onAp1.84138

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis**

Título de la tesis:

MEDIDAS QUE DUPLICAN Y PROPIEDADES DE SEPARACIÓN MÉTRICA. EXTENSIÓN DE MEDIDAS CON LA PROPIEDAD DE DUPLICACI0N

Institución donde se realizó:
Departamento de Matemática – Facultad de Ingeniería Química
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral – IMAL

Autor: Rosa Liliana Nitti

Director de Tesis:
Dr. Hugo Aimar

Defendida ante el jurado compuesto por:
Dra. Eleonor Harboure, Dr. Roberto Macías y Dra. Ursula Molter.

Año de presentación: 2003

A mis hijos: Luis Alberto, Sofía, Fernando y Lisandro y a mi marido Alberto.

A mis amigos, a todos los que me apoyaron y brindaron su afecto, pero en especial y a quien estaré por siempre agradecida, por ser quien me guió y acompañó en este desafío: a mi director Hugo Aimar.

Índice general

Capítulo 0

Introducción general

Cuando se tiene un espacio de tipo homogéneo, esto es, un espacio casi-métrico (X, d), sobre el cual está definida una medida con la propiedad de duplicación, conviven dos estructuras, una topológica, la cual es inducida por la casi-métrica y en donde están bien definidas, entre otras, nociones como la continuidad y la regularidad de funciones de tipo Lipschitz y en la otra, la generada por el espacio con la medida duplicante, que en coexistencia con la anterior hacen posible obtener resultados analíticos significativos.

Sobre la existencia de espacios de tipo homogéneo observamos que Dynkin conjeturó en 1983 (ver [D1] y [D2]), que existe una medida no trivial con la condición de duplicación sobre cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Konyagin y A. L. Volberg en [VK] muestran que la conjetura de Dynkin es cierta y caracterizan los espacios métricos compactos que pueden ser espacios de tipo homogéneo, M. Wu [WU] hace una construcción más simple que la de Konyagin y Volberg de una medida duplicante en un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita que además sea completo. Casos particulares de medidas absolutamente continuas que duplican que resultan útiles e interesantes y sobre las que hay abundante bibliografía son los pesos de Muckenhoupt.

En esta tesis abordamos esencialmente tres problemas

(P_1) Extensión y restricción de medidas duplicantes,

(P_2) Propiedades de aislación y separación de conjuntos de dimensiones diferentes en un espacio que admite una medida duplicante,

(P_3) Grado de contacto entre "*componentes*" de dimensiones distintas y propiedades de anulación de la medida en el punto de contacto.

Los problemas (P_1) y (P_2), en apariencia distintos, generan el problema (P_3) de una manera natural. El resultado de Volberg y Konyagin prueba en particular que el conjunto compacto K de $\mathbb{R}^2$ que se obtiene uniendo el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ con el segmento $\{(x,0) : 1 \leq x \leq 2\}$ admite una medida que duplica, si en K consideramos la métrica que hereda de $\mathbb{R}^2$. Pero es claro que esa medida no puede ser el área en el cuadrado y la longitud en el segmento, puesto que ésta no duplica.

Nos preguntamos, entonces, si es posible prefijar la medida en una de las dos componentes: ¿existe una medida que duplica en K de manera que al restringirla a $[0,1] \times [0,1]$ sea el área?. El propio proceso de construcción de la medida de Volberg - Konyagin - Wu en K está dado como un limite débil de medidas construidas con bastante arbitrariedad como para hacer difícil la identifición de la medida límite concreta. Desde otro punto de vista el problema de extensión de funciones o distribuciones de clases (espacios de Banach) especiales ha sido profundamente estudiado y el método más poderoso por su universalidad es tal vez, el diseñado por Whitney. El antecedente para el problema (P_2) es un resultado de Macías y Segovia en [MS1] según el cual los átomos (puntos de medida positiva) en un espacio de tipo homogéneo, estan topológicamente aislados (el punto es una bola). Podemos refrasear esta propiedad diciendo que en un espacio de tipo homogéneo, ningún abierto tiene en su frontera un punto de medida positiva. En particular la función distribución de una medida que duplica en $\mathbb{R}^1$, con la distancia usual es una función continua. En 1952 Beurling y Ahlfors prueban que la absoluta continuidad no puede esperarse en general. Por consiguiente en $\mathbb{R}^1$ los conjuntos de dimensión cero tienen medida nula si la medida duplica. Esto induce naturalmente el problema (P_2) : Si en un espacio métrico K se tiene una medida que duplica, ¿pueden convivir en K conjuntos de dimensiones diferentes todos con medida positiva?

Puesto que la respuesta a la última pregunta es generalmente afirmativa, el problema (P_3) se plantea naturalmente. La idea de anulación de la medida puede sustituirse por otra de no acotación, en un entorno del contacto, pero, mientras que la anulación ocurre en el conjunto de menor dimensión, la no acotación ocurriría en el de mayor y lo que influye en definitiva, para que la duplicación sea todavia posible, es la desproporción de las densidades en los alrededores del contacto.

En la primera parte de este trabajo se presentan resultados básicos, propiedades y herramientas relacionadas con las medidas duplicantes en espacios euclidianos y en espacios casi-métricos. También se obtienen resultados relativos a cubrimientos de tipo Wiener y Whitney más débiles que los clásicos, en los que una condición de solapamiento acotado sustituye a la de las bolas disjuntas.

En particular en el primer capítulo se obtiene una demostración alternativa a la manera de Whitney del Teorema de Macías y Segovia sobre la aislación de átomos en espacios de tipo homogéneo. Si bien en principio nuestra demostración no es más que una reformulación de la de Macías y Segovia, nos permite introducir un concepto de regularidad de la frontera de un abierto en términos de que ésta sea accesible por cubrimientos de Whitney del abierto y nos permite probar que esa condición es suficiente para la anulación de la medida de esta frontera.

El resto del trabajo apunta hacia dos direcciones, para abordar los problemas (P_1), (P_2) y (P_3) una relacionada a la definición de un operador de extensión de medidas duplicantes, ya sea cuando se tiene definida una medida de Borel en un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y se desea extenderla a través de su frontera o cuando se tienen definidas medidas duplicantes similares a la de Hausdorff y el espacio está compuesto por componentes de dimensiones distintas y se quiere tener una medida duplicante en todo el espacio. La otra dirección está basada en encontrar relaciones entre la propiedad de duplicación de la medida, la separación y el grado de contacto entre las componentes del espacio.

En cuanto al primer problema, se verá que en los operadores de extensión que se definen, un papel importante lo tiene el dominio cerrado sobre el cual está soportada la medida a extender, en el sentido que éste debe verificar ciertas condiciones de regularidad como por ejemplo la que ostenta el subgráfico de una función de tipo Lipschitz. Se prueba además que cuando se tienen medidas normales con distintos exponentes tal extensión es válida en dominios un poco más generales que verifican la propiedad de regularidad que llamamos "R_1" y no puede ser aplicada a medidas definidas sobre borelianos de un conjunto que tenga "espinas" o "cúspides".

Por otro lado es de hacer notar que una herramienta importante para realizar este tipo de extensiones es el Lema de cubrimiento de Whitney, cuya primera aplicación ha sido precisamente un teorema de extensión de funciones continuas (ver[S]).

A continuación describiremos brevemente los operadores de extensión de medidas duplicantes que se introducen en esta tesis.

Cuando la medida a extender μ está definida sobre los Borelianos de un conjunto F que es el supergráfico cerrado de una función de tipo Lipschitz, se definen dos operadores de extensión, uno que se obtiene por el método de reflexión que llamamos $\mathcal{E}_R$ y el otro $\mathcal{E}_W$, por el método de Whitney. El primero de los operadores mencionados asigna a la medida μ la medida $\mathcal{E}_R(\mu)$ definida sobre cada Boreliano E de $\mathbb{R}^n$, por $\mathcal{E}_R(\mu)(E) = \mu(E \cap F) + \mu(S^{-1}(R(S(E \cap F))))$, donde S es la transformación que lleva F al semiespacio superior de $\mathbb{R}^n$, R es la transformación reflexión y S^{-1} es la inversa de S.

Para definir el segundo operador, se construye en el complemento de F una familia $\{Q_j\}$ de cubos diádicos de Whitney, a la manera de Stein (ver [S]). La medida

$\mathcal{E}_W$ para un conjunto A de Borel de $\mathbb{R}^n$, se define como

$$\mu(A \cap F) + \Sigma_j \mu(T(Q_j)) \frac{|Q_j \cap A|}{|Q_j|}$$

donde $|.|$, indica el volumen n-dimensional y T representa la composición $S^{-1}RS$, siendo S y R las transformaciones antes mencionadas. Cabe destacar aquí la similitud de este operador $\mathcal{E}_W$ con el definido en [DJK] en un contexto diferente.

Por otro lado es interesante notar que si bien ambos operadores $\mathcal{E}_R$ y $\mathcal{E}_W$ preservan la propiedad de duplicación mientras que $\mathcal{E}_R(\mu)$ tiene en su nuevo dominio la misma regularidad que μ, $\mathcal{E}_W(\mu)$ es más regular en el nuevo dominio como ocurre en general con el proceso de extensión de Whitney. Recordemos (ver [S]) que la extensión de Whitney de funciones continuas puede hacerse $\mathcal{C}^\infty$ fuera del cerrado que es soporte de la función original.

Cuando el conjunto donde está soportada la medida a extender es la imagen del cubo unidad por una transformación Bilipschitz, se construye el operador $\mathcal{E}_p$, de extensión periodica. Este operador ha sido considerado antes para la extensión de clases de Muckenhoupt por E. Harboure, ver [H]. Las exploraciones de distintos casos concretos en los cuales la medida μ a extender está definida en el intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$, nos conducen a utilizar transformaciones de simetrías combinadas con traslaciones periódicas, para obtener una medida que duplica en todo el espacio y que extiende a la original.

El estudio de distintos casos particulares de espacios conformados por subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con distintas dimensiones nos induce a definir el operador $\mathcal{E}'_W$ el cual representa una generalización a los espacios casi-métricos del operador $\mathcal{E}_W$. En la definición de $\mathcal{E}'_W$, nuevamente, la herramienta principal es un cubrimiento tipo de Whitney, como el que obtienen Macías y Segovia ([MS2]). Bajo una condición adicional de regularidad R_1, la medida $\mathcal{E}'_W(\mu)$ duplica si μ duplica en su dominio.

En cuanto al problema (P_2) los resultados que se han obtenido al respecto muestran que, si se tienen dos medidas de Borel normales con distintos exponentes, entonces la propiedad de duplicación para la suma de esas medidas implica separación métrica de los soportes de dichas medidas.

Para estudiar el problema (P_3) en general, se introduce una formulación métrica abstracta de la idea de grado de contacto entre dos subconjuntos de un espacio métrico que generaliza al concepto clásico y se establecen relaciones entre dimensión, orden de contacto y grado de anulación de los pesos que definidos sobre el conjunto de menor dimensión permiten construir una medida duplicante en la unión de ambos conjuntos.

Describimos a continuación la organización de esta tesis.

La misma consta de tres capítulos. En el capítulo I se presentan nociones básicas y resultados preliminares necesarios para el abordaje de los problemas que antes se explicaron.

En el capítulo II, se trata el problema (P_1), se obtienen los operadores $\mathcal{E}_R$, $\mathcal{E}_W$ y $\mathcal{E}_p$ y se demuestran propiedades relativas a los mismos.

En el capítulo III, se abordan los problemas (P_2) y (P_3) sobre la duplicación, separación y contacto de conjuntos de dimensiones distintas y en dicho contexto se define el operador $\mathcal{E}'_W$ de extensión de medidas duplicantes, que completa el estudio del problema (P_1).

Cabe por último destacar que si bien existen antecedentes con respecto al problema de extensión de medidas duplicantes, éstos están relacionados a la teoría de las clases A_p y no existe un tratamiento sistemático acerca de medidas duplicantes en general. Mencionamos a continuación algunos de los trabajos que creemos están más conectados con el problema (P_1).

* García Cuerva y Rubio de Francia ([GC-RF]) en 1985 dan un Teorema sobre la restricción de pesos de A_p y citan el preprint "Restricciones of A_p weights " de T. Wolff.

* Peter Holden ([HO]) en 1988 trabaja sobre la cartacterización de funciones que definidas sobre un conjunto de $\mathbb{R}^n$, sean la restricción a dicho conjunto de funciones de V.M.O($\mathbb{R}^n$).

* E Harboure ([H]) en 1984 muestra que cierta clase de pesos definida en un cubo puede ser extendidos en el espacio total, utilizando transformaciones de simetrías.

*Dahlberg, Jerinson y Kënig ([DJK]) estudian como extender a la medida armónica definida en dominios Lipschitz a la frontera de dicho dominio.

En cuanto al problema (P_2), un antecedente en donde algunos ejemplos que conducen a estudiar el grado de contacto de conjuntos de dimensiones distintas pueden encontrarse en [J].

En algún sentido todos los resultados obtenidos son parciales y el tema general parece ofrecer una gama amplia de problemas cuyas aplicaciones a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales ya son un hecho ([DJK]).

Capítulo 1

Nociones básicas y resultados preliminares

1.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar las nociones básicas y propiedades relacionadas con medidas que duplican en el contexto de los espacios euclidianos y en espacios casi-métricos. También se expondrán resultados y herramientas que posibilitan la construcción de operadores de extensión de medidas duplicantes al complemento de su conjunto soporte.

En la Sección 1.2, se tratarán cuestiones básicas referidas a medidas duplicantes soportadas en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

En la Sección 1.3, se definen las condiciones "D_s" y "L_d" para una medida. La relación de los parámetros s y d con la dimensión de Hausdorff del soporte de una medida, es explorada en la Sección 1.5, para lo cual previamente en la Sección 1.4, se hace un tratamiento elemental de la medida de Hausdorff. Propiedades referidas a los espacios casi-métricos y de tipo homógeneo se tratan en las Secciones 1.6 y 1.7. A ellos se trasladan los conceptos desarrollados en las secciones anteriores, comentando la relación entre los espacios de tipo homogéneo y los espacios casi-métricos de dimensión métrica finita.

En la Sección 1.8 probamos que la duplicación de una medida en $\mathbb{R}^n$ puede detectarse por su acción sobre la subfamilia de los cubos diádicos.

En la Sección 1.9 se investiga la regularidad de las funciones de distribución de las medidas que duplican en los borelianos de $\mathbb{R}$.

En la Sección 1.10 se expone la demostración de Macías y Segovia sobre la relación entre punto aislado y átomo en un contexto con medida duplicante. Una demostración alternativa de este resultado, se aborda en la Sección 1.13, la misma está basada en el procedimiento que conduce a la obtención de un cubrimiento de tipo Whitney para un conjunto abierto de un espacio casi-métrico de dimensión métrica finita. El esquema de cubrimiento de Whitney será una de las herramientas básicas que permiten, siguiendo la idea original de Whitney, la definición de operadores de extensión de medidas duplicantes. Los lemas de Whitney se tratan en la Sección 1.11 y en la Sección 1.12 se construyen las particiones de la unidad, asociadas a una familia de Whitney.

En la Sección 1.14 se prueba un hecho elemental que será útil más adelante: es posible equipar a un espacio casi-métrico con una medida duplicante si éste está relacionado por una transformación Bilipschitz con un espacio de tipo homogéneo.

En las Secciones 1.15 y 1.16 se explora una manera abstracta de describir la regularidad de la frontera de un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y de un espacio casi-métrico.

En las dos últimas secciones, 1.17 y 1.18, se introducen dos conceptos analíticos profundos cuyo interés, para nuestros propósitos, se verá en el desarrollo ulterior del trabajo: las clases A_p de Muckenhoupt y el Operador de Extensión de Whitney actuando sobre las funciones continuas.

1.2. La propiedad de duplicación en subconjuntos de espacios euclidianos

En esta sección se introducen los conceptos y ejemplos básicos de medidas que duplican, definidas en los borelianos de un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

En inglés, la expresión "doubling condition" ha sido usada con frecuencia. Si bien "medida que duplica" o "medida duplicante" pareciera hacer referencia a una propiedad de crecimiento y no de control superior, nosotros seguiremos con esta terminología impuesta por el uso. Observamos de paso que la Proposición 1.2.1 siguiente, justificaría esta denominación, aún pensando en la idea de crecimiento.

Designaremos con $B(x,r)$ a la bola de $\mathbb{R}^n$ de centro x y radio r con respecto a la norma euclidiana, es decir

$$B(x,r) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, |y-x| < r\},$$

donde $|z| = \Big(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\Big)^{1/2}$, si $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

Si se utiliza la norma $||x||_\infty = max\Big(|x_1|, \cdots, |x_n|\Big)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, a la bola de centro x y radio r, la denotaremos $Q(x,r)$. Más generalmente, dada una norma $||.||$ en $\mathbb{R}^n$, escribiremos $B_{||.||}(x,r)$, para denotar la bola por ella inducida.

En lo que sigue, F es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Diremos que una medida μ, definida sobre los borelianos de F, tiene la *propiedad de duplicación* o que *duplica*, si existe una constante $A > 0$, tal que para todo $x \in F$ y todo $r > 0$, valen las desigualdades

$$0 < \mu(B(x,2r) \cap F) \leq A\mu(B(x,r) \cap F) < \infty. \quad (1.1)$$

Notemos que esta definición puede reformularse de la siguiente manera: μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$, con soporte en F, tal que existe una constante A de manera que para todo $x \in F$ y todo $r > 0$, se tienen las siguientes desigualdades

$$0 < \mu(B(x,2r)) \leq A\mu(B(x,r)) < \infty. \quad (1.2)$$

El soporte de una medida se entiende aquí en el sentido distribucional: el complemento del mayor abierto de anulación de μ.

El siguiente resultado muestra que la propiedad de duplicación es independiente de la norma que define las bolas.

Proposición 1.2.1. *Sea $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. La medida μ duplica sobre los borelianos de F si y sólo si existe una constante $\tilde{A} > 0$, que sólo depende de las constantes* *de equivalencias entre* $||.||$ *y* $|.|$ *y de la constante* A *en* (1.1)*, tal que para todo* $x \in F$ *y todo* $r > 0$ *vale que*

$$0 < \mu(B_{||.||}(x, 2r) \cap F) \leq \tilde{A}\mu(B_{||.||}(x, r) \cap F) < \infty \qquad (1.3)$$

Demostración. Supongamos que (1.1) vale. Si $||.||$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, valen las desigualdades $k_1|x| \leq ||x|| \leq k_2|x|$. Si $B(x, r)$ denota la bola centrada en x y de radio r definida con respecto a la norma euclidiana, de las desigualdades anteriores se obtiene que

$$B_{||.||}(x, r) \subseteq B(x, \frac{r}{k_1}) \qquad \text{y} \qquad B(x, r) \subseteq B_{||.||}(x, k_2 r) \qquad (1.4)$$

entonces $B(x, \frac{2r}{k_2}) \subseteq B_{||.||}(x, 2r)$, por lo tanto, de (1.1) y (1.4) se verifica que

$$\begin{aligned} 0 < \mu(B(x, \frac{2r}{k_2}) \cap F) &\leq \mu(B_{||.||}(x, 2r) \cap F) \leq \mu(B(x, \frac{2r}{k_1}) \cap F) \\ &\leq \tilde{A}\mu(B(x, \frac{r}{k_2}) \cap F) \leq \tilde{A}\mu(B_{||.||}(x, r) \cap F) \\ &\leq \tilde{A}\mu(B(x, \frac{r}{k_1}) \cap F) < \infty, \end{aligned}$$

con $\tilde{A} = 1 + \log(\frac{k_2}{k_1})$. Como los roles de $|.|$ y $||.||$ son intercambiables, la proposición está probada.

□

Ejemplos elementales de medidas que duplican son entre otras, la medida de Lebesgue en los borelianos de

$F = \mathbb{R}^n$, la medida "cuenta puntos" en las partes de $F =^n$ o la longitud de arco sobre los borelianos de una circunferencia.

Si, para E boreliano de $\mathbb{R}^n$, definimos $\mu(E) = \int_E f(x)\,dx$, con $f \geq 0$ y localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, decimos que f es una densidad para μ. Si $F = \mathbb{R}^n$ y μ está dada por una densidad integrable, es decir $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, con $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx > 0$, entonces μ no tiene la propiedad de duplicación . En efecto sea x_m una sucesión de puntos del espacio $\mathbb{R}^n$ tal que $|x_m| = 2m$ y $B_m = B(x_m, m)$. Entonces $\mu(B_m) = \int_{B_m} f\,dx \to 0$, $m \to \infty$, pero $4B_m = B(x_m, 4m) \supset B(0, m)$ y como $\mu(B(0, m)) \geq c > 0$, para m grande, la desigualdad $\mu(4Bm) \leq A\mu(Bm)$ es imposible.

Destaquemos que la duplicación es una propiedad en la que dominio y medida están estrechamente vinculados. En efecto como lo muestran los siguientes ejemplos, la medida de Lebesgue no siempre duplica, dependiendo ésto del conjunto en el cual está soportada.

Sea la sucesión $a_n = 2^{-2^n}$, $n \in$ y $F = \bigcup_n [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + a_n] \cup \{0\}$. Sea μ la medida de Lebesgue definida sobre los borelianos de F, por: $\mu(E) = |E \cap F|$. Veamos que μ, soportada en F, no duplica. Sea $I(\frac{1}{n}, r_n)$ el intervalo con centro en $\frac{1}{n}$ y radio r_n, $r_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$. Observemos que $2r_n > \frac{1}{n-1} + a_{n-1} - \frac{1}{n}$, dado que $\frac{1}{n(n-1)} > a_{n-1}$. Entonces $\mu(I(\frac{1}{n}, 2r_n)) \geq a_{n-1}$ y $\mu(I(\frac{1}{n}, r_n)) \leq 2a_n$.

Como el cociente $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ no está acotado para $n \to \infty$, concluímos que μ no satisface la propiedad de duplicación.

Un ejemplo visualmente más claro se obtiene en $\mathbb{R}^2$ con dominios que tienen "espinas de Lebesgue" no Lipschitzianas.

Sea $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq e^{-1/x},\ 0 \leq x \leq 1\}$. Consideramos la medida de Lebesgue soportada en F. Observemos que si comparamos las medidas de $Q((0,0), \dfrac{\epsilon}{4})$ y $Q((\dfrac{3\epsilon}{4}, 0), \dfrac{\epsilon}{4})$, obtenemos que

$$\frac{\int_{\epsilon/2}^{\epsilon} e^{-1/x}\, dx}{\int_0^{\epsilon/4} e^{-1/x}\, dx} \ \geq \ \frac{\frac{e}{2} e^{-2/\epsilon}}{\frac{e}{4} e^{-4/\epsilon}} \ \geq \ 2e^{2/\epsilon}.$$

Claramente se observa que el cociente no está acotado como función de ϵ y por consiguiente el cociente $\dfrac{\mu(Q((0,0),\epsilon))}{\mu(Q((0,0),\frac{\epsilon}{4}))}$ no puede estar acotado superiormente.

Consideremos un tercer ejemplo que nos muestra de manera simple que, aunque la medida de Lebesgue no duplica sobre un conjunto cerrado F dado, puede haber, y de hecho hay siempre ([VK]), otras medidas de Borel duplicantes soportadas en F. Sea $a_n = 2^{-2^n}$ la sucesión considerada en el primer ejemplo, pero distribuyamos ahora las masas de otra manera. Sea $I_n = [n, n + a_n]$, $n \in$. Sea $F = \bigcup_{n\in} I_n$. Con el mismo argumento que usamos en aquel ejemplo, vemos que la medida de Lebesgue restringida a F no duplica. Sea $f(x)$ la función escalonada que asigna a $x \in I_n$ el valor $a_n^{-1} = 2^{2^n}$. Sea $\mu(E) = \int_E f\,dx$. Entonces μ tiene soporte en F y satisface sobre F, la propiedad de duplicación.

En relación a la existencia de medidas duplicantes, Konyagin y A. L. Vol'berg [VK] (1980), han probado que siempre es posible construir una medida que duplica sobre cualquier conjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$, Luukkainen y Saksman generalizan este resultado a espacios métricos completos, ver [LS]. Jang - Mei Wu (1996), ver [WU], realiza una construcción más directa que la de Konyagin y Vol'berg.

Diremos que una medida μ definida en los borelianos de $F \subset \mathbb{R}^n$, verifica la *duplicación inversa*, si existen $a > 1$ y $r_0 > 0$ posiblemente infinito, tal que para todo $x \in F$ y todo $r < r_0$, se verifica que

$$\mu(B(x,r) \cap F) \geq a\mu(B(x, \frac{r}{2}) \cap F). \tag{1.5}$$

La siguiente proposición establece una relación entre la duplicación y la duplicación inversa cuando F es todo $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2.2. *Si $F = \mathbb{R}^n$ y μ duplica, entonces μ verifica la duplicación inversa con una constante a que sólo depende de la constante de duplicación de μ y con $r_0 = \infty$.*

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$B(y, \frac{r}{2}) \cap B(x, \frac{r}{2}) = \phi$$

y

$$\overline{B(y, \frac{r}{2})} \cap \overline{B(x, \frac{r}{2})} \neq \phi.$$

Entonces $\mu(B(x,r)) \geq \mu(B(x, \frac{r}{2})) + \mu(B(y, \frac{r}{2}))$. Dado que

$$B(x, \frac{r}{2}) \subset B(y, \frac{3r}{2}),$$

se tiene que

$$\mu(B(x, \frac{r}{2})) \leq \mu(B(y, \frac{3r}{2})) \leq A^{\log_2 3}\mu(B(y, \frac{r}{2})) = \frac{1}{\epsilon}\mu(B(y, \frac{r}{2}))$$

con $\epsilon = A^{[-\log_2 3]+1}$. De las dos desigualdades precedentes, se obtiene que

$$\mu(B(x,r)) \geq \mu(B(x, \frac{r}{2})) + \epsilon\mu(B(x, \frac{r}{2})) \geq (1+\epsilon)\mu(B(x, \tfrac{r}{2}))$$

con lo que se verifica (1.5) para $a = 1 + \frac{1}{A^{[\log_2 3]+10}}$. □

En la demostración del resultado precedente se usó que el conjunto sobre el cual está definida la medida μ, verifica que para toda bola $B(x,r)$ existe otra bola del mismo tamaño disjunta con $B(x,r)$, pero suficientemente cercana. Volveremos a este punto en la Sección 1.7. Es de notar también, que existen medidas de Borel en $\mathbb{R}^n$, que carecen de la propiedad de duplicación pero, sin embargo, tienen la propiedad de duplicación inversa. Este es el caso de la medida de Lebesgue restringida al conjunto

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ 0 \leq y \leq e^{-1/x}, \ 0 \leq x \leq 1\}$$

considerado anteriormente.

En la siguiente proposición se da otra manera de ver la duplicación de una medida en $\mathbb{R}^n$ que en particular será útil en la Sección 1.8.

Proposición 1.2.3. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$. Entonces μ duplica si y sólo si existe una constante $c' > 0$, tal que para cualquier elección de cubos Q y $\bar{Q}$ de lados de igual longitud tales que $Q \cap \bar{Q} \neq \emptyset$, se verifica que*

$$0 < \mu(Q) \leq c'\mu(Q) < \infty. \tag{1.6}$$

Demostración. Asumimos que μ duplica. Sean $Q = Q(x, r)$ y $\bar{Q} = Q(x', r)$ tales que $Q \cap \bar{Q} \neq \emptyset$ y como $Q(x, r) \subset Q(x', 3r)$, entonces vale que $\mu(Q(x, r)) \leq \mu(Q(x', 3r)) \leq A^2\mu(Q(x', r))$, con lo que se obtiene (1.6).

Supongamos que vale (1.6) y demostremos que μ satisface la propiedad de duplicación. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ dados. Notar que para cada n existe una constante $N(n)$ tal que todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$ se tiene que existen $\{x_1, x_2, \cdots, x_{N(n)}\}$ tales que

$$Q(x, r) = \bigcup_{i=1}^{N(n)} Q(x_i, \frac{r}{2}).$$

Puesto que $Q(x_i, \frac{r}{2}) \cap Q(x, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$, por (1.6) tenemos que

$$\mu(Q(x_i, \frac{r}{2})) \leq c'\mu(Q(x, \frac{r}{2})).$$

Entonces

$$\mu(Q(x, r)) \leq \sum_{i=1}^{N(n)} \mu(Q(x_i, \frac{r}{2})) \leq \bar{C}\mu(Q(x, \frac{r}{2})).$$

□

1.3. Medidas duplicantes y homogeneidades superior e inferior

La propiedad de duplicación de una medida está dando una estimación superior de $\frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))}$, $0 < r < R < \infty$, por una potencia del cociente $\frac{R}{r}$. La propiedad de duplicación inversa nos da una estimación inferior por otra potencia del mismo cociente. La coincidencia de los dos exponentes involucrados provee una noción elemental de dimensión cuya relación con la usual de Hausdorff será explorada en la Sección 1.5 luego de exponer brevemente, en la Sección 1.4, los rudimentos de la teoría de Hausdorff en espacios métricos. Comenzamos esta sección explorando las propiedades de homogeneidad de medidas tienen las propiedades de duplicación y de duplicación inversa.

Lema 1.3.1. *Sea μ una medida definida sobre los borelianos de un conjunto cerrado $F \subset \mathbb{R}^n$.*

i) Si μ duplica entonces existen constantes s y C positivas, que dependen de la constante de duplicación de μ, tales que para todo $k \geq 1$, $x \in F$ y $r > 0$, vale que

$$\mu(B(x,kr) \cap F) \leq Ck^s \mu(B(x,r) \cap F). \tag{1.7}$$

ii) Si μ verifica la duplicación inversa, entonces existen constantes d, c positivas y $r_0 > 0$, que dependen de la constante de duplicación inversa de μ tales que para todo $k \geq 1$, $x \in F$ y $r > 0$, con $kr < r_0$, vale que

$$\mu(B(x,kr) \cap F) \geq ck^d \mu(B(x,r) \cap F). \tag{1.8}$$

Demostración. i) Suponemos que μ duplica. Dado $k > 1$, existe $j \in$ tal que $2^j < k \leq 2^{j+1}$, por consiguiente

$$\mu(B(x,kr) \cap F) \leq \mu(B(x,2^{j+1}r) \cap F) \leq A^{j+1}\mu(B(x,r) \cap F)$$

$$= AA^j\mu(B(x,r) \cap F)$$
$$\leq AA^{[\frac{\log k}{\log 2}+1]}\mu(B(x,r) \cap F)$$

$$\leq Ak^s\mu(B(x,r) \cap F) < \infty.$$

con $C = A^2$ y $s = \dfrac{\log A}{\log 2}$, tenemos i).

ii) Asumimos que μ verifica la duplicación inversa, entonces dado $k \geq 1$ y $r < \dfrac{r_0}{k}$, existe $j \in$ tal que $2^j < k \leq 2^{j+1}$, por la aplicación reiterada de (1.5), se obtiene que

$$\mu(B(x,kr) \cap F) \geq \mu(B(x,2^jr) \cap F) \geq a^j\mu(B(x,r) \cap F)$$

$$\geq a^{-1}e^{\frac{\log a}{\log 2}\log k}\mu(B(x,r) \cap F)$$
$$\geq a^{-1}k^{\frac{\log a}{\log 2}}\mu(B(x,r) \cap F)$$

$$= ck^d\mu(B(x,r) \cap F),$$

lo que prueba ii) con $c = a^{-1}$ y $d = \dfrac{\log a}{\log 2}$.

Como consecuencia de la Proposición 1.2.2 y del Lema 1.3.1, tenemos el siguiente resultado.

□

Corolario 1.3.1. *Si $F = \mathbb{R}^n$ y μ es una medida de Borel con la propiedad de duplicación entonces existen s y d, con $s \geq d$, tales que* (1.7) *y* (1.8) *se verifican para todo $k \geq 1$, todo $r > 0$, todo $x \in \mathbb{R}^n$ y algún par de constantes C y c.*

El Lema 1.3.1 prueba que dada una medida duplicante μ sobre un subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}^n$, el conjunto de números $S(\mu) = \{s > 0 : \ (1.7) \ \text{se verifica para } \mu\}$ es distinto del vacío. El número real $\alpha(\mu) = \inf S(\mu)$ constituye, al menos intuitivamente,un parámetro que estima superiormente la dimensión de F.

Igualmente, si consideramos la clase de las medidas μ soportadas en F, que cumplen con la duplicación inversa, se puede asignar a cada μ, un número β, siendo $\beta(\mu) = \sup \{d > 0 : \ (1.8) \ \text{se verifica para } \mu\}$.

Es de notar que si consideramos por ejemplo la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, dado que $\mu(B(x,r)) \simeq r^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$, se obtiene que $\alpha = \beta = n$. Este hecho nos da algún indicio sobre que estos números α y β, están relacionados con la dimensión del conjunto en que está soportada la medida.

Diremos siguiendo a [J] que una medida μ, definida en los borelianos del cerrado F de $\mathbb{R}^n$, satisface la *propiedad "D_s"*, $s > 0$, si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in F$, $r > 0$ y $k \geq 1$, se verifica que

$$0 < \mu(B(x,kr) \cap F) \leq ck^s \mu(B(x,r) \cap F) < \infty,$$

y que una medida μ, definida en los borelianos de $F \subset \mathbb{R}^n$, satisface la *propiedad "L_d"*, $d \geq 0$, si existen constantes $c' > 0$ y $r_0 > 0$ tal que para todo $x \in F$ y

$kr \leq r_0$, se verifica

$$\mu(B(x,kr)\cap F) \geq c'k^d \mu(B(x,r)\cap F), \quad k \geq 1.$$

Además de los ejemplos precedentes, el espacio euclídeo, curvas o superficies suaves con sus medidas clásicas, existen otros casos menos homogéneos que serán de interés para nosotros, en particular los que presentaremos en el Capítulo 3, en los que varias dimensiones concurren.

Notar que si μ está soportada en F y verifica "D_s" y "L_d", d es menor o igual que s, ya que las desigualdades de la forma

$$\begin{aligned} c'k^d \mu(B(x,r)\cap F) &\leq \mu(B(x,kr)\cap F) \\ &\leq ck^s \mu(B(x,r)\cap F), \end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$, sólo son posibles si $d \leq s$.

Por otro lado destaquemos que como en el caso de la condición (1.1), "D_s" y "L_d" son independientes de la norma que define las bolas.

Las propiedades "D_s" y "L_d" estan definidas por desigualdades que tienen relación con las nociones de tipo superior e inferior de funciones de crecimiento, cuyo estudio es muy usual en la teoría de Espacios de Orlicz y de módulos de continuidad, ver [I].

Una función $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, monótona creciente tal que $\varphi(0) = 0$ es de tipo superior $\beta > 0$, si existe una constante $C > 0$, tal que $\varphi(kr) \leq Ck^\beta(\varphi(r))$, para todo $k > 1$, y para todo $r > 0$ y φ es de tipo inferior $\alpha > 0$, si existe una constante $C > 0$ tal que $\varphi(kr) \geq Ck^\alpha \varphi(r)$, para todo $k > 1$, y para todo $r > 0$.

Destaquemos además, que si φ es de tipo inferior α (respectivamente de tipo superior β) y $\gamma < \alpha$ (respectivamente $\delta > \beta$), entonces φ es de tipo inferior γ (respectivamente φ es de tipo superior δ).

En lo que sigue indagaremos mediante algunos ejemplos el grado de relación entre las funciones mencionadas y las propiedades "D_s" y "L_d".

Sea el espacio $X = S \cup L$, donde S representa a un semiplano cerrado en $\mathbb{R}^2$ y L es una semirrecta a distancia positiva de S en la situación que se muestra en la siguiente figura.

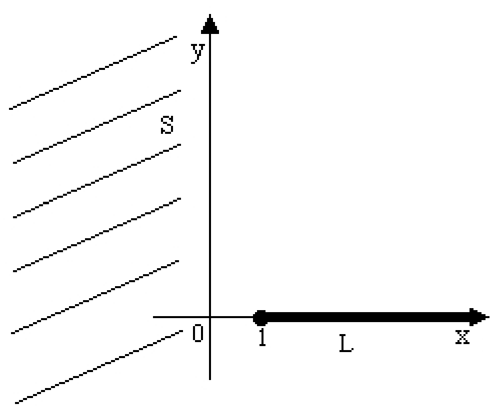


Figura 1.3.1

Equipemos a $X = S \cup L$ con la medida $\mu(E) = |S \cap E|_2 + |L \cap E|_1$, E boreliano de $\mathbb{R}^2$, donde el primer término indica el área y el segundo la longitud.

Identifiquemos con $\{\varphi_x(r)\}$ a la familia de funciones que determina la medida μ para cada bola con centro en $x \in X$, según la variación del radio, esto es $\varphi_x(r) = \mu(B(x, r))$ y probemos para cada $x \in X$, que las funciones de la familia considerada son de tipo superior dos y de tipo inferior uno. Para ver esto estimemos a dichas funciones. Supongamos que el semiplano S es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$ y que $L = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1\}$.

En $X = S \cup L$ consideramos la distancia que se hereda de $\mathbb{R}^2$. Comenzamos estimando superior e inferiormente $\varphi_x(r)$ para $x \in S$. Puesto que si $x \in S$, al menos la mitad del círculo centrado en x, y con radio r esta contenido en S y de aqui que $\varphi_x(r) \geq \dfrac{1}{2}\pi r^2$. Por otra parte, es claro que

$$\begin{aligned}\varphi_x(r) &= \mu(B(x,r)) = |B(x,r) \cap S|_2 + |B(x,r) \cap L|_1 \\ &\leq |B(x,r)|_2 + max\{r-1,0\} \\ &= \pi r^2 + max\{r-1,0\} \leq 2\pi r^2.\end{aligned}$$

Resumiendo, para $x \in S$ y $r > 0$ valen las desigualdades

$$\frac{1}{2}\pi r^2 \leq \varphi_x(r) \leq 2\pi r^2. \tag{1.10}$$

Hagamos lo mismo para $x \in L$ y $r > 0$.

Si $r \leq 2x$, al menos un segmento de longitud r está contenido en L, de aquí que $\varphi_x(r) \geq r$. Por otro lado si $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$, esta intersección determina una región que esta contenida en un rectangulo de base x y altura r, por lo tanto como $\varphi_x(r) = |B \cap S|_2 + |B \cap L|_1 \leq 2r + xr$, si $r \geq 2x$, la bola $B(x,r)$ interseca a S en una región que esta contenida en un rectángulo de base y altura respectivamente iguales a $(r-x)$ y $\sqrt{r^2 - x^2}$ y al menos un triángulo con las mismas dimensiones está contenido en S. Por lo tanto la estimación de $\varphi_x(r)$ para $x \in L$, cuando $r < 2x$, está dada por

$$r \leq \varphi_x(r) \leq 2r + xr \leq 3rx, \tag{1.11}$$

y si $r \geq 2x$, vale

$$(r-x)\sqrt{r^2-x^2} + r \leq \varphi_x(r) \leq 2[r + (r-x)\sqrt{r^2-x^2}]. \tag{1.12}$$

Probemos el tipo superior 2 para $\varphi_x(r)$. Sean $x \in S$, $r > 0$ y $k > 1$, entonces por (1.10),

$$\frac{\pi}{4}k^2\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq 4\pi k^2\varphi_x(r). \tag{1.13}$$

Esta expresión muestra que la función $\varphi_x(r)$ es de tipo superior dos . Sean $x \in L$, $r > 0$ y $k > 1$, entonces si $kr < 2x$, por (1.11) se obtiene que

$$\frac{\varphi_x(kr)}{\varphi_x(r)} \leq \frac{3kxr}{r} \leq 3kx \tag{1.14}$$

Notar que esta desigualdad expresa que $\varphi_x(r)$ es de tipo superior uno para $x \in L$, por consiguiente también que es de tipo superior dos. Si $kr > 2x$ y $r \leq 2x$, aplicando (1.12) y (1.11) tenemos las desigualdades $\varphi_x(kr) \leq 2\Big[kr + k^2(r - \frac{x}{k})\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{k^2}}\Big]$ y $\varphi_x(r) \geq r$, por lo tanto

$$\frac{\varphi_x(kr)}{\varphi_x(r)} \leq \frac{2rk^2}{r}\Big[1 + (1 - \frac{x}{rk})\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{k^2}}\,\Big]$$

pero dado que $r < 2x$, se obtiene que

$$\frac{\varphi_x(kr)}{\varphi_x(r)} \leq 2k^2[1 + (1 - \frac{x}{rk})\sqrt{4x^2 - \frac{x^2}{k^2}}]$$

obteniéndose de esta expresión

$$\frac{\varphi_x(kr)}{\varphi_x(r)} \leq 2k^2[1 + 2x] \leq 2k^2 3x, \tag{1.15}$$

consideremos $kr > 2x$ y $r > 2x$, entonces por (1.12),

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_x(rk)}{\varphi_x(r)} &\leq \frac{rk + k^2\left[r - \frac{x}{k}\right]\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{k^2}}}{r + (r - x)\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &\leq k + \frac{k^2 r^2}{(r - \frac{r}{2})\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} \\ &\leq k + \frac{2k^2 r^2}{r^2\sqrt{3}} \leq 3k^2,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\varphi_x(rk) \leq 2k^2 \varphi_x(r). \tag{1.16}$$

De (1.13), (1.14), (1.15) y (1.16) se deduce que la familia de funciones $\{\varphi_x(r)\}$ es de tipo superior dos.

Veamos ahora que la medida $\mu(E) = |E \cup S|_2 + |E \cup L|_1$ definida en $X = S \cup L$, no tiene la propiedad de duplicación. En efecto, consideremos la bola $B(n, n), n \geq 1$ de acuerdo a la definición de μ, se tiene que $\mu(B(n, n)) =$

$2n-1$ y $\mu(B(n,2n)) \geq \pi n^2$ por lo tanto $\dfrac{\mu(B(n,2n))}{\mu(B(n,n))} \geq \dfrac{\pi n^2}{2n-1} \to \infty$, para $n \to \infty$. De este hecho es inmediato concluir entonces que μ, no satisface D_2.

Cuando se tiene una familia $\{\varphi_\alpha, \alpha \in A\}$ de funciones de crecimiento diremos que es de tipo superior finito uniformemente en α (respectivamente de tipo inferior finito uniformemente en α) si existen $\beta > 0$ y $C > 0$ tales que para todo $r > 0$ y para todo $k \geq 1$ se tiene que $\varphi_\alpha(kr) \leq Ck^\beta \varphi_\alpha(r)$ (respectivamente $\varphi_\alpha(kr) \geq Ck^\beta \varphi_\alpha(r)$). Es claro que si la familia $\varphi_x(r) = \mu(B(x,r))$ es de tipo superior finito uniformemente en x, entonces μ satisface la propiedad de duplicación.

Resulta trivial entonces que la familia de funciones $\{\varphi_x(r)\}$ del ejemplo anterior, donde

$$\varphi_x(r) = \mu(B(x,r)) = |B(x,r) \cap S|_2 + |B(x,r) \cap L|_1,$$

con $x \in S \cup L$ no es uniformemente de tipo superior dos, pues se vio que μ, no duplica. En cambio se verifica que dicha familia es uniformemente de tipo inferior uno. En efecto, sean $x \in S$, $r > 0$. Para este caso valen las desigualdades (1.13). Notar que dicha expresión muestra que $\varphi_x(r)$ es de tipo inferior dos. Recordemos que siendo de tipo inferior dos también es de tipo inferior uno.

Observemos ahora que si $x \in L$ y $r \leq x$, dado que $B(x,r) \cap S = \emptyset$ por lo que $B(x,r) \cap L$ contiene por lo menos un segmento de longitud r, de aqui que

$$r \leq \varphi_x(r) \leq 2r. \tag{1.17}$$

Si $r > x$, $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$, y valen las mismas acotaciones realizadas en (1.12) esto es

$$(r-x)\sqrt{r^2-x^2}+r \leq \varphi_x(r) \leq 2[r+(r-x)\sqrt{r^2-x^2}].$$

Por lo tanto si $kr \leq x$, de las desigualdades (1.17) se obtiene que

$$\frac{1}{2}k\varphi_x(r) \leq kr \leq \varphi_x(kr).$$

Si $kr > x$ y $r \leq x$, de (1.17) y (1.12) se obtiene que $\varphi_x(kr) \geq kr \geq \dfrac{k}{2}\varphi_x(r)$.
Si $kr > x$ y $r > x$, aplicando (1.12) vale que

$$\varphi_x(kr) \geq \frac{2k[r+(r-x)\sqrt{r^2-x^2}]}{2} \geq \frac{1}{2}k\varphi_x(r)$$

Consideramos ahora $X = S \cup L$, donde S es el semiplano indicado en el ejemplo anterior y L un segmento de longitud uno, con origen en $x = 1$, sobre el eje real. Definamos $\mu(E) = |S \cap E|_2 + |L \cap E|_1$ para E boreliano de $\mathbb{R}^2$. Deseamos mostrar que la familia de funciones $\{\varphi_x(r)\}$, con $\varphi_x(r) = \mu(B(x,r))$, $x \in X$, es uniformemente de tipo superior dos y uniformemente de tipo inferior uno. Para ello procedemos como en el caso anterior y nos valdremos de las estimaciones antes obtenidas. Razonando como antes se ve que para $x \in S$, y $r > 0$, valen las desigualdades obtenidas en (1.10).

Para $x \in L$, $r > 0$, valen las siguientes estimaciones para $\varphi_x(r)$, las que se obtienen a partir de (1.11) y (1.12) y del hecho que $1 \leq x \leq 2$.

Si $r > 2x$,

$$r \leq \varphi_x(r) \leq 6r. \tag{1.18}$$

Si $r \leq 2x$,

$$r^2\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \varphi_x(r) \leq 4r^2. \tag{1.19}$$

Analicemos los siguientes casos para $x \in L$, $r > 0$ y $k > 1$.

Si $kr \leq 2x$ con $k > 1$, se obtiene que

$$\frac{k}{6}\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq 6k\varphi_x(r).$$

Si $kr > 2x$ y $r \leq 2x$, entonces a partir de (1.18) y (1.19) vale que

$$\frac{\sqrt{3}}{12}k\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq 16k^2\varphi_x(r).$$

Si $kr > 2x$ y $r > 2x$

$$\frac{k^2}{8}\sqrt{3}\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq \frac{4}{\sqrt{3}}k^2\varphi_x(r).$$

Para $x \in S$, $r > 0$ y $k > 1$, nuevamente se verifica a partir de (1.10) que

$$\frac{\pi}{4}k^2\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq 4k^2\varphi_x(r).$$

De los casos analizados se infiere que la familia $\{\varphi_x(r)\}$ es uniformemente de tipo superior dos y uniformemente de tipo inferior uno.

Este hecho nos permite concluir que la medida μ satisface "D_2" y "L_1". Y no es difícil ver que 2 y 1 son óptimos: μ no satisface D_s para ningún $s < 2$ ni L_d para $d > 1$.

Cuando la desigualdad

$$\varphi(kr) \geq Ck^{\beta}\varphi(r)$$

valga sobre el conjunto

$$\{(k, r), \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : k > 1 \,\text{y}\, kr \leq r_0\}$$

para algún $r_0 > 0$, diremos que la función φ es de tipo inferior local β.

En otros términos la función $\dfrac{\varphi(kr)}{k^{\beta}\varphi(r)}$ está uniformemente acotada por debajo por una constante positiva cuando (k, r) está en la región plana debajo de la hipérbola de ecuación $kr = r_0$.

Diremos que la familia $\{\varphi_\alpha, \alpha \in A\}$ de funciones de crecimiento es de tipo inferior local uniformemente en α si $\varphi_\alpha(kr) \geq Ck^{\beta}\varphi_\alpha(r)$ para todo $r > 0$ y $k \geq 1$.

En el caso que presentamos a continuación la familia de funciones

$$\{\varphi_x(r)\}$$

es uniformemente de tipo superior dos y uniformemente de tipo inferior local uno.
Sea $X = C \cup L$, donde C es un circulo cerrado en $\mathbb{R}^2$ y L un segmento de recta compacto a distancia positiva uno del otro,

Equipemos a $X = C \cup L$ con la medida $\mu(E) = |C \cap E|_2 + |L \cap E|_1$, E boreliano de $\mathbb{R}^2$. Estimemos entonces $\varphi_x(r) =$

$\mu(B(x,r))$, $x \in X$. Sean $x \in C$ y $0 < r \leq 1$, entonces puesto que $x \in C$ al menos un cuarto del círculo centrado en x y con radio r está contenido en C, de aquí que $\varphi_x(r) \geq \dfrac{1}{4}\pi r^2$. Por otro lado como $B(x,r) \cap L = \emptyset$

$$\varphi_x(r) = |B(x,r) \cap C|_2 + |B(x,r) \cap L|_1 \leq \pi r^2$$

.

Para $r > 1$, $B(x,r) \cap (C \cup L)$ contiene por lo menos a un círculo de radio $\frac{1}{2}$ y $B(x,r) \cap (C \cup L)$ está contenida a lo más en la unión de un círculo de radio uno con un segmento de longitud uno. Por lo tanto a partir de la definición de μ, se tiene que

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi_x(r) \leq 1 + \pi, \quad \text{para } r > 1.$$

En cambio para $x \in L$, se verifican los siguientes desigualdades

$$r < \varphi_x(r) \leq 2r \qquad 0 < r \leq 1 \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{2} \leq \varphi_x(r) \leq 1 + \pi \qquad r > 1 \tag{1.21}$$

Notemos que la primera desigualdad se obtiene del hecho que $B(x,r) \cap L$ contiene por lo menos a un segmento de longitud r. La segunda desigualdad vale pues al ser $r > 1$ y $x \in L$, $B(x,r) \cap L$ contiene por lo menos a un segmento de longitud $\dfrac{1}{2}$ y dado que $B(x,r) \cap C$ puede ser distinta del vacio, esta intersección está contenida a lo más en un círculo de radio uno.

Es sencillo ahora probar que la familia $\{\varphi_x(r)\}$ es uniformemente de tipo superior dos y uniformemente de tipo inferior local uno.

Sean $x \in C$, $k > 1$ y $r_0 = 4$ y consideremos los siguientes casos:

a)$0 < kr \leq 1$, por lo mostrado respecto del comportamiento de $\varphi_x(r)$, claramente se verifica que $\frac{1}{4}k^2\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq 4k^2\varphi_x(r)$

b) $kr > 1$, $0 < r \leq 1$, para esta situación vale que $\varphi_x(kr) \geq \pi/4$ y $\varphi_x(r) \leq \pi r^2$ y dado que $r^2k^2 \leq r_0^2 = 16$ se cumple que

$$\frac{1}{64}k^2\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \tag{1.22}$$

Por otro lado como $\varphi_x(kr) \leq 1 + \pi$ y $\varphi_x(r) \geq \frac{1}{4}r^2\pi$ y $r^2k^2 > 1$, vale que

$$\varphi_x(kr) \leq \frac{4(1+\pi)}{\pi}k^2\varphi_x(r) \tag{1.23}$$

usando (1.22) y (1.23) se concluye que

$$\frac{1}{64}k^2\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq \frac{4(1+\pi)k^2\varphi_x(r)}{\pi}$$

c) $kr > 1$ y $r > 1$, utilizando el hecho que $kr < 4$ y trabajando en forma similar al caso anterior se tiene que

$$\frac{\pi}{4(1+\pi)}k^2\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq \frac{4(1+\pi)}{\pi}k^2\varphi_x(r)$$

De (a), (b) y (c) se obtiene que $\varphi_x(r)$ es de tipo superior dos y localmente de tipo inferior uno y que las constantes no dependen de $x \in C$.

Sean $x \in L$, $k > 1$ y $r_0 = 4$. Consideramos los siguientes casos:

a) $0 < kr < 1$. Es directo obtener a partir del comportamiento de la familia $\{\varphi_x(r)\}$ que $\frac{1}{2}k\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq 2k\varphi_x(r)$

b)$kr > 1$ y $0 < r \leq 1$, para esta situación vale que $\varphi_x(kr) \leq k(1+\pi)\varphi_x(r)$, y dado que $\varphi_x(kr) \geq \frac{1}{2}$ y $\varphi_x(r) \leq 2r$, con $kr \leq 4$, se obtiene entonces que

$$\frac{k}{8}\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq (1+\pi)k\varphi_x(r)$$

c) $kr > 1$ y $1 < r$, razonando en forma similar al caso anterior y usando que $kr < 4$, vale que

$$\frac{k}{8(1+\pi)}\varphi_x(r) \leq \varphi_x(kr) \leq (1+\pi)k\varphi_x(r).$$

De los casos considerados, se deduce que la familia $\{\varphi_x(r)\}$ con $x \in S$, es uniformemente de tipo superior dos y uniformemente de tipo inferior local uno.

Consideremos ahora $X = C \cup L$, donde C es el circulo unidad centrado en el punto de coordenadas $(-1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ y L es una semirecta con origen en $x = 1$ sobre el eje real. Definimos $\mu(E) = |C \cap E|_2 + |L \cap E|_1$, para E borelianos de $\mathbb{R}^2$. Estimemos $\varphi_x(r)$ para $x \in X$.

Para $x \in C$, y $r > 0$ es claro que al menos un cuarto de un circulo centrado en x y con radio r esta contenido en C. Por otro lado como

$$\varphi_x(r) = \mu(B(x,r)) = |B(x,r) \cap C|_2 + |B(x,r) \cap L|_1$$

$$\leq \pi r^2 + max\{r-1, 0\} \leq 2\pi r^2$$

para $x \in C$ vale entonces que

$$\frac{1}{4}\pi r^2 \leq \varphi_x(r) \leq 2\pi r^2. \tag{1.24}$$

Para $x \in L$, $0 < r < x$, es claro que al menos la mitad de un segmento de longitud r está contenido en $B(x,r) \cap L$. Además como

$$\varphi_x(r) = |B(x,r) \cap C|_2 + |B(x,r) \cap L|_1 \leq 2r$$

entonces

$$r \leq \varphi_x(r) \leq 2r. \tag{1.25}$$

Notemos ahora que, si $r > x$, $B(x,r) \cap (C \cup L)$ queda contenida en la unión de un segmento de longitud no mayor a $2r$ con un rectángulo de base $r - x$ y altura dos. Por lo tanto

$$r \leq \varphi_x(r) \leq 2[r + (r-x)] \leq 2[r + r + x],$$

pero dado que $x \leq r$ se obtiene que $r \leq \varphi_x(r) \leq 6r$, de aqui que comparando esta última desigualdad con (1.25), una estimación de $\varphi_x(r)$ para $x \in L$ es

$$r \leq \varphi_x(r) \leq 6r. \tag{1.26}$$

De (1.24) y (1.25) y combinando los distintos casos respecto de kr y r con $x \in L$, se prueba que la familia $\{\varphi_x(r)\}$ es uniformemente de tipo superior dos y uniformemente de tipo inferior uno.

Notemos que el hecho de que la familia sea uniformemente de tipo local "L_d", en nuestros ejemplos depende en principio de la acotación del conjunto de menor dimensión.

Otra cuestión importante es que se detecta que la duplicación de la medida está relacionada a una condición de separación entre las componentes del espacio incluyendo separación en el infinito, pensando en el compactado de un punto. Un estudio sobre la relación entre la separación de las componentes de un espacio y la propiedad de duplicación, se volverá a tratar en el Capítulo 3.

