Matemática: funciones y nociones de trigonometría

APORTES PARA LA ARTICULACIÓN ESCUELA SECUNDARIA - UNIVERSIDAD

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
(compiladoras)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Matemática: funciones y nociones de trigonometría
Aportes para la articulación escuela secundaria - universidad
Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Rector Enrique Mammarella
Director de Planeamiento y Gestión Académica Daniel Comba
Directora Ediciones UNL Ivana Tosti

Engler, Adriana
Matemática, funciones y nociones de trigonometría : aportes para la articulación escuela secundaria-universidad / Adriana Engler ; YR ; compilado por Daniela Müller ; Silvia Vrancken; Adriana Engler. - 1a ed . - Santa Fe : Ediciones UNL, 2019.
Libro digital, PDF - (Cátedra. Interfaces)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-153-1

1. Matemática. 2. Enseñanza. I. Müller, Daniela, comp. II. Vrancken, Silvia, comp. III. Título.
CDD 510.712

Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Producción general
Ediciones UNL

—
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

hdl.handle.net/11185/5539

Matemática: funciones y nociones de trigonometría

Aportes para la articulación escuela secundaria–universidad

Adriana Engler

Daniela Müller

Silvia Vrancken

COLECCIÓN
CÁTEDRA

Índice

Sé que sólo hay una libertad: la de pensamiento

Antoine de Saint-Exupery

Presentación

La problemática de la articulación de niveles, el logro de un buen ingreso de los estudiantes al nivel superior y una mayor inclusión ocupan un lugar central en nuestra Universidad. Es así que se promueve permanentemente la construcción de espacios de reflexión e interacción entre los sujetos que se desempeñan en los distintos niveles del sistema educativo, con todo la riqueza de sus propios saberes construidos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este marco, *Matemática: funciones y nociones de trigonometría. Aportes para la articulación Escuela Secundaria-Universidad* se constituye en un nuevo integrante de la Serie Interfaces de la Colección Cátedra de la UNL, cuyo núcleo de significación refiere a la idea de conexión, de interacción y comunicación entre estos dos órdenes de realidades diferentes.

Del intercambio de conocimientos y experiencias de docentes de matemática de ambos niveles educativos surge esta nueva producción. En la misma se comparten diferentes posibilidades de innovación didáctica y curricular, herramientas pedagógicas, experiencias institucionales, realidades locales y regionales y propuestas de transformación del aula de matemática.

En particular, aporta un nuevo enfoque a la enseñanza de la Matemática en los últimos años de la educación secundaria, remarcando la importancia de la experimentación en el aula de informática.

De esta forma, la UNL diseña nuevas estrategias que facilitan el trabajo de los docentes y la comprensión de los estudiantes, en tiempos en donde las desigualdades sociales y los factores políticos, económicos y regionales impactan fuertemente sobre las posibilidades de acceso a la educación superior.

Prólogo

El desarrollo de la educación dependerá de los avances que se den en la sociedad en la que estamos inmersos, pero también dependerá de lo que nosotros, como protagonistas del proceso educativo, seamos capaces de crear y poner al servicio de aquellos a quienes estamos formando y que, consecuentemente serán los responsables de mejorar la calidad de vida y de la sociedad.

Martha Corredor Montagut, 2003

La sociedad del conocimiento reclama del sistema educativo personas creativas, con espíritu crítico, con capacidad para pensar, para aprender a aprender y para trabajar en equipo, conscientes de sus propias capacidades y que, además de tener los conocimientos necesarios en un área determinada, tengan una visión general de los diferentes problemas que afectan a la sociedad actual.

Los educadores de hoy tenemos que proporcionar a las futuras generaciones herramientas que les permitan enfrentarse a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar sino en sus posibles lugares de trabajo, donde la creatividad y la innovación serán requeridas permanentemente. El desafío es poder brindarles instrumentos de aprendizaje y desarrollar en ellos estructuras cognitivas con alto grado de adaptación a lo nuevo.

Las actitudes con las que un alumno enfrenta el proceso de aprendizaje intervienen decididamente en la adquisición de los conocimientos y son factores que influyen notoriamente en los resultados del proceso. Dado que las actitudes se generan teniendo en cuenta la valoración personal del objeto al cual se dirigen, es lógico suponer que cada disciplina generará una disposición actitudinal acorde con el contenido que se imparte (componente cognitiva), las relaciones docente-alumno que se generen en el espacio de interacción (aula, taller, laboratorio, etc.) y el poder de dicho intercambio para generar acciones.

Así, el alumno desarrollará actitudes positivas o negativas hacia determinada asignatura, no sólo en función de su contenido, sino también del ambiente de trabajo que se genere y de las actividades que se propongan.

La brecha existente entre lo que el alumno cree que es saber matemática, lo que los docentes suponen que es y lo que realmente es, se profundiza toda vez que el contrato que pactan los actores del proceso da cuenta del carácter instrumental de la materia, pero poco o nada de su importancia intrínseca y del valor formativo de sus deducciones teóricas. En otras palabras, las dificultades se acrecientan cuando se ignora el papel que le cabe a la disciplina como ciencia transformadora desde su propio marco conceptual.

Por lo tanto, mejorar el aprendizaje de la matemática supone brindar a los estudiantes las herramientas y procedimientos matemáticos fundamentales para su desempeño académico; capacitarlos en la formalización matemática; lograr que:

• desarrollen creatividad, espíritu crítico y capacidad de adquirir y aplicar nuevos conocimientos en forma autónoma;
• asuman la responsabilidad de su propio aprendizaje;
• utilicen la Matemática para comprender, interpretar, plantear y resolver problemas;
• afiancen sus conocimientos y habilidades para la mejor recepción y manejo de la información científica.

En este contexto y teniendo en cuenta las premisas enunciadas, surgió un espacio de interacción entre docentes de nivel universitario y docentes de los últimos años de escuelas técnicas y agrotécnicas en el marco del Proyecto "De la escuela secundaria hacia la construcción del ser universitario" generado desde la Dirección de Articulación de Niveles dependiente de la Secretaría Académica de la Universidad Nacional del Litoral – Becas Bicentenario SPU-ME.

A través del debate e intercambio universidad-escuela secundaria se buscó generar un espacio de reflexión para valorar los avances en las investigaciones con relación a la innovación en el aula; despertar en el docente la necesidad de crear elementos didácticos y desarrollar actividades que favorezcan el aprendizaje en un ambiente de trabajo activo, dinámico y motivador; proveer de material para mejorar las prácticas de aula; diseñar estrategias de articulación de las nuevas tecnologías con las estructuras curriculares actuales.

Como resultado del proyecto nace esta obra que contiene el trabajo conjunto entre docentes de Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral y los del área Matemática de las siguientes escuelas de la provincia de Santa Fe:

• Escuela de Educación Técnica Particular Incorporada Nº 2010 IDESA, de Ataliva.
• Escuela de Educación Técnica Particular Incorporada Nº 2050 Monseñor Dr. Vicente F. Zazpe, de Emilia.
• Escuela de Agricultura, Ganadería y Granja, dependiente de las Facultades de Ciencias Agrarias y Ciencias Veterinarias de la Universidad Nacional del Litoral, de Esperanza.

A lo largo del material mostramos y compartimos diferentes posibilidades de innovación curricular y de transformación del aula de matemática buscando que todos los estudiantes tengan oportunidad de acceder a una cultura matemática que permita la formación de ciudadanos adecuada a los nuevos tiempos. Mostramos cómo es posible poner a prueba en la práctica cotidiana transformaciones sugeridas en los textos de matemática y diseños curriculares que están disponibles para el nivel.

Constituye una valiosa e importante propuesta de trabajo de algunos temas seleccionados, no sólo para quienes estamos comprometidos y participando activamente en este proyecto sino para los docentes de los últimos años de la educación secundaria que están preparando a sus alumnos para el ingreso futuro a la educación superior.

Trabajamos consideraciones didácticas con relación a algunos temas incluidos en el diseño curricular vigente en la educación secundaria para ayudar a realizar una mirada crítica de las prácticas docentes en el aula.

Los contenidos, seleccionados por su importancia y significativos a la hora de una profundización en el nivel superior son:

- Funciones como modelos de variación y cambio.
- Función de primer grado.
- Función de segundo grado.
- Nociones de trigonometría.

Todos tienen relación directa con los ejes temáticos que la Universidad Nacional del Litoral definió para los cursos de ingreso en sus distintas facultades.

Con este aporte nos proponemos mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemática asumiendo que todo intento de este tipo trae aparejado un cambio de actitudes y de conducta tanto de docentes como de alumnos.

Patricia Sadovsky expresa:

> Se podría pensar que si los alumnos fracasan en actividades "simples" como la aplicación de una regla –la de suprimir paréntesis en un cálculo, por ejemplo– no podrían afrontar problemas más complejos. Sin embargo, el conocimiento didáctico producido nos lleva a sostener que brindar a los jóvenes la experiencia de asumir el desafío intelectual, de "atrapar" lo que en un principio parecía "escaparse", de entender después de no haber entendido, contribuye a que construyan una imagen valorizada de sí mismos, lo cual otorga un sentido fundamental a su permanencia en la escuela porque restituye el deseo de aprender (2005:12-13).

Contribuir a esa reflexión es uno de los propósitos de este trabajo. Queremos sumar principalmente a docentes del nivel medio para que compartan herramientas pedagógicas y entre todos aportemos hacia la solución de problemas comunes.

Organización del libro

Lo más importante que debemos tener en cuenta es que el libro está diseñado para aportar experiencias concretas de actividades que se pueden llevar al aula dado que surgió del intercambio de ideas y experiencias de docentes que “viven el aula” y buscan compartir sus logros y producciones.

Está organizado en tres secciones diferentes que reflejan claramente los alcances de la obra.

En la sección *Educación Matemática. Algunas consideraciones* incluimos reflexiones con respecto al papel de la matemática en los últimos tiempos y la necesidad de que nuestros alumnos asuman la importancia de la disciplina. Se describen características generales sobre educación matemática, la teoría de las situaciones didácticas, el trabajo en el aula de matemática, la necesidad de incorporar la visualización como proceso cognitivo involucrado en el pensamiento matemático, la utilización efectiva de diferentes sistemas de representación y la incorporación de recursos tecnológicos en el trabajo en el aula.

La sección *Propuestas didácticas* está organizada según los diferentes temas: funciones como modelos de variación y cambio, función de primer grado, función de segundo grado y nociones de trigonometría. Incluimos el enunciado de una guía de actividades a realizar por el alumno (en algunos casos buscando "el descubrimiento" de nuevos conceptos y en otros, fortalecer y profundizar los contenidos desarrollados con anterioridad). Las diferentes actividades buscan promover la exploración y reflexión constructiva de los diferentes temas involucrados.

Incorporamos además la propuesta que debe tener en cuenta el docente para llevar adelante el trabajo en el aula. En la misma hacemos hincapié en los objetivos perseguidos, enunciamos los temas que se van a desarrollar y describimos la metodología de trabajo sugerida. Presentamos resueltas las actividades de la guía para el alumno. En algunos casos la resolución está explicada totalmente haciendo hincapié en los diferentes procedimientos y en los conceptos utilizados y en otros, sólo enunciamos las respuestas. En numerosas oportunidades, incorporamos comentarios que generan posibilidades para que el docente, si lo desea y tiene los recursos, amplíe la propuesta.

En la sección *Propuestas didácticas para el aula de informática* incluimos: estudio e interpretación gráfica y numérica de funciones reales y la función de segundo grado. Las guías de actividades (para alumnos y docentes) buscan favorecer la construcción de conocimiento en ambientes tecnológicos y, en algunos casos, se completan con actividades complementarias y problemas. Todas están preparadas para trabajar con el programa Funciones para Windows versión 2.7.

Finalmente, incorporamos como Anexo las instrucciones básicas para que, tanto los docentes que decidan hacer suya esta propuesta, como los alumnos puedan manejar sin problemas dicho programa.

La bibliografía utilizada a lo largo de las diferentes secciones se enuncia al final del libro.

A partir de este momento los invitamos a recorrer el material y utilizarlo en su tarea docente en el aula. Estamos convencidas de que les resultará una herramienta importante para lograr los objetivos de aprendizaje y para favorecer la articulación e inserción futura de los alumnos en el nivel superior.

Educación matemática

Algunas consideraciones

Adriana Engler, Silvia Vrancken y Daniela Müller
Universidad Nacional del Litoral

> Ahora bien, el éxito de cualquier cambio en la forma en la que se desarrolla la enseñanza está determinado, en gran parte, por la implementación de un cambio en las concepciones del profesor, pues muchas de ellas se vuelven verdaderos obstáculos para lograr un cambio en los métodos de enseñanza que éste emplea (Campanario, 2003) (…) Se requiere que el profesor posea una adecuada visión de lo que es la actividad matemática, en especial dentro del salón de clase, de una epistemología apropiada y de concepciones didácticas apropiadas.
>
> Luis Cabrera y José Zaldívar, 2007

En los últimos años, el papel de la matemática ha variado sustancialmente como resultado del ritmo acelerado del desarrollo científico-tecnológico. Hoy resulta una herramienta indispensable en el intento de explorar los fenómenos que aparecen tanto en el mundo de las ciencias de la naturaleza como en las ciencias sociales y humanas. La formación matemática debe ser reestructurada, de forma tal que la matemática se convierta en el lenguaje a través del cual se expresan las representaciones científicas y en la herramienta que brinde los métodos idóneos para hallar la solución de los problemas científicos y productivos.

Es necesario desarrollar en los estudiantes destrezas y habilidades que les permitan ser protagonistas del aprendizaje y del conocimiento. Sin negar el lugar de los conceptos y procedimientos en el currículo de matemática, es preciso que el alumno construya matemática, ocupándose de actividades que emerjan de situaciones problémicas, que requieran pensamiento y razonamiento creativo, recolección y ampliación de información, descubrimiento, invención, comunicación de ideas y comprobación de las mismas a través de la reflexión crítica y argumentada.

Desde esta perspectiva, el aprendizaje no es un proceso lineal, sino que es un proceso espiralado en permanente construcción, a partir del cual el sujeto se interrelaciona con el objeto a aprender. Se aprende no a partir de certezas sino de dudas, cuestionamientos, problemas a resolver.

Para lograr un aprendizaje significativo, es necesario que los conceptos adquieran significado y puedan ser aplicados en otras situaciones. Este contexto plantea la necesidad de preguntarnos qué enseñamos y cómo enseñamos para lograr que el alumno comprenda y otorgue sentido a los conceptos.

La enseñanza debería lograr un pensamiento de nivel superior de modo que los alumnos manipulen información e ideas de manera que transformen los conceptos y sus implicaciones, permitiéndoles la resolución de problemas y el descubrimiento de nuevos significados.

1. La Educación Matemática

La preocupación por la educación matemática surge hace muchos años como actividad de enseñanza y aprendizaje. Hacia fines del siglo XIX, y buscando una mayor y mejor formación de profesores en el nivel superior, surge como un campo profesional y comienza a construir su propia identidad. Sin embargo, durante la segunda mitad del siglo veinte logra su mayor difusión. A partir de ese momento, comienza a afianzarse y se desarrolla notablemente en diferentes lugares del mundo.

La Educación Matemática o Matemática Educativa se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático. Su propósito consiste en explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático y cómo desarrollan una manera matemática de pensar. Cantoral (2003:208) expresa:

> El nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de Mathematics Education, mientras que en Europa continental le han llamado Didáctica de las Matemáticas, Didactique des Mathématiques, Didaktik der Mathematik, por citar algunas de las escuelas más dinámicas.

Sin importar la denominación adoptada, según se trate de la tradición de escuela de la que proviene, hacemos nuestras las palabras de Cantoral (1995:2-3):

> La matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática. Su objeto de estudio son "los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar."
> No nos reducimos a la búsqueda de una "buena manera de enseñar" una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber.

En estos momentos, las actividades vinculadas a la Educación Matemática están asociadas a tres tópicos: como actividad de práctica relacionada directamente con el acto de enseñar, como actividad de desarrollo asociada a la producción de materiales didácticos, diseño de propuestas curriculares, metodologías innovadoras y por otro lado, como área de investigación.

2. La Teoría de las Situaciones Didácticas

Durante el siglo pasado, a principios de la década del 80, surgió la necesidad de crear acercamientos teóricos valiéndose de los proporcionados por la pedagogía, la psicología, la sociología y la matemática misma, integrando los aportes de cada una de estas disciplinas buscando dar solución a la problemática particular que produce el tratamiento de los objetos matemáticos en un ambiente áulico y los fenómenos inherentes a esta actividad.

Desde una visión del aprendizaje basada en una concepción de sujeto activo en permanente interacción con el medio, nació la Teoría de las Situaciones Didácticas. Esta teoría, iniciada en Francia por Brousseau (1986), proporciona herramientas para interpretar los fenómenos que se producen en la construcción de conocimiento. Se ocupa de modelar situaciones de enseñanza de modo de permitir una elaboración y una gestión controlada, fundamentándose en un enfoque eminentemente constructivista, partiendo del principio que los conocimientos se construyen por adaptación a un medio que aparece problemático para el sujeto.

Según Brousseau, una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un alumno o grupo de alumnos, en un cierto medio, comprendiendo eventualmente, instrumentos u objetos y un sistema educativo (el profesor) con el fin de posibilitar a los alumnos un saber constituido o en vías de constitución. Además está el mundo exterior a la escuela, los padres, los matemáticos, la sociedad en general y una zona intermedia (donde se realiza la articulación entre el sistema didáctico y su entorno) compuesta por todas las personas que elaboran los contenidos y métodos de enseñanza. Una característica importante de esta teoría es su consideración de los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje desde un enfoque sistémico centrado en tres componentes fundamentales: el saber, él o los alumnos y el profesor. El funcionamiento didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes.

Brousseau plantea el diseño y exploración de secuencias de clase generadas por el docente para disponer de un medio que le permita llevar adelante un determinado proyecto de aprendizaje. Una situación didáctica se construye con el propósito de que alguien aprenda algo.

3. El aula de matemática

En el ámbito de la Educación Matemática resultan conocidas las investigaciones en relación a las dificultades en el aprendizaje. A principios de la década de los noventa, las investigaciones comienzan a considerar que en el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento no se pueden dejar de lado aspectos sociales y culturales. En los últimos tiempos aparecen en la literatura una serie de trabajos con otra orientación común: la necesidad de analizar la relación de los conceptos con prácticas socialmente compartidas y con sentidos y significados extra matemáticos.

Cantoral y Montiel (2001:v) expresan:

> Se ha puesto en evidencia que los alumnos construyen conocimiento con cierta independencia del discurso matemático de la enseñanza. Con frecuencia, construyen explicaciones inadecuadas e inclusive erróneas desde un punto de vista matemático, a la vez que descubren profundas relaciones entre piezas del saber matemático, sin que eso haya sido parte explícita de su enseñanza.
> Consideramos que estos conocimientos son el fruto de la interacción con su entorno: con sus compañeros, con sus historias de vida o con su ambiente académico y cultural, entre otros.

La actividad humana juega un papel muy importante ya que es considerada como la fuente principal de la reorganización de la obra matemática que implicará el rediseño del discurso matemático escolar en todos los niveles escolares. Resulta necesario entonces la reorganización de la obra matemática buscando la reconstrucción de significados.

Teniendo en cuenta que la matemática es una producción cultural y social, Sadovsky (2005:22) expresa:

> Cultural, porque sus producciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la *sociedad* en la que emergen, y condicionan aquello que la ”comunidad de matemáticos concibe en cada momento como posible y como relevante”.

Además manifiesta:

> La matemática es también un *producto* social, porque es resultado de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad. (p. 23)

Todo esto hace que la actividad matemática no pueda ser abordada de una manera sencilla. Su enseñanza debe contribuir a que el estudiante desarrolle sus potencialidades y logre la formación de un pensamiento productivo, creador y científico. Debido a la presencia de cambios tan vertiginosos en las diferentes disciplinas científicas y tecnológicas, se torna necesaria una redefinición del currículum matemático y una adecuada planificación de cada unidad didáctica particular.

Si bien no es necesario resolver problemas ni ser un especialista en matemática para descubrir su importancia y su valor, la mayoría de los alumnos reniega de ella. ¿A qué se debe esta resistencia? Las respuestas pueden ser muy variadas, pero un aspecto importante es el desconocimiento de lo que en realidad es la matemática y lo que un buen manejo de sus procedimientos puede aportar. Para los alumnos, el quehacer matemático está envuelto aún hoy en un velo de misterio, los estudiantes ven esta ciencia como una disciplina rígida e impenetrable, insensible y desprovista de humanidad.

La enseñanza entonces no puede quedar aislada de la realidad en la que surge, dado que es un acto social, histórico y cultural orientado a valores y en el cual se involucran seres humanos. Para lograr que la escolarización resulte significativa, se debe aspirar a la creación de contextos sociales donde el aprendizaje sea activo, así como alentar la prueba, la búsqueda de caminos alternativos, el análisis crítico de los errores, el contraste de hipótesis y la investigación.

Los alumnos deben lograr desarrollar hábitos mentales que les permitan ser protagonistas del aprendizaje y del conocimiento, y no simplemente alumnos informados.

Por estas razones, es absolutamente indispensable que el docente se proponga:

- enseñar a aprender,
- lograr un conocimiento bien estructurado de modo que, a partir de pocas informaciones o representaciones sólidamente asimiladas, el alumno pueda recrear el conocimiento o acceder fácilmente a él,
- enseñar a pensar y a resolver problemas, a fin de alcanzar un pensamiento reflexivo, crítico y creativo.

Es importante crear en el estudiante la necesidad de aprender y generar un ambiente donde se posibilite y se motive la exploración del significado personal de los conceptos.

4. Visualización y sistemas de representación

Entre los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, se encuentra el de visualización. Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2003:146) entienden por visualización "la habilidad para transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual". Este proceso está relacionado con el uso de medios de representación correspondientes a los distintos registros: gráfico, numérico, simbólico y algebraico. El manejo de diversos registros es fundamental para la actividad cognoscitiva del pensamiento.

Hitt (2003:215) expresa:

> La visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.

Todo concepto matemático necesita de representaciones ya que no se dispone de objetos para mostrar en su lugar y sólo por medio de éstas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. En los últimos años, los resultados de las investigaciones realizadas en el campo de la educación matemática fortalecieron la postura de que se favorece el aprendizaje de la matemática cuando se incorporan en su enseñanza actividades didácticas que propician la utilización y articulación de los diferentes sistemas de representación. Sin representación no hay conocimiento. Los conceptos matemáticos se pueden expresar según diferentes sistemas: verbal, numérico, gráfico y analítico. Las mismas investigaciones aseguran que para dominar un concepto es necesario conocer sus diferentes representaciones, poder trabajar en cada una de ellas pero también convertir una representación en otra.

Duval (1998) asegura que sin actividades que permitan la coordinación de al menos dos registros de representación no hay aprendizaje y que muchas de las dificultades encontradas por los alumnos en diferentes niveles del currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación. Es muy importante que tanto el docente como el alumno puedan detectar qué sistema de representación es más conveniente para trabajar según el momento.

5. Incorporación de la informática en el ámbito escolar

No cabe duda de que los avances tecnológicos, si resultan útiles, deben ser adoptados a los fines educativos y adaptados a la filosofía de la educación, así como a sus necesidades y derivaciones pedagógicas y didácticas. Muchas son las cuestiones que surgen respecto de los métodos y las innovaciones que acompañan la formación del alumno. No se puede desconocer el rol protagónico que juegan los docentes en este proceso de transformación de la educación y en el descubrimiento constante de nuevas formas de enseñar.

Duart y Sangrá (2000), expresan que la educación no puede estar ajena al potencial que los nuevos espacios de relación virtual aportan. Ante la rapidez de la evolución tecnológica, ahora más que nunca, la educación debe manifestarse claramente y situar la tecnología en el lugar que le corresponde: el de medio eficaz para garantizar la comunicación, la interacción, la información y, también, el aprendizaje.

Cuanto más amplias y complejas sean las relaciones que se establezcan, mayor será la capacidad de utilizarlos en las situaciones cotidianas, en la construcción de nuevos significados y en el establecimiento de nuevas relaciones. Es necesaria la creación de entornos para el aprendizaje donde la interacción con el alumno esté mediada por propuestas de enseñanza que, a través de diferentes tipos de materiales educativos, propicie la adquisición y construcción del conocimiento de manera flexible y autónoma.

La informática educativa juega un papel muy importante en la búsqueda de estas nuevas formas, puesto que resulta un instrumento facilitador y motivador del proceso de enseñanza y permite considerar la singularidad del alumno en su ascenso cognoscitivo. Incorporar la informática implica adoptar, adaptar e integrar las nuevas herramientas al trabajo cotidiano, a fin de tornarlo más eficaz y productivo atendiendo al progreso y a las transformaciones sociales. La introducción de la computadora como recurso didáctico es un problema esencialmente pedagógico y debe ser abordado desde una perspectiva educativa global. Incorporarla para favorecer y mejorar cualitativamente el aprendizaje implica redefinir el recurso técnico como un recurso didáctico-pedagógico, evitando así que resulte un elemento de distorsión.

Numerosas investigaciones muestran además que el surgimiento de la computadora en el campo educativo ha potenciado la posibilidad de la explotación de las distintas representaciones en la enseñanza de la matemática.

Como reflexión final compartimos las expresiones de Patricia Sadovsky (2005:13):

> Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar (…) Se necesita –claro– *creer* que es posible lograr que los alumnos se ubiquen en esa posición, pero esa creencia no se puede inventar, es necesario sustentarla en conocimientos que permitan pensar por dónde se puede empezar a actuar.

Comencemos este desafío… Sabemos que es posible.

Propuestas didácticas

Funciones como modelos de variación y cambio

Silvia Vrancken, Adriana Engler y Daniela Müller
Universidad Nacional del Litoral

¿La búsqueda de la verdad te da tanto gusto como antes?
Seguramente, no es el conocimiento sino el aprendizaje, no es la posesión sino la adquisición, no es el estar ahí sino el llegar hasta ahí, lo que aporta la mayor satisfacción.
Si he aclarado y agotado algo, lo dejo para entrar otra vez en la oscuridad. Así es ese hombre insaciable tan extraño: cuando ha completado una estructura no es para quedarse ahí confortablemente sino para empezar otra.

Carl Friedrich Gauss

Variables y funciones

El estudio de la matemática permite la modelización de situaciones que conducen a la resolución de problemas en diferentes áreas y disciplinas. Por esto, es primordial que los estudiantes analicen los cambios que ocurren en distintos fenómenos biológicos, económicos y sociales.

Siempre que dos magnitudes (variables) están relacionadas mediante una función, se puede estudiar el cambio de una de ellas con respecto a la otra. De ahí la importancia del estudio de las funciones.

El aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio es fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional de nuestros alumnos.

Como parte del pensamiento matemático, el pensamiento variacional comprende las relaciones entre la matemática de la variación y los procesos de pensamiento. Se trata de desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos. Está relacionado con la capacidad para dar sentido a las funciones numéricas, manejándolas de manera flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas.

Los rasgos característicos del comportamiento variacional de una función son, entre otros, crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, regiones donde la función es positiva, negativa o nula.

Presentamos una secuencia de actividades cuyo objetivo es lograr competencias relacionadas con el pensamiento variacional. Las situaciones se presentan en distintas representaciones (verbal, tabular, algebraica, gráfica) y abarcan los conceptos de variable, función, dominio, conjunto de imágenes, intervalos de variación, representación gráfica y comportamiento de una función.

La comprensión de las distintas situaciones de variación dependerá de las relaciones que el alumno pueda establecer entre las diferentes representaciones.

Se presenta a continuación los objetivos que se pretende que alcance el alumno con la resolución de las distintas actividades, los contenidos conceptuales y procedimentales que se desarrollan, los contenidos previos necesarios, la metodología sugerida para su implementación y un breve análisis a priori de las distintas actividades, es decir un análisis de los elementos que pueden estar en juego en cada situación para el estudiante y las posibles respuestas a cada una.

Objetivos que se persiguen con la propuesta

- Identificar magnitudes que intervienen en situaciones de cambio analizar su comportamiento.
- Expresar intervalos de variación utilizando distintas notaciones matemáticas.
- Interpretar gráficos que describen diversas situaciones de cambio, teniendo en cuenta el fenómeno que representa.
- Analizar tablas y gráficas para descubrir patrones, hacer predicciones e identificar propiedades y relaciones.
- Identificar, comprender y explicar situaciones de cambio en varios contextos.
- Identificar funciones como modelos de situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas; expresándolas en forma coloquial, gráfica, tabular y simbólica.
- Relacionar distintas representaciones de situaciones de cambio y producir una representación a partir de otra.

Contenidos a desarrollar

Conceptuales:

- Lenguaje coloquial, gráfico y simbólico
- Variables
- Intervalos de variación
- Funciones
- Características globales de las funciones (crecimiento, decrecimiento, intersecciones con los ejes coordenados).

Procedimentales:

• Utilización del lenguaje coloquial, gráfico y simbólico (pasaje de uno a otro) para describir distintas situaciones.

• Comunicación de enunciados o situaciones mediante un lenguaje matemático adecuado.

• Identificación y utilización correcta de símbolos y expresiones matemáticas en distintas situaciones.

• Utilización de distintas formas para expresar la dependencia entre variables.

• Interpretación gráfica de funciones.

• Reconocimiento del comportamiento de funciones sencillas (incremento, ceros, decrecimientos, positividad y negatividad).

Actitudinales:

• Trabajo en forma autónoma y cooperativa.

• Capacidad para reflexionar sobre las estrategias utilizadas en la resolución de problemas.

• Valoración del aporte de la Matemática a distintas áreas del conocimiento y a situaciones de la vida cotidiana.

• Desarrollo de actitud crítica ante la información presentada en distintos lenguajes en los medios de comunicación.

Contenidos previos necesarios

Definición de función, variable dependiente e independiente, dominio e imagen. Diferentes representaciones de una función.

Metodología sugerida para la implementación de la guía

Para el trabajo en clase, se propone una primera instancia de resolución de las actividades en grupos pequeños, de dos o tres alumnos, y posteriormente la discusión conjunta de las respuestas de los distintos equipos.

Teniendo en cuenta la importancia de la interacción social en la construcción del conocimiento, se privilegia las prácticas compartidas que proporcionen a los alumnos ámbitos que le permitan contrastar significados, tanto en grupos pequeños como en discusiones amplias que, conducidas por el docente, logren orientarse a significados compartidos.

Los grupos de trabajo de los alumnos y las discusiones de clase les proporcionan la posibilidad de describir, explicitar, contrastar, modificar o ampliar las conexiones internas que han formado a partir de las situaciones de trabajo y por otra parte, proporcionan al profesor la oportunidad de observar conexiones explicitadas por los alumnos, aprovechar y reforzar los puntos fuertes, rebatir conexiones inapropiadas, apoyar aquellas que puedan tener potencialidad para el avance en la comprensión del concepto, estudiar conexiones no previstas con anterioridad y sus posibles derivaciones, etc., en un flujo en el que ambas partes se benefician de un proceso mutuamente enriquecedor en su aprendizaje como alumnos y como guía, respectivamente (Romero, 1997, en Camargo y Guzmán, 2005).

—Guía para el alumno—

La matemática tiene como uno de sus objetivos fundamentales modelar situaciones que conduzcan a la resolución de problemas. Para esto resulta primordial analizar los cambios que ocurren en los fenómenos. Siempre que dos magnitudes (variables) están relacionadas mediante una función, se puede estudiar el cambio de una de ellas con respecto a la otra. De ahí la importancia del estudio de las funciones.

En las siguientes actividades se presentan situaciones que requieren el análisis de variables y funciones.

Actividad 1. Exprese en lenguaje matemático los intervalos de variación presentes en cada situación:

a) El área "a" de un círculo aumenta de manera que siempre es mayor que 2 cm^2.

b) La temperatura "t" del cuerpo de un hombre sano varía desde 36,8ºC hasta 37,1ºC.

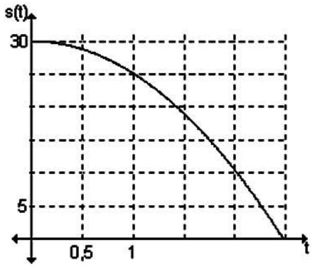
Actividad 2. Los químicos miden la acidez y alcalinidad de una sustancia con el pH (potencial hidrógeno). La escala usada es de 0 a 14. Una sustancia es ácida si su pH es menor que 7. Si es de 7 es neutra y si sobrepasa este valor es alcalina. Describa los intervalos de pH correspondientes a la variación de la acidez y alcalinidad con desigualdades y represente en la recta numérica.

Actividad 3. Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. Su posición a los t segundos de ser lanzada se describe con la función de la gráfica.

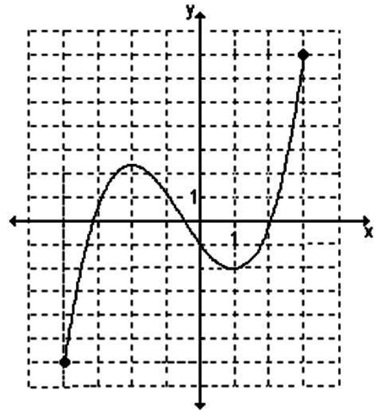
a) ¿Qué es lo que cambia en la situación planteada?

b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la piedra permanece en el aire?

c) ¿Cuál es el intervalo de variación de la altura de la piedra?



Actividad 4. Analice la función cuya gráfica se muestra y responda:



a) ¿Cuál es el intervalo de variación de x?
b) ¿Cuál es el intervalo de variación de y?
c) ¿Para qué valores de x, resulta $y > 0$?
d) ¿Para qué valores de x, resulta $y < 0$?
e) ¿Para qué valores de x, resulta $y = 0$?
d) ¿Para qué valores de x, y crece?
e) ¿Para qué valores de x, y decrece?
f) ¿Para qué valores de x, y no crece ni decrece?

Actividad 5. Al abrir una canilla de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. La temperatura inicial está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir agua caliente, la temperatura aumenta con rapidez. A partir de ahí, la temperatura se mantiene constante. Cuando la canilla se cierra, la temperatura decrece hasta alcanzar la temperatura de la alimentación del agua.

Realice un bosquejo aproximado de la temperatura T en función del tiempo t.

Actividad 6. Las variables x e y están relacionadas de modo que y queda determinada si a cualquier valor de x se lo duplica y al resultado se le suma tres. Escriba una ley para y en función de x.

Actividad 7. Cada una de las siguientes tablas muestra valores numéricos para cada variable representada. Determine la ley que relaciona a las variables en cada una de ellas.

x	1	2	3	...
f(x)	3	6	9	...

p	1	2	3	...
q(p)	1	4	9	...

r	0,2	0,5	1	1,5	3	...
t(r)	5	2	1	2/3	1/3	...

Actividad 8. Sea la función $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

a) Exprese la ley que determina la dependencia entre las dos variables con sus palabras.
b) Determine f(0), f(-2) y f(6).

