyectiva, usando (5.8) con $\mathfrak{h} = \Psi^{-1}$ obtenemos el resultado contenido en el siguiente enunciado.

Corolario 5.14. *Sean $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ como en el Teorema 5.13. Asumamos que en $\mathcal{S}_{1,2}$ existe una función selección Ψ que es uno a uno y sobre. Entonces, para cada $w \in A^{\mathcal{D}_1}_p \cap A^{\mathcal{D}_2}_p$, $1 < p < \infty$, existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que*

$$C_1 \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h h \right\|_{p,w} \leq \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h \Psi(h) \right\|_{p,w} \leq C_2 \left\| \sum_{h \in F} \lambda_h h \right\|_{p,w} \tag{5.9}$$

valen para todo subconjunto finito F de $\mathcal{H}_1$ y toda sucesión $(\lambda_h : h \in \mathcal{H}_1)$ de números reales.

Notemos que, puesto que la condición de Muckenhoupt A_p sobre la familia de las d-bolas en X es más fuerte que cualquier condición $A_p^{\mathcal{D}}$, entonces $A_p^{\mathcal{D}_1} \cap A_p^{\mathcal{D}_2} \supseteq A_p$. Por lo tanto $A_p^{\mathcal{D}_1} \cap A_p^{\mathcal{D}_2}$ es no trivial y las desigualdades (5.9) valen para los pesos A_p. Por otro lado, puesto que diferentes sistemas de tipo Haar satisfaciendo *($\tilde{h}$.1)* a *($\tilde{h}$.5)* pueden ser construidos sobre una misma estructura diádica subyacente $\mathcal{D}$, las desigualdades (5.9) valen para tales sistemas de Haar con $w \in A_p^{\mathcal{D}}$, el cual es usualmente mayor que A_p. Por último, puede ocurrir que dos sistemas diádicos diferentes generen los mismos pesos diádicos. En otras palabras, es posible producir dos sistemas diádicos $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ en $\mathbb{R}$ con $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$ pero $A_p^{\mathcal{D}_1} = A_p^{\mathcal{D}_2} \neq A_p$. En efecto, aún en el contexto general, sólo necesitamos la siguiente propiedad: *existe una constante positiva C tal que*

(a) para todo cubo $Q \in \mathcal{D}_1$ existe un cubo $R \in \mathcal{D}_2$ tal que $Q \subseteq R$ y $\mu(Q) \leq C\mu(R)$;

(b) para todo cubo $R \in \mathcal{D}_2$ existe un cubo $Q \in \mathcal{D}_1$ tal que $R \subseteq Q$ and $\mu(R) \leq C\mu(Q)$.

Para demostrar el Teorema 5.13 utilizaremos la caracterización de los espacios de Lebesgue pesados (con pesos diádicos) via los coeficientes de Haar, la versión diádica de la desigualdad de Fefferman-Stein dada en el Capítulo 3 y el siguiente resultado:

TEOREMA 5.15. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$ dos familias diádicas en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ tal que $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$. Entonces existe una constante positiva C tal que para todo par $(Q, R) \in \mathfrak{R}$ vale que*

(a) $\chi_Q(x) \leq CM_{\mathcal{D}_1}(\chi_R)(x)$ y

(b) $\chi_R(x) \leq CM_{\mathcal{D}_2}(\chi_Q)(x)$,

para todo $x \in X$, donde $\mathfrak{R}$ es la relación dada en la Definición 5.5 para las familias $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN. Por simetría, basta probar una de las dos estimaciones. Probamos (a). Dado que $(Q, R) \in \mathfrak{R}$, de la condición $(\tilde{e4})$ en la Definición 5.5 para las familias $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$, existe un cubo diádico $Q' \in \mathcal{D}_1^{\mathcal{J}_1(Q)+n}$ tal que $Q' \subseteq Q \cap R$. Luego, de la condición *(d.8)* para $\mathcal{D}_1$ tenemos que $\mu(Q') \leq \mu(Q) \leq C\mu(Q')$, para alguna constante C independiente de los cubos Q y Q'. Por lo tanto, para todo $x \in Q$ se tiene que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{D}_1}(\chi_R)(x) &= \sup_{\tilde{Q} \in \mathcal{D}_1, x \in \tilde{Q}} \frac{1}{\mu(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} \chi_R d\mu \\ &\geq \frac{\mu(Q \cap R)}{\mu(Q)} \geq \frac{\mu(Q')}{\mu(Q)} \geq C. \end{aligned}$$

$\square$

Demostración del Teorema 5.13. Las cadenas de desigualdades para obtener (5.7) y (5.8) son esencialmente las mismas que las de la prueba del Teorema 5.9. La principal diferencia radica en el uso del Lema 5.12 y en el hecho que los operadores maximales involucrados son $M_{\mathcal{D}_1}$ para (5.7) y $M_{\mathcal{D}_2}$ para (5.8). Damos una breve descripción de la prueba de (5.7).

Primero notemos que de la Definición 5.5, existen dos constantes positivas c y C tales que

$$c\mu(R(\psi)) \leq \mu(Q(h)) \leq C\mu(R(\psi)), \tag{5.10}$$

para toda $h \in \mathcal{H}_1$ y toda $\psi \in \mathcal{H}_2$ con $(Q(h), R(\psi)) \in \mathfrak{R}$.

Sean F un subconjunto finito de $\mathcal{H}_1$, $\Psi \in \mathcal{S}_{1,2}$ y sea $(\lambda_h : h \in \mathcal{H}_1)$ una sucesión de escalares. De (5.10) y el Lema 5.12 tenemos que las desigualdades

$$\begin{aligned} \sum_{h\in F}\lambda_h^2|h(x)|^2 &\leq \sum_{h\in F}\lambda_h^2\frac{c_2^2}{\mu(Q(h))}\chi_{Q(h)}(x) \\ &\leq \frac{c_2^2}{c}\sum_{h\in F}\lambda_h^2\frac{1}{\mu(R(\Psi(h)))}\chi_{Q(h)}(x) \end{aligned} \tag{5.11}$$

y

$$\sum_{h\in F}\lambda_h^2\frac{c_1^2}{\mu(R(\Psi(h)))}\chi_{R(\Psi(h))}(x) \leq \sum_{h\in F}\lambda_h^2|\Psi(h)(x)|^2, \tag{5.12}$$

valen para casi todo punto $x \in X$. Aplicando la caracterización via coeficientes de Haar de los espacios de Lebesgue pesados con pesos diádicos para el sistema $\mathcal{H}_1$, las desigualdades (5.11), el Teorema 5.15, la desigualdad de Fefferman-Stein diádica, la desigualdad (5.12) y nuevamente la caracterización via coeficientes de Haar de los espacios de Lebesgue pesados con pesos diádicos para el sistema $\mathcal{H}_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{h\in F}\lambda_h\, h\right\|_{p,w_1} &\leq C\left\|\left(\sum_{h\in F}\lambda_h^2\, |h|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,w_1} \\ &\leq C\left\|\left(\sum_{h\in F}\left[M_{\mathcal{D}_1}\left(\lambda_h\frac{1}{\sqrt{\mu(R(\Psi(h)))}}\chi_{R(\Psi(h))}\right)\right]^2\right)^{1/2}\right\|_{p,w_1} \\ &\leq C\left\|\sum_{h\in F}\lambda_h\;\; \Psi(h)\right\|_{p,w_1}, \end{aligned}$$

donde la constante C puede variar de una linea a otra pero independientemente de la función h en F. $\square$

5.4. Estabilidad de los cubos de Christ

Finalizamos el capítulo estudiando la estabilidad de la construcción de Christ. Como ya hemos mencionado, el mismo algoritmo de construcción de Christ sobre una sucesión fija de δ^j-redes produce en general diferentes familias diádicas. En efecto, usando la notación del Teorema 2.25 en el Capítulo 2, podemos ver que el índice $l \in K_{j-1}$ provisto por (β) puede no ser la única selección para l_0 en el caso (b) del algoritmo de construcción del orden parcial $\preceq$. Esto permite una gran diversidad de órdenes parciales en $\mathcal{O}_\delta$ que se traduce en una gran diversidad de familias diádicas sobre las mismas redes fijas. Nos proponemos demostrar que tales familias diádicas son rígidamente equivalentes en el sentido de la Definición 5.5. Para ello, notemos que el caso (a) en I) está dando la única rigidez del orden parcial $\preceq$ que es reflejado en la siguiente propiedad de la familia $\mathcal{O}_\delta$.

(γ) Para cada $(j,k) \in \mathcal{A}$ existe al menos un $u \in K_{j+1}$ tal que $(j+1,u) \preceq (j,k)$ para todo orden parcial $\preceq \in \mathcal{O}_\delta$.

En efecto, puesto que $\delta < 1/2$, de la maximalidad de la δ^{j+1}-red $\mathcal{N}_{j+1}$, para cada $(j,k) \in \mathcal{A}$ existe un $x_u^{j+1} \in \mathcal{N}_{j+1}$ tal que $d(x_u^{j+1}, x_k^j) < \delta^{j+1} < \frac{\delta^j}{2}$. Del algoritmo de construcción del orden parcial $\preceq$ obtenemos que $(j+1,u) \preceq (j,k)$ para todo orden parcial $\preceq$. Puesto que el índice $u \in K_{j+1}$ en (γ) puede no ser único, seleccionamos uno de ellos, digamos $u = \mathfrak{b}(j,k)$. Diremos que $x_{\mathfrak{b}(j,k)}^{j+1}$ es el *primogénito* de x_k^j. En lo que sigue, dados $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{\preceq_i}$, donde $\preceq_i \in \mathcal{O}_\delta$, denotaremos con $\tilde{\mathcal{D}}_i$ la familia con descendencia no trivial para $\mathcal{D}_i$, con Q los elementos Q_k^j de la familia $\mathcal{D}_1$, con R aquellos cubos diádicos R_k^j en la familia $\mathcal{D}_2$ y con $\mathcal{J}_i$ la función dada en *(d.13)* para $\mathcal{D}_i$.

El siguiente lema será una herramienta central para demostrar que la construcción de Christ induce familias diádicas rigidamente equivalentes sobre redes fijas de puntos. Para $j \in \mathbb{Z}$, usaremos la notación $Q_u^j \simeq R_k^j$ si existe un punto $z \in X$ tal que $B(z, a\delta^{j+1}) \subseteq Q_u^j \cap R_k^j$, donde a es la constante en (2.5) para la construcción de los cubos de Christ.

LEMA 5.16. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{\preceq_i}$, $i = 1,2$ dos familias diádicas inducidas por los órdenes parciales $\preceq_i$ en $\mathcal{O}_\delta$ con $0 < \delta < 1/2$. Entones*

(1) para todo $Q_k^j \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ existe $R_u^j \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ tal que $R_u^j \simeq Q_k^j$;

(2) para todo $R_k^j \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ existe $Q_u^j \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ tal que $Q_u^j \simeq R_k^j$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $Q_k^j \in \tilde{\mathcal{D}}_1$. Para el índice $(j,k) \in \mathcal{A}$ pueden ocurrir los dos siguientes casos.

(i) $R_k^j \in \tilde{\mathcal{D}}_2$;

(ii) $R_k^j \notin \tilde{\mathcal{D}}_2$.

Supongamos primero que ocurre (i). De la definición de cubo de Christ (2.5) para los órdenes $\preceq_i, i = 1,2$ y de (γ) tenemos que existe $(j+1,s) \in \mathcal{A}$ tal que $(j+1,s) \preceq_i$

$(j,k), i = 1,2$. Por lo tanto $Q_s^{j+1} \subseteq Q_k^j$ y $R_s^{j+1} \subseteq R_k^j$. Por otro lado, de la definición de cubo de Christ (2.5) para los parámetros de nivel posición $(j+1, s)$ tenemos que $B(x_s^{j+1}, a\delta^{j+1}) \subseteq Q_s^{j+1} \cap R_s^{j+1} \subseteq Q_k^j \cap R_k^j$, donde a es la constante en (2.5). Luego, tomando $u = k$ tenemos (1) para el caso (i).
Supongamos ahora que ocurre el caso (ii). Consideremos los conjuntos $\mathcal{V}_i(j,k)$, $i = 1,2$ de los puntos en X que son descendientes inmediatos de x_k^j en los ordenes $\preceq_i$. Esto es, $\mathcal{V}_i(j,k) = \{x_l^{j+1} \in \mathcal{N}_{j+1} : (j+1, l) \preceq_i (j,k)\}$. Es claro de (2.5) y del hecho de que $R_k^j \notin \tilde{\mathcal{D}}_2$, que $\#(\mathcal{V}_1)(j,k) > 1$ and $\#(\mathcal{V}_2(j,k)) = 1$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_1(j,k) \setminus \mathcal{V}_2(j,k) \neq \emptyset$. En efecto, si $\mathcal{V}_1(j,k) \setminus \mathcal{V}_2(j,k) = \emptyset$, entonces $1 = \#(\mathcal{V}_2(j,k)) \geq \#(\mathcal{V}_1(j,k)) > 1$. Denotemos con x_s^{j+1} cualquier elemento en $\mathcal{V}_1(j,k) \setminus \mathcal{V}_2(j,k)$. Como $(\mathcal{A}, \preceq_2)$ es un árbol, de (a2) en la construcción de Christ en el capítulo 2 tenemos que existe $(j,u) \in \mathcal{A}$ tal que $(j+1, s) \preceq_2 (j,u)$. Sea $x_{\mathfrak{b}(j,u)}^{j+1}$ el primogénito asociado a $(j,u) \in \mathcal{A}$. De (γ) y por ser $(j+1,s) \preceq_1 (j,k)$ obtenemos que $x_s^{j+1} \neq x_{\mathfrak{b}(j,u)}^{j+1}$. Por lo tanto $\#(\mathcal{V}_2(j,u)) > 1$ y esto implica que $R_u^j \in \tilde{\mathcal{D}}_2$. Luego, como $(j+1,s) \preceq_i (j,k)$, $i = 1,2$, de la definición de cubos de Christ (2.5) tenemos que $B(x_s^{j+1}, a\delta^{j+1}) \subseteq Q_s^{j+1} \cap R_s^{j+1} \subseteq Q_k^j \cap R_u^j$, donde a es la constante en (2.5). Esto concluye la prueba de (1). De manera análoga, intercambiando los roles entre $\preceq_1$ y $\preceq_2$ se obtiene (2). $\square$

Del lema anterior podemos probar la estabilidad en la construcción de Christ en el sentido que indica el siguiente resultado.

TEOREMA 5.17. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sean $\preceq_1$ y $\preceq_2$ dos órdenes parciales en $\mathcal{O}_\delta$ con $0 < \delta < 1/2$. Entonces $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son rígidamente equivalentes, donde $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{\preceq_i}, i = 1,2$. Esto es, $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es una consecuencia inmediata de (1) y (2) en el lema anterior. En efecto, consideremos $\mathfrak{R}$ el subconjunto de $\tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2$ definido como

$$\mathfrak{R} = \left(\bigcup_{Q_k^j \in \tilde{\mathcal{D}}_1} \bigcup_{R_u^j : R_u^j \simeq Q_k^j} (Q_k^j, R_u^j) \right) \bigcup \left(\bigcup_{R_k^j \in \tilde{\mathcal{D}}_2} \bigcup_{Q_u^j : Q_u^j \simeq R_k^j} (Q_u^j, R_k^j) \right).$$

Claramente $\mathfrak{R}$ satisface $(\tilde{e1})$ y $(\tilde{e2})$ en la Definición 5.5.
Mostramos ahora que $(\tilde{e4})$ también vale. Sean $(Q_k^j, R_u^j) \in \mathfrak{R}$ y $(j+1, s) \in \mathcal{A}$ tal que $B(x_s^{j+1}, a\delta^{j+1}) \subseteq Q_k^j \cap R_u^j$. De la Proposición 2.15 sabemos que el conjunto $\{x_l^m : m \in \mathbb{Z}, l \in K_m\}$ es denso en X. Luego, existen dos enteros positivos l_0 y n tales que $d(x_{l_0}^{j+1+n}, x_s^{j+1}) < a_2\delta^{j+1+n} < \frac{a\delta^{j+1}}{2}$, donde a_2 es la constante en *(d.5)* para $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$. Entonces $Q_{l_0}^{j+1+n} \cup R_{l_0}^{j+1+n} \subseteq B(x_s^{j+1}, a\delta^{j+1}) \subseteq Q_k^j \cap R_u^j$. En efecto, para cada $z \in Q_{l_0}^{j+1+n} \cup R_{l_0}^{j+1+n}$ tenemos que

$$d(z, x_s^{j+1}) \leq d(z, x_{l_0}^{j+1+n}) + d(x_{l_0}^{j+1+n}, x_s^{j+1})$$

$$\leq \quad 2a_2\delta^{j+1+n} < a\delta^{j+1}.$$

Por lo tanto $(\tilde{e4})$ en la Definición 5.5 vale con constante n. Es claro que este mismo valor n sirve para que $(\tilde{e3})$ valga. Luego, $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2$. □

CAPÍTULO 6

Incondicionalidad del sistema de Haar en Espacios de Hardy diádicos

La teoría de espacios de Hardy sobre contextos no isotrópicos y sobre espacios no euclídeos no es nueva. Calderón y Torchinsky [**16**] iniciaron el estudio de espacios de Hardy sobre $\mathbb{R}^n$ con dilataciones anisotrópicas. Macías y Segovia en [**44**] y Coifmann y Weiss en [**21**] estudian los espacios de Hardy en el contexto general de espacio de tipo homogéneo. En 1980 L. Carleson estudia la existencia de bases incondicionales sobre el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$, [**19**]. Más precisamente, da explícitamente una base de wavelets que es incondicional en $H^1(\mathbb{R}^n)$. En la prueba dada en [**19**] la regularidad de las funciones básicas es crucial. En los libros [**34**] y [**55**] se dan condiciones sobre las wavelets para la incondicionalidad en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Estas condiciones están dadas en términos de la regularidad de las funciones que forman la base de wavelet y por lo tanto la misma prueba no vale en el contexto diádico para wavelets de Haar en $\mathbb{R}^n$. En este capítulo probaremos que los sistemas de tipo Haar $\mathcal{H}$ son bases incondicionales para el espacio de Hardy diádico atómico $H_1^{\mathcal{D}}$, en el contexto general de espacios de tipo homogéneo. Cómo una consecuencia, obtendremos una nueva tácnica para la prueba de la incondicionalidad de los sistemas de Haar en los espacios de Lebesgue. Los resultados principales de este capítulo, contenidos en [**7**], han sido aceptados para publicar en Rocky Mountain Journal of Mathematics. Es importante destacar aquí que en [**25**] los autores prueban que la base usual de Haar en el contexto euclídeo es una base incondicional en el espacio de Hardy diádico pesado $H^p_{dy}(w)$ para todo $0 < p \leq 1$ y todo peso $w \in A^{dy}_\infty$ usando un enfoque maximal para la definición de espacio de Hardy. Nuestra prueba parte de un enfoque atómico para la definición de espacio de Hardy y por lo tanto, para el caso particular de $\mathbb{R}^n$ y $w = 1$, obtenemos una nueva prueba del resultado en [**25**]. Para un estudio detallado de los espacios de Hardy y Hardy diádicos en el contexto euclídeo puede verse [**41**]. El presente capítulo está organizado como sigue. En la Sección 1 introducimos los espacios de Hardy diádicos en nuestro contexto general de espacio de tipo homogéneo. Para tal fin seguimos [**21**] (ver también [**55**] para el caso euclídeo). En la misma sección definimos los espacios $BMO_p^{\mathcal{D}}$ para $1 \leq p < \infty$, denominados espacios de oscilación p-media acotada sobre X, y damos la dualidad $BMO^{\mathcal{D}} - H^{\mathcal{D}}$ como en [**21**] para el contexto general de espacio de tipo homogéneo. La Sección 2 está dedicada a abordar el problema de la incondicionalidad de los sistemas de tipo Haar sobre $H_1^{\mathcal{D}}$.