1.4. Medidas y Dimensión de Hausdorff

En esta sección se introducen las definiciones básicas de medida y dimensión de Hausdorff de subconjuntos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Con estos conceptos obtendremos en la sección siguiente relaciones entre los números definidos en la Sección 1.3 y la dimensión de Hausdorff del soporte de la medida.

Las referencias básicas para estos temas son por ejemplo, los libros de Falconer [F1] y [F2].

Sea U un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Definimos el diámetro de U como $|U| = \sup\ \{|x-y| : \ x, y \in U\}$. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia contable de conjuntos tales que para cada i,

$0 < |U_i| < \delta$, diremos que $\{U_i\}$ es un δ-cubrimiento de $F \subset \mathbb{R}^n$ si $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Sean F un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y s un número no negativo. Para $\delta > 0$, definimos

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\{\sum_{i \in I} |U_i|^s : \{U_i\}, \text{es un } \delta\text{-cubrim.de } F\} \tag{1.27}$$

El ínfimo se toma sobre todos los δ-cubrimientos de F.

El siguiente lema establece que $\mathcal{H}^s_\delta$ es una medida exterior sobre $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.4.1. *Dados $s \geq 0$ y $\delta > 0, \mathcal{H}^s_\delta$ es una medida exterior sobre $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces todo δ-cubrimiento de F_2 es un δ-cubrimiento de F_1, de modo que $\mathcal{H}^s_\delta(F_1) \leq \mathcal{H}^s_\delta(F_2)$. Veamos que $\mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(F_j)$, para toda familia $\{F_j,\ j \in\}$ de las partes de $\mathbb{R}^n$. Si el miembro derecho es $+\infty$, entonces la desigualdad es trivialmente válida. Consideremos entonces que $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(F_j) < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$, entonces para todo $j \in$, existe un δ-cubrimiento $\{U_i^j : \ i \in I_{(j)}\}$ de F_j, tal que $\sum_{i \in I_{(j)}} |U_i^j|^s < \mathcal{H}^s_\delta(F_j) + \dfrac{\epsilon}{2^j}$.

Entonces

$$\sum_{j\in}\sum_{i\in I_{(j)}}|U_i^j|^s \leq \sum_{j\in}(\mathcal{H}^s(F_j)+\frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j\in}\mathcal{H}^s_\delta(F_j)+\epsilon.$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ obtenemos la desigualdad deseada porque $\{U_i^j, i \in I(j), j \in\}$, es un δ-cubrimiento de $\bigcup_{j\in} F_j$.

□

Notemos que cuando δ disminuye, también disminuye la clase de los cubrimientos posibles de F en (1.27), por lo tanto, el ínfimo de $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ aumenta, de modo que $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(F) = \sup_{\delta>0}\mathcal{H}^s_\delta(F)$, finito o infinito.

El $\sup_{\delta>0}\mathcal{H}^s_\delta(F)$ que denotaremos con $\mathcal{H}^s(F)$ es la medida exterior de Hausdorff de dimensión s. El siguiente lema nos asegura que es una medida exterior, más aún $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior métrica, en el sentido que dados dos conjuntos F_1 y F_2 de las partes de $\mathbb{R}^n$, tales que $\inf\{|x-y| : \ x \in F_1,\ y \in F_2\} = d(F_1, F_2) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(F_1 \cup F_2) = \mathcal{H}^s(F_1) + \mathcal{H}^s(F_2)$.

Lema 1.4.2. *$\mathcal{H}^s(F)$, es una medida exterior métrica sobre $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Que es una medida exterior es una consecuencia directa del Lema 1.4.1. Veamos que es métrica. Sean F_1 y F_2 tales $d(F_1, F_2) > 0$. Como $\mathcal{H}^s(F)$ es una medida exterior vale que $\mathcal{H}^s(F_1 \cup F_2) \leq \mathcal{H}^s(F_1) + \mathcal{H}^s(F_2)$. Debemos probar que $\mathcal{H}^s(F_1 \cup F_2) \geq \mathcal{H}^s(F_1) + \mathcal{H}^s(F_2)$.

Sea $\alpha = d(F_1, F_2)$ y elegimos $0 < \delta < \alpha$. Sea $C = \{U_j\}_{j\in I}$ un δ-cubrimiento de $F_1 \cup F_2$. A partir de C, formemos C_1 y C_2 tal que $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 = \{U \in$

$C: \; U \cap F_1 \neq \emptyset\}$ y $C_2 = C - C_1$. C_1 es δ-cubrimiento de F_1. En efecto,

$$F_1 \subset F_1 \cup F_2 \subset \bigcup_{U \in C} U = \Big(\bigcup_{U \in C_1} U \Big) \cup \Big(\bigcup_{U \in C_2} U \Big),$$

como $\Big(\bigcup\limits_{U \in C_2} U \Big) \cap F_1 = \emptyset$, resulta que C_1 es un cubrimiento de F_1. Como consecuencia de la elección de δ, C_2 es un δ-cubrimiento de F_2. Es así pues,

$$F_2 \subset F_1 \cup F_2 \subset \Big(\bigcup_{U \in C_1} U \Big) \cup \Big(\bigcup_{U \in C_2} U \Big),$$

como $U \in C_1$ implica $U \cap F \neq \emptyset$, entonces U no puede intersecar a F_2 porque $diam\, U < \delta < \alpha$. Por consiguiente, $\bigcup\limits_{U \in C_2} U \supset F_2$. Por lo tanto, para cualquier δ-cubrimiento C de $F_1 \cup F_2$, existen δ-cubrimientos C_1 de F_1 y C_2 de F_2 tales que

$$\sum_{U \in C} |U|^s = \sum_{U \in C_1} |U|^s + \sum_{U \in C_2} |U|^s \geq \mathcal{H}^s(F_1) + \mathcal{H}^s(F_2),$$

entonces

$$\mathcal{H}^s_\delta(F_1 \cup F_2) \geq \mathcal{H}^s_\delta(F_1) + \mathcal{H}^s_\delta(F_2), \quad \delta < \alpha$$

de aquí que $\mathcal{H}^s(F_1 \cup F_2) \geq \mathcal{H}^s(F_1) + \mathcal{H}^s(F_2)$, lo que completa la demostración.

$\square$

La restricción de $\mathcal{H}^s$ a la σ-álgebra de los conjuntos

$\mathcal{H}^s$-medibles, que incluye a los conjuntos de Borel, es llamada medida de Hausdorff s-dimensional.

Señalemos que la medida de Hausdorff incluye a los conceptos clásicos de longitud, área y volumen. Se puede probar que la medida n-dimensional de Hausdorff coincide con la medida de Lebesgue, salvo constantes multiplicativas. Más precisamente, si F es un subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathcal{H}^n(F) = c_n\, vol^n(F)$, donde $c_n = \dfrac{2^n(\frac{1}{2}n!)}{\pi^{\frac{1}{2}n}}$ (ver [F1]).

A modo de ejemplo, para valores enteros de s menores que n, notemos que $\mathcal{H}^0$ es la medida cuenta puntos, $\mathcal{H}^1$ es la longitud, $\mathcal{H}^2$ es un múltiplo del área, etc.

Consideremos ahora F y δ fijos en (1.27), la función de s, $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ es no creciente cuando s aumenta. Más aún, si $t > s$ y $\delta > 0$, se tiene que $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$. En efecto, observemos que si $\{U_i : i \in I\}$ es un δ-cubrimiento de F, se tiene que

$$\sum_{i\in I} |U_i|^t = \sum_{i\in I} |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i\in I} |U_i|^s$$

y tomando ínfimos, se tiene que $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$. Si hacemos tender δ a cero, vemos que si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$. De un modo análogo, podemos ver que $\delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \mathcal{H}^t_\delta(F)$ lo que muestra que para $t < s$, si $\mathcal{H}^s_\delta(F) > 0$, el miembro de la izquierda tiende a infinito, para $\delta \to 0$.

Definimos la dimensión de Hausdorff de F como

$$dim_H F = inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

de modo que

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < dim_H F \\ \\ 0 & \text{si } s > dim_H F \end{cases}$$

Si $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, F es llamado un s-conjunto.

1.5. Duplicación y Dimensión de Hausdorff

En esta sección estimaremos la dimensión de Hausdorff del soporte de una medida de Borel que satisface las propiedades "D_s" y "L_d" en términos de estos dos parámetros, s y d, cuando μ tiene además una propiedad de casi-invariancia por traslaciones de la bola unitaria.

El siguiente lema establece relaciones entre la medida de una bola y una potencia del radio de la misma, y las condiciones "D_s" y "L_d" cuando se tiene una cota uniforme por arriba o por abajo de la medida de las bolas de radio 1.

Lema 1.5.1. *Sea F un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y μ una medida definida en los borelianos de F. Entonces valen las siguientes proposiciones:*

i) Si μ verifica "D_s" y si existe una constante $c_1 > 0$ tal que $c_1 < \mu(B(x,1))$ para todo $x \in F$, entonces existe $c > 0$ tal que para todo $x \in F$ y $0 < r < 1$ vale que $r^s \leq c\mu(B(x,r))$.

ii) Si μ verifica "L_d" y existe una constante $c_2 > 0$ tal que $\mu(B(x,1)) < c_2$ para todo $x \in F$, entonces existe $c > 0$ tal que para todo $x \in F$ y $0 < r < 1$ vale que $\mu(B(x,r)) \leq cr^d$.

Demostración. Veamos i). Dado que μ verifica "D_s" y $\frac{1}{r} > 1$, se tiene que $c_1 < \mu(B(x,1)) = \mu(B(x, \frac{1}{r}r)) \leq c\left(\frac{1}{r}\right)^s \mu(B(x,r))$.

De manera similar probamos ii). Puesto que μ verifica "L_d" y $\frac{1}{r} > 1$, resulta que $c_2 > \mu(B(x,1)) = \mu(B(x, \frac{1}{r}r)) \geq c\left(\frac{1}{r}\right)^d \mu(B(x,r))$. □

Notar que si el conjunto F es compacto y la función $\mu(B(x,1))$ es continua, las estimaciones uniformes superior e inferior para las medidas de las bolas de radio fijo, no constituyen restricciones adicionales a "D_s" y "L_d".

El próximo teorema presenta relaciones entre las condiciones "L_d" y "D_s" y la dimensión de Hausdorff del conjunto F, que es soporte de μ. Para demostrarlo usaremos una versión simplificada del Lema de cubrimiento de Wiener al que volveremos en la Sección 1.7 en un contexto más general, y que enunciamos a continuación.

Lema 1.5.2. *Si F es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y para cada $x \in F$ está dada una bola $B(x, r(x))$ centrada en x, entonces existe una sucesión $\{x_i\}$ de puntos de F tales que si $B_i = B(x_i, r(x_i))$ y $\widetilde{B_i} = B(x_i, 4r(x_i))$ se tiene que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bigcup_i \widetilde{B_i} \supseteq F$.*

Teorema 1.5.1. *Sea F un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y μ una medida de Borel soportada en F, tal que existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que $c_1 < \mu(B(x,1)) < c_2$ para todo $x \in F$, entonces valen las siguientes proposiciones:*

i) Si μ verifica "D_s", la dimensión de Hausdorff del F es menor o igual que s.

ii) Si μ verifica "L_d", la dimensión de Hausdorff del F es mayor o igual que d.

Demostración. i) Supondremos que F es acotado. Si no es así, F es unión de una sucesión creciente de conjuntos F_n, donde $F_n = F \cap \bar{B}_n$, siendo $B_n = B(x_0, n)$, $x_0 \in F$, y basta probar que la dimensión de cada F_n es menor o igual que s.

Sea $\delta > 0$. Puesto que F es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, por el Lema de Wiener aplicado a la familia $\{B\left(x, \frac{\delta}{2}\right) : x \in F\}$ es posible cubrir a F por un número finito, digamos M, de bolas $\{\tilde{B}_i\}$ centradas en F con radio 2δ, de modo que las bolas $\{B_i\}$ con los mismos centros y con radios $\frac{\delta}{2}$ sean todas disjuntas. Entonces usando el Lema 1.5.1, la hipótesis y el hecho de que las bolas $\{B_i\}$ son disjuntas, tenemos

$$\mathcal{H}^s_{4\delta}(F) \leq \sum_{i=1}^{M} |\tilde{B}_i|^s = \sum_{i=1}^{M} 4^s |B_i|^s \leq 4^s c \sum_{i=1}^{M} \mu(B_i) \ = \ c'\mu(\bigcup_{i=1}^{M} B_i) \leq c'\mu(F).$$

Notemos ahora que todo compacto tiene medida finita, puesto que puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio 1 y por hipótesis $\mu(B(x,1)) < c_2$. Por consiguiente, $\mathcal{H}^s(F) \leq c'\mu(F) < \infty$, de donde se deduce que $dim_H(F) \leq s$.

ii) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un δ-cubrimiento de F y sea $\{B'_i\}$ la familia de bolas $B'_i = B_i(x_i, 2|U_i|)$, $x_i \in F \cap U_i$. Por el Lema 1.5.1 resulta que

$$2^d \sum_{i\in I} |U_i|^d \geq c \sum_{i\in I} \mu(B(x_i, 2|U_i|)) \geq \mu(\bigcup_{i\in I} B'_i) \geq \mu(F),$$

con lo cual $\mathcal{H}^d_\delta(F) \geq c\mu(F)$. De aquí que $\mathcal{H}^d(F) \geq c\mu(F)$. Pero la hipótesis de acotación inferior uniforme implica que $\mu(F) > 0$, lo que muestra que $\mathcal{H}^t(F) = \infty$ para todo $t < d$. Así la dimensión de Hausdorff de F es mayor o igual que d.

□

En particular si $0 < c_1 < \mu(B(x,1)) < c_2 < \infty$, $x \in F$ y si μ verifica "D_s" y "L_s", entonces F tiene dimensión de Hausdorff igual a s, más aún cada bola en F es un s-conjunto. Tal es el caso de la medida de Hausdorff soportada sobre el conjunto de Cantor con $s = d = \dfrac{\log 2}{\log 3}$, ver [LS].

En realidad, en la prueba del Teorema 1.5.1, hemos usado esencialmente $\mu(B(x,1)) > c_1 > 0$ para demostrar i) y $\mu(B(x,1)) < c_2 < \infty$ para ii). La acotación inferior de $\mu(B(x,1))$ no es estrictamente necesaria para i) ni la cota superior lo es para ii). Por ejemplo, si $F = \mathbb{R}$ y $\mu(E) = \int_E |x|^{-1/2}\,dx$ para E boreliano de $\mathbb{R}$, tenemos que $\mu(B(x_0,1))$ no está acotada inferiormente para $|x_0| \longrightarrow \infty$. En efecto, $\mu(B(x_0,1)) \leq 2|x_0 - 1|^{-1/2}$. Notemos que μ verifica D_1. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y $k \geq 1$ y consideremos los siguientes casos:

a) $|x_0| \leq 4kr$

Observemos que el intervalo $(x_0-kr, x_0+kr) \subset (-8kr, 8kr)$, por lo tanto $\mu(x_0-kr, x_0+kr) \leq \mu(-8kr, 8kr) \leq 4(kr)^{1/2} \leq 4kr^{1/2}$. Por otro lado,

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} |x|^{-1/2}\, dx \geq 2r(|x_0|+r)^{-1/2} \geq 2r(5r)^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} r^{1/2}.$$

De las desigualdades obtenidas se verifica que $\mu(x_0 - kr, x_0 + kr) \leq 2\sqrt{5}\, k\, \mu(x_0 - r, x_0 + r)$.

b) $|x_0| > 4kr$

Notemos que para $x_0-kr \leq x \leq x_0+kr$ se verifica que $\frac{3}{4}|x_0| \leq |x| \leq \frac{5}{4}|x_0|$, por consiguiente es directo obtener que $\mu(x_0 - kr, x_0 + kr) \leq \frac{3}{5}\, k\, \mu(x_0 - r, x_0 + r)$. De las situaciones consideradas, vemos que μ verifica "D_s" con $s = 1$. Como ciertamente $\dim_H(\mathbb{R}) = 1$, concluímos que aún bajo la hipótesis D_s, la condición $\mu\,(B(x, r)) > C_1$ no es necesaria para que F tenga dimensión s.

Siguiendo un procedimiento similar al ejemplo precedente si definimos $\mu(E) = \int_E |x|^{1/2}\, dx$ para E boreliano de $\mathbb{R}$, se prueba que la medida de la bola unidad no está acotada superiormente en forma uniforme y que μ verifica L_1.

El ejemplo precedente es en realidad una consecuencia de un hecho más general: $\mathbb{R}$ es el límite creciente de compactos en los cuales el Teorema 1.5.1 puede aplicarse porque al ser continua, la función $\mu(B(x, 1))$ está inferiormente y superiormente acotada.

1.6. Espacios métricos y casi-métricos.

Una herramienta básica de la teoría de Whitney de extensión de funciones es un lema de cubrimiento que se conoce precisamente como el Lema de Whitney. Al abordar el problema de extensión planteado en la introducción será conveniente considerar como universo la unión de las dos componentes Ω_1 y Ω_2 con la métrica que hereda de $\mathbb{R}^n$ y en este contexto tener cubrimientos de Whitney, entendiendo el complemento de un conjunto tomado con respecto al nuevo conjunto universal y no a $\mathbb{R}^n$.

Introducimos esquemáticamente los conceptos de espacio casi-métrico y de tipo homogéneo con el fin de construir cubrimientos de Whitney y en situaciones como la descripta arriba y aún más generales.

El concepto de casi-distancia, surge al estudiar normalizaciones del tipo $|x-y|^n$ de la distancia usual de $\mathbb{R}^n$ en problemas de análisis armónico, ver [CG].

Sea X un conjunto. Llamamos casi-distancia o casi-métrica a una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que posee las siguientes propiedades

1) $d(x, y) = 0$ si y sólo si x = y,

2) para toda elección de x e y en X, $d(x, y) = d(y, x)$,

3) existe una constante $k > 0$, tal que para toda elección de $x, y, z \in X$ se verifica que

$$d(x, z) \leq k(d(x, y) + d(y, z)).$$

El par (X, d) se llama espacio casi-métrico y k será llamada constante de la casi-métrica. Notar que para $k = 1$, se tiene una métrica.

El par $(\mathbb{R}^n, d)$ con $d(x, y) = |x - y|^n$, es un espacio casi-métrico tomando $k = 2^n$.

Otros ejemplos clásicos son las casi-distancias de tipo parabólico inducidas por dilataciones no isotrópicas de $\mathbb{R}^n$, ver [CG].

Con $B_d(x, r)$ denotamos el conjunto $\{y \in X \,/\, d(y, x) < r\}$ que llamaremos d-bola de centro x y radio $r > 0$.

En un espacio casi-métrico (X, d) las d-bolas generan una topología en X a través de sistemas de entornos de cada punto. A diferencia de los espacios métricos en los que las bolas son conjuntos abiertos, las d-bolas de una casi-métrica pueden no ser abiertas con aquella topología.

Sin embargo, un resultado debido a Macías y Segovia [MS3], afirma que dada una casi-métrica d sobre un conjunto X, existen d' métrica y un número $\beta \geq 1$ tal que d y $(d')^\beta$ son equivalentes. Dicho resultado es una aplicación del lema de metrización de uniformidades de Frink, de aquí que en lo que respecta a las propiedades topológicas de los espacios casi-métricos, son las mismas que la de los espacios métricos.

En un espacio métrico, o más generalmente en un espacio casi-métrico pueden reconstruirse conceptos enteramente análogos a los desarrollados en la Sección 1.4, como medida y dimensión de Hausdorff. La única variante en la construcción es la dada por el hecho de que los diámetros se calculan con respecto a la casi-métrica.

1.7. Medidas que duplican y dimensión métrica en espacios casi-métricos

Presentamos en esta sección cuestiones básicas relacionadas a las medidas que duplican soportadas en subconjuntos de espacios casi-métricos.

Consideremos un espacio casi-métrico (X, d) y μ una medida positiva definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{F}$ que contiene a las d-bolas.

Diremos que μ duplica si y sólo si existe una constante A tal que las desigualdades $0 < \mu(B_d(x, 2r)) \leq A\mu(B_d(x, r)) < \infty$, se verifican para todo $x \in X$, y para todo $r > 0$.

La terna (X, d, μ) se llama espacio de tipo homogéneo.

Naturalmente $(\mathbb{R}^n, |.|, \lambda)$ es un espacio de tipo homogéneo con λ la medida de Lebesgue y $|.|$ la distancia euclídea.

Otros ejemplos de estos espacios surgen cuando en los borelianos de $\mathbb{R}^n$, se definen medidas a partir de los pesos pertenecientes a las clases Ap, $1 \leq p < \infty$, de Muckenhoupt, que veremos en la Sección 1.16. Trabajos relacionados con este tópico pueden verse en [A1], [A2], [AM], [CF], [MS3].

Nos interesa estudiar medidas duplicantes soportadas en un subconjunto del espacio casi-métrico (X, d), entendiendo por soporte de una medida μ, el menor subconjunto cerrado tal que en su complemento la medida es nula.

Si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo entonces los conjuntos de Borel están en $\mathcal{F}$. Esto se sigue del hecho que la existencia de una medida que duplica en (X, d) implica que (X, d) es separable y por lo tanto los abiertos son unión numerable de d-bolas que pertenecen a $\mathcal{F}$.

Notemos de paso que si en lugar de tomar d como nos viene dada usamos la casi-métrica $(d')^\beta$ de Macías y Segovia, con d' una distancia en X y $\beta \geq 1$, entonces podríamos haber definido espacio de tipo homogéneo, requiriendo que μ sea una medida de Borel que satisface la duplicación. Porque en esa situación las $(d')^\beta$-bolas serán abiertos y por lo tanto medibles.

Dado (X, d) un espacio casi-métrico y F un conjunto cerrado en X, diremos que μ definida en los borelianos de F duplica, si existe una constante positiva A tal que para todo $x \in F$ y $r > 0$, valen las desigualdades

$$0 < \mu(B_d(x, 2r) \cap F) \leq A\mu(B_d(x, r) \cap F) < \infty \tag{1.28}$$

o, equivalentemente, si (F, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo. En analogía con lo planteado en las Secciones 1.2 y 1.3, diremos que una medida μ definida en la σ-álgebra de Borel de un subconjunto F de (X, d), verifica la propiedad de duplicación inversa, si existen constantes $r_0 > 0$, $M > 1$ y $a > 1$, tales que para todo $x \in F$ y $r < r_0$ se verifica que

$$\mu(B_d(x, r) \cap F) \geq a\mu(B_d(x, \frac{r}{M}) \cap F) \tag{1.29}$$

La proposición siguiente es la análoga de la Proposición 1.2.2, la cual expresa una relación entre la propiedad de duplicación y la duplicación inversa cuando las coronas son distintas del vacío.

Proposición 1.7.1. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo para el cual existe $R_0 > 0$ tal que para todo*

$x \in X$ y para toda elección de r y r' con $0 < r < r' < R_0$ vale que $B_d(x, r') - B_d(x, r) \neq \emptyset$. Entonces μ verifica la duplicación inversa. Más aún, podemos tomar $M = k(1 + 4k^2)$, $a = 1 + A^{-\log M}$ y $r_0 = \dfrac{R_0}{4k^2}$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $r < r_0$, por hipótesis existe $y \in X$, tal que $2kr \leq d(x, y) < 4k^2 r$, con k la constante de la casi-métrica. Veamos que se verifican las siguientes relaciones:

i) $B_d(x, r) \cap B_d(y, r) = \emptyset$

ii) $B_d(x, r) \subset B_d(y, Mr)$ y $B_d(y, r) \subset B_d(x, Mr)$, con $M = k(1 + 4k^2)$

Afirmamos que i) se verifica, si así no fuera existiría $\xi \in B_d(x, r) \cap B_d(y, r)$ de lo que se obtendría que $d(x, y) \leq k[d(\xi, x) + d(\xi, y)] < 2kr$, que no puede ser ya que $2kr \leq d(x, y)$. Para probar ii) tomamos $z \in B_d(x, r)$, luego $d(z, y) \leq k[d(z, x) + d(x, y)] < rk[1 + 4k^2] = rM$. De igual forma se obtiene que $B_d(y, r) \subset B_d(x, Mr)$. De i) y ii) se obtiene que $\mu(B_d(x, Mr)) \geq \mu(B_d(x, r)) + \mu(B_d(y, r)) \geq \mu(B_d(x, r)) + A^{-\log M} \mu(B_d(x, r))$, de aquí que $\mu(B_d(x, Mr)) \geq (1 + A^{-\log M})\mu(B_d(x, r))$, con $1 + A^{-\log M} = a$. $\square$

Al igual que en el espacio euclidiano en un espacio casi-métrico se definen las propiedades "L_d" y "D_s" para una medida μ soportada en un conjunto F del espacio casi-métrico, de aquí que son válidas las relaciones establecidas entre estas propiedades y la dimensión del conjunto soporte de la medida, probadas en una sección anterior. En particular el Lema 1.5.1 se extiende naturalmente al contexto de los espacios casi-métricos.

A continuación introducimos un nombre para el caso de coincidencia entre d y s en estos conceptos. La denominación que adoptamos extiende la idea de normalidad introducida por Macías y Segovia [MS1] y será de utilidad en el Capítulo III.

Un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) es δ-normal, si existen cuatro constantes positivas y finitas A_1, A_2, K_1 y K_2, $K_2 \leq 1 \leq K_1$ tales que

$$A_1 r^\delta \leq \mu(B(x,r)) \text{ si } r^\delta \leq K_1 \mu(X) \tag{1.30}$$

$$B(x,r) = X \text{ si } r^\delta > K_1 \mu(X) \tag{1.31}$$

$$A_2 r^\delta \geq \mu(B(x,r)) \text{ si } r^\delta \geq K_2 \mu(\{x\}) \tag{1.32}$$

$$B(x,r) = \{x\} \text{ si } r^\delta < K_2 \mu(\{x\}) \tag{1.33}$$

Bajo estas condiciones, también nos referimos a la medida μ como δ-normal en (X, d). Notemos que cuando $\delta = 1$, es un espacio de tipo homogéneo normal en el cual la medida de una bola es proporcional al radio en el sentido de [MS1].

Los ejemplos y resultados que desarrollamos seguidamente, no sólo están dirigidos a mostrar distintos casos de medidas duplicantes sino también a preparar herramientas útiles para estudiar, en el Capítulo III, el problema de extensión de estas medidas.

Ejemplo 1.7.1. *Sea X_1 un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n_1 < n$. Para E boreliano de $\mathbb{R}^n$, se de-*

fine la medida de μ^α, como $\mu^\alpha(E) = \int_{E\cap X_1}(d(x,p))^\alpha\, d\mu_1$, donde μ_1 denota a la medida n_1-dimensional de Lebesgue y $d(x,p)$, representa la distancia usual del punto x a p, con $p \in X_1$. Afirmamos que μ^α duplica en X_1 si $\alpha > -n_1$. En otros términos (X_1, d, μ^α) es un espacio de tipo homogéneo.

Por simplicidad supongamos que p es el origen de coordenadas. Probaremos que $\mu(B(x_0,r)) \leq c\mu(B(x_0,r/2))$ para todo $x_0 \in X_1$ y $r > 0$. Consideremos los siguientes casos:

Si $|x_0| \leq 4r$, notemos que $B(x_0,r) \subset B(0,5r)$, de aquí que

$$\begin{aligned}\mu(B(x_0,r)) = \int_{B(x_0,r)\cap X_1} |x|^\alpha\, d\mu_1 \\ \leq \textstyle\int_{B(0,5r)\cap X_1} |x|^\alpha\, d\mu_1 \\ = c_1 r^{\alpha+n_1}. \quad (1.34)\end{aligned}$$

Notar que como $\alpha > -n_1$, $|x|^\alpha$ es localmente integrable. Por otra parte, si $\alpha > 0$,puesto que la potencia α es una función creciente,

$$\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} |x|^\alpha\, d\mu_1 \geq \int_{B(0,r/2)\cap X_1} |x|^\alpha\, d\mu_1 = c_2 r^{\alpha+n_1}. \tag{1.35}$$

Si $-n_1 < \alpha < 0$, $|x|^\alpha$ es una función radialmente decreciente, por lo que se obtiene que

$$\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} |x|^\alpha\, d\mu_1 \tag{1.36}$$

$$\geq (|x_0| + \frac{r}{2})^\alpha r^{n_1} \geq c_2' r^{\alpha+n_1}. \tag{1.37}$$

De (1.34), (1.35) y (1.37), vale entonces que $\dfrac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,r/2))} \leq C$, para todo $r > 0$ y $\alpha > -n_1$.

Analizamos ahora la duplicación de μ^α para el caso en que $|x_0| > 4r$. Observemos previamente que para todo $x \in B(x_0,r) \cap X_1$, vale que

$$|x_0| \leq |x_0 - x| + |x| < r + |x| < \frac{|x_0|}{4} + |x|,$$

de aquí que $\frac{3}{4}|x_0| < |x|$. También $|x| \leq |x_0| + |x - x_0| < |x_0| + r < \frac{5}{4}|x_0|$, por lo tanto $|x| \leq \frac{5}{4}|x_0|$.

Utilizando las desigualdades anteriores se obtiene para $\alpha > -n_1$, que

$$\frac{\int_{B(x_0,r)\cap X_1} |x|^\alpha \, d\mu_1}{\int_{B(x_0,\frac{r}{2})\cap X_1} |x|^\alpha \, d\mu_1} \leq \frac{C_1|x_0|^\alpha \mu_1\left(B(x_0,r)\right)}{C_2|x_0|^\alpha \mu_2\left(B(x_0,r/2)\right)} \leq C, \text{ para todo } r > 0.$$

En el siguiente ejemplo se generaliza a un espacio métrico la situación del Ejemplo 1.7.1, siendo μ una medida δ-normal.

Ejemplo 1.7.2. *Sea (X,d) un espacio métrico y μ_1 una medida positiva definida en los borelianos de X. Supongamos que (X,d,μ) es δ-normal, no atómico y no acotado. Entonces la medida $\mu^\alpha(E) = \int_E (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1$, $p \in X$ y E boreliano de X, duplica si $\alpha > -\delta$.*

Veamos primero que $\mu^\alpha(B(p,r)) \simeq r^{\alpha+\delta}$, para todo $r > 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}\mu^\alpha(B(p,r)) &= \int_{B(p,r)} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\{rA^{-j-1} \leq d(x,p) < rA^{-j}\}} (d(x,p))^\alpha \, d\mu(x)\end{aligned}$$

donde A es una constante mayor que uno que fijaremos en un momento. Estimemos superior e inferiormente el término general de la última serie. En el dominio de integración, $d(x,p) \simeq rA^{-j}$, por consiguiente el integrando $(d(x,p))^\alpha \simeq r^\alpha A^{-\alpha j}$. Así el término general de esa serie es del orden de

$$\begin{aligned}r^\alpha A^{-\alpha j}\mu(\{x : rA^{-j-1} \leq d(x,p) < rA^{-j}\}) = r^\alpha A^{-\alpha j}[\mu(B(p, rA^{-j})) - \\ - \mu(B(p, rA^{-j-1})].\end{aligned}$$

Por la normalidad y dado que el espacio es no atómico y no acotado, entonces

$$A_1[rA^{-j}]^\delta \leq \mu(B(p, rA^{-j})) \leq A_2[rA^{-j}]^\delta$$

y

$$A_2[rA^{-j-1}]^\delta \geq \mu(B(p, rA^{-j-1})) \geq A_1[rA^{-j-1}]^\delta$$

restando término a término tenemos que

$$(A_1 - \frac{A_2}{A^\delta})[rA^{-j}]^\delta \leq \mu(B(p, rA^{-j})) - \mu(B(p, rA^{-j-1})) \leq$$

$$\leq (A_2 - \frac{A_1}{A^\delta})[rA^{-j}]^\delta.$$

Si elegimos A mayor que uno, adecuado tenemos que el término general de aquella serie es del orden de

$$r^{\alpha}A^{-\alpha j}[rA^{-j}]^{\delta} = r^{(\alpha+\delta)}A^{-(\alpha+\delta)j}.$$

Así,

$$\mu^{\alpha}(B(p,r)) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} r^{(\alpha+\delta)}A^{-(\alpha+\delta)j} \simeq r^{\alpha+\delta}.$$

Probemos que μ^{α} duplica. Sean $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $d(x_0,p) \leq 4r$. Entonces $B(p,\frac{r}{2}) \subset B(x_0,5r) \subset B(p,9r)$. Por lo que es directo que

$$\frac{\mu^{\alpha}(B(x_0,r))}{\mu^{\alpha}(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq C.$$

Consideremos ahora $x_0 \in X$ y $r > 0$, tales que $d(x_0,p) > 4r$. Observemos que para todo $x \in B(x_0,r) \cap X_1$

$$d(x,p) \leq d(x,x_0) + d(x_0,p) \leq \frac{5}{4}d(x_0,p) \tag{1.38}$$

y $d(x_0,p) \leq d(x,x_0) + d(x,p) \leq r + d(x,p)$, entonces

$$d(x_0,p) - r \leq d(x,p) \text{ por lo que } \frac{3}{4}d(x_0,p) \leq d(x,p) \tag{1.39}$$

(1.38) y (1.39) vale que

$$d(x_0,p) \simeq d(x,p) \tag{1.40}$$

por lo tanto utilizando (1.40), se obtiene que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{\int_{B(x_0,r)}(d(x_0,p))^{\alpha}d\mu}{\int_{B(x_0,\frac{r}{2})}(d(x,p))^{\alpha}d\mu} \leq C.$$

De acuerdo a las exploraciones llevadas a cabo en la Sección 1.5, las condiciones "D_s" y "L_d" pueden reformularse como tipo inferior s uniforme y tipo inferior d uniforme local para la familia $\varphi_x(r) = \mu(B(x,r))$. La familia de funciones como las obtenidas en los ejemplos de la Sección 1.3, nos sugieren el siguiente lema.

Lema 1.7.1. *Sean d_1 y d_2 números reales positivos con $d_1 \leq d_2$ y $\{\eta_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+\}$, la familia de funciones crecientes de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ definida por*

$$\eta_\alpha(r) = \begin{cases} \alpha^{d_2-d_1} r^{d_1} & si\ 0 < r \leq \alpha \\ \\ r^{d_2} & si\ \alpha < r < \infty \end{cases} \tag{1.41}$$

es de tipo superior d_2 e inferior d_1 uniformemente en $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Notar que $\eta_\alpha(r)$ puede reescribirse como $\alpha^{d_2}\eta_1(\frac{r}{\alpha})$. Notemos que también los tipos uniformes de la familia $\{n_\alpha\}$ serán coincidentes con los tipos de η_1. En efecto, s es un tipo superior para η_1 si y solo si $\eta_1(kt) \leq Ck^s\eta_1(t)$ para $h \geq 1$ y $t > 0$. Esta desigualdad es equivalente a

$$\alpha^{d_2}\eta_1\left(k\frac{r}{\alpha}\right) \leq Ck^s\alpha^{d_2}\eta_1\left(\frac{r}{\alpha}\right)$$

o también

$$\eta_\alpha(kr) \leq ck^s\eta_\alpha(r),$$

que es el tipo superior s uniforme para la familia $\{\eta_\alpha\}$. Veamos, entonces, que η_1 es de tipo superior d_2 e inferior d_1.

Sean $k > 1$, $t > 0$, entonces si $kt \leq 1$,

$$\eta_1(kt) = k^{d_1}\eta_1(t) = k^{d_1}(t)^{d_1} \leq k^{d_2}\eta_1(t) \qquad (1.42)$$

$kt > 1$ y $t < 1$ entonces

$$\eta_1(kt) = k^{d_2}t^{d_2} \leq k^{d_2}t^{d_1} = k^{d_2}\eta_1(t)$$

y claramente vale que si $kt > 1$ y $t > 1$, $\eta_1(kt) = k^{d_2}(t^) d_2 = k^{d_2}\eta_1(t)$, por lo que se verifica que

$$\eta_1(k\frac{r}{\alpha}) \leq k^{d_2}\eta_1\left(\frac{r}{\alpha}\right) \qquad (1.43)$$

lo que prueba que η_1 es de tipo superior d_2. Similarmente se prueba que η_2 es de tipo inferior d_1. □

Lema 1.7.2. *Si $\{\eta_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de funciones uniformemente de tipo superior finito β y $\{\tilde{\eta}_\alpha : \alpha \in A\}$ es otra familia de funciones equivalente a la familia $\{\eta_\alpha : \alpha \in A\}$ en el sentido que existen constantes C_1 y C_2 que verifican $C_1\tilde{\eta}_\alpha(r) \leq \eta_\alpha(r) \leq C_2\tilde{\eta}_\alpha(r)$, para todo $r > 0$ y para todo $\alpha \in A$, entonces $\{\tilde{\eta}_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de funciones uniformemente de tipo superior finito β.*

Demostración. Dado $k > 1$, observar que por la hipótesis, para cada $\alpha \in A$ se verifica que

$$\tilde{\eta}_\alpha(kr) \leq \frac{1}{C_1}\eta_\alpha(kr) \leq \frac{C_2}{C_1}k^\beta\eta_\alpha(r) \leq Ck^\beta\tilde{\eta}_\alpha(r).$$

□

Observemos, finalmente que es posible que $\eta_1(r) \leq \eta_2(r)$, $\forall r > 0$ y que el tipo superior de η_2 sea finito y el de η_1, no. También es posible que η_1 tenga tipo inferior mayor que cero pero que η_2 tenga tipo inferior cero.

Para ello consideremos la función η definida como sigue. Sean $x_1 = 1/2$ y $x_n = x_{n-1}^2/2$ para $n > 1$. Si $x \in [x_n^2, x_n]$, $\eta(x)$ es constante con valor x_n^2, $\eta(0) = 0$ y en los intervalos restantes η se obtiene por interpolación lineal de manera que resulte monótona no decreciente.

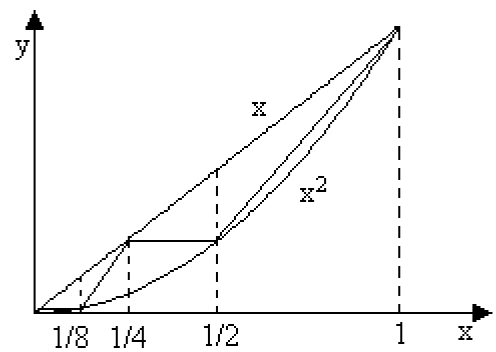


Figura 1.7.1

Por la construcción efectuada, claramente η resulta creciente en $[0, 1]$. Veamos que no tiene tipo superior finito aún siendo $\eta(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [0, 1]$.

Observemos previamente que por definición de x_n, $n \geq 1$ éste puede expresarse como $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{16} \cdots \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$. De aquí que

$$\frac{\eta(2x_n)}{\eta(x_n)} = \frac{\eta(x_{n-1}^2)}{\eta(x_n)} = \frac{x_{n-1}^2}{x_n^2} \tag{1.44}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2^{2^{n-2}}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2^{2^{n-1}}}} \right)^2 \tag{1.45}$$

que no está acotado cuando n tiende a infinito.

Lema 1.7.3. *Sea (X, d) un espacio casi-métrico y μ una medida de Borel positiva en X. Sea $\varphi_x(r) = \mu(B(x, r))$. Sea $Y \subset X$, tal que existen constantes $0 < d_1 \leq d_2 < \infty$ y una función $\alpha : Y \to \mathbb{R}^+$ tal que $\{\varphi_x : x \in Y\}$ es equivalente a $\{\eta_{\alpha(x)} : x \in Y\}$ definida como en el Lema 1.7.1. Supongamos además que $\{\varphi_x : x \in X \setminus Y\}$ es equivalente a la familia constituida por el único elemento $\eta_0(t) = t^{d_2}$. Entonces (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo.*

En 1972 Coifman y Weiss ([CW]) demuestran que la existencia de una medida que duplica en un espacio casi-métrico implica una forma cuantitativa de la propiedad de acotación total de los conjuntos acotados que pemitirá después a Assouad (1988) definir un concepto de dimensión métrica.

Veamos a continuación los siguientes definiciones

Sea (X, d) un espacio casi-métrico con constante k. Un subconjunto A de X es un ϵ-disperso, para alguna constante positiva ϵ, si $d(x, y) \geq \epsilon$, para todo x e y que pertenecen a A, $x \neq y$.

Diremos que el espacio (X, d) tiene dimensión métrica finita, si existe una constante $N \in$, tal que para $x \in X$ y todo $r > 0$, todo subconjunto $\frac{r}{2}$- disperso de $B(x, r)$ continiene a lo más N puntos.

Lema 1.7.4. *Sea (X, d) espacio casi-métrico con dimensión métrica finita entonces existen $C \geq 1$ y $s \geq 0$ que* *dependen de N tal que si $x \in X$, $r > 0$ y $\lambda \geq 1$ entonces la d-bola $B_d(x, \lambda r)$ contiene a lo más $C\lambda^s$ puntos de un subconjunto r-disperso de X cualquiera.*

Demostración. Dado $\lambda > 1$, existe $k \in$ tal que $2^k < \lambda \leq 2^{k+1}$.

Para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$ se tiene que $B(x, \lambda r) \subseteq B(x, 2^{k+1}r)$. Sea A un conjunto r-disperso en X. Entonces $\sharp(B(x, \lambda r) \cap A) \leq \sharp(B(x, 2^{k+1}r) \cap A)$. Para estimar este último número construímos una sucesión de cubrimientos de $B(x, 2^{k+1}r)$ con el siguiente procedimiento. Sea A_k un subconjunto $2^k r$ disperso maximal en $B(x, 2^{k+1}r)$, $\sharp(A_k) \leq N$. Para cada $y_k^j \in A_k$, construímos un conjunto A_{k-1}^j, $2^{k-1}r$ disperso maximal en $B(y_k^j, 2^k r$, $\sharp(Ak - 1^j) \leq N$ y $\sharp\left(\bigcup_j A_{k-1}^j\right) \leq N^2$. Denotamos con A_{k-1} a la unión en j de los A_{k-1}^j y repetimos el procedimiento construyendo un conjunto $2^{k-2}r$ disperso maximal A_{k-2}^l en cada $B(z_{k-1}^l, 2^{k-1}r)$ para todo $z_{k-1}^l \in A_{k-1}$. Si $A_{k-2} = \bigcup_l A_{k-2}^l$ tendremos que $\sharp(A_{k-2}) \leq N^3$. Finalmente $B(x, 2^{k+1}r)$ estará cubierto por (no más de) N^k bolas de radio $2r$. Como A es r-disperso, en cada una de ellas no habrá más de N puntos de A, con lo que

$$\sharp\left(B(x, 2^{k+1}r) \cap A\right) \leq N^{k+1} \leq N\lambda^s,$$

con $s = \log_2 N$. □

El ínfimo de los números s para los cuales se cumple la conclusión del Lema 1.7.4 se denota por $dim_A X$ y se llama dimensión métrica del espacio X o también dimensión de Assouad de X, ([LS]).

El siguiente teorema debido a Coifman y Weiss ([CW]) prueba que si existe una medida que duplica definida en (X, d), éste tiene dimensión métrica finita.

Teorema 1.7.1. *Sea* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo, entonces el espacio casi-métrico* (X, d) *tiene dimensión métrica finita.*

Demostración. Sea A un conjunto $\frac{r}{2}$-disperso y sean $\{x_1, \cdots, x_M\}$, con $M \leq N$ los puntos de A en $B_d(x, r)$. Las d-bolas $B_d(x_i, \frac{r}{4k})$ son disjuntas y estan incluídas en las d-bolas $B_d(x, R)$, con $R = r(k + \frac{1}{4})$. En efecto, si existe $y \in B_d(x_i, \frac{r}{4k}) \cap B_d(x_j, \frac{r}{4k})$ entonces $d(x_i, x_j) \leq k(d(x, y) + d(x_j, y)) < \frac{r}{2}$ en contra de lo supuesto. Sea $y \in B_d(x_i, \frac{r}{4k})$, entonces

$$d(x, y) \leq k[d(x_i, x) + d(x_i, y)] \leq k[\frac{r}{4k} + r] = r[\frac{1}{4} + k],$$

de lo que se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(B_d(x_i, \frac{r}{4k})) \leq \mu(B_d(x, R)). \tag{1.46}$$

Veamos que $\mu(B_d(x_i, \frac{r}{4k}))$ está acotada inferiormente por un múltiplo fijo de $\mu(B_d(x, R))$, lo que nos permitirá obtener el resultado.

Veamos que $B_d(x,R) \subset B_d(x_i,R')$, con $R' = k(k+\frac{5}{4})r$. Sea $y \in B(x,R)$ entonces $d(y,x_i) \leq k[k+r] = k(k+\frac{5}{4})r$, de aquí que

$$\mu(B_d(x,R)) \leq \mu(B_d(x_i,R')). \tag{1.47}$$

Dado que μ duplica y por (1.47), vale que para todo j

$$\mu(B_d(x,R)) \leq \mu(B_d(x_j,R')) \leq C\mu(B_d(x_j,\frac{r}{4k})),$$

siendo $C = A^{\log_2[k^2(4k+9)]}$. De (1.46) y la última desigualdad se obtiene que

$$N\mu(B_d(x,R)) \leq C\sum_{i=1}^{N}\mu(B_d(x_i,\frac{r}{4k})) \leq C\mu(B_d(x,R)),$$

de donde $N \leq C$.

$\square$

Finalmente, veremos una extensión al contexto de los espacios casi-métricos con dimensión métrica finita del Lema de Wiener. Este lema servirá de base para la obtención de cubrimientos de tipo Whitney en estos espacios, como se mostrará en la Sección 1.11. La demostración del siguiente lema es esencialmente la de Coifman y Weiss, ver [CW].

Lema 1.7.5. *Sea (X,d) un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita y $E \subset X$ un conjunto acotado. Sea $\{B(x,r(x)) : x \in E\}$ un cubrimiento de E, por bolas centradas en los puntos de E. Entonces existe una sucesión de puntos $\{x_i\} \subset E$ tal que*

$$B(x_i, r(x_i)) \cap B(x_j, r(x_j)) = \emptyset, \quad si \quad i \neq j \quad y \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 4kr(x_i)).$$

.

Demostración. Suponemos que $\sup\{r(x) : x \in E\} < \infty$, si no fuera así, entonces basta una bola de la familia para cubrir E. Sea $E_1 = E$. Elegimos $x_1 \in E_1$ tal que $r_1 = r(x_1) > \frac{1}{2}\sup_{E_1} r(x)$ y llamamos

$$B_1 = B(x_1, r_1) \quad \text{y} \quad \tilde{B}_1 = B(x_1, 4kr_1).$$

Sea $E_2 = E_1 - \tilde{B}_1$. Elegimos $x_2 \in E_2 : r_2 = r(x_2) > \dfrac{1}{2} \sup\limits_{x \in E_2} r(x)$, de aquí que

$$2r_1 > \sup_{E_1} r(x) \geq \sup_{E_2} \geq r_2.$$

Llamamos $B_2 = B(x_2, r_2)$ y $\tilde{B}_2 = B(x_2, 4kr_2)$, continuamos el procedimiento en forma inductiva, definimos $E_{n+1} = E_n - \tilde{B}_n$ y seleccionamos $x_{n+1} \in E_{n+1}$, si es $E_{n+1} \neq \emptyset$, tal que

$$r_{n+1} = r(x_{n+1}) > \frac{1}{2} \sup_{E_{n+1}} r(x), \quad 2r_i > r_{n+1} \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n$$

y

$$B_{n+1} = B(x_{n+1}, r_{n+1}), \quad \tilde{B}_{n+1} = B(x_{n+1}, 4kr_{n+1}).$$

Veamos que $B_i \cap B_n = \emptyset$, para $i < n$. Suponemos que $B_i \cap B_n \neq \emptyset$ y sea ξ un punto de la intersección, entonces

$$d(x_i, x_n) \leq k(d(x_i, \xi)+d(x_n, \xi)) < k(r_i+r_n) < k(r_i+2r_i) = 3kr_i,$$

de lo que se obtiene que $x_n \in \tilde{B}_i$ y como $i < n, x_n \notin E_n$, lo que contradice la selección de x_n.

Veamos que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n$. Si el proceso de selección fuese finito tendríamos que para alguna etapa k, el conjunto E_k sería vacío y esto diría que $E \subset \bigcup_{n=1}^{k} \tilde{B}_n$. Supongamos que el proceso es infinito, entonces $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Si no fuera así, existiría un número real $\epsilon > 0$ tal que para alguna subsucesión r_{n_k} de r_n, tendríamos $r_{n_k} > \epsilon$. Dado que las bolas B_{n_k} son disjuntas dos a dos, necesariamente debe ser que $d(x_{n_k}, x_{n_j}) > \epsilon$, para $k \neq j$, lo cual no puede ocurrir por el Lema 1.7.4. Sea $x \in E, r(x) > 0$. Como $r_n \to 0$, para $n \to \infty$, tendremos que para todo $n > n_0$ será $r_n < \frac{1}{2}r(x)$. Además, como $\frac{1}{2}\sup_{E_n} r(x) < r_n < \frac{1}{2}r(x)$, tendremos que $x \notin E_n$ y por consiguiente, $x \in \tilde{B}_k$, para algún $k \leq n$, lo que concluye la demostración. □

Una variante del teorema anterior es la que se obtiene en el siguiente resultado debido a Aimar (ver [A1]) en el que se debilita la hipótesis de acotación de E.

Lema 1.7.6. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sean $\mathcal{B} = \{B_\alpha, \alpha \in \mathcal{F}\}$ una familia de bolas en X, tal que $E = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}} B_\alpha$ es medible y de medida finita. Entonces* *existe una sucesión* $\{B_i\} = \{B(x_i, r_i)\} \subset B$*, posiblemente finita, tal que las bolas* B_i *son disjuntas y para alguna constante* C *(que solo depende de la constante* k *de la casi-métrica) se tiene que* $E \subset \bigcup B(x_i, Cr_i)$*. Más aún, toda* $B \in \mathcal{B}$ *queda incluida en alguna de las* $B(x_i, Cr_i)$*.*

Otra forma de cubrimiento de Wiener pero más débil que admite una condición de "solapamiento acotado" en lugar de "bolas disjuntas" puede obtenerse debilitando la hipótesis de acotación del conjunto a cubrir si se tiene una función acotada para el radio de las bolas.

Lema 1.7.7. *Sea* (X, d) *un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita y* $\emptyset \neq E \subsetneq X$*. Sea* $r : E \to \mathbb{R}^+$ *una función acotada dada. Entonces existe una sucesión de puntos* $\{x_i\} \subseteq E$ *tal que*

i) $\displaystyle\sum_n \mathcal{X}_{B(x_n, r(x_n))}(x) \leq 2$

ii) $E \subset \displaystyle\bigcup_n B(x_n, 4Kr(x_n))$*;* K*, es la constante de la casimétrica.*

Demostración. Sean $x_0 \in E$, $\Delta > 1$, $j \in$ y definimos

$$E_j = E \cap \left[(B(x_0, \Delta^{j+1}A) - B(x_0, \Delta^j A)\right]$$

donde A es una cota superior para la función r, y $E_0 = E \cap B(x_0, \Delta A)$. Consideremos la restricción de r a E esto es $r : E_j \to \mathbb{R}^+$. La familia $\{B(x, r(x)), x \in E_j\}$ es un cubrimiento de E_j, para $j \in_0$; y dado que para todo j, E_j es acotado se puede aplicar el lema 1.7.5 a las bolas de dicho cubrimiento, por lo que se obtiene una sucesión $\{x_i^j\} \subset E_j$, tal que las bolas de la familia $\mathcal{F}_j = \{B(x_i^j, r(x_i^j)\}$ verifican:

a) son disjuntas dos a dos.

b) Sus dilatadas por $4K$, cubren a E_j, más precisamente,

$$\bigcup \left(B(x_i^j, 4Kr(x_i^j) \right) \supset E_j.$$

Probaremos que $\mathcal{F} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_|$ satisface las propiedades i) y ii). Dado que $\cup_{j=0}^{\infty} = E$ y utilizando b) fácilmente se obtiene ii). Con el objeto de probar i) veamos que si $|l-j| \geq 2$, entonces ninguna bola de la familia $\mathcal{F}_l$ corta a ninguna bola de la familia $\mathcal{F}_j$; pues en caso contrario existiría un punto y en $B(x_i^j, r_i^j) \cap B(x_m^l, r_m^l)$ para algún par de índices i y m. Entonces suponiendo que $l \geq j+2$, vale que $d(x_i^j, x_m^l) \leq K[d(x_i^j, y) + d(y, x_m^l)] < 2KA$. Por consiguiente $\Delta^l A \leq d(x_0, x_m^l) \leq K[d(x_i^j, x_0) + d(x_i^j, x_m^l)] \leq K[d(x_i^j, x_o) + 2Ka] \leq K[\Delta^{j+1}A + 2KA]$, que es imposible si $\Delta > 3K^2$; lo que prueba la afirmación.

Veamos ahora que si $x \in E$, éste no puede pertenecer a más de dos bolas de la familia $\mathcal{F}$. Si $x \in B(x_i^j, r(x_i^j))$ no puede estar en ninguna otra bola de la misma familia $\mathcal{F}_j$. Pero dado que las bolas de la familia $\mathcal{F}_j$ son disjuntas con las bolas de la familia $\mathcal{F}_l$ con $|l-j| \geq 2$, puede ocurrir que x pertenezca sólo a una bola de la familia $\mathcal{F}_l$ con $|l-j| = 1$,, de aquí que $\displaystyle\sum_n \chi_{B(x,r(x_n))}(x) \leq 2$. $\square$

1.8. Medidas que duplican en $\mathbb{R}^n$ y la clase de los cubos diádicos

La familia de todos los cubos de $\mathbb{R}^n$, tiene el cardinal del continuo, puesto que tiene $n+1$ grados de libertad en $\mathbb{R}$. Esto hace, a veces difícil verificar la propiedad de duplicación de una medida. Nos preguntamos si el conocimiento de la propiedad de duplicación en alguna subfamilia más chica de cubos de $\mathbb{R}^n$, es suficiente para la validez de la duplicación para todos los cubos. Parece evidente que en una tal subfamilia, todas las escalas y todas las localizaciones en el espacio deberían estar bién representadas. Pero, como se sabe de la teoría de pesos (ver Sección 1.17), la pertenencia a A_p sobre diádicos no implica que el peso en cuestión esté en las clases de Muckenhoupt. Exploraremos aquí brevemente dos conceptos de duplicación diádica esencialmente diferentes. Uno, que será útil para nosotros, será coincidente con la duplicación, el otro será más bien la duplicación que heredan los pesos de las clases de A_p diádicas.

Para desarrollar los conceptos mencionados necesitamos conocer cuestiones básicas relacionadas a los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$, para lo cual caracterizaremos previamente a los intervalos diádicos de $\mathbb{R}$.

Sea el conjunto de los números enteros y $\mathcal{D}_j = \{I_j^k = [2^j k, 2^j(k+1)] : k \in\}$, $j \in$. El intervalo $I_j^k = [2^j k, 2^j(k+1)]$, $k \in$, $j \in$, representa a un intervalo diádico de longitud 2^j o de nivel j. Con $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in} \mathcal{D}_j$ denotamos al conjunto de todos los intervalos diádicos de $\mathbb{R}$.