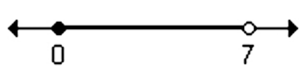
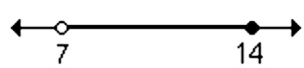
—Guía para el docente—

Análisis de las actividades

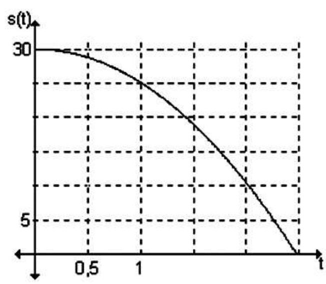
Actividades 1 y 2. En estas dos actividades se estudian situaciones variacionales que requieren la representación de intervalos de variación en términos analítico y geométrico.

En los fenómenos de la naturaleza o de la sociedad hay siempre cosas que cambian: el tiempo, la temperatura, la distancia, la población, etc. Esas cosas que cambian pueden ser medidas. Las nociones de magnitud y de variable son elementos básicos de la matemática en el estudio de la variación.

Se repasan distintas formas de representar matemáticamente las variables. Su resolución exige traducir del lenguaje verbal al analítico o al numérico, del lenguaje analítico al geométrico y del lenguaje verbal al gráfico y analítico.

Enunciado	Análisis
Actividad 1. Exprese en lenguaje matemático los intervalos de variación presentes en cada situación: **a)** El área “a” de un círculo aumenta de manera que siempre es mayor que 2 cm^2. **b)** La temperatura “t” del cuerpo de un hombre sano varía desde 36,8ºC hasta 37,1ºC.	Los alumnos pueden escribir el enunciado en forma simbólica, como desigualdad, o numéricamente, como intervalo. $a > 2$; $(2, \infty)$ $36{,}8 \leq t \leq 37{,}1$; $[36{,}8 \,;\, 37{,}1]$
Actividad 2. Los químicos miden la acidez y alcalinidad de una sustancia con el pH (potencial hidrógeno). La escala usada es de 0 a 14. Una sustancia es ácida si su pH es menor que 7. Si es de 7 es neutra y si sobrepasa este valor es alcalina. Describa los intervalos de pH correspondientes a la variación de la acidez y alcalinidad con desigualdades y represente en la recta numérica.	Los alumnos deben escribir las desigualdades y representar en la recta numérica los intervalos de variación: • Sustancia ácida $0 \leq x < 7$  • Sustancia alcalina $7 < x \leq 14$ 

Actividades 3 a 8. En los procesos de variación generalmente se involucran al menos dos variables que se relacionan entre sí. Estas relaciones se pueden expresar de distinta manera: gráficamente, como en las actividades 3 y 4; numéricamente, como en la actividad 7; verbalmente, como es el caso de las actividades 5 y 6; algebraicamente o a través de su ley, como en la actividad 8. Para llegar a comprender las funciones como modelos que relacionan a las variables, es importante poder obtener los datos desde cualquier registro, pudiéndolos convertir, según los datos proporcionados, a cualquier otro.

Enunciado	Análisis
Actividad 3. Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. Su posición a los t segundos de ser lanzada se describe con la función de la gráfica. 	
a) ¿Qué es lo que cambia en la situación planteada?	En esta actividad, los alumnos deben interpretar distintos aspectos variacionales desde la representación gráfica de la función. Los registros involucrados son el gráfico, el verbal, el numérico y el analítico. En el primer inciso deben identificar las variables involucradas, tiempo y posición. Cambia la posición de la piedra a medida que cambia el tiempo. En los otros dos incisos se solicita intervalos de variación, que pueden presentarse como desigualdad o como intervalo numérico.

b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la piedra permanece en el aire?

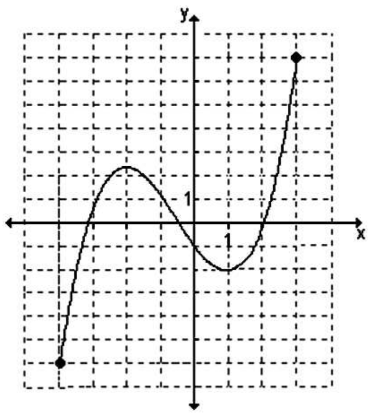
Intervalo de tiempo que la piedra permanece en el aire: (0; 2,5) $0 < t < 2,5$

c) ¿Cuál es el intervalo de variación de la altura de la piedra?

Intervalo de variación de la altura de la piedra: [0, 30] $0 \leq s(t) \leq 30$

Es importante dejar en claro el por qué de la inclusión o no de los extremos de los intervalos.

Actividad 4. Analice la función cuya gráfica se muestra y responda:



En esta situación se trabajan otros aspectos variacionales de una función, que pueden obtenerse desde su representación gráfica.

a) ¿Cuál es el intervalo de variación de x?

a) El intervalo de variación de x es [-4, 3]. Este es el **dominio** de la función.

b) ¿Cuál es el intervalo de variación de y?

b) El intervalo de variación de y es [-6, 7]. Este es el **conjunto imagen** de la función.

c) ¿Para qué valores de x, $y > 0$?

c) La función es positiva en (-3,2; -0,5) U (2; 3], pues en este intervalo la gráfica se encuentra por encima del eje x.

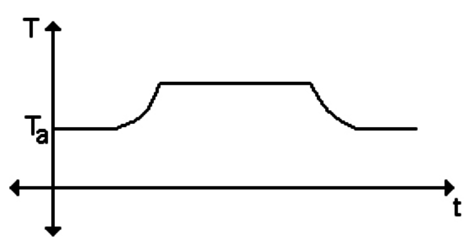
Nota: El valor 3,2 es aproximado y se pueden aceptar otros valores.

d) ¿Para qué valores de x, y < 0?	**d)** La función es negativa en [-4; -3,2) U (-0,5; 2), pues en este intervalo la gráfica se encuentra por debajo del eje x.
e) ¿Para qué valores de x, y = 0?	**e)** La función se hace cero en x = -3,2; x = -0,5 y x = 2.
f) ¿Para qué valores de x, y crece?	**f)** La función crece en (-4; -2) U (1; 3).
g) ¿Para qué valores de x, y decrece?	**g)** La función es decreciente en (-2; 1).
h) ¿Para qué valores de x, y no crece ni decrece?	**h)** La función no crece ni decrece en x = -4; x = -2; x = 1 y x = 3.

Actividad 5. Al abrir una canilla de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. La temperatura inicial está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir agua caliente, la temperatura aumenta con rapidez. A partir de ahí, la temperatura se mantiene constante. Cuando la canilla se cierra, la temperatura decrece hasta alcanzar la temperatura de la alimentación del agua.

En esta actividad se propone una situación de cambio a través de una representación específica y se pretende que el alumno pueda contextualizarla, interpretarla y producir una nueva representación a partir de la dada. El enunciado presenta el comportamiento de dos variables que se relacionan entre sí, tiempo y temperatura del agua.

Una posible gráfica que verifica las características de esta relación es:



En las actividades siguientes se trabaja la representación algebraica de las funciones. Lograr expresar las relaciones mediante fórmulas matemáticas facilita enormemente el estudio de los procesos de variación. Por medio de las leyes, las variables pueden ser manipuladas convenientemente, permitiendo realizar operaciones matemáticas. Esto también es de gran importancia para la representación de las funciones en un sistema coordenado.

La ley que define una función condensa toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten determinar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas en el problema de estudio.

Puede obtenerse desde distintas representaciones. En la **actividad 6** se pretende que los alumnos obtengan la expresión algebraica a partir de la representación verbal del comportamiento de las variables.

En la **actividad 7** se presenta la tabla de valores a partir de la cual los alumnos deben descubrir los patrones de regularidad y determinar la expresión algebraica correspondiente.

La última actividad pretende analizar qué interpretan los alumnos acerca de una función definida algebraicamente. Para esto se les solicita que expresen verbalmente la relación entre las variables involucradas y que determinen algunos valores particulares de la función.

Actividad 6. Las variables x e y están relacionadas de modo que y queda determinada si a cualquier valor de x se lo duplica y al resultado se le suma tres. Escriba una ley para y en función de x.

La ley que define la relación entre las variables es:

$y = 2x + 3$

Actividad 7. Cada una de las siguientes tablas muestra valores numéricos para cada variable representada. Determine la ley que relaciona a las variables en cada una de ellas.

x	1	2	3	…
f(x)	3	6	9	…

$f(x) = 3x$

p	1	2	3	…
q(p)	1	4	9	…

$q(p) = p^2$

r	0,2	0,5	1	1,5	3	…
t(r)	5	2	1	2/3	1/3	…

$$t(r) = \frac{1}{r}$$

Actividad 8. Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

a) Exprese la ley que determina la dependencia entre las dos variables con sus palabras.

b) Determine f(0), f(-2) y f(6).

a) Cada valor de la variable dependiente se obtiene restando la mitad de cada valor de la variable independiente y cuatro.

b) $f(0) = -4$; $f(-2) = -5$; $f(6) = -1$

Funciones.
Descripción e interpretación de situaciones en contextos agropecuarios

Analía Marenoni
Escuela de Educación Técnica Particular Incorporada Nº 2050

Adriana Engler, Silvia Vrancken y Daniela Müller
Universidad Nacional del Litoral

El tratamiento eficiente de la información que proviene del medio y su aplicación en la resolución de problemas es uno de los objetivos primordiales de la matemática actual. En la escuela, los alumnos deben desarrollar capacidades y actitudes que favorezcan la organización y el procesamiento de la información. Esto les permitirá un mejor entendimiento e interpretación de la realidad y los ayudará a adoptar las estrategias correctas para la solución de problemas.

En muchas ocasiones, la información matemática que proviene de fenómenos naturales o sociales, viene dada como relación entre magnitudes, ya sea una relación de tipo causal o estadístico. En esta secuencia se abordan contenidos que permiten el análisis de esas relaciones y su representación numérica, gráfica y algebraica.

Los diarios y revistas contienen mucha información en este sentido. Los alumnos deberían ser capaces de leerla, analizarla, interpretarla, organizarla y comunicarla.

Las distintas situaciones fueron elaboradas a partir de información obtenida de publicaciones periódicas con ejemplos relacionados al ámbito agropecuario. Se tratan las funciones en general, sin profundizar en las características diferenciales de cada uno de los modelos que van apareciendo. Sólo en la última actividad intervienen nociones de la función de primer grado. Se trabajan los conceptos de variable, función y variación de cada una de las variables involucradas.

Objetivos que se persiguen con la propuesta

- Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de la realidad.
- Analizar cualitativa y cuantitativamente situaciones de variación y cambio en fenómenos del ámbito agropecuario.
- Repasar la noción de función y sus principales características.

• Utilizar adecuadamente los términos propios de las funciones y tener un sentido crítico ante informaciones gráficas o numéricas sobre fenómenos presentados en los medios de comunicación.

• Introducir la idea de modelo que describe una situación.

Contenidos a desarrollar

Conceptuales:

• Distintas representaciones de una función (coloquial, numérica, visual o algebraica).

• Variable discreta y continua.

• Características globales de las funciones (crecimiento, decrecimiento, continuidad, extremos, intersecciones con los ejes coordenados).

Procedimentales:

• Interpretación y relación entre las distintas formas de expresar una función (coloquial, numérica, visual o algebraica).

• Elección de las unidades adecuadas en cada uno de los ejes de coordenadas según el fenómeno estudiado.

• Sistematización de la información recogida.

• Visualización y análisis del comportamiento de una función a través de su gráfica, a fin del reconocimiento de algunas características globales de las funciones: crecimiento, continuidad, extremos, tendencias y puntos de corte con los ejes.

• Interpretación de funciones, a través de la comparación de gráficas representadas sobre los mismos ejes.

• Modelización de situaciones utilizando funciones aplicadas a distintas áreas del conocimiento.

Actitudinales:

• Trabajo en forma autónoma y cooperativa.

• Reflexión sobre las estrategias utilizadas en la resolución de problemas.

• Valoración del aporte de la Matemática a distintas áreas del conocimiento y a situaciones de la vida cotidiana.

• Desarrollo de actitud crítica ante la información presentada en distintos lenguajes en los medios de comunicación.

Contenidos previos necesarios

Definición de función, variable dependiente e independiente, dominio e imagen. Diferentes representaciones de una función. Función de primer grado.

Metodología sugerida para la implementación de la misma

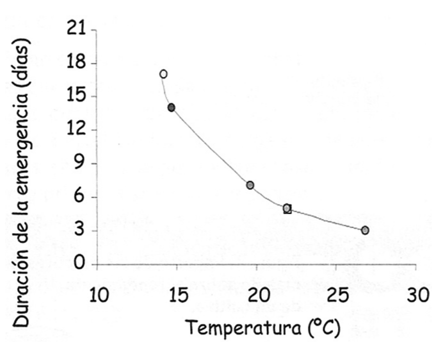
De acuerdo con los objetivos y a partir de la realización de las actividades, se retomarán las ideas que nos interesan a fin de introducir y abordar los conceptos.

Para la resolución de las actividades, se propone una metodología de trabajo en grupo. Posteriormente el profesor coordinará una puesta en común que permita indagar las ideas previas de los alumnos y reflexionar sobre los procedimientos utilizados. Los alumnos tendrán oportunidad de comentar los resultados y conjeturas que hayan surgido en el proceso de resolución. De esta manera se propicia que vayan adquiriendo confianza en sus conocimientos y razonamientos y valoren el trabajo cooperativo.

Para su desarrollo se estiman cuatro clases de 80 minutos cada una. Durante la primera se prevé la resolución de la actividad 1 y el comienzo de la segunda. En la segunda clase se terminará la discusión de esa actividad y se resolverá la actividad 3. El docente pedirá a sus alumnos que realicen de tarea para la próxima clase las actividades 4 y 5. En la tercera clase de discutirán las respuestas y se comenzará la resolución de la última actividad. En la cuarta clase se terminará su discusión y se hará una puesta en común de todo lo analizado en la secuencia.

—Guía para el alumno—

Actividad 1. La elección de la estación de crecimiento para el cultivo de maíz debe tener en cuenta ciertos requerimientos de la especie. Así, deben considerarse temperaturas menores a 10ºC durante la etapa siembra-emergencia, o de 8ºC para posemergencia (recuerde que se llama emergencia a la etapa en que la planta emerge). La siguiente gráfica muestra el impacto de la temperatura del suelo sobre la duración de la emergencia.



Fuente: Padilla *et al*. (2004) c.p. Madonni, G. (2007): “Bases ecofisiológicas del cultivo para alcanzar altos rendimientos”, *Reinvención & Prospectiva. XV Congreso de Aapresid*, p. 280.

a) ¿Cuáles son las variables que se relacionan y en qué unidades están medidas?
b) Escriba un comentario sobre la gráfica.
c) Realice una tabla con la información que brinda la gráfica.
d) Determine si la relación es función. Explique por qué.

Actividad 2. Busque información o un ejemplo sobre el uso de funciones en contextos no matemáticos, es decir, de sus aplicaciones en otras áreas. Para esto puede consultar:

- Biblioteca (libros de textos, revistas).
- Web. Recomendamos las siguientes páginas:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ funciones_ estudio_golbal_eda05/dependencia_entre_magnitudes.htm http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ funciones_estudio_golbal_eda05/representacion_funciones.htm

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ Interpretacion_graficas/funciones_lineales.htm

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ Interpretacion_graficas/funciones_no_lineales.htm

Profesores de otras áreas.

Actividad 3. El siguiente cuadro muestra las precipitaciones registradas en la Estación Agrometeorológica de la EEA Rafaela durante el cultivo de trigo (abril-octubre de 2008) y de la serie histórica 1930/2006.

Ítem	Mes							
	A	M	J	J	A	S	O	Total
Nº días de lluvia	3	2	4	5	0	4	10	28
Lluvia 2008 (mm)	37,5	5,7	0,5	6,4	0,0	28,4	124,5	203,0
Serie Histórica 1931/2006	94,6	48,0	29,7	23,3	25,8	40,9	84,1	346,4
Diferencia 2008-1930/2006	-57,1	-42,3	-29,2	-16,9	-25,8	-12,5	40,4	-143,4

Fuente: Villar, J. y Cencig, G. INTA Rafaela (2009): “Trigo: evaluación de cultivares ciclo 2008”, *Nuestro Agro*, 16 (186), p. 60.

a) A partir de la información que brinda el cuadro escriba un comentario.

b) Represente gráficamente en un sistema de ejes cartesianos los milímetros de lluvia registrados en cada uno de los meses considerados.

c) A partir de la observación de la gráfica y/o de la tabla, responda:

i) ¿Cuándo se registró la mayor precipitación en el año 2008?

ii) ¿Cuál fue el menor registro de precipitaciones, sin considerar el mes en que no se produjeron precipitaciones?

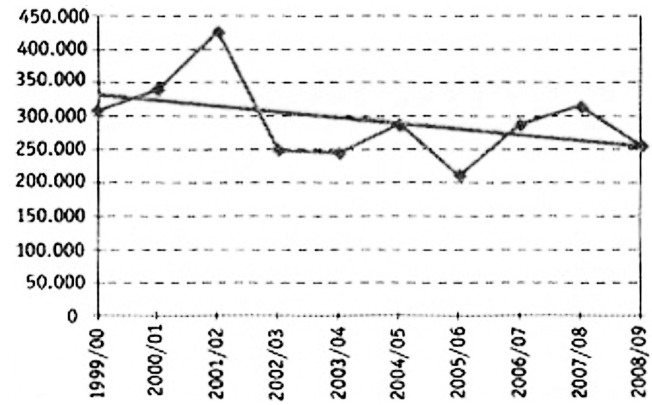
iii) ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica?

d) ¿Qué puede decir, observando la gráfica, de las precipitaciones registradas de abril a octubre de 2008?

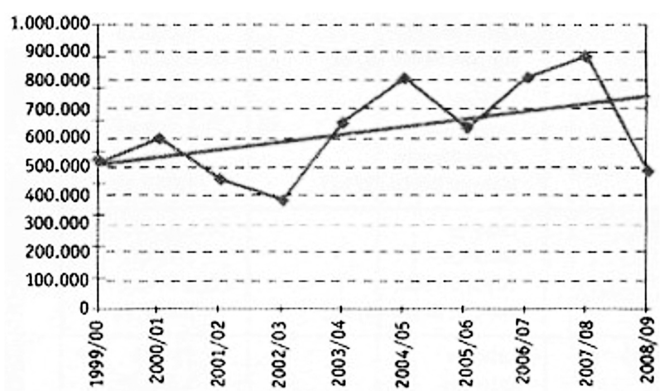
Actividad 4. La siguiente gráfica muestra la evolución y tendencia del área sembrada y producción del trigo en Entre Ríos (período 1999 - 2009).

Evolución y tendencia del área sembrada y producción del trigo en Entre Ríos (período 1999-2009)

Superficie sembrada (ha)



Producción (t)



Elaborado por Grupo Sistemas de Producción y Economía – INTA EEA Paraná, basado en datos del Proyecto SIBER 1999-2009 de la Bolsa de Cereales de Entre Ríos, 2009.

a) ¿Qué variables se relacionan en cada gráfica?

b) ¿En qué unidades están medidas dichas variables?

c) ¿En qué períodos se registró igual superficie sembrada de trigo? ¿Cuál fue dicha superficie sembrada?

d) ¿En qué períodos se registró 600 000 toneladas de producción de trigo?

e) ¿Qué ocurrió con la superficie sembrada de trigo entre la campañas 2002/03 y 2003/04?

f) En la campaña 1999/00, ¿cuál fue la superficie sembrada y la producción de trigo?

g) ¿En qué año se produjo la máxima producción de trigo?

h) ¿Cuál fue la mínima superficie sembrada de trigo en el período 1999-2009?

i) Analice la evolución de la superficie sembrada de trigo a partir de la campaña 2005/06.

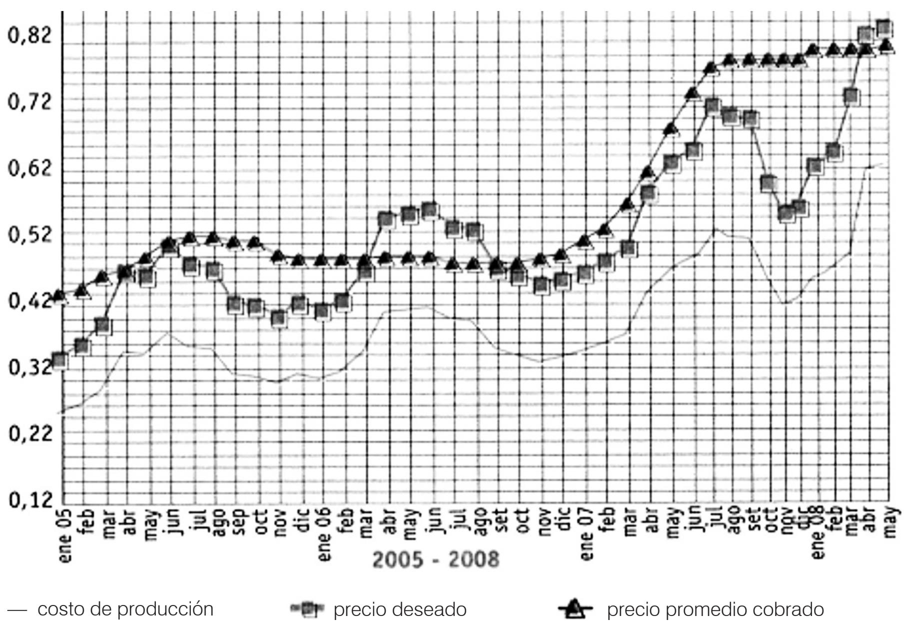
j) Indique los años en que la producción de trigo decreció.

k) ¿En qué período se dio la disminución más brusca de superficie sembrada? ¿Y de producción de trigo? Explique su respuesta. ¿Cuánto disminuyeron?

l) Observe las rectas de tendencia. ¿Qué conclusión puede obtener respecto de la superficie sembrada y la producción de trigo en el período 1999-2009?

Actividad 5. El siguiente gráfico muestra la relación entre la producción de leche y el costo de producción 2005-2008.

Precios por litro de leche y costo de producción (período 2005-2008)



Fuente: Vega, M. (2009): "El costo estándar", Nuestro Agro, 15 (175), p. 71

a) Interprete cada una de las gráficas.

b) ¿Qué puede inferir a partir del gráfico?

c) Compare para cada año el precio deseado, en pesos, con el precio promedio cobrado, en pesos, por cada litro de leche.

d) ¿Cuál es el costo de producir un litro de leche en mayo de los años 2005, 2006, 2007 y 2008? ¿Qué puede decir al respecto?

e) ¿Qué ocurrió en el año 2008 con el costo de producción y el precio promedio cobrado?

f) ¿En qué fechas el precio promedio cobrado superó los 50 centavos por litro de leche?

g) En qué meses el precio deseado coincidió con el precio promedio cobrado por litro de leche? ¿Cuál fue el precio?

h) ¿En qué mes o meses la diferencia entre costo de producción y precio promedio cobrado fue mayor? ¿Y menor? Calcule la diferencia entre cada precio.

Actividad 6

a) Lea el artículo "Biodigestores, la otra solución a la basura" extraído de http://www.proteger.org.ar/doc605.html, que se encuentra al final de esta guía.

b) Teniendo en cuenta los datos que brinda el texto con respecto a la producción máxima diaria de Emilia, complete la tabla que relaciona la capacidad de producción de biogás y su equivalente a gas envasado con la cantidad de basura orgánica reciclada.

Basura orgánica reciclada (kg)	0			125		
Producción de Biogás (m^3)		25			10	
Gas envasado (kg)			9,6			

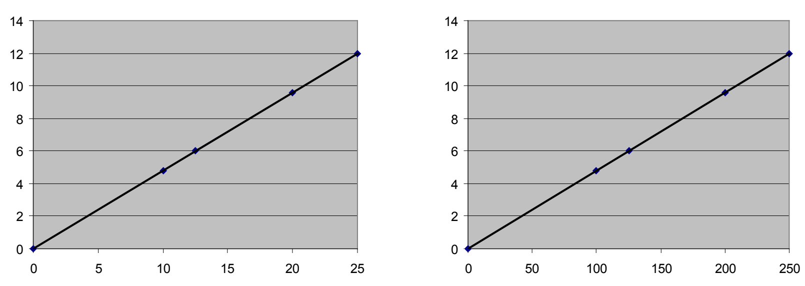
c) Represente gráficamente la producción de biogás en función de la basura orgánica reciclada.

d) Escriba la ley que relaciona la producción de biogás en función de la cantidad de basura reciclada.

e) ¿Cuánto biogás se produce con 200 kilogramos de basura orgánica? ¿Alcanza para abastecer a la Escuela Agrotécnica durante un día? ¿Por qué?

f) ¿Cuántos kilogramos de basura orgánica se necesitan reciclar por día, para abastecer a la Escuela Agrotécnica?

g) Determine cuáles son las variables relacionadas en cada gráfica y escriba la ley correspondiente a cada función.



h) Titule las gráficas del inciso g) y escriba el rótulo correspondiente a cada uno de los ejes con el nombre de las variables y sus correspondientes unidades.

Tecnología renovable y limpia
Biodigestores, la otra solución a la basura

Reciclan basura y la transforman en energía. En localidades vecinas a Santa Fe funcionan desde hace años. Especialistas de la UNL creen que con este sistema la ciudad de Santa Fe podría tratar los residuos orgánicos que genera y a la vez producir hasta 12.500 metros cúbicos de biogás por día.

Santa Fe, 2 marzo 2007. La conocida experiencia de Emilia, una localidad ubicada 75 kilómetros al norte de esta capital, es un ejemplo en la producción de combustibles renovables y limpios. Desde hace cuatro años, funciona allí un biodigestor capaz de reciclar 250 kilos de basura orgánica (toda aquella que puede descomponerse: restos de comida, cáscaras de verduras) por día y transformarla en unos 25 metros cúbicos de biogás, equivalentes a 12 kilos de gas envasado. Exactamente la cantidad que usa la Escuela Agrotécnica Monseñor Zazpe de esa localidad cada jornada.

Si los números se multiplican según la cantidad de habitantes de nuestra ciudad, la cifra resulta elocuente: con 500.000 habitantes, Santa Fe podría producir 12.500 metros cúbicos de biogás todos los días y, a la vez, tratar los residuos orgánicos que genera la población. Todo, sin gastar otra energía que la que produciría la propia planta en base a la biodigestión.

El Grupo de Energías No Convencionales que funciona en la Facultad de Ingeniería Química (FIQ) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) se encargó de asesorar en la construcción del biodigestor de Emilia y de muchos otros similares en el país. “Nosotros hacemos el aporte tecnológico: los proyectos y la asistencia para la puesta en marcha”, dijo el Ing. Eduardo Groppelli, responsable del área de Biogás en ese grupo.

En Humberto Primo y La Criolla –también en esta provincia– se llevan a cabo experiencias similares a las de Emilia, con singular éxito; y este año volverá a funcionar un biodigestor en Gobernador Crespo.

Un centro de capacitación

A fines de 2004, se puso en marcha en la Fundación PROTEGER un biodigestor que abastece las necesidades de su sede, así como un Centro de Capacitación en Tecnologías Socialmente Apropiadas, donde periódicamente se realizan cursos sobre esta temática, también con el asesoramiento técnico de los especialistas de la FIQ.

“Los desarrollos crecerán en magnitud en la medida en que se logre financiamiento para mayores emprendimientos”, indicó Groppelli. Y aprovechó para subrayar que la alternativa de la biodigestión puede ser llevada a grandes conglomerados, como ya ha ocurrido en grandes centros urbanos del mundo. “En Barcelona –contó Groppelli– funcionan los llamados Ecoparques, donde están instalados biodigestores que reciclan la basura de toda el área metropolitana.”

Si bien en la ciudad de Santa Fe sólo funcionan hasta ahora "tres o cuatro experiencias demostrativas, el sistema puede funcionar a gran escala. Muchos creen que sólo puede emplearse en comunidades chicas, pero no es así: cuanto más grande es la escala de aplicación, más se mecaniza, más se automatiza y más conviene", agregó el especialista.

Gestión Integral de Residuos

Además de resolver el problema de los residuos, el equipo que funciona en Emilia abastece de biogás a la Escuela agrotécnica (produce 12 metros cúbicos por día) y genera abono que se utiliza en una plantación de frutales, ubicada al lado de estas instalaciones.

"Si uno lo analiza, el círculo cierra perfectamente: se recicla la basura, el biogás es utilizado por la escuela y el abono va a los árboles", contó Groppelli. Los gastos de instalación (unos 45 pesos por habitante) se amortizan después de 6 años de la instalación del equipo, que casi no tiene mantenimiento.

Lo que sí se requiere es que la población separe los residuos según sean orgánicos e inorgánicos. "Eso es parte de una buena gestión de residuos y no es nada complicado –dijo Groppelli–. Así como la gente se acostumbró a parar en el semáforo rojo, se puede acostumbrar a separar los residuos."

Cómo se hace

Los biodigestores son grandes tanques cerrados (su tamaño depende de la cantidad de basura a tratar) que trabajan con una tecnología sencilla. Por una boca de entrada se introduce la basura (sólo orgánica) y las salidas son dos, una para el abono y otra para el biogás.

En el interior del biodigestor hay algo más que basura: también existen millones de bacterias, que son las que "trabajan" para la descomposición de los residuos. Estas bacterias son anaerobias porque "funcionan" sin oxígeno; su mecanismo de respiración genera una mezcla de gases conocida como biogás (compuesto por gas metano, combustible, y dióxido de carbono) y, además, un efluente líquido rico en nutrientes y materia orgánica estabilizada, que se utiliza como abono de plantas.

"Estas bacterias están en la naturaleza, en el fondo de los pantanos, en los intestinos de los mamíferos... Y pueden utilizarse para el tratamiento de nuestros residuos, contribuyendo al saneamiento del ambiente y a la producción de energía limpia y renovable", concluyó Groppelli.

Diario *El Litoral*, Santa Fe, 28 febrero de 2007. Más información: http://www.proteger.org.ar/tecnologia

—Guía para el docente—

Análisis de las actividades

Actividad 1. Con esta actividad se pretende retomar las ideas previas de los alumnos respecto a las variables involucradas en una situación específica, la relación entre las mismas y la definición de función.

Los datos están presentados en el registro gráfico. El alumno debe ser capaz de interpretarlos y convertirlos a los registros verbal y numérico.

La identificación de las variables que intervienen en la situación, el significado del origen, las unidades y la graduación de cada eje, la determinación de las coordenadas de puntos que pertenecen a la función, son algunas de las tareas que hacen a la lectura de una gráfica.

Lo solicitado en los incisos a) y c) está relacionado con estos aspectos. El alumno debe determinar que las variables involucradas en la situación presentada son temperatura, medida en grados centígrados, y duración de la emergencia, medida en días.

Es importante mostrar cómo en la gráfica, la escala en el eje de las abscisas comienza a partir de los 10ºC, forma que no es la utilizada comúnmente en matemática, pero que a menudo observamos en los gráficos presentados en distintos medios de comunicación.

Las ordenadas de los puntos representados en la gráfica no se corresponden exactamente con las marcas indicadas sobre el eje, por lo que se pueden aceptar distintos valores para la tabla. Los alumnos deben estimar los valores correspondientes y, al armar la tabla, determinar que la temperatura es la variable independiente y la duración de la emergencia, la variable dependiente.

La interpretación de la gráfica es una actividad compleja, que va más allá de la obtención de todos estos datos. Incluye la capacidad de describir globalmente la función representada, determinando las características variacionales que presenta.

El comentario solicitado en el inciso b) puede dar lugar a distintas respuestas. En este caso, por ejemplo, el alumno puede comentar que en la gráfica se observa que a medida que la temperatura del suelo aumenta, la cantidad de días que dura la emergencia disminuye. Otros comentarios pueden ser que para que se efectúe la emergencia, la temperatura debe ser mayor a los 15ºC, o que temperaturas menores a 15ºC demoran la emergencia.

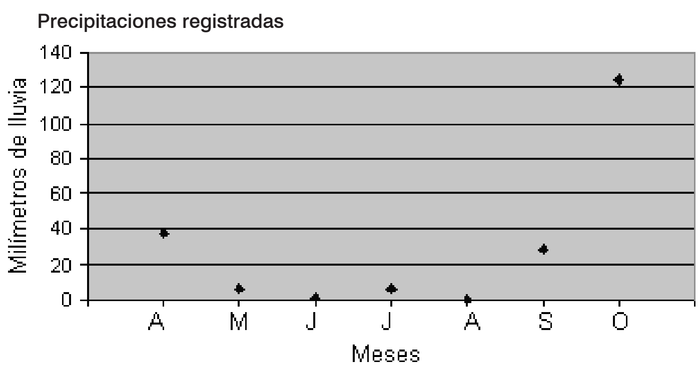
Actividad 2. Para esta actividad se recomienda solicitar a los alumnos que traigan el material para el desarrollo de la clase. En la misma, el profesor conducirá una puesta en común donde se analizará el ejemplo de cada alumno, atendiendo a la forma en que está expresada la relación (coloquial, numérica, visual o algebraica), las variables que intervienen (distinguir variable dependiente e independiente), cómo se relacionan dichas variables y sus correspondientes unidades.

En todas las situaciones presentadas, debe destacarse la misma idea: la existencia de dos variables y una relación o dependencia entre ambas, expresada a través de distintos lenguajes. Si corresponde a función, esa relación debe ser tal que a cada valor de la variable independiente, le corresponda un único valor de la variable dependiente.

Actividad 3. En esta actividad los datos están presentados numéricamente. Los distintos incisos exigen su interpretación y conversión al registro verbal.

Respecto del inciso a) de esta actividad, se espera que los alumnos elaboren un comentario a partir de la lectura e interpretación de información presentada desde una tabla. Por ejemplo: el cuadro muestra el registro de lluvia, en milímetros, y el número de días de lluvia desde el mes de abril hasta octubre del año 2008. Además, establece la diferencia entre este registro y el de la serie histórica 1931/2006, observándose en todos los meses, excepto octubre, una diferencia negativa. Es decir, que en el año 2008 las precipitaciones han disminuido respecto a la serie histórica registrada, en general, durante el cultivo de trigo.

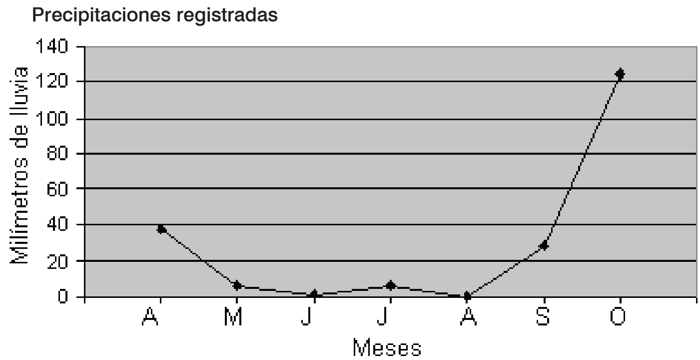
En el inciso b) se pretende analizar la ubicación de variables en el sistema cartesiano, unidades y escalas elegidas en cada eje.



Los incisos c) y d) permiten vincular las distintas formas de expresar una función e identificar qué información brinda cada una.

Se considera importante analizar la distinción entre las variables discretas y continuas.

