UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis Armónico**

Título de la tesis:

Operadores asociados a semigrupos de funciones de Laguerre

Institución donde se realizó:
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL)
Autor:
Aníbal Chicco Ruiz

Director de Tesis
Dra. Eleonor Harboure

Defendida ante el jurado compuesto por:

Dr. Francisco Martín Reyes

Dr. Ricardo Testoni

Dr. Roberto Scotto

Año de presentación: 2012

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por permitirme estudiar y apoyarme en todos los caminos que elegí.

A todos lo miembros de IMAL, en especial a mis compañeros de carrera y de oficina (Nacho, Pablo, Fer, Bruno, Marilina, Emilia, Ivana, María, Pamela, Will, Marce, Mauri, Marisa, Edu, Adrián... a todos) por su buena onda y por toda la ayuda que siempre pido y nunca me han negado.

A los profesores de la FIQ, simpre cercanos y disponibles, que hicieron de estudiar matemática una experiencia agradable y maravillosa.

A aquellos amigos que he conocido en congresos. Por nombrar a algunos: a Walter Carballosa Torres, mi primer amigo en un viaje, a Yamilet Quintana que me enseñó, en la mesa de un bar y con su agradable compañia, otra forma de hacer matemática, a Jorge Betancor y su grupo por ser tan bellas y amables personas, a Sundaram Thangavelu, que encontró poesía en el análisis armónico.

A las cosas que me hacen bien: los amigos, los viajes, la música y la literatura.

A mis compañeros de trabajo en la FICH, especialmente a Mario Garelik, que me enseña cada año el valor y el compromiso de la enseñanza.

Al CONICET y el IMAL por el apoyo económico.

Y muy especialmente a mi directora, Pola, por todos estos años que hemos trabajado juntos en esto, por su buen humor, sus conocimientos, su claridad y su infinita paciencia, por ayudarme en esta tesis mucho más allá de sus obligaciones, porque gracias a ella logré terminarla, a pesar de mi mismo. A ella le dedico este trabajo.

PRÓLOGO

Por la ventana de la oficina de Pola se ven las copas peladas de esos árboles oscuros sin hojas, cuyas ramas se bifurcan muchas veces y presentan torsiones como de resortes y pareciera que no les afecta la gravedad. Mirarlos es también mirar el cielo que cambia de tono a medida que oscurece. El árbol frente a mí encierra algo más que lo que simplemente se ve en su compleja maraña de ramas. Parecen dibujos, símbolos, señales. Cada vez que me distraigo y miro por la ventana está ahí, imperturbable, con su corteza negra por la humedad, con una vida lenta y sutil pero firme. La pantalla lisa del cielo se entiende perfectamente con él y le da palabras al cambiar, suavemente, de color: del celeste al naranja y de ahí al violeta, que se oscurece hasta hacer perder su contorno. Si uno mira fijo lo encuentra pero el día terminó y se conoce la hostilidad que suelen tener los árboles por la noche. Su mancha negra no trasmite más emoción que las paredes de los caserones o los adoquines.

Por la ventana abierta, se cuelan las máquinas de lata y ruido que ahora, con esas luces, atraviesan la avenida.

RESUMEN

En esta Tesis estudiaremos la continuidad de algunos operadores que surgen del semigrupo del calor $\{e^{-t\mathrm{L}}\}_{t\geq 0}$, donde L es un operador diferencial cuyas autofunciones forman una base en $L^2(0,\infty)$ respecto de una medida $d\mu$ para la cual L es autoadjunto. Más precisamente, para cada valor de un parámetro $\alpha > -1$, consideraremos tres operadores diferenciales, que generan tres sistemas diferentes de funciones de Laguerre. Como es sabido, estas funciones se obtienen a partir de los polinomios de Laguerre, que para cada valor de α, forman un sistema ortogonal y completo en $L^2(\mathbb{R}^+, x^\alpha e^{-x}dx)$, donde $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Expansiones de este tipo han sido estudiadas por [**Mar82**], [**Muc69**], [**Muc70**], [**Ste94**], [**Ste92**], [**Ste90**], [**MST05**], [**MST06**], [**Tha93**], [**Tha90b**], [**Tha90a**], [**Now03**], [**NS09**], entre otros.

En este contexto, analizaremos, para cada sistema y para cada valor del parámetro α, el operador maximal asociado al semigrupo, $\mathrm{T}^* = \sup_{t>0}|e^{-t\mathrm{L}}|$, y las correspondientes integrales fraccionarias o potenciales de Riesz $\mathrm{L}^{-\sigma}$, con $\sigma > 0$.

La idea subyacente para el tratamiento de estos operadores, como en el caso de otros semigrupos, consiste en descomponerlos en lo que llamaremos la parte local y la parte global. Para los sistemas de Laguerre, la localización de un operador R viene dada por $\mathrm{R}_{loc}f(x) = \mathrm{R}(f\chi_{(\frac{x}{4},4x)})(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. La conveniencia de considerar esta descomposición es que los operadores que queremos estudiar, al ser localizados, se comportan como las correspondientes localizaciones de los operadores asociados al semigrupo del calor clásico. De esta manera, el problema de estudiar acotaciones con pesos para operadores de Laguerre conlleva conocer previamente resultados sobre acotaciones con pesos para operadores clásicos localizados. Así, por ejemplo, es conocido (ver [**NS06**]) que la Maximal Local de Hardy-Littlewood es acotada en $L^p(\omega)$ cuando ω pertenece a la clase

A^p local, esto es, satisface la condición A^p de Muckenhoupt sólo para intervalos (a, b) tales que $0 < a < b < 2a$. En cuanto a la parte global de los operadores de Laguerre, serán estimados en términos de operadores tipo Hardy generalizados, para los cuales será necesario entonces obtener condiciones sobre los pesos que impliquen su continuidad.

Para el operador maximal del semigrupo, estableceremos resultados de continuidad de tipo fuerte, débil y débil restringido (p, p), $1 \leq p \leq \infty$, con respecto a cierta clase de pesos definidos en $\mathbb{R}^+$. Nuestro propósito será hacer un análisis completo, buscando el rango óptimo para cada parámetro involucrado. Este objetivo será totalmente alcanzado para pesos potencia, donde obtendremos condiciones necesarias y suficientes para cada tipo de continuidad. Sin embargo, para pesos más generales, sólo obtendremos condiciones suficientes que pueden expresarse mediante una condición de tipo Muckenhoupt. Estos resultados constituyen un refinamiento de los obtenidos por Stempak en [**Ste94**] y Macías, Segovia y Torrea en [**MST05**] y [**MST06**].

Si bien estos operadores maximales son acotados para $p = \infty$, cabe preguntarse si ellos pueden ser extendidos continuamente a un espacio más grande, de tipo BMO. En el caso del semigrupo del calor clásico, esto no es posible ya que hay ejemplos de funciones BMO tales que, al aplicarles el operador maximal asociado, dan por resultado una función que es infinito en todo punto. No obstante, como veremos en esta tesis, es posible definir espacios intermedios entre L^∞ y el BMO clásico de John y Niremberg, para los cuales los operadores maximales asociados a los sistemas de Laguerre resultan continuos.

Más generalmente, introduciremos una familia de espacios pesados, de tipo BMO, asociados a una función $\tau(x)$, que llamaremos "radio crítico" (ver Definición 3.2.1 del capítulo 3, sección 2), y demostraremos que tanto la función maximal de Hardy-Littlewood como el operador maximal del calor clásico, cuando son localizados en el sentido descripto anteriormente, resultan acotados en dichos espacios, si el peso pertenece a la clase A^1 local. Estos espacios se definen imponiendo, además de la oscilación media acotada, una condición de acotación de los promedios sobre bolas cuyo radio excede el valor crítico dado por τ en su centro (ver Definición 3.2.2 en el capítulo 3).

Volviendo al contexto de los sistemas de Laguerre presentados, los espacios BMO con pesos apropiados se obtienen considerando funciones de radio crítico particulares, siendo éstas distintas para cada sistema. Las condiciones sobre los pesos para la continuidad de los operadores maximales estarán dadas por la clase A^1 local y por otras condiciones que surgen del análisis de la parte global de los mismos (ver teoremas 3.4.1 y 3.5.1 en las secciones 3.4 y 3.5 respectivamente). Más aún, englobaremos estas condiciones en una única y más sencilla condición suficiente que tiene un aspecto similar a la definición de la clase A^1 de Muckenhoupt. (ver Teorema 3.6.1 en la sección 3.6 y el Teorema 3.7.1 en la sección 3.7).

Con respecto a la integral fraccionaria $\mathrm{L}^{-\sigma}$, con $0 < \sigma < \alpha + 1$, haremos un análisis similar al del operador maximal del semigrupo, pero esta vez considerando acotaciones de tipo fuerte, débil, débil dual y débil restringido (p, q) en la región $\Delta_\sigma = \{1 \leq p, q \leq \infty : \frac{1}{p} - \sigma \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma\}$ (con 2σ en lugar de σ para uno de los sistemas de funciones de Laguerre). En el interior de esta región daremos condiciones suficientes para el tipo fuerte en términos de la clase $A^{p,q}$ de Muckenhoupt respecto de una medida adecuada que depende de α (ver Teorema 4.3.1 en el capítulo 4, sección 2). De manera similar, presentaremos una clase de pesos cuya condición será suficiente para el tipo débil $(1, q)$ (ver Teorema 4.3.3, sección 4.2). Para el caso particular de pesos potencia, estableceremos condiciones necesarias y suficientes para todos los tipos de continuidad mencionados, analizando completamente la región Δ_σ (ver Teorema 4.9.1, sección 4.7).

La organización de los temas mencionados anteriormente es la siguiente:

En el Capítulo 1 introducimos todos los elementos básicos para el desarrollo de esta tesis. Allí encontraremos las definiciones de los sistemas de Laguerre y sus propiedades, y mostraremos cómo cada operador del semigrupo puede expresarse mediante un operador integral. Dado que los núcleos de estos operadores involucran funciones de Bessel, recordamos algunas estimaciones que serán esenciales en nuestro trabajo. Asimismo, introducimos las clases de pesos de Muckenhoupt locales y algunas de sus propiedades, en particular su relación con la maximal local de Hardy-Littlewood y su versión fraccionaria. Finalmente, recopilamos una serie de resultados relativos a la acotación con pesos de generalizaciones de operadores de tipo Hardy.

En el capítulo 2 presentamos los resultados concernientes a los operadores maximales de cada semigrupo de Laguerre sobre continuidad de tipo fuerte, débil y débil restringido, primero para pesos potencias, y luego considerando pesos más generales. Aquí introduciremos, con todo detalle, las técnicas básicas para el tratamiento de los operadores y su relación con los operadores clásicos y de Hardy.

En el capítulo 3, introducimos la familia de espacios pesados de tipo BMO asociados a una función radio crítico, probando además la continuidad en ellos de los operadores clásicos localizados. Asimismo, como una aplicación de este estudio, obtendremos acotaciones con pesos de los operadores maximales de los semigrupos de Laguerre sobre espacios BMO apropiados.

En el capítulo 4, presentamos y probamos los resultados de continuidad para las integrales fraccionarias asociadas a los semigrupos de Laguerre.

Finalmente, en el apéndice incluimos un resultado original referente a la acotación de la maximal de Hardy-Littlewood local actuando sobre una versión local del espacio BMO, con pesos en A^1_{loc}, extendiendo así el estudio realizado por Nowak y Stempak en [**NS06**]. La inclusión de este resultado en esta tesis no es caprichosa ya que será una herramienta esencial para obtener la continuidad de la maximal local en los espacios BMO definidos en el capítulo 3. Hemos elegido ponerlo en un apéndice ya que es un resultado interesante en sí mismo y a la vez independiente de los sistemas de Laguerre.

Para terminar, mencionamos que los resultados del capítulo 2 han sido publicados (ver [**CRH07**]) al igual que los del apéndice (ver [**CRH09**]). Los contenidos del capítulo 3 han dado origen a un artículo que será en breve enviado para su publicación.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Sea L un operador diferencial definido sobre ciertas funciones, reales o complejas, medibles en un espacio $(E, d\mu)$. Supongamos que L tiene espectro $\{\lambda_k : k \in I\}$, donde I puede ser discreto o continuo, y que L es positivo y autoadjunto, de manera que cada λ_k es positivo. Es fácil ver que la ecuación del calor generalizada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{L}u$$

admite la solución

$$u(x,t) = e^{-\lambda_k t}\psi_k(x),$$

para todo $k \in I$, donde λ_k es un autovalor de L y ψ_k su respectiva autofunción. La condición inicial $u(x,0) = f(x)$ se satisface si $f = \psi_k$. Luego, todas las funciones f que sean combinaciones lineales finitas de las autofunciones de L proveen una solución a la ecuación diferencial

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -Lu \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

A partir de esto consideraremos una familia de operadores $\{T_t\}_{t\geq 0}$, definidos, en un principio, sobre $H_{\mathrm{L}} = gen\{\psi_k\}_{k\in I}$, es decir, las combinaciones lineales finitas de $\{\psi_k\}$, de la siguiente manera:

si

$$f(x) = \sum_{k\in I_f} c_k\psi_k(x)$$

con constantes c_k, siendo I_f un conjunto de índices finito, entonces

$$(0.2) \qquad T_t f(x) \doteq \sum_{k\in I_f} e^{-t\lambda_k} c_k\psi_k(x).$$

A esta familia de operadores $\{T_t\}_{t\geq 0}$ la llamaremos **semigrupo del calor asociado a** L. Por las propiedades que veremos a continuación, a cada operador del semigrupo se lo suele denotar como $e^{-t\mathrm{L}}$.

Para cada $f \in H_{\mathrm{L}}$ y cada $x \in E$, tenemos que $T_t(T_s f)(x) = T_{t+s}f(x)$, para todo $t, s \geq 0$, y que $T_0 f(x) = f(x)$. Es decir,

- $T_t T_s = T_{t+s}$ y
- $T_0 = id$,

que son las características de un **semigrupo de operadores**, según Pazy en [**Paz83**]. Siguiendo las definiciones de ese libro, es fácil ver que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es también un semigrupo **fuertemente continuo**, es decir, fijos $f \in H_{\mathrm{L}}$ y $x \in E$, la función que asigna a cada t el valor $T_t f(x)$, es continua en $[0, \infty)$. Además, puede probarse que $-\mathrm{L}$ es el **generador infinitesimal** de $\{T_t\}_{t\geq 0}$, es decir

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = -Lf(x),$$

y que $u(x,t) = T_t f(x)$ *es solución a la ecuación del calor* (0.1), para todo $f \in H_{\mathrm{L}}$. Esta última propiedad es la razón de ser del semigrupo. Cuando $\mathrm{L} = -\Delta$, siendo $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ el Laplaciano, se obtiene el semigrupo del calor clásico y su estudio conforma una de las bases del análisis armónico. Observaremos aquí que si $\{\psi_k\}$ forman una base ortonormal de $L^2(E, d\mu)$, en particular, H_{L} es denso y podemos extender la definición de T_t a todo $L^2(E, d\mu)$, pues si $\sum c_k\psi_k$ converge en L^2, $\sum e^{-t\lambda_k} c_k \psi_k$ también. Las propiedades de semigrupo serán ciertas sólo en el sentido de L^2.

Como veremos más adelante, la definición de T_t se puede extender a más funciones, aunque no siempre se obtendrá una solución a la ecuación (0.1). Sin embargo, estudiando el **operador Maximal asociado al semigrupo**, dado por

$$T^* f(x) \doteq \sup_{t>0} |T_t f(x)|, \tag{0.3}$$

se puede saber para qué funciones y en qué sentido tendremos que se satisface la condición de borde $\lim_{t\to 0^+} T_t f = f$. Por ejemplo, por el Teorema 2.2 del libro de J. Duoandikoetxea, [**Duo01**], sabemos que si T^* es el operador maximal asociado a $\{T_t\}$, una familia cualquiera de operadores lineales en $L^p(E, d\mu)$, y si T^* es de tipo débil (p, q), entonces el conjunto

$$\left\{ f \in L^p(E, d\mu) : \lim_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x) c.t.p. \right\}$$

es cerrado en $L^p(E, d\mu)$. Para el caso en que $\{T_t\}$ es el semigrupo asociado a L, sabemos que H_{L}, las combinaciones lineales finitas de las autofunciones de L, está contenido en ese conjunto. Si además sucede que H_{L} es denso en $L^p(E, d\mu)$, tendremos que $\lim_{t \to 0^+} T_t f(x) = f(x)$ en *c.t.p.*, para toda función f en ese espacio. Por ese motivo, el operador Maximal T^* es uno de los operadores que nos interesará estudiar.

A partir del semigrupo $\{T_t = e^{-t\mathrm{L}}\}_{t \geq 0}$, podemos definir otros operadores, usando fórmulas de subordinación válidas en los reales. Por ejemplo, a partir de la fórmula

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du, \tag{0.4}$$

válida para todo $\beta > 0$, se define el **semigrupo de Poisson**, $\{P_t\}_{t \geq 0}$ o $\{e^{-t\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}}\}_{t \geq 0}$, de la siguiente manera:

$$P_t f(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T_{\frac{t^2}{4u}} f(x) du,$$

para cada $t > 0$, y su respectivo operador maximal asociado,

$$P^* f(x) \doteq \sup_{t > 0} |P_t f(x)|.$$

Si consideramos expansiones de las autofunciones de L, tenemos

$$P_t(\sum c_k \psi_k)(x) = \sum e^{-t\lambda_k^{\frac{1}{2}}} c_k \psi_k(x).$$

Definido en un principio, al igual que $\{T_t\}$, en H_{L} y en $L^2(E, d\mu)$, el semigrupo de Poisson provee una solución a la ecuación de Laplace generalizada, es decir, $u(x, t) = P_t f(x)$ satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Observar que de la fórmula de subordinación (0.4) se deduce $\mathrm{P}^*f \leq \mathrm{T}^*f$ y así todos los resultados de acotación que pueden obtenerse para T^* resultarán válidos sobre espacios donde la norma sea monótona, es decir, donde $0 \leq f \leq g$ implique $\|f\| \leq \|g\|$.

También podemos definir el operador $\mathrm{L}^{-\sigma}$, llamado **Potencial de Riesz** o **integral fraccionaria** de orden $\sigma > 0$. A partir de la fórmula

$$\lambda^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-t\lambda} t^\sigma \frac{dt}{t}$$

válida para todo λ real, se define

$$\mathrm{L}^{-\sigma} \doteq \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty T_t f(x) t^\sigma \frac{dt}{t}.$$

Si f es una expansión de $\{\psi_k\}$, tendremos

$$\mathrm{L}^{-\sigma}(\sum c_k \psi_k)(x) = \sum \lambda_k^\sigma c_k \psi_k(x).$$

Cuando L es un operador diferencial de segundo orden, como $\mathrm{L} = -\Delta$, representando la "derivada" de orden 2, tendremos que, de manera formal, $\mathrm{L}^{-\frac{\sigma}{2}}$ representa la "integral" de orden σ.

Nos interesa estudiar la continuidad del semigrupo del calor entre ciertos espacios de funciones, y también la de los operadores que surgen de él. Para eso, nos gustaría extender la definición del semigrupo a más funciones, además de aquellas de H_{L} y $L^2(E, d\mu)$, y tener una expresión de los operadores que sea más simple para trabajar. Para eso observaremos a continuación que, bajo ciertas condiciones, cada T_t puede escribirse como un operador integral contra un núcleo.

Supongamos que las funciones $\{\psi_k\}_{k\in I}$ forman una base ortonormal en $L^2(E, d\mu)$. Entonces, tenemos que

$$f(x) = \sum_{k\in I} < f, \psi_k > \psi_k(x)$$

y

$$T_t f(x) = \sum_{k\in I} e^{-t\lambda_k} < f, \psi_k > \psi_k(x), \tag{0.5}$$

donde la igualdad es en el sentido de $L^2(E, d\mu)$ si f está en ese espacio, y puntual si $f \in H_{\mathrm{L}}$. En ese caso, las sumas serán finitas pues $< f, \psi_k >= 0$ si ψ_k no está en la expresión de f.

Escribiendo como integral el producto interno $< f, \psi_k >= \int_E f(x)\bar{\psi_k}(x)d\mu(x)$ en la expresión (0.5), y sacándolo afuera de la suma, tenemos que

$$T_t f(x) = \int_E W_{\mathrm{L}}(t, x, y) f(y) d\mu(y), \tag{0.6}$$

donde

$$W_{\mathrm{L}}(t, x, y) = \sum_{k \in I} e^{-t\lambda_k} \psi_k(x) \bar{\psi_k}(y). \tag{0.7}$$

Cuando este núcleo, que llamaremos **núcleo del calor**, esté bien definido, siendo la suma una integral en el caso en que el espectro I sea continuo, tendremos una expresión integral para el operador T_t, dada por (0.6).

Es claro que cuando obtenemos una fórmula puntual para el núcleo (0.7), (lo que sucede en la mayoría de los casos tratados) esta expresión del semigrupo como operadores integrales tiene sentido para una mayor cantidad de funciones que las de H_{L}, aunque no siempre obtendremos una solución a la ecuación (0.1). Diremos que $u(x, t) = T_t f(x)$ provee una solución *formal* a la ecuación del calor.

Como dijimos, el núcleo del calor tiene en muchos casos una expresión puntual. Por ejemplo:

HERMITE: En el libro de Thangavelu [**Tha93**], se puede ver que el operador $\mathrm{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, sobre el espacio $(\mathbb{R}, dx)$, tiene como autofunciones a las funciones de Hermite

$$h_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x),$$

donde H_k son los polinomio de Hermite, dados por la fórmula

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}) e^{x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $k = 0, 1, 2, ...$ Por la fórmula de Mehler, sabemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)h_k(y)w^k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-w^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+w^2}{1-w^2}(x^2+y^2)+\frac{2w}{1-w^2}xy} \tag{0.8}$$

para todo $|w| < 1$. Luego, haciendo $w = e^{-2t}$ y multiplicando la ecuación anterior por $e^{-t} = w^{\frac{1}{2}}$, tendremos una fórmula para el núcleo del semigrupo del calor:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{L}}(t,x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)h_k(y)e^{-t(2k+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-2t}}{1-e^{-4t}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1+e^{-4t}}{1-e^{-4t}}(x^2+y^2) + \frac{2e^{-2t}}{1-e^{-4t}}xy\right) \end{aligned}$$

que, como puede verse, es un núcleo simétrico y positivo. Si consideramos los polinomios de Hermite $n-$dimensionales, que resultan autofunciones del operador $\mathrm{L} = -\Delta + |x|^2$, también hay una fórmula que nos permite escribir puntualmente el núcleo del calor, y de la que puede verse que es también simétrico y positivo.

LAGUERRE: Íntimamente relacionados con los polinomios de Hermite se encuentran los polinomios de Laguerre. Los sistemas de funciones obtenidos a partir de ellos formarán bases ortonormales en L^2 sobre $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ con diferentes medidas, y serán también autofunciones de ciertos operadores diferenciales de segundo orden. En esta tesis, consideraremos siempre expansiones respecto a alguno de los sistemas de funciones Laguerre. En [**Tha93**] puede verse una fórmula análoga a (0.8) que nos permitirá obtener una expresión puntual núcleo del calor, que será simétrico y positivo. En el Capítulo 1: preliminares, se encuentran todas las definiciones y propiedades de las funciones de Laguerre.

BESSEL: Otro ejemplo interesante es el del operador de Bessel $\Delta_\lambda = -x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{2\lambda}\frac{d}{dx}x^{-\lambda}$, donde λ es una constante positiva, estudiado por Betancor y su grupo en [**BCRFRM10b**] y [**BCRFRM10a**]. El espacio de base de las funciones consideradas es también $\mathbb{R}^+$. Este operador tiene un espectro continuo: todos los reales positivos. Más aún, si para todo $z > 0$ consideramos

$$\varphi_z(x) = \sqrt{xz}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(xz), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

donde J_ν es la función de Bessel de orden ν, entonces $\Delta_\lambda \varphi_z = z^2\varphi_z$. Observar que $\varphi_z(x) = \varphi_x(z)$. Luego, el núcleo del calor del operador $e^{-t\Delta_\lambda}$ es

$$W(t,x,y) = \int_0^\infty e^{-tz^2}\varphi_x(z)\varphi_y(z)dz$$

que, a partir de una fórmula que se encuentra en [**Wat66**], pág. 395, se puede escribir como

$$W(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\frac{xy}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{xy}{2t}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}},$$

para todo $t > 0$, $x > 0$ y $y > 0$, siendo I_ν la función de Bessel modificada de orden ν. Ver los preliminares para más sobre J_ν y I_ν.

Recordemos que en el análisis armónico clásico se considera $\mathrm{L} = -\Delta$, siendo Δ el Laplaciano n-dimensional. Este operador tiene espectro continuo, siendo sus autofunciones y autovalores $\{\varphi_z\}_{z\in\mathbb{R}^n}$ y $\{\lambda_z\}_{z\in\mathbb{R}^n}$, respectivamente, donde $\varphi_z(x) = e^{i2\pi x\cdot z}$ y $\lambda_z = |2\pi z|^2$. Luego, para cada $t > 0$, el núcleo del calor clásico queda expresado por

$$\begin{aligned} W_{-\Delta}(t,x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\lambda_z}\varphi_z(x)\overline{\varphi_z(y)}dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|2\pi z|^2} e^{i(x-y)\cdot z}dz, \end{aligned}$$

es decir, $W_{-\Delta}(t,x,y) = \Phi_t(x-y)$, donde Φ_t es la antitransformada de Fourier de la función $g(z) = e^{-t|2\pi z|^2}$. Sabiendo que la transformada de Furier de $e^{-\pi|z|^2}$ es la misma función, haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}\, z$ y obtenemos

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

que es la solución fundamental de la ecuación del calor $\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta u$, y se lo conoce como núcleo de Gauss-Weierstrass.

En nuestro estudio de las funciones de Laguerre, el espacio de base será $\mathbb{R}^+(0,\infty)$. Cuando consideremos cada $e^{-t\mathrm{L}}$ en forma integral, observaremos que los respectivos núcleo $K_t(x,y)$ se pueden estimar dividiendo $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en tres zonas.

La zona local será alrededor de la diagonal, más precisamente,
$\Delta_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \frac{x}{n} < y < nx\}$, con $n = 4$ para los sistemas $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ y $\{\ell_n^\alpha\}$, y $n = 2$

para el sistema $\{\varphi_n^\alpha\}$. En esta zona, veremos que el núcleo se comporta como el núcleo del calor clásico $\Phi_t(x-y)$, y por lo tanto, la parte local de los operadores, es decir, la integral sobre Δ_n del núcleo contra una función f, estará acotada por la función maximal de Hardy Littlewood, pero localizada en esa región.

Cuando consideremos la integral fraccionaria, en la zona local estimaremos por la maximal fraccionaria local y por una versión localizada de la integral fraccionaria clásica.

En las otras zonas, estimaremos por versiones modificadas de los operadores de Hardy.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo enunciaremos los conceptos básicos y las herramientas que utilizaremos a lo largo de la Tesis. Por ejemplo, cuando denotamos $x \lesssim y$, queremos decir que existe una constante $C > 0$ tal que $x \leq Cy$. Cuando denotamos $x \simeq y$, que se lee "x es equivalente a y", queremos decir que $x \lesssim y$ y $x \gtrsim y$ simultaneamente, es decir, existen constantes C y c tales que $cx \leq y \leq Cx$.

Observaremos también que las ecuaciones están enumeradas indicando el capítulo a la que pertenece y el orden dentro de él, por ejemplo, la ecuación (2.23) es la ecuación número 23 dentro del capítulo 2, independientemente de la sección a la que pertenezca. Por otra parte, todas las deficiones, lemas, teoremas, proposiciones y observaciones, están enumeradas indicando capítulo, sección y orden dentro de dicha sección. Por ejemplo, el Lema 3.1.4 es el cuarto lema dentro de la sección 3.1 del capítulo 3.

1.1. Polinomios y funciones de Laguerre.

Siguiendo la exposición dada en el libro de Thangavelu [**Tha93**], vemos que, dado un $\alpha > -1$, los polinomios de Laguerre se definen por la fórmula de Rodrigues como

$$e^{-x}x^{\alpha}L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+ \doteq (0,\infty)$ y $n = 0,1,2,....$ Estos polinomios son ortogonales en el espacio $\mathbb{R}^+$ con respecto a la medida $e^{-x}x^{\alpha}dx$:

$$\int_0^{\infty} L_k^{\alpha}(x)L_j^{\alpha}(x)e^{-x}x^{\alpha}dx = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}\delta_{kj}.$$

Más aún, cuando se los normaliza propiamente, $\{L_n^{\alpha}\}_n$ constituye una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R}^+, e^{-x}x^{\alpha}dx)$.

A partir de estos polinomios, consideramos tres tipos de funciones de Laguerre:

$$\mathcal{L}_n^{\alpha}(x) = \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} L_n^{\alpha}(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^{\alpha}(x) &= \mathcal{L}_n^{\alpha}(x^2)(2x)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} L_n^{\alpha}(x^2)e^{-x^2/2}x^{\alpha+1/2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

y

$$\begin{aligned} \ell_n^{\alpha}(x) &= \mathcal{L}_n^{\alpha}(x)x^{-\alpha/2} \\ &= \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} L_n^{\alpha}(x)e^{-x/2}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

que resultan ser bases ortonormales en $L^2(\mathbb{R}^+)$, con respecto a la medida de Lebesgue en los dos primeros casos, y con la medida $x^{\alpha}dx$ para el tercero. Mas aún, cada uno de estos sistemas es el conjunto de las autofunciones de un operador diferencial de segundo orden, positivo y autoadjunto con respecto a la correspondiente medida (dx or $x^{\alpha}dx$). Más precisamente, estos operadores son

$$L_{\mathcal{L}}^{\alpha} = -x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x},$$

$$L_{\varphi}^{\alpha} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\right\}$$

y

$$L_{\ell}^{\alpha} = -x\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha+1)\frac{d}{dx} + \frac{x}{4}$$

respectivamente, y las sucesiones de autovalores son

$$\left\{n + \frac{\alpha+1}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

en cada uno de los tres casos.

El semigrupo del calor $\{e^{-tL_{\mathcal{L}}^{\alpha}}\}_{t>0}$ asociado al sistema $\{\mathcal{L}_n^{\alpha}\}$ está dado en forma integral por

$$e^{-tL_{\mathcal{L}}^{\alpha}} f(x) = \int_0^{\infty} K_{\mathcal{L}^{\alpha}}(t,x,y) f(y) dy,$$

donde

$$K_{\mathcal{L}^{\alpha}}(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k^{\alpha}(x)\mathcal{L}_k^{\alpha}(y) e^{-t(k+\frac{\alpha+1}{2})}.$$

La siguiente fórmula nos servirá para obtener una expresión puntual para este núcleo. Se la conoce como fórmula de Mehler y se la puede encontrar en [**Tha93**] y [**Wat66**].

Sea $\alpha > -1$. Entonces, para todo $x, y > 0$ y todo w tal que $|w| < 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} L_k^{\alpha}(x) L_k^{\alpha}(y) w^k &= \frac{(-xyw)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-w} e^{-\frac{w}{1-w}(x+y)} J_{\alpha}\left(2\frac{(-xyw)^{-\frac{1}{2}}}{1-w}\right) \\
&= (xy)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{w^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-w} e^{-\frac{w}{1-w}(x+y)} I_{\alpha}\left(2\frac{(xyw)^{\frac{1}{2}}}{1-w}\right),
\end{aligned}$$

donde J_{α} es la **función de Bessel** de orden α y $I_{\alpha}(z) = i^{-\alpha} J_{\alpha}(iz)$ la **función de Bessel modificada** (ver [**Wat66**] para su definición). Usando (1.1), tomando $w = e^{-t}$ y multiplicando por $w^{\frac{\alpha+1}{2}}$, a partir de esta fórmula tenemos que

$$K_{\mathcal{L}^{\alpha}}(t,x,y) = \frac{w^{\frac{1}{2}}}{1-w} e^{-\frac{1+w}{1-w}\frac{x+y}{2}} I_{\alpha}\left(2\frac{(xyw)^{\frac{1}{2}}}{1-w}\right), \tag{1.4}$$

obteniendo así una expresión puntual para el núcleo del calor.

El siguiente Lema nos permitirá estimar la función de Bessel y, por lo tanto, también el núcleo del calor. Para una demostración, ver [**EMOT53**], p. 5 y p. 86.

Lema 1.1.1. *Sea $\alpha > -1$ y sea $I_{\alpha}(z) = i^{-\alpha} J_{\alpha}(iz)$ la función de Bessel modificada, o con argumento imaginario, donde J_{α} es la función de Bessel usual. Entonces existen dos constantes positivas c_{α} y C_{α} tales que:*

1. *si $0 \leq z \leq 1$ entonces $c_{\alpha} z^{\alpha} \leq I_{\alpha}(z) \leq C_{\alpha} z^{\alpha}$,*
2. *si $z \geq 1$ entonces $c_{\alpha} e^{z} z^{-1/2} \leq I_{\alpha}(z) \leq C_{\alpha} e^{z} z^{-1/2}$.*

En otras palabras, el Lema nos dice que $I_\alpha(z) \simeq z^\alpha$ cuando $0 \leq z \leq 1$, y $I_\alpha(z) \simeq e^z z^{-1/2}$ cuando $z \geq 1$.

A partir de este Lema, es claro que el núcleo del calor es, para todo $t > 0$, simétrico y positivo.

En las demostraciones de nuestros resultados, usaremos una expresión más conveniente del núcleo, tal como consideraron Stempak en [**Ste94**] y Macías, Segovia y Torrea en [**MST06**]. Haciendo el cambio de variable $s = \frac{1-e^{-\frac{t}{2}}}{1+e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{1-w^{\frac{1}{2}}}{1+w^{\frac{1}{2}}}$ en (1.4), obtenemos el núcleo

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) = \frac{1}{2}\frac{1-s^2}{2s}e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x+y)}I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{1.5}$$

para todo $0 < s < 1$ y todo $x, y \in \mathbb{R}^+$. Con este cambio de variable, el operador maximal asociado al semigrupo queda expresado por

$$\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}f(x) = \sup_{0<s<1}\left|\int_0^\infty W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy\right|.$$

A partir del Lema 1.1.1, podemos dividir el núcleo en dos partes,

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) = W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) + W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y),$$

que serán estimados de la siguiente manera. Fijemos x e y en $\mathbb{R}^+$, y consideremos el conjunto

$$D(xy) = \left\{s \in (0,1) : 0 \leq \frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2} \leq 1\right\}.$$

Tomemos $W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \doteq W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)\chi_{D(xy)}(s)$ y $W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) = W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)\chi_{D^c(xy)}(s)$, donde $D^c(xy) = \left\{s \in (0,1) : \frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2} \geq 1\right\}$.

Usando las estimaciones de la función de Bessel del Lema 1.1.1 en el núcleo $W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)$, tenemos:

$$W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha+1}(xy)^{\alpha/2}e^{-\frac{1}{4}\left(s+\frac{1}{s}\right)(x+y)} \tag{1.6}$$

y

$$W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{1/2}(xy)^{-1/4}e^{-\frac{s}{4}|\sqrt{x}+\sqrt{y}|^2}e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}}. \tag{1.7}$$

Para los otros sistemas de funciones, $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\ell_n^\alpha\}$, por las relaciones con $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ dadas por (1.2) y (1.3), y haciendo el mismo cambio de variable, obtenemos los respectivos núcleos del calor que usaremos, para $0 < s < 1$ y $0 < x, y < \infty$:

$$\begin{aligned} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) &= 2(xy)^{1/2} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x^2,y^2) \\ &= \frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x^2+y^2)} I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}xy\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\ell^\alpha}(s,x,y) &= (xy)^{-\alpha/2} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{-\alpha/2} e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x+y)} I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

En el capítulo 3, relacionado a los espacios BMO, necesitaremos estimar al núcleo del semigrupo de Laguerre de otra manera. Para ello, usaremos el siguiente Lema que estima la función de Bessel modificada. Su demostración puede encontrarse en [**Wat66**].

Lema 1.1.2. *Sean $\alpha > -1$ y $I_\alpha(z)$ la función de Bessel modificada. Entonces existe una constante $C_\alpha > 0$ tal que*

$$|\sqrt{2\pi z}\, e^{-z} I_\alpha(z) - 1| \leq C_\alpha \frac{1}{z},$$

para todo $z \geq \frac{1}{8}$.

1.2. Espacios de Lebesgue y de Lorentz. Tipos de continuidad.

Consideremos un espacio de medida $(E, d\mu)$. En esta Tesis, E será siempre $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ o un intervalo contenido en $\mathbb{R}^+$, y la medida será, según el caso, $d\mu(x) = dx$, $d\mu(x) = x^\alpha dx$ o, más generalmente, $d\mu(x) = \omega(x)dx$, donde ω será un peso de $\mathbb{R}^+$. Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Lebesgue $L^p(E, d\mu)$ es el conjunto de las funciones f, medibles en $(E, d\mu)$, con norma $L^p(E, d\mu)$ finita, siendo ésta

$$\|f\|_{L^p(E,d\mu)} = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p},$$

si $1 \leq p < \infty$, o

$$\|f\|_{L^\infty(E,d\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f(x)|$$

si $p = \infty$.

Para $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, los *espacios de Lorentz* $L^{p,\,q}(E, d\mu)$ consiste en todas las funciones f, medibles en $(E, d\mu)$, para las cuales la quasi-norma

$$\|f\|_{L^{p,\,q}(E,d\mu)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t\mu_f(t)^{1/p}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{t>0} \left[t\mu_f(t)^{1/p}\right], & q = \infty, \end{cases}$$

es finita, donde

$$\mu_f(t) = \mu(\{x \in E : |f(x)| > t\})$$

es la función de distribución de f. Se sabe que $L^{\infty,q} = \{0\}$, para $1 \leq q < \infty$. Para $p = \infty$ y $q = \infty$, estableceremos que

$$L^{\infty,\infty}(E, d\mu) \doteq L^\infty(E, d\mu).$$

Los espacios de Lorentz $L^{p,\,q}$ satisfacen, para $1 \leq p \leq \infty$,

$$L^{p,1} \hookrightarrow L^{p,\,p} \hookrightarrow L^{p,\infty}, \tag{1.8}$$

y

$$L^{p,\,p} = L^p. \tag{1.9}$$

Tipos de continuidad. Para un operador sublineal R y para $1 \leq p, q \leq \infty$, decimos que R es de **tipo fuerte** (p, q) en un espacio de medida $(E, d\mu)$ cuando R satisface

$$\mathrm{R} : L^p(E, d\mu) \longrightarrow L^q(E, d\mu)$$

continuamente, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^p(E, d\mu)$ se tiene que $\mathrm{R}f \in L^q(E, d\mu)$ y

$$\|\mathrm{R}f\|_{L^q(E,d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(E,d\mu)}.$$

Por otra parte, decimos que R es de **tipo débil** (p, q) en $(E, d\mu)$ cuando

$$\mathrm{R} : L^p(E, d\mu) \longrightarrow L^{q,\infty}(E, d\mu)$$

continuamente. Esto es equivalente a decir que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sup_{\lambda>0} \lambda^q \int_{\{x\in E:|\mathrm{R}f(x)|>\lambda\}} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.10}$$

para toda función $f \in L^p(E, d\mu)$.

Dado que los espacios de Lorentz $L^{q,\infty}$ satisfacen $L^q \hookrightarrow L^{q,\infty}$ y $L^{\infty,\infty} = L^\infty$, tenemos que tipo fuerte implica tipo débil (p, p), siendo equivalentes cuando $q = \infty$. Por eso generalmente consideramos $1 \leq q < \infty$ para el tipo débil.

Por último, decimos que R es de **tipo débil restringido** (p, q) en $(E, d\mu)$, cuando satisface

$$\mathrm{R} : L^{p,1}(E, d\mu) \longrightarrow L^{q,\infty}(E, d\mu) \tag{1.11}$$

continuamente. Por la propiedad $L^{p,1} \subset L^p$, tipo débil implica tipo débil restringido, y, como $L^{1,1} = L^1$, ambos tipos son equivalentes cuando $p = 1$. Además, como $L^{\infty,1} = \{0\}$, el tipo débil restringido (∞, q) es trivial. Luego, para tipo débil restringido sólo consideramos $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.

Observaremos aquí que, en el libro [**BS88**], un operador R se define como de tipo débil restringido cuando la desigualdad (1.10) se cumple para todas las funciones f que sean características de algún subconjunto medible de E. Ambas definiciones de tipo débil restringido son de hecho equivalentes, como establece el Teorema 5.3, capítulo 5 de [**BS88**]. Nosotros usaremos cualquiera de las dos, según la necesidad.

En el capítulo 4 consideraremos también el **tipo débil dual** (p, q), también llamado tipo fuerte restringido. El operador R será de este tipo cuando

$$\mathrm{R} : L^{p,1}(E, d\mu) \longrightarrow L^q(E, d\mu),$$

continuamente, siendo $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Observar que tipo débil dual implica tipo fuerte, y es condición necesaria para el tipo débil restringido, pero es independiente del tipo débil.

Por detalles y definiciones de los espacios de Lorentz, ver, por ejemplo, [**SW71**].

Cuando consideremos espacios con pesos, habrá una diferencia de notación entre el capítulo 2 y el capítulo 4. En el 2, donde estudiamos la continuidad fuerte, débil y débil restringido (p,p) con pesos para el operador maximal asociado, estaremos considerando el peso junto con la medida, es decir $L^p(\omega) = L^p(\mathbb{R}^+, \omega(x)d\mu(x))$, donde $d\mu(x) = dx$ o $d\mu(x) = x^\alpha dx$, y lo mismo para los espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^+, \omega d\mu)$ y $L^{p,1}(\mathbb{R}^+, \omega d\mu)$. Con estas definiciones resulta que para $p=\infty$ se tiene que $L^\infty(\mathbb{R}^+, \omega(x)d\mu(x)) = L^\infty(\mathbb{R}^+, d\mu)$.

Por otro lado, en el capítulo 4, donde estudiamos la continuidad (p,q) con pesos de la integral fraccionaria, donde p y q pueden ser diferentes, resulta más conveniente usar los espacios pesados

$$L^p_\omega \doteq \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : f\omega \in L^p(\mathbb{R}^+, dx) \right\}, \tag{1.12}$$

para $1 \le p \le \infty$, con norma $\|f\|_{L^p_\omega} \doteq \|f\omega\|_p$. Es decir, el peso estará elevado a la potencia p, si $1 \le p < \infty$, onteniendo así $\|f\|_{L^p_\omega} = \|f\|_{L^p(\omega^p)}$,. Para $p=\infty$ el espacio será diferente, dependiendo del peso. Esta versión de L^∞_ω permite definir espacios BMO con pesos y no triviales y por eso será adoptada también en el cápítulo 3.

Para $L^{p,\infty}$ y $L^{p,1}$, consideraremos el peso como medida, aunque elevado a la potencia p, es decir,

$$L^{p,1}_\omega = L^{p,1}(\mathbb{R}^+, \omega^p(x)dx),$$

para $1 < p < \infty$, y

$$L^{p,\infty}_\omega = L^{p,\infty}(\mathbb{R}^+, \omega^p(x)dx),$$

para $1 \le p < \infty$.

Cuando tomemos pesos potencia, es decir $\omega(x) = x^\delta$, usaremos la notación L^p_δ, $L^{p,1}_\delta$ y $L^{p,\infty}_\delta$. Notar que todos los pesos están elevados a la potencia p. Diremos que un operador es de tipo fuerte (p,q) con peso ω cuando sea acotado de Ł$^p_\omega$ a Ł$^q_\omega$. Lo mismo para el tipo débil, débil dual y débil restringido (p,q) con peso ω.

1.3. Algunos lemas útiles.

Daremos ahora unas propiedades de los espacios de Lebesgue L^p y los de Lorentz $L^{p,q}$ asociados a una medida. Recurriremos a una clase de espacios más general, los espacios de Banach de funciones, y enunciaremos sus propiedades. Luego, en la Observación 1.3.1, enunciaremos esas propiedades para los espacios que utilizaremos en esta tesis, es decir, los espacios de Lebesgue y los de Lorentz.

Dado un espacio de medida $(E, d\mu)$, denotamos con $\mathcal{M}$ al conjunto de las funciones reales definidas en E que sean μ-medibles. Consideraremos, siguiendo el libro de Bennet y Sharpley [**BS88**], **un espacio de Banach de funciones** $X = \{f \in \mathcal{M} : \rho(|f|) < \infty\}$, donde ρ es una función de norma, que se define mediante sus propiedades, como puede verse en la página 2 de [**BS88**]. Considerando $\|f\|_X = \rho(|f|)$, el espacio normado de funciones $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach.

El **espacio asociado** a X es $X' = \{f \in \mathcal{M} : \|f\|_{X'} < \infty\}$, donde

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\int |fg| d\mu : f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\}. \tag{1.13}$$

El siguiente Lema se conoce como desigualdad de Hölder, y es una de las herramientas que más usaremos en la demostración de nuestros resultados. Lo citamos de [**BS88**], página 9, Teorema 2.4.

Lema 1.3.1 (Desigualdad de Hölder). *Sea X un espacio de Banach de funciones μ-medibles y sea X su espacio asociado. Entonces, para cualquier par de funciones μ-medibles f y g, se tiene que*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}. \tag{1.14}$$

Otro Lema útil será el siguiente, también citado de [**BS88**], página 10, Lema 2.6.

Lema 1.3.2 (Teorema de resonancia de Landau). *Sea X un espacio de Banach de funciones μ-medibles y g una función μ-medible. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que g pertenezca al espacio dual asociado X', es que fg sea integrable para todo $f \in X$.*

La utilización que le daremos en esta tesis a estos Lemas será con respecto a espacios de Lebesgue y de Lorentz, como estableceremos a continuación.

Observación 1.3.1. Los espacios de Lebesgue $L^p(E, d\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, y los espacios de Lorentz $L^{p,q}(E, d\mu)$, con $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, son espacios de Banach de funciones, y sus respectivos espacios asociados son $L^{p'}(E, d\mu)$ y $L^{p',q'}(E, d\mu)$, respectivamente, donde p' es el conjugado de p, dado por $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Más aún, tenemos que a la norma de estos espacios la podemos escribir como

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \sup\left\{\int_E |fg|d\mu : g \in L^{p',q'}\right\}. \tag{1.15}$$

La desigualdad de Hölder implica

$$\int |fg|d\mu \leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^{p',q'}}. \tag{1.16}$$

El Lema 1.3.2 implica que $g \in L^{p',q'}(d\mu)$ si y sólo si $\int |fg|d\mu < \infty$, para todo $f \in L^{p,q}(d\mu)$. Observar que como $L^p = L^{p,p}$, los resultados anteriores valen para los espacios de Lebesgue.

Para los espacios con pesos del capítulo 2, tenemos que $(L^p(\omega))' = L^{p'}(\omega^{-\frac{p'}{p}})$, para $1 < p < \infty$. Para el capítulo 4, donde consideramos $L^p_\omega = \{f : f\omega \in L^p\}$, tenemos $(L^p_\omega)' = L^{p'}_{\omega^{-1}}$, para $1 \leq p \leq \infty$. Para ellos también valen (1.14) y (1.13).

Los siguientes Lemas establecen resultados sobre el comportamiento de funciones de la forma x^η o $e^{-x}x^\eta$ en espacios L^p y $L^{p,\infty}$ con pesos potencia, y nos serán muy útiles para las demostraciones de los resultados principales.

Lema 1.3.3. *Sean η y γ dos reales, $1 \leq p < \infty$ y $0 < a < \infty$. Entonces, para la función $f(x) = x^\eta$, se tienen los siguientes resultados:*

1. *$f \in L^p((0, a), x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta p + \gamma + 1 > 0$.*
2. *$f \in L^{p,\infty}((0, a), x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta p + \gamma + 1 \geq 0$ cuando $\eta \neq 0$, o $\gamma + 1 > 0$, cuando $\eta = 0$.*
3. *$f \in L^p((a, \infty), x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta p + \gamma + 1 < 0$.*
4. *$f \in L^{p,\infty}((a, \infty), x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta p + \gamma + 1 \leq 0$ cuando $\eta \neq 0$, o $\gamma + 1 < 0$, cuando $\eta = 0$.*

En cada uno de los casos anteriores, la norma de f en los respectivos espacios será, cuando se cumplan las condiciones, igual a una constante por $a^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}$.