6.1. Espacios de Hardy y BMO diádicos

Introducimos primero los espacios de Hardy diádicos $H_1^{\mathcal{D}}$ sobre espacios de tipo homogéneo (X, d, μ) siguiendo las líneas en [**21**] (ver [**55**] para el caso euclídeo) para los espacios de Hardy H_1 sobre espacios métricos con medida. Comenzamos dando la definición de átomo diádico asociado a una familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$.

Definición 6.1. Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Para $1 < q \leq \infty$ diremos que una función a definida sobre X es un q-átomo diádico asociado a $\mathcal{D}$, brevemente que $a \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}$, si existe un cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ tal que

(a1) sop $(a(x)) \subseteq Q$.
(a2) $\int_X a(x) d\mu(x) = 0$.
(a3) $\|a\|_{L^q(X,\mu)} \leq (\mu(Q))^{\frac{1}{q}-1}$ si $q < \infty$ y $\|a\|_{L^\infty(X,\mu)} \leq \mu(Q))^{-1}$ si $q = \infty$.

Los espacios $H_1^{q,\mathcal{D}}$ sobre (X, d, μ) se definen como sigue.

Definición 6.2. Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Para $1 < q \leq \infty$ definimos el espacio $H_1^{q,\mathcal{D}}$ como el espacio vectorial de todas las funciones f sobre X, identificando aquellas que son iguales en casi todo punto con respecto a μ, que pueden ser escritas como

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \lambda_n \, a_n \quad \text{con} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\lambda_n| < \infty, \tag{6.1}$$

donde $a_n \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}$ para cada n y la convergencia es en la norma $L^1(X, \mu)$.

Para cada función f en $H_1^{q,\mathcal{D}}$ definimos el número

$$|||f|||_{1,q,\mathcal{D}} = inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\lambda_n| < \infty : \ f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \lambda_n \, a_n, \ a_n \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}} \right\}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la Definición 6.1.

Proposición 6.3. *Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$.*

1. *Si $1 < q_1 < q_2 \leq \infty$, entonces $\mathcal{A}_{q_2,\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{A}_{q_1,\mathcal{D}}$. Más aún, si $1 < q \leq \infty$ y $a = a(x)$ es un q-átomo diádico, entonces $\|a\|_{L^1(X,\mu)} \leq 1$.*
2. *Para cada $1 < q_1 < q_2 \leq \infty$ tenemos que $H_1^{q_2,\mathcal{D}}(X, d, \mu) \subseteq H_1^{q_1,\mathcal{D}}(X, d, \mu)$ y $\|f\|_{L^1(X,\mu)} \leq |||f|||_{1,q_1,\mathcal{D}} \leq |||f|||_{1,q_2,\mathcal{D}}$.*
3. *$|||.|||_{1,q,\mathcal{D}}$ es una norma y $\left(H_1^{q,\mathcal{D}}, |||.|||_{1,q,\mathcal{D}}\right)$ es un espacio de Banach, para cada $1 < q \leq \infty$.*

Para lo que sigue, necesitamos la definición de una cadena de espacios en dualidad con los espacios $H_1^{q,\mathcal{D}}$. El espacio $BMO_p^{\mathcal{D}}$ de todas las funciones f de oscilación p-media acotada, $1 \leq p < \infty$, se define como $BMO_p^{\mathcal{D}} = \{f : \|f\|_{*,p} < \infty\}$, donde

$$\|f\|_{*,p} = \sup_{Q \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

y $f_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$. Puesto que cada cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ es un espacio de tipo homogéneo con constante de duplicación uniforme, siguiendo las líneas de la prueba del Teorema 6.16 en [**55**] podemos probar la siguiente versión diádica de la desigualdad de John-Nirenberg para nuestro contexto general de espacio de tipo homogéneo.

TEOREMA 6.4. *Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que para toda función $f \in BMO_1^{\mathcal{D}}$, todo cubo diádico $Q \in \mathcal{D}$ y todo $t \geq 0$ tenemos la siguiente desigualdad*

$$\mu\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > t\}\right) \leq C_1 \mu(Q) e^{-\frac{C_2 t}{\|f\|_{*,1}}}.$$

COROLARIO 6.5. *Sean $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante positiva C tal que para cada función $f \in BMO_p^{\mathcal{D}}$ tenemos que*

$$\|f\|_{*,1} \leq \|f\|_{*,p} \leq C \|f\|_{*,1}.$$

Cualquiera de las normas equivalentes $\|.\|_{*,p}$ será denotada por $\|.\|_{BMO^{\mathcal{D}}}$. La prueba de la dualidad entre los espacios de Hardy y BMO dada en [**21**] puede ser adaptada muy fácilmente a nuestro contexto diádico sobre espacio de tipo homogéneo, considerando cubos diádicos en lugar de bolas, para obtener el siguiente resultado.

TEOREMA 6.6. *Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Para $1 < q \leq \infty$ los espacios $H_1^{q,\mathcal{D}}$ coinciden y las normas $|||.|||_{1,q,\mathcal{D}}$ son todas equivalentes. Este único espacio será denotado por $H_1^{\mathcal{D}}$ y cualquiera de las normas $|||.|||_{1,q,\mathcal{D}}$ será denotada por $|||.|||_{1,\mathcal{D}}$. También vale que $(H_1^{\mathcal{D}})^*$, el espacio dual de $H_1^{\mathcal{D}}$, es $BMO^{\mathcal{D}}$ en el sentido que para cada funcional lineal y continuo φ sobre $H_1^{\mathcal{D}}$ existe una única (salvo por funciones que son constantes sobre cada cuadrante) función $b \in BMO^{\mathcal{D}}$ tal que si f es cualquier suma finita de átomos tenemos que $\varphi(f) = \int_X bf d\mu$ y que la norma $BMO^{\mathcal{D}}$ de b y la del funcional φ son equivalentes.*

6.2. Incondicionalidad de los sistemas de Haar en $H_1^{\mathcal{D}}$

El principal resultado en este capítulo está contenido en el siguiente enunciado.

TEOREMA 6.7. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $\mathcal{H}$ un sistema de Haar asociado a la familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces el sistema $\mathcal{H}$ es una base incondicional de $H_1^{\mathcal{D}}$.*

Notemos que, con el Teorema 6.7, la teoría L^2 para cualquier sistema $\mathcal{H}$, interpolación y dualidad, obtenemos otra técnica para la prueba de la incondicionalidad de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $1<p<\infty$. En efecto, como en la prueba del Teorema 6.23 en [**55**] podemos obtener un teorema de interpolación desde los espacios de Hardy diádicos en espacios de tipo homogéneo. Luego, para cada $1<p<2$ y cada conjunto finito $F\subseteq\mathcal{H}$ tenemos, del Teorema 6.7 y por interpolación que la siguiente desigualdad

$$||\sum_{h\in F} <f,h> h||_{\mathcal{L}^p(X,\mu)} \ \leq\ C\ ||f||_{\mathcal{L}^p(X,\mu)},$$

vale para toda función $f\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$, donde $<f,h>=\int fhd\mu$.

Para la prueba del Teorema 6.7, debemos mostrar los siguientes tres hechos básicos para $\mathcal{H}$.

(i1) Los operadores $\sum_{h\in F}<f,h>h$ están uniformemente acotados sobre $H_1^{\mathcal{D}}$ con F variando sobre los conjuntos finitos de $\mathcal{H}$.

(i2) Cada $h\in\mathcal{H}$ define, por medio de $h^*(f)=<f,h>$, un funcional lineal y continuo sobre $H_1^{\mathcal{D}}$ y para cada h y $\tilde{h}$ en $\mathcal{H}$ vale que $h^*(\tilde{h})=0$ si $h\neq\tilde{h}$ y $h^*(\tilde{h})=1$ si $h=\tilde{h}$.

(i3) Las combinaciones lineales de los elementos de $\mathcal{H}$ son densas en $H_1^{\mathcal{D}}$.

Comenzamos probando (i1) para átomos diádicos.

Proposición 6.8. *Sea $\mathcal{H}$ un sistema de tipo Haar asociado a una familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces para cada ∞-átomo diádico a y para cada conjunto finito $F\subseteq\mathcal{H}$ tenemos que*

$$\left|\left|\left|\sum_{h\in F}<a,h>h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}}\leq 1.$$

Demostración. Sea F un subconjunto finito de $\mathcal{H}$ y sea a un ∞-átomo diádico. Escribiremos Q_a para denotar el cubo diádico en la Definición 6.1 para el átomo diádico a. Sea $j_0\in\mathbb{Z}$ tal que $Q_a\in\mathcal{D}^{j_0}$. Sean $F_1=\{h\in F: Q(h)\in\tilde{\mathcal{D}}^j, j\leq j_0\}$ y $F_2=\{h\in F: Q(h)\in\tilde{\mathcal{D}}^j, j>j_0\}$, donde $Q(h)$ es el cubo en $\tilde{\mathcal{D}}$ dado en *(h.1)*. Comenzamos considerando $h\in F_1$. Puesto que Q_a y $Q(h)$ son cubos diádicos en la familia diádica $\mathcal{D}$, de *(d.4)* y la definición de F_1 obtenemos que $Q_a\subseteq Q(h)$ o $Q_a\bigcap Q(h)=\emptyset$. Claramente, si $Q_a\bigcap Q(h)=\emptyset$ entonces $<a,h>=0$. Si $Q_a\subseteq Q(h)$ entonces, de *(h.4)*, tenemos que h es constante, c, en el cubo diádico Q_a. Luego, de (a2), obtenemos que

$$<a,h>\ =\ \int_{Q_a} a(x)h(x)d\mu(x)$$

$$\begin{aligned} &= c\int_{Q_a} a(x)d\mu(x) \\ &= c\int_X a(x)d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{h\in F_1} < a, h > h = 0.$$

Estimamos ahora $\left|\left|\left|\sum_{h\in F_2} < a, h > h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}}$. Sea $f(x) = \sum_{h\in F_2} < a, h > h(x)$. De *(h.3)* tenemos que

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{h\in F_2} < a, h > \int_X h(x)d\mu(x) \;=\; 0. \tag{6.2}$$

Por otro lado, de la Proposición 6.3, a es un 2-átomo diádico. Probaremos que f es también un 2-átomo diádico. En efecto, por ser $\mathcal{H}$ una base ortonormal de $L^2(X,\mu)$, la identidad de Parseval, la desigualdad de Bessel y la definición de 2-átomo diádico obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(X,\mu)} &= \left\|\sum_{h\in F_2} < a, h > h\right\|^2_{L^2(X,\mu)} \qquad (6.3) \\ &= \sum_{h\in F_2} | < a, h > |^2 \\ &\leq \|a\|^2_{L^2(X,\mu)} \leq \frac{1}{\mu(Q_a)}. \end{aligned}$$

(6.4)

Notemos que, de *(d.4)* y la definición de F_2 tenemos que $Q(h) \subseteq Q_a$ o $Q_a \bigcap Q(h) = \emptyset$, para cualquier $h \in F_2$. Como antes, si $Q(h) \bigcap Q_a = \emptyset$ tenemos que $< a, h >= 0$. Si $Q(h) \subseteq Q_a$ entonces de *(h.1)* obtenemos que $h(x) = 0$ para todo punto $x \notin Q_a$. Luego,

$$sop(f) \subseteq Q_a. \tag{6.5}$$

Por lo tanto, de (6.2), (6.3) y (6.5) obtenemos que f es un 2-átomo diádico y entonces $|||\ f\ |||_{1,\mathcal{D}} \leq 1$. Así

$$\left|\left|\left|\sum_{h\in F} < a, h > h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}} \leq 1.$$

□

Es bien conocido (ver [**14**] y [**45**]) que en general no basta con verificar que un operador es acotado sobre átomos para concluir que se extiende acotadamente a todo el espacio de Hardy. Sin embargo, como el siguiente resultado muestra, esta es la situación en nuestro caso.

TEOREMA 6.9. *Sea $\mathcal{H}$ un sistema de Haar asociado a la familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces existe una constante positiva C tal que para cada conjunto finito $F \subseteq \mathcal{H}$ se tiene que*

$$\left|\left|\left|\sum_{h\in F} < f,h > h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}} \leq C\, |||f|||_{1,\mathcal{D}}\,,$$

para toda función $f \in H_1^{\mathcal{D}}$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que si$f \in H_1^{\mathcal{D}}$ entonces $< f,h >$ está bien definido para toda funcuón $h \in \mathcal{H}$. En efecto, $f \in L^1(X,\mu)$ y $h \in L^\infty(X,\mu)$ para cada $h \in \mathcal{H}$. Luego, el resultado es una consecuencia de la Proposición 6.8 y los dos siguientes enunciados.

(1) Si $(a_n : n \in \mathbb{Z}^+) \subseteq \mathcal{A}_{\infty,\mathcal{D}}$ y $(\lambda_n : n \in \mathbb{Z}^+) \subseteq \mathbb{R}$ son tales que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n| < \infty$, entonces

$$< \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n a_n, h >= \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} < \lambda_n a_n, h >,$$

para toda función $h \in \mathcal{H}$.

(2) Para toda función $f \in H_1^{\mathcal{D}}$ con $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n a_n$ y cada subconjunto finito F de $\mathcal{H}$ tenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n \left(\sum_{h\in F} < a_n, h >\right) h = \sum_{h\in F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n < a_n, h >\right) h,$$

donde consideramos la convergencia en el sentido de la norma $L^1(X,\mu)$.

Tomemos $f \in H_1^{\mathcal{D}}$, y supongamos que (1) y (2) valen. Para cada $\varepsilon > 0$, de la definición de $H_1^{\mathcal{D}}$, tenemos que $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n(\varepsilon) a_n(\varepsilon)$, donde $(a_n(\varepsilon) : n \in \mathbb{Z}^+) \subseteq \mathcal{A}_{\infty,\mathcal{D}}$, $(\lambda_n(\varepsilon) : n \in \mathbb{Z}^+) \subseteq \mathbb{R}$ con $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n(\varepsilon)| < \infty$ y $|||f|||_{1,\mathcal{D}} + \varepsilon \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n(\varepsilon)|$.
Sea F un subconjunto finito de $\mathcal{H}$. De (1) y (2) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{h\in F} < f,h > h &= \sum_{h\in F}\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} < \lambda_n(\varepsilon) a_n(\varepsilon), h > h\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^+}\sum_{h\in F} < \lambda_n(\varepsilon) a_n(\varepsilon), h > h,\end{aligned}$$

en el sentido de la norma $L^1(X,\mu)$. Luego, de la Proposición 6.8 obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\sum_{h\in F} < f,h > h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}} &= \left|\left|\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}\sum_{h\in F} < \lambda_n(\varepsilon) a_n(\varepsilon), h > h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}}\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n(\varepsilon)| \left|\left|\left|\sum_{h\in F} < a_n(\varepsilon), h > h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n(\varepsilon)| \\
&\leq C\,|||f|||_{1,\mathcal{D}} + C\varepsilon,
\end{aligned}
$$

para cada $\varepsilon > 0$. Por lo tanto

$$\left|\left|\left|\sum_{h\in F} < f,h > h\right|\right|\right|_{1,\mathcal{D}} \leq C\,|||f|||_{1,\mathcal{D}}\,.$$

Demostremos ahora (1). Sea $f \in H_1^{\mathcal{D}}$, $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n a_n$ donde $a_n \in \mathcal{A}_{\infty,\mathcal{D}}$ para cada n. Sea $S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n$. Entonces $\|f - S_N\|_{L^1(X,\mu)} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^N < \lambda_n a_n, h > - < \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n a_n, h >\right| &= \left|< \sum_{n>N} \lambda_n a_n, h >\right| \\
&\leq \int_X \left|\sum_{n>N} \lambda_n a_n\right| |h| d\mu \\
&\leq \|f - S_N\|_{L^1(X,\mu)} \|h\|_{L^\infty(X,d\mu)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, puesto que $h \in L^\infty(X, d\mu)$ para cada $h \in \mathcal{H}$, (1) vale. Para la prueba de (2), tomamos $f \in H_1^{\mathcal{D}}$, $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n a_n$ donde $a_n \in \mathcal{A}_{\infty,\mathcal{D}}$ para cada n. Sean $Z_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n \left(\sum_{h\in F} < a_n, h >\right) h$ y $S_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n a_n$. Mostraremos que si N tiende e a ∞ entonces $Z_N \longrightarrow \sum_{h\in F} < f,h > h$ en el sentido de la norma $L^1(X,\mu)$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\int_X |Z_N - \sum_{h\in F} < f,h > h| d\mu &\leq \sum_{h\in F} \int_X |< S_N - f, h >|\, |h| d\mu \\
&\leq \sum_{h\in F} \|h\|_\infty\, \mu(Q(h))\, |< S_N - f, h >| \\
&\leq \|S_N - f\|_{L^1(X,\mu)} \sum_{h\in F} \|h\|_\infty^2\, \mu(Q(h)).
\end{aligned}
$$

□

Ahora probaremos (i2). Fijemos $h \in \mathcal{H}$ y $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n a_n \in H_1^{\mathcal{D}}$, con $a_n \in \mathcal{A}_{\infty,\mathcal{D}}$ para cada n. La linealidad de h^* es una consecuencia trivial de linealidad de la integral. Puesto que $\int_X |a_n| d\mu \leq 1$ para todo n y puesto que $h \in L^\infty(X,\mu)$ para cada $h \in \mathcal{H}$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
|< f,h >| &= \left|\int_X h \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \lambda_n a_n\right) d\mu\right| \\
&\leq \|h\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \int_X |\lambda_n||a_n| d\mu
\end{aligned}
$$

$$\leq \|h\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n|.$$

Por lo tanto $| < f, h > | \leq \|h\|_\infty \||f\||_{1,\mathcal{D}}$. Por otro lado, por ser $\mathcal{H}$ base ortonormal de $L^2(X,\mu)$ tenemos que $h^*(\tilde{h}) = 0$ si $h \neq \tilde{h}$ y $h^*(\tilde{h}) = 1$ si $h = \tilde{h}$.

Para probar (i3) usaremos el siguiente resultado. En lo que sigue diremos que una función es un átomo diádico si es un q-átomo diádico para algún $1 < q \leq \infty$ y denotaremos con $\mathbb{V}$ al conjunto de todas aquellas funciones g en $H_1^{\mathcal{D}}$ que son combinación lineal finita de átomos diádicos.

