Encuentro
de Jóvenes
Investigadores

ENRIQUECIENDO EL POTENCIAL MATEMÁTICO DE CONSIGNAS PARA LA ENSEÑANZA INTUITIVA DEL LÍMITE PUNTUAL.

RAMOS, AGUSTINA

Facultad de Humanidades y Ciencias
Directora: Iaffei, Bibiana
Codirectora: Cavatorta, Patricia

Área Temática: Ciencias Sociales

Palabras claves: Enseñanza, Límite, Potencial Matemático

INTRODUCCIÓN

Una tarea central del docente de matemática es el diseño de consignas para llevar al aula y la planificación de la gestión de las mismas durante el desarrollo de la clase. Estas dos tareas se relacionan dialécticamente y se complementan, y son algunas de las que permiten visibilizar la postura epistemológica/didáctica de quien enseña.
Esta presentación surge del trabajo realizado en una adscripción en investigación enmarcada en la materia Cálculo I del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC). Dicha adscripción tiene por objetivo estudiar el potencial matemático (PM) de consignas para la enseñanza de distintos aspectos del concepto de límite.
Se presentan algunas cuestiones que atienden al diseño de consignas para la enseñanza de la matemática, particularmente para la aproximación intuitiva de la definición de límite puntual de funciones reales de variable real. Para tal fin se diseña una consigna a partir de la reformulación de un ejercicio extraído de la bibliografía obligatoria de la materia (Salas, Hille y Etgen, 2007) y por otro lado, se analiza su PM, marcando especialmente las posibilidades de exploración y argumentación que habilita.

OBJETIVO

Analizar el potencial matemático de consignas para la enseñanza de la noción intuitiva de límite.

METODOLOGÍA/RESULTADOS

En un primer momento se resuelven distintas consignas del libro “Cálculus” (Salas, Hille y Etgen, 2007), que es bibliografía obligatoria de la materia Cálculo I, observando las posibilidades de exploración y argumentación que las mismas ofrecen.
Vale aclarar que, se considera consigna matemática, al enunciado que el docente plantea en el aula y que se vincula con el quehacer matemático (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez, 2016). Las mismas pueden ser consideradas más o menos ricas teniendo en cuenta su PM, es decir las posibilidades de exploración y argumentación que posibilitan. Cuanto más exploración y argumentación se propicie, mayor será el PM que la consigna ofrece.

Estos autores señalan ciertos aspectos claves que se tienen en cuenta en la redacción de las consignas para generar posibilidades de exploración y argumentación, es decir, enriquecer el PM.
De las consignas resueltas, se selecciona una para estudiar especialmente y se reformula para enriquecer su PM. La selección responde a dos razones, por un lado se observa una consigna dirigida, y por otro la función involucrada y sus límites son estudiados en profundidad en secciones posteriores de la bibliografía.
La consigna se redacta teniendo en cuenta los criterios establecidos por Barreiro et al. (2016) y que atienden a cuestiones como: claridad, precisión y que no esté incompleto el enunciado, evitar dar información que asegure la existencia y/o la unicidad de lo que se está buscando, evitar la direccionalidad del procedimiento de resolución, incluir el pedido de argumentos o justificaciones y de explicaciones coloquiales de los procedimientos llevados a cabo.

Los dos enunciados se presentan a continuación.

Consigna original
Ejercicio 58 de la sección 2.1 (pág. 70)

Crear una tabla de valores para estimar $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ (medido en radianes) después de calcular el cociente en $x = \pm 1, \pm 0{,}1, \pm 0{,}01, \pm 0{,}001$.

Consigna reformulada

Sea la función definida por $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ Si c es cualquier número real, ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c? Explicar los procedimientos utilizados para asegurar lo que se concluye para cada c.

Análisis del PM de la consigna reformulada comparándola con la original
De acuerdo a lo establecido, en el análisis de la consigna se reflexiona sobre las posibilidades de exploración y argumentación que subyacen a ella, lo cual permite determinar si tiene un potencial matemático más rico o no.