Enunciamos a continuación algunas de las propiedades básicas, de estos intervalos.

a) $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in} I_j^k$, para todo j;

b) $\overset{\circ}{I_j^k} \cap \overset{\circ}{I_j^l} = \emptyset$ si $k \neq l$, donde $\overset{\circ}{A}$ denota el interior de A;

c) todo intervalo I_j^k del nivel j se escribe como unión de dos intervalos de nivel $j-1$, esto es: $I_j^k = I_{j-1}^{2k} \cup I_{j-1}^{2k+1}$, en esta situación diremos que I_{j-1}^{2k} e I_{j-1}^{2k+1} son hijos de I_j^k o que I_j^k es el padre de I_{j-1}^{2k} e I_{j-1}^{2k+1};

d) si $I,\ J \in \mathcal{D}$, $\overset{\circ}{I} \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$ entonces vale alguna de las inclusiones: $I \subset J$ o $I \supset J$.

Los intervalos diádicos heredan el orden parcial que la inclusión determina sobre las partes de $\mathbb{R}$ y así una subfamilia A de $\mathcal{D}$ tiene a $I \in \mathcal{D}$ por elemento maximal si $I \in A$ y ningún predecesor de I pertenece a $\mathcal{A}$, I es predecesor de I si $J \supsetneq I$.

Sea (α, β) un intervalo y sea $\mathcal{A} = \{I \in \mathcal{D} \ / \ I \subset (\alpha, \beta)\}$. Entonces toda cadena ascendente en $\mathcal{A}$ está superiormente acotada. Por consiguiente $\mathcal{A}$ tiene elementos maximales. Denotemos con $\mathcal{M} = \{I \in \mathcal{D} : I \text{ es maximal de } \mathcal{A}\}$. Es claro que $(\alpha, \beta) = \bigcup_{I\in\mathcal{M}} I$. Más aún, si consideramos el conjunto de los niveles que participan en $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{J} = \{j \in : 2^j = l(I) \text{ para algún } I \in \mathcal{M}\}$$

entonces $\mathcal{J}$ está superiormente acotado. Sea j_0 el máximo de $\mathcal{J}$. Observemos, que no puede haber más de dos intervalos de $\mathcal{M}$ del nivel j_0, porque en caso contrario, dado que éstos son adyacentes, reuniendo algún par encontraríamos una contradicción a la maximalidad supuesta. Hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 1.8.1. *Sea (α, β) un intervalo acotado en $\mathbb{R}$ y sea $j_0 = \max\{j \in: 2^j = l(I),$ con $I \subset (\alpha, \beta),\ I \in \mathcal{D}\}$. Entonces existe al menos un cubo diádico de nivel j_0, contenido en (α, β) y no más de dos de ellos.*

Lema 1.8.1. *Sea (α, β) un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, entonces existen cuatro intervalos diádicos del mismo nivel $\{I_i, i = 1, 2, 3, 4\}$ tales que $(\alpha, \beta) \subset \bigcup_{i=1}^{4} I_i$.*

Demostración. Por la proposición anterior puede ocurrir que exista sólo un I_j^k diádico de nivel máximo j_0 o que existan $I_{j_0}^k$ e $I_{j_0}^{k+1}$ de nivel máximo j_0 incluídos en (α, β). Si ocurre la primera de las posibilidades $I_{j_0}^{k-1}$ e $I_{j_0}^{k+1}$ son intervalos diádicos del mismo nivel tales que $(\alpha, \beta) \subset \bigcup_{i=-1}^{1} I_{j_0}^{k+i}$; si no fuera así, uno de los dos conjuntos $I_{j_0}^{k-1} \cup I_{j_0}^k$ ó $I_{j_0}^k \cup I_{j_0}^{k+1}$ sería el padre de $I_{j_0}^k$ incluido en (α, β), lo que contradice la maximalidad de $I_{j_0}^k$.

Si existen $I_{j_0}^k$ e $I_{j_0}^{k+1}$ de nivel máximo j_0, incluídos en (α, β), entonces con los intervalos diádicos $I_{j_0}^{k-1}$ e $I_{j_0}^{k+2}$ tenemos que $(\alpha, \beta) \subset \bigcup_{i=-1}^{2} I_{j_0}^{k+i}$. □

Sea ^{n} el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ cuyas n-coordenadas son enteras y $\mathcal{D}_j^n = \{\prod\limits_{i=1}^{n} I_j^{k_i},\ k_i \in\}$. Denotamos con $Q_j^k = \prod_{i=1}^n I_j^{k_i}$, $k = (k_1, k_2, \cdots k_n) \in^n$, $j \in$, donde de acuerdo a la notación utilizada para los intervalos diádicos de $\mathbb{R}$, $I_j^{k_i} = 2^j[k_i, k_i + 1]$, $j \in$, $k_i \in$.

El cubo Q_j^k representa a un cubo diádico de $\mathbb{R}^n$ de lado 2^j y vértice $k = (k_1, k_2, \cdots k_n)$. Es claro entonces que $\mathcal{D}^n = \bigcup\limits_{j\in} \mathcal{D}_j^n$, es el conjunto de todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$.

Enunciamos a continuación los análogos n-dimensionales de las propiedades expuestas antes, para los intervalos diádicos de $\mathbb{R}$.

a) $\bigcup\limits_{k\in^n} Q_j^k = \mathbb{R}^n$, para todo j;

b) $\overset{\circ}{Q}{}_j^k \cap \overset{\circ}{Q}{}_j^l = \emptyset$ si $k \neq l$, $k, l \in^n$;

c) todo cubo diádico Q de $\mathbb{R}^n$, de nivel j genera 2^n cubos diádicos de nivel $j-1$, por bisección de sus lados. Diremos que cada uno de estos cubos de nivel $j-1$ es hijo de Q o que Q es el padre de los de nivel $j-1$, que generó;

d) si Q y $R \in \mathcal{D}^n$, $\overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{R} \neq \emptyset$, entonces vale alguna de las siguientes inclusiones: $Q \subset R$ ó $R \subset Q$.

El siguiente lema generaliza al Lema 1.8.1.

Observemos antes que el mismo argumento utilizado en la demostración de la Proposición 1.8.1 nos asegura que existe $j_0(S) = \text{máx}\{j \in: 2^j = l(Q)$, con Q diádico y $Q \subset S\}$, siendo S un cubo cualquiera de $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.8.2. *Todo cubo S de $\mathbb{R}^n$, está contenido en 4^n cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$ del nivel j_0 y contiene por lo menos a uno de ellos.*

Demostración. Ya hemos observado que dado un cubo S de $\mathbb{R}^n$, existe un cubo diádico maximal Q, de nivel j_0 máximo tal que $Q \subset S$. Veamos que con 4^n cubos diádicos de nivel j_0 podemos cubrir a S.

Consideremos la proyección $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\pi_i(x_1, \cdots x_n) = x_i$, y sean $\pi_i(S) = (\alpha_i, \beta_i)$ y $\pi_i(Q) = I_i$. Observar que $I_i \in \mathcal{D}_{j_0}$. Por la Proposición 1.8.1 y el Lema 1.8.1, existe a lo sumo otro intervalo $I_i' \in \mathcal{D}_{j_0}$ tal que $I_i' \cup I_i \subset (\alpha_i, \beta_i)$ y existen diádicos $I_i'' e I_i'''$ también del mismo nivel j_0, tal que $(\alpha_i, \beta_i) \subset I_i \cup I_i' \cup I_i'' \cup I_i'''$ de aquí que $\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i, \beta_i) = S$, queda contenido en 4^n cubos diádicos de nivel j_0.

□

Lema 1.8.3. *Si S_1 y S_2 son dos cubos en $\mathbb{R}^n$ con el mismo lado, entonces $j_0(S_1) \leq j_0(S_2) + 1$.*

Dados dos cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$ del mismo nivel, diremos que son adyacentes si tienen un lado o un vértice en común. Es claro que si μ es una medida que duplica en los Borelianos de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una constante $c > 0$ tal que para toda elección de cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$, Q_k y Q_j del mismo nivel y adyacentes se verifica que

$$0 < \mu(Q_k) \leq c\mu(Q_j) < \infty. \tag{1.48}$$

En efecto: sean Q_1 y Q_2 diádicos adyacentes del mismo nivel y consideremos $\tilde{Q}_2 = 3Q_2$, entonces $Q_1 \subset \tilde{Q}_2$. De aquí que $\mu(Q_1) \leq \mu(\tilde{Q}_2) \leq c\mu(Q_2)$, donde la constante c, es la constante de la medida μ correspondiente a la triplicación del radio.

La siguiente proposición establece la equivalencia entre (1.48) y la duplicación.

Proposición 1.8.2. *Sea μ definida sobre los borelianos de $\mathbb{R}^n$. Entonces μ verifica* (1.48) *si y solo si μ duplica.*

Demostración. Para probar que 1.48 implica la duplicación para μ haremos uso de la proposición 1.2.3. Sean Q y $\tilde{Q}$ cubos de $\mathbb{R}^n$ con lados de igual longitud tales que $Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset$.Por aplicación del Lema 1.8.2 tenemos que Q y $\tilde{Q}$ están cubiertos por 4^n cubos diádicos de niveles $j_0(Q)$ y $j_0(\tilde{Q})$, respectivamente. Supongamos que $j_0(Q) \geq j_0(\tilde{Q})$. Sabemos también por el lema 1.8.2 que al menos uno de los cubos Q^* elegidos para cubrir $\tilde{Q}$ está contenido en $\tilde{Q}$. Por el Lema 1.8.3, si es necesario, es posible dividir en 2^n partes cada uno de los cubos que cubren $\tilde{Q}$ para obtener nuevos cubos diádicos que, en un número no mayor que $2^n 4^n$ cubrirán $\tilde{Q}$. Por consiguiente, luego de un número finito y constante de pasos de adyacencia podemos conectar cualquier cubo del cubrimiento de Q con Q^* o con algunos de sus hijos si la aplicación del Lema 1.8.3 fue necesaria. Entonces, denotando con $\{Q^l : l = 1, 2, \cdots, 4^n\}$ a la familia que cubre a Q, tenemos, usando 1.48 cada vez que avancemos un paso con la adyacencia, que

$$\mu(Q) \leq \sum_{l=1}^{4^n} \mu(Q^l) \leq C\mu(Q^*) \leq C\mu(\tilde{Q}).$$

$\square$

El segundo concepto de duplicación diádica puede establecerse si se impone una condición de duplicación entre padres e hijos de un cubo diádico, el cual puede ser expresado de la siguiente manera: una medida μ verifica la duplicación diádica si existe una constante $C > 0$ tal que para todo cubo diádico Q_d, $\mu(\widetilde{Q_d}) \leq C\mu(Q_d)$ siendo $\widetilde{Q_d}$ el padre de Q_d. Este concepto no implica el de duplicación , como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea μ definida en los borelianos de $\mathbb{R}$, de la siguiente manera: $\mu(E) = |E \cap (-\infty, 0]| + \displaystyle\int_{E\cap[0,\infty)} x\, dx$. No es difícil comprobar que μ verifica la duplicación diádica que relaciona a un cubo diádico con su padre, pero no verifica (1.48), ya que si consideramos los intervalos $\Big[-\dfrac{1}{2^k}, 0\Big]$ y $\Big[0, \dfrac{1}{2^k}\Big]$, los cuales son adyacentes y del mismo nivel, se ve que $\mu\Big(\Big[-\dfrac{1}{2^k}, 0\Big]\Big) = \dfrac{1}{2^k}$ y $\mu\Big(0, \dfrac{1}{2^k}\Big) = \dfrac{1}{2\, 2^{2k}}$, por lo cual no es posible que exista $C > 0$ tal que $\mu\Big(\Big[-\dfrac{1}{2^k}, 0\Big]\Big) \leq C\mu\Big(\Big[0, \dfrac{1}{2^k}\Big]\Big)$.

1.9. Regularidad de la función de distribución de medidas que duplican

Veremos en esta sección que los conjuntos de dimensión cero no pesan cuando se tiene una medida duplicante definida en $\mathbb{R}$.

Para toda medida positiva μ definida sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ finita sobre compactos, existe una función $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monótona creciente y continua por la derecha tal que $\mu((a,b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$, para todo intervalo $[a,b]$. En efecto, basta tomar

i) $F_\mu(x) = \mu((0,x])$, para $x > 0$.

ii) $F_\mu(x) = -\mu((x,0])$, para $x < 0$.

iii) $F_\mu(0) = 0$.

La función F_μ, se llama *función de distribución* para la medida μ. Es posible obtener propiedades de la medida μ en términos de las propiedades de F_μ y recíprocamente.

En este sentido, es conocido el hecho que si F es una función de distribución para la medida de Borel μ, la continuidad de F en $\mathbf{R}$ equivale a que $\mu(\{x\}) = 0$, para todo punto $x \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\mu(\{x\}) \leq \mu(x-h,x] = F(x) - F(x-h)$$

para todo $h > 0$, de aquí que si f es continua $\mu(\{x\}) = 0$. Recíprocamente, como $\lim\limits_{h\to 0}(F(x)-F(x-h)) = \lim\limits_{h\to 0}\mu((x-h,x]) = \mu(\{x\})$, se obtiene que si $\mu(\{x\}) = 0$, entonces F es continua en x.

Veremos como corolario del siguiente lema, que las medidas que duplican en $\mathbb{R}$ tienen función de distribución continua.

Lema 1.9.1. *Si μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}$ con la propiedad de duplicación con respecto a la distancia usual, entonces $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Por la propiedad de duplicación de μ, existe $C > 0$ tal que $\mu(x-h, x+5h) \leq C\mu(x+h, x+3h)$, para $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$.

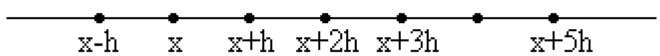


Figura 1.9.1

Tomando h en la sucesión $h_j = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{1}{3^j}, \cdots$ para $j = 0, 1, \cdots$ se obtiene que los intervalos $(x+h_j, x+h_{j-1})$ son disjuntos dos a dos y están todos incluidos en el intervalo $(x, x+3)$.

$$\mu(\{x\}) \leq \mu(x-1, x+5) \leq C\mu(x+1, x+3)$$

$$\mu(\{x\}) \leq \mu(x-\frac{1}{3}, x+\frac{5}{3}) \leq C\mu(x+\frac{1}{3}, x+1)$$

$$\vdots$$

$$\mu(\{x\}) \leq \mu(x-\frac{1}{3^j}, x+\frac{5}{3^j}) \leq C\mu(x+\frac{1}{3^j}, x+\frac{1}{3^{j-1}})$$

$$\vdots$$

Puesto que para todo $k \geq 0$, $(x + \frac{1}{3^k}, x + \frac{1}{3^{k-1}}) \subset (x, x+3)$ y como estos intervalos son disjuntos dos a dos, vale que

$$k\mu(\{x\}) = \sum_{j=1}^{k} \mu(\{x\}) \leq C \sum_{j=1}^{k} \mu(x+\frac{1}{3^j}, x+\frac{1}{3^{j-1}}) \leq \mu(x, x+3) < \infty,$$

para todo k.
lo que implica que $\mu(\{x\}) = 0$.

□

Corolario 1.9.1. *Si μ definida sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ duplica, entonces su función de distribución F, es continua.*

Mencionemos que si bien las funciones de distribución en $\mathbb{R}$ de medidas duplicantes, resultan continuas, no son en general absolutamente continuas, esto fue probado por Beurling y Ahlfors, ver [BA], quienes construyeron un homeomorfismo ρ de $[0, 2\pi]$ en $[0, 2\pi]$ con $\rho(0) = 0$ y $\rho(2\pi) = 2\pi$ tal que $\rho'(x) = 0$ en casi todo punto x perteneciente a $[0, 2\pi]$ y existe M tal que x, t vale que $\left|\frac{\rho(x+t) - \rho(x)}{\rho(x) - \rho(x-t)}\right| \leq M$, de modo que la medida que se define a partir de ρ verifica la propiedad de duplicación pero resulta singular con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi)$.

1.10. Aislación de átomos en espacios de tipo homogéneo. Teorema de Macías - Segovia

En esta sección, se verá que cuando se tiene un espacio de tipo homogéneo es posible relacionar un concepto topológico como es el de punto aislado con el de átomo puntual en el sentido de la medida.

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Diremos que un punto $x_0 \in X$ es un *átomo* si $\mu(\{x_0\}) > 0$. Un punto x_0 es *aislado*, si existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) = \{x_0\}$. Es de observar que dado que las bolas tienen medida positiva, entonces los puntos aislados son átomos.

El siguiente teorema debido a Macías y Segovia, [MS2], muestra el recíproco de la afirmación anterior. Incluimos aquí la demostración original dada en [MS2] y en la Sección 1.13, haremos otra basada en la construcción del lema de Whitney, que nos sugerirá extensiones posibles para la aislación de conjuntos de dimensiones distintas. Vale la pena notar que el resultado obtenido en el Lema 1.9.1, es un caso particular de este Teorema.

Teorema 1.10.1. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y M el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que $\mu(\{x\}) > 0$. Entonces el conjunto M es numerable y para $x \in M$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) = \{x\}$.*

Demostración. Veamos primero que el conjunto $M = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ es a lo sumo numerable. Puesto que para cualquier $x_0 \in X$,

$$M = \bigcup_{n\in} \{x \in X : \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n\in} \bigcup_{m\in} \{x \in B(x_0, m) : \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\},$$

y dado que las bolas tienen medida finita, cada conjunto

$$\{x \in B(x_0, m) : \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\}$$

es finito. Supongamos ahora que existe $x \in X$ tal que $\mu(\{x\}) > 0$ y que para todo $r > 0$, la bola con centro en x y radio r es distinta de $\{x\}$. Esta suposición nos lleva a una contradicción. Para verla, construiremos una sucesión de bolas disjuntas contenidas en una bola fija que estarán muy proximas a x, de modo que la medida de cada una de ellas sea mayor que una constante positiva fija. Bajo este supuesto, entonces, dado $r > 0$, existe x' tal que $0 < d(x, x') < r$. Sea $\delta = \dfrac{d(x,x')}{3k^2}$, entonces se verifica que

i) $\delta < r$,

ii) $d(x, x') < 4k^2\delta$,

iii)$B(x', \delta) \subset B(x, 2kr)$,

iv) $B(x, 2k\delta) \cap B(x', \delta) = \emptyset$.

Las proposiciones i) y ii) se desprenden de la definición de δ. Para ver iii) tomamos $y \in B(x', \delta)$ entonces $d(y, x) \leq k[d(y, x') + d(x', x)] < k[\delta + r] \leq 2kr$. Para probar iv), supongamos que $B(x, 2k\delta) \cap B(x', \delta) \neq \emptyset$, lo que significa que $d(x, x') < k[2k\delta + \delta]$. Pero $d(x, x') = \delta 3k^2 \geq k[2k\delta + \delta]$.

Sea $\delta_0 = 1$. Construimos una sucesión $\{x_n\}$ en X y una sucesión decreciente $\{\delta_n\}$ de la siguiente manera: tomamos $x_1 \in X$ tal que

$$0 < d(x, x_1) < 1, \quad \delta_1 = \frac{d(x, x_1)}{3k^2},$$

$x_2 \in X$ tal que

$$0 < d(x, x_2) < \delta_1, \qquad \delta_2 = \frac{d(x, x_2)}{3k^2},$$

y así sucesivamente, $x_n \in X$ tal que

$$0 < d(x, x_n) < \delta_{n-1}, \quad \delta_n = \frac{d(x, x_n)}{3k^2}.$$

La sucesión $\{\delta_n\}$ es decreciente y además $0 < \delta_n \leq 1$. Por iii), $B(x_n, \delta_n) \subset B(x, 2k)$, ya que $B(x_n, \delta_n) \subset B(x, 2k\delta_{n-1}) \subset B(x, 2k)$. Para $n < m$ y usando nuevamente iii), $B(x_m, \delta_m) \subset B(x, 2k\delta_{m-1}) \subset B(x, 2k\delta_n)$. Además, por iv)

$$B(x_m, \delta_m) \cap B(x_n, \delta_n) \subset B(x, 2k\delta_n) \cap B(x_n, \delta_n) = \emptyset,$$

lo que muestra que las bolas $\{B_n\} = \{B(x_n, \delta_n), n \in\}$ son disjuntas dos a dos. Puesto que por ii) $x \in B(x_n, 4\, k^2\, \delta_n)$ se obtiene entonces que

$$\infty > \mu(B(x, 2k)) \geq \mu(\bigcup_n B(x_n, \delta_n)) = \sum_n \mu(B(x_n, \delta_n))$$
$$\geq C \sum_n \mu(B(x_n, 4k^2\delta_n)) \geq C \sum_n \mu(\{x\}) = \infty,$$

lo que demuestra el teorema.

$\square$

1.11. Cubrimientos de tipo Whitney de subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y en espacios de tipo homogéneo

En esta sección se construirán cubrimientos de tipo Whitney en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y en espacios más generales.

En el contexto general de un espacio casi-métrico (X, d), un cubrimiento de tipo Whitney de un abierto distinto de X, es un cubrimiento del abierto por d-bolas de manera que la distancia de cada bola al complemento es comparable a su radio y que el solapamiento de las bolas que cubren es acotado.

Es poco menos que imposible exagerar la importancia que este tipo de construcción tiene en los problemas de extensión de funciones cuyo origen se remonta a Whitney [W].

Veamos a continuación ejemplos de construcciones de cubrimientos de tipo Whitney para algunos subconjuntos abiertos sencillos de $\mathbb{R}^n$.

Un cubrimiento tipo Whitney para el intervalo $G = (-1, 1)$.

Consideremos los intervalos semiabiertos definidos como

$$I_1^1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right], \qquad I_1^2 = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

$$I_2^1 = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right], \qquad I_2^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

$$I_3^1 = \left(-\frac{7}{8}, -\frac{3}{4}\right], \qquad I_3^2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$I_k^2 = \left(\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}, \frac{2^k-1}{2^k}\right).$$

En general

I_k^1 es un intervalo semiabierto a derecha incluído en $(-1, 0]$ tal que

$$d(I_k^1, -1) = l(I_k^1) = \frac{1}{2^k};$$

I_k^2 es un intervalo semiabierto a derecha incluido en $(0, 1)$ tal que

$$d(I_k^2, 1) = l(I_k^2) = \frac{1}{2^k}.$$

Es fácil verificar que estos intervalos satisfacen:

1) $\bigcup_{k\in}(\bigcup_{i=1}^{2} I_k^i) = (-1, 1)$

2) Los intervalos I_k^i, $i = 1, 2$, $k \in$, son disjuntos dos a dos.

Observemos además que para todo I_k^i, $k \in N$, $i = 1, 2$, $3I_k^i \cap (-1, 1)^c \neq \emptyset$, donde $3I_k^i$, denota la dilatación con razón 3 de I_k^i desde su centro.

Por otro lado a partir del cubrimiento $\{I_k^i\}$ podemos obtener otro cubrimiento por intervalos abiertos a expensas de precisión. Por ejemplo los intervalos $\{\frac{3}{2}\overset{\circ}{I_k^i}\}$ forman un cubrimiento por abiertos de $(-1,1)$ con solapamiento acotado, los intervalos $\frac{1}{2}\overset{\circ}{I_k^i}$ son disjuntos dos a dos y los intervalos $6\overset{\circ}{I_k^i}$ intersecan al complemento de G.

Un cubrimiento tipo Whitney para el intervalo $G = (a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Un cubrimiento para este intervalo, se obtiene aplicando la transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{b+a}{2}$, que nos lleva a la situación precedente.

Observemos que en el primer caso del cubrimento del intervalo $(-1,1)$, los intervalos cubridores son intervalos de la red diádica de $\mathbb{R}$ y que en el segundo caso y en general no lo son.

Un cubrimiento tipo Whitney por medio de intervalos de la red diádica de $\mathbb{R}$, para el intervalo $G = (a,b) \subset \mathbb{R}$.

Denotemos con $2I$ la dilatación de razón 2 alrededor del centro del intervalo I. Sea $\mathcal{A} = \{I \in \mathcal{D} \ / \ 2I \subset (a,b)\}$ y sea $\mathcal{M} = \{I \in \mathcal{D} : I \text{ es maximal de } \mathcal{A}\}$. Veamos que $\mathcal{M}$ representa a una familia de tipo Whitney para (a,b). Por la definición de $\mathcal{M}$ es fácil comprobar que $(a,b) = \bigcup_{I\in\mathcal{M}} I$ y que los elementos de la familia $\mathcal{M}$, tienen interiores disjuntos dos a dos. Veamos que $\dfrac{diam(I)}{4} \leq d(I, G^c) \leq 2\, diam(I)$, lo que equivale a probar que la longitud de un elemento I de $\mathcal{M}$ es comparable a la distancia de I al complemento de (a,b). Sea $I_0 \in \mathcal{M}$, entonces $I_0 \cup I_1^+ = I$ (I_1^+ es el intervalo diádico a la derecha de I_0, del mismo nivel que éste), es el diádico padre de I_0 o bien $I_0 \cup I_1^- = I$ (I_1^- diádico a la izquierda de I_0), es el intervalo diádico padre de I_0. Dado que I_0 es maximal con la propiedad $2I_0 \subset (a,b)$, se tiene que $2I \not\subset (a,b)$, entonces $b \in 2I$ ó $a \in 2I$. En cualquiera de los dos casos se verifica que

$$d(I_0, G^C) \leq 2\, diam(I_0).$$

La otra desigualdad vale por definición del conjunto $\mathcal{M}$.

Observemos que si se toma $6I_0$, para $I_0 \in \mathcal{M}$, dado que $6I_0$ contiene a $2I$, siendo I el padre de I_0, $2I \not\subset (a,b)$, pues I_0 es maximal. De esto se desprende que $6I_0 \cap G^c \neq \phi$, para todo $I_0 \in \mathcal{M}$.

Un cubrimiento tipo Whitney de $\mathring{Q}_0 = (0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$, por cubos diádicos.

Se obtiene considerando las familias $\mathcal{M}_k = \{Q$ diádicos / $l(Q) = d(Q, Q_0^c) = 2^{-k},\ k \geq 2\}$ y $F = \bigcup_k \mathcal{M}_k$ es una familia de Whitney para Ω. Conviene pensar que d es la "métrica" asociada a la norma del máximo en $\mathbb{R}^n$.

Para el próximo teorema, la referencia básica es el capítulo VI de "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions", [S].

Sea F un conjunto cerrado, no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea Ω su complemento. Con Q denotemos a un cubo cerrado de $\mathbb{R}^n$ de lados paralelos a los ejes coordenados. Con $diam(Q)$

denotamos su diámetro y con $d(Q, F)$, su distancia euclídea a F.

Diremos que dos cubos Q_1 y Q_2 no se solapan si los interiores de Q_1 y Q_2 son disjuntos.

Teorema 1.11.1. *Dado un conjunto cerrado F de $\mathbb{R}^n$, existe una familia de cubos diádicos $\mathcal{F} = \{Q_1, Q_2, \cdots\} \subset \mathcal{D}$ y una constante N tal que*

a) los pares de cubos de F no se solapan;

b) $\displaystyle\bigcup_k Q_k = \Omega = F^c$;

c) $diam(Q_k) \leq d(Q_k, F) \leq 4\, diam(Q_k)$, para todo $Q_k \in \mathcal{F}$;

d) si Q_j y Q_k son cubos de la familia $\mathcal{F}$ tales que $Q_j \cap Q_k \neq \emptyset$ entonces $\dfrac{1}{4}\, diam(Q_k) \leq diam(Q_j) \leq 4\, diam(Q_k)$;

e) para todo $Q_k \in \mathcal{F}$, existe $p \in \Omega^c = F$ tal que $d(Q, F) = d(Q, p)$;

f) existe una constante positiva N que sólo depende de la dimensión tal que ningún punto de Ω pertenece a más de N cubos de la familia $\{Q_k^*\}$ de los dilatados de Q_k por un factor $1 + \epsilon$, con $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$.

Demostración. Consideramos la red de puntos de $\mathbb{R}^n$, cuyas coordenadas son enteras. Denotamos a esta red con $\mathcal{M}_0$. La red $\mathcal{M}_0$ origina una colección de cubos: todos los cubos de lado unitario, cuyos vértices son puntos de dicha red. Cada cubo determinado por la red $\mathcal{M}_k = 2^{-k}\, \mathcal{M}_0 (k \in)$, da origen a 2^n cubos en la red $\mathcal{M}_{k+1}$, dividiendo sus lados en dos. La familia de cubos con vértices en la red $\mathcal{M}_k$, coincide con la familia $\mathcal{D}_{-k}$ de la sección 1.8. Los cubos de $\mathcal{D}_{-k}$ tienen aristas de longitud 2^{-k} y diámetro $\sqrt{n}2^{-k}$. Junto a la red $\mathcal{M}_k$, consideraremos los conjuntos Ω_k, definidos por $\Omega_k = \{x : c\,2^{-k} < d(x,F) \leq c\,2^{-k+1}\}$, donde c es una constante positiva que se fijará oportunamente.

Probemos que $\Omega = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$. Sea $x \in \Omega$, entonces $d(x,F) > 0$, por lo tanto, es posible encontrar $k \in$ tal que $c\,2^{-k} < d(x,F) \leq c\,2^{-k+1}$, lo que implica que $x \in \Omega_k$. Si $x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$, entonces $x \in \Omega_{k_0}$, para algún $k_0 \in$, con lo cual $d(x,F) > 0$ y por lo tanto, $x \in \Omega$.

Haremos una primera elección de cubos y a la familia así obtenida la llamaremos $\mathcal{G}$. Para cada k incluímos en $\mathcal{G}$, a los cubos de $\mathcal{D}_{-\|}$ que intersecan a Ω_k. Así, $\mathcal{G} = \bigcup_k \{Q \in \mathcal{D}_{-k} : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}$.
Aseguramos que $\bigcup\limits_{Q \in \mathcal{G}} Q = \Omega$. En efecto, $\Omega \subset \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{G}} Q$, pues si $x \in \Omega$, entonces $x \in \Omega_k$ para algún k y también $x \in Q_k$, para algún Q_k diádico de nivel 2^{-k}, de modo que $x \in \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{G}} Q$.

Por otro lado tomando por ejemplo $c \geq 2\sqrt{n}$, se prueba que cada cubo Q de $\mathcal{G}$ está contenido en Ω. En efecto, sea $x \in Q$ y $Q \in \mathcal{G}$, por lo tanto existe $y \in Q \cap \Omega_k$, para algún k de modo que

$$2\sqrt{n}2^{-k} < d(y,F) \leq d(y,x) + d(x,F).$$

Si $d(x,F) = 0$ entonces se obtendría $2\sqrt{n}2^{-k} < d(y,F) \leq$

$\sqrt{n}2^{-k}$, lo que es una contradicción.

Veamos ahora que para $c = 2\sqrt{n}$, se verifica que

$$diam(Q) \leq d(Q, F) \leq 4\, diam(Q), \quad Q \in \mathcal{G}. \tag{1.49}$$

Sea $Q \in \mathcal{G}$ supongamos que $Q \in \mathcal{D}_k$, entonces el diámetro de Q es $\sqrt{n}2^{-k}$. Sea $x \in Q \cap \Omega_k$. Por lo tanto,

$$d(Q, F) \leq d(x, F) \leq c\, 2^{-k+1} = \frac{c}{\sqrt{n}}, 2\sqrt{n}2^{-k} = 4diam(Q) \tag{1.50}$$

y

$$d(Q, F) + diam(Q) \geq d(x, F),$$

entonces

$$\begin{aligned} d(Q, F) \geq d(x, F) - diam(Q) &> c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k} \\ &= (c - \sqrt{n})2^{-k} = \sqrt{n}2^{-k} = diam(Q) \end{aligned} \tag{1.51}$$

De (1.50) y (1.51), se obtiene (1.49). Entonces los cubos de la familia $\mathcal{G}$ tiene todas las propiedades requeridas, salvo posiblemente, algún solapamiento de sus elementos. Para concluir la prueba del teorema, necesitamos re-seleccionar los cubos de $\mathcal{G}$, eliminando cubos innecesarios.

Observemos que si Q_1 y Q_2 son dos cubos que se solapan que pertenecen a la redes $\mathcal{D}_{k_1}$ y $\mathcal{D}_{k_2}$, respectivamente, entonces uno de los dos está incluído en el otro (en particular, $Q_1 \subset Q_2$ si $k_1 \geq k_2$). Sea ahora cualquier cubo $Q \in \mathcal{G}$, podemos probar que existe un único cubo maximal en $\mathcal{G}$ que lo contiene. A partir de la desigualdad (1.49), para cualquier cubo $Q' \in \mathcal{G}$ que

contiene a Q en $\mathcal{G}$, tenemos que $diam(Q') \leq 4\,diam(Q)$, pues $diam(Q') \leq d(Q', F) \leq d(Q, F) \leq 4\,diam(Q)$, dado que $Q \subset Q'$. Más aún, cualquier par de cubos Q' y Q'' que contienen a Q, tienen obviamente una intersección no trivial. Por lo tanto, cada cubo perteneciente a $\mathcal{G}$ está contenido en un único cubo maximal de $\mathcal{G}$. Ahora, estos cubos maximales son también disjuntos. Denotemos con $\mathcal{F}$ la colección de cubos maximales de $\mathcal{G}$. Entonces a), b), y c) valen para esta familia.
Demostremos d). Los cubos de la familia $\mathcal{F}$, según lo probado en c), verifican que

$$d(Q, F) \leq 4\,diam(Q). \tag{1.52}$$

Para todo $\epsilon > 0$, existe $y_0 \in Q$ tal que $d(y_0, F) < d(Q, F) + \epsilon$, con lo cual para y un punto común a Q y Q', con $Q' \in \mathcal{F}$ se tiene que $d(Q', F) \leq d(y, F) \leq d(y, y_0) + d(y_0, F)$. Entonces vale que $d(Q', F) \leq diam(Q) + d(Q, F) + \epsilon$ y por (1.52), resulta $d(Q', F) \leq diam(Q) + 4\,diam(Q)$, obteniéndose por aplicación de c), que

$$diam(Q') \leq d(Q', F) \leq 5\,diam(Q), \tag{1.53}$$

pero $diam(Q') = 2^m\,diam(Q)$, para algún entero m, así que comparando con (1.53) se tiene que

$$diam(Q') \leq 4\,diam(Q), \tag{1.54}$$

lo que prueba d).

Demostración de f). Veamos primero que dado $Q \in \mathcal{F}$, existen más de N cubos de $\mathcal{F}$ que se intersecan con Q. Supongamos que $Q \in \mathcal{D}_{-k}$, por lo tanto existen 3^n cubos que pertenecen a $\mathcal{D}_{-k}$ y adyacentes con Q, contando

también a Q. Por lo probado en d) cada uno de estos cubos no puede contener más de 4^n cubos Q' de la familia $\mathcal{F}$ que tengan intersección no vacía con Q, de aquí que no existen más de $N = 12^n$ de estos cubos Q', es decir, $\sharp\left(\{Q' \in \mathcal{F} : Q' \cap Q \neq \emptyset\}\right) \leq 12^n = N$.
Probemos ahora que cada punto de Ω no pertenece a más de N cubos Q^*, siendo $Q^* = (1+\epsilon)Q$, $0 < \epsilon < \dfrac{1}{4}$.

Sea $Q \in \mathcal{F}$ y $Q^* = (1+\epsilon)Q$. Veamos que

$$Q^* \subset Q \cup \Big(\bigcup_{\{Q' : Q' \cap Q \neq \emptyset, Q' \in \mathcal{F}\}} Q' \Big).$$

Si $x \in Q^*$, entonces $x \in \overset{\circ}{Q} \subset Q$ o $r \leq \|x - x_0\|_\infty \leq \dfrac{5}{4} r$, siendo x_0 el centro de Q y r su radio. Si x verifica que $r \leq \|x - x_0\|_\infty \leq \dfrac{5}{4} r$, entonces $x \in Q'$, para algún Q' tal que $Q \cap Q' \neq \emptyset$, ya que por lo probado en d) el $diam(Q') \geq \dfrac{1}{4} diam(Q)$. De aquí que

$$\begin{aligned}
\sum_{Q \in \mathcal{F}} \mathcal{X}_{Q^*}(x) &\leq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \left(\mathcal{X}_Q(x) + \sum_{\{Q' \in \mathcal{F} : Q \cap Q' \neq \emptyset\}} \mathcal{X}_{Q'}(x) \right) \\
&= \sum_{Q \in \mathcal{F}} \mathcal{X}_Q(x) + \sum_{Q \in \mathcal{F}} \sum_{\{Q' \in \mathcal{F} : Q \cap Q' \neq \emptyset\}} \mathcal{X}_{Q'}(x) \\
&\leq 2^n + \sum_{Q' \in \mathcal{F}} \sum_{\{Q \in \mathcal{F} : Q' \cap Q \neq \emptyset\}} \mathcal{X}_{Q'}(x) \leq 2N.
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición relaciona a un cubo diádico cualquiera de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overset{\circ}{Q}_d \cap F \neq \emptyset$ con los cubos diádicos de la familia $\mathcal{F}$ de Whitney construída en el teorema precedente.

Proposición 1.11.1. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de Whitney diádica para Ω construida en el Teorema 1.11.1. Entonces para cada cubo diádico Q_d de $\mathbb{R}^n$, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es posible*

i) $Q_d \cap \Omega = \emptyset$,

ii) $Q_d = Q_d \cap \Omega \subsetneq Q$, *para algún* $Q \in \mathcal{F}$,

iii) $Q_d \cap \Omega = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathcal{K}} Q$, *donde* $\mathcal{K}$ *es una subfamilia no vacía a lo sumo numerable de* $\mathcal{F}$.

Demostración. Observemos primero que, naturalmente i), ii) y iii) son mutuamente excluyentes. Para ver que (i), (ii) y (iii) cubren todas las posibilidades para un cubo diádico cualquiera Q_d, supongamos que no ocurre i). Es decir, suponemos que $Q_d \cap \Omega \neq \emptyset$. Como $\Omega = \displaystyle\bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q$, necesariamente la familia $\mathcal{K} = \{Q \in \mathcal{F} : Q \cap \overset{\circ}{Q}_d \neq \emptyset\}$ es diferente de la clase vacía. Dos casos son posibles: $\sharp(\mathcal{K}) = 1$ ó $\sharp(\mathcal{K}) > 1$. Consideremos primero el caso $\sharp(\mathcal{K}) = 1$. Si Q es el único elemento de $\mathcal{K}$, por las propiedades de los cubos diádicos, entonces $Q \subset Q_d$ ó $Q_d \subset Q$. Notemos que $Q \subsetneq Q_d$ es imposible porque en ese caso $\sharp(\mathcal{K}) > 1$. De donde se deduce ii) o un caso especial de iii), según sea $Q_d \subsetneq Q$ ó $Q_d = Q$.

En el caso restante, $\sharp(\mathcal{K}) > 1$, tenemos que $\Omega \cap Q_d =$

$\bigcup_{Q\in\mathcal{K}} Q$. En efecto, cada cubo de $\mathcal{F}$ está contenido en Ω y si además este cubo está en $\mathcal{K}$, por la propiedad de los cubos diádicos $Q \subset Q_d$, por consiguiente el lado derecho está incluido en el izquierdo. Por otra parte, dado $x \in \Omega \cap Q_d$ existe $Q \in \mathcal{F}$ tal que $x \in Q$. Si $x \in \Omega \cap \overset{\circ}{Q}_d$, entonces $Q \cap \overset{\circ}{Q}_d \neq \emptyset$ y $Q \in \mathcal{K}$ con lo que $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{K}} Q$. Si $x \in \Omega \cap \partial Q_d$, entonces existe $\delta > 0$ tal que la bola $B(x, \epsilon)$ corta sólo a un número finito de los cubos de $\mathcal{F}$, para todo $\epsilon < \delta$, de aquí que $B(x, \epsilon)$ también corta a algunos de los cubos de $\mathcal{K}$. Esto implica que x pertenece al borde de algunos de los elementos de $\mathcal{K}$, que son cerrados, por consiguiente $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{K}} Q$. $\square$

Notemos que dado Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y una familia de Whitney para Ω como la que provee el Teorema 1.11.1, como consecuencia de la proposición anterior, $\mathcal{D}^n$, la familia de los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$, resulta particionada en tres clases. Estas son: $\mathcal{A} = \{Q_d \in \mathcal{D}^n \ / \ Q_d \cap \Omega = \emptyset\}$, $\mathcal{B} = \{Q_d \in \mathcal{D}^n \ / \exists Q \in \mathcal{F} \wedge Q_d \subsetneqq Q\}$ y $\mathcal{C} = \{Q_d \in \mathcal{D}^n, \ / \ Q_d \cap \Omega = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} Q, \ \mathcal{K}$ subfamilia numerable de $\mathcal{F}\}$.

La versión del lema de cubrimiento de tipo Whitney de Coifman y Weiss [CW], en espacios de tipo homogéneo , que presentamos aquí, resalta más detalles de esta sorprendente manera de cubrir un abierto. La misma es debida a Macías y Segovia [MS2].

Teorema 1.11.2. *Sean (X, d) un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita, Ω un abierto acotado, $\Omega \subset X$ no vacío ni total, y $d(x) = d(x, \Omega^c)$. Dado $C \geq 1$ y $r(x) = (2kC)^{-1}d(x)$, donde k es la constante de la casi-métrica, entonces existe un número natural M, el cual depende de C y una sucesión $\{x_n\}$ tal que*

a) las bolas $B(x_n, \dfrac{r(x_n)}{4k})$ son disjuntas;

b) la unión $\bigcup\limits_n B(x_n, r(x_n)) = \bigcup\limits_n B_n = \Omega$;

c) para todo n y para todo $x \in B(x_n, Cr(x_n))$ se tiene que $Cr(x_n) \leq d(x) \leq 3k^2Cr(x_n)$;

d) si $B(x_n, Cr(x_n)) \cap B(x_j, Cr(x_j)) \neq \emptyset$ entonces $\dfrac{r(x_n)}{3k^2} \leq r(x_j) \leq 3k^2 r(x_n)$;

e) para todo n, existe $y_n \notin \Omega$ tal que $y_n \in B(x_n, 3kCr(x_n))$;

f) para todo n, el número de bolas $B(x_k, Cr(x_k))$ cuya intersección con $B(x_n, Cr(x_n))$ es no vacía, es a lo más M.

Demostración. Observemos que $\{B(x, \dfrac{r(x)}{4k}),\ x \in \Omega\}$, con $r(x) = \dfrac{d(x)}{2kC} > 0$, es un cubrimiento de Ω. Aplicando el Lema 1.7.5 a esta familia, se obtiene una sucesión $\{x_n\} \subset \Omega$ tal que las bolas $\{B(x_n, \dfrac{r(x_n)}{4k})\}$, son disjuntas dos a dos, es decir, que verifica a) y dilatadas $4k$ veces cubren, lo que prueba b).
Para probar c), sea $x \in B(x_i, Cr(x_i))$ entonces $d(x_i) \leq k[d(x, x_i) + d(x)]$, pero $d(x, x_i) \leq Cr(x_i) = \dfrac{Cd(x_i)}{2kC}$, de

lo que resulta que $\frac{1}{k}[d(x_i) - \frac{d(x_i)}{2}] \leq d(x)$ ó equivalentemente $\frac{1}{2k}d(x_i) \leq d(x)$, con lo que se obtiene

$$Cr(x_i) \leq d(x). \tag{1.55}$$

Por otro lado,

$$d(x) \leq k[d(x, x_i) + d(x_i)] \leq k[Cr(x_i) + d(x_i)] = \frac{d(x_i)}{2} + kd(x_i)$$

$$= \frac{d(x_i)}{2}(1 + 2k) = Ckr(x_i)(1 + 2k) \leq 3k^2 Cr(x_i),$$

o sea que

$$d(x) \leq 3k^2 Cr(x_i). \tag{1.56}$$

Así, de (1.55) y (1.56), se deduce c).

La propiedad d) es una consecuencia de c). En efecto, si $x \in B(x_n, Cr(x_n)) \cap B(x_j, Cr(x_j))$, con $j \neq n$, vale que $Cr(x_n) \leq d(x) \leq 3k^2 Cr(x_n)$ y $Cr(x_j) \leq d(x) \leq 3k^2 Cr(x_j)$, por lo que la conclusión es inmediata.

Para todo n, $B(x_n, 3kCr(x_n)) = B(x_n, 3kC\frac{d(x)}{2kC}) = B(x_n, \frac{3}{2}d(x))$. Dado que $B(x_n, \frac{3}{2}d(x_n)) \cap \Omega^c \neq \emptyset$, existe $y_n \in \Omega^c$ tal que $y_n \in B(x_n, 3kCr(x_n))$. Lo que prueba e).

Probemos finalmente f). Sea $B(x_n, Cr(x_n))$, notar que por d) se obtiene que para $x \in B(x_i, Cr(x_i)) \cap B(x_n, Cr(x_n))$, para todo $i \neq n$ y se verifica que $\frac{r(x_n)}{3k^2} \leq r(x_i) \leq 3k^2 r(x_n)$. Los puntos x_i están todos en la bola $B(x_n, 8Ck^3 r(x_n))$.

En efecto,

$$d(x_i, x_n) \leq k[d(x_i, x) + d(x, x_n)] \leq k[Cr(x_i) + Cr(x_n)]$$

$$\leq 4kCr(x_n)[k^2 + 1] \leq 8Ck^3 r(x_n).$$

Dado que las bolas $B(x_i, \frac{r(x_i)}{4k})$ son disjuntas y usando $a)$ se obtiene $d(x_i, x_n) > \frac{r(x_n)}{3k^2}$. Por lo tanto, por Colorario 1.7.4, existen a lo más M bolas, que intersecan a $B(x_n, Cr(x_n))$. □

En la demostración del teorema precedente la hipótesis de acotación, cuando hay una medida que duplica, puede sustituirse por la de finitud de la medida de Ω, usando el Lema 1.7.4 (ver [A1]) en lugar del más clásico de Wiener.

Aprovechando el Lema 1.7.2, otra forma de cubrimiento de tipo Whitney, más débil en el cual las bolas admiten solapamiento acotado también puede pueden construirse en conjuntos no acotados.

Teorema 1.11.3. *Sea (X, d) un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita. Sea $\Omega \neq \emptyset$ un abierto estrictamente incluido en X. Sea $d(x) = d(x, \Omega^c)$. Dados $C \geq 1$ y $r(x) = (2KC)^{-1} d(x)$, donde K es la constante de la casi-métrica, existe una constante M positiva y una sucesión $\{x_n\}$ tales que*

a) $\sum \mathcal{X}_{B(x_n, \frac{r(x_n)}{4k})}(x) \leq 6;$

b) $\bigcup_n B(x_n, r(x_n)) = \Omega;$

c) para todo n y para todo $x \in B(x_n, Cr(x_n))$ se tiene que $Cr(x_n) \leq d(x) \leq 3KCr(x_n)$;

d) si $B(x_n, Cr(x_n)) \cap B(x_j, Cr(x_j)) \neq \emptyset$, entonces $\frac{r(x_n)}{3K^2} \leq r(x_j) \leq 3K^2 r(x_n)$;

e) para todo n, existe $y_n \in \Omega^c$ tal que $y_n \in B(x_n, 3KCr(x_n))$;

f) para todo n, el número de bolas $B(x_k, Cr(x_k))$ cuya intesección con $B(x_n, 3KCr(x_n))$ es no vacía es a lo más M.

Demostración. Sean $p > 1$ y $m \in$, definimos $\Omega_0 = \{x \in \Omega \;\; 0 < d(x) < \beta\}$ y $\Omega_n = \{x \in \Omega / \, \beta^m \leq d(x) < \beta^{m+1}\}$. Notemos que la restricción de la función $r(x) = \frac{d(x)}{2KC}$ a Ω_n, para todo $m \in_0$ es una función acotada y que la familia $\{B\left(x, \frac{r(x)}{4K}\right), x \in \Omega\}$ constituye un cubrimiento para cada Ω_n. Por lo tanto podemos aplicar el lema 1.7.7 a las bolas de dicha familia y obtenemos una sucesión que puede ser finita $\{x_j^m, j \in J(m)\} \subset \Omega_m$, tal que las bolas de la familia $\{B\left(x_j^m, \frac{r(x_j^m)}{4K}\right)\}$ verifican que:

i) $\displaystyle\sum_{j \in J(m)} \mathcal{X}_{B(x_j^m, \frac{r(x_j^m)}{4k}})(x) \leq 2$

ii) $\displaystyle\bigcup_{j \in J(m)} (B(x_j^m), r(x_j^m)) \supset \Omega_m$.

Observemos que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{m=0}^{\infty} \Omega_m$ y por ii) se obtiene que $\{B(x_j^m, r(x_j^m) : m \in_0, j \in J(m)\}$ es un cubrimiento de Ω. Como además $r(x_j^m) = (2KC)^{-1}(d(x_j^m))$ cada bola $B(x_j^m, r(x_j^m)) \subset \Omega$; con lo que se prueba b).

Para demostrar a) probaremos primero que eligiendo β suficientemente grande, la intersección de las bolas de niveles correspondientes que difieran en más de dos unidades es vacía. En efecto, si no fuera así existiriían m y l con $m \geq l+2$ tal que para algún par de índices j e i, ocurriría que existe un elemento y en $B(x_j^m, r(x_j^m)) \cap B(x_i^l, r(x_i^l))$; de lo que se obtendría

$$\beta^m \leq d(x_j^m) \leq K^2[d(x_j^m, y) + d(y, x_i^l) + d(x_i^l)] \quad (1.57)$$

$$< K^2 \left[\frac{r(x_j^m + r(x_i^l)}{4K} + d(x_i^l) \right] \quad (1.58)$$

$$= \left[\frac{d(x_j^m) + (1 + 8K^2C)d(x_i^l)}{8C} \right] \quad (1.59)$$

$$< \frac{\beta^{m+1} + (1 + 8K^2C)\beta^{m-1}}{8C}, \quad (1.60)$$

lo que es imposible eligiendo β suficientemente grande dependiendo solo de K y C.
Notemos ahora que dado $x \in \Omega$, por i) este punto no puede pertenecer a más de dos bolas de una familia de nivel m, y dado que las bolas de esta familia solo pueden solaparse con bolas de su propio nivel o con bolas correspondientes a familias de niveles $m+1$ o $m-1$; por aplicación nuevamiente de i) se obtiene a).

Probemos c). Sea $x \in B(x_i, Cr(x_i))$ entonces

$$d(x_i) \leq K[d(x, x_i) + d(x)],$$

y dado que

$$\frac{d(x_i)}{K} - d(x, x_i) \leq d(x)$$

$$r(x_i)2C - r(x_i)C \leq d(x)$$

$$Cr(x_i) \leq d(x). \tag{1.61}$$

Por otro lado,

$$d(x) \leq K[d(x, x_i) + d(x_i)] \leq K[Cr(x_i) + d(x_i)]$$

$$\leq K[Cr(x_i) + 2KCr(x_i)] \leq 3KCr(x_i).$$

De (1.61) y esta última vale que

$$Cr(x_i) \leq d(x) \leq 3KCr(x_i).$$

d) Es una consecuencia directa de c).

Para todo n, $B(x_n, 3KCr(x_n)) = B(x_n, \frac{3KCd(x_n)}{2C}) = B(x_n, \frac{3}{2}d(x_n))$, lo que nos dice que

$$B(x_n, 3KCr(x_n)) \cap \Omega^c \neq \emptyset,$$

y se prueba e).

Para probar f) procederemos como hicimos en el correspondiente inciso f) en el teorema 1.11.2. La única dificultad adicional es que el conjunto C de los centros x_i que estamos considerando puede no ser $r(x_n)$-disperso. Pero notemos que todavía podemos acotar su cardinal.

En efecto, sea C_1 un conjunto $r(x_n)$-disperso maximal en C. La maximamalidad asegura que C está contenido en $\bigcup_{z \in C_1} B(z, r(x_n))$. Por otra parte dentro de cada bola $B(z, r(x_n))$ no puede haber más de 6 elementos de C, por lo probado en a). Entonces $\sharp(C) \leq \sum_{z \in C_1} (C \cap B(z, r(x_n))) \leq 6N = M$, donde N es una constante que depende de la constante de la dimensión métrica finita.

$\square$

Destaquemos las siguientes propiedades que en esta perspectiva nos da el 1.11.2:

i) para todo $k \in$ y para todo $j \in I_k$, se tiene que $d(x_j^k, \Omega^c) \simeq r_j^k \simeq k_0^{-k}$.

ii) $\bigcup_{k \in} \bigcup_{B_i^k \in W_k} \widetilde{B_i^k} = \Omega$, siendo $\widetilde{B_i^k} = B(x_i^n, r_i^k)$.

Una clasificación de las bolas que componen un cubrimiento de Whitney de acuerdo al tamaño de las mismas y no a su indexación derivada de la aplicación del Lema de Wiener, será útil al estudiar operadores de extensión. Sean (X, d) y Ω como en los Teoremas 1.11.2 o 1.11.3 y sea $W = \{B_n = B(x_n, \frac{r(x_n)}{4k})\}$, la familia de Whitney que este teorema provee. Sea k_0 un número mayor que uno arbitrario. Denotemos por simplicidad $r_n = r(x_n)$. Entonces para todo n existen un único $j \in$ tal que $k_0^{-j} < r_n \leq k_0^{-j+1}$. Por supuesto que a distintos n pueden corresponder el mismo j y para describir esta situación indexamos de manera que en los radios y los correspondientes centros se ponga de manifiesto el tamaño o nivel de las bolas que intervienen. Usaremos r_i^j para denotar a los elementos de $\{r_n : k_0^{-j} < r_n \leq k_0^{-j+1}\}$, x_i^j para los correspondientes centros y $\{B_i^j : j \in I(j)\} = W_j$ para la familia de bolas de Whitney de este nivel. Observemos que aunque nuestra notación no lo manifiesta explícitamente, en general esta partición depende de k_0 y cuando sea necesario usaremos $W_j^{k_0}$ para resaltar esta dependencia. Así, tenemos asociada a un $k_0 > 1$, una partición de $W : W = \bigcup_{j\in} W_j$,

Es facil construir ejemplos de espacios casi-métricos con dimensión métrica finita tales que para algún $k_0 > 1$ y algún $j \in$ sea $W_j = \emptyset$. También es posible construir ejemplos tales que para todo $k_0 > 1$ exista $j \in$ de manera que $W_j^{k_0} = \emptyset$.

1.12. Particiones de la unidad subordinadas a familias de Whitney

Consideraremos en esta sección la construcción de particiones de la función constantemente 1 subordinadas a una familia de bolas que constituye un cubrimiento tipo Whitney para un conjunto abierto incluido en $\mathbb{R}^n$ y también en un espacio casi-métrico.

Dicha construcción será básica para la definición de operadores que extienden funciones definidas en un subconjunto al espacio total.

Veamos primero la construcción de una partición de la unidad subordinada a una familia de Whitney como la que provee el Teorema 1.11.1, para un abierto Ω incluido en $\mathbb{R}^n$.

Sean Q_0 el cubo $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ de $\mathbb{R}^n$, centrado en el origen, $\epsilon > 0$, y φ una función C^∞ con las siguientes propiedades: a) $0 \leq \varphi \leq 1$; b) $\varphi(x) = 1$, $x \in Q_0$ y $\varphi(x) = 0$, $x \notin (1+\epsilon)Q_0$, $(1+\epsilon)Q_0$ representa la dilatación en un factor $(1+\varepsilon)$ desde el centro de Q_0.