LEMA 6.10. *Sea $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces*

(a) $g - \sum_{h\in F} < g, h > h$ pertenece a $\mathbb{V}$ para todo conjunto finito $F \subseteq \mathcal{H}$ y toda función $g \in \mathbb{V}$;

(b) $\mathbb{V}$ es denso en $H_1^{\mathcal{D}}$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo tenemos que probar (a) ya que el enunciado (b) es una fácil consecuencia de la definción de $H_1^{\mathcal{D}}$. Sean F un subconjunto finito de $\mathcal{H}$ y $g \in \mathbb{V}$. Es decir, $g = \sum_{n\in I} \lambda_n a_n$ con $\#(I) < \infty$ y a_n átomo diádico para cada $n \in I$. De la linealidad de la integral se tiene que

$$g - S_F(g) = \sum_{n\in I}\left(\lambda_n a_n - \sum_{h\in F} < \lambda_n a_n, h > h\right).$$

Por otro lado, notemos que si $h \in \mathcal{H}$, entonces la función $\varphi = \frac{h}{\mu(Q(h))^{\frac{1}{2}}}$ es un 2-átomo diádico. En efecto, de *(h.1)* tenemos que $sop(\varphi) = sop(h) \subseteq Q(h)$, de *(h.3)* la integral sobre el espacio X de la función φ es nula y de *(h.4)* tenemos

$$\|\varphi\|_2 = \left\|\frac{h}{\mu(Q(h))^{\frac{1}{2}}}\right\|_2 = \frac{1}{\mu(Q(h))^{\frac{1}{2}}}.$$

Por lo tanto $\varphi \in \mathcal{A}_{2,\mathcal{D}}$. Luego, para cada $n \in I$ se tiene que

$$\sum_{h\in F} < \lambda_n a_n, h > h = \sum_{h\in F} < \lambda_n a_n, h\mu(Q(h))^{\frac{1}{2}} > \frac{h}{\mu(Q(h))^{\frac{1}{2}}}.$$

Es decir, $\sum_{h\in F} < \lambda_n a_n, h > h$ es una combinación lineal finita de 2-átomos con lo cual $g - S_F(g) \in \mathbb{V}$. $\square$

Usaremos también el bien conocido hecho que la norma de un elemento f en un espacio de Banach $\mathbb{B}$ puede ser calculada como la menor cota superior de las evaluaciones $\varphi(f)$ para $\varphi \in \mathbb{B}^*$ con $\|\varphi\| = 1$.

Ahora probaremos (i3), es decir, la densidad de las combinaciones lineales de los elementos de $\mathcal{H}$ en $H_1^{\mathcal{D}}$. Para cada entero positivo M definimos la familia $\mathcal{F}_M = \{F \subseteq \mathcal{H} : \#(F) = M\}$ y los operadores actuando sobre $H_1^{\mathcal{D}}$ como $S_F(f) = \sum_{h\in F} < f, h > h$

para $F \in \mathcal{F}_M$ y $M \in \mathbb{Z}^+$. Mostraremos que para cada $f \in H_1^{\mathcal{D}}$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo M_ε y un conjunto $F_\varepsilon \in \mathcal{F}_{M_\varepsilon}$ tal que $|||f - S_{F_\varepsilon}(f)|||_{1,\mathcal{D}} < \varepsilon$. Del Teorema 6.9, obtenemos que $|||S_F(f)|||_{1,\mathcal{D}} \leq C|||f|||_{1,\mathcal{D}}$ para alguna constante positiva C independiente de $F \in \mathcal{F}_M$ y de $M \in \mathbb{Z}^+$. Sea $\tilde{C} = sup\{\|S_F\| : F \in \mathcal{F}_M, M \in \mathbb{Z}^+\}$. Sean f una función en $H_1^{\mathcal{D}}$ y $\varepsilon > 0$ dados. De (b) en el Lema 6.10 existe una función $g \in \mathbb{V}$ tal que

$$|||f - g|||_{1,\mathcal{D}} \leq \frac{\varepsilon}{\tilde{C} + 3}. \tag{6.6}$$

Además, existen un entero positivo $M_{\varepsilon,g}$ y un conjunto $F_{\varepsilon,g} \in \mathcal{F}_{M_{\varepsilon,g}}$ tal que

$$|||g - S_{F_{\varepsilon,g}}(g)|||_{1,\mathcal{D}} < \frac{2\varepsilon}{\tilde{C} + 3}. \tag{6.7}$$

En efecto, de (a) en el Lema 6.10 obtenemos que $g - S_F(g)$ pertenece a $\mathbb{V}$ para cada conjunto finito $F \subseteq \mathcal{H}$. Luego, de la observación anterior sobre la norma de un elemento en un espacio de Banach via dualidad y el Teorema 6.6 tenemos que para cada $F \in \mathcal{F}_M$ y $M \in \mathbb{Z}^+$ existe una función $\varphi_{g,F} \in BMO^{\mathcal{D}}$ tal que $\|\varphi_{g,F}\|_{BMO^{\mathcal{D}}} = 1$ y

$$|||g - S_F(g)|||_{1,\mathcal{D}} \leq \left| \int_X (g - S_F(g))\varphi_{g,F} d\mu \right| + \frac{\varepsilon}{\tilde{C} + 3}. \tag{6.8}$$

Puesto que $g - S_F(g)$ pertenece a $\mathbb{V}$ y $supp(h) \subseteq \overline{Q(h)}$, donde $\overline{Q(h)}$ es la clausura de $Q(h)$, es claro que existen un conjunto de índices finito $I \subseteq \mathbb{Z}^+$ y una familia $\{Q_n : n \in I\}$ de cubos diádicos disjuntos en $\mathcal{D}$ tales que

$$\left| \int_X (g - S_F(g))\varphi_{g,F} d\mu \right| = \left| \int_X (g - S_F(g))\phi_{g,F} d\mu \right|, \tag{6.9}$$

donde $\phi_{g,F} = (\chi_{\underset{n\in I}{\cup} Q_n})\varphi_{g,F}$. Notemos que puesto que $\varphi_{g,F} \in BMO^{\mathcal{D}}$, entonces para alguna constante C_n con $n \in I$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_{g,F}\|_{L^2(X,\mu)} &= \sum_{n\in I} \left(\int_{Q_n} |\varphi_{g,F}|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{n\in I} \left(\left(\int_{Q_n} |\varphi_{g,F} - C_n|^2 d\mu \right)^{1/2} + \left(\int_{Q_n} |C_n|^2 d\mu \right)^{1/2} \right) \\
&= \sum_{n\in I} \left(\mu(Q_n)^{1/2} \left(\frac{1}{\mu(Q_n)} \int_{Q_n} |\varphi_{g,F} - C_n|^2 d\mu \right)^{1/2} + C_n \mu(Q_n)^{1/2} \right) \\
&\leq \sum_{n\in I} \left(\|\varphi_{g,F}\|_{BMO^{\mathcal{D}}} + C_n \right) \mu(Q_n)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_{g,F} \in L^2(X,\mu)$. Luego, puesto que $\int_X S_f(g)\phi_{g,F} d\mu = \int_X g S_f(\phi_{g,F}) d\mu$, de la desigualdad de Schwartz tenemos que

$$\left| \int_X (g - S_F(g))\phi_{g,F} d\mu \right| = \left| \int_X g(\phi_{g,F} - S_F(\phi_{g,F}) d\mu \right|$$

$$\leq \|g\|_{L^2(X,\mu)}\|\phi_{g,F} - S_F(\phi_{g,F}\|_{L^2(X,\mu)},$$

para cada $F \in \mathcal{F}_M$ y cada $M \in \mathbb{Z}^+$. Así, puesto que $\mathcal{H}$ es una base ortonormal de $L^2(X,\mu)$, existen un entero positivo $M_{\varepsilon,g}$ y un conjunto $F_{\varepsilon,g} \in \mathcal{F}_{M_{\varepsilon,g}}$ tales que

$$\|\phi_{g,F} - S_{F_{\varepsilon,g}}(\phi_{g,F})\|_{L^2(X,\mu)} \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^2(X,\mu)}(\tilde{C}+3)},$$

lo cual prueba que (6.7) vale. Luego, de (6.6) y (6.7) obtenemos que

$$\begin{aligned} |||f - S_{F_{\varepsilon,g}}(f)|||_{1,\mathcal{D}} &\leq |||f-g|||_{1,\mathcal{D}} + |||g - S_{F_{\varepsilon,g}}(g)|||_{1,\mathcal{D}} + |||S_{F_{\varepsilon,g}}(g-f)|||_{1,\mathcal{D}} \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{\tilde{C}+3} + |||S_{F_{\varepsilon,g}}(g-f)|||_{1,\mathcal{D}} \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{\tilde{C}+3} + \|S_{F_{\varepsilon,g}}\| \; |||g-f|||_{1,\mathcal{D}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que las combinaciones lineales de elementos de $\mathcal{H}$ son densas en $H_1^{\mathcal{D}}$ lo cual concluye la prueba del Teorema 6.7.

CAPÍTULO 7

Caracterizaciones de espacios de tipo Lipschitz

A lo largo de este capítulo trataremos con tres tipos, en principio diferentes, de regularidad α de funciones reales definidas sobre un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ). El parámetro de regularidad α será siempre positivo. Los resultados del presente capítulo estan contenidos en [**6**].

En [**43**], Macías y Segovia introducen, en el contexto de espacio de tipo homogéneo, las clases de funciones de tipo Campanato definidas en [**18**] para el caso euclídeo. Ellos prueban que bajo la condición de normalidad sobre el espacio, estas clases son exactamente los clásicos espacios Lipschitz. Introducimos ahora estas dos clases de funciones Lipschitz.

Definimos el espacio Lipschitz de orden α, $Lip(\alpha)$, como el espacio de las funciones f definidas sobre X tales que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x,y)^{\alpha}$$

para todo par de puntos $x, y \in X$. Denotaremos por $\|f\|_{Lip(\alpha)}$ el ínfimo de todas las posibles constantes C, que resulta una seminorma en $Lip(\alpha)$.

Para $1 \leq q < \infty$, una función f en $L^q_{loc}(X, \mu)$ se dice que pertenece al espacio $Lip(\alpha, q)$ si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - m_B(f)|^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq Cr(B)^{\alpha} \tag{7.1}$$

vale para toda bola B en X, donde $r(B)$ es el radio de B y $m_B(f) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu$. Con $\|f\|_{Lip(\alpha,q)}$ denotamos el ínfimo de aquellas constantes C.

Destacamos aquí que nuestra definición de $Lip(\alpha, q)$ coincide con la clase $Lip(\alpha, q)$ en [**43**] sólo cuando (X, d, μ) es normal en el sentido que la medida de cualquier bola es comparable a su radio. Es fácil ver que $Lip(\alpha)$ implica $Lip(\alpha, q)$ y uno de los principales resultados en [**43**] es la recíproca. Mostraremos que ambos, $Lip(\alpha)$ y $Lip(\alpha, q)$ tienen la misma descripción en términos de wavelets de Haar construidas sobre alguna clase amplia de familias diádicas. El siguiente resultado es el primer paso en esa dirección.

TEOREMA 7.1. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $f \in Lip(\alpha, 2)$. Entonces la desigualdad*

$$|< f, h >| = \left|\int_X f h d\mu\right| \leq \|f\|_{Lip(\alpha,2)}\ r(B)^\alpha\ \mu(B)^{1/2},$$

vale para toda función h y toda bola $B = B(z, r(B))$ tales que

(i) $\int_X h d\mu = 0$;

(ii) $\int_X |h|^2 d\mu = 1$ *y*

(iii) $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq B$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f \in Lip(\alpha, 2)$ y h una función que satisface *(i)* a *(iii)*. De *(i)* y *(iii)* tenemos que

$$\int_X f(x)h(x)d\mu(x) \quad = \quad \int_B (f(x) - m_B(f))\, h(x)d\mu(x).$$

De la desigualdad de Hölder, (ii) y el hecho que $f \in Lip(\alpha, 2)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f(x)h(x)d\mu(x)\right| &\leq \int_B |f(x) - m_B(f)|\, |h(x)|\, d\mu(x) \\
&\leq \left(\int_B |f(x) - m_B(f)|^2\, d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&\leq \mu(B)^{1/2}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(x) - m_B(f)|^2\, d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&\leq \|f\|_{Lip(\alpha,2)}\mu(B)^{1/2} r(B)^\alpha.
\end{aligned}$$

□

Notemos que en el contexto euclídeo, cualquier wavelet localizada satisface las propiedades *(i)* a *(iii)*. Estamos interesados en un recíproco del teorema previo en términos de funciones de tipo Haar.

En el caso euclídeo $\mathbb{R}^n$, la clase de todas las traslaciones arbitrarias de los cubos diádicos usuales $Q^j_{\vec{k}} = \prod_{i=1}^n I^j_{k_i}$, con $\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $j \in \mathbb{Z}$ y $I^j_{k_i} = [k_i 2^{-j}, (k_i{+}1)2^{-j})$, tiene una importante propiedad que llamaremos *separadora*. En efecto, es fácil ver que dados dos puntos diferentes x e y en $\mathbb{R}^n$, existen $z \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{Z}$ y $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$ tal que ambos, x e y pertenecen a dos subcubos diferentes $z + Q^{j+1}_{\vec{l}}$ y $z + Q^{j+1}_{\vec{m}}$ de $z + Q^j_{\vec{k}}$ y 2^{-j} es comparable con $|x - y|$.

En la sección que sigue se dará la definición precisa de *clases separadoras* donde probaremos también su existencia en nuestro contexto general de espacio de tipo homogéneo.

Sea S una clase de familias diádicas $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$. Escribimos $\mathcal{H}$ para denotar el conjunto de todas las funciones de Haar h que pertenecen a algún sistema de Haar $\mathcal{H}_\mathcal{D}$ asociado a algún $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$. Definimos ahora nuestra tercer clase de funciones tipo Lipschitz.

Una función $f \in L^1_{loc}(X,d,\mu)$ se dice que pertenece a la clase de Carleson $\mathcal{C}(\alpha, S)$ si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|< f, h >| \leq C\ diam(Q_h)^\alpha\ \mu(Q_h)^{1/2}, \tag{7.2}$$

vale para toda $h \in \mathcal{H}$, donde Q_h es el menor cubo diádico conteniendo al conjunto $\{x \in X : h(x) \neq 0\}$ y $diam(E) = sup\{d(x,y) : x \in E, y \in E\}$.

Los principales resultados del presente capítulo están contenidos en los siguientes enunciados.

Teorema 7.2. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea $\mathcal{S}$ una clase separadora de familias diádicas sobre X. Entonces $\mathcal{C}(\alpha, S) \subseteq Lip(\alpha)$ en el sentido que en la clase de Lebesgue de cada función en $\mathcal{C}(\alpha,\mathcal{S})$ existe una funcón en $Lip(\alpha)$.*

Teorema 7.3. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Existen clases separadoras en $\mathfrak{D}(\delta)$ para δ suficientemente chico.*

Agrupando los resultados contenidos en los Teoremas 7.1, 7.2 y 7.3 tenemos el siguiente enunciado el cual contiene al Teorema 5 en [**43**].

Teorema 7.4. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo.*

$$Lip(\alpha) = Lip(\alpha, q) = \mathcal{C}(\alpha,\mathcal{S})$$

para todo $1 \leq q < \infty$ y toda clase separadora $\mathcal{S}$.

Con casi las mismas pruebas, los anteriores resultados pueden extenderse a modulos de continuidad $\varphi(t)$ más generales que t^α (ver [**4**]). Con las obvias definiciones, con respecto a $Lip(\alpha)$ como $Lip(\varphi)$ con $\varphi(t) = t^\alpha$, tenemos que

$$Lip(\varphi) \subseteq Lip(\varphi, q) \subseteq \mathcal{C}(\psi,\mathcal{S}) \subseteq Lip(\psi)$$

donde $\psi(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(s)}{s} ds$, suponiendo que $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función no decreciente y tal que $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty$. Todas estas clases son las mismas cuando $\psi(t) \leq C\varphi(t)$ para alguna constante C.

7.1. Clases separadoras de familias diádicas

Resultados como el que nos proponemos en este capítulo son válidos para transformadas de wavelets continuas sobre el contexto euclídeo (ver [**35**], [**52**], [**4**] y [**23**]). En nuestro contexto no tenemos estructura algebraica a disposición que nos permita hablar de traslaciones continuas. La siguiente definición tiene por finalidad reemplazar esta limitación.

Definición 7.5. **Clase separadora en $\mathfrak{D}(\delta)$.** Decimos que una clase de familias diádicas $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{D}(\delta)$ separa puntos de X, o que es una clase separadora, si para todo par de puntos distintos x e y en X existe $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ tal que existe un cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ que verifica

(s1) x e y pertenecen a Q;
(s2) existen dos cubos diádicos diferentes entre sí Q_x y Q_y en $\mathcal{O}(Q)$ tal que $x \in Q_x$ e $y \in Q_y$;
(s3) existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que $c_1\delta^{\mathcal{J}(Q)} \leq d(x,y) \leq c_2\delta^{\mathcal{J}(Q)}$.

Con el objetivo de probar el Teorema 7.3 usaremos la construcción de cubos diádicos dada por M. Christ en [**20**]. La técnica de tal construcción será de importancia para nuestro fin y por lo tanto damos aqui una breve descripción siguiendo la notación introducida en el Capítulo 2 cuando desarrollamos la construcción de Christ. Para $\varepsilon > 0$, $\mathcal{N}_\varepsilon$ es una ε-red en X si $\mathcal{N}_\varepsilon$ es un subconjunto ε-disperso maximal de X. Esto es, $d(x,x') \geq \varepsilon$ para todo $x, x' \in \mathcal{N}$ con $x \neq x'$ y si E es cualquier otro conjunto de X que contenga estrictamente a $\mathcal{N}_\varepsilon$ entonces existen $y, y' \in E$ con $y \neq y'$ tal que $d(y,y') < \varepsilon$. En lo que sigue usaremos la notación $\mathcal{N}_\varepsilon = \{x_k : k \in K(\varepsilon)\}$ para denotar los elementos de la ε-red $\mathcal{N}_\varepsilon$, donde $K(\varepsilon)$ es un intervalo inicial de los enteros positivos, el cual puede coincidir con el conjunto total $\mathbb{Z}^+$ de enteros positivos. Para un δ positivo fijo, las anteriores consideraciones con $\varepsilon = \delta^j$, $j \in \mathbb{Z}$, nos dan una sucesión de δ^j-redes $\mathcal{N}_j = \{x_k^j : k \in K_j\}$, donde $K_j = K(\delta^j)$. Sobre el conjunto $\mathcal{A} = \{(j,k) : j \in \mathbb{Z} \text{ and } k \in K_j\}$, M. Christ introduce una estructura de árbol controlada por la estructura métrica sobre X. Remarcamos aquí que la construcción dada en [**20**] no necesita de ninguna propiedad de encaje de las sucesiones $\mathcal{N}_j$ de δ^j-redes. El orden parcial $\preceq$ sobre $\mathcal{A}$ definido en [**20**] el cual otorga la estructura de árbol sobre $\mathcal{A}$ satisface las siguientes dos propiedades básicas,

(a) si $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \frac{\delta^{j-1}}{2}$ entonces $(j,k) \preceq (j-1,l)$,
(b) si $(j,k) \preceq (j-1,l)$, entonces $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \delta^{j-1}$.

Para una sucesión de δ^j-redes, $\mathcal{N}_j, \delta > 0$, diremos que tal orden pertenece a la clase $\mathcal{O}_\delta$, brevemente, $\preceq \in \mathcal{O}_\delta$.

El cubo diádico de Christ al nivel j localizado en $k \in K_j$ se define como

$$Q_k^j = \bigcup_{(i,l)\preceq(j,k)} B(x_l^i, a\delta^i). \tag{7.3}$$

La familia de todos estos cubos Q_k^j satisfacen la Definición 2.3 de familia diádica para valores pequeños de las constantes positivas δ y a, donde podemos elegir como punto central el punto $x = x_k^j$.

Los conjuntos Q_k^j serán llamados los cubos diádicos asociados a $x_k^j \in \mathcal{N}_j$. La familia $\mathcal{D}_{\preceq}$ de todos estos Q_k^j forman los cubos de Christ asociados a la familia $\{\mathcal{N}_j : j \in \mathbb{Z}\}$ de δ^j-redes $\mathcal{N}_j, j \in \mathbb{Z}$ y al orden $\preceq$. Notemos que de (7.3) tenemos que

$$\text{si } (i,l) \preceq (j,k) \text{ entonces } Q_l^i \subseteq Q_k^j. \tag{7.4}$$

Los siguientes lemas serán nuestras herramientas claves para probar el Teorema 7.3.