En esta actividad la variable independiente es discreta (meses), razón por la cual no tiene sentido unir los puntos de la gráfica. Sin embargo es importante resaltar que muchas veces se unen con la finalidad de visualizar la evolución de la situación. En casos como el presentado, en el que interesa el progreso durante algunos meses, generalmente los puntos se unen con tramos de líneas rectas.



Se puede retomar la **actividad 1** y mostrar que ambas variables son continuas y analizar los ejemplos presentados en la **actividad 2**.

Actividad 4. El objetivo de esta actividad es visualizar el comportamiento de una función y analizarla a través de su gráfica, a fin de reconocer y describir algunas características globales de las funciones: crecimiento, extremos y tendencias.

Se presentan dos representaciones y, a su vez, en cada una se comparan dos gráficas, la que determina la evolución de la variable dependiente y la que representa la tendencia a lo largo del tiempo. Algunas de las preguntas exigen la lectura e interpretación de una representación y otras las de ambas.

En primer lugar el docente deberá explicar al alumno el significado de la línea de tendencia.

El alumno debe identificar las variables involucradas en cada representación, las unidades utilizadas y las graduaciones correspondientes. A partir de esa lectura podrá interpretar las gráficas y realizar inferencias a partir de las mismas.

Por ejemplo, en la primer gráfica se observa que en las campañas 2004/05 y 2006/07, se registró la misma superficie sembrada de trigo, casi 300 000 hectáreas. Los valores de la campaña 1999/00 y 2007/08 son aproximados. Pueden considerarse también como respuesta.

La superficie sembrada de trigo entre la campañas 2002/03 y 2003/04 disminuyó levemente.

La menor superficie sembrada se produjo en la campaña 2005/06, siendo algo más de 200 000 hectáreas.

En la campaña 1999/00, la superficie sembrada fue algo más de 300 000 hectáreas y la producción de trigo fue de aproximadamente 500 000 toneladas.

Para determinar los intervalos donde se produce la disminución más brusca, se debe observar para qué intervalo de la variable independiente, se produce la mayor disminución de los valores de la variable dependiente. La respuesta a cuánto disminuyeron exige la cuantificación de los cambios. Para eso el alumno debe restar en cada caso valor final menos valor inicial. La disminución más brusca de superficie sembrada se dio entre las campañas 2001/02 y 2002/03 y fue, aproximadamente, de 425 000 - 250 000 = 175 000 hectáreas. Para la producción de trigo la mayor disminución se produjo entre las campañas 2007/08 a 2008/09 y fue de valores cercanos a 900 000 - 500 000 = 400 000 toneladas de trigo.

Respecto al inciso l), una interpretación básica es que, a lo largo de los años, la superficie sembrada de trigo ha decrecido, mientras la producción fue creciente.

Actividad 5. En esta actividad se comparan en un mismo sistema de ejes cartesianos las gráficas que representan la evolución del costo de producción, del precio deseado y del precio promedio cobrado, mes a mes desde enero de 2005 a mayo de 2008. Nuevamente se presentan preguntas que exigen la lectura e interpretación individual de cada gráfica, pero las que requieren la comparación entre por lo menos dos de ellas son las más interesantes y de mayor nivel de complejidad para el alumno.

Por ejemplo, para responder el inciso g), se debe observar en qué meses, los valores de la variable dependiente son iguales. De esta manera se deduce que el precio deseado coincidió con el precio promedio cobrado en abril de 2005, siendo dicho precio de 48 centavos por litro aproximadamente, en junio de 2005, con un precio de 52 centavos por litro, y en marzo y setiembre de 2006, donde se repite el precio de 48 centavos.

En el inciso siguiente, para determinar en qué mes o meses la diferencia entre costo de producción y precio promedio cobrado fue mayor y menor, desde la gráfica es posible determinar los segmentos que unen los puntos correspondientes a cada curva para un mismo valor de la variable independiente. Se observa que la menor diferencia se da entre los meses de abril a junio de 2006 y fue de ocho centavos por litro de leche, mientras que la mayor diferencia se dio en noviembre de 2007 y fue de 40 centavos.

Actividad 6. A modo de cierre, esta actividad propone la lectura del artículo “Biodigestores, la otra solución a la basura” que se encuentra en el anexo a fin de modelizar una situación utilizando las distintas representaciones de una función, como se ha desarrollado a lo largo de la propuesta.

A partir de la información presentada en la noticia, el alumno debe completar la tabla y reconocer un determinado modelo que le permita hallar otros valores de la tabla y llegar a establecer la expresión algebraica de la función correspondiente.

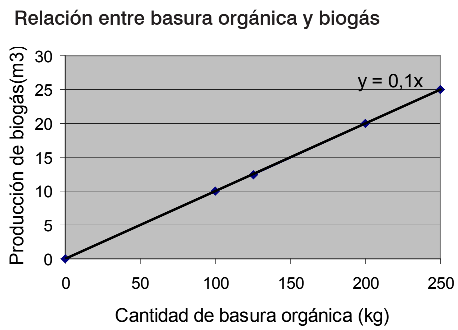
Si bien ambas tareas, reconocer el modelo y determinar la ecuación, requieren abstraer la regla que determina la dependencia entre las variables, la segunda implica más dificultad porque exige manejar el lenguaje algebraico.

Para completar la tabla el alumno debe descubrir que la producción de biogás y su equivalente a gas envasado dependen proporcionalmente de la cantidad de basura orgánica reciclada. Para la última columna, si bien hay infinitas posibilidades para completar los valores, además de tener en cuenta esa relación, debe respetar la capacidad máxima de reciclado de la planta, 250 kilogramos.

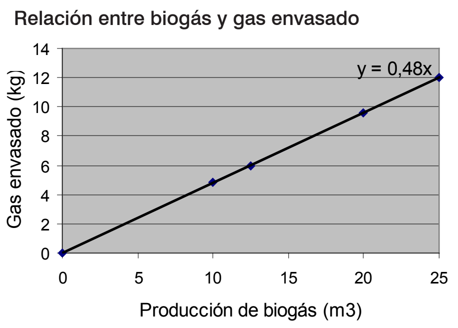
Basura orgánica reciclada (kg)	0	250	200	125	100	
Producción de Biogás (m3)	0	25	20	12,5	10	
Gas envasado (kg)	0	12	9,6	6	4,8	

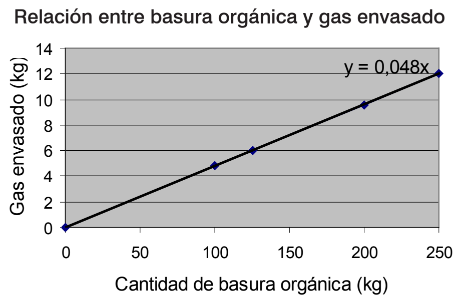
A continuación se anexa la gráfica que muestra la relación entre basura orgánica y biogás. Es importante mostrar a los alumnos los elementos que forman parte de la gráfica.

El título, nombre de las variables y unidades en que están medidas, deben estar presentes en todo gráfico.



Teniendo en cuenta los datos de la tabla, la primera de las gráficas propuestas da la relación entre biogás y gas envasado, mientras que la segunda corresponde a la relación entre basura orgánica y gas envasado. Se presentan las gráficas completas con las variables relacionadas y la expresión algebraica correspondiente a cada función.





Función de primer grado

Analía Marenoni
Escuela de Educación Técnica Particular Incorporada Nº 2050

Daniela Müller, Silvia Vrancken y Adriana Engler
Universidad Nacional del Litoral

La representación matemática de una función describe la manera en que las variables están relacionadas. En muchas situaciones, la relación funcional entre las variables es tal que a medida que la variable independiente aumenta, la variable dependiente aumenta o disminuye de manera proporcional a aquella.

Se presenta una secuencia de actividades que tiene como objetivo general mostrar la importancia de la función de primer grado en la modelización de situaciones de la vida cotidiana. Se hace especial hincapié en el uso de las representaciones algebraica, gráfica y coloquial de esta función y en la conversión entre ellas.

Objetivos que se persiguen con la propuesta

Reconocer las características de una función de primer grado.

Estudiar algunas aplicaciones de la función de primer grado en contextos extra e intramatemáticos.

Contenidos a desarrollar

Conceptuales:

- Función de primer grado.
- Pendiente, ordenada al origen y ceros de la función de primer grado.

Procedimentales:

- Identificación de funciones de primer grado y graficación a partir de la pendiente y ordenada al origen.
- Modelización de situaciones cotidianas a partir de la utilización de funciones de primer grado.
- Comunicación de los procedimientos de resolución de problemas y realización de intercambios de ideas.

Actitudinales:

• Realización de un trabajo autónomo y cooperativo.

• Reflexión sobre las producciones de los alumnos o los procedimientos llevados adelante en la resolución de problemas.

• Valoración del uso correcto e interpretación de distintos lenguajes y de la notación adecuada.

Contenidos previos necesarios

Definición de función. Diferentes representaciones de una función. Dominio (continuo o discreto) y conjunto imagen. Función de proporcionalidad directa.

Metodología sugerida para la implementación de la secuencia

Las distintas actividades de la guía desarrollan el concepto de función de primer grado, su representación gráfica e interpretación de la pendiente y de la ordenada al origen mediante situaciones reales. Para su resolución se puede alternar el trabajo individual con el trabajo grupal de manera que los alumnos puedan intercambiar ideas, debatir y reflexionar sobre sus producciones y las de sus pares.

Para el desarrollo de esta propuesta, se estiman 6 clases de 80 minutos cada una. En la primera, pueden realizarse las tres primeras actividades, en la segunda clase avanzar hasta la actividad seis y en las dos clases siguientes pueden realizarse las restantes actividades de la propuesta. Las dos últimas clases pueden destinarse a resolver las actividades complementarias pero si no dispone del tiempo necesario, se sugiere que se las entregue a los alumnos para que las resuelvan como tarea.

—Guía para el alumno—

El concepto de función es muy útil para describir el comportamiento de una variable que depende de otra. Son numerosas las aplicaciones que tienen las funciones y en particular la de primer grado.

Se presenta una secuencia de actividades que tiene como objetivo general mostrar su importancia.

Actividad 1. Plantee y resuelva las siguientes situaciones:

a) El sueldo que cobra el empleado de una librería es función del número de libros vendidos en el mes. Determine la ley que describe su ingreso mensual sabiendo que cobra $1800 como sueldo fijo más una comisión de $5 por cada libro vendido en cada mes.

b) Una canilla vierte 15 litros de agua por minuto para llenar una pileta que contiene 3000 litros de agua. Indique la ley que describe la cantidad de agua que hay en la pileta en función de los minutos transcurridos desde la apertura de la canilla.

c) Una persona tiene ahorrados $15 000 y todos los meses gasta el 10% de lo que tenía ahorrado inicialmente. Exprese la ley que representa el dinero que le queda en función de los meses transcurridos.

Actividad 2. Sea e(t) la función que relaciona el espacio recorrido con el tiempo empleado por un automóvil que viaja a velocidad constante.

a) ¿Cuál es la ley que describe esta relación?

b) Realice la gráfica de la función e(t) asignándole valores particulares a la velocidad.

Actividad 3. Estela recibió la factura del gas y decidió revisar el importe a pagar. De facturas anteriores, sabe que le cobran un cargo fijo de $8,15 más $0,13 por cada m^3 de gas consumido, incluido el IVA y otros impuestos.

a) Escriba la ley que permite calcular el importe de la factura en función de los m^3 consumidos de gas.

b) ¿Cuál es el menor importe que puede tener una factura?

c) ¿Qué importe indica la factura de Estela si consumió 78 m^3 de gas?

d) ¿Cuántos m^3 de gas consumió el abuelo Julián que tendrá que pagar $15,95 por su factura este mes?

e) En la factura de Alicia, su vecina, figura que consumió el triple que Estela. ¿El importe de dicha factura será también el triple de lo que tiene que pagar Estela? Justifique su respuesta.

> Las funciones obtenidas en las actividades anteriores se denominan **funciones de primer grado** y su representación gráfica es una **recta**.

Actividad 4. Teniendo en cuenta que la función de primer grado se define:
$f: R \to R \,/\, f(x) = mx + h$, identifique la pendiente y la ordenada al origen en cada una de las funciones obtenidas en la actividad 1 y en la actividad 3. Interprete su significado en cada situación problemática planteada.

Actividad 5.

a) Identifique pendiente y ordenada al origen de cada una de las funciones:

$f(x) = 2x - 3 \qquad g(x) = 5 - \frac{2}{3}x \qquad h(x) = 2$

b) Grafique las funciones dadas.

c) Complete las siguientes oraciones analizando las gráficas realizadas.

i) La ordenada al origen de f(x) es .... A partir de este punto la pendiente m = ... indica que por cada unidad que se avanza de manera paralela al eje x, se deben subir .... unidades de forma paralela al eje y, marcando el punto .... Luego se traza la recta que pasa por los dos puntos marcados.

ii) La ordenada al origen de g(x) es .... A partir de este punto, la pendiente m = ... indica que por cada tres unidades que se avanza de forma paralela al eje x, se deben bajar .... unidades de forma paralela al eje y, marcando el punto .... Luego se traza la recta que pasa por los dos puntos marcados.

iii) La ordenada al origen de h(x) es .... A partir de este punto la pendiente m = ... indica que por cada unidad que se avanza de forma paralela al eje x, no hay variación respecto al eje y, marcando el punto .... Luego se traza la recta que pasa por los dos puntos marcados.

Actividad 6.

a) Complete el siguiente cuadro analizando el comportamiento de las funciones (creciente, decreciente o constante) graficadas en la actividad 5 teniendo en cuenta el signo y el valor de la pendiente.

Función	Comportamiento	Signo de la pendiente
f(x)		
g(x)		
h(x)		

b) Escriba una conclusión que relacione el signo de la pendiente de una función de primer grado con el comportamiento de dicha función.

Actividad 7.

a) Represente gráficamente la función f(x) = 3x.

b) Indique el valor de la ordenada al origen y de la pendiente.

c) Analizando el signo de la pendiente, ¿la función es creciente o decreciente?

d) Represente en el mismo sistema cartesiano la función g(x) = 3x – 2.

e) ¿Cuál de las dos funciones es de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

f) ¿Se cortan en algún punto las rectas? Teniendo en cuenta sus posiciones, ¿cómo se denominan estas rectas? ¿Cómo son las pendientes de ambas rectas?

g) Escriba una conclusión a partir de las respuestas obtenidas en el inciso anterior.

Actividad 8.

a) Represente gráficamente las siguientes funciones en el mismo sistema cartesiano:

$f(x) = \frac{3}{4}x + 3 \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \qquad h(x) = 3 \qquad i(x) = -x + 3$

b) ¿Qué parámetro se mantiene constante? ¿Cuál ha variado?

c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto que caracteriza a éstas gráficas?

d) Escriba otra función que forme parte de esta familia y represéntela gráficamente.

e) Indique cuáles de las funciones dadas son decrecientes.

Actividad 9.

a) Represente gráficamente la función $y = \frac{2}{3}x + 5$

b) Determine el dominio y el conjunto imagen de la función.

c) Calcule f(–5), f(0) y $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

d) Determine para qué valores de x, f(x) = –1.

e) El punto $P\left(\frac{1}{3},7\right)$, ¿pertenece a la recta? ¿y el punto $R\left(2,\frac{9}{3}\right)$?

f) Indique las intersecciones con los ejes coordenados.

Actividad 10. Determine si las siguientes expresiones corresponden a funciones de primer grado. En caso afirmativo indique la pendiente, la ordenada al origen y realice la gráfica. Si su respuesta es negativa, justifique.

a) $4x - 6y + 2 = 0$

b) $x^2 + 2y = 3$

c) $y = -3.(x - 4)$

Actividad 11. Determine la verdad o falsedad de cada enunciado. Justifique su respuesta.

a) La pendiente de la gráfica de la función $-y = \frac{1}{3}x + 2$ es $\frac{1}{3}$.

b) La ordenada al origen de $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)$ es $y = 1$ y $x = -2$ es cero de la función.

c) La expresión $\frac{3}{2}x + 2y = 0$ corresponde a una función de primer grado creciente.

Actividad 12.

a) Represente gráficamente la función $y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$.

b) Determine dominio e conjunto imagen de la función.

c) Escriba dos puntos que pertenezcan a la gráfica de la función.

d) Indique ordenada y abscisa al origen.

e) ¿La función es creciente o decreciente? ¿Por qué?

Actividad 13. Cinco alumnos de cuarto año se fueron de vacaciones a Mar del Plata en el verano. En la playa Punta Mogotes, para alquilar una carpa, debieron pagar por día un valor fijo de $20 más $10 pesos por cada hora que la ocupaban (o la parte proporcional si el tiempo es menor a una hora).

a) ¿Cuál es la ley de la función que relaciona el costo de alquilar una carpa con el tiempo que la ocupan?

b) ¿Cuánto les salió alquilar la carpa por 5, 6 y 8 horas respectivamente?

c) ¿Cuánto tiempo la ocuparon el sábado si pagaron $85?

d) ¿Habrán estado el doble del tiempo el domingo si pagaron exactamente el doble que el sábado?

e) Marque en un sistema cartesiano los puntos correspondientes a las primeras 8 horas de alquiler. ¿Es correcto en este gráfico unir los puntos? Justifique su respuesta.

—Guía para el docente—

Análisis de las actividades

En las primeras actividades de la propuesta se espera que las situaciones puedan ser utilizadas para retomar las ideas previas de los alumnos respecto al concepto de función, y de este modo introducir el concepto de función de primer grado, cuya representación gráfica es una recta.

Además se pretende identificar e interpretar los parámetros (pendiente y ordenada al origen) de la función de primer grado, como también establecer diferencias y similitudes entre función de primer grado y la de proporcionalidad directa y analizar el comportamiento de las funciones atendiendo al signo y valor de la pendiente.

En la **actividad 1** se espera que el alumno exprese la relación de dependencia entre variables presentadas y la ley que corresponde a una función de primer grado. Las mismas se indican a continuación junto a ciertas consideraciones del dominio y del conjunto imagen que resulta interesante discutir con los alumnos dado que algunos de ellos son conjuntos discretos.

a) El suelo mensual de un empleado de una librería (y) es de $1800 y se incrementa en $5 por cada libro vendido (x). Por lo tanto, el sueldo mensual que percibe puede describirse mediante la ley $y = 1800 + 5x$. El dominio es discreto ya que x representa la cantidad de libros vendidos: $\{x/x \in N_0\}$. Como conjunto de llegada puede considerarse a R, pero si se desea determinar el conjunto de imágenes, debe tenerse en cuenta que también es discreto $CI = \{y \, / \, y \in N \wedge y \geq 1800 \wedge y \in \dot{5}\}$

b) Para llenar una pileta de 3000 litros, el agua que se acumula (y) aumenta 15 litros por minuto (x). Esta situación puede describirse mediante la ley $y = 15x$. La variable independiente puede tomar valores mayores o iguales que cero, pero dado que cuando la pileta está llena ya no es necesario mantener la canilla abierta y esto ocurre a los 200 minutos, resulta que el dominio es [0, 200] o $D = \{x \, / \, x \in R_0^+ \wedge x \leq 200\}$. Como conjunto de llegada puede considerarse al conjunto de números reales. El conjunto imagen es [0, 3000].

c) El ahorro de \$15 000 de una persona disminuye \$1500 por mes. El dinero que le queda (y) en función de los meses transcurridos (x), puede describirse mediante la ley $y = 15\,000 - 1500x$.

El dominio es $D = \{x \, / \, x \in N_0 \wedge x \leq 10\}$

El conjunto imagen es $CI = \{y \, / \, y \in N_0 \wedge y \leq 15000 \wedge y \in \dot{1500}\}$

En la resolución de la **actividad 2** se recomienda partir de las ideas previas de los alumnos sobre conceptos desarrollados en Física como espacio, velocidad (constante) y su relación. Esto puede posibilitar a los alumnos resolver la actividad planteada, que se muestra a continuación:

a) La función que relaciona el espacio recorrido (e) con el tiempo empleado (t) por un automóvil que viaja a velocidad constante (v) está dada por $e(t) = v.t$

La función es de proporcionalidad directa dado que la velocidad es constante y la gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Es interesente que los alumnos puedan observar y comparar las gráficas que realicen, ya que si bien todas son rectas que pasan por el origen de coordenadas, su inclinación puede variar, dado que ésta depende del valor de la velocidad constante que elijan.

La **actividad 3** muestra una aplicación de función de primer grado a un caso cotidiano de una factura de gas.

a) La ley que permite calcular el importe de la factura en función de la cantidad de gas consumido es $y = 8{,}15 + 0{,}13x$.

b) El menor importe que puede tener la factura es \$ 8,15 y se da en el caso de que no se registre consumo de gas, es decir, sólo se abona el cargo fijo del servicio.

c) Si Estela consumió 78 m^3 de gas el importe de la factura será \$18,79 que se obtiene reemplazando en la ley a x por 78.

d) Si el abuelo Julián tiene que pagar \$15,95 por su factura este mes quiere decir que ha consumido 60 m^3. Este valor se obtiene reemplazando en la ley dada a "y" por 15,95, despejando luego el valor de x.

e) En este inciso es interesante analizar con los alumnos si existe o no proporcionalidad directa entre las variables involucradas en la situación, con el objeto de mostrar que el importe de la factura de gas y la cantidad de metros cúbicos consumidos, no son directamente proporcionales ya que el suministro tiene un cargo fijo. Es decir, si Alicia consumió el triple de gas que Estela el importe a pagar no será el triple también.

Los valores se muestran en la siguiente tabla:

	Cantidad de gas consumido (m^3)	Importe de la factura ($)
Estela	78	18,79
Alicia	234 = 78 x 3	39,74 ≠ 18,79 x 3

Al finalizar esta actividad es importante formalizar la definición de la función de primer grado $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = mx + h$, indicando pendiente y ordenada al origen junto a la definición e interpretación gráfica de ambas.

La **actividad 4** retoma las anteriores con el propósito de interpretar en cada situación el significado de la pendiente y la ordenada al origen.

En la **actividad 1**, la función que modeliza la primera situación está dada por la ley $y = 1800 + 5x$ donde la pendiente $m = 5$ se interpreta diciendo que por cada libro que vende el empleado en el mes, su sueldo aumenta $5. La ordenada al origen $h = 1800$ significa que si no vende ningún libro, percibe un sueldo de $1800.

En la segunda situación planteada, la función que modeliza la situación es $y = 15x$, donde la pendiente $m = 15$ significa que por cada minuto que permanece abierta la canilla ingresan 15 litros de agua a la pileta.

La ordenada al origen $h = 0$ significa que la pileta está vacía en el momento de abrir la canilla para comenzar a llenarla.

En la tercera situación, la ley que describe la situación planteada está dada por $y = 15\,000 - 1500x$. La pendiente $m = -1500$ significa que por cada mes que transcurre, el dinero ahorrado disminuye $1500. La ordenada al origen $h = 15\,000$ significa que inicialmente la persona tiene ahorrados $15 000.

En la **actividad 3**, la función que modeliza la situación es $y = 8{,}15 + 0{,}13x$ en la que la pendiente $m = 0{,}13$ significa que por cada m^3 de gas que se consuma, el costo de la factura aumentará 13 centavos. La ordenada al origen $h = 8{,}15$ significa que si no se consume gas, el costo fijo del servicio de gas es de $8,15.

Al trabajar con funciones de primer grado y de proporcionalidad directa, tradicionalmente se presenta la definición y ejemplos o aplicaciones correspondientes a cada función por separado. En lugar de esto, es aconsejable trabajar con la confección de tablas y la realización de distintos gráficos para que los alumnos puedan descubrir las similitudes, es decir el hecho de que el cambio de la función para distintos intervalos es constante, lo que implica que en la gráfica los puntos queden alineados. También es importante analizar las diferencias, el valor constante añadido en la función de primer grado que implica el traslado vertical de la gráfica sobre el eje de ordenadas.

En la **actividad 2**, al realizar el ítem c), se espera que los alumnos le asignen distintos valores a la velocidad. Dado que la expresión de la función es e(t) = v.t, al asignarle un valor particular constante a v, el cociente de cualquier par de valores $\frac{e_i}{t_i}$ es la constante de proporcionalidad que representa la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las abscisas y que recibe el nombre de pendiente. El modelo que corresponde a una función de proporcionalidad directa queda caracterizado por su expresión algebraica y = k.x o por su representación gráfica que es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Al realizar la **actividad 3**, debe hacerse notar el nuevo modelo presentado y qué diferencias presenta con respecto al de la actividad anterior. Aquí ya no puede hablarse de un cociente constante entre pares de valores correspondientes. Se trata de un modelo caracterizado por la expresión y = mx + h, cuya gráfica es una recta que interseca al eje de las ordenadas en el punto P(0, h) y que sólo puede ser tratada como una función de proporcionalidad directa y = kx en el caso en que h sea cero.

En la **actividad 5**, el propósito es que los alumnos grafiquen las funciones dadas teniendo en cuenta la ordenada al origen y la pendiente. Al realizarlas, puede hacerse notar que a partir de cualquier punto de la gráfica de la función es posible obtener otro de la misma teniendo en cuenta la pendiente m.

En las oraciones que el alumno debe completar, es necesario hacer hincapié en la interpretación gráfica de la ordenada al origen y de la pendiente, en la notación simbólica para indicar los puntos que pertenecen a cada recta y también mostrar gráficamente la noción de pendiente de la recta como variación.

En la **actividad 6**, a partir del análisis de las gráficas realizadas en la **actividad 5**, se espera que los alumnos relacionen el comportamiento de las mismas con el signo y valor de la pendiente de la función arribando a las siguientes conclusiones:

- Si la pendiente es positiva (m > 0), la función es creciente en todo su dominio, y recíprocamente, si la función de primer grado es creciente en todo su dominio, la pendiente m es positiva.
- Si la pendiente es negativa (m < 0), la función es decreciente en todo su dominio, y recíprocamente, si la función de primer grado es decreciente en todo su dominio, la pendiente m es negativa.
- Si la pendiente es nula (m = 0), la función es constante en todo su dominio, y si la función es constante en todo su dominio, la pendiente es nula.

Al realizar la **actividad 7**, se espera que los alumnos diferencien función de proporcionalidad directa de función de primer grado. También, a partir del análisis de las gráficas, arriben a la conclusión de que si las pendientes de dos funciones de primer grado son iguales, las gráficas serán rectas paralelas y recíprocamente, si las gráficas de dos o más funciones de primer grado son paralelas, las pendientes son iguales.

En la **actividad 8** se espera que los alumnos puedan identificar a la ordenada al origen como el parámetro que se mantiene constante en todas las expresiones algebraicas y a la pendiente como el que ha variado. El punto que caracteriza a estas gráficas es P(0, 3). También se les propone escribir una función de primer grado cualquiera cuya ordenada al origen sea $y = 3$. Por último, se analiza el comportamiento de las funciones teniendo en cuenta el signo de la pendiente para que indiquen cuáles son decrecientes.

En la **actividad 9** se revisan algunos conceptos y se solicita determinar la imagen de algunos valores particulares de x, preimágenes, ceros y analizar si un punto pertenece o no a la recta. Aquí es importante recalcar que un punto pertenece a la gráfica de una función si sus coordenadas verifican la ecuación, es decir, si al reemplazar en la expresión algebraica de la función a las variables por las coordenadas del punto, se obtiene una igualdad.

Al calcular las intersecciones con los ejes coordenados en el ítem **f)** se recomienda recordar a los alumnos que a la intersección de la gráfica de la función con el eje de las ordenadas (eje y) se la denomina “ordenada al origen” y a la intersección con el eje de las abscisas (que corresponde al cero de la función), “abscisa al origen”.

Respecto de la **actividad 10**, se espera que en las respuestas afirmativas (ítems a) y c)), los alumnos identifiquen pendiente y ordenada al origen. Para esto deben expresar la función de manera explícita $y = mx + h$.

Los enunciados de la **actividad 11** son falsos ya que en:

a) La pendiente de la función $-y = \frac{1}{3}x + 2$ es $-\frac{1}{3}$.

b) La ordenada al origen de la función $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)$ es $y = -1$ y $x = 2$ es cero de la función.

c) La ecuación $\frac{3}{2}x + 2y = 0$ corresponde a una función decreciente de primer grado ya que la pendiente es negativa ($m = -\frac{3}{4}$).

En la **actividad 12**, al determinar el dominio y el conjunto imagen de la función, es importante revisar las respuestas de los alumnos y luego formalizarlas en el pizarrón, indicando que ambos son el conjunto de los números reales. Para escribir dos puntos que pertenezcan a la recta, mostrar la ventaja de tener la expresión de la función en su forma explícita. Para determinar la abscisa al origen, se iguala la expresión a cero. Analizar crecimiento o decrecimiento de la función atendiendo al signo de la pendiente.

La **actividad 13** muestra una aplicación de función de primer grado cuya expresión es $y = 10x + 20$, donde x representa las horas de alquiler. Para calcular el precio de alquilar la carpa por 5, 6 y 8 horas, se reemplaza en la expresión dada a x por estos valores obteniendo \$70, \$80 y \$100 respectivamente. En el ítem b) se reemplaza la variable "y" por 85, obteniendo que 6 horas y media fue el tiempo que ocuparon la carpa. Para el ítem c) se espera que sin hacer cálculos los alumnos puedan negar la respuesta dado que la función no es de proporcionalidad directa. En la gráfica que se realice los puntos pueden unirse con un trazo continuo dado que la variable independiente es continua ya que corresponde a la variable tiempo y en el problema puede abonarse el alquiler por fracción de hora que se haya ocupado.

Nota: para una mejor y rápida visualización de las gráficas y de las propiedades que se desean deducir, a partir de la **actividad 7** puede utilizar con los alumnos el software Funciones para Windows. Si bien es recomendable el trabajo en grupos, es importante que todos los alumnos manipulen el programa para valorar las ventajas que este recurso brinda para la resolución de problemas relacionados al concepto de función de primer grado y sus aplicaciones.

—Actividades complementarias—

Los problemas de la guía tienen como propósito afianzar los conceptos desarrollados. Se incluyen las respuestas para poder verificar logros y avanzar en el estudio del tema.

Actividad 1. Augusto hoy se quedó dormido y para no llegar tarde a la escuela, se tomó un taxi. Cuando subió, el chofer accionó el taxímetro; su sistema de cobro es de \$3 la bajada de bandera, y \$0,25 por cada ficha caída.

a) Halle la ley que relaciona el costo del viaje con la cantidad de fichas.

b) ¿Cuánto pagó Augusto si cayeron 20 fichas hasta que llegó a la escuela?

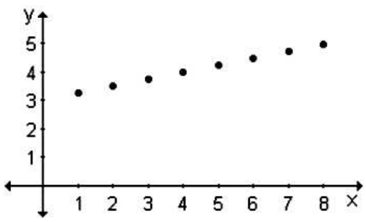
c) Marque en un sistema cartesiano los puntos correspondientes a las primeras 8 fichas. ¿Es correcto en este gráfico unir los puntos? Justifique su respuesta.

Respuestas

a) y = 3 + 0,25x

b) Si cayeron 20 fichas, Augusto pagó $8.

c)



No corresponde unir los puntos en el gráfico dado que la variable independiente es discreta.

Actividad 2. En la empresa constructora "Construmax", los obreros ganan por mes $1800 más un adicional del 5%, por cada año completo de antigüedad.

a) ¿Cuál será el salario semanal de un obrero con 5 años de antigüedad?

b) ¿Cuál será el sueldo (mensual) de un obrero recién ingresado a la empresa?

c) Si un obrero cobra por mes $2700, ¿cuántos años de antigüedad tiene en esta empresa?

d) Halle la ley que relaciona el sueldo mensual percibido por el obrero con sus años de antigüedad en la empresa.

e) Marque en un sistema cartesiano los puntos correspondientes a los primeros 10 años. ¿Es correcto en este gráfico unir los puntos? Justifique su respuesta.

Respuestas

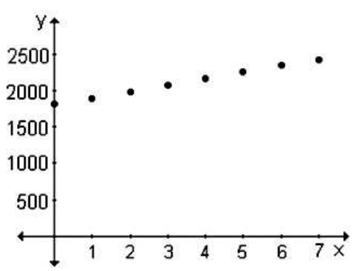
a) Un obrero con 5 años de antigüedad cobrará $562,50 de salario semanal.

b) El sueldo mensual de un obrero que recién se inicia será de $1800.

c) Un obrero que cobra $2700 por mes tiene una antigüedad de 10 años.

d) La ley que relaciona el sueldo mensual recibido con los años de antigüedad en la empresa es y = 1800 + 90x.

e)



Actividad 3. Martín y Paola van en bicicleta desde la escuela al club haciendo ambos el mismo recorrido. Ambos pedalean a una velocidad constante. Paola sale primero de la escuela a una velocidad de 80 $\frac{m}{min}$. Martín, sale 6 minutos más tarde a 100 $\frac{m}{min}$.

Complete la siguiente tabla con la distancia recorrida por cada uno (en metros) en los minutos indicados (t), tomando como referencia el momento en que Paola inicia el recorrido.

Paola

t	0	6	12	18
m				

Martín

t	6	12	18	24
m				

b) Determine la ley que representa la distancia recorrida por cada uno (en metros) en función del tiempo transcurrido durante el viaje (en minutos).

c) Grafique los pares de valores de ambas tablas en un mismo sistema cartesiano. ¿Es correcto unir los puntos? Justifique su respuesta.

d) ¿Cuál de los dos llegará primero al club si está a 3,5 km de la escuela?

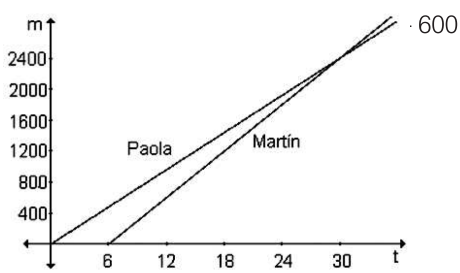
Respuestas

Para Paola

t	0	6	12	18
m	0	480	960	1440

Para Martín

t	0	6	12	18
m	0	600	1200	1800



d) Llegará primero Martín.

Actividad 4. Lucas necesita comprar CD vírgenes. Averiguando por internet, en libremercadito.com, venden 25 CD a \$18,75 más un adicional por envío a domicilio de \$15. Su papá le aconseja, para que se ahorre los gastos de envío, que los compre en la librería del barrio que los venden a \$1,25 cada uno.

a) ¿Dónde le conviene comprarlos si desea adquirir 25 unidades?

b) ¿Y si desea adquirir 50 unidades?

c) Determine la ley que representa el costo en función del número de CD que se compren por internet y en el kiosco.

d) Indique qué cantidad de CD debe comprar para que el gasto en ambos lugares sea el mismo.

Respuesta

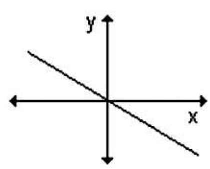
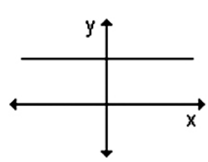
a) Si desea comprar 25 unidades le conviene hacerlo en el kiosco.