Lema 1.3.4. *Sean η y γ dos reales, $0 < a < \infty$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces, para la función $g(x) = x^\eta e^{-cx}$, donde c es una constante positiva, se tienen los siguientes resultados:*

1. *$g \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta r + \gamma + 1 > 0$.*
2. *$g \in L^p((0,a), x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta r + \gamma + 1 > 0$. Cuando eso se cumple, se tiene*

$$\|g\|_{L^p((0,a),x^\gamma dx)} \simeq a^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}\chi_{(0,1)}(a) + \chi_{(1,\infty)}(a).$$

3. *$g \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta p + \gamma + 1 \geq 0$, cuando $\eta \neq 0$, o si y sólo si $\gamma + 1 > 0$, cuando $\eta = 0$.*
4. *$g \in L^{p,\infty}((0,a), x^\gamma dx)$ si y sólo si $\eta r + \gamma + 1 \geq 0$, cuando $\eta \neq 0$, o si y sólo si $\gamma + 1 > 0$, cuando $\eta = 0$. Cuando eso se cumple, se tiene*

$$\|g\|_{L^{p,\infty}((0,a),x^\gamma dx)} \simeq a^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}\chi_{(0,1)}(a) + \chi_{(1,\infty)}(a).$$

5. *$g \in L^p((a,\infty), x^\gamma dx)$ para todo $a > 0$ y además*

$$\|g\|_{L^p((a,\infty),x^\gamma dx)} \lesssim e^{-\frac{c}{2}a}\varphi(a) \qquad \textit{para todo } a > 0,$$

donde, si $a \geq 1$, $\varphi(a) \equiv 1$, y si $0 < a < 1$ se tiene

$$\varphi(a) = \begin{cases} 1, & \eta p + \gamma + 1 > 0; \\ (\log \frac{2}{a})^{\frac{1}{p}}, & \eta p + \gamma + 1 = 0; \\ a^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}, & \eta p + \gamma + 1 < 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

6. *$g \in L^{p,\infty}((a,\infty), x^\gamma dx)$ para todo $a > 0$ y además*

$$\|g\|_{L^{p,\infty}((a,\infty),x^\gamma dx)} \lesssim e^{-\frac{c}{2}a}\psi(a) \qquad \textit{para todo } a > 0,$$

donde, $\psi(a) \equiv 1$ para $a \geq 1$ y para $0 < a < 1$ se tiene

$$\psi(a) = \begin{cases} 1, & \eta p + \gamma + 1 \geq 0; \\ a^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}, & \eta p + \gamma + 1 < 0. \end{cases}$$

cuando $\eta \neq 0$, *y*

$$\psi(a) = \begin{cases} 1, & \gamma + 1 > 0; \\ (\log \frac{2}{a})^{\frac{1}{p}}, & \gamma + 1 = 0; \\ a^{\frac{\gamma+1}{p}}, & \gamma + 1 < 0, \end{cases}$$

si $\eta = 0$.

Lema 1.3.5. *Para todo* γ *real,* $L^\infty(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx) = L^\infty(\mathbb{R}^+, dx)$*, y por lo tanto* $f(x) = x^\eta \in L^\infty((0,a), x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $\eta \geq 0$*, y* $f \in L^\infty((a,\infty), x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $\eta \leq 0$*. En ambos casos, la norma es* Ca^η*. Por otra parte, la función* $g(x) = x^\eta e^{-cx}$ *pertenece a* $L^\infty((a,\infty), x^\gamma dx) = L^\infty((a,\infty), dx)$ *para todo* $a > 0$ *y toda* γ *real y además*

$$\|g\|_{L^\infty((a,\infty),x^\gamma dx)} \lesssim e^{-\frac{c}{2}a}\varphi(a) \qquad \textit{para todo } a > 0,$$

donde, para todo $a \geq 1$, $\varphi(a) \equiv 1$*, y para* $0 < a < 1$*,*

$$\varphi(a) = \begin{cases} 1, & \eta \geq 0; \\ a^\eta, & \eta < 0, \end{cases}$$

si $p = \infty$.

Demostración del Lema 1.3.3. La demostración de los casos 1 y 3 son triviales. Probaremos sólo el caso 2, ya que el caso 4 sale de manera análoga a éste.

Por la definición del espacio, $x^\eta \in L^{p,\infty}((0,a), x^\gamma dx)$ si y sólo si la norma

$$\|x^\eta\| \doteq \left(\sup_{\lambda > 0} \lambda^p \int_{E_\lambda} x^\gamma dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

es finita, donde

$$E_\lambda = \{x \in (0,a) : x^\eta > \lambda\}.$$

Supongamos primero que $\eta > 0$. Entonces $E_\lambda = (\lambda^{\frac{1}{\eta}}, a)$ si $0 < \lambda < a^\eta$, y $E_\lambda = \emptyset$, si $\lambda \geq a^\eta$. Luego

$$\|x^\eta\|^p = \sup_{0<\lambda<a^\eta} \lambda^p \int_{\lambda^{\frac{1}{\eta}}}^a x^\gamma dx. \tag{1.18}$$

Si $\gamma \geq -1$ cuando $\eta > 0$, la desigualdad esperada $\eta r+\gamma+1 \geq 0$ pasa siempre. Veamos que también la norma de x^η es finita e igual a $C\ a^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}$, para alguna constante $C = C(\eta,\gamma,p)$. Si $\gamma = -1$, entonces por (1.18) tenemos

$$\begin{aligned}\|x^\eta\|^p &= \sup_{0<\lambda<a^\eta} \lambda^p \ln\left(\frac{a^\eta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\eta}} \\ &= C_\eta\ a^{\eta p} \sup_{0<t<1} t^p \ln\frac{1}{t},\end{aligned}$$

donde hicimos el cambio $t = \frac{\lambda}{a^\eta}$, y como ese supremo es finito siempre, obtenemos $\|x^\eta\| = Ca^\eta$. Si tomamos $\gamma > -1$, con el mismo cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned}\|x^\eta\|^p &= C_\gamma \sup_{0<\lambda<a^\eta} \lambda^p(a^{\gamma+1} - \lambda^{\frac{\gamma+1}{\eta}}) \\ &= C\ a^{\gamma+1} \sup_{0<\lambda<a^\eta} \lambda^p(1-\left(\frac{\lambda}{a^\eta}\right)^{\frac{\gamma+1}{\eta}}) \\ &= C_\gamma\ a^{\eta p+\gamma+1} \sup_{0<t<1} t^p(1-t^{\frac{\gamma+1}{\eta}}),\end{aligned}$$

donde el supremo del lado derecho es finito pues $p > 0$ y $\frac{\gamma+1}{\eta} > 0$. Luego, $\|x^\eta\| = Ca^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}$.

Sigamos considerando $\eta > 0$ y tomemos $\gamma < -1$. Luego, análogamente al caso anterior, obtenemos

$$\|x^\eta\|^p = C_\gamma\ a^{\eta p+\gamma+1} \sup_{0<t<1} t^p(t^{\frac{\gamma+1}{\eta}} - 1),$$

y como $\frac{\gamma+1}{\eta} < 0$, el supremo del lado derecho será finito si y sólo si $p + \frac{\gamma+1}{\eta} \geq 0$, es decir: $\eta p + \gamma + 1 \geq 0$.

Supongamos ahora que $\eta < 0$. Entonces $E_\lambda = (0, \text{mín}\{a, \lambda^{\frac{1}{\eta}}\})$ y

$$\|x^\eta\| = C_\gamma \sup_{\lambda>0} \lambda^p \int_0^{\text{mín}\{a,\lambda^{\frac{1}{\eta}}\}} x^\gamma dx.$$

Observar que la integral del lado derecho es finita si y sólo si $\gamma > -1$. Ahora introduciremos sucesivamente los cambios de variable $t = \frac{\lambda}{a^\eta}$ y $y = \frac{x}{a}$, obteniendo

$$\|x^\eta\|^p = C\ a^{\eta p} \sup_{t>0} t^p \int_0^{\text{mín}\{a,at^{\frac{1}{\eta}}\}} x^\gamma dx$$

$$= \quad C\ a^{\eta p+\gamma+1} \sup_{t>0} t^p \int_0^{\min\{1,t^{\frac{1}{\eta}}\}} x^\gamma dx.$$

Como $\gamma > -1$, tenemos que

$$\sup_{t>0} t^p \int_0^{\min\{1,t^{\frac{1}{\eta}}\}} x^\gamma dx = C \max\{\sup_{0<t<1} t^p, \sup_{t\geq 1} t^{p+\frac{\gamma+1}{\eta}}\},$$

y esto es finito si y sólo si $p + \frac{\gamma+1}{\eta} \leq 0$, es decir: $\eta p + \gamma + 1 \geq 0$, pues $\eta < 0$. Observar que $\eta p + \gamma + 1 \geq 0$ y $\eta < 0$ implican $\gamma > -1$.

Por último consideramos $\eta = 0$. Entonces $E_\lambda = (0, a)$, si $0 < \lambda < 1$ y $E_\lambda = \emptyset$, si $\lambda \geq 1$. Luego,

$$\|x^\eta\|^p = \sup_{0<\lambda<1} \lambda^p \int_0^a x^\gamma dx = C\ a^{\gamma+1}$$

donde la última igualdad es cierta si y sólo si $\gamma > -1$.

$\square$

Demostración del Lema 1.3.4. Observemos primero que que

$$g(x) = x^\eta e^{-cx} \simeq \chi_{(0,1)}(x) x^\eta + \chi_{(1,\infty)}(x) x^\eta e^{-cx},$$

y que el segunto término pertenece a $L^p(x^\gamma dx)$ y $L^{p,\infty}(x^\gamma dx)$ para todo η y todo γ real. Entonces, para probar 1 y 3, sólo restaría ver que $x^\eta \in L^p((0,1), x^\gamma dx)$ y $x^\eta \in L^{p,\infty}((0,1), x^\gamma dx)$, bajo las respectivas condiciones necesarias y suficientes. Esto sale del Lema 1.3.3, considerando $a = 1$.

Para los casos 2 y 4, observar que si $0 < a < 1$, entonces $g(x)\chi_{(0,a)} \simeq x^\eta \chi_{(0,a)}$, y por el Lema 1.3.3 obtendremos la estimación de la norma deseada para $0 < a < 1$. Por otra parte, si $a \geq 1$, entonces

$$x^\eta \chi_{(0,1)} \lesssim g(x)\chi_{(0,a)} \lesssim x^\eta \chi_{(0,1)} + x^\eta e^{-cx} \chi_{(1,\infty)}.$$

Luego, las condiciones las impondrá el término $x^\eta \chi_{(0,1)}$ y la norma estará estimada por una constante.

Para probar 5 y 6, primero notar que, fijado $a > 0$, para todo $x > a$ se tiene que $g(x) \leq e^{-\frac{c}{2}a}x^{\eta}e^{-\frac{c}{2}x}$, por lo que, si denotamos $\tilde{g}(x) = x^{\eta}e^{-\frac{c}{2}x}$, tendremos $\|g\|_X \leq e^{-\frac{c}{2}a}\|\tilde{g}\|_X$, con $X = L^p((a,\infty), x^{\gamma}dx)$ o $X = L^{p,\infty}((a,\infty), x^{\gamma}dx)$.

Estimaremos entonces la norma en ambos espacios de $\tilde{g}(x) = x^{\eta}e^{-x}$, donde en la exponencial por comodidad hemos sacado la constante $\frac{c}{2}$. Probaremos primero que es menor que una constante si $a \geq 1$. En efecto en ese caso tenemos $x^{\eta}e^{-x}\chi_{(a,\infty)} \lesssim x^{\eta}e^{-x}\chi_{(1,\infty)}$, cuya norma en ambos espacios es una constante finita.

Por otra parte, si $0 < a < 1$, entonces,

$$\tilde{g}(x) \simeq \chi_{(a,1)}(x)x^{\eta} + \chi_{(1,\infty)}(x)x^{\eta}e^{-x},$$

y por lo tanto

$$\|\tilde{g}\chi_{(a,\infty)}\|_X \lesssim \|x^{\eta}\chi_{(a,1)}\|_X + C,$$

para $X = L^p(\mathbb{R}^+, x^{\gamma}dx)$ y $X = L^{p,\infty}(\mathbb{R}^+, x^{\gamma}dx)$. Veremos primero el caso 5, es decir, que para $X = L^p(\mathbb{R}^+, x^{\gamma}dx)$, $\|x^{\eta}\chi_{(a,1)}\|_X + C$ está estimada por la función $\varphi(a)$ dada por (1.17).

Si $\eta p + \gamma + 1 > 0$ entonces

$$\|x^{\eta}\chi_{(a,1)}\|_X^p \leq \int_0^1 x^{\eta p+\gamma}dx < \infty,$$

por lo que $\|\tilde{g}\chi_{(a,\infty)}\|_X \lesssim 1$.

Si $\eta p + \gamma + 1 = 0$, entonces $\|x^{\eta}\chi_{(a,1)}\|_X^p \leq \ln\frac{1}{a} \leq \ln\frac{2}{a}$ y entonces

$$\|\tilde{g}\chi_{(a,\infty)}\|_X \leq C + (\ln\frac{2}{a})^{\frac{1}{p}} \lesssim (\ln\frac{2}{a})^{\frac{1}{p}}$$

para todo $0 < a < 1$.

Por último, si $\eta p + \gamma + 1 < 0$ entonces $\|x^{\eta}\chi_{(a,1)}\|_X^p \lesssim a^{\eta p+\gamma+1} - 1$, y como $a^{\eta p+\gamma+1} > 1$ para todo $0 < a < 1$, se obtiene

$$\|\tilde{g}\chi_{(a,\infty)}\|_X \lesssim a^{\eta+\frac{\gamma+1}{p}}$$

.

Para probar el caso 6, tomemos ahora $X = L^{p,\infty}(\mathbb{R}^+, x^{\gamma}dx)$.

Observar que $L^p \subset L^{p,\infty}$, lo que implica

$$\|x^\eta \chi_{(a,1)}\|_X \leq \left(\int_a^1 x^{\eta p+\gamma} dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

que será menor a una constante finita si $\eta p + \gamma + 1 > 0$. Por eso, consideraremos sólo $\eta p \gamma + 1 \leq 0$, y probaremos primero que, para $\eta \neq 0$,

$$\|x^\eta \chi_{(a,1)}\|_X \lesssim a^{\eta + \frac{\gamma+1}{p}}.$$

Por definición de $L^{p,\infty}$ se tiene que

$$\|x^\eta \chi_{(a,1)}\|_X^p = \sup_{t>0} t^{\eta p} \int_{\{x\in(a,1):x^\eta > t^\eta\}} x^\gamma dx.$$

Supongamos primero $\eta > 0$. Haciendo los cambios de variable $u = \frac{x}{a}$ y $s = \frac{t}{a}$, obtenemos

$$\|x^\eta \chi_{(a,1)}\|_X^p \lesssim a^{\eta p+\gamma+1} \sup_{0<s<\infty} s^{\eta p} \int_{\text{máx}\{s,1\}}^1 u^\gamma du,$$

donde el supremo de la derecha es finito considerando $\eta > 0$ y $\eta p + \gamma + 1 \leq 0$, lo que además implica $\gamma + 1 < 0$.

Para $\eta < 0$, tenemos que

$$\|x^\eta \chi_{(a,1)}\|_X^p \lesssim a^{\eta p+\gamma+1} \sup_{s>1} s^{\eta p} \int_1^s u^\gamma du,$$

donde nuevamente el supremo de la derecha es finito, considerando sucesivamente $\gamma+1 > 0$, $\gamma + 1 < 0$ y $\gamma + 1 = 0$, y usando que $\eta p + \gamma + 1 \leq 0$.

Tomemos ahora $\eta = 0$. En ese caso, $\gamma + 1 \leq 0$, y por la definición de la norma del espacio $X = L^{p\infty}(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$, tenemos

$$\|x^\eta \chi_{(a,1)}\|_X^p = \sup_{0<s<1} \lambda^p \int_a^1 x^\gamma dx = \int_a^1 x^\gamma dx.$$

Si $\gamma + 1 = 0$, entonces $\int_a^1 x^\gamma dx \leq \ln\left(\frac{2}{a}\right)$. Si $\gamma < 0$, entonces $\int_a^1 x^\gamma dx \lesssim a^{\gamma+1}$. Con eso concluímos la demostración.

$\square$

1.4. La maximal de Hardy-Littlewood Local y los pesos locales.

Recordaremos aquí las clases de pesos de Muckenhoupt A^1 y A^p, $1 < p < \infty$, restringidas al espacio $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Diremos que una función $\omega(x)$ es un **peso** en $\mathbb{R}^+$ si es no negativa y localmente integrable en $\mathbb{R}^+$, es decir, $\int_I \omega(x)dx < \infty$ para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}^+$.

- Un peso ω pertenece a $A^p(\mathbb{R}^+)$, $1 < p < \infty$, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|I|}\left(\int_I \omega(x)dx\right)^{1/p} \left(\int_I \omega(x)^{-p'/p}dx\right)^{1/p'} \leq C \tag{1.19}$$

  para todo intervalo $I \subset\subset \mathbb{R}^+$.

- Un peso ω pertenece a $A^1(\mathbb{R}^+)$, si existe una $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|I|}\left(\int_I \omega(x)dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in I} \omega^{-1}(x)\right) \leq C, \tag{1.20}$$

  o, equivalentemente,

$$\omega(I) \leq C|I| \operatorname*{ess\,inf}_{x\in I} \omega(x)$$

  para todo intervalo $I \subset\subset \mathbb{R}^+$.

- Denotaremos $A^\infty = \bigcup_{p\geq 1} A^p$.

La semi-norma A^p de ω, denotada por $[\omega]_p$, es la menor constante C que satisface (1.19), para $1 < p < \infty$, o (1.20), para $p = 1$. Observar que $\omega \in A^p$ implica $\omega(x) > 0$ *c.t.p.*

Como es bien sabido (ver, por ejemplo, [**Duo01**]), estos son exactamente todos los pesos para los cuales la función maximal de Hardy Littlewood M, dada, en $\mathbb{R}^+$, por

$$\mathrm{M}f(x) \doteq \sup_{0\leq a<x<b<\infty} \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|dy, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

es de tipo fuerte (p, p), para $1 < p \leq \infty$, y de tipo débil $(1, 1)$, con medida con $\omega(x)dx$. Las constantes de la continuidad de M dependen de p y $[\omega]_p$.

En esta tesis consideraremos otra función maximal, mejor adaptada a la estructura de $\mathbb{R}^+$ y a los semigrupos de Laguerre, introducida por Nowak y Stempak en [**NS06**].

Definición 1.4.1. Para todo $\kappa > 1$, la **maximal de Hardy-Littlewood local de orden** κ, está dada por

$$\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) \doteq \sup_{x \in I \in \mathcal{I}_\kappa} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy, \tag{1.21}$$

para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ y $x \in \mathbb{R}^+$, donde

$$\mathcal{I}_\kappa = \{(a, b) : 0 < a < b \leq \kappa a\} \tag{1.22}$$

es el conjunto de los **intervalos** κ**-locales** en $\mathbb{R}^+$.

En la familia de intervalos locales $\mathcal{I}_\kappa$, puede tomarse $b < \kappa a$ en lugar de $b \leq \kappa a$, pues, por la continuidad de la integral, eso no hace diferencia al tomar el supremo en la definición de $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$. Lo mismo pasa para todas las propiedades que involucren a la familia $\mathcal{I}_\kappa$.

Naturalmente, la maximal local tiene asociada una clase de pesos locales, que resulta mayor que la clase A^p. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.4.2. Dados $1 \leq p < \infty$ y $\kappa > 1$, decimos que un peso ω pertenece a la clase $A^p_{loc,\kappa}$ si existe una constante $C = C(\kappa, p)$ tal que las condiciones (1.19), si $1 < p < \infty$, o (1.20) si $p = 1$, se cumplen para todo $I \in \mathcal{I}_\kappa$, siendo $\mathcal{I}_\kappa$ el conjunto de los intervalos κ-locales. Para $p = \infty$, tomaremos $A^\infty_{loc,\kappa} = \bigcup_{p \geq 1} A^p_{loc,\kappa}$. La seminorma $[\omega]_{p,\kappa}$ es la menor constante $C(\kappa, p)$ que satisfacen las condiciones (1.19) o (1.20).

Observaremos aquí que la clase $A^p_{loc,\kappa}$ es en realidad independiente de κ. Más exactamente, por la Proposición 6.1 de [**NS06**], se tiene que $A^p_{loc,\kappa} = A^p_{loc,2}$ para todo $\kappa > 1$. Por esta razón, la denotaremos simplemente con A^p_{loc}, y nos referiremos a sus elementos como **pesos** A^p **locales**. Sin embargo, notar que la seminorma $[\omega]_{p,\kappa}$ sí depende de κ. Más aún, puede pasar que un peso ω pertenezca a A^p_{loc} y que $[\omega]_{p,\kappa}$ crezca a infinito con κ. Por ejemplo, si $\omega(x) = \frac{1}{x}$, se puede probar que $\omega \in A^2_{loc,\kappa}$ para todo $\kappa > 1$, y que $[\omega]_{2,\kappa} \to \infty$ cuando $\kappa \to \infty$.

De la Proposición 6.3 de [**NS06**], tenemos el siguiente resultado de continuidad para la maximal local en espacios $L^p(\omega)$y $L^{1,\infty}(\omega)$.

Teorema 1.4.1. *Si $\omega \in A^p_{loc}$ entonces, para todo $\kappa > 1$, M^κ_{loc} es de tipo fuerte (p,p) con medida $\omega(x)dx$, para $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1,1)$ con medida $\omega(x)dx$, para $p = 1$. Las constantes de acotación dependerán de p, de κ y de ω sólo a través de la seminorma $[\omega]_{p,\kappa}$.*

Notar también que $A^p \subset A^p_{loc}$, como se observa directamente por la definición. Más aún, considerando pesos potencia, vemos que $x^\delta \in A^p_{loc}$ para todo $\delta \in \mathbb{R}$, pues $x^\delta \simeq a^\delta$, para todo $x \in (a,b) \in \mathcal{I}_\kappa$. Por otra parte, se sabe que que $x^\delta \in A^p$ si y sólo si $-1 < \delta < p-1$, cuando $p > 1$, y $-1 < \delta \leq 0$, cuando $p = 1$. Luego, M^κ_{loc} es de tipo fuerte (p,p) y débil $(1,1)$ con cualquier peso potencia. Este resultado y la elección de la Maximal Local en las estimaciones asociadas al semigrupo de funciones de Laguerre, nos permitirá obtener mejoras en los resultados ya conocidos sobre acotación de los operadores que surgen del semigrupo, con pesos generales y con pesos potencia.

Consideraremos otra propiedad de los pesos locales. Observar que si $\omega \in A^1_{loc}$, entonces, directamente de la definición se obtiene que

$$\omega(I) \leq C_\kappa \frac{|I|}{|S|}\omega(S) \tag{1.23}$$

para todo $I \in \mathcal{I}_\kappa$ y todo S subconjunto medible de I. Más aún, por el Corolario 6.5 de [**NS06**], está propiedad también se cumple para todo $1 < p < \infty$. Nos referiremos a ella como la **propiedad de duplicación local**. La utilizaremos principalmente en los capítulos 3 y 4, asociada a espacios BMO.

Lema 1.4.1. *Sea $\omega \in A^p_{loc}$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cada $\kappa > 1$, existe una constante C dependiendo de κ, p y $[\omega]_{p,\kappa}$, tal que*

$$\omega(I) \leq C \left(\frac{|I|}{|S|}\right)^p \omega(S),$$

para todo $I \in \mathcal{I}_\kappa$ y todo conjunto medible $S \subset I$.

Otras propiedades conocidas para la clase A^p clásica también valen para A^p_{loc}. Enunciaremos dos que usaremos.

Lema 1.4.2. *Para las clases de pesos locales A^p_{loc}, con $1 \leq p \leq \infty$, tenemos las siguientes propiedades:*

1. *$\omega \in A^p_{loc}$ si y sólo si $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{p'}_{loc}$,*
2. *$A^p_{loc} \subset A^{\tilde{p}}_{loc}$, para todo $\tilde{p} > p$,*
3. *Si $\omega \in A^p_{loc}$, con $p > 1$, entonces existe $1 \leq p^* < \infty$ tal que $\omega \in A^{p^*}_{loc}$.*

La demostración de la primera es trivial y la segunda se obtiene fácilmente usando la desigualdad de Hölder. Para probar la tercera hay que seguir la demostración del caso clásico dada en el Corolario 7.6 del libro de Duoandikoetxea [**Duo01**]. Para ello necesitaremos una versión local de la desigualdad de Hölder inversa (Teorema 7.4 de [**Duo01**]), cuya prueba es análoga a la demostración del citado libro, y que enunciaremos a continuación.

Lema 1.4.3. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $\kappa > 1$. Si $\omega \in A^p_{loc}$, entonces existen constantes positivas C y ϵ, dependientes sólo de p y de $[\omega]_{p,\kappa}$, tales que*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{1+\epsilon}(x)dx\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C}{|I|}\int_I \omega(x)dx,$$

para todo I intervalo κ-local.

En el capítulo 4 consideraremos la integral fraccionaria asociada a expansiones de Laguerre. Para el estudio de la zona local, introduciremos el siguiente operador y la clase de pesos asociada a él.

Definición 1.4.3. Para $0 \leq \epsilon < 1$ y $\kappa > 1$, la **Maximal Fraccionaria de Hardy-Littlewood "Local"** está dada por

$$\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}f(x) \doteq \sup_{x\in I\in\mathcal{I}_\kappa} \frac{1}{|I|^{1-\epsilon}}\int_I |f(y)|dy, \tag{1.24}$$

donde $\mathcal{I}_\kappa$ es el conjunto de los intervalos κ - locales.

Consideremos, asociada a $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$, una clase de pesos locales tipo Muckenhoupt $A^{p,q}_{loc,\kappa}$, donde $\kappa > 1$ y $1 \le p, q \le \infty$. Esta clase contiene los pesos ω en $\mathbb{R}^+$ tales que

$$\sup_{I \in \mathcal{I}_\kappa} \frac{1}{|I|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}}} \left(\int_I \omega^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_I \omega^{-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{1.25}$$

El supremo de (1.25) será la norma $A^{p,q}_{loc,\kappa}$ de ω. Cuando $q = \infty$ o $p' = \infty$ se tomará, como es usual, el supremo esencial sobre el intervalo I de ω o ω^{-1}, respectivamente.

Otra vez, tenemos que para cualquier $\kappa > 1$, $A^{p,q}_{loc,\kappa} = A^{p,q}_{loc,2}$, es decir, la clase de pesos no depende de κ. Por esta razón la llamaremos sólo con $A^{p,q}_{loc}$. Sin embargo, la norma del peso sí dependerá de κ. Todo esto resulta de observar que $\omega \in A^{p,q}_{loc}$ si y sólo si $\omega^q \in A^r_{loc}$, con $r = 1 + \frac{q}{p'}$. Por el Lema 1.4.2, tenemos además las siguientes propiedades.

Lema 1.4.4. *Para las clases de pesos locales $A^{p,q}_{loc}$, con $1 \le p, q \le \infty$, se tiene que:*

1. *$\omega \in A^{p,q}_{loc}$ si y sólo si $\omega^{-1} \in A^{p',q'}_{loc}$,*
2. *Si $1 < p \le \infty$ y $1 \le q \le \infty$, se tiene $A^{p,q}_{loc} \subset A^{p,q^-}_{loc}$, para todo $1 \le q^- < q$.*
3. *Si $1 \le q < \infty$ $1 \le p \le \infty$ y $\omega \in A^{p,q}_{loc}$, entonces $\omega \in A^{p,q^+}_{loc}$, para algún $q < q^+ < \infty$.*

Demostración. La primera es trivial, y para la segunda usamos que

$$\omega \in A^{p,q}_{loc} \Longleftrightarrow \omega^{-1} \in A^{q',p'}_{loc} \Longleftrightarrow \omega^{-p'} \in A^s_{loc}, \quad \text{con } s = 1 + \frac{p'}{q}.$$

Luego, por el Lema 1.4.2 con A^s_{loc}, tenemos que $\omega^{-p'} \in A^{\tilde{s}}_{loc}$ para todo $\tilde{s} > s$. Si tomamos $q^- = \frac{p'}{\tilde{s}-1}$, entonces $q^- < q$ y $\tilde{s} = 1 + \frac{p'}{q^-}$, lo que implica que $\omega \in A^{p,q^-}_{loc}$. La tercera se hace de la misma manera. $\square$

Para la Maximal Fraccionaria Local tenemos el siguiente resultado de continuidad en espacios de Lebesgue con pesos. Acá consideramos $L^p_\omega \doteq \{f : f\omega \in L^p\}$, con $\|f\|_{L^p_\omega} \doteq \|f\omega\|_p$, para $\le p \le \infty$, y $L^{q,\infty}(\omega^q)$, para $1 \le q < \infty$.

Teorema 1.4.2. *Sean $1 \le p \le q \le \infty$, $0 \le \epsilon < 1$ y $\kappa > 1$. Si $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \epsilon$ y $\omega \in A^{p,q}_{loc}$, entonces, si $p > 1$, $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso ω, es decir*

$$\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa} : L^p_\omega \longrightarrow L^q_\omega,$$

y si $p = 1$, es de tipo débil $(1, \frac{1}{1-\epsilon})$, es decir,

$$\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa} : L^1_\omega \longrightarrow L^{\frac{1}{1-\epsilon},\infty}_\omega.$$

La demostración está basada en la de Nowak y Stempak en [**NS06**], para el caso de la Maximal de Hardy-Littlewood local con un peso A^p_{loc}.

Demostración del Teorema 1.4.2. Sean $1 < p \leq q < \infty$, $\omega \in A^{p,q}_{loc}$ y $\kappa > 1$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, llamemos $I_n = [\kappa^n, \kappa^{n+3})$. Definamos el peso ω_n en $\mathbb{R}$ cono ω en I_n, pidiendo además que sea simétrica alrededor de κ^n y periódica con período $2|I_n|$. Por otra parte, observar que $\omega \in A^{p,q}_{loc}$ si y sólo si $\omega^q \in A^r_{loc}$, donde $r = q(1-\epsilon) = 1 + \frac{q}{p'}$. Como se establece en [**NS06**], se puede probar que ω^q_n pertenece a la clase A^r global en $\mathbb{R}$ y la norma está estimada por arriba por la norma $A^r_{loc,\kappa}$ de ω^q_n, multiplicada por una constante independiente de ω y n. Luego, $[\omega_n]_{A^{p,q}} \leq C[\omega]_{A^{p,q}_{loc,\kappa}}$, siendo $A^{p,q}$ la clase que considera todos los intervalos de $\mathbb{R}$, y donde la constante C es independiente de ω y de n.

Tomemos $f \in L^p(\omega)$ y llamemos $f_n = f\chi_{I_n}$ y $J_n = [\kappa^{n+1}, \kappa^{n+2})$. Si I es un intervalo κ-local que interseca a J_n, entonces $I \subset I_n$, y tenemos que $\mathrm{M}^\epsilon_{loc,\kappa}f(x) = \mathrm{M}^\epsilon_{loc,\kappa}f_n(x)$, para todo $x \in J_n$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (\mathrm{M}^\epsilon_{loc,\kappa}f(x)\omega(x))^q dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{J_n} (\mathrm{M}^\epsilon_{loc,\kappa}f_n(x)\omega_n(x))^q dx \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int (\mathrm{M}^\epsilon f_n(x)\omega_n(x))^q dx \\
&\leq c\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int |f_n(x)\omega_n(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la acotación en $\mathbb{R}$ de la Maximal fraccionaria de Hardy-Littlewood clásica para un peso $A^{p,q}$.

Como $p \leq q$, la función $\varphi(t) = t^{\frac{q}{p}}$ es convexa en $(0,\infty)$ y por lo tanto es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int |f_n(x)\omega_n(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int |f_n(x)\omega_n(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \\
&= 3\left(\int_0^\infty |f(x)\omega(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Luego, obtenemos el resultado deseado para $1 < p \leq q < \infty$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \epsilon$. Para $p = 1$ se procede análogamente (ver Proposición 6.3 de [**NS06**]). Para $q = \infty$, sale de la misma manera en que se prueba el tipo fuerte (p, ∞) de la maximal fraccionaria clásica para un peso $\omega \in A^{p,q}$. $\square$

Otro operador clásico localizado que aparecerá, aunque en menor medida, en el capítulo 4, es la **integral fraccionaria clásica local**, definida para $0 < \epsilon < 1$ y $\kappa > 1$ por

$$\mathrm{I}^{\epsilon}_{loc,\kappa} f(x) \doteq \int_{\frac{x}{\kappa}}^{\kappa x} \frac{1}{|x-y|^{1-\epsilon}} |f(y)| dy. \tag{1.26}$$

Proposición 1.4.1. *Sean $0 < \epsilon < 1$ y $\kappa > 1$. Luego, para $1 \leq p \leq q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \epsilon$ y para un peso $\omega \in A^{p,q}_{loc}$, se tiene que $\mathrm{I}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$ es de tipo fuerte (p, q), si $p > 1$, y tipo débil $(1, q)$, con peso ω.*

Demostración. Para $p \geq 1$ y $q < \infty$, se puede imitar la demostración del Teorema 1.4.2 para $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$ y obtener el mismo resultado. También, para $p > 1$, se lo puede deducir de ese Teorema, probando una versión local de la conocida desigualdad de Welland, enunciada más bajo. Daremos los detalles para $\kappa = 2$, ya que puede resultar de interés en sí misma.

Denotemos $\mathrm{I}^{\epsilon}_{loc} \doteq \mathrm{I}^{\epsilon}_{loc,2}$. Observar que $\mathrm{I}^{\epsilon}_{loc} f(x) = \mathrm{I}^{\epsilon}(f\chi_{(\frac{x}{2},2x)})(x)$, donde $\mathrm{I}^{\epsilon} = c(-\Delta)^{-\frac{\epsilon}{2}}$, la integral fraccionaria clásica. Luego, podemos usar la desigualdad de Welland (ver [**Wel75**]), que establece

$$\mathrm{I}^{\epsilon} f(x) \leq 2 \left(\mathrm{M}^{\epsilon-\delta} f(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{M}^{\epsilon+\delta} f(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $0 < \delta < \min\{\epsilon, 1-\epsilon\}$, donde M^{ϵ} es la maximal fraccionaria clásica en $\mathbb{R}^+$. Es fácil probar que $\mathrm{M}^{\epsilon}(f\chi_{(\frac{x}{2},2x)})(x) \lesssim \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,4} f(x)$. Luego obtenemos

$$\mathrm{I}^{\epsilon}_{loc} f(x) \lesssim \left(\mathrm{M}^{\epsilon-\delta}_{loc,4} f(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{M}^{\epsilon+\delta}_{loc,4} f(x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.27}$$

para todo $0 < \delta < \min\{\epsilon, 1-\epsilon\}$. Por otra parte, por el Lema 1.4.4, se tiene que si $\omega \in A^{p,q}_{loc}$ entonces existe $q^+ > q$ tal que $\omega \in A^{p,q^+}_{loc}$. Si en la ecuación (1.27) tomo $\delta = \frac{1}{q} - \frac{1}{q^+}$ entonces, como $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \epsilon$, tendremos $\frac{1}{q^+} = \frac{1}{p} - (\epsilon + \delta)$. Luego, por el Teorema

1.4.2, $\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon+\delta}$ es de tipo fuerte (p, q^+) con peso ω. Por otra parte, $\omega \in A_{loc}^{p,q^-}$ para todo $q^- < q$. Eligiendo entonces $\frac{1}{q^-} = \frac{1}{q} + \delta$, tenemos que $\frac{1}{q^-} = \frac{1}{p} - (\epsilon - \delta)$, y por lo tanto $\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon-\delta}$ es de tipo fuerte (p, q^-) con peso ω. Notar que δ satisface $\delta < \text{mín}\{\epsilon, 1-\epsilon\}$ y que $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}(\frac{1}{q^+} + \frac{1}{q^-})$. Luego, tomando norma L_ω^q en (1.27) y aplicando Hölder con $r = 2\frac{q^+}{q}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathrm{I}_{loc}^{\epsilon} f\|_{L_\omega^q} &\lesssim \left(\int_0^\infty \left[\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon-\delta} f(x)\omega(x)\right]^{\frac{q}{2}} \left[\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon+\delta} f(x)\omega(x)\right]^{\frac{q}{2}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon-\delta} f\|_{L_\omega^{q^-}}^{\frac{1}{2}} \|\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon+\delta} f\|_{L_\omega^{q^+}}^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|f\|_{L_\omega^p}, \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad sale por lo dicho anteriormente para los operadores maximales $\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon-\delta}$ y $\mathrm{M}_{loc,4}^{\epsilon-\delta}$. □

1.5. Espacios BMO.

Sea ω un peso definido en E, donde E puede ser $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^n$, o alguna bola o cubo contenido en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que el **espacio de oscilación media acotada en** E, $BMO_E(\omega)$, se define como el conjunto de las funciones f localmente integrables en E que satisfacen

$$\frac{1}{\omega(I)} \int_I |f(x) - f_I| dx \leq C, \tag{1.28}$$

para todo cubo $I \subset E$, donde $f_I \doteq \frac{1}{|I|} \int_I f(x)dx$ es el **promedio** de f en I. La seminorma $\|f\|_{BMO_E(\omega)}$ es la menor constante C que satisface esa condición. Observar que toda función constante *c.t.p.* tiene seminorma $BMO_E(\omega)$ igual a cero, y son las únicas con esa propiedad. Por ese motivo, se considera a las funciones que difieren en una constante como iguales en BMO, de manera que $\|f\|_{BMO_E(\omega)}$ sea una norma y $BMO_E(\omega)$ un espacio de Banach.

Cuando $\omega \equiv 1$, escribiremos BMO_E, y denotaremos con $BMO_n(\omega)$ a este espacio cuando $E = \mathbb{R}^n$, y simplemente con $BMO(\omega)$ cuando $E = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

En [**Duo01**], capítulo 6.2, se demuestra que para probar que $f \in BMO_E(\omega)$ no hace falta considerar el promedio f_I en (1.28), sino hallar una constante a, que puede depender de I, tal que

$$\frac{1}{\omega(I)} \int_I |f(x) - a| dx \leq C,$$

con C independiente de I.

Por otra parte, observar que $\|f\|_{BMO_E(\omega)} \leq 2\|f\omega^{-1}\|_\infty$, por lo que $L^\infty_{\omega^{-1}} \subset BMO_E(\omega)$, donde hemos usado la notación (4.11) para los espacios de Lebesgue. La función $f(x) = \ln(\frac{1}{x})\chi_{(0,1)}$ es un ejemplo de una función no acotada que está en BMO_1. Además, $|f| \in BMO$ si $f \in BMO$, pero la recíproca no es cierta. Enunciaremos ahora una propiedad muy útil, que es consecuencia de de la desigualdad de John-Niremberg, y que puede hallarse en [**Duo01**], para el caso sin pesos, pero que puede extenderse para cualquier peso de las clases A^p ([**MW76**]).

Lema 1.5.1(Propiedad de normas equivalentes)**.** *Sea $p \in (1, \infty)$ y sea $\omega \in A^r$, para cualquier $r \leq p'$. Si definimos*

$$\|f\|_{(BMO_E(\omega))_p} \doteq \sup_I \left(\frac{1}{\omega(I)} \int_I |f(x) - f_I|^p \omega^{1-p}(x) dx \right)^{1/p},$$

donde el supremo se toma sobre todo cubo $I \subset E$, entonces, $\|f\|_{(BMO_E(\omega))_p}$ es una norma en $BMO_E(\omega)$, equivalente a la norma $\|f\|_{BMO_E(\omega)}$.

Dado que nos será útil en los capítulos 3 y 5, enunciaremos ahora unos resultados acerca de la Maximal de Hardy-Littlewood actuando en BMO. Denotaremos con M a la maximal en $\mathbb{R}^n$ y con M_Q a la maximal soportada en un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, es decir, tomando los promedios sobre bolas contenidas en Q.

En [**BDS81**], Bennet, Sharpley y De Vore probaron el siguiente resultado para el operador maximal de Hardy-Littlewood M actuando sobre BMO_n:

Si $f \in BMO_n$ **entonces** $\mathrm{M}f \equiv \infty$ **o** $\|\mathrm{M}f\|_{BMO_n} \leq C\|f\|_{BMO_n}$**.**

Para el operador maximal T^* relacionado al semigrupo del calor clásico, es decir

$$\mathrm{T}^* f(x) = \sup_{s>0} |\int_{\mathbb{R}^n} T_s(x,y) f(y) dy|$$

donde $T_s(x,y)$ es el núcleo del calor en (3.2), vale el mismo resultado que para la función maximal Hardy-Littlewood recién mencionado, usando que $\mathrm{M}f$ y T^*f son comparables (ver, por ejemplo, [**ST05**], page 1113).

Para el caso con pesos, sobre la maximal de Hardy-Littlewood se tienen los siguientes resultados. En [**BDS81**], Teorema 4.2, se demuestra la versión sin pesos del siguiente resultado, cuya demostración surge fácilmente adaptando aquella prueba a este caso.

Teorema 1.5.1. 1. *Sea Q un cubo fijo en $\mathbb{R}^n$ y sea ω un peso de la clase $A^1(Q)$. Si f pertenece a $BMO_Q(\omega)$ entonces $\mathrm{M}_Q f$ pertenece a $BMO_Q(\omega)$ y*

$$\|\mathrm{M}_Q f\|_{BMO_Q(\omega)} \leq C \|f\|_{BMO_Q(\omega)},$$

donde C depende solamente de la dimensión n y la constante $A^1(Q)$ de ω.

2. *Sea $\omega \in A^1(\mathbb{R}^n)$. Si f pertenece a $BMO_n(\omega)$ y si $\mathrm{M}f$ no es idénticamente infinito, entonces $\mathrm{M}f$ pertenece a $BMO_n(\omega)$ y*

$$\|\mathrm{M}f\|_{BMO_n(\omega)} \leq C \|f\|_{BMO_n(\omega)},$$

donde C depende sólo de la dimensión n y la constante A^1 de ω.

1.6. Operadores de Hardy.

Los operadores de Hardy clásicos, están definidos para funciones reales, medibles en $\mathbb{R}^+$, de la siguiente manera: el **operador de Hardy clásico en cero**

$$\mathrm{H}_0 f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy,$$

y el **operador de Hardy clásico en infinito**

$$\mathrm{H}_\infty f(x) = \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Observar que los operadores de Hardy son adjuntos uno del otro, en el espacio de medida $(\mathbb{R}^+, dx)$.

El primer resultado de continuidad en espacios de Lebesgue para estos operadores fue dado por Hardy en 1939 y establece lo siguiente: dado $p > 1$, el operador H_0 está acotado de $L^p(\mathbb{R}^+, x^{a+p-1}dx)$ en $L^p(\mathbb{R}^+, x^{a-1}dx)$ si y sólo si $a < 0$, y el operador H_∞ está acotado en los mismos espacios si y sólo si $a > 0$.

En general, suelen considerarse operadores de Hardy modificados, que son variaciones de los operadores clásicos. Un resultado con pesos generales para operadores de Hardy fue expuesto por Muckenhoupt en 1972 en [**Muc72**]. Aquí copiamos los resultados de un artículo posterior de Muckenhoupt y Andersen, [**AM82**], donde estudian los operadores modificados

$$P_\eta f(x) = \frac{1}{x^\eta}\int_0^x f(y)dy$$

y

$$Q_\eta f(x) = \frac{1}{x^\eta}\int_x^\infty f(y)dy,$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.6.1(Tipo fuerte de P_0)**.** *Sean $1 \le p \le q < \infty$. Dados dos pesos en $\mathbb{R}^+$, U y V, tenemos que P_0 es de tipo fuerte (p,p) con los pesos U y V, es decir, existe C independiente de f tal que*

$$\left(\int_0^\infty |P_0 f(x)|^q U(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty |f(x)|^p V(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

si y sólo si

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty U(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^r V^{-\frac{p'}{p}}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Teorema 1.6.2(Tipo fuerte de Q_0)**.** *Sean $1 \le p \le q < \infty$. Dados dos pesos en $\mathbb{R}^+$, U y V, tenemos que Q_0 es de tipo fuerte (p,p) con los pesos U y V si y sólo si*

$$\sup_{r>0}\left(\int_0^r U(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_r^\infty V^{-\frac{p'}{p}}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

A lo largo de la tesis, consideraremos distintos tipos de **operadores de Hardy modificados**.

En el capítulo 2 consideramos

$$\mathrm{H}_0^\beta f(x) = \frac{1}{x^{\beta+1}} \int_0^x f(y) y^\beta dy$$

y

$$\mathrm{H}_\infty^\eta f(x) = x^\eta \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y^{\eta+1}},$$

donde β y η son mayores a -1. El tipo fuerte (p, q) con pesos de estos operadores se obtiene usando los Teoremas 1.6.1 y 1.6.2. Más exactamente, es claro que $\mathrm{H}_0^\beta : L^p(\mathbb{R}^+, \omega(x)dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^+, \omega(x)dx)$ si y sólo si $P_0 : L^p(\mathbb{R}^+, \frac{\omega(x)}{x^{\beta p}}dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^+, \frac{\omega(x)}{x^{(\beta+1)p}}dx)$. Luego, por el Teorema 1.6.1, tenemos que H_0^β es de tipo fuerte (p, p), con medida $\omega(x)dx$, para $1 \le p < \infty$, si y sólo si

$$\sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \frac{\omega(x)}{x^{(\beta+1)p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r \omega^{-\frac{p'}{p}}(x) x^{\beta p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{1.29}$$

Análogamente, por el Teorema 1.6.2, tenemos que H_∞^η es de tipo fuerte (p, p), con medida $\omega(x)dx$, para $1 \le p < \infty$, si y sólo si

$$\sup_{r>0} \left(\int_0^r \omega(x) x^{\eta p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^\infty \frac{\omega^{-\frac{p'}{p}}(x)}{x^{(\eta+1)p'}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{1.30}$$

Con respecto al tipo débil, en [**AM82**] se demuestran resultados con dos pesos distintos para los operadores P_η y Q_η, que cubren todos los valores de η. Los citamos a continuación.

Teorema 1.6.3. *Sean $1 \le p \le q < \infty$ y $\eta \le 0$. Entonces, P_η es de tipo débil (p, q) con pesos U y V, es decir, existe C independiente de f tal que para todo $\lambda > 0$*

$$\left(\int_{\{x : |P_\eta f(x)> \lambda\}} U(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p V(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

si y sólo si

$$\sup_{r>0} r^{-\eta} \left(\int_r^\infty U(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r V^{-\frac{p'}{p}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Teorema 1.6.4. *Sean $\eta > 0$, $1 \leq p \leq q < \infty$ y consideremos*

$$B(\eta, a) = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^a \frac{U(x)}{x^{\eta q}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r V^{-\frac{p'}{p}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Si $B(\eta, a) < \infty$ para algún $a > 0$, entonces P_η es de tipo débil (p, q) con pesos U y V. Recíprocamente, si P_η es de tipo débil (p, q) con pesos U y V entonces $B(\eta, a) < \infty$ para todo $a > 0$.

Teorema 1.6.5. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$ y $\eta \geq 0$. Entonces, Q_η es de tipo débil (p, q) con pesos U y V si y sólo si*

$$\sup_{r>0} r^{-\eta} \left(\int_0^r U(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_r^\infty V^{-\frac{p'}{p}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Teorema 1.6.6. *Sean $\eta < 0$, $1 \leq p \leq q < \infty$ y consideremos*

$$B(\eta, a) = \sup_{r>0} \left(\int_0^r \left(\frac{x}{r}\right)^a \frac{U(x)}{x^{\eta q}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_r^\infty V^{-\frac{p'}{p}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Si $B(\eta, a) < \infty$ para algún $a > 0$, entonces Q_η es de tipo débil (p, q) con pesos U y V. Recíprocamente, si Q_η es de tipo débil (p, q) con pesos U y V entonces $B(\eta, a) < \infty$ para todo $a > 0$.