LEMA 7.6. *Sea $\mathcal{N}_j$, $j \in \mathbb{Z}$ una sucesión de δ^j-redes en X con $\delta < 1/2$ y sea $\mathcal{D}_{\preceq}$ los cubos de Christ asociados a la familia $\{\mathcal{N}_j : j \in \mathbb{Z}\}$ y al orden $\preceq$ en $\mathcal{O}_\delta$. Asumamos que para algún $j_0 \in \mathbb{Z}$, $k \in K_{j_0-1}$ y $k' \in K_{j_0+1}$ tenemos que $x_k^{j_0-1} = x_{k'}^{j_0+1} \in \mathcal{N}_{j_0-1} \cap \mathcal{N}_{j_0+1}$. Entonces existe $s \in K_{j_0}$ tal que*

$$(j_0+1, k') \preceq (j_0, s) \preceq (j_0-1, k).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\preceq$ un orden sobre $\mathcal{A} = \{(j,k) : j \in \mathbb{Z}, k \in K_j\}$ en $\mathcal{O}_\delta$. Sea (j_0, s) el único elemento en $\mathcal{A}$ para el cual $(j_0+1, k') \preceq (j_0, s)$. Para obtener el lema todo lo que tenemos que mostrar es que necesariamente $(j_0, s) \preceq (j_0-1, k)$. En efecto, de (b) tenemos que

$$d(x_{k'}^{j_0+1}, x_s^{j_0}) < \delta^{j_0} < \frac{\delta^{j_0-1}}{2}.$$

Puesto que el lado izquierdo es también $d(x_s^{j_0}, x_k^{j_0-1})$, (a) muestra que $(j_0, s) \preceq (j_0 - 1, k)$. □

Como ya hemos observado, la construcción de Christ no necesita de propiedades de encaje de las redes $\mathcal{N}_j$. Este hecho nos permitirá construir una suceción particular $\mathcal{N}$ de δ^j-redes asociadas a dos puntos diferentes x e y en X. Pongamos $\mathcal{N}$ para denotar cualquier sucesión $(\mathcal{N}_j : j \in \mathbb{Z})$ de δ^j-redes con $x = x_1^j \in \mathcal{N}_j$ si j es impar y con $y = x_1^j \in \mathcal{N}_j$ si j es par.

LEMA 7.7. *Sean x e y dos puntos distintos en X y sea $0 < \delta < 1/2$ dado. Sea $\preceq$ un orden en $\mathcal{O}_\delta$ inducido por la sucesión $\mathcal{N}$ definida anteriormente. Entonces existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que la familia diádica $\mathcal{D}_{\preceq}$ satisface*

(1) $Q_1^{i+1} \subseteq Q_1^i$;
(2) *existe* $s \in K_{i+1}, s \neq 1$, *tal que* $Q_1^{i+2} \subseteq Q_s^{i+1} \subseteq Q_1^i$;
(3) $a\delta^{i+1} \leq d(x,y) \leq a_2\delta^i$, *donde a es la constante en (7.3) y a_2 es la constante en (d.5).*

DEMOSTRACIÓN. Sean x e y dos puntos en X con $x \neq y$. Sea $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\delta^{j_0+1} \ \leq \ 2d(x,y) \ < \ \delta^{j_0}. \tag{7.5}$$

Sea $\preceq$ en $\mathcal{O}_\delta$ un orden asociado a $\mathcal{N}$.

Sea

$$i = \begin{cases} j_0 + 1 & \text{if } Q_1^{j_0+2} \subseteq Q_1^{j_0+1} \\ j_0 & \text{if } Q_1^{j_0+2} \not\subseteq Q_1^{j_0+1} \end{cases}$$

Chequeamos ahora que este valor de i satisface (1),(2) y (3). Comenzamos verificando (1). Si $i = j_0 + 1$, este es el caso cuando $Q_1^{j_0+2} \subseteq Q_1^{j_0+1}$, entonces no hay nada que probar puesto que $Q_1^{i+1} = Q_1^{j_0+2}$ y $Q_1^i = Q_1^{j_0+1}$. Por otro lado, si $i = j_0$, de (7.5) y (a) tenemos que $(j_0 + 1, 1) \preceq (j_0, 1)$, por lo tanto de (7.4) tenemos que $Q_1^{i+1} = Q_1^{j_0+1} \subseteq Q_1^{j_0} = Q_1^i$.

Puesto que $x_1^i = x_1^{i+2} \in \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_{i+2}$, aplicando el Lemma 7.6 tenemos que existe $s \in K_{i+1}$ tal que

$$(i + 2, 1) \preceq (i + 1, s) \preceq (i, 1). \tag{7.6}$$

Entonces, de (7.4) tenemos que $Q_1^{i+2} \subseteq Q_s^{i+1} \subseteq Q_1^i$. Por lo tanto, para chequear (2) sólo necesitamos mostrar que $s \neq 1$. Si $i = j_0$ entonces $Q_1^{i+2} \not\subseteq Q_1^{i+1}$, así que $s \neq 1$ en este caso. Por otro lado, notemos que puesto que $\delta < 1/2$, tenemos que $\delta^{j_0+2} < \delta^{j_0+1}/2 \leq d(x, y) = d(x_1^{j_0+3}, x_1^{j_0+2})$. Entonces, de (b) obtenemos que $(j_0 + 3, 1) \not\preceq (j_0 + 2, 1)$; esto es $(i + 2, 1) \not\preceq (i + 1, 1)$ cuando $i = j_0 + 1$. Ahora de (7.6) tenemos que $s \neq 1$ también en el caso $i = j_0 + 1$.

Finalmente veremos que (3) vale. Notemos que de (1), *(d.5)* and (7.3) tenemos que $x_1^{i+1} \in B(x_1^i, a_2\delta^i)$. Luego, $d(x, y) = d(x_1^{i+1}, x_1^i) < a_2\delta^i$. Por otro lado, tenemos que $x_1^{i+1} \in Q_1^{i+1}$ y $x_1^i = x_1^{i+2} \in Q_s^{i+1}$ donde $s \neq 1$ es el entero en (2). Además, de *(d.1)*, tenemos que $Q_1^{i+1} \cap Q_s^{i+1} = \emptyset$. Por lo tanto $d(x, y) = d(x_1^{i+1}, x_1^i) \geq a\delta^{i+1}$. □

Demostración del Teorema 7.3. Probaremos que para todo par de puntos x e y en X con $x \neq y$ existe una familia diádica $\mathcal{D}_{(x,y)} = \mathcal{D}_{\preceq}$ para algún orden $\preceq$ asociado a $\mathcal{N}$ tal que $(s1)$ a $(s3)$ valen. Luego, tomando $\mathcal{S} = \{\mathcal{D}_{(x,y)} : x, y \in X, x \neq y\}$ obtendremos el resultado.

Sean x e y dos puntos en X con $x \neq y$ y sean i y s los enteros provistos por el Lema 7.7 asociado a la familia $\mathcal{N}$ de δ^j-redes. Asumamos que $i = 2u$ para algún $u \in \mathbb{Z}$. Consideremos los cubos diádicos $Q_y = Q_1^{i+1}, Q_x = Q_s^{i+1}$ y $Q = Q_1^i$. De (1) y (2) en el Lema 7.7, la definición de cubo diádico dada por (7.3) y *(d.1)*, obtenemos $(s1)$ y $(s2)$. Finalmente de (3) en el Lema 7.7 obtenemos que $d(x, y)$ es comparable con $\delta^{\mathcal{J}(Q)}$ lo cual nos da $(s3)$. El caso en el cual i es impar se prueba de manera similar. □

7.2. Caracterización via coeficientes de Haar

En lo que sigue denotamos con $\mathcal{H}$ al conjunto de todas las funciones de Haar h que pertenecen a algún sistema de Haar $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ asociado con alguna familia diádica $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ para alguna clase separadora $\mathcal{S}$. Dados $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$, $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ y $Q^{'} \in \mathcal{O}(Q)$, decimos que la función

$$h_{Q,Q'} = \left(\frac{\mu(Q \setminus Q^{'})}{\mu(Q)\mu(Q^{'})}\right)^{1/2} \chi_{Q'} - \left(\frac{\mu(Q^{'})}{\mu(Q)\mu(Q \setminus Q^{'})}\right)^{1/2} \chi_{Q\setminus Q'} \tag{7.7}$$

pertenece a $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$. Es importante destacar que cuando el proceso de ortonormalización de Grahm-Schmidt es aplicado a la funciones características de Q y $\#\mathcal{O}(Q) - 1$ cubos $Q^{''}$ en $\mathcal{O}(Q)$, el primer elemento en $\mathcal{H}_Q$ (ver *(h.4)*) pertenece a $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$. Por lo tanto, para cada clase separadora $\mathcal{S}$ tenemos que

$$\bigcup_{\mathcal{D}\in\mathcal{S}} \mathcal{T}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{H}.$$

El siguiente enunciado contiene las principales herramientas que usaremos en la prueba del Teorema 7.2.

Proposición 7.8. *Sean f una función localmente integrable sobre X y $\mathcal{D}$ una familia diádica en $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces*

(1) *para todo $Q \in \mathcal{D}$ y todo $Q^{'} \in \mathcal{O}(Q)$ se tiene que*

$$\left|m_Q(f) - m_{Q'}(f)\right| = \frac{\mu(Q \setminus Q^{'})}{\mu(Q)} \left|m_{Q'}(f) - m_{Q\setminus Q'}(f)\right|;$$

(2) *para todo $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ y toda función $h_{Q,Q'} \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, se tiene que*

$$\left|< f, h_{Q,Q'} >\right| = \left(\frac{\mu(Q^{'})\mu(Q \setminus Q^{'})}{\mu(Q)}\right)^{1/2} \left|m_{Q'}(f) - m_{Q\setminus Q'}(f)\right|.$$

Demostración. Notemos que si $Q = Q^{'}$ entonces la igualdad en (1) es trivial. Por otro lado, puesto que para $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ se tiene $\left(\frac{1}{\mu(Q^{'})} - \frac{1}{\mu(Q)}\right)\mu(Q^{'}) = \frac{\mu(Q\setminus Q^{'})}{\mu(Q)}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|m_{Q'}(f) - m_Q(f)\right| &= \left|\frac{1}{\mu(Q^{'})}\int_{Q'} f(z)d\mu(z) - \frac{1}{\mu(Q)}\int_{Q'\cup(Q\setminus Q^{'})} f(z)d\mu(z)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{\mu(Q^{'})} - \frac{1}{\mu(Q)}\right)\mu(Q^{'})m_{Q'}(f) - \frac{\mu(Q \setminus Q^{'})}{\mu(Q)} m_{Q\setminus Q'}(f)\right| \\
&= \frac{\mu(Q \setminus Q^{'})}{\mu(Q)} \left|m_{Q'}(f) - m_{Q\setminus Q'}(f)\right|,
\end{aligned}$$

y (1) vale.

La prueba de (2) es una consecuencia de (7.7). □

Demostración del Teorema 7.2. La prueba de este teorema sigue la línea del caso de la recta real dado en [**4**]. Las principales herramientas son el Teorema de diferenciación de Lebesgue y la Proposición 7.8. Sea $\mathcal{S}$ una clase separadora en $\mathfrak{D}(\delta)$ y sea f una función en $\mathcal{C}(\alpha, S)$. Probaremos que f es igual $\mu-$casi en todo punto a una función

$Lip(\alpha)$. Sean x e y dos puntos en X tales que $x \neq y$ y ambos son puntos de Lebesgue de f. Puesto que $\mathcal{S}$ es una clase separadora en $\mathfrak{D}(\delta)$, existen $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$, $Q \in \mathcal{D}$ y Q_x, Q_y en $\mathcal{O}(Q)$ tales que (s1) a (s3) en la Definición 7.5 valen.

Consideremos las dos sucesiones $(Q_n : n \in \mathbb{Z}_0^+)$ y $(R_n : n \in \mathbb{Z}_0^+)$ de cubos diádicos definidos de la siguiente manera. Para $n = 0$ definimos $Q_0 = Q$. Para $n = 1$ definimos $Q_1 = Q_x$. En general, para cada entero $n \geq 2$, tomamos $Q_n \in \mathcal{O}(Q_{n-1})$ tal que $x \in \overline{Q_n}$ donde $\overline{Q_n}$ es la clausura de Q_n. Notemos que de *(d.2)* los cubos diádicos Q_n están bien definidos para cada n. Analogamente definimos $R_0 = Q$, $R_1 = Q_y$, y en general, para cada entero $n \geq 2$, $R_n \in \mathcal{O}(R_{n-1})$ tal que $y \in \overline{R_n}$. Es importante observar que, por la construcción de estas sucesiones y puesto que $Q_1 \cap R_1 = \emptyset$, entonces $Q_n \cap R_n = \emptyset$ para todo entero positivo n.

Asociado con la sucesiones $(Q_n : n \in \mathbb{Z}_0^+)$ y $(R_n : n \in \mathbb{Z}_0^+)$ consideramos las dos siguientes sucesiones $(h_n : n \in \mathbb{Z}_0^+)$ y $(\tilde{h}_n : n \in \mathbb{Z}_0^+)$ de funciones test de tipo Haar en $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}_0^+$ tomamos $h_n = h_{Q_n,Q_{n+1}}$ y $\tilde{h}_n = h_{R_n,R_{n+1}}$ como en (7.7). Luego,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - m_{Q_k}(f) - f(y) + m_{R_k}(f)| + |m_{Q_0}(f) - m_{R_0}(f)| \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \left|m_{Q_i}(f) - m_{Q_{i-1}}(f)\right| + \sum_{i=0}^{k-1} \left|m_{R_i}(f) - m_{R_{i+1}}(f)\right| \\ &= I + II + III + IV. \end{aligned}$$

Puesto que $Q_0 = R_0 = Q$, tenemos que $II = 0$. Para I, puesto que ambos x e y son puntos de diferenciación para f, podemos elegir k suficientemente grande de manera tal que $I \leq d(x,y)^\alpha$. Aquí hemos usado el Teorema de diferenciación de Lebesgue a través de conjuntos diádicos el cual puede ser aplicado debido al control mérico de tales cubos. (ver [**3**]).

Puesto que III y IV son similares sólo trabajamos con III. Si $Q_{i-1} = Q_i$ entonces tenemos que $\left|m_{Q_i}(f) - m_{Q_{i-1}}(f)\right| = 0$. Pongamos $I_1 = \{i \in \mathbb{Z}^+ : Q_{i-1} \in \tilde{\mathcal{D}}\}$. Entonces,

$$III = \sum_{i \in I_1} \left|m_{Q_i}(f) - m_{Q_{i-1}}(f)\right|.$$

De la Proposición 7.8 y *(d.9)* tenemos que

$$\begin{aligned} \left|m_{Q_i}(f) - m_{Q_{i-1}}(f)\right| &= \frac{\mu(Q_{i-1} \setminus Q_i)}{\mu(Q_{i-1})} \left|m_{Q_i}(f) - m_{Q_{i-1} \setminus Q_i}(f)\right| \\ &= \left(\frac{\mu(Q_{i-1} \setminus Q_i)}{\mu(Q_i)\mu(Q_{i-1})}\right)^{1/2} \left|\int_X f(z) h_{i-1}(z) d\mu(z)\right| \\ &\leq C\mu(Q_i)^{-1/2} \left|\int_X f(z) h_{i-1}(z) d\mu(z)\right|, \end{aligned}$$

para todo $i \in I_1$. Entonces, de (7.2) y *(d.9)* obtenemos que

$$\begin{aligned} \left|m_{Q_i}(f) - m_{Q_{i-1}}(f)\right| &\leq C\mu(Q_i)^{-1/2}\ diam(Q_{i-1})^\alpha \mu(Q_{i-1})^{1/2} \\ &\leq C\ diam(Q_{i-1})^\alpha, \end{aligned}$$

para todo $i \in I_1$.

Notemos que, puesto que $Q \in \mathcal{D}^{\mathcal{J}(Q)}$, tenemos que Q_n pertenece a $\mathcal{D}^{\mathcal{J}(Q)+n}$ para cada $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Luego, de *(d.5)* tenemos que $diam(Q_n)$ está acotado por $a_2\delta^{\mathcal{J}(Q)+n}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Ahora, puesto que $0 < \delta < 1$ y $\alpha > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} III &\leq C\sum_{i\in I_1} diam(Q_{i-1})^\alpha \\ &\leq (a_2)^\alpha C \sum_{i\in I_1}\left(\delta^{\mathcal{J}(Q)+i-1}\right)^\alpha \\ &\leq (a_2)^\alpha C\left(\delta^{\mathcal{J}(Q)}\right)^\alpha \sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\left(\delta^{i-1}\right)^\alpha \leq (a_2)^\alpha C\left(\delta^{\mathcal{J}(Q)}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Por otro lado, puesto que la familia diádica $\mathcal{D}$ pertenece a la clase separadora $\mathcal{S}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$, de (s3) tenemos que $\left(\delta^{\mathcal{J}(Q)}\right)^\alpha \leq Cd(x,y)^\alpha$. Similarmente, usando $\tilde{h}_n$, tenemos que

$$IV \leq Cd(x,y)^\alpha.$$

Por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha,$$

para casi todo x e y en X. Luego, redefiniendo la función f sobre un conjunto de medida nula, tenemos que $f \in Lip(\alpha)$. □

Demostración del Teorema 7.4. Primeros notemos que para toda bola B en X y todo punto x en B tenemos que la desigualdad

$$\left(\int_B |f(z) - m_B(f)|^q\, d\mu(z)\right)^{1/q} \leq 2\left(\int_B |f(z) - f(x)|^q\, d\mu(z)\right)^{1/q}, \tag{7.8}$$

vale para cada $1 \leq q < \infty$.

Luego, si $f \in Lip(\alpha)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_B |f(z) - m_B(f)|^q d\mu(z)\right)^{1/q} &\leq 2\left(\int_B d(z,x)^\alpha d\mu(z)\right)^{1/q} \\ &\leq 2\ diam(B)^\alpha\ \mu(B)^{1/q}, \end{aligned}$$

para toda bola B en X y por lo tanto $f \in Lip(\alpha, q)$, $1 \leq q < \infty$. Ahora probaremos que $Lip(\alpha,q), 1 \leq q < \infty$ implica $\mathcal{C}(\alpha, S)$ para toda clase separadora $\mathcal{S}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$. Es fácil ver, de la desigualdad de Hölder, que $Lip(\alpha,q), 1 \leq q < \infty$ implica $Lip(\alpha, 1)$. Por lo tanto sólo tenemos que probar que $Lip(\alpha,1)$ implica $\mathcal{C}(\alpha,S)$. Notemos que si $f \in Lip(\alpha,1)$ entonces la desigualdad

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(x)-m_Q(f)|d\mu(x) \leq C\ diam(Q)^\alpha \tag{7.9}$$

vale para todo cubo diádico Q en $\mathcal{D}$ y toda familiadiádica $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$. En efecto, si $j\in\mathbb{Z}$ y Q es un cubo diádico en $\mathcal{D}^j$ entonces de *(d.5)* y la propiedad de duplicación para la medida μ tenemos que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1\mu(B_*) \leq \mu(Q) \leq C_2\mu(B^*),$$

donde $B_* = B(x,\frac{a_1}{2}\delta^j)$, $B^* = B(x, 2a_2\delta^j)$ para algún $x\in Q$. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(x)-m_Q(f)|d\mu(x) &\leq \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(x)-m_{B^*}(f)| + |m_{B^*}(f)-m_Q(f)|d\mu(x)\\
&\leq \frac{2}{\mu(Q)}\int_Q |f(x)-m_{B^*}(f)|d\mu(x)\\
&\leq \frac{2C_2}{\mu(B^*)}\int_{B^*} |f(x)-m_{B^*}(f)|d\mu(x)\\
&\leq 2C_2(2a_2\delta^j)^\alpha \leq C(diam(Q))^\alpha,
\end{aligned}$$

con lo cual (7.9) vale.