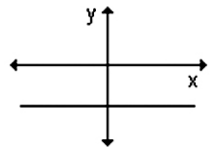
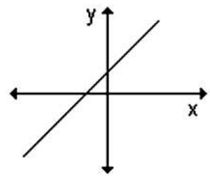
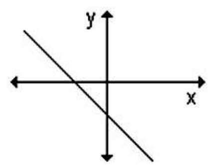
b) Para comprar 50 CD le conviene por internet.

c) El costo en función del número de CD adquiridos está dado por $y = 0{,}75x + 15$, comprando por internet y haciéndolo en el kiosco: $y = 1{,}25x$.

d) Comprando 30 CD el gasto es el mismo en ambos lugares.

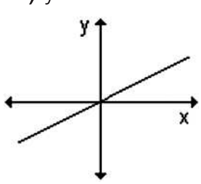
Actividad 5. Dada la función de primer grado $f(x) = mx + h$, complete el siguiente cuadro de acuerdo a la gráfica o al valor de m y h que falten. Para cada caso dé un ejemplo de la función que cumpla con las condiciones establecidas.

m	h	Gráfica	Ejemplos
a) > 0	$= 0$		
b)			
c) $= 0$	$= 0$		
d)			

e)			
f)			
g) < 0	> 0		
h) > 0	< 0		
i)			

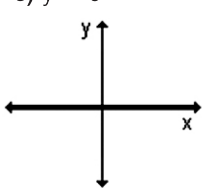
Respuestas

a) $y = 3x$



b) $m < 0$; $h = 0$; $y = -2x$

c) $y = 0$

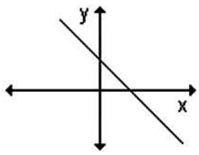


d) $m = 0$; $h > 0$; $y = 5$

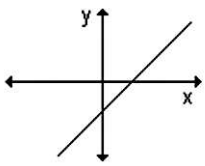
e) $m = 0$; $h < 0$; $y = -3$

f) $m > 0$; $h > 0$; $y = 3x + 5$

g) $y = -2x + 4$



h) $y = 3x - 2$



i) $m < 0$; $h < 0$; $y = -2x - 5$

Función de segundo grado

Nancy Senn y Liliana Urso
Escuela de Educación Técnica Particular Incorporada Nº 2010 IDESA

Silvia Vrancken, Adriana Engler y Daniela Müller
Universidad Nacional del Litoral

Se presenta una secuencia de actividades que tiene como objetivo general introducir la función de segundo grado. Al resolver las distintas actividades los alumnos pueden descubrir que a todas las funciones cuya expresión algebraica es una ecuación cuadrática les corresponde un mismo tipo de curva, llamada parábola.

Se parte de la forma factorizada y, a partir de la misma, se obtiene la forma polinomial de una función de segundo grado. La ventaja de tratarlo de esta manera es que, para la primera, cada uno de los parámetros tiene un significado concreto, cosa que no sucede en la segunda.

Objetivos que se persiguen con la propuesta

- Construir la función de segundo grado a través de situaciones que se modelicen matemáticamente.
- Representar gráficamente funciones cuadráticas.
- Calcular e interpretar los resultados matemáticos en el contexto de las situaciones problemáticas planteadas.
- Determinar las características de las parábolas.
- Obtener la expresión algebraica de la función de segundo grado desde distintas representaciones (tablas y gráficos).
- Desarrollar la capacidad del pensamiento reflexivo del alumno.
- Estimular el trabajo cooperativo, la discusión y defensa de las propias ideas.

Contenidos a desarrollar

Conceptuales:

- Función de segundo grado. Forma factorizada y polinomial. Dominio, conjunto de llegada y conjunto imagen. Gráfica de la función de segundo grado. Ceros de la función. Intersecciones con los ejes cartesianos. Vértice y eje de simetría. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Incidencia del coeficiente del término de segundo grado en la variación de la parábola.

• Lenguaje coloquial, gráfico y simbólico.

Procedimentales:

• Resolución y modelización de situaciones problemáticas aplicando las funciones de segundo grado.

• Análisis de la variación de las magnitudes que intervienen en las situaciones problemáticas.

• Construcción de tablas y gráficos.

• Interpretación de tablas, gráficos y obtención de sus expresiones algebraicas.

• Obtención de conclusiones a partir del modelo.

• Interpretación de los resultados matemáticos para la explicación de las situaciones problemáticas.

• Comparación de las predicciones con los datos iniciales de los problemas para determinar la validez del modelo.

• Utilización del lenguaje coloquial, gráfico y simbólico así como el pasaje de uno a otro, para describir distintas situaciones o fenómenos.

• Comunicación de enunciados o situaciones mediante un lenguaje matemático adecuado.

• Identificación y utilización correcta de símbolos y expresiones matemáticas en problemas u otras situaciones.

Actitudinales:

• Valoración del aporte de los contenidos matemáticos a las distintas situaciones de la vida cotidiana.

• Valoración del intercambio de ideas como fuente de construcción de los conocimientos.

• Utilización de un lenguaje claro y preciso que favorezca la comunicación.

Contenidos previos necesarios

• Intervalos de números reales.

• Concepto de variable y de función. Dominio y conjunto imagen. Imagen de un número. Función creciente y decreciente. Valor máximo y mínimo de una función. Representación de funciones en un sistema de coordenadas cartesianas.

• Expresiones Algebraicas. Operaciones entre expresiones algebraicas. Factorización.

• Polinomios. Grado de un polinomio. Ceros de un polinomio. Raíces de una ecuación.

• Cálculo de área de rectángulos.

Metodología sugerida para la implementación de la secuencia

Las actividades de la guía están preparadas para ser trabajadas de diferentes maneras. Pueden desarrollarse por medio de hojas de trabajo, a manera de secuencia, o bien puede diversificarse la manera de trabajar con los alumnos. Por ejemplo, se pueden hacer algunas de las actividades por hoja de trabajo, ya sea de manera individual o por equipos, de manera de favorecer el trabajo cooperativo; mientras que el docente puede presentar otras situaciones y resolverlas por medio de interrogatorios y con ayuda de los alumnos.

El docente ampliará y formalizará en el pizarrón todo lo trabajado.

—Guía para el alumno—

La modelización es una de las áreas más atractivas de las ciencias aplicadas y una de las necesidades más importantes de los profesionales que necesitan construir modelos para resolver problemas de la vida cotidiana.

La selección de un modelo adecuado que reproduzca la realidad es fundamental. Se trata de entender cómo se comporta el mundo real y obtener las respuestas que pueden esperarse a determinadas acciones que se realicen sobre ese hecho real.

Actividad 1. En la carpintería de IDESA se encomendó a los alumnos de primer año elaborar con listones de madera los carteles rectangulares para la huerta, con la consigna de que todos los rectángulos deben tener 40 centímetros de perímetro. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones si, con el objetivo de facilitar la escritura en los mismos, se desea que presenten el mayor área posible?

a) Para facilitar la resolución del problema dibuje diferentes rectángulos con la condición que su perímetro sea de 40 centímetros.

b) Si la base es de 4 centímetros, ¿cuál es su altura? ¿Y si la base mide 8 centímetros?

c) Complete la siguiente tabla con posibles medidas para la base, la altura y el área.

Base (cm)	Altura (cm)	Área (cm^2)
2		
	16	
6		
7,8		
	10	
		91
14,5		
16		
	2,5	

d) Responda:

i) ¿Cuáles son las variables relacionadas?

ii) La relación entre el área y la medida de la base del rectángulo, ¿corresponde a función? ¿Por qué?

iii) Teniendo en cuenta los valores de la tabla, ¿qué dimensiones tiene el rectángulo de mayor área?

iv) Dado que numerosos valores no fueron considerados en la tabla, ¿puede estar seguro de que es la decisión correcta?

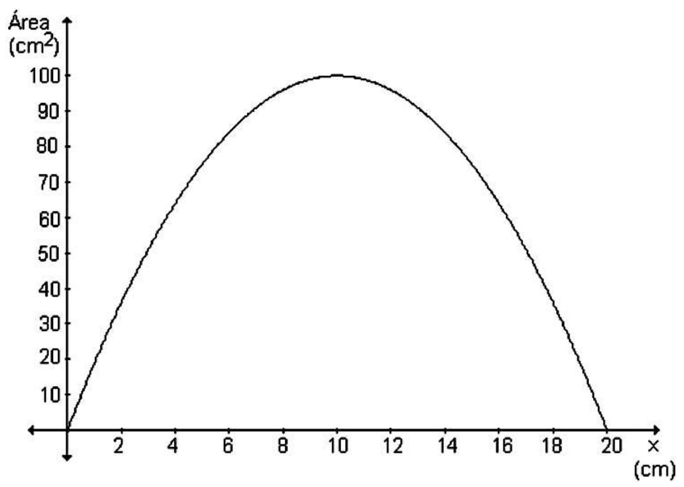
v) Complete la tabla que se propone a continuación. Observando los distintos valores, responda nuevamente los dos incisos anteriores.

Base (cm)	Altura (cm)	Área (cm^2)
9,8		
9,9		
9,95		
10		
10,05		
10,1		
10,2		

e) Observe la gráfica que representa el área en función de la medida de la base y responda las preguntas que siguen:

i) ¿Cuál es su decisión para cumplir con la consigna del problema?

ii) ¿Por qué tiene sentido unir los puntos?



f) Intentemos caracterizar la función a través de su modelo algebraico.

i) Si llamamos x a la medida de la base, ¿cómo expresamos en símbolos la medida de la altura?

ii) ¿Cómo expresamos el área en función de la medida de la base?

Luego, la ley .... representa el área del rectángulo en función de la medida de la base.

La variable independiente es ....

La variable dependiente es ....

iii) ¿Cuál es el intervalo de variación de la variable independiente?

iv) ¿Cuál es el intervalo de variación de la variable dependiente?

Recordando que:

> El **dominio** es el conjunto de valores de x para los que existe imagen.
> El **conjunto imagen** es el conjunto de valores que toma la función.

v) ¿Cuál es el dominio de la función?

vi) ¿Cuál es el conjunto imagen?

vii) Teniendo en cuenta la expresión algebraica, el dominio y el conjunto imagen, complete la definición de la función que expresa el área del rectángulo según la medida de la base.

f: .... → .... / f(x) = ...

viii) Resuelva el producto indicado en la ley de la función y verifique que se trata de una expresión polinomial de grado dos.

> Las funciones de segundo grado también se llaman **cuadráticas** y gráficamente están representadas por curvas llamadas **parábolas**.

g) Analicemos otras características de la función.

i) ¿Cómo varía la base para que el área aumente?

ii) ¿Y para que el área disminuya?

iii) ¿Para qué valor de x el área no aumenta ni disminuye?

> El punto V(.........,..........), que corresponde al valor de la abscisa donde la función se estabiliza momentáneamente, se llama vértice de la parábola.

f(x) es creciente en el intervalo ....

f(x) es decreciente en el intervalo ....

En x = ... la función presenta valor máximo.

En nuestro problema, para el valor de la abscisa que corresponde al vértice de la parábola, la función alcanza su valor máximo.

El mayor área que pueden tener los carteles para la huerta es ………… cuando la base mide ………

iv) En la gráfica de la función, marque las coordenadas del vértice y trace la recta vertical que pasa por dicho punto. ¿Qué puede decir sobre el comportamiento de la gráfica a ambos lados de la recta?

Vamos a considerar ahora, apartándonos del problema, como dominio de la función a todos los números reales.

h) Los valores x que hacen que la función sea cero son: ……….

Recuerde:

Los valores de **x** para los cuales **y** vale cero se llaman ceros de la función. En la representación gráfica en el plano, los ceros de una función son los valores de x para los cuales la gráfica corta o toca al eje de abscisas.

Si tiene que construir la parábola con los datos trabajados hasta el momento, puede seguir los siguientes pasos:

1) Señale las intersecciones con el eje x.

2) Ubique el punto correspondiente al vértice.

3) Complete la parábola respetando la simetría con respecto al eje de simetría.

i) En expresión f(x) = x.(20 - x), obtenga factor común -1 del término correspondiente a la diferencia en el segundo miembro.

Resulta f(x) = ……………………………………………………

Escriba ahora usando la forma $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$.

Observe: Los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$ son ……………………………….

La expresión $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$, siendo a un número real distinto de cero, es la forma factorizada de la función cuadrática.

Los valores x_1 y x_2 son los ceros de la función. Gráficamente son los puntos de intersección con el eje de abscisas.

Actividad 2. En una isla se introduce una cierta cantidad de conejos en agosto de 1999. La función $c(x) = -3.(x + 10).(x - 50)$ permite calcular la cantidad de conejos que hay en la isla x meses después de agosto de 1999.

a) Teniendo en cuenta la forma factorizada de la función cuadrática:

i) ¿Cuál es el valor de a?

ii) ¿Cuáles son los ceros de la función? Verifique analíticamente.

iii) ¿Qué representan los valores del inciso anterior en términos del problema? ¿Ambos tienen sentido en la situación planteada?

b) Partiendo de la forma factorizada, aplique propiedad distributiva para resolver el producto.

$c(x) = -3.(x + 10).(x - 50) \Rightarrow c(x) =$ ....

La función cuadrática puede ser expresada de distintas formas. La ecuación que obtuvo se llama *forma polinomial*.

La generalización de la forma polinomial para cualquier función cuadrática es: $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a, b y c números reales y a distinto de cero.

Los términos de la función reciben los siguientes nombres:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}}$$

En la expresión obtenida con los datos del problema resulta a = ..., b = ... y c = ...

c) Trabajando con la forma polinomial, determine la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas, es decir el valor de la función para x = ……….. ¿Qué representa este valor en el problema?

d) Ubique los datos conocidos en un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Cómo puede obtener a partir de los mismos las coordenadas del vértice? ¿Qué significa este punto en el problema?

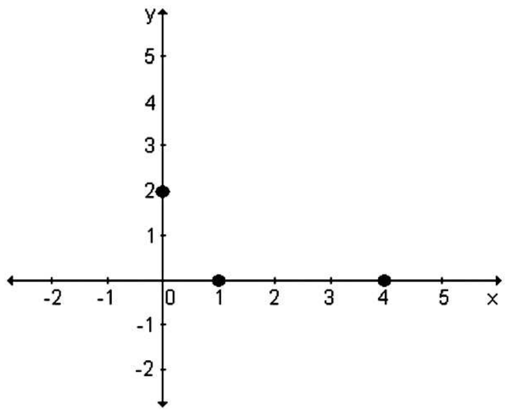
e) Complete la gráfica, dibujando la parábola correspondiente a la función dada pero considerando como dominio y conjunto de llegada todos los números reales.

f) Teniendo en cuenta la situación planteada, que valores puede tomar la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?

g) Defina la función y represente gráficamente.

h) ¿Cuántos conejos había en la isla en enero de 2000?

Actividad 3. Observe el siguiente sistema de coordenadas cartesianas:



a) Determine las coordenadas de los puntos representados gráficamente.

b) A partir de estos datos, escriba la forma factorizada de la ley de la función.

c) Trace el eje de simetría ¿Cuál es su ecuación?

d) Determine las coordenadas del vértice.

e) Trace la parábola cuyas intersecciones con los ejes de abscisas y ordenadas son los puntos representados.

f) Escriba los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

g) La función, ¿presenta valor máximo como los ejemplos de las actividades 1) y 2)? Explique su respuesta.

> Observe:
> Cuando a ...., la parábola se abre hacia .... y presenta un valor máximo.
> Cuando a ...., la parábola se abre hacia .... y presenta un valor mínimo.

Actividad 4. Dada la función f(x): R → R/ f(x) = 2.(x - 3).(x - 3)

a) ¿Cuáles son sus ceros?

b) Determine las coordenadas del vértice de su gráfica.

c) Teniendo en cuenta lo analizado en los incisos **a)** y **b)**, qué puede interpretar con respecto a la representación gráfica?

d) La gráfica de la función abre hacia arriba o hacia abajo? Explique.

e) Determine la ordenada al origen.

f) Con los datos obtenidos, dibuje la parábola.

Actividad 5. Considerando lo analizado en las actividades anteriores:

a) ¿Cuántas parábolas de vértice (-2, 0) puede trazar?

b) Dibuje algunas de ellas.

c) Observando las gráficas, ¿qué características se mantienen? ¿Qué cambia?

d) Teniendo en cuenta la forma factorizada de la ley de una función de segundo grado, ¿qué datos conocemos? ¿Qué datos faltan?

e) Escriba la ley en forma factorizada que describe cualquiera de las parábolas dibujadas.

Actividad 6. Grafique una parábola que cumpla con las siguientes condiciones en cada caso:

a) El vértice es el punto V(2, 4) y el coeficiente del término cuadrático es positivo.

b) El vértice pertenece al tercer cuadrante y el coeficiente del término cuadrático es negativo.

c) El vértice es el punto V(4, -1) y el coeficiente del término cuadrático es negativo.

Observando las gráficas, responda:

i) ¿Puede determinar una característica común a estas parábolas?

ii) ¿Puede escribir la forma factorizada?

Actividad 7. La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad y con velocidad inicial nula, se obtiene para cada instante t (en segundos), mediante la ley $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$, siendo h_0 la posición inicial en metros y g la aceleración de la gravedad, con un valor de 9,8 $\frac{m}{seg^2}$.

a) Escriba la ley que permite determinar la posición en cada instante t de un cuerpo que cae libremente desde 50 metros de altura.

b) Complete la tabla de valores:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Altura (m)					

¿Qué significado tienen los valores de la última columna en el problema?

c) Represente gráficamente la función.

d) Obtenga analíticamente el o los ceros de la función. Interprete en el problema.

e) Escriba en forma factorizada la ley de la función.

f) Determine el dominio y conjunto imagen de la función en el contexto del problema.

Actividad 8. Represente gráficamente dos parábolas con vértice en el origen de coordenadas teniendo en cuenta que una abra hacia arriba y otra hacia abajo.

a) Partiendo de la forma factorizada, deduzca la forma general de la función de segundo grado en estos casos.

b) ¿Qué dato o datos debería conocer para determinar la ley correspondiente a cada gráfica dibujada? Encuentre dicha ley.

—Guía para el docente—

Análisis de las actividades

Actividad 1. A pesar de que la mayoría de las situaciones de variación y cambio de la vida diaria involucran de manera explícita la variable tiempo, esto no significa que no se puedan considerar situaciones que no tengan que ver con esta variable. Muchos problemas comprenden, de manera implícita o explícita, una variable que se comporta como el tiempo y de la cual dependen otras magnitudes en la situación. Estos problemas o situaciones se pueden modelar también variacionalmente.

Un ejemplo de este tipo de situaciones son los problemas de optimización. En esta actividad se presenta un caso: se busca determinar de todos los rectángulos de igual perímetro el o los que tienen área máxima.

De esta manera, no sólo se desarrollan los conceptos relacionados con las funciones, sino que se favorece también el tratamiento de contenidos geométricos y situaciones de gran importancia en matemática, como son los problemas de máximos y mínimos.

A medida que se presentan distintas nociones referidas a la función de segundo grado, se van repasando conceptos generales referidos a las funciones, como dominio y conjunto imagen por ejemplo.

Se trabajan todos los registros: numérico, gráfico, verbal y algebraico, requiriendo la conversión entre varios de ellos.

Para facilitar la resolución del problema se solicita al alumno que, en primer lugar, dibuje diferentes rectángulos que cumplan la condición de que su perímetro sea 40 centímetros.

Esto debe permitirles descubrir la relación entre la base y la altura, condición necesaria para poder contestar las preguntas sobre valores específicos y completar la tabla.

Así, deben descubrir que si la base es de cuatro centímetros, la altura debe ser 16 centímetros. Y a una base de 8 centímetros, le corresponde una altura de 12 centímetros. La tabla completa resulta:

Base (cm)	Altura (cm)	Área (cm²)
2	18	36
4	16	64
6	14	84
7,8	12,2	95,16
9	11	99
10	10	100
13	7	91
14,5	5,5	79,75
16	4	64
17,5	2,5	43,75

Teniendo en cuenta los datos del problema, la tabla y sus conocimientos previos, el alumno puede responder las preguntas del inciso **d)**

i) ¿Cuáles son las variables relacionadas?

La medida de la base, la medida de la altura y del área del rectángulo.

ii) La relación entre el área y la base del rectángulo, ¿corresponde a función? ¿Por qué?

Sí, porque a cada valor de la base le corresponde un único valor de área. Es importante en este momento analizar con los alumnos si este problema responde a alguno de los modelos que describen funciones que fueron estudiados hasta el momento en que se resuelven estas actividades.

iii) Teniendo en cuenta los valores de la tabla, ¿qué dimensiones tiene el rectángulo de mayor área?

El rectángulo de mayor área es el que tiene las mismas medidas de base y altura.

iv) Dado que numerosos valores no fueron considerados. ¿Cómo puede estar seguro de que es la decisión correcta?

No estamos seguros porque podrían considerarse otros infinitos valores para la medida de la base.

Resulta interesante analizar este aspecto, la imprecisión de la tabla para verificar que el valor máximo del área se da cuando la base y la altura son iguales.

Sin utilizar todavía argumentos relacionados con la función cuadrática, se propone la realización de una tabla de valores próximos a 10 que permita intuir la validez de las conjeturas hechas hasta el momento.

Base (cm)	Altura (cm)	Área (cm^2)
9,8	10,2	99,96
9,9	10,1	99,99
9,95	10,05	99,9975
10	10	100
10,05	9,95	99,9975
10,1	9,9	99,99
10,2	9,8	99,96

Con este tipo de trabajo se favorece el tratamiento de un mismo contenido desde diferentes aproximaciones (geométrica, aritmética).

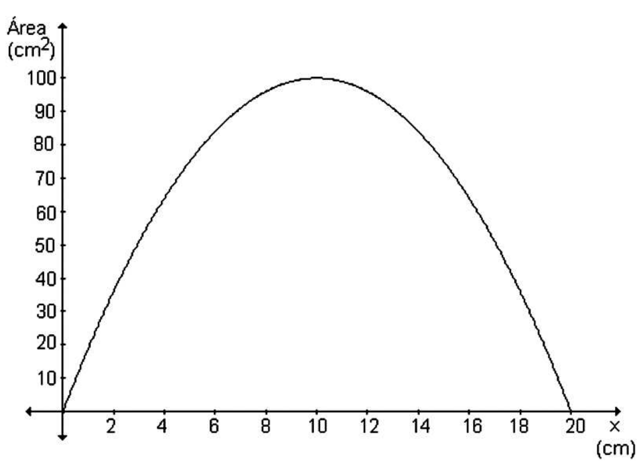
El docente puede aprovechar los datos de la tabla para analizar cada serie de números y trabajar aspectos relacionados con la aproximación a un valor determinado, introduciendo términos específicos como “tiende a…”, “por izquierda”, “por derecha”.

También puede mostrar que las aproximaciones a 10 pueden hacerse tan pequeñas como queramos y de esta manera la medida del área se hará cada vez más próxima a 100. En esta oportunidad, se estará trabajando, en forma intuitiva, el concepto de límite.

Se puede pedir a los alumnos, que completen la tabla con valores más lejanos o más cercanos a 10, y trabajar también la noción de la completitud del conjunto de los números reales.

Volviendo al problema, la última tabla permite intuir la validez de las conjeturas realizadas sobre el rectángulo de área máxima.

La representación gráfica permite corroborar que el área máxima se verifica para un rectángulo de 10 centímetros de base y la misma medida de altura.



Para cumplir con la consigna del problema, se deben confeccionar cuadrados de 10 cm de lado. De esta manera el área será máxima, con un valor de 100 cm^2.

En este caso corresponde unir los puntos ya que ambas variables, la medida de la base del rectángulo y la medida del área, son continuas.

Es importante la reflexión que el docente pueda plantear a sus alumnos sobre la necesidad de complementar el estudio con el análisis analítico de la función.

La tabla de valores da una visión cuantitativa, que se puede interpretar fácilmente desde el punto de vista de una correspondencia, pero plantea muchas dificultades para el análisis de las características globales de una función. La expresión algebraica y la gráfica, proporcionan mayor información, permitiendo una visión más general de la función, tanto de aspectos cuantitativos como cualitativos.

En la situación presentada en esta actividad, es posible generalizar el comportamiento de los valores de las variables involucradas, estableciendo la ley en forma algebraica.

El inciso **f)** se refiere a ese aspecto, la expresión algebraica de la relación entre las medidas de la base, la altura y el área.

Si generalizamos, llamando x al valor de la base, la medida de la altura debe escribirse como 20 - x.

A partir de esas expresiones, resulta que el área del rectángulo viene dado por x.(20 - x).

La ley $f(x) = x.(20 - x)$, expresa el área en función de la base.

La variable independiente (representada por x) es la medida de la base del rectángulo y la dependiente la medida del área. Ambas pueden tomar cualquier valor real positivo. Sin embargo, para que quede definido un rectángulo, la variable independiente toma valores comprendidos entre cero y veinte. Conforme los valores de la variable independiente varían en ese intervalo, la variable dependiente toma valores mayores que cero y menores o iguales que cien.

Luego, el dominio de la función definida para el problema es el intervalo (0, 20) y el conjunto imagen está dado por (0, 100].

Es necesario que el docente repase con los alumnos por qué expresan el dominio como un intervalo abierto y el conjunto imagen como un intervalo semicerrado a derecha.

Teniendo en cuenta dicho dominio y conjunto imagen, la función queda definida de la siguiente manera:

$f: (0, 20) \rightarrow (0, 100] \; / \; f(x) = x \, . \, (20 - x)$

Aplicando propiedad distributiva del producto respecto a la diferencia, obtenemos $f(x) = 20x - x^2$, que es una expresión polinomial de segundo grado.

> La función que estamos trabajando en el problema se llama cuadrática y su representación gráfica es una parábola.

Esta curva tiene determinadas características que no siempre se pueden obtener fácilmente desde la tabla. Es necesario reflexionar con nuestros alumnos, sobre los inconvenientes de construir la gráfica mediante el trazado de puntos. La obtención de una idea confiable de la forma de la curva exige el marcado de gran número de puntos. Igualmente, siempre se corre el riesgo de obtener una visión deformada de la gráfica.

Por eso, en el inciso g), continuamos indagando otras características que ayudan a la construcción de la gráfica.

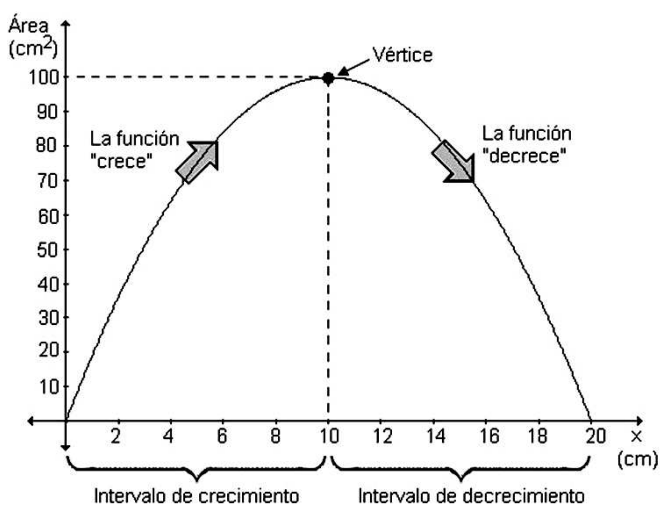
Las preguntas siguientes abarcan otros aspectos variacionales de la función.

i) ¿Cómo varía la base para que el área aumente?	Mientras la base varía de 0 a 10 centímetros, el área aumenta.
ii) ¿Y para que el área disminuya?	Cuando la base varía de 10 a 20 centímetros, el área disminuye.
iii) ¿Para qué valor de x el área no aumenta ni disminuye?	Cuando la base mide 10 centímetros, el área ni aumenta ni disminuye.

Luego, la función es creciente en el intervalo (0, 10) y decreciente en (10, 20). En el punto de abscisa x = 10, la función no crece ni decrece.

El punto de coordenadas (10, 100) es el **vértice** de la parábola.

En x = 10, la función alcanza su valor máximo. El valor máximo es 100.



Todas las parábolas tienen un **eje de simetría** o *espejo* de manera que una parte de la curva se corresponde exactamente con la otra. El vértice de la parábola es el punto que se encuentra sobre el eje de simetría.

Es conveniente que al hablar de simetría se muestren los puntos simétricos respecto al eje. Esta característica facilita la construcción de la gráfica.

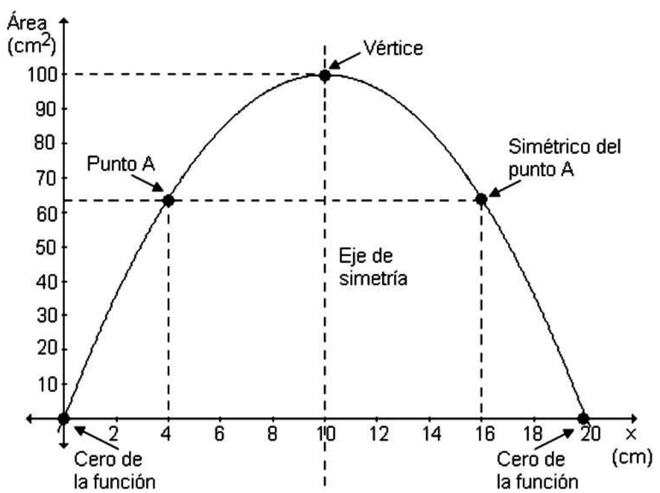
Para la situación planteada en h) es fácil deducir que el área es nula cuando la base mide cero o 20 centímetros.

Este es un buen momento para que el docente se aparte del problema y repase todo lo desarrollado, considerando como dominio de la función a todos los números reales. Los ceros de la función son $x = 0$ y $x = 20$. Gráficamente son las abscisas de los puntos donde la gráfica corta al eje x.

El docente puede disponer de un tiempo para repasar cómo encontrar los ceros de una función analíticamente. Para la función del problema $f(x) = x.(20 - x)$, planteamos la ecuación $0 = x.(20 - x)$.

Al resolverla, es decir, al calcular las raíces de la ecuación, sabremos para qué valores de x, f(x) es igual a cero.

Con los datos trabajados hasta aquí es posible dibujar la gráfica de una función de segundo grado. Marcando el vértice y los ceros de la función, trazando el eje de simetría, se completa la parábola con una curva suave respetando la simetría.



Pasando al inciso i), si se extrae factor obtenga factor común -1 del término correspondiente a la diferencia de la ecuación $f(x) = x. (20 - x)$ se obtiene la expresión factorizada de la función $f(x) = -1. x. (x - 20)$.

Esta expresión es equivalente a $f(x) = -1. (x - 0). (x - 20)$.

En la última ecuación, los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$ corresponden a los ceros de la función, es decir, los puntos donde la parábola interseca al eje x.

El docente debe presentar la forma factorizada de la función, explicando el significado de los distintos valores que aparecen.

Con respecto al coeficiente del término de segundo grado, debe dejar en claro por qué debe ser diferente de cero. Su significado será retomado en otras actividades.

Actividad 2. En la situación presentada se define un modelo de cambio a través de su ley. Las expresiones algebraicas tienen la ventaja de describir con precisión cómo se relacionan las variables. Su estudio permite un análisis y caracterización mucho más profundo de la función.

Se parte de la forma factorizada de la función cuadrática para llegar a la polinomial y estudiar sus características.

Analicemos la secuencia.

a) i) ¿Cuál es el valor de a?	En la ecuación dada, $c(x) = -3.(x + 10).(x - 50)$, se observa que $a = -3$.
ii) ¿Cuáles son los ceros de la función? Verifique analíticamente.	Los ceros de la función son $x_1 = -10$ y $x_2 = 50$. Para verificarlo, calculamos $c(-10)$ y $c(50)$. Al reemplazar x por -10 y luego por 50, obtenemos que ambos valores numéricos son iguales a cero.
iii) ¿Qué representan los valores del inciso anterior en términos del problema? ¿Ambos tienen sentido en la situación planteada?	En el contexto del problema, representan en qué momentos la cantidad de conejos en la isla es nula. En particular $x_1 = -10$ significa que 10 meses antes de agosto de 1999, la cantidad de conejos es cero y el valor $x_2 = 50$ representa que vuelve a anularse 50 meses después. Por el enunciado del problema, conviene hacer coincidir $x = 0$ con el momento en que se introducen los conejos a la isla, es decir agosto de 1999. Luego, no tiene sentido considerar el valor $x_1 = -10$ ni cualquier valor negativo.

b) Partiendo de la forma factorizada, aplicando propiedad distributiva para resolver el producto, podemos obtener $c(x) = -3x^2 + 120x + 1500$.

Esta es la ley de la fundón escrita en **forma polinomial**.

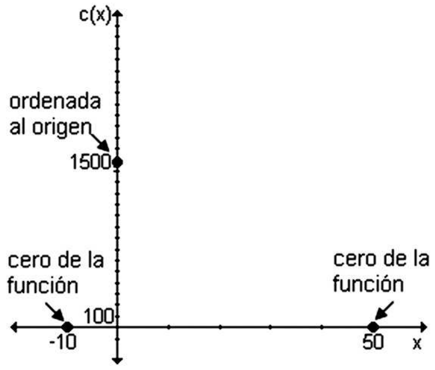
En el ítem c), calculando c(0) = 1500, se obtiene la ordenada al origen de la gráfica de la función. Es importante que el docente muestre que este valor coincide con el término independiente de la ecuación anterior.

Para representarlo en el plano escribimos el punto (0, 1500).

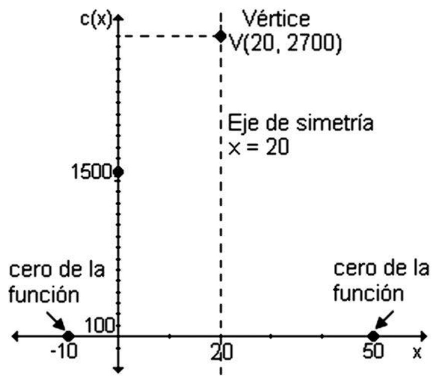
> La **ordenada al origen** es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, es decir f(0) = c.

d) En la gráfica de la derecha representamos los puntos obtenidos.

Por propiedad de simetría de la parábola, el vértice debe estar ubicado sobre la recta vertical que pasa por el punto medio del intervalo determinado por los ceros de la función.



Gráficamente podemos determinar la ecuación del eje de simetría y la coordenada x del vértice. Fácilmente se observa que $20 = \dfrac{-10+50}{2}$.



Para encontrar la ordenada del vértice, hallamos la imagen de la abscisa en la ley de la función.

En la forma factorizada: $c(20) = -3.(20 + 10) . (20 - 50) = 2700$

O bien en la polinomial: $c(20) = -3.20^2 + 120.20 + 1500 = 2700$

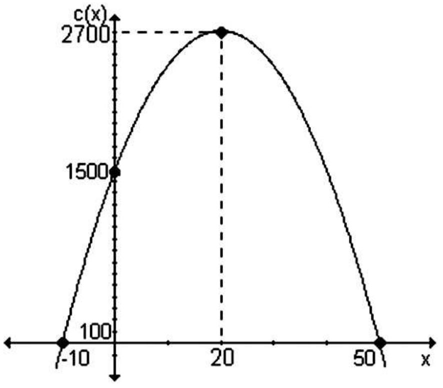
Luego, las coordenadas del vértice son (20, 2700).