Podemos utilizar estos resultados para los Hardy modificados H_0^β y H_∞^η. Observar que la desigualdad

$$\|\mathrm{H}_0^\beta f\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \lesssim \|f\|_{L^p(\omega)}$$

se satisface si y sólo si

$$\|P_{(\beta+1)} g\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \lesssim \|g\|_{L^p(\omega(x) x^{-\beta p})},$$

poniendo $g(x) = f(x) x^\beta$. Luego, como $\beta + 1 > 0$, por el Teorema 1.6.4 tenemos que H_0^β es de tipo débil (p, p) con peso ω si y sólo si existe $a > 0$ tal que

$$\sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^a \frac{\omega(x)}{x^{(\beta+1)p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r \omega^{-\frac{p'}{p}} x^{\beta p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{1.31}$$

para $1 < p < \infty$, o, si $p = 1$,

$$\sup_{r>0} \int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^a \frac{\omega(x)}{x^{\beta+1}} dx \quad \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in (0,r)} \frac{x^\beta}{\omega(x)} \right) < \infty. \tag{1.32}$$

Análogamente, usando los Teoremas 1.6.6 y 1.6.5, tenemos que, para $\eta > -1$ y $1 \leq p < \infty$, H_∞^η es de tipo débil (p,p) con peso ω si y sólo si

$$\sup_{r>0} r^\eta \left(\int_0^r \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^\infty \omega^{-\frac{p'}{p}}(x) x^{-(\eta+1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{1.33}$$

cuando $-1 < \eta \leq 0$, o

$$\sup_{r>0} \left(\int_0^r \left(\frac{x}{r} \right)^a x^{\eta p} \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^\infty \omega^{-\frac{p'}{p}}(x) x^{-(\eta+1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{1.34}$$

para algún $a > 0$, cuando $\eta > 0$. En ambos casos, si $p = 1$ se toma el supremo esencial donde corresponda.

En el capítulo 4, sobre la integral fraccionaria de Laguerre, consideramos, en la sección 5, los **operadores de Hardy modificados con exponencial**:

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x) \doteq \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_0^x f(y) y^\beta dy$$

y su adjunto

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} f(x) \doteq x^\eta \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{\eta+1-\sigma}} f(y) dy$$

donde $\beta > -1$, $\eta > -1$ y $\sigma \geq 0$. A veces, en lugar de e^{-x}, consideraremos e^{-cx}, con c una constante positiva, y e^{-cx^2}.También para estos operadores el tipo fuerte (p,q) con pesos se obtiene de los Teoremas 1.6.1 y 1.6.2 (ver Teorema 4.6.1 de la sección 4.5).

Con respecto a los resultados de tipo débil, para el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ los obtenemos usando los Teoremas 1.6.6 y 1.6.5 (Teorema 4.6.4 de dicha sección). Sin embargo, el tipo débil para $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ no puede deducirse de los Teoremas 1.6.4 y 1.6.3. Recurrimos a otro resultado de tipo débil, sobre operadores más generales, sacado de [**MROSSG97**], cuya aplicación a $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ se enuncia y se demuestra en el Teorema 4.6.2. De todas maneras, nos será más útil una condición suficiente para el tipo débil de $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ en términos de una hipótesis más manejable, que establecemos en el Teorema 4.6.3.

Cuando consideramos pesos potencia, se tienen resultados mejores y más ajustados que los que surgen de simplemente aplicar estos teoremas al caso particular $\omega(x) = x^\delta$. Para $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ y $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$, tenemos condiciones necesarias y suficientes sobre el parámetro δ para todos los tipos de continuidad (p, q), con $1 \leq p, q \leq \infty$. Estos se enuncian y se demuestran en la última sección del capítulo 4.

En el capítulo 2, sección 3, para obtener mejores resultados con pesos potencia, en lugar de H_∞^η se considera un operador más chico, T^η, dado por

$$\mathrm{T}^\eta f(x) = \sup_{0<s<1} \left| x^\eta \int_x^\infty \varphi_s(y) f(y) \frac{1}{y^{\eta+1}} dy \right|,$$

donde $\{\varphi_s\}_{s\in(0,1)}$ es una familia de funciones positivas, continuas, uniformemente acotadas y rápidamente decrecientes en infinito. Observaremos aquí que $\mathrm{T}^\eta \lesssim \mathrm{H}_\infty^\eta$, y que T^η será de tipo débil donde H_∞^η falla. Los detalles, en la sección 2.3.

CAPÍTULO 2

CONTINUIDAD (P, P) CON PESOS PARA LOS OPERADORES MAXIMALES DE LAGUERRE.

2.1. Introducción.

El objetivo de este capítulo es probar, para cada uno de los tres sistemas de funciones de Laguerre considerados, la continuidad en espacios L^p con pesos para los operadores del semigrupo del calor y para el operador maximal asociado.

Para cada sistema, daremos condiciones necesarias y suficientes sobre el exponente de un peso potencia para que los operadores del semigrupo estén bien definidos en espacios de Lebesgue, y para obtener continuidad de tipo fuerte, débil y débil restringido (p, p), con $1 \leq p \leq \infty$, para el semigrupo y para el operador maximal asociado él. Para probar eso, consideraremos a los operadores del semigrupo en su forma integal, y obtendremos estimaciones puntuales de su núcleo.

Como consecuencia de esas estimaciones, consideraremos también una clase de pesos del tipo de la A^p de Muckenhoupt que será suficiente para el tipo fuerte (p, p) y el débil $(1, 1)$ del operador maximal asociado, y que contiene todos los pesos potencia del párrafo anterior.

En [**Ste94**], uno de los trabajos líderes sobre operadores relacionados con las expansiones en funciones de Laguerre, K. Stempak, demostró, entre otros resultados, que los correspondientes operadores maximales de los semigrupos asociados a los sistemas $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$,

$\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\ell_n^\alpha\}$, dados por (1.1), (1.2) y (1.3), respectivamente, son de tipo débil $(1,1)$ en $(\mathbb{R}^+, d\mu)$, con $d\mu(x) = dx$ en los dos primeros casos y $d\mu(x) = x^\alpha dx$ en el tercero. El parámetro α, inicialmente considerado mayor a -1, debía cumplir restricciones a priori, $\alpha \geq 0$ en el primer caso y $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ en el segundo.

Explayándonos más sobre los resultados de ese artículo, diremos que para el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ con $\alpha \geq 0$, Stempak probó que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+, dx)$, $1 \leq p \leq \infty$, $u(x,t) = e^{-t\mathrm{L}} f(x)$ es una solución $\mathcal{C}^\infty$ a la ecuación del calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{L}u$, tomando el operador $e^{-t\mathrm{L}} f$ en su forma integral. Además, prueba la estimación

$$e^{-t\mathrm{L}} f(x) \leq C e^{-t/2} f^*(x)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+, dx)$, $1 \leq p \leq \infty$, donde f^* es una función maximal que se acota por la maximal de Hardy Littlewood. Esta estimación implica el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal asociado, que, a su vez, implica que $\lim_{t\to 0} e^{-t\mathrm{L}} f(x) = f(x)$, en *c.t.p*, para f localmente integrable. Por último, demuestra que

$$\|e^{-t\mathrm{L}} f\|_p \leq C e^{-t\frac{\alpha+1}{2}} \|f\|_p,$$

lo que implica que $\lim_{t\to 0} e^{-t\mathrm{L}} f = f$ en L^p, para $1 \leq p < \infty$.

La demostración de estas afirmaciones se basa en parte en que las normas L^p de las funciones de Laguerre $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ se pueden estimar por potencias del orden de n, y esto se conoce solo cuando $\alpha \geq 0$. Esa es la razón de la condición a priori sobre α. Para los otros sistemas pasa algo similar.

Para el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, estos resultados fueron extendidos para valores negativos de α por Macías, C. Segovia y J. L. Torrea en [**MST05**], apareciendo el llamado fenómeno del lápiz: para $\alpha \geq 0$, $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ es de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p < \infty$, y cuando $-1 < \alpha < 0$, es de tipo fuerte si y sólo si $-\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{p} < \frac{\alpha}{2} + 1$, obteniendo además, en los bordes, el tipo débil $(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2})$ y el tipo débil restringido $(\frac{\alpha}{2}+1, \frac{\alpha}{2}+1)$.

En [**MST06**], los mismos autores continuaron el estudio del sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ con $\alpha > -1$, proveyendo una descripción completa de la acotación del operador maximal asociado W^* con pesos potencia x^δ, suponiendo a priori la condición $\delta > -1$. Esta restricción en el exponente nos pareció poco natural en el espacio de medida $(\mathbb{R}^+, dx)$, donde x^δ es una función localmente integrable para todo real δ, dado que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^+$ se mantiene lejos del cero.

Como primer resultado para esta tesis, nos propusimos prescindir de esa restricción sobre el exponente δ y extender los resultados a los otros sistemas. Siguiendo de cerca a [**MST06**], usamos sus ideas de base y refinamos las estimaciones obtenidas allí para mayorizar los operadores del semigrupo por otros mejor adaptados a la estructura de $\mathbb{R}^+$.

La estrategia que usaremos para obtener las estimaciones deseadas sobre el núcleo para el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, será básicamente el mismo modus operandi para los demás sistemas, y también para la integral fraccionaria (capítulo 4 de esta tesis) y, en parte, para la continuidad de $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ en espacios BMO (capítulo 3). Este método, descripto para este caso al incio de la sección 3, consistirá en dividir el espacio $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en tres zonas, y en cada una de ellas estimar el núcleo de cada operador integral del semigrupo. De esta manera la función quedará mayorizada por operadores más familiares, como la Maximal de Hardy Litlewood local y versiones modificadas de los operadores de Hardy.

Para los otros dos sistemas restantes, no es necesario buscar de la misma manera estimaciones similares. Usaremos cambios de variable apropiados que nos permitan transferir puntualmente las estimaciones obtenidas en el primer caso para los otros núcleos. Esa clase de conexión entre los sistemas ha sido también aprovechada en [**AFT06**].

La organización de este capítulo será la siguiente. En la sección 2 enunciaremos los teoremas principales, correspondientes a los semigrupos de cada sistema de funciones de Laguerre y sus respectivos operadores maximales. En la sección 3 describiremos la forma de proceder para demostrar los teoremas, presentaremos algunos operadores involucrados y enunciaremos algunas de sus propiedades. En la sección 4 presentaremos un resultado de acotación en $L^p(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$, para un operador general controlado por una combinación de los operadores dados en la sección anterior,esto es, la maximal local y los operadores tipo Hardy. Este resultado nos permitirá demostrar los tres teoremas en un solo paso, una vez obtenidas las correspondientes estimaciones para cada semigrupo. Dichas estimaciones puntuales se probarán, para cada uno de los sistemasd en la sección 5, como un paso previo a la demostración de los teoremas principales. Por último, en la sección 6, estableceremos condiciones suficientes, sobre pesos más generales que los pesos potencia, para obtener el tipo fuerte (p,p) y el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal asociado a cada uno de los tres sistemas de funciones de Laguerre. Si bien estos resultados contienen parte del teorema para pesos potencia, hemos elegido esta secuencia ya que fue el modo en que fuimos obteniéndolos.

Por último, queremos acotar que preguntas concernientes a la convergencia de expansiones en funciones de Laguerre han sido consideradas por varios autores. Ver, por ejemplo, [**Mar82**], [**Muc69**], [**Muc70**], [**Now03**], [**Ste94**], [**Ste92**], [**Ste90**], [**Tha93**], [**Tha90b**], y [**Tha90a**]. También hay resultados recientes de A. Nowak y P. Sjögren con respecto al tipo débil $(1,1)$ para el operador maximal asociado al semigrupo del calor, para todos los sistemas de funciones de Laguerre, en dimensiones mayores (ver [**NS09**]). Para los dos últimos sistemas de funciones de Laguerre, en [**Now03**], A. Nowak obtuvo algunos resultados incluyendo pesos más generales Sin embargo, para el sistema $\{\varphi_n^\alpha\}$, la clase que él considera, la clase de Muckenhoupt $A_p(dx)$, no depende del parámetro α, como debería esperarse, ya que los núcleos mejoran cuando α crece. Nosotros presentamos aquí resultados en esa dirección, al final del capítulo, en la sección 6.

2.2. Los teoremas de continuidad con pesos potencia.

Antes de enunciar los teoremas, recordemos que para $p = 1$ el tipo débil y el tipo débil restringido son equivalentes. Por simplicidad, los resultados de tipo débil para $p = 1$ están incluídos dentro de los de tipo débil restringido. Recordemos que en este capítulo, los pesos forman parte de la medida y no están elevados a la p, a diferencia de la continuidad en espacios de Lebesgue considerada en el siguiente capítulo.

Teorema 2.2.1. *Sean $\alpha > -1$ y $1 \le p \le \infty$. Para el semigrupo $\{e^{-t\mathrm{L}_{\mathcal{L}}^\alpha}\}_{t>0}$, asociado al sistema de funciones de Laguerre $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, dadas por (1.1), tenemos los siguientes resultados: Para todo $t > 0$, el operador $e^{-t\mathrm{L}_{\mathcal{L}}^\alpha} f$ es finito c.t.p. para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$,*

$1 < p \leq \infty$, *si y sólo si* $\delta < (\frac{\alpha}{2}+1)p-1$, *y para toda* $f \in L^{p,1}(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$, $1 \leq p < \infty$, *si y sólo si* $\delta \leq (\frac{\alpha}{2}+1)p-1$.

Más aún, si $\mathrm{T} = e^{-t\mathrm{L}_{\mathcal{L}}^{\alpha}}$, $t > 0$, *o* $\mathrm{T} = \mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$, *el operador maximal asociado al semigrupo, tenemos que:*

1. *Para* $1 < p < \infty$, T *es de tipo fuerte* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}p - 1 < \delta < \frac{\alpha}{2}p + p - 1$.
2. *Para cada* $\delta \in \mathbb{R}$, T *es de tipo fuerte* (∞,∞) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $\alpha \geq 0$.
3. *Para* $1 < p < \infty$, T *es de tipo débil* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}p - 1 \leq \delta < \frac{\alpha}{2}p + p - 1$, *cuando* $\alpha \neq 0$, *o si y sólo si* $-1 < \delta < p-1$, *cuando* $\alpha = 0$.
4. *Para* $1 \leq p < \infty$, T *es de tipo débil restringido* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}p - 1 \leq \delta \leq \frac{\alpha}{2}p + p - 1$, *cuando* $\alpha \neq 0$, *o si y sólo si* $-1 < \delta \leq p-1$, *cuando* $\alpha = 0$.

Teorema 2.2.2. *Sean* $\alpha > -1$ *y* $1 \leq p \leq \infty$. *Para el semigrupo* $\{e^{-t\mathrm{L}_{\varphi}^{\alpha}}\}_{t>0}$, *asociado al sistema de funciones de Laguerre* $\{\varphi_n^\alpha\}$, *dadas por (1.2), tenemos los siguientes resultados:*

Para todo $t > 0$, *el operador* $e^{-t\mathrm{L}_{\varphi}^{\alpha}}f$ *es finito c.t.p. para toda* $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$, $1 < p \leq \infty$, *si y sólo si* $\delta < (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$, *y para toda* $f \in L^{p,1}(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$, $1 \leq p < \infty$, *si y sólo si* $\delta \leq (\alpha + \frac{3}{2})p - 1$.

Más aún, si $\mathrm{T} = e^{-t\mathrm{L}_{\varphi}^{\alpha}}$, $t > 0$, *o* $\mathrm{T} = \mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$, *el operador maximal asociado, tenemos que:*

1. *Para* $1 < p < \infty$, T *es de tipo fuerte* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $-(\alpha+\frac{1}{2})p-1 < \delta < (\alpha + \frac{1}{2})p + p - 1$.
2. *Para cada* $\delta \in \mathbb{R}$, T *es de tipo fuerte* (∞,∞) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $\alpha \geq -\frac{1}{2}$.
3. *Para* $1 < p < \infty$, T *es de tipo débil* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $-(\alpha+\frac{1}{2})p-1 \leq \delta < (\alpha + \frac{1}{2})p + p - 1$, *cuando* $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, *o si y sólo si* $-1 < \delta < p - 1$, *cuando* $\alpha = -\frac{1}{2}$.

4. *Para* $1 \leq p < \infty$, T *es de tipo débil restringido* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\delta dx)$ *si y sólo si* $-(\alpha+\frac{1}{2})p-1 \leq \delta \leq (\alpha+\frac{1}{2})p+p-1$, *cuando* $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, *o si y sólo si* $-1 < \delta \leq p-1$, *cuando* $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Teorema 2.2.3. *Sean* $\alpha > -1$ *y* $1 \leq p \leq \infty$. *Para el semigrupo* $\{e^{-t\mathrm{L}_\ell^\alpha}\}_{t>0}$, *asociado al sistema de funciones de Laguerre* $\{\ell_n^\alpha\}$, *dadas por (1.3), tenemos los siguientes resultados:*

Para todo $t > 0$, *el semigrupo del calor* $e^{-t\mathrm{L}_\ell^\alpha} f$ *es finito c.t.p. para toda* $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^{\delta+\alpha}dx)$, $1 < p \leq \infty$, *si y sólo si* $\delta < (\alpha+1)p-1$, *y para toda* $f \in L^{p,1}(\mathbb{R}^+, x^{\delta+\alpha}dx)$, $1 \leq p < \infty$, *si y sólo si* $\delta \leq (\alpha+1)p-1$.

Más aún, si $\mathrm{T} = e^{-t\mathrm{L}_\ell^\alpha}$, $t > 0$, *o* $\mathrm{T} = \mathrm{W}_{\ell^\alpha}^*$, *el operador maximal asociado, entonces se satisface:*

1. *Para* $1 < p < \infty$, T *es de tipo fuerte* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^{\delta+\alpha}dx)$ *si y sólo si* $-\alpha-1 < \delta < (\alpha+1)(p-1)$.
2. T *es de tipo fuerte* (∞,∞) *en* $(\mathbb{R}^+, x^{\delta+\alpha}dx)$ *para todo* $\delta \in \mathbb{R}$.
3. *Para* $1 < p < \infty$, T *es de tipo débil* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^{\delta+\alpha}dx)$ *si y sólo si* $-\alpha-1 < \delta < (\alpha+1)(p-1)$.
4. *Para* $1 \leq p < \infty$, T *es de tipo débil restringido* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^{\delta+\alpha}dx)$ *si y sólo si* $-\alpha-1 < \delta \leq (\alpha+1)(p-1)$.

Observación 2.2.1. Permítasenos observar que las condiciones sobre δ para la buena definición de los operadores del semigrupo, son exactamente las que aseguran que las funciones de Laguerre $\mathcal{L}_n^\alpha$ pertenezcan al espacio $L^p(x^\delta dx)$, $1 < p \leq \infty$, o al espacio $L^{p,1}(x^\delta dx)$, $1 \leq p < \infty$, para el caso tipo débil restringido. De hecho, como $\mathcal{L}_n^\alpha(x) \sim x^{\alpha/2}$ cuando $x \to 0^+$ y $\mathcal{L}_n^\alpha(x) \sim O(e^{-\epsilon x})$ cuando $x \to \infty$ (ver [**Tha93**], página 27), $\mathcal{L}_n^\alpha$ pertenecerá a $L^p(x^\delta dx)$ si y sólo si $\delta > -\frac{\alpha}{2}p - 1$ ($\alpha \geq 0$ cuando $p = \infty$), y a $L^{p,1}(x^\delta dx)$ si y sólo si $\delta \geq -\frac{\alpha}{2}p - 1$. Observaciones análogas se sostienen para los sistemas $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\ell_n^\alpha\}$.

2.3. Relación con los operadores de Hardy y la Maximal local.

La demostración de los Teoremas consistirá en estimar por arriba y por abajo cada operador del semigrupo $\{e^{-t\mathrm{L}}\}$ por operadores más simples y familiares, para cada operador L de Laguerre. La estimación será puntual y, en un sentido, uniforme para todo $t > 0$.

Consideraremos $e^{-t\mathrm{L}}f$ en su forma integral, es decir

$$e^{-t\mathrm{L}}f(x) = \int_0^\infty W_{\mathrm{L}}(,x,y)f(y)d\mu(y),$$

con $d\mu = dx$ o $d\mu(x) = x^\alpha dx$, dependiendo el caso. Dejando x fijo, dividiremos $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ en tres zonas, dependiendo de x. En cada una de ellas el núcleo será más simple y lo podremos estimar mejor. Exactamente, dividiremos de la siguiente manera:

$$\mathbb{R}^+ = (0, \frac{x}{4}] \bigcup (\frac{x}{4}, 4x) \bigcup [4x, \infty).$$

Al intervalo del medio lo llamaremos **zona local**. Ahí tenemos que $y \simeq x$, es decir, existen constantes c y C tales que $cx \leq y \leq Cx$ para todo $y \in (\frac{x}{4}, 4x)$. La integral del núcleo del calor contra f en esa zona estará acotada superiormente por la **Maximal de Hardy-Littlewood local** de f, es decir, el operador

$$\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) = \sup_{0<a<x<b<\kappa a} \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|dy,$$

donde κ es una constante mayor a 1. En la estimación obtendremos $\kappa = 16$. Las propiedades de este operador que usaremos aquí están enumeradas en la sección 1.4. Por el Teorema 1.4.1, y como $x^\delta \in A^p_{loc}$ para todo δ real, tenemos que $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ es de tipo fuerte (p,p), con $1 < p < \infty$, y tipo débil $(1,1)$, para cualquier peso potencia. Cuando $p = \infty$, y como $L^\infty(\mathbb{R}^+, x^\delta dx) = L^\infty(\mathbb{R}^+, dx)$ para todo δ, se puede obtener fácilmente el tipo fuerte (∞,∞) para $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$, con cualquier peso potencia.

Al intervalo $(0, \frac{x}{4}]$ lo llamaremos **zona global en el origen** y a $[4x, \infty)$ **zona global en infinito**. En esas zonas cada y permanece alejado de x una cierta distancia que es proporcional a x. En ambas zonas estimaremos por **operadores de Hardy modificados**.

Recordemos que, para $\beta > -1$ y $\eta > -1$, estos operadores son

$$\mathrm{H}_0^\beta f(x) = x^{-\beta-1} \int_0^x f(y) y^\beta dy \tag{2.1}$$

y su adjunto

$$\mathrm{H}_\infty^\eta f(x) = x^\eta \int_x^\infty f(y) y^{-\eta-1} dy, \tag{2.2}$$

en cero y **en infinito**, respectivamente, donde f es una función real, medible en $\mathbb{R}^+$, y $x \in \mathbb{R}^+$. Los valores de η y β que aparecerán en las estimaciones dependerán tanto del sistema como del valor del parámetro α. Más precisamente, para los sistemas $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\ell_n^\alpha\}$, obtendremos $\beta = \eta = \frac{\alpha}{2}$, $\beta = \eta = \alpha + \frac{1}{2}$ y $\eta = 0$, $\beta = \alpha$, respectivamente.

Observar que la desigualdad de Hölder en espacios de Lorentz (1.16) implica que $\mathrm{H}_0^\beta f(x)$ es finita *ct.p.* para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ si $1 < p \leq \infty$ y $\gamma < (\beta + 1)p - 1$, y para $f \in L^{p,1}(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$, usando el Lema 1.3.3, si $1 \leq p < \infty$ y $\gamma \leq (\beta + 1)p - 1$. Para H_∞^β sucede algo similar, sin embargo, como veremos más adelante, en lugar de este operador consideraremos otro más chico, T^η, que estará bien definido para toda función f en cualquiera de esos espacios.

Las propiedades de continuidad sobre estos espacios se resumen en los siguientes lemas.

Lema 2.3.1. *Para H_0^β, se tienen los siguientes resultados.*

a) Para $1 < p < \infty$, si $\gamma < \beta p + p - 1$ entonces H_0^β es de tipo fuerte (p, p) en $\mathbb{R}^+$ con medida $x^\gamma dx$.

b) Para $p = \infty$, H_0^β es de tipo fuerte (∞, ∞) en $\mathbb{R}^+$ con medida $x^\gamma dx$ para cualquier γ real.

c) Para $p = 1$, si $\gamma \leq \beta$ entonces H_0^β es de tipo débil $(1, 1)$ con medida $x^\gamma dx$.

d) Para $1 < p < \infty$, si $\gamma \leq \beta p + p - 1$ entonces H_0^β es de tipo débil restringido (p, p) con medida $x^\gamma dx$.

Demostración. Para probar a), verificamos que $\omega(x) = x^\gamma$ satisface la condición (1.29) si y sólo si $\gamma < \beta p + p - 1$, cuando $p > 1$. Luego, H_0^β es de tipo fuerte (p, p). Para la parte c), vemos que $\omega(x) = x^\gamma$ satisface (1.32) si sólo si $\gamma \leq \beta$, y por lo tanto H_0^β será de tipo débil $(1, 1)$.

La parte b) se cumple pues $\beta > -1$ y $L^\infty((0,\infty), x^\gamma dx) = L^\infty((0,\infty), dx)$, con igualdad de normas. Como tipo débil implica tipo débil restringido, para probar d) es suficiente con ver que H_0^β es de tipo débil restringido (p,p), con medida $x^\gamma dx$, para $\gamma = \beta p + p - 1$, o sea $p = (\gamma+1)/(\beta+1)$. Sea $f \in L^{p,1}(x^\gamma dx)$. Usando la desigualdad de Hölder para espacios de Lorentz obtenemos

$$|\mathrm{H}_0^\beta f(x)| \|f\|_{L^{p,1}(x^\gamma dx)} \; x^{-\beta-1} \|y^{\beta-\gamma}\|_{L^{p',\infty}((0,x),x^\gamma dx)}.$$

Como $p > 1$, tenemos $\beta \neq \gamma$ y además $p'(\beta-\gamma)+\gamma+1 = 0$. Luego, el Lema 1.3.3 implica que $\|y^{\beta-\gamma}\|_{L^{p',\infty}((0,x),x^\gamma dx)}$ es finita. Es un cálculo fácil ver $x^{-\beta-1} \in L^{p,\infty}(x^\gamma dx)$ si y sólo si $\gamma = \beta p + p - 1$. Por lo tanto, obtenemos la desigualdad deseada

$$\|\mathrm{H}_0^\beta f\|_{L^{p,\infty}(x^\gamma dx)} \leq C \; \|f\|_{L^{p,1}(x^\gamma dx)}.$$

□

Lema 2.3.2. *Para* H_∞^η *tenemos los siguientes resultados:*

a) Para $1 < p < \infty$*, si* $\gamma > -\eta p - 1$ *entonces* H_∞^η *es de tipo fuerte* (p,p) *con medida* $x^\gamma dx$*.*

b) Para $p = \infty$*, si* $\eta > 0$ *entonces* H_∞^η *es de tipo fuerte* (∞,∞) *con medida* $x^\gamma dx$*, para todo* γ *real.*

c) Para $p = 1$*, si* $\begin{cases} \gamma \geq -\eta - 1, & \eta \neq 0 \\ \gamma > -1, & \eta = 0 \end{cases}$ *entonces* H_∞^η *es de tipo débil* $(1,1)$ *con medida* $x^\gamma dx$*.*

Demostración. Para probar a) se verifica que $\omega(x) = x^\gamma$ satisface (1.30) si $\gamma > -\eta p - 1$. Para probar c), se comprueba que para esos valores de γ, $\omega(x) = x^\gamma$ verifica las condiciones (1.33) y (1.34). La parte b) sale igual que en el Lema 2.3.1.b, usando esta vez que $\eta > 0$. □

Observemos que si $\gamma = -\eta p - 1$, con $\eta \neq 0$ y $1 < p < \infty$, entonces H_∞^η no es de tipo débil (p,p) con respecto a la medida $x^\gamma dx$. Más exactamente, si consideramos $g(x) = \chi_{(0,\frac{1}{2})} \; \log^{-\xi}\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{1}{p}(\gamma+1)}$, con $\frac{1}{p} < \xi < 1$, entonces $g \in L^p(x^\gamma dx)$ pero $\mathrm{H}_\infty^\eta g \notin L^{p,\infty}(x^\gamma dx)$, si $\gamma = -\eta p - 1$. Para comprobar esto usamos que para todo $0 < x < \frac{1}{4}$,

$\mathrm{H}^{\eta}_{\infty}g(x) \geq Cx^{\eta}\log^{1-\xi}\left(\frac{1}{x}\right)$, y que esta última función no pertenece a $L^{p,\infty}(x^{\gamma}dx)$ (los detalles de están afirmación serán dados más adelante, en el capítulo 4, Lema 4.8.2, parte 3).

De acuerdo a los resultados obtenidos en [**MST06**], esperamos obtener tipo débil (p,p) con $\eta = \frac{\alpha}{2}$ para el operador maximal asociado a las funciones de Laguerre $\{\mathcal{L}^{\alpha}_{n}\}$ y por lo tanto los operadores que usamos para mayorarlo deberían tener esta propiedad. Por esta razón, consideraremos, en lugar de $\mathrm{H}^{\eta}_{\infty}$ el operador T^{η}, definido por

$$\mathrm{T}^{\eta}f(x) = \sup_{0<s<1} |\mathrm{T}^{\eta}_{s}f(x)|. \tag{2.3}$$

donde $\{\mathrm{T}^{\eta}_{s}\}_{s\in(0,1)}$ es una familia de operadores más ajustados que $\mathrm{H}^{\eta}_{\infty}$, definidos por

$$\mathrm{T}^{\eta}_{s}f(x) = x^{\eta}\int_{x}^{\infty} \varphi_s(y)f(y)y^{-\eta-1}dy,$$

donde $\{\varphi_s\}_{s\in(0,1)}$ es una familia de funciones no negativas y uniformemente acotadas que satisfacen

$$\|\varphi_s(y)y^{\delta}\|_{L^{q}(x,\infty)} < \infty \tag{2.4}$$

para todo δ, $0 < s < 1$, $x > 0$ y $1 \leq q \leq \infty$, y

$$\sup_{0<s<1}\int_{0}^{\infty} (\varphi_s(y))^{q}\,\frac{dy}{y} < \infty \tag{2.5}$$

para todo $1 \leq q < \infty$. Observar que, para todo $s \in (0,1)$, si $\varphi_s(y)$ es continua en y y rápidamente decreciente en infinito, entonces (2.4) se satisface. Como ejemplos de tales funciones φ_s, mostraremos aquellas que aparecen en la sección 4, en las demostraciones de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, respectivamente:

$$\varphi_s(y) = \left(\frac{y}{s}\right)^{\epsilon} e^{-c\frac{y}{s}} \tag{2.6}$$

y

$$\varphi_s(y) = \left(\frac{y^2}{s}\right)^{\epsilon} e^{-c\frac{y^2}{s}}, \tag{2.7}$$

donde ϵ y c son constantes positivas.

Por (2.4), $\mathrm{T}_s^\eta f(x)$ es finita en *c.t.p.* para $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo γ.

Por ser la familia $\{\varphi_s\}$ uniformemente acotada, T^η satisface

$$\mathrm{T}^\eta f(x) \leq C\mathrm{H}_\infty^\eta |f|(x) \quad \forall x \in (0,\infty) \tag{2.8}$$

y, por la desigualdad de Hölder y (2.5),

$$\mathrm{T}^\eta f(x) \leq C x^\eta \|f\|_{L^p(x^{-\eta p-1}dx)}. \tag{2.9}$$

La desigualdad (2.8) implica que todas las propiedades del Lema 2.3.2 para H_∞^η también se cumplen para T^η. Por (2.4), T^η es de tipo fuerte (∞,∞), también cuando $\eta = 0$. Por último, la desigualdad (2.9) implica que T^η es de tipo débil (p,p) con medida $x^\gamma dx$, para $\gamma = -\eta p - 1$, con $\eta \neq 0$, ya que en ese caso x^η pertenece a $L^{p,\infty}(x^\gamma dx)$.

Resumimos las propiedades de continuidad de T^η en el siguiente lema.

Lema 2.3.3. *Sea $\eta > -1$. Entonces se tiene:*

a) Para $1 < p < \infty$, si $\gamma > -\eta p - 1$ entonces T^η es de tipo fuerte (p,p) con medida $x^\gamma dx$.

b) Para $p = \infty$, si $\eta \geq 0$ entonces T^η es de tipo fuerte (∞,∞) con medida $x^\gamma dx$ para todo γ real.

c) Para $1 \leq p < \infty$, si $\begin{cases} \gamma \geq -\eta p - 1, & \eta \neq 0 \\ \gamma > -1, & \eta = 0 \end{cases}$ entonces T^η es de tipo débil (p,p) con medida $x^\gamma dx$.

2.4. Un resultado para un operador más general.

Para poder demostrar los tres teoremas de una sola vez, estableceremos en estasección un resultado de acotación en espacios de Lebesgue para una familia de operadores más generales que tengan ciertas propiedades y que, por cierto, serán satisfechas por los semigrupos de los tres sistemas de Laguerre.

Más precisamente, trataremos con operadores que puedan ser estimados en términos de los tres operadores nombrados en la sección anterior: el operador de Hardy modificado en el origen H_0^β, dado por (2.1), el operador T^η, dado por (2.3), un poco menor que el de

Hardy modificado en infinito H_∞^β, y la Maximal de Hardy Littlewood local $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$, dado por (1.21), en la sección 1.4. Con esta herramienta, la demostración de los teoremas que se hará en la sección siguiente, consistirá en probar que valen dichas estimaciones, es decir, que los semigrupos asociados a cada sistema satisfacen las hipótesis de la siguiente proposición, para apropiados valores de los parámetros β y η.

Proposición 2.4.1. *Sea* R *un operador sublineal definido sobre funciones medibles de* $\mathbb{R}^+$*. Supongamos que existen constantes* $\beta > -1$, $\eta > -1$ *y* $\kappa > 1$ *tales que*

$$|\mathrm{R}f(x)| \lesssim \mathrm{H}_0^\beta|f|(x) + \mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) + \mathrm{T}^\eta f(x) \tag{2.10}$$

en c.t.p. $x \in \mathbb{R}^+$ *y para toda función* f *medible en* $\mathbb{R}^+$*, (o donde los operadores de la derecha estén definidos), y que además para algún* $a > 0$ *se verifique*

$$\mathrm{R}|f|(x) \gtrsim x^\eta \int_0^a |f(y)|y^\beta dy \tag{2.11}$$

para c.t.p. $x \in (0,a)$ *y toda* f *medible en* $\mathbb{R}^+$ *soportada en* $(0,a)$*, entonces valen los siguientes resultados:*

i) *Para* $1 < p < \infty$, R *está bien definido en* $L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$*, es decir,* R$f$ *es finito c.t.p. para toda* $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$*, si y sólo si* $\gamma < (\beta+1)p - 1$.

ii) *Para* $1 < p < \infty$, R *está bien definido en* $L^{p,1}(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$*, si y sólo si* $\gamma \leq (\beta+1)p-1$.

iii) *Para* $p = 1$, R *está bien definido en* $L^1(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $\gamma \leq \beta$.

iv) *Para* $p = \infty$, R *está bien definido en* $L^\infty(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ *para toda* $\gamma \in \mathbb{R}$.

Con respecto a la continuidad en estos espacios, tenemos que:

a) *Para* $1 < p < \infty$, R *es de tipo fuerte* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $-\eta p - 1 < \gamma < (\beta+1)p - 1$.

b) *Para cada* γ *real,* R *es de tipo fuerte* (∞,∞) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $\eta \geq 0$.

c) *Para* $1 < p < \infty$, R *es de tipo débil* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $-\eta p - 1 \leq \gamma < (\beta+1)p - 1$*, cuando* $\eta \neq 0$*, ó* $-1 < \gamma < (\beta+1)p - 1$*, cuando* $\eta = 0$.

d) *Para* $p = 1$, R *es de tipo débil* $(1,1)$ *en* $(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $-\eta - 1 \leq \gamma \leq \beta$*, cuando* $\eta \neq 0$*, ó* $-1 < \gamma \leq \beta$*, cuando* $\eta = 0$.

e) Para $1 \leq p < \infty$*,* R *es de tipo débil restringido* (p,p) *en* $(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ *si y sólo si* $-\eta p - 1 \leq \gamma \leq (\beta+1)p - 1$*, cuando* $\eta \neq 0$*, ó* $-1 < \gamma \leq (\beta+1)p - 1$*, cuando* $\eta = 0$*.*

Corolario 2.4.1. *Sea* $\{\mathrm{R}_s\}_{s\in I}$ *una familia de operadores definidos sobre funciones medibles de* $\mathbb{R}^+$*. Si la estimación por arriba (2.10) se cumple de manera uniforme para todo* $s \in I$*, y la estimación por abajo (2.11) se satisface para algún* $s \in I$*, entonces las conclusiones de la Proposición 2.4.1 se cumplen para el operador maximal asociado* R^**, dado por* $\mathrm{R}^* f(x) \doteq \sup_{s\in I} |R_s f(x)|$*.*

Observación 2.4.1. Observar que la hipótesis (2.10) implica las condiciones suficientes de los resultados mientras que la hipótesis (2.11) nos da las necesarias. Para la demostración de los Teoremas principales de este capítulo se usará el Corolario 2.4.1, probando que el semigrupo asociado a cada sistema de funciones de Laguerre satisface las estimaciones requeridas para ciertos valores de β y η. De esta manera, los resultados saldrán directamente de las conclusiones del Corolario.

Demostración de la Proposición 2.4.1. Observemos primero que si denotamos por X alguno de los espacios involucrados (el espacio L^p, $L^{p,\infty}$ o $L^{p,1}$ y sus versiones con pesos), entonces $f \in X$ si y sólo si $|f| \in X$, con igualdad de normas en X. Además, $0 \lesssim f \lesssim g$ implica $\|f\|_X \lesssim \|g\|_X$.

Para ver que las las condiciones sobre los pesos son suficientes, utilizaremos la estimación por arriba (2.10) y los resultados conocidos sobre los operadores que aparecen en el lado derecho de la desigualdad. Por ejemplo, para probar las condiciones suficientes de I), II), III) y IV), basta observar que el dominio de $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ y T^η contienen todos los espacios $L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $\gamma \in \mathbb{R}$, y el dominio de H_0^β contiene $L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ (o $L^{p,1}(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$) si $1 < p < \infty$ y $\gamma < (\beta+1)p - 1$ (respectivamente, $1 \leq p < \infty$ y $\gamma \leq (\beta+1)p - 1$). En $L^\infty(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx) = L^\infty(\mathbb{R}^+, dx)$, R_s está bien definido siempre, ya que hemos supuesto $\beta > -1$. Para probar ahora las condiciones suficientes de los enunciados a) hasta e), basta usar los resultados de tipo fuerte, débil y débil restringido (p,p) para pesos potencias de los operadores involucrados, contenidos en los Lemas 2.3.1 y 2.3.3 y en el Teorema 1.4.1 de la sección 1.4.

Ahora probaremos que las condiciones sobre γ de los resultados I, II, III y IV son también necesarias. Supongamos entonces que $|\mathrm{R}f(x)| < \infty$ para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^+$, y para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$. Luego, $\mathrm{R}|f|(x)$ es finita *c.t.p.* para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$ y la hipótesis (2.11) nos da

$$\int_0^a |f(y)y^{\beta-\gamma}|y^\gamma dy < \infty \quad \forall f \in L^p((0,a), x^\gamma dx).$$

Luego, por el Lema 1.3.2 de la sección 1.3, tenemos $y^{\beta-\gamma} \in L^{p'}((0,a), x^\gamma dx)$. Si $1 < p < \infty$, esto pasa si y sólo si $\gamma < \beta p + p - 1$ (caso I). Si $p = 1$ (caso III), entonces $y^{\beta-\gamma} \in L^\infty((0,a_s), x^\gamma dx) = L^\infty((0,a_s), dx)$ si y sólo si $\gamma \leq \beta$.

Para el caso II), usando nuevamente el Lema 1.3.2 y la observaciòn que le sigue, obtenemos

$$y^{\beta-\gamma} \in L^{p',\infty}((0,a_s), x^\gamma dx).$$

Por el Lema 1.3.3, esto implica que, cuando $\beta \neq \gamma$, se tiene $(\beta-\gamma)p' + \gamma \geq -1$, es decir, la desigualdad deseada $\gamma \leq (\beta+1)p - 1$. Cuando $\beta = \gamma$, obtenemos esa desigualdad usando que $\beta > -1$ y $p \geq 1$.

Veremos ahora que las condiciones para la continuidad del operador R son también necesarias. Para ello sea $f = \chi_{(\frac{a}{2},a)}$. Claramente, f pertenece a $L^p(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$, con $1 \leq p \leq \infty$, y también a $L^{p,1}(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx)$, con $1 < p < \infty$, para toda $\gamma \in \mathbb{R}^+$, y además, por la hipótesis (2.11), tenemos, para alguna constante $\widetilde{A}$, que

$$x^\eta \leq \widetilde{A}\mathrm{R}f(x), \quad \text{para } c.t.p.\ x \in (0,a). \tag{2.12}$$

Analizemos ahora cada uno de los casos. **Caso e)** Supongamos que R es de tipo fuerte (∞,∞) con medida $x^\gamma dx$. Entonces $\mathrm{R}f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, x^\gamma dx) = L^\infty(\mathbb{R}^+, dx)$, y por (2.12) tenemos que

$$x^\eta \leq \widetilde{A} \;\; \textit{para c.t.p. } x \in (0,a),$$

y esto pasa si y sólo si $\eta \geq 0$.

Caso a) Supongamos que R es de tipo fuerte (p,p), con medida $x^{\gamma}dx$, $1 < p < \infty$. Entonces, por (2.12) tenemos que $x^{\eta} \in L^p((0,a), x^{\gamma}dx)$, y esto implica $\gamma > -\eta p - 1$.

Casos b) , c) y d) Supongamos ahora que R es de tipo débil o tipo débil restringido (p,p) con medida $x^{\gamma}dx$, para $1 \leq p < \infty$. En ambos casos tendremos que $x^{\eta} \in L^{p,\infty}((0,a_s), x^{\gamma}dx)$ y esto, por el Lema 1.3.3, implica $\gamma \geq -\eta p - 1$, si $\eta \neq 0$, o $\gamma > -1$, si $\eta = 0$.

□

2.5. Demostración de los teoremas de la sección 2.2.

Como anticipamos, las demostraciones de los teoremas consistirán en probar que cada operador de cada semigrupo de Laguerre considerado satisface la estimación por arriba (2.10) de manera uniforme en el parámetro s y la estimación por abajo (2.11), para los valores de η y β que correspondan. Luego, la Proposición 2.4.1 y el Corolario 2.4.1 nos implicarán los resultados de acotación deseados, tanto para cada operador del semigrupo como para el operador maximal asociado.

Demostración del Teorema 2.2.1. Sea $\alpha > -1$ una constante fija. Consideramos al semigrupo $\{e^{-tL_{\mathcal{L}^\alpha}}\}_{t>0}$, asociado a las funciones (1.1), con cada operador en forma integral. Recordemos que, por medio del cambio de variables $s = \frac{1-e^{-\frac{t}{2}}}{1+e^{-\frac{t}{2}}}$, transformamos $e^{-tL_{\mathcal{L}^\alpha}}f(x)$ en

$$\mathrm{R}_s f(x) \doteq \int_0^{\infty} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) f(y)dy,$$

donde $0 < s < 1$ y el núcleo está dado por (1.5), es decir

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) = \frac{1}{2}\frac{1-s^2}{2s} e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x+y)} I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}\right),$$

para $0 < x < \infty$ y $0 < y < \infty$, siendo I_α la función de Bessel modificada (ver Lema 1.1.1 en sección 1.1). De esta manera el operador maximal del semigrupo nos quedará

$$\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha} f(x) = \sup_{0<s<1} |\mathrm{R}_s f(x)| = \sup_{0<s<1} \left| \int_0^{\infty} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) f(y)dy \right|.$$

Probaremos que $\{\mathrm{R}_s\}$ y el Operador Maximal $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.4.1, con $\eta = \beta = \frac{\alpha}{2}$ y $\kappa = 16$.

Primero veremos que para cada $s \in (0,1)$, R_s satisface la estimación por abajo (2.11), con constantes dependientes de s. Más exactamente, obtendremos que existe una constante C_s tal que

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \geq C_s\ (xy)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{para todo } 0 < x, y < s.$$

Primero observemos que si tomamos $0 < x, y < s$ entonces $\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}} \leq 1$, y por la estimación de la función de Bessel dada en el Lema 1.1.1, sección 1.1,

$$I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}\right) \simeq (xy)^{\frac{\alpha}{2}},$$

obtenemos

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha+1} (xy)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x+y}{4s}} \geq C_s (xy)^{\frac{\alpha}{2}},$$

donde hemos usado $0 < x, y < s$.

Probaremos ahora que los operadores integrales R_s satisfacen la estimación por arriba (2.10) uniformemente para todo $s \in (0,1)$, de manera de obtener esa estimación también para $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$. Para eso, fijamos $x \in \mathbb{R}^+$ y dividimos en tres zonas la integración respecto de y:

Zona global en el origen: $y \in \mathbb{R}^+$ tales que $0 < y \leq \frac{x}{4}$.
Zona global en infinito: $y \in \mathbb{R}^+$ tales que $4x \leq y < \infty$.
Zona local: $y \in \mathbb{R}^+$ tales que $\frac{x}{4} < y < 4x$.

Nuestro objetivo será probar, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, $s \in (0,1)$ y cualquier función f medible en $\mathbb{R}^+$, las siguientes estimaciones:

$$\int_0^{\frac{x}{4}} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)|f(y)|dy \lesssim \mathrm{H}_0^{\frac{\alpha}{2}}|f|(x) \quad \textbf{(caso global en el origen)}, \tag{2.13}$$

$$\int_{4x}^{\infty} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)|f(y)|dy \lesssim \mathrm{T}^{\frac{\alpha}{2}}|f|(x) \quad \textbf{(caso global en infinito)}, \tag{2.14}$$

y

$$\int_{\frac{x}{4}}^{4x} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)|f(y)|dy \lesssim \mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) \quad \textbf{(caso local)}, \tag{2.15}$$

con $\kappa = 16$. Por comodidad tomaremos siempre una función f no negativa.

Comenzaremos por estimar el núcleo (1.5). Si llamamos

$$D_s(x) \doteq \left\{ y \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq \frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\},$$

por las estimaciones de la función de Bessel (Lema 1.1.1), tenemos

$$I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}\right) \simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha}(xy)^{\frac{\alpha}{2}}$$

para todo $y \in D_s(x)$ y

$$I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}\right) \simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{-\frac{1}{2}}(xy)^{-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}}$$

para todo $y \notin D_s(x)$.

Luego, si denotamos con $W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)$ y $W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)$ las restricciones del núcleo $W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)$ a $D_s(x)$ y $D_s(x)^c$, respectivamente, a partir de (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned} W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) &\simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha+1}(xy)^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x+y)} \\ &\lesssim \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha+1}(xy)^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{x+y}{4s}} \end{aligned} \tag{2.16}$$

y

$$\begin{aligned} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) &\simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\frac{1}{2}}(xy)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x+y)}e^{\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}} \\ &\simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\frac{1}{2}}(xy)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{|x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}|^2}{4s}}\,e^{-\frac{s}{4}|x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}|^2} \\ &\lesssim \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\frac{1}{2}}(xy)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{|x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}|^2}{4s}}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Probaremos que (2.13), (2.14) y (2.15) se satisfacen para cada núcleo $W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)$ y $W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)$.

Consideraremos primero las zonas globales.

Caso global en el origen: Para $0 < y \leq \frac{x}{4}$, querríamos obtener

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \lesssim x^{-\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.18}$$

Luego, integrando contra f en $(0,\frac{x}{4})$, esa estimación del núcleo nos daría

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{x}{4}} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) f(y)dy &\lesssim \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^x f(y) y^{\frac{\alpha}{2}} dy \\ &\doteq \mathrm{H}_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x), \end{aligned}$$

obteniéndose (2.13). Para el núcleo (2.16) tenemos

$$\begin{aligned} W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) &\lesssim \frac{1}{s^{\alpha+1}} x^{\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} e^{-c\frac{x}{s}} \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-c\frac{x}{s}}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para el núcleo (2.17), observar que cuando $0 < y < \frac{x}{4}$ se tiene $|x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}|^2 > \frac{x+y}{8}$. Entonces

$$W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \lesssim \frac{1-s^2}{2s} \left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-c\frac{x+y}{s}},$$

donde $c = \frac{1}{32}$.

Consideramos primero $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. En ese caso, dado que $\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2} \geq 1$, tenemos

$$\left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2}\right)^{\alpha}$$

y el núcleo $W^2_{\mathcal{L}^\alpha}$ nos queda igual al núcleo $W^1_{\mathcal{L}^\alpha}$, obteniendo la estimación (2.19) para $W^2_{\mathcal{L}^\alpha}$.

Por otra parte, si $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, tenemos

$$W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \lesssim \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}(xy)^{-\frac{1}{4}} e^{-c\frac{x+y}{s}}$$

$$\begin{aligned} &= x^{-\frac{\alpha}{2}-1}y^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}e^{-c\frac{x}{s}}\left(\frac{y}{s}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{-c\frac{y}{s}} \\ &\lesssim x^{-\frac{\alpha}{2}-1}y^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}e^{-c\frac{x}{s}}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que $-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}>0$.