Llamaremos φ_k a la adaptación de la función φ definida sobre el cubo Q_k perteneciente a $\mathcal{F}$, esto es: $\varphi_k(x) = \varphi(\dfrac{x - x_k}{l_k})$, x_k representa el centro de Q_k y l_k la longitud de su lado. Notemos por lo tanto que $\varphi_k(x) = 1$ si $x \in Q_k$ y $\varphi_k(x) = 0$ si $x \notin (1+\varepsilon)Q_k$. De las propiedades (f)y (b) del Teorema 1.11.1 se tiene que $\phi(x) = \sum_k \varphi_k(x)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y no se anula sobre Ω, entonces, para cada k, la función $\varphi_k^*(x) = \dfrac{\varphi_k(x)}{\phi(x)}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y está soportada en $(1+\varepsilon)Q_k$. Para las funciones φ_k^* es claro que $\displaystyle\sum_k \varphi_k^*(x) \equiv 1$, $x \in \Omega$. De esta forma se obtiene una partición de la unidad $\{\varphi_k^*\}$ subordinada a los cubos de la familia $\mathcal{F}$, por funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ y con soportes localizados en cubos muy cercanos a los de Whitney.

Trasladamos ahora la construcción anterior a un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita en el caso de Ω acotado. En esta situación las particiones de la unidad estarán subordinadas a las bolas de una familia de tipo Whitney para un conjunto abierto y acotado del espacio.

Tomemos φ una función C^∞, definida en $[0, \infty)$ tal que φ está soportada en $[0, 2]$, φ es idénticamente uno en $[0, 1]$ y $0 \leq \varphi \leq 1$.

Sabemos que existe una distancia ρ sobre X y un número $\beta \geq 1$ tal que $\delta = \rho^\beta$ es una casi-distancia equivalente a d, [MS1], asumiendo que k es la constante de la casi-métrica δ y que B denota la δ-bola en X, por la aplicación del Teorema 1.11.2, podemos obtener una familia de Whitney $W = \{B_n = B(x_n, \frac{r(x_n)}{4k})\}$. Con la notación establecida en el Teorema 1.11.2, definimos $\psi_n : X \to \mathbb{R}$, $\psi_n(x) = \varphi\Big(\frac{\delta(x, x_n)}{r_n}\Big)$. Además, por la propiedad del Teorema 1.11.2(c), $B_n = B(x_n, r_n) \subset$ *soporte* $\psi_n \subset B(x_n, cr_n) = \tilde{B}_n$. Por lo tanto, como $\psi_n \equiv 1$ sobre cada B_n, tenemos a partir de (b) en el Teorema 1.11.2 que $\mathcal{X}_\Omega \leq \sum_n \mathcal{X}_{B_n} \leq \sum_n \psi_n$.

Como además que existe una constante M tal que ningún punto de Ω pertenece a más de M bolas $\widetilde{B}_n$, $\sum_n \psi_n \leq \sum_n \mathcal{X}_{\widetilde{B}_n} \leq M\chi_\Omega$, de modo que $\chi_\Omega \leq \sum_n \psi_n \leq M\chi_\Omega$.

Para una función f definida sobre un espacio casi-métrico (X, d) con valores reales, se define la norma Lipschitz α $(0 < \alpha \leq 1)$ de f como el ínfimo de las constantes de A para las cuales la desigualdad $\frac{|f(x) - f(y)|}{(d(x, y))^\alpha} \leq A$, es válida para todo $x, y \in X$, $x \neq y$. A esta norma se la denota con $||f||_\alpha$ o $||f||_{Lip\,\alpha}$.

En el caso de las funciones ψ_n definidas anteriormente se puede obtener la estimación $||\psi_n||_\alpha \leq cr_n^{-\alpha}$ con $\alpha = \beta^{-1}$, ver [A2] y [MS1].

Construimos la partición de la unidad sobre Ω definiendo la sucesión de funciones $\Phi_n : X \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Omega \\ \\ \dfrac{\psi_n(x)}{\sum_k \psi_k(x)} & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

Las funciones Φ_n satisfaccen las siguientes propiedades, ver [A2].

a) $B_n \subset$ *soporte* $\Phi_n =$ *soporte* $\psi_n \subset \widetilde{B_n}$;

b) $\sum_n \Phi_n = \chi_\Omega$;

c) $\Phi_n(x) \geq M^{-1}$, para $x \in B_n$;

d) $||\Phi_n(x)||_\alpha \leq c r_n^{-\alpha}$.

Una construcción similar puede hacerse a partir del Teorema 1.11.3.

1.13. Aislación de átomos: una demostración alternativa usando el Lema de Whitney

En esta sección, se aplicará el argumento que conduce al Lema 1.11.2 de tipo Whitney, para obtener el resultado de Macías y Segovia sobre la aislación de átomos (Teorema 1.10.1) en espacios de tipo homogéneo.

Teorema 1.13.1. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea $x_0 \in X$ tal que $\mu(\{x_0\}) > 0$, entonces x_0 es aislado.*

Demostración. Podemos suponer que d es de orden α y que por consiguiente las d-bolas son abiertos. Supongamos que $\mu(\{x_0\}) > 0$. Notemos primero que si la bola

$B(x_0, 1)$ contiene sólo al punto x_0 entonces no hay nada que probar. Asumamos entonces que $B(x_0, 1)$ contiene puntos diferentes de x_0. Sea $\Omega = B(x_0, 1) - \{x_0\}$. Definimos la función $r : \Omega \to \mathbb{R}^+$, dada por $r(x) = \dfrac{d(x, x_0)}{8k^2}$. Notar que $r(x) \leq \dfrac{1}{8k^2}$ para todo $x \in \Omega$. Como Ω es acotado se le puede aplicar el lema de Wiener para el cubrimiento $\{B(x, r(x)) : x \in \Omega\}$ para obtener una familia de bolas $\{B(x_i, r(x_i))\}_{i \in I}$ tal que

i) las bolas $B_i = B(x_i, r(x_i))$ son disjuntas dos a dos,

ii) $\Omega \subset \bigcup \tilde{B}_i$, siendo $\tilde{B}_i = B(x_i, \dfrac{d(x_i, x_0)}{2k}) = B(x_i, 4kr_i)$, siendo $r_i = r(x_i)$.

Esta familia a lo sumo numerable de bolas satisface además, las siguientes propiedades:

a) $B_i \subset B(x_0, \frac{9}{8}k)$, para todo $i \in I$,

b) $B(x_i, 16k^2 r_i)$ contiene al punto x_0, para todo $i \in I$.

Primeramente probemos a).
Dado que $d(x_0, x_i) = 8k^2 r_i$, y si $z \in B(x_i, r_i)$, entonces $d(x_i, z) < r_i$, tenemos

$$d(z, x_0) < k[8k^2 r_i + r_i] = kr_i[8k^2 + 1]$$

$$= k\frac{1}{8k^2}[8k^2 + 1] \leq \frac{9}{8}k.$$

Como $\dfrac{d(x_i, x_0)}{8k^2} = r_i$ entonces $d(x_i, x_0) = r_i 8k^2 < r_i 16k^2$ y b) resulta clara.

Usando b), la propiedad de duplicación, i) y finalmente a), tenemos que

$$\begin{aligned}\sharp(I)\mu(\{x_0\}) &\leq \sum_{i\in I}\mu(B(x_i,16k^2r_i)) \leq C\sum_{i\in I}\mu(B_i)\\ &= C\mu(\bigcup_{i\in I}B_i) \leq C\mu(B(x_0,\frac{9}{8}k)).\end{aligned}$$

Dado que $\mu(\{x_0\}) > 0$ y como $\mu(B(x_0,\frac{9}{8}k)) < \infty$ necesariamente, $\sharp(I) < \infty$.
Entonces el conjunto $\{r_i = \frac{d(x_i,x_0)}{8k^2} : i \in I\}$, tiene un mínimo $r > 0$. Notemos que por ii), dado un punto $x \in \Omega$ entonces existe $i \in I$ tal que $x \in B(x_i, \frac{d(x_i,x_0)}{2k})$. Así,

$$\begin{aligned}d(x_i,x_0) &\leq k[d(x_i,x)+d(x,x_0)]\\ &\leq k[\frac{d(x_i,x_0)}{2k}+d(x,x_0)],\end{aligned}$$

de donde $\frac{d(x_i,x_0)}{2k} \leq d(x,x_0)$, o en otros términos

$$4kr_i \leq d(x,x_0),$$

con lo cual $0 < 4r \leq d(x,x_0)$ para todo $x \in \Omega$ y por consiguiente, $B(x_0,4r) = \{x_0\}$. $\square$

1.14. Transformación Lipschitz de espacios casi-métricos

Como en el caso de espacios métricos los isomorfismos naturales de espacios casi-métricos son las transformaciones Bilipschitz. En esta sección probamos que si un espacio casi-métrico es isomorfo, en este sentido, a la estructura casi-métrica de un espacio de tipo homogéneo, entonces aquel es un espacio de tipo homogéneo con una medida naturalmente inducida por la transformación Bilipschitz. Veremos también que los conceptos de dimensión de Assouad y de Hausdorff son invariantes por estas transformaciones. Diremos que S es una transformación Lipschitz del espacio casi-métrico (X, d) en el espacio casi-métrico (Y, δ) si $S : X \to Y$ y existe $c > 0$ tal que

$$\delta(S(x_0), S(x_1)) \leq cd(x_0, x_1),$$

para toda elección de x_0 y x_1 en X.

La transformaciónS es Bilipschitz de (X, d) en (Y, δ) si $S : X \to Y$ es biyectiva y además, S y S^{-1} son transformaciones Lipschitz de (X, d) en (Y, δ) y de (Y, δ) en (X, d), respectivamente. Para mayor precisión a veces diremos que S es Bilipschitz con constantes c_1 y c_2, si c_1 es una constante Lipschitz de S y c_2 una de S^{-1}.

Veamos cómo se relaciona una bola y su imagen bajo una transformación Bilipschitz.

Lema 1.14.1. *Sea S una transformación Lipschitz de (X, d) en (Y, δ), con constante $c > 0$, entonces para todo*

$x \in X$ y $r > 0$ se verifica que

$$S(B_d(x,r)) \subset B_\delta(S(x), cr). \tag{1.62}$$

Demostración. Sea $z \in S(B_d(x,r))$, entonces existe $x_1 \in X$, tal que

$$z = S(x_1) \quad \text{y} \quad d(x_1, x) < r.$$

Dado que S es una transformación Lipschitz del espacio (X,d) en (Y,δ) se verifica que

$$\delta(z, S(x)) = \delta(S(x_1), S(x)) \leq cd(x_1, x) < cr,$$

lo que muestra que $z \in B_\delta(S(x), cr)$.

□

Proposición 1.14.1. *Sean (X,d) e (Y,δ) como en el Lema 1.14.1. Si S es Bilipschitz con constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ entonces para todo $x \in X$ y $r > 0$ vale que*

$$B_\delta(S(x), c_2^{-1}r) \subset S(B_d(x,r)) \subset B_\delta(S(x), c_1 r). \tag{1.63}$$

La demostración de la Proposición 1.14.1 se obtiene por aplicación del lema anterior a S y S^{-1}.

Un caso particular de la Proposición 1.14.1, se obtiene cuando $S : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ es una transformación Bilipschitz, que se define a través de una función φ Lipschitz, con constante M, con valores reales definida en $\mathbb{R}^n$. Más precisamente si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y existe $M > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq M|x - x'|, \quad \text{para todo } x, x' \in \mathbb{R}^n. \tag{1.64}$$

la aplicación $S : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $S(x, y) = (x, y - \varphi(x))$ es Bilipschitz com constantes $c_1 = c_2 = 2(M + 1)$.

Corolario 1.14.1. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante M. Sea S la transformación definida en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por $S(x, y) = (x, y - \varphi(x))$. Entonces para todo $r > 0$ y para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, vale que*

$$Q_{c_2^{-1}r}(S(x, y)) \subset S(Q_r(x, y)) \subset Q_{c_1 r}(S(x, y)). \quad (1.65)$$

$c_2 = c_1 = 2(M + 1)$.

La siguiente proposición establece que la dimensión de Hausdorff es invariante por transformaciones de Bilipschitz.

Proposición 1.14.2. *Sea S una transformación bi-lipchitz del espacio casi-métrico (X, d) en el espacio casi-métrico (Y, δ), entonces $dim_H Y = dim_H X$.*

Demostración. Sea $\{\mu_i\}$ un ϵ-cubrimiento de X. Dado que $\delta\,(S(x_0, s(x_1)) \leq cd(x_0, x_1)$, para todo x_0, x_1 en X, y como para cada i, vale que $|S(\mu_i)|_\delta \leq c|\mu_i|_d$, donde $|.|_\delta$ y $|.|_d$ indican las funciones diámetro con respecto a la casi-métrica δ y d, respectivamente.

Notemos además que $\{S(\mu_i)\}$ es un $\epsilon' = c\epsilon$-cubrimiento de Y. De aquí que

$$\mathcal{H}^s_{\epsilon'}\,(S(X)) \leq c^s \mathcal{H}^s_\epsilon(X). \quad (1.66)$$

Si $s > \dim_H X$, entonces de 1.66 se obtiene que $\mathcal{H}^s_{\epsilon'}(S(X)) = 0$, lo que implica que $\dim_H Y \leq s$, para todo $s > \dim_H X$ por lo que $\dim_H Y \leq \dim_H X$. Para obtener la desigualdad contraria se procede en igual forma pero aplicando S^{-1}, a un ϵ- cubrimiento en Y.

□

No sólo la dimensión de Hausdorff es un invariante por transformación Bilipschitz, también lo es la de Assouad.

Teorema 1.14.1. *Si (X, d) e (Y, δ) son espacios casi-métricos Bilipschitz equivalentes, entonces $dim_A X = dim_A Y$, donde $dim_A X$ denota la dimensión de Assouad de X.*

Demostración. Sea T una transformación Bilipschitz de X en Y. Por la Proposición 1.14.1, existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que $B_\delta(T(x), c_2^{-1}r) \subset T(B_d(x,r)) \subset B_\delta(T(x), c_1 r)$.

Demostraremos que $\{s : \exists C/\sharp(B_d(x, \lambda r) \bigcap A') \leq C\lambda^s; \forall \lambda \geq 1, \forall A' r$-disperso con respecto a d, para todo $r > 0,\ \forall x \in X\ \} \subset \{\sigma : \exists \widetilde{c}/\sharp(B_\delta(y, \lambda\rho) \cap A) \leq \widetilde{c}\lambda^\sigma, \forall\lambda \geq 1, \forall A \rho$-disperso con respecto a δ, para todo $\rho > 0,\ \forall y \in Y\}$
En efecto dado un tal s y A un conjunto ρ-disperso en Y, puesto que $\delta(y_i, y_j) \geq \rho$ si $i \neq j$, tenemos que $A' = T^{-1}A$ es $\frac{\rho}{c_2}$ disperso en X con respecto a d. Por consiguiente

$$\sharp(B_\delta(y, \lambda\rho) \cap A) \leq \sharp((TB_d(T^{-1}(y), \lambda\rho c_2) \cap T(T^{-1}(A))))$$

$$= \sharp[T(B_d T^{-1}(y), \lambda\rho c_2) \cap A')]$$

$$= \sharp(B_\delta(T^{-1}(y), \lambda\Big(\frac{\rho}{c_2}\Big)c_2^2) \cap A') \leq c(c_2^2\lambda)^s = cc_2^{2s}\lambda^s.$$

□

"Medidas que duplican y propiedades de separación métrica. Extensión de medidas con la propiedad de duplicación. " - L. Nitti

El siguiente resultado establece que si entre dos espacios casi-métricos existe una transformación Bilipschitz y si uno de ellos es de tipo homogéneo, podemos construir directamente una medida duplicante en el otro. El teorema se basa en el Lema 1.14.1 y la Proposición 1.14.1.

Teorema 1.14.2. *Sean* (X, d, μ) *espacio de tipo homogéneo,* (Y, δ) *espacio casi-métrico y* S *transformación Bilipschitz de* X *en* Y*. Entonces la función de conjunto* $\nu(E) = \mu(S^{-1}(E))$ *define una medida de Borel en* Y *tal que* (Y, δ, ν) *resulta un espacio de tipo homogéneo.*

Demostración. Notemos primero que la preimagen por S de conjuntos borelianos produce conjuntos borelianos y que la σ-aditividad de ν se sigue de la de μ y de la inyectividad de S, de lo que se deduce que ν está bien definida como medida en los borelianos de Y.

Observemos además, que a partir de la Proposición 1.14.1, se obtiene que

$$B_d(S^{-1}(y), c_1^{-1}r) \subset S^{-1}(B_\delta(y, r)) \subset B_d(S^{-1}(y), c_2 r) \tag{1.67}$$

siendo c_2 una constante de Lipschitz para S^{-1} y c_1 una constante de Lipschitz para S.

Dados $y \in Y$ y $r > 0$, por (1.67), se verifica que

$$\nu(B_\delta(y, (2 + c_1)r)) \leq \mu(B_d(S^{-1}(y), (2 + c_1)c_2 r)) \leq c[\mu(B_d(S^{-1}(y), r))]$$

$$\leq \tilde{c}\mu(S^{-1}(B_\delta(y, c_1 r))) \leq c^*\nu(B_\delta(y, c_1 r)),$$

de lo que se concluye que (Y, δ, ν) es de tipo homogéneo.

□

1.15. Abiertos con frontera regular en el espacio euclidiano: Propiedad del cono interior

El problema amplio de la regularidad de la frontera de un dominio en el espacio euclídeo en relación con la extensión de clases especiales de funciones ha sido profundamente investigado. Un resumen de los resultados más relevantes en esta dirección con abundantes referencias bibliográficas se puede encontrar en [G]. Dado un conjunto Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, nos proponemos encontrar condiciones que permitan describir algún tipo de regularidad en la frontera de Ω en términos de propiedades que sólo involucren los objetos geométricos básicos existentes en espacios casi-métricos: las bolas en la casi-distancia.

Los conjuntos a los que haremos primero referencia, son aquellos para los cuales en cada punto del borde, es posible construir un cono interior con vértice en dicho punto.

Es sabido que la condición de Lipschitz con constante $M : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, equivale a la condición geométrica siguiente: en cada punto P de la gráfica se puede poner un doble cono de apertura y eje fijos, de manera que el único punto de intersección del gráfico de f con dicho cono, sea precisamente el punto P.

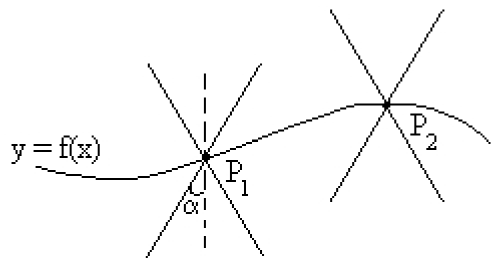


Figura 1.15.1

Observemos que la condición de apariencia más débil, consistente en imponer al supergráfico de f una condición de cono interior con eje vertical, es equivalente a la de Lipschitz.

En efecto, sea f de tipo Lipschitz, con constante $M > 0$ entonces para todo $x, x' \in \mathbf{R}^n$, vale que $f(x) \leq M|x - x'| + f(x')$. Es decir que la gráfica de f se mantiene por debajo de un cono con vértice en $(x', f(x'))$, de eje fijo y amplitud que depende de M. Recíprocamente, supongamos que para todo punto $P = (x', f(x'))$ en el gráfico de f se tiene que éste está debajo del cono de apertura M con vértice en P. Esto significa que $f(x) \leq M|x - x'| + f(x')$, para todo x. Entonces $f(x) - f(x') \leq M|x - x'|$, para todo x y

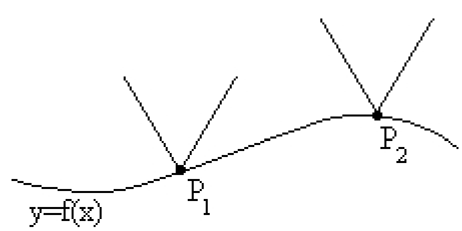


Figura 1.15.2

para todo x'. Puesto que los roles de x y x' son intercambiables tenemos $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$, es decir que f es Lipschitz con constante M y también habrá un cono doble.

Notemos en cambio que por ejemplo el supergráfico de la función $f(x) = -\sqrt{|x|}$, que no es Lipschitz uno, tiene una propiedad de cono interior: admite conos con ejes variables. Este concepto de propiedad de cono interior permite dar una definición de regularidad que ha sido usada para extender espacios clásicos de funciones. El conjunto $\Gamma_{\vec{v},\alpha} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n - \{0\} \ / \ \frac{\vec{y}.\vec{v}}{|y|} > \cos \alpha \right\}$, con $0 < \alpha < \pi/4$, es el cono de dirección $\vec{v} \in S^{n-1}$ y amplitud α con vértice en el origen y $\Gamma^h_{\vec{v},\alpha} = \Gamma_{\vec{v},\alpha} \cap B(0, h)$, representa el cono truncado centrado en el origen, de altuta h, de dirección $\vec{v}$ y amplitud α, donde $B(0, h)$ es la bola de centro en el origen y radio h. El cono truncado de dirección $\vec{v}$, de altura h y amplitud α, y vértice en $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es el conjunto $\Gamma^h_{\vec{v},\alpha}(x) = \Gamma^h_{\vec{v},\alpha} + x$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado, decimos que Ω tiene la *propiedad del cono interior*, si existen α y h tales que para todo $x \in \Omega$ existe $\vec{v} \in S^{n-1}$, tal que $\Gamma^h_{\vec{v},\alpha}(x) \subset \Omega$.

Conjuntos que son supergráficos de funciones $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, tienen la propiedad del cono interior, como por ejemplo,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : (x \in \mathbb{R}^{n-1}) \wedge \ (y > \varphi(x))\}.$$

En el lema que sigue, veremos que la propiedad del cono interior implica alguna regularidad para la frontera de un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$. Esta regularidad se reflejará en la existencia de un cono cuyo interior está contenido en Ω, con vértice en cada punto de $\partial\Omega$.

Lema 1.15.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Si Ω tiene la propiedad del cono interior, entonces existen $\alpha' \in (0, \pi/4)$ y $h' > 0$ tales que para cada y en $\partial\Omega$ existe $\bar{v} \in S^{n-1}$ tal que $\Gamma^{h'}_{\bar{v},\alpha'}(y) \subset \Omega$.*

Demostración. Sea $y \in \partial\Omega$, entonces existe una sucesión $\{x_k\} \subset \Omega$ tal que $x_k \to y$. Por hipótesis,existen h y α y para cada x_k existe $\vec{v}_k \in S^{n-1}$, tal que $\Gamma^h_{\vec{v}_k,\alpha}(x_k) \subset \Omega$. Dado que S^{n-1} es compacto, existe una subsucesión convergente $\{\vec{v}_{k_j}\}$ de $\{\vec{v}_k\}$ tal que $\vec{v}_{k_j} \to \vec{v}_0$, con $\vec{v}_0 \in S^{n-1}$.

Notemos que $B(y, \dfrac{h}{2}) \subset B(x_{k_j}, h)$, para $j \geq j_1$. Afirmamos que si $z \in \Gamma^{\frac{h}{2}}_{\vec{v}_0,\frac{\alpha}{2}}(y)$, entonces existe j_0 suficientemente grande tal que $z \in \Gamma^h_{\vec{v}_{k_j},\alpha}(x_{k_j}) \subset \Omega$, para todo $j \geq j_0$. De aquí tendremos que $\Gamma^{h/2}_{\vec{v}_0,\alpha/2}(y) \subset \Omega$ y el lema estará probado.

Probemos la afirmación. Sea $z \in \Gamma^{\frac{h}{2}}_{\vec{v}_0,\frac{\alpha}{2}}(y)$ entonces $z - y \in \Gamma^{\frac{h}{2}}_{\vec{v}_0,\frac{\alpha}{2}}(0)$. Luego $\dfrac{(z-y).\vec{v}_0}{|z-y|} > \cos\dfrac{\alpha}{2}$, por consiguiente para j grande, digamos $j \geq j_2$, por continuidad tenemos que $\dfrac{(z-x_{k_j}).\vec{v}_{k_j}}{|z-x_{k_j}|} > \cos\alpha$, entonces $z \in \Gamma^h_{\vec{v}_{k_j},\alpha}(x_{k_j})$. Como también $z \in B(y, \frac{h}{2}) \subset B(x_{k_j}, h)$ para $j \geq j_1$, vale que $z \in \Gamma^h_{\vec{v}_{k_j},\alpha}(x_{k_j})$, para $j_0 = \text{máx}\{j_1, j_2\}$.

$\square$

Veamos ahora que si Ω, tiene la propiedad del cono interior, entonces existe alguna familia de tipo Whitney para la cual la frontera es "accesible", por cubos, bolas, etc.

Diremos que una sucesión $W = \{B_i : i \in\}$ de bolas en $\mathbb{R}^n$, es una *"familia de Whitney"* para el abierto Ω si satisface

a) las bolas B_i son disjuntas dos a dos,

b) cada B_i está contenida en Ω,

c) existen constantes α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 r_i \leq d(y_i, \partial\Omega) \leq \alpha_2 r_i$ donde $B_i = B(y_i, r_i)$.

A veces la condición a) se podrá sustituir por la de solapamiento acotado. Hacemos notar que hemos eliminado el requisito de cubrimiento y por esta razón llamamos a W familia de Whitney en lugar de cubrimiento de Whitney.

Proposición 1.15.1. *Sea Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, que verifica la propiedad del cono interior, entonces existe una familia $W = \{B(x_i, r_i)\}$ de Whitney para Ω y una constante $c > 1$ tal que para todo $n \in N$ se tiene que $\bigcup_{i \geq n} B(x_i, cr_i) \supset \partial\Omega$.*

Demostración. Sea Ω en las condiciones de la hipótesis. Como Ω verifica la propiedad del cono interior, por el Lema 1.15.1, existen α y h, tales que para cada $x \in \partial\Omega$, existe un cono $\Gamma^h_{\vec{v},\alpha}(x) \subset \Omega$.

Sea $\mathcal{F}_x$ la familia de todas las bolas con centro en la semirecta generada por $\bar{v}$, que es eje del cono $\Gamma_{\bar{v},\alpha}$, que son maximales dentro de $\Gamma^h_{\bar{v},\alpha/2}(x)$. Asi, $\mathcal{B} = B(y_x, r(y_x))$ está en $\mathcal{F}_x$ si $d(y_x, x) = r(y_x)cosec\frac{\alpha}{4}$. Sean $Y_x = \{y : y\, es\, centro\, de\, \mathcal{B}\, para\, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_x\}$, $E = \bigcup_{x\in\partial\Omega} Y_x$ y $\mathcal{F} = \{\mathcal{B} = B(y, r(y)) : Y \in Y_x,\ x \in \partial\Omega\}$.

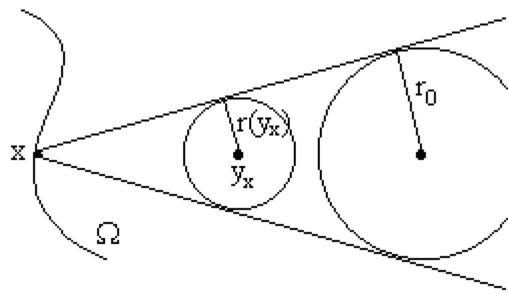


Figura 1.15.3

Dado que E es acotado se puede aplicar el Lema 1.7.4 para obtener una sucesión de bolas $\{B(y_i, r_i)\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$, con las siguientes propiedades:

a) Las bolas $B(y_i, r_i)$ son disjuntas dos a dos,

b) $B(y_i, r_i) \subset \Omega$,

además todos los ejes de los conos truncados están cubiertos por $\bigcup_i B(y_i, 4r_i)$ y, si α se toma suficientemente chico también tendremos que cada $B(y_i, 5r_i)$ está contenida en Ω.

Veamos ahora que también se verifica (c). Si $B(y_i, r_i) \in \mathcal{F}$, entonces $B(y_i, r_i) \subset \Gamma^h_{\bar{v},\alpha}(x)$, para algún $x \in \partial\Omega$, por lo tanto

$$r_i \leq d(y_i, \partial\Omega) \leq d(y_i, x) = c_1 r_i, \tag{1.68}$$

siendo $c_1 = \operatorname{cosec}\alpha/4$.

De a), b) y c), se deduce que $W = \{B(y_i, r_i)\}_{i\in I}$ es una familia de Whitney para Ω.

Observemos que basta probar que existe $C > 1$ tal que $\bigcup\limits_{i\geq N} B(y_i, Cr_i) \supset \partial\Omega$ para n suficientemente grande.

Si $x_0 \in \partial\Omega$ entonces existe $\vec{v} \in S^{n-1}$ tal que $\Gamma^h_{\vec{v},\alpha}(x_0) \subset \Omega$. Para todo $0 < r < r_0$ existe y en el eje del cono tal que $B(y, r) \subset \Gamma^h_{\vec{v},\alpha/2}(x_0)$, con $B(y, r)$ tangente al borde de $\Gamma_{\vec{v},\alpha}(x_0)$ y dado que el eje del $\Gamma_{\vec{v},\alpha}(x_0)$ está cubierto por la familia $B(y_i, 4r_i)$ existe $B(y_j, r_j) \in W$ tal que $y \in B(y_j, 4r_j)$. Veamos que r es comparable a r_j.

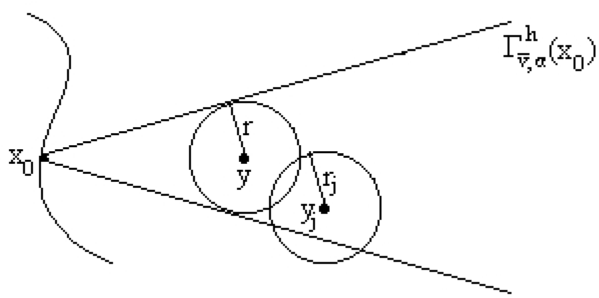


Figura 1.15.4

Como $d(y, \Omega^c) \geq r$ porque $B(y, r) \subset \Omega$ y también $d(y, \Omega^c) \leq d(y, x_0) = c_1 r$, tenemos que

$$r \leq d(y, \Omega^c) \leq c_1 r. \tag{1.69}$$

Como $y \in B(x_j, 4r_j)$, tenemos

$$a' r_j \leq d(y, \Omega^c) \leq b' r_j \qquad (1.70)$$

De las desigualdades (1.69) y (1.70), se obtiene

$$\frac{r}{b'} \leq r_j \leq \frac{c_1}{a'} r. \qquad (1.71)$$

Es claro que x_0 está contenido en una dilatacón fija de $B(y, r)$ y dado que $y \in B(x_j, 4r_j)$ y que $r_j \geq cr$ tendremos que $B(y_j, \tilde{c} r_j)$ contiene a x_0 □

Un ejemplo en $\mathbb{R}$, de un conjunto que no verifica la propiedad del cono interior y para el cual tampoco existe una familia de Whitney que *controle* a su frontera, es el siguiente:

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\epsilon}{2^n}, \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2^n}\right), \qquad 0 < \epsilon < 1.$$

Observemos que si $\vec{v} \in S^{n-1}$ para $n = 1$, entonces $\vec{v} = (0, 1)$ ó $\vec{v} = (0, -1)$. Es claro entonces que no existe h tal que para todo $x \in \Omega$, un segmento de longitud h esté contenido en Ω. Por lo tanto, no se verifica la propiedad del cono interior.

La familia $W_k = \{I_{k_j} \subset (\frac{1}{k} - \frac{\epsilon}{2^k}, \frac{1}{k} + \frac{\epsilon}{2^k}) \ / \ l(I_{k_j}) = \frac{\epsilon}{2^{k+j}} = d(I_{k_j}, \Omega^c), \ j \geq 2\}$, $k \geq 1$ y sea $W = \{I_{k_j} \ / \ I_{k_j} \in W_k, \ k \geq 1\}$ es de Whitney para Ω.

Observemos ahora que para cualquier $I_{k_j} \in W_k$, $d(I_{k_j}, 0) > \frac{1}{k} - \frac{\epsilon}{2^k}$ y el radio de $I_{k_j} \leq \frac{1}{2^k}$, con lo que para k suficientemente grande no es posible encontrar que una dilatación fija de dichos intervalos cubran al cero pues $\dfrac{d(I_{k_j},0)}{\frac{1}{2^k}} \geq \dfrac{2^k-\epsilon}{k} \longrightarrow \infty$, para $k \longrightarrow \infty$.

Un conjunto de construcción similar pero de estructura topológica mucho más complicada que no verifica la propiedad del cono interior y como se verá en la sección siguiente, tampoco verifica la propiedad de control de la frontera, pues la medida de la misma es positiva, es el siguiente: $\Omega = \bigcup_n (q_n - \dfrac{\epsilon}{2^n}, q_n + \dfrac{\epsilon}{2^n})$, donde $\{q_n\}$ es una numeración de los racionales pertenecientes al intervalo $[0,1]$.

1.16. Abiertos con frontera regular en espacios casi-métricos

La Proposición 1.15.1 y los ejemplos al final de la Sección 1.15 muestran que alguna información sobre la regularidad de la frontera de un abierto está contenida en alguna familia de tipo Whitney del mismo. La noción de cono interior, con todos los ingredientes del caso euclídeo, parece imposible de trasponer a espacios métricos. No obstante la tesis de la Proposición 1.15.1 tiene sentido en contextos generales. El resultado central de esta sección es que este punto de partida es adecuado al menos en lo que respecta a la medida de bordes regulares: Si Ω es regular, o $\partial\Omega$ es regular, en un espacio de tipo homógeneo entonces $\mu(\partial\Omega) = 0$.

Sean Ω un abierto acotado no vacío ni total en X para (X,d) un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita. Una sucesión $W = \{B_i\}$ de d-bolas en X, es un *cubrimiento de Whitney* para Ω si con $B_i = B(x_i, r_i)$, se tiene

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i \neq j$;

b) $\bigcup_i \widetilde{B_i} = \Omega$, donde $\widetilde{B_i} = B(x_i, cr_i)$, con $c > 1$;

c) existen constantes c_1 y c_2 tales que si $d(x)$ denota la distancia de x a Ω^c, se tienen las desigualdades $c_1 r_i \leq d(x) \leq c_2 r_i$, para todo $x \in \widetilde{B_i}$.

Dada la flexibilidad de los cubrimientos de Whitney, podemos suponer además, ver [MS1], que una familia $\{\widehat{B_i}\} = \{B(x_i, dr_i)\}$ de dilataciones de las bolas de la familia $\{B_i\}$ bastan para cubrir Ω, donde la constante d es estrictamente menor que c.

Diremos que un cubrimiento de Whitney $W = \{B_i\}$ para Ω *controla a la frontera de* Ω si existe $a > 0$ tal que para todo $k \in$, $\bigcup\limits_{i \geq k} \bar{B}_i \supset \partial\Omega$ con $\bar{B}_i = B(x_i, ar_i)$. Diremos que Ω tiene la *propiedad de regularidad* R o que $\partial\Omega \in R$, si existe un cubrimiento de Whitney para Ω que controla a la frontera de Ω.

Proposición 1.16.1. *Sea (X, d) un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita. Sea Ω un abierto acotado no vacío, $\Omega \neq X$ tal que $\partial\Omega \in R$. Sea W un cubrimiento de Whitney que controla a $\partial\Omega$. Sea $k_0 > 1$. Sea $\{W_j\}$ la partición por niveles de W que obtuvimos en la Sección 1.11 asociada a k_0. Entonces existe una constante $b > 1$ tal que para todo $m \in$*

$$\bigcup_{j \geq m} \bigcup_i \overline{B_i^j} \supset \partial\Omega, \quad \textit{con } \overline{B_i^j} = B(x_i^j, br_i^j). \tag{1.72}$$

Recíprocamente, si existe W una familia de Whitney para Ω y $k_0 > 1$ tal que (1.72) vale para la partición $W = \bigcup_j W_j$, asociada a k_0 entonces $\partial\Omega \in R$.

Demostración. Como el conjunto Ω es acotado, cada nivel W_k tiene un número finito de elementos. Por consiguiente, tomando $b = a$, toda unión como la de (1.72) contiene, en definitiva, una unión de la forma $\bigcup_{i \geq i_0} \bar{B}_i$ que por hipótesis cubre a $\partial\Omega$ cualquiera sea i_0. La recíproca es igualmente sencilla. $\square$

El lema siguiente, establece que el control de la frontera de un abierto Ω es independiente del cubrimiento de Whitney W de Ω.

Lema 1.16.1. *Sea (X, d) un espacio casi métrico con dimensión métrica finita y Ω abierto y acotado, $\Omega \subset X$, tal que $\emptyset \neq \Omega \neq X$. Si Ω satisface R, entonces toda familia de Whitney de Ω controla a la frontera de Ω.*

Demostración. Sea W una familia de Whitney para Ω que controla a la frontera de Ω. Tomando por ejemplo $k_0 = 2$ podemos particionar a W de acuerdo a los niveles $W = \bigcup_n W_n$, $W_n = \{B_i^n\}$. Por la Proposición 1.16.1 tenemos que existe $b > 1$, tal que para todo n, $\bigcup_{n \geq m} \bigcup_i B(x_i^n, br_i^n) \supset \partial\Omega$. Dado que $\{B_i^n\}$ es una familia de Whitney existe $c_1 > 0$ tal que $\bigcup_n \bigcup_i \widetilde{B_i^n} = \bigcup_n \bigcup_i B(x_i^n, c_1 r_i^n) = \Omega$ y también $r_i^n \simeq d(\widetilde{B_i^n}, \Omega^c)$. Sea $W' = \{B'^l_j\}$ otra familia de Whitney para Ω, a la que ya entendemos descripta en niveles y que por ser de Whitney existe $c_2 > 1$ tal que $\bigcup_j \bigcup_l B(x'^l_j, c_2 r'^l_j) = \bigcup_j \bigcup_l \bar{B}'^l_j = \Omega$ y $r'^l_j \simeq d(B'^l_j, \Omega^c)$. Es claro que para toda $B'^l_j \in W'$, existe $B^n_i \in W$ tal que $\widetilde{B^n_i} \cap \bar{B}'^l_j \neq \emptyset$ y en tal caso existe $\bar{c} > 0$, de modo que $\widetilde{B^n_i} \subset B(x'^l_j, \bar{c} r'^l_j)$. Veamos esto: Si, $\widetilde{B^n_i} \cap \bar{B}'^l_j \neq \emptyset$, existe $y \in \Omega$ tal que $d(y, \Omega^c) \simeq r^n_i$ y $d(y, \Omega^c) \simeq r'^l_j$, pues W y W' son familias de Whitney, de lo que se obtiene que $r^n_i \simeq r'^l_j$. Por lo tanto, si $z \in \widetilde{B^n_i}$, entonces

$$d(z, x'^l_j) \leq K[K(d(z, x^n_i) + d(x^n_i, y)] + d(y, x'^l_j)]$$

$$\leq K[K[c_1 r^n_i + c_1 r^n_i] + c_2 r'^l_j] \leq \bar{c} r'^l_j,$$

observemos que la constante K es la constante de la casi-métrica. Notemos también que cualquier dilatación de B^n_i estará en esta situación, es decir contenida en una dilatación fija de la bola B'^l_j. En particular la bola $B(x^n_i, cr^n_i)$ estará incluida en una bola $\overset{*}{B'}{}^l_j$ dilatada de B'^l_j.

Sea $m \in$ y consideremos $F_1 = \{B'_j{}^l \in W',\ l \geq m\}$ y $F_2 = \{B^n_i\ /\ \widetilde{B^n_i} \cap \bar{B}'_j{}^l \neq \emptyset,$ para algún $B'_j{}^l \in F_1\}$. Sea $N_0 = \text{mín}\ \{n \in\ /\ B^n_i \in F_2\}$, es claro que por la hipótesis

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{n \geq N_0} \bigcup_i B(x^n_i, cr^n_i). \tag{1.73}$$

Mostremos ahora que si $n \geq N_0$, cualquier bola $B^n_i \in F_2$. Asumimos que la separación en niveles de la familia W' respecto de la constante $k'_0 = 2$. Dado que $B^{N_0}_i \in F_2$ y si $r^{N_0}_i$ es su radio, entonces $r^{N_0}_i \simeq r'^l_j$, con $l \geq m$, siendo

${r'}^l_j$ el radio de una bola que pertenece a F_1, de aquí que existen constantes positivas α y β tales que

$$\alpha {r'}^l_j \leq r_i^{N_0} \leq \beta {r'}^l_j \leq \beta 2^{-m}. \tag{1.74}$$

Sea B_i^n perteneciente a W con $n \geq N_0$, entonces existe ${B'}^l_j \in W'$ tal que $\widetilde{B_i^n} \cap \bar{B'}^l_j \neq \emptyset$, por lo tanto sus radios son comparables, esto es: $r_i^n \simeq r_j^l$, $n \geq N_0$. Aseguramos que $l \geq m$, ya que de esto último y de (1.74), se obtiene que $\alpha 2^{-l} \leq r_i^n \leq r_i^{N_0} \leq \beta 2^{-m}$, por lo tanto $B_i^n \in F_2$, $n \geq N_0$.

Por (1.73), se obtiene entonces que $\partial\Omega \subset \bigcup_{n \geq N_0} \bigcup_i B(x_i^n, cr_i^n) \subset \bigcup_{l \geq m} \bigcup_j \overset{*}{{B'}^l_j}$, lo que demuestra que W' controla la frontera de W.

$\square$

Para estudiar el efecto del cambio de métricas y reflejar la dependencia de la regularidad respecto de las distintas casi-métricas involucradas, escribiremos $\Omega \in R(d)$ para describir sintéticamente el hecho que Ω tiene la propiedad R con respecto a la casi-métrica d en X.

El siguiente lema, nos muestra que la regularidad de la frontera, es invariante por cambio de casi-métricas equivalentes.

Lema 1.16.2. *Sea (X, d) espacio casi-métrico con dimensión métrica finita. Sean d y δ, casi-métricas equivalentes definidas en $X, \Omega \neq \emptyset$, abierto, acotado y $\Omega \subsetneq X$, entonces $\Omega \in R(d)$ si y sólo si $\Omega \in R(\delta)$.*

Demostración. Sea Ω que pertenece a $R(d)$, entonces existe $W = \{B_{d,i}^n\}$, cubrimiento de Whitney de d-bolas para Ω y una constante $c > 1$ tal que para todo $m \in$,

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{n\geq m}\bigcup_{i}\widetilde{B_{d,i}^n} \quad \text{siendo} \quad \widetilde{B_{d,i}^n} = B_d(x_i^n, cr_i^n) \tag{1.75}$$

Dado que d es equivalente a δ existen c_1 y c_2 constantes positivas tales que $c_1\, d(x,y) < \delta(x,y) < c_2\, d(x,y), \quad$ para todo $(x,y) \in X \times X$, de modo que para todo $x \in \Omega$ y $r > 0$ se tienen las inclusiones.

$$B_d(x,r) \subset B_\delta(x, c_2 r) \quad \text{y} \quad B_\delta(x, \frac{r}{c_1}) \subset B_d(x,r) \tag{1.76}$$

Afirmamos que la familia $\{B_\delta(x_i^n, \frac{r_i^n}{c_1})\}$ es un cubrimiento de Whitney para Ω. En efecto:

i) La bola $B_\delta(x_i^n, \frac{r_i^n}{c_1})$ es disjunta con $B_\delta(x_j^m, \frac{r_j^m}{c_1})$ para todo $(i,m) \neq (j,m)$; esto se obtiene de (1.76).

ii) Existe una constante $\alpha > 1$, tal que $\Omega \subset \bigcup_i \bigcup_n B_\delta(x_i^n, \alpha r_i^n)$. Se obtiene del hecho que $W = \{B_{d,i}^n\}$ es una familia de Whitney para Ω, por lo que existe $\bar{\alpha} > 0$, tal que $\Omega = \bigcup_i \bigcup_n B_d(x_i^n, \bar{\alpha} r_i^n)$. Por (1.76) resulta que $B_d(x_i^n, \bar{\alpha} r_i^n) \subset B_\delta(x_i^n, \bar{\alpha} c_2 r_i^n)$, con lo que se verifica ii) con $\alpha = c_2\bar{\alpha}$.

iii) $r_i^n \simeq \delta(x_i^n, \Omega^c)$. Por propiedad de la familia $\{B_{d,i}^n\}$, existen α_1 y α_2 constantes positivas, tales que para todo $(i,n) \in^2$, $\alpha_2 d(x_i^n, \Omega^c) \leq r_i^n \leq \alpha_1 d(x_i^n, \Omega^c)$ y por la relación entre las métricas, vale que $\dfrac{\alpha_2}{c_2}\delta(x_i^n, \Omega^c) \leq r_i^n \leq \dfrac{\alpha_1}{c_1}\delta(x_i^n, \Omega^c)$.

De (1.75), y por aplicación de (1.76) se obtiene que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{n \geq m} \bigcup_i B_\delta^n(x_i^n, 2k^2(c + c_2 c_1) r_i^n),$$

así Ω también verifica la propiedad R con la familia de Whitney $\{B_\delta(x_i^n, \dfrac{r_i^n}{c_1})\}$, respecto de la métrica δ.

□

Estamos en condiciones de probar el resultado central de la sección: si Ω es regular entonces su frontera mide cero. El argumento es una generalización del usado en la prueba del Teorema 1.13.1 en el que se construyó un cubrimiento de Whitney de $X - \{x_0\}$.

Teorema 1.16.1. *Sea $\Omega \subset X$, Ω abierto y acotado de (X, d, μ) espacio de tipo homogéneo. Si Ω tiene la propiedad R de la frontera, entonces $\mu(\partial\Omega) = 0$.*

Demostración. Dado que Ω verifica R, entonces existe una constante c tal que para todo $n \in$, la familia $\{B(x_i, cr_i) = \widetilde{B_i}\}_{i \geq n}$ es tal que $\bigcup_{i \geq n}\{\widetilde{B_i}\} \supset \partial\Omega$, siendo $\{B_i\}$ un cubrimiento de Whitney de Ω. Por la propiedad de duplicación de la medida, para todo i se verifica que

$$\mu(\widetilde{B_i}) \leq c\mu(B_i),$$

entonces

$$\mu(\partial\Omega) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu(\widetilde{B_i}) \leq c \sum_{i=n}^{\infty} \mu(B_i)$$

y ya que las bolas B_i son disjuntas y están contenidas en una bola fija, puesto que Ω es acotado, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(B_i) = 0.$$

□

El Teorema 1.10.1 muestra la conexión entre los conceptos de punto aislado y de átomo en un espacio de tipo homogéneo. El resultado del Teorema 1.16.1, puede ser interpretado de la siguiente manera: Si un conjunto E de un espacio de tipo homogéneo, tiene medida positiva no puede estar contenido en la frontera de un abierto regular.

Ejemplos clásicos en $\mathbb{R}$ muestran que no todo conjunto abierto y acotado de un espacio de tipo homogéneo verifica que la medida del borde sea cero, ni aún en $\mathbb{R}$. En efecto. Sea $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty}(q_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}})$, donde q_n representa un número racional que pertenece al intervalo $[0,1]$ y $0 < \epsilon < 1$. Notemos que $\mu(\partial\Omega) = \mu(\bar{\Omega} - \Omega) = \mu([0,1] - \Omega)$ y dado que $\mu(\Omega) \leq \epsilon$, vale que $\mu(\partial\Omega) \geq 1 - \epsilon > 0$. Es inmediato entonces concluir que Ω no verifica la propiedad de regularidad R de la frontera.

Notemos que en nuestra generalización a espacios métricos hemos perdido situaciones particulares importantes del contexto euclídeo. Hemos sustituído una “familia de

Whitney" por un "cubrimiento de Whitney" porque en el contexto abstracto no podemos apriori describir de manera sencilla "los ejes de los conos" y así las propiedades (b) en la Sección 1.15 y en ésta tienen significados diferentes.

Observamos también que, ni aún en $\mathbb{R}^n$ se tiene que R es necesaria para que $\mu(\partial\Omega) = 0$. Consideramos los típicos ejemplos de cúspides. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |x|^{1/2} < y < 2\}$. Veamos que $\partial\Omega$ no verifica la propiedad de regularidad R. Es claro que el lugar geométrico de los puntos de Ω cuya distancia a la frontera es una constante δ, con $0 < \delta < 1$ es localmente el gráfico de una función $\psi_\delta(x)$. A continuación encontraremos una fórmula implícita para ψ_δ y lo haremos para valores de δ de la forma $\delta = 2^{-k}$, $k \in$. Para tal fin consideraremos la ecuación de la recta normal N al gráfico de $\varphi(x) = |x|^{1/2}$ en el punto $(x_0, \varphi(x_0))$, $0 < x_0 < 1$. Dicha ecuación viene dada por

$$y = \sqrt{x_o}[2(x_0 - x) + 1]. \tag{1.77}$$

El próximo paso es detectar el valor de la coordenada x tal que

$$d[(x, \psi(x)), (x_0, \varphi(x_0)] = 2^{-k}$$

, para ello calculamos h tal que la longitud del segmento sobre N desde $x - h$ a x sea 2^{-k}. Planteamos entonces $\int_{x_0-h}^{x} \sqrt{1 + 4x_0}\, dx = 2^{-k}$, $0 < x_0 < 1$, de lo que obtenemos $h = \dfrac{2^{-k}}{\sqrt{1 + 4x_0}}$.

Si evaluamos la función obtenida en (1.77) en el punto $x = x_0 - \dfrac{2^{-k}}{\sqrt{1 + 4x_0}}$, obtenemos $y = \sqrt{x_0}[\dfrac{2^{-k+1}}{\sqrt{1 + 4x_0}} + 1]$, que representa a $\psi_{2^{-k}}(x)$. De esta manera una expresión que define implícitamente a $\psi_{2^{-k}}$ viene dada por

$$\psi_{2^{-k}}(t - \frac{2^{-k}}{\sqrt{1+4t}}) = \sqrt{t}\Big(\frac{2^{-k+1}}{\sqrt{1+4t}} + 1\Big), \qquad 0 < t < 1.$$

Observemos que los gráficos de la familia de funciones $\{\psi_{2^{-k}},\ k \in\}$ particionan naturalmente al conjunto Ω, en los subconjuntos o "bandas" de ancho 2^{-k}, estos son: $\Omega_k = \{(x,y) \in \Omega \ /\ 2^{-k+1} < d((x,y), \partial\Omega) \leq 2^{-k}\}$, $k \in$. No es difícil probar que ninguna familia de Whitney controla la frontera de Ω. Para ello veamos que el cero no podrá estar en la unión de ninguna dilatación fija de las bolas de una familia de Whitney para Ω, a partir de un nivel k suficientemente grande.

Calculemos con tal fin la razón $\dfrac{\psi_{2^{-k}}(0)}{2^{-k}}$, $k \in$. Observando el primer miembro de la ecuación anterior, hacemos $t = \dfrac{2^{-k}}{\sqrt{1+4t}}$ para hallar $\psi_{2^{-k}}(0)$, con lo que se obtiene la ecuación $4t^3 + t^2 - 4^{-t} = 0$.

Se puede probar que un intervalo en el que se encuentra la raiz real de dicha ecuación es $[\frac{3}{4}4^{-\frac{k}{2}}, 4^{-\frac{k}{2}}]$, así la solución ξ verifica $\frac{3}{4}4^{-\frac{k}{2}} \leq \xi \leq 4^{-\frac{k}{2}}$. Obteniéndose entonces que $\psi_{2^{-k}}(0) \simeq \sqrt{4^{-\frac{k}{2}}}(2{,}4^{-\frac{k}{2}} + 1)$, de aquí que para valores de k suficientemente grandes el cociente $\dfrac{\psi_{2^{-k}}(0)}{2^{-k}}$ no está acotado. Esto prueba que Ω no satisface la propiedad R.

En el resto de esta sección introducimos otra forma de describir la regularidad de un abierto. Sea Ω un abierto no vacío, ni total en X, para (X, d) un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita. Diremos que Ω verifica la *propiedad de regularidad* R_1, si existe un cubrimiento de Whitney W para Ω particionado en niveles y una constante $\alpha > 0$ tales que para todo $x \in \Omega$ y $r > 0$ existe $B_k^m \in W$ tal que $\widehat{B_k^m} \cap B(x, r) \neq \emptyset$ y $r_k^m \geq \alpha r$. Aquí $\widehat{B_k^m}$ denota la bola concéntrica con B_k^m cuyo radio es d veces el de B_k^m y $d < c$, donde c una constante tal que la bola $\widetilde{B_k^m}$ concéntrica con B_k^m cuyos radio es c veces el de B_k^m, todavía está contenida en Ω y las $\widehat{B_k^m}$ todavía cubren Ω.

Un ejemplo de un conjunto que verifica esta propiedad es el del supergráfico de una función Lipschitz. Veamos esto: sean $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función Lipchitz con constante M y $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $y > \varphi(x)\}$.

Sea $Q_r(x, y)$ un cubo con centro (x, y) en Ω. Entonces existe un cono vertical interior con vértice en (x, y), y de apertura M. Consideremos el cubo cuyo centro (x', y') está a distancia $\dfrac{r}{2}$ de (x, y) en la dirección del eje del cono y cuyo radio r' es la distancia desde (x', y') al borde del mismo, esto es $r' = \dfrac{r}{2} \sin \beta_M$, donde β_M es el ángulo que depende de la constante M. Sean $\mathcal{F}$ el cubrimiento de Whitney de cubos diádicos como en el Teorema 1.14.1 y el cubo $Q_{r'}(x', y')$, entonces existe $Q_j \in \mathcal{F}$ tal que $(x', y') \in Q_j$ y $Q_j \cap Q_r(x, y) \neq \emptyset$. De aquí que por la elección de (x', y') y r' y por propiedad de los elementos de $\mathcal{F}$, vale que

$$\frac{r}{2} \sin \beta_M \leq d((x', y'), \Omega^c) \leq diam\, Q_j + d(Q_j, \Omega^c) \leq 5\, diam\, Q_J$$

.

verificándose así que $r \leq \dfrac{10}{\sin \beta_M} diam\ Q_j$, con lo que se prueba lo deseado, con $\alpha = \dfrac{20}{\sin \beta_M}$.

El siguiente ejemplo nos muestra que no siempre es válida la propiedad mencionada, cada vez que se tiene un cubrimiento tipo Whitney para un subconjunto abierto de un subespacio X.

Sea $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, con $I_n = (n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n})$ y $F = \Omega^c$ en $X = \mathbb{R}$.
Denotamos con $W_n = \{I \subset I_n$ tal que $l(I) = d(I, I_n^c) = \dfrac{2}{2^n, 2^{j+2}}, j = 0, 1, 2, \cdots\}$.
$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ es una familia de Whitney para Ω. No es difícil ver que Ω no verifica la propiedad R_1. Consideremos $I' = (n-1, 1+n)$. Los intervalos de la familia I' de Whitney de mayor longitud a los que interseca tienen longitud $\frac{1}{2^n}$. De aquí que no es posible que exista $\alpha > 0$ tal que $\frac{1}{2^n}\alpha \geq n$ para cualquier n.

Es de notar que si se tiene un dominio acotado de borde Lipchitz este no satisface R_1 tal como está enunciada. Para dominios acotados puede ser definida una versión de dicha propiedad, que

expresamos como sigue y que contiene al caso anterior.