En el problema, este punto representa que transcurridos 20 meses desde agosto de 1999, se presenta la cantidad máxima de conejos en la isla que es de 2700.

Para determinar la coordenada x del vértice analíticamente, debemos calcular la semisuma de los ceros de la función.
En general, siendo x_1 y x_2 los ceros de la función, la abscisa del vértice (x_v) se obtiene haciendo: $x_v = \dfrac{x_1+x_2}{2}$
La ordenada del vértice (y_v) se encuentra calculando la imagen de x_v en la función, esto es $y_v = f(x_v)$
Las coordenadas del vértice son $(x_v, f(x_v))$.

e) Con los datos obtenidos hasta el momento, es posible dibujar la parábola.

Considerando como dominio y conjunto de llegada de la función todos los reales, se obtiene:



f) Dado que la variable independiente está expresada en meses, puede tomar en principio todos los números reales mayores o iguales que cero.

Para valores de x mayores a 50, la función toma valores negativos, lo cual no tiene sentido, ya que representa cantidad de conejos.

Luego la variable independiente toma los valores del intervalo [0, 50].

A medida que x toma valores en este intervalo, la cantidad de conejos toma valores enteros mayores o iguales que cero y menores o iguales que 2700, con estos valores incluidos.

g) Para definir la función en el contexto del problema, debemos determinar en primer lugar el dominio de la función. Según lo trabajado en el inciso anterior el mismo es el intervalo [0, 50].

Como conjunto de llegada de la función podemos considerar al conjunto de los números naturales, o bien un subconjunto del mismo, por ejemplo, el determinado por todos los números naturales mayores o iguales que cero y menores o iguales que 2700.

De esta manera podemos definir la función:

$c: [0, 50] \rightarrow N \ / \ c(x) = -3.(x + 10).(x - 50)$, si escribimos la ley en forma factorizada. O bien:

$c: [0, 50] \rightarrow N \ / \ c(x) = -3x^2 + 120x + 1500$, si la escribimos en forma polinomial.

Teniendo en cuenta el enunciado del problema la gráfica de la función se ubicaría en el primer cuadrante. Surge además la dificultad de que la variable dependiente es discreta. Es evidente que la cantidad de conejos no puede tomar un valor que no sea entero positivo o cero.

Esto implica que no podemos unir los pares de valores que pertenecen a la función con un trazo continuo.

Sin embargo, en muchos casos como el de nuestro ejemplo, es imposible dibujar todos los puntos que pertenecen a la función, por lo que se toma la decisión de dibujar la parábola, a veces con líneas de puntos o directamente con trazo continuo.

Este último caso es común en muchas aplicaciones y resulta importante a los fines prácticos, para poder realizar mejores análisis de dichas funciones. Es necesario tener presente esta situación al momento de la elaboración de las conclusiones.

Si bien el problema de la continuidad es complejo, trabajando con problemas concretos las dificultades se atenúan. Conviene introducir siempre situaciones variadas e ir profundizando el análisis a medida que el aprendizaje progresa.

h) Para calcular la cantidad de conejos que había en la isla en enero de 2000, debemos tener en cuenta lo siguiente: dado que $x = 0$ corresponde a agosto de 1999, enero de 2000 corresponde a $x = 5$.

Por lo tanto debemos determinar el valor numérico de la función para dicho valor de la variable independiente, usando cualquiera de las dos expresiones encontradas para la función.

$c(5) = -3.(5 + 10).(5 - 50) \Rightarrow c(5) = 2025$

En enero de 2000, transcurridos cinco meses desde la introducción de los conejos en la isla, hay en la misma 2025 conejos.

Actividad 3. En esta actividad se repasan los contenidos desarrollados en las actividades anteriores, pero la parábola presentada abre hacia arriba, por lo que la función no presenta valor máximo sino mínimo.

Los datos son dados en este caso gráficamente. El alumno debe ser capaz de, a partir de la lectura de la gráfica, obtener los datos que necesita para construir la expresión algebraica de la función.

Los puntos representados son la ordenada al origen, de coordenadas (0, 2) y las abscisas al origen, de coordenadas (1, 0) y (4, 0).

A partir de los puntos de intersección con el eje x, puede marcar el eje de simetría. Puede determinar también el punto simétrico a la ordenada al origen.

Para el inciso b) se sugiere que el docente deje unos minutos para ver qué intentan para su resolución.

Puede guiar el trabajo con preguntas como:

- ¿Cómo escribimos en general la forma factorizada de una función?
- ¿Qué datos conocemos?
- ¿Cuáles podemos reemplazar directamente en la fórmula anterior?
- ¿Qué valor falta calcular?
- Conocido un punto que pertenece a la gráfica de la función, ¿qué implica esto con respecto a su ley?

Si los alumnos han trabajado este tipo de actividad anteriormente, con otras funciones, podrán resolverla sin dificultad. En caso contrario, el docente deberá desarrollarla en el pizarrón.

Reemplazando los ceros en la expresión factorizada resulta $f(x) = a.(x-1).(x-4)$

Como la ordenada al origen corresponde a un punto que pertenece a la parábola, verifica la ecuación. Por lo tanto podemos reemplazar x = 0 e y = 2 y determinar el valor de a.

Resulta $2 = a.(0-1).(0-4) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

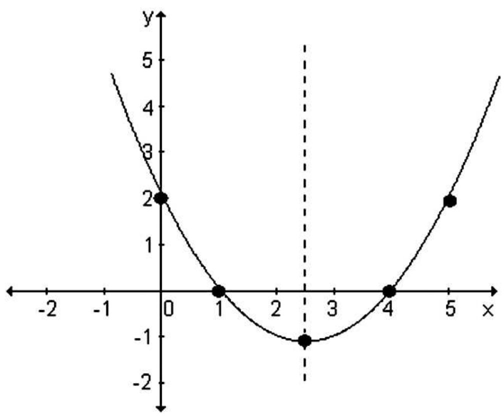
Con este valor de a, la forma factorizada de la función resulta:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)$$

La ecuación del eje de simetría puede ser obtenida de la observación de la gráfica o analíticamente. La misma es $x = \frac{5}{2}$.

Por lo tanto, la abscisa del vértice es $x_V = \frac{5}{2}$. Para hallar la ordenada reemplazamos en la ley de la función y obtenemos $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{8}$.

La representación gráfica resulta:



En el inciso f) se solicita los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Los alumnos tienen dificultades para interpretar que deben determinar los intervalos de variación de la variable independiente. Suelen dar como respuesta los intervalos de variación de la variable dependiente que corresponden a los tramos donde la función crece o decrece.

La función presentada en esta actividad presenta un valor mínimo ya que abre hacia arriba. Dicho valor se alcanza en el vértice.

Es decir, la función tiene valor mínimo que es $y = -\frac{9}{8}$ y se alcanza en $x = \frac{5}{2}$.

Actividad 4. Esta actividad permite seguir revisando la forma factorizada de la función cuadrática y los elementos que se pueden extraer desde la misma para llegar a la representación gráfica. En este caso los datos son presentados en forma algebraica, a través de la ley de la función.

Teniendo en cuenta que $f(x) = 2.(x - 3).(x - 3)$, se puede deducir que los ceros de la función son iguales a tres. Si se trabajó anteriormente la resolución de la ecuación cuadrática, el docente puede recordar en este momento que este caso corresponde a una ecuación con raíces iguales. Es decir, la ecuación $2.(x - 3).(x - 3) = 0$ tiene una raíz doble.

Esto significa que la gráfica de la función corta al eje de abscisas en un solo punto, $x = 3$.

A partir de esta observación, el alumno debe ser capaz de interpretar gráficamente, que el punto de abscisa tres debe corresponder al vértice de la parábola.

Si procede analíticamente, puede comprobarlo: $x_V = \frac{3+3}{2} = 3$.

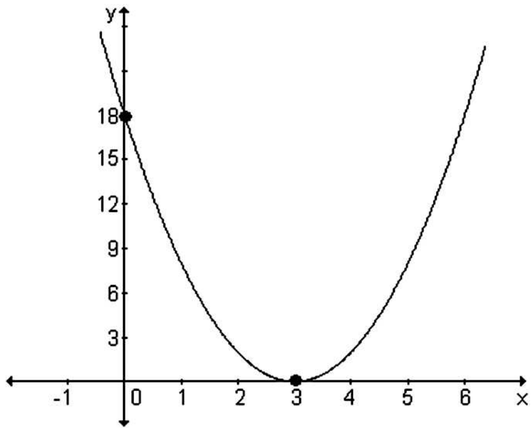
Para hallar la ordenada, puede reemplazar en la ley de la función y calcular que f(3) = 0.

Luego el vértice es el punto (3,0).

Los puntos donde la gráfica corta al eje de abscisas y el vértice de la parábola coinciden.

En el inciso **e)** se les solicita la ordenada al origen, que es f(0) = 18.

Con todos los datos obtenidos, puede dibujar la gráfica de la función.



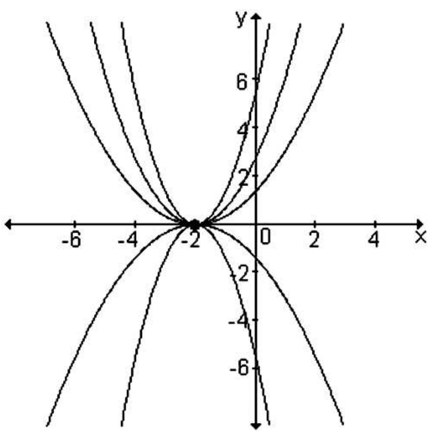
Actividad 5. En esta actividad se sigue trabajando la influencia del coeficiente del término de segundo grado en la gráfica de la función. En una actividad anterior se analizó la influencia del signo, en ésta la de su valor absoluto.

Se requiere la movilización entre los registros gráfico, verbal y algebraico.

Se pueden trazar infinitas parábolas de vértice (−2, 0).

Además del vértice, todas comparten el eje de simetría.

La característica que varía es la abertura de las ramas de las parábolas. Algunas son más abiertas, otras más cerradas. Algunas abren hacia arriba, otras hacia abajo.



Teniendo en cuenta que el vértice coincide con los ceros de la función, la ley que la define tiene la forma: $f(x) = a.(x + 2).(x + 2) = a.(x + 2)^2$.

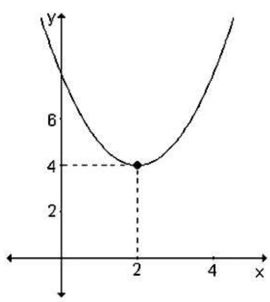
A medida que el valor de "a" cambia, obtenemos parábolas diferentes.

¿Cómo debe ser el valor de "a" para que la parábola abra hacia arriba? ¿y para que abra hacia abajo?

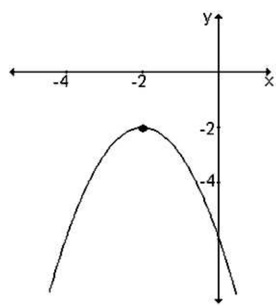
La incidencia de la variación de este parámetro se seguirá analizando en otras actividades.

Actividad 6. En esta actividad se trata el caso de que la gráfica de la función de segundo grado no interseca al eje x. A partir de datos dados desde el registro verbal, los alumnos deben representar gráficamente las distintas parábolas.

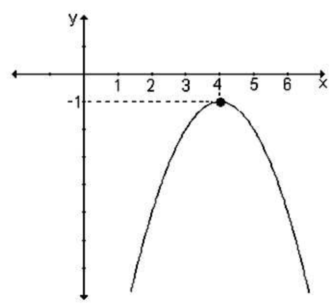
En cada caso se da como dato el vértice, o su posición, y el signo del parámetro a. Una gráfica posible para cada ítem se muestra a continuación:



$V(2, 4)$ y $a > 0$



$V \in$ III cuadrante y $a < 0$



$V(4, -1)$ y $a < 0$

Ninguna de las parábolas corta al eje de las abscisas. Esto significa que la ecuación cuadrática asociada a la ley de la función no tiene ceros reales. No es posible escribir la forma factorizada de la ley trabajando con números reales.

La forma de trabajo de esta actividad dependerá si las ecuaciones cuadráticas fueron estudiadas con anterioridad, si se pretende desarrollar el tema en simultáneo o posteriormente.

El docente puede aclarar que las raíces de la ecuación son números complejos cuyo estudio se profundizará en otro momento.

Actividad 7. Se plantea una situación problemática del contexto de la física, en la que se presenta la forma polinomial de la función. Se interpreta la situación desde los registros numérico y gráfico.

Sabiendo que el cuerpo cae desde 50 metros de altura y $g = 9{,}8 \dfrac{m}{seg^2}$, la ley de la función es $h(t) = 50 - 4{,}9t^2$.

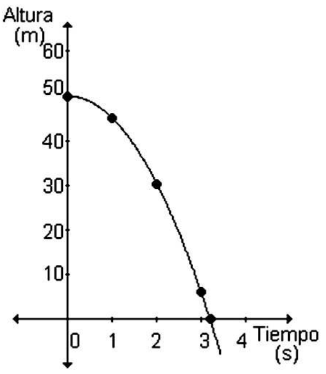
Con la misma, los alumnos pueden completar la tabla de valores.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Altura (m)	50	45,1	30,4	5,9	–28,4

Dado que el último valor, correspondiente a la altura a los cuatro segundos, es negativo, se interpreta que en este instante el cuerpo ya estaba en el piso. Teniendo en cuenta la posición del cuerpo a los tres segundos, se deduce que el cuerpo toca el piso en determinado momento comprendido entre los dos valores de la variable independiente.

Debido a que la variable independiente representa tiempo transcurrido desde que comienza a caer el cuerpo, para la representación consideramos valores reales mayores o iguales a cero.

Uniendo los puntos correspondientes a los valores de la tabla, obtenemos la siguiente gráfica:



En el dibujo el alumno puede visualizar lo analizado antes numéricamente. En determinado instante comprendido entre los tres y cuatro segundos, el cuerpo toca el piso.

Luego de ese instante no tiene sentido en la gráfica continuar la curva.

Para obtener analíticamente los ceros de la función planteamos la ecuación $h(t) = 0$, de donde $50 – 4{,}9t^2 = 0$.

Resolviendo encontramos que, aproximadamente, $t = 3{,}19$ o bien $t = –3{,}19$.

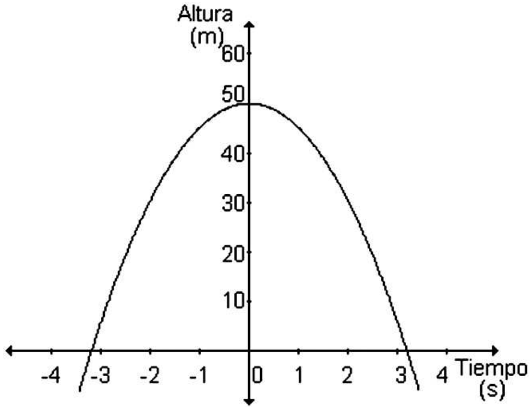
En el contexto del problema, el cuerpo toca el piso a los 3,19 segundos aproximadamente.

La forma factorizada de la función es $h(t) = – 4{,}9\ (t + 3{,}19).(t – 3{,}19)$

El dominio de la función resulta, para el problema, el intervalo [0; 3,19] y el conjunto imagen el intervalo [0; 50].

El docente puede aprovechar este ejemplo para trabajar otros aspectos de la función cuadrática.

Tomando como dominio todos los reales, la representación gráfica resulta:



Cuando la función tiene ceros opuestos, la gráfica resulta simétrica respecto al eje de ordenadas. El vértice de la parábola, en nuestro caso el punto de coordenadas (0, 50), coincide con la ordenada al origen.

Actividad 8. Esta actividad tiene como objetivo determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen como vértice el origen de coordenadas.

Dado que el vértice se ubica sobre el eje de abscisas, en particular el origen, el mismo coincide con los ceros de la función, por lo que la función tiene dos ceros iguales $x_1 = x_2 = 0$.

Reemplazando en la forma factorizada obtenemos $f(x) = a\,(x - 0)\,(x - 0)$, de donde $f(x) = ax^2$.

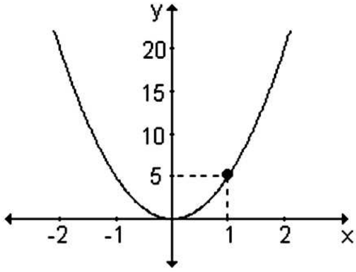
Su gráfica es una parábola simétrica respecto al eje de ordenadas.

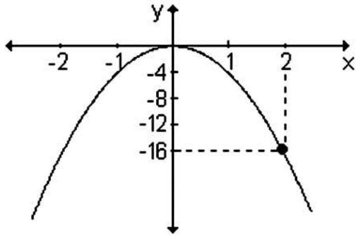
El docente puede trabajar numéricamente este aspecto para reforzar la comprensión. A partir de una tabla de valores los alumnos pueden observar que, dado que la variable independiente está elevada al cuadrado, las imágenes son iguales (y además siempre positivas) para cualquier valor de x y su opuesto.

El signo de a es el que determina el signo de la imagen, ya que al multiplicar por ese valor las imágenes serán todas positivas si a es mayor que cero y negativas en caso contrario.

Nuevamente se observa cuándo la parábola abre hacia arriba y cuándo hacia abajo.

A continuación se grafican dos ejemplos, uno de cada caso.





Para determinar su ley, podemos dar como dato las coordenadas de otro punto que pertenezca a la gráfica de la función.

El punto (1, 5) pertenece a la primera parábola. Reemplazando $x = 1$ e $y = 5$ en $f(x) = ax^2$ se obtiene $a = 5$, por lo que la ley de la función es $f(x) = 5x^2$.

Análogamente, conociendo que el punto (2, –16) verifica la ecuación, se obtiene $f(x) = -4x^2$ para el segundo caso.

—Actividades complementarias —

Los problemas de la guía tienen como propósito afianzar los conceptos y aplicaciones desarrollados. Se incluyen las respuestas para poder verificar logros y avanzar en el estudio del tema.

Problema 1. La empresa Agromax lanzó al mercado un nuevo fertilizante. De inmediato, su competencia, Nuevo Horizonte, hizo lo mismo con un producto con los mismos beneficios. Esta situación determinó que Agromax, empezara a disminuir el precio de venta de su producto hasta reposicionarlo en el mercado.

El precio p (en pesos por litro) del fertilizante durante el primer año pudo modelizarse mediante la siguiente ley: $p(x) = 2x^2 - 16x + 75$, donde x indica el tiempo en meses.

a) ¿Cuál fue el precio del fertilizante por litro en el momento del lanzamiento? ¿Y a los dos meses?

b) ¿Cuál habrá sido el porcentaje de rebaja a los tres meses de lanzado el producto?

c) Compare el precio por litro del fertilizante en el momento que se puso a la venta con su precio a los ocho meses.

d) Grafique la función

e) ¿Cuál fue su mínimo precio por litro? ¿En qué mes?

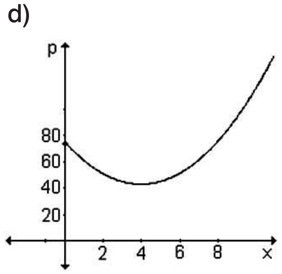
Respuestas

a) El precio del fertilizante por litro en el momento del lanzamiento fue de \$ 75 y a los dos meses de \$ 51.

b) El porcentaje de rebaja a los tres meses de lanzado el producto fue del 40%.

c) A los ocho meses el precio era el mismo que al momento del lanzamiento, \$ 75.

d)



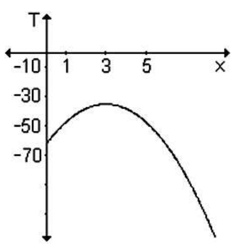
e) A los cuatro meses se obtuvo el precio más bajo por litro, $ 43.

Problema 2. En una granja acuícola se crían pejerreyes en grandes tanques de agua. Uno de estos peces observa que ha quedado alimento sobre una malla que se encuentra a 35 cm debajo de la superficie del agua y se lanza hacia él. La trayectoria que le permite alcanzar dicho alimento sigue alguno de los siguientes modelos, donde las trayectorias están dadas en centímetros:

$T_1(x) = -3x^2 + 18x - 62$
$T_2(x) = -3x^2 + 18x - 63$
$T_3(x) = -3x^2 + 18x - 64$

a) ¿Con cuál de las tres trayectorias alcanzará el alimento sin necesidad de mover la malla?
b) Realice el gráfico correspondiente a la trayectoria elegida.

Respuestas
a) La trayectoria elegida es la T_1
b)



Problema 3. Una industria produce quesos roquefort en hormas circulares, cuyos diámetros (en centímetros) son números enteros desde 15 a 35 inclusive. El precio p (en pesos por queso) en función del diámetro d sigue el siguiente modelo:

$$p(d) = \frac{2}{5}\left(d - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{279}{6}$$

a) ¿Cuál es el precio de un queso de 0,16 m de diámetro?
b) ¿Y el de un queso de 28 cm de diámetro?
c) Si un cliente tenía $100 para comprar un queso, ¿cuál es el diámetro del mayor queso que pudo adquirir?
d) ¿Cuál es el dominio en el contexto planteado inicialmente?
e) Realice el gráfico correspondiente. ¿Podemos representar la función con un trazo continuo?

Respuestas

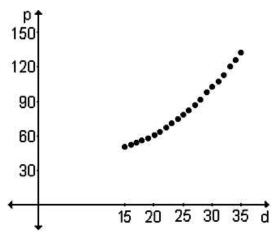
a) El precio del queso de 0,16 m de diámetro es aproximadamente $ 52,13.

b) El precio del queso de 0,28 m de diámetro es aproximadamente $ 92,13.

c) El cliente pudo adquirir un queso de 29 cm de diámetro.

d) El dominio está formado por todos los números enteros mayores o iguales que 15 y menores o iguales que 35.

e) Dado que el dominio lo constituyen puntos aislados, no podemos representar a la función con un trazo continuo.



Problema 4. La Organización Mundial de la Salud aconseja que hay que tener un índice de masa corporal entre 18 y 25 para tener buena salud; que una masa corporal menor a 18 indica "infrapeso"; más de 18 peso normal y por encima de 25, sobrepeso u obesidad. La función $p(h) = 20\ h^2$ relaciona el peso p (en kilogramos) de una persona con su altura h (en metros), para un índice de masa corporal (IMC) igual a 20.

a) ¿De qué tipo de función se trata?

b) Represente la función gráficamente.

c) En el parque Divertilandia, para subirse a la más grande de las montañas rusas, se debe tener entre 1,25 m y 1,80 m inclusive de estatura. ¿Cuál es el peso mínimo que debe tener cada persona que se suba a esta montaña para que pueda considerarse saludable según la función p?

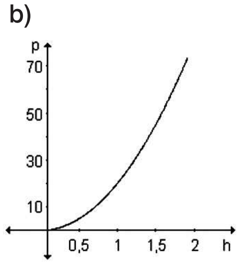
d) ¿Cuál es el peso máximo que tendrá que soportar el juego del ítem **c)** si se quieren subir 20 personas según la función p?

e) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función p en el contexto del inciso **c)**?

Respuestas

a) Se trata de una función de segundo grado o cuadrática.

b)



c) El peso mínimo es de 31.25 kg.
d) El máximo peso que tendrá que soportar es de 1296 kg.
e) D = [1,25;1,80] CI = [31,25;64,8]

Problema 5. En la empresa Lechísima se pretenden renovar los envases de leche entera, por envases con forma de prismas de base cuadrada que tienen 15 cm de altura.

a) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el volumen de dichos envases en centímetros cúbicos en función de la arista l de la base?

b) Si se decide que el volumen adecuado de los envases es de 1,215 litros. ¿Qué largo tendrían que tener las etiquetas de dichos envases si se pretende rodearlos completamente?

Respuestas
a) $v = 15\ l^2$
b) Las etiquetas tendrían que tener 36 cm de largo.

Problema 6. Rodríguez es ingeniero agrónomo y tiene un problema con un cliente que le encargó semillas de maíz para sembrar. Cufia, su cliente, le encargó semillas para sembrar un campo cuadrado de 1,2 km de largo, por un monto de $21 600. Pero luego cambió de opinión ya que pudo alquilar el campo contiguo y le pidió que le vendiera semillas para una superficie total cuyas longitudes son exactamente el doble del campo inicial. Cufia está dispuesto a pagar por la nueva compra $43 200 pero Rodríguez dice que el precio es el doble de lo que le está ofreciendo su cliente. ¿Quién tiene razón? Justifique la respuesta.

Respuesta
El ingeniero agrónomo Rodríguez tiene razón. Al duplicarse la medida del lado, el área se cuadriplica.

Los ángulos y sus medidas

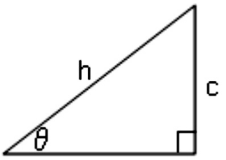
Silvia Vrancken, Adriana Engler y Daniela Müller
Universidad Nacional del Litoral

Los ángulos son los principales elementos al trabajar en trigonometría. Los mismos se miden usando diferentes sistemas. Las dos unidades más comunes son el grado y el radián.

En la escuela primaria, nuestros alumnos han estudiado seguramente el sistema sexagesimal de medición de ángulos. En algunas situaciones surge el problema de que las unidades de grados no tienen relación matemática con otras unidades de medición. Nos planteamos preguntas como: ¿qué relación tienen los 360º de un círculo y la unidad que mide el radio?, ¿qué tan grandes son 360º?

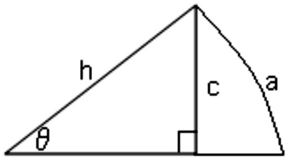
Aparece la necesidad de definir un nuevo sistema de medición para resolver numerosos problemas en matemática y otras ciencias.

En el triángulo rectángulo de la figura, la razón entre h y c es independiente del tamaño del triángulo (teniendo en cuenta las características de los triángulos semejantes).



Esta propiedad permitió a los primeros ingenieros, calcular las proporciones de los triángulos en pequeña escala antes de aplicarlos en triángulos mucho más grandes.

Para los astrónomos que observan el movimiento celeste, fue mucho más interesante el dibujo ampliado del triángulo.



En este dibujo, θ es un ángulo central de un círculo de radio h que interseca a un arco de circunferencia de longitud a.

Si θ mide por ejemplo 50º, llamamos a a un “arco de 50 grados” por su asociación directa con el ángulo central θ, pero a también tiene una longitud que puede medirse en las mismas unidades que las otras longitudes del dibujo.

De esta manera, es natural pensar que el ángulo está determinado por el arco en lugar de que el arco está determinado por el ángulo. Esto conduce a la medida en radianes.

En este apartado revisaremos algunas cuestiones básicas referidas a los ángulos y cómo medirlos.

Objetivos

- Utilizar el concepto y notación de los ángulos.
- Utilizar correctamente las unidades de medida de los ángulos en grados y en radianes.
- Convertir la medida de un ángulo en grados a radianes y viceversa.

Contenidos a desarrollar

Definición de ángulo. Sistema sexagesimal y sistema radial de medición de ángulos. Longitud de un arco de circunferencia.

Contenidos previos necesarios

Ángulos. Sistema sexagesimal de medición de ángulos. Circunferencia y círculo. Ángulo central de una circunferencia. Sector circular.

Metodología sugerida para la implementación de la secuencia

A partir de un problema práctico, se presenta una serie de preguntas y actividades. Las primeras tienen el propósito de investigar y repasar algunos conocimientos previos que se necesitan para el desarrollo del tema. Las actividades están diseñadas para alentar a los alumnos a experimentar, preferentemente en grupos, de manera de llegar a comprender y afianzar la noción de radián.

—Guía para el alumno—

En este apartado estudiaremos algunas cuestiones referidas a los ángulos y cómo medirlos.

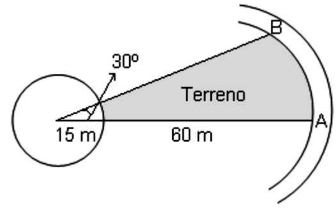
Actividad 1. Un agricultor planea probar una nueva variedad de maíz. Para ello dispone de un terreno como el de la figura.

El costo por metro cuadrado de la semilla es aproximadamente $ 0,04.

¿Cuál es el área disponible para sembrar?

¿Cuál es el costo de la semilla que se debe utilizar?

Para poder responder estas preguntas, revisaremos en primer lugar algunas nociones relacionadas.



a) ¿Qué forma tiene el terreno? ¿Cómo se calcula el área de esa figura?

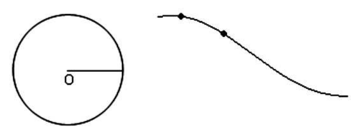
b) i) ¿A qué se llama ángulo?

ii) ¿Qué sistemas de medición de ángulos conoce?

c) i) Sobre un papel, con el borde de un objeto de forma cilíndrica dibuje una circunferencia.

ii) Marque el centro (O) y un radio de la circunferencia.

iii) Sobre un hilo o una cuerda señale la longitud del radio.



iv) Coloque el borde de la lata sobre la circunferencia, enrolle el hilo alrededor de la lata, señale sobre el papel los dos puntos correspondientes a los extremos del radio marcados sobre el hilo. Llámelos A y B.

v) Trace los radios que pasan por A y por B.

vi) De la misma manera, con el hilo y la lata, marque ángulos de 2 radianes, 3 radianes y 5 radianes.

vii) ¿Cuál es la longitud de la circunferencia en términos de su radio r? ¿Cuántos radianes debe haber en un círculo completo? Compruébelo con el hilo.

d) Resuelva el problema planteado al inicio de esta actividad.

Actividad 2. Complete la siguiente tabla.

Ángulo (en grados)	Razonamiento	Cálculos	Ángulo(en radianes)
360º	Giro completo	—	2π
180º	180 es la mitad de 360	Si se divide 360 por 2, también se divide 2π por 2. $\frac{2\pi}{2}=\pi$	π
90º			
60º			
45º			
30º			
270º			

Actividad 3. Complete la siguiente tabla.

Ángulo (en radianes)	Razonamiento	Cálculos	Ángulo (en grados)
2π	Giro completo	—	360º
π			
3π	3 veces π	3. 180º	540º
$\frac{3}{2}\pi$			
$\frac{5}{6}\pi$			
$\frac{3}{4}\pi$			

Actividad 4. Si θ es un ángulo central de una circunferencia de radio r y s la longitud del arco de la circunferencia que interseca, complete la siguiente tabla.

s	r	θ
	6 cm	20 rad
4 cm		$\frac{\pi}{3}$ rad
4 m	2,5 m	
20 cm		30º
	12 cm	18º

Actividad 5. Un arco de circunferencia que corresponde a un ángulo central de 120º tiene una longitud de 8 cm. ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia a la que pertenece el arco?

Actividad 6. Determine el perímetro de una porción de pizza grande cuyo ángulo mide 60º y su radio mide 16 cm.

Actividad 7. Las circunferencias concéntricas de un blanco están separadas por 10 cm. La longitud de la circunferencia interna es 96 cm. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia próxima más alejada?

Actividad 8. El ángulo central θ interseca a los arcos s_1 y s_2 de dos circunferencias concéntricas con radios r_1 y r_2 respectivamente. Complete la tabla que sigue. Exprese la medida del ángulo en radianes y en grados.

θ	r_1	s_1	r_2	s_2
	10 cm	8 cm	35 cm	
	5 km	26 km		52 km

—Guía para el docente—

Análisis de las actividades

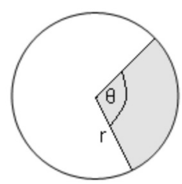
Actividad 1. Un agricultor planea probar una nueva variedad de maíz. Para ello dispone de un terreno como el de la figura. El costo por metro cuadrado de la semilla es aproximadamente $ 0,04. ¿Cuál es el costo de la semilla que se debe utilizar?

Para poder responder a esta cuestión, debemos conocer en primer lugar el área de la zona que va a sembrar el agricultor.

En la figura se observa que el terreno es una parte de un sector circular.

Recordemos:
La región sombreada en el círculo de radio r determinada por el ángulo central θ, se conoce como **sector circular**.
El área del sector circular de radio r y ángulo central θ, es

$$A = \frac{r^2\theta}{2}$$



Es evidente en este problema que el ángulo no se puede medir en grados, ya que esta unidad no tiene ninguna relación con la que se mide el radio.

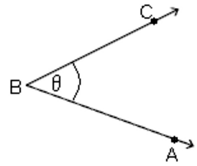
Para utilizar la fórmula de área es necesario que el ángulo esté medido en radianes.

Ángulos

En la geometría plana generalmente se define el ángulo de una manera estática, como el conjunto de puntos determinados por dos semirrectas que tienen el mismo origen.

Este origen común se llama vértice del ángulo y las dos semirrectas se llaman lados del ángulo.

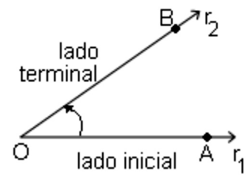
El ángulo θ de la figura tiene vértice B y lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. El ángulo suele llamarse también $A\hat{B}C$ o $C\hat{B}A$.



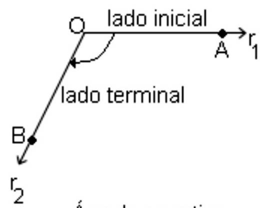
Otra forma de definir un ángulo, la dinámica, es usada en trigonometría. En ésta, se interpreta a los ángulos como rotaciones de semirrectas.

Un ángulo θ es generado por un lado, llamado lado inicial, en posición fija, y un segundo lado, el terminal, parte de la misma posición del lado inicial y gira en el plano alrededor del vértice hasta que alcance su posición final.

Si el sentido de rotación es contrario a las agujas del reloj, el ángulo se considera positivo, y si la rotación es en el sentido de las agujas se lo considera negativo.



Ángulo positivo



Ángulo negativo

Medida de un ángulo

Intuitivamente, cuando hablamos de la medida de un ángulo nos referimos a la “abertura” del ángulo.

Decimos que la medida de un ángulo es cuánto debe girar la semirrecta r_1 para coincidir con r_2.

Una unidad de medición de ángulos es el grado. Para que un ángulo mida un grado el lado inicial debe girar $\frac{1}{360}$ de un giro completo.

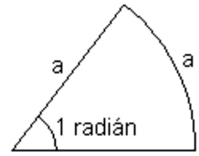
En el sistema DMS (Degrees-Minutes-Seconds, grados-minutos-segundos) de la medida angular, cada grado (simbolizado con ^{o}) está subdividido en 60 minutos (simbolizados con ´) y cada minuto está subdividido en 60 segundos (simbolizados con ´´).

Nota. La idea de dividir un círculo en 360 partes iguales se remonta al sistema sexagesimal, base 60, de los antiguos sumerios. El atractivo fue que 60 es divisible por muchos números (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30). En los primeros cálculos astronómicos se empleó el sistema sexagesimal para la medición de los círculos.