Consideremos ahora $\mathcal{S}$ una clase separadora en $\mathfrak{D}(\delta)$ y $h\in\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$. De *(h.1)*, *(h.3)*, la cota para la norma infinito de h dada por $\|h\|_\infty \leq C\mu(Q(h))^{-1/2}$ y la desigualdad (7.9) tenemos que

$$\begin{aligned}
|< f,h >| &= \left|\int_{Q_h} (f(z)-m_{Q_h}(f))\, h(z)d\mu(z)\right|\\
&\leq \int_{Q_h} |f(z)-m_{Q_h}(f)|\, |h(z)|\, d\mu(z)\\
&\leq C\mu(Q_h)^{-1/2}\int_{Q_h} |f(z)-m_{Q_h}(f)|\, d\mu(z)\\
&\leq C\ diam(Q_h)^\alpha\ \mu(Q_h)^{1/2},
\end{aligned}$$

lo cual implica que $f\in\mathcal{C}(\alpha,S)$. Finalmente, del Teorema 7.2 tenemos la inclusión $\mathcal{C}(\alpha,S)\subseteq Lip(\alpha)$ y esto finalia la demostración. $\square$

CAPÍTULO 8

Sistemas de Haar en Espacios de Lorentz

La caracterización de espacios de funciones via coeficientes de wavelets y la incondicionalidad de tales bases para estos espacios son dos de las más importantes propiedades de las wavelets en el contexto euclídeo. La naturaleza de los espacios de funciones y las propiedades particulares de las wavelets pueden ser muy variadas. En el contexto general de espacios métricos con medida (X, d, μ), las funciones de Haar son el ejemplo básico de sistema de wavelet ortonormal en L^2. Dada la discontinuidad de las funciones de Haar, estos sistemas sólo pueden ser bases, en el sentido de Schauder, de espacios de funciones sin regularidad en el sentido clásico. Este es el caso de los espacios de Lebesgue. En [**2**], los autores introducen sistemas de Haar asociados con los cubos diádicos de Christ [**20**] y demuestran que tales sistemas son bases incondicionales para espacios de Lebesgue pesados. Más aún, ellos dan una caracterización de tales espacios via coeficientes de Haar. El propósito de este capítulo es considerar el caso de los espacios de Lorentz. Precisamente, vamos a caracterizar los espacios $L^{p,q}$ a travéz de los coeficientes de Haar y mostraremos la incondicionalidad de tales sistemas en estos espacios cuando $1 < p, q < \infty$. Las principales herramientas son, la técnica de extrapolación de Rubio de Francia como ha sido generalizada en [**22**] y los resultados de caracterización e incondicionalidad dados en el Capítulo 4 para los espacios de Lebesgue pesados. Los resultados principales de este capítulo han sido aceptados para su piblicación en la revista de la Unión Matemática Argentina (ver [**46**]). Es importante destacar que resultados similares en espacios euclídeos están en [**48**] desde un punto de vista diferente.

8.1. Espacios de Lorentz

En esta sección recordaremos brevemente la teoría básica de espacios de Lorentz sobre espacios de medida (X, μ) tales que μ es una medida σ-finita. Restringiremos nuestra atención sólo a la escala de espacios $L^{p,q}$ con $1 < p, q < \infty$. Un estudio detallado de estos espacios se puede encontrar en [**36**] y [**39**] (ver también [**32**] o [**13**] para un enfoque desde el punto de vista de espacios de Banach de funciones). Dada una función medible a valores reales f definida sobre X, denotaremos con λ_f a la función de distribución de f, esto es $\lambda_f(s) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\})$. La reordenada no creciente de f es la función definida por $f^*(t) = inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$, para $t \geq 0$.

Para $1 < p, q < \infty$, el espacio $L^{p,q}(X, \mu) = L^{p,q}$ se define como el espacio vectorial de todas las funciones medibles f sobre X tales que $\|f\|^*_{p,q} < \infty$, donde

$$\|f\|^*_{p,q} = \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

La cantidad $\|.\|^*_{p,q}$ no es una norma. Sin embargo, R. Hunt introduce en [**36**] una norma sobre $L^{p,q}$ equivalente a $\|.\|^*_{p,q}$. Esta norma está definida como $\|f\|_{p,q} = \|f^{**}\|^*_{p,q}$, donde

$$f^{**}(t) = \begin{cases} \sup\limits_{\mu(E) \geq t} \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(y)| d\mu(y) & \text{si } t \leq \mu(X), \\ \\ \frac{1}{t} \int_X |f(y)| d\mu(y) & \text{si } t > \mu(X). \end{cases}$$

Los siguientes enunciados coleccionan las principales propiedades de los espacios de Lorentz que usaremos luego. Algunas de ellas son elementales y otras pueden hallarse en [**36**] y [**13**]. En lo que sigue denotaremos con $\mathbb{V}_X$ al espacio de todas las funciones simples definidas sobre el espacio de medida (X, μ). Esto es, $f \in \mathbb{V}_X$ si existen números reales $a_i, i = 1, ..., M$ tales que $f = \sum_{i=1}^M a_i \chi_{E_i}$, donde cada conjunto E_i es medible. Con $\mathcal{V}_{(X)}$, denotaremos la clase que coincide con $\mathbb{V}_X$ cuando $\mu(X) = \infty$ y la clase de todas aquellas funciones $f \in \mathbb{V}_X$ tales que $\int_X f d\mu = 0$ when $\mu(X) < \infty$.

($L1$) $(L^{p,q}, \|.\|_{p,q})$ es un espacio de Banach y $\|f\|^*_{p,q} \leq \|f\|_{p,q} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{p,q}$ para toda función f en $L^{p,q}$.

($L2$) Para todo conjunto medible E se tiene que $\|\chi_E\|^*_{p,q} = \mu(E)^{1/p}$.

($L3$) Si f y g son dos funciones medibles definidas sobre X tales que $|f| \leq |g|$ μ en casi todo punto, entonces $\|f\|_{p,q} \leq \|g\|_{p,q}$.

($L4$) Si $(f_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ es una sucesión de funciones en $L^{p,q}$ tal que $0 \leq f_n \nearrow f$ μ en casi todo punto, entonces o bien $f \notin L^{p,q}$ y $\|f_n\|_{p,q} \nearrow \infty$ o $f \in L^{p,q}$ y $\|f_n\|_{p,q} \nearrow \|f\|_{p,q}$.

($L5$) El espacio $\mathcal{V}_{(X)}$ es denso en $\mathcal{L}^{p,q}$, donde $\mathcal{L}^{p,q}$ es $L^{p,q}$ si $\mu(X) = \infty$ y aquellas funciones en $L^{p,q}$ con integral nula si $\mu(X) < \infty$.

($L6$) (Teorema de Convergencia Dominada) Sea f una función medible definida sobre X. Si $(f_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ es una sucesión de funciones medibles definidas sobre X tal que $f_n \longrightarrow f$ μ en casi todo punto y $|f_n| \leq |g|$ para alguna función g en $L^{p,q}$ y todo entero positivo n, entonces $\|f_n - f\|_{p,q} \longrightarrow 0$.

($L7$) (Lema de Fatou) Si $(f_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ es una sucesión de funciones medibles definidas sobre X, entonces $\|\underset{n\longrightarrow\infty}{lim\ inf} f_n\|_{p,q} \leq \underset{n\longrightarrow\infty}{lim\ inf} \|f_n\|_{p,q}$.

($L8$) (Dualidad) $(L^{p,q})^* = L^{p',q'}$, donde p' y q' son los exponentes conjugados de Hölder de p y q respectivamente.

$(L9)$ (Desigualdad de Hölder) Si $f \in L^{p,q}$ y $g \in L^{p',q'}$ donde p' y q' son los exponentes de Hölder conjugados de p y q respectivamente, entonces la función $f.g$ pertenece a L^1 y $\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq C\|f\|^*_{p,q}\|g\|^*_{p',q'}$.

Es importante notar que en nuestro contexto general, los átomos en el sentido de la medida aparecen naturalmente en los ejemplos clásicos de espacio de tipo homogéneo. En la literatura clásica sobre espacios de Lorentz, tal como [**49**], los átomos son excluidos. Como los autores explícitamente enfatizan, esta restricción es asumida sólo por simplicidad. A pesar de ello, en el trabajo original de Hunt ,[**36**], la restricción a espacios no atómicos es relevante sólo para la dualidad cuando p o q toman valoren en el intervalo $(0,1)$.

8.2. Extrapolación: de los espacios de Lebesgue a los de Lorentz

Esta sección está dedicada a introducir la técnica de extrapolación de Rubio de Francia. Tal resultado de extrapolación provee acotaciones en la norma $L^{p,q}$ a partir de acotaciones en los espacios de Lebesgue con pesos diádicos. El preciso resultado de extrapolación que usaremos es una ligera modificación de la técnica generalizada de Rubio de Francia dada en el Teorema 3.5 en [**22**]. Comenzamos por introducir brevemente las nociones básicas de espacios de Banach de funciones que son necesarias para enunciar de manera precisa el teorema Theorem 3.5 en [**22**]. Referimos a [**13**] para un estudio detallado de espacios de Banach de funciones. Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finita. Escribiremos $\mathcal{M}_\mu$ y $\mathcal{M}^+_\mu$ para denotar el conjunto de todas las funciones μ-medibles $f : X \longrightarrow [-\infty,+\infty]$ y el subconjunto de $\mathcal{M}_\mu$ que toman valores en $[0,\infty]$ respectivamente. Una función norma es un mapeo $\rho : \mathcal{M}^+_\mu \longrightarrow [0,\infty]$ tal que para todas f, g y f_n (con $n \in \mathbb{Z}^+$) en $\mathcal{M}^+_\mu$ las siguientes afirmaciones valen,

$(B1)$ $\rho(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$ μ casi en todo punto,

$(B2)$ para todo $a > 0$ tenemos que $\rho(af) = a\rho(f)$,

$(B3)$ $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$,

$(B4)$ si $0 \leq g \leq f$ μ casi todo punto, entonces $\rho(g) \leq \rho(f)$,

$(B5)$ Si $0 \leq f_n \nearrow f$ μ casi todo punto, entonces $\rho(f_n) \nearrow \rho(f)$,

$(B6)$ si $E \subseteq X$ con $\mu(E) < \infty$, entonces $\rho(\chi_E) < \infty$,

$(B7)$ para cada $E \subseteq X$ con $\mu(E) < \infty$, existe una constante positiva C tal que $\int_E f d\mu \leq C\rho(f)$.

El espacio $\mathbb{B} = \{f \in \mathcal{M}_\mu : \|f\|_{\mathbb{B}} < \infty\}$ es un espacio de Banach normado con norma dada por $\|f\|_{\mathbb{B}} = \rho(|f|)$. Diremos que $\mathbb{B}$ es un espacio de Banach de funciones.

Dado un espacio de Banach de funciones $\mathbb{B}$, definimos la escala de espacios de Banach de funciones $\mathbb{B}^r, 1 \leq r < \infty$, como $\mathbb{B}^r = \{f \in \mathcal{M}_\mu : |f|^r \in \mathbb{B}\}$ con norma $\|f\|_{\mathbb{B}^r} = \||f|^r\|^{1/r}_{\mathbb{B}}$. El espacio asociado a $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$, es el espacio de todas las funciones $f \in \mathcal{M}_\mu$ tales que $\|f\|_{\mathbb{B}'} < \infty$, donde

$$\|f\|_{\mathbb{B}'} = sup\left\{\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) : g \in \mathbb{B}, \|g\|_{\mathbb{B}} \leq 1\right\}.$$

Este espacio $\mathbb{B}^{'}$ es un espacio de Banach de funciones y vale la siguiente desigualdad de Hölder generalizada: para toda $f \in \mathbb{B}$ y cada $g \in \mathbb{B}^{'}$,

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{\mathbb{B}}\|g\|_{\mathbb{B}'}.$$

Además, puesto que $(\mathbb{B}^{'})^{'} = \mathbb{B}$, tenemos la siguiente identidad fundamental

$$\|f\|_{\mathbb{B}} = sup\left\{\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) : g \in \mathbb{B}^{'}, \|g\|_{\mathbb{B}'} \leq 1\right\}. \tag{8.1}$$

Dada una familia $\mathfrak{B}$ de conjuntos abiertos en (X, d, μ) definimos, para $1 \leq p \leq \infty$, las clases de Muckenhoupt $A_p^{\mathfrak{B}}$ como la familia de todas las funciones localmente integrables w tales que las desigualdades (3.8), (3.9) y (3.10) respectivamente, valen con $\mathfrak{B}$ en lugar de $\mathcal{D}$. También, definimos el operador $M_{\mathfrak{B}}$ via (3.5) con el supremo tomado sobre la familia $\mathfrak{B}$. Como en [**22**], diremos que $\mathfrak{B}$ es una base de Muckenhoupt si para todo $1 < p < \infty$, $w \in A_p^{\mathfrak{B}}$ es una condición suficiente para la acotación en L^p_w del operador $M_{\mathfrak{B}}$. Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es una familia de pares ordenados (f, g) de funciones medibles no negativas sobre X, diremos que $\mathcal{F}$ es $\mathbb{B}$-admisible si para cada f tal que para algúna función g es $(f, g) \in \mathcal{F}$, entonces valen las dos siguientes condiciones

(a) $\int_X f^p w d\mu < \infty$ para todo $1 < p < \infty$ y todo $w \in A_p^{\mathcal{D}}$;
(b) $\|f\|_{\mathbb{B}} < \infty$.

El preciso enunciado de extrapolación dado en [**22**] está contenido en el siguiente resultado.

Teorema 8.1. *(Teorema 3.5 en* [**22**]*) Sea $\mathfrak{B}$ una base de Muckenhoupt y sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach de funciones. Sea $\mathcal{F}$ una familia $\mathbb{B}$-admisible de pares (f, g). Supongamos que para algún p_0, $0 < p_0 < \infty$, y todo $w \in A_1^{\mathfrak{B}}$,*

$$\int_X f(x)^p w(x)d\mu(x) \leq C \int_X g(x)^p w(x)d\mu(x). \tag{8.2}$$

Si existen q_0, $p_0 \leq q_0 < \infty$, tal que $\mathbb{B}^{1/q_0}$ es un espacio de Banach de funciones y $M_{\mathfrak{B}}$ es acotado sobre $(\mathbb{B}^{1/q_0})^{'}$, entonces

$$\|f\|_{\mathbb{B}} \leq C\|g\|_{\mathbb{B}}. \tag{8.3}$$

Ahora enunciamos el resultado de extrapolación que usaremos en lo que sigue, el cual, como ya hemos mencionado, es una ligera variante del teorema anterior para el contexto particular de espacios de Lorentz sobre espacios de medida generales.

TEOREMA 8.2. *Sea $1 < p, q < \infty$. Sea $\mathcal{F}$ una familia $L^{p,q}$-admisible de pares ordenados (f, g). Asumamos que para todo r, $1 < r < \infty$, existe una constante positiva $C = C(r)$ tal que la desigualdad*

$$\int_X f(x)^r w(x) d\mu(x) \leq C \int_X g(x)^r w(x) d\mu(x). \tag{8.4}$$

vale para todo par $(f, g) \in \mathcal{F}$ y todo peso $w \in A_1^{\mathcal{D}}$. Entonces, para alguna constante C tenemos que

$$\|f\|_{p,q} \leq C\|g\|_{p,q}, \tag{8.5}$$

para todo par $(f, g) \in \mathcal{F}$.

En [**3**] los autores demostraron que el operador maximal diádico $M_{\mathcal{D}}$ es acotado en L^p_w para $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ y $1 < p < \infty$. Entonces, puesto que cada cubo diádico $Q \in \mathcal{D}$ es un conjunto abierto, tenemos que la familia diádica $\mathcal{D}$ es una base de Muckenhoupt.

Aún cuando, a simple vista, el Teorema 8.2 luce como un caso especial del Teorema 8.1, este no es el caso en nuestro contexto geométrico general. En efecto, en (X, d, μ) están permitidos los átomos. Por lo tanto, como se muestra en [**13**], puede pasar que los espacios $(L^{p,q})'$ y $(L^{p,q})^*$ no coincidan. Por otro lado, como veremos en el siguiente teorema, $M_{\mathcal{D}}$ es acotado como un operador en $L^{p',q'} = (L^{p,q})^*$. De este modo el Teorema 8.2 se prueba como el Teorema 8.1 cambiando antes la hipótesis de acotación de $M_{\mathcal{D}}$ en $(L^{p,q})'$ por su acotación en $(L^{p,q})^*$. El enunciado del mencionado resultado de acotación de $M_{\mathcal{D}}$ en espacios de Lorentz es el siguiente.

TEOREMA 8.3. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Si $1 < p, q < \infty$, entonces existe una constante positiva C tal que $\|M_{\mathcal{D}} f\|_{p,q} \leq C\|f\|_{p,q}$ para toda función f.*

La demostración del Teorema 8.3 se obtiene por interpolación. Ver por ejemplo [**49**] página 197.

8.3. Caracterización via coeficientes de Haar e incondicionalidad en $L^{p,q}$

En esta sección probaremos el siguiente resultado que es un análogo del Teorema 4.5 para los espacios de Lorentz. En lo que sigue usaremos la siguiente notación,

$$T_F(f) = \sum_{h \in F} < f, h > h = \sum_{h \in F} \left(\int_X f h \, d\mu \right) h,$$

donde F es un subconjunto finito de $\mathcal{H}$ y

$$\mathcal{S}(f)(x) = \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} | < f, h > |^2 |h(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema 8.4. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $\mathcal{H}$ un sistema de Haar asociado a la familia diádica $\mathcal{D}$ en $\mathfrak{D}(\delta)$. Si $1 < p, q < \infty$, entonces*

(*I*) *existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que para toda función $f \in \mathcal{L}^{p,q}$ tenemos que*

$$C_1 \|f\|_{p,q} \ \leq \left\| \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} | < f, h > |^2 |h|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,q} \ \leq \ C_2 \|f\|_{p,q}.$$

(*II*) *$\mathcal{H}$ es una base incondicional para $\mathcal{L}^{p,q}(X, \mu)$ en el sentido que*

(II.1) Los operadores T_F están uniformemente acotados sobre $\mathcal{L}^{p,q}$ con F variando sobre los subconjuntos finitos de $\mathcal{H}$,

(II.2) para cada $h \in \mathcal{H}$, los funcionales $< f, h >= \int_X fh \, d\mu$ son lineales y continuos para $f \in \mathcal{L}^{p,q}$,

(II.3) las combinaciones lineales de los elementos de $\mathcal{H}$ son densas en $\mathcal{L}^{p,q}$.

Para probar (I) y (II), aplicaremos el resultado de extrapolación dado por el Teorema 8.2 para clases admisibles las cuales están dadas en términos de los operadores T_F y $\mathcal{S}$. Las dos siguientes proposiciones serán las herramientas centrales para la prueba del Teorema 8.4.

Proposición 8.5. *Los operadores T_F están uniformemente acotados en $\mathcal{L}^{p,q}$, $1 < p, q < \infty$. Esto es, existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\|T_F(f)\|_{p,q} \leq C \|f\|_{p,q},$$

vale para toda función $f \in \mathcal{L}^{p,q}$ y todo subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{H}$.