Observar que $\alpha+1\le\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}$ si y sólo si $\alpha\le-\frac{1}{2}$, y además $0<y\le\frac{x}{4}$ y $\frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2}\ge 1$ implican $\frac{x}{s}\ge 4$. Entonces, tomando $\epsilon=\max\{\alpha+1,\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\}$, obtenemos la estimación

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)\lesssim\left(\frac{x}{s}\right)^{\epsilon}e^{-c\frac{x}{s}}x^{-\frac{\alpha}{2}-1}y^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.20}$$

Dado que $\left(\frac{x}{s}\right)^{\epsilon}e^{-c\frac{x}{s}}\le C$, tenemos (2.18).

Caso global en infinito : Consideramos $4x\le y<\infty$. Como el núcleo $W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)$ es simétrico respecto x e y, usando el caso anterior obtenemos a partir de (2.20) que

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)\le C\,x^{\frac{\alpha}{2}}y^{-\frac{\alpha}{2}-1}\varphi_s(y),$$

donde $\varphi_s(y)=\left(\frac{y}{s}\right)^{\epsilon}e^{-c\frac{y}{s}}$ y $\epsilon=\max\{\alpha+1,\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\}$.

Luego, integrando contra f en $(4x,\infty)$, obtenemos la estimación deseada (2.14):

$$\begin{aligned} \int_{4x}^{\infty}W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy &\lesssim \sup_{0<s<1}\left|x^{\frac{\alpha}{2}}\int_{x}^{\infty}f(y)\frac{1}{y^{\frac{\alpha}{2}+1}}\varphi_s(y)dy\right| \\ &\doteq \mathrm{T}^{\frac{\alpha}{2}}f(x). \end{aligned}$$

Observar que las funciones $\varphi_s(y)$ son uniformemente acotadas y satisfacen las condiciones (2.4) y (2.5) requeridas en la definición del operador $\mathrm{T}^{\frac{\alpha}{2}}$.

Caso local: Fijamos $0<x<\infty$, y consideraremos aquellos y tales que $\frac{x}{4}<y<4x$. Para ellos tenemos $(xy)^{\frac{1}{2}}\simeq x$ y $x+y\simeq x$. Luego, el núcleo (2.16) satisface

$$W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)\lesssim\frac{x^\alpha}{s^{\alpha+1}}e^{-c\frac{x}{s}}\lesssim\frac{1}{x},$$

recordando que $\alpha+1>0$. Luego, integrando contra f en $(\frac{x}{4},4x)$ obtenemos

$$\int_{\frac{x}{4}}^{4x}W^1_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy \;\lesssim\; \frac{1}{4x-\frac{x}{4}}\int_{\frac{x}{4}}^{4x}f(y)dy$$

$$\lesssim \; C\, \mathrm{M}_{loc,16} f(x),$$

donde la última desigualdad surge por ser $(\frac{x}{4}, 4x)$ un intervalo 16-local que contiene a x.

Ahora probaremos la misma estimación para el segundo núcleo (2.17). Empecemos por definir, para cada entero k, los conjuntos disjuntos

$$B_k(x) = \{y : 2^k \leq \frac{|x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}|}{2s^{\frac{1}{2}}} < 2^{k+1}\}. \tag{2.21}$$

Llamemos k_0 al único entero que satisface

$$2^{k_0+3} \leq \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} < 2^{k_0+4}.$$

Para todo $k \leq k_0$ tenemos

$$B_k(x) = (a_k, a_{k-1}] \cup [b_{k-1}, b_k)$$

con

$$a_k = (x^{\frac{1}{2}} - 2^{k+2} s^{\frac{1}{2}})^2, \quad b_k = (x^{\frac{1}{2}} + 2^{k+2} s^{\frac{1}{2}})^2. \tag{2.22}$$

Por esta expresión es claro que $a_k \nearrow x$ y $b_k \searrow x$ cuando $k \to -\infty$. También, para todo $k \leq k_0$ tenemos

$$\frac{x}{4} \leq a_{k_0} \leq a_k < x < b_k \leq b_{k_0} \leq 4x$$

y

$$(a_{k_0}, b_{k_0}) \setminus \{x\} = \bigcup_{k \leq k_0} B_k(x).$$

Consecuentemente, podemos esribir

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{x}{4}}^{4x} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) f(y)dy &= \int_{\frac{x}{4}}^{a_{k_0}} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) f(y)dy \\
&+ \sum_{k \leq k_0} \int_{B_k(x)} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) f(y)dy \\
&+ \int_{b_{k_0}}^{4x} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) f(y)dy \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.
\end{aligned}$$

Para I y III, obvservar que por nuestra elección de k_0 tenemos

$$a_{k_0} \leq \frac{9}{16}x < \frac{25}{16}x \leq b_{k_0}.$$

Entonces, tanto si $y \in (\frac{x}{4}, a_{k_0})$ como si $y \in (b_{k_0}, 4x)$, existen constantes positivas tales que

$$e^{-\frac{|x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}|^2}{4s}} \leq e^{-c\frac{x}{s}}.$$

Esta estimación en (2.17) nos da

$$\begin{aligned}\int_{\frac{x}{4}}^{a_{k_0}} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy &\lesssim \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-c\frac{x}{s}}\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{4}}^{4x} f(y)dy \\ &\lesssim \mathrm{M}_{loc,16}f(x)\end{aligned}$$

y también

$$\int_{b_{k_0}}^{4x} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy \leq C\ \mathrm{M}_{loc,16}f(x).$$

Para estimar II, observar que si $y \in B_k(x)$ entonces $\frac{|x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}|^2}{4s} \geq 2^{2k}$, y el núcleo (2.17) queda acotado por

$$W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \lesssim \frac{1}{(sx)^{\frac{1}{2}}}\ e^{-2^{2k}} \lesssim 2^{2k}e^{-2^{2k}}\frac{1}{b_k - a_k},$$

donde en la última recordamos la definición (2.22). Como $B_k(x) \subset (a_k, b_k)$ y estos son intervalos locales conteniendo a x, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq k_0}\int_{B_k(x)} W^2_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy &\lesssim \sum_{k\leq k_0} 2^k e^{-2^{2k}}\frac{1}{b_k-a_k}\int_{a_k}^{b_k} f(y)dy \\ &\leq \mathrm{M}_{loc,16}f(x)\sum_{-\infty}^{\infty} 2^k e^{-2^{2k}} \\ &\lesssim \mathrm{M}_{loc,16}f(x),\end{aligned}$$

obteniendo la estimación deseada también para II.

Con esto concluímos la demostración del teorema.

$\square$

Observación 2.5.1. Si mantenemos el factor $1-s^2$ en las anteriores estimaciones del núcleo, obtendremos

$$\int_0^\infty W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy \le C(1-s)^c\left(\mathrm{H}_0^{\alpha/2}f(x)+\mathrm{M}_{loc,16}f(x)+\mathrm{T}^{\alpha/2}f(x)\right),$$

para todo $0<s<1$, donde $c=\min\{\alpha+1,1/2\}$. Por el cambio de variable $s=(1+e^{-t/2})/(1-e^{-t/2})$ obtenemos que $1-s^2$ es equivalente a $e^{-t/2}$. Por lo tanto, para todo $t>0$, obtenemos

$$e^{-t\mathcal{L}_{\mathcal{L}^\alpha}}f(x) \le Ce^{-\frac{c}{2}t}\left(\mathrm{H}_0^{\alpha/2}f(x)+\mathrm{M}_{loc,16}f(x)+\mathrm{T}^{\alpha/2}f(x)\right). \tag{2.23}$$

Demostración del Teorema 2.2.2. Análogamente al caso de las funciones $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, el semigrupo del calor puede considerarse como una familia de operadores integrales con núcleos

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)=2(xy)^{1/2}W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x^2,y^2) \tag{2.24}$$

para $s\in(0,1)$. Esta igualdad sale de la relación que existe entre las funciones $\mathcal{L}_n^\alpha$ y φ_n^α, como se ve en (1.2), sección 1.1 . El operador maximal asociado quedaría entonces

$$\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}f(x)=\sup_{0<s<1}\left|\int_0^\infty W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)f(y)dy\right|.$$

Probaremos que este semigrupo satisface las hipótesis de la Proposición 2.4.1 y del Corolario 2.4.1, para $\eta=\beta=\alpha+\frac{1}{2}$ y $\kappa=4$. Por la relación (2.24) entre los sistemas $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, usaremos algunas estimaciones obtenidas en la demostración del Teorema 2.2.1.

Para obtener la estimación por abajo (2.11) con $\eta=\beta=\alpha+\frac{1}{2}$, usamos lo obtenido en la demostración del teorema anterior: para cada $s\in(0,1)$, existe una constante C_s tal que

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)\ge C_s\ (xy)^{\alpha/2},$$

para $0<x,y<s$. Luego, (2.24) implica

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)\ge C_s(xy)^{\alpha+1/2}$$

para todo $0 < x, y < s$ y $0 < y < 1$. Luego, integramos contra una f en $(0, s)$ y obtenemos lo que buscamos.

Para obtener la estimación por arriba (2.10), con constante independiente de $s \in (0,1)$, consideramos f una función medible y no negativa en $\mathbb{R}^+$, y fijamos $x \in \mathbb{R}^+$. Como hicimos con la demostración del Teorema 2.2.1, dividimos en tres casos.

Caso local: $x/2 < y < 2x$. De (2.24) tenemos que

$$\int_{x/2}^{2x} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)f(y)dy = 2x^{1/2}\int_{x/2}^{2x} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x^2,y^2)f(y)y^{1/2}dy.$$

Si introducimos el cambio de variable $z = y^2$ obtenemos

$$\int_{x/2}^{2x} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x^2,y^2)f(y)y^{1/2}dy = \frac{1}{2}\int_{x^2/4}^{4x^2} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x^2,z)g(z)dz,$$

donde $g(z) = f(z^{1/2})z^{-1/4}$. Aplicando la estimación (2.15) obtenida en el Teorema anterior, es decir

$$\int_{x/4}^{4x} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy \leq C\ \mathrm{M}_{loc,16}f(x),$$

obtenemos

$$\int_{x/2}^{2x} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)f(y)dy \leq Cx^{1/2}\mathrm{M}_{loc,16}\, g(x^2).$$

Cambiando de variable nuevamente vemos que

$$\mathrm{M}_{loc,16}\, g(x^2) = \sup_{0<a^{1/2}<x<b^{1/2}<4a^{1/2}} \frac{1}{b-a}\int_{a^{1/2}}^{b^{1/2}} f(y)y^{1/2}dy$$

Como

$$b - a = (b^{1/2}+a^{1/2})(b^{1/2}-a^{1/2}) \simeq x(b^{1/2}-a^{1/2})$$

y $y \simeq x$, tenemos que

$$\mathrm{M}_{loc,16}\, g(x^2) \leq C\ \frac{1}{x^{1/2}}\mathrm{M}_{loc,4}f(x) \tag{2.25}$$

y por lo tanto,

$$\int_{x/2}^{2x} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)f(y)dy \leq C\ \mathrm{M}_{loc,4}f(x).$$

Caso global en el origen: $0 < y \leq x/2$.

En las zonas globales usaremos la estimación (2.20) obtenida en la demostración del Teorema anterior:

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) \le C\ \left(\frac{x}{s}\right)^{\epsilon} e^{-c\frac{x}{s}} x^{-\alpha/2-1} y^{\alpha/2}, \qquad \text{para } 0<y\le \frac{x}{4}.$$

donde $\epsilon = \max\{\alpha+1, \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\}$ es positivo.

En la zona global en el origen, con $0<y\le x/2$, usamos la relación (2.24) y la desigualdad anterior para obtener

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) \le Cx^{-(\alpha+1/2)-1} y^{\alpha+1/2}$$

para $0<y<x/2$. Por lo tanto tenemos

$$\int_0^{x/2} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) f(y)dy \le C\ \mathrm{H}_0^{\alpha+1/2} f(x)$$

para todo $s\in(0,1)$.

Caso global en infinito: $2x\le y<\infty$.

Análogamente al caso anterior, usando de nuevo la estimación (2.20) esta vez con x e y cambiados, (recordar que los núcleos son simétricos), obtenemos

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) \le Cx^{\alpha+1/2} y^{-(\alpha+1/2)-1} \tilde{\varphi}(s,y)$$

para $0<y<x/2$, donde $\tilde{\varphi}(s,y) = \varphi(s,y^2) = \left(\frac{y^2}{s}\right)^{\epsilon} e^{-c\frac{y^2}{s}}$. Como esta función $\tilde{\varphi}$ también satisface las condiciones requeridas en la definición de los operadores T^η, llegamos a

$$\int_{2x}^{\infty} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) f(y)dy \le C\ \mathrm{T}^{\alpha+\frac{1}{2}} f(x).$$

Por lo tanto, la hipótesis (2.10) de la Proposición 2.4.1 se satisface, con $\eta=\beta=\alpha+\frac{1}{2}$ y $\kappa=4$, y la constante de acotación independiente de s. □

Demostración del Teorema 2.2.3. En este caso consideramos la medida $d\mu(y) = y^\alpha dy$, que aparecerá multiplicando el núcleo de los operadores integrales.

Procediendo de una manera análoga a la demostración del Teorema 2.2.2, usando esta vez la relación (1.3) de la sección 1.1, nos queda

$$W_{\ell^\alpha}(s,x,y)y^\alpha = x^{-\frac{\alpha}{2}} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)y^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Es muy simple ver que, para todo $s \in (0,1)$, los operadores integrales con núcleos $W_{\ell^\alpha}(s,x,y)y^\alpha$, satisfacen las hipótesis (2.10), con constante independiente de s, y (2.11), de la Proposición 2.4.1, tomando $\eta = 0$, $\beta = \alpha$ y $\kappa = 16$. Por lo tanto, obtendremos los resultados deseados reemplazando γ por $\delta + \alpha$ en las conclusiones de la Proposición. $\square$

2.6. Continuidad en espacios con pesos más generales.

En la sección anterior, hemos acotado de manera puntual nuestros operadores maximales asociados a los semigrupos de Laguerre por operadores de Hardy modificados y la maximal de Hardy-Littlewood local. Más precisamente, hemos obtenido:

$$\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha} \lesssim \mathrm{H}_0^{\alpha/2} + \mathrm{M}_{loc,16} + \mathrm{H}_\infty^{\alpha/2}, \tag{2.26}$$

$$\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} \lesssim \mathrm{H}_0^{\alpha+\frac{1}{2}} + \mathrm{M}_{loc,4} + \mathrm{H}_\infty^{\alpha+\frac{1}{2}}, \tag{2.27}$$

and

$$\mathrm{W}^*_{\ell^\alpha} \lesssim \mathrm{H}_0^{\alpha} + \mathrm{M}_{loc,16} + \mathrm{H}_\infty^{0}, \tag{2.28}$$

donde H_0^β, H_∞^η y $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ están dadas por (2.1), (2.2) y la ecuación (1.21) de la sección 1.4, respectivamente.

De hecho, hemos obtenido unas estimaciones más fuertes, usando el operador T^η, dado por (2.3), en lugar H_∞^η. Pero, por (2.8), las desigualdades de arriba también se cumplen. Estas estimaciones nos alcanzarán para lo que queremos probar en esta sección, esto es, el tipo fuerte (p,p) y débil $(1,1)$ con respecto a pesos más generales para los operadores maximales asociados a los semigrupos de Laguerre. Para esta continuidad, los operadores

H_∞^η y T^η se comportan de la misma manera, como se ve comparando los Lemas 2.3.2 y 2.3.3.

Para el operador $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$, la clase A_{loc}^p, dada por la Definición 1.4.2 de la sección 1.5, nos da una caracterización de los pesos para los cuales el operador $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ es de tipo fuerte (p,p), para $1 < p < \infty$, y tipo débil $(1,1)$. Para los operadores H_0^β y H_∞^η, con $\eta > -1$ y $\beta > -1$, como hemos visto en los preliminares, sección 1.6, tenemos que

- H_0^β es de tipo fuerte (p,p), $1 \leq p < \infty$, con respecto a $\omega(x)dx$ si y sólo si

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty \omega(x)x^{-p(\beta+1)}dx\right)^{1/p}\left(\int_0^r \omega(x)^{-\frac{p'}{p}}x^{p'\beta}dx\right)^{1/p'} < \infty \tag{2.29}$$

- H_∞^η es de tipo fuerte (p,p), $1 \leq p < \infty$, con respecto a $\omega(x)dx$ si y sólo si

$$\sup_{r>0}\left(\int_0^r \omega(x)x^{p\eta}dx\right)^{1/p}\left(\int_r^\infty \omega(x)^{-\frac{p'}{p}}x^{-p'(\eta+1)}dx\right)^{1/p'} < \infty \tag{2.30}$$

- H_0^β es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a $\omega(x)dx$ si y sólo si

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^\epsilon \omega(x)x^{-\beta-1}dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,r)} \omega(x)^{-1}x^\beta\right) < \infty \tag{2.31}$$

  para algún $\epsilon > 0$.

- H_∞^η es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a $\omega(x)dx$ si y sólo si

$$\sup_{r>0}\left(\int_0^r \left(\frac{x}{r}\right)^\epsilon x^\eta\omega(x)dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(r,\infty)} \frac{1}{x^{\eta+1}\omega(x)}\right) < \infty \tag{2.32}$$

  para algún $\epsilon > 0$, cuando $\eta > 0$, o

$$\sup_{r>0} r^\eta\left(\int_0^r \omega(x)dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(r,\infty)} \frac{1}{x^{\eta+1}\omega(x)}\right) < \infty \tag{2.33}$$

  cuando $-1 < \eta \leq 0$.

Consideraremos la siguiente clase de pesos.

Definición 2.6.1. Sean $\eta > -1$ y $\beta > -1$ tales que $\eta + \beta > -1$. Para $1 < p < \infty$, decimos que un peso ω pertenece a la clase $A_{\eta,\beta}^p$ si existe una constante C tal que

$$\left(\int_a^b \omega(x)x^{p\eta}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \omega(x)^{-\frac{p'}{p}}x^{p'\beta}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\int_a^b x^{\eta+\beta}dx \tag{2.34}$$

para todo $0 \leq a < b < \infty$.

Para $p = 1$, decimos que $\omega \in A^1_{\eta,\beta}$ si existen constantes positivas C y γ tales que

$$\left(\int_a^b \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right)^\gamma \omega(x) x^\eta dx\right) \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,\,b)} \omega(x)^{-1} x^\beta \leq C \int_a^b x^{\eta+\beta} dx \tag{2.35}$$

cuando $\eta \neq 0$, o

$$\left(\int_a^b \omega(x) dx\right) \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,\,b)} \omega(x)^{-1} x^\beta \leq C \int_a^b x^\beta dx \tag{2.36}$$

cuando $\eta = 0$, para todo $0 \leq a < b < \infty$.

Una clase de pesos similar para $p = 1$ fue introducida en [**AK82**]. Notar que los pesos potencia que pertenecen a $A^p_{\eta,\beta}$ son exactamente aquellos que satisfacen las condiciones de la Proposición 2.4.1. Más exactamente, $\omega(x) = x^\delta \in A^p_{\eta,\beta}$ si y sólo si $-1 - \eta p < \delta < \beta p + p - 1$ cuando $1 < p < \infty$, o $-1 - \eta \leq \delta \leq \beta$ cuando $p = 1$ y $\eta \neq 0$, o $-1 < \delta \leq \beta$ cuando $p = 1$ y $\eta = 0$.

Ahora enunciaremos los resultados con pesos generales para los operadores maximales de Laguerre.

Teorema 2.6.1. *Sea $\alpha > -1$, $1 \leq p < \infty$ y $\omega \in A^p_{\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2}}$. Entonces $W^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$ y de tipo débil $(1,1)$, en el espacio $(\mathbb{R}^+, \omega(x)dx)$.*

Teorema 2.6.2. *Sea $\alpha > -1$, $1 \leq p < \infty$ y $\omega \in A^p_{\alpha+\frac{1}{2},\,\alpha+\frac{1}{2}}$. Entonces $W^*_{\varphi^\alpha}$ es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$ o de tipo débil $(1,1)$, en el espacio $(\mathbb{R}^+, \omega(x)dx)$.*

Teorema 2.6.3. *Sea $\alpha > -1$, $1 \leq p < \infty$ y $\omega(x)x^\alpha \in A^p_{0,\,\alpha}$ (o equivalentemente $\omega \in A^p(x^\alpha dx)$). Entonces $W^*_{\ell^\alpha}$ es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$ y de tipo débil $(1,1)$ en $(\mathbb{R}^+, \omega(x)x^\alpha dx)$.*

Probaremos los tres Teoremas simultáneamente.

Demostración. Mostraremos que si $\omega \in A^p_{\eta,\,\beta}$ entonces ω satisface las condiciones para la continuidad de los operadores $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$, H^β_0 y H^η_∞, dadas al principio de esta sección. Entonces, las estimaciones (2.26), (2.27) y (2.28) nos darán los resultados enunciados.

Sea $\omega \in A^p_{\eta,\beta}$. Fácilmente se puede ver que $\omega \in A^p_{loc}$, $1 \leq p < \infty$, ya que $x \simeq a \simeq b$ para todo x en un intervalo local (a,b), donde $0 < a < b < 2a$.

A continuación, consideremos $1 < p < \infty$. Probaremos que ω satisface (2.29) y (2.30). Notar que $\omega \in A_p^{\eta,\beta}$ es equivalente a decir que $\omega(x)x^{p\eta-\eta-\beta} \in A^p(x^{\eta+\beta}dx)$. Entonces, por la teoría de los pesos A^p de Muckenhoupt, sabemos que $\omega(x)x^{p\eta-\eta-\beta} \in A^q(x^{\eta+\beta}dx)$, para algún $1 < q < p$. Esto, junto con la desigualdad de Hölder, nos da

$$\left(\int_a^b \omega(x)x^{p\eta}dx\right)\left(\int_a^b \upsilon(x)dx\right)^{\frac{q}{q'}} \simeq \left(\int_a^b x^{\eta+\beta}dx\right)^q \tag{2.37}$$

para todo $0 \leq a < b < \infty$, con $\upsilon(x) = \left(\omega(x)x^{p\eta-\eta-\beta}\right)^{-\frac{q'}{q}} x^{\eta+\beta}$.

Sea $r > 0$. Partiendo la integral en intervalos diádicos, usando (2.37) y que $(0,r) \subset (0, r2^k)$ para todo $k \geq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \omega(x)x^{-p(\beta+1)}dx &\leq C \sum_{k=0}^\infty \left(r2^k\right)^{-p(\eta+\beta+1)} \int_0^{r2^{k+1}} \omega(x)x^{p\eta}dx \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty \left(r2^k\right)^{(q-p)(\eta+\beta+1)} \left(\int_0^r \upsilon(x)dx\right)^{-\frac{q}{q'}} \\
&\leq C\, r^{-p(\eta+\beta+1)} \int_0^r \omega(x)x^{\eta p}dx,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene por que la suma $\sum 2^{k(q-p)(\eta+\beta+1)}$ es una constante finita. Por lo tanto, usando nuevamente que $\omega \in A^p_{\eta,\beta}$, se tiene

$$\left(\int_r^\infty \omega(x)x^{-p(\beta+1)}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r \omega(x)^{-\frac{p'}{p}} x^{p'\beta}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C$$

para todo $r > 0$. Por lo tanto, la condición (2.29) se satisface.

Por otro lado, notemos que por la misma propiedad de los pesos A^p que usamos, para ω se tiene

$$\left(\omega(x)x^{p\eta-\eta-\beta}\right)^{-\frac{p'}{p}} \in A^{q'}(x^{\eta+\beta}dx),$$

para algún $q' < p'$. Entonces

$$\int_a^b \omega(x)^{-\frac{p'}{p}} x^{\beta p'}dx \left(\int_a^b \left(\omega(x)x^{p\eta-\eta-\beta}\right)^{\frac{p'q}{pq'}} x^{\eta+\beta}dx\right)^{\frac{q'}{q}} \simeq \left(\int_a^b x^{\eta+\beta}dx\right)^{q'}$$

para todo $0 \leq a < b < \infty$, y procediendo análogamente a como hicimos antes se obtiene (2.30).

Consideremos ahora $p = 1$. Para probar que se cumplen (2.31), (2.32) (cuando $\eta > 0$) y (2.33) (cuando $-1 < \eta \leq 0$) , usaremos las siguientes herramientas:

Si $\omega \in A^1_{\eta,\beta}$ entonces

$$b^{-\beta} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(b/2,\,b)} \omega(x) \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(a,\,2a)} \omega(x)x^{-\beta} \tag{2.38}$$

y

$$a^{\eta+1} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(a,\,2a)} \omega(x) \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(b/2,\,b)} \omega(x)x^{\eta+1} \tag{2.39}$$

para todos los a y b positivos tales que $b \geq 2a$.

Más aún,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in(b/2,\,b)} \omega(x) \leq C_\gamma\, b^{-\eta-1} \int_{b/2}^{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma} \omega(x)x^{\eta}dx$$

para todo $\gamma \geq 0$. En efecto, por la condición (2.35) tenemos que

$$\int_a^b \left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma} \omega(x)x^{\eta}dx \leq C\, b^{\beta+\eta+1} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(a,\,2a)} \omega(x)x^{-\beta}$$

para algún $\gamma > 0$ si $\eta \neq 0$, o con $\gamma = 0$ cuando $\eta = 0$; entonces (2.38) se verifica. La desigualdad (2.39) se comprueba de una manera similar.

Ahora probaremos (2.31). Sean $r > 0$ y $\epsilon > 0$, entonces

$$\int_r^{\infty} \left(\frac{r}{x}\right)^{\epsilon} \omega(x)x^{-\beta-1}dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\epsilon}(2^k r)^{-\beta-1} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \omega(x)dx.$$

Como ω satisface la condición A^1_{loc} y (2.38), tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} (2^k r)^{-\beta-1} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \omega(x)dx &\leq C\,(2^k r)^{-\beta} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(2^k r,2^{k+1}r)} \omega(x) \\ &\leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(s,2s)} \omega(x)x^{-\beta} \end{aligned}$$

para todo $0 < s \leq r$. Entonces, como $\epsilon > 0$ obtenemos

$$\int_r^{\infty} \left(\frac{r}{x}\right)^{\epsilon} \omega(x)x^{-\beta-1}dx \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(0,r)} \omega(x)x^{-\beta}$$

y así la condición (2.31) se satisface.

Para probar (2.32), escribimos

$$\int_0^r \left(\frac{x}{r}\right)^{\epsilon} \omega(x)x^{\eta}dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\epsilon} \left(r2^{-k}\right)^{\eta} \int_{r2^{-k-1}}^{r2^{-k}} \omega(x)dx.$$

Usando (2.39) y la condición A^1_{loc}, se obtiene

$$\left(r2^{-k}\right)^{\eta} \int_{r2^{-k-1}}^{r2^{-k}} \omega(x)dx \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(s/2,\,s)} \omega(x)x^{\eta+1},$$

para todo $s \geq r$ y todo $k \in \mathbb{N}_0$. Se deduce entonces que

$$\int_0^r \left(\frac{x}{r}\right)^{\epsilon} \omega(x)x^{\eta}dx \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(r,\,\infty)} \omega(x)x^{\eta+1}$$

y la condición (2.32) se satisface para todo η, en particular, para $\eta > 0$.

Para $-1 < \eta < 0$, como $\omega \in A^1_{loc}$, se obtiene que

$$\int_0^r \omega(x)dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty} r2^{-k} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(r2^{-k-1},\, r2^{-k})} \omega(x).$$

Por (2.39), para todo $s \geq r$ tenemos

$$r^{\eta} \int_0^r \omega(x)dx \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\eta}\right) \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(s/2,\,s)} \omega(x)x^{\eta+1}$$

lo cual implica

$$r^{\eta} \int_0^r \omega(x)dx \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(r,\,\infty)} \omega(x)x^{\eta+1},$$

ya que $\eta < 0$. Por lo tanto, (2.33) se satisface para $-1 < \eta < 0$.

Para probar que la desigualdad de arriba también se cumple para $\eta = 0$, consideramos $r > 0$. Para casi todo $x \in (r,\infty)$, existe algún $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $x \in (r2^k, r2^{k+1})$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega(x)^{-1}x^{-1} &\leq \left(r2^k\right)^{-\beta-1} \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,r2^{k+1})} \omega(y)^{-1}y^{\beta} \\ &\leq C \left(\int_0^r \omega(x)dx\right)^{-1}. \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple por la Definición 2.36. Finalmente, tomando $\operatorname{ess\,sup}$ sobre (r,∞) obtenemos (2.33) para $\eta = 0$. $\square$

CAPÍTULO 3

ESPACIOS BMO RELACIONADOS A SEMIGRUPOS DE FUNCIONES DE LAGUERRE.

3.1. Introducción.

En este capítulo estudiaremos la continuidad de los operadores maximales asociados a semigrupos de Laguerre en espacios de oscilación media acotada (BMO) apropiados. Para el segundo sistema de funciones de Laguerre $\{\varphi_n^\alpha\}$, dado por (1.2), definiremos un espacio BMO_φ adaptado a este sistema. Lo haremos a partir del espacio $H^1_{\varphi^\alpha} = \{f \in L^1 : \mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} f \in L^1\}$, introducido por Dziubanski en [**Dzi08**], donde $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ es el operador maximal asociado al semigrupo. En ese artículo, el autor demuestra que, para $\alpha > -\frac{1}{2}$, el espacio $H^1_{\varphi^\alpha}$ tiene estructura atómica, como era de esperarse por analogía con el análisis armónico clásico. En ese caso, las condiciones sobre los átomos son un poco diferentes a las clásicas. Nosotros definiremos nuestro espacio BMO_φ a partir de estos nuevos átomos, emulando el caso clásico, donde BMO es el espacio dual del H^1.

Nuestro objetivo en este capítulo, además de enumerar las características de BMO_φ, será probar la continuidad de $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ sobre esos espacios, y sus versiones con pesos. Luego, extenderemos los resultados obtenidos para el primer sistema de funciones de Laguerre $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, dado por (1.1). Hemos elegido este camino (de comenzar con el sistema $\{\varphi_n^\alpha\}$) ya que en ese caso el núcleo del calor presenta una forma más simple y cómoda para trabajar en un espacio como BMO donde las estimaciones en norma ya no dependen sólo del tamaño de la función. En el caso del sistema $\{\varphi_n^\alpha\}$ resulta más evidente su relación con el caso clásico y esto será fundamental en nuestro enfoque.

Comenzaremos el capítulo generalizando esa clase de espacios BMO y enumeraremos sus propiedades especiales en la sección 3.2. En la sección 3.3 probaremos la continuidad sobre ellos de dos operadores clásicos, en sus versiones localizadas. Por un lado, volvemos a considerar la **Maximal de Hardy-Littlewood local** de orden κ, dada por la Definición 1.4.1 de la sección 1.4. También introduciremos el **operador maximal del semigrupo del calor localizado** T^*_{loc}, definido como

$$\mathrm{T}^*_{loc}f(x) = \sup_{0<s<1} \left| \int_{\frac{x}{2}}^{2x} T_s(x,y) f(y) dy \right|, \tag{3.1}$$

donde $T_s(x,y)$ es el núcleo del calor clásico, dado por

$$T_s(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}. \tag{3.2}$$

Para probar la acotación de estos operadores sobre los espacios BMO introducidos en la sección 3.2, usaremos el comportamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood local sobre espacios BMO locales con pesos en A^1_{loc}. Este resultado, que extiende la teoría de $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ ya conocida, es tratado y probado en el capítulo 5 de esta tesis.

En las secciones 3.4 y 3.5 consideraremos el caso particular de los espacios BMO con pesos de la sección 3.2, asociados a los sistemas $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, respectivamente. Estableceremos la continuidad de los operadores maximales asociados a los semigrupos en dichos espacios pesados, suponiendo hipótesis apropiadas sobre los pesos. La continuidad del operador maximal del calor localizado T^*_{loc} sobre estos espacios, obtenida en la sección 3.3, será crucial para obtener los resultados deseados. Observamos aquí que los resultados de la sección 3.4 concernientes al sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ se obtendrán de lo obtenido para $\{\varphi_n^\alpha\}$ con pesos y de la relación existente entre ambos sistemas.

En la sección 3.6 definiremos una clase de pesos, similar a la clase A_1 de Muckenhoupt, que implicará las condiciones para la continuidad de los operadores maximales considerados. Mostraremos que esa clase contiene los mismos pesos potencias dados en las secciones anteriores, y que además incluye pesos de la forma $1 + x^\gamma$, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Finalmente, en la sección 3.7, estudiaremos un BMO asociado a las funciones de Laguerre $\{\ell_n^\alpha\}$ y estableceremos un resultado de continuidad con pesos para el operador maximal asociado al semigrupo, donde la condición sobre los pesos tendrá la forma de una clase similar a la tratada en la sección 3.6.

3.2. Los espacios $BMO_\tau(\omega)$.

En esta sección introduciremos la función radio crítico, que nos permitirá definir los espacios BMO deseados, y consideraremos nuevamente los pesos A^p locales, estableciendo propiedades básicas pero útiles en esos espacios.

Definición 3.2.1. Dada una función continua y positiva τ definida sobre $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, diremos que es una **función radio crítico** si

$$\lim_{x\to 0^+} \tau(x) = 0, \tag{3.3}$$

y

$$\tau(y) \leq \tau(x) + \gamma|x-y|, \tag{3.4}$$

para algún $0 < \gamma < 1$ y todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Ejemplos de funciones radio crítico son $\tau(x) = \gamma x$, para $\gamma < 1$, o $\tau(x) = \min\{\gamma x, b\}$,con $b > 0$.

Asociados a una tal función, podemos distinguir distintos tipos de intervalos. Ante todo conviene recordar que trabajaremos solamente con intervalos no vacíos $I = B(x, R) = (x - R, x + R)$ tales que $\overline{I} \subset \mathbb{R}^+$, de modo que siempre supondremos $0 < R < x$. Los intervalos que distinguiremos son los siguientes:

- *Intervalo crítico*: $I = B(x, \tau(x)) = (x - \tau(x), x + \tau(x))$;
- *Intervalo sub-crítico*: $I = B(x, R)$ tal que $0 < R < \tau(x)$;
- *Intervalo super-crítico*: $I = B(x, R)$ tal que $R > \tau(x)$; o, más

- *Intervalo λ-super-crítico*: $I = B(x,R)$ tal que $R > \lambda\tau(x)$, donde $0 < \lambda \leq 1$ es una constante fija. En otras palabras, I es un intervalo λ-super-crítico respecto a τ si y solo si I es super-crítico para $\tau' = \lambda\tau$.

A continuación enumeramos algunas propiedades útiles de $\tau(x)$ y de los intervalos relacionados. Las pruebas son totalmente elementales así que las omitiremos.

Proposición 3.2.1. *Sea τ satisfaciendo (3.3) y (3.4). Entonces*

a)

$$\tau(x) \leq \gamma x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.5}$$

b) Sea $\kappa \doteq \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. Si I es un intervalo crítico o subcrítico para τ, entonces I es un intervalo κ-local (ver (1.22) en preliminares). Más aún, si I y J son dos intervalos críticos o subcríticos para τ tales que $\overline{I} \cap \overline{J} \neq \emptyset$, entonces $I \cup J$ es un intervalo κ^2- local.

c) Si I es un intervalo crítico para τ, entonces $\frac{1}{\kappa}\tau(x) \leq \tau(y) \leq \kappa\tau(x)$ para todo par $x, y \in \overline{I}$, donde $\kappa \doteq \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. Mas aún, si I y J son dos intervalos críticos para τ tales que $\overline{I} \cap \overline{J} \neq \emptyset$, entonces $\frac{1}{\kappa^2}\tau(x) \leq \tau(y) \leq \kappa^2\tau(x)$, para todo par $x, y \in \overline{I \cup J}$.

Lema 3.2.1. *Existe una sucesión creciente de números reales positivos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tal que los intervalos críticos $I_j = (a_j - \tau(a_j), a_j + \tau(a_j))$ son disjuntos y satisfacen $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \overline{I_j} = \mathbb{R}^+$.*

Demostración. Para definir la sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, consideramos primero $j = 0$ y ponemos $a_0 = 1$ e $I_0 = (1 - \tau(1), 1 + \tau(1))$. Dado que $\tau(x) \leq \gamma x$, para algún $0 < \gamma < 1$ fijo, se tiene que $1 - \tau(1) \geq 1 - \gamma > 0$, lo cual implica $I_0 \subset\subset \mathbb{R}^+$.

Para $j \geq 0$, definiremos a_{j+1} para que se satisfagan $a_{j+1} > a_j$ y

$$a_j + \tau(a_j) = a_{j+1} - \tau(a_{j+1}). \tag{3.6}$$

De esta manera, el intervalo I_{j+1} estará a la derecha de I_j y ellos tendrán un extremo en común.

Para elegir a_{j+1}, sea h la función $h(x) \doteq x - \tau(x)$ y b la constante $b \doteq a_j + \tau(a_j)$. Notar que h es continua y el $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$, pues $h(x) \geq (1-\gamma)x$, para todo $x > 0$. Entonces como $b > h(a_j)$, existe al menos un valor $y > a_j$ tal que $h(y) = b$. Si tomamos $a_{j+1} = \inf\{y > a_j : h(y) = b\}$, este valor a_{j+1} satisfacerá (3.6).

Similarmente definimos a_{j-1} para $j \leq 0$ de modo que $a_{j-1} < a_j$ y que

$$a_{j-1} + \tau(a_{j-1}) = a_j - \tau(a_j). \tag{3.7}$$

En este caso consideramos $h(x) = x + \tau(x)$ y $b = a_j - \tau(a_j)$. Siendo h continua y verificándose que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ y que $0 < b < h(a_j)$, podemos elegir $a_{j-1} = \sup\{0 < y < a_j : h(y) = b\}$.

De esta manera hemos elegido una sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ que satisface (3.6) y (3.7).

Finalmente para probar que $\{\overline{I_j}\}$ cubre $\mathbb{R}^+$, es suficiente con probar que

$$\lim_{j\to+\infty} a_j = +\infty \tag{3.8}$$

y

$$\lim_{j\to-\infty} a_j = 0. \tag{3.9}$$

Ambos límites existen puesto que $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es creciente y toma valores en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que $\lim_{j\to+\infty} a_j = b < +\infty$. Entonces, haciendo $j \to +\infty$ en (3.6), se obtiene $b - \tau(b) = b + \tau(b)$ y esto implica que $\tau(b) = 0$. Sin embargo esto no puede pasar para ningún $b > 0$ dado que τ es una función radio crítico y por lo tanto positiva sobre todo $\mathbb{R}^+$. En consecuencia queda probado (3.8).

De manera análoga, si suponemos $\lim_{j\to-\infty} a_j = a > 0$, haciendo $j \to -\infty$ en (3.7) se obtiene $\tau(a) = 0$. Por lo tanto, (3.9) también vale.

$\square$

Enumeraremos ahora propiedades que involucran pesos locales. Las definiciones y propiedades de los pesos A^p_{loc} se dieron en la sección 1.4, del capítulo 1: Preliminares.

Recordemos que $A_{loc}^{\infty} = \bigcup_{p\geq 1} A_{loc}^{p}$. En este capítulo nos será muy útil la propiedad de duplicación para pesos locales, enunciada en el Lema 1.4.1. Observar que esta propiedad, para $p = 1$, surge directamente de la definición de A_{loc}^{1}.

En el próximo Lema mostramos cómo un intervalo λ-super-crítico puede ser medido con un peso local en términos del cubrimiento que acabamos de ver.

Lema 3.2.2. *Sea $\omega \in A_{loc}^{\infty}$, τ función radio crítico e I un intervalo λ-super-crítico para τ. Si $\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{Z} : I_j \cap I \neq \emptyset\}$,donde $\{I_j\}$ es el cubrimiento por intervalos críticos del Lema 3.2.1, entonces*

$$\omega(I) \simeq \sum_{j\in\mathcal{J}} \omega(I_j), \tag{3.10}$$

con las constantes de estimación dependiendo sólo de λ, de la constante γ de (3.4), y de $[\omega]_{p,\kappa}$, con p tal que $\omega \in A_{loc}^{p}$ y $\kappa = \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2$.

Demostración. Dado que $I \subset\subset \mathbb{R}^+$ se tiene $I = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} I \cap \overline{I_j}$, y la primera desigualdad es trivial.

Sea $I = B(x_0, R)$, con $x_0 \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda\tau(x_0) \leq R < x_0$. Supongamos primero que $\sharp\mathcal{J} = 1$. En este caso $I \subset I_j$, para algún $j \in \mathbb{Z}$. Asimismo se tiene $\omega \in A_{loc}^{p}$, para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces por la Proposición 3.2.1 b) I_j es un intervalo-$\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ local y el Lema 1.4.1 de duplicación nos da

$$\omega(I_j) \leq C \left(\frac{\tau(a_j)}{R}\right)^p \omega(I),$$

Entonces, dado que $R \geq \lambda\tau(x_0)$ y que por la Proposición 3.2.1 c), $\tau(x_0) \simeq \tau(a_j)$, obtenemos la segunda desigualdad (3.10).

Supongamos ahora que $\sharp\mathcal{J} = 2$. Entonces $I \subset \overline{I_j \cup I_{j+1}}$, para algún entero j. Dado que por la Proposición 3.2.1 b) y c), $\overline{I_j \cup I_{j+1}}$ es un $\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2$-intervalo local y $\rho(a_j) \simeq \rho(a_{j+1}) \simeq \rho(x_0)$, por el Lema 1.4.1 se obtiene nuevamente (3.10).

Finalmente supongamos que $\sharp\mathcal{J} > 2$. Denotemos por j_0 el primer entero de $\mathcal{J}$ y por j_1 el último. Si j es tal que $j_0 < j < j_1$ entonces $I_j \subset I$ y como I_j son disjuntos, podemos escribir

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} \omega(I_j) \leq \omega(I_{j_0}) + \omega(I) + \omega(I_{j_1}). \tag{3.11}$$

Por otra parte, usando otra vez el Lema 1.4.1 y la Proposición 3.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \omega(I_{j_0}) &\leq \omega(I_{j_0} \cup I_{j_0+1}) \\ &\leq C\omega(I_{j_0+1}) \\ &\leq C\omega(I). \end{aligned}$$

Análogamente, $\omega(I_{j_1}) \leq C\omega(I_{j_1-1}) \leq C\omega(I)$. Por lo tanto de (3.11) se sigue (3.10). □

Con estos antecedentes estamos en condiciones de introducir los espacios $BMO_\tau(\omega)$ que nos interesan.

Definición 3.2.2. Sea τ una función radio crítico y ω un peso en $\mathbb{R}^+$. Diremos que una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ pertenece a $BMO_\tau(\omega)$ si existe una constante C tal que f satisface la *condición de oscilación media acotada*

$$\frac{1}{\omega(I)} \int_I |f(y) - f_I| dy \leq C, \tag{3.12}$$

para todo intervalo sub-crítico I y la *condición de promedios acotados*

$$\frac{1}{\omega(I)} \int_I |f(y)| dy \leq C, \tag{3.13}$$

para todo intervalo I crítico o super-crítico . La norma $\|f\|_{BMO_\tau(\omega)}$ se define como la menor de las constantes C que satisfacen ambas condiciones.

Observación 3.2.1. Como $\int_I |f(y) - f_I|dy \leq 2\int_I |f(y)|dy$ para cualquier intervalo I, se tiene $BMO_\tau(\omega) \subset BMO(\omega)$. Además, $L^\infty(\omega^{-1}) = \{f : f\omega^{-1} \in L^\infty\} \subset BMO_\tau(\omega)$, puesto que $\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx \leq \|f\omega^{-1}\|_\infty$, para cualquier intervalo $I \subset\subset \mathbb{R}^+$.

Observación 3.2.2. Notemos que si se pide que la condición (3.13) valga solamente para los intervalos super-críticos, por continuidad, también valdrá para los críticos.

Observación 3.2.3. En el capítulo 5 de esta tesis, introduciremos un espacio tipo BMO sobre $\mathbb{R}^+$ que llamaremos $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$, para $\kappa > 1$, asociado a la familia de intervalos locales $\mathcal{I}_\kappa$ dada por (1.22), sección 1.4. A $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ lo definiremos como el conjunto de aquellas funciones que satisfacen la condición de oscilación media acotada para los intervalos κ-locales, y la condición de promedios para los intervalos más grandes. La relación entre $BMO_\tau(\omega)$ y $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ es como sigue.

Dado $\kappa > 1$, si tomamos $\tau_0(x) = \gamma x$ con γ satisfaciendo $\kappa = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$, entonces el conjunto de todos los intervalos sub-críticos y críticos para τ_0 es exactamente $\mathcal{I}_\kappa$, el conjunto de los intervalos κ-locales . Así $BMO_\tau(\omega) = BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$. Más generalmente, para cualquier función radio crítico τ satisfaciendo (3.3) y (3.4), y para cualquier $\kappa \geq \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$, se tiene

$$BMO_\tau(\omega) \subset BMO^{\kappa}_{loc}(\omega), \tag{3.14}$$

en vista de (3.5), $\gamma \leq \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ y del hecho obvio que $\tau \leq \tau'$ implica que $BMO_\tau \subset BMO_{\tau'}$.

La introducción de estos espacios está inspirada, como dijimos, en el estudio de los adecuados substitutos de los espacios $BMO(\omega)$ en el contexto de los semigrupos asociados a los sistemas de Laguerre $\{\varphi^\alpha_n\}$, $\{\mathcal{L}^\alpha_n\}$ y $\{\ell^\alpha_n\}$. Ciertamente, si tomamos $\rho(x) = \frac{1}{8}\,\text{mín}\{x, \frac{1}{x}\}$ y $\omega \equiv 1$, BMO_ρ es el dual del espacio atómico $H^1_{L^\alpha}$ asociado a $\{\varphi^\alpha_n\}$, estudiado por J. Dziubanski en [**Dzi08**]. Además, si tomamos $\sigma(x) = \frac{1}{8}\,\text{mín}\{x, 1\}$, obtenemos el espacio BMO asociado al sistema $\{\mathcal{L}^\alpha_n\}$, que será el dual del espacio atómico asociado a ese sistema, también considerado por Dziubanski. Para el sistema $\{\ell^\alpha_n\}$ usaremos el mismo espacio BMO que consideramos para $\{\mathcal{L}^\alpha_n\}$, es decir, tomando la función radio crítico $\sigma(x)$. En las últimas secciones del capítulo nos concentraremos en estos casos particulares y estudiaremos la acción de los correspondientes operadores maximales de los semigrupos de difusión asociados sobre los respectivos espacios BMO.

Ahora estableceremos algunas propiedades útiles de los espacios $BMO_\tau(\omega)$.

El siguiente Lema nos dice que es suficiente comprobar la condición de promedios acotados (3.13) sólo para los intervalos críticos para concluir que una función está en $BMO_\tau(\omega)$.

Lema 3.2.3. *Sea $\omega \in A_{loc}^\infty$ y τ una función radio crítico. Supongamos que una función localmente integrable f satisface*

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx \leq A \tag{3.15}$$

para todos los intervalos críticos $I \subset\subset \mathbb{R}^+$, con A una constante dependiendo solo de f y de ω. Entonces para cada $0 < \lambda \leq 1$, (3.15) también vale para cualquier intervalo λ-super-crítico con constante CA, donde C es la constante del Lema 3.2.2.

Demostración. Sea I un intervalo λ-supercrítico y sea $\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{Z} : I_j \cap I \neq \emptyset\}$. Como cada I_j es crítico, por hipótesis se tiene

$$\begin{aligned}\int_I |f(x)|dx &\leq \sum_{j\in\mathcal{J}}\int_{I_j}|f(x)|dx \\ &\leq A\sum_{j\in\mathcal{J}}\omega(I_j) \\ &\leq AC\omega(I),\end{aligned}$$

donde la última desigualdad resulta del Lema 3.2.2. □

Como una inmediata consecuencia tenemos:

Corolario 3.2.1. *Sea $\omega \in A_{loc}^\infty$ y $f \in L_{loc}^1$ que satisface (3.12) para todos los intervalos subcríticos respecto a un τ. Entonces, $f \in BMO_\tau(\omega)$ si y solo si f satisface la condición de promedios acotados (3.13) para todos los intervalos críticos de τ.*

Corolario 3.2.2. *Si $\omega \in A_{loc}^\infty$ y $f \in BMO_\tau(\omega)$, entonces*

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx \leq C_\lambda \|f\|_{BMO_\tau(\omega)},$$

para todo intervalo λ-supercrítico I.