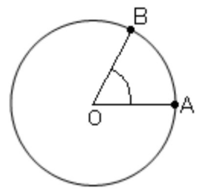
En algunas ramas de la matemática se utiliza una manera más natural de medir los ángulos, la medida en radianes. La abertura de un ángulo se mide a lo largo del arco de un círculo con centro en el vértice del ángulo.

Definición de radián

Un ángulo central de una circunferencia mide un radián (abreviado rad) si la longitud del arco que interseca tiene la misma medida que el radio.



El ángulo central AÔB es un radián.



El ángulo central AÔB es un **radián** si la longitud del arco AB es igual a la del radio de la circunferencia.

La actividad planteada en el inciso **c)** tiene como finalidad que los alumnos exploren de manera de llegar a construir un ángulo de un radián.

La misma se podría realizar dibujando directamente la circunferencia con compás, lo que facilita la identificación del centro, pero el trabajo con el objeto cilíndrico, por ejemplo una lata, hace más sencillo el marcado posterior de los ángulos.

El punto **vii)** tiene como objetivo que los alumnos descubran la relación entre los grados y radianes.

Por un lado conocen que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ (siendo r el radio de la circunferencia). Luego, dado que al arco de longitud igual al radio corresponde el ángulo de un radián, a la circunferencia completa corresponde un ángulo de 2π radianes.

Con el hilo, pueden comprobar que la circunferencia tiene una longitud de algo más de 6 radianes.

Relación entre grados y radianes

Dado que un giro completo medido en grados es 360° y medido en radianes es 2π rad, entonces:

$360° — 2\pi$ rad

A partir de este resultado se pueden obtener distintas relaciones:

$180° — \pi$ rad

$1° — \dfrac{\pi}{180}$ rad

Conviene recordar especialmente la relación 180º — π rad, porque a partir de ella se puede obtener la medida en radianes de cualquier ángulo.

De manera similar es posible convertir ángulos medidos en radianes a grados.

$$1 \text{ rad} — \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

También es importante, especialmente para la resolución de los problemas, mostrar que:

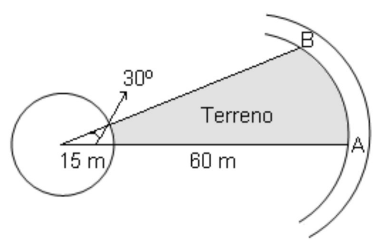
360º = 2π rad ≈ 6,28 rad

O bien: 180º = π rad ≈ 3,14 rad

Con lo estudiado hasta el momento, es posible resolver el problema planteado al inicio.

Para responder a la pregunta: ¿cuál es el área disponible para sembrar?, los alumnos investigaron anteriormente que la forma del terreno es una parte de un sector circular.

Su área puede obtenerse calculando la diferencia entre el área del sector correspondiente a un ángulo central de 30º de una circunferencia de 75 m de radio y el área de otro sector del mismo ángulo pero de una circunferencia de 15 m de radio



Teniendo en cuenta que el área de un sector circular viene dada por la fórmula $A = \frac{r^2\theta}{2}$, donde r es el radio del círculo y θ el ángulo central, podemos calcular el área de la región sombreada.

Nota. Al aplicar la fórmula anterior, es importante asegurarse que el ángulo θ esté medido en radianes.

En primer lugar convertimos el ángulo de 30º a radianes. Dado que 180º corresponde a π radianes y que 30º es la sexta parte de 180º, luego:

$$30^{\circ} — \frac{1}{6}\pi$$

Esta es la medida en radianes del ángulo central de cada sector circular.

Entonces, el área del sector del círculo de 75 m de radio es:

$$A_1 = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(75)^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 1472{,}62$$

Luego, el área es aproximadamente es 1473 m^2.

Nota. La unidad con la que se mide el ángulo es un número puro o “sin dimensiones”. Por eso, a menudo se omite la palabra *radián* cuando se trabaja con medida de ángulos, salvo que se desee tener más claridad.

De esta manera si un ángulo mide 1 radián, se escribe $\theta = 1$. No se confunde con la medida en grados, porque si θ está en esta unidad se escribe $\theta = 1^{o}$.

Para el sector del círculo de radio 15 m, obtenemos:

$$A_2 = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2}(15)^2 \left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 58{,}9$$

El área de este sector es aproximadamente 59 m^2.

Luego, el área del terreno es aproximadamente 1414 m^2.

Dado que el costo por metro cuadrado de la semilla es aproximadamente \$0,04, entonces el costo total de la semilla que se debe utilizar será aproximadamente \$56,60.

Las actividades **2)** y **3)** tienen como objetivo trabajar las conversiones entre grados y radianes. A continuación aparecen las tablas completas de cada una. Para los razonamientos y los cálculos son posibles distintas respuestas.

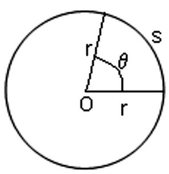
Ángulo (en grados)	Razonamiento	Cálculos	Ángulo (en radianes)
360^{o}	Giro completo	—	2π
180^{o}	180 es la mitad de 360.	Si se divide 360 por 2, también se divide 2π por 2. $\frac{2\pi}{2} = \pi$	π
90^{o}	90 es la mitad de 180.	Si se divide 180 por 2, también se divide π por 2.	$\frac{\pi}{2}$
60^{o}	60 es la tercera parte de 180.	Si se divide 180 por 3, también se divide π por 3.	$\frac{\pi}{3}$
45^{o}	45 es la mitad de 90.	Si se divide 90 por 2, también se divide $\frac{\pi}{2}$ por 2.	$\frac{\pi}{4}$
30^{o}	30 es la mitad de 60.	Si se divide 60 por 2, también se divide $\frac{\pi}{3}$ por 2.	$\frac{\pi}{6}$
270^{o}	270 es tres veces 90.	Si se multiplica 90 por tres, también se multiplica $\frac{\pi}{2}$ por tres.	$\frac{3}{2}\pi$

Ángulo (en radianes)	Razonamiento	Cálculos	Ángulo (en grados)
2π	Giro completo	—	360º
π	La mitad de 2π.	360º: 2	180º
3π	3 veces π.	3. 180º	540º
$\frac{3}{2}\pi$	La mitad de 3π.	540º: 2	270º
$\frac{5}{6}\pi$	Los $\frac{5}{6}$ de π.	$\frac{5}{6}$ .180°	150º
$\frac{3}{4}\pi$	Los $\frac{3}{4}$ de π.	$\frac{3}{4}$ .180°	135º

Las actividades **4)** a **7)** son problemas sencillos de aplicación cuya resolución requiere trabajar con las nociones de radián y longitud de un arco circular.

Longitud de un arco de circunferencia

A partir de la definición de que el ángulo central de un radián interseca a un arco cuya longitud equivale a lo que mide el radio, se obtiene una fórmula para medir la longitud de un arco.



En general, si θ es un ángulo central, medido en radianes, de una circunferencia de radio r, entonces la longitud s del arco intersecado se obtiene mediante la fórmula:

$$s = r \cdot \theta$$

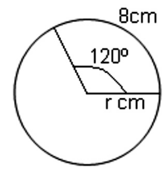
Es importante que el alumno comprenda este procedimiento y no se limite al uso de una fórmula, que incluso puede obviarse y trabajar usando proporcionalidad.

Por ejemplo, para una circunferencia de 5 cm de radio, la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 2 radianes, es 10 cm. Esto se deduce fácilmente a partir de la afirmación de que un radián corresponde a un arco cuya medida coincide con la del radio.

De esta manera, el ángulo central de π radianes en una circunferencia de radio r interseca un arco de longitud πr. Asimismo, el ángulo correspondiente a la circunferencia completa de radio r, 2π radianes, interseca un arco de longitud $2\pi r$. Este último valor corresponde a la longitud completa de la circunferencia.

Si el ángulo central está medido en grados, entonces deberemos expresarlo en primer lugar en radianes. Presentamos como ejemplo la resolución de una de las actividades planteadas.

Actividad 5. Un arco de circunferencia que corresponde a un ángulo central de 120º tiene una longitud de 8 cm. ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia a la que pertenece el arco?



Es importante alentar a nuestros alumnos a realizar una figura de análisis.

Dado que 360º corresponde a 2π radianes, luego 120º equivale a $\frac{2}{\pi}\pi$ radianes.

Con la medida del ángulo en radianes es posible determinar la medida del radio del círculo.

Dado que un radián $\frac{2}{3}\pi$ corresponde a un arco cuya medida coincide con la del radio, entonces el ángulo de radianes corresponde a un arco de medida $\frac{2}{3}\pi$ del radio. A partir de esto se puede obtener la medida del radio, sabiendo que el arco mide 8 cm.

Si llamamos s a la medida del arco:

1 radián — s = r

$\frac{2}{3}\pi$ radianes — $s = \frac{2}{3}\pi.r$

Como en este caso s = 8 cm, resulta:

$8 = \frac{2}{3}\pi.r$ de donde deducimos el valor de r.

$$r = \frac{8}{\frac{2}{3}\pi} \Rightarrow r \approx 3{,}82 \text{ cm.}$$

La medida del radio del círculo es aproximadamente 3,82 centímetros.

A continuación presentamos las respuestas de las demás actividades.

Actividad 4. Las medidas de s y r son aproximadas.

s	r	θ
120 cm	6 cm	20 rad
4 cm	$\frac{4}{3}\pi$ cm $\approx$ 4,2 cm	rad
4 m	2,5 m	1,6 rad $\approx 92^{o}$
20 cm	38,2 cm	30^{o}
3,8 cm	12 cm	18^{o}

Actividad 6. El perímetro de la porción de pizza es aproximadamente 48,8 centímetros.

Actividad 7. La longitud de la circunferencia próxima más alejada es aproximadamente 159 centímetros.

Actividad 8. La tabla completa resulta:

θ	r_1	s_1	r_2	s_2
0,8 rad $\approx 46^{o}$	10 cm	8 cm	35 cm	28 cm
5,2 rad $\approx 298^{o}$	5 km	26 km	10 km	52 km

Razones trigonométricas de ángulos de un triángulo rectángulo

Sandra Bastide, Natalia Henzenn y Gabriela Lucca
Universidad Nacional del Litoral

Silvia Vrancken, Adriana Engler y Daniela Müller
Universidad Nacional del Litoral

El estudio de la semejanza de triángulos y el teorema de Thales permite resolver algunos problemas de triángulos que relacionan los lados entre sí. El teorema de Pitágoras permite calcular longitudes siempre que se tenga un triángulo rectángulo.

Con el estudio de las razones trigonométricas se relacionan los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo y gracias a estas relaciones se pueden resolver problemas que con los teoremas anteriores no se podía.

La trigonometría es una herramienta que permite calcular distancias y ángulos de manera indirecta en puntos o lugares inaccesibles. Actualmente los arquitectos, topógrafos e ingenieros usan los teodolitos, niveles y estaciones totales, que permiten relacionar ángulos y distancias utilizando las fórmulas de trigonometría que estudiaremos.

Con esta propuesta didáctica esperamos que los alumnos descubran por sí solos las razones que se dan en los lados de un triángulo rectángulo y puedan aplicarlas en la resolución de diferentes situaciones cotidianas.

Con las distintas actividades pretendemos aproximar a los alumnos al concepto de las razones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) planteando problemas y preguntas, desarrollando conceptos teóricos y formalizando definiciones.

Esperamos que los alumnos cuestionen las situaciones abordadas, que usen papel, lápiz, elementos de geometría y calculadoras.

Una vez formalizados los conceptos esperamos que el alumno sea capaz de relacionarlos con contenidos anteriores y resolver problemas cotidianos.

Objetivo general que se persigue con la propuesta

Resolver situaciones problemáticas analizando y aplicando razones trigonométricas, además de percibir que la matemática forma parte de lo cotidiano.

Objetivos específicos

- Utilizar instrumentos de medición.
- Representar gráficamente diferentes situaciones, usando triángulos rectángulos.
- Reconocer datos e incógnitas en los triángulos.
- Trabajar con diferentes lenguajes.
- Definir las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Manejar adecuadamente la calculadora científica para efectuar cálculos trigonométricos.
- Aplicar las razones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos.
- Aplicar las razones trigonométricas para el cálculo de distancias y ángulos en problemas referidos a situaciones cotidianas.

Contenidos a desarrollar

Conceptuales

- Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
- Seno de un ángulo agudo. Definición. Aplicación.
- Coseno de un ángulo agudo. Definición. Aplicación.
- Tangente de un ángulo agudo. Definición. Aplicación.
- Resolución de triángulos rectángulos.
- Lenguaje coloquial, gráfico y simbólico.
- Calculadora. Manejo.

Procedimentales

- Justificación del hecho de que las razones trigonométricas dependen del ángulo y no de las medidas de los lados del triángulo.
- Obtención de las razones trigonométricas de un ángulo por medio de algoritmos o la utilización de una calculadora científica.
- Utilización de la calculadora científica para el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo agudo y para conocer el ángulo a partir de una de las razones trigonométricas.
- Aplicación de las razones trigonométricas a la resolución de triángulos rectángulos en mediciones indirectas de longitudes y ángulos.
- Cálculo de distancias y ángulos a partir de triángulos rectángulos.
- Interpretación de situaciones de la vida diaria donde se aplican las razones trigonométricas de ángulos agudos.
- Resolución de situaciones problemáticas.
- Representación gráfica de la situación planteada, utilizando una escala apropiada.
- Aplicación de propiedades en la resolución de cálculos.

Actitudinales

- Desarrollo personal.
- Solidaridad y cooperación en el proceso de construcción del conocimiento.
- Honestidad en la presentación de resultados y disposición favorable para debatir las producciones propias y/o ajenas.
- Apreciación del razonamiento lógico, claro y deductivo.
- Valoración de la matemática como construcción humana.
- Disciplina, esfuerzo y perseverancia en el estudio.
- Curiosidad, apertura y sentido crítico.
- Valoración de la utilización de un vocabulario preciso que permita la comunicación.

Contenidos previos necesarios

Ángulos y su medida.

Triángulos. Propiedad de los ángulos interiores. Alturas de un triángulo. Triángulos rectángulos. Propiedad Pitagórica. Triángulos semejantes. Área de un triángulo.

Metodología sugerida para la implementación de la secuencia

Pese a ser muy visual, la trigonometría es una de las ramas más técnicas que trabajan los alumnos en la escuela. Por este motivo, el docente debe tratarla con especial cuidado, haciéndoles ver el lado más práctico de la trigonometría, intentando motivarlos y animarlos en todo momento a confiar en sus propias capacidades.

Los distintos contenidos se presentan a través de problemas diversos. Los procesos de resolución de problemas implican planificar estrategias, asumir retos y tomar decisiones, por lo que contribuyen de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal.

Estos procedimientos harán que el alumno obtenga la confianza necesaria en sus potencialidades y los conocimientos necesarios para poder enfrentarse a problemas en su vida cotidiana.

La resolución de las distintas actividades, será la principal actividad a realizar en el aula. Se puede alternar el trabajo individual con el de grupo, animando en cualquier caso al intercambio de resultados y la participación de todos los alumnos.

Se debe prestar atención a los tiempos que deben ser los necesarios para permitir la construcción significativa de conocimientos.

El docente formalizará los distintos conceptos, cuidando presentar los contenidos en forma organizada y secuenciada, adaptándose a las particularidades de cada alumno o grupo de alumnos, respetando especialmente los ritmos de aprendizaje de cada uno.

La guía de actividades está pensada para desarrollarse en tres módulos de 80 minutos. Se espera la resolución de las actividades 1 y 2 durante el primero, además de la revisión de algunos conceptos previos sobre triángulos rectángulos.

El segundo módulo, destinado al desarrollo del tema, comenzará con la formalización del concepto razones trigonométricas para luego resolver la actividad 3, donde los alumnos deberán comparar los resultados obtenidos con los de la actividad 2. Además, se prevé comenzar con la resolución de uno de los problemas de aplicación (actividad 4).

Para el último módulo se deberá concluir con la resolución de todos los problemas de aplicación (actividades 5 y 6).

—Guía para el alumno—

La palabra *trigonometría* es de origen griego y significa “medición de triángulos”. Deriva de los vocablos “tri”, que significa “tres”, “gonos”, que significa “ángulo”, y “metría”, que significa “medición”.

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia las relaciones entre las medidas de los ángulos y los lados de un triángulo.

Los babilonios y los egipcios, hace más de 3000 años, fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para realizar mediciones en agricultura y para la construcción de pirámides.

Su desarrollo se impulsó en gran medida por los esfuerzos en la astronomía por predecir las rutas y posiciones de los cuerpos celestes, por mejorar la precisión en la navegación y por el cálculo del tiempo y los calendarios.

Actualmente, interviene directa e indirectamente en las demás ramas de la matemática, como por ejemplo el estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Se aplica en todo ámbito donde se requieren medidas de precisión. En la medición de distancias entre puntos **geográficos**, es de gran utilidad cuando se trata de medir longitudes inaccesibles al hombre, como por ejemplo la altura de montañas, torres y árboles o ancho de ríos y lagos. También en sistemas de navegación por **satélites** y en astronomía, donde son usadas las técnicas de triangulación para medir **distancias** a **estrellas** próximas.

En las actividades siguientes desarrollamos algunas nociones básicas de la trigonometría. Presentamos algunos conceptos y técnicas necesarias para resolver situaciones problemáticas con triángulos rectángulos.

Actividad 1. ¿Por qué nuestra sombra tiene distinta longitud a lo largo del día?

a) Mida la longitud de un objeto con la mayor precisión posible.

b) Coloque el objeto en forma perpendicular a una superficie horizontal.

c) Mida la sombra que proyecta el objeto sobre la superficie.
d) Halle la razón entre la longitud del objeto y su sombra.
e) Represente gráficamente la situación.
f) Compare el resultado con el de sus compañeros.
i) ¿Qué tienen en común estos triángulos?
ii) ¿Por qué las razones se mantienen constantes?
iii) ¿Cómo son los triángulos?
g) ¿Qué ocurriría si la experiencia se realizara dos horas más tarde?
i) ¿La razón seria la misma? ¿Por qué? ¿De qué depende?
h) Obtenga conclusiones.

Actividad 2.
a) Dibuje un triángulo rectángulo con la condición de que uno de sus ángulos agudos tenga una amplitud de 28º.
b) Mida las longitudes de los lados del triángulo trazado.
c) Halle las razones entre el cateto opuesto al ángulo dado y el cateto adyacente, el cateto adyacente y la hipotenusa y el cateto opuesto y la hipotenusa.
d) Compare sus resultados con los de sus compañeros.
e) Enuncie conclusiones.

Actividad 3. Las razones trigonométricas y la calculadora.
Las teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$ permiten hallar el valor aproximado del seno, el coseno y la tangente del ángulo que ingresemos en la calculadora.
a) Utilizando la calculadora, determine seno, coseno y tangente de un ángulo de 28º.
b) Compare los resultados obtenidos con los de la actividad 2.

Actividad 4. Personal del área de urbanismo de un municipio necesita conocer la altura de un edificio ubicado en la plaza central. Se sabe que proyecta una sombra de 150 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de elevación de 20º 30’ sobre el horizonte.
a) Confeccione una figura de análisis con todos los datos del problema.
b) ¿Puede ayudar al personal del municipio a encontrar la solución a su planteo? Relacione esta situación con algunos de los conceptos estudiados.
c) ¿Cuál es la altura del edificio?

Actividad 5. Una escalera de 5 m de longitud debe alcanzar una altura de 3m para llegar al entrepiso de un galpón. ¿Se puede conocer el ángulo que debe formar la escalera con el piso para poder llegar al entrepiso sin necesidad de medirlo?
a) Realice una figura de análisis indicando los datos e incógnitas.
b) ¿Qué ángulo formará la escalera con el suelo?

Actividad 6. Desde una ventana de un edificio, Juan puede observar otro edificio que se encuentra enfrente a 120 m. Necesita un ángulo de elevación de 29º desde la ventana para visualizar el extremo más alto del segundo edificio y un ángulo de depresión de 34º para observar un objeto ubicado justo en la puerta del edificio en la base del mismo. ¿Cuál es la altura del edificio?

Actividad 7. Áreas de triángulos.

a) Observe el triángulo de la figura. ¿Cómo lo clasifica según sus ángulos?

b) ¿Puede aplicar razones trigonométricas para determinar las medidas faltantes?

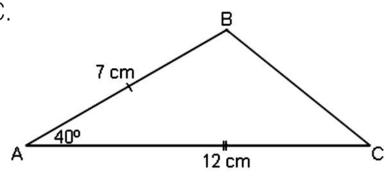
c) Se desea determinar el área del triángulo ABC.

i) ¿Qué medidas necesita conocer?

ii) Márquelas en el gráfico.

iii) ¿Cuáles son datos y cuáles incógnitas?

iv) Calcule el área.



Actividad 8. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

a) Complete la siguiente tabla:

Ángulo α	sen α	cos α	tg α
30º			
45º			
60º			

b) Para cada medida de α, calcule el cociente $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$. ¿Qué observa?

c) Para cada medida de α, determine $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. ¿Qué observa?

d) Para el triángulo de la figura, determine:

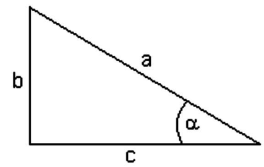
i) sen α

ii) cos α

iii) tg α

iv) $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

v) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$



e) A partir de lo obtenido en el ítem **d)**:

i) ¿Qué relación existe entre sen α, cos α y tg α?

ii) ¿Qué relación existe entre sen α y cos α?

—Guía para el docente—

Análisis de las actividades

En el análisis de las actividades que se presenta a continuación se debe tener en cuenta que, cuando dice:

- ángulo α se refiere al ángulo cuya medida en grados es α,
- AB se refiere a la medida del segmento AB,
- ABC al triángulo cuyos vértices con A, B y C.

Actividad 1. ¿Por qué nuestra sombra tiene distinta longitud a lo largo del día?

Para introducir las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, utilizamos como recurso la medición de objetos concretos y construcciones geométricas con ayuda de reglas y cintas métricas.

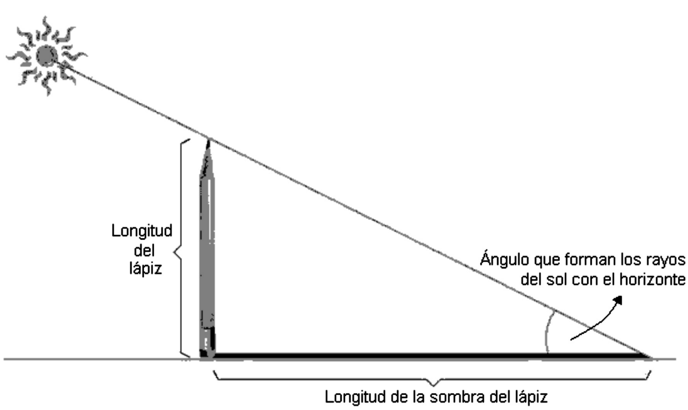
En esta actividad se trabaja específicamente la noción de tangente de un ángulo agudo.Para poder realizarla, es importante recomendar a los alumnos que traigan de su casa un objeto al cual se le puede medir su longitud (fibrón, lápiz, caña de pescar,…) y un instrumento de medición que le permita tomar la longitud del objeto (como una cinta métrica).

Para que las mediciones sean lo más precisas posible, se puede pedir que la realicen de a dos alumnos, de manera que uno de ellos sostenga el objeto en la posición correcta, mientras que el otro toma las medidas.

Es importante solicitarles que anoten de manera adecuada los cálculos realizados, para poder recordar luego qué hicieron.

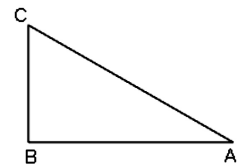
Se debe dar tiempo para que los alumnos hagan las mediciones correspondientes, ubiquen los datos en el dibujo y calculen las razones correspondientes.

Para la representación gráfica los alumnos generalmente tienden a dibujar con detalle todos los elementos. Es necesario revisar que se distingan claramente los elementos importantes para entender la situación. Si bien puede llevar más tiempo, consideramos conveniente hacer el dibujo en escala, para que puedan observar las características de los triángulos.

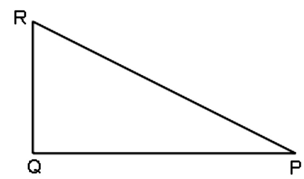


Con respecto a las razones, seguramente los resultados no serán iguales, pero deben poder observar que los resultados de cada grupo son similares, no importando los tamaños de los triángulos.

Con las preguntas del ítem **f)** se pretende que el alumno establezca relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.



Todos los triángulos dibujados tienen sus ángulos interiores iguales. Esto significa que los triángulos son semejantes. Por eso las razones se mantienen constantes.



Para ayudar a recordar a los alumnos estos conceptos, el docente puede dibujar figuras de análisis en el pizarrón y plantear simbólicamente las razones.

¿Por qué en la figura $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$?

Los triángulos ABC y PQR son semejantes. Esto implica que los lados son proporcionales.

En relación con la pregunta sobre que ocurriría si la experiencia se realiza dos horas mas tarde, se espera que el alumno analice lo que está variando de la situación inicial. Para orientarlos, una posible pregunta es: ¿la longitud de la sombra cambia?

Al observar que esa medida se modifica y no la de la longitud del objeto, deben deducir que no se obtiene la misma razón, porque varía la incidencia de los rayos solares sobre el objeto.

No importa si los alumnos no pueden expresar correctamente todas las conclusiones, pero es necesario darles tiempo para que hagan sus conjeturas. Luego el docente podrá formalizar.

La razón depende del ángulo que forman los rayos del sol con la superficie terrestre

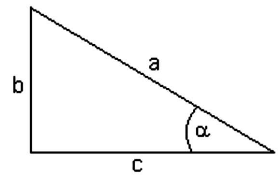
En este caso el ángulo corresponde a la elevación del sol en un momento determinado.

La razón hallada entre la longitud del objeto y la longitud de su sombra recibe un nombre especial: **tangente del ángulo**, que en este caso es el que corresponde al ángulo de elevación del sol.

Actividad 2. Antes de que comiencen a resolver la actividad, recordemos que en un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el tercer lado se llama hipotenusa.

En el triángulo de la figura:

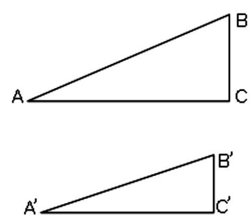
c es el cateto adyacente al ángulo α
b es el cateto opuesto al ángulo α
a es la hipotenusa



En la puesta en común de esta actividad el docente puede hacer preguntas como: ¿Por qué obtuvieron triángulos distintos? ¿Cuánto mide el tercer ángulo de los triángulos dibujados? ¿Cómo son entre sí los triángulos?

Seguramente se presentará nuevamente la dificultad de la aparición de respuestas que si bien son diferentes, son todas aproximaciones al valor exacto.

Debe quedar en claro que, como todos los triángulos dibujados tienen un ángulo de 28º, el otro de 90º y, por lo tanto, el último de 62º, son semejantes. Esto significa que los lados que se corresponden son proporcionales, o sea:



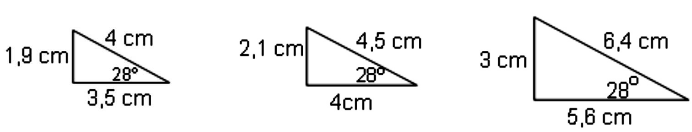
$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'}$$

A partir de las anteriores, se pueden armar otras proporciones:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{C'B'}{C'A'} \qquad \frac{CA}{AB} = \frac{C'A'}{A'B'} \qquad \frac{CB}{AB} = \frac{C'B'}{A'B'}$$

Quiere decir que las diferencias que pudieran tener en las razones calculadas, se deben a pequeños errores de medición.

Mostramos considerando como ejemplo los siguientes triángulos.



Al plantear la razón entre el cateto opuesto al ángulo de 28º y el adyacente, obtenemos:

$$\frac{1{,}9}{3{,}5} = 0{,}543 \qquad \frac{2{,}1}{4} = 0{,}525 \qquad \frac{3}{5{,}6} = 0{,}536$$

Más allá de las diferencias debidas a errores de medición, la razón entre el cateto opuesto al ángulo de 28º y el cateto adyacente es siempre la misma porque los triángulos son semejantes.

Esa razón se llama tangente del ángulo marcado, y no depende de los lados del triángulo, sino de la medida del ángulo.

De manera similar se pueden obtener las razones entre el cateto adyacente y la hipotenusa:

$\frac{5,6}{6,4} = 0,875$ $\frac{4}{4,5} = 0,889$ $\frac{3,5}{4} = 0,875$

Esta razón recibe el nombre de coseno del ángulo de 28º.

Por último, la razón entre el cateto opuesto del ángulo y la hipotenusa resulta:

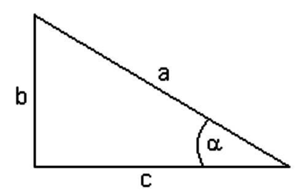
$\frac{3}{6,4} = 0,469$ $\frac{2,1}{4,5} = 0,467$ $\frac{1,9}{4} = 0,475$

Esta razón también se mantiene constante, más allá de los errores, y se llama seno del ángulo de 28º.

A partir de esto, guiamos a los alumnos para establecer la definición de las tres razones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente de un ángulo) en un triángulo rectángulo.

Dado el triángulo ABC, ¿cómo escribirían en símbolos las razones planteadas anteriormente para el ángulo α?

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{sen}\alpha = \frac{b}{a}$ $\cos\alpha = \frac{c}{a}$



En trigonometría se emplean seis razones que relacionan los lados de un triángulo rectángulo y cualquiera de sus ángulos agudos.

Definimos las tres razones con las que trabajaremos.

Se lee	Se escribe	Se calcula
seno de α	sen α	$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
coseno de α	cos α	$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
tangente de α	tg α	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Actividad 3. Hasta el momento calculamos las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo trazando, midiendo, utilizando regla, transportador y haciendo cuentas. Las calculadoras nos ahorran todos estos pasos.

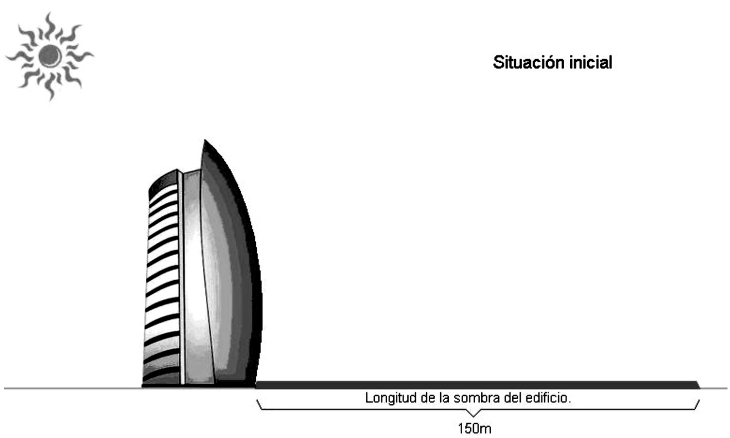
El docente debe dedicar un tiempo a explicar en qué modo deben trabajar la calculadora y cómo se utilizan las teclas trigonométricas.

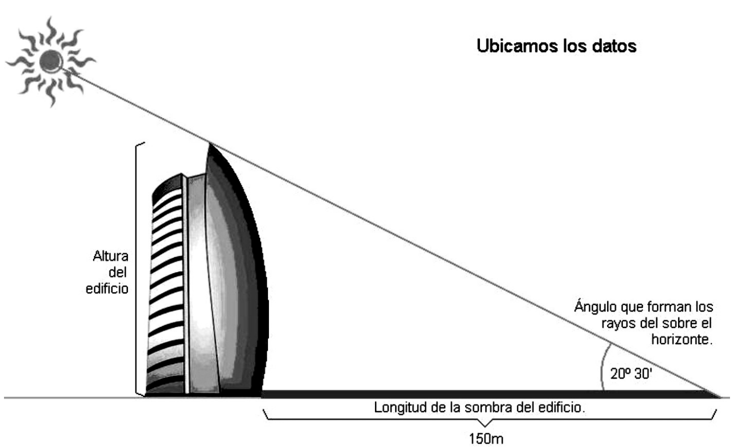
En este caso los alumnos deben obtener, aproximando:

$\text{sen } 28^{\circ} = 0{,}469 \qquad \cos 28^{\circ} = 0{,}883 \qquad \text{tg } 28^{\circ} = 0{,}532$

En el momento que se comparan los resultados con los de la actividad anterior, se debe observar que si bien con la calculadora se obtienen también valores aproximados, estas aproximaciones son mucho más exactas que las obtenidas anteriormente.

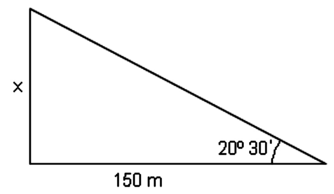
Actividad 4. Para entender el problema es conveniente realizar una figura de análisis donde se evidencie el problema con los datos dados y el o los valores buscados.





A partir de la figura de análisis realizada podemos deducir un triángulo rectángulo y utilizar razones trigonométricas para encontrar la altura del edificio. En él conviene ubicar esquemáticamente los elementos que conocemos y la incógnita.

Llamando x a la altura del edificio resulta:



En este triángulo el cateto opuesto del ángulo 20º 30' es la altura del edificio que se simbolizó con la letra x y el cateto adyacente es la longitud de la sombra del edificio que es de 150 m.

La figura nos ayuda a analizar que, en la situación planteada, se están relacionando el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo de 20º 30´ de este triángulo rectángulo.

Podemos aplicar trigonometría para efectuar el cálculo que necesitamos. Debemos elegir una razón trigonométrica del ángulo de 20º 30´, donde intervenga el lado conocido del triángulo y el lado que desea conocer. Esta razón es la tangente.

Planteamos: $\text{tg } 20^{o}30' = \frac{x}{150}$

Con la calculadora, redondeando a cuatro decimales, obtenemos

$\text{tg } 20^{o}\ 30´ = 0{,}3739.$

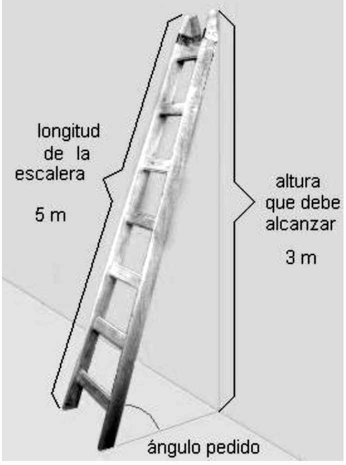
Reemplazando y resolviendo la ecuación, tenemos:

$$0{,}3739 = \frac{x}{150} \Rightarrow 0{,}3739 \,.\, 150 = x \Rightarrow 56{,}085 = x$$

Así, podemos concluir que la altura del edificio es de aproximadamente 56,1 metros.

Actividad 5. ¿Se puede medir el ángulo que forma la escalera con el piso sin medirlo?

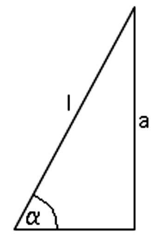
Este momento resulta adecuado para que el docente comparta con sus alumnos la pregunta ¿Qué instrumento necesitaríamos para medirlo? Esto le permitiría concluir que el teodolito es un instrumento óptico de precisión que sirve para medir ángulos. Es utilizado en agrimensura y topografía.



