LIMITACIONES DE FORMALISMOS:

ESTUDIO DE PARADOJAS LÓGICAS MATEMÁTICAS.

Itatí Zocola

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral IMAL-CONICET-UNL
Directora: Busaniche, Manuela
Codirector: Gomez, Conrado

Área: Ciencias Exactas

Palabras claves: Definibilidad, Teorema de Incompletitud de Gödel, Paradoja de Berry.

INTRODUCCIÓN

Gödel demostró que dentro de un sistema formal de primer orden consistente S con aritmética hay enunciados que son indecidibles. Más precisamente, que se puede construir una afirmación aritmética que no es demostrable ni refutable en S; esto es, que S es incompleto. Esto prueba no sólo que no es posible reducir la matemática a un conjunto de principios fundamentales a partir de los cuales pueda deducirse cualquier teorema, sino que deja en evidencia las limitaciones intrínsecas de los formalismos.

Demostrabilidad, *consistencia* o *completitud* son características subordinadas a un sistema formal y al lenguaje sobre el cual aquel se define. Nuestro estudio lógico-matemático del teorema de incompletitud de Gödel es el punto de partida para nuestro análisis de las limitaciones de los sistemas formales. Concretamente, estudiamos la noción de definibilidad de una propiedad aritmética y su relación con la denominada paradoja de Berry, que informalmente establece

el mínimo número natural que no se puede definir
en castellano con menos de veinte palabras,

número contradictorio, ya que por definición no se puede definir con menos de veinte palabras pero cuya misma descripción, dada arriba, lo hace con dieciséis.

Título del proyecto: Métodos algebraico-geométricos en la teoría de la información
Instrumento: I+D
Año convocatoria: 2017
Organismo financiador: UNL
Director: Ricardo Toledano

OBJETIVOS

- Estudiar los elementos constitutivos de los sistemas formales para analizar ciertas paradojas lógicas y formalizarlas dentro del sistema de la aritmética de primer orden.
- Dar demostraciones alternativas de los teoremas Gödel basadas en la paradoja de Berry.

METODOLOGÍA

La etapa inicial de la investigación se centró en la lectura y estudio de bibliografía sobre lógica matemática, siendo [Mendelson,2001] nuestra referencia más importante. Estudiamos sintáctica y semánticamente los sistemas lógicos clásicos (proposicional y de primer orden). Analizamos en profundidad la teoría formal de números y su modelo estándar: la aritmética. Una segunda etapa estuvo orientada al teorema de incompletitud de Gödel, estrechamente relacionado con las paradojas lógicas. A continuación estudiamos el artículo [Caicedo,1993], que gira en torno a la paradoja de Berry y en el cual se concluye que fijado un sistema formal, no es posible describir un objeto arbitrario de forma unívoca mediante una expresión finita dentro del propio lenguaje.

Ampliamos y profundizamos nuestro trabajo con el articulo [Kikuchi et al.,2012], donde también se aborda el problema de las limitaciones de los formalismos y se sugiere cómo obtener los teoremas de Gödel sin recurrir a los argumentos clásicos de diagonalización y autorreferencia.

CONCLUSIONES

Puede decirse que la paradoja del mentiroso es una auténtica paradoja lógica cuya formalización deviene en los teoremas de incompletitud de Gödel. Al igual que otras paradojas (lógicas), dejan al descubierto una *irremediable falta expresiva* de los lenguajes formales. En particular, la paradoja de Berry pone en relieve *indefinibilidad de la definibilidad.* Utilizamos nuestro estudio sobre sistemas axiomáticos, incompletitud y paradojas lógicas para ofrecer demostraciones alternativas de los teoremas de incompletitud de Gödel basándonos en la paradoja de Berry.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Caicedo X.,1993, La paradoja de Berry revisitada o la indefinibilidad de la definibilidad y las limitaciones de los formalismos, artículo publicado en Lecturas Matemáticas, Vol XIV, Soc. Colombiana de Matemáticas, pp 37-48 (revisión de 2004, con notas adicionales).

Kikuchi M., Kurahashi T. and Sakai H.,2012, On the proofs of the incompleteness theorems based on Berry's paradox by Vopěnka, Chaitin, and Boolos, Mathematical Logic Quarterly, 58: 307-316.

Mendelson E.,2001, Introduction to Mathematical Logic, 4th ed., Chapman and Hall.