Corolario 3.2.3 . *Si $\tau \simeq \tau'$ y $\omega \in A_{loc}^\infty$ entonces $BMO_\tau(\omega) = BMO_{\tau'}(\omega)$, con equivalencia de normas dependiendo solo de las constantes que relacionan τ y τ'.*

Demostración. Sea $\tau \lesssim \tau'$ y $f \in BMO_\tau(\omega)$. Para obtener $f \in BMO_{\tau'}(\omega)$, de acuerdo al Corolario 3.2.1, sólo necesitamos probar (3.13) para $I = B(x_0, \tau'(x_0))$, con $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Como $\tau'(x_0) \geq c\tau(x_0)$, I es un intervalo c-super-crítico para τ y así el resultado sigue del Corolario 3.2.2. □

Observación 3.2.4. Notar que dados τ y $0 < \lambda < 1$, los intervalos λ-super-críticos se vuelven super-críticos con respecto a $\tau_\lambda(x) \doteq \lambda\tau(x)$. Por el Corolario 3.2.3, tendremos $BMO_{\tau_\lambda} = BMO_\tau$. Esto implica que lo que vale para intervalos super-críticos vale también para los λ-super-críticos, con λ fijo, pues habrá dependencia de λ en las constantes. Es decir, no podemos cambiar λ demasiadas veces ya que la norma BMO con respecto a τ_λ puede irse a infinito cuando $\lambda \to 0$. En capítulos anteriores ya hemos puntualizado que algo similar sucede con los pesos locales: si bien $A^p_{loc,\kappa}$ contiene los mismos pesos que para cualquier otro valor $\kappa > 1$, podemos encontrar un peso tal que la constante de pertenencia a la clase $A^p_{loc,\kappa}$ crezca a infinito con κ (basta tomar $\omega(x) = \frac{1}{x}$). Por esa razón muchas veces haremos las pruebas explicitando los valores de κ y λ que necesitemos considerar para obtener los resultados deseados.

El siguiente lema extiende a $BMO_\tau(\omega)$ la familiar consecuencia de la desigualdad de John-Nirenberg para el espacio BMO clásico, enunciado en Sección 1.5 de Preliminares.

Lema 3.2.4(Equivalencia de normas)**.** *Sea $\omega \in A^p_{loc}$, $1 < p < \infty$, y τ una función radio crítico. Entonces, para cada $1 \leq r \leq p'$, existe una constante $C = C(r, \omega, \tau)$ tal que si $f \in BMO_\tau(\omega)$ se tiene*

$$\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x) - f_B|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \leq C\|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \tag{3.16}$$

para todo intervalo crítico o sub-crítico B, ie: $B = B(x_0, R)$ con $0 < R \leq \tau(x_0)$, y

$$\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x)|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \leq C\|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \tag{3.17}$$

para todo intervalo super-crítico, ie: $B = B(x_0, R)$, con $R \geq \tau(x_0)$.

Demostración. Sea $f \in BMO_\tau(\omega)$. Entonces, en vista de (3.14), $f \in BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$, con $\kappa = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. En el apéndice, capítulo 5, se prueba que dado $\kappa > 1$ y un peso $\omega \in A^p_{loc}$, para cualquier r tal que $1 \le r \le p'$, se tiene

$$\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x) - f_B|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \le C\|f\|_{BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)},$$

para todo intervalo κ-local B. Entonces la Proposición 3.2.1 b) implica que (3.16) se cumple para cualquier intervalo crítico o sub-crítico para τ.

Probemos ahora (3.17). Consideremos primero $B = B(x_0, \tau(x_0))$. Entonces

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x)|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} &\le \left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x) - f_B|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \\ &+ \left(\frac{\omega^{1-r}(B)}{\omega(B)}\right)^{1/r} |f_B|.\end{aligned}$$

Por (3.16), el primer término del lado derecho está acotado por $\|f\|_{BMO_\tau(\omega)}$. Para el segundo término observemos que $r \le p'$ y $\omega \in A^p_{loc}$ implican que $\omega^{1-r} \in A^r_{loc}$, y así

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega^{1-r}(B)}{\omega(B)}\right)^{1/r} |f_B| &\le C\,\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x)|dx \\ &\le \|f\|_{BMO_\tau(\omega)}.\end{aligned}$$

Finalmente para el caso $B = B(x_0, R)$ con $R > \tau(x_0)$, usamos el resultado para intervalos críticos que acabamos de probar obteniendo

$$\begin{aligned}\int_B |f(x)|^r \omega^{1-r}(x)dx &\le \sum_{j\in\mathcal{J}} \int_{I_j} |f(x)|^r \omega^{1-r}(x)dx \\ &\le C\|f\|^r_{BMO_\tau(\omega)} \sum_{j\in\mathcal{J}} \omega(I_j),\end{aligned}$$

donde $\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{Z} : I_j \cap B(x_0, R) \neq \emptyset\}$ e $\{I_j\}$ es el cubrimiento por intervalos críticos. Aplicando entonces el Lema 3.2.2, se obtiene (3.17). $\square$

Como hemos comentado en la Observación 3.2.4 , bajo las mismas hipótesis, la condición (3.17) también se cumplirá para intervalos λ-super-críticos, con constante dependiendo de λ.

Por último presentamos una versión de una propiedad bien conocida y muy útil, válida para el caso de funciones en $BMO(\omega)$ con $\omega \in A_1$. Dado que nosotros sólo supondremos que $\omega \in A^1_{loc}$, la propiedad valdrá igual si nos restringimos a intervalos locales. La prueba será omitida ya que sigue los mismos pasos del caso clásico.

Lema 3.2.5. *Sean J y J' dos intervalos con el mismo centro tales que $J \subset J' \in \mathcal{I}_\kappa$, para algún $\kappa > 1$. Entonces, si $f \in BMO_\tau(\omega)$ y $\omega \in A^1_{loc}$, se tiene*

$$\int_{J'} |f(x) - f_J| dx \leq C_\kappa \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \omega(J) \frac{|J'|}{|J|} \ln\left(\frac{|J'|}{|J|} + 1\right). \tag{3.18}$$

3.3. Continuidad de los operadores clásicos locales en $BMO_\tau(\omega)$.

En esta sección estudiaremos la continuidad, en los espacios $BMO_\tau(\omega)$ de dos operadores clásicos, en sus versiones localizadas: la Maximal de Hardy-Littlewood local $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ y el operador maximal asociado al semigrupo del calor clásico localizado, T^*_{loc}, dados por (1.21), seccion 1.4, y (3.1), sección 3.1, respectivamente.

En el apéndice (capítulo 5), se prueba que, para $\omega \in A^1_{loc}$, la maximal de Hardy-Littlewood local $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ es continua de $BMO^\kappa_{loc}(\omega)$ en $BMO^\kappa_{loc}(\omega)$, con la constante de acotación dependiendo de κ. Como ya hemos señalado en la Observación 3.2.3, tales espacios son casos particulares de nuestra familia BMO_τ, mas aún, $BMO^\kappa_{loc}(\omega)$ contiene a todos ellos.

Basados en ese hecho, probaremos ahora un resultado más general.

Teorema 3.3.1. *Sea $\kappa > 1$ y τ una función radio crítico satisfaciendo (3.3) y (3.4), para algún $0 < \gamma < 1$. Entonces, si $\omega \in A^1_{loc}$, el operador $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ es acotado en $BMO_\tau(\omega)$, con norma dependiendo solamente de κ, γ y la constante $A^1_{loc,\kappa}$ de ω.*

Demostración. Fijemos $\kappa > 1$. A lo largo de la prueba supondremos que $\gamma \in (0,1)$ es tal que $\kappa > \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. Entonces, en vista del Corolario 3.2.3, podemos extender el resultado al caso $0 < \widetilde{\gamma} < 1$, considerando $\widetilde{\tau} = \frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma}\tau$.

Sea $f \in BMO_\tau(\omega)$. Por la Observación 3.2.3, se tiene que $BMO_\tau(\omega) \subset BMO^\kappa_{loc}(\omega)$. Entonces, como consecuencia del Teorema 5.3.1 del Capítulo 5, $\|\mathrm{M}_{loc,\kappa} f\|_{BMO^\kappa_{loc}(\omega)} \lesssim$

$\|f\|_{BMO_\tau(\omega)}$, siempre que $w \in A^1_{loc}$. En particular esto implica que $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ es localmente integrable y que

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) - (\mathrm{M}_{loc,\kappa}f)_I|dx \leq C\|f\|_{BMO_\tau(\omega)}$$

para cualquier intervalo I compactamente contenido en $\mathbb{R}^+$.

Por otra parte, por el Corolario 3.2.1, es suficiente probar la condición de promedios acotados

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x)|dx \leq C\|f\|_{BMO_\tau(\omega)}, \tag{3.19}$$

para cualquier $B = B(x_0, \tau(x_0))$. Sea $B^* = B(x_0, \varepsilon\tau(x_0))$, donde $\varepsilon \doteq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} > 1$. Escribimos $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{B^*}$ y $f_2 = f\chi_{B^{*c}}$.

Para f_1, aplicamos la desigualdad de Hölder y usamos que $\omega \in A^1_{loc}$ implica que $\omega^{1-p} \in A^p_{loc}$ para cualquier $p > 1$, y que en consecuencia $\mathrm{M}_{loc,\kappa} : L^p(\omega^{1-p}) \longrightarrow L^p(\omega^{1-p})$ continuamente. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_1(x)|dx &\leq \left(\frac{1}{\omega(B)}\int |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_1(x)|^p\omega^{1-p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_\kappa\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_{B^*} |f(x)|^p\omega^{1-p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\left(\frac{\omega(B^*)}{\omega(B)}\right)^{\frac{1}{p'}}\|f\|_{BMO_\tau(\omega)}.\end{aligned}$$

Como $B^* \subset B(x_0, \sqrt{\gamma}x_0)$, el Lema 1.4.1 de duplicación nos da que $\omega(B^*) \leq C_\gamma\omega(B)$. Por lo tanto la equivalencia de las normas dada en (3.17), hace válida (3.19) para f_1.

Con respecto a f_2 probaremos que para $x \in B$

$$\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_2(x) \leq C\ \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \sup_J \frac{\omega(J)}{|J|}, \tag{3.20}$$

donde el supremo se toma sobre aquellos $J \in \mathcal{I}_\kappa$ tales que $x \in J$ y $J \cap B^{*c} \neq \emptyset$. En efecto, observemos que para evaluar el miembro izquierdo para algún $x \in B$ es suficiente considerar intervalos κ-locales J tales que $J \cap B \neq \emptyset$ y $J \cap B^{*c} \neq \emptyset$. En este caso obtenemos

$$|J| > (\varepsilon - 1)\tau(x_0). \tag{3.21}$$

Si x_J denota el centro de J, usando (3.4) y (3.21) se tiene

$$\tau(x_J) \leq \gamma|x_J - x_0| + \tau(x_0) \leq C_\gamma |J|.$$

Luego, usando el Corolario 3.2.2, se deduce (3.20).

Ahora, para cada uno de los intervalos J que intervienen en el supremo en (3.20), el intervalo $J' = J \cup B$, por la Proposición 3.2.1 b), es un intervalo κ^2-local. Luego de (1.23), y en vista de que $|J| \simeq |J'|$, se sigue que $\frac{\omega(J)}{|J|} \lesssim \frac{\omega(J')}{|J'|} \lesssim \frac{\omega(B)}{|B|}$, de donde

$$\mathrm{M}_{loc,\kappa} f_2(x) \lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \frac{\omega(B)}{|B|},$$

y así (3.19) es válida también para f_2. □

En lo que sigue consideraremos la parte local del semigruupo del calor clásico y su operador maximal asociado, T^*_{loc}, dado en (3.1). Como podría esperarse, T^*_{loc} resulta controlado por alguna apropiada función maximal local. Tal desigualdad, junto con el Teorema 1.4.1, nos ayudará a obtener la acotación de T^*_{loc} sobre $BMO_\tau(\omega)$.

Lema 3.3.1. *Existe una constante C tal que $\mathrm{T}^*_{loc} f(x) \leq C\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x)$, con $\kappa = 4$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y toda f localmente integrable.*

Demostración. Sea f una función localmente integrable. Tenemos que probar que

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} T_s(x,y)|f(y)|dx \leq C\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x), \quad \kappa = 4,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$ y $s \in (0,1)$. Para x y s fijos, llamemos j_0 al entero que satisface $2^{j_0+1}\sqrt{s} \leq x < 2^{j_0+2}\sqrt{s}$ y sea $B_j \doteq B(x, 2^j\sqrt{s})$. Por la elección de j_0, tenemos que

$$\frac{x}{2} \leq x - 2^{j_0}\sqrt{s} < \frac{3}{4}x \quad \text{y} \quad \frac{5}{4}x < x + 2^{j_0}\sqrt{s} < 2x$$

y entonces

$$(\frac{x}{2}, 2x) \subset (\frac{x}{2}, \frac{3}{4}x) \cup B_{j_0} \cup (\frac{5}{4}x, 2x),$$

de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{\frac{x}{2}}^{2x} T_s(x,y)|f(y)|dy &\leq \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3}{4}x} T_s(x,y)|f(y)|dx + \int_{B_{j_0}} T_s(x,y)|f(y)|dy \\ &\quad + \int_{\frac{5}{4}x}^{2x} T_s(x,y)|f(y)|dx \\ &= I(x) + II(x) + III(x).\end{aligned}$$

Para $I(x)$ y $III(x)$ la estimación sigue fácilmente ya que en ambos casos $T_s(x,y) \lesssim \frac{1}{x}$ y los intervalos de integración son 4-locales, contienen al punto x y sus medidas son equivalentes a x.

Por otra parte, escribimos

$$II(x) = \sum_{j=-\infty}^{j_0} \int_{B_j \setminus B_{j-1}} T_s(x,y)|f(y)|dy.$$

Si $y \in B_j \setminus B_{j-1}$, para $j \leq j_0$, se tiene $|y-x| \geq 2^{j-1}\sqrt{s}$ lo cual implica $T_s(x,y) \lesssim \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-c2^{2j}}$. Entonces,

$$II(x) \lesssim \sum_{j=-\infty}^{j_0} e^{-c2^{2j}} 2^j \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} f(y)dy,$$

donde los promedios están acotados por $\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x)$, ya que para todo $j \leq j_0$, $B_j \subset (\frac{x}{2}, 2x)$ y en consecuencia los intervalos son 4-locales. Luego, como $\sum_{j=-\infty}^{j_0} e^{-c2^{2j}} 2^j < \infty$, obtenemos $II(x) \lesssim \mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x)$ y con eso concluímos la demostración. □

Observación 3.3.1. Notemos que $\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) < \infty$ en *c.t.p.* x para cualquier función localmente integrable en $\mathbb{R}^+$. De hecho, para evaluar $\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x)$ para $x \in [2^j, 2^{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}$, podemos reemplazar f por la función integrable $f\chi_{[2^{j-2}, 2^{j+3}]}$. Por lo tanto, el Lema 3.3.1 nos dice que T^*_{loc} comparte también esta propiedad.

A continuación probaremos el resultado más importante de esta sección.

Teorema 3.3.2. *Sea τ una función radio crítico y $\omega \in A^1_{loc}$. Entonces el operador maximal T^*_{loc} es acotado en $BMO_\tau(\omega)$.*

Demostración. Sea $f \in BMO_\tau(\omega)$ y $B = B(x_0, R)$, con $x_0 \in \mathbb{R}^+$ y $R > 0$.

Probaremos en primer lugar que $\mathrm{T}^*_{loc} f$ satisface la propiedad de promedios acotados (3.13) cuando $R \geq \frac{\tau(x_0)}{3}$. Para ello usamos el Lema 3.3.1 y luego el Teorema 3.3.1. Entonces, en virtud del Corolario 3.2.2, se obtiene

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B |\mathrm{T}^*_{loc} f(x)| dx \lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)}$$

para todo intervalo $\frac{1}{3}$-super-crítico B, esto es, con $R \geq \frac{\tau(x_0)}{3}$.

Dado que la propiedad de promedios acotados implica la de la oscilación, solo resta probar que para $0 < R < \frac{\tau(x_0)}{3}$,

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B |\mathrm{T}^*_{loc} f(x) - c| dx \leq C \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \tag{3.22}$$

vale para algún $c = c(f, B)$.

Teniendo en cuenta el Corolario 3.2.3, podemos suponer que $\gamma = \frac{1}{8}$ y por lo tanto $\tau(x) \leq \frac{x}{8}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Sea entonces $B^* = B(x_0, 3R)$ y escribamos $f = f_1 + f_2 + f_3$, donde $f_1 = (f - f_{B^*})\chi_{B^*}$, $f_2 = (f - f_{B^*})\chi_{(B^*)^C}$ y $f_3 = f_{B^*}$. Ahora tomemos $x_1 \in B(x_0, \frac{R}{3})$ tal que $c \doteq \mathrm{T}^*_{loc}(f_2 + f_3)(x_1) < \infty$. Notemos que por la observación anterior $\mathrm{T}^*_{loc}(f_2 + f_3)$ resulta finito en casi todo punto Si denotamos con $\widetilde{T}_s f(x) \doteq \int_{x/2}^{2x} T_s(x, y) f(y) dy$, se tiene que $\mathrm{T}^*_{loc} f(x) = \sup_{0<s<1} |\widetilde{T}_s f(x)|$. Entonces

$$|\mathrm{T}^*_{loc} f(x) - c| \leq A_1(x) + A_2(x) + A_3(x),$$

donde

$$A_1(x) = \mathrm{T}^*_{loc} f_1(x),$$

$$A_2(x) = \sup_{0<s<1} |\widetilde{T}_s f_2(x) - \widetilde{T}_s f_2(x_1)|,$$

y

$$A_3(x) = \sup_{0<s<1} |\widetilde{T}_s f_3(x) - \widetilde{T}_s f_3(x_1)|.$$

Para obtener (3.22) será suficiente con probar, para $i = 1, 2, 3$, que

$$\text{(3.23)} \qquad \frac{1}{\omega(B)}\int_B A_i(x)dx \le C\|f\|_{BMO_\tau(\omega)}.$$

Para $A_1(x)$, observemos que $\omega \in A^1_{loc}$ implica $\omega^{-1} \in A^2_{loc}$. Entonces por el Teorema 1.4.1 de la sección 1.5, M^4_{loc} es de tipo fuerte $(2,2)$ respecto al peso ω^{-1}, y consecuentemente lo es también T^*_{loc}, por el Lema 3.3.1. Entonces, utilizando la desigualdad de Hölder llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B A_1(x)dx &\le \left(\frac{1}{\omega(B)}\int |\mathrm{T}^*_{loc}f_1(x)|^2\omega^{-1}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \left(\frac{1}{\omega(B)}\int_{B^*} |f(x)-f_{B^*}|^2\omega^{-1}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado la propiedad de duplicación local de ω (Lemma 1.4.1) y la propiedad de equivalencia de normas (3.16).

En cuanto a $A_3(x)$, notemos primero que

$$|\widetilde{T}_s f_3(x) - \widetilde{T}_s f_3(x_1)| = |f_{B*}|\left|\int_{\frac{x}{2}}^{2x} T_s(x,y)dy - \int_{\frac{x_1}{2}}^{2x_1} T_s(x_1,y)dy\right|$$

Haciendo el cambio de variables $z = \frac{y-x}{\sqrt{s}}$ y $z = \frac{y-x_1}{\sqrt{s}}$ en cada integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{x}{2}}^{2x} T_s(x,y)dy - \int_{\frac{x_1}{2}}^{2x_1} T_s(x_1,y)dy\right| &\lesssim \left|\int_{-\frac{x_1}{2\sqrt{s}}}^{-\frac{x}{2\sqrt{s}}} e^{-\frac{z^2}{4}}dz\right| + \left|\int_{\frac{x}{\sqrt{s}}}^{\frac{x_1}{\sqrt{s}}} e^{-\frac{z^2}{4}}dz\right|\\
&\lesssim \left|\int_{\frac{x}{\sqrt{s}}}^{\frac{x_1}{\sqrt{s}}} e^{-\frac{z^2}{16}}dz\right|.
\end{aligned}$$

Como x y x_1 pertenecen a B, que está contenido en $B(x_0, \frac{1}{3}\tau(x_0))$, tenemos que $x \simeq x_1 \simeq x_0$ de donde

$$\left|\int_{\frac{x}{\sqrt{s}}}^{\frac{x_1}{\sqrt{s}}} e^{-\frac{z^2}{16}}dz\right| \lesssim \frac{|x-x_1|}{\sqrt{s}} e^{-c\frac{x_0^2}{s}} \lesssim \frac{|B|}{x_0},$$

para alguna constante c. Dado que $B^* \subset B(x_0,\tau(x_0)) \subset (\frac{7}{8}x_0, \frac{9}{8}x_0) \doteq I_0$, el cual es un intervalo supercrítico para τ, se obtiene

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{T}_s f_3(x) - \widetilde{T}_s f_3(x_1)| &\lesssim \frac{1}{x_0}\int_{I_0} |f(y)|dy \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \frac{\omega(I_0)}{|I_0|} \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \frac{\omega(B)}{|B|},
\end{aligned}
$$

para todo $x \in B$, donde en la última desigualdad se usó la propiedad de duplicación (1.23) de la sección 1.4 y que $I_0 \in \mathcal{I}_4$. En consecuencia, (3.23) vale también para A_3.

Finalmente, en cuanto a A_2, mostraremos que para cualquier $x \in B$,

$$
A_2(x) \le \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \frac{\omega(B)}{|B|}, \tag{3.24}
$$

lo que implicará (3.23) para A_2.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
A_2(x) &\le \sup_{0<s<1} \int \left| T_s(x,y)\chi_{(\frac{x}{2},2x)} - T_s(x_1,y)\chi_{(\frac{x_1}{2},2x_1)} \right| |f_2(y)|dy \\
&\le A_{21}(x) + A_{22}(x) + A_{23}(x),
\end{aligned}
$$

donde

$$
A_{21}(x) \doteq \sup_{0<s<1} \int_{(\frac{x}{2},2x)\setminus(\frac{x_1}{2},2x_1)} T_s(x,y)\ |f_2(y)|dy,
$$

$$
A_{22}(x) \doteq \sup_{0<s<1} \int_{(\frac{x_1}{2},2x_1)\setminus(\frac{x}{2},2x)} T_s(x_1,y)\ |f_2(y)|dy
$$

y

$$
A_{23}(x) \doteq \sup_{0<s<1} \int_{(\frac{x}{2},2x)\cap(\frac{x_1}{2},2x_1)} |T_s(x,y) - T_s(x_1,y)|\, |f_2(y)|dy.
$$

Llamemos $B_x = (\frac{x}{2}, 2x) \setminus (\frac{x_1}{2}, 2x_1)$, con $x \neq x_1$. Observemos que $x, x_1 \in (\frac{7}{8}x_0, \frac{9}{8}x_0)$ implica que $(\frac{x}{2}, 2x) \subset (\frac{7}{16}x_0, \frac{9}{4}x_0)$ y $(\frac{9}{16}x_0, \frac{7}{4}x_0) \subset (\frac{x_1}{2}, 2x_1)$. Entonces, para $y \in B_x$ se tiene $|x-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0| \geq \frac{3}{4}x_0$ y así $T_s(x,y) \leq C\frac{1}{x_0}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} A_{21}(x) &\lesssim \frac{1}{x_0}\int_{B_x} |f(y)-f_{B^*}|dy \\ &\lesssim \frac{1}{x_0}\int_{B_x} |f(y)|dy + \frac{|B_x|}{x_0}|f_{B^*}|. \end{aligned}$$

Puesto que $|B_x| \leq C|x-x_1| < C|B|$ y el intervalo local $I_0 = \left(\frac{7}{16}x_0, \frac{9}{4}x_0\right)$ contiene a B_x y a B^*, se obtiene

$$\begin{aligned} A_{21}(x) &\leq C\frac{1}{x_0}\int_{I_0} |f(y)|dy \\ &\leq C\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\frac{\omega(I_0)}{|I_0|}, \end{aligned}$$

y, usando nuevamente la propiedad (1.23) de la sección 1.4, queda probado (3.24) para A_{21} . En forma análoga, se obtiene lo mismo para A_{22}.

Resta probar (3.24) para A_{23}. En primer lugar notemos que $B^* \subset (\frac{7}{8}x_0, \frac{9}{8}x_0)$ y que $(\frac{9}{16}x_0, \frac{7}{4}x_0) \subset \left(\frac{x}{2}, 2x\right) \cap \left(\frac{x_1}{2}, 2x_1\right) \subset (\frac{7}{16}x_0, \frac{9}{4}x_0)$. Esto implica que $\left(\frac{x}{2}, 2x\right) \cap \left(\frac{x_1}{2}, 2x_1\right) \cap B^{*c}$ es no vacía y está contenida en $I_0 \setminus B^*$, donde $I_0 = (\frac{7}{16}x_0, \frac{9}{4}x_0)$.

Por otra parte, siendo T^* un operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales, o también aplicando el Teorema del valor medio a $T_s(x,y)$ en la variable x, se tiene

$$\sup_{0<s<1} |T_s(x,y) - T_s(x_1,y)| \leq C\frac{|x-x_1|}{|y-x_1|^2}$$

si $|y-x_1| > 2|x-x_1|$, lo que se cumple para $x \in B$, $x_1 \in B(x_0, \frac{R}{3})$ y $y \in (B^*)^c$. Asimismo, $|y-x_1| \simeq |y-x_0|$ y entonces

$$\sup_{0<s<1} |T_s(x,y) - T_s(x_1,y)| \leq C\frac{R}{|y-x_0|^2}.$$

Consecuentemente, usando que $\left(\frac{x}{2}, 2x\right) \cap \left(\frac{x_1}{2}, 2x_1\right) \subset I_0$, obtenemos

$$A_{23}(x) \lesssim R\int_{I_0\setminus B^*} \frac{|f(y)-f_{B^*}|}{|y-x_0|^2}dy.$$

Llamemos $B_j = B(x_0, 3^jR)$ y elijamos j_0 el único entero que satisface $3^{j_0} < \frac{x_0}{8R} \leq 3^{j_0+1}$. Luego,

$$I_0 \subset \left(\frac{7}{16}x_0, \frac{7}{8}x_0\right) \bigcup B_{j_0+1} \bigcup \left(\frac{9}{8}x_0, \frac{9}{4}x_0\right).$$

Dado que $3R < \tau(x_0) \leq \frac{x_0}{8}$, se tiene que $j_0 \geq 1$. Por lo tanto podemos escribir

$$A_{23}(x) \lesssim \frac{R}{{x_0}^2}\int_{I_0}|f(y)-f_{B^*}|dy + R\int_{B_{j_0+1}\setminus B_1}\frac{|f(y)-f_{B^*}|}{|y-x_0|^2}dy.$$

El primer término puede ser estimado como $A_{21}(x)$. Para el segundo se tiene

$$\begin{aligned} R\int_{B_{j_0+1}\setminus B_1}\frac{|f(y)-f_{B^*}|}{|y-x_0|^2}dy &\lesssim R\sum_{j=1}^{j_0}\int_{B_{j+1}\setminus B_j}\frac{|f(y)-f_{B^*}|}{|y-x_0|^2}dy \\ &\lesssim \sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{3^{2j}R}\int_{B_{j+1}}|f(y)-f_{B^*}|dy. \end{aligned}$$

Notemos que cada B_{j+1} es un intervalo local ya que $B_{j_0+1}\subset I_0$. Entonces usando el Lema 3.2.5 con $J=B^*=B_1$ y $J'=B_{j+1}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{3^{2j}R}\int_{B_{j+1}\setminus B_j}|f(y)-f_{B^*}|dy &\lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)}\frac{\omega(B)}{R}\sum_{j=1}^{j_0}\frac{j}{3^j} \\ &\lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)}\frac{\omega(B)}{|B|}. \end{aligned}$$

De esta manera hemos obtenido (3.24) para $A_{23}(x)$ y la prueba del Teorema está completa.

□

Si, para una función radio crítico τ, consideramos en lugar de T^*_{loc}, el operador más pequeño

(3.25) $$\mathrm{T}^*_{loc,\tau}f(x) \doteq \sup_{\tau(x)^2\le s<1}\left|\int_{\frac{x}{2}}^{2x}T_s(x,y)f(y)dy\right|,$$

con los valores de s alejados de cero, podemos obtener un resultado más fuerte que nos será útil en la próxima sección. Más precisamente:

Proposición 3.3.1. *El operador* $\mathrm{T}^*_{loc,\tau}$ *es acotado de* $BMO_\tau(\omega)$ *en* $L^\infty(\omega^{-1})$, *para* $\omega\in A^1_{loc}$.

Demostración. Sea $f\in BMO_\tau(\omega)$. Sin pérdida de generalidad, por el Corolario 3.2.3, podemos considerar $\gamma=\frac{1}{8}$. Fijemos $x\in\mathbb{R}^+$ y $0<s<1$ tal que x sea un punto de Lebesgue de ω y $s\ge\tau(x)^2$. Notemos que para un tal x se tiene que $\operatorname{ess\,inf}_{y\in I}\omega(y)\le\omega(x)$, para cualquier intervalo I conteniendo a x. Ahora elegimos $k_0 \leq 0$, el único entero tal que $2^{k_0} \leq \frac{\tau(x)}{\sqrt{s}} < 2^{k_0+1}$ y llamamos $B_k \doteq B(x, 2^k\sqrt{s}) \cap (\frac{x}{2}, 2x)$, para $k \geq k_0$. Observemos que los intervalos B_k son crecientes y que, después de un cierto k_1, son iguales a $(\frac{x}{2}, 2x)$. Dado que $B_{k+1} \setminus B_k = \{y \in (\frac{x}{2}, 2x) : 2^k \leq \frac{|y-x|}{\sqrt{s}} < 2^{k+1}\}$ para $k_0 \leq k \leq k_1 - 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{x}{2}}^{2x} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}}|f(y)|dy &\leq \int_{B_{k_0}} |f(y)|dy + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \int_{B_{k+1}\setminus B_k} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}}|f(y)|dy \\
&\leq \int_{B_{k_0}} |f(y)|dy + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} e^{-c\ 2^{2k}} \int_{B_{k+1}} |f(y)|dy
\end{aligned}$$

Veremos que cada uno de los intervalos B_k, con $k_0 \leq k \leq k_1$, es un intervalo $\frac{8}{17}$-super-crítico para τ. De hecho, si denotamos con b_k el centro B_k y con R_k su radio, puesto que $B(x, \frac{1}{2}\tau(x))$ está contenido en $B(x, 2^{k_0}\sqrt{s})$ y en $(\frac{x}{2}, 2x)$, para todo $k \geq k_0$ se deduce que $B(x, \frac{1}{2}\tau(x)) \subset B_k$ y por lo tanto $\tau(x) < 2R_k$. Entonces, usando (3.28), obtenemos $\tau(b_k) \leq \tau(x) + \frac{1}{8}|x - b_k| < \frac{17}{8}R_k$. Luego, cada B_k es un intervalo $\frac{8}{17}$-super-crítico para τ y el Corolario 3.2.2 implica que

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}}|f(y)|dy \lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)} \left(\omega(B_{k_0}) + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} e^{-c2^{2k}}\omega(B_{k+1})\right).$$

Por otra parte, como $B_k \subset (\frac{x}{2}, 2x)$, ellos son intervalos locales, y como $\omega \in A^1_{loc}$ se tiene $\omega(B_k) \lesssim |B_k| \inf_{y\in B_k} \omega(y) \lesssim 2^k\sqrt{s}\ \omega(x)$, ya que x es un punto de Lebesgue de ω perteneciente a B_k. Esto nos lleva a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\frac{x}{2}}^{2x} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}}|f(y)|dy &\lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)}\omega(x) \left(2^{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} e^{-c2^{2k}} 2^{k+1}\right) \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)}\omega(x).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathrm{T}^*_{loc,\tau} f(x) \lesssim \|f\|_{BMO_\tau(\omega)}\omega(x)$$

vale $c.t.p.$ $x \in \mathbb{R}^+$. quedando la prueba completa. $\square$

3.4. Espacio BMO asociado al sistema $\{\varphi_n^\alpha\}$.

En esta sección consideraremos el semigrupo de difusión asociado a las funciones de Laguerre $\{\varphi_n^\alpha\}$ y su operador maximal denotado por $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$. En [**Dzi08**], Dziubanski definió en este contexto el correspondiente espacio de Hardy

$$H^1_{L^\alpha} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : \mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} f \in L^1(\mathbb{R}^+)\}, \tag{3.26}$$

probando una descomposición atómica. Los intervalos que soportan a los átomos de $H^1_{L^\alpha}$ satisfacen diferentes condiciones dependiendo de la función radio crítico asociada, que en este caso resulta ser

$$\rho(x) = \frac{1}{8} \min\{x, \frac{1}{x}\}. \tag{3.27}$$

De aquí resulta razonable introducir como substitutos de BMO pesados, a los espacios con pesos de la sección anterior $BMO_\rho(\omega)$, para ρ la función dada por (3.27).

Fácilmente se comprueba que ρ satisface

$$\rho(y) \leq \rho(x) + \frac{1}{8}|x-y|. \tag{3.28}$$

para x e y en $\mathbb{R}^+$, lo cual nos da (3.4) con $\gamma = 1/8$. Entonces, de acuerdo a la Proposición 3.2.1-b, todo intervalo subcrítico para ρ es también un intervalo $\frac{9}{7}$-local.

Nuestro objetivo en esta sección es probar que el operador maximal $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ preserva los espacios $BMO_\rho(\omega)$ para cualquier $\alpha \geq -1/2$, bajo apropiadas suposiciones sobre ω.

En primer lugar recordemos que el operador maximal del semigrupo de Laguerre puede ser expresado como

$$\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} f(x) = \sup_{0<s<1} \left| \int_0^\infty W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) f(y)dy \right|,$$

donde el núcleo $W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)$ está dado por (1.5), es decir

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) = \frac{1-s^2}{2s}(xy)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x^2+y^2)} I_\alpha\left(\frac{1-s^2}{2s}xy\right).$$

donde I_α es la función de Bessel modificada (ver sección 1.1).

A continuación enunciaremos el Teorema de acotación para el operador maximal $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ actuando sobre $BMO_\rho(\omega)$. Las hipótesis (3.29) y (3.30) impuestas sobre ω están directamente relacionadas con la estimación del núcleo dada en el Lema 3.4.1 enunciado más adelante. Además le pediremos al peso que satisfaga la condición A^1_{loc} ya que, como hemos visto, nos garantiza la acotación del operador maximal local del semigrupo del calor clásico. Posteriormente, en la sección 5, daremos una condición única sobre el peso, más amigable, que implicará las tres condiciones que aparecen en el siguiente enunciado y que se parecerá más a una de tipo A_1 de Muckenhoupt.

Teorema 3.4.1. *Sea $\alpha \geq -1/2$ y $\omega \in A^1_{loc}$ satisfaciendo para algún $0 < \epsilon < \frac{1}{16}$ y alguna constante $C > 0$,*

$$e^{-\epsilon x^2} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} \int_0^x \omega(y) y^{\alpha+\frac{1}{2}} dy \leq C\omega(x) \tag{3.29}$$

y

$$\sup_{0<s<1} x^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_x^\infty \left(\frac{y^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\epsilon\frac{y^2}{s}} \frac{\omega(y)}{y^{\alpha+\frac{3}{2}}} dy \leq C\omega(x), \tag{3.30}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ es continuo en $BMO_\rho(\omega)$.

Corolario 3.4.2. *Para $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ y un peso potencia $\omega(x) = x^\delta$, se tiene que $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ es acotado sobre $BMO_\rho(\omega)$ si $-\alpha - \frac{3}{2} < \delta \leq \alpha + \frac{1}{2}$.*

Observemos que el rango de potencias para δ que aparece en el corolario anterior coincide con el caso límite $p = \infty$ dado en el Teorema 2.2.2 del capítulo 2, el cual resulta óptimo. Además, si reemplazamos la condición (3.30), más fuerte aunque más sencilla, por

$$x^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{\epsilon}{2}y^2} \frac{\omega(y)}{y^{\alpha+\frac{3}{2}}} dy \leq C\omega(x),$$

el rango de las potencias se traduce en $-\alpha - \frac{3}{2} < \delta < \alpha + \frac{1}{2}$, y por lo tanto se pierde el caso $\delta = \alpha + \frac{1}{2}$.

Para probar el Teorema 3.4.1, necesitaremos las siguientes estimaciones del núcleo $W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)$. La demostración de este Lema puede rastrearse en las pruebas de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 del capítulo 2, ya que utilizamos estimaciones similares. Por comodidad, la repetimos acá.

Lema 3.4.1. *Para el núcleo $W_{\varphi^\alpha}(s,x,y)$ dado por (1.5), con $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, se tiene*

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) \lesssim \left(\frac{x^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{1}{16}\frac{x^2}{s}} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} y^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

para cualquier $0 < s < 1$ y $0 < y < \frac{x}{2}$.

Demostración. Usando el Lema 1.1.1 de la sección 1.1 sobre las estimaciones de la función de Bessel, se tiene que para $0 < \frac{1-s^2}{2s} xy \leq 1$,

$$\begin{aligned} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) &\simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha+1} (xy)^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x^2+y^2)} \\ &\lesssim \left(\frac{x^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{s}} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} y^{\alpha+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $\frac{1-s^2}{2s} xy \geq 1$, usando el mismo Lema obtenemos

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) \lesssim \frac{1-s^2}{2s} (xy)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-s^2}{2s} xy\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x^2+y^2)} e^{\frac{1-s^2}{2s} xy}.$$

Dado que $\frac{1-s^2}{2s} xy \geq 1$ y $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, se tiene

$$\left(\frac{1-s^2}{2s} xy\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1-s^2}{2s} xy\right)^{\alpha}.$$

Además

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x^2+y^2)} e^{\frac{1-s^2}{2s} xy} &= e^{-\frac{s}{4}(x+y)^2} e^{-\frac{1}{4s}(x-y)^2} \\ &\leq e^{-\frac{1}{16}\frac{x^2}{s}} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado $|x-y| > x/2$, ya que $0 < y < \frac{x}{2}$. Esto conduce a

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) \lesssim \left(\frac{x^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{1}{16}\frac{x^2}{s}} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} y^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

llegando a la estimación buscada. $\square$

Demostración del Teorema 3.4.1. Para T^*_{loc}, el operador maximal del calor clásico, podemos escribir $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} = \mathrm{T}^*_{loc} + (\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} - \mathrm{T}^*_{loc})$. De acuerdo al Teorema 3.3.2 sobre la continuidad de T^*_{loc}, sólo necesitamos probar que $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} - \mathrm{T}^*_{loc}$ es acotado sobre $BMO_\rho(\omega)$. De hecho probaremos la siguiente desigualdad más fuerte

$$|\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} f(x) - \mathrm{T}^*_{loc} f(x)| \lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\omega(x), \quad \text{para c.t.p. } x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.31}$$

esto es, $\|(\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} - \mathrm{T}^*_{loc})f\|_{L^\infty(\omega^{-1})} \lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}$.

Sea $\omega \in A^1_{loc}$ y sea $x \in \mathbb{R}^+$ satisfaciendo (3.29) y (3.30) y tal que es también un punto de Lebesgue de ω. Entonces, para $f \in BMO_\rho(\omega)$, descomponemos $|\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} f(x) - \mathrm{T}^*_{loc} f(x)|$ en cuatro partes:

$$|\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} f(x) - \mathrm{T}^*_{loc} f(x)| \le If(x) + IIf(x) + IIIf(x) + IVf(x),$$

donde

$$If(x) = \left| \mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha} f(x) - \sup_{0<s<1} \left| \int_{\frac{x}{2}}^{2x} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) f(y)\,dy \right| \right|,$$

$$IIf(x) = \sup_{\rho(x)^2 \le s < 1} \left| \int_{\frac{x}{2}}^{2x} W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) f(y)\,dy \right|,$$

$$IIIf(x) = \sup_{0<s<\rho(x)^2} \int_{\frac{x}{2}}^{2x} |W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) - T_s(x,y)||f(y)|\,dy,$$

y

$$IVf(x) = \left| \sup_{0<s<\rho(x)^2} \left| \int_{\frac{x}{2}}^{2x} T_s(x,y) f(y)\,dy \right| - \mathrm{T}^*_{loc} f(x) \right|.$$

Nuestro objetivo es obtener (3.31) para cada término.

Para $If(x)$, observemos que

$$\begin{aligned} If(x) &\leq \sup_{0<s<1} \int_0^{\frac{x}{2}} W_\alpha(s,x,y)|f(y)|dy + \sup_{0<s<1} \int_{2x}^\infty W_\alpha(s,x,y)|f(y)|dy \\ &\doteq A_0 f(x) + A_\infty f(x). \end{aligned}$$

Usando la estimación dada en el Lema 3.4.1 obtenemos

$$\begin{aligned} A_0 f(x) &\leq C \sup_{0<s<1} \left(\frac{x^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{1}{16}\frac{x^2}{s}} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} \int_0^x |f(y)| y^{\alpha+\frac{1}{2}} dy \\ &\leq C_{\alpha,\epsilon}\, e^{-\epsilon x^2} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} \int_0^x |f(y)| y^{\alpha+\frac{1}{2}} dy, \end{aligned}$$

para cualquier $0 < \epsilon < \frac{1}{16}$.

Dado que los intervalos de la forma $(2^{-i-1}x, 2^{-i}x)$ para cada entero i son super-críticos para ρ, se deduce

$$\begin{aligned} \int_0^x |f(y)| y^{\alpha+\frac{1}{2}} dy &\lesssim \sum_{i=0}^\infty (2^{-i}x)^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{2^{-i-1}x}^{2^{-i}x} |f(y)| dy \\ &\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \sum_{i=0}^\infty (2^{-i}x)^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{2^{-i-1}x}^{2^{-i}x} \omega(y) dy \\ &\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \int_0^x \omega(y) y^{\alpha+\frac{1}{2}} dy. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$A_0 f(x) \lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} e^{-\epsilon x^2} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{3}{2}}} \int_0^x \omega(y) y^{\alpha+\frac{1}{2}} dy$$

y la hipótesis (3.29) nos conduce a

$$A_0 f(x) \lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \omega(x).$$

Para $A_\infty f(x)$, usando la simetría del núcleo (1.5) y la estimación del Lema 3.4.1, se tiene

$$A_\infty f(x) \lesssim \sup_{0<s<1} x^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{2x}^\infty \left(\frac{y^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-c\frac{y^2}{s}} \frac{1}{y^{\alpha+\frac{3}{2}}} |f(y)| dy \lesssim$$

$$\lesssim \sup_{0<s<1} x^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(2^i x)^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-c\frac{(2^i x)^2}{s}} \frac{1}{(2^i x)^{\alpha+\frac{3}{2}}} \int_{2^i x}^{2^{i+1}x} |f(y)|dy,$$

donde $c = \frac{1}{16}$. Además,

$$\int_{2^i x}^{2^{i+1}x} |f(y)|dy \lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \int_{2^i x}^{2^{i+1}x} \omega(y)dy \lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \int_{2^{i-1}x}^{2^i x} \omega(y)dy,$$

donde la última desigualdad se deduce de la definición de A^1_{loc}. Luego,

$$\begin{aligned} A_\infty f(x) &\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \sup_{0<s<1} x^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_x^\infty \left(\frac{y^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-c\frac{y^2}{s}} \frac{1}{y^{\alpha+\frac{3}{2}}} \omega(y)dy \\ &\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \omega(x), \end{aligned}$$

con $c = \frac{1}{16}$, donde en la última desigualdad hemos usado que ω satisface (3.30), para algún $0 < \epsilon \leq \frac{1}{16}$.

Ahora notemos que $W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) \lesssim T_s(x,y)$, para todo $0 < s < 1$ y $0 < x, y < \infty$. Esto se sigue fácilmente de las estimaciones de las funciones de Bessel incluidas en el Lema 1.1.1 de la sección 1.1 .Entonces, ambas, $IIf(x)$ y $IVf(x)$ resultan controladas por $\mathrm{T}^*_{loc,\rho}|f|(x)$, donde este operador ha sido definido en (3.25). Como $f \in BMO_\rho(\omega)$ implica que $|f| \in BMO_\rho(\omega)$, la Proposición 3.3.1 sobre la continuidad de $\mathrm{T}^*_{loc,\rho}$ nos da

$$IIf(x) + IV(x) \leq C\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\omega(x).$$

Por último consideramos el tercer término $IIIf(x)$. Para ello reescribiremos el núcleo (1.5) como

$$W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) = \Phi_{clas}(s,x,y)\Phi^\alpha_{bes}(s,x,y)\Phi_{err}(s,x,y),$$

donde

$$\Phi_{clas}(s,x,y) = \left(\frac{4\pi s}{1+s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1+s^2}{4s}|x-y|^2}, \tag{3.32}$$

$$\Phi^{\alpha}_{bes}(s,x,y) = \left(2\pi\frac{1-s^2}{2s}xy\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1-s^2}{2s}xy} I_{\alpha}\left(\frac{1-s^2}{2s}xy\right) \tag{3.33}$$

y

$$\Phi_{err}(s,x,y) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-sxy}. \tag{3.34}$$

Ahora escribimos

$$\begin{aligned}
|W_{\varphi^\alpha}(s,x,y) - T_s(x,y)| &= |\Phi_{clas}(s,x,y)\Phi^{\alpha}_{bes}(s,x,y)\Phi_{err}(s,x,y) - T_s(x,y)| \\
&\leq |\Phi_{clas}(s,x,y) - T_s(x,y)|\Phi_{bes}(s,x,y)\Phi_{err}(s,x,y) \\
&+ |\Phi_{bes}(s,x,y) - 1|T_s(x,y)\Phi_{err}(s,x,y) \\
&+ |\Phi_{err}(s,x,y) - 1|T_s(x,y) \\
&\doteq \sum_{i=1}^{3} \Omega_i(s,x,y).
\end{aligned}$$

Debemos probar que

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \Omega_i(s,x,y)|f(y)|dy \leq \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\omega(x), \tag{3.35}$$

para $0 < s < \rho(x)^2$ e $i = 1, 2, 3$.

En primer lugar consideremos $\Omega_1(s,x,y)$. Si para x e y fijos, definimos la función $h(t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$, de (3.2) y (3.32), tendremos que $\Phi_{clas}(s,x,y) = h\left(\frac{s}{1+s^2}\right)$ y que $T_s(x,y) = h(s)$. Luego, el Teroema del valor medio aplicado a h en $[s, \frac{2s}{1+s^2}]$ implica

$$|\Phi_{clas}(s,x,y) - T_s(x,y)| \leq C\ s^{3/2},$$

con C independiente de x e y. Además, usando que $\Phi_{bes}(s,x,y) \leq C$ (por el Lema 1.1.1) y $\Phi_{err}(s,x,y) \leq e^{-\frac{1}{2}sx^2}$ para $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$ y $0 < s < 1$, se obtiene

$$\Omega_1(s,x,y) \leq C\frac{1}{x}. \tag{3.36}$$

Poniendo $I_x = (\frac{x}{2}, 2x)$ y notando que I_x es un intervalo super-crítico para ρ y que también es un intervalo 4-local, se deduce que

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \Omega_1(s,x,y)|f(y)|dy \leq C\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x}|f(y)|dy \leq C\|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \operatorname{ess\,inf}_{y\in I_x}\omega(y).$$

Por lo tanto, (3.35) vale para $i=1$ ya que x es un punto de Lebesgue de ω.

Por otra parte se tiene

$$\Omega_2(s,x,y) \leq C|\Phi_{bes}^\alpha(s,x,y)-1|s^{-\frac{1}{2}}.$$

Como $\frac{x}{2} < y < 2x$ y $0 < s < \rho(x)^2$, lo cual implica $0 < s < \frac{1}{64}$ y $0 < s < \frac{x^2}{64}$, no es difícil comprobar que $\frac{1-s^2}{2s}xy > \frac{1}{8}$ (más precisamente obtenemos $\frac{1-s^2}{2s}xy > \frac{63}{4}$). Entonces, en vista de (3.33) y el Lema 1.1.2 de la sección 1.1, se obtiene (3.36) para $\Omega_2(s,x,y)$ y en consecuencia (3.35).

Consideremos ahora $i=3$. Ponemos

$$\begin{aligned}
\Omega_3(s,x,y) &= |\Phi_{err}(s,x,y)-1|T_s(x,y)\\
&\leq |\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^{1/2} - 1|e^{-sxy}T_s(x,y) + |e^{-sxy}-1|T_s(x,y)\\
&\doteq \Omega_{31}(s,x,y)+\Omega_{32}(s,x,y).
\end{aligned}$$

Para el primero de estos núcleos, como $y \simeq x$ y $s < \frac{x^2}{64}$, obtenemos nuevamente una estimación del tipo (3.36):

$$\Omega_{31}(s,x,y) \lesssim s^{3/2}e^{-\frac{1}{2}sx^2} \lesssim \frac{1}{x}.$$

Finalmente para $\Omega_{32}(s,x,y)$, por el teorema del valor medio y usando $y \simeq x$ se tiene

$$\Omega_{32}(s,x,y) \lesssim \sqrt{s}x^2 e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}}.$$

Si $0 < x \leq 1$, entonces $\sqrt{s}x^2 \leq 1 \leq \frac{1}{x}$ y obtenemos también que $\Omega_{32}(s,x,y) \leq \frac{1}{x}$.