Demostración. Primero notemos que, puesto que las funciones $h \in \mathcal{H}$ son simples, para cualquier conjunto finito $F \subseteq \mathcal{H}$ y cada función $f \in \mathcal{L}^{p,q}$ obtenemos que $T_F(f) \in \mathbb{V}_X$. Por lo tanto, $T_F(f) \in L^r_w \cap L^{p,q}$ para todo peso $w \in A^{\mathcal{D}}_r$ con $1 < r < \infty$ y todo $f \in \mathcal{L}^{p,q}$. Tomemos $\mathcal{F} = \{(T_F(f), f) : f \in \mathcal{L}^{p,q}, F \subseteq \mathcal{H}, \#(F) < \infty\}$, donde $\#(F)$ denota el número de elementos del conjunto F. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia $L^{p,q}$-admisible. Del Teorema 4.5, sabemos que $\mathcal{H}$ es una base incondicional para $\mathcal{L}^r_w(X, \mu)$ para todo peso $w \in A^{\mathcal{D}}_r$ con $1 < r < \infty$. Luego, para alguna constante C tenemos que la desigualdad

$$\|T_F(f)\|_{L^r_w} \leq C \|f\|_{L^r_w},$$

vale para todo peso $w \in A^{\mathcal{D}}_r$, cualquier $1 < r < \infty$ y para todo conjunto finito $F \subseteq \mathcal{H}$. Puesto que $A^{\mathcal{D}}_1 \subseteq A^{\mathcal{D}}_r$ para todo $1 < r < \infty$, la proposición sigue del Teorema 8.2. $\square$

Proposición 8.6. *Existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que las desigualdades*

$$C_1 \|f\|_{p,q} \leq \|\mathcal{S}(f)\|_{p,q} \leq C_2 \|f\|_{p,q}, \tag{8.6}$$

valen para toda función $f \in \mathcal{V}_{(X)}$

Demostración. La desigualdad izquierda en (8.6) se obtiene directamente del Teorema 8.2 tomando $\mathcal{F} = \{(f, \mathcal{S}(f)) : f \in \mathcal{V}_{(X)}\}$ y usando el Teorema 4.5. Para probar la desigualdad del lado derecho en (8.6), comenzamos aplicando el Teorema 8.2 con la familia $\mathcal{F} = \{(S_F(f), f) : f \in \mathcal{V}_{(X)}, F \subseteq \mathcal{H}, \#(F) < \infty\}$ donde $\mathcal{S}_F(f) = \left(\sum_{h\in F} | < f, h > |^2 |h|^2\right)^{1/2}$ para cada conjunto finito $F \subseteq \mathcal{H}$. En efecto, es fácil ver que $\mathcal{S}_F(f) \in \mathbb{V}_X$ y por lo tanto $\mathcal{F}$ es una familia $L^{p,q}$-admisible. Aplicando el Teorema 8.2, puesto que del Teorema 4.5 la acotación en $\mathcal{L}^p_w$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ es uniforme en F, tenemos que

$$\|\mathcal{S}_F(f)\|_{p,q} \leq C\|f\|_{p,q}, \tag{8.7}$$

para toda función $f \in \mathcal{V}_{(X)}$ y todo subconjunto finito F de $\mathcal{H}$.

Ahora vamos a mostrar que (8.7) vale también para $\mathcal{S}(f)$. Tomamos una sucesión $(F_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ de subconjuntos de $\mathcal{H}$ tal que $\#(F_n) < \infty$, $F_n \subseteq F_{n+1}$ para cada entero positivo n y $\bigcup_n F_n = \mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{S}_{F_n}(f)(x) \nearrow \mathcal{S}(f)(x)$ para todo $x \in X$ y toda función $f \in \mathcal{V}_{(X)}$. Por lo tanto, de $(L4)$ y (8.7) tenemos que $\mathcal{S}(f) \in L^{p,q}$ y (8.7) vale para $\mathcal{S}(f)$ $\square$

Demostración del Teorema 8.4. Primero probamos (I). Comenzamos por mostrar que

$$\|\mathcal{S}(f)\|_{p,q} \leq C\|f\|_{p,q}, \tag{8.8}$$

para alguna constante positiva C y toda función f en $\mathcal{L}^{p,q}$. Sea $f \in \mathcal{L}^{p,q}$. Luego, de $(L5)$, existe una sucesión $(f_k : k \in \mathbb{Z}^+)$ de funciones $f_k \in \mathcal{V}_{(X)}$ tal que

$$\|f_k - f\|_{p,q} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8.9}$$

Notemos que para una tal sucesión y cada función $h \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$< f_k, h > \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} < f, h > \tag{8.10}$$

En efecto. De *(h.1)* a *(h.4)* tenemos, para cada función $h \in \mathcal{H}$, que

$$|h(x)| \leq \mu(Q(h))^{-1/2}\chi_{Q(h)}(x).$$

Por lo tanto, de $(L9)$, $(L2)$, $(L1)$ y (8.9) obtenemos que

$$\begin{aligned} | < f_k, h > - < f, h > | &\leq \int_X |f_k - f||h|d\mu \\ &\leq C\mu(Q(h))^{-1/2}\|f_k - f\|^*_{p,q}\|\chi_{Q(h)}\|^*_{p',q'} \\ &\leq C\mu(Q(h))^{-1/2+1/p'}\|f_k - f\|_{p,q} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver, usando una versión discreta del lema de Fatou, que

$$\mathcal{S}(f)(x) \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} inf \mathcal{S}(f_k)(x).$$

Luego, de $(L7)$ y la Proposición 8.6 tenemos que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}(f)\|_{p,q} &\leq \liminf_{k\longrightarrow\infty}\|\mathcal{S}(f_k)\|_{p,q}\\ &\leq C\liminf_{k\longrightarrow\infty}\|f_k\|_{p,q} = C\ \|f\|_{p,q}.\end{aligned}$$

Ahora probaremos que existe una constante positiva C tal que $\|f\|_{p,q} \leq C\|\mathcal{S}(f)\|_{p,q}$ para toda función $f \in \mathcal{L}^{p,q}$. Notar que si f pertenece a $\mathcal{L}^{p,q}$ y $(f_k : k \in \mathbb{Z}^+)$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{V}_{(X)}$ como en (8.9), entonces

$$\mathcal{S}(f)(x) \leq 2\left[\mathcal{S}(f - f_k)(x) + \mathcal{S}(f_k)(x)\right]. \tag{8.11}$$

Luego, de la Proposición 8.6, (8.11), $(L3)$, $(L1)$ y (8.8) tenemos que

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,q} &= \lim_{k\longrightarrow\infty}\|f_k\|_{p,q}\\ &\leq C\liminf_{k\longrightarrow\infty}\|\mathcal{S}(f_k)\|_{p,q}\\ &\leq 2C\left(\liminf_{k\longrightarrow\infty}\|\mathcal{S}(f_k - f)\|_{p,q} + \|\mathcal{S}(f)\|_{p,q}\right)\\ &\leq 2C\left(\liminf_{k\longrightarrow\infty}\|f_k - f\|_{p,q} + \|\mathcal{S}(f)\|_{p,q}\right)\\ &= 2C\|\mathcal{S}(f)\|_{p,q},\end{aligned}$$

con lo cual finalizamos la prueba de (I). Ahora probaremos (II). Primero notemos que $(II,1)$ es la Proposición 8.5. Por lo tanto sólo necesitamos mostrar $(II,2)$ y $(II,3)$. Puesto que cada función $h \in \mathcal{H}$ pertenece a $L^\infty(X,\mu)$, de $(L9)$, $(L2)$ y $(L1)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}|<h,f>| &= \left|\int_X h(x)f(x)d\mu(x)\right|\\ &\leq \|h\|_\infty\int_{Q(h)}|f(x)|d\mu(x)\\ &\leq C\|h\|_\infty\|\chi_{Q(h)}\|^*_{p',q'}\|f\|^*_{p,q}\\ &\leq C\|h\|_\infty\mu(Q(h))^{1/p}\|f\|_{p,q},\end{aligned}$$

para cada función $h \in \mathcal{H}$ y toda función $f \in L^{p,q}$. Entonces $(II,2)$ vale. Finalizamos la prueba mostrando $(II,3)$. Sea $f \in L^{p,q}$. Tomamos una sucesión $(\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ de subconjuntos de $\mathcal{H}$ tal que $\bigcup_n\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$, $\#(\mathcal{H}_n) < \infty$ y $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_{n+1}$. Para cada entero positivo n escribimos

$$T_{\mathcal{H}_n}(f)(x) = \sum_{h\in\mathcal{H}_n} <f,h> h(x).$$

Luego, de la ortogonalidad del sistema de Haar $\mathcal{H}$ y la linealidad del operador $T_{\mathcal{H}_n}$, tenemos que

$$\mathcal{S}(f - T_{\mathcal{H}_n}(f))(x) = \left(\sum_{h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_n} | < f, h > |^2 |h(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Entonces $\mathcal{S}(f - T_{\mathcal{H}_n}(f))(x) \longrightarrow 0$ μ-casi todo punto, y $\mathcal{S}(f - T_{\mathcal{H}_n}(f))(x) \leq \mathcal{S}(f)(x)$. Por lo tanto, de (I) y $(L6)$ tenemos que

$$\|f - T_{\mathcal{H}_n}(f)\|_{p,q} \leq C \|\mathcal{S}(f - T_{\mathcal{H}_n}(f))\|_{p,q} \longrightarrow 0,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$ y $(II,3)$ queda probado. $\square$

CAPÍTULO 9

Voracidad y democracia de los sistemas de Haar

El concepto de base greedy (voraz) en espacios de Banach juega un rol central en teoría de aproximación no lineal (ver [**30**]). En [**50**], el autor establece la existencia de bases greedy para los espacios de Lebesgue $L^P(0,1)$ con $1 < p < \infty$. Más específicamente, el autor prueba que cualquier base equivalente (en el sentido de equivalencia de bases de Schauder) al clásico sistema de Haar en (0,1) es una base greedy.

Recordemos que una base normalizada $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathbb{B}$ se dice greedy *si existe una constante* $C > 0$ *tal que para cualquier elemento* $x \in \mathbb{B}$ *con* $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$*, cualquier entero positivo* m*, todo conjunto* $G_1 \subseteq \mathbb{N}$ *de cardinalidad* m *tal que*

$$\min_{n\in G_1}|\alpha_n| \;\geq\; \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus G_1}|\alpha_n|,$$

todo conjunto $G_2 \subseteq \mathbb{N}$ *también de cardinalidad* m *y toda sucesión de escalares* β_n *se tiene que*

$$\left\| x - \sum_{n\in G_1} \alpha_n x_n \right\|_{\mathbb{B}} \;\leq\; C \left\| x - \sum_{n\in G_2} \beta_n x_n \right\|_{\mathbb{B}}.$$

Una cuestión central en teoría de aproximación es la construcción de algoritmos eficientes para producir aproximaciones por N-términos en un espacio de Banach $\mathbb{B}$ con una base incondicional numerable $\mathcal{B} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para $x \in \mathbb{B}$, el error de aproximación por N-términos con respecto a la base $\mathcal{B}$ está definido por

$$\sigma_N(x) \;=\; inf\{\|x-y\|_{\mathbb{B}} :\; y \in \Sigma_n\},$$

donde Σ_n denota el conjunto de todos los elementos $y \in \mathbb{B}$ con a lo sumo N coeficientes no nulos en la representación $y = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$. Las bases greedy producen algoritmos que son casi óptimos para aproximación por N-términos (ver [**38**]).
Konyagin y Temlyakov [**38**] dieron una caracterización de bases greedy en términos de incondicionalidad y democracia. Más presisamente, ellos probaron que tener una base greedy es equivalente a que la base sea incondicional y democrática.

En este último capítulo abordamos el problema de estudiar la democracia de los sistemas de Haar definidos en el Capítulo 4 para los espacios de Lebesgue $L^p_w(X,\mu)$ sobre espacios de tipo homogéneo, con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ y para espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mu)$ con $1 < p, q < \infty$. El concepto de democracia es relativamente nuevo y como ya hemos mencionado, fue definido en el contexto general de espacios de Banach en [**38**]. Sea $(\mathbb{B}, \|.\|_{\mathbb{B}})$ un espacio de Banach. Un conjunto numerable $\mathcal{B}$ de la esfera unitaria de $\mathbb{B}$ se dice democrática en $\mathbb{B}$ si para alguna constante positiva D la desigualdad

$$\left\| \sum_{h \in F_1} h \right\|_{\mathbb{B}} \leq D \left\| \sum_{h \in F_2} h \right\|_{\mathbb{B}}, \tag{9.1}$$

vale para toda elección de subconjuntos finitos F_1 y F_2 de $\mathbb{B}$ con $|F_1| = |F_2|$. En este capítulo escribimos $|F|$ para denotar el número de elementos en F.

El ejemplo más clásico de sistema democrático es provisto por cualquier sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert. En efecto, en tal caso (9.1) es una identidad con $D = 1$.

En la primer sección del presente capítulo se abordará el problema de la democracia de sistemas de Haar en los espacios de Lebesgue pesados en el contexto de espacios de tipo homogéneo, mientras que la segunda sección estará dedicada al análisis correspondiente para espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mu)$ con $1 < p, q < \infty$.

9.1. El caso $L^p_w(X, \mu)$ con $w \in A^{\mathcal{D}}_p$ y $1 < p < \infty$.

La democracia en los espacios de Lebesgue L^p, $1 < p < \infty$ sobre espacios euclídeos es una propiedad común de todas las bases de wavelets que son equivalentes a la base de Haar (ver [**51**]). Un resultado análogo para el caso de espacios de Lebesgue con pesos en el contexto euclídeo puede hallarse en [**28**]. El principal resultado de esta sección está contenido en el siguiente enunciado.

TEOREMA 9.1. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{H}$ un sistema de tipo Haar asociado a una familia diádica $\mathcal{D}$. Entonces el sistema $\tilde{\mathcal{H}} = \{\frac{h}{\|h\|_{p,w}} : h \in \mathcal{H}\}$ es una base democrática para $L^p_w(X, \mu)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\mathcal{D}}_p$. Más aún*

$$\left\| \sum_{h \in F} \frac{h}{\|h\|_{p,w}} \right\|_{p,w} \approx |F|^{1/p}, \tag{9.2}$$

para cada subconjunto finito F de $\mathcal{H}$.

Las herramientas básicas para la prueba del Teorema 9.1 son la caracterización via wavelets de Haar de los espacios de Lebesgue pesados dada en el Capítulo 4 junto con los dos siguientes lemas.

LEMA 9.2. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Sea w una medida finita y doblante sobre $\mathcal{D}$, esto es, existe una constante positiva C tal que*

$$w(Q) \leq C w(Q') < \infty \tag{9.3}$$

para todo cubo diádico $Q \in \mathcal{D}^j$ con $j \in \mathbb{Z}$ y todo $Q' \in \mathcal{D}^{j+1}$ tal que $Q' \subseteq Q$. Entonces existe $\alpha > 1$ tal que $w(Q) \geq \alpha w(Q')$ para todo par de cubos diádicos Q y Q' en $\mathcal{D}$ con Q el primer cubo diádico diferente de Q' tal que $Q' \subseteq Q$.

Demostración. Sean Q y Q' dos cubos diádicos en $\mathcal{D}$ tales que Q es el primer cubo diádico diferente de Q' que satisface $Q' \subseteq Q$ con $Q \in \mathcal{D}^j$ y $Q' \in \mathcal{D}^{j+1}$ para algún entero j. Como $Q \neq Q'$, existe $Q'' \in \mathcal{D}^{j+1}$ tal que $Q'' \neq Q'$ y $Q'' \subseteq Q$. Dado que w es una medida finita tenemos que $w(Q \setminus Q') = w(Q) - w(Q')$ y de (9.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} w(Q') &\leq w(Q) \\ &\leq Cw(Q'') \\ &\leq Cw(Q \setminus Q') \\ &= C(w(Q) - w(Q')). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{1+C}{C} w(Q') \leq w(Q)$ y el lema queda demostrado con $\alpha = \frac{1+C}{C}$ □

Es importante recordar aqui que todo peso $w \in A^{\mathcal{D}}_p$ con $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ y $1 < p < \infty$ satisface la condición (9.3) (ver Capítulo 3).

Lema 9.3. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\mathcal{D}$ una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ y w un peso en $A^{\mathcal{D}}_p$ con $1 < p < \infty$. Entonces existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que para cada función $h \in \mathcal{H}$ se satisface que*

$$c_1 w(Q'_h)^{-2/p} \chi_{Q'_h}(x) \leq \frac{|h(x)|^2}{\|h\|_{p,w}} \leq c_2 w(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q(h)}(x),$$

donde $Q(h)$ y Q'_h son los cubos diádicos dados en (h.1)y (h.6) para la función h respectivamente (ver Capítulo 4).

Demostración. Sean $h \in \mathcal{H}$ y $Q'_h \in \mathcal{O}(Q(h))$ como en *(h.6)* (ver Capítulo 4). Es decir, tal que

$$\|h\|_\infty \chi_{Q'_h}(x) \leq |h(x)| \leq \|h\|_\infty \chi_{Q(h)}(x)$$

para cada punto $x \in X$. Entonces

$$\|h\|_\infty w(Q'_h)^{1/p} \leq \|h\|_{p,w} \leq \|h\|_\infty w(Q(h))^{1/p}$$

y así

$$w(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q'_h}(x) \leq \frac{|h(x)|^2}{\|h\|_{p,w}} \leq w(Q'_h)^{-2/p} \chi_{Q(h)}(x).$$

Luego, de la propiedad de duplicación para w sobre cubos diádicos tenemos probado el lema. □

Para probar el Teorema 9.1 introducimos la siguiente notación. Dado un cubo diádico $Q \in \mathcal{D}$, decimos que la sucesión $(Q_n : n \in I) \subseteq \mathcal{D}$ con I un intervalo inicial de enteros no negativos que puede ser todo $\mathbb{Z}_0^+$ es el pasado no trivial de Q si satisface las siguientes propiedades

1. $Q_0 = Q$;
2. $Q_n \in \tilde{\mathcal{D}}$ para cada $n \geq 1$;
3. $Q_n \subseteq Q_{n+1}$ para cada $n \in I$;
4. si $Q^{'} \in \mathcal{D}$ es tal que $Q_n \subseteq Q^{'} \subseteq Q_{n+1}$ para algún n, entonces $Q^{'} = Q_n$ o $Q^{'} = Q_{n+1}$;
5. I es finito si y sólo si $\mu(X) < \infty$.

Notemos que, de *(d.2)*, *(d.7)* y *(d.8)*, cada cubo diádico $Q \in \mathcal{D}$ tiene un único pasado no trivial.