Sea (X, d) un espacio casi-métrico y Ω un subconjunto abierto y distinto del vacío de X. Decimos que Ω verifica la propiedad R_1, si existe un cubrimiento de Whitney particionada en niveles para Ω y una constante $\alpha > 0$, tales que para todo $x \in \Omega$ y r, siendo $r < diam\, \Omega$, existe $B_k^m \in W$ tal que $\widehat{B_k^m} \cap B(x,r) \neq \emptyset$ y $r_m \geq \alpha r$.

Lema 1.16.3. *Sea (X,d) un espacio casi-métrico con dimensión métrica finita, Ω abierto, $\Omega \subsetneq X$ y $\Omega \neq \emptyset$. Si Ω satisface R_1 con la familia $W = \{B_i^m\}$, entonces Ω satisface R_1 con toda otra familia de Whitney para Ω.*

Demostración. Sea $B = B(x,r)$, la bola con centro $x \in \Omega$, por hipótesis existen $B_i^m \in W$ y $\alpha > 0$, tal que $\widehat{B_i^m} \cap B(x,r) \neq \emptyset$ y $r_i^m \geq \alpha r$. Por otro lado si $W' = \{B_j'^l\}$ es otra familia de Whitney para Ω, vale que existe $\widehat{B_j'^l} \in W'$ tal que $(\widehat{B_i^m} \cap B) \cap B_J'^l \neq \emptyset$, veamos que en esta situación existen constantes α_1 y α_2 tales $\alpha_1 r_j'^l \leq r_i^m \leq \alpha_2 r_j'^l$, siendo $r_j'^l$ el radio $B_j'^l$. Si $y \in \widehat{B_i^m} \cap \widehat{B_j'^l}$, también pertenece a $\widetilde{B_i^m} \cap \widetilde{B_j'^l}$, por lo tanto existen C_1, C_2, C_1' y C_2' tales que

$$C_2 r_i^m \leq d(y,\Omega^c) \leq C_1 r_1^m \qquad \text{y} \qquad C_2' r_J'^l \leq d(y,\Omega^c) \leq C_1' r_j'^l$$

de lo que se obtiene que $C_2' r_j'^l \leq C_1' r_1^m$ y $C_2 r_i^m \leq C_1' r_j'^l$ y dado que por hipótesis $r \leq \alpha C_2 r_i^m \leq \alpha C_1' r_j'^l$, se prueba lo deseado. $\square$

Es claro además que al igual que la propiedad R la propiedad R_1 no depende de las casi-métricas equivalentes.

Veamos ahora que esta propiedad R_1 implica la propiedad R de regularidad de la frontera.

Lema 1.16.4. *Sea $\Omega \subset X$, Ω abierto de (X, d), un espacio casi-métrico, $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \neq X$. Si Ω tiene la propiedad R_1 entonces Ω verifica la propiedad R.*

Demostración. Sea $W = \{B_i^n\}$ un cubrimiento de Whitney para Ω con el que se satisface R_1. Sea $x \in \partial\Omega$, entonces para $r > 0$, $B(x, r) \cap \Omega \neq \emptyset$. Sea $x_1 \in B(x, r) \cap \Omega$ y tomemos la bola $B' = B(x_1, r)$. Entonces existe $B(x_{m_0}, r_{m_0}) \in W$ tal que $B(x_{m_0}, cr_{m_0}) \cap B' \neq \emptyset$ con

$$r_{m_0} \geq \alpha r, \tag{1.78}$$

de aquí que

$$d(x, x_{m_0}) \leq k[d(x, x_1) + k[d(x_1, y) + d(y, x_{m_0})]]$$

con $y \in B(x_{m_0}, cr_{m_0}) \cap B'$. Entonces $d(x, r_{m_0}) \leq k[r + k(r + cr_{m_0})]$, pero por (1.78) se obtiene que $d(x, x_{m_0}) \leq k[\alpha r_{m_0} + k(\alpha r_{m_0} + cr_{m_0})] \leq k[\alpha r_{m_0} + kr_{m_0}(\alpha + c)] \leq k^2(\alpha + c)r_{m_0}$, por lo tanto, con $c^* = k^2(\alpha + c)$ tenemos que $x \in B^* = B(x_m, C^* r_{m_0})$ de aquí que $x \in \bigcup\limits_{m \geq m_0} B_m^*$.

$\square$

1.17. Los pesos de las clases A_p de Muckenhoupt

Un tratamiento exhaustivo de la teoría de pesos se puede encontrar en el libro de García Cuerva y Rubio de Francia [GC-RF], en esta sección introducimos brevemente las propiedades de los pesos que son relevantes desde el punto de vista de las medidas duplicantes. Las clases de los pesos de Muckenhoupt surgen del problema de acotación en normas L^p con respecto a medidas arbitrarias para el operador maximal de Hardy- Littlewood. Si Mf denota el operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado sobre cubos de $\mathbb{R}^n$, entonces una medida de Borel μ en $\mathbb{R}^n$ satisface una desigualdad $||Mf||_{L^p(\mu)} \leq c||f||_{L^p(\mu)}$, $1 < p < \infty$, si y sólo si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y si $w(x)$ es su densidad $(d\mu(x) = w(x)\,dx)$ se tiene que w satisface la así llamada condición A_p de Muckenhoupt.

Un peso w satisface la condición $A_p(\mathbb{R}^n)$ de Muckenhoupt si y sólo si, existe una constante c positiva tal que

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\Big)^{p-1} \leq c, \quad (1.79)$$

para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$. Observemos que salvo un caso trivial, $w^{\frac{-1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En efecto si existiera Q_0 en $\mathbb{R}^n$ tal que $\displaystyle\int_{Q_0} w^{\frac{-1}{p-1}}\,dx = +\infty$, entonces para todo cubo Q, que contenga a Q_0, $\displaystyle\int_Q w\,dx = 0$ y w sería idénticamente nula.

Por otro lado, desde nuestro punto de vista la familia de los pesos de Muckenhoupt es una sub-clase de medidas duplicantes. En efecto: si $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ y si μ es la medida inducida por el peso w, esto es $\mu(E) = \displaystyle\int_E w\,dx$, ésta tiene la propiedad de duplicación. En efecto, utizando la desigualdad de Hölder y (1.79), se obtiene que

$$|Q| = \int_{Q_{(x,r)}} dx = \int_{Q_{(x,r)}} w^{\frac{1}{p}}\, w^{-\frac{1}{p}}\, dx$$

$$\left(\int_{Q_{(x,r)}} w \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{(x,2r)}} \leq w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

de aquí que

$$|Q| \leq \left(\int_{Q_{(x,r)}} w \right)^{\frac{1}{p}} \frac{c|Q_{(x,2r)}|}{\left(\displaystyle\int_{Q_{(x,2r)}} w \right)^{\frac{1}{p}}}$$

de lo que se obtiene

$$\frac{1}{2^{np}} = \frac{|Q_{(x,r)}|}{|Q_{(x,2r)}|} \leq \frac{c^p \cdot \int_{Q_{(x,r)}} w}{\displaystyle\int_{Q_{(x,2r)}} w} = c^p \frac{\mu(Q(x,r))}{\mu(Q(x,2r))},$$

lo que prueba que μ, duplica.

Una clase interesante de pesos, es la de las potencias del módulo: $w(x) = |x|^\alpha$. El siguiente lema nos muestra para qué valores de α dichos pesos pertenecen a $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

Lema 1.17.1. *Si* $-n < \alpha < n(p-1)$*, entonces* $w(x) = |x|^\alpha$*, pertenece a* $A_p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 < p < \infty$*.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Consideremos los casos

a) $|x_0| \leq 4r$

b) $|x_0| > 4r$

Notemos que para el caso a), $Q(x_0, r) \subset B(x_0, \sqrt{n}r) \subset B(0, 5\sqrt{n}r) = \tilde{B}$ y utilizando coordenadas polares, puesto que $-n < \alpha < n(p-1)$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_Q w\Big)\Big(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\Big)^{p-1} &\leq \Big(\int_{\tilde{B}} w\Big)\Big(\int_{\tilde{B}} w^{-\frac{1}{p-1}}\Big)^{p-1} \\
&= \Big(\int_{S^{n-1}} \int_0^{5r\sqrt{n}} \rho^{\alpha} \rho^{n-1}\, d\rho\, d\sigma\Big)\Big(\int_{S^{n-1}} \int_0^{5r\sqrt{n}} \rho^{\frac{-\alpha}{p-1}} \rho^{n-1}\, d\rho \\
&= c r^{n+\alpha}\big(r^{n-\frac{\alpha}{p-1}}\big)^{p-1} \leq c r^{np} = \tilde{c}|Q|^p.
\end{aligned}
$$

Para el caso b), observemos que $|x| \sim |x_0|$ para todo $x \in B(x_0, \sqrt{n}r) = B$. En efecto:

$$
|x_0| \leq |x_0 - x| + |x| < r + |x| < \frac{|x_0|}{4} + |x|
$$

por lo que $\dfrac{3}{4}|x_0| < |x|$. También $|x| \leq |x_0| + |x - x_0| < |x_0| + r < \dfrac{5}{4}|x_0|$. Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_Q w\Big)\Big(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\Big)^{p-1} &\leq \Big(\int_B w\Big)\Big(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\Big)^{p-1} \\
&\leq c|x_0|^{\alpha}|B|\big(|x_0|^{\frac{-\alpha}{p-1}}|B|\big)^{p-1} = c|B|^p = \tilde{c}|Q|^p.
\end{aligned}
$$

$\square$

Observemos que para α fuera del intervalo $(-n, n(p-$

1)), $\omega(x) = |x|^\alpha$ no está en la clase A_p, puesto que o bien $\omega \notin L^1_{loc}$ o bien $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \notin L^1_{loc}$.

Cabe notar también que la condición $\alpha > -n$ es necesaria para que la medida $d\mu = \omega\, dx$ sea duplicante, puesto que si μ duplica, entonces $\mu(B(0,1)) < \infty$. Pero también es suficiente: si $\alpha > -n$ tomando p suficientemente grande como para que $(p-1)n > \alpha$, entonces $\omega(x) = |x|^\alpha \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y por consiguiente $d\mu = |x|^\alpha\, dx$ es una medida que duplica. En otros términos $w(x) = |x|^\alpha\, dx$ duplica si y sólo si $\alpha > -n$.

En la Sección 1.2 observamos que densidades integrables en $\mathbb{R}^n$ no definen medidas que duplican, así si w es un peso que pertenece a $A_p(\mathbb{R}^n)$ entonces w no es una función integrable en $\mathbb{R}^n$.

Se mencionan a continuación las definiciones de las clases A_p para $p = 1$ y $p = \infty$.

Un peso w está en la clase A_1, si existe una constante c tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w \leq c \operatorname*{inf\,ess}_{x \in Q} w(x) \tag{1.80}$$

Se dice que un peso w pertenece a A_∞, si existe $\epsilon > 0$ y una constante c, tal que

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq c\Big(\frac{|E|}{|Q|}\Big)^\epsilon \tag{1.81}$$

para todo subconjunto medible E de $\mathbb{R}^n$ y cualquier cubo $Q \supset E$, donde $w(E)$ denota $\displaystyle\int_E w$.

Es importante destacar el hecho que la clase A_∞ coincide con la unión de todas las clases A_p, para una demostración ver [GC-RF].

Dirigimos ahora nuestra atención a los pesos de la clase A_p, definidos sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

El enfoque natural es considerar al subconjunto como un subespacio métrico de $\mathbb{R}^n$ con la distancia que induce la norma infinito o cualquier equivalente. Pero puesto que la medida de Lebesgue subyace en la medida $d\mu = wdx$ es también natural comenzar considerando subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que con la medida de Lebesgue y la distancia usual sean espacios de tipo homogéneo. Tal es el caso de un cubo que por sencillez elegiremos $Q_0 = [0,1]^n$, pero podría ser un subconjunto cualquiera del tipo de los considerados en las secciones anteriores, en los que la propia medida de Lebesgue sea duplicante. Este punto de vista, nos da la siguiente condición de tipo $A_p(\Omega)$:

Diremos que el peso w, pertenece a $A_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si existe una constante c tal que para todo $Q(x,r)$ con $x \in \Omega$ y $r > 0$, vale que

$$\left(\frac{1}{|Q\cap\Omega|}\int_{Q\cap\Omega} w\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q\cap\Omega|}\int_{Q\cap\Omega} w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq \tag{1.82}$$

Los casos $A_1(\Omega)$ y $A_\infty(\Omega)$, se definen de manera análoga.

Observemos que $w \equiv 1$ satisface $A_p(\Omega)$ para todo Ω. Pero ya sabemos que para ciertos dominios Ω (como "espinas") la medida de Lebesgue $dx = w(x)\,dx$ no necesariamente duplica. Como nuestro interés está centrado más en la propiedad de duplicación que en la condición A_p en sí misma, buscamos condiciones en Ω bajo las cuales todos los pesos de $A_p(\mathbb{R}^n)$ restringidos a Ω resulten en $A_p(\Omega)$ pero también con la propiedad de duplicación.

Una condición suficiente para que esto ocurra es requerir que Ω, abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $\Omega \neq \emptyset$, tenga la siguiente propiedad: Existen α , β, R_0 / $\forall x \in \Omega$, $\forall r \leq R_0$, existe $y \in \Omega$ tal que

$$B(y, \alpha r) \subset B(x, r) \cap \Omega \subset B(y, \beta r) \tag{1.83}$$

Es claro que los conjuntos abiertos acotados que tienen la propiedad del cono interior verifican (1.83).

Proposición 1.17.1. *Sean $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y Ω abierto, no vacío y acotado de $\mathbb{R}^n$, que verifica* (1.83)*, entonces $w \in A_p(\Omega)$.*

Demostración. Sea $x \in \Omega$ y $r > 0$. Si $Q(x, r) = Q$, entonces

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|Q \cap \Omega|} \int_{Q \cap \Omega} w \, dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q \cap \Omega|} \int_{Q \cap \Omega} w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx\Big)^{p-1} \\
&\qquad \leq \Big(\frac{|Q|}{|Q|} \frac{1}{|Q \cap \Omega|} \int_Q w \, dx\Big)\Big(\frac{|Q|}{|Q \cap \Omega||Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx\Big)^{p-1} \\
&\qquad \leq \Big(\frac{\tilde{C}}{|Q|} \int_Q w \, dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx\Big)^{p-1} \leq c
\end{aligned}$$

□

Finalmente observamos que si se define la condición A_p, $p > 1$, restringida a los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$, esta clase es distinta de la clase $A_p(\mathbb{R}^n)$ de Muckenhoupt, como ya se adelantara en la Sección 1.8, en este sentido diremos que un peso w pertenece a la clase A_p diádica si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $Q_d \in \mathcal{D}$, se verifica que

$$\Big(\frac{1}{|Q_d|}\int_{Q_d} w(x)\,dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q_d|}\int_{Q_d} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\Big)^{p-1} \leq C \tag{1.84}$$

Veamos un ejemplo que muestra que $A_p(\mathbb{R})$ no coincide en general con A_p diádica. Probaremos que $w(x) = \mathcal{X}_{(-\infty,0]}(x) + x\,\mathcal{X}_{[0,+\infty)}(x)$ pertenece a A_3 diádica y no a A_3.

Notar que si $I_k^j = [j2^k, (j+1)2^k]$ es un intervalo diádico con $j \in^-$, entonces $\big(\frac{1}{|I_k^j|}\int_{I_k^j} w\,dx\big)\big(\frac{1}{|I_k^j|}\int_{I_k^j} w^{-\frac{1}{2}}\,dx\big)^2 = 1$. Si $j = 0$, entonces $I_k^0 = [0, 2^k]$ y

$$\Big(\frac{1}{|I_k^0|}\int_{I_k^0} w\,dx\Big)\Big(\frac{1}{|I_k^0|}\int_{I_k^0} w^{-\frac{1}{2}}\,dx\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2^k}\int_0^{2^k} x\,dx\Big)\Big(\frac{1}{2^k}\int_0^{2^k} x^{-\frac{1}{2}}\,dx\Big)^2$$
$$\leq \frac{1}{2}2^k\frac{1}{2^{2k}}(2{,}2^{\frac{k}{2}})^2 \leq C_p$$

Si $j \in$, entonces estimamos el producto que define A_3 diádica,

$$\Big(\frac{1}{|I_k^j|}\int_{I_k^j} x\,dx\Big)\Big(\frac{1}{|I_k^j|}\int_{I_k^j} x^{-\frac{1}{2}}\,dx\Big)^2 \leq \Big(\frac{1}{2^k}2^k(j+1)2^k\Big)\Big(\frac{1}{2^k}2^{-\frac{k}{2}}j^{-\frac{k}{2}}2^k\Big)^2$$
$$\leq \frac{j+1}{j} < 2.$$

Sea $I_N = [-N, N]$

$$\left[\frac{1}{|I_N|}\int_{I_N}\left(\mathcal{X}_{(-\infty,0)}(x) + x\,\mathcal{X}_{(0,\infty)}(x)\right)\,dx\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{1}{|I_N|}\int_{I_N}\left(\mathcal{X}_{(-\infty,0)}(x) + x\,\mathcal{X}_{(0,\infty)}(x)\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx\right]^2 =$$
$$= \frac{1}{2N}\left[N + \frac{N^2}{2}\right]\cdot\left[\frac{1}{2N}(N + 2N^{\frac{1}{2}})\right]^2$$
$$= (\tfrac{1}{2} + \tfrac{N}{4})(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{N}})^2 \to \infty,\ N \to \infty$$

Por consiguiente w no está en A_3.

1.18. El operador $\mathcal{E}$ de extensión de funciones continuas

La referencia básica para esta sección es el Capítulo VI de “Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions”, de Elias Stein [S].

Sea F un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : F \to \mathbb{R}$ una función. Sea $\{Q_k\}$ una familia tipo Whitney de cubos diádicos de $\Omega = \mathbb{R}^n - F = F^c$, como la obtenida en el Teorema 1.11.1. Para cada k, existe $p_k \in F$, que satisface el Teorema 1.11.1(e).

Definimos la extensión de f, $\mathcal{E}(f)$ como:

$$\mathcal{E}(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in F \\ \\ \displaystyle\sum_k f(p_k)\varphi_k^*(x), & \text{si } x \in F^c \end{cases}$$

donde $\{\varphi_k^*(x)\}$ es la partición de la unidad subordinada a $\{Q_k\}$ descripta en la Sección 1.12, inducida por $\{Q_k\}$.

Es de notar que si $x \in F^c$, entonces por el Teorema 1.11.1(f), x pertenece a lo más a N cubos Q_k^* y como las φ_k^* están soportadas en Q_k^*, la suma anterior es finita, por lo tanto $\mathcal{E}(f)(x)$

está bien definido.

El operador $\mathcal{E}$ actúa preservando los espacios de las funciones continuas y de clase Lipschitz α, $0 < \alpha \leq 1$, (ver [S]).

Este proceso de extensión se generaliza naturalmente a espacios casi-métricos de dimensión métrica finita, pues la herramienta fundamental: los cubrimientos de Whitney, están disponibles en estos espacios (ver [A2]).

Sean (X, d) un espacio casi-métrico, con dimensión métrica finita y F un subconjunto propio cerrado de X. Sea $f : F \to \mathbb{R}$ una función continua. Llamemos $\Omega = X - F$ y sea W una familia de Whitney para Ω, como la descripta en el Teorema 1.11.2 y Teorema 1.11.3 . Sea $\{\varphi_n\}$ la partición de la unidad sobre Ω subordinada a W, construída en la Sección 1.12.

Definimos ahora el operador $\mathcal{E}$ de extensión de Whitney, el cual dada una función definida en F, produce una función $\mathcal{E}f$ definida en todo el espacio X, por

$$\mathcal{E}f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in F \\ \sum_k f(y_k)\varphi_k(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1.85}$$

donde $\{y_k\}$ es una sucesión de puntos en F dados por el Teorema 1.11.2(e), inciso e). Notemos que para cada $x \in \Omega$ la suma en (1.85) es finita y que distintas elecciones de la sucesión $\{y_k\} \subset F$, producen diferentes operadores de extensión.

Asumimos que una vez fijados F y W, también fijamos la sucesión $\{y_k\}$.

Teorema 1.18.1. *Sea (X, d) un espacio casi-métrico acotado que tiene dimensión métrica finita. Sea F un subconjunto propio cerrado de X y f una función real continua definida en F, entonces la función $\mathcal{E}f$ definida por* (1.85) *es continua en X y Lipschitz α sobre todo subconjunto A de X con $d(A, F) > 0$.*

Con el fin de probar el teorema enunciado, necesitamos el siguiente lema, que se deducirá de las propiedades del cubrimiento tipo Whitney que provee el Teorema1.11.2.

Lema 1.18.1. *Bajo las condiciones del Teorema 1.18.1 y con la notación del Teorema 1.11.2, siendo $\Omega^c = F$, existe una constante h tal que para todo i y para toda elección de y_i que satisface la desigualdad $d(y, y_i) \leq hd(y, x)$, se cumple para todo $x \in B(x_i, Cr_i)$ y para todo $y \in F$.*

Demostración. Para $x \in \widetilde{B}_i = B(x_i, Cr_i)$, tenemos que $d(x, y_i) \leq k[d(x, x_i) + d(x_i, y_i)] \leq k[Cr_i + 3kCr_i] = C'r_i$. También a partir del Teorema 1.11.2(c) se tiene que $d(\widetilde{B_i}, F) \simeq r_i$. Por lo tanto para $y \in F$ y $x \in B(x_i, C'r_i)$, aplicando la desigualdad triangular y la anterior estimación se tiene para alguna constante $a > 0$, que

$$\begin{aligned} d(y, y_i) &\leq k[d(y,x) + d(y_i, x)] \\ &< k[d(y,x) + a(B_i, F)] \\ &= k(1+a)d(y,x). \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 1.18.1. Dado que sobre todo subconjunto A de X, con $d(A,F) > 0$, sólo un número finito de términos de la serie que define a $\mathcal{E}f$ en (1.85), son no nulos, $\mathcal{E}f$ es una combinación lineal de funciones Lipschitz y por lo tanto $\mathcal{E}f/A$ también es Lipschitz α.

En particular $\mathcal{E}f$ es continua en cada punto de F^c. Nos resta solo probar que $\mathcal{E}f$ es continua en cada punto de F. Fijemos un punto $y \in F$ y tomemos $x \notin F$. Dado que $\sum_k \varphi_k \equiv 1$ en Ω, podemos escribir

$$\mathcal{E}f(y) - \mathcal{E}f(x) = f(y) - \sum_k f(y_k)\varphi_k(x) = \sum_k [f(y) - f(y_k)]\,\varphi_k(x)$$

de manera que

$$|\mathcal{E}f(y) - \mathcal{E}f(x)| \leq \sum_k |f(y) - f(y_k)|\,\varphi_k(x).$$

Sea $\epsilon > 0$, dado que f es continua en y, existe un número positivo δ tal que $|f(y) - f(z)| < \epsilon$, siempre que $d(y,z) < \delta$, $z \in F$. Tomemos $\eta = \dfrac{\delta}{h}$ con $h \geq 1$, la constante del Lema 1.18.1. Entonces, para $x \in B(y,\eta)$ se tiene que

$|\mathcal{E}f(y) - \mathcal{E}f(x)| < \epsilon$ si $x \in F$ y $|\mathcal{E}f(y) - \mathcal{E}f(x)| \leq N\epsilon$ si $x \notin F$, con N la constante de solapamiento del Teorema 1.11.2. $\square$

Capítulo 2

Extensiones de medidas duplicantes

2.1. Introducción

El problema de extender una función continua de un subconjunto del espacio euclídeo a todo el espacio de modo que la extensión resulte continua, no tiene solución en general. Una condición suficiente para que el problema esté bien planteado es que el dominio original de la función a extender sea un subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}^n$. Más aún, es justamente esta propiedad la que nos provee de un esquema de cubrimiento y particiones de la unidad a la manera de Whitney del complemento de F.

Cada vez que tengamos un conjunto cerrado en un espacio euclídeo o en un espacio de tipo homogéneo, estará disponible la extensión de Whitney.

Dada una medida que duplica, soportada en un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, nuestro objetivo es extenderla de modo que duplique en $\mathbb{R}^n$.

Notemos que la respuesta inmediata al problema planteado tan en general es negativa.

Si F es un punto x_0 y μ es la masa unitaria en x_0, entonces μ duplica en F, pero por el Teorema 1.10.1 no podrá extenderse a todo $\mathbb{R}^n$ como una medida duplicante, aunque sí a $\{\mathbb{R}^n - B(x_0, s)\} \cup \{x_0\}$, para todo $s > 0$. En el Capítulo III volveremos al caso de conjuntos de dimensiones diferentes que corresponde a este segundo caso. En éste nos ocuparemos principalmente de dar condiciones suficientes en el cerrado F que posibiliten la extensión de medidas duplicantes en $\mathbb{R}^n$. Así, comenzaremos con cerrados F de $\mathbb{R}^n$ tales que $dim_H F = n$.

Surgen naturalmente los siguientes problemas:

1) Definir operadores de extensión de medidas soportadas en subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$.

2) Estudiar si los operadores que se definen preservan la propiedad de duplicación de la medida.

Las técnicas que utilizaremos para definir tales operadores estarán relacionadas a la naturaleza del conjunto cerrado F, en el que está definida la medida μ que se desea extender. Consideraremos en especial los dos casos siguientes:

a) F es el supergráfico de una función tipo Lipschitz. En esta situación se definirán dos operadores, uno obtenido por medio del método que llamaremos de reflexión $(\mathcal{E}_R)$ y el otro $(\mathcal{E}_W)$, obtenido por el método de Whitney.

b) El conjunto F es la imagen del cubo unidad $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ por una transformación Bilipschitz de $\mathbb{R}^n$. En este caso se usará el operador $\mathcal{E}_p$ de extensión periódica y luego un cambio de coordenadas.

En la Sección 2.2 se define el operador $\mathcal{E}_R$, que extiende medidas duplicantes definidas en los borelianos de un conjunto F que es el supergráfico de una función Lipschitz. Este operador además, preserva los pesos de la clase A_p.

En la Sección 2.3 se define el operador $\mathcal{E}_W$, el cual involucra un cubrimien

to de tipo Whitney del complemento de F y se realiza una comparación entre este operador y el operador $\mathcal{E}$ de extensión de funciones continuas. La prueba de la propiedad de duplicación de la medida obtenida por el operador $\mathcal{E}_w$, se da en la Sección 2.5, pasando por la duplicación sobre la familia de los cubos diádicos definida en la Sección 1.8 del Capítulo I.

En la Sección 2.5, se tratan algunos ejemplos exploratorios que permitirán definir un operador que actúe sobre medidas definidas en los borelianos del cubo unidad de $\mathbb{R}^n$.

Extensiones periódicas de una medida definida en cerrados de $\mathbb{R}^n$ que son imagen por una transformación Bilipschitz de $\mathbb{R}^n$ del cubo unidad se tratan en la Sección 2.6.

La preservación de la duplicación para el operador definido en la Sección 2.6, se prueba en la Sección 2.7.

2.2. Extensión de medidas duplicantes definidas en el supergráfico de una función Lipschitz: Método de reflexión

El objetivo de esta sección es extender a $\mathbb{R}^n$ una medida duplicante definida en las partes borelianas de un conjunto cerrado $F \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}^n$, cuya frontera es el gráfico determinado por una función de tipo Lipschitz 1, de modo que se preserve la propiedad de duplicación.

Se verá que el operador $\mathcal{E}_R$ que se define preserva muchas propiedades de la medida, en particular la medida original es absolutamente continua si y sólo si lo es su extensión.

Consideraremos como en la Sección 1.15 el conjunto $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ y \geq \varphi(x)\}$, siendo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función que satisface la condición de Lipschitz con constante M, esto es $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ y designaremos con Ω al conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ y < \varphi(x)\}$.

Consideremos el operador $\mathcal{E}_R$ que a una medida de Borel μ sobre F le asigna la medida $\mathcal{E}_R(\mu)$ definida, sobre cada boreliano E de $\mathbb{R}^{n+1}$, por $\mathcal{E}_R(\mu)(E) = \mu(E \cap F) + \bar{\mu}(E \cap \Omega) = \mu(E \cap \overset{\circ}{F}) + \mu(E \cap \partial F) + \bar{\mu}(E \cap \Omega)$, siendo $\bar{\mu}$ la medida definida en los borelianos de Ω por $\bar{\mu}(A) = \mu(S^{-1}(R(S(A))))$, donde $S : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ es la transformación definida por $S(x, y) = (x, y - \varphi(x))$, R indica la transformación reflexión en $\mathbb{R}^{n+1}$ con respecto al hiperplano $y = 0$ y S^{-1} es la transformación inversa de S. Es claro que $\bar{\mu}$ y por consiguiente $\mathcal{E}_R(\mu)$, es una medida definida en los borelianos de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Observemos que el operador que a la medida μ restringida a $\overset{\circ}{F}$, el subgráfico estricto de φ, le asigna la medida $\bar{\mu} = \mu(S^{-1} \circ R \circ S)$ definida en Ω, el subgráfico estricto de φ, es idempotente. En efecto $\bar{\bar{\mu}} = \bar{\mu}(S^{-1} \circ R \circ S)$ da una medida en el supergráfico estricto de φ, entonces $\bar{\bar{\mu}} = \bar{\mu}(S^{-1} \circ R \circ S) = \mu(S^{-1} \circ R \circ S \circ S^{-1} \circ R \circ S) =$

$\mu(S^{-1} \circ R^2 \circ S)$ y puesto que R^2 es la transformación idéntica, tenemos que $\bar{\bar{\mu}} = \bar{\mu}$.

El siguiente teorema sintetiza las propiedades del operador $\mathcal{E}_R$.

Teorema 2.2.1. *Sea μ una medida definida en las partes borelianas de F. Entonces $\mathcal{E}_R(\mu)$ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^{n+1}$ y además:*

i) la restricción de $\mathcal{E}_R(\mu)$ a F es igual a μ, en otros términos si $E \subset F$ y E es de Borel, $\mathcal{E}_R(\mu)(E) = \mu(E)$,

ii) si μ duplica en F, entonces $\mathcal{E}_R(\mu)$ duplica en $\mathbb{R}^{n+1}$, con constante de duplicación que depende de la constante de duplicación de μ y de la constante Lipschitz de φ,

iii) si μ es absolutamente continua con densidad w localmente integrable en F, es decir, w es una función integrable sobre cada compacto de F, entonces $\mathcal{E}_R(\mu)$ tiene densidad dada por $W(z) = w(S^{-1}(R(S(z))))\mathcal{X}_\Omega + w\mathcal{X}_F(z)$, donde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

iv) si $w \in A_p(F)$ entonces $W(x) \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Demostración. La propiedad (i) sigue directamente de la definición de $\mathcal{E}_R(\mu)$. Veamos (ii). Puesto que $S(x, y) = (x, y - \varphi(x))$, $RS(x, y) = (x, \varphi(x) - y) =: \tilde{S}(x, y)$ y $S(F) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \eta \geq 0\}$. Sea $(x, y) \in \bar{\Omega}$, $r > 0$ y consideremos el cubo $Q_r(x, y) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se tiene que

$$\mathcal{E}_R(\mu)(Q_r(x,y)) = \mu(Q_r(x,y)\cap F) + \mu(S^{-1}(R(S(Q_r(x,y)\cap\Omega))))$$

$$\geq \mu(S^{-1}(R(S(Q_r(x,y)\cap\Omega))))$$
$$= \mu(S^{-1}(R(S(Q_r(x,y))\cap R_-^{n+1})))$$

y por lo tanto, usando el Corolario 1.14.1 con constantes c_1 y c_2 en lugar de c^{-1} y c respectivamente, obtenemos:

$$\mathcal{E}_R(\mu)(Q_r(x,y)) \geq \mu(S^{-1}(R(Q_{c_1 r}(S(x,y))\cap R_-^{n+1})))$$

$$= \mu(S^{-1}(Q_{c_1 r}(\tilde{S}(x,y))\cap\mathbb{R}_{0^+}^{n+1})$$

$$\geq \mu(Q_{\frac{c_1}{c_2}r}(S^{-1}\tilde{S}(x,y))\cap F) = \mu(Q_{\frac{c_1}{c_2}r}(x,2\varphi(x)-y)\cap F),$$

ya que $S^{-1}(\tilde{S}(x,y)) = (x,\varphi(x)-y+\varphi(x)) = (x,2\varphi(x)-y)$. Resumiendo,

$$\mu(Q_{\frac{c_1}{c_2}r}(x,2\varphi(x)-y)\cap F) \leq \mathcal{E}_R(\mu)(Q_r(x,y)). \quad (2.1)$$

Encontraremos en lo que sigue una cota superior para $\mathcal{E}_R(\mu)(Q_{2r}(x,y))$. Usando de nuevo el Corolario 1.14.1

$$\mathcal{E}_R(\mu)(Q_{2r}(x,y)) = \mu(Q_{2r}(x,y)\cap F) + \mu(S^{-1}(R(S(Q_{2r}\cap\Omega))))$$

$$\leq \mu(Q_{2r}(x,y)\cap F) + \mu(S^{-1}(Q_{2c_2 r}(\tilde{S}(x,y))\cap F))$$

$$\leq \mu(Q_{2r}(x,y)\cap F) + \mu(Q_{2\frac{c_2}{c_1}r}(x,2\varphi(x)-y)\cap F) \quad (2.2)$$

Si acotamos superiormente el primer sumando en el último miembro de la desigualdad (2.2) por un múltiplo constante del segundo, *ii*) estará probada. En efecto, en ese caso, de (2.2) y (2.1) y la duplicante de μ en F tendríamos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_R(\mu)(Q_{2r}(x,y)) &\leq C\mu(Q_{\frac{c_2}{c_1}2r}(x,2\varphi(x)-y)\cap F) \\ &\leq \tilde{C}\mu(Q_{\frac{c_1}{c_2}r}(x,2\varphi(x)-y)\cap F) \\ &\leq \tilde{C}\mathcal{E}_R(\mu)(Q_r(x,y))\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Para terminar la demostración de ii), en el caso en que $(x,y)\in\bar{\Omega}$, nos basta probar que existe una constante geométrica N tal que la inclusión $Q_r(x,y)\cap F\subset Q_{Nr}(x,2\varphi(x)-y)\cap F$ se verifique.

Notemos primero que si $(x,y)\in\Omega$ y $\Gamma^-(x,\varphi(x))$ es el cono interior incluído en Ω que corresponde a la condición de Lipschitz, con vértice $(x,\varphi(x))$ y eje en la dirección negativa del eje de $\mathbb{R}^{n+1}$; para expresar $|\varphi(x)-y|$ como el producto de una constante α por el radio de $Q_r(x,y)$ planteamos: $|\varphi(x)-y|=a+r/2=\alpha r$ (ver figura), pero como $\frac{a}{r/2}=M$, siendo M la constante de Lipschitz de φ, se obtiene que $\alpha=\frac{M+1}{2}$. Por lo tanto es claro que si $|\varphi(x)-y|\geq\frac{M+1}{2}.r$, $Q_r(x,y)\subset\Gamma^-(x,\varphi(x))\subset\Omega$.

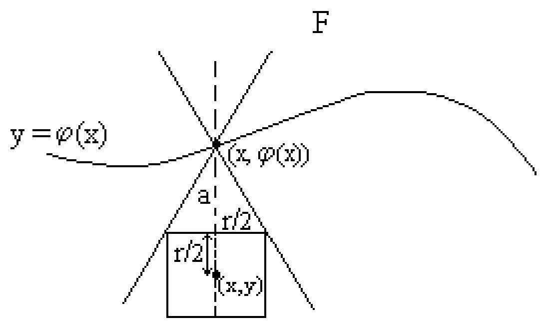


Figura 2.2.1

Es claro, entonces que si $|\varphi(x)-y| \geq \frac{M+1}{2}r$ se tiene que $Q_r(x,y) \cap F = \emptyset$ y la afirmación es trivialmente cierta. Si $|\varphi(x)-y| < \frac{M+1}{2}r$, se verifica que

$$Q_r(x,y) \subset Q_{Nr}(x, 2\varphi(x)-y), \quad \text{con} \quad N = M+2$$

pues si $(u,v) \in Q_r(x,y)$, vale que $|u-x| < r$ y $|v - (2\varphi(x)-y)| \leq |v-y| + 2|\varphi(x)-y| \leq r + 2\frac{M+1}{2}r$, lo que nos dice que (u,v) pertenece al $Q_{Nr}(x, 2\varphi(x)-y)$.
Esto concluye la prueba de (ii) cuando $(x,y) \in \Omega$.

Por la observación que precede al enunciado del teorema, tenemos que:

$$\mathcal{E}_R(\mu)(E) = \mu(E\cap\overset{\circ}{F})+\mu(E\cap\partial F)+\bar{\mu}(E\cap\Omega) = \bar{\mu}(E\cap\Omega)+\mu(E\cap\partial F)+\bar{\bar{\mu}}(E\cap\overset{\circ}{F}),$$

por lo tanto el caso $(x,y) \in \overset{\circ}{F}$ está resuelto con esta simetría.

Demostración de *iii*). Calculemos la densidad $W(x)$ de $\bar{\mu}$ en Ω, en términos de $w(z)$,

$$\bar{\mu}(E \cap \Omega) = \mu(S^{-1}(R(S(E \cap \Omega))) = \int_{S^{-1}R(S(E\cap\Omega))} w(z)\, dz \tag{2.3}$$

$$= \int_{E\cap\Omega} w(S^{-1}(R(S(z)))\, dz \tag{2.4}$$

puesto que el jacobiano de $S^{-1}RS$ es 1. Es claro entonces que por la absoluta continuidad de μ, $\mathcal{E}_R(\mu)$ tiene densidad en $\mathbb{R}^{n+1}$, dada por $W(z) = w(S^{-1}RS(z))\mathcal{X}_\Omega(z) + W\mathcal{X}_F(z)$.

Veamos ahora que $W \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$ suponiendo que $w \in A_p(F)$, que es el enunciado de (iv).

El argumento de simetría usado en la demostración de (ii) y expuesto antes del enunciado del teorema, junto con el hecho que si W satisface la estimación que define $A_p(\mathbb{R}^{n+1})$ para todo $r > 0$ y para (x, y) en un denso en $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces $W \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$ muestran que es suficiente para nuestro propósito probar la estimación que define A_p sólo para el caso $(x, y) \in \Omega$.

Para simplificar la notación hacemos $T = S^{-1} \circ R \circ S$. Sea entonces $Q_r = Q_r(x, y)$ con $(x, y) \in \Omega$, planteamos:

$$\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(x,y)} W(z)\, dz\right)\frac{1}{|Q_r|^{p-1}}\left(\int_{Q_r(x,y)} (W^{-\frac{1}{p-1}}(z)\, dz\right)^{p-1}$$

$$= \frac{1}{|Q_r|}\left(\int_{Q_r\cap\Omega} w(T(z))\, dz + \int_{Q_r\cap F} w(z)\, dz\right).$$

$$\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r} (w(T(z))\mathcal{X}_\Omega(z) + w(z)\mathcal{X}_F(z)\right)^{-\frac{1}{p-1}} dz\Bigg)^{p-1} \tag{2.5}$$

Observemos que el segundo factor de (2.5) es menor o igual que

$$C_p \frac{1}{|Q_r|^{p-1}} \Big[\Big(\int_{Q_r \cap \Omega} w(T(z))^{-\frac{1}{p-1}}\, dz \Big)^{p-1} + \Big(\int_{Q_r \cap F} w(z)^{-\frac{1}{p-1}} dz \Big)^{p-1} \Big],$$

por lo tanto de (2.5)

$$\begin{aligned}
& C_p^{-1} \Big(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} W(z)\, dz \Big) \frac{1}{|Q_r|^{p-1}} \Big(\int_{Q_r} W(z)^{-\frac{1}{p-1}}\, dz \Big)^{p-1} \\
& \leq \Big(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r \cap \Omega} w(T(z))\, dz \Big) \frac{1}{|Q_r|^{p-1}} \Big(\int_{Q_r \cap \Omega} w(T(z))^{-\frac{1}{p-1}}\, dz \Big)^{p-1} \\
& \quad + \Big(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r \cap \Omega} w(T(z))\, dz \Big) \frac{1}{|Q_r|^{p-1}} \Big(\int_{Q_r \cap F} w(z)^{-\frac{1}{p-1}}\, dz \Big)^{p-1} \\
& \quad + \Big(\frac{1}{|Q_r|} \int_{F \cap Q_r} w(z)\, dz \Big) \frac{1}{|Q_r|^{p-1}} \Big[\int_{Q_r \cap \Omega} w(T(z))^{\frac{1}{p-1}}\, dz \Big]^{p-1} \\
& \quad + \Big(\frac{1}{|Q_r|} \int_{F \cap Q_r} w(z)\, dz \Big) \frac{1}{|Q_r|^{p-1}} \Big(\int_{F \cap Q_r} w(z)^{-\frac{1}{p-1}}\, dz \Big)^{p-1} \\
& \quad = I + II + III + IV.
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable y por aplicación del Corolario 1.14.1, se obtiene que

$$(I) \leq \Big(\frac{C}{|Q_{c_r} T(x,y)|} \int_{Q_{c_r}(T(x,y)) \cap F} w(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \Big).$$
$$\Big(\frac{1}{|Q_{C_r} T(x,y)|} \int_{Q_{C_r}(T(x,y)) \cap F} w(\xi,\eta)^{-\frac{1}{p-1}}\, d\xi\, d\eta \Big)^{p-1} \leq C_1$$

pues $w \in A_p(F)$.

Por lo probado en ii) existe $N > 1$, tal que $Q_r \cap F \subset Q_{Nr}(T(x,y))$ de aquí que

$$\int_{Q_r \cap F} w(z)^{\frac{-1}{p-1}}\, dz \leq \bar{C} \int_{Q_{N_r}(T(x,y)) \cap F} w(z)^{\frac{-1}{p-1}}\, dz,$$

y por el Corolario 1.14.1 y efectuando un cambio de variables, como en (I) se tiene que

$$\int_{Q_r \cap \Omega} w(T(z_1, z_2))\, dz_1\, dz_2 \leq \int_{Q_c r(T(x,y)) \cap F} w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

por lo que

$$(II) \leq \Big(\frac{\tilde{C}}{|Q_{N_r} T(x,y)|} \int_{Q_{N_r}(T(x,y)) \cap F} w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \Big). \\ \Big(\frac{1}{|Q_{c_r} T(x,y)|} \int_{Q_{c_r}(T(x,y)) \cap F} w(\xi, \eta)^{\frac{-1}{p-1}}\, d\xi\, d\eta \Big)^{p-1}$$

suponiendo que el máx$\{c, N\} = N$, de esta última desigualdad se obtiene que:

$$(II) \leq \Big(\frac{\bar{C}}{|Q_{C_r}(T(x,y))|} \int_{Q_{C_r}(T(x,y)) \cap F} w(\xi, \eta) d\xi d\eta \Big). \\ \Big(\frac{1}{|Q_{C_r} T(x,y)|} \int_{Q_{C_r}(T(x,y)) \cap F} w(\xi, \eta)^{\frac{-1}{p-1}} d\xi d\eta \Big)^{p-1} \leq C_2.$$

En caso de ser máx$\{c, N\} = C$, se procede de igual forma. De igual manera se obtiene que $(III) \leq C_3$.

Para acotar (IV) observemos que, como en (II), $Q_r \cap F \subset Q_{Nr}(T(x,y))$, por lo tanto,

$$(IV) \leq \Big(\frac{C^*}{|Q_{N_r}|} \int_{Q_{N_r}(T(x,y))\cap F} w(z)\,dz \Big) \frac{1}{|Q_{N_r}|^{p-1}} \Big(\int_{Q_{N_r}(T(x,y))\cap F} w(z)^{-\frac{1}{p-1}}\,dz \Big)^{p-1} \tag{2.6}$$

$$\leq C_4 \tag{2.7}$$

pues $w \in A_p(F)$. Por lo tanto $W \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y se prueba *iv*).

□

2.3. Método de Whitney y el operador $\mathcal{E}_w$, para la extensión de medidas definidas en el supergráfico de una función Lipschitz

Es sabido de la teoría clásica de Whitney de extensión de funciones que los operadores de extensión son mejoradores de la regularidad, es por ello que utilizamos un segundo método de extensión de medidas definidas en el supergráfico de una función Lipschitz, que involucra la construcción de un cubrimiento especial de tipo Whitney en el complemento de F para definir un operador $\mathcal{E}_w$ de modo que la medida extendida, además de duplicar resulta absolutamente continua en el subgráfico de la función, aunque la medida original no lo sea.

Como en la sección anterior, $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ representa el supergráfico de una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz y Ω su complemento. $\mathcal{W} = \{Q_j\}$ denotará la familia de cubos diádicos de Whitney que cubren a Ω, obtenida en el Teorema 1.11.1 y T representa la transformación $S^{-1} \circ R \circ$

$S : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, donde R y S son las transformaciones definidas en la Sección 2.2.

Definimos el operador $\mathcal{E}_W$. Sea μ definida en las partes borelianas de F, entonces la función de conjunto $\mathcal{E}_W(\mu)$ está definida sobre los borelianos A de $\mathbb{R}^{n+1}$ como

$$\mathcal{E}_W(\mu)(A) = \mu(A \cap F) + \sum_j \mu(T(Q_j)) \frac{|Q_j \cap A|}{|Q_j|}.$$

Aquí $|E|$ indica el volumen $n+1$ dimensional de E.

Las primeras propiedades del operador $\mathcal{E}_W$ están dadas en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Sea μ una medida definida en los borelianos de F. Entonces:*

i) $\mathcal{E}_W(\mu)$ es una medida que extiende μ a los borelianos de $\mathbb{R}^{n+1}$.

ii) $\mathcal{E}_W(\mu)(Q) = \mu(T(Q))$, para todo $Q \in \mathcal{W}$.

iii) $\mathcal{E}_W(\mu)$ es absolutamente continua en Ω con peso $w_\Omega(x)$ dado por

$$w_\Omega(x) = \sum_j \frac{\mu(T(Q_j))\mathcal{X}_{Q_j}(x)}{|Q_j|}. \tag{2.8}$$

Demostración. Veamos primero que como medida, $\mathcal{E}_W(u)$ está bien definida. Es claro que $\mathcal{E}_W(\mu)(\emptyset) = 0$.
Sean $E_1, E_2, \cdots E_i, \cdots$ borelianos disjuntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces

$$\mathcal{E}_W(\mu)(E) = \mu[\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \cap F\,] + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T(Q_j)) \frac{|Q_j \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)|}{|Q_j|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T(Q_j)) \frac{(\sum_{i=1}^{\infty} |Q_j \cap E_i|)}{|Q_j|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap F) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T(Q_j)) \frac{|Q_j \cap E_i|}{|Q_j|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(E_i \cap F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T(Q_j)) \frac{|Q_j \cap E_i|}{|Q_j|})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_W(E_i).$$

Puesto que si E es un conjunto de Borel contenido en F se tiene que $|Q_j \cap E| = 0$, para todo j, y por consiguiente $\mathcal{E}_W(\mu)$ restringida a los borelianos de F es μ.

Puesto que ii) es clara, nos resta sólo probar iii), que consiste simplemente en observar que

$$\mathcal{E}_W(\mu) = \mu(A \cap F) + \int_A \frac{(\sum \mathcal{X}_{Q_j}(x))}{|Q_j|} \mu(T(Q_j))dx.$$

$\square$

En el resultado siguiente se destacan propiedades relativas a la extensión $\mathcal{E}_W(\mu)$ de la medida μ.

Corolario 2.3.1. *Si μ es una medida de Borel en F y es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, con densidad dada por $w \geq 0$, entonces*

i) $\mathcal{E}_W(\mu)$ es absolutamente continua en $\mathbb{R}^{n+1}$, con peso

$$W(x) = \begin{cases} w(x) & x \in F \\ \displaystyle\sum_j \Big(\frac{1}{|Q_j|}\int_{T(Q_j)} w(y)dy\Big)\mathcal{X}_{Q_j}(x) \; = w_\Omega(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

ii) Si w es continua, entonces

$$w_\Omega(x) = \sum_j \frac{|T(Q_j)|}{|Q_j|} w(p_j)\mathcal{X}_{Q_j}(x), \qquad \textit{con } p_j \in T(Q_j) \tag{2.9}$$

Si en lugar de tomar las funciones características sobre los cubos $Q_j(x)$, se considera la partición de la unidad $\{\varphi_k^*(x)\}$ descripta en la Sección 1.12, subordinada a la familia $\mathcal{W}$, el peso para Ω se expresa como

$$w_\Omega(x) = \sum_j \frac{|T(Q_j)|}{|Q_j|} w(p_j)\varphi_j^*(x) \tag{2.10}$$

y recordando la definición del operador de extensión $\mathcal{E}$ de la Sección 1.18 y la observación precedente sobre el Corolario 2.3.1, se puede notar la similitud en las expresiones de las extensiones obtenidas por $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_W(\mu)$, donde ω_Ω resulta continuo sobre $\mathbb{R}^n$ y C^∞ en Ω. Observemos que por el lema 1.14.1 la sucesión numérica $\frac{|T(Q_j)|}{|Q_j|}$ es acotada superior e inferiormente por constantes positivas.

Notemos que una extensión continua a todo $\mathbb{R}^n$ de una función continua w definida en F, se obtiene tomando la función $W(x, 2\varphi(x) - y)$ en Ω, pero tal función, no es necesariamente C^∞ en F^c.

En nuestro Teorema 2.2.1,probamos que el operador $\mathcal{E}_R$ dado por
$\mu(S^{-1}(R(S(E))))$, preserva la duplicación y tiene la misma sencillez pero con un defecto análogo: la medida no siempre es absolutamente continua en Ω.

2.4. $\mathcal{E}_W$ preserva la propiedad de duplicación

El propósito de esta sección es estudiar la duplicación en los borelianos de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la medida que extiende el operador $\mathcal{E}_W$ construido por el método Whitney en la Sección 2.3, suponiendo que μ duplica. Para esto veremos que $\mathcal{E}_w(\mu)$ satisface la propiedad de duplicación sobre la familia de los cubos diádicos en el sentido que le hemos dado en Sección 1.8.

Veamos previamente el siguiente lema que prueba que sobre los cubos Q_j de $\mathcal{W}$, $\mathcal{E}_W$ y $\mathcal{E}_R$ coinciden. Sean F, Ω, T y $\mathcal{W}$ como en los Teoremas 2.2.1 y 2.3.1.

Lema 2.4.1. *Sea μ una medida que duplica sobre F. Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ boreliano. Si $E \cap \Omega = \emptyset$ o $E \cap \Omega$ es una unión contable de cubos Q_j de la familia $\mathcal{W}$ para Ω, entonces $\mathcal{E}_W(\mu)(E) = \mathcal{E}_R(\mu)(E)$.*

Demostración. Si $E \cap \Omega = \emptyset$ entonces $E \subset F$, y la tesis es inmediata. Si $E \cap \Omega \neq \emptyset$ y E es una unión numerable de cubos de $\mathcal{W}$, llamaremos $J = \{j : Q_j \cap E \neq \phi \ / \ Q_j \in \mathcal{W}\}$. Como $\partial(T(Q_j))$ tiene la propiedad de regularidad R considerada en la sección 1.16, por el Teorema 1.16.1

tendremos que $\mu(\partial(T(Q_j))) = 0$ para todo $j \in J$. Puesto que T es una biyección, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_W(\mu)(E) &= \mu(E \cap F) + \sum_{j \in J} \mu(T(Q_j)) \frac{|Q_j \cap E|}{|Q_j|} \\ &= \mu(E \cap F) + \sum_{j \in J} \mu(T(Q_j)) \\ &= \mu(E \cap F) + \mu(\bigcup_{j \in J} T(Q_j)) \\ &= \mu(T(E \cap F)) + \mu(E \cap \Omega) = \mathcal{E}_R(\mu(E))\end{aligned}$$

y el lema queda demostrado. $\square$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{W}$ la familia de Whitney de cubos diádicos construida como en el Teorema 1.11.1 del Capítulo 1. La Proposición 1.11.1 del mencionado capítulo prueba que la familia $\mathcal{D}$ de los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$ puede ser expresada como la unión de las clases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ las cuales resultan no vacías y disjuntas dos a dos, siendo $\mathcal{A} = \{Q_d \in \mathcal{D} \ / \ Q_d \cap \Omega = \emptyset\}$, $\mathcal{B} = \{Q_d \in \mathcal{D} \ / \ \exists Q : Q_d \subsetneq Q, \ Q \in \mathcal{W}\}$ y $\mathcal{C} = \{Q_d \in \mathcal{D} \ / \ Q_d \cap \Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{K}} Q, \ \mathcal{K} \text{ subfamilia de } \mathcal{W}\}$, por lo tanto a partir del lema anterior concluimos que los operadores $\mathcal{E}_R$ y $\mathcal{E}_W$, verifican que $\mathcal{E}_R(\mu)/_{\tilde{\mathcal{A}}} = \mathcal{E}_W(\mu)/_{\tilde{\mathcal{A}}}$ siendo $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$. En la demostración del próximo teorema usaremos las siguiente observación: si Q_1 y Q_2 son adyacentes y $Q_1 \in \mathcal{B}$, entonces $Q_2 \subset \Omega$.

Teorema 2.4.1. *Sea μ una medida que duplica sobre F. La medida definida por $\mathcal{E}_W(\mu)$ restringida a la familia $\mathcal{D}$, de los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$ verifica la propiedad definida en (1.46), esto es, existe una constante $c > 0$ tal que para toda elección de cubos diádicos Q_1 y Q_2, adyacentes y del mismo nivel se verifica que $0 < \mathcal{E}_W(\mu)(Q_1) \leq c\mathcal{E}_W(\mu)(Q_2) < \infty$.*

Demostración. Para probar el teorema, consideramos los siguientes casos para dos cubos diádicos adyacentes y del mismo nivel Q_1 y Q_2 pertenecientes a $\mathcal{D}$,

i) $Q_1 \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $Q_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$

ii) $Q_1 \in \mathcal{B}$ o $Q_2 \in \mathcal{B}$

En el caso i), puesto que $\mathcal{E}_W(\mu)/_{\tilde{\mathcal{A}}} = \mathcal{E}_R(\mu)/_{\tilde{\mathcal{A}}}$, tendremos que $\mathcal{E}_W(\mu)(Q_1) = \mathcal{E}_R(\mu)(Q_1)$ y $\mathcal{E}_W(\mu)(Q_2) = \mathcal{E}_R(\mu)(Q^{2)}$. Como Q_1 y Q_2 se intersecan y tienen el mismo tamaño del Teorema 2.2.1 ii) concluimos que $\mathcal{E}_W(\mu)(Q_1) \simeq \mathcal{E}_W(\mu)(Q_2)$.

Para estudiar el caso (ii) supongamos $Q_1 \in \mathcal{B}$. Entonces existe $Q \in \mathcal{W}$ tal que $Q \supsetneq Q_1$. Observemos que puesto que $Q_2 \notin \mathcal{A}$ sólo es posible que $Q_2 \in \mathcal{C} \cup \mathcal{B}$. Asumimos primero que $Q_2 \in \mathcal{B}$. Esto significa que existe $Q' \in \mathcal{W}$ tal que $Q_2 \subsetneq Q'$. Notar que $\partial Q \cap \partial Q' \neq \emptyset$ y por el Teorema 1.11.1 vale que $\frac{1}{4^n}|Q| \leq |Q'| \leq 4^n|Q|$, por lo tanto, se verifica que

$$\mathcal{E}_W(\mu)(Q_1) = \mu(T(Q))\frac{|Q_1|}{|Q|} \leq C\mu(T(Q'))\frac{|Q_2|}{|Q'|} = \tilde{C}\mathcal{E}_W(\mu)(Q_2).$$

Notar que, como ambos, Q_1 y Q_2 están en $\mathcal{B}$, también $\mathcal{E}_W(\mu) \leq \tilde{C}\mathcal{E}_W(\mu)(Q_1)$.