Sea ahora $x > 1$. Dado que $\sqrt{s} < \rho(x) = \frac{1}{8x}$, tenemos que $\sqrt{s}x^2 < x$. Luego,

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\Omega_{32}(s,x,y)|f(y)|dy \lesssim x\int_{\frac{x}{2}}^{x-\frac{1}{8x}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}}|f(y)|dy$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{\rho(x)} \int_{B(x,\rho(x))} |f(y)| dy \\ (3.37) \qquad & + x \int_{x+\frac{1}{8x}}^{2x} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Puesto que $f \in BMO_\rho(\omega)$, $\omega \in A^1_{loc}$ y x es un punto de Lebesgue de ω, podemos acotar el término del medio por una constante veces $\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\omega(x)$.

Respecto al primero

$$(3.38) \qquad x \int_{\frac{x}{2}}^{x-\frac{1}{8x}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}} |f(y)| dy \leq \sum_{k=1}^{k_0} x \int_{x-\frac{k+1}{8x}}^{x-\frac{k}{8x}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}} |f(y)| dy,$$

donde con k_0 denotamos al entero tal que $x - \frac{k_0+1}{8x} \leq \frac{x}{2} < x - \frac{k_0}{8x}$. Esto es, elegimos k_0 tal que $k_0 < 4x^2 \leq k_0 + 1$. Observemos que $x \geq 1$ implica que $k_0 \geq 3$.

Si $y \in (x - \frac{k+1}{8x}, x - \frac{k}{8x})$, entonces $|x-y|^2 > \frac{k^2}{64x^2}$, y como $s < \rho(x)^2 = \frac{1}{64x^2}$, podemos deducir que

$$e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}} \leq e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

Entonces, llamando $I^k_x \doteq B(x, \frac{k+1}{8x})$, llegamos a

$$(3.39) \qquad x \int_{x-\frac{k+1}{8x}}^{x-\frac{k}{8x}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}} |f(y)| dy \lesssim \frac{k}{|I^k_x|} e^{-\frac{k^2}{4}} \int_{I^k_x} |f(y)| dy.$$

Para $1 \leq k \leq k_0$, observemos que cada I^k_x es un intervalo crítico o super-crítico ya que $\frac{k+1}{8x} \geq \rho(x)$. Además, $k_0 < 4x^2$ implica que $I^k_x \subset (\frac{3}{8}x, \frac{13}{8}x)$, y así I^k_x resultan ser intervalos locales. Entonces, (3.39) se acota por una constante veces $\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\ \omega(x) k\ e^{-\frac{k^2}{4}}$. Poniendo esta estimación en (3.38), se obtiene la desigualdad requerida para el primer término de (3.37).

Finalmente, para el tercer término de (3.37), elegimos $k_1 \geq 1$ de modo que $x + \frac{k_1}{8x} < 2x \leq x + \frac{k_1+1}{8x}$ (o, equivalentemente, $k_1 < 8x^2 \leq k_1 + 1$) y procediendo en forma análoga a lo que hicimos para el primer término podemos llegar a

$$x \int_{x+\frac{1}{8x}}^{2x} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}} |f(y)| dy \quad \leq \quad x \sum_{k=1}^{k_1} \int_{x+\frac{k}{8x}}^{x+\frac{k+1}{8x}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4s}} |f(y)| dy$$

$$\leq \; x\sum_{k=1}^{k_1} e^{-\frac{k^2}{4}} \int_{J_x^k} |f(y)|dy,$$

donde $J_x^k = (x - \frac{1}{8x}, x + \frac{k+1}{8x})$. Llamemos c_k y R_k al centro y al radio de J_x^k y observemos que el centro de J_x^0 es x. Entonces, para $k \geq 1$, se tiene $c_k \geq x$ y como ρ es decreciente en $(1,\infty)$, obtenemos $\rho(c_k) \leq \rho(x) = \frac{1}{8x} < (\frac{k}{2}+1)\frac{1}{8x} = R_k$. En consecuencia, J_x^k es un intervalo super-crítico para ρ y como también es local, podemos proceder como antes obteniendo la misma acotación.

Reuniendo las estimaciones hemos llegado a

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \Omega_{32}(s,x,y)|f(y)|dy \leq C\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\omega(x),$$

completando así la demostración del teorema. □

3.5. Espacio BMO asociado al sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$.

En esta sección introducimos versiones pesadas de BMO_σ, el espacio BMO relacionado al sistema ortonormal de funciones de Laguerre $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$. Obtendremos resultados de acotación en estos espacios para el correspondiente operador maximal del semigrupo, transfiriendo lo probado para el caso del sistema $\{\varphi_n^\alpha\}$ a través de la relación existente entre ambos semigrupos.

Para el sistema de funciones de Laguerre $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, dado por (1.1), denotaremos con $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ al operador maximal asociado a este semigrupo. Como en el caso de las funciones de Laguerre $\{\varphi_n^\alpha\}$ y el operador $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$, en [**Dzi08**], Dziubanski también consideró el espacio tipo Hardy

$$H^1_{\mathcal{L}^\alpha} = \{f \in L^1 : \mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha} f \in L^1\},$$

probando una descomposición atómica.

En base a ello, el espacio pesado de tipo BMO adecuado para el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ resulta de la Definición 3.2.2 cuando la función radio crítico es $\sigma(x) = \frac{1}{8}\min\{x,1\}$. Es fácil comprobar que σ satisface la condición (3.4) con $\gamma = 1/8$, esto es,

$$\sigma(y) \leq \sigma(x) + \frac{1}{8}|x-y|, \tag{3.40}$$

para cualquier x e y en $\mathbb{R}^+$. No es difícil probar que BMO_σ, para $\omega \equiv 1$, es el espacio dual del espacio de Hardy $H^1_{\mathcal{L}^\alpha}$, introducido por Dziubanski, cuando $\alpha > 0$.

En lo que sigue, para $\alpha \geq 0$, estableceremos resultados de acotación para $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ sobre $BMO_\sigma(\upsilon)$ bajo apropiadas suposiciones en el peso υ.

Teorema 3.5.1. *Sea $\alpha \geq 0$ y υ un peso pertenenciente a A^1_{loc} y satisfaciendo*

$$e^{-\epsilon x}\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}\int_0^x \upsilon(y)y^{\frac{\alpha}{2}}dy \leq C\upsilon(x), \tag{3.41}$$

y

$$\sup_{0<s<1} x^{\frac{\alpha}{2}}\int_x^\infty \left(\frac{y}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\epsilon\frac{y}{s}}\,\frac{\upsilon(y)}{y^{\frac{\alpha}{2}+1}}dy \leq C\upsilon(x), \tag{3.42}$$

para algunas constantes $C > 0$ y $0 < \epsilon < \frac{1}{16}$, y para casi todo $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces el operador maximal $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ resulta acotado sobre $BMO_\sigma(\upsilon)$.

Corolario 3.5.2. *Para $\alpha \geq 0$ y un peso potencia $\omega(x) = x^\delta$, se tiene que $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ es acotado en $BMO_\sigma(\upsilon)$ si $-\frac{\alpha}{2} - 1 < \delta \leq \frac{\alpha}{2}$.*

Para probar el teorema, notemos que de las definiciones de las funciones de Laguerre (1.2) y (1.1), se deduce que hay una relación muy precisa entre los sistemas $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$. Exactamente se tiene

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_n^\alpha(x^{\frac{1}{2}})x^{-\frac{1}{4}}. \tag{3.43}$$

En la demostración del Teorema 2.2.2 del capítulo 2, se ha mostrado que $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ puede ser expresado como

$$\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}g(x) = \sup_{0<s<1}\left|\int_0^\infty W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)g(y)dy\right|,$$

donde

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y) = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{4}} W_{\varphi^\alpha}(s,\sqrt{x},\sqrt{y}). \tag{3.44}$$

Esta igualdad sugiere que el resultado para $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ del Teorema 3.5.1 podría ser derivado del análogo para $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ probado en la sección anterior (ver Teorema 3.4.1).

Basándonos en (3.43), definimos una transformación lineal R, actuando sobre funciones definidas en $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, de la siguiente manera

$$\mathrm{R}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(x^{\frac{1}{2}}) x^{-\frac{1}{4}}. \tag{3.45}$$

Claramente la inversa de R es

$$\mathrm{R}^{-1}g(y) = \sqrt{2} g(y^2) y^{\frac{1}{2}}. \tag{3.46}$$

Para este operador tenemos el siguiente resultado sobre los espacios involucrados.

Proposición 3.5.1. *Un peso ω pertenece a A^1_{loc} si y solo si $\upsilon = \mathrm{R}\omega$ pertenece a A^1_{loc}. Más aún,* R *resulta un isomorfismo de espacios de Banach entre $BMO_\rho(\omega)$ y $BMO_\sigma(\upsilon)$, siempre que $\omega \in A^1_{loc}$.*

Para la demostración usaremos el siguiente Lema.

Lema 3.5.1. *Si (a,b) es un intervalo crítico para σ, entonces $(\sqrt{a},\sqrt{b})$ es un intervalo $\frac{1}{2}$-supercrítico para ρ. Recíprocamente, si (a,b) es un intervalo crítico para ρ, entonces (a^2,b^2) es un intervalo super-crítico para σ.*

Demostración. Recordemos que $\rho(x) = \frac{1}{8}\min\{x,\frac{1}{x}\}$ y que $\sigma(x) = \frac{1}{8}\min\{x,1\}$. Sea $I = (a,b)$ un intervalo crítico para σ, esto es, $|I| = 2\sigma\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Llamemos $\widetilde{I} \doteq (\sqrt{a},\sqrt{b})$. Entonces

$$|\widetilde{I}| = |I|\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sigma\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Si $\frac{a+b}{2} \le 1$ se tiene

$$\sigma\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{8}\frac{a+b}{2} \ge \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

lo cual implica que

$$|\widetilde{I}| \geq \frac{1}{8}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \geq \rho\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right).$$

Si $\frac{a+b}{2} \geq 1$ entonces $\sigma\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{8}$ y así

$$|\widetilde{I}| = \frac{1}{8}\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \geq \rho\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right).$$

Por lo tanto, $\widetilde{I}$ es un intervalo $\frac{1}{2}$-super-crítico para ρ.

Sea ahora $I = (a,b)$ un intervalo crítico para ρ, esto es, $|I| = 2\rho\left(\frac{a+b}{2}\right)$, y llamemos $I' = (a^2, b^2)$ Entonces

$$|I'| = |I|(a+b) = 2\rho\left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b).$$

Si $\frac{a+b}{2} \leq 1$ se tiene que $\rho\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{8}\frac{a+b}{2}$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} |I'| &= \frac{1}{8}(a+b)^2 \\ &\geq \frac{1}{8}(a^2+b^2) \\ &\geq 2\sigma\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Si, en cambio, $\frac{a+b}{2} \geq 1$ obtenemos $\rho\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{8}\frac{2}{a+b}$ y en consecuencia

$$|I'| = \frac{1}{2} \geq 4\sigma\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right),$$

resultando I' un intervalo super-crítico para σ.

$\square$

Prueba de la Proposición 3.5.1. Sea $\omega \in A^1_{loc}$ y $\upsilon = \mathrm{R}\omega$, con R dada por (3.45). Supongamos que $I = (a,b)$ es un intervalo κ-local. Como

$$\upsilon(I) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_a^b \omega(x^{\frac{1}{2}})x^{-\frac{1}{4}}dx = \sqrt{2}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \omega(u)u^{\frac{1}{2}}du,$$

se deduce que

$$\upsilon(I) \simeq a^{\frac{1}{4}}\omega(\widetilde{I}), \tag{3.47}$$

donde $\widetilde{I} \doteq (\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Notemos que $\widetilde{I}$ es un intervalo $\sqrt{\kappa}$-local. Entonces, por propiedad de la clase A^1_{loc}, se obtiene

$$\begin{aligned} \omega(\widetilde{I}) &\leq C_\kappa\ |\widetilde{I}| \inf_{y\in \widetilde{I}} \omega(y) \\ &\leq C_\kappa\ a^{-\frac{1}{2}}|I| \inf_{x\in I} \omega(x^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $|\widetilde{I}| = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \sim a^{-\frac{1}{2}}|I|$. Luego, por (3.47),

$$\begin{aligned} \upsilon(I) &\leq C_\kappa |I| \inf_{x\in I} x^{-\frac{1}{4}}\omega(x^{\frac{1}{2}}) \\ &\simeq C_\kappa |I| \inf_{x\in I} \upsilon(x). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\upsilon \in A^1_{loc}$, podemos probar de manera análoga que $\omega = R^{-1}\upsilon$, dada por (3.46), pertenece a A^1_{loc}, usando esta vez que $I \in \mathcal{I}_\kappa$ implica que $I' = (a^2, b^2) \in \mathcal{I}_{\kappa^2}$.

Sean ahora $\omega \in A^1_{loc}$ y $f \in BMO_\rho(\omega)$. Para $\upsilon = R\omega$, encontraremos una constante C, independiente de f, de modo que

$$\frac{1}{\upsilon(I)} \int_I |\mathrm{R}f(x)|dx \leq C\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}, \tag{3.48}$$

para todo intervalo I crítico o super-crítico respecto a σ, y

$$\frac{1}{\upsilon(I)} \int_I |\mathrm{R}f(x) - c|dx \leq C\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}, \tag{3.49}$$

para alguna $c = c(f, I)$ y cualquier I intervalo sub-crítico respecto a σ. Esto nos dará que $\|Rf\|_{BMO_\sigma(\upsilon)} \lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}$.

En primer lugar, en vista del Corolario 3.2.1, para probar la condición de promedio acotado (3.48) será suficiente considerar intervalos $I = (a, a*)$ que sean críticos con respecto a σ. Haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{x}$, como $a < a^* \leq \frac{9}{7}a$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_I |\mathrm{R}f(x)|dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_a^{a^*} |f(x^{\frac{1}{2}})| x^{-\frac{1}{4}} dx \\ &= \sqrt{2} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a^*}} |f(u)| u^{\frac{1}{2}} du \\ &\simeq a^{\frac{1}{4}} \int_{\widetilde{I}} |f(u)| du, \end{aligned}$$

donde $\widetilde{I} = (\sqrt{a}, \sqrt{a*})$. Dado que por el Lema 3.5.1, $\widetilde{I}$ es un intervalo $\frac{1}{2}$-crítico para ρ, el Corolario 3.2.2 implica que

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{I}} |f(u)|du &\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\omega(\widetilde{I}) \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\upsilon(I)a^{-\frac{1}{4}},
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

donde la última desigualdad resulta de (3.47), ya que I es un intervalo local. Luego, (3.48) se cumple para intervalos I σ-críticos.

Sea ahora $I = (a, b)$ un intervalo sub-crítico para σ. Tomemos a^* de modo que $a < b < a^*$ y que (a, a^*) sea un intervalo crítico para σ. Probaremos que (3.49) se cumple para I y para una cierta constante $c = c(f, I)$.

Haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ y denotando $\widetilde{I} = (\sqrt{a}, \sqrt{b})$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_I |\mathrm{R}f(x) - c|dx &= 2\int_{\widetilde{I}} |\frac{1}{\sqrt{2}}f(u)u^{-\frac{1}{2}} - c|udu \\
&= \sqrt{2}\int_{\widetilde{I}} |f(u) - \sqrt{2}u^{\frac{1}{2}}c|u^{\frac{1}{2}}du \\
&\lesssim \int_{\widetilde{I}} |f(u) - \sqrt{2}a^{\frac{1}{4}}c|u^{\frac{1}{2}}du + |c|\int_{\widetilde{I}} |a^{\frac{1}{4}} - u^{\frac{1}{2}}|u^{\frac{1}{2}}du \\
&\doteq I + II.
\end{aligned}
$$

Eligiendo $c = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-\frac{1}{4}}f_{\widetilde{I}}$, en virtud de (3.47), obtenemos

$$
\begin{aligned}
I &\lesssim a^{\frac{1}{4}}\int_{\widetilde{I}} |f(u) - f_{\widetilde{I}}|du \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\upsilon(I).
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
II &\lesssim |c|a^{\frac{1}{4}}(b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}})|\widetilde{I}| \\
&\lesssim (b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}})\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a^*}} |f(x)|dx \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}\upsilon((a, a*))a^{-\frac{1}{4}}(b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}})
\end{aligned}
$$

donde hemos usado (3.50) para el intervalo crítico $(a, a*)$.

Puesto que $\upsilon \in A^1_{loc}$ y $I \subset (a, a*)$, el cual es un intervalo local, por la propiedad (1.23) de los pesos A^1_{loc} se deduce que $\upsilon((a, a*)) \lesssim \frac{a}{|I|}\upsilon(I)$.

Asimismo observemos que

$$b - a = (b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}})(b^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}})(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) \simeq (b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}})a^{\frac{3}{4}}.$$

De esta manera llegamos a que II satisface la desigualdad deseada (3.49).

La comprobación de que R^{-1}, dada por (3.46), es también acotada de $BMO_\sigma(\upsilon)$ a $BMO_\rho(\omega)$, se obtiene de forma análoga.

$\square$

Prueba del Teorema 3.5.1. Consideremos un peso υ que cumpla las hipótesis del teorema y tomemos $\omega(y) = \mathrm{R}^{-1}\upsilon(y) = \sqrt{2}\upsilon(y^2)y^{\frac{1}{2}}$. Como $\upsilon \in A^1_{loc}$, de acuerdo a la Proposición 3.5.1, $\omega \in A^1_{loc}$. Además, haciendo $u = y^{\frac{1}{2}}$ y $z = x^{\frac{1}{2}}$ en las condiciones (3.41) y (3.42), se obtiene que ω satisface

$$e^{-\epsilon z^2}\frac{1}{z^{\alpha+\frac{3}{2}}}\int_0^z \omega(u)u^{\alpha+\frac{1}{2}}du \leq C\omega(z),$$

y

$$\sup_{0<s<1} z^{\alpha+\frac{1}{2}}\int_z^\infty \left(\frac{u^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\epsilon\frac{u^2}{s}}\,\frac{\omega(u)}{u^{\alpha+\frac{3}{2}}}dy \leq C\omega(z),$$

para casi todo $z \in \mathbb{R}^+$. Entonces las hipótesis del Teorema 3.4.1 se cumplen y $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ es acotado en $BMO_\rho(\omega)$.

Por otra parte, de (3.44) podemos escribir

$$\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha} = \mathrm{R}\circ \mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}\circ \mathrm{R}^{-1}. \tag{3.51}$$

Luego, la Proposición 3.5.1 y el Teorema 3.4.1 implican que $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ es acotado en $BMO_\sigma(\upsilon)$.

$\square$

3.6. Las clases de pesos $A_\eta^{1,\infty}$.

En esta sección introducimos una clase de pesos, en el espíritu de la clase A^1 de Muckenhoupt, de modo que la acotación de los operadores maximales de Laguerre, estudiados en las secciones anteriores, sobre los espacios BMO pesados correspondientes resultan válidas.

Dado un $\eta > -1/2$, para cada $\theta \geq 0$ consideremos la clase $A_\eta^{1,\theta}$, compuesta por aquellos pesos ω que satisfacen

$$\int_I \frac{\omega(x)x^\eta}{(1+x)^\theta}dx \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I} \frac{\omega^{-1}(x)x^\eta}{(1+x)^\theta} \leq C \int_I \frac{x^{2\eta}}{(1+x)^{2\theta}}dx \tag{3.52}$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}^+$.

Notar que (3.52) es equivalente a decir que el peso $\omega(x)x^{-\eta}(1+x)^\theta$ pertenece a $A^1(d\mu_\theta(x))$, donde $d\mu_\theta(x) = \frac{x^{2\eta}}{(1+x)^{2\theta}}dx$.

Denotemos con $A_\eta^{1,\infty} \doteq \bigcup_{\theta\geq 0} A_\eta^{1,\theta}$.

Respecto a los pesos potencia se tiene que $x^\delta \in A_\eta^{1,\infty}$ si y solo si $-\eta-1 < \delta \leq \eta$. De esta manera recuperamos todas las potencias de los Corolarios 3.4.2 y 3.5.2, tomando $\eta = \alpha + \frac{1}{2}$ y $\eta = \frac{\alpha}{2}$, respectivamente. Para pesos de la forma $\omega(x) = (1+x)^\delta$, se tiene que $\omega \in A_\eta^1 \doteq A_\eta^{1,0}$ si y solo si $\eta \geq 0$ y $-\eta-1 < \delta \leq \eta$. Sin embargo, tales pesos ω pertenecen a la clase $A_\eta^{1,\infty}$ para cualquier $\delta \in \mathbb{R}$, siempre que $\eta \geq 0$.

En lo que sigue probaremos que los pesos ω pertenecientes a $A_\eta^{1,\infty}$ satisfacen las hipótesis de los Teoremas 3.4.1 y 3.5.1, cuando $\eta = \alpha + \frac{1}{2}$ y $\eta = \frac{\alpha}{2}$, respectivamente. Esto derivará en la obtención de desigualdades con pesos para $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ y $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$, bajo estas suposiciones. Más precisamente:

Teorema 3.6.1. *Sea $\alpha \geq -1/2$. Si un peso ω pertenece a $A^{1,\infty}_{\alpha+\frac{1}{2}}$, entonces $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ es acotado en $BMO_\rho(\omega)$. Asimismo, si $\alpha \geq 0$ y $\upsilon \in A^{1,\infty}_{\frac{\alpha}{2}}$, $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ es acotado en $BMO_\sigma(\upsilon)$.*

Demostración. Consideremos $\alpha \geq -1/2$ y $\eta = \alpha + \frac{1}{2}$, por lo que $\eta \geq 0$. Probaremos que un peso en $A_\eta^{1,\infty}$ satisface las hipótesis del Teorema 3.4.1, obtenindose así la conclusión deseada para $W^*_{\varphi^\alpha}$. Respecto al operador $W^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ y $\eta = \frac{\alpha}{2}$, el resultado se obtiene en forma análoga de modo que omitiremos esta prueba.

Sea entonces $\omega \in A_\eta^{1,\infty}$, esto es, ω satisface (3.52) para algún $\theta \geq 0$. Fácilmente se obtiene que $\omega \in A^1_{loc}$. En efecto, para $I = (a, b)$ intervalo local se tiene

$$\int_I \frac{\omega(x)x^\eta}{(1+x)^\theta}dx \simeq \frac{a^\eta}{(1+a)^\theta}\omega(I),$$

$$\sup_{x\in I} \frac{\omega^{-1}(x)x^\eta}{(1+x)^\theta}dx \simeq \frac{a^\eta}{(1+a)^\theta} \sup_{x\in I}\omega^{-1}(x),$$

y

$$\int_I \frac{x^{2\eta}}{(1+x)^{2\theta}}dx \simeq \frac{a^{2\eta}}{(1+a)^{2\theta}}|I|.$$

Luego, reeemplazando con estas estimaciones en la (3.52), se obtiene $\omega \in A^1_{loc}$.

Probaremos ahora que ω satisface la hípótesis (3.29) del Teorema 3.4.1. Más aún, mostraremos que para cualquier $\epsilon > 0$ vale que

$$\frac{e^{-\epsilon x^2}}{x^{\eta+1}} \int_0^x \omega(y)y^\eta dy \leq \omega(x) \tag{3.53}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^+$, donde $\eta = \alpha + \frac{1}{2}$, para alguna constante C que dependa de ϵ, θ, η y de la constante $A_\eta^{1,\theta}$ del peso ω.

Sea $x \in \mathbb{R}^+$ un punto de Lebesgue de ω. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{e^{-\epsilon x^2}}{x^{\eta+1}} \int_0^x \omega(y)y^\eta dy &\leq \frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}x^2}}{x^{\eta+1}} \int_0^x \omega(y)y^\eta e^{-\frac{\epsilon}{2}y^2}dy \\ &\leq C_{\theta,\epsilon}\frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}x^2}}{x^{\eta+1}} \int_0^x \frac{\omega(y)y^\eta}{(1+y)^\theta}dy.\end{aligned}$$

Usando ahora la condición (3.52) para el intervalo $I = (0, x)$ llegamos a

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\omega(y)y^\eta}{(1+y)^\theta}dy &\leq C \inf_{y\in(0,x)} \omega(y)y^{-\eta}(1+y)^\theta \int_0^x \frac{y^{2\eta}}{(1+y)^{2\theta}}dy \\ &\leq C\omega(x)x^{-\eta}(1+x)^\theta \int_0^x y^{2\eta}dy \\ &\leq C\omega(x)x^{\eta+1}(1+x)^\theta,\end{aligned}$$

donde para estimar el ínfimo esencial hemos usado que x es un punto de Lebesgue de ω. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\epsilon x^2}}{x^{\eta+1}}\int_0^x \omega(y)y^\eta dy &\leq Ce^{-\frac{\epsilon}{2}x^2}(1+x)^\theta\omega(x) \\ &\leq C\omega(x). \end{aligned}$$

Probaremos ahora que ω satisface la hipótesis (3.30) del Teorema 3.4.1, esto es, para $\eta = \alpha + \frac{1}{2}$ y cualquier $\epsilon > 0$ existe una constante $C = C(\epsilon, \theta, \alpha, \omega)$ de modo que

$$x^\eta \int_x^\infty \left(\frac{y^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\epsilon\frac{y^2}{s}}\omega(y)\frac{1}{y^{\eta+1}}dy \leq C\omega(x), \tag{3.54}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^+$ y para todo $0 < s < 1$. Con este fin veremos primero que un peso $\omega \in A_\eta^{1,\theta}$ satisface

$$\frac{b^{-\eta}}{(1+b)^\theta} \inf_{y\in(\frac{b}{2},b)} \omega(y) \leq C \inf_{y\in(a,2a)} \omega(y)y^{-\eta}, \tag{3.55}$$

para cualquier a y b con $b \geq 2a$. Ciertamente,

$$\begin{aligned} \frac{b^{-\eta}}{(1+b)^\theta} \inf_{y\in(\frac{b}{2},b)} \omega(y) &\leq \frac{b^{-\eta-1}}{(1+b)^\theta}\int_{\frac{b}{2}}^b \omega(y)dy \\ &\leq Cb^{-2\eta-1}\int_a^b \omega(y)\frac{y^\eta}{(1+y)^\theta}dy \end{aligned}$$

Ahora usamos (3.52) para el intervalo (a, b) obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{b^{-\eta}}{(1+b)^\theta} \inf_{y\in(\frac{b}{2},b)} \omega(y) &\leq Cb^{-2\eta-1} \inf_{y\in(a,b)} \omega(y)y^{-\eta}(1+y)^\theta \int_a^b \frac{y^{2\eta}}{(1+y)^{2\theta}}dy \\ &\leq C \inf_{y\in(a,2a)} \omega(y)y^{-\eta}\frac{b^{-2\eta-1}}{(1+a)^\theta}\int_a^b y^{2\eta}dy \\ &\leq C \inf_{y\in(a,2a)} \omega(y)y^{-\eta}. \end{aligned}$$

Para probar (3.54), fijemos $x \in \mathbb{R}^+$, un punto de Lebesgue de ω, y $0 < s < 1$. Sea k_0 un entero tal que $2^{k_0}\sqrt{s} < x \leq 2^{k_0+1}\sqrt{s}$. Si ahora denotamos por $J_k \doteq (2^k\sqrt{s}, 2^{k+1}\sqrt{s})$, se obtiene

$$\int_x^\infty \left(\frac{y^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\epsilon\frac{y^2}{s}}\omega(y)\frac{1}{y^{\eta+1}}dy \leq \sum_{k\geq k_0}\int_{J_k}\left(\frac{y^2}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\epsilon}{2}\frac{y^2}{s}}\omega(y)\frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}y^2}}{y^{\eta+1}}dy$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\sum_{k\ge k_0} 4^{k(\alpha+1)}e^{-\frac{\epsilon}{2}4^k}\,\frac{e^{-\frac{\epsilon}{8}(2^{k+1}\sqrt{s})^2}}{(2^k\sqrt{s})^\eta}\frac{\omega(J_k)}{|J_k|}\\
&\le C\sum_{k\ge k_0} 4^{k(\alpha+1)}e^{-\frac{\epsilon}{2}4^k}\,\frac{(2^{k+1}\sqrt{s})^{-\eta}}{(1+2^{k+1}\sqrt{s})^\theta}\inf_{y\in J_k}\omega(y),
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad hemos usado la propiedad de los pesos A^1_{loc} (1.20), puesto que $\omega \in A^1_{loc}$ y que J_k es un intervalo 2-local.

De acuerdo a nuestra elección de k_0, se sigue que $x \le 2^{k+1}\sqrt{s}$ para cualquier $k \ge k_0$. Entonces, en virtud de (3.55) con $b = 2^{k+1}\sqrt{s}$ y $a = \frac{x}{2}$ (observar que $2a \le b$) se obtiene, para $k \ge k_0$, que

$$
\begin{aligned}
\frac{(2^k\sqrt{s})^{-\eta}}{(1+2^k\sqrt{s})^\theta}\inf_{y\in J_k}\omega(y) &\le C\inf_{y\in(\frac{x}{2},x)}\omega(y)y^{-\eta}\\
&\le C\omega(x)x^{-\eta},
\end{aligned}
$$

ya que x es un punto de Lebesgue de $\omega(y)y^{-\eta}$. Luego, la desigualdad deseada (3.54) ha quedado probada. $\square$

3.7. El espacio BMO asociado al sistema $\{\ell_n^\alpha\}$.

Para estas funciones de Laguerre, dadas por (1.3), sección 1.1, el operador maximal es

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}^*_{\ell^\alpha}f(x) &= \int_0^\infty W_{\ell^\alpha}(s,x,y)f(y)y^\alpha dy\\
&= \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}} W_{\mathcal{L}^\alpha}(s,x,y)f(y)dy.
\end{aligned}
$$

Para este sistema, el espacio BMO asociado será el mismo que para el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, es decir, BMO_σ con $\sigma(x) = \frac{1}{8}\,\mathrm{mín}\{x,1\}$. Enunciaremos ahora un teorema de continuidad para $\mathrm{W}^*_{\ell^\alpha}$ sobre $BMO_\sigma(v)$, siendo v un peso satisfaciendo una condición similar a las dadas en el Teorema 3.6.1. Observar que, para este operador en estos espacios, se puede obtener fácilmente, de la misma manera en que probaremos el siguiente teorema, resultados similares a los del Teorema 3.5.1, con tres condiciones sobre v en lugar de una. Sin embargo, nos remitiremos a una versión del Teorema 3.6.1 ya que la consideramos más interesante.

Teorema 3.7.1. *Sea $\alpha \geq 0$ y sea υ un peso en $\mathbb{R}^+$. Si existe $\theta \geq 0$ tal que*

$$\int_I \frac{\upsilon(x)x^\alpha}{(1+x)^\theta}dx \ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I} \frac{\upsilon^{-1}(x)}{(1+x)^\theta} \leq C \int_I \frac{x^\alpha}{(1+x)^\theta}dx \tag{3.56}$$

para todo $I \subset \mathbb{R}^+$, entonces $\mathrm{W}^*_{\ell^\alpha}$ es acotada en $BMO_\sigma(\upsilon)$.

Demostración. Observar que si $\omega(x) = \upsilon(x)x^{\frac{\alpha}{2}}$, con υ satisfasciendo (3.56), entonces $\omega \in A^{1,\theta}_{\frac{\alpha}{2}}$ y por lo tanto el operador $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ es continuo en $BMO_\sigma(\omega)$. Por otro lado, observar que $\mathrm{W}^*_{\ell^\alpha} = S^{-1} \circ \mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha} \circ S$, con $Sf(x) \doteq f(x)x^{\frac{\alpha}{2}}$ (con esta notación se tiene $\omega = S\upsilon$). Luego, para lograr el resultado deseado bastará con ver que S es un isomorfismo entre $BMO_\sigma(\upsilon)$ y $BMO_\sigma(\omega)$ como espacios normados.

Probaremos solamente que si $f \in BMO_\sigma(\upsilon)$ entonces $Sf \in BMO_\sigma(\omega)$. Hay que verificar que

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |Sf(x)|dx \lesssim \|f\|_{BMO_\sigma(\upsilon)} \tag{3.57}$$

para todo I crítico para σ, y

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |Sf(x) - c_I|dx \lesssim \|f\|_{BMO_\sigma(\upsilon)} \tag{3.58}$$

para todo I subcrítico.

Observar que todo intervalo crítico o subcrítico para σ es también local, por lo que si $I = (a, b)$ y $g \in L^1_{loc}$, $g \geq 0$, entonces $\int_I g(x)x^{\frac{\alpha}{2}}dx \simeq a^{\frac{\alpha}{2}} \int_I g(x)dx$, y en particular, $\omega(I) \simeq a^{\frac{\alpha}{2}}\upsilon(I)$. Luego, (3.57) se verifica fácilmente. Para probar (3.58) hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(I)}\int_I |Sf(y) - c_I|dy &= \frac{1}{a^{\frac{\alpha}{2}}\upsilon(I)}\int_I |f(y)y^{\frac{\alpha}{2}} - c_I y^{-\frac{\alpha}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}}|dy \\
&\simeq \frac{1}{\upsilon(I)}\int_I |f(y) - c_I y^{-\frac{\alpha}{2}}|dy \\
&\lesssim A + B,
\end{aligned}$$

con

$$A \doteq \frac{1}{\upsilon(I)}\int_I |f(y) - c_I a^{-\frac{\alpha}{2}}|dy$$

y

$$B \doteq \frac{|c_I|}{\upsilon(I)} \int_I |a^{-\frac{\alpha}{2}} - y^{-\frac{\alpha}{2}}| dy.$$

Si tomamos $c_I = f_I a^{\frac{\alpha}{2}}$ fácilmente se obtiene $A \leq \|f\|_{BMO_\sigma(\upsilon)}$.

Para B, obervamos que la función $t^{-\frac{\alpha}{2}}$ es derivable en $I = (a, b)$, con $0 < a < b < 2a$, y entonces

$$|a^{-\frac{\alpha}{2}} - y^{-\frac{\alpha}{2}}| \simeq |a - y| s^{-\frac{\alpha}{2}-1} \lesssim (b-a) a^{-\frac{\alpha}{2}-1},$$

ya que s está entre a e y, y por lo tanto

$$B \lesssim \frac{a^{\frac{\alpha}{2}} |f_I|}{\upsilon(I)} (b-a)^2 a^{-\frac{\alpha}{2}-1}$$

Si llamamos $\tilde{I} = (a, 2a)$, entonces

$$|f_I| \leq \frac{1}{|I|} \int_{\tilde{I}} |f| \leq \|f\|_{BMO_\sigma(\upsilon)} \frac{\upsilon(\tilde{I})}{b-a},$$

luego

$$B \lesssim \|f\|_{BMO_\sigma(\upsilon)} \frac{\upsilon(\tilde{I})}{\upsilon(I)} \frac{(b-a)}{a} \lesssim \|f\|_{BMO_\sigma(\upsilon)}$$

donde la última desigualdad surge usando la propiedad de duplicación (1.23), ya que $\upsilon \in A^1_{loc}$. □

Observación 3.7.1. Podemos englobar los resultados de los Teoremas 3.6.1 y 3.7.1 considerando una clase de pesos con dos parámetros diferentes η y β (como hicimos en la Definición 2.6.1 de la sección 2.6 y como haremos en el capítulo siguiente, sección 4.2, Definición 4.3.1), de la siguiente manera.

Dados η y β tales que $\eta + \beta > -1$, para cada $\theta \geq 0$ consideremos la clase $A^{1,\theta}_{\eta,\beta}$, compuesta por aquellos pesos ω que satisfacen

$$\int_I \frac{\omega(x) x^\eta}{(1+x)^\theta} dx \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I} \frac{\omega^{-1}(x) x^\beta}{(1+x)^\theta} \leq C \int_I \frac{x^{\eta+\beta}}{(1+x)^{2\theta}} dx$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}^+$. Denotaremos con $A^{1,\infty}_{\eta,\beta} \doteq \bigcup_{\theta \geq 0} A^{1,\theta}_{\eta,\beta}$.

Luego, si un peso ω pertenece a la clase $A^{1,\infty}_{\eta,\beta}$, obtendremos la continuidad de los operadores $\mathrm{W}^*_{\mathcal{L}^\alpha}$ y $\mathrm{W}^*_{\varphi^\alpha}$ en sus respectivos espacios $BMO(\omega)$, considerando $\eta = \beta = \frac{\alpha}{2}$ y $\eta = \beta = \alpha + \frac{1}{2}$, respectivamente. Por otra parte, si $\omega(x) x^\alpha \in A^{1,\infty}_{\eta,\beta}$, con $\eta = 0$ y $\beta = \alpha$, entonces $\mathrm{W}^*_{\ell^\alpha}$ es acotado en $BMO_\sigma(\omega)$.

CAPÍTULO 4

LA INTEGRAL FRACCIONARIA ASOCIADA A FUNCIONES DE LAGUERRE

4.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la llamada integral fraccionaria o potencial de Riesz asociada a los tres sistemas de funciones de Laguerre considerados. Buscaremos establecer resultados con pesos en espacios de Lebesgue, más exactamente, condiciones sobre los pesos y los parámetros correspondientes para obtener continuidad de tipo fuerte, tipo débil, tipo débil dual y tipo débil restringido. Para los pesos potencia, las condiciones serán necesarias y suficientes, teniendo en cuenta el rango más amplio posible de los parámetros involucrados. Para pesos más generales, definiremos una clase que será condición suficiente para el tipo fuerte y el tipo débil.

Para poder obtener estos resultados, consideraremos en primer término el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ y procederemos de manera análoga a como hicimos con el operador maximal asociado al semigrupo. Es decir, estimaremos puntualmente la integral fraccionaria por arriba y por abajo por tres operadores familiares y usaremos sus resultados de acotación. Dos de ellos son operadores de Hardy modificados. El tercer operador será una versión localizada de la maximal fraccionaria de Hardy-Littlewood.

Los operadores de Hardy también aparecerán estimando la integral fraccionaria por abajo, aunque restringidos a un intervalo cerca de cero, tal como hicimos en el capítulo

2. Esto permitirá que cuando consideremos pesos potencia, las condiciones suficientes obtenidas sean también necesarias.

Como hemos mencionado en la introducción de esta tesis, y que ampliaremos en la siguiente sección, podemos considerar esta integral fraccionaria como un operador integral contra un núcleo simétrico y positivo:

$$\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma} f(x) = \int_0^\infty K^{\alpha,\sigma}(x,y) f(y) dy.$$

Para obtener las estimaciones deseadas, fijaremos un $x \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ y dividiremos la zona de integración $(0,\infty)$ en tres partes, una zona local $(\frac{x}{4}, 4x)$, una zona global cerca de cero $(0, \frac{x}{4})$ y una zona global cerca de infinito $(4x,\infty)$. La aparición de esos operadores familiares estará relacionada con la "zona"donde se estará integrando. Más exactamente, en la zona local, donde cada integrando y será equivalente al centro x, aparecerá la maximal fraccionaria local, junto a una función potencia de x. Por otra parte, en las zonas globales, donde el integrando está de alguna manera lejos del centro x, podremos estimar por los operadores de Hardy, en cero y en infinito, respectivamente, estimación que también se hará presente inferiormente.

En la segunda sección introduciremos el concepto de integral fraccionaria o potencial de Riesz para un operador general y nos restringiremos al caso de las funciones de Laguerre $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, obteniendo una expresión integral contra un núcleo simétrico y positivo.

En la tercer sección enunciaremos dos Teoremas para pesos generales, un de continuidad fuerte y otro de continuidad débil. Introduciremos una clase de pesos que nos darán las condiciones suficientes para dicha continuidad. Como corolarios, enunciaremos los resultados obtenidos cuando tomamos pesos potencias. Esos resultados serán ampliados en la sección 9, obteniendo condiciones necesarias y suficientes para todos los parámetros posibles.

Para poder demostrar estos teoremas, en la cuarta sección, encontraremos estimaciones de la integral fraccionaria de Laguerre en términos de los operadores arriba mencionados, a través de las estimaciones de su núcleo en distintas regiones.

En la quinta sección, nos concentraremos en la integral fraccionaria restringida a una zona local, más exactamente, a $(\frac{1}{4}x, 4x)$, y probaremos la continuidad de tipo fuerte de ésta, estimándola por medio de la maximal fraccionaria local $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$. Usaremos un resultado con pesos para $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$, enunciado y demostrado en la sección 1.4. Además, la naturaleza autoadjunta de la integral fraccionaria local de Laguerre nos dará un resultado extra que la maximal fraccionaria local no comparte: el tipo fuerte para $p = 1$.

En la sección 6, enunciaremos y demostraremos resultados de acotación con pesos generales para los operadores de Hardy modificados, que surgen de la estimación de la sección 4.

En la sección 7 demostraremos los Teoremas de la sección 3, probando que un peso en la clase tipo $A^{p,q}$ allí definida satisface las condiciones suficientes para la acotación de la integral fraccionaria local (sección 5) y los operadores de Hardy modificados (sección 6).

Los resultados ajustados con pesos potencia para los operadores de Hardy modificados se enunciarán en la sección 8. Para demostrarlos, usaremos la desigualdad de Hölder para espacios de Lorentz, y obtendremos de una manera más "artesanal" las condiciones suficientes, probando además que son necesarias mediante una selección de funciones como contraejemplos.

En la sección 9 enunciaremos de dos maneras diferentes los resultados obtenidos para la integral fraccionaria de Laguerre con pesos potencia. Estos resultados, que incluirán aquellos de los corolarios de la sección 3, nos brindarán condiciones necesarias y suficientes para el tipo fuerte, débil, débil dual y débil restringido (p, q) con peso x^{δ}, ampliando el rango de los p y q posibles. Dado que los operadores de Hardy aparecen estimando la integral fraccionaria de Laguerre por arriba y por abajo, los resultados serán casi una consecuencia de lo obtenido en la sección anterior.

Finalmente, en las secciones 10 y 11 obtendremos resultados similares para la integral fraccionaria asociada a los sistemas $\{\varphi^{\alpha}_n\}$ y $\{\ell^{\alpha}_n\}$, respectivamente. Para ello, nos basaremos en parte en las relaciones entre las integrales fraccionarias de estos sistemas y $\{\mathcal{L}^{\alpha}_n\}$, ya analizada en las secciones anteriores.

Como comentario final, observamos que si bien usamos ideas similares a las del capítulo 2, las estimaciones y demostraciones e incluso los resultados de los Teoremas, se vuelven más largos y engorrosos ya que analizamos la continuidad para pares (p, q) en una zona mucho más amplia. Asimismo, y por esta misma razón, hemos invertido el orden de los resultados respecto a ese capítulo, comenzando por los pesos más generales para luego pasar a los pesos potencia.

4.2. El operador integral fraccionaria o potencial de Riesz.

Consideremos L un operador diferencial de segundo orden en $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Supongamos que L tiene una familia de autofunciones φ_n, para $n = 1, 2, ...$ con autovalores reales λ_n. Supongamos además que $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu(x))$, de manera que cada función f es ese espacio se puede escribir como $f(x) = \sum_n < f, \varphi_n > \varphi_n(x)$, donde

$$< f, \varphi_n >= \int_0^\infty f(y)\varphi_n(y)d\mu(y).$$

Sea $\sigma > 0$. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$, **el operador integral fraccionaria o potencial de Riesz** $\mathrm{L}^{-\sigma}$ se define como

$$\mathrm{L}^{-\sigma} f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} < \varphi_n, f > {\lambda_n}^{-\sigma} \varphi_n(x). \tag{4.1}$$

Observar que si L es un operador diferencial de segundo orden, $\mathrm{L}^{-\frac{\sigma}{2}}$ correspondería, de manera formal, a la integral σ-ésima.

La integral fraccionaria $\mathrm{L}^{-\sigma}$, bajo condiciones apropiadas, se puede escribir también como un operador integral. Usando que para todo $\lambda > 0$ se verifica

$$\lambda^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-t\lambda} t^\sigma \frac{dt}{t}$$

y que el semigrupo del calor $\{e^{-t\mathrm{L}}\}_{t\geq 0}$ se define en $L^2(\mathbb{R}^+, d\mu)$ como

$$e^{-t\mathrm{L}} f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} < \varphi_n, f > e^{-t\lambda_n} \varphi_n(x),$$

podemos transformar la expresión (4.1) en

$$\mathrm{L}^{-\sigma} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-t\mathrm{L}} f(x) t^\sigma \frac{dt}{t}. \tag{4.2}$$

Dado que, como vimos anteriormente, cada operador $e^{-t\mathrm{L}}$ tiene forma integral, por (4.2) $\mathrm{L}^{-\sigma}$ también la tendrá, al menos para funciones que tengan una expansión finita en la base $\{\varphi_n\}$, y podemos escribir

$$\mathrm{L}^{-\sigma} f(x) = \int_0^\infty K_{\mathrm{L}}(x,y) f(y) d\mu(y), \tag{4.3}$$

donde

$$K_{\mathrm{L}}(,x,y) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty H_{\mathrm{L}}(t,x,y) t^\sigma \frac{dt}{t} \tag{4.4}$$

y $H_{\mathrm{L}}(t,x,y) = \sum_{n=0}^\infty e^{-t\lambda_n} \varphi_n(x)\varphi_n(y)$ es el núcleo asociado a $e^{-t\mathrm{L}}$.

Observar que la forma (4.1) es igual puntualmente a la forma integral (4.3) para toda función f que sea combinación lineal finita de $\{\varphi_n\}$, y para $f \in L^2$ la igualdad se da en el sentido de L^2. Claramente, cuando se conozcan estimaciones precisas del núcleo, como en el caso de los sistemas de Laguerre, la forma integral de $\mathrm{L}^{-\sigma}$ tiene sentido para una mayor clases funciones.

En este capítulo, hasta las dos últimas secciones, estudiaremos la integral fraccionaria $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ asociada a un sistema de funciones de Laguerre, donde $\mathrm{L}_\alpha = -x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x}$ es un operador diferencial de segundo orden en $\mathbb{R}^+$, con $\alpha > -1$ y $\sigma > 0$.

Las autofunciones de L_α están dadas por las funciones de Laguerre

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \left(\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2} L_n^\alpha(x) e^{-x/2} x^{\alpha/2}, \tag{4.5}$$

para $x \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, donde $\{L_n^\alpha\}$ son los polinomios de Laguerre. Las funciones $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ forman una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$ (acá $d\mu$ es la medida de Lebesgue). La integral fraccionaria asociada a los sistemas $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\ell_n^\alpha\}$ (considerando en este caso $d\mu(x) = x^\alpha dx$), se estudiarán en las últimas secciones, siguiendo las ideas esbozandas para el sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$.

Como hemos visto anteriormente, para cada $t > 0$ el semigrupo del calor está dado, en su forma integral, por

$$e^{-t\mathrm{L}_\alpha} f(x) = \int_0^\infty W_\alpha(s(t), x, y) f(y) dy$$

donde

$$s(t) = \frac{1 - e^{-t/2}}{1 + e^{-t/2}} \tag{4.6}$$

y $W_\alpha(s, x, y)$ está dado por (1.5), es decir

$$W_\alpha(s, x, y) = \frac{1}{2} \frac{1 - s^2}{2s} e^{-\frac{1}{4}(s + \frac{1}{s})(x+y)} I_\alpha \left(\frac{1 - s^2}{2s} (xy)^{1/2} \right) \tag{4.7}$$

para $0 < s < 1$, siendo I_α la función de Bessel modificada.

Tras hacer el cambio de variable (4.6) en la expresión (4.4), el núcleo de la forma integral de $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es

$$K^{\alpha,\sigma}(x, y) = \int_0^1 W_\alpha(s, x, y) \psi_\sigma(s) ds, \tag{4.8}$$

donde

$$\psi_\sigma(s) = \frac{2^{\sigma+1}}{\Gamma(\sigma)} \log^{\sigma-1} \left(\frac{1 + s}{1 - s} \right) \frac{1}{1 - s^2}. \tag{4.9}$$

Observar que $K^{\alpha,\sigma}(x, y)$ es simétrico y positivo. Por lo tanto, el operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$.

4.3. Continuidad en espacios de Lebesgue con pesos para $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$.

Empezaremos definiendo en forma general la clase de pesos que implicará la continuidad en espacios de Lebesgue de la integral fraccionaria de Laguerre.