Sin embargo, como no disponemos del instrumento adecuado para medir el ángulo en esta situación, recurrimos a la trigonometría.

La figura de análisis debe mostrar el problema claramente, con todos los datos para que se facilite su resolución.

Hacemos una nueva figura esquematizando la situación:



Donde:

l es la longitud de la escalera.

a es la altura que alcanza la escalera sobre la pared.

α es el ángulo que forma la escalera con el piso.

Si observamos que los alumnos no saben cómo continuar, podemos guiarlos con algunas preguntas. De acuerdo a los datos e incógnitas ubicados en la figura de análisis: la longitud de la escalera, ¿qué lado representa con respecto al ángulo solicitado?, ¿y la altura sobre la pared? ¿Qué concepto puede usar para calcular el ángulo? ¿Por qué?

En este triángulo se relacionan el ángulo que la escalera forma con el suelo, el cateto opuesto a este ángulo, que es la altura que alcanza la escalera sobre la pared, y la hipotenusa que representa la longitud de la escalera.

La razón que nos conviene utilizar es el seno de α, porque es la que relaciona el ángulo con el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Reemplazando con los datos del problema:

$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{l} \qquad \text{sen}\alpha = \frac{3\text{m}}{5\text{m}}$$

Simplificando: $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

En esta situación se plantea por primera vez la necesidad de encontrar la medida del ángulo conocido el valor de una razón trigonométrica. El docente debe explicar el manejo de la calculadora según el modelo que tengan los alumnos.

Escribimos: $\alpha = \text{arc sen}\frac{3}{5}$

Con la calculadora en modo DEG, podemos hallar α. Para ello utilizaremos la tecla $\sin^{-1}$ o shift sin de una calculadora.

En el visor leeremos 36.86989765. Esto significa que

$\alpha = 36.86989765^{\circ} \approx 37^{\circ}$.

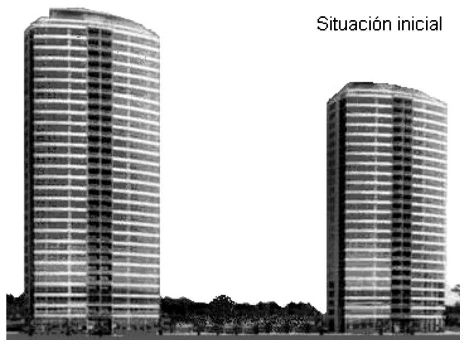
Presionando la tecla $^{\circ}\ '\ ''$ leemos: $\alpha = 36^{\circ}\ 52^{\circ}\ 11.63$
Luego $\alpha = 36^{\circ}\ 52'\ 12''$ aproximadamente.
Por lo tanto, el ángulo que determina la escalera con el piso mide aproximadamente 37°.

Actividad 6. Desde una ventana de un edificio, Juan puede observar otro edificio que se encuentra enfrente a una distancia de 120 metros. Necesita un ángulo de elevación de 29° desde la ventana para visualizar el extremo más alto del segundo edificio y un ángulo de depresión de 34° para observar un objeto ubicado justo en la puerta del edificio en la base del mismo. ¿Cuál es la altura del edificio?

Como analizamos anteriormente, en primer lugar realizamos la figura de análisis indicando los datos e incógnitas.

Seguramente el docente deberá intervenir para guiar a los alumnos en esta tarea, ya que la situación es un poco más complicada.

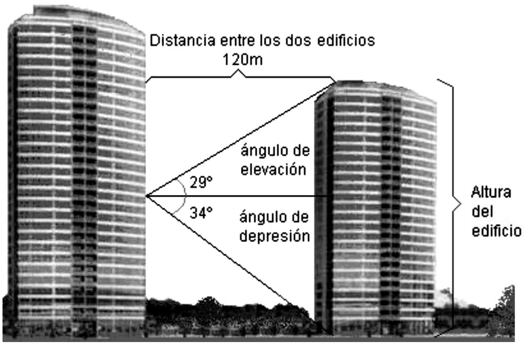
¿A que llamamos ángulo de elevación? ¿A que llamamos ángulo de depresión? ¿De que dependen estos ángulos?

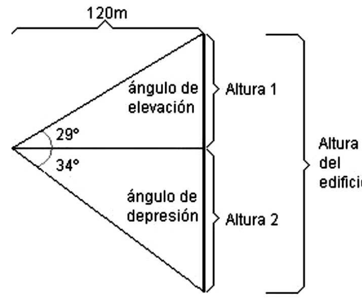


Llamamos ángulo de elevación al ángulo que se forma entre la horizontal y la línea de visión cuando el objeto se encuentra por encima de la horizontal.

Llamamos ángulo de depresión al ángulo que se forma entre la horizontal y la línea de visión cuando se observa un objeto por debajo de la horizontal.

Ambos ángulos son determinados por la línea de visión y la horizontal.
Completamos la figura de análisis.





En esta última figura se observa claramente que se forman dos triángulos rectángulos. No es posible calcular la altura del edificio con un solo cálculo. Se necesitan hallar las dos medidas, altura 1 y altura 2, utilizando en un caso el triángulo determinado por el ángulo de depresión y en el otro el determinado por el ángulo de elevación.

La altura del edificio será la suma de la altura 1 y la altura 2.

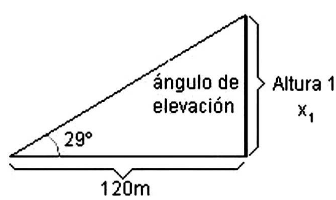
Para el cálculo de las dos medidas se debe usar la tangente ya que se tiene como dato el ángulo (de elevación o de depresión) y el cateto adyacente y se busca el cateto opuesto.

$\text{tg } 29^{o} = \dfrac{x_1}{120}$

Como tg 29 ^{o} = 0,5543 resulta:

0,5543 . 120 m = x_1

66,516 m = x_1

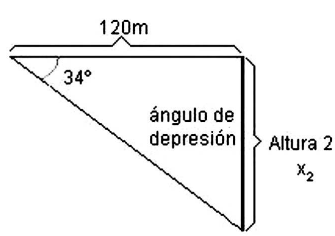


$\text{tg } 34^{o} = \dfrac{x_2}{120}$

Dado que tg 34^{o} = 0,6745 queda:

0,6745. 120 m = x_2

80,94 m = x_2



Sumando x_1 y x_2 obtenemos 147,456 metros.

Entonces, la altura del edificio es de aproximadamente 147,5 metros.

Actividad 7. Áreas de triángulos.

El triángulo ABC no es rectángulo, por lo que no se pueden aplicar directamente las razones trigonométricas estudiadas. Probablemente este comentario pudo haber surgido, por parte de los alumnos, antes de llegar a esta actividad. Es importante que el docente aclare que, cuando no hay un ángulo recto, el problema debe tratarse de una forma diferente.

En esta actividad se solicita la determinación del área del triángulo. Para esto podemos aplicar la fórmula:

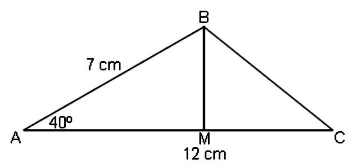
$$\text{Área ABC} = \frac{\text{Base. Altura}}{2}$$

El triángulo está dibujado de manera que el problema sea más sencillo de resolver. Los alumnos pueden identificar fácilmente el lado AC como la base del triángulo.

Luego es necesario trazar y calcular la medida de una de sus alturas, la correspondiente al lado considerado como base.

El docente observará si los alumnos son capaces de identificarla y trazarla correctamente.

Al dibujar la altura BM quedan determinados dos triángulos rectángulos.



En cualquiera de ellos podemos aplicar razones trigonométricas.

Del triángulo AMB conocemos la hipotenusa y el ángulo que determina la misma con uno de los catetos.

La altura BM corresponde al cateto opuesto al ángulo conocido.

Por lo tanto, podemos utilizar seno de dicho ángulo para determinar la medida de la altura.

$$\text{sen } 40° = \frac{BM}{AB} \Rightarrow BM = \text{sen } 40° \,.\, AB$$

Reemplazando AB y calculando el seno: $BM \approx 0{,}643 \,.\, 7$ cm

$BM \approx 4{,}5$ cm.

Volviendo al triángulo ABC, tenemos la base AC que mide 12 cm y la altura BM que mide 4,5 cm aproximadamente.

$$\text{Luego Área ABC} \approx \frac{12 \text{ cm. } 4{,}5 \text{ cm}}{2}$$

$$\text{Área ABC} \approx 27 \text{ cm}^2$$

Actividad 8. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

En esta actividad se trabajan dos de las relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas.

En el inciso **a)**, los alumnos completarán las tablas con los valores de las tres razones básicas utilizando calculadora. Calcularán el valor del cociente $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ y de la suma $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$, y tratarán de obtener alguna relación.

Ángulo α	**sen** α	**cos** α	**tg** α
30º	0,5	0,866	0,577
45º	0,707	0,707	1
60º	0,866	0,5	1,732

Recomendando que trabajen con cierta cantidad de decimales, podrán observar que el cociente coincide con el valor de la tangente y que la suma siempre es igual a uno.

Ángulo α	$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$
30º	0,577	1
45º	1	1
60º	1,732	1

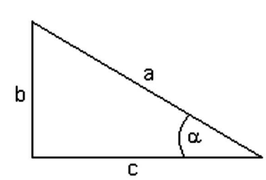
De todas maneras no importa que no la obtengan, sí interesa que tengan tiempo para trabajar.

También es importante que el docente pregunte, si es que no surge la duda por parte de los alumnos, si siempre será así. Esto lleva a la necesidad de demostración de las propiedades.

Teniendo en cuenta que para el triángulo rectángulo de la figura:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}.$$

Resulta $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$



Es decir que: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

Elevando al cuadrado sen α y cos α obtenemos:

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{y} \quad \cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2}$$

Sumando ambas expresiones: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$

Recordemos que por ser triángulo rectángulo, se cumple: $b^2 + c^2 = a^2$.

Reemplazando en el cociente anterior, resulta: $\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Luego $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$ Relación pitagórica.

A partir de la tabla se pueden trabajar otras relaciones trigonométricas. Esto dependerá del interés del docente y del tiempo disponible.

Actividades complementarias

Las actividades de esta guía comprenden una serie de ejercicios y problemas que tienen como propósito afianzar los conceptos y aplicaciones desarrollados. Al final de cada uno aparece la respuesta correspondiente de manera de poder verificarlas y avanzar en el estudio del tema.

Actividad 1. Halle con calculadora, aproximando a dos decimales:

a) sen 50º 15'
b) tg 74º 36´
c) tg 79º 7' 2"
d) tg 45º
e) cos 13º 22'19"
f) cos 10º
g) sen 0º 45' 54"
h) sen 45º

Respuesta

a) 0,77; **b)** 3,63; **c)** 5,20; **d)** 1; **e)** 0,97; **f)** 0,98; **g)** 0,01; **h)** 0,71

Actividad 2. Calcule los ángulos empleando la calculadora si:

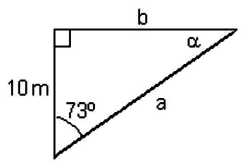
a) cos α = 0,3746
b) sen α = 0,9667
c) tg α = 0,36642
d) cos α = 0, 378

Respuesta

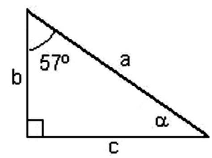
a) 68º 0’ 2’’ ; **b)** 75º 10’ 20’’; **c)** 20º 7’ 26’’; **d)** 67º 47’ 24’’

Actividad 3. Calcule todos los lados y ángulos desconocidos en cada triángulo rectángulo.

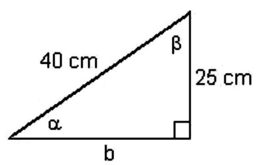
a)



b)



c)



Respuesta

a) a= 34,20 m; b= 32,71m; α= 17º

b) b= 5,45 cm; c= 8,39 cm; α= 33º

c) b= 31,22 cm; α= 38º 40’ 56’’; β = 51º 19’ 4’’

Actividad 4. Se desea construir una rampa para reemplazar una escalera que alcanza una altura de 2,10 m. Sabiendo que la inclinación conveniente es de 25°, ¿cuál es la longitud de la rampa?

Respuesta

La longitud de la rampa es 4,99 m.

Actividad 5. Calcule el ángulo de inclinación de los rayos del sol con respecto al suelo si la sombra de un molino de 20 m de altura es de 35 m.

Respuesta

El ángulo de inclinación es de 29º 44’ 42’’

Actividad 6. Una escalera de 6 m de largo apoyada en una pared forma un ángulo de 65º con el piso. Determine:

a) ¿A qué altura llega la escalera sobre la pared?

b) ¿A qué distancia de la pared se encuentra el extremo inferior de la escalera?

Respuesta

a) Alcanza una altura de 5,44 m.

b) El extremo inferior de la escalera se encuentra a 2,54 m de la pared.

Actividad 7. Desde un punto que está a 12 m del suelo, un observador obtiene una medición de 53º para el ángulo de depresión de un objeto que se encuentra en el suelo. ¿Aproximadamente, qué tan lejos está el objeto del punto en el suelo que está directamente bajo el observador?

Respuesta
El observador se encuentra a 9,04 m.

Actividad 8. El cordel de un cometa se encuentra tenso y forma un ángulo de 48º con la horizontal. Encuentre la altura del cometa con respecto al suelo, si el cordel mide 87 m y el extremo de la cuerda se sostiene a 1,3 m del suelo.

Respuesta
La altura de la cometa es de 65,95 m.

Actividad 9. Desde lo alto de una torre de 200 m sobre el nivel del mar, los ángulos de depresión de dos botes son de 47º y 32º respectivamente. Determine la distancia que separa a dichos botes.

Respuesta
La distancia entre los botes es de 133,56 m.

Actividad 10. En lo alto de una torre se ha instalado una antena transmisora de televisión. Un observador, ubicado a 40 m del pie de la torre, ve las cúspides de la torre y la antena bajo ángulos de elevación de 45° y 50° respectivamente. Calcule la altura de la torre y de la antena.

Respuesta
La altura de la torre es 40 m y la de la antena es 7,67 m.

Actividad 11. Un globo está sujeto al suelo mediante un cable de 100 m de longitud. El viento es tan intenso que el cable, tenso, se desvía 15º de la vertical. Desde un punto algo alejado del de sujeción hay que levantar la vista 60º desde la horizontal para dirigir la mirada al globo.
a) ¿Qué distancia hay en vertical del globo al suelo?
b) ¿Qué distancia hay desde el punto algo alejado hasta el globo?

Respuesta
a) La altura del globo es 96,59 m.
b) La distancia desde el punto al globo es 111,53 m.

Actividad 12. La entrada de una escuela secundaria tiene una escalinata de ingreso cuya altura es de 0,80 m. El director de dicha institución desea reemplazar una parte de ella por una rampa con un ángulo de inclinación de 14º, para facilitar el acceso de personas discapacitadas.

a) ¿Cuál va a ser la longitud de dicha rampa?

b) ¿A qué distancia del ingreso a la escuela deberá comenzar la rampa?

Respuesta

a) La longitud de la rampa es 3,30 m.

b) La distancia de ingreso es 3,20 m.

Actividad 13. En lo alto de un edificio de 20 m, un técnico de Cablevida está colocando una antena y observa a sus dos ayudantes, situados en la calle, con ángulos de depresión, respectivamente, de 48º y 55º.

a) Si el técnico está de pie, en el borde de la terraza del edificio y mide 1,60 m. ¿A qué distancia están los ayudantes entre sí?

b) ¿Cuál es la distancia entre el técnico y el ayudante más cercano?

Respuesta

a) Los ayudantes están entre si a 4,32 m.

b) La distancia es de 26,36 m.

Actividad 14. Los alumnos de 5º año de una escuela secundaria están organizando un recital para recaudar fondos para su viaje de egresados. Montando el escenario, se dieron cuenta que era necesario construir una rampa para transportar los equipos de música de las bandas. Tomando medidas, observan que el escenario está a 2,5 m de altura del suelo y que el ángulo que debería formar la rampa con el piso es de 25º para que resulte práctico el ascenso y descenso de equipos. ¿Qué longitud deberá tener la rampa?

Respuesta

La longitud de la rampa debe ser de 5,91 m.

Actividad 15. La caja volcadora de un camión que transporta arena tiene una longitud de 4,20 m y 70 cm de altura y se encuentra a 1 m del suelo cuando está en reposo. Si la caja volcadora forma con el chasis un ángulo máximo de 45º durante la descarga de arena, por la parte posterior de dicha caja, ¿cuál debe ser la altura mínima del local en el cuál se pretende descargarla?

Respuesta

La altura mínima del local debe ser 4,46 m aproximadamente.

Actividad 16. Determine el área de los siguientes triángulos, redondeando la respuesta a cm^2.

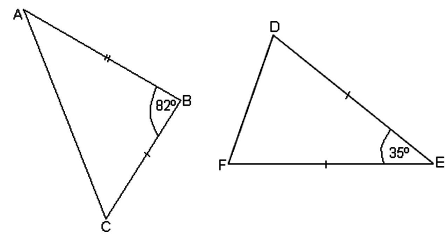
a) AB = 35 cm

B = 82º

BC = 25 cm

b) DE = EF = 40 cm

E = 35º



Respuesta

a) Aproximadamente 433 cm^2

b) Aproximadamente 456 cm^2

Actividad 17. Áreas de cuadriláteros.

¿Cuál es aproximadamente el área del rombo y del paralelogramo de la figura?

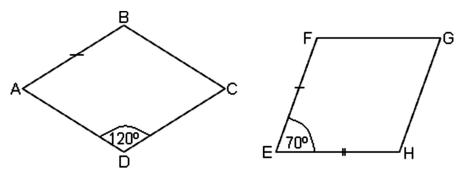
AB = 15 cm

D = 120 º

EF = 22 cm

EH = 20 cm

E = 70º



Respuesta

El área del rombo es aproximadamente 195 cm^2 y la del paralelogramo es aproximadamente 420 cm^2

Propuestas didácticas para el aula de informática

Integrar los recursos tecnológicos a los procesos en los que las actividades presenciales se mantienen de manera significativa, permite, entre otros aspectos, mejorar el acceso a los contenidos y a sus distintas representaciones. Esto puede complementarse con guías de estudio y propuestas de actividades.

Carles Sigalés, 2004

Funciones

Daniela Müller, Adriana Engler y Silvia Vrancken
Universidad Nacional del Litoral

Funciones utilizando un software para graficar

Incorporar la tecnología en la clase de matemática ofrece nuevas estrategias para la solución de situaciones problemáticas y se convierte en otro entorno para la exploración y la sistematización.

Tanto las nuevas tecnologías como la computadora deben entenderse como herramientas que serán un gran aporte en la medida que los docentes nos cuestionemos cómo las utilizamos. Por si mismas no generan nada, todo dependerá de cómo las integremos en nuestra práctica docente.

La utilización de estos recursos permite realizar representaciones de carácter visual y utilizarlas de manera dinámica, posibilitando así que el alumno fije la atención en los aspectos conceptuales. También, facilitan la tarea meramente técnica, conservando de esa manera la importancia de los significados de los conceptos en juego. Otras de las potencialidades es el desarrollo de mecanismos de autoevaluación ya que los alumnos incrementan la exploración y la emisión de posibles resultados, tomando un papel más activo e independiente en el proceso.

La decisión de utilizar recursos informáticos o los que proporcionan las nuevas tecnologías, debe partir de un proyecto minucioso adaptado a las necesidades particulares de la institución y, por supuesto, de la asignatura. Este proyecto facilita la metodología a seguir para el desarrollo y aplicación de los materiales didácticos y es el diseño a través del cual podemos garantizar un proceso de enseñanza y de aprendizaje de calidad a través de otros recursos. El mismo será la base sobre la que construimos nuestros recursos didácticos posibilitando así obtener el mayor provecho de los medios tecnológicos que estén a nuestra disposición.

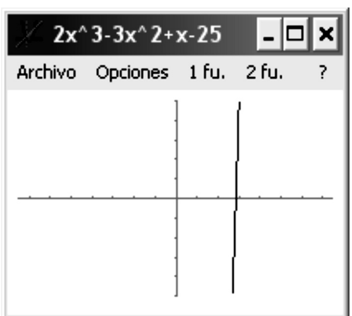
Para mostrar el uso de los recursos que nos brindan los programas informáticos, se presentarán distintas situaciones y problemas que pueden encontrarse en los libros de texto, pero analizados desde un enfoque diferente.

El uso de la computadora en el aula de Matemática brinda distintas posibilidades que van desde el cálculo de expresiones aritméticas, soluciones reales de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, gráficas estadísticas, gráficas de las funciones reales y otras más avanzadas que incluyen programas de geometría y de cálculo simbólico, que permiten trabajar con expresiones algebraicas.

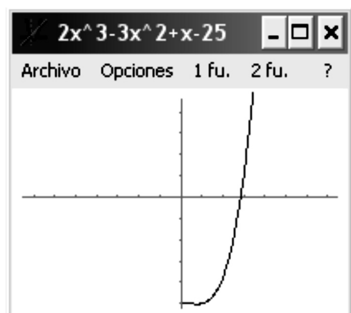
En este apartado nos referiremos al uso de un software para el estudio e interpretación, gráfica y numérica, de funciones reales. Si bien existen diversos programas que lo posibilitan, elegimos Funciones para Windows.

Es importante resaltar que, cualquiera sea el programa que se utilice para representar gráficamente funciones, uno de los principales aspectos que se debe tener en cuenta es el de la ventana de visualización a través de la cual se estudia la representación gráfica de la misma. Por este motivo, la elección de los intervalos para cada una de las variables es fundamental.

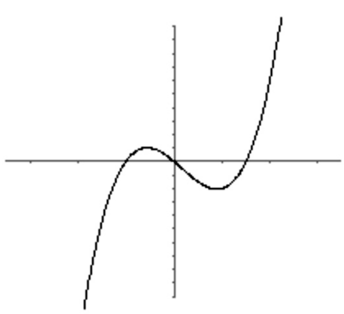
Por ejemplo, si se representa la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 25$ en distintos intervalos, además de los que el programa da por defecto, se obtiene:



[–7,5; 7,5] ⟶ [–5; 5]



[–7,5; 7,5] ⟶ [–23; 23]



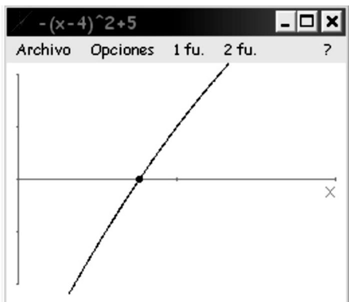
[–7,5; 7,5] ⟶ [–50; 50]

En cada ventana se presenta una imagen diferente de la función. Nos encontramos frente al problema de cómo integrar las diferentes gráficas para obtener una imagen de conjunto.

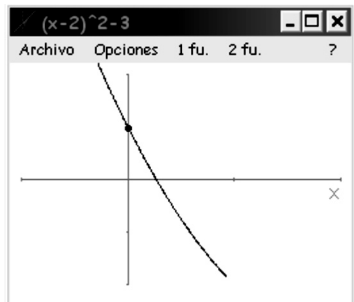
El problema cognitivo al que se enfrenta aquí el alumno es cómo ir de un conocimiento fragmentado a un conocimiento holístico.

En el caso de la representación gráfica de funciones, el conocimiento holístico se producirá cuando se obtenga una gráfica en la cual se observen todas las características propias de la función dada.

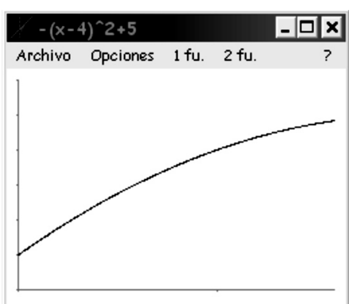
¿Cuáles son estas características?



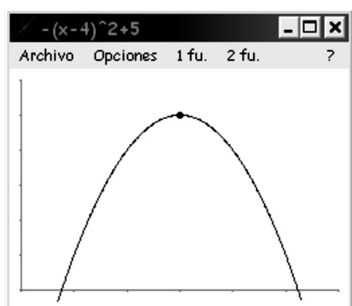
Ceros



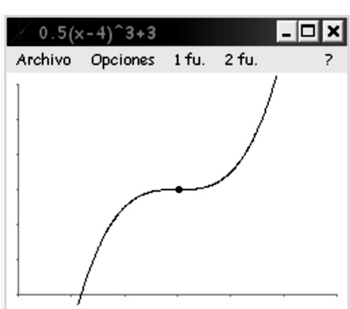
Ordenada al origen



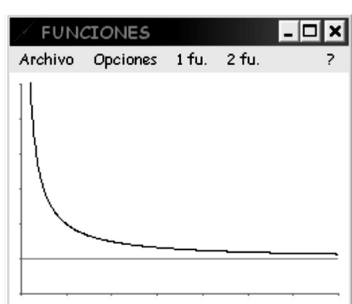
Crecimiento (o decrecimiento)



Punto de máximo (o de mínimo)



Punto de inflexión



Asíntotas

Al modificar los intervalos para cada una de las variables, de las distintas gráficas que se presenten, se llama ventana de graficación óptima a aquella en la que se observan *todas* las características particulares de la función, es decir, crecimiento, ceros, valores extremos, puntos de inflexión y asíntotas.

Utilizando el programa Funciones, una vez que se ha representado la función, estas características pueden determinarse utilizando comandos propios del programa que pueden visualizarse seleccionando la opción 1fu. de la barra superior.

—Guía para el alumno—

El objetivo principal de estas actividades es que se familiarice con el uso del programa computacional y que, a través de las distintas propuestas, interactúe dinámicamente con los objetos matemáticos en diversos sistemas de representación, ya que esto propicia una mejor manipulación, visualización, comprensión y conceptualización.

Actividad 1

a) Represente gráficamente $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$ considerando el intervalo [–3,5, 3,5] para el eje x, [–10, 10] para el eje de las ordenadas y en ambos escala 1.

b) Considerando esta ley definida en los números reales, determine cuál es el conjunto más grande de valores de x para el cual define una función.

Nota: para responder a este ítem, en la ventana correspondiente a la entrada de datos puede modificar cualquiera de los valores correspondientes a la unidad de escala, al origen o al final de uno o ambos ejes.

c) De acuerdo con la respuesta del ítem b), observando la gráfica y modificando convenientemente la unidad de escala y los intervalos de x e y, determine el conjunto de imágenes.

Actividad 2. Para cada una de las siguientes funciones, considere distintos intervalos y escalas para ambos ejes hasta encontrar aquella ventana de graficación que considere más apropiada. Enuncie los elementos que tiene en cuenta para determinarla.

a) $f(x) = x^2 + 5$

b) $g(x) = x^3 - 25x$

Actividad 3. Represente la función $f(x) = x^2 - 4x + 9$ en cada uno de los intervalos indicados y determine en cuál de ellos se obtiene la mejor representación gráfica. Justifique su respuesta en cada caso.

a) Eje x: [–3, 3]   Eje y: [–3, 3]

b) Eje x: [–7, 7]   Eje y: [–7, 7]

c) Eje x: [–3, 20]   Eje y: [–3, 20]

d) Eje x: [–50, 50]   Eje y: [–5, 50]

¿Propondría otros intervalos de graficación más adecuados? Justifique.

Actividad 4

a) Represente gráficamente las leyes que se dan a continuación teniendo en cuenta los intervalos indicados y considerando para ambos ejes la unidad de escala igual a uno.

i) $f(x) = 2x - 2$	ii) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$	iii) $h(x) = 2.\sqrt{x-3}$
Eje x: [–5, 5]	Eje x: [–2, 6]	Eje x: [–2, 8]
Eje y: [–5, 5]	Eje y: [–6, 4]	Eje y: [–2, 8]

b) Considerando las leyes definidas en los números reales, determine cuál es el conjunto más grande de valores de x para que cada una de ellas defina una función.

c) De acuerdo con la respuesta del ítem b), observando la gráfica y modificando convenientemente la unidad de escala y los intervalos de x e y, determine el conjunto de imágenes.

Actividad 5. Represente gráficamente la ley $f(x) = x - 2$ considerando intervalos y unidad de escala adecuados para x e y. Observando la gráfica:

a) Analice las condiciones para que sea función.

b) Determine el dominio y el conjunto de imágenes.

c) Indique para qué valores de x, $f(x) > 0$. (Gráficamente esto equivale a indicar las abscisas de los puntos de la gráfica que se encuentran por encima del eje x).

d) Indique para qué valores de x, $f(x) < 0$. (Gráficamente esto equivale a indicar las abscisas de los puntos de la gráfica que se encuentran por ……………. del eje x).

e) Indique para qué valores de x, $f(x) = 0$. (Gráficamente esto equivale a indicar las abscisas de los puntos de la gráfica que se encuentran …………. el eje x).

Actividad 6. Represente gráficamente la ley $f(x) = x^2 - 6x + 5$ considerando intervalos adecuados para x e y.

Analice las condiciones para que sea función y determine:

a) el dominio y conjunto de imágenes.

b) para qué valores de x, $f(x) > 0$.

c) para qué valores de x, $f(x) < 0$.

d) para qué valores de x, $f(x) = 0$.

e) las abscisas de los puntos para los cuales $f(x) = 5$.

f) las abscisas de los puntos para los cuales $f(x) = f(2)$.

g) los valores del dominio para los cuales $f(x) < -4$.

h) los valores del dominio para los cuales $f(x) \geq -4$.

i) para qué valores de x, f(x) crece.

j) para qué valores de x, f(x) decrece.

—Guía para el docente—

Análisis de las actividades

A continuación se presentan las distintas actividades enunciadas en la guía del alumno con algunas consideraciones para su implementación. Para favorecer la resolución de las actividades 5 y 6, se indican los comandos propios del programa que el alumno podrá utilizar para corroborar sus respuestas.

Actividades 1 y 2. En estas actividades se presentan funciones polinomiales de grado dos y tres que deben representar teniendo en cuenta intervalos dados o buscando aquellos que determinen la ventana de graficación óptima.

A partir de las distintas gráficas que el alumno vaya obteniendo, podrá determinar el dominio y el conjunto de imágenes.

<table>
<tr><th>Enunciado</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>

1.

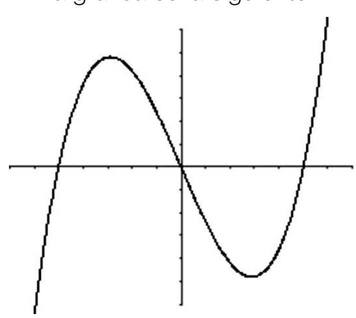
a) Represente gráficamente la ley $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$. Considere los intervalos [–3,5; 3,5] para x, [–10, 10] para la variable y.

b) Considerando esta ley definida en los números reales, determine cuál es el conjunto más grande de valores de x para el cual dicha ley define una función.

c) Determine el conjunto de imágenes.

</td><td>

La gráfica es la siguiente:



Variando los intervalos, debe llegar a concluir que tanto el dominio como el conjunto de imágenes son el conjunto de los números reales.

</td></tr>
<tr><td>

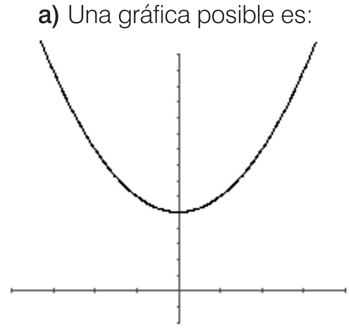
2. Considere distintos intervalos y escalas para ambos ejes hasta encontrar una ventana de graficación más apropiada. Enuncie los elementos que tiene en cuenta para determinarla.

a) $f(x) = x^2 + 5$

b) $g(x) = x^3 - 25x$

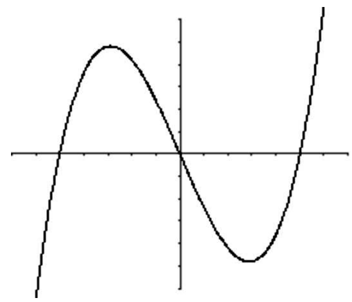
</td><td>

a) Una gráfica posible es:



Representada de [–4, 4] → [–2, 15]

</td></tr>
</table>

	b) Una gráfica posible es:  Graficada de [–7, 7] → [–60, 60]

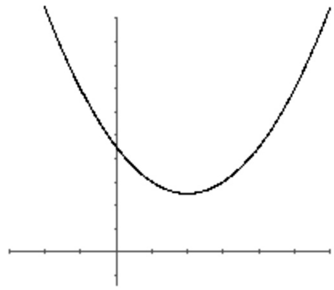
En la **actividad 2,** ítem **a)**, si los alumnos están familiarizados con la función de segundo grado, antes de hacer la gráfica, puede hacerse notar que, dada su expresión algebraica, a partir del signo del coeficiente principal, la gráfica que deben obtener es una parábola, cóncava hacia arriba con vértice en el punto (0, 5). También, si se han trabajado las transformaciones que sufre la gráfica de una función a partir de cómo varían los parámetros que intervienen en ella, puede deducirse que la gráfica esperada debe coincidir con la de la función $y = x^2$, solo que trasladada 5 unidades hacia arriba.

En la función del ítem **b)**, si los alumnos han estudiado con anterioridad función polinomial de grado 3, para hacer la gráfica de la misma deberían elegir aquellos intervalos para las variables x e y que les permitan observar las principales características. Esta función presenta tres ceros de los cuales al menos uno es real y por ello su gráfica debe intersecar al eje de las abscisas por lo menos en un punto y a lo sumo en tres. También uno de los aspectos que se puede discutir con los alumnos es la presencia de máximos, de mínimos, de puntos de inflexión y en virtud de la presencia de ellos, determinar cuál es la ventana de graficación óptima.

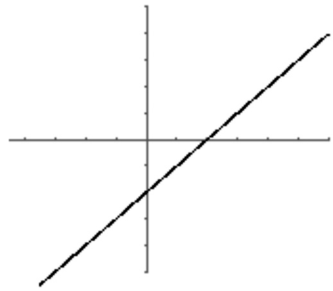
Actividades 3 y 4. En estas actividades se espera que el alumno encuentre cuál es la ventana óptima de graficación y, a partir de ciertos intervalos dados, determine el dominio y el conjunto de imágenes de las funciones dadas.