Demostración del Teorema 9.1. Empezamos notando que dado un subconjunto finito F de $\mathcal{H}$, la función $g_F = \sum_{h\in F} \frac{h}{\|h\|_{p,w}}$ pertenece a $\mathcal{L}^p_w(X,\mu)$, donde $\mathcal{L}^p_w(X,\mu)$ es el espacio definido en el Capítulo 4. Luego, de la caracterización via wavelets de Haar para espacios de Lebesgue sobre espacios de tipo homogéneo y de la ortogonalidad del sistema de Haar $\mathcal{H}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \|g_F\|_{p,w} &\approx \left\| \left(\sum_{h\in\mathcal{H}} |< g_F, h >|^2 |h|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,w} \\ &= \left\| \left(\sum_{h\in F} \frac{|h|^2}{\|h\|^2_{p,w}} \right)^{1/2} \right\|_{p,w}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Luego, del Lema 9.3 y (9.4) obtenemos que

$$(c_1)^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{h\in F} w(Q^{'}_h)^{-2/p} \chi_{Q^{'}_h} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{p,w} \leq \|g_F\|_{p,w} \leq (c_2)^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{h\in F} w(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q(h)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{p,w}, \tag{9.5}$$

donde $Q^{'}_h$ denota el cubo dado en *(h.6)* para cada función $h \in F$. Por lo tanto el teorema quedará probado si mostramos que existen dos constantes positivas y finitas C_1 y C_2 tales que

$$\left\| \left(\sum_{h\in F} w(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q(h)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|^p_{p,w} \leq C_1 |F| \tag{9.6}$$

y

$$\left\| \left(\sum_{h \in F} w(Q_h^{'})^{-2/p} \chi_{Q_h^{'}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{p,w}^{p} \geq C_2 |F|. \tag{9.7}$$

Demostraremos primero (9.7). Para cada $y \in E_F^{'} = \bigcup_{h \in F} Q_h^{'}$ escribimos $Q^{'}(y)$ para denotar el menor cubo diádico $Q_h^{'}$ con $h \in F$ tal que $y \in Q_h^{'}$. Entonces

$$\left(\sum_{h \in F} w(Q_h^{'})^{-2/p} \chi_{Q_h^{'}}(y) \right)^{p/2} \geq w(Q^{'}(y))^{-1} \tag{9.8}$$

para todo punto $y \in E_F^{'}$. Ahora, para cada cubo diádico $Q^{'}(y)$ con $y \in E_F^{'}$, sea $(Q_n^{'}(y) : n \in I)$ el pasado no trivial de $Q^{'}(y)$. Entonces, del Lema 9.2 tenemos que

$$w(Q_n^{'}(y)) \ \geq \alpha^n \ w(Q_0^{'}) \ = \ \alpha^n \ w(Q^{'}(y)),$$

para cada $n \in I$ y por lo tanto

$$(w(Q_n^{'}(y)))^{-1} \leq (\alpha^n \ w(Q^{'}(y)))^{-1}. \tag{9.9}$$

Notemos que para cada $y \in E_F^{'}$ tenemos que $\{Q_h^{'} \ni y : h \in F\} \subseteq \{Q_n^{'}(y) : n \in I\}$. Luego, de *(h.2)*, (9.9) y el hecho que $\alpha > 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{h \in F} w(Q_h^{'})^{-1} \chi_{Q_h^{'}}(y) &\leq N \sum_{n \in I} w(Q_n^{'}(y))^{-1} \\ &\leq N \sum_{n \in I} (\alpha^{-1})^n w(Q^{'}(y))^{-1} \\ &= C w(Q^{'}(y))^{-1}, \end{aligned} \tag{9.10}$$

para cada punto $y \in E_F^{'}$. Por lo tanto, de (9.8) y (9.10) tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{h \in F} w(Q_h^{'})^{-2/p} \chi_{Q_h^{'}} \right)^{1/2} \right\|_{p,w} &\geq C \left(\int_{E_F^{'}} w(Q^{'}(y))^{-1} w(y) d\mu(y) \right)^{1/p} \\ &\geq C \left(\int_{E_F^{'}} \sum_{h \in F} w(Q_h^{'})^{-1} \chi_{Q_h^{'}}(y) w(y) d\mu(y) \right)^{1/p} \\ &= C \left(\sum_{h \in F} \int_{E_F^{'}} w(Q_h^{'})^{-1} \chi_{Q_h^{'}}(y) w(y) d\mu(y) \right)^{1/p} \\ &= C |F|^{1/p}, \end{aligned}$$

lo cual prueba (9.7).

Para probar (9.6) comenzamos estimando $\sum_{h \in F} w(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q(h)}(x)$. Para cada $x \in E_F = \bigcup_{h \in F} Q(h)$, escribimos $Q(x)$ para denotar el menor cubo diádico $Q(h)$ con $h \in F$

tal que $x \in Q(h)$. Sea $(Q_n(x) : n \in I)$ el pasado no trivial de $Q(x)$. Como antes, del Lema 9.2 tenemos que $w(Q_n(x)) \geq \alpha^n w(Q(x))$ para cada $n \in I$ y cada punto $x \in E_F$. Entonces, dado que de *(h.2)* cada cubo diádico soporta a lo sumo N funciones $h \in F$ y $\alpha > 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{h \in F} w(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q(h)}(x) &\leq N \sum_{n \in I} w(Q_n(x))^{-2/p} \\ &\leq N \sum_{n \in I} \alpha^{\frac{-2n}{p}} w(Q(x))^{-2/p} \\ &= Cw(Q(x))^{-2/p}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Por otro lado, para cada $h \in F$ definimos el conjunto $S(h) = \{x \in E_F : Q(x) = Q(h)\}$. Entonces $E_F = \bigcup_{h \in F} S(h) = \bigcup_{h \in F} Q(h)$, $Q(x) = Q(h)$ si $x \in S(h)$ y $S(h) \subseteq Q(h)$ para cada $h \in F$. Por lo tanto de (9.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{h \in F} w(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q(h)} \right)^{1/2} \right\|_{p,w} &\leq C \left(\int_{E_F} w(Q(x))^{-1} w(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\sum_{h \in F} \int_{S(h)} w(Q(x))^{-1} w(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &= C \left(\sum_{h \in F} \int_{S(h)} w(Q(h))^{-1} w(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\sum_{h \in F} \int_{Q(h)} w(Q(h))^{-1} w(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &= C\, |F|^{1/p}. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia del Teorema 9.1, los resultados del Capítulo 4 y la caracterización de bases greedy dada en [**38**] en términos de incondicionalidad y democracia obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 9.4. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathcal{H}$ un sistema de tipo Haar asociado a una familia diádica $\mathcal{D}$. Entonces el sistema $\tilde{\mathcal{H}} = \{\frac{h}{\|h\|_{p,w}} : h \in \mathcal{H}\}$ es una base greedy para $L^p_w(X, \mu)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\mathcal{D}}_p$.*

9.2. El caso de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mu)$

Esta sección está dedicada a probar que si un sistema de Haar $\mathcal{H}$ es democrático en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mu)$ entonces, bajo ciertas condiciones geométricas sobre la familia diádica que soporta al sistema $\mathcal{H}$, necesariamente debe ser $p = q$. Para la prueba se usa la caracterización de los espacios de Lorentz que hemos dado en el Capítulo 8 y las ideas de [**27**] donde los autores consideran espacios de Lorentz en el contexto euclídeo. Comenzamos introduciendo tales condiciones geométricas dando la definición de familia diádica con propiedad de crecimiento $\mathcal{G}$. Para tal fin, en lo que sigue escribiremos $\hat{\mathcal{D}}_i = \{Q \in \tilde{\mathcal{D}} : \delta^{i+1} < \mu(Q) \leq \delta^i\}$ para cada entero i.

DEFINICIÓN 9.5. Diremos que una familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ satisface la propiedad de crecimiento $\mathcal{G}$ si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para cada entero positivo M existe un entero j tal se puede seleccionar una sucesión de M cubos diádicos disjuntos del nivel $\hat{\mathcal{D}}^j$,
2. Para cada entero positivo M se pueden seleccionar M cubos diádicos disjuntos pertenecientes a diferentes niveles $\hat{\mathcal{D}}^{j_i}$, $i = 1, ..., M$.

Por otro lado, notemos que, de *(h.5)* y *(h.6)* (ver Capítulo 4), existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1\mu(Q_h^{'})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \leq \|h\|_{p,q} \leq C_2\mu(Q(h))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \tag{9.12}$$

para cada función $h \in \mathcal{H}$ donde $Q_h^{'}$ y $Q(h)$ son los cubos diádicos dados en *(h.6)* y *(h.1)* respectivamente.

En lo que sigue denotaremos con $\mathcal{L}^{p,q}(X,\mu)$ el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X,\mu)$ si $\mu(X) = \infty$ y aquellas funciones en el espacio $L^{p,q}(X,\mu)$ con integral nula si $\mu(X) < \infty$. El resultado preciso que contiene las condiciones que deben verificar las familias diádicas que soportan al sistema de Haar para poder repetir la prueba de [**27**] en el contexto de espacio de tipo homogéneo es el siguiente.

TEOREMA 9.6. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo que admite una familia diádica $\mathcal{D}$ satisfaciendo la propiedad $\mathcal{G}$ y sea $\mathcal{H}$ un sistema de Haar asociado a $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{H}$ es democrática en $L^{p,q}(X,\mu)$ con $1 < p, q < \infty$, entonces necesariamente $p = q$.*

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos que, para cada entero positivo N, existen dos subconjuntos F_1 y F_2 de $\mathcal{H}$ con $|F_i| = N, i = 1, 2$ tales que

$$C_1N^{1/p} \leq \left\| \sum_{h\in F_1} \frac{h}{\|h\|_{p,q}} \right\|_{p,q} \leq C_2N^{1/p} \tag{9.13}$$

y

$$C_1N^{1/q} \leq \left\| \sum_{h\in F_2} \frac{h}{\|h\|_{p,q}} \right\|_{p,q} \leq C_2N^{1/q}, \tag{9.14}$$

para algunas constantes C_1 y C_2. Sea N un entero positivo. Empezamos por dar un conjunto F_1 tal que (9.13) vale. Puesto que la familia diádica $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ satisface la propiedad de crecimiento $\mathcal{G}$, existen un entero i y un conjunto $F_1 = \{h_1, ..., h_N\} \subseteq \mathcal{H}$ tales que $Q(h_j) \in \hat{\mathcal{D}}_i$ para cada $j = 1, ..., N$ y los cubos diádicos $Q(h_j)$ son disjuntos. De la propiedad de duplicación para μ y de la definición de $\hat{\mathcal{D}}_i$, claramente tenemos que

$$\mu(Q') \approx \mu(Q(h)) \approx \delta^i, \tag{9.15}$$

para todo $Q' \in \mathcal{O}(Q(h))$ y toda $h \in F_1$. Por otro lado, de *(h.5)*, *(h.6)*, *(h.7)* y *(d.8)* obtenemos que

$$c_1 \sum_{h\in F} \mu(Q'_h)^{-2/p} \chi_{Q'_h}(x) \le \sum_{h\in F} \frac{|h(x)|^2}{\|h\|_{p,q}^2} \le \sum_{h\in F} \mu(Q(h))^{-2/p} \chi_{Q(h)}(x), \tag{9.16}$$

para algún par de constantes positivas c_1 y c_2 y todo subconjunto finito F de $\mathcal{H}$. Entonces, del Teorema 8.4, el lado izquierdo en la desigualdad (9.16), por ser los $Q(h_j)$ disjuntos, por $(L3)$, (9.15) y $(L2)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{h\in F_1} \frac{h}{\|h\|_{p,q}} \right\|_{p,q} &\approx \left\| \left(\sum_{h\in F_1} \frac{|h(x)|^2}{\|h\|_{p,q}^2} \right)^{1/2} \right\|_{p,q} \\
&\ge C \left\| \sum_{h\in F_1} \mu(Q'_h)^{-1/p} \chi_{Q'_h} \right\|_{p,q} \\
&\ge C(\delta^i)^{-1/p} \left\| \sum_{h\in F_1} \chi_{Q'_h} \right\|_{p,q} \\
&= C(\delta^i)^{-1/p} \left\| \chi_{\bigcup_{h\in F_1} Q'_h} \right\|_{p,q} \\
&= C(\delta^i)^{-1/p} \left(\sum_{h\in F_1} \mu(Q'_h) \right)^{1/p} \\
&= C \left(\sum_{h\in F_1} \delta^{-i} \mu(Q'_h) \right)^{1/p} \\
&\ge C|F_1|^{1/p}.
\end{aligned}$$

Similarmente, usando el lado derecho de la desigualdad (9.16) obtenemos que

$$\left\| \sum_{h\in F_1} \frac{h}{\|h\|_{p,q}} \right\|_{p,q} \approx \left\| \left(\sum_{h\in F} \frac{|h(x)|^2}{\|h\|_{p,q}^2} \right)^{1/2} \right\|_{p,q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\left\|\sum_{h\in F_1}\mu(Q(h))^{-1/p}\chi_{Q(h)}\right\|_{p,q}\\
&\leq C|F_1|^{1/p}.
\end{aligned}$$

Ahora mostramos un subconjunto F_2 de $\mathcal{H}$ tal que (9.14) vale. Puesto que $\mathcal{D}$ en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ satisface la propiedad $\mathcal{G}$, podemos tomar una sucesión de cubos diádicos disjuntos $(Q_{i_j} : j \in \mathbb{Z}^+)$ tal que $Q_{i_j} \in \hat{\mathcal{D}}_{i_j}$ y $i_j > i_{j+1}$. Sea $F_2 = \{h_j : j = 1, ..., N\}$ tal que los cubos diádicos $Q(h_j) = Q_{i_j}$. Notemos que

$$\mu(Q'_{h_j}) \approx \mu(Q(h_j)) \approx \delta^{i_j}, \tag{9.17}$$

para cada $j = 1, ...N$, donde Q'_{h_j} es el cubo en *(h.6)*. Entonces, del Teorema 8.4, el lado izquierdo de la desigualdad (9.16), dado que los $Q(h_j)$ son disjuntos, $(L3)$, (9.17) y $(L4)$ con $\alpha = \delta^{-1/p}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{h\in F_2}\frac{h}{\|h\|_{p,q}}\right\|_{p,q}^{q} &\approx \left\|\left(\sum_{h\in F_2}\frac{|h(x)|^2}{\|h\|_{p,q}^2}\right)^{1/2}\right\|_{p,q}^{q}\\
&\geq C\left\|\sum_{h\in F_2}\mu(Q'_h)^{-1/p}\chi_{Q'_h}\right\|_{p,q}^{q}\\
&= C\left\|\sum_{j=1}^{N}\mu(Q'_{h_j})^{-1/p}\chi_{Q'_{h_j}}\right\|_{p,q}^{q}\\
&\geq C\left\|\sum_{j=1}^{N}(\delta^{i_j})^{-1/p}\chi_{Q'_{h_j}}\right\|_{p,q}^{q}\\
&\approx \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta^{\frac{-kq}{p}}\mu(\{x : \delta^{-k/p} \leq \sum_{j=1}^{N}(\delta^{i_j})^{-1/p}\chi_{Q'_{h_j}}(x) < \delta^{\frac{-(k+1)}{p}}\})^{q/p}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\delta^{\frac{-i_jq}{p}}\mu(Q'_{h_j})^{q/p}\\
&\approx \sum_{j=1}^{N}\delta^{\frac{-i_jq}{p}}(\delta^{i_j})^{q/p}\\
&= \delta N.
\end{aligned}$$

Analogamente, usando la desigualdad derecha en (9.16) obtenemos que

$$\left\|\sum_{h\in F_2}\frac{h}{\|h\|_{p,q}}\right\|_{p,q}^{q} \approx \left\|\left(\sum_{h\in F_2}\frac{|h(x)|^2}{\|h\|_{p,q}^2}\right)^{1/2}\right\|_{p,q}^{q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left\| \sum_{h\in F_2} \mu(Q(h))^{-1/p} \chi_{Q(h)} \right\|_{p,q}^{q} \\
&= \delta N.
\end{aligned}$$

□

A continuación brindamos un ejemplo que muestra que si tenemos un sistema de Haar asociado a una familia diádica que no cumple la propiedad $\mathcal{G}$ entonces la situación planteada en el Teorema 9.6 puede ser diferente.

Sea X el conjunto de los números reales de la forma $x_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Sobre los subconjuntos E de X definimos la medida $\mu(E) = \sum_{x_n \in E} \frac{1}{2^n}$. En el espacio de medida (X, μ) las clases de espacios de Lorentz $L^{p,q}$ están bien definidas. Para cada entero positivo i definimos la función $\mathbf{h}^i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathbf{h}_n^i = \mathbf{h}^i(x_n) = \begin{cases} 2^{\frac{i-1}{2}} & \text{if } \ i < n \\ -2^{\frac{i-1}{2}} & \text{if } \ i = n \\ 0 & \text{if } \ i > n \end{cases}$$

Vamos a escribir $\mathbf{H}$ para denotar la familia de todas las funciones $\mathbf{h}^i$ con $i \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

(1.1.1) (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo cuando d es la restricción a X de la distancia usual en $\mathbb{R}$.

(1.1.2) La familia diádica que soporta el sistema $\mathbf{H}$ no cumple con la propiedad $\mathcal{G}$.

(1.1.3) $\mathbf{H}$ es una base ortonormal para $L_0^2(X, \mu) = \{f \in L^2(X, \mu) : \int_X f d\mu = 0\}$.

(1.1.4) Para cualquier $1 < p, q < \infty$ tenemos que $\left\| \sum_{\mathbf{h} \in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|_{p,q}} \right\|_{p,q} \approx |F|^{1/q}$, para cada subconjunto finito F de $\mathbf{H}$, donde las constantes de equivalencia son independientes de F.

(1.1.5) El sistema $\mathbf{H}$ es democrático en cada $L^{p,q}(X, \mu)$ cuando $1 < p, q < \infty$.

(1.1.6) Ningún espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mu)$ con $p \neq q$ es un espacio de Lebesgue sobre (X, μ).

Demostración de *(1.1.1)*. Sea d la resticción a X de la distancia usual en $\mathbb{R}$. Tenemos que mostrar que para alguna constante C, todo punto $x \in X$ y todo $r > 0$ tenemos que

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)) < \infty, \tag{9.18}$$

donde $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Notemos que toda bola en X con centro x y radio $r > 0$ tiene la forma $B(x, r) = \{\frac{1}{2^j} : j \in J\}$, donde

(a) $J = \mathbb{Z}^+$; o

(b) $J = \{s, s+1, ..., m\}$ con s y m dos enteros positivos tal que $s < m$; o

(c) $J = \{s, s+1, ...\}$ para algún entero positivo s.

En el caso (a) tenemos que (9.18) vale puesto que $\mu(B(x,2r)) = \mu(B(x,r)) = \mu(X)$. Para el caso ($b$) notemos primero que si $B(x,r) = \{\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}, ..., \frac{1}{2^{s+1}}, \frac{1}{2^s}\}$ con $s < m$, entonces $x = \frac{1}{2^s}$ y $r < \frac{1}{2^s} - \frac{1}{2^{m+1}}$. Así que $B(x,2r) = \{\frac{1}{2^s}, \frac{1}{2^{s+1}}, ...\}$. Por lo tanto

$$\mu(B(x,2r)) = \mu(\{\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+2}}, ...\}) + \mu(B(x,r)) \leq 2\mu(B(x,r)),$$

puesto que $\mu(\{\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+2}}, ...\}) = \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^s} \leq \mu(B(x,r))$. Finalmente, en el caso (c) tenemos que $r < \frac{1}{2^{s-1}}$ y por lo tanto $2r < \frac{1}{2^{s-2}}$. Entonces

$$B(x,2r) \subseteq \{\frac{1}{2^{s-1}}, \frac{1}{2^s}, \frac{1}{2^{s+1}}, ...\} = \{\frac{1}{2^{s-1}}\} \cup B(x,r).$$

Luego

$$\begin{aligned} \mu(B(x,2r)) &\leq \mu(\{\frac{1}{2^{s-1}}\}) + \mu(B(x,r)) \\ &= 3\mu(B(x,r)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $C = 3$ en (9.18) obtenemos que (X,d,μ) es un espacio métrico de tipo homogéneo que claramente no satisface la propiedad $\mathcal{G}$.

Demostración de *(1.1.2)*. Notemos que $\mathbf{H}$ no es más que la base de Haar usual en [0,1] restringida al conjunto X y por lo tanto la familia diádica asociada a tal sistema está formada por los intervalos diádicos estandar del [0,1] intersecados con X. Es claro que para cada nivel $j \in \mathbb{Z}$ se tiene uno y sólo un cubo diádico con hijo no trivial. Por lo tanto dicha familia diádica no cumple la propiedad $\mathcal{G}$.