Definición 4.3.1. Para $1 \le p, q \le \infty$ y η y β tales que $\eta+\beta+\frac{1}{q}+\frac{1}{p'} > 0$ ($\eta+\beta \ge 0$ cuando $p=1$ y $q=\infty$), consideramos la clase $A^{p,q}_{\eta,\beta}$, compuesta por los pesos ω de $\mathbb{R}^+$ que satisfacen

$$\left(\int_I \omega^q(x)x^{\eta q}dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_I \omega^{-p'}(x)x^{\beta p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \le C \left(\int_I x^{\frac{\eta+\beta}{1-\epsilon}}dx\right)^{1-\epsilon}, \tag{4.10}$$

para todo $I \subset \mathbb{R}^+$, donde $\epsilon \doteq \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. Tomaremos la norma del supremo esencial cuando $q = \infty$ o $p' = \infty$, donde corresponda. En caso de que sucedan simultáneamente, resultando $\epsilon = 1$, tendremos que $\omega \in A^{1,\infty}_{\eta,\beta}$ si y sólo si

$$\sup_{x\in I} \omega(x)x^{\eta} \ \operatorname{ess\,sup}_{x\in I} \omega^{-1}(x)x^{\beta} \le C \ \operatorname{ess\,sup}_{x\in I} x^{\eta+\beta},$$

para todo $I \subset \mathbb{R}^+$.

La condición a priori $\beta+\eta+\frac{1}{q}+\frac{1}{p'} > 0$, ($\eta+\beta \ge 0$ cuando $p=1$ y $q=\infty$) se pide para la integrabilidad en cero de la medida $d\nu(x) = x^{\frac{\beta+\eta}{1-\epsilon}}dx$. Si tomamos $1 \le p, q \le \infty$ y $\sigma \ge 0$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$ y $\sigma < \eta+\beta+1$. Las hipótesis de los Teoremas para $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ que vienen a continuación nos darán esas condiciones, cuando $\beta = \eta = \frac{\alpha}{2}$.

Obervaremos también que, exceptuando el punto $p = 1$ y $q = \infty$, si denotamos $\upsilon(x) = \omega(x)x^{\eta-\frac{\beta+\eta}{q(1-\epsilon)}}$, entonces $\omega \in A^{p,q}_{\eta,\beta}$ si y sólo si $\upsilon \in A^{p,q}(d\nu)$, con $d\nu(x) = x^{\frac{\beta+\eta}{1-\epsilon}}dx$, y esto pasa si y sólo si $\upsilon^q \in A^r(d\nu)$, donde $r = 1+\frac{q}{p'}$.

Como ya enunciamos en los preliminares, los espacios de Lebegue y Lorentz con pesos que consideraremos en este capítulo son

$$L^p_\omega \doteq \left\{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : f\omega \in L^p(\mathbb{R}^+, dx)\right\}, \tag{4.11}$$

(que, para $1 \le p < \infty$, es igual a $L^p(\omega^p)$), con norma $\|f\|_{L^p_\omega} \doteq \|f\omega\|_p$, también

$$L^{p,1}_\omega = L^{p,1}(\mathbb{R}^+, \omega^p(x)dx),$$

para $1 < p < \infty$, y

$$L^{p,\infty}_\omega = L^{p,\infty}(\mathbb{R}^+, \omega^p(x)dx),$$

para $1 \le p < \infty$. Cuando tomemos pesos potencia, es decir $\omega(x) = x^\delta$, usaremos la notación L^p_δ, $L^{p,1}_\delta$ y $L^{p,\infty}_\delta$. Notar que todos los pesos están elevados a la potencia p.

Diremos que un operador es de tipo fuerte (p,q) con peso ω cuando sea acotado de L^p_ω a L^q_ω, y de tipo débil (p,q) cuando lo sea de L^p_ω en $L^{q,\infty}_\omega$.

A continuación, enunciaremos el teorema de continuidad fuerte con pesos generales para $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$, la integral fraccionaria asociada al sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$. Como se puede ver en el Capítulo 2 Sección 6, para este sistema hay que considerar $\eta = \beta = \frac{\alpha}{2}$.

Teorema 4.3.1. *Sean $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha+1$ y $1 \le p \le q \le \infty$. Para $1 < p \le q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$, o para $p = 1$ y $1 \le q \le \infty$ tal que $\frac{1}{q} > 1 - \sigma$, o para $q = \infty$ y $1 \le p \le \infty$ tal que $\frac{1}{p} < \sigma$, se tiene que el operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso $\omega \in A^{p,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma} f\|_{L^q_\omega} \le C \|f\|_{L^p_\omega}$$

para toda $f \in L^p_\omega$.

La demostración se hará en la sección 6 de este capítulo, con resultados obtenidos en secciones siguientes. Si consideramos pesos potencia, es decir $\omega(x) = x^\delta$, tendremos el siguiente corolario con condiciones suficientes para el tipo fuerte (p,q).

Corolario 4.3.2. *Sean $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha + 1$ y $1 \le p \le q \le \infty$. Entonces, tenemos los siguientes resultados:*

Para $1 < p \le q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$,

Si $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} < \delta < \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$ entonces $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso x^δ, para $1 < p \le q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$.

Si $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} < \delta \le \frac{\alpha}{2}$ entonces $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo fuerte $(1,q)$ con peso x^δ, para $1 \le q < \infty$ tal que $q < \frac{1}{1-\sigma}$.

Si $-\frac{\alpha}{2} \le \delta < \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$ entonces $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p,∞) con peso x^δ, para $1 < p \le \infty$, tal que $p > \frac{1}{\sigma}$.

Si $-\frac{\alpha}{2} \le \delta \le \frac{\alpha}{2}$ entonces $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo fuerte $(1,\infty)$ con peso x^δ, para $\sigma > 1$.

Demostración. De una manera más general, demostraremos que $\omega(x) = x^\delta \in A^{p,q}_{\eta,\beta}$ sí y sólo si $-\eta - \frac{1}{q} < \delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$, para $1 < p \le q < \infty$, $-\eta - \frac{1}{q} < \delta \le \beta$, para $p = 1$ y $1 \le q < \infty$, $-\eta \le \delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$ para $1 < p \le \infty$ y $q = \infty$ o $-\eta \le \delta \le \beta$

para $p = 1$ y $q = \infty$. Notar que la condición (4.10) se cumple para todo intervalo (a, b), con $0 < a < b < \infty$, si y sólo si se cumple para todo intervalo de tipo 2-local (es decir, con $b < 2a$) y para aquellos de la forma $(0, b)$, con $b > 0$. Como ya hemos notado, las condiciones sobre intervalos locales se cumplen para todos los pesos potencia. Luego, las condiciones deseadas se obtendrán fácilmente al integrar en $(0, b)$.

$\square$

Observar que estas condiciones del Corolario sobre los exponentes son necesarias y suficientes para la clase $A^{p,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}$, aunque del Teorema 4.3.1 sólo se deduce que son suficientes para la continuidad del operador $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$. Si bien no hemos podido probar que para pesos más generales la condición $A^{p,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}$ es necesaria para la continuidad de $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$, en la sección 8 demostraremos que para pesos potencia los rangos de los exponentes son ajustados, es decir, necesarios y suficientes para la continuidad del operador.

Observaremos aquí que para el caso $p = 1$ y $q = \frac{1}{1-\sigma}$, la condición $A^{p,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}$ no es suficiente para el tipo fuerte. Podemos, sin embargo, obtener tipo débil cambiando un poco la condición.

Definiremos ahora una clase de pesos que dará una condición suficiente para el tipo débil $(1, q)$ de $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$. Observar que para $p = 1$, tenemos que $1 - \epsilon = \frac{1}{q}$.

Definición 4.3.2. Para β, η y $1 \leq q < \infty$ tales que $\beta + \eta + \frac{1}{q} > 0$, consideramos la clase $A^{1,q^*}_{\eta,\beta}$ de los pesos ω en $\mathbb{R}^+$ que satisfacen

$$(4.12) \qquad \left(\int_a^b \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right)^{\gamma} \omega^q(x) x^{\eta q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a<x<b} \frac{x^{\beta}}{\omega(x)} \leq C \left(\int_a^b x^{(\eta+\beta)q} dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

para todo $0 \leq a \leq b < \infty$ y para algún $\gamma > 0$, donde $C = C(\beta, \eta, \gamma, \omega, q)$, cuando $\eta \neq 0$, o que satisfacen

$$(4.13) \qquad \left(\int_a^b \omega^q(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a<x<b} \frac{x^{\beta}}{\omega(x)} \leq C \left(\int_a^b x^{\beta q} dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

para todo $0 \leq a \leq b < \infty$, cuando $\eta = 0$.

Con estas condiciones, y considerando $\eta = \beta = \frac{\alpha}{2}$, enunciaremos el siguiente resultado de tipo débil $(1, q)$.

Teorema 4.3.3. *Sean $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha + 1$ y $1 \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$. Si $\omega \in {A^{1,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}}^*$, entonces el operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo débil $(1,q)$, con peso ω, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma} f\|_{L^{q,\infty}_\omega} \leq C\|f\|_{L^1_\omega}$$

para toda $f \in L^1_\omega$.

La demostración se hará en la sección 6. Observemos aquí que por las hipótesis tenemos siempre $\alpha q > -1$, la condición a priori para la clase ${A^{1,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}}^*$. Por otra parte, como $\gamma > 0$ se tiene $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right)^\gamma \simeq \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma + \left(\frac{x}{b}\right)^\gamma$, por lo que el cumplimiento de la condición (4.12) es equivalente a que se cumplan

$$\left(\int_a^b \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma \omega^q(x) x^{\eta q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a<x<b} \frac{x^\beta}{\omega(x)} \leq C \left(\int_a^b x^{(\eta+\beta)q} dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.14}$$

y

$$\left(\int_a^b \left(\frac{x}{b}\right)^\gamma \omega^q(x) x^{\eta q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a<x<b} \frac{x^\beta}{\omega(x)} \leq C \left(\int_a^b x^{(\eta+\beta)q} dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.15}$$

simultáneamente, para todo $0 \leq a < b < \infty$.

Considerando pesos potencia, tenemos el siguiente Corolario. Como dijimos antes, estos resultados serán ampliados y ajustados en la Sección 7.

Corolario 4.3.4. *Sean $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha + 1$ y $1 \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$. Entonces, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo débil $(1,q)$ si $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} < \delta \leq \frac{\alpha}{2}$, cuando $\alpha \neq 0$, o si $-\frac{1}{q} < \delta \leq 0$, cuando $\alpha = 0$.*

Demostración. Para un peso potencia x^δ, probaremos que las condiciones sobre δ enunciadas en el Corolario son suficientes para que x^δ pertenezca a ${A^{1,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}}^*$. Más aun, se puede ver fácilmente que son también necesarias. Lo haremos a continuación, luego probaremos que la condición es suficiente.

Sea $\omega(x) = x^\delta \in {A^{1,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}}^*$ Primero observemos que $\sup_{(0,b)} x^{\frac{\alpha}{2}-\delta}$ es finito si y sólo si $\delta \leq \frac{\alpha}{2}$. Luego, $\delta \leq \frac{\alpha}{2}$ es una condición necesaria para (4.12) y (4.13). De la misma manera, vemos que $\delta > -1$ es condición necesaria para (4.13), cuando $\alpha = 0$. Para ver que $\delta \geq -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q}$ es también condición necesaria cuando $\alpha \neq 0$, tomamos $b = 1$ y $0 < a < \frac{1}{2}$ en (4.14). Entonces

$$\int_a^1 \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma x^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q} dx \left(\sup_{a<x<1} x^{\frac{\alpha}{2}-\delta}\right)^q \leq C(1 - a^{\alpha q+1})$$

lo que, usando $\delta \leq \frac{\alpha}{2}$ y observando que $(a, 2a) \subset (a, 1)$, se obtiene

$$\int_a^{2a} \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma x^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q} dx \leq C.$$

Luego, $a^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1} \leq C$ para todo $0 < a < \frac{1}{2}$, y entonces tenemos que $\delta \geq -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q}$.

Veremos ahora que las condiciones sobre δ son suficientes. Supongamos que $\alpha \neq 0$ y $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} \leq \delta \leq \frac{\alpha}{2}$. Entonces, para todo $0 \leq a < b < \infty$ se tiene $\left(\sup_{a<x<b} x^{\frac{\alpha}{2}-\delta}\right)^q = b^{(\frac{\alpha}{2}-\delta)q}$. Por otra parte, como $\gamma > 0$ tenemos $\gamma + \delta + \frac{\alpha}{2})q + 1 > 0$ y por lo tanto

$$\int_a^b \left(\frac{x}{b}\right)^\gamma x^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q} dx = Cb^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma+(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1}\right).$$

Además, como las hipótesis me aseguran $\alpha q > -1$, tenemos que el lado derecho de (4.12) es $\int_a^b x^{\alpha q} dx = cb^{\alpha q+1} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha q+1}\right)$. Luego, la condición (4.15) con $\omega(x) = x^\delta$ se satisface si y sólo si

$$1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma+(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1} \leq C \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha q+1}\right) \tag{4.16}$$

para todo $0 \leq a < b < \infty$.

Si analizamos la función $\varphi(t) = \frac{1-t^{\gamma+(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1}}{1-t^{\alpha q+1}}$, vemos que $\varphi(0) = 1$ y, aplicando L'Hopital, que $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t) = C > 0$. Luego φ es continua en $[0, 1]$ y por lo tanto acotada. En consecuencia, (4.16) se cumplirá para todo $0 \leq a < b$.

Probaremos ahora que $\omega(x) = x^\delta$ satisface (4.14) cuando $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} \leq \delta \leq \frac{\alpha}{2}$ y $\alpha \neq 0$. Observar que, haciendo la sustitución $u = \frac{x}{b}$ y usando que $(\delta + \frac{\alpha}{2})q + 1 \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma x^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1} \frac{dx}{x} &\lesssim \int_{\frac{a}{b}}^1 u^{-\gamma} \frac{du}{u} \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma b^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1} \\ &\lesssim \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right) b^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\gamma > 0$. Luego, tenemos

$$\int_a^b \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma x^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1}\frac{dx}{x}\left(\sup_{a<x<b} x^{\frac{\alpha}{2}-\delta}\right)^q \lesssim b^{\alpha q+1}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right).$$

Si elegimos $\gamma = \alpha q + 1$, que es positivo por hipótesis, tendremos que

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma x^{(\delta+\frac{\alpha}{2})q+1}\frac{dx}{x}\left(\sup_{a<x<b} x^{\frac{\alpha}{2}-\delta}\right)^q &\lesssim b^{\alpha q+1} - a^{\alpha q+1}\\ &\simeq \int_a^b x^{\alpha q}dx\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

De una manera análoga, cuando $\alpha = 0$ y $-\frac{1}{q} < \delta \leq 0$ obtenemos que $\omega(x) = x^\delta$ satisface la condición (4.13).

□

Como ya hemos comentado, en la sección 7, obtendremos que los resultados con pesos potencia de los Corolarios 1 y 2 son ajustados, es decir, son necesarios y suficientes. Además, ampliaremos el rango de p y q, considerando $\frac{1}{p} - \sigma \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma$, y obtendremos también para todos ellos resultados ajustados de tipo débil dual (p, q) (continuidad de $L^{p,1}$ en L^q) y tipo débil restringido (p, q) (continuidad de $L^{p,1}$ en $L^{q,\infty}$).

4.4. Estimaciones del operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$.

En la siguiente Proposición estableceremos una estimación puntual del operador, por arriba y por abajo, que será fundamental para nuestros resultados. Los operadores involucrados serán los siguientes:

La **Maximal Fraccionaria de Hardy-Littlewood "Local"**, dada, en la Definición 1.4.3 de la sección 1.4, por

$$\mathrm{M}^\epsilon_{loc,\kappa} f(x) = \sup_{x\in I\in\mathcal{I}_\kappa} \frac{1}{|I|^{1-\epsilon}}\int_I |f(y)|dy, \tag{4.17}$$

con $0 \leq \epsilon < 1$, donde $\kappa > 1$ y $\mathcal{I}_\kappa$ es el conjunto de los intervalos "κ - locales de $\mathbb{R}^+$", es decir: $\mathcal{I}_\kappa = \{(a, b) \subset \mathbb{R}^+ : 0 < a < b \leq \kappa a\}$. Cuando $\epsilon = 0$, el operador es la Maximal de Hardy-Littlewood local $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$, ya considerada anteriormente.

El **operador de Hardy modificado con exponencial en el origen**, dado por

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\frac{\alpha}{2},\sigma} f(x) = e^{-cx}\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}+1-\sigma}} \int_0^x f(y) y^{\frac{\alpha}{2}} dy, \tag{4.18}$$

donde c es una constante independiente de cualquier parámetro, y su adjunto el **operador de Hardy modificado con exponencial en infinito**, dado por

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\frac{\alpha}{2},\sigma} f(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} \int_x^\infty f(y) e^{-cy}\frac{1}{y^{\frac{\alpha}{2}+1-\sigma}} dy. \tag{4.19}$$

Proposición 4.4.1. *Sean $\alpha > -1$ y $0 < \sigma < \alpha + 1$. Entonces, para toda f medible en $\mathbb{R}^+$ y todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos*

$$\left|\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma} f(x)\right| \lesssim \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\frac{\alpha}{2},\sigma}|f|(x) + \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\frac{\alpha}{2},\sigma}|f|(x) + \left|\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma} f(x)\right|, \tag{4.20}$$

donde a

$$\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma} f(x) \doteq \int_{\frac{x}{4}}^{4x} K^{\alpha,\sigma}(x,y) f(y) dy$$

*la llamamos **integral fraccionaria local de Laguerre** y está estimada por*

$$\left|\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma} f(x)\right| \leq C\, \frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}} \mathrm{M}_{loc,16}^{\epsilon} f(x), \tag{4.21}$$

para todo $0 \leq \epsilon < 1$ tal que $\epsilon < 2\sigma$ y $\kappa = 16$, con C dependiendo sólo de α, σ y ϵ.

Por abajo, para toda f medible con soporte en $(0, \frac{1}{4})$ y todo $x \in (0, \frac{1}{4})$, tenemos

$$\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}|f|(x) \gtrsim \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\frac{\alpha}{2},\sigma}|f|(x) + \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\frac{\alpha}{2},\sigma}|f|(x). \tag{4.22}$$

Para demostrar esta Proposición, usaremos el siguiente Lema de estimación puntual del núcleo.

Lema 4.4.1. *Sean $\alpha > -1$ y $\sigma \geq 0$. Para todo $0 < x, y < \infty$, el núcleo de $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ se divide en dos partes,*

$$K^{\alpha,\sigma}(x,y) = K_A(x,y) + K_B(x,y)$$

donde cada una se estima de la siguiente manera:

Para $K_A(x,y)$ por arriba se tiene

$$K_A(x,y) \lesssim \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}}\; e^{-c(x+y)}\Phi_{\alpha,\sigma}(x+y), \tag{4.23}$$

donde $\Phi_{\alpha,\sigma}(z)=1$ para $z\geq 1$ y

$$\Phi_{\alpha,\sigma}(z) = \begin{cases} 1, & 0<\sigma<\alpha+1; \\ \log(\frac{2}{z})\frac{1}{\log 2}, & \sigma=\alpha+1; \\ z^{\alpha+1-\sigma}, & \sigma>\alpha+1, \end{cases} \tag{4.24}$$

cuando $0<z\leq 1$, y por abajo

$$K_A(x,y) \gtrsim \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}}, \quad \textit{para todo } 0<x,y<\frac{1}{2}. \tag{4.25}$$

Para $K_B(x,y)$ se tiene

$$K_B(x,y) \simeq \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{4}}} \int_0^{\mathrm{mín}\{1,\sqrt{xy}\}} s^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-c\,\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{s}} e^{-c\,s(x+y)}\frac{ds}{s}. \tag{4.26}$$

Las constantes c dentro de las exponenciales son distintas en las acotaciones por arriba y abajo, y no dependen de ningún parámetro. En cambio, las constantes que acompañan multiplicando cada expresión, dependen de α y σ.

Demostración. Usaremos la expresión del núcleo $K^{\alpha,\sigma}(x,y)$ dada por (4.8), donde $W_\alpha(s,x,y)$ y $\psi_\sigma(s)$ está dado por (4.7) y (4.9), respectivamente. Para poder estimarlo, lo dividiremos en las regiones donde $W_\alpha(s,x,y)$ y $\psi_\sigma(s)$ sean más familiares.

Fijemos x e y en $\mathbb{R}^+$, y consideremos el conjunto

$$D(xy) = \left\{ s\in(0,1) : 0 \leq \frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2} \leq 1 \right\}.$$

Como se probó en la sección 1.1, usando las estimaciones de la función de Bessel del Lema 1.1.1 en el núcleo $W_\alpha(s,x,y)$, se obtienen las estimaciones (1.6) y (1.7), es decir, para todo $s\in D(xy)$ tenemos:

$$W_\alpha(s,x,y) \simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha+1} (xy)^{\alpha/2} e^{-\frac{1}{4}\left(s+\frac{1}{s}\right)(x+y)}$$

y para todo $s \in D^c(xy) = \Big\{ s \in (0,1) : \frac{1-s^2}{2s}(xy)^{1/2} \geq 1 \Big\}$,

$$W_\alpha(s,x,y) \simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{1/2} (xy)^{-1/4} e^{-\frac{s}{4}|\sqrt{x}+\sqrt{y}|^2} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}}.$$

Por otra parte, para estimar la función ψ_σ dada por (4.9), observando que $\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = 2s + O(s^3)$, podemos decir que

$$\psi_\sigma(s) \simeq s^{\sigma-1} \quad \text{para } s \in (0, \frac{1}{2}) \tag{4.27}$$

y

$$\psi_\sigma(s) \simeq \frac{1}{1-s} \log^{\sigma-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) \quad \text{para } s \in (\frac{1}{2}, 1). \tag{4.28}$$

A partir de lo observado recién, dividimos el núcleo $K_{\alpha,\sigma}(x,y)$ en cuatro:

$$K_{A,1}(x,y) = \int_{D(xy)\bigcap(0,\frac{1}{2})} W_\alpha(s,x,y)\psi_\sigma(s)ds,$$

$$K_{A,2}(x,y) = \int_{D(xy)\bigcap(\frac{1}{2},1)} W_\alpha(s,x,y)\psi_\sigma(s)ds,$$

$$K_{A,3}(x,y) = \int_{D(xy)^c\bigcap(\frac{1}{2},1)} W_\alpha(s,x,y)\psi_\sigma(s)ds$$

y

$$K_B(x,y) = \int_{D(xy)^c\bigcap(0,\frac{1}{2})} W_\alpha(s,x,y)\psi_\sigma(s)ds.$$

Consideraremos luego $K_A(x,y) = K_{A,1}(x,y) + K_{A,2}(x,y) + K_{A,3}(x,y)$.

Primero estimaremos el núcleo $K_{A,1}(x,y)$. Notemos que para $s \in D(xy) \cap (0, \frac{1}{2})$, por (1.6) y (4.27), tenemos

$$W_\alpha(s,x,y)\psi(s) \simeq (xy)^{\alpha/2} s^{\sigma-\alpha-1}\ e^{-c\frac{x+y}{s}} \frac{1}{s},$$

con $c = \frac{1}{4}$ para la estimación por arriba y $c = \frac{1}{2}$ para la estimación por abajo. Entonces

$$K_{A,1}(x,y) \;=\; \int_{D(xy)\bigcap(0,\frac{1}{2})} W_\alpha(s,x,y)\psi_\sigma(s)ds$$

$$(4.29) \qquad \simeq \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}} \int_{D(xy)\bigcap(0,\frac{1}{2})} \left(\frac{x+y}{2s}\right)^{\alpha+1-\sigma} e^{-c\frac{x+y}{2s}} \frac{ds}{s}.$$

Observar que

$$(4.30) \qquad \left(\frac{(xy)^{1/2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset D(xy) \cap (0, \frac{1}{2}) \subset \left(\frac{3}{8}(xy)^{1/2}, \frac{1}{2}\right).$$

Entonces, tras hacer el cambio de variable $u = \frac{x+y}{2s}$, por abajo tenemos que

$$\int_{D(xy)\bigcap(0,\frac{1}{2})} \left(\frac{x+y}{2s}\right)^{\alpha+1-\sigma} e^{-c\frac{x+y}{2s}} \frac{ds}{s} \geq \int_{x+y}^{\frac{x+y}{\sqrt{xy}}} u^{\alpha+1-\sigma} e^{-cu} \frac{du}{u},$$

Notar que si considero $0 < x, y < \frac{1}{2}$ entonces $(1, 2) \subset (x+y, \frac{x+y}{\sqrt{xy}})$ y la integral es mayor que una constante. Luego,

$$(4.31) \qquad K_{A,1}(x,y) \geq C \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}},$$

para todo $0 < x, y < \frac{1}{2}$, y como el núcleo y las partes en que se divide son positivas, obtenemos la acotación por abajo (4.25).

Veremos ahora que vale la estimación por arriba (4.23) para $K_{A,1}(x,y)$. Usando (4.29) y (4.30), haciendo el cambio de variable $u = \frac{x+y}{2s}$ y sacando una parte de la exponencial afuera de la integral, obtenemos

$$K_{A,1}(x,y) \lesssim \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}} e^{-c(x+y)} \int_{x+y}^{\frac{4}{3}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}} u^{\alpha+1-\sigma} e^{-cu} \frac{du}{u}.$$

Si $x+y \geq 1$, estiro la integral de la derecha de 1 a ∞, que será una constante finita para cualquier valor de α y σ. Si $0 \leq x+y \leq 1$, y como $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2$ siempre, tenemos

$$\int_{x+y}^{\frac{4}{3}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}} u^{\alpha+1-\sigma} e^{-\frac{u}{4}} \frac{du}{u} \leq \int_{x+y}^{2} u^{\alpha+1-\sigma} \frac{du}{u} + C.$$

Por eso, si $\alpha + 1 - \sigma > 0$ la integral se acota por una constante, si $\alpha + 1 - \sigma = 0$ se acota por $\log\left(\frac{2}{x+y}\right)$, y si $\alpha + 1 - \sigma < 0$, se acota por $(x+y)^{\alpha+1-\sigma}$. Luego hemos obtenido que

$$K_{A,1}(x,y) \lesssim \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}} \; e^{-c(x+y)} \Phi_{\alpha,\sigma}(x+y),$$

con $\Phi_{\alpha,\sigma}$ dada por (4.24).

Ahora probaremos la misma estimación para el núcleo $K_{A,2}(x,y)$. Observar que si $s \in D(xy) \cap (\frac{1}{2},1)$ entonces, por (1.6) y (4.28) tenemos que

$$\begin{aligned} W_\alpha(s,x,y)\psi(s) &\simeq \left(\frac{1-s^2}{2s}\right)^{\alpha+1} (xy)^{\alpha/2}\ e^{-\frac{1}{4}(s+\frac{1}{s})(x+y)} \frac{1}{1-s} \log^{\sigma-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) \\ &\simeq (xy)^{\alpha/2} e^{-c(x+y)} (1-s)^\alpha \log^{\sigma-1}\left(\frac{1}{1-s}\right), \end{aligned}$$

con $c = \frac{3}{8}$ para la estimación por arriba y $c = \frac{3}{4}$ para la estimación por abajo. Observar también que $D(xy) \cap (\frac{1}{2},1) \subset \{s : 0 < 1-s < \frac{1}{2}\}$. Luego, haciendo el cambio de variable $u = \log\left(\frac{1}{1-s}\right)$, que nos da $du = \frac{ds}{1-s}$ y $1-s = e^{-u}$, obtenemos

$$K_{A,2}(x,y) \le C\ (xy)^{\alpha/2} e^{-c(x+y)} \int_{\log 2}^{\infty} e^{-(\alpha+1)u} u^\sigma \frac{du}{u},$$

siendo la integral del lado derecho una constante finita, pues $\alpha+1>0$. Por otra parte, es fácil ver que $(x+y)^{\alpha+1-\sigma} e^{-c(x+y)} \lesssim \Phi_{\alpha,\sigma}(x+y)$, para todo $0 < x, y < \infty$. Luego, la estimación (4.23) también sucede para $K_{A,2}(x,y)$.

Para estimar $K_{A,3}(x,y)$, notar que

$$D^c(xy) \cap (\frac{1}{2},1) \subset \left\{ s : \frac{1}{2\sqrt{xy}} < 1-s < \frac{1}{2} \right\},$$

por eso, para tener $D^c(xy) \cap (\frac{1}{2},1) \neq \emptyset$, debemos pedir $xy > 1$, caso contrario el núcleo es idénticamente cero. Usando las estimaciones (1.7) y (4.28), tenemos que $K_{A,3}(x,y)$ está estimado por arriba por

$$\frac{1}{(xy)^{1/4}} e^{-c|\sqrt{x}+\sqrt{y}|^2} e^{-c|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2} \int_{\left\{s : \frac{1}{2\sqrt{xy}} < 1-s < \frac{1}{2}\right\}} \log^{\sigma-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) (1-s)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Si hacemos el cambio $u = \log\left(\frac{1}{1-s}\right)$, la integral de la derecha queda acotada por una constante finita. Tirando el término $e^{-c|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} K_{A,3}(x,y) &\lesssim \chi_{\{xy>1\}} \frac{1}{(xy)^{1/4}} e^{-c(x+y)} e^{-c\sqrt{xy}} \\ &\lesssim (xy)^{\alpha/2} e^{-c(x+y)} \\ &\lesssim \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}}\ e^{-c(x+y)} \Phi_{\alpha,\sigma}(x+y), \end{aligned}$$

procediendo en la última desigualdad igual que con $K_{A,2}(x,y)$.

Por último, para estimar el núcleo $K_B(x,y)$, observemos que

$$\left(0, \text{mín}\{\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\sqrt{xy}\}\right) \subset D^c(xy) \cap (0, \frac{1}{2}) \subset \left(0, \text{mín}\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{xy}}{2}\}\right).$$

Formalmente consideraremos la zona de integración $(0, \text{mín}\{1, x\})$. Por (1.7) y (4.27) tenemos

$$K^{B,0}(x,y) \simeq (xy)^{-\frac{1}{4}} \int_0^{\text{mín}\{1,x\}} s^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{4}|\sqrt{x}+\sqrt{y}|^2} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} \frac{ds}{s}.$$

Luego, como $|\sqrt{x}+\sqrt{y}|^2 \simeq x+y$, obtenemos la estimación (4.26).

$\square$

Demostración de la Proposición 4.4.1. Sean $\alpha > -1$ y $0 \geq \sigma < \alpha+1$. Para toda f medible en $\mathbb{R}^+$ y todo $x \in \mathbb{R}^+$, dividiremos la forma integral de $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ en tres partes:

$$\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma} f(x) = \left(\int_0^{\frac{x}{4}} + \int_{\frac{x}{4}}^{4x} + \int_{4x}^{\infty}\right) K^{\alpha,\sigma}(x,y) f(y) dy$$

A la integral del medio la llamaremos integral fraccionaria local y la denotaremos por $\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma}$. La estimación (4.21) correspondiente a ella la probaremos al final. Las otras dos integrales corresponden a las llamadas zonas globales: la primera en cero y la tercera en infinito.

Probaremos primero

$$\int_0^{\frac{x}{4}} K^{\alpha,\sigma}(x,y) f(y) dy \lesssim \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\frac{\alpha}{2},\sigma} f(x), \tag{4.32}$$

con $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\frac{\alpha}{2},\sigma}$ dado por (4.18). Para eso, alcanza con ver que

$$K^{\alpha,\sigma}(x,y) \lesssim e^{-cx} \frac{y^{\frac{\alpha}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1-\sigma}} \tag{4.33}$$

para todo $0 < y < \frac{x}{4}$. Si probamos esto, por la simetría del núcleo también obtenemos

$$K^{\alpha,\sigma}(x,y) \lesssim e^{-cy} \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{y^{\frac{\alpha}{2}+1-\sigma}}$$

para todo $y > 4x$ y por lo tanto

$$\int_{4x}^{\infty} K^{\alpha,\sigma}(x,y)f(y)dy \lesssim \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\frac{\alpha}{2},\sigma} f(x),$$

donde $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\frac{\alpha}{2},\sigma}$ dado por (4.19).

Considerando $0 < y < \frac{x}{4}$, usaremos las estimaciones del Lema 4.4.1 y probaremos (4.33) para cada una de las partes en que se divide el núcleo. Observar que $x + y \simeq x$ para todo $0 < y < \frac{x}{4}$ y como $\sigma < \alpha + 1$, por (4.23) tenemos

$$K_A(x,y) \lesssim \frac{y^{\frac{\alpha}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1-\sigma}} e^{-cx}.$$

Por otra parte, a partir de (4.26) y agregando el término $\frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}}$, tenemos que $K_B(x,y)$ está estimado por arriba por

$$\frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}} \int_0^{\sqrt{xy}} \left(\frac{\sqrt{xy}}{s}\right)^{-\frac{1}{2}-\alpha} \left(\frac{x+y}{s}\right)^{\alpha+1-\sigma} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} \frac{ds}{s}. \tag{4.34}$$

Observemos que, para $0 < y < \frac{x}{4}$, se tiene $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 > c(x+y)$ y entonces tenemos $e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} \leq e^{-c\frac{x+y}{s}} e^{-c\frac{\sqrt{xy}}{s}} e^{-c(x+y)}$, donde hemos usado también que $0 < s < 1$. (La constante c no es siempre la misma).

Luego, tenemos que la integral en la parte derecha de (4.34) está acotada por

$$e^{-c(x+y)} \int_0^{\sqrt{xy}} \left(\frac{\sqrt{xy}}{s}\right)^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{-c\frac{\sqrt{xy}}{s}} \left(\frac{x+y}{s}\right)^{\alpha+1-\sigma} e^{-c\frac{x+y}{s}} \frac{ds}{s}.$$

Al ser $\sigma < \alpha + 1$ podemos tirar el término $\left(\frac{x+y}{s}\right)^{\alpha+1-\sigma} e^{-c\frac{x+y}{s}}$. Luego, con el cambio de variable $t = \frac{\sqrt{xy}}{s}$ obtenemos

$$\begin{aligned} K_B(x,y) &\lesssim \frac{(xy)^{\frac{\alpha}{2}}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}} e^{-c(x+y)} \int_1^{\infty} t^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{-ct} \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \frac{y^{\frac{\alpha}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1-\sigma}} e^{-cx}. \end{aligned}$$

Probaremos ahora la estimación en la zona local (4.21). Observaremos aquí que $\frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}} \simeq \begin{cases} x^{\sigma-\epsilon}, & 0 < x \leq 1 \\ x^{-\sigma}, & x \geq 1. \end{cases}$

Tomemos $0 < x, y < \infty$ tales que $\frac{x}{4} < y < 4x$. En este caso, $x \simeq y$. Usando el Lema 4.4.1 y $0 \geq \sigma < \alpha + 1$, tenemos

$$\begin{aligned} K_A(x,y) &\lesssim \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}} e^{-c(x+y)} \\ &\simeq \frac{1}{x^{1-\sigma}} e^{-cx}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

y

$$K_B(x,y) \lesssim x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\text{mín}\{1,x\}} s^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-sx} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} \frac{ds}{s}. \tag{4.36}$$

Con estas estimaciones probaremos (4.21), para todo $0 \leq \epsilon < 1$ tal que $\epsilon < 2\sigma$. Consideremos una f medible en $\mathbb{R}^+$ y fijemos $x \in \mathbb{R}^+$. Integrando el núcleo $K_A(x,y)$ contra f en $(\frac{x}{4}, 4x)$, de (4.35) obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{x}{4}}^{4x} K_A(x,y) f(y) dy \right| &\lesssim \frac{1}{x^{1-\sigma}} e^{-cx} \int_{\frac{x}{4}}^{4x} |f(y)| dy \\ &\lesssim x^{\sigma-\epsilon} e^{-cx} \, \mathrm{M}_{loc,16}^{\epsilon} f(x) \\ &\lesssim \frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}} \mathrm{M}_{loc,16}^{\epsilon} f(x), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene para todo $\epsilon \leq 2\sigma$. Notar que la constante de estimación dependen de ϵ, α y σ.

Por otra parte, a partir de la estimación (4.36), la integral de $K_B(x,y)$ contra f en $(\frac{x}{4}, 4x)$ está estimada en su valor absoluto por

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\text{mín}\{1,x\}} s^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-sx} \int_{\frac{x}{4}}^{4x} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} |f(y)| dy \frac{ds}{s}. \tag{4.37}$$

Primero estimaremos la integral de adentro,

$$\int_{\frac{x}{4}}^{4x} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} f(y) dy. \tag{4.38}$$

Fijamos x y s y consideramos las coronas disjuntas

$$C_k = \{y \in \mathbb{R}^+ : 2^k \leq \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{2\sqrt{s}} < 2^{k+1}\},$$

para cada entero k. Si tomamos $k \le k_0$, donde k_0 es el menor entero que satisface

$$2^{k_0+3} \le \sqrt{\frac{x}{s}} < 2^{k_0+4}, \tag{4.39}$$

tenemos

$$(\frac{x}{4}, 4x) - \{x\} \subset \left(\frac{x}{4}, \frac{9}{16}x\right) \cup \bigcup_{k \le k_0} C_k \cup \left(\frac{25}{16}x, 4x\right).$$

y la integral (4.38) queda acotada por

$$\int_{\frac{x}{4}}^{\frac{9}{16}x} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} f(y)dy + \sum_{k \le k_0} e^{-2^{2k}} \int_{C_k} f(y)dy + \int_{\frac{25}{16}x}^{4x} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} f(y)dy. \tag{4.40}$$

Si $y \in \left(\frac{x}{4}, \frac{9}{16}x\right)$ o $y \in \left(\frac{25}{16}x, 4x\right)$ entonces $e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} \le e^{-c\frac{x}{s}}$, para alguna constante c. Luego, para la primera y la última integral de (4.40) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{x}{4}}^{\frac{9}{16}x} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} f(y)dy + \int_{\frac{25}{16}x}^{4x} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} f(y)dy \ &\lesssim \ e^{-c\frac{x}{s}} \int_{\frac{x}{4}}^{4x} f(y)dy \\
&\lesssim \ \mathrm{M}_{loc,16}^{\epsilon} f(x) x^{1-\epsilon} e^{-c\frac{x}{s}}.
\end{aligned}$$

Para acotar el término del medio de (4.40), consideramos, para los enteros $k \le k_0$, las bolas

$$\begin{aligned}
B_k \ &= \ \{y \in \mathbb{R}^+ : \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{2\sqrt{s}} < 2^{k+1}\} \\
&= \ \left((\sqrt{x} - 2^{k+2}\sqrt{s})^2, (\sqrt{x} + 2^{k+2}\sqrt{s})^2\right),
\end{aligned}$$

que contienen a las coronas C_k. Notar que, por (4.39), todo $k \le k_0$ satisface $2^{k+2}\sqrt{s} \le \frac{\sqrt{x}}{2}$ y por lo tanto $(\sqrt{x} + 2^{k+2}\sqrt{s})^2 \le \frac{9}{4}x \le 9(\sqrt{x} - 2^{k+2}\sqrt{s})^2$. Luego, cada B_k es un intervalo 16-local y además $|B_k| = 2^{k+3}\sqrt{xs}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k \le k_0} e^{-2^{2k}} \int_{C_k} f(y)dy \ &\lesssim \ \sum_{k \le k_0} e^{-2^{2k}} 2^{k(1-\epsilon)} (xs)^{\frac{1-\epsilon}{2}} \frac{1}{|B_k|^{1-\epsilon}} \int_{B_k} f(y)dy \\
&\lesssim \ \mathrm{M}_{loc,16}^{\epsilon} f(x) (xs)^{\frac{1-\epsilon}{2}} \ \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2^{2k}} 2^{k(1-\epsilon)}.
\end{aligned}$$

Observar que la serie del lado derecho es una constante finita si y sólo so $\epsilon < 1$. Luego, por (4.40), tenemos

$$\int_{\frac{x}{4}}^{4x} e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}} f(y)dy \lesssim \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa} f(x) \left(x^{1-\epsilon} e^{-c\frac{x}{s}} + (xs)^{\frac{1-\epsilon}{2}} \right)$$

y (4.37) nos da

$$\left| \int_{\frac{x}{4}}^{4x} K_B(x,y) f(y)dy \right| \lesssim \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,16} f(x) \left[\psi_1(x) + \psi_2(x) \right]$$

donde

$$\psi_1(x) = x^{\frac{1}{2}-\epsilon} \int_0^{\min\{x,1\}} s^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-c\frac{x}{s}} \frac{ds}{s}$$

y

$$\psi_2(x) = x^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^{\min\{x,1\}} s^{\sigma-\frac{\epsilon}{2}} e^{-sx} \frac{ds}{s}. \tag{4.41}$$

Para ψ_1 tenemos

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\leq x^{\sigma-\epsilon} e^{-cx} \int_0^x \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-c\frac{x}{s}} \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}} (1+x^{2\sigma-\epsilon}) e^{-cx} \int_1^{\infty} t^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-ct} \frac{dt}{t} \\ &\leq C \frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}}. \end{aligned}$$

Para ψ_2, vemos que si $0 < x < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &\leq x^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^x s^{\sigma-\frac{\epsilon}{2}} \frac{ds}{s} \\ &= Cx^{\sigma-\epsilon}, \quad \text{si } \epsilon < 2\sigma, \end{aligned}$$

y si $x \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= x^{-\sigma} \int_0^1 (sx)^{\sigma-\frac{\epsilon}{2}} e^{-sx} \frac{ds}{s} \\ &\leq x^{-\sigma} \int_0^{\infty} t^{\sigma-\frac{\epsilon}{2}} e^{-t} \frac{dt}{t} \\ &\leq C \frac{1}{x^{\sigma}}. \end{aligned}$$

Luego, $\psi_2(x) \lesssim \frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}}$ y obtenemos así

$$\left| \int_{\frac{x}{4}}^{4x} K_B(x,y) f(y) dy \right| \lesssim \frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}} \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,16} f(x).$$

Juntando esta estimación con la obtenida para el núcleo $K_A(x,y)$, obtenemos (4.21).

La estimación por abajo (4.22) sale fácilmente considerando (4.25) y obteniendo

$$K^{\alpha,\sigma}(x,y) \geq K_A(x,y) \gtrsim \frac{(xy)^{\alpha/2}}{(x+y)^{\alpha+1-\sigma}}$$

para todo $0 < x, y < \frac{1}{4}$.Luego, tomando $0 < y < \frac{x}{4}$ 0 $4x < y < \infty$ e integrando contra f, obtenemos la estimación deseada.

$\square$

4.5. Integral Fraccionaria Local de Laguerre.

En esta sección consideraremos la integral fraccionaria de Laguerre localizada, es decir, el operador

$$\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,\,loc} f(x) \doteq \int_{\frac{x}{4}}^{4x} K^{\alpha,\sigma}(x,y) f(y) dy. \tag{4.42}$$

Como hemos visto anteriormente, el núcleo $K^{\alpha,\sigma}(x,y)$ es simétrico y positivo, por lo que $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,\,loc}$ será un operador autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$. Para obtener los siguientes resultados de continuidad fuerte, usaremos, cuando $p > 1$, la estimación obtenida en la Proposición 4.4.1, es decir

$$\left|\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,\,loc} f(x)\right| \leq C\, \frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}} \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,16} f(x),$$

para todo $0 \leq \epsilon < 1$ tal que $\epsilon < 2\sigma$, donde $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,16}$ es la maximal fraccionaria local. Para ser más precisos, bajo las hipótesis requeridas, el término $\frac{x^{\sigma-\epsilon}}{1+x^{2\sigma-\epsilon}}$ se puede acotar por una constante, lo que nos deja la maximal fraccionaria estimando a $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,\,loc}$, que hereda sus propiedades de continuidad.

Observar que esta estimación no depende del parámetro α. Para $p = 1$, usaremos la autoadjunticidad de $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,\,loc}$ y lo obtenido para $q = \infty$.

Consideremos una clase de pesos locales tipo Muckenhoupt $A^{p,q}_{loc,\kappa}$, donde $\kappa > 1$ y $1 \le p, q \le \infty$, definida en la Sección 1.4 por la condición (1.25). Enunciaremos ahora la Proposición de continuidad en espacios de Lebesgue para $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$.

Proposición 4.5.1. *Sean $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha + 1$ y $1 \le p \le q \le \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$. Si $\omega \in A^{p,q}_{loc}$ entonces $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso ω.*

Para demostrarla usaremos la estimación (4.21) de la Proposición 4.4.1 y el Teorema 1.4.2 de continuidad fuerte para la Maximal Fraccionaria Local, donde $1 < p \le \infty$, enunciado y demostrado en los preliminares. Este Teorema establece, para $1 < p \le q \le \infty$, $0 \le \epsilon < 1$ y $\kappa > 1$, que, si $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \epsilon$ y $\omega \in A^{p,q}_{loc}$, entonces $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso ω. Observaremos que para $p = 1$, se tiene el tipo débil $(1,q)$ de $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$. Sin embargo, para nuestros propósitos no nos es útil ese resultado, pues para $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ podemos obtener algo más fuerte. En efecto, como $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ es autoadjunto, y además, al estar acotada por $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,\kappa}$, es de tipo fuerte (p,∞) para un peso en $A^{p,\infty}_{loc}$, se obtiene, por dualidad, que $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ es de tipo fuerte $(1,q)$ con peso $\omega \in A^{1,q}_{loc}$. Los detalles ser verán en la siguiente demostración.

Demostración de la Proposición 4.5.1. Sean $0 < \sigma < \alpha + 1$ y $1 < p, q \le \infty$ tal que $\frac{1}{p} - \sigma \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$. Tomo $\epsilon = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Observar que $\epsilon < 1$ siempre, excepto cuando $p = 1$ y $q = \infty$. Omitiremos ese caso hasta el final de la demostración. Por las condiciones de p y q, tenemos que $0 \le \epsilon \le \sigma$. Luego, por (4.21), $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc} \lesssim \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,16}$ y, por Teorema 1.4.2, $\omega \in A^{p,q}_{loc}$ implica $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc} : L^p_\omega \longrightarrow L^q_\omega$.

Consideremos ahora $p = 1$ y $1 \le q \le \frac{1}{1-\sigma}$. Si $\omega \in A^{1,q}_{loc}$ entonces $\omega^{-1} \in A^{q',\infty}_{loc}$, donde $1 < q' \le \infty$. Usando el resultado previo, tenemos $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc} : L^{q'}_{\omega^{-1}} \longrightarrow L^{\infty}_{\omega^{-1}}$. Como $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ es autoadjunto, y considerando que podemos escribir la norma L^p_ω como

$$\|f\|_{L^p_\omega} = \sup_{g \in L^{p'}_{\omega^{-1}} : \|g\| \le 1} \left| \int_0^\infty f(x) g(x) dx \right| \tag{4.43}$$

(pues $(L^p_\omega)' = L^{p'}_{\omega^{-1}}$ y podemos usar (1.13)), es fácil ver que

$$\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc} : L^1_\omega \longrightarrow L^q_\omega \iff \mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc} : L^{q'}_{\omega^{-1}} \longrightarrow L^{\infty}_{\omega^{-1}},$$

Obtenemos así el resultado deseando para $p = 1$.

Para el caso $p = 1$ y $q = \infty$, que sólo surge cuando $\sigma \geq 1$, usaremos esta estimación:

$$\left|\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,\,loc} f(x)\right| \leq C\ \frac{x^{\sigma-1}}{1+x^{2\sigma-1}} \int_{\frac{x}{4}}^{4x} |f(y)|dy, \tag{4.44}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Esta sale fácilmente para el núcleo $K_A(x,y) \lesssim \frac{1}{x^{1-\sigma}} e^{-cx}$. Para $K_B(x,y)$ tiramos el término $e^{-\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2}{4s}}$ en la expresión de núcleo (4.36)y obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{x}{4}}^{4x} K_B(x,y) f(y) dy\right| &\lesssim \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\mathrm{mín}\{1,x\}} s^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-sx} \frac{ds}{s} \int_{\frac{x}{4}}^{4x} |f(y)|dy \\
&\lesssim \frac{x^{\sigma-1}}{1+x^{2\sigma-1}} \int_{\frac{x}{4}}^{4x} |f(y)|dy,
\end{aligned}$$

donde hemos procedido igual que para $\psi_2(x)$, dada por (4.41), con $\epsilon = 0$. Luego, hemos obtenido (4.44).

Observar que $\omega \in A^{1,\infty}$ significa

$$\sup_{x\in I} \omega(x)\ \sup_{x\in I} \omega^{-1}(x) \leq C$$

para todo I intervalo local, donde con sup denotamos el supremos esencial. Consideremos $x \in \mathbb{R}^+$ un punto de Lebesgue de ω Como $\sigma \geq 1$, despreciamos el término $\frac{x^{\sigma-1}}{1+x^{2\sigma-1}}$ en (4.44) y obtenemos

$$\begin{aligned}
|\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,\,loc} f(x)|\omega(x) &\lesssim \int_{\frac{x}{4}}^{4x} |f(y)|dy \sup_{z\in(\frac{x}{4},4x)} \omega(z) \\
&\lesssim \|f\omega\|_1 \sup_{z\in(\frac{x}{4},4x)} \omega(z) \sup_{z\in(\frac{x}{4},4x)} \omega^{-1}(z) \\
&\lesssim \|f\|_{L^1_\omega}
\end{aligned}$$

para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^+$. Con esto terminamos la demostración.