Enunciado	Análisis
3. Represente la función $f(x) = x^2 - 4x + 9$ en cada uno de los intervalos indicados y determine en cuál de ellos se obtiene la mejor representación gráfica. Justifique su respuesta en cada caso.	De los intervalos dados, los más adecuados son los del ítem **c)**. De todos modos, puede proponerse reducir un poco la longitud del intervalo de variación de las abscisas a [–3, 6], obteniendo:

Continúa en la página siguiente

Enunciado	Análisis
a) eje x: $[-3, 3]$; eje y: $[-3, 3]$ **b)** eje x: $[-7, 7]$; eje y: $[-7, 7]$ **c)** eje x: $[-3, 20]$; eje y: $[-3, 20]$ **d)** eje x: $[-50, 50]$; eje y: $[-50, 50]$ ¿Propondría otros intervalos de graficación más adecuados?	
4. **a)** Represente gráficamente las leyes teniendo en cuenta los intervalos indicados y unidad de escala igual a uno. i) $f(x) = 2x - 2$ de $[-5, 5] \longrightarrow [-5, 5]$ ii) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ de $[-2, 6] \longrightarrow [-6, 4]$ iii) $h(x) = 2.\sqrt{x-3}$ de $[-2, 8] \longrightarrow [-2, 8]$ **b)** Considerando las leyes definidas en los números reales, determine cuál es el conjunto más grande de valores de x para que cada una de ellas define una función. **c)** De acuerdo a la respuesta del ítem b), observando la gráfica y modificando convenientemente la unidad de escala y los intervalos de x e y, determine el conjunto de imágenes.	Para cada una de las leyes e intervalos dados los alumnos obtienen la gráfica en la que se pueden observar las características particulares de cada una. A partir de la observación de las gráficas deben llegar a determinar el dominio de cada una, concluyendo que es el conjunto de los números reales para los ítems i) y ii) y el intervalo $[3, +\infty)$ para el iii). Luego, modificando los intervalos de cada variable, si es necesario, deben llegar a determinar el conjunto de imágenes para cada función que es el conjunto de los números reales para el ítem i), el intervalo $(-\infty, 1]$ para ii) y el conjunto de los números reales positivos incluido el cero para iii).

Actividades 5 y 6. En estas actividades se espera que a partir de la observación de la gráfica de las leyes dadas, el alumno pueda responder a las consignas establecidas favoreciendo además el desarrollo de habilidades para operar en y entre diversas representaciones de un mismo concepto.

Enunciado	Análisis
5. Represente gráficamente la ley f(x) = x – 2. Observando la gráfica: **a)** Analice las condiciones para que sea función. **b)** Determine el dominio y el conjunto de imágenes. **c)** Indique para qué valores de x, f(x) > 0. **d)** Indique para qué valores de x, f(x) < 0. **e)** Indique para qué valores de x, f(x) = 0.	La gráfica que deben obtener es:  Tanto el dominio como el conjunto de imágenes son el conjunto de los números reales. Para responder los ítems c), d) y e) se espera que a partir de la observación de la gráfica, el alumno pueda determinar cuáles son las abscisas de los puntos que se encuentran respectivamente por encima, por debajo o sobre el eje x. Las respuestas son (–∞, 2), (2, +∞) y x = 2, respectivamente.

En este ejercicio es oportuno trabajar con los alumnos el concepto de imagen utilizando las potencialidades del programa.

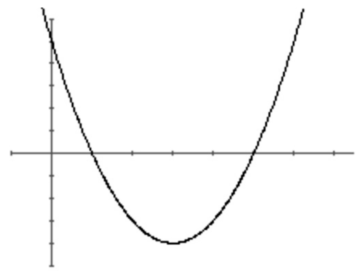
Con el gráfico en pantalla, presionando en la barra superior **1fu.**, seleccione **Imagen...** para obtener la imagen de la función para un valor de x determinado. Por defecto comienza calculando la imagen en x = 0. En el menú que aparece en la parte inferior de la pantalla, presionando **<-i** o **d->** se pueden observar las imágenes de valores de x próximos situados a la izquierda o a la derecha del anterior. Además del valor particular, en este ejercicio interesa saber si esa imagen es mayor o menor que cero.

Para determinar los valores de x para los cuales f(x) = 0, también puede seleccionar el comando **Raíces**.

<table>
<tr><th>Enunciado</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>

6. Represente gráficamente la ley $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Analice las condiciones para que sea función y determine:
a) el dominio y conjunto de imágenes.
b) para qué valores de x, $f(x) > 0$.
c) para qué valores de x, $f(x) < 0$.
d) para qué valores de x, $f(x) = 0$.
e) las abscisas de los puntos para los cuales $f(x) = 5$.
f) las abscisas de los puntos para los cuales $f(x) = f(2)$.
g) los valores del dominio para los cuales $f(x) < -4$.
h) los valores del dominio para los cuales $f(x) \geq -4$.
i) para qué valores de x, f(x) crece.
j) para qué valores de x, f(x) decrece.

</td><td>

La gráfica que deben obtener es:

Analizando la gráfica y utilizando comandos propios del programa se deduce que f(x) es mayor que cero en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, menor que cero en $(1, 5)$ e igual que cero para 1 y 5.
En los ítems e) y f) se espera que el alumno pueda determinar las abscisas de los puntos para los cuales toma un valor particular. Estos valores son 0 y 6 para e) y 2 y 4 para f).
Los ítems g) y h) están en relación con el conjunto de imágenes.
La función decrece en $(-\infty, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.

</td></tr>
</table>

Para responder el ítem **e)**, resulta interesante sugerir a los alumnos que teniendo el gráfico en pantalla, a partir del menú que se despliega al presionar en la barra superior **1fu.**, seleccione **Antiimagen...** para obtener el valor de x que le corresponde a una imagen determinada. Una vez que encuentra el primer valor de x que corresponde con esa imagen, seleccione el botón “Continuar” para obtener los restantes valores.

Para controlar las respuestas de los ítems **i)** y **j)** invite a los alumnos a investigar las diferentes opciones que se presentan en el menú que estaba trabajando (**1fu**). Deberá seleccionar la opción **intervalo de crecimiento o de decrecimiento**, según corresponda. En la gráfica podrá visualizar en color rojo sobre el eje x, el intervalo correspondiente en el que se indican los extremos del mismo.

Función de segundo grado

Daniela Müller, Adriana Engler y Silvia Vrancken
Universidad Nacional del Litoral

Nancy Senn y Liliana Urso
Escuela de Educación Técnica Particular Incorporada N° 2010 IDESA

Función de segundo grado utilizando un software para graficar

Con la ayuda del programa Funciones para Windows, podemos graficar funciones en términos de sus parámetros.

En este trabajo representaremos funciones de segundo grado de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, en las que la variación de los parámetros a, b y c permite explorar el comportamiento de la gráfica tomando como referencia a la función $y = x^2$.

En las primeras siete actividades, se estudia la variación de las distintas representaciones de la función de segundo grado, a partir del análisis de cómo influyen en las mismas la modificación de los valores de los parámetros.

En las actividades 8 y 9 se espera que el alumno analice las distintas formas de expresar una función de segundo grado y las características propias de la misma. Para favorecer la resolución de ambas, se indican los comandos propios del programa que el alumno puede utilizar para corroborar sus respuestas.

—Guía para el alumno—

La siguiente es una secuencia de actividades diseñada para resolver utilizando el programa Funciones para Windows.

Se espera que a partir del análisis de diferentes representaciones, determine cómo se modifica la gráfica de una función de segundo grado al cambiar los parámetros que intervienen en su expresión algebraica.

Actividad 1.

a) Represente las siguientes funciones de segundo grado en un mismo sistema coordenado:

i) $y = x^2$ ii) $y = 2x^2 - 4x$ iii) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$

iv) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ v) $y = \frac{5}{4}x^2 - 10x + 15$

b) Analice el signo de "a" en cada una. ¿Es mayor o menor que cero? ....
Las ramas de la parábola, ¿se abren hacia arriba o hacia abajo? ....
c) Represente las siguientes funciones en un mismo sistema coordenado
i) $y = -x^2$ ii) $y = -2x^2 - 5x + 2$ iii) $y = -3x^2 + 6x$

iv) $y = -\frac{3}{5}x^2 - 2x + 1$ v) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

d) El signo de "a", ¿es mayor o menor que cero? ....
Las ramas de la parábola, se abren hacia ....
Por lo tanto:
Si $a > 0$, la parábola se abre hacia .... y si $a < 0$, la parábola se abre hacia ....

Actividad 2. Sea la función de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c pertenecen al conjunto de los números reales, siendo $a \neq 0$.

Considere el caso en que $b = c = 0$. Resulta así la función $y = ax^2$.

a) Reemplace "a" por el valor uno. Obtiene la expresión y = ...

b) Represente esta función considerando los intervalos [–4, 4] para las abscisas y [–2, 10] para las ordenadas. Esta recibe el nombre de función *base* o función de *referencia.*

c) Conservando la función anterior, en el mismo sistema de coordenadas represente las funciones que resultan de reemplazar "a" por 2, 3 y 4.

Nota: es conveniente que en el menú de entrada de datos ingrese de a una las funciones y observe las modificaciones que sufre la gráfica.

d) Comparando las gráficas de las funciones para los distintos valores de "a" con la de la función base, se concluye que si b = c = ... y a ...... 1, la gráfica de la parábola se "cierra" sobre el eje de las ....

Actividad 3. Considere el caso en que $b = c = 0$ y "a" tome los valores 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$

a) Represente en un mismo sistema de coordenadas las funciones que resultan de asignarle a "a" los valores dados.

b) Comparando las gráficas obtenidas con la de la función base, se concluye que si b = c = ... y 0 < a ...... 1, la gráfica de la parábola se "abre" con respecto al eje de las .... y a medida que es menor el valor de "a", se aproxima más al eje de las ....

Actividad 4. Considere el caso en que a = 1, c = 0 y "b" tome los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

a) Represente la función que resulta de asignarle a "b" el valor cero. La expresión de esta función resulta y = ... y es ....

b) Represente en un mismo sistema de coordenadas las funciones que resultan de asignarle a "b" los restantes valores.

c) Comparando las gráficas obtenidas con la de la función base, ¿cuál es el efecto del parámetro b? ....

d) Por lo tanto, si a = ..., c = ... y b ...... 0, la gráfica de la parábola se "desplaza" hacia la izquierda y hacia ....

Actividad 5. Considere el caso en que a = 1, c = 0 y "b" tome los valores 0, –1, –2, –3 y –4.

a) Represente la función de referencia que resulta de asignarle a "b" el valor cero.

b) Represente en un mismo sistema de coordenadas las funciones que resultan de asignarle a "b" los restantes valores negativos.

c) Comparando las gráficas obtenidas con la de la función base, ¿cuál es el efecto del parámetro "b"? ....

d) Por lo tanto, si a = ..., c = ... y b ...... 0, la gráfica de la parábola se "desplaza" hacia la .... y hacia abajo.

Actividad 6. Considere el caso en que a = 1, b = 0 y "c" tome los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

a) Represente la función base que resulta de asignarle a "c" el valor cero.

b) En el mismo sistema de coordenadas, represente las funciones que resultan de asignarle a "c" los demás valores.

c) Comparando las gráficas obtenidas con la de la función base, ¿cuál es el efecto del parámetro c? ....

d) Por lo tanto, si a = ..., b = ... y c ...... 0, la gráfica de la parábola se "desplaza" hacia ....

Actividad 7. De manera análoga a la actividad anterior, considere a = 1, b = 0 y que "c" tome los valores 0, –1, –2, –3 y –4.

a) Represente la función base.

b) En el mismo sistema de coordenadas, represente las funciones que resultan de asignarle a "c" los restantes valores negativos.

c) Por lo tanto, si a = ..., b = ... y c ...... 0, la gráfica de la parábola se "desplaza" hacia ....

Actividad 8. Sea la función de segundo grado $y = -x^2 - 2x + 3$.

a) Realice la gráfica considerando intervalos adecuados para cada una de las variables.

b) Calcule los ceros x_1 y x_2 de la función y corrobore su respuesta utilizando las opciones del programa.

c) Escriba la función en su forma factorizada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ y grafíquela en el mismo sistema coordenado donde representó la función dada. ¿Qué observa? ....

d) Calcule analíticamente la abscisa y la ordenada del vértice. Indique si corresponde a un punto de máximo o de mínimo de la función.

e) Determine el intervalo de valores de x para los que la función crece.

f) Establezca el intervalo en el que la función es decreciente.

g) Por lo tanto, si “a” es negativo, la función alcanza un valor .... en x = ..., es creciente en el intervalo .... y decreciente en ....

Actividad 9. Considere la función de segundo grado $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

a) Realice las actividades sugeridas en el ejercicio anterior en los ítems comprendidos desde a) hasta f).

b) Por lo tanto, si “a” es positivo, la función alcanza un valor .... en x = ..., es creciente en el intervalo .... y decreciente en ....

—Guía para el docente—

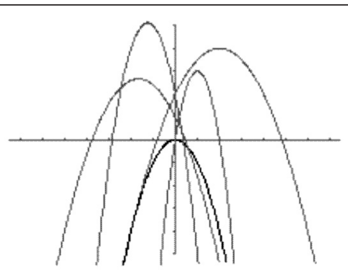
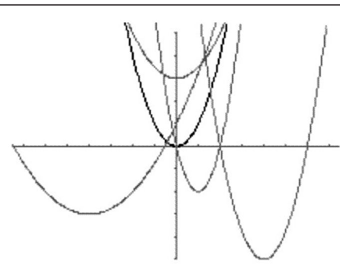
Análisis de las actividades

Se presentan a continuación algunas consideraciones sobre las actividades planteadas que podrá tener en cuenta en su implementación.

Actividad 1. En esta actividad se presentan dos grupos de funciones de segundo grado. En el primero, el signo del coeficiente principal de todas las funciones es positivo y en el segundo, negativo.

A partir del análisis de las gráficas de cada grupo de funciones, el alumno podrá determinar que si el signo de “a” es positivo, las ramas de la parábola se abren hacia arriba y si es negativo, hacia abajo.

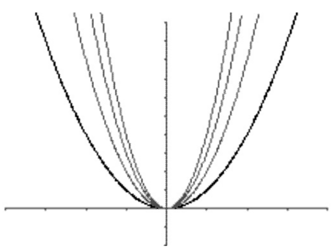
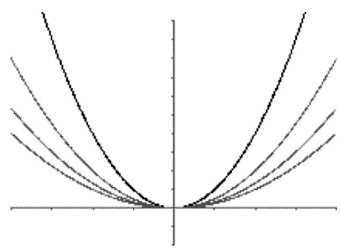
El aspecto de las mismas deberá ser como el que se muestra a continuación:

a > 0	a < 0
	

Actividades 2 y 3. En estas actividades se analiza de qué manera influye en la gráfica de la función de segundo grado el valor de “a” de acuerdo a que sea mayor o menor que uno. Si bien se considera sólo el caso en que “a” es positivo, las actividades pueden replicarse para valores negativos del coeficiente principal.

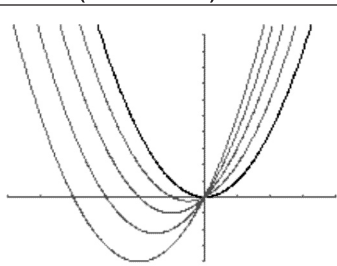
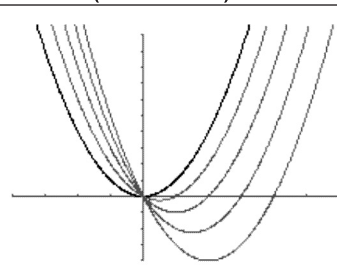
Considerando la expresión algebraica $y = ax^2 + bx + c$, se analiza aquí el caso en que b y c son nulos, resultando la función $y = ax^2$.

Asignándole a “a” el valor uno, se obtiene la expresión $y = x^2$, que es la función que se toma de referencia para analizar las diferentes modificaciones que sufre la gráfica. Las distintas representaciones para cada actividad se muestran a continuación:

$a > 1$ (Actividad 2)	**$0 < a < 1$ (Actividad 3)**
	

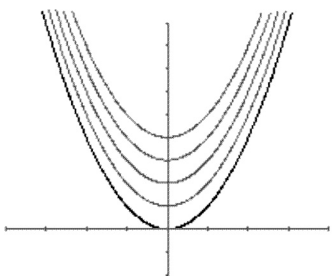
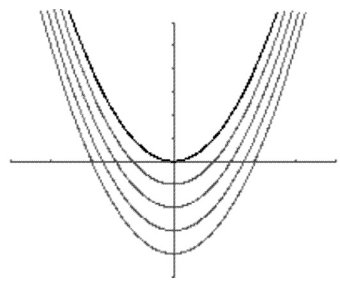
Observando las mismas el alumno deberá llegar a concluir que si se le asignan a “a” valores mayores que uno, las ramas de la parábola se cierran sobre el eje de las ordenadas. Si estos valores están comprendidos entre cero y uno, las ramas se abren con respecto al eje de las ordenadas. También puede decirse, en este último caso, que se aproximan más al eje de las abscisas.

Actividades 4 y 5. En estas actividades se analiza de qué manera influye en la gráfica de la función de segundo grado el valor de “b” de acuerdo con que sea mayor o menor que cero. A partir de la función de referencia, manteniendo nulo el valor de “c” y asignándole distintos valores a “b”, el alumno deberá obtener representaciones como las siguientes:

$b > 0$ (actividad 4)	**$b < 0$ (actividad 5)**
	

Observando las gráficas puede analizar que siendo a positivo, si se le asignan a “b” valores mayores que cero, la parábola se desplaza hacia la izquierda y hacia abajo, mientras que si los valores de “b” son menores que cero, la parábola se desplaza hacia la derecha y hacia abajo. Puede resultar interesante plantear el interrogante a los alumnos sobre cómo será el comportamiento de la gráfica de la función en el caso en que “a” sea negativo, manteniendo nulo a “c” y variando los valores de “b”.

Actividades 6 y 7. En estas actividades se analiza la influencia del valor del término independiente “c” en la gráfica de la parábola. A partir de la función de referencia, manteniendo nulo el valor de “b”, se le asignan distintos valores a “c”. Las gráficas que se obtienen son como las siguientes:

$c > 0$ (Actividad 6)	**$c < 0$ (Actividad 7)**
	

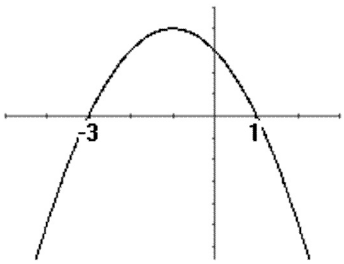
A partir del análisis de las representaciones se puede concluir que si “c” es positivo se observa un desplazamiento hacia arriba de la gráfica de la función, mientras que si “c” es negativo el desplazamiento es hacia abajo. Es oportuno e interesante proponer como tarea que analicen de manera similar la influencia de “c” en el caso en que “a” es negativo y “b” nulo.

Actividades 8 y 9. En estas actividades, mediante el desarrollo analítico de algunas consignas y el análisis de la gráfica que obtiene, se procura favorecer el desarrollo de las habilidades para trabajar entre las distintas representaciones de un mismo concepto.

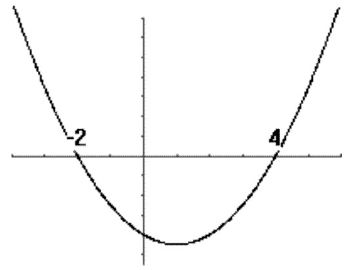
Al solicitar el cálculo analítico de los ceros de la función dada y de las coordenadas del vértice, el alumno podrá realizarlo si esos conceptos fueron dados con anterioridad.

Las gráficas que puede obtener para cada actividad se presentan a continuación:

Actividad 8



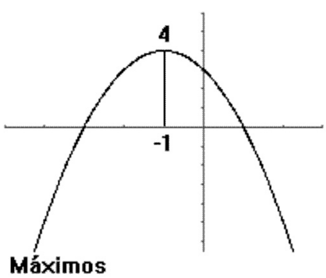
Actividad 9



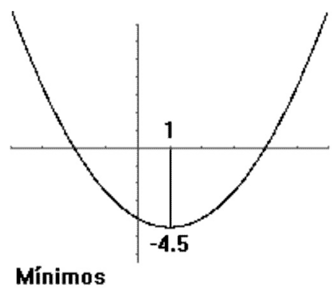
En las mismas se muestran los ceros de cada función tal como lo presenta el programa al seleccionar la opción **Raíces** del menú que se despliega al presionar **1fu**.

Para corroborar la respuesta al ítem **d)**, puede seleccionar en el mismo menú la opción **Máximos** para la actividad 8 o **Mínimos** para la 9. Los números que se observan en cada caso corresponden a las coordenadas del vértice de cada función representada. Al seleccionar estas opciones, las gráficas son como las siguientes:

Actividad 8



Actividad 9



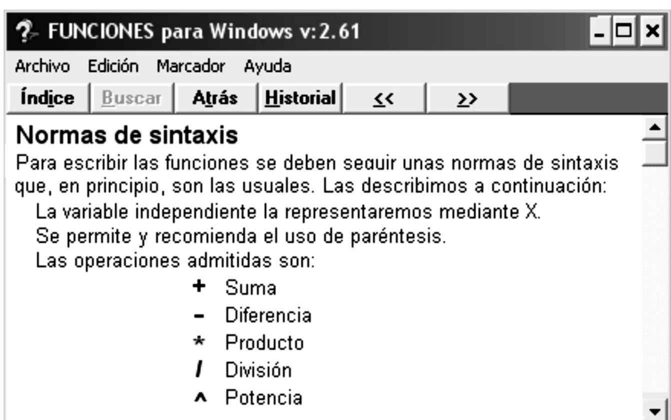
A partir de la observación de estas gráficas resulta más sencillo determinar en cada caso, los valores de x para los cuales a función es creciente y el intervalo donde es decreciente. El alumno puede corroborar su respuesta seleccionando la opción **intervalo de crecimiento** o **de decrecimiento** del menú superior.

Anexo

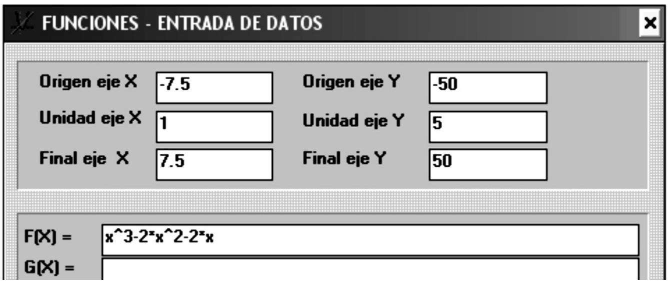
Guía para el uso del programa *Funciones*

El programa Funciones para Windows versión 2.7 puede descargarse gratuitamente desde la página del autor: http://www.lagares.org

Para acceder al menú de ayuda, se puede presionar el botón correspondiente en la pantalla principal o la tecla F1 una vez que se presenta la gráfica en pantalla. En este menú, en el ítem referido a funcionamiento, pueden observarse las siguientes normas de sintaxis:

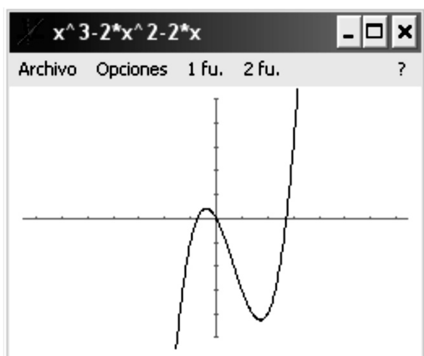


Por ejemplo, si se desea representar la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x$, respetando las normas de sintaxis, en el cuadro correspondiente a la función F(x) se introduce $x^3 - 2x^2 - 2x$ como se muestra a continuación:

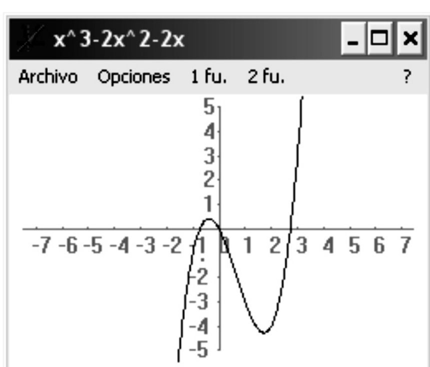


En Origen y Final, tanto del eje X como del eje Y, deben escribirse los valores que determinan los límites inferior y superior de los intervalos en los cuales se verá la gráfica de la función. Por defecto, estos valores son [–7,5; 7,5] para el eje de las abscisas y [–5, 5] para el eje de las ordenadas.

Una vez completado esto, para visualizar la gráfica, presione el botón **Aceptar**. Para el ejemplo presentado, se obtiene lo siguiente:

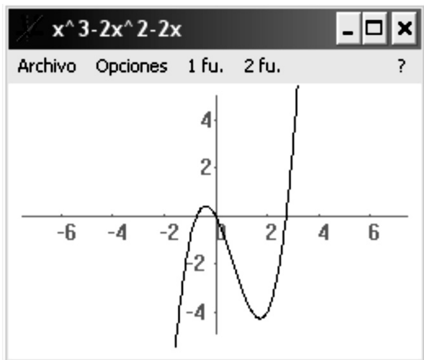


En la barra superior, al presionar **Opciones**, se despliega un menú en el que si selecciona **Valor unidad ejes** resulta:



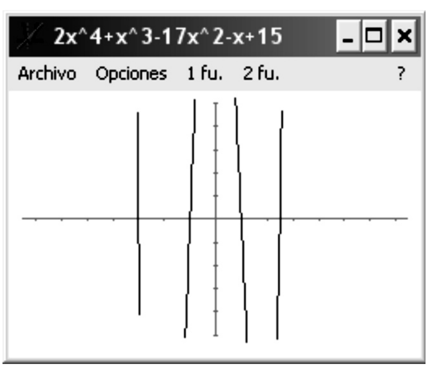
Si desea volver al menú donde se ingresa la expresión de la función, del menú que se despliega al presionar **Archivo**, seleccione **Cambiar funciones o parámetros**. Allí podrá modificar la expresión algebraica ingresada, agregar otras o modificar los extremos de los intervalos de variación de ambas variables y la escala.

En el ejemplo anterior, si en el menú de entrada de datos se modifica, por ejemplo, el valor de la escala por 2, resulta la siguiente gráfica:

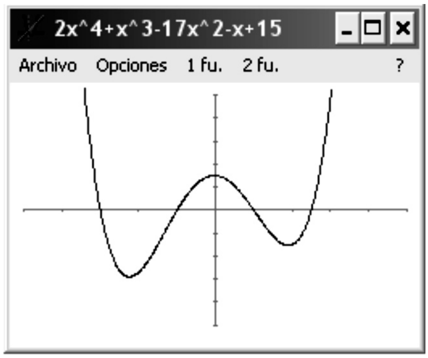


La modificación de este valor de la escala es importante para presentar una gráfica que no esté tan sobrecargada y en especial cuando los extremos de los intervalos son valores muy grandes.

Consideremos la función $y = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - x + 15$. Utilizando los intervalos de variación que por defecto presenta el programa, se obtiene:



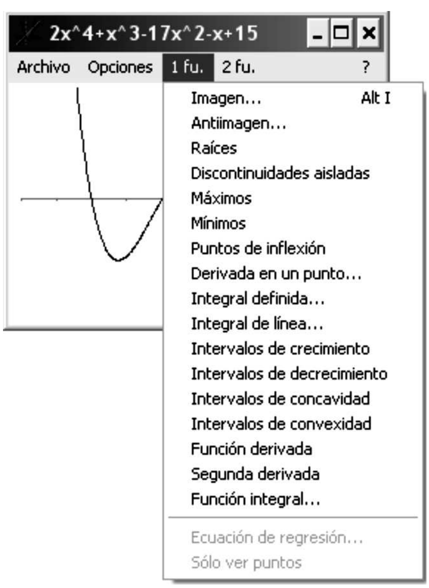
Modificando los extremos de los intervalos de variación para x y para y (rango de visualización) se obtienen distintas visualizaciones de esta función. Por ejemplo, si se toma $[-5, 5] \rightarrow [-50, 50]$ se obtiene la siguiente gráfica donde pueden observarse las características propias de una función polinomial de grado cuatro:



En este caso, se ha considerado como valor de escala para las abscisas uno y para las ordenadas, diez.

Una vez que se ha representado la función, utilizando comandos propios del programa es posible determinar las características propias de la función.

En la barra superior, al presionar la opción **1fu**, se despliega un menú que sólo está activo cuando se representa una única función. Su aspecto es el siguiente:



Algunas de las opciones que allí figuran se describen a continuación:

• *Imagen:* Se presenta un cuadro de diálogo en el que al introducir un valor de x se obtiene el correspondiente valor de la imagen en la función representada. Si este valor de x se encuentra dentro del intervalo de graficación, se representa gráficamente la imagen que le corresponde. Los botones <**-i** y **d-**> muestran las imágenes para valores de x próximos a la izquierda o a la derecha del ingresado.

• *Antiimagen:* a través de un cuadro de diálogo, al ingresar un determinado valor de la ordenada que debe encontrarse dentro del intervalo de variación establecido para y, se indican de manera dinámica las abscisas de los puntos que corresponden a dichas ordenadas.

• *Raíces:* se muestran los ceros de la función, es decir las abscisas de los puntos para los que la función vale cero.

• *Máximos y Mínimos:* se muestran de manera dinámica las coordenadas de los puntos de máximo o de mínimo respectivamente.

• *Puntos de inflexión:* se dan las coordenadas de los puntos donde la gráfica de la función cambia su concavidad.

• *Intervalos de crecimiento:* sobre el eje de las abscisas se muestran en color rojo los intervalos en los que la función es creciente y se indican los extremos de los mismos.

De manera similar se muestra lo correspondiente a *Intervalos de decrecimiento, de concavidad y de convexidad*.

Referencias bibliográficas

Altman, S.; C. Comparatore y L. Kurzrok (2002): *Matemática. Polimodal. Funciones 1,* Buenos Aires, Argentinal, Longseller.

Berio, A.; M. Colombo; C. D'Albano; O. Sardella y I. Zapico (2001): *Matemática 1 Activa.* Buenos Aires, Argentina, Puerto de Palos, Casa de Ediciones.

Brousseau, G. (1986): "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas", *Reserches en Didactique des Mathématiques 7 (2)*, 33-115 [traducido por Pérez J. y otros].

Cabañas, G. y R. Cantoral (2007): "La integral definida: un enfoque socioepistemológico", C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (eds.): *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* México, Ediciones Díaz de Santos, pp. 2-25.

Cabrera, L. y J. Zaldívar (2007): "Formación didáctica en cálculo universitario. Una propuesta basada en el diseño de actividades como eje rector", G. Buendía y G. Montiel (eds.): *Memoria XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* México, pp. 396-407. [Extraído el 24 de junio de 2009 desde http://www.red-cimates.org.mx/Documentos/xieime.pdf]

Camargo, L. y A. Guzmán (2005): *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón,* Colombia, Cooperativa Editorial Magisterio.

Cantoral, R. (1995): *Matemática, matemática escolar y matemática educativa.* Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, La Habana, Cuba, 1, 1-10.

—— (2003): "Pensamiento matemático avanzado: una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis", R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza: *Desarrollo del pensamiento matemático.* México DF, México, Trillas, pp. 205-218.

Cantoral R. y R. Farfán (2000): "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8.* Sevilla, España, Grupo Editorial Ibero América, pp. 69-91.

Cantoral, R.; R. Farfán; F. Cordero; J. Alanís; R. Rodríguez; A. Garza (2003): *Desarrollo del pensamiento matemático*, México DF, México, Trillas.

Cantoral, R. y G. Montiel (2001): *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*, México DF, México, Pearson Education.

Demana, F.; B. Waits; G. Foley; D. Kennedy (2007): *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*, México, Pearson Educación.

Dolores, C. (2004): "Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas, concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7 (3)*, 195-218.

—— (2007): "La derivada y el cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas", C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (eds.): *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula,* México, Ediciones Díaz de Santos, pp. 169-204.

Douady, R. (1995): "La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento", M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.): *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Bogotá, Una Empresa Docente, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 61-96.

Duart, J. y A. Sangrá (comp.) (2000): *Aprender en la virtualidad*, Barcelona, Gedisa SA.

Duval, R. (1998): "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento", F. Hitt (ed.): *Investigaciones en Matemá-*

tica Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp. 173-201. [Traducción de Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5, (1993).]

Engler, A; D. Müller; S. Vrancken; M. Hecklein (2008): *Funciones*, 2ª ed. Santa Fe, Argentina; Ediciones UNL.

Fernández, E.; G. Moretto; L. Oviedo; N. Mamut; L. Contini; S. Vaira; L. Taborda; Z. Arralde; V. Cámara; S. Bernardis; G. Imbach (2008): *Matemática para el ingreso*, 4ta ed. Santa Fe, Argentina, Ediciones UNL.

Flores, F. (2008): *Historia y didáctica de la trigonometría.* España, Publicatuslibros.com. [Extraído de http://www.publicatuslibros.com/ fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Francisco_Luis_Flores_Gil_Historia_y_Didactica_de_la_Trigonometria.pdf]

Hitt, F. (2003): "Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2)*, pp. 213-223.

Kaczor, P.; R. Schaposchnick; E. Franco; R. Cicala; B. Diaz (1999): *Matemática 1*, Buenos Aires, Argentina, Santillana.

López, A.; C. Pellet; N. Camus (coord.) (2004): *Matemática en Red 9*, Buenos Aires, Argentina, a-Z editora.

Moreno, M. (2005): "El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros", A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (eds.): *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Córdoba, España, pp. 81-96.

Pisano, J. (2009): Logikamente. Tomo III. Buenos Aires, Ediciones Logikamente.

Prado, C.; R. Santiago; G. Aguilar; G. Rodríguez; M. Quezada; J. Gómez; B. Ruiz; A. Florido, A. (2006): *Precálculo. Enfoque de resolución de problemas*, México, Pearson Educación.

Sadovsky, P. (2005): *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Seveso de Larotonda, J.; A. Wykowski; G. Ferrarini (1999): *Matemática 9 EGB-2º año*, Buenos Aires, Argentina, Kapelusz.

Socas, M. (1999): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria", L. Rico (coord.), E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. Socas: *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* Buenos Aires, Erre Eme SA, pp. 125-154.

Schaposchnik, R. (coord.) (2008): *Nueva carpeta de matemática II*, Buenos Aires, AIQUE.

—— (2008): *Nueva carpeta de matemática II*I, Buenos Aires, AIQUE.

—— (2006): *Nueva carpeta de matemática IV*, Buenos Aires, AIQUE.

—— (2007): *Nueva carpeta de matemática V*, Buenos Aires, AIQUE.

Stewart, J.; L. Redlin; S. Watson (2001)*: Precálculo*, México, International Thomson Editores.

Valero, M. (2003): *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México [Extraído el 03 de marzo de 2008 desde http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/valero_2003.pdf]

Villarreal, M. (2003): "Pensamiento matemático, cálculo diferencial y computadoras", *Educación Matemática 15(1)*, 99-122.

—— : "La investigación en educación matemática: ¿qué ocurre en Argentina?". [Extraído el 01 de febrero de 2010 desde http://www.santafe-conicet.gov.ar/notiuma/confmonica.pdf]

Zaldívar, J. (2006): *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo,* Mérida, Yucatán, México. [Extraído el 04 de marzo de 2008 desde http://www.matematicas.uady.mx/dme/ docs/tesis /Tesis_DavidZaldivar.pdf]

Zapico, I.; M. Micelli; S. Tajeyan; J. Vera Ocampo (2007): *Matemática*, Buenos Aires, Santillana.

Zuñiga, L. (2007): "El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo", *revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1)*, 145-175.