Sea ahora $Q_2 \in \mathcal{C}$ entonces $Q_2 \cap \Omega = \bigcup_{Q' \in \mathcal{K}} Q'$. Notemos previamente que si $Q_1 \subsetneq Q$, $Q \in W$, entonces existe $c > 0$ tal que $c|Q_1| \geq |Q|$. En efecto, $l(Q_1) = l(Q_2) \geq l(Q')$, $Q' \in \mathcal{K}$, tal que $Q' \cap Q \neq \emptyset$ y como $Q' \wedge Q \in W$, vale que $l(Q') \simeq l(Q)$, de lo que se obtiene lo deseado. Por la definición de $\mathcal{E}_w(\mu)$ el lema 2.4.1 se obtiene que

$$\mathcal{E}_W(\mu)(Q_2) = \mathcal{E}_R(\mu)(Q_2) \leq C\mathcal{E}_R(\mu)(Q_1) = C\mu(T(Q_1))$$

$$\leq \tilde{C}\mu(T(Q)) \leq \tilde{C}\mu(T(Q))\frac{|Q_1|}{|Q|} = \mathcal{E}_W(\mu)(Q_1).$$

También se verifica que

$$\mathcal{E}_W(\mu)(Q_1) = \mu(T(Q))\frac{|Q_1|}{|Q|} \leq \mu(T(Q)) = \mathcal{E}_R(\mu)(Q)$$

$$\leq C\mathcal{E}_R(\mu)(Q') = C\mu(T(Q')) = C\mu(T(Q'))\frac{|Q' \cap Q_2|}{Q'|} \leq C\mathcal{E}_W(\mu)(Q_2)$$

lo que concluye la prueba de ii).

$\square$

2.5. Extensiones periódicas de medidas duplicantes: algunos ejemplos unidimensionales

Aunque la duplicación, aún para casos de medidas absolutamente continuas, no luce como una propiedad de regularidad, los siguientes ejemplos unidimensionales muestran que extensiones periódicas simples en general, no son adecuadas y parece imponerse algún argumento de simetría que preserve el orden de magnitud, para mantener la duplicación.

La función $w(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $0 < x \leq 1$, $w(0) = 0$ es la densidad de una medida que satisface la propiedad de duplicación en $[0, 1]$. Con $0 \leq a < b \leq 1$, $\mu((a, b)) = \int_a^b x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. Observemos que un intervalo con el mismo centro que el de (a, b) pero con radio igual a la mitad es $[a', b'] = [\frac{1}{4}(b + 3a), \frac{1}{4}(3b - a)]$, por lo tanto $\mu([a', b']) = \sqrt{3b - a} - \sqrt{b + 3a}$. De aquí que

$$\begin{aligned}\frac{\mu((a,b))}{\mu((a',b'))} &= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{3b+a}-\sqrt{b+3a}} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{3b+a}+\sqrt{b+3a})}{2(b-a)} \\ &= \sqrt{b}\Big(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\Big)\Big(\frac{\sqrt{3b-a}+\sqrt{b+3a}}{b-a}\Big) \leq \frac{C\Big(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\Big)b}{b-a} \\ &= \frac{C\Big(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\Big)}{1-\frac{a}{b}} = C\frac{1}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}} \leq C.\end{aligned}$$

Si extendemos w a un peso W definido en $\mathbb{R}$ por periodicidad, es decir $W(x) = w(\{x\})$ donde $\{x\} = x - [x]$ y $[x]$ es la parte entera de x, no obtenemos con W una medida que duplica. En efecto, si consideramos:

$$w(x) = x^{-\frac{1}{2}} \; en \; (0, 1] \quad y \quad w(x) = (x + 1)^{-\frac{1}{2}} \; en \; [-1, 0).$$

La medida de μ definida como

$$\mu(E) = \int_{E\cap[-1,0)} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} + \int_{E\cap(0,1]} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}},$$

no duplica en $[-1,1]$. Comparamos $\mu[(-\epsilon,0)]$ y $\mu[(0,\epsilon)]$ para $0<\epsilon<1$. El cociente $\dfrac{\mu((0,\epsilon))}{\mu((0,-\epsilon))}$este caso es

$$\frac{2\sqrt{\epsilon}}{2[1-\sqrt{1-\epsilon}]} \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{\epsilon},$$

de lo que se observa que no está acotada para $\epsilon \to 0$, por lo tanto la no duplicación de μ es inmediata.

Tampoco otras extensiones triviales de w preservan la duplicación. Sea por ejemplo

$$\widetilde{W}(x) = w(x)\,\mathcal{X}_{[0,1]}(x) + \mathcal{X}_{(-\infty,0)}(x) + \mathcal{X}_{(1,\infty)}(x).$$

Se observa entonces que la medida definida como

$$\mu(E) = |E\cap[-\infty,0]| + \int_{E\cap[0,1]} \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}\,dx + |E\cap[1,\infty]|$$

para E boreliano de R no duplica. Por ejemplo, si calculamos $\mu([-3a,a])$ y $\mu([-2a,0])$ para $0<a<1$, se ve que

$$\frac{\mu([-3a,a])}{\mu([-2a,0])} \geq \frac{2a+2\sqrt{a}}{2a} > \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

que no está acotado para valores de a, próximos a cero.

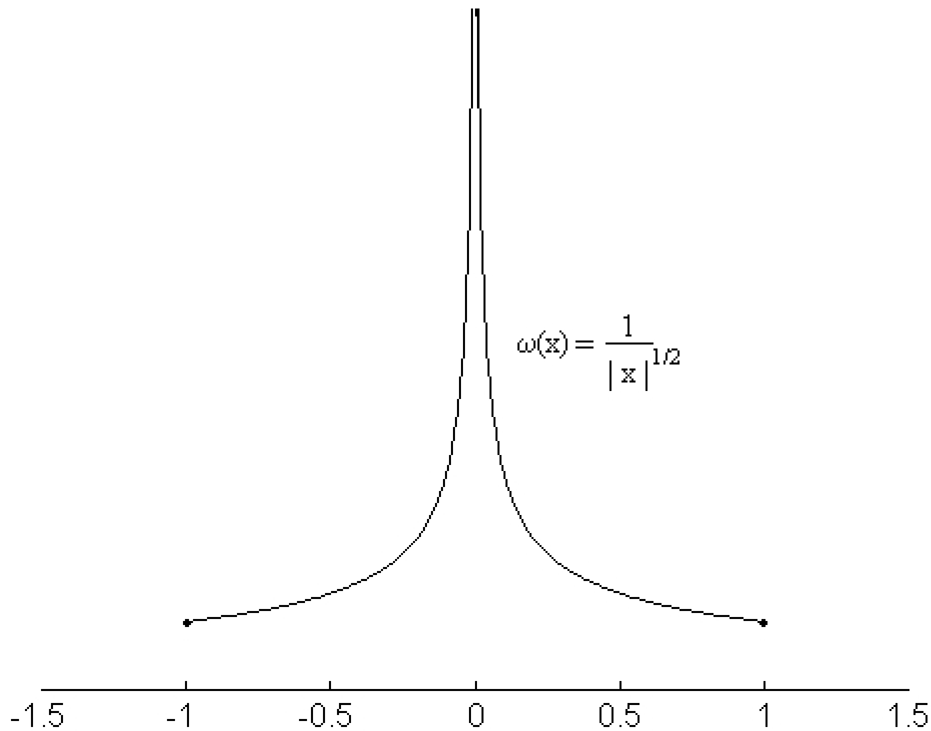


Figura 2.5.2

Ciertamente la extensión de w dada por $\bar{W}(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ es un peso que duplica puesto que está en $A_2(\mathbb{R})$.

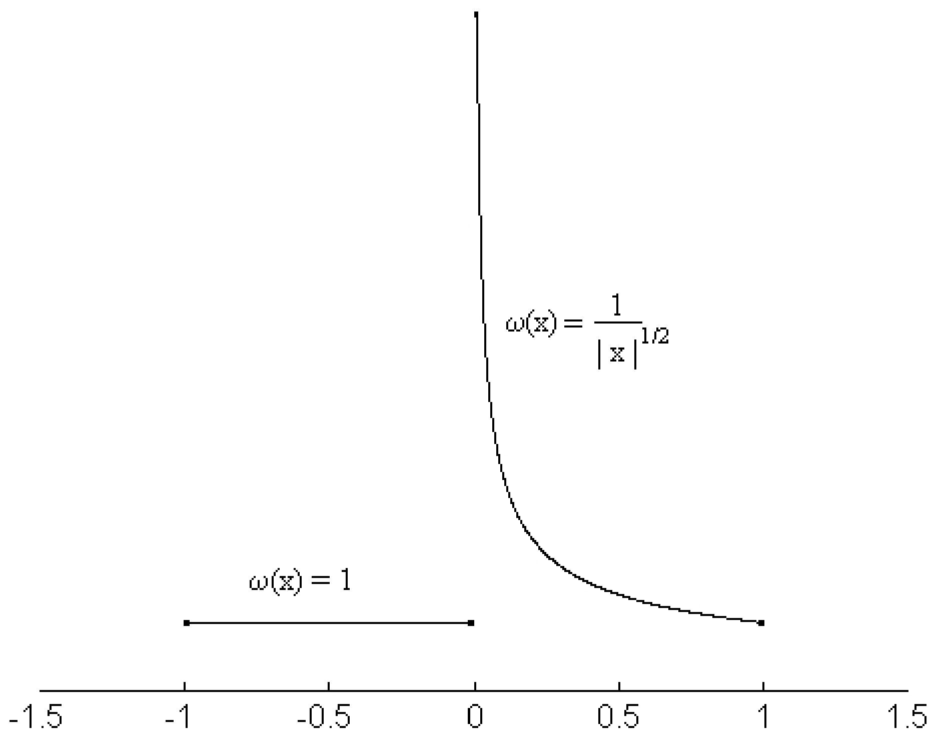


Figura 2.5.3

En la próxima sección veremos que combinando simetría y periodicidad se obtienen buenas extensiones que duplican y que aún preservan clases de Muckenhoupt. Para el caso de $w(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ en $(0, 1]$, el peso extendido tendrá la forma

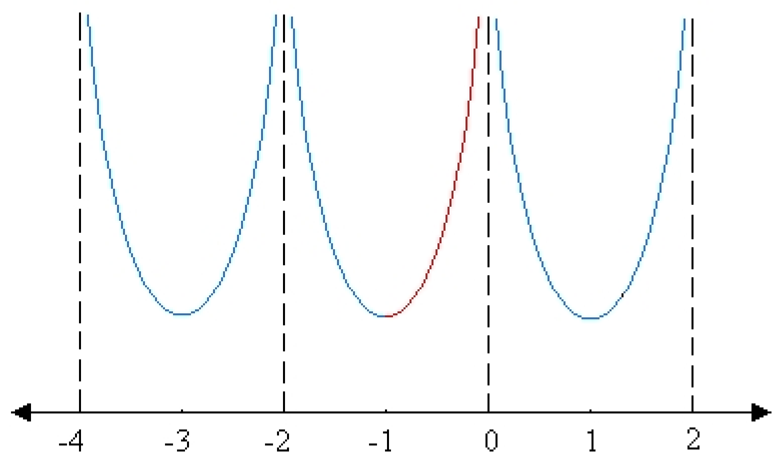


Figura 2.5.4

2.6. Extensiones periódicas de una medida definida en los borelianos de $Q_0 = [0,1]^n$

Las exploraciones llevadas a cabo mediante los ejemplos de la sección anterior, nos sugieren que una buena manera de extender una medida μ definida en un cerrado que es imagen por una transformación Bilipschitz en $\mathbb{R}^n$ del cubo unidad, consiste en realizar extensiones periódicas de medidas en Q_0 a todo $\mathbb{R}^n$ y luego aplicar la transformación Bilipschitz.

Veamos primero cómo definir un operador de extensión a todo $\mathbb{R}^n$, cuando μ está definida en los borelianos del cubo unidad $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $i = 1, 2, ..., n$, con S_i denotamos la transformación lineal cuya matriz es una diago nal de unos excepto en la posición i-ésima en la que hay un -1. Como transformación geométrica, S_i resulta entonces una reflexión con respecto al hiperplano $x_i = 0$ de $\mathbb{R}^n$.

En otros términos, $S_i(x) = (x_1, x_2, ... - x_i, ...x_n)$ si $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ...x_n)$. Si observamos que trivialmente, $S_iS_i = I$ y que las S_j conmutan y si consideramos todas las aplicaciones sucesivas y en cualquier orden de las transformaciones S_i, vemos que sólo hay 2^n transformaciones distintas de la forma

$$\mathcal{S} = \{S_{i_1}S_{i_2} \cdots S_{i_k} :\ 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n\}.$$

Puesto que la matriz de una transformación del tipo $S_{i_1}S_{i_2} \cdots Si_k$, es diagonal (tiene todos unos en la diagonal, excepto los sitios $i_1, i_2, ...i_k$, donde tiene entradas -1).

Sea $\alpha \in \{0,1\}^n$ y consideramos T_α la transformación lineal de $\mathbf{R}^n$, cuya matriz es

$$(\delta_{ij}(-1)^{\alpha_i})_{i=1,...,n;\ j=1,...,n}$$

donde α_i es la i-ésima componente de α. Entonces $\mathcal{S} = \{T_\alpha : \alpha \in \{0,1\}^n\}$.

Más todavía, la acción de $\mathcal{S}$ sobre Q_0, produce los 2^n cubos congruentes con Q_0 en los que se divide, por los hiperplanos coordenados, el cubo $[-1,1]^n$. En efecto,

$$T_\alpha Q_0 =: Q^\alpha = \prod_{i=1}^{n} |0, (-1)^{\alpha_i}|,$$

donde $|a,b| = [a,b]$, si $a \leq b$ y $|a,b| = [b,a]$, si $b \leq a$. Denotamos con $\mathcal{Q}$ a la familia $\{Q^\alpha :\ \alpha \in \{0,1\}^n\}$.

Sea $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ y $j = (j_1, ..., j_n)$, n-uplas de números enteros. Diremos que k *es congruente con* j

(módulo 2) y escribiremos $k \equiv j$ si para todo $i = 1, 2, ...n$, k_i es congruente con j_i módulo dos, es decir si los restos de la división por dos de k_i y de j_i coinciden.

Cada elemento de ^{n}, es congruente a uno y sólo un $\alpha \in \{0,1\}^n$. Esto nos permite concebir a ^{n} como una unión de las 2^n clases de equivalencias de esta relación de congruencia. Así

$$^n = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}^n} {}^n_\alpha,$$

donde $^n_\alpha = \{k \in^n : k \equiv \alpha\}$.

Consideramos ahora, la familia $\mathcal{F}$ de todos los cubos unitarios de $\mathbb{R}^n$ con vértices enteros, $\mathcal{F} = \{Q_k : \ k \in^n\}$. Entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}^n} \mathcal{F}_\alpha$, donde $\mathcal{F}_\alpha = \{k + Q_0 = Q_k : k \in^n_\alpha\}$. Dado un conjunto E de Borel de $\mathbb{R}^n$, podemos escribir

$$E = \bigcup_{k \in^n} (Q_k \cap E) = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}^n} \bigcup_{k \in^n_\alpha} (Q_k \cap E).$$

Dada una medida μ de borel con soporte en Q_0, para un boreliano E de $\mathbb{R}^n$ cualquiera definimos

$$\mathcal{E}_P(\mu)(E) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \sum_{k \in^n_\alpha} \mu(T_\alpha([Q_k \cap E] - (k + \alpha))) \tag{2.11}$$

Veamos previamente, que $\mathcal{E}_P(\mu)$ según (2.11), está bien definida, es decir, que $T_\alpha([Q_k \cap E] - (k + \alpha)) \subset Q_0$.

Observemos un sumando cualquiera en la definición (2.11). Para $\alpha \in \{0,1\}^n$ y $k \in^n_\alpha$ fijos, el conjunto $F_k = Q_k \cap E$ es un subconjunto de Q_k, de modo que $F_k - k$, es un subconjunto de Q_0 y por consiguiente, $(F_k - k) - \alpha$ es un subconjunto de Q^α. Puesto que T_α aplica Q^α en Q_0 (y Q_0 en Q^α), tenemos que $G_{\alpha,k} = T_\alpha(F_k - (k + \alpha))$ es un boreliano de Q_0 y podemos calcular $\mu(G_{\alpha,k})$. Esto garantiza la buena definición de $\mathcal{E}_P(\mu)$ según (2.11), con valores en los reales no negativos extendidos ($[0, \infty]$). Es claro que $\mathcal{E}_P(\mu)(\phi) = 0$.

Para probar la aditividad numerable de $\mathcal{E}_P(\mu)$, tomenos una familia numerable y disjunta $\{E_m : m \in \mathbf{N}\}$ de borelianos de $\mathbb{R}^n$. Entonces, puesto que T_α es biyectiva, para cada $\alpha \in \{0,1\}^n$ y cada $k \in^n_\alpha$, tenemos que la sucesión $T_\alpha([Q_k \cap E_m] - (k+\alpha)), \quad m \in \mathbf{N}$, es disjunta en Q_0. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_P(\mu)(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m) &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in^n_\alpha} \mu(T_\alpha([Q_k \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m)] - (k+\alpha))) \\
&= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in^n_\alpha} \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} (T_\alpha[Q_k \cap E_m] - (k+\alpha))) \\
&= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in^n_\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(T_\alpha[Q_k \cap E_m] - (k+\alpha)) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in^n_\alpha} \mu(T_\alpha([Q_k \cap E_m] - (k+\alpha)))) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_P(\mu)(E_m). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

En otros términos, $\mathcal{E}_P(\mu)$ es efectivamente una medida en los borelianos de $\mathbb{R}^n$.

Presentamos a continuación un lema básico, referido a las transformaciones T_α, el cual será útil para la demostración de la propiedad de duplicación de $\mathcal{E}_P(\mu)$, en el caso en el que la medida μ duplica.

Lema 2.6.1. *La familia T_α, de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$, cuya matriz está dada por $\delta_{ij}(-1)^{\alpha_i}$, $\quad i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots n$, donde α_i es la i-ésima componente de $\alpha \in \{0,1\}^n$, verifica:*

i) Los transformados por T_α de cubos adyacentes, son adyacentes.

ii) T_α preserva la familia de cubos diádicos.

iii) Dadas T_{α_1} y T_{α_2}, $\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \{0,1\}^n$ y $\alpha_1 \neq \alpha_2$, existe T_β con $\beta \in \{0,1\}^n$ tal que $T_{\alpha_1} = T_\beta T_{\alpha_2}$.

Más aún, T_α es un grupo de operaciones sobre $\mathbb{R}^n$ si en el parámetro α consideramos la suma módulo dos.

Demostración. Veamos i). Recordemos que para nosotros la adyacencia es una propiedad topológica: Q y Q' son adyacentes si $\overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{Q'} = \emptyset$ pero $\overline{Q} \cap \overline{Q'} \neq \emptyset$. Puesto que para cada $\alpha \in \{0,1\}^n$, T_α es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$, tenemos que la adyacencia se preserva.

Probemos ii). Sea Q un cubo diádico en $\mathbb{R}^n$. Entonces existen $k \in^n$ y $j \in$ tales que $Q = 2^j Q_k$. Así, $T_\alpha(Q) = T_\alpha(2^j Q_k) = 2^j T_\alpha Q_k = 2^j(T_\alpha k + T_\alpha Q_0)$, puesto que $T_\alpha k \in$ y $T_\alpha Q_0$ es uno de los 2^n diádicos de nivel cero que tienen al origen en la frontera, $T_\alpha Q$ también es diádico y del mismo nivel que Q.

Veamos iii). Notemos previamente que dados $\alpha_1 \neq \alpha_2$ pertenecientes a $\{0,1\}^n$, $T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} = T_{\alpha_1 + \alpha_2}$. En efecto,

T_{α_1} es representada por la matriz $\delta_{ij}(-1)^{\alpha_1^i}$, $\quad i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots n$, donde α_1^i es la i-ésima componente de α_1.

T_{α_2} es representada por la matriz $\delta_{ij}(-1)^{\alpha_2^i}$, $\quad i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots n$, donde α_2^i es la i-ésima componente de α_2.

La matriz de la composición $T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}$ tiene elemento genérico dado por

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}(-1)^{\alpha_1^i}\delta_{jk}(-1)^{\alpha_2^j} = m_{ik}.$$

Observemos primero que si $i \neq k$, $m_{ik} = 0$ ya que $i \neq j$ ó $j \neq k$ y si $i = k$, $m_{ik} = (-1)^{\alpha_1^i}(-1)^{\alpha_2^i} = (-1)^{\alpha_1^i+\alpha_2^i}$. La matriz de $T_{\alpha_1+\alpha_2}$ está dada por $\delta_{ij}(-1)^{\alpha_1^i+\alpha_2^i}$, $\quad i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots n$, en otros terminos $T_{\alpha_1}T_{\alpha_2} = T_{\alpha_1+\alpha_2}$.

Es claro que $T_{\alpha_1} = T_{\alpha_1}(T_{\alpha_2}^{-1}T_{\alpha_2})$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, de aquí que $T_{\alpha_1} = (T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}^{-1})T_{\alpha_2}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces $T_{\alpha_1} = T_\beta T_{\alpha_2}$ siendo $\beta = \alpha_1^i - \alpha_2^i \in \{0,1\}^n$, con lo que se prueba iii). $\square$

Las relaciones que se tratan a continuación serán útiles para sacar conclusiones respecto del operador $\mathcal{E}_P$, cuando la medida dada está definida en un cerrado que es imagen por una transformación Bilipschitz de $Q_0 = [0,1]^n$.

Nos interesa encontrar la relación existente entre las medidas μ_1 y μ_2 definidas como $\mu_1(E) = \int_{\varphi(E)} w(x)\,dx$ y $\mu_2(E) = \int_E w(\varphi(x))\,dx$, siendo φ una transformación Bilipschitz de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y w un peso.

Sea $\nu(E) = |\varphi(E)|$. Como la imagen por una transformación Lipachitz de un conjunto de medida de Lebesgue también tiene medida de Lebesgue cero, tenemos que ν es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Por consiguiente

$$\mu(E) = \int_E h(x)\, dx$$

para alguna función no negativa h, que en los casos usuales es el valor absoluto del Jacobiano.

Sean $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y μ una medida de Borel. Denotemos con $\Phi(\mu)$, la medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\Phi(\mu)(E) = \mu(\varphi(E)) \tag{2.13}$$

Notemos entonces que si $\mu(E) = \int_E w\, dx$ y φ es una transformación Bilipschitz de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ entonces $\Phi(\mu)(E)$, tiene densidad

$$\tilde{w}(t) = w(\varphi(t))h(t), \tag{2.14}$$

Destaquemos que las relaciones utilizadas en la Sección 2.2 entre
$\int_{S^{-1}RS(E\cap\Omega)} w(x)\, dx$ y $\int_{E\cap\Omega} w(S^{-1}RS(z))\, dz$, son un caso particular de (2.14).

2.7. $\mathcal{E}_P$ preserva la propiedad de duplicación

El resultado principal de esta sección se expresa en el siguiente teorema. El mismo se refiere a la propiedad de duplicación de la medida definida por $\mathcal{E}_P(\mu)$ cuando μ satisface la propiedad de duplicación en Q_0.

Teorema 2.7.1. *Sea Q_0 el cubo unidad de $\mathbb{R}^n$ y μ una medida de Borel definida en Q_0, entonces $\mathcal{E}_P(\mu)$ es una extensión de μ a todo $\mathbb{R}^n$, que verifica:*

i) La restricción de $\mathcal{E}_P(\mu)$ a Q_0 es igual a μ.

ii) Si μ duplica en Q_0 entonces $\mathcal{E}_P(\mu)$ duplica en $\mathbb{R}^n$.

iii) Si $d\mu = wdx$ en Q_0, entonces $\mathcal{E}_P(\mu)$ es absolutamente continua en $\mathbb{R}^n$, con densidad dada por

$$W(x) = \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in Z_\alpha^n} \mathcal{X}_{Q_k}(x) w(T_\alpha(x-(k+\alpha)),$$

donde $w(x)$ es la densidad de μ en Q_0 con $\{0,1\}^n$ y ${}^n_\alpha$ como definidos en la sección anterior.

iv) Si $w \in A_p(Q_0)$ entonces $W \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. i) se obtiene directamente de la definición de $\mathcal{E}_P(\mu)$. Para ver ii), consideramos los siguientes casos:

a) Q_d y Q_d^* cubos diádicos adyacentes y del mismo nivel, incluidos en un mismo cubo $Q_k = k + Q_0$, $k \in^n$. Es claro que $Q_k \cap Q_d = Q_d \quad y \quad Q_k \cap Q_d^* = Q_d^*$, entonces para $\alpha \equiv k$ tenemos:

$$\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d) = \mu(T_\alpha([Q_k \cap Q_d]-(k+\alpha))) = \mu(T_\alpha(Q_d-(k+\alpha)))$$

y

$$\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d^*) = \mu(T_\alpha(Q_d^* - (k+\alpha))),$$

según la definición (2.11). Observar que por el Lema 2.6.1

$$T_\alpha(Q_d^* - (k+\alpha)) \quad y \quad T_\alpha(Q_d - (k+\alpha))$$

son ambos diádicos adyacentes incluidos en Q_0 y del mismo nivel. Dado que $\mathcal{E}_P(\mu) = \mu$ y ésta duplica en Q_0, existe una constante C tal que

$$\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d) \leq C\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d^*), \tag{2.15}$$

b) Q_d y Q_d^* diádicos adyacentes y del mismo nivel, contenidos en $Q_k = k + Q_0$ y $Q_j = j + Q_0$, $k, j \in^n$, respectivamente $(k \neq j)$. Observar que por la posición de Q_d y Q_d^*, también resultan adyacentes Q_k y Q_j con $k \neq j$. Existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1\}^n$ tales que $\alpha_1 \equiv k$ y $\alpha_2 \equiv j$, de modo que

$$\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d) = \mu(T_{\alpha_1}([Q_k \cap Q_d] - (k + \alpha_1))) = \mu(T_{\alpha_1}(Q_d - (k + \alpha_1)))$$

y

$$\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d^*) = \mu(T_{\alpha_2}(Q_d^* - (j + \alpha_2))).$$

Notemos que $Q_d - (k + \alpha_1) \subset Q^{\alpha_1}$ y $Q_d^* - (j + \alpha_2) \subset Q^{\alpha_2}$, siendo Q^{α_1} y Q^{α_2} algún par de los 2^n cubos en los que los planos coordenados particionan a $[-1, 1]^n$. De modo que,

$$T_{\alpha_1}[Q_d - (k + \alpha_1)] \subset Q_0 \, \text{y} \, T_{\alpha_2}[Q_d^* - (j + \alpha_2)] \subset Q_0 \tag{2.16}$$

Observando que $T_{\alpha_1}(Q_d - (k + \alpha_1))$ y $T_{\alpha_2}(Q_d^* - (j + \alpha))$ continúan siendo adyacentes dentro de Q_0, por la hipótesis de duplicación de μ, tenemos que $\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d) \leq C\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d^*)$.

c) Q_d y Q_d^* diádicos adyacentes y del mismo nivel de lado mayor o igual que 1. Entonces

$$\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \sum_{k \in_\alpha^n} \mu(T_\alpha([Q_k \cap Q_d] - (k + \alpha))) \tag{2.17}$$

Observar que para todo $\alpha \in \{0,1\}^n$, $P_\alpha = \sharp(\{j \ / \ j \in_\alpha^n, Q_j \cap Q_d \neq \phi\}) = \sharp(\{k \ / \ k \in_\alpha^n, \ Q_j \cap Q_d^* \neq \phi\}) = P_\alpha^*$. Es así, que de (2.17), se obiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_P(\mu)(Q_d) &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} P_\alpha\mu(Q_0) = \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} P^*_\alpha\mu(Q_0)\\ &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{j\in^n_\alpha} \mu(T_\alpha([Q_j\cap Q^*_d]-(j+\alpha))) = \mathcal{E}_P(\mu)(Q^*_d)\end{aligned}$$

De a), b) y c), se obtiene que $\mathcal{E}_P(\mu)$ duplica en el sentido que se ha dado en la Sección 1.8, sobre los diádicos de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto, por aplicación de la Proposición 1.8.2 del Capítulo I, vale que $\mathcal{E}_P(\mu)$ duplica en los borelianos de $\mathbb{R}^n$, con lo que se prueba ii).

Probemos iii). Sea μ definida en los borelianos de Q_0 y absolutamente continua con densidad $w(x)$, veamos que $\mathcal{E}_P(\mu)$ es absolutamente continua en $\mathbb{R}^n$, con densidad dada por $W(x) = \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{k\in Z^n_\alpha} \mathcal{X}_{Q_k}(x)\omega(T_\alpha(x-(k+\alpha)))$.

En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_P(\mu)(E) &= \sum_\alpha\sum_{k\in Z^n_\alpha} \mu(T_\alpha([Q_k\cap E]-(k+\alpha)))\\ &= \sum_\alpha\sum_{k\in Z^n_\alpha}\int_{T_\alpha([Q_k\cap E]-(k+\alpha)))} w(x)\,dx\\ &= \sum_\alpha\sum_{k\in Z^n_\alpha}\int_{E\cap Q_k} w(T_\alpha(z-(k+\alpha)))\,dz\\ &= \sum_\alpha\sum_{k\in Z^n_\alpha}\int_E \mathcal{X}_{Q_k}(z)\,w(T_\alpha(z-(k+\alpha)))\,dz\\ &= \int_E\sum_\alpha\sum_{k\in Z^n_\alpha} \mathcal{X}_{Q_k}(z)\,w(T_\alpha(z-(k+\alpha)))\,dz.\end{aligned}$$

Demostración de iv). Sea $W(x) = \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in Z_\alpha^n} \mathcal{X}_{Q_k}(x)\, w(T_\alpha(x-(k+\alpha)))$, con $w(x)$ la densidad de μ en Q_0. Asumimos que el peso $w(x) \in A_p(Q_0)$, con $1 < p < \infty$. El caso restante puede tratarse de una manera similar esto es: existe una constante positiva C tal que para todo $x \in Q_0$ y $r > 0$ vale que

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\Big)^{p-1} \leq C, \tag{2.18}$$

con $Q = Q(x,r)$.
Para mostrar que $W(x) \in A_p(\mathbb{R}^n)$, consideremos los siguientes casos:

a) El lado del cubo Q, $l(Q) = l$, es mayor que 2.

Sean $Q(x,r)$, $x \in Q_{k_0} \subset \mathbb{R}^n$, $k_0 \in^n$, entonces Q está incluído en a lo sumo $([l]+2)^n$ cubos pertenecientes a la red diádica $\mathcal{D}_0$ e incluye por lo menos a $([l]-1)^n$ cubos de la misma red. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q W(x)\,dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in Z_\alpha^n} \mathcal{X}_{Q_k}(x)\, w(T_\alpha(x-(k+\alpha)))dx\\ &= \frac{1}{|Q|}\int_{y\in T_\alpha((Q_k\cap Q)-(k+\alpha))} \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in Z_\alpha^n} w(y)\,dy\\ &\leq \frac{2^n([l]+2)^n}{([l]-1)^n}\int_{Q_0} w(y)\,dy\\ &= \frac{C_n}{|Q_0|}\int_{Q_0} w(y)\,dy \qquad (2.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\Big(\int_Q W^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\Big)^{p-1}\\
&\quad = \frac{1}{|Q|}\Big(\int_{Q_k\cap Q}\Big(\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{k\in Z_\alpha^n}\mathcal{X}_{Q_k}(x)\,w(T_\alpha(x-(k+\alpha)))\Big)^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\Big)^{p-1}\\
&\quad \leq \Big(\frac{1}{|Q|}\sum_{k\in Z_\alpha^n}\int_{Q_k\cap Q}\Big(w(T_\alpha(x-(k+\alpha)))(x)\Big)^{-\frac{1}{p-1}}dx\Big)^{p-1}, \quad \alpha\in\{0,1\}^n\\
&\quad \leq \Big(\frac{([l]+2)^n}{([l]-1)^n|Q_0|}\int_{Q_0} w^{-\frac{1}{p-1}}(y)\,dy\Big)^{p-1}\\
&\quad \leq \Big(\frac{C_n}{|Q_0|}\int_{Q_0} w^{-\frac{1}{p-1}}(y)\,dy\Big)^{p-1} \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

de (2.19) y (2.20), se obtiene la desigualdad (2.18).

b) Sea $Q = Q(x,r)$ tal que $0 < l(Q) \leq 2$, para $x \in Q_{k_0}$, para algún $k_0 \in^n$. Es claro que $(Q_0 + k_0)\cap Q = Q_{k_0} = R_0 \neq \emptyset$. Notar que R_0 no necesariamente es un cubo. Recordemos además que:

$$Q = \bigcup_{k\in Z_\alpha^n} Q_k\cap Q = \bigcup_{\alpha\in\{0,1\}^n}\Big(\bigcup_{k\in Z_\alpha^n} Q_k\cap Q\Big) \supset Q_{k_0}\cap Q.$$

Sea Q' el menor cubo tal que $Q_{k_0}\cap Q \subset Q' \subset Q_{k_0}$, verificándose que $|Q_{k_0}\cap Q| \geq \frac{1}{2^n}|Q'|$.
Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q W(x)\,dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{k\in Z_\alpha^n} \mathcal{X}_{k+Q_0}(x)\,w(T_\alpha(x-(k+\alpha)))\,dx \\
&\leq \frac{3^n}{|Q|}\int_{T_\alpha(Q\cap(Q_{k_0})-(k+\alpha))} w(y)\,dy \\
&\leq \frac{3^n}{|Q_{k_0}\cap Q|}\int_{T_\alpha(Q\cap(Q_{k_0})-(k+\alpha))} w(y)\,dy \\
&\leq \frac{2^n.\,3^n}{|Q'|}\int_{T_\alpha(Q\cap Q_{k_0}-(k+\alpha))} w(y)\,dy \\
&\leq \frac{2^n.\,3^n}{|T_\alpha(Q')|}\int_{T_\alpha(Q')} w(y)\,dy \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

y para la otra desigualdad procedemos como en el caso anterior,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|^{p-1}}\Big(\int_Q W^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\Big)^{p-1} &\leq \frac{1}{|Q|^{p-1}}\Big(\sum_{k\in Z_\alpha^n}\int_{Q_k\cap Q} w^{-\frac{1}{p-1}}(T_\alpha(x-(k+\alpha)))(x)\,d \\
&\leq \Big(\frac{4\,3^n}{|T_\alpha(Q')|}\Big)^{p-1}\Big(\int_{T_\alpha(Q')} w^{-\frac{1}{p-1}}(y)\,dy\Big)^{p-1}
\end{aligned}
$$

Dado que $w(x)\in A_p(Q_0)$, de (2.21) y (2.22), para $0 < l(Q) < 2$, se obtiene la desigualdad (2.18) y por lo tanto, como consecuencia de los casos $i)$ y $ii)$, vale que $W \in A_p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Para dar una imagen gráfica del resultado obtenido, veamos como es la situación en dimensión uno. En este caso, α toma solo los valores 0 y 1 y entonces tenemos que $_0$ es el conjunto de los pares, $_1$ es el conjunto de los impares, T_0 es la identidad,

$$T_1 y = -y \quad \text{y} \quad Q_0 = [0,1].$$

Entonces

$$W(x) = \sum_{k \in _0} \mathcal{X}_{[k,k+1]}(x)\, w(x-k) + \sum_{k \in _1} \mathcal{X}_{[k,k+1]}(x)\, w(k+1-x)$$

En términos geométricos, W es una periodización de período 2, de la extensión por simetría de $w(x)$ a $[-1,1]$. Gráficamente, puede verse de la siguiente manera

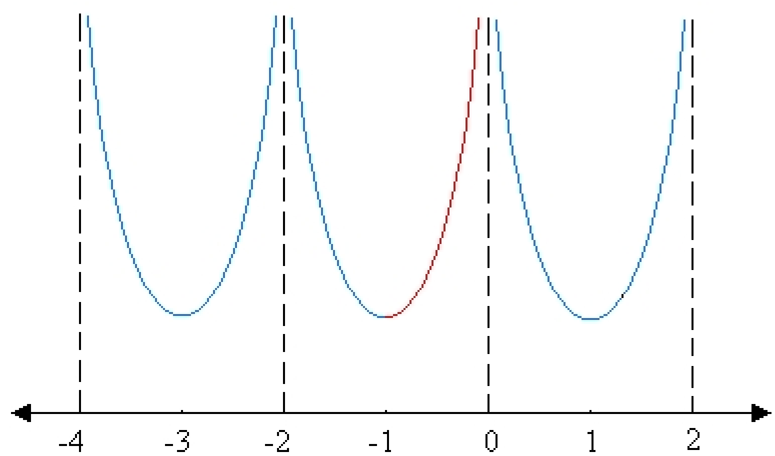


Figura 2.7.1

Resultados relacionados a los de esta sección para pesos de Mackenhoupt, pueden encontrarse en [H].

Utilizando la notación empleada en (2.13) y (2.14) es directo obtener a partir de los Teoremas 2.7.1 y 1.14.2

que la medida definida por $\Phi^{-1}(\mathcal{E}_P(\Phi(\mu)))$, donde Φ es como en (2.13), Φ^{-1} es la que corresponde a φ^{-1} y μ es una medida definida en los borelianos de $\varphi(Q_0)$, siendo φ una transformación Bilipschitz, es una extensión de μ a todo el espacio $\mathbb{R}^n$, con la propiedad de duplicación.

Mencionamos finalmente que el método usado en esta sección puede aplicarse para dar una demostración alternativa de la duplicación de $\mathcal{E}_P(\mu)$ cuando μ duplica en Q_0, siguiendo en general las ideas de la Sección 2.7.

Capítulo 3

Duplicación, separación y contacto de conjuntos de dimensiones distintas

3.1. Introducción

Nos planteamos en este capítulo el problema de equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas.

Planteado con esta generalidad, basta que el espacio sea completo y que la dimensión de Assouad sea finita para que una tal medida exista ([VK]), ([LS]),([**?**]) pero nosotros esperamos que en una de las componentes la medida sea la de Hausdorff o una medida similar dada con anterioridad y de esta manera el problema luce como de extensión.

Primero se explorarán las relaciones entre la existencia de una medida duplicante y la separación entre los conjuntos que componen el espacio, para luego abordar el problema más general de encontrar un Operador de Extensión que permita definir una medida duplicante, en el espacio total, cuando éste está compuesto por conjuntos de diferentes dimensiones.

A continuación se describen las secciones que componen el presente Capítulo.

En la Sección 3.2, se tratan resultados referidos a la separación de conjuntos de dimensiones distintas y su relación con la duplicación de la medida que es suma de las correspondientes medidas de Hausdorff.

En la Sección 3.3, se propone un método para definir una medida duplicante para el caso particular en que uno de los conjuntos es el gráfico de una curva de tipo C_1 creciente en $\mathbb{R}^2$ y el otro es un semiplano, que nos servirá luego en la Sección 3.5 para definir un operador de extensión de medidas duplicantes para un espacio casi-métrico que es la unión de dos conjuntos de dimensiones distintas.

En las Secciones 3.4 y 3.5, se exploran situaciones relacionadas al contacto de conjuntos de dimensiones distintas y a la duplicación de sumas ponderadas de medidas de Hausdorff, finalmente, en la Sección 3.6 retornaremos al problema de extensioń en un contexto general.

3.2. Duplicación y separación de conjuntos de dimensiones distintas.

Como ya se ha visto en la Sección 1.10, en un espacio de tipo homogéneo, los átomos, conjuntos unitarios de medida positiva, son aislados. Puesto que los conjuntos unitarios tienen dimensión cero, este hecho plantea naturalmente el problema de la aislación de conjuntos de medida positiva y de dimensión menor que la del ambiente.

Observemos para empezar que el comportamiento de tipo “doubling” para medidas que se obtienen como sumas de volúmenes k-dimensionales en subespacios afines de $\mathbb{R}^n$, contiene en esencia una propiedad de separación fuerte. Más precisamente si pensamos por simplicidad en $\mathbb{R}^3$ y tomamos H un hiperplano bidimensional cualquiera, y una recta, $L = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}, p \in \mathbb{R}^3$ y $p \notin H, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces L es paralela a H si y sólo si la medida $\mu = \sigma_H + \lambda_L$, duplica, donde para cada boreliano B de $\mathbb{R}^3$, $\mu(B)$ es la suma del área de la intersección de H con B, más la longitud de la intersección de L con B. En efecto, puesto que las medidas involucradas son invariantes por rotaciones y traslaciones del espacio, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $H = \{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Observemos primero que si L es una recta paralela a H que no interseca a H, entonces μ tiene la propiedad de duplicación. Para probarlo podemos también suponer que la recta es de la forma simple $L = \{(x, 0, k) : x \in \mathbb{R}\}$ y k es un número real no nulo fijo. Sea $\varphi_x(r) = \mu(B(x, r))$ con $x \in H \cup L$ y $r > 0$. Puesto que para $x \in L$ y $r < |k|$, el comportamiento de $\varphi_x(r)$ es lineal en r uniformemente en $x \in L$ y para $r > |k|$ el comportamiento de $\varphi_x(r)$ es cuadrático uniformemente en $x \in L$ y para el caso de $x \in H$, $\varphi_x(r)$ tiene en todo el rango de $r \in \mathbb{R}^+$ un comportamiento cuadrático uniforme en X, por el Lema **??** la duplicación de μ está probada.

Recíprocamente, si $L \subset H$ es fácil ver que μ no puede duplicar. Supongamos que L no está contenida en H pero

$L \cap H = \{q\} \neq \emptyset$. Tomemos una sucesión cualquiera de puntos de L cuya distancia al punto de intersección q, tienda a infinito, por ejemplo $x_n = q + n\vec{v}$, $n \in$. Ahora tomando $B_n = B(x_n, r_n)$, con $r_n = d(H, x_n)$ obtenemos un crecimiento cuadrático en n para $\mu(2B_n)$, en tanto que el correspondiente crecimiento $\mu(B_n)$ es lineal. De aquí se deduce que la duplicación es imposible.

El comportamiento de la medida $\mu = \sigma_H + \lambda_L$ nos sugiere la existencia de una relación entre la propiedad de duplicación de una medida μ definida en un espacio X y la forma en que están separados los conjuntos componentes de X, cuando éstos tienen dimensiones distintas.

Antes de enunciar el resultado que nos ocupa en esta sección veamos algunas propiedades relacionadas a las condiciones "L_d" y "D_s" de una medida introducidas en el Capítulo I.

Sean (X, d) un espacio casi-métrico e $Y \subset X$ un boreliano de X y consideremos μ una medida definida en los borelianos de Y.

Denotamos con $B(x, r)$ a la d-bola en X de centro x y radio r. Diremos que (Y, d, μ) satisface "$\tilde{D}_s$", $s > 0$ si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in Y$, $0 < r < 1$ y $k \geq 1$, se verifica que

$$0 < \mu(B(x, kr) \cap Y) \leq ck^s \mu(B(x, r) \cap Y) < \infty. \quad (3.1)$$

Diremos que (Y, d, μ) satisface "$\tilde{L}_d$", $d \geq 0$, si existen constantes $c' > 0$ y $r_0 > 0$ tales que para todo $x \in Y$, $0 < r < 1$, $k \geq 1$ y $kr \leq r_0$ vale que

$$\infty > \mu(B(x, kr) \cap Y) \geq c'k^d \mu(B(x, r) \cap Y) > 0. \quad (3.2)$$

También decimos que:

(Y, d, μ) satisface "D_s^*", $s > 0$, si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in Y$, $r \geq 1$ y $k \geq 1$, se verifica (3.1).

(Y, d, μ) satisface "L_d^*", $d \geq 0$, si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in Y$, $r \geq 1$ y $k \geq 1$, se verifica (3.2).

Observemos que si (Y, d, μ) verifica "D_s^*", $s > 0$, es directo obtener para $r \geq 1$, que

$$0 < \mu(B(x, r) \cap Y) \leq c r^s \mu(B(x, 1) \cap Y). \qquad (3.3)$$

Igualmente si (Y, d, μ) satisface "L_d^*" se obtiene para $r \geq 1$, que

$$0 < c' \mu(B(x, 1) \cap Y) r^d \leq \mu(B(x, r) \cap Y). \qquad (3.4)$$

Por otro lado, notemos también que si (Y, d, μ) satisface "$\tilde{D}_s$", $s > 0$ por el Lema 1.5.1, vale que existe $C > 0$ tal que $C \mu(B(x, 1) \cap Y) r^s \leq \mu(B(x, r) \cap Y)$ para $0 < r \leq 1$. Igualmente por aplicación del mismo lema si (Y, d, μ) satisface "$\tilde{L}_d$", $d \geq 0$ se cumple que existe $C > 0$ tal que, para $0 < r \leq 1$,

$$0 < \mu(B(x, r) \cap Y) \leq C r^d \mu(B(x, 1) \cap Y) < \infty.$$

Observar que a partir de estas desigualdades, tenemos que D_s^* implica que Y no es acotado, mientras que L_d^* descarta la existencia de átomos en Y.

Notar que una medida μ puede satisfacer "$\tilde{L}_d$" sin verificar la propiedad de duplicación. Por consiguiente, que el espacio Y no tenga átomos todavía no es garantía de que no tenga puntos aislados.

El siguiente Lema, establece una relación entre la propiedad "$\tilde{L}_d$" del espacio (Y, d, μ) y la existencia de puntos aislados, en Y.

Proposición 3.2.1. *Si el espacio* (Y, d, μ) *satisface "*$\tilde{L}_d$*",* $d > 0$ *entonces* Y *no tiene puntos aislados.*

Demostración. Supongamos que (Y, d, μ) satisface "$\tilde{L}_d$". Sean $x \in Y, 0 < r < min\{1, r_0\}$,eligiendo $\epsilon > 0$ convenientemente se verifica que

$$
\begin{aligned}
\mu[(B(x,r) \cap Y) - \{x\}] &= \mu[(B(x, 2\frac{r}{2}) \cap Y) - \{x\}] \\
&\geq \mu[(B(x, 2\frac{r}{2}) \cap Y - B(x, \epsilon) \cap Y] \\
&\geq C' 2^d \mu(B(x, \frac{r}{2}) \cap Y) - C\epsilon^d \mu(B(x,1) \cap Y)
\end{aligned}
$$

puesto que $\mu(B(x, \frac{r}{2}) \cap Y) > 0$ y $\mu(B(x,1) < \infty$, tomando ϵ suficientemente chico vemos que $\mu((B(x,r) \cap Y) - \{x\}) > 0$. De aquí se deduce que x es un punto de acumulación de puntos de Y. $\square$

De acuerdo a la nomenclatura utilizada en la Sección 1.15 del Capítulo 1, caben las siguientes observaciones: si $\varphi_x(t) = \mu(B(x,t))$ representa la medida de una bola según la variación de radio t, con centro en el punto x, se ve que si (Y, d, μ) satisface "$\tilde{D}_s$" entonces la familia de funciones $\{\varphi_x(t)\}$ es localmente de tipo superior uniforme s.

Igualmente, si (Y, d, μ) verifica "D_s^*" entonces la familia de funciones $\{\varphi_x(t)\}$ es de tipo superior s uniforme, " en infinito".

También se ve que si (Y, d, μ) satisface "$\tilde{L}_d$", la familia de funciones $\{\varphi_x(t)\}$ es uniformemente de tipo inferior d y si (Y, d, μ) satisface "L_d^*", la familia mencionada es de tipo inferior d en ∞ .

El siguiente resultado constituye una generalización de la propiedad de aislación métrica de conjuntos topológicamente separados que soportan medidas de dimemsiones escencialmentes distintas.

Teorema 3.2.1. *Sea (X, d) un espacio casi-métrico. Sean X_1 un subconjunto cerrado de X, con $X_1 \neq \emptyset$ y $X_1 \neq X$ y denotemos con X_2 a su complemento. Supongamos que para $i = 1, 2$ están definidas medidas de Borel μ_i tales que (X_1, d, μ_1) satisface $\tilde{D}_{d_1}$, (X_2, d, μ_2) verifica $\tilde{L}_{d_2}$, $\mu_1(B(x, 1) \cap X_1) \geq C_1$, $\mu_2(B(y, 1) \cap X_2) \leq C_2$, para $0 < d_1 < d_2 < \infty$, $C_1 > 0$, $C_2 < \infty$ y toda elección de $x \in X_1$ e $y \in X_2$.*

Sea $\mu(E) = \mu_2(E \cap X_1) + \mu_1(E \cap X_2)$ definida sobre los borelianos E de X. Entonces si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo, necesariamente

$$d(X_1, X_2) > 0.$$

Demostración. Suponemos que $d(X_1, X_2) = 0$ entonces existe $\{y_n\} \subset X_2$ tal que $r_n = d(y_n, X_1) \to 0$, para $n \to \infty$. Notemos que dado que X_2 es un subconjunto abierto relativo a $X, r_n > 0$ para todo n. Por definición de μ, se tiene que

$$\mu(B(y_n, 4kr_n)) = \mu_1(B(y_n, 4kr_n) \cap X_1) + \mu_2(B(y_n, 4kr_n) \cap X_2) \geq \mu_1(B(y_n', r_n)$$

donde k es la constante de la casi-métrica e $y'_n \in B(y_n, 2r_n) \cap X_1$ y $B(y'_n, r_n) \cap X_1 \subset B(y_n, 4kr_n) \cap X_1$.

Dado que (X_1, d, μ_1) verifica $\tilde{D}_{d_1}$ y (X_2, d, μ_2) verifica $\tilde{L}_{d_2}$ por el Lema 1.5.1 i) y ii) se obtiene que

$$\mu(B(y_n, 4kr_n)) \geq C_1 r_n^{d_1} \mu_1(B(y'_n, 1) \cap X_1) \tag{3.5}$$

y

$$\mu(B(y_n, r_n)) = \mu_2(B(y_n, r_n) \cap X_2) \leq C_2 r_n^{d_2} \mu_2(B(y'_n, 1) \cap X_2) \tag{3.6}$$

Por consiguiente de (3.5) y (3.6), por la hipótesis de acotación de $B(y_n, 1) \cap X_2$ y $B(y'_n, 1) \cap X_1$ y por la propiedad de duplicación de μ, se tiene que para alguna constante C debe ser que $r_n^{d_2} \geq C r_n^{d_1}$ puesto que $d_2 > d_1 > 0$ y $r_n \to 0$ esta desigualdad es imposible. $\square$

Es importante destacar en relación al teorema anterior que existen conjuntos que son fractales autosimilares, que verifican naturalmente las condiciones de las hipótesis del mismo. Más aún, se puede probar que los conjuntos autosimilares que verifican la "open set condition" son s- conjuntos y existen números finitos a y b tales que $ar^s \leq H^s(K \cap B(x, r)) \leq br^s$, $0 < r < 1$, $x \in K$ conjunto autosimilar, ver [MA], [F1] y [F2].

Teorema 3.2.2. *Sean (X, d) espacio casi-métrico. Sean X_1 y X_2, dos subconjuntos de Borel de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Sea μ_i una medida de Borel positiva definida en X_i. Supongamos que (X_1, d, μ_1) satisface "$D^*_{d_1}$" y que (X_2, d, μ_2) satisface "$L^*_{d_2}$"con $0 < d_1 < d_2 < \infty$. Sea μ*

la medida de Borel definida por $\mu(E) = \mu_1(E \cap X_1) + \mu_2(E \cap X_2)$.

Entonces si (X, d, μ) *es un espacio de tipo homogéneo y si existen constantes* C_1 *y* C_2 *tales que* $\mu_1(B(x_1, 1) \cap X_1) \leq C_1$ *y* $\mu_2(B(x_2, 1) \cap X_2) \geq C_2$ *para* $x_1 \in X_1$ *y* $x_2 \in X_2$*,, se tiene que*

$$d(x, X_2) \leq C$$

para alguna constante C *y todo* $x \in X_1$.

Demostración. Asumimos que $d(x, X_2)$ no está acotada para $x \in X_1$, por lo tanto existe una sucesión de puntos $x_n \in X_1$ tal que $d(x_n, X_2) \to \infty$. Sea $r_n = d(x_n, X_2)$ y consideremos las bolas $B(x_n, r_n)$ entonces

$\mu(B(x_n, 4kr_n)) = \mu_1(B(x_n, 4kr_n) \cap X_1) + \mu_2(B(x_n, 4kr_n) \cap X_2)$, de aquí y utilizando el hecho que $B(x_n, 4kr_n) \cap X_2 \supset B(x_n', r_n) \cap X_2$ con $x_n' \in B(x_n, 2r_n) \cap X_2$ y como (X_2, d, μ_2) verifica "$L^*_{d_2}$", se puede aplicar (3.4) con lo que se cumple que $\mu(B(x_n, 4kr_n)) \geq \mu_2(B(x_n', r_n) \cap X_2) \geq Cr_n^{d_2} \mu_2(B(x_n', 1) \cap X_2)$.

Por otro lado, dado que (X_1, d, μ_1) verifica "$D^*_{d_1}$", satisface (3.3), de modo que

$$\mu(B(x_n, r_n)) \leq \mu_1(B(x_n, r_n) \cap X_1) \leq \bar{C} r_n^{d_1} \mu_1(B(x_n, 1) \cap X_1),$$

Dado que $\mu_1(B(x_n, 1) \cap X_1) \leq C_1$, y $\mu_2(B(x_n', 1) \cap X_2) \geq C_2$, y por el hecho que μ duplica se tiene que para alguna constante C debe ser $r_n^{d_2} \leq C r_n^{d_1}$, puesto que $0 < d_1 < d_2 < \infty$ y $r_n \to \infty$, dicha desigualdad es imposible. □

Corolario 3.2.1. *Sea (X, d) espacio casi-métrico, X_i, $i = 1, 2$ subconjuntos borelianos de X e $Y = X_1 \cup X_2$. (X_1, d, μ_1) satisface "D_{d_1}" y $\mu_1(B(x, 1) \cap X_1) \approx 1, x \in X_1$. (X_2, d, μ_2) satisface "L_{d_2}", con $r_0 = \infty$, $\mu_2(B(x, 1) \cap X_2)1$, $x \in X_2$ y $0 < d_1 < d_2 < \infty$. Para E boreliano de X, se define $\mu(E) = \mu_1(E \cap X_1) + \mu_2(E \cap X_2)$. Entonces si (Y, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo vale que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 \leq d(x, X_2) \leq C_2$, para todo $x \in X_1$.*

Demostración. Se obtiene como consecuencia de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2. □

Teorema 3.2.3. *Sea (X, d) un espacio casi-métrico. Sean X_1 un subconjunto cerrado de X con $X_1 \neq X$ y $X_1 \neq \emptyset$ y X_2 su complemento. Sea μ_i una medida de Borel definida en X_i. Supongamos que (X_1, d, μ_1) satisface D_{d_1} y $\mu_1(B(x, 1) \cap X_1) \approx 1, x \in X_1$ y μ_2 satisface que existen constantes positivas α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 r^{d_2} \leq \mu_2(B(x, r) \cap X_2) \leq \alpha_2 r^{d_2}$ para todo $x \in X_2$ y para todo $r > 0$ con $0 < d_1 < d_2 < \infty$. Sea μ la medida de Borel definida por $\mu(E) = \mu_1(E \cap X_1) + \mu_2(E \cap X_2)$.*

Entonces (X, d, μ) es un espacio de tipo homogeneo si y sólo si existen constantes C_1 y C_2 tales que $C_1 \leq d(x, X_2) \leq C_2$, para todo $x \in X_1$.