Demostración de *(1.1.3)*. Para cada entero positivo i la función $\mathbf{h}^i$ es una función de Haar en el sentido que es una función simple de integral nula con norma $L^2(X,\mu)$ igual a uno. Más aún, el sistema $\mathbf{H}$ es una base ortonormal para $L^2_0(X,\mu) = \{f \in L^2(X,\mu) : \int_X f d\mu = 0\}$. Es fácil ver que $\mathbf{H}$ es un sistema ortonormal en $L^2_0(X,\mu)$. Sólo tenemos que probar que, para $f \in L^2_0(X,\mu)$, tenemos la identidad

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} < f, \mathbf{h}^j > \mathbf{h}^j$$

la cual dice que

$$f_m = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \mathbf{h}^j_k \frac{1}{2^k} \right) h^j_m, \tag{9.19}$$

para cada entero positivo m, donde $f_i = f(x_i)$. Primero notemos que, puesto que $\mathbf{h}^i_n = 0$ para todo $n < i$, entonces

$$
\begin{aligned}
< f, \mathbf{h}^i > &= \int_X f\mathbf{h}^i \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{h}^i_n \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=i+1}^{\infty} f_n \frac{2^{\frac{i-1}{2}}}{2^n} - f_i \frac{2^{\frac{i-1}{2}}}{2^i},
\end{aligned}
\tag{9.20}
$$

para cada entero positivo i. Por otro lado, para cada entero positivo m tenemos que $\mathbf{h}^i_m \neq 0$ sólo cuando $i \leq m$. Por lo tanto, escribiendo $S_{\mathbf{H}}f = \sum_{i=1}^{\infty} < f, \mathbf{h}^i > \mathbf{h}^i$, tenemos que

$$
(S_{\mathbf{H}}f)_m = S_{\mathbf{H}}f(x_m) = \sum_{i=1}^{m} < f, \mathbf{h}^i > \mathbf{h}^i_m,
\tag{9.21}
$$

para cada $m \in \mathbb{Z}^+$. Luego, de (9.21), (9.20), las definiciones de $\mathbf{h}^i$ y μ y el hecho que $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{1}{2^i} = \int_X f d\mu = 0$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(S_{\mathbf{H}}f)_m &= \sum_{i=1}^{m-1} < f, \mathbf{h}^i > \mathbf{h}^i_m + < f, \mathbf{h}^m > \mathbf{h}^m_m \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{f_n}{2^{n-(i-1)}} - \frac{f_i}{2} \right) - \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n}{2^{n-(m-1)}} - \frac{f_m}{2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left(- \sum_{n=1}^{i} \frac{f_n}{2^{n-(i-1)}} - \frac{f_i}{2} \right) + \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n}{2^{n-(m-1)}} + \frac{f_m}{2}
\end{aligned}
$$

para cada $m \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, para obtener (9.19) probaremos que

$$
\sum_{i=1}^{m-1} \left(- \sum_{n=1}^{i} \frac{f_n}{2^{n-(i-1)}} - \frac{f_i}{2} \right) + \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n}{2^{n-(m-1)}} = \frac{f_m}{2}.
$$

Pero

$$
\sum_{n=1}^{m} \frac{f_n}{2^{n-(m-1)}} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{f_n}{2^{n-(m-1)}} + \frac{f_m}{2}.
$$

Con lo cual sólo necesitamos mostrar que

$$
\sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{i} \frac{f_n}{2^{n-(i-1)}} + \frac{f_i}{2} \right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n}{2^{n-(m-1)}},
$$

que obtendremos usando una versión discreta del teorema de Fubini de la siguiente manera.

$$
\sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{i} \frac{f_n}{2^{n-(i-1)}} + \frac{f_i}{2} \right) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{f_n}{2^n} \sum_{i=n}^{m-1} 2^{i-1} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{f_i}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{f_n}{2^n}(2^{m-1}-2^{n-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{f_i}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n}{2^{n-(m-1)}}.
\end{aligned}
$$

De esta forma tenemos probada (9.19).

Demostración de *(1.1.4)* y *(1.1.5)*. En lo que sigue escribiremos Q_i para denotar el soporte de $\mathbf{h}^i$ sobre X. Esto es, $Q_i = \{x_i, x_{i+1}, ...\}$. Entonces $\mu(Q_i) = 2^{-(i-1)}$. Sea N un entero positivo y sea F un subconjunto dado de $\mathbf{H}$ tal que $|F| = N$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $F = \{\mathbf{h}^{i_j} : j = 1, ..., N\}$ con $i_1 < i_2 < ... < i_N$. Con la notación anterior tenemos que $Q_{i_j} = \{2^{-(i_j)}, 2^{-(i_j+1)}, ...\}$. Utilizaremos $Q_{i_{N+1}}$ para denotar el conjunto vacío. Luego, de la caracterización de espacios de Lorentz en términos de los coeficientes de Haar, Teorema 8.4, tenemos que

$$
\left\| \sum_{\mathbf{h}\in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^*_{p,q}} \right\|^*_{p,q} \approx \left\| \left(\sum_{\tilde{\mathbf{h}}\in\mathcal{H}} | < \sum_{\mathbf{h}\in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^*_{p,q}}, \tilde{\mathbf{h}} > |^2 |\tilde{h}|^2 \right)^{1/2} \right\|^*_{p,q}
$$

Ahora, de la ortogonalidad en $L^2(X,\mu)$ de $\mathbf{H}$ y por $(L2)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{\mathbf{h}\in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|^*_{p,q}} \right\|^*_{p,q} &\approx \left\| \left(\sum_{j=1}^{N} \mu(Q_{i_j})^{-2/p} \chi_{Q_{i_j}} \right)^{1/2} \right\|^*_{p,q} \\
&= \left\| \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{l=1}^{j} \mu(Q_{i_l})^{-2/p} \right) \chi_{Q_{i_j} \setminus Q_{i_{j+1}}} \right)^{1/2} \right\|^*_{p,q} \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{l=1}^{j} \mu(Q_{i_l})^{-2/p} \right)^{1/2} \chi_{Q_{i_j} \setminus Q_{i_{j+1}}} \right\|^*_{p,q}.
\end{aligned}
$$

Sea

$$
f(x) = \sum_{j=1}^{N} A_j \ \chi_{Q_{i_j} \setminus Q_{i_{j+1}}}(x), \ \text{con} \ \ A_j = \left(\sum_{l=1}^{j} \mu(Q_{i_l})^{-2/p} \right)^{1/2}.
$$

Entonces,

$$
f^*(t) = \sum_{j=0}^{N-1} A_{N-j} \ \chi_{I_j}(t),
$$

donde I_j denota el intervalo real $[\mu(Q_{i_{N-j+1}}), \mu(Q_{i_{N-j}}))$. Luego,

$$
\|f\|^q_{p,q} \ \approx \ \frac{q}{p} \int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{q}{p}\sum_{j=0}^{N-1} A_{N-j}^{q}\int_{I_j} t^{\frac{q}{p}-1}dt \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} A_{N-j}^{q}\left(\mu(Q_{i_{N-j}})^{q/p}-\mu(Q_{i_{N-j+1}})^{q/p}\right).
\end{aligned}
$$

Notemos que $\mu(Q_{i_{N-j}})^{-1/p} \leq A_{N-j}$ y

$$
\begin{aligned}
A_{N-j} &= \mu(Q_{i_{N-j}})^{-1/p}\left(\sum_{l=1}^{N-j}\left(\frac{\mu(Q_{i_{N-j}})}{\mu(Q_{i_l})}\right)^{2/p}\right)^{1/2} \\
&= \mu(Q_{i_{N-j}})^{-1/p}\left(1+\sum_{l=1}^{N-j-1}\left(\frac{\mu(Q_{i_{N-j}})}{\mu(Q_{i_l})}\right)^{2/p}\right)^{1/2} \\
&\leq \mu(Q_{i_{N-j}})^{-1/p}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^s}\right)^{2/p}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
C_1\|f\|_{p,q}^{q} \leq \sum_{j=0}^{N-1}\mu(Q_{i_{N-j}})^{-q/p}\left(\mu(Q_{i_{N-j}})^{q/p}-\mu(Q_{i_{N-j+1}})^{q/p}\right) \leq C_2\|f\|_{p,q}^{q}, \tag{9.22}
$$

para algunas constantes positivas C_1 y C_2. Así que, de (9.22) tenemos que

$$
\|f\|_{p,q}^{q} \leq C\sum_{j=0}^{N-1}\mu(Q_{i_{N-j}})^{-q/p}\mu(Q_{i_{N-j}})^{q/p} = N,
$$

o equivalentemente

$$
\|f\|_{p,q}^{q} \leq CN^{1/q}.
$$

Por otro lado, puesto que $i_{N-j} < i_{N-j+1}$, existe un entero positivo s tal que $i_{N-j}+s = i_{N-j+1}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mu(Q_{i_{N-j}})^{q/p}-\mu(Q_{i_{N-j+1}})^{q/p} &= \left(\frac{1}{2^{i_{N-j}}}\right)^{q/p}-\left(\frac{1}{2^{i_{N-j+1}}}\right)^{q/p} \\
&= \left(\frac{1}{2^{i_{N-j}}}\right)^{q/p}-\left(\frac{1}{2^{i_{N-j}}}\right)^{q/p}\left(\frac{1}{2^s}\right)^{q/p} \\
&= \left(\frac{1}{2^{i_{N-j}}}\right)^{q/p}\left(1-\left(\frac{1}{2^s}\right)^{q/p}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{2^{i_{N-j}}}\right)^{q/p}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{q/p}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, de esta última desigualdad y (9.22) obtenemos que

$$
\|f\|_{p,q} \geq CN^{1/q}.
$$

Luego, para cualquier $1 < p, q < \infty$ tenemos que $\left\|\sum_{\mathbf{h}\in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|_{p,q}}\right\|_{p,q} \approx |F|^{1/q}$, para cada subconjunto finito F de $\mathbf{H}$ donde las constantes de equivalencia son independientes del conjunto F. Esto implica que $\mathbf{H}$ es democrática en $L^{p,q}(X,\mu)$, para cualquier elección de $1 < p, q < \infty$.

Demostración de *(1.1.6)*. Aún cuando es posible construir ejemplos mostrando que los espacios de Lorentz no son espacios de Lebesgue cuando $p \neq q$, en nuestro particular contexto, podemos usar un argumento directo a partir del Teorema 9.1, ($L2$) y *(1.1.3)*. En efecto, si para algunos $1 < p, q, r < \infty$ se tiene que $L^{p,q}(X,\mu) = L^r(X,\mu)$ entonces, del Teorema 9.1 con r en lugar de p tendríamos que

$$\left\|\sum_{\mathbf{h}\in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|_{L^r(X,\mu)}}\right\|_{L^r(X,\mu)} \approx |F|^{1/r},$$

para cada subconjunto finito F de $\mathbf{H}$. Pero de *(1.1.3)* tenemos que

$$\left\|\sum_{\mathbf{h}\in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|_{L^r(X,\mu)}}\right\|_{L^r(X,\mu)} \approx \left\|\sum_{\mathbf{h}\in F} \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|_{p,q}}\right\|_{p,q} \approx |F|^{1/q},$$

para cada subconjunto finito F de $\mathbf{H}$ y, puesto que $|F|$ puede ser tan grande como queramos, necesariamente debe ser $r = q$. Por otro lado, puesto que de ($L2$) la norma $L^{p,q}(X,\mu)$ de χ_E es equivalente a $\mu(E)^{1/p}$, $\|\chi_E\|_{L^r(X,\mu)} = \mu(E)^{1/r}$ y existen en X conjuntos de medida tan chica como queramos, si $L^{p,q}(X,\mu) = L^r(X,\mu)$ deberíamos tener $p = r$. En otras palabras p tiene que ser q para tener un espacio de Lebesgue.

Conclusiones generales

- Se dan condiciones gemétricas sobre familias diádicas en espacios de tipo homogéneo de manera tal que los sistemas de Haar asociados a tales familias sean equivalentes en los espacios de Lebesgue clásicos y con pesos diádicos

- Se prueba la incondicionalidad de los sistemas de Haar como bases de los espacios de Hardy diádicos definidos en el contexto de espacio de tipo homogéneo. Tal incondicionalidad nos provee, via interpolación y dualidad, de una nueva prueba de la incondicionalidad de los sistemas de Haar en los espacios de Lebesgue definidos sobre espacios de tipo homogéneo.

- Se caracterizan via coeficientes de Haar tres clases, en principio diferentes, de espacios Lipschitz definidos sobre espacios de tipo homogéneo. Tal caracterización permite probar que dichas clases coinciden.

- Se prueba la incondicionalidad de los sistemas de Haar como bases de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mu)$ definidos en el contexto de espacios de tipo homogéneo.

- Se prueba que los sistemas de Haar son democráticos en los espacios de Lebesgue pesados $L^p_w(X,\mu)$ definidos sobre espacios de tipo homogéneo con $1<p<\infty$ y $w\in A^{\mathcal{D}}_p$.

- Se dan condiciones geométricas sobre familias diádicas en espacios de tipo homogéneo (X,d,μ) para que la democracia de un sistema de Haar en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X,\mu)$ implique que $p=q$.

Bibliografía

[1] H. Aimar, *Construction of Haar type bases on quasi-metric spaces with finite Assouad dimension*, Anal. Acad. Nac. Cs. Ex., F. y Nat., Buenos Aires 54 (2004).

[2] H. Aimar, A. Bernardis and B. Iaffei, *Multiresolution approximation and unconditional bases on weighted Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*, J. Approx. Theory, **148** (2007) 12–34.

[3] H. Aimar, A. Bernardis and B. Iaffei, *Comparison of Hardy-Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneous type*,J. Math. Anal. Appl., **312** (2005) 105–120.

[4] H. Aimar and A. Bernardis, *Fourier versus wavelets: a simple approach to Lipschitz regularity*, Rev. UMA 40 (1996) 219–224.

[5] H. Aimar, A. Bernardis and L. Nowak, *Equivalence of Haar bases associated to different dyadic systems*, En prensa en Journal of Geometric Analysis.

[6] H. Aimar, A. Bernardis and L. Nowak, *Haarlet Analysis of Lipschitz regularity in metric measure space*, Preprint.

[7] H. Aimar, A. Bernardis and L. Nowak, *On Haar bases for generalized dyadic Hardy spaces*, En prensa en Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[8] H. Aimar, A. Bernardis and L. Nowak, *Dyadic Fefferman-Stein inequalities and the equivalence of Haar bases on weighted Lebesgue spaces*, En prensa en The Royal Society of Edinburg Proceedings.

[9] H. Aimar and O. Gorosito, *Unconditional Haar bases for Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*. Manuscript. (1999).

[10] K. Andersen and R. John, *Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals*, Studia Math. T. LXIX, (1980), 19–31.

[11] A. Benedek, A. P. Calderón and R. Panzone, *Convolution operators on Banach space valued functions*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. **48** (1962), 356–365.

[12] A. Benedek and R. Panzone, *The spaces $L^{\vec{p}}$ with mixed norm*, Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[13] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*. Pure and Applied Mathematics, 129. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[14] M. Bownik, *Boundedness of operators on Hardy spaces via atomic decompositions*, Proc. Amer. Math. Soc., 133, (2005) 3535–3542.

[15] A. Calderón, *An atomic decomposition of distributions in parabolic H^p spaces*, Advances in Math., 25, (1977), 216–225.

[16] A. Calderón and A. Torchinsky, *Parabolic maximal functions associated with a distribution*, Advances in Math., 16, (1975), 1–64.

[17] A. P. Calderón and A. Zygmund, *A note on the interpolation of sublinear operations*, Amer. J. Math. **78** (1956), 282–288.

[18] S. Campanato, *Propietà di hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. sup. Pisa. 17 (1963), 175–188.

[19] L. Carleson, *An explicit unconditional basis in* H^1, Bull. Sci. Math. (2), 104, (1980), 405–416.

[20] M. Christ, *A T(b) theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloq. Math. **60/61** (2) (1990), 601–628.

[21] R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-conmutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Math., **242**, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[22] D. Cruz-Uribe, J. Martell and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the Theory of Rubio de Francia.* Birkhauser, to appear.

[23] I, Daubechuies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM CBMS - NSF Regional Conf. Series in Applied Math. (1992).

[24] C. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities.* Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.

[25] J. Garcia-Cuerva and K. Kazarian, *Calderón-Zygmund operators and unconditional bases of weighted Hardy spaces*, Studia Math., **109** (3) (1994) 12–34.

[26] G. Garrigón, E. Hernández and J. Martell, *Wavelets Orlicz spaces and greedy bases.* Appl. Comput. Harmon. Anal. **24** (2008), 70–93

[27] G. Garrigós, E. Hernández and M. De Natividade, *Democracy functions and optimal embeddings for approximation spaces.* Preprint

[28] M. Izuki, *The Haar wavelets and the Haar scaling function in weighted* L^p *spaces with* $A_p^{dy,m}$ *weights.* Hokkaido Math. J. **36** (2007), 417–444

[29] I. Genebashvili, A. Gogatishvili, V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weight theory for integral transforms on space of homogeneous type*, Addison Wesley Longman Limited. 1998.

[30] G. Garrigós and E. Hernández, *Wavelet approximation methods in image and signal compression*, Revista de la Union Mat. Arg. , vol 45, (2004), 25–41.

[31] M. Girardi and W. Sweldens, *A new class of unbalanced Haar wavelets that form an unconditional basis for* L_p *on general measure spaces.*, J. Fourier Anal. Appl., **3(4)** (1997) 457–474.

[32] L. Grafakos, *Classical and modern Fourier analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[33] E. Hernández, J. Martell and M. De Natividade, *Quantifying democracy for wavelet bases in Lorentz spaces.* Preprint

[34] E. Hernandez and G. Weiss, *A first course on wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRS PRESS, Boca Raton, 1996.

[35] R. Holschneider and F. Tchamitchian, *Pointwise analysis of Riemann's nondifferentiable function*, Centre de Physique Théorique. Marseille (1989).

[36] R. Hunt, *On* $L(p, q)$ *spaces.* Enseignement Math. (2) 12 1966 249–276.

[37] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis.* Cambridge University Press. 2004.

[38] S. Konyagin and V. Temlyakov, *A remark on greedy approximation in Banach spaces.*, East Journal on Approx., **5(3)**(1999), 365–379.

[39] G. Lorentz, *On the Theory of spaces* Λ. Pacific J. Math. 1 (1951), 411–429.

[40] S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L^2(\mathbf{R})$. Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 69-87.

[41] P. Muller, *Isomorphisms between* H^1 *spaces*, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs (New Series), 66. Birkhauser Verlag, Basel, 2005.

[42] M. Carena, *Aproximación y convergencia de espacios de tipo homogéneo. Problemas analíticos y geométricos* Tesis doctoral. IMAL-FIQ-UNL. 2008.

[43] R. Macias and C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type.* Adv. in Math. **33** (1979), 271-309.

[44] R. Macías and C. Segovia, *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math., **33**, (1979), 271–309.

[45] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 37, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).

[46] L. Nowak, *Haar type bases in Lorentz spaces via extrapolation.* En prensa. Revista de la UMA.

[47] K. Parthasarathy, *Introduction to probability and measure*, Springer-Verlag, New York 1978.

[48] P. Soardi, *Wavelet bases in rearrangement invariant function spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 12, 3669–3673.

[49] E. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[50] V. Temlyakov, *The best* m*-term approximation and greedy algorithms.* Adv. Comput. Math. **8** (1998), 249–265.

[51] R. Toledano, *Desigualdades de Harnack elíptica y parabólica, un enfoque abstracto*, Tesis doctoral. FIQ-UNL. 1999.

[52] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Pres, Inc. (1986).

[53] I. Verbitsky, *Imbedding and multiplier theorems for discrete Littlewood-Paley spaces.* Pacific J. Math. **176** (1996), 529-556.

[54] P. Wojtaszczyk, *Greediness of the Haar system in rearrangement invariant spaces.* Approximation and probability,Banach Center Publ.,**72** (2006), 385-395.

[55] P. Wojtaszczyk, *A mathematical introduction to wavelets*, London Mathematical Society Student Texts, 37, Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

[56] R. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Press. 1980.