El enunciado de la consigna reformulada tiene una redacción que no se presta a doble interpretación, es precisa y completa, ya que el estudiante sabe qué debe hacer. Es decir queda claro qué se debe hacer, pero no se indica cómo hacerlo, las estrategias de resolución deben ser escogidas por los estudiantes. En cambio en la consigna original se dice qué hacer y cómo hacerlo, se direcciona el procedimiento de resolución. Más aún, no sólo exige evaluar la función en valores próximos a cero, sino que también indica en que valores hacerlo y da indicios de la existencia del límite cuando x tiende a cero.
Además, la consigna reformulada solicita deducir la existencia del límite cuando x tiende a cualquier número real, a diferencia de la consigna original, en la que sólo se pide analizar el límite cuando x tiende a cero y no da la posibilidad de pensar en la existencia del límite para x tendiendo a otro valor real distinto de cero.
La nueva consigna abre un abanico de posibilidades de resolución, invita a los estudiantes a proponer sus propios caminos, a tomar decisiones y buscar estrategias, que sean útiles para formular conjeturas y sus respectivas justificaciones. No se pide explícitamente el trazado de un gráfico o la construcción de una tabla de valores, sino que se les da “libertad” en la

resolución, potenciando las posibilidades de exploración para lograr establecer conjeturas y las justificaciones de estas o de por qué se eligió tal o cual procedimiento "efectivo". De hecho, la pregunta en forma encubierta genera la necesidad de construir una estrategia para poder dar respuesta. Es decir, no se dice cómo hacer para establecer si los límites existen, pero para poder dar respuesta a esa pregunta se necesita "hacer algo".

Además, al pedir el análisis de la existencia del límite para todo c real, involucra necesariamente la consideración del dominio de la función, y el descubrimiento intuitivo de la diferencia del comportamiento de la función en puntos de continuidad y discontinuidad. Cuestión que no permite recuperar la consigna original.

Por otro lado, la consigna original plantea la evaluación de f en los primeros elementos de las sucesiones $(1/10^n)$ y $(-1/10^n)$, y esto puede generar construcciones conceptuales no apropiadas en relación al límite puntual, por ejemplo pensar que esa evaluación siempre es suficiente para estimar el valor del límite cuando x tiende a cero. Es decir, puede pasar a formar parte del curriculum oculto que, siempre se puede estimar el límite para x tendiendo a cero de una cierta función f evaluando en los primeros elementos de alguna sucesión particular.

En cambio, la consigna reformulada habilita a que se utilice el análisis del comportamiento de la función evaluada en diferentes sucesiones convergentes a cero. Si bien esto es insuficiente para asegurar fehacientemente el valor del límite, permite conjeturar qué sucede con el comportamiento de la función cuando la variable independiente se acerca a cero de diferentes formas. He aquí un indicio de que permite la exploración.

Otra cuestión que habilita la segunda consigna es utilizar los recursos que el estudiante tenga disponibles. Estos recursos pueden ser, lápiz, papel y calculadora o bien algún software como GeoGebra, que es de uso corriente en los estudiantes del Profesorado en Matemática. Además permite trabajar en distintos registros de representación lo cual, es provechoso en tanto la comprensión matemática requiere una coordinación entre los diversos registros de representación que se pueden elegir y usar (Duval, 2006).

En cuanto al uso del software GeoGebra en la resolución, se puede hacer uso de la vista gráfica para observar el comportamiento de la función para cualquier c escogido y también utilizar la hoja de cálculo para evaluar la función en puntos cercanos al que se estudia, pudiendo aproximar los valores obtenidos por redondeo hasta 15 decimales.

La consigna reformulada permite que en la clase surjan distintas estrategias de resolución e incluso conjeturas diferentes, cuestión que habilita a una discusión más rica respecto del concepto de límite e invita a construir argumentos para defender lo que se formula. Este es otro de los puntos claves para enriquecer el PM.

Este intento por potenciar la argumentación aparece también explícitamente en el enunciado, ya que solicita justificar las conclusiones a las que se arriban, sus elecciones y sus conjeturas. Más aún requiere justificaciones y explicaciones coloquiales de los procedimientos utilizados para concluir.

CONCLUSIONES

Por todo lo expuesto en el análisis de las consignas, se considera que la consigna reformulada ha mejorado ampliamente su PM en relación a la original, en tanto posibilita la exploración, desde distintos registros de representación o de distintas posibilidades dentro de un mismo registro de representación, por ejemplo dentro del registro numérico, y por otro lado solicita que se expliciten argumentos que den cuenta de lo que se conjetura.

Se continuará trabajando en el estudio de consignas relativas al concepto de límite para el análisis del PM de las mismas y las reformulaciones para enriquecerlas. Además se implementará con el próximo grupo de alumnos que cursen Cálculo I y se estudiaran los procedimientos de resolución que surjan y los argumentos que se construyan a partir de los mismos.

BIBLIOGRAFÍA

Salas, S., Hille. E y Etgen, G. (2002). *CALCULUS. Una y varias variables.* Volumen I. 4ª Edición. Barcelona, España: Editorial Reverté.

Barreiro, P. y Rodríguez, M. (2014). *Análisis del potencial matemático de consignas para clases de Matemática*. Comunicación presentada en las V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas de Investigación en Educación Matemática, Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodriguez, M. (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNGS.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.