Demostración. El que la duplicación implica la desigualdad $C_1 \leq d(x, X_2) \leq C_2$ para todo $x \in X_1$ es el resultado del Corolario 3.2.1

Para probar la duplicación de μ estudiaremos la familia de funciones $\psi_x(r) = \frac{\mu(B(x,2r))}{\mu(B(x,r))}$, $r > 0$ y $x \in X$. Basta probar que está uniformemente acotado superiormente. Dividiremos el análisis en dos casos según tengamos $x \in X_1$ o $x \in X_2$. Supongamos primero que $x \in X_1$. Notemos primero que si $0 < r < \frac{C_1}{2}$, entonces $B(x, 2r) \cap X_2 = \emptyset$ y, por consiguiente, tanto $\mu(B(x, 2r))$ como $\mu(B(x, r))$ reciben sólo el aporte de μ_1. Así $\psi_x(r) = \frac{\mu_1(B(x,2r))}{\mu_1(B(x,r))}$ que es acotada puesto que μ_1 satisface D_{d_1} y por lo tanto duplica. Ahora supongamos que r es grande, digamos $r > 2kC_2$. Entonces existe $y \in X_2$ tal que $d(x, y) < \frac{r}{2k}$. Por lo tanto $B(y, \frac{r}{2k}) \subset B(x, r)$ y de aquí que $\mu(B(x, r)) \geq \mu_2(B(y, \frac{r}{2k})) \geq \alpha_1 r^{d_2}$. Por consiguiente $\psi_x(r) \leq \frac{C_1(2r)^{d_1}\mu_1(B(x,1)\cap X_1)+C_2r^{d_2}}{\alpha_1 r^{d_2}}$ que está uniformemente acotada superiormente. Si $\frac{C_1}{2} \leq r \leq 2kC_2$ entonces

$$
\begin{aligned}
\psi_x(r) &\leq \frac{\mu(B(x, 2kC_2))}{\mu(B(x, \frac{C_1}{2}))} \\
&\leq \frac{\mu_1(B(x, 2kC_2) \cap X_1) + \mu_2(B(x, 2kC_2) \cap X_2)}{\mu_1(B(x, \frac{C_1}{2}))}
\end{aligned}
$$

Si $C_1 > 2$, entonces $B(x, \frac{C_1}{2}) \supset B(x, 1)$ y el denominador se acota inferiormente uniformemente, puesto que por hipótesis $\mu_1(B(x, 1) \cap X_1) \approx 1$, para $x \in X_1$. Si en cambio $C_1 \leq 2$, entonces por la Proposición 1.5 tenemos que $\mu_1(B(x, \frac{C_2}{2})) \geq C(\frac{C_2}{2})^{d_1}\mu(B(x, 1)) \geq \tilde{C}(\frac{C_2}{2})^{d_1}$ y, otra vez hay acotación inferior para el denominador. El numerador se acota por constantes independientes de x usando de nuevo D_{d_1} para μ_1 y la cuasi-homogeneidad de μ_2.

Para el caso en que $x \in X_2$, consideramos las siguientes situaciones para estudiar el comportamiento de $\psi_x(r)$. Si $0 < 2r < d(x, X_1)$, dado que $\mu_2(B(x, r)) \approx r^{d_2}$, $\psi_x(r)$

está uniformemente acotada. Si $2r \geq d(x, X_1)$

$$\psi_x(r) = \frac{\mu(B(x,2r))}{\mu(B(x,r))} \leq \frac{\alpha_2 r^{d_2} + \mu_1(B(x,2r) \cap X_1)}{\mu_2(B(x,r) \cap X_2) + \mu_1(B(x,r) \cap X_1)}$$
$$\leq \frac{\alpha_2 r^{d_2} + \mu_1(B(x',4Kr) \cap X_1)}{\alpha_1 r^{d_2}}$$

notar que se ha usado el hecho que para $x' \in B(x,2r) \cap X_1$, $B(x,2r) \cap X_1 \subset B(x',4rk) \cap X_1$. Si $r \leq 1$, aplicando μ_1 y la acotación para $\mu_1(B(x,1) \cap X_1)$ se obtiene que

$$\psi_x(r) \leq C_1 + \frac{C_2}{\alpha_1 r^{d_2}}$$

pero teniendo en cuenta que $r > \frac{d(x,X_1)}{2} > \frac{d(X_1,X_2)}{2} \geq \frac{C}{2}$, vale que $\psi_x(r)$ está uniformemente acotado. Si $r > 1$ se obtiene igualmente la acotación para $\psi_x(r)$ ya que

$$\psi_x(r) \leq C_1 + \frac{\bar{C}_2 r^{d_1} \mu_1(B(x',1) \cap X_1)}{\alpha_1 r^{d_2}} \leq \bar{C};$$

lo que concluye la demostración. □

Corolario 3.2.2. *Sea (X,d) un espacio casi métrico. Sean X_1 un conjunto cerrado de X con $X_1 \neq X$ y $X_1 \neq \emptyset$ y X_2 su complemento. H_{d_i} es una medida en los borelianos de X_i que verifica que $H_{d_i}(B(x,r) \cap X) \approx r^{d_i}$, $i = 1,2$, $0 < d_1 < d_2 < \infty$ para todo $x \in X_i$ y $r > 0$ con $i = 1,2$. Entonces para E boreliano de $\mathbb{R}^n$, la medida definida por $\mu(E) = H_{d_1}(E \cap X_1) + H_{d_2}(E \cap X_2)$ duplica si y sólo si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 \leq d(x,X_2) \leq C_2$, para todo $x \in X_1$.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 3.2.3. □

Con respecto a subconjuntos del espacio afín (E_n), vale también el siguiente colorario, donde H_n representa la medida n-dimensional de Lebesgue.

Corolario 3.2.3. *Consideremos el espacio afín Euclideo de dimensión n y sean* $\Sigma = P_1 + \Sigma_0$ *y* $\Gamma = P_2 + \Gamma_0$ *(*Σ_0 *y* Γ_0 *denotan subespacios de* $\mathbb{R}^n$*), variedades lineales de dimensión* m *y* k*, respectivamente y* $k < m$*, entonces la medida* $\mu(E) = H_n(E \cap \Sigma) + H_k(E \cap \Gamma)$*,* E *boreliano de* $\mathbb{R}^n$*, duplica si y sólo si* $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ *y el subespacio* Γ_0 *está incluído en el subespacio* Σ_0*, es decir que* $\sum$ *y* Γ*, son variedades lineales paralelas.*

Demostración. Si suponemos que la medida $\mu(E) = H_m(E \cap \sum) + H_K(E \cap \Gamma)$ duplica entonces por el Colorario 3.2.2 existen constantes C_1 y C_2 positivas tales que $C_1 \leq d(x, \sum) \leq C_2$ para todo $x \in \Gamma$, de aqui que $\sum$ y Γ son variedades lineales paralelas, ya que $\sum \cap \Gamma = \emptyset$ y $\Gamma_0 \subset \sum_0$; pues son subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dimensiones K y m respectivamente con $K < m$..

La proposición reciproca también se obtiene por la aplicación del mismo colorario.

□

3.3. Duplicación y contacto de conjuntos de dimensiones distintas:un caso especial.

Se ha visto que el comportamiento de tipo "doubling" para medidas que se obtienen como suma de medidas de tipo Hausdorff definidas en conjuntos apropiados de dimensiones distintas está relacionado a la separación de conjuntos.

Si analizamos la situación que se presenta con $(X_1 \cup X_2, ||.||_\infty, \mu)$, donde $X_1 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, $X_2 = [0, -1] \times [0, -1]$ y si se tiene μ definida como $\mu(E) = |(E \cap X_2)| + l(E \cap X_1)$, donde l representa la longitud, y $|.|$ el área, ésta no duplica. En cambio la medida μ definida como $\mu(E) = |E \cap X_2| + \int_{E \cap X_1} y\, dy$, duplica porque el peso, $w(y) = y$ equilibra las medidas longitud y área en el punto de contacto.

La misma situación se presenta si se tiene $X = X_1 \cup X_2$ siendo $X_1 = \{(x, x^2) : 0 \leq x \leq 1\}$ y $X_2 = [0, +1] \times [0, -1]$, en este caso, si bien la medida definida en los borelianos de $\mathbb{R}^2$ como $\mu(E) = |E \cap X_2| + l(E \cap X_1)$, donde el primer término indica el área y el segundo la longitud de arco, no duplica en $X_1 \cup X_2$; un peso adecuado para la componente de menor dimensión es $w(s) = s^2$ para obtener una medida duplicante en los borelianos de $X_1 \cup X_2$; esto es $\tilde{\mu}(E) = |E \cap X_2| + \int_{E \cap X_1} s^2 \sqrt{1 + 4s^2}\, ds$, con E boreliano de $\mathbb{R}^2$, donde $\sqrt{1 + 4s^2}\, ds$ es la longitud de arco.

Observemos que los resultados de la sección anterior prueban que si $X_2 = (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$ y $X_1 = (1, \infty)$ con $\mu_i = H_i$, $i = 1, 2$, la medida $\mu(E) = \mu_1(E \cap X_1) + \mu_2(E \cap X_2)$ no puede duplicar aunque X_1 y X_2 estén separados. Notamos que si X_1 y X_2 no están separados en el compactado de Alexandrov de un punto de $\mathbb{R}^2$, se puede probar que la medida definida como sigue tiene la propiedad de duplicación.

$$\nu(E) = \mu_2(E \cap X_2) + \int_{E\cap X_1} x.d\mu_1(x).$$

Se plantea entonces el problema de encontrar un peso en la componente de menor dimensión cuando se tienen medidas de Hausdorff definidas sobre conjuntos de dimensiones distintas con un punto de contacto y para que la nueva resulte duplicante.

Para ello exploraremos la situación definida por el gráfico de una función continua φ y el semiplano inferior de $\mathbb{R}^2$ con sus medidas correspondientes: longitud de arco y área. Se verá que la forma en que se construye el peso que actúa sobre el gráfico de φ nos guiará para la obtención de un resultado en situaciones más generales.

Sean los conjuntos $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^+\}$, con $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ función de clase $\mathcal{C}_1$ y no decreciente tal que $\varphi(0^+) = 0$ y $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 0\}$.

Nuestro propósito es encontrar un peso Ω definido en Ω_1 tal que tomando la medida $\mu(E) = |E \cap \Omega_2| + \int_{E\cap\Omega_1} wd\lambda$, con $|.|$ el área y λ la longitud de arco en Ω, se tenga que $(\Omega_1 \cup \Omega, d, \mu)$ es un espacio de tipo homogéneo, donde d es la distancia heredada de la euclídea en $\mathbb{R}^2$.

Sobre el eje positivo de las ordenadas, tomamos la sucesión diádica $\{2^k, \ k \in\}$ y llamamos $N_k = \{(x, y) \in graf\, \varphi = \Phi \ / \ 2^k \leq y < 2^{k+1}\}$. Denotemos con $n_k = \sharp\{Q \in \mathcal{D}_k : Q \cap N_k \neq \emptyset\}$ y veamos que

$$n_k \simeq m_k = \left[\frac{\varphi^{-1}(2^{k+1}) - \varphi^{-1}(2^k)}{2^k} + 1\right] \qquad (3.7)$$

donde [.] es la parte entera. Para simplificar la escritura llamemos $l = \varphi^{-1}(2^{k+1}) - \varphi^{-1}(2^k)$. Notemos que si $l < 2^k$ entonces $m_k = 1$ y $1 \leq n_k \leq 2$. Por otro lado es claro que $[\frac{l}{2^k}] \leq n_k \leq [\frac{l}{2^k}] + 2$. Supongamos ahora que $l \geq 2^k$, entonces $[\frac{l}{2^k}] \geq 1$ y como $m_k = 1 + [\frac{l}{2^k}]$, tenemos que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{[\frac{l}{2^k}]}} < \frac{n_k}{m_k} \leq 2 + \frac{1}{1+[\frac{l}{2^k}]} \leq 3$.

Por analogía con la definición del operador $\mathcal{E}_W$ de la Sección 2.3, y con el objeto de introducir la medida duplicante correcta desde una perspectiva intuitiva , consideramos sobre los borelianos de $\mathbb{R}^2$, la medida ν dada por

$$\nu(E) = |E \cap \Omega_2| + \sum_k \sum_{\mathcal{J}(k)} |Q_j^k| \frac{\lambda(\Phi \cap Q_j^k \cap E)}{\lambda(\Phi \cap Q_j^k)} \quad (3.8)$$

$\mathcal{J}(k) = \{j : \Phi \cap Q_j^k \neq \emptyset,\ Q_j^k \in \mathcal{D}_k\}$.

Si en (3.8), se reemplaza $|Q_j^k|$ por 2^{2k}, se obtiene

$$\nu(E) = |E \cap \Omega_2| + \sum_k 2^{2k} \sum_{\mathcal{J}(k)} \frac{\lambda(\Phi \cap Q_j^k \cap E)}{\lambda(\Phi \cap Q_j^k)} \quad (3.9)$$

Tratemos de explicitar aún más esta expresión; para ello consideramos el siguiente conjunto elemental $E = \mathbb{R} \times [a, b],\ 0 < a < b < \infty$, tal que $a = 2^{l_1}$ y $b = 2^{l_2}$ de modo que

$$\varphi^{-1}(2^{l_1}) = \alpha \quad \text{y} \quad \varphi^{-1}(2^{l_2}) = \beta,$$

así por (3.9), $\nu(E) = \displaystyle\sum_{k=l_1}^{l_2-1} 2^{2k} \sum_{\mathcal{J}(k)} 1 = \sum_{k=l_1}^{l_2-1} 2^{2k} \sharp(\mathcal{J}(k)) =$

$$\sum 2^{2k} n_k \cong \sum_k 2^{2k} \Big[\frac{\varphi^{-1}(2^{k+1}) - \varphi^{-1}(2^k)}{2^k} + 1\Big].$$

Luego, dado que φ es de clase $\mathcal{C}_1$ para una adecuada selección de t_k tenemos que

$$\nu(E) = \sum_{k=l_1}^{l_2-1} 2^{2k}[(\varphi^{-1})'(t_k) + 1]$$

Esta última expresión sugiere, al menos heurísticamente, un análogo continuo en el que la suma se convierte en una integral,

$$\tilde{\nu}(E) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} t((\varphi^{-1})'(t) + 1)\, dt$$

y que para funciones φ especiales resulta, en efecto, equivalente a ν.

Podemos reescribir $\tilde{\nu}$ sobre estos conjuntos de Borel especiales haciendo el cambio de variables $t = \varphi(s)$, para obtener

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(E) = \int_\alpha^\beta \varphi(s)\, ds + \frac{\varphi(\beta)^2 - \varphi(\alpha)^2}{2} &= \int_\alpha^\beta \varphi(s) + \varphi(s)\varphi'(s)\, ds \\ &= \int_\alpha^\beta \varphi(s)(1 + \varphi'(s))\, ds \qquad (3.10)\end{aligned}$$

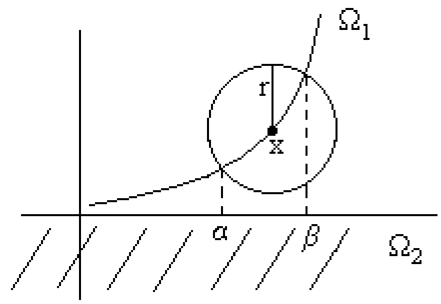


Figura 3.3.1

La fórmula obtenida en (3.10), nos sugiere la definición de una medida μ, soportada en $\Omega_1 \cup \Omega_2$, con $\Omega_1 = graf\, \varphi$, y φ de clase $\mathcal{C}_1$, creciente y Ω_2 el semiplano inferior de $\mathbb{R}^2$, de la siguiente manera: para E boreliano de $\mathbb{R}^2$, en el espacio $X = \Omega_1 \cup \Omega_2$, se define la medida μ como

$$\mu(E) = |E \cap \Omega_2| + \int_{Pr_1(graf\, \varphi \cap E)} \varphi(s)(1 + \varphi'(s))\, ds. \tag{3.11}$$

donde Pr_1 es el operador de proyección sobre la primera coordenada y $|.|$ denota la medida de Lebesgue bidimensional. Que μ está bien definida sigue de que $\varphi(s)(1 + \varphi'(s))$ es una función continua no negativa y el conjunto $Pr_1(\Phi \cap E)$ es boreliano en $\mathbb{R}$.

Para ver que μ es σ-aditiva, sólo hay que notar que si bien en general la proyección de conjuntos disjuntos no produce conjuntos disjuntos, es cierto que $P_{r_1}(\varphi \cap E_i)$, $i = 1, 2, \cdots$, son disjuntos dos a dos si los E_i lo son, pues, de otro modo tendríamos un x tal que $(x, y) \in \varphi$ y $(x, z) \in \varphi$ con $z \neq y$. Pero esto es imposible porque φ es el gráfico de una función. Entonces

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = |(\bigcup_{i}^{\infty}) \cap \Omega_2| + \int_{P_{r_1}(\Phi \cap (\bigcup_i^{\infty} E_i))} \varphi(s)(1+\varphi'(s))\, ds$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} |E_i \cap \Omega_2| + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{P_{r_1}(\Phi \cap E_i)} \varphi(s)(1+\varphi'(s))\, ds = \sum \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$$

Nuestro objetivo ahora es ver si la medida definida en (3.11), soportada en $\Omega_1 \cup \Omega_2$, tiene la propiedad de duplicación.

Observar que este problema puede verse como de extensión de la medida μ_2 la cual está definida sobre los borelianos de Ω_2, de modo que se preserve la propiedad de duplicación en $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Notar que de (3.11) se observa que la medida definida sobre Ω_1 resulta ponderada por el peso $\varphi(s)(1+\varphi'(s))$, que permite equilibrar μ_1 con μ_2 en el punto de contacto.

Para probar la duplicación de la medida μ, demostraremos previamente el siguiente lema, que establece un orden de comparación entre la medida de un cubo y su lado, según la ubicación de su centro en $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Es presisamente este lema, que muestra un comportamiento diferente como funcion del radio de la medida de una bola dependiendo del lugar del centro, el que determina la diferencia de los resultados de esta sección con los de la precedente, ya que en este caso la medida de bolas no es una potencia fija del radio.

Lema 3.3.1. *Sean los conjuntos* $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y = \varphi(x), x > 0\}$, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *una función de clase* C_1 *y no* *decreciente tal que* $\varphi(0^+) = 0$ *y* $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 0\}$*.Para* E *boreliano de* $\mathbb{R}^2$*, se define la medida*

$$\mu(E) =\mid E \cap \Omega_2 \mid + \int_{Pr_1(\varphi \cap E)} \varphi_{(s)}(1 + \varphi'_{(s)})ds.$$

Entonces si $Q(P,E)$ *representa el cuadrado de* $\mathbb{R}^2$ *con centro* P *y lado* ϵ *se verifica que*

a) Si el centro $P = (x_0, \varphi(x_0))$ *pertenece al gráfico de* φ *y*

i) Si $\epsilon < 2\varphi(x_0)$*, entonces* $\varphi(x_0)\frac{\epsilon}{2} \leq \mu(Q(P,\epsilon)) \leq 3\epsilon\varphi(x_0)$

ii) Si $\epsilon \geq 2\varphi(x_0)$*, entonces* $\epsilon^2/4 \leq \mu(Q(P,\epsilon)) \leq 2\epsilon^2$

b) Si el centro P *pertenece a* Ω_2*, entonces* $\dfrac{\epsilon^2}{4} \leq \mu(Q(P,\epsilon)) \leq 2\epsilon^2$.

Demostración. Probemos a - i).
Tenemos $P = (x_0, \varphi(x_0))$ y $\epsilon < 2\,\varphi(x_0)$. Llamaremos $C_1(\epsilon) = \max\{x_0 - \frac{\epsilon}{2}, \quad \varphi^{-1}(\varphi(x_0) - \frac{\epsilon}{2})\}$ y $C_2(\epsilon) = \min\{x_0 + \frac{\epsilon}{2}, \quad \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + \frac{\epsilon}{2})\}$. Así tenemos cuatro posibilidades para el par $(C_1(\epsilon), C_2(\epsilon))$:

1) $C_1(\epsilon) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0) - \frac{\epsilon}{2})$ y $C_2(\epsilon) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$

2) $C_1(\epsilon) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0) - \frac{\epsilon}{2})$ y $C_2(\epsilon) = x_0 + \frac{\epsilon}{2}$

3) $C_1(\epsilon) = x_0 - \frac{\epsilon}{2}$ y $C_2(\epsilon) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$

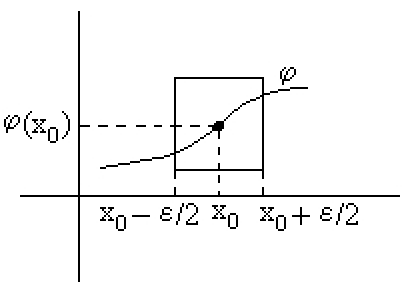
4) $C_1(\epsilon) = x_0 - \frac{\epsilon}{2}$ y $C_2(\epsilon) = x_0 + \frac{\epsilon}{2}$

Supongamos que se verifica 1), entonces

$$\mu(Q(P,\epsilon)) = \int_{P_{r_1}(graf\varphi\cap Q(P,\epsilon))} \varphi(1+\varphi')\,ds \geq \int_{P_{r_1}(graf\varphi\cap Q(P,\epsilon))} \varphi_{(}s)\varphi'(s)\,ds$$

$$= \left[\frac{1}{2}\varphi^2\right]_{\varphi^{-1}(\varphi(x_0)-\frac{\epsilon}{2})}^{\varphi^{-1}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2})} = \varphi(x_0)\epsilon$$

$x_0 + \varepsilon/2$



ε ε ε

ε ε ε ε

Figura 3.3.2

y

$$\mu(Q(P,\epsilon)) = \int_{C_1(\epsilon)}^{C_2(\epsilon)} \varphi(1+\varphi')ds \leq \epsilon(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}) + \frac{[\varphi(C_2(\epsilon))]^2}{2} - \frac{[\varphi(C_1(\epsilon))]^2}{2}$$

$$\leq \epsilon(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}) + \epsilon\varphi(x_0)$$

de lo que se obtiene

$$\varphi(x_0)\frac{\epsilon}{2} \leq \mu(Q(P,\epsilon)) \leq 3\epsilon\varphi(x_0). \tag{3.12}$$

Consideramos ahora la situación 2).

$$\mu(Q(P,\epsilon)) = \int_{\varphi^1(\varphi(x_0)-\frac{\epsilon}{2})}^{x_0+\frac{\epsilon}{2}} (\varphi+\varphi\varphi')\,ds \leq 2\frac{\epsilon}{2}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}) +$$

$$+\,(\varphi(x_0+\frac{\epsilon}{2}))^2 - (\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x_0)-\frac{\epsilon}{2})))^2$$

pero dado que $x_0 + \frac{\epsilon}{2} < \varphi^{-1}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2})$, se sigue que $\mu(Q(P,\epsilon)) \leq 2\frac{\epsilon}{2}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}) + \epsilon\varphi(x_0)$
y como además claramente $\varphi(Q(P,\epsilon)) \geq \varphi(x_0)\frac{\epsilon}{2}$, nuevamente se obtiene la relación (3.12).
Supongamos que se verifica 3).

esto es $C_1(\epsilon) = x_0 - \frac{\epsilon}{2}$ y $C_2(\epsilon) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2})$, lo que significa que

$$\varphi^{-1}(\varphi(x_0)-\frac{\epsilon}{2}) < x_0 - \frac{\epsilon}{2} \tag{3.13}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mu(Q(P,\epsilon)) &= \int_{x_0-\frac{\epsilon}{2}}^{\varphi^{-1}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2})} (\varphi+\varphi\varphi')\,ds \leq \int_{\varphi^{-1}(\varphi(x_0)-\frac{\epsilon}{2})}^{\varphi^{-1}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2})} \varphi\varphi' ds + \epsilon(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}) \\
&\leq \frac{[\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}]^2}{2} - \frac{[\varphi(x_0)-\frac{\epsilon}{2}]^2}{2} + \epsilon(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}) \\
&\leq \epsilon(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2}) + \epsilon\varphi(x_0) \leq 3\epsilon(\varphi(x_0)), \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

por hipótesis 3). También $\mu(Q(P,2\epsilon)) \geq \frac{\epsilon}{2}\varphi(x_0)$.

Consideremos ahora la situación 4), esto es $C_1(\epsilon) = x_0 - \frac{\epsilon}{2}$ y $C_2(\epsilon) = x_0 + \frac{\epsilon}{2}$.

Es claro que

$$\frac{\epsilon}{2}\varphi(x_0) \leq \mu(Q(P,\epsilon)) \leq \int_{\varphi^{-1}(\varphi(x_0)-\frac{\epsilon}{2})}^{\varphi^{-1}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2})} \varphi\varphi'\,ds + 2\frac{\epsilon}{2}(\varphi(x_0)+\frac{\epsilon}{2})$$

de lo que la desigualdad deseada se concluye como antes.
Probemos ii).

El centro P, pertenece al gráfico de φ y $\varphi(x_0) \leq \frac{1}{2}\epsilon$.
En esta situación tenemos que $C_1(\epsilon) = x_0 - \frac{\epsilon}{2}$. Para $C_2(\epsilon)$ son todavia posibles dos casos

1) $C_2(\epsilon) = x_0 + \frac{\epsilon}{2}$
2) $C_2(\epsilon) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$

Para 1) se verifica que

$$\begin{aligned}\mu(Q(P,\epsilon)) &\leq \epsilon^2 + \int_{x_0-\frac{\epsilon}{2}}^{x_0+\frac{\epsilon}{2}} \varphi(1+\varphi')\,ds \\ &\leq \frac{3}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}[\varphi^2(x_0+\frac{\epsilon}{2}) - \varphi^2(x_0-\frac{\epsilon}{2})] \\ &\leq \frac{3}{2}^{\epsilon^2} + \frac{\varphi^2(x_0+\frac{\epsilon}{2})}{2} \leq 2\epsilon^2.\end{aligned}$$

También para 2) se ve que $\mu(Q(P,\epsilon)) \leq \epsilon^2 + \int_{x_0-\frac{\epsilon}{2}}^{C_2(\epsilon)}(\varphi + \varphi\varphi')\,ds \leq \epsilon^2 + \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{3}{2}\epsilon^2$.

Además, $\mu(Q(P,\epsilon)) \geq \dfrac{\epsilon^2}{4}$, por lo tanto, junto a las dos relaciones anteriores se obtiene $\dfrac{\epsilon^2}{4} \leq \mu(Q(P,\epsilon)) \leq \dfrac{3}{2}$. con lo se demuestra ii).

Probemos b).

Supongamos que el centro de $P = (x_0, y_0)$ del cubo Q pertenece a Ω_2. Para esta situación consideramos dos casos

1) $\varphi(x_0 + \dfrac{\epsilon}{2}) \leq |y_0| + \dfrac{\epsilon}{2}$

2) $\varphi(x_0 + \dfrac{\epsilon}{2}) > |y_0| + \dfrac{\epsilon}{2}$

Para el primero se observa que por lo menos la cuarta parte del cuadrado está incluída en Ω_2. Además

$$\mu(Q(P,\epsilon)) \leq \epsilon^2 + \int_0^{x_0+\epsilon/2} \varphi(1+\varphi)ds \leq \epsilon^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \leq 2\epsilon^2.$$

Por lo tanto se tiene

$$\frac{\epsilon^2}{4} \leq \mu(Q(P,\epsilon)) \leq 2\epsilon^2.$$

Para el segundo caso, también se verifica que $\frac{\epsilon^2}{4} \leq \mu(Q(P,\epsilon))$ y además vale que $\mu(Q(P,\epsilon)) \leq \epsilon^2+2\displaystyle\int_0^{C_2(\epsilon)} \varphi(1+\varphi')ds \leq \epsilon^2 + \frac{[\varphi[\varphi^{-1}(\varphi(x_0)+\epsilon/2)]]^2}{2} \leq \epsilon^2 + (\varphi(x_0) + \epsilon/2)^2 \leq 2\epsilon^2$, ya que $\varphi(x_0) \leq \epsilon/2$ obteniéndose las mismas desigualdades anteriores. □

El siguiente teorema que se obtiene como una aplicación directa del lema anterior prueba la propiedad de duplicación para la medida μ definida en (3.11).

Teorema 3.3.1. *Sean Ω_1, Ω_2 y φ como en el lema anterior entonces la medida μ para E boreliano de $\mathbb{R}^2$ definida como*

$$\mu(\epsilon) = |E \cap \Omega_2| + \int_{Pr_1(\varphi \cap E)} \varphi(1+\varphi')ds$$

tiene la propiedad de duplicación.

Demostración. Sea el espacio $(\Omega_1 \cup \Omega_2, d)$, donde d es la métrica que se hereda de $\mathbb{R}^2$ e identifiquemos con $\alpha_P(\epsilon)$ a la función que determina la medida μ para un cubo con centro $P = (x_0, y_0)$, con $P \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, según la variación de su lado ϵ, es decir

$$\alpha_P(\epsilon) = \mu(Q(P,\epsilon))$$

$$= |Q(P,\epsilon) \cap \Omega_2| + \int_{P_{r1}(\Phi \cap Q(P,\epsilon))} \varphi(s)(1+\varphi'(s))\, ds$$

Por lo probado en el Lema anterior la familia de funciones $\{\alpha_P : P = (x_0, \varphi(x_0) \in \Omega_1\}$ es equivalente a la familia

$$\begin{cases} 2\varphi(x_0)\,\epsilon, & 0 < \epsilon < 2\,\varphi(x_0) \\ \\ \epsilon^2, & 2\,\varphi(x_0) < \epsilon < \infty \end{cases}$$

y la familia $\{\alpha_P : P = (x_0, y_0) \in \Omega_2\}$ es equivalente a la familia determinada por ϵ^2, de aquí que por aplicación del Lema 1.7.3, $(\Omega_1 \cup \Omega_2, d, \mu)$ es un espacio de tipo homogéneo con $d_1 = 1$ y $d_2 = 2$.

□

3.4. Contacto de conjuntos de dimensiones distintas: duplicación de sumas ponderadas de medidas d-normales y contacto de orden cero

Como ya se ha visto en la Sección 3.2 el comportamiento "tipo doubling" para medidas que se obtienen como suma de medidas d-normales está íntimamente relacionado a propiedades de separación entre los conjuntos.

Por otro lado la exploración realizada a través del ejemplo de la Sección 3.3 nos sugiere definir una medida duplicante de modo que su restricción sobre la componente de menor dimensión esté ponderada con una función que depende de la distancia al punto de contacto entre los conjuntos.

Nuestro objetivo en esta sección es detectar para qué valores de α se satisface la propiedad de duplicación para la medida definida como

$$\mu^{\alpha}(E) = \int_{E\cap X_1} (d(x,p))^{\alpha}\, d\mu_1 + \mu_2(E \cap X_2),$$

siendo X_1 y X_2 conjuntos de dimensiones distintas tales que sus fronteras tengan un solo punto de contacto y que éste contacto sea de tipo "lineal".

Una primera exploración sobre posibles valores de α, la haremos para el caso en que X_1 y X_2 son variedades lineales de dimensiones distintas en el espacio euclidiano n-dimensional.

Lema 3.4.1. *Sean $X_i, i = 1, 2$ variedades lineales de dimensiones n_i en $\mathbb{R}^n$, con $n_1 < n_2 < n$, que se intersecan en un único punto p. Sea μ_1 la medida n_1-dimensional de Lebesgue soportada en X_1 y μ_2 la medida n_2-dimensional de Lebesgue soportada en X_2. Entonces μ^{α} duplica en $X_1 \cup X_2$ si y solo si $\alpha = n_2 - n_1$.*

Demostración. Veamos primero que $\mu^{n_2-n_1}$ satisface la propiedad de duplicación.

Supongamos que X_1 y X_2 son subespacios de $\mathbb{R}^n$ y que se intersecan en el origen. Sean $x_0 \in X_1$ y $r > 0$ tales que $||x_0|| \leq \frac{r}{4}$ y consideremos la bola $B(x_0, r)$, entonces

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} \|x\|^\alpha d\mu_1 + \mu_2(B(x_0,r)\cap X_2)}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} \|x\|^\alpha d\mu_1 + \mu_2(B(x_0,r/2)\cap X_2)} \tag{3.15}$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} ||x||^\alpha\, d\mu_1 + c\, r^{n_2}}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} ||x||^\alpha\, d\mu_1}. \tag{3.16}$$

Notemos que para obtener cr^{n_2} se ha utilizado que $B(x_0,r)\cap X_2 \subset B(0,2r)\cap X_2 \subset B(z,6r)\cap X_2$, con $z \in B(0,2r)\cap X_2$. Notemos también que por lo mostrado en el ejemplo 1.7.1 μ^α restringida a X_1, duplica y dado que $\alpha = n_2 - n_1$ se obtiene $\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} ||x||^\alpha\, d\mu_1 \geq \int_{B(0,r/4)\cap X_1} ||x||^\alpha\, d\mu_1 \cong r^{\alpha+d_1}$,

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + \frac{c\, r^{n_2}}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} ||x||^\alpha\, d\mu_1} \leq c_1 + \frac{c\, r^{n_2}}{c'\, r^{\alpha+n_1}} \leq A.$$

Consideremos ahora $x_0 \in X_1$ y $r > 0$ tales que $||x_0|| > r/4$. Supongamos que $r < d(x_0, X_2)$. Bajo esta condición $B(x_0,r)\cap X_2 = \emptyset$, por lo tanto utilizando las conclusiones del ejemplo 1.7.1 para este caso se verifica que existe $C > 0$ tal que $\mu^\alpha(B(x_0,r)) \leq C\,\mu^\alpha(B(x_0,r/2))$, para todo $x \in X_1$, $r > 0$ y $\alpha > 0$.

Bajo el mismo supuesto anterior, asumimos ahora que

$r \geq d(x_0, X_2)$. Entonces vale que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + \frac{\mu_2(B(x_0,r)\cap X_2)}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_2} ||x||^\alpha \, d\mu_1} \quad (3.17)$$

y dado que $B(x_0,r)\cap X_2 \subset B(0,6\,||x_0||)\cap X_2$ y utilizando que para todo $x \in B(x_0,r)$ vale que $\|x\| \cong \|x_0\|$ se obtiene

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + c_2\frac{||x_0||^{n_2}}{||x_0||^\alpha \mu_1(B(x_0,r/2)\cap X_1)} \leq c_1 + c_2\frac{||x_0||^{n_2}}{||x_0||^\alpha r^{n_1}}$$

pero dado que $r > d(x_0, X_2)$ la última expresión es menor o igual que

$$c_1 + c_2\frac{||x_0||^{n_2}}{||x_0||^\alpha (d(x_0,X_2))^{n_1}}.$$

Denotemos con S^n a la esfera unidad y sea el conjunto acotado $V_1 = \{\vec{x} \in S^n \cap X_1\}$ y consideremos definida sobre V_1, la función

$$|\mathrm{sen}\,(\widehat{\vec{x}, Proy_{X_2}}\vec{x})|$$

donde $(\widehat{\vec{x}, Proy_{X_2}}\vec{x})$ indica el ángulo entre un vector de V_1 y su vector proyección sobre X_2. Por la continuidad de dicha función existe $\vec{x}_1 \in V_1$, y $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$ en el cual (3.18) alcanza un mínimo, de aquí que

$$d(x_0, X_2) = ||\vec{x}_0 - Proy_{X_2}\vec{x}_0|| = ||x_0||\,\mathrm{sen}\,(\vec{x}_0, Proy_{X_2}\vec{x}_0)$$

$$\geq ||x_0||\,|\mathrm{sen}\,(x_1, Proy_{x_2}\vec{x}_1)| \geq ||x_0||c.$$

Por lo tanto, reemplazando en (3.18), se obtiene que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + c_2\frac{||x_0||^{n_2}}{c_2\,C\,||x_0||^{\alpha+n_1}} \leq B$$

dado que por hipótesis $\alpha = n_2 - n_1$.

Consideramos $x_0 \in X_2$ y $r > 0$ tales que $||x_0|| \leq \frac{r}{4}$. Observando que que para esta situación $B(x_0, r) \cap X_1 \subset B(z, 3r) \cap X_1$ con $z \in B(0, 2r) \cap X_1$ y que $B(z, 3r) \cap X_1 \subset B(0, 5r) \cap X_1$, por la hipótesis sobre α, vale entonces que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0, r))}{\mu^\alpha(B(x_0, r/2))} \leq \frac{\mu_2(B(x_0, r) \cap X_2) + c_2 \displaystyle\int_{B(0,4r)\cap X_2} ||x||^\alpha \, d\mu_1}{\mu_2(B(x_0, r/2) \cap X_2)} \tag{3.18}$$

$$\tag{3.19}$$

$$\leq \frac{c_1 \, r^{n_2} + c_2' \, r^{\alpha+n_1}}{r^{n_2}} \leq C. \tag{3.20}$$

Sean $x_0 \in X_2$ y $r > 0$, tales que $||x_0|| > \frac{r}{4}$. Supongamos primero que $r < d(x_0, X_1)$, por lo tanto $X_1 \cap B(x_0, r) = \emptyset$ de modo que es directo obtener que $\mu^\alpha(B(x_0, r)) \leq C \, \mu^\alpha(B(x_0, r/2))$, para todo $\alpha > 0$ y $r > 0$.

Pensemos ahora que $r \geq d(x_0, X_1)$ y notemos que $B(x_0, r) \cap X_1 \subset B(0, 4||x_0||) \cap X_1$, por lo que se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\mu^\alpha(B(x_0, r))}{\mu^\alpha(B(x_0, r/2))} &\leq \frac{a_1 + a_2 \displaystyle\int_{B(0,||x_0||)\cap X_1} ||x||^\alpha \, d\mu_1}{r^{n_2}} \\ &\leq \frac{a_1 r^{n_2} + a_2' ||x_0||^{\alpha+n_1}}{r^{n_2}}. \end{aligned}$$

Llamando $V_2 = \{\vec{x} \in S^n \cap X_2\}$ y considerando sobre V_2 a la función $|\mathrm{sen}\langle \vec{x}, \mathrm{Proy}_{X_1} \vec{x} \rangle|$, razonando en forma similar a lo visto para $x_0 \in X_1$, vale que existe una constante $c' > 0$ tal que $d(x_0, X_1) \geq ||x_0|| \, c'$. Por lo tanto reemplazando esto último en (3.21) y dado que $r > d(x_0, X_1)$, y por la hipótesis sobre α obtenemos que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq a_1' + a_2'' \frac{||x_0||^{\alpha+n_1}}{||x_0||^{n_2}} \leq D,$$

por la hipótesis sobre α. De los casos considerados se prueba la tesis.

Probemos que sólo este valor de α es posible. Supongamos que $\alpha > n_2 - n_1$. Elegimos una sucesión $\{x_n\} \subset X_1$, determinada por $x_n = \dfrac{1}{n}v$, con $v \neq \vec{0}$, vector del espacio X_1. Notar que para cada x_n, existe $\vec{y}_n = proy_{X_2}\vec{x}_n \in X_2$, de modo que $||x_n - y_n||$ es la distancia de x_n a X_2. Si llamamos ω al ángulo que determina cada $\vec{y}_n$ con $\vec{v}$, vale entonces que $\operatorname{sen}\omega||x_n|| = ||x_n - y_n||$. Consideremos entonces la bola $B(x_n, r_n)$, con $r_n = \operatorname{sen}\omega||x_n||$. Por definición de μ^α, se obtiene que

$$\mu^\alpha(B(x_n, \frac{4r_n}{senw})) = \mu_1(B(x_n, \frac{4r_n}{senw}))\cap X_1) + \mu_2(B(x_n, \frac{4r_n}{senw}))\cap X_2) \geq \mu_2(B(x_n',$$

esto se obtiene de considerar que $B(x_n, 4r_n) \cap X_2 \subset B(x_n', r_n) \cap X_2$ con $x_n' \in B(x_n, 2r_n) \cap X_2$. Por otro lado notemos que la bola $B(x_n, r_n) \subset X_1$. Entonces por lo demostrado en el ejemplo 1.7.1 vale que $\mu^\alpha(B(x_n, r_n) \cap X_1) = \int_{B(x_n,r_n)\cap X_1} \|x\| d\mu_1 \leq \int_{B(0,C_w r_n)} \|x\|^\alpha d\mu_1 \leq C_2 r_n^{\alpha+n_1}$ pues $B(x_n, r_n) \cap X_1 \subset B(0, C_w r_n)$ con $C_w = 1 + \frac{1}{senw}$ siendo 0, el origen de coordenadas. De esto vale que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_n, \frac{4r_n}{senw}))}{\mu^\alpha(B(x_n, r_n))} \geq \frac{C_1 r_n^{n_2}}{C_2 r_n^{\alpha+n_1}} \to \infty$$

para $n \to \infty$ y para $\alpha > n_2 - n_1$, lo que contradice la duplicación de μ.

pues $B(x_n, y_n) \cap X_1 \subset B(0, cr_n)$, con $c = 1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}$, de aquí que $\dfrac{\mu^\alpha(B(x_n, \frac{4r_n}{\operatorname{sen}\omega}))}{\mu^\alpha(B(x_n, r_n))} \geq \dfrac{c_1 r_n^{n_2}}{c_2 r_n^{\alpha+n_1}} \longrightarrow \infty$, para $n \longrightarrow \infty$, para $\alpha > n_2 - n_1$, lo que contradice la duplicación de μ.

Veamos ahora que $\alpha < n_2 - n_1$ tampoco es posible. Sea la sucesión $\{x_n\} \subset X_1$ tal que $x_n = n\vec{v}$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, un vector del espacio X_1 y consideremos la bola $B(x_n, r_n)$ y $\omega > 0$ tal que para todo n, $\operatorname{sen}\omega||x_n||$, representa la distancia de x_n a X_2. Razonando de manera similar al caso anterior se obtiene que $\dfrac{\mu^\alpha(B(x_n, \frac{4r_n}{\operatorname{sen}\omega}))}{\mu^\alpha(B(x_n, r_n))} \geq \dfrac{c\, r_n^{n_2}}{r_n^{\alpha+n_1}} \longrightarrow \infty$, para $n \longrightarrow \infty$, si $\alpha < n_2 - n_1$, lo que contradice el hecho que μ duplica, por lo tanto $\alpha = n_2 - n_1$. $\square$

En el Lema anterior se ha utilizado implícitamente el hecho que para cualquier bola con centro en el subespacio X_1 y cuyo radio es una constante fija por la distancia desde el centro al punto de contacto tiene intersección vacía con el subespacio X_2. Por cierto esta propiedad no es exclusiva de conjuntos lineales, basta que X_1 esté contenido en un cono con vértice en el punto de contacto y tal que el cono de amplitud doble, por ejemplo, con el mismo vértice y eje no corte a X_2.

En lo que sigue nos proponemos dar una formulación abstracta métrica de la idea del grado de contacto entre dos subconjuntos de un espacio métrico. Es de esperar que el nuevo concepto constituya una generalización del clásico.

Para ello nos ubicamos en la siguiente situación para un espacio métrico (X, d) conformado por componentes distintas.

i) (X, d) un espacio métrico tal que $X = X_1 \cup X_2 \cup \{p\}$ con X_1 y X_2 abiertos y disjuntos y p el único punto en $\partial X_1 \cap \partial X_1 = \overline{X_1} \cap \overline{X_2}$.

ii) Existen medidas $\mu_i, i = 1, 2$ definidas sobre los borelianos de $X_i, i = 1, 2$ finitas y d_i-localmente normales no atómicas, esto es, existen constantes positivas C_i y C_i', $i = 1, 2$ tales que $C_i\, r^{d_i} \leq \mu_i(B(x, r) \cap X_i) \leq C_i'\, r^{d_i}$, con $d_1 \leq d_2$, para todo $0 < r \leq 1$.

Si denotamos con $d_i(x)$ a la función distancia de x a X_i, $i = 1, 2$, tenemos que $d_1(x) \equiv 0$ en $\overline{X_1} = X_1 \cup \{p\}$ y que $d_2(x) \equiv 0$ en $\overline{X_2} = X_2 \cup \{p\}$. Es claro entonces que

$$d(x, p) \geq d_1(x) + d_2(x) \geq d_i(x), \tag{3.21}$$

para todo $x \in X$. La existencia de un cono que envuelva a X_1 con vértice en el punto p, puede escribirse de manera general pidiendo una desigualdad en el sentido contrario a (3.21) del tipo $d(x, p) \leq C\, d_2(x)$, valga para todo $x \in X_1$.

Conviene notar antes de seguir que la existencia de un tal cono que envuelve a X_1, es equivalente a la existencia de otro cono y con el mismo vértice que envuelve a X_2 y por lo tanto esta propiedad del modo de contacto es una propiedad del sistema constituido por dos componentes X_1 y X_2. Precisamente las ideas se formalizan en el siguiente resultado:

Lema 3.4.2. *Sea (X, d) un espacio métrico que verifica i). Supongamos que existen $C > 0$ tal que $d(x, p) \leq$*

$Cd_2(x)$ para todo $x \in X_1$, entonces existe $\tilde{C}$ tal que $d(x,p) \leq \tilde{C}d_1(x)$, para todo $x \in X_2$.

Demostración. Observemos primero que la hipótesis puede reescribirse de la siguiente forma: existe una constante positiva C tal que $B(x, C\, d(x,p)) \cap X_2 = \emptyset$, para todo $x \in X_1$. Análogamente la tesis se reescribe: existe $\bar{C} > 0$ tal que para todo $x \in X_2$, $B(x, \tilde{C}\, d(x,p)) \cap X_1 = \emptyset$. Verifiquemos esto último.
Sea ϵ tal que $0 < \dfrac{\epsilon}{1-\epsilon} < C$. Supongamos que $B(y, \epsilon(d(y,p))) \cap X_1 \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X_1$ tal que $x \in B(y, \epsilon(d(y,p)))$. Afirmamos que $y \in B(x, C(d(x,p)))$. Para ello veamos previamente que $d(y,p) \leq \dfrac{1}{1-\epsilon}\, d(x,p)$. En efecto $d(y,p) \leq d(y,x) + d(x,p) < \epsilon d(y,p) + d(y,x)$, de aquí $d(y,p) \leq \dfrac{1}{1-\epsilon}\, d(x,p)$. Probemos lo afirmado. Si x tal que $x \in B(y, \epsilon\, d(y,p))$, entonces $d(y,x) < \epsilon\, d(y,p) < \dfrac{\epsilon}{1-\epsilon}\, d(x,p) \leq C\, d(x,p)$, lo que contradice el hecho que $B(x, C\, d(x,p)) \cap X_2 = \emptyset$), para todo $x \in X_1$. □

Estamos ahora en condiciones de enunciar el concepto de propiedad G_0 para el orden de contacto entre dos componentes de un espacio métrico.

Sea (X,d) un espacio métrico que verifica la condición i). diremos que el espacio (X,d) verifica la propiedad G_0 o que las componentes del espacio tienen orden de contacto cero si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in X_1$, vale que $d(x,p) \leq C\, d(x, X_2)$ ó $d(x,p) \leq C\, d(x, X_1)$ para todo $x \in X_2$.

Notemos que si (X, d) verifica la propiedad G_0, se cumple naturalmente que

$$
\begin{aligned}
& d(x,p) \leq C\, d(x, X_1) \leq C\, d(x,p), \text{ para todo } x \in X_2 \\
& d(x,p) \leq \tilde{C}\, d(x, X_2) \leq \tilde{C}\, d(x,p), \text{ para todo } x \in X_1
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Observemos además que (3.22) coincide con el concepto clásico de orden de contacto cero para curvas del plano que son gráficas de funciones de tipo C_1, ya que si X_1 y X_2 representan al gráfico de dos funciones en un entorno reducido de un punto p, en que las mismas coinciden, entonces el espacio $X = X_1 \cup X_2 \cup \{p\}$ tiene las condiciones consideradas en i) y el hecho de verificarse las desigualdades de la izquierda en (3.22), hacen que sean distintas y finitas las primeras derivadas de dichas funciones en p, lo que asegura que tengan contacto cero en dicho punto.

Destaquemos además que nuestro objetivo es trabajar en espacios métricos más generales que el caso mencionado, esto es espacios que estén conformados por componentes de dimensiones distintas que verifiquen la propiedad G_0. Un ejemplo sencillo que describe una situación como la requerida, es el siguiente:

El espacio (X, d) donde $X = \overline{X_1} \cup \overline{X_2} = \{p\}$, siendo $\{p\} = \{(0,0)\}$, $X_1 = (0,1) \times (0,-1)$ y $X_2 = \{(0,x), 0 < x < 1\}$ y d la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. No es difícil comprobar que (X, d) verifica la propiedad G_0.

El próximo teorema establece una condición suficiente para que la medida μ^α definida en un espacio X_1 que verifica la propiedad G_0, tenga la propiedad de duplicación.

Antes de enunciar el teorema, veamos el siguiente lema.

Lema 3.4.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y X_1 un subespacio denso en X. Sea μ una medida positiva no atómica definida en los borelianos de X, que es localmente d-normal en X_1. Entonces μ es localmente d-normal en el espacio total X.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Dado que $\bar{X}_1 = X$, existe $\{x_n\} \subset X_1$ tal que $x_n \longrightarrow x$, $x \in X$ de aquí que existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se verifica que la bola $B(x_n, r/4)$ está incluida en la bola $B(x, r)$ y ésta está incluida en la bola $B(x_n, 2r)$. por lo tanto, por la normalidad de μ en X_1, se verifica que

$$c_2\, r^d \leq \mu(B(x_n, r/4)) \leq \mu(B(x, r)) \leq \mu(B(x_n, 2r)) \leq c_1\, r^d,$$

con lo que se obtiene la tesis.

$\square$

Teorema 3.4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico acotado con las condiciones i) y ii) que verifica la propiedad G_0. Sea la medida $\mu(E)^\alpha = \int_{E \cap X_1} (d(x, p))^\alpha d\mu_1 + \mu_2(E \cap X_2)$, para E boreliano de X, entonces si $\alpha = d_2 - d_1$ se tiene que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo.*

(1) $\alpha \leq d_2 - d_1$, y,

(2) si X_1 es no acotado, entonces $\alpha = d_2 - d_1$.

Demostración. Sean $x_0 \in X_1$ y $r > 0$ tal que $d(x_0, p) \leq r/4$. Sea la bola $B(x_0, r)$ entonces

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0, r))}{\mu^\alpha(B(x_0, r/2))} \leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1 + c\, r^{d_2}}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1}.$$

Notemos que el segundo término del numerador se obtiene del hecho que $B(x_0, r) \cap X_2 \subset B(p, 2r) \cap X_2 \subset B(z, 4r) \cap X_2$, con $z \in B(p, 2r) \cap X_2$.

Observar además que por lo demostrado en el ejemplo 1.7.2 del Cap. I, la medida $\displaystyle\int_{E\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1$ duplica para $\alpha > -d_1$, por lo que se obtiene que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0, r))}{\mu^\alpha(B(x_0, r/2))} \leq c_1 + \frac{c_2\, r^{d_2}}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1},$$

y dado que para nuestra situación $\alpha \geq 0$ se tiene que

$$\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1 \geq \int_{B(p,r/4)} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1 \cong r^{\alpha+d_1},$$

vale que

$$\frac{\mu(B(x_0, r))}{\mu(B(x_0, r/2))} \leq c_1 + \frac{\bar{c}_2\, r^{d_2}}{r^{\alpha+d_1}} \leq A$$

usando que $\alpha = d_2 - d_1$.

Sea $x_0 \in X_1$ tal que $d(x_0, p) > r/4$ y supongamos que $r < d(x_0, X_2)$. Bajo esta condición $B(x_0, r) \cap X_2 = \emptyset$ y por lo tanto dado que la restricción de μ sobre X_1, duplica vale que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1} \leq c,$$

para todo r y α positivos.

Asumimos que $d(x_0,p) > r/4$ pero $r > d(x_0,X_2)$, entonces

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + \frac{\mu_2(B(x_0,r)\cap X_1)}{\displaystyle\int_{B(x_0,r/2)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1} \leq c.$$

Notemos que para esta situación vale que $B(x_0,r)\cap X_2$ está contenida en la bola $B(p, 6\, d(x_0,p)) \cap X_2$ y dado que para todo $x \in B(x_0,r/8)\cap X_1$ vale que $d(x_0,p) \leq r/8 + d(x,p) < \dfrac{d(p,x_0)}{2} + d(p,x)$, por lo tanto $d(x_0,p) - \dfrac{1}{2}\, d(x_0,p) \leq d(x,p)$, reemplazando en (3.23), se obtiene que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + \frac{c_2\,[d(x_0,p)]^{d_2}}{[d(x_0,p)]^\alpha \mu_1(B(x_0,r/2))\cap X_1},$$

dado que $r > d(x_0,X_2)$ y por la propiedad G_0, vale que $r \geq c\, d(x_0,p)$ y como $\alpha = d_2 - d_1$,

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + \frac{c_2\,[d(x_0,p)]^{d_2}}{[d(x_0,p)]^{\alpha+d_1}} \leq c.$$

Consideramos ahora $x_0 \in X_2$ y $d(x_0,p) \leq r/4$. Observando que $B(x_0,r)\cap X_1 \subset B(z,4r)\cap X_1$, con $z \in B(p,2r)\cap X_1$,y que la bola $B(z,4r)\cap X_1 \subset B(p,6r)\cap X_1$,por la hipótesis sobre α y los ejemplos de la Sección 1.7, se obtiene que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_1 + \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1}{C_1 r^{d_2}}$$

$$\leq \; c_1 + \frac{\bar{c}_2 \displaystyle\int_{B(p,6r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1}{r^{d_2}} \leq c'$$

pues $\alpha = d_2 - d_1$. Sea $x_0 \in X_2$ y $d(x_0,p) > r/4$. Si $r < d(x_0,X_1)$, $X_1 \cap B(x_0,r) = \emptyset$ de modo que es directo obtener $\dfrac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c_2$.

Consideremos ahora la misma situación anterior pero supongamos que $r \geq d(x_0,X_1)$. Se puede ver que $B(x_0,r)\cap X_1 \subset B(p,d(x_0,p)) \cap X_1$ y utilizando la propiedad G_0 para acotar el denominador, se obtiene que

$$\frac{\mu^\alpha(B(x_0,r))}{\mu^\alpha(B(x_0,r/2))} \leq c\, r^{d_2} + \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha \, d\mu_1}{r^{d_2}}$$

$$\leq \bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2\,[d(x_0,p)]^{\alpha+d_1}}{[d(x_0,p)]^{d_2}} \leq c".$$

por la hipótesis sobre α.

De los casos considerados se prueba la tesis. $\square$

Teorema 3.4.2. *Sea (X,d) espacio métrico con las condiciones i) y ii) que verifica la propiedad G_0, entonces si μ^α duplica vale que $\alpha = d_2 - d_1$.*

Demostración. Aceptemos que μ^α duplica y supongamos que $\alpha > d_2 - d_1$. Consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset X_1$ tal que $d(x_n, p) \to 0$ para $n \to \infty$ y sean $r_n = cd(x_n, p)$, donde c es la constante que provee la propiedad G_0. Notar que las bolas $B(x_n, r_n)$ están estrictamente incluidas en X_1, por la propiedad mencionada.
Entonces usando el hecho que $B(x_n, \frac{4r_n}{c}) \cap X_2 \supset B(x_n', \frac{r_n}{c}) \cap X_2$, con $x_n' \in B(x_n, \frac{2r_n}{c}) \cap X_2$, vale que

$$\mu^\alpha(B(x_n, \frac{4r_n}{c})) \geq c'\, r_n^{d_2}$$

Por otro lado

$$\mu^\alpha(B(x_n, r_n)) = \int_{B(x_n,r_n)\cap X_1} d(x,p)^\alpha \, d\mu_1 \leq \int_{B(p,\bar{c}r_n)\cap X_1} d(x,p)^\alpha \, d\mu_1 \leq \bar{c} r_n^{\alpha+d_1},$$

De (3.23) y (3.23) se obtiene que

$$\frac{\mu(B(x_n, \frac{4r_n}{c}))}{\mu(B(x_n, r_n))} \geq \frac{c r_n^{d_2}}{r_n^{\alpha+d_1}} \longrightarrow \infty, \text{ para } n \longrightarrow \infty$$

si $\alpha > d_2 - d_1$. y este hecho contradice la duplicación de μ^α.

Veamos que también $\alpha < d_2 - d_1$, debe descartarse. Consideremos la sucesión $\{x_n\} \subset X_1$ tal que $d(x_n, p) \to \infty$ para $n \to \infty$ y sean $r_n = cd(x_n, p)$, donde c es la constante que se obtiene de la propiedad G_0. Teniendo en cuenta que la bola $B(x_n, \frac{4r_n}{c}) \cap X_2$ contiene a la bola $B(x_n', \frac{r_n}{c}) \cap X_2$, para algún $x_n' \in B(x_n, \frac{2r_n}{c}) \cap X_2$ y realizando un razonamiento similar al caso anterior, se ve que

$$\frac{\mu(B(x_n, \dfrac{4r_n}{c}))}{\mu(B(x_n, r_n))} \geq \frac{\bar{c}\, r_n^{d_2}}{r_n^{d_2}} = \frac{\bar{c}\, r_n^{d_2}}{r_n^{\alpha+d_1}} \longrightarrow \infty,$$

para $n \longrightarrow \infty$ si $\alpha < d_2 - d_1$. Notar que se ha utilizado implicitamente que X_1 no es acotado, pero se obtiene el mismo resultado si se considera para este caso una sucesión $\{x_n\} \cap X_2$ tal que $d(x_n, p) \to 0$ para $n \to \infty$ De los dos casos considerados deducimos que $\alpha = d_2 - d_1$. $\square$

3.5. Contacto de conjuntos de dimensiones distintas: duplicación de sumas ponderadas de medidas normales y contacto de orden β, $\beta > 0$.

En esta sección estudiaremos la relación entre la duplicación de μ^α y el orden de contacto entre las componentes del espacio, cuando éste es mayor que cero. Ejemplos de tales situaciones son los que surgen en casos como el ejemplo de la sección 3.3 donde $X = X_1 \cup X_2 \cup \{p\}$ con $X_1 = \{(x, \varphi/(x) : x \in R^+\}$, $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$, $\{p\} = \{(0, 0)\}$, con φ una función creciente de clase C_1.

En los espacios del tipo mencionado una desigualdad como $d(x, p)^{\beta+1} \leq c\, d_2(x)$,para todo $x \in X_1$ con $\beta > 0$, es válida, y en general localmente el cociente $\dfrac{d(x, p)}{d_2(x)}$ no está superiormente acotado.

Veamos que en el caso de un espacio métrico acotado, como para G_0, esta propiedad del modo de contacto, con un orden mayor que cero, es una propiedad del sistema constituido por dos componentes.

Lema 3.5.1. *Sea (X,d) un espacio métrico acotado que verifica i). Supongamos que existen c y $\beta > 0$ tales que $(d(x,p))^{\beta+1} \leq c\, d_2(x)$, para todo $x \in X_1$, entonces existe $\tilde{c} > 0$ tal que $d(x,p)^{\beta+1} \leq \tilde{c}\, d_1(x)$, para todo $x \in X_2$.*

Demostración. Supondremos por simplicidad que el diámetro de X es uno. Al igual que en el caso G_0, la hipótesis se reescribe como $B(x, c(d(x,p))^{\beta+1}) \cap X_2 = \emptyset$, para todo $x \in X_1$ y la tesis como: existe $\tilde{c} > 0$ tal que para todo $x \in X_2$, $B(x, c(d(x,p))^{\beta+1}) \cap X_1 = \emptyset$. Verifiquemos esto último. Sea $\epsilon > 0$ tal que $0 < \dfrac{\epsilon}{(1-\epsilon)^{\beta+1}} < c$, supongamos que existe $y \in X_2$ tal que $B(y, \epsilon(d(y,p))^{\beta+1}) \cap X_1 \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in X_1$ tal que $x \in B(y, \epsilon(d(y,p))^{\beta+1}$, para ello mostremos previamente que $(d(y,p))^{\beta+1} \leq \frac{1}{(1-\epsilon)^{\beta+1}}(d(x,p))^{\beta+1}$. En efecto, $d(y,p) \leq d(y,x) + d(x,p) < \epsilon\, d(y,p) + d(p,x)$, de aquí que $(d(y,p))^{\beta+1} \leq \left[\dfrac{d(x,p)}{(1-\epsilon)}\right]^{\beta+1}$. Dado que existe x tal que $x \in B(y, \epsilon\,(d(x,p))^{\beta+1}$, entonces $d(y,x) \leq \epsilon\,(d(y,p))^{\beta+1} < \epsilon\left[\dfrac{d(x,p)}{(1-\epsilon)}\right]^{\beta+1} \leq c\,(d(x,p))^{\beta+1}$, lo que contradice el hecho que $B(x, c(d(x,p))^{\beta+1}) \cap X_2 = \emptyset)$, para todo $x \in X_1$. □

Definimos a continuación el concepto de contacto de orden β, o propiedad G_β para un espacio métrico acotado (X,d) con las condiciones enunciadas en i).

Sea (X,d) un espacio métrico, diremos que el espacio (X,d) verifica la propiedad G_β, o que las componentes X_i del espacio tienen contacto de orden β, si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in X_1$ vale que

$d(x,p)^{\beta+1} \leq Cd(x,X_2)$ ó que para toda $x \in X_2$ vale que $d(x,p)^{\beta+1} \leq Cd(x,X_1)$

En el Teorema 3.4.1 $\alpha = d_2 - d_1$ es suficiente para que la medida μ^α definida en (3.23) tenga la propiedad de duplicación.

Veamos que para el caso en que el espacio (X,d), verifique G_β con $\beta > 0$ y cuyas componentes tengan dimensiones distintas d_2 y $d_1$respectivamente, la medida $\mu^{d_2-d_1}$ no duplica.

Sea el espacio (X,d) con $X = X_1 \cup X_2 \cup \{(0,0)\}$ $X_1 = \{(x,x^2), x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$, $X_2 = (0,1) \times (0,-1)$ y $d = ||.||_\infty$ en $\mathbb{R}^2$. Es directo inferir a partir de la definición que este espacio verifica G_1. Notemos también que si μ_1 representa la medida longitud de arco y μ_2 es la medida de 2-dimensional de Lebesgue, entonces, los espacios (X_i, d, μ_i) $i = 1,2$ verifican ii), con $d_2 = 2$ y $d_1 = 1$. Veamos que

$$\mu(E) = \int_{E \cap X_1} (d(x,y),(0,0))\, d\mu_1(x) + \mu_2(E \cap X_2),$$

no tiene la propiedad de duplicación.

Sea el cubo Q con centro en $(x_1, 0)$, $0 < x_1 < 1$ tal que su lado l, verifica que $(x_1 - \frac{l}{2})^2 = \dfrac{l}{2}$. Entonces

$$\mu(Q(x_1,0),2l) \geq \int_{x_1-l}^{x_1} x\, dx = \frac{x_1^2 - (x_1-l)^2}{2} \geq l\sqrt{l/2}$$

y $\mu(Q(x_1,0),l) = l^2$, de aqui que $\dfrac{\mu(Q(x_1,0),2l)}{\mu(Q(x_1,0),l)} \geq \dfrac{(l/2)^{\frac{3}{2}}}{l^2} \rightarrow \infty$
para $l \rightarrow 0$.

El caso precedente nos da indicios de que la potencia α que exige $d(x,p)$ en (3.23) para la duplicación de μ, no sólo está relacionada a los dimensiones de las componentes del espacio sino también al grado de "contacto" y "separación" de las mismas en el punto p. Notemos que de hecho la propiedad G_β implica separación. Introducimos ahora una nueva propiedad relativa a los conjuntos que componen el espacio que llamaremos G_{β^*} y que a diferencia de G_β implica proximidad.

Sea (X,d) un espacio métrico acotado que verifica i). Diremos que el conjunto X_1 verifica la propiedad G_{β^*} con $\beta > 0$, si existe $c > 0$ tal que $(d(x,p))^{\beta+1} \geq cd_2(x)$ para todo $x \in X_1$, igualmente el espacio (X_2,d) verifica G_{β^*} con $\beta > 0$, si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in X_2$, $(d(x,p))^\beta \geq cd_1(x)$.

Observemos que esta propiedad, no es una propiedad del espacio, ya que si una de las componentes tiene la propiedad,G^*_B, no necesariamente la otra componente la tiene.

Para ver esto consideremos el siguiente caso. Sea (X,d), $X = X_1 \cup X_2 \cup \{p\}$ siendo $X_1 = \{(x,x^2), x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$, $X_2 = (-1,1) \times (0,-1)$ y $\{p\} = \{(0,0)\}$.

El espacio (X_1,d) verifica G^{1^*}. Veamos que (X_2,d) no la cumple. Consideremos la sucesión $\{x_n\} = \{(0, \dfrac{-1}{n})\} \subset X_2$.Entonces $d_1(x_n) = \dfrac{1}{n}$, y $\dfrac{d(x_n,p)^{1+1}}{d_1(x_n)} \to 0$ si $n \to \infty$

Una cuestión interesante a notar es que de 3.23 se desprende que si (X,d) verifica G_0 también verifica G^*_0.

Por otro lado observemos que si se tiene un espacio (X,d), con las condiciones especificadas en (i), el espacio

X_1 necesariamente debe ser acotado si éste verifica G_β, $\beta > 0$.

En efecto si asumimos que (X, d) cumple $G_\beta : (d(x,p))^{\beta+1} \leq cd(x, X_2) \leq cd(x,p)$, de aquí que

$$(d(x,p))^\beta \leq c \text{ para todo } x \in X_1. \tag{3.23}$$

Es de notar que este resultado, no es necesariamente cierto para el caso en que (X, d) verifica G_0.

El siguiente lema da una relación entre los espacios que verifican G_0 y G_β.

Lema 3.5.2. *Sea (X, d) un espacio métrico acotado que verifica la condición (i) y G_0 entonces (X, d), verifica G_β, $\beta > 0$.*

Demostración. Dado que X_1 es acotado existe $R > 0$ tal que $X_1 \subset B(p, R)$. Entonces, para todo $x \in X_1$, $(\dfrac{d(x,p)}{R})^{\beta+1} \leq \dfrac{d(x,p)}{R} \leq \dfrac{c}{R} d(x, X_2)$, de aquí que $(d(x,p))^{\beta+1} \leq \tilde{c}\, d(x, X_2)$, con $\tilde{c} = c\, R^{\beta+1}$. □

El siguiente teorema establece una condición suficiente para que la medida definida en (3.23), sea duplicante cuando el espacio (X, d) verifica G_β y la componente cumple X_1, G_{β^*}.

Teorema 3.5.1. *Sea (X, d) un espacio métrico acotado con las condiciopnes (i) y (ii), que verifica la propiedad G_β, $\beta > 0$ y X_1 verifica G_{β^*}. Sea la medida definida como $\mu^\alpha(E) = \displaystyle\int_{E\cap X_1} (d(x,p))^\alpha d\mu_1 + \mu_2(E \cap X_2)$, para E*

boreliano de X, entonces si $\alpha = (\beta+1)(d_2 - d_1)$ se tiene que (X, d, μ^α) es un espacio de tipo homogéneo.

Demostración. Consideramos los siguientes casos para $x_0 \in X$ y $r > 0$.

a) Sea $x_0 \in X_1$ y $d(x_0, p)\ leq\frac{r}{4}$. Notemos que $B(x_0, r) \cap X_2 \subset B(p, 2r) \cap X_2 \subset B(z, 4r) \cap X_2$ para algun $z \in B(p, 2r) \cap X_2$. Por lo tanto,

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p)^\alpha d\mu_1 + C_1 r^{d_2}}{\displaystyle\int_{B(x_0,\frac{r}{2})\cap X_1} (d(x,p))^\alpha d\mu_1 + \mu_2(B(x_0,\frac{r}{2}) \cap X_2)}$$

Observar que $B(x_0, \frac{r}{2}) \cap X_2$ contiene a la bola $B(z, \frac{r}{4}) \cap X_2$, con $z \in B(p, \frac{r}{8}) \cap X_2$. Por consiguiente de (3.24), y por lo probado en el ejemplo 1.7.2 , vale que para todo $r > 0$ y cualquier $\alpha > 0$, que

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} &\leq \frac{\displaystyle\int_{B(p,2r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha d\mu_1(x) + C r^{d_2}}{\displaystyle\int_{B(p,\frac{r}{4})\cap X_1} (d(x,p)^\alpha d\mu_1(x) + D r^{d_2}} \\
&\leq \frac{A r^{\alpha+d_1} + C r^{d_2}}{E r^{\alpha+d_1} + D r^{d_2}} \\
&\leq \frac{A}{E} + \frac{C}{D}
\end{aligned}$$

b) Sea $x_0 \in X_1$ y $d(x_0, p) > \frac{r}{4}$. Entonces consideramos los siguientes subcasos.

i) $d(x_0, X_2) > r$

ii) $\frac{r}{4} < d(x_0, X_2) \leq r$.

iii) $d(x_0, X_2) < \dfrac{r}{4}$.

En caso i), vale que $B(x_0, r) \cap X_2 = \emptyset$, por lo tanto por lo probado en el ejemplo 1.7.2,

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha d\mu_1}{\displaystyle\int_{B(x_0,\frac{r}{2})\cap X_1} (d(x,p))^\alpha d\mu_1} \leq C,$$

(3.24)

para todo r y α positivos

Veamos el caso ii). Notemos que para esta situación dado que $B(x_0, r) \cap X_2 \neq \emptyset$ y que $B(x_0, r) \cap X_2 \subset B(z, 4r)$, con $z \in B(x_0, r) \cap X_2$. De aquí que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p))^\alpha d\mu_1 + Cr^{d_2}}{\displaystyle\int_{B(x_0,\dfrac{r}{8})\cap X_1}} (d(x,p)^\alpha d\mu_1)$$

(3.26)

Notemos que para esta situación $r \leq 4d(x_0, X_2) \leq 4d(x_0, p)$ por lo tanto $d(x,p) \leq d(x,x_0) + d(x_0,p) = 5d(x_0,p)$ para todo $x \in B(x_0, r) \cap X_1$. Por otro lado para todo $x \in B(x_0, \dfrac{r}{8}) \cap X_1$, vale que $d(x_0,p) \leq d(x_0,x) + d(x,p) < \dfrac{r}{8} + d(x,p) < \dfrac{d(x_0,p)}{2} + d(x,p)$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2} d(x_0,p) \leq d(x,p)$$

Reemplazando (3.25) y (3.27) en (3.24) y por el ejemplo 1.7.2, se obtiene que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq C_1 + \frac{C_2 r^{d_2}}{\displaystyle\int_{B(x_0,\frac{r}{8})\cap X_1} (d(x,p))^{\alpha} d\mu_1}$$

$$\leq C_1 + \frac{C_2 r^{d_2}}{(d(x,p))^{\alpha} r^{d_1}}$$

dado que X_1 verifica G_{β^*}, esto es, $d(x_0,p) \geq C\,(d(x_0,X_2))^{\beta+1}$, reemplazando en la desigualdad anterior vale que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq C_1 + \frac{\tilde{C}_2 r^{d_2-d_1}}{d(x_0,X_2)^{\beta+1}},$$

pero dado que $r < 4\,d(x_0,X_2)$, se obtiene que $\dfrac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \bar{C}$, para $\alpha = (\beta+1)(d_2-d_1)$. Analizamos el caso iii). Dado que $d(x_0,X_2) < \dfrac{r}{4}, B(x_0,\dfrac{r}{4}) \cap X_2 \neq \emptyset$. Notemos además que la bola $B(x_0,r)\cap X_2 \subset B(z_0,r)\cap X_2$ con $z_0 \in B(x_0,\dfrac{r}{4})\cap X_2$ y la bola $B(x_0,\dfrac{r}{2})\cap X_2$ contiene a la bola $B(x_0,\dfrac{3r}{8})\cap X_2$, y que ésta contiene a la bola $B(z_0,\dfrac{r}{8})\cap X_2$ con $z_0 \in B(x_0,\dfrac{r}{4})\cap X_2$. De aquí que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{\displaystyle\int_{B(x_0,r)\cap X_1} (d(x,p))^{\alpha} d\mu_1}{A_2 \displaystyle\int_{B(x_0,\frac{r}{2}\cap X_1} (d(x,p))^{\alpha} d\mu_1}$$

$$+ \frac{B_1 r^{d_2}}{B_2 r^{d_2}} \leq C$$

para todo $r > 0$ y cualquier $\alpha > 0$.

Analizamos los siguientes casos para $x_0 \in X_2$ y $r < 0$. a)Sea $x_0 \in X_2$ y $d(x_0, p) \leq \frac{r}{4}$,entonces para la bola $B(x_0, r)$ y la $B(x_0, \frac{r}{2})$ se verifica que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{C_1' r^{d_2} + \displaystyle\int_{B(x_0,r)} (d(z,p))^\alpha d\mu_1}{C_2' r^{d_2} + \displaystyle\int_{B(x_0,\frac{r}{2})} (d(z,p))^\alpha d\mu_1}$$

$$\leq \frac{C_1' r^{d_2} + \displaystyle\int_{B(z_0,2r)} (d(z,p))^\alpha d\mu_1}{C_2' r^{d_2} + \displaystyle\int_{B(z_0,\frac{r}{8})} (d(z,p))^\alpha d\mu_1}$$

Notemos que las desigualdades anteriores se obtienen del hecho que $B(x_0, r) \cap X_1 \subset B(z_0, 2r) \cap X_1$ y $B(x_0, \dfrac{r}{2}) \cap X_1 \supset B(z_0, \dfrac{r}{8}) \cap X_1$ para algún $z_0 \in B(p, \dfrac{r}{8})$. Por otro lado dado que μ^α, restringida a X_2 duplica por lo probado en Capítulo I, se obtiene

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq C_1' + \frac{\displaystyle\int_{B(z_0,2r)} (d(z,p))^\alpha d\mu_1}{\displaystyle\int_{B(z_0,\frac{r}{8})} (d(z,p))^\alpha d\mu_1}$$

$$\leq C_1' + C_2'$$

para todo $r > 0$ y $\alpha > 0$.

b)$x_0 \in X_2$ y $d(x_0, p) > \dfrac{r}{4}$. Consideremos los siguientes casos.

i) $d(x_0, X_1) > r$

ii)$\dfrac{r}{4} < d(x_0, X_1) \leq r,$

iii)$d(x_0, X_1) < \dfrac{r}{4}.$

En el caso i) notar que $B(x_0, r) \cap X_1 = \emptyset$, por lo tanto

$$\frac{\mu(B(x_0, r))}{\mu(B(x_0, \frac{r}{2}))} = \frac{\mu(B(x_0, r) \cap X_2)}{\mu(B(x_0, \frac{r}{2}) \cap X_2)} \leq A.$$

Para el caso ii) se tiene que:

$$\frac{\mu(B(x_0, r))}{\mu(B(x_0, \frac{r}{2}))} \leq C \frac{\displaystyle\int_{B(z_0, 2r) \cap X_1} (d(z, p))^{\alpha} d\mu_1 + r^{d_2}}{r^{d_2}}$$

Notar que se ha usado que $B(x_0, r) \cap X_1 \subset B(z_0, 2r) \cap X_1$ para algún $z_0 \in B(p, \dfrac{r}{2}) \cap X_1$. Por otro lado para todo $z \in B(z, \dfrac{r}{2})$ vale que $d(z, p) \leq d(z_0, x_0) + d(x_0, p) \leq 2r + d(x_0, p) \leq 5\, d(x_0, p)$ y dado que (X, d) verifica G_β, $5d(x_0, p) \leq \bar{C}\, d(x_0, X_1)^{\dfrac{1}{\beta + 1}}$ y reemplazando en (3.27), se obtiene que

$$\frac{\mu(B(x_0, r))}{\mu(B(x_0, \frac{r}{2}))} \leq \bar{C}\, (d(x_0, X_1))^{\dfrac{\alpha}{\beta + 1}}\, r^{d_1 - d_2},$$

pero dado que $d_1 \leq d_2$ y $\dfrac{r}{4} \geq d(x_0, X_1)$ se obtiene que

$$\frac{\mu(B(x_0, r))}{\mu(B(x_0, \frac{r}{2}))} \leq C\, d(x_0, X_1)^{\dfrac{\alpha}{\beta + 1} + d_1 - d_2}$$

y siendo $\alpha = (\beta+1)(d_2-d_1)$, $\dfrac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq C$. Veamos iii). Dado que $d(x_0,X_1) < \dfrac{r}{4}$, $B(x_0,\dfrac{r}{4}) \cap X_1 \neq \emptyset$ y la bola $B(x_0,r)\cap X_1$ contiene a la bola $B(z_0,2r)$, con $z_0 \in B(x_0,r)\cap X_1$. Al igual que en el caso anterior se tiene que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq C\,\frac{\displaystyle\int_{B(z_0,r)\cap X_1} (d(z,p))^{\alpha} d\mu_1 + r^{d_2}}{r^{d_2}}$$

y como $d(z,p) \leq 5\,(d(x_0,X_1))^{\dfrac{1}{\beta+1}}$ y $d(x_0,X_1) < \dfrac{r}{4}$,usando la hipótesis sobre α, se sigue de (3.27) que

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \bar{C}\, r^{\frac{\alpha}{\beta+1}}\, r^{d_1-d_2} \leq C.$$

De los casos considerados se infiere que μ^{α} duplica.

$\square$

3.6. El operador $\mathcal{E}'_W$, de extensión de medidas duplicantes para un espacio casi-métrico que es unión de dos conjuntos de dimensiones distintas

En esta sección nos ocuparemos del problema de equipar con una medida duplicante a un espacio casi-métrico determinado por conjuntos de dimensiones distintas, cuando en cada uno de ellos se tiene definida una medida normal, como extensión de la medida dada sobre la componente de mayor dimensión.

Sea (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto no vacío, distinto de X y $F = \Omega^c$.

Sean $0 < d_1 \leq d_2 < \infty$ y μ_i, $i = 1, 2$ medidas de Borel d_i-normales $i = 1, 2$ definidas respectivamente sobre Ω y F. Supondremos que tanto Ω como F son no atómicos, ni acotados, entonces existen constantes A_1 y A_2 positivas y finitas tales que

$$A_1 r^{d_1} \leq \mu_1(B(x, r) \cap \Omega) \leq A_2 r^{d_1}$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $r > 0$,

$$A_1 r^{d_2} \leq \mu_2(B(x, r) \cap \Omega) \leq A_2 r^{d_2}$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $r > 0$.

En particular (Ω, d) y (F, d) ambos de dimensión de Assouad finita, por lo tanto (X, d) tiene dimensión de Assouad finita y dado que Ω es un subconjunto abierto de X, entonces se puede aplicar el Teorema 1.11.3 para obtener para cada $\lambda \geq 2k$, un cubrimiento de Whitney

$$W = \left\{ B\left(x_n, \frac{r(x_n)}{4k}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

con $r(x) = \dfrac{d(x)}{2k\lambda}$ y $d(x) = d(x, F)$ que verifica:

a) $\sum \chi_{B\left(x_n, \frac{r(x_n)}{4k}\right)}(x) \leq 6$,

b)$\bigcup_n (B(x_n, r(x_n))) = \Omega$,

c) para todo n y para todo x que está en la bola $B(x_n, \lambda r(x_n))$ se tiene que

$$\lambda r(x_n) \leq d(x) \leq 3k^2 \lambda r(x_n)$$

,

d) si $B(x_n, \lambda r(x_n)) \cap B(x_j, \lambda r(x_j)) \neq \emptyset$, entonces $\dfrac{r(x_n)}{3k^2} \leq r(x_j) \leq 3k^2 r(x_n)$,

e) para todo n, existe y_n perteneciente a Ω^c, tal que y_n pertenece a la bola $B(x_n, 3k\lambda r(x_n))$,

f) existe una constante M que depende de λ y k tal que para todo $n \in I$, el número de bolas $B(x_j, \lambda r(x_j))$ cuya intersección con $B(x, \lambda r(x_n))$ es a lo más M.

Además, dada $B \in W$, decimos que $B \in W_k$ si el radio de B, $r(B)$ satisface las desigualdades $2^{-k} < r(B) \leq 2^{-k+1}$. Es claro que $W = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} W_k$, que $W_k \cap W_l = \emptyset$ si $l \neq k$.

Para cada k perteneciente a $\mathbb{Z}$, W_k es a lo sumo numerable y usaremos la notación introducida en la la Sección 1.11 donde $\{B_j^k : j \in J(k)\} = W_k$ y x_j^k, $\dfrac{r_j^k}{4k}$ denotan respectivamente el centro y el radio de B_j^k. Notar que por construcción $2^{-k} < \dfrac{r_j^k}{4k} \leq 2^{-k+1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Supondremos además que Ω satisface la propiedad de regularidad R_1, esto es que existen $\lambda \geq 2k$, W un sistema de Whitney para Ω controlado por λ, y $\gamma > 0$ tales que para todo $x \in \Omega$ y $r > 0$, existe $B_i^m \in W$ tal que

$$B(x_i^m, r_i^m) \cap B(x, r) \neq \emptyset \quad y \quad r_i^m \geq \gamma r. \qquad (3.27)$$

Cuando esto ocurre diremos que el sistema W de Whitney está asociado a la propiedad de regularidad R_1

Presentamos el operador $\mathcal{E}'_W$, el cual representa una extensión al contexto de los espacios casi-métricos del operador $\mathcal{E}_W$, definido en la Sección 2.3. Para E boreliano de X

$$\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(E) = \mu_2(E \cap F) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{-m(d_2-d_1)} . \sum_{B\in W_m} \mu_1(\tilde{B} \cap E)$$

donde $\tilde{B}$ es la bola concéntrica con la bola B cuyo radio es el de B multiplicado por $4k\lambda$. Notar que W_m puede ser vacíO y en cuyo caso se entiende que la suma interior es nula.

Veamos que $\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)$ define una medida en las partes medibles de X, que llamaremos de extensión de la medida μ_2 respecto de μ_1.

Para probar la aditividad numerable de $\mathcal{E}_W(\mu_2/\mu_1)$ tomemos una familia numerable y disjunta $\{E_i : i \in\}$ de borelianos de X. Entonces puesto que las series son todas de términos positivos, se tiene que

$$\begin{aligned}
{\mathcal{E}'}_W(\mu_2/\mu_1)(\bigcup_{i\in N} E_i) &= \mu_2((\bigcup_{i\in N} E_i) \cap F) + \sum_m 2^{-m(d_2-d_1)} . \sum_{B\in W_m} \mu_1(\tilde{B} \cap (\bigcup_{i\in N} E_i)) \\
&= \sum_i \mu_2(E_i \cap F) + \sum_m 2^{-m(d_2-d_1)} . \sum_{B\in W_m} (\sum_i \mu_1(\tilde{B} \cap E_i)) \\
&= \sum_i {\mathcal{E}'}_W(\mu_2/\mu_1)(E_i).
\end{aligned}$$

El resultado principal de esta sección, lo expresa el siguiente teorema:

Teorema 3.6.1. *Sean (X, d) un espacio casi-métrico y Ω un abierto no vacío de X y distinto de X y $F = \Omega^c$. Supongamos que existen dos medidas de Borel μ_i, $i = 1, 2$ en Ω y F respectivamente y $0 < d_1 \leq d_2 < \infty$ tales que (Ω, d, μ_1) es d_1-normal, no atómico ni acotado y (F, d, μ_2)*

es d_2-normal, no atómico ni acotado. Supongamos que Ω satisface la propiedad R_1. Sea $W = \bigcup_{m\in} W_m$ un sistema de Whitney asociado a la propiedad R_1. Entonces $(X, d, \mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1))$ es un espacio de tipo homogéneo.

Para demostrar el teorema, veremos algunas propiedades, las cuales establecen relaciones entre una bola con centro en Ω con las bolas del cubrimiento de Whitney de Ω.

Propiedad 3.6.1. *En las hipótesis del Teorema* **??**, *existen constantes geométricas a_1, a_2 y N positivas y finitas tales que si $x \in \Omega$ y $< r < \frac{d(S,F)}{4k}$, con $S = B(x, r)$*

a) para todo $B \in W$ tal que $\tilde{B} \cap S \neq \emptyset$ se tienen las desigualdades $a_2 d(S, F) \leq r(B) \leq a_1 d(S, F)$

b) $\sharp\{B \in W/\tilde{B} \cap S \neq \emptyset\} \leq N$.

Demostración. a) Sean $x \in \Omega$ y $0 < r < \frac{d(S,F)}{4k}$. Sea $z \in \tilde{B} \cap S$, entonces

$$\lambda r(B) \leq d(z) \leq 3k^2 \lambda r(B).$$

De aquí que $\dfrac{d(S,F)}{3k^2\lambda} \leq \dfrac{d(z)}{3k^2\lambda} \leq r(B)$, que es la primer desigualdad de la tesis con $a_2 = \frac{1}{3k^2\lambda}$. Por otro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $y \in S$ tal que $d(y) = d(y, F) < d(S, F) + \epsilon$, de modo que para $z \in S \cap \tilde{B}$, se cumple que $d(z) \leq K[d(z, y) + d(S; F) + \epsilon]$. Entonces por (3.29), se tiene que

$$r \leq \frac{d(z)}{\lambda} \leq \frac{k[(2k)r + d(S, F)]}{\lambda},$$

y dado que $r < \frac{d(S,F)}{4k}$ se obtiene la segunda desigualdad requerida con $a_1 = \frac{3k}{2\lambda}$.

b) Denotemos con $\mathcal{A}$, la familia $\{B \in W/\tilde{B} \cap S \neq \emptyset\}$ y veamos que $\sharp(\mathcal{A}) \leq N$, para algún N fijo. Sean $B \in \mathcal{A}$, $y \in \tilde{B} \cap S$ y z el centro de B. Probemos que $z \in B(x, \frac{4k(\lambda+1)d(S,F)}{4})$ siendo x el centro de S. En efecto, $d(z,x) \leq k[d(z,y)+d(y,x)] \leq k[a_1, \lambda d(S,F)+r]$ y dado que $r \leq \frac{d(S,F)}{4k}$, se tiene lo deseado. Notemos ahora que si B' es otro elemento de $\mathcal{A}$ y z' es su centro, entonces puesto que $B \cap B' \neq \emptyset$, tendremos que $d(z,z')$ es mayor o igual que $a_2 d(S,F)$ y como ya hemos observado que la dimensión de Assouad de Ω es finita, tendremos que por el lema 1.7.2 $\sharp\{z : z \text{ es centro de } B, \text{ con } B \in A\} \leq C(\frac{4k(\lambda+1)}{a_2})^s$, donde C es una constante y s es cualquier número mayor que la dimensión de Assouad de Ω. Notemos que a partir de la demostración precedente también se obtiene que $\sharp\{B \in W_m/\tilde{B} \cap S \neq \emptyset\} \leq N$, $\forall m \in N$ y que $\sharp\{m : \exists B \in W_m/\tilde{B} \cap S \neq \emptyset\} \leq N$. $\square$

Propiedad 3.6.2. *En las hipótesis del Teorema* **??**, *existe una constante geométrica C positiva y finita tal que para todo $x \in \Omega$ y para todo $r \geq \frac{d(S,F)}{4k}$ con $S = B(x,r)$, existe $m_0 \in$ tal que*

i) $S \cap B = \emptyset$ para toda $B \in W_m$ con $m < m_0$.

ii) existe $j \in J(m_0)$ tal que $\tilde{B}_j^{m_0} \cap S \neq \emptyset$,

iii) $r_j^{m_0} \leq Cr$ para todo $j \in J(m_0)$ tal que $\tilde{B}_j^{m_0} \cap S \neq \emptyset$.

Demostración. Observemos primero que si consideramos $4kr \geq d(S,F)$ entonces $\tilde{S} = B(x_0, k(5k+1)r) \cap F \neq \emptyset$. En efecto: existen $y \in F$ y $z \in S$ tales que $d(y,z) < d(S,F) + r$, de aquí que $4kr > d(y,z) - r$ por lo tanto $5kr > d(y,z)$, con $y \in F$ y $z \in S$.

Notemos que $y \in B(x, 5k(k+1)r) \cap F$, ya que por lo anteriormente demostrado se ve que $d(y,x) \leq k[d(y,z)+d(z,x)] \leq k(5k+1)r$.

Veamos i). Consideremos ahora el siguiente conjunto $M = \{m \in: \exists k \ / \ B_k^m \in W_m$ y $\widetilde{B_k^m} \cap S \neq \emptyset\}$. Es claro que $M \neq \emptyset$, ya que W es un cubrimiento de Whitney para Ω y $x \in \Omega$. M es acotado inferiormente. En efecto, si m_j fuese una sucesión decreciente a $-\infty$ de números enteros tales que para cada j existe k_j tal que $\widetilde{B^j} = \widetilde{B_{k_j}^{m_j}}$ interseca a S, tendríamos que $d(B^j, F) \leq k[d(x,F) + r]$ pero esto es imposible porque mientras el miembro derecho está acotado el izquierdo es del orden de 2^{-m_j} que tiende a infinito.

Llamemos $m_0 = min\ M$, entonces para toda bola $B \in W_m$ con $m < m_0$, se verifica que $S \cap B = \emptyset$, ya que si para algun $m < m_0$, existiría $B \in W_m$ tal que $B \cap S \neq \emptyset$, entonces $\tilde{B} \cap S \neq \emptyset$ y m_0 no sería el mínimo de M. Notar que también se ha probado ii). De la propiedad c) del cubrimiento de Whitney , de lo anteriormente probado y del hecho que $\tilde{S} \cap F \neq \emptyset$ se ve que si $z \in B(x_0, r) \cap B_i^{m_0} = S \cap B_i^{m_0}$, con $m_0 = min\ M$ entonces

$$\begin{aligned} r_k^{m_0} &\leq \frac{d(z,F)}{\lambda} \leq \frac{k[d(z,x_0) + d(x_0,y)]}{\lambda} \\ &\leq \frac{k[r + k(5k+1)r]}{\lambda} \leq \frac{6k^2(k+1)r}{\lambda} = Cr, \end{aligned}$$

con $y \in F \cap \tilde{S}$, con lo que se obtiene iii). □

Observemos que de la propiedad anterior y dado que $B_k^{m_0} \in W_{m_0}$ si y sólo si $2^{-m_0} < \dfrac{r_k^{m_0}}{4k} \leq 2^{-m_0+1}$, se obtiene que $m_0 \geq \log_2 \dfrac{C'}{r}$.

El siguiente lema será de utilidad para probar la duplicación de $\mathcal{E}_d(\mu_2/\mu_1)$.

Lema 3.6.1. *Sea (X,d) un espacio casi-métrico que satisface las hipótesis del Teorema 3.6.1, entonces existen constantes positivas α y β tales que*

i) Para toda bola $B(x_0,r) = S$ con centro en Ω y $r < \dfrac{d(S,F)}{4k}$ valen las desigualdades

$$\alpha[d(S,F)]^{d_2}[\frac{r}{d(S,F)}]^{d_1} \leq \mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \leq \beta[d(S,F)]^{d_2}[\frac{r}{d(S,F)}]^{d_1}.$$

ii) Para toda bola $B(x_0,r) = S$ con centro en Ω y $r \geq \dfrac{d(S,F)}{4k}$, valen las desigualdades $\alpha r^{d_2} \leq \mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \leq \beta r^{d_2}$.

iii) Para toda bola $B(x_0,r) = S$ con centro en F vale que

$$\alpha r^{d_2} \leq \mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \leq \beta r^{d_2}.$$

Demostración. Probamos i).

Sean $B(x_0,r)$=S, con $x_0 \in \Omega$ y $r < \dfrac{d(S,F)}{4k}$. Sea $m_0 = inf\{m : \exists B \in W_m/\tilde{B} \cap S \neq \emptyset\}$. Por las Propiedades 3.6.1 y 3.6.2 se verifica que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) &\leq \sum_{m \geq m_0} 2^{-(d_2-d_1)m} \sum_{B \in W_m} \mu_1(\tilde{B} \cap S) \\ &\leq 2N2^{-m_0(d_2-d_1)}\mu_1(S) \leq \beta[d(S,F)]^{d_2-d_1} r^{d_1}.\end{aligned}$$

Notar que la constante β depende de N, el número máximo de niveles que intersecan a S, de la constante que proovee la Propiedad 3.6.1 y de la constante A_2 de la normalidad de μ_1.

Por otro lado, llamando m'_0 al nivel de bolas por el cual se obtiene el mayor de los sumandos, según la definición de $\mathcal{E}'_W$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) &\geq 2^{-m_0(d_2-d_1)} \sum_{B \in W_{m'_0}} \mu_1(\tilde{B} \cap S) \\ &\geq 2^{-m_0(d_2-d_1)} \frac{\mu_1(S)}{N}. \qquad (3.28)\end{aligned}$$

Esto último se obtiene del hecho que $\mu_1(S) \leq N \sum_{B \in W'_{m0}} \mu_1(\tilde{B} \cap S)$ y por la definición de m'_0.

Por lo tanto siguiendo en (3.28) se obtiene que $\mathcal{E}_d(\mu_2/\mu_1)(S) \geq \alpha[d(S,F)]^{d_2-d_1} r^{d_1}$, donde α, se obtiene de las constantes antes mencionadas y de la constante A_1 de la normalidad de μ_1.

Probemos ii).

Sean $B(x_0, r) = S$, con $x_0 \in \Omega$ y $r \geq \dfrac{d(S,F)}{4k}$, entonces por la Propiedad 3.6.2 existe $m_0 \geq \log_2 \dfrac{C'}{r}$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) &\leq A_2 r^{d_2} + \sum_{m\geq m_0} 2^{-(d_2-d_1)m}. \sum_{B\in W_m} \mu_1(\tilde{B}\cap S)\\ &= A_2 r^{d_2} + 2^{-(d_2-d_1)m_0}. \sum_{B\in W_{m_0}} \mu_1(\tilde{B}\cap S)\\ &\qquad + \sum_{m>m_0} 2^{-(d_2-d_1)m}. \sum_{B\in \mathcal{A}} \mu_1(\tilde{B}\cap S)\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A} = \{B \in W_n \ / \ \tilde{B}\cap S \neq \emptyset,\ m > m_0\}$. Observemos que existe $\bar{c} > 0$ tal que si $B = \widetilde{B_k^m}$ es tal que $\widetilde{B_k^m} \cap S \neq \emptyset$ entonces $B_k^m \subset B(x_0, \bar{c}r) = \widetilde{S}$. En efecto, sea $y \in \widetilde{B_k^m}$ entonces $d(y, x) \leq \lambda r_i^n$ con $x \in \widetilde{B_k^m} \cap S$. Dado que $d(x, x_0) \leq r$ y aplicando la Propiedad 3.6.2 (iii) se obtiene que $d(y, x_0) \leq k[\lambda r_k^m + r] \leq k[\lambda r_k^{m_0} + r] \leq k(C + 1)r = \bar{c}r$. Continuando en (3.32), vemos que

$$\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \leq A_2 r^{d_2} + 2^{-(d_2-d_1)m_0}. \sum_{B\in W_{m_0}} \mu_1(\tilde{B}) + 2^{-(d_2-d_1)m_0} \sum_{B\in\mathcal{A}} \mu_1(\tilde{B}),$$

de la propiedad de duplicación de μ_1 se sigue que

$$\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \leq A_2 r^{d_2} + c_1 2^{-(d_2-d_1)m_0}. \sum_{B\in W_{m_0}} \mu_1(B) + c_1 2^{-(d_2-d_1)m_0} \sum_{B\in\mathcal{A}} \mu_1(B),$$

donde B representa a las bolas del cubrimiento de Whitney para las cuales vale a), es decir que $\displaystyle\sum_{B(x_n, \frac{r(x_n)}{4k}} \chi(x) \leq 6.$

Por lo tanto

$$\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \leq A_2 r^{d_2} + c_1 2^{-(d_2-d_1)m_0}.[6\mu_1(\bigcup_{B\in W_{m_0}} B) + c_2 2^{-(d_2-d_1)m_0}.\mu_1(\bigcup_{B\in\mathcal{A}} B)]$$

y dado que $B \subset \tilde{S}$ se obtiene que

$$\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \leq A'_2 r^{d_2} + c_2{}^{-(d_2-d_1)m_0}\mu_1(\tilde{S} \cap \Omega)$$

$$\leq A'_2 r^{d_2} + c'_2 r^{(d_2-d_1)} r^{d_1} \leq \beta r^{d_2},$$

esto último surge de $m_0 \geq \log_2 \frac{c}{r}$.

Para probar que $\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \geq \beta r^{d_2}$, consideremos previamente el siguiente conjunto $M' = \{n \in : \exists\, k \,/\, \widehat{B^m_k} \cap S(x_0, r/2k) \neq \emptyset\}$, donde B^m_k pertenece a la familia mencionada en (3.30). Si denotamos con m_0 al mínimo de M' vale que existe $k_0 \in N / B^{m_0}_{k_0} \cap S(x_0, r) \neq \emptyset$ y razonando en forma similar a la Proposición 3.6.2 se verifica que existe $C' > 0$ tal que

$$r^{m_0}_{k_0} \leq C' r. \tag{3.29}$$

Por otro lado como Ω verifica la propiedad de regularidad R_1 se cumple que existen $\gamma > 0$ y $B^{m_1}_{k_1} \in W$ tales que

$$B^{m_1}_{k_1} \cap S(x_0, r) \neq \emptyset.$$

y

$$r^{m_1}_{k_1} \geq \gamma r. \tag{3.30}$$

Notar que si m_0 es el mínimo de M', debe ser $r^{m_1}_{k_1} \leq r^{m_0}_{k_0}$ por lo tanto de (3.29) y (3.30) se obtiene que $\gamma r \leq r^{m_1}_{K_1} \leq$

$C'r$ verificándose además que $\mu_1 \geq \frac{C''}{r}$. Por lo tanto

$$\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) \geq 2^{-(d_2-d_1)m_1}.\mu_1(S \cap \widetilde{B^{m_1}_{k_1}})$$

Notemos que si $B(x^{m_1}_k, r^{m_1}_k)$ interseca a $B(x_0, \frac{r}{2k})$ entonces $B(x^{m_1}_k, r^{m_1}_k) \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$.Veamos que $\widetilde{B^{m_1}_{k_1}} \cap B(x_0, r) \subset (B(y, \frac{r^{m_1}_k}{2kC'})$ con $y \in B^{m_1}_{k_1} \cap B(x_0, \frac{r}{2k})$. En efecto $(B(y, \frac{r^{m_1}_k}{2kC'}) \subset B(x_{m_1, \lambda r^{m_1}_k})$,puesto que si $h \in B(y, \frac{r^{m_1}_k}{2kC'})$ vale que $d(h, y) \leq \frac{r^{m_1}_k}{2kC'}$ y $d(y, r^{m_1}_k) \leq r^{m_1}_k$ entonces

$$d(h, x^{m_1}_k) \leq k[\frac{r^{m_1}_k}{2kC'} + r^{m_1}_k] \leq r^{m_1}_k[\frac{1+2k}{2k}] \leq \lambda r^{m_1}_k.$$

Por otro lado veamos que $B(y, \frac{r^{m_1}_k}{2kC'}) \subset B(x_0, r)$.Sea $h \in B(y, \frac{r^{m_1}_k}{2kC'})$, entonces $d(h, y) \leq \frac{r^{m_1}_k}{2kC'}$ y $d(y, x_0) \leq \frac{r}{2k}$,de lo que se obtiene lo deseado. De estas inclusiones y dado que $r^{m_1}_k \geq \gamma r$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)(S) &\geq 2^{-(d_2-d_1)m_1}\mu_1(B(y, \frac{r}{2k})) \\ &\geq \tilde{c}2^{-(d_2-d_1)m_1}(r^{m_1}_{k_1})^{d_1} \\ &\geq \beta r^{d_1}\end{aligned}$$

Probemos iii). Sea $B(x_0, r) = S$, con $x_0 \in F$. Si $r < \dfrac{d(x_0, \Omega)}{4k}$, se verifica naturalmente el lema, donde las constantes que se obtienen son las que se heredan de μ_2. Si $r \geq \dfrac{d(x_0, \Omega)}{4k}$, aseguramos que la bola $B(x_0, 3kr) \cap \Omega \neq \emptyset$. En efecto, pues existe $y \in \Omega$ tal que $5kr \geq d(x_0, \Omega) \geq d(x_o, r) - r$, de aquí que $y \in B(x_0, 5kr) \cap \Omega$.

Sea $H = B(x_0, 5kr) \cap \Omega$. La bola $B(y, 10k^2r) \supset H$, ya que si $h \in H$ entonces $d(h, y) \leq k[d(h, x_0) + d(x_o, y)] \leq k[5kr+5kr] \leq 10k^2r$. Consideremos ahora $m'_0 = \inf\{m \,/\, \exists\, k : \widetilde{B_k^m} \cap B(y, 10k^2r) \neq \emptyset\}$, entonces por las consideraciones efectuadas vale que

$$A_1 r^{d_2} \leq \mathcal{E}_d(\mu_2/\mu_1)(S) \leq 2A_2 r^{d_2} + 2^{-(d_2-d_1)m'_0} \sum_{B \in \mathcal{A}'} \mu_1(3\tilde{B}) \tag{3.31}$$

siendo $\mathcal{A}' = \{B \in W_m \,/\, \tilde{B} \cap B(y, 10k^2r) \neq \emptyset \text{ y } m \geq m_0\}$ y $\tilde{B} \subset B(y, k[10k^2r + \lambda r_k^{m_0}])$. Utilizando la Propiedad 3.6.2 (iii) y procediendo como en ii), se obtiene utilizando la duplicación de μ_1 y la propiedad a) de las bolas del cubrimiento de Whitney que

$$A_1 r^{d_2} \leq \mathcal{E}_d(\mu_2/\mu_1)(S) \leq A[r^{d_2} + 2^{-(d_2-d_1)m_0} \mu_1(\bigcup_{B \in \mathcal{A}'} B)]$$

y dado que $\bigcup_{B \in \mathcal{A}'} \subset B(y, \bar{c}r)$ con $\bar{c}$ adecuado y por la elección de m'_0 se concluye que $\mathcal{E}_d(\mu_2/\mu_1)(B(y, \bar{c}r)) \leq \alpha r^{d_2}$.

$\square$

Demostración del Teorema 3.6.1: Escribamos, por brevedad, $\mathcal{E}'_W$ para denotar a $\mathcal{E}'_W(\mu_2/\mu_1)$. A partir de los resultados del lema 3.6.1 tenemos que acotar superiormente y uniformemente a la familia de funciones

$$\psi_x(r) = \frac{\mathcal{E}'_W(B(x, 2r))}{\mathcal{E}'_W(B(x, r))}, \qquad x \in X.$$

Es claro, de iii) del Lema 3.6.1 que no hay nada que probar si $x \in F$. Supongamos entonces que $x \in Omega$. Por ii) tampoco hay nada que probar si $r \geq \frac{d(B(x,r),F)}{4k}$, ya que en este caso, con mayor razón, $2r \geq \frac{d(B(x,2r),F)}{4k}$.

Supongamos entonces que $x \in \Omega$ y que $r < \frac{d(B(x,r),F)}{4k}$. Entonces $\mathcal{E}'_W(B(x,r)) \geq \alpha d(B(x,r),F)^{d_2}(\frac{r}{d(B(x,r),F)})^{d_1}$ y todavía son posibles dos casos para $2r$

(a) $2r \geq \frac{d(B(x,2r),F)}{4k}$

(b) $2r < \frac{d(B(x,2r),F)}{4k}$

En el caso (a) $\mathcal{E}'_W(B(x,2r) \leq \beta 2^{d_2} r^{d_2}$, entonces

$$\begin{aligned}\psi_x(r) &\leq \frac{\beta}{\alpha} 2^{d_2} r^{d_2} d(B(x,r),F)^{-d_2}(\frac{r}{d(B(x,r),F)})^{-d_1} \\ &= 2^{d_2}\frac{\beta}{\alpha}(\frac{r}{d(B(x,r),F)})^{d_2-d_1} \leq C.\end{aligned}$$

En el caso (b)

$$\begin{aligned}\psi_x(r) &\leq \beta(\frac{2r}{d(B(x,2r),F))})^{d_1}(d(B(x,2r),F)^{d_2}. \\ &\quad . \ \frac{1}{\alpha} d(B(x,r),F)^{-d_2}(\frac{r}{d(B(x,r),F)})^{-d_1} \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha}[\frac{d(B(x,2r),F)}{d(B(x,r),F)}]^{d_2}. \\ &\quad . \ [\frac{d(B(x,r),F)}{d(B(x,2r),F)}]^{d_1} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}[\frac{d(B(x,2r),F)}{d(B(x,r),F)}]^{d_2-d_1} \leq \frac{\beta}{\alpha}\end{aligned}$$

Bibliografía

[A1] AIMAR, H.

Operadores integrales singulares y aproximaciones de la identidad en espacios de tipo homogéneo.

Tesis doctoral - UBA. 1983.

[A2] AIMAR, H.

Distance and Measure in Analysis and PDE.

Pre - print.

[AIN] AIMAR, H., IAFFEI B. y NITTI L.

On the Macias-Segovia, Metrization of quasi-metric spaces.

Revista de la Unión Matemática Argentina. Volumen 41- 42, 1998.

[AM] AIMAR, H. y MACIAS, R.

Weighted Norm Inequalities for the Hardy-Littlewood Maximal Operator on Spaces of Homogeneus Type.

Proc. of the American Mahematical Society. Volume 91. Number 2. June 1984.

[BA] BEURLING, A. and AHLFORS, L.

The boundary correspondence under quasi conformal mappings.

Acta Mathematica. Volume 96, 1956. 125 - 140.

[CF] COIFMAN, R. R. and FEFFERMAN, C.

Weighted Norm Inequalities for Maximal Functions and Singular Integrals.

Studia Math. 51 (1974), 241 - 250.

[CG] R. COIFMAN and M.de GUZMÁN.

Singular integrals and multipliers on homogeneus spaces.

Rev. Union, Mat. Argentina 35 (1970). 137-144.

[CW] COIFMAN, R. R. and WEISS, G.

Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes.

Lectures Notes in Mathematics. Vol. 242, Springer - Verlag,

Berlín, 1971. MR58 ♯17690.

[DJK] DAHLBERG, B.; JERISON, D. and KENIG, C.

Area integral estimates for Elliptic Differential Operators with

Non-Smooth Coefficients.

Arkiv Matematik 22,l984. 97-108

[D1] DYN'KIN, E. M.

Free interpolation by functions with derivatives in H^1.

J. Soviet Math. 27 (1984) 2475-2481. (Revission) MR 84h: 30052.

[D2] DYN'KIN, E. M.

Homogeneus measures on subsets of $\mathbb{R}^n$.

Lectures Notes in Mtah. Vol. 1043. Springer Verlag, 1984. 698 - 699.

[F1] FALCONER, K.J.

The geometry of fractal sets.

Cambridge tract in mathematics No. 85. Cambridge University Press.

[F2] FALCONER, K.J.

Fractal Geometry.

Mathematical Foundations and Aplications. J. Wyley and Sons Ltd. Chichester, 1990.

[GC-RF] GARCIA-CUEVA J. and RUBIO DE FRANCIA J.

Weighted Norm Inequalities and Related Topics.

North - Holland - Amsterdam. 1985.

[G] GEHRING, F.W.

Uniform Domains and the Ubiquitous Quasidisk.

Jber. d. Dt. Math - Verein 89 (1987), 88 - 103.

[GM] DE GUZMÁN, M.

Real variable methods in Fourier analysis.

Mathematics studies, 46. North Holland, 1981.

[H] HARBOURE, E.

Two weighted Sobolev and Poincare inequalities and some applications.

Cuadernos de Matemática y Mecánica. Programa Especial de Matemática Aplicada.

CONICET (UNL), Santa Fe - Argentina. 1984.

[HO] HOLDEN, P.

Extension theorems for functions of vanishin mean oscillation.

Pacific Journal of Mathematics. Vol 142. Nº 2

[I] IAFFEI, B.

Espacios de Lipschitz Generalizados y Operadores Invariantes por traslaciones.

Tesis Doctoral.UNL - Santa Fe - 1996.

[JP] JONES, P. W.

Quasiformal Mappings and Extendability of Functions in Sobolev Spaces.

Acta Math., 174, 71 - 88, 1981.

[J] JONSSON, A.

Besov spaces on closed subsets of $\mathbf{R}^n$.

Transaccions of the American Mathematical Society.

Vol.341.Number 1,January l994.55 - 370.

[LS] LUUKKAINAEN, J. and SAKSMAN, E.

Metric Space carries a doubling meassure.

Proc. Amer. Math. Sec. 126 (1998), No. 2, 531 - 534.

[MS1] MACIAS, R. A y SEGOVIA, C.

Lipschitz funtions on spaces of homogenous type.

Advances in Mathematics. Volume 33, 1979. 271 - 309.

[MS2] MACIAS, R. A. y SEGOVIA, C.

A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogenous type.

Advances in Mathematics. Volume 33, 1979. 271 - 309.

[MS3] MACIAS, R. A y SEGOVIA, C.

A well - behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type.

Trabajos de Matemática No. 32. Instituto Argentino de Matemática. CONICET, 1981.

[MA] MATTILA, P.

Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces Fractals and Rectifiability.

Cambridge. University Press. 1995.

[S] STEIN, E. M

Singular integrals and differentiability properties of functions.

Princeton University Press. Princeton 1970.

[VK] VOL'BERG, A. L. and KONYAGIN, S. V.

A Homogeneus Measures Exists on Any Compactum in $\mathbb{R}^n$.

Dokl. Akad. Nauk 55SR (1984), No. 4, 783 - 786.

[W] WHITNEY, H.

Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets.

Transaccions of the American Mathematical Society.

Volume 366, Issue (Jan, 1934), 63-89.

[WU] JANG-MEI WU

Hausdorff Dimension and Doubling Measures on Metric Spaces.

Proc. Amer. math. Soc. 126 (1998), No. 5, 1453 - 1459.