□

Observación 4.5.1. Podemos extender los resultados obtenidos para p y q por encima de la diagonal, es decir, con $1 \leq q < p \leq \infty$, considerando pesos $\omega \in A^{p,p}_{loc} = A^p_{loc}$, la clase

A^p local, dada por la Definición 1.4.2. Usando la estimación (4.21) con $\epsilon = 0$ y aplicando Hölder con $\frac{p}{q} > 1$ y $p < \infty$, obtenemos

$$\|\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc} f\|_{L^q_\omega} \leq \|\mathrm{M}_{loc,16} f\|_{L^p_\omega} \left(\int_0^\infty \left(\frac{x^\sigma}{1+x^{2\sigma}} \right)^{\frac{pq}{p-q}} dx \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Si $\omega \in A^p_{loc}$, entonces $\|\mathrm{M}_{loc,16} f\|_{L^p_\omega} \leq C\|f\|_{L^p_\omega}$. Por otra parte, la integral del lado derecho es finita si y sólo si $\sigma\frac{pq}{p-q} > -1$ y $\sigma\frac{pq}{p-q} > 1$. La primera pasa siempre y la segunda sólo si $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma$. Fácilmente se puede ver que para $p = \infty$ se pide la misma condición, es decir, $\frac{1}{q} < \sigma$.

Luego, tenemos el siguiente resultado: **para** $1 \leq p, q \leq \infty$ **tal que** $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma$**, si** $\omega \in A^p_{loc}$**, entonces** $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc} : L^p_\omega \longrightarrow L^q_\omega$**.**

Haremos una última observación. Cuando consideramos pesos potencia, es decir, $\omega(x) = x^\delta$ con δ real, es fácil ver que pertencen a cualquier clase $A^{p,q}_{loc}$ para todo δ, ya que en esas clases consideramos sólo intervalos locales y se sabe que $x^\delta \simeq a^\delta$ para todo $x \in (a, b)$, donde $0 < a < b < \kappa a$, siendo $\kappa > 1$ una constante fija. Luego, usando el Teorema 1.4.2 y la Observación 4.5.1, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.5.1. *Para* $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha + 1$ *y* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} - \sigma \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma$, $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ *es de tipo fuerte* (p, q) *con peso* x^δ *para todo* δ *real.*

4.6. Operadores de Hardy modificados.

Al considerar la integral fraccionaria de Laguerre en las zonas globales, es decir, fuera de la zona local $\frac{x}{4} < y < 4x$, aparecerán los operadores de Hardy modificados con exponencial.

Definición 4.6.1. Dados $\beta > -1$, $\eta > -1$ y $\sigma \geq 0$, considero los Operadores globales u operadores de Hardy modificados con exponencial , $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$ (en cero) y $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty$ (en infinito), definidos para las funciones medibles de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0 f(x) \doteq \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_0^x f(y) y^\beta dy \tag{4.45}$$

y

$$(4.46) \qquad \widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma} f(x) \doteq x^{\eta} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^{\eta+1-\sigma}} f(y)dy.$$

Observaremos que en las estimaciones de la integral fraccionaria de Laguerre, estos operadores aparecen con una constante dentro de la exponencial, es decir, aparecen e^{-cx} y e^{-cy} en $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ y $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$, donde c es una constante independiente de cualquier parámetro. Para simplificar los cálculos, consideraremos en esta sección $c = 1$.

Notar que el operador en cero y en infinito son adjuntos entre sí, cuando $\beta = \eta$. A partir de los Teoremas 1.6.1 y 1.6.2 de la sección 1.6 del Capítulo 1, podemos obtener los siguientes resultados de tipo fuerte:

Teorema 4.6.1. *Sean $\beta > -1$, $\eta > -1$, $\sigma \geq 0$ y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces:*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} : L^p_\omega \longrightarrow L^q_\omega$$

si y sólo si

$$(4.47) \qquad \sup_{a>0} \left[\int_a^{\infty} \left(\omega(x) \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \right)^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^a \left(\omega^{-1}(x) x^{\beta} \right)^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

y

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma} : L^p_\omega \longrightarrow L^q_\omega$$

si y sólo si

$$(4.48) \qquad \sup_{a>0} \left[\int_0^a (\omega(x) x^{\eta})^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^{\infty} \left(\omega^{-1}(x) \frac{e^{-x}}{x^{\eta+1-\sigma}} \right)^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Para $p' = \infty$ o $q = \infty$ se toma, como es usual, la norma $L^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ donde corresponda.

Demostración. Los teoremas 1.6.1 y 1.6.2 que implican los resultados de arriba valen para $1 \leq p \leq q < \infty$. Para extenderlo a $q = \infty$ y $1 < p \leq \infty$ observamos lo siguiente.

Dado que para el mismo parámetro los operadores de Hardy en cero y en infinito son adjuntos uno del otro, se tiene, para todo $1 \leq p,\ q \leq \infty$ y tomando $\beta = \eta$, que

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} : L^p_\omega \to L^q_\omega \ \text{ si y sólo si } \ \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} : L^{q'}_{\omega^{-1}} \to L^{p'}_{\omega^{-1}}$$

Además, por definición de las clases de pesos, ω satisface la condición (4.47) para el par (p,q) si y sólo si ω^{-1} satisface la condición (4.48) para el par (q',p'). Luego, el tipo fuerte $(1,q)$, con $1 \leq q < \infty$ y peso ω^{-1}, del Teorema 4.6.1 para $\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma}$ implica el tipo fuerte (p,∞) para $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$, con $1 < p \leq \infty$ y peso ω. Análogamente, se obtiene el tipo fuerte (p,∞), con $1 < p \leq \infty$ y peso ω, para $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$.

Para el caso $p = 1$ y $q = \infty$, se puede ver fácilmente que la condición correspondiente es suficiente y necesaria para el tipo fuerte $(1,\infty)$ con peso ω. Lo haremos a continuación. Observar que este caso sólo aparece cuando $\sigma \geq 1$.

Para probar que la condición es suficiente, considero x un punto de Lebesgue del peso ω. Entonces

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)\omega(x)| &\leq \left\|\frac{e^{-y}\omega(y)}{y^{\beta+1-\sigma}}\right\|_{L^\infty(x,\infty)} \int_0^x |f(y)| y^\beta dy \\ &\leq \|f\|_{L^1_\omega} \left\|\frac{e^{-y}\omega(y)}{y^{\beta+1-\sigma}}\right\|_{L^\infty(x,\infty)} \|\omega^{-1}(y) y^\beta\|_{L^\infty(0,x)}, \end{aligned}$$

para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^+$. Luego, si la condición (4.47) se satisface para $p = 1$ y $q = \infty$, entonces tendremos $\|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f\|_{L^\infty_\omega} \lesssim \|f\|_{L^1_\omega}$, o sea, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo fuerte $(1,\infty)$.

Demostraremos ahora que la condición es necesaria. Fijemos $a > 0$. Si $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo fuerte $(1,\infty)$ con peso ω, entonces tenemos

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \geq a} \omega(x) \frac{e^{-x}}{x^\beta + 1 - \sigma} \left| \int_0^a f(y) y^\beta dy \right| \leq C \int_0^a |f(y)\omega(y)| dy,$$

para toda $f \in L^1_\omega$ con soporte en $(0,a)$. Si llamamos $A_a = \operatorname{ess\,sup}_{x \geq a} \omega(x) \frac{e^{-x}}{x^\beta + 1 - \sigma}$ y $g = f\omega$, entonces

$$\left| \int_0^a g(x) x^\beta \omega^{-1}(x) dx \right| \leq C\ A_a \|g\|_{L^1(0,a)},$$

para toda $g \in L^1(0,a)$. Es decir, la integral de la derecha representa un funcional lineal y continuo en $L^1(0,a)$. Luego, la función $h(x) = x^\beta \omega^{-1} x \in L^\infty(0,a)$, y entonces tenemos

$$\|h\|_{L^\infty}(0,a) = \sup_{g:\|g\|_{L^1(0,a)}\le 1} \left| \int_0^a g(x)h(x)dx \right| \le CA_a$$

para todo $a > 0$. Esto es justamente la condición (4.47).

Por dualidad, este resultado nos implica el análogo para $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$.

$\square$

Enunciaremos ahora unos resultados de tipo débil con pesos generales para los operadores de Hardy modificados con exponencial.

Del artículo [**MROSSG97**] usamos un Teorema que, adaptado a este operador, nos da el siguiente resultado.

Teorema 4.6.2. *Sean $1 \le q < \infty$, $1 \le p \le q$ y ω un peso en $\mathbb{R}^+$. Entonces*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} : L^p_\omega \longrightarrow L^{q,\infty}_\omega$$

si y sólo si

$$\sup_{a>0} \|x^{-(\beta+1-\sigma)} e^{-x}\|_{L^{q,\infty}_\omega(a,\infty)} \, \|x^\beta\|_{L^{p'}_{\omega^{-1}}(0,a)} < \infty. \tag{4.49}$$

La condición (4.49) no nos resulta muy útil, pues no es tan simple deducirla a partir de la clase $A^{1,q\,*}_{\eta,\beta}$, que es lo que nos interesa hacer. Sin embargo, a partir de los Teoremas de tipo débil 1.6.3 y 1.6.4 de la Sección 1.6, obtenemos el siguiente resultado, con una condición más conveniente que será suficiente para el tipo débil $(1,q)$.

Teorema 4.6.3. *Sean $\beta > -1$, $\sigma \ge 0$ y $1 \le q < \infty$. Si un peso ω satisface*

$$\sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^\gamma \frac{\omega^q(x) e^{-\frac{x}{2}q}}{x^{(\beta+1-\sigma)q}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,r)} \frac{x^\beta}{\omega(x)} < \infty \tag{4.50}$$

para algún $\gamma > 0$, cuando $\beta + 1 - \sigma > 0$, o

$$\text{(4.51)} \qquad \sup_{r>0} \frac{1}{r^{\beta+1-\sigma}} \left(\int_r^\infty \omega^q(x) e^{-\frac{x}{2}q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,r)} \frac{x^\beta}{\omega(x)} < \infty$$

cuando $\beta+1-\sigma \leq 0$*, entonces* $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo débil* $(1,q)$*, con peso* $\omega^q(x)$*.*

Demostración. Consideremos el operador de Hardy modificado sin exponencial

$$\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma} f(x) \doteq \frac{1}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_0^x f(y) y^\beta dy,$$

que satisface $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x) = e^{-x}\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma}$. Por los Teoremas 1.6.3 y 1.6.4 tenemos el siguiente resultado: $\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma}$ es continuo de $L^1(\omega)$ en $L^{q,\infty}(\omega^q(x)e^{-\frac{x}{2}q})$ si y sólo si ω satisface (4.50), cuando $\beta+1-\sigma>0$, o (4.51), cuando $\beta+1-\sigma \leq 0$. Usaremos este resultado con $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ para probar la tesis del teorema, que es la siguiente:

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \int_{\{x\in(0,\infty):|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)|>\lambda\}} \omega^q(x) dx \lesssim \|f\|_{L^1_\omega}^q$$

para toda $f \in L^1_\omega$.

Observemos que para todo entero $k \geq 0$ se tiene $e^{-1}e^{-k} \leq e^{-x} \leq e^{-k}$ si $x \in [k,k+1]$. Luego, para cualquier $\lambda>0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\{x\in(0,\infty):|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)|>\lambda\}} \omega^q(x) dx &= \sum_{k=0}^\infty \int_{\{x\in(k,k+1):e^{-x}|\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma} f(x)|>\lambda\}} \omega^q(x) dx \\ &\lesssim \sum_{k=0}^\infty e^{\frac{k}{2}q} \int_{\{x\in(0,\infty):|\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma} f(x)|>\frac{\lambda}{e^{-k}}\}} \omega^q(x) e^{-\frac{x}{2}q} dx. \end{aligned}$$

Por el resultado enunciado más arriba para el operador $\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma}$, tenemos

$$\int_{\{x\in(0,\infty):|\mathrm{H}_0^{\beta,\sigma} f(x)|>\frac{\lambda}{e^{-k}}\}} \omega^q(x) e^{-\frac{x}{2}q} dx \lesssim \|f\|_{L^1_\omega}^q \left(\frac{e^{-k}}{\lambda}\right)^q.$$

Luego,

$$\int_{\{x\in(0,\infty):|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)|>\lambda\}} \omega^q(x) dx \lesssim \|f\|_{L^1_\omega}^q \frac{1}{\lambda^q} \sum_{k=0}^\infty e^{-\frac{k}{2}q},$$

y como la suma del lado derecho es una constante finita, obtenemos la desigualdad deseada para todo $\lambda>0$. □

Para el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$, podemos usar directamente los teoremas 1.6.6 y 1.6.5 de la sección 1.6, que establecen el tipo débil para el operador de Hardy modificado en infinito Q_η con dos pesos distintos. Acá, la exponencial dentro de la integral en $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ pasa del otro lado como un peso. Luego, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.6.4. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. Entonces, para $-1 < \beta \leq 0$,*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma} : L^p_\omega \longrightarrow L^{q,\infty}_\omega$$

si y sólo si

$$\sup_{a>0} a^\beta \left[\int_0^a \omega^q(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^\infty \left(\frac{\omega^{-1}(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}}\right)^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{4.52}$$

y para $\beta > 0$,

$$\mathrm{H}_{\infty}^{\eta,\sigma} : L^p_\omega \longrightarrow L^{q,\infty}_\omega$$

si y sólo si

$$\sup_{a>0} \left[\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^\gamma \left(\omega(x)x^\beta\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^\infty \left(\frac{\omega^{-1}(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}}\right)^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{4.53}$$

para algún $\gamma > 0$.

4.7. Demostración de los Teoremas.

Acá demostraremos los Teoremas 4.3.1 y 4.3.3, de continuidad fuerte y débil, respectivamente, con pesos generales, para el operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$, asociado al sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$. Para ello, usaremos la estimación por arriba (4.20) del operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$, dada por la Proposición 4.4.1 y probaremos que un peso en las clases de las hipótesis satisface la condiciones suficientes para la continuidad de los operadores involucrados. Por comodidad, y para poder usar esta demostración en los otros sistemas de Laguerre, consideraremos las clases $A^{p,q}_{\eta,\beta}$ y ${A^{1,q}_{\eta,\beta}}^*$; luego, tomando $\eta = \beta = \frac{\alpha}{2}$, obtendremos los resultados de los teoremas. Usaremos el resultado de continuidad fuerte para la integral fraccionaria local $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ (que no depende de η ni β), dado en la sección 6, y los teoremas de continuidad fuerte y débil para los operadores de Hardy $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ y $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$, dados en la sección 7.

Demostración del Teorema 4.3.1. Tomemos $\omega \in A_{\eta,\beta}^{p,q}$, es decir, que satisface (4.10). Es fácil ver que $\omega \in A_{loc}^{p,q}$, dado por (1.25). Más aún, para cualquier p y q y cualquier intervalo local I, es decir, de la forma (a,b) con $0 < a < b < \kappa a$, para alguna constante $\kappa > 1$, la condición (4.10) y la condición (1.25) son equivalentes. Luego, por la Proposición 4.5.1, la integral fraccionaria local $\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma}$ será de tipo fuerte (p,q) con peso ω, para $1 \le p \le q \le \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$.

Ahora probaremos que si $\omega \in A_{\eta,\beta}^{p,q}$ entonces $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} + \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ está acotado de L_ω^p en L_ω^q, suponiendo $\sigma < \eta+\beta+1$ y las hipótesis sobre p , q y σ dadas en el enunciado del teorema, es decir: $1 < p \le q < \infty$ y $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$, $p = 1$ y $\frac{1}{q} > 1 - \sigma$, o $q = \infty$ y $\frac{1}{p} < \sigma$.

Observar que estas hipótesis implican $\eta + \beta + \frac{1}{q} + \frac{1}{p'} > 0$, y por lo tanto la medida $d\nu(x) \doteq x^{\frac{\beta+\eta}{1-\epsilon}} dx$ es integrable en cero, lo que es necesario para considerar la clase $A_{\eta,\beta}^{p,q}$.

Obervar también que cuando $\beta = \eta = \frac{\alpha}{2}$ la hipótesis del Teorema $\sigma < \alpha + 1$ implicará $\sigma < \eta + \beta + 1$. Lo mismo pasará cuando consideremos los otros sistemas, como veremos en las últimas dos secciones, considerando distintos valores de η y β.

Haremos las cuentas sólo para el operador de Hardy en cero $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ pues, como observaremos al final, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ y $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ son adjuntos entre sí y por lo tanto la continuidad del primero nos implicará la del segundo.

Consideremos primero $1 < p \le q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$, y llamemos $\epsilon = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Probaremos la condición (4.47) de continuidad fuerte para $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$. Si $r > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \left(\frac{\omega(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}}\right)^q dx &\simeq \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \omega^q(x)x^{\eta q}dx \,\frac{e^{-2^k rq}}{(2^k r)^{q(\beta+\eta+1-\sigma)}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_0^{2^{k+1}r} \omega^q(x)x^{\eta q}dx \,\frac{e^{-2^k rq}(2^k r)^{q(\sigma-\epsilon)}}{(2^k r)^{q(\beta+\eta+1-\epsilon)}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^\infty \int_0^{2^{k+1}r} v^q d\nu \,\frac{1}{(2^k r)^{q(\beta+\eta+1-\epsilon)}}, \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

donde $\upsilon(x) \doteq \omega(x)x^{\eta-\frac{\eta+\beta}{q(1-\epsilon)}}$ y $d\nu(x) \doteq x^{\frac{\beta+\eta}{1-\epsilon}}dx$, y además hemos usado que $e^{-tq}t^{q(\sigma-\epsilon)} \le C$ para todo $t > 0$, ya que la hipótesis $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$ implica $\epsilon \le \sigma$. Como ya hemos comentado después de la Definición 4.3.1, el cambio de notación por υ y $d\nu$ está justificado por la siguiente observación. Es fácil ver que $\omega \in A^{p,q}_{\eta,\beta}$ si y sólo si $\upsilon \in A^{p,q}(d\nu)$, la clásica clase $A^{p,q}$ en $\mathbb{R}^+$ con medida $d\nu$, y a su vez, $\upsilon \in A^{p,q}(d\nu)$ si y sólo si $\upsilon^q \in A^s(d\nu)$, donde $s = 1 + \frac{q}{p'} = (1-\epsilon)q$. Además, por la teoría clásica de los pesos de Muckenhoupt, y como $s > 1$, pues $p > 1$, se tiene que si $\upsilon^q \in A^s(d\nu)$ entonces $\upsilon^q \in A^{\tilde{s}}(d\nu)$, para algún $1 < \tilde{s} < s$. Luego, por ésto y por la desigualdad de Hölder, para $\omega \in A^{p,q}_{\eta,\beta}$ se satisface

$$\int_I \upsilon^q d\nu \left(\int_I \upsilon^{-\frac{q}{\tilde{s}-1}} d\nu \right)^{\tilde{s}-1} \simeq \nu(I)^{\tilde{s}}, \tag{4.55}$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}^+$, donde $d\nu(x) = x^{\frac{\eta+\beta}{1-\epsilon}}dx$ y $1 < \tilde{s} < q(1-\epsilon)$. Luego, usando (4.55) con $I = (0, 2^{k+1}r)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2^{k+1}r} \upsilon^q d\nu &\lesssim \nu\left((0, 2^{k+1}r)\right)^{\tilde{s}} \left(\int_0^{2^{k+1}r} \upsilon^{-\frac{q}{\tilde{s}-1}} d\nu \right)^{1-\tilde{s}} \\
&\lesssim (2^k r)^{(\eta+\beta+1-\epsilon)\frac{\tilde{s}}{1-\epsilon}} \left(\int_0^{r} \upsilon^{-\frac{q}{\tilde{s}-1}} d\nu \right)^{1-\tilde{s}},
\end{aligned}$$

para todo $k \ge 0$. Usando (4.55) otra vez con $I = (0, r)$, nos da

$$\begin{aligned}
\int_0^{2^{k+1}r} \upsilon^q d\nu &\lesssim (2^k r)^{(\eta+\beta+1-\epsilon)\frac{\tilde{s}}{1-\epsilon}} \nu\left((0,r)\right)^{-\tilde{s}} \int_0^r \upsilon^q d\nu \\
&\simeq \int_0^r \upsilon^q d\nu \; 2^{k(\eta+\beta+1-\epsilon)\frac{\tilde{s}}{1-\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Luego, introduciendo esto en (4.54), tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \left(\frac{\omega(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \right)^q dx &\lesssim \int_0^r \upsilon^q(x) d\nu \, \frac{1}{r^{q(\eta+\beta+1-\epsilon)}} \sum_{k=0}^\infty 2^{k(\eta+\beta+1-\epsilon)(\frac{\tilde{s}}{1-\epsilon}-q)} \\
&\lesssim \int_0^r \omega^q(x) x^{\eta q} dx \frac{1}{r^{q(\eta+\beta+1-\epsilon)}},
\end{aligned}$$

donde la suma del lado derecho es finita pues $\tilde{s} < q(1-\epsilon)$ y, por hipótesis, $\epsilon < \beta + \eta + 1$. Luego, usando la desigualdad (4.10) con $I = (0, r)$, tenemos

$$\left(\int_r^\infty \left(\frac{\omega(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r \omega^{-p'}(x) x^{\beta p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \le C,$$

y por lo tanto la desigualdad (4.47) se satisface para todo $r > 0$ y para un peso $\omega \in A^{p,q}_{\eta,\beta}$, con $1 < p \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$.

Tomemos ahora $p = 1$ y $1 \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} > 1 - \sigma$.

La hipótesis $\omega \in A^{1,q}_{\eta,\beta}$ implica

$$\int_I \omega^q(x) x^{\eta q} dx \, \left(\sup_{x \in I} \frac{x^\beta}{\omega(x)} \right)^q \simeq \int_I x^{(\eta+\beta)q} dx, \tag{4.56}$$

para todo $I \subset \mathbb{R}^+$, donde $(\eta + \beta)q > -1$ y $\sup = \operatorname{ess\,sup}$. Tomemos ahora $r > 0$. Luego, procediendo como hicimos en el caso $p > 1$, y usando (4.56) con $I = (0, 2^{k+1}r)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \left(\frac{\omega(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \right)^q dx &\lesssim \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \omega^q(x) x^{\eta q} dx \, \frac{e^{-2^k r q}}{(2^k r)^{(\eta+\beta+1-\sigma)q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^\infty \int_0^{2^{k+1}r} x^{(\eta+\beta)q} dx \left(\sup_{x \in (0,2^{k+1}r)} \frac{x^\beta}{\omega(x)} \right)^{-q} \frac{e^{-2^k r q}}{(2^k r)^{(\eta+\beta+1-\sigma)q}} \\
&\lesssim \left(\sup_{x \in (0,r)} \frac{x^\beta}{\omega(x)} \right)^{-q} \sum_{k=0}^\infty (2^k r)^{(\sigma-1)q} e^{-2^k r q} 2^k r,
\end{aligned}$$

donde la última suma está acotada para todo $r > 0$ por la integral $\int_0^\infty t^{(\sigma-1)q} e^{-tq} dt$, que es finita si y sólo si $\frac{1}{q} > 1 - \sigma$, como en este caso.

Por último, veremos que si $\omega \in A^{p,\infty}_{\eta,\beta}$ y $p \geq \frac{1}{\sigma}$, entonces ω satisface la condición para la continuidad de $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$.

Sea $r > 0$. Para todo $x \in (r, \infty)$ que sea un punto de Lebesgue de $\omega(y)y^\eta$, elijo un $k \geq 0$ tal que $x \in (2^k r, 2^{k+1} r)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\omega(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} &\lesssim \omega(x) x^\eta \, \frac{e^{-2^k r}}{(2^k r)^{\eta+\beta+1-\sigma}} \\
&\lesssim \sup_{y \in (0,2^{k+1}r)} \omega(y) y^\eta \, \frac{e^{-2^k r}}{(2^k r)^{\eta+\beta+1-\sigma}}.
\end{aligned}$$

Ahora, usando la condición (4.10) con $q = \infty$ y $I = (0, 2^{k+1}r)$, y procediendo análogamente a como vinimos haciendo, obtenemos

$$\frac{\omega(x)e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \lesssim \left(\|\omega^{-1}(y) y^\beta\|_{L^{p'}(0,r)} \right)^{-1} (2^k r)^{\sigma - \frac{1}{p}} e^{-2^k r}.$$

Como $t^{\sigma-\frac{1}{p}}e^{-t} \leq C$ para todo $t > 0$ si y sólo si $\frac{1}{p} \leq \sigma$, obtenemos, luego de tomar el supremo esencial en (r, ∞), la desigualdad buscada.

Acabamos de ver que si $\omega \in A^{p,q}_{\eta,\beta}$ entonces $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$ es acotado de L^p_ω en L^q_ω. Para el caso $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty$, observamos que si $\omega \in A^{p,q}_{\eta,\beta}$ entonces $\omega^{-1} \in A^{q',p'}_{\beta,\eta}$ y esto implica que $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_0$ es acotado de $L^{q'}_{\omega^{-1}}$ en $L^{p'}_{\omega^{-1}}$. Luego, por ser $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty$ el adjunto de $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_0$, se deduce que $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty$ es de tipo fuerte (p, q) con peso ω, para $1 \leq p \leq q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$, o tipo fuerte (p, ∞), para $p > 1$ tal que $\frac{1}{p} < \sigma$, siendo ω un peso en $A^{p,q}_{\eta,\beta}$.

□

Antes de demostrar el Teorema 4.3.3, enunciaremos el siguiente Lema que nos será útil en la demostración.

Lema 4.7.1. *Si* $\omega \in A^{1,q^*}_{\eta,\beta}$ *entonces*

$$\inf_{x\in(\frac{b}{2},b)} \omega(x)x^{-\beta} \lesssim \inf_{x\in(a,2a)} \omega(x)x^{-\beta} \tag{4.57}$$

y

$$\inf_{x\in(a,2a)} \omega(x)x^{\eta+1} \lesssim \inf_{x\in(\frac{b}{2},b)} \omega(x)x^{\eta+1}, \tag{4.58}$$

para todo $0 < a < b$ *tal que* $b \geq 2a$. *Nuevamente, hemos considerado* $\inf \doteq \operatorname{ess\,inf}$.

Demostración. Consideraremos $\eta \neq 0$. Para $\eta = 0$ sale igual y más fácil. Para $b > 0$ y $0 < a < \frac{b}{2}$, usando Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in(\frac{b}{2},b)} \omega(x)x^{-\beta} &\lesssim \frac{1}{b^{\beta+1}} \int_{\frac{b}{2}}^{b} \omega(x)dx \\
&\lesssim \frac{b^{\frac{1}{q'}}}{b^{\beta+1}} \left(\int_{\frac{b}{2}}^{b} \omega^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \frac{1}{b^{\eta+\beta+\frac{1}{q}}} \left(\int_a^b \left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma} \omega^q(x)x^{\eta q}dx \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

La condición (4.15) implica

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in(\frac{b}{2},b)} \omega(x)x^{-\beta} &\lesssim \frac{1}{b^{\eta+\beta+\frac{1}{q}}}\left(\int_0^b x^{(\eta+\beta)q}dx\right)^{\frac{1}{q}} \inf_{x\in(a,b)} \omega(x)x^{-\beta} \\
&\lesssim \inf_{x\in(a,2a)} \omega(x)x^{-\beta}.
\end{aligned}$$

Hemos obtenido (4.57). La demostración de (4.58) es análoga a ésta. □

Demostración del Teorema 4.3.3. Si $\omega \in A^{1,q}_{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}{}^*$ entonces, considerando intervalos locales, se puede ver fácilmente que $\omega \in A^{1,q}_{loc}$ y por lo tanto la integral local $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha,loc}$ es de tipo fuerte $(1,q)$, como establece la Proposición 4.5.1.

Veremos ahora que si $\omega \in A^{1,q}_{\eta,\beta}{}^*$, para $1 \le q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} \ge 1-\sigma$, y β y η tales que $\sigma < \eta+\beta+1$ y además $\eta\beta \ge 0$, entonces $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0 + \widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty$ está acotado de L^1_ω en $L^{q\infty}_\omega$

Luego, tomando $\eta=\beta=\frac{\alpha}{2}$, que satisface esas hipótesis, y usando la estimación de la Proposición 4.4.1 obtenemos el resultado deseado.

Consideremos primero $\beta+1-\sigma>0$. Probaremos que ω satisface la condición (4.50) para el tipo débil del operador $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$. Tomando $I_k \doteq (2^k r, 2^{k+1}r)$ y usando la condición (4.14) para $\eta \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^\gamma \frac{\omega^q(x)e^{-\frac{x}{2}q}}{x^{(\beta+1-\sigma)q}}dx &\lesssim \sum_{k=0}^\infty 2^{-k\gamma}\int_{I_k}\left(\frac{2^k r}{x}\right)^\gamma \omega^q(x)x^{\eta q}dx\ frace^{-\frac{2^k}{2}rq}(2^k r)^{(\eta+\beta+1-\sigma)q} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^\infty 2^{-k\gamma}\left(\sup_{x\in I_k}\frac{x^\beta}{\omega(x)}\right)^{-q}(2^k r)^{(\frac{1}{q}+\sigma-1)q}e^{-\frac{2^k}{2}rq} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^\infty 2^{-k\gamma}\left(\inf_{x\in I_k}\omega(x)x^{-\beta}\right)^q
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado la hipótesis $\frac{1}{q} \ge 1-\sigma$. Notar que, como $\gamma>0$, para obtener (4.50), bastará con probar

$$\inf_{x\in I_k}\omega(x)x^{-\beta} \lesssim \inf_{x\in(0,r)}\omega(x)x^{-\beta},$$

para todo entero $k \ge 0$. Para ver esto, fijemos k y observemos que para todo $x \in (0,2^{k+1}r)$ existe un número positivo $a \le 2^k r$ tal que $x \in (a,2a)$. Si además x es un punto de

Lebesgue de $\omega(y)y^{-\beta}$, usando (4.57) con $b = 2^{k+1}r$, de manera que $I_k = (\frac{b}{2}, b)$ y $2a \leq b$, obtenemos

$$\omega(x)x^{-\beta} \geq \inf_{y\in(a,2a)} \omega(y)y^{-\beta} \geq C \inf_{y\in I_k} \omega(y)y^{-\beta}$$

con C independiente de a, k y r. Luego, tomamos el ínfimo esencial en $(0, 2^{k+1}r)$ y obtenemos

$$\inf_{x\in I_k} \omega(x)x^{-\beta} \lesssim \inf_{x\in(0,2^{k+1}r)} \omega(x)x^{-\beta} \lesssim \inf_{x\in(0,r)} \omega(x)x^{-\beta}. \tag{4.59}$$

Si $\eta = 0$, entonces el término $\left(\frac{r}{x}\right)^{\gamma}$ y procedo análogamente. Luego, ω satisface (4.50), cuando $\beta + 1 - \sigma > 0$.

Tomemos ahora $\beta + 1 - \sigma \leq 0$. probaremos que ω satisface (4.51) de tipo débil para $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$. Usando que $\omega \in A^{1,q}_{loc}$ y que $I_k = (2^k r, 2^{k+1}r)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^{(\beta+1-\sigma)q}} \int_r^\infty \omega^q(x) e^{-\frac{x}{2}q} dx &\leq \frac{1}{r^{(\beta+1-\sigma)q}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_k} \omega^q(x)dx\ e^{-\frac{2^k}{2}rq} \\
&\leq \frac{1}{r^{(\beta+1-\sigma)q}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sup_{x\in I_k} \omega^{-1}(x)\right)^{-q} 2^k r e^{-\frac{2^k}{2}rq} \\
&\leq \frac{1}{r^{(\beta+1-\sigma)q}} \left(\inf_{x\in(0,r)} \omega(x)x^{-\beta}\right)^q \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^{\beta q+1} e^{-\frac{2^k}{2}rq}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado (4.59). Luego,

$$\frac{1}{r^{(\beta+1-\sigma)q}} \int_r^\infty \omega^q(x) e^{-\frac{x}{2}q} dx \left(\sup_{x\in(0,r)} \frac{x^\beta}{\omega(x)}\right)^q$$

está estimada por arriba por

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\beta+1-\sigma)q} (2^k r)^{(\frac{1}{q}-1+\sigma)q} e^{-\frac{2^k}{2}rq}. \tag{4.60}$$

Si $\beta + 1 - \sigma < 0$, entonces, usando que $\frac{1}{q} - 1 + \sigma \geq 0$ y despreciando el término $(2^k r)^{(\frac{1}{q}-1+\sigma)q} e^{-\frac{2^k}{2}rq}$, la suma (4.60) queda acotada por una constante. Si $\beta + 1 - \sigma = 0$, observar que las hipótesis $\sigma < \eta + \beta + 1$ y $\eta\beta \geq 0$ implican $\beta > 0$ y por lo tanto $\sigma > 1$.

Luego tenemos $\frac{1}{q} > 0 > 1-\sigma$ y (4.60) queda acotada, para todo $r>0$, por la integral $\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}q} t^{(\frac{1}{q}+1-\sigma)q} \frac{dt}{t}$, que es finita. Por lo tanto, ω satisface (4.51), para $\beta+1-\sigma \leq 0$.

Para probar que $\omega \in A^{1,q^*}_{\eta,\beta}$ satisface las condiciones para la continuidad de $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty$, es decir, (4.52) y (4.53), se procede análogamente a como hicimos recién con $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$. Con esto concluímos la demostración.

$\square$

4.8. Resultados con pesos potencia para los operadores de Hardy

Cuando consideramos un peso potencia $\omega(x) = x^\delta$, con $\delta \in \mathbb{R}^+$, usando los Teoremas 4.6.1, 4.6.2 y 4.6.4 podemos obtener condiciones necesarias y suficientes sobre δ para los tipo fuerte y débil (p,q) de los operadores $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$ y $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty$. Sin embargo, estarán limitados sólo a valores de p y q tales que $1 \leq p \leq q < \infty$. Procediendo de otra manera, podría decirse más artesanal, podemos considerar todos los posibles p y q y además obtener resultados ajustados de tipo débil dual (es decir, continuidad de $L^{p,1}$ en L^q) y tipo débil restringido (continuidad de $L^{p,1}$ en $L^{q,\infty}$). En las demostraciones de los siguientes teoremas se usarán la desigualdad de Hölder, estimaciones de la norma L^r y $L^{r,\infty}$ de funciones de la forma x^η y $x^\eta e^{-x}$, donde $1 \leq r \leq \infty$ y $\eta \in \mathbb{R}$ (ver Lemas 1.3.3, 1.3.4 y 1.3.5 de la sección 1.3), cuando $\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$. Usaremos el Teorema 4.6.1, sólo para obtener el tipo fuerte (p,q) de los operadores en la recta $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, con $1 < p, q < \infty$. Además, para probar que las condiciones son también necesarias, encontraremos funciones precisas que nos servirán de contraejemplos (ver Lemas 4.8.1 y 4.8.2).

Teorema 4.8.1 . *Sean $\beta > -1$, $\sigma \geq 0$ y $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$ el operador de Hardy modificado en el origen dado por (4.45). Entonces, tenemos los siguientes resultados ajustados de acotación con pesos potencia.*

1. ***Tipo fuerte:*** *Para $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$ es de tipo fuerte (p,q) con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$.*

Para $p = 1$ y $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo fuerte $(1, q)$ con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$ y $\delta \leq \beta$, excepto cuando $\frac{1}{q} = 1 - \sigma$ y $\delta = \beta$.

Para $p = 1$ y $q = \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo fuerte $(1, \infty)$ con peso x^δ si y sólo si $\sigma \geq 1$ y $\delta \leq \beta$.

2. ***Tipo débil:*** *Para $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo débil (p, q) con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$.*

   Para $p = 1$ y $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo débil $(1, q)$ con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$, y $\delta \leq \beta$, excepto cuando $\frac{1}{q} = 1 - \sigma$, y $\delta = \beta$ y $\sigma = \beta + 1$ (en cuyo caso tendremos $\delta = -\frac{1}{q}$).

3. ***Tipo débil dual:*** *Para $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo débil dual (p, q) con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta \leq \beta + 1 - \frac{1}{p}$, excepto cuando $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$.*

   Para $1 < p < \infty$ y $q = \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo débil dual (p, ∞) si y sólo si $\frac{1}{p} \leq \sigma$ y $\delta \leq \beta + 1 - \frac{1}{p}$.

4. ***Tipo débil restringido:*** *Para $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo débil restringido (p, q) con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta \leq \beta + 1 - \frac{1}{p}$, excepto $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$ y $\sigma = \beta + 1$ (en cuyo caso tendremos $\delta = -\frac{1}{q}$).*

Observación 4.8.1. En nuestro caso relacionado a expansiones de Laguerre, consideraremos $\beta = \alpha/2$, donde $\alpha > -1$. Observar que la condición para tener tipo débil restringido (p, q) cuando $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta = \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$, es decir $\sigma \neq \frac{\alpha}{2} + 1$, sucede siempre si consideramos $0 < \sigma < \alpha + 1$, como es el caso.

Teorema 4.8.2. *Sean $\eta > -1$, $\sigma \geq 0$ y $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ el operador de Hardy modificado en el origen dado por (4.46). Entonces, tenemos los siguientes resultados ajustados de acotación con pesos potencia.*

1. ***Tipo fuerte:*** *Para $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ es de tipo fuerte (p, q) con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta > -\eta - \frac{1}{q}$.*

   Para $1 < p \leq \infty$ y $q = \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ es de tipo fuerte (p, ∞) con peso x^δ si y sólo si $\frac{1}{p} \leq \sigma$ y $\delta \geq -\eta$, excepto cuando $\frac{1}{p} = \sigma$ y $\delta = -\eta$.

Para $p = 1$ *y* $q = \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(1, \infty)$ *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\sigma \geq 1$ *y* $\delta \geq -\eta$.

2. ***Tipo débil:*** *Para* $1 < p \leq \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ *es de tipo débil* (p, q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ *y* $\delta \geq -\eta - \frac{1}{q}$, *excepto cuando* $\eta = 0$ *y* $\delta = -\frac{1}{q}$, *o* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ *y* $\delta = -\eta - \frac{1}{q}$.

   Para $p = 1$ *y* $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ *es de tipo débil* $(1, q)$ *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$ *y* $\delta \geq -\eta - \frac{1}{q}$, *excepto cuando* $\eta = 0$ *y* $\delta = -\frac{1}{q}$.

3. ***Tipo débil dual:*** *Para* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ *es de tipo débil dual* (p, q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ *y* $\delta > -\eta - \frac{1}{q}$.

   Para $1 < p < \infty$ *y* $q = \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ *es de tipo débil dual* (p, ∞) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\frac{1}{p} \leq \sigma$ *y* $\delta \geq -\eta$, *excepto cuando* $\frac{1}{p} = \sigma$, $\delta = -\eta$ *y* $\eta = \sigma$.

4. ***Tipo débil restringido:*** *Para* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ *es de tipo débil restringido* (p, q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ *y* $\delta \geq -\eta - \frac{1}{q}$, *excepto cuando* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, $\delta = -\frac{1}{q} - \eta$, *y* $\eta = 0$ *o* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, $\delta = -\frac{1}{q} - \eta$ *y* $\eta = \sigma$.

Observación 4.8.2. Observaremos aquí que las condiciones del Teorema 4.8.1 para el tipo fuerte $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$ para $p > 1$ y $\delta \leq \beta$ para $p = 1$, en realidad implican que $|\widetilde{\mathrm{H}}_{0}^{\beta,\sigma} f(x)| < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^{+}$ y para todo $f \in L_{\delta}^{p}$, como se verá en la demostración del Teorema. También se prueba que, para $\delta \leq \beta + 1 - \frac{1}{p}$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{0}^{\beta,\sigma} f$ es finito *c.t.p.* para toda $f \in L_{\delta}^{p,1}$. Más aún, esas condiciones son también necesarias, como resulta del Lema 4.8.1, parte 1 y 4.

Por otra parte, para obener además la continuidad del operador en espacios de Lebesgue, debemos agregar la condición $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$ para los resultados tipo débil y débil restringido (p, q), y $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$ para el tipo débil dual.

En el caso del operador $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$, se verá en la demostración del Teorema 4.8.2 que $|\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma} f(x)| < \infty$ para *c.t.p.* de $\mathbb{R}^{+}$ y para todo $f \in L_{\delta}^{p}$ y $f \in L_{\delta}^{p,1}$, tomando p y δ cualquier valor posile, y las condiciones sobre δ, p y q del Teorema serán para establecer la continuidad de operador.

Antes de demostrar los Teoremas, estableceremos los siguientes Lemas que nos servirán para establecer que las condiciones suficientes para la continuidad de los operadores son también necesarias. Esto se probará por el absurdo, encontrando una función de contraejemplo.

Lema 4.8.1. *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, $\beta > -1$, $\sigma \geq 0$ y δ real. Considero la función*

$$g(x) = \chi_{(0,c)} x^{-\delta - \frac{1}{p}} \log^{-\theta}\left(\frac{1}{x}\right),$$

para $\theta > 0$ y algún $0 < c < 1$ suficientemente chico. Luego, se tiene que:

1. *Si $\theta > \frac{1}{p}$, con $1 < p \leq \infty$, entonces $g \in L^p_\delta$. Si además $\theta < 1$ y $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$, entonces $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g = \infty$ en todo punto de $(0, c)$.*
2. *Si $1 \leq p < \infty$ y $\theta > 1$ entonces $g \in L^{p,1}_\delta$. Si además $\theta < 1 + \frac{1}{q}$, con $1 \leq q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$, entonces $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g \notin L^q_\delta$.*
3. *Si $\sigma = \beta + 1$, $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$, tomando $1 < \theta < 1 + \frac{1}{q}$ tenemos $g \in L^{p,1}_\delta$ pero $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g \notin L^{q,\infty}_\delta$.*
4. *Si $\theta > 1$ y $\delta > \beta + 1 - \frac{1}{p}$, entonces $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) = \infty$ para todo $x \in (0, c)$.*
5. *Para $\theta > 1$ y todo δ real, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) \gtrsim h(x)$ para todo $x \in (0, c)$, donde $h(x) = \chi_{(0,c)}(x) x^{\sigma - \frac{1}{p} - \delta} \log^{-\theta}\left(\frac{2}{x}\right)$. Si $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$, entonces $h \notin L^{q,\infty}_\delta$.*

Demostración. Para probar 1, tomemos $\frac{1}{p} < \theta < 1$. Luego

$$\begin{aligned} \|g\|^p_{L^p_\delta} &= \int_0^c \log^{-\theta p}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_{\log \frac{1}{c}}^\infty t^{-\theta p} dt \end{aligned}$$

y la última integral, donde se hizo el cambio $t = \log\left(\frac{1}{x}\right)$, es finita pues $\theta > \frac{1}{p}$. Por otra parte, para $x \in (0, c)$, y tomando $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$, tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) &\simeq \frac{1}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_0^x \log^{-\theta}\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y} \\ &\simeq \frac{1}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_{\log(1/x)}^\infty t^{-\theta} dt \\ &= \infty \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\theta < 1$.

Antes de seguir con los otros casos, probaremos que, si $\theta > 1$, entonces $g \in L^{p,1}_\delta$, para $1 \leq p < \infty$ y todo δ real. Ésto nos servirá en cada caso siguiente, y también en el próximo Lema.

Como $\theta > 1$, ya hemos probado que $g \in L^1_\delta$. Veremos ahora que para $p > 1$, $g \in L^{p,1}_\delta$. Esto pasa si y sólo si

$$\int_0^\infty \lambda_g(t)^{1/p} dt < \infty$$

donde λ_g es la función de distribución, dada por

$$\lambda_g(t) = \int_{\{x \in (0,c): g(x) > t\}} x^{\delta p} dx.$$

Consideremos primero $\frac{1}{p} + \delta > 0$. Si tomamos c suficientemente chico tendremos que g decrece en $(0,c)$. Por ejemplo, elegimos c tal que $\log \frac{1}{c} > \frac{\theta}{\delta + \frac{1}{p}}$ y obtenemos que

$$g'(x) = x^{-\frac{1}{p} - \delta - 1} \log^{-\theta}\left(\frac{1}{x}\right) \; (\theta \log^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{p} - \delta)$$

es negativa para todo $0 < x < c$. Luego

$$\lambda_g(t) = \int_{(0,c) \cap (0, g^{-1}(t))} x^{\delta p} dx.$$

Para $0 < t < g(c)$, y usando que $\delta p + 1 > 0$, tenemos

$$\lambda_g(t) = \int_0^c x^{\delta p} dx = C c^{\delta p + 1}$$

y para $t > g(c)$

$$\lambda_g(t) = \int_0^{g^{-1}(t)} x^{\delta p} dx = C (g^{-1}(t))^{\delta p + 1}.$$

Luego, por un lado

$$\int_0^{g(c)} \lambda_g(t)^{1/p} dt = C$$

y por el otro

$$\begin{aligned} \int_{g(c)}^\infty \lambda_g(t)^{1/p} dt &= C \int_{g(c)}^\infty \left(g^{-1}(t)\right)^{\delta + \frac{1}{p}} dt \\ &= C \int_0^c u^{\delta + \frac{1}{p}} \; |g'(u)| du, \end{aligned}$$

donde en la última desiguladad hemos hecho el cambio de variable $t = g(u)$, observando que g decrece y $g(0) = \infty$. Como además
$|g'(u)| \leq Cu^{-\frac{1}{p}-\delta-1} \log^{-\theta}\left(\frac{1}{u}\right)$, la integral de la derecha está acotada por

$$\int_0^c \log^{-\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}$$

que es finita para $\theta > 1$. Luego $g \in L_\delta^{p,1}$.

Consideremos ahora $\delta + \frac{1}{p} = 0$. En ese caso, como g es creciente en $(0, c)$, $\lambda_g(t) = 0$ para todo $t \geq g(c)$, y para $0 < t < g(c)$ tenemos

$$\lambda_g(t) = \int_{g^{-1}(t)}^c \frac{1}{x}dx = \log\left(\frac{c}{g^{-1}(t)}\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda_g(t)^{1/p}dt &= \int_0^{g(c)} \log^{\frac{1}{p}}\left(\frac{c}{g^{-1}(t)}\right)dt \\ &= \int_0^c \log^{\frac{1}{p}}\left(\frac{c}{u}\right)g'(u)du,\end{aligned}$$

donde hicimos la sustitución $g(u) = t$, usando que g crece y $g(0) = 0$. Luego, como $g'(u) = \theta \log^{-\theta-1}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u}$, y tomando $s = \log\frac{1}{u}$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda_g(t)^{1/p}dt &\leq \theta\int_0^c \log^{\frac{1}{p}-\theta-1}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u} \\ &\leq \theta\int_{\log\frac{1}{c}}^\infty s^{\frac{1}{p}-\theta-1}ds\end{aligned}$$

donde la última integral es finita pues $\theta > \frac{1}{p}$.

Por último, consideremos $\delta + \frac{1}{p} < 0$. En este caso la función también es creciente, y procediendo como antes, obtenemos

$$\lambda_g(t) \leq \int_{g^{-1}(t)}^\infty x^{\delta p+1}dx = C\left(g^{-1}(t)\right)^{\delta p+1}\chi_{(0,g(c))}(t)$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda_g(t)^{\frac{1}{p}}dt &\lesssim \int_0^{g(c)} \left(g^{-1}(t)\right)^{p+\frac{1}{p}} \\ &\simeq \int_0^c u^{\delta+\frac{1}{p}}g'(u)du\end{aligned}$$

$$\lesssim \int_0^c \log^{-\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}$$

donde la última integral es finita pues $\theta > 1$. Luego, $g \in L^{p,}_{\delta}$.

Continuaremos ahora con los casos 2 y 3. Veamos a que se parece $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g$. Tomo $1 \leq p < \infty$. Como $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$, se tiene que, para todo $x \in (0, c)$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) &\simeq x^{-(\beta+1-\sigma)} \int_0^x \log^{-\theta}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y} \\ &\simeq x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \int_{\log\frac{1}{x}}^{\infty} u^{-\theta} du \\ &\simeq x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \log^{1-\theta}\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

donde la última integral es finita pues $\theta > 1$.

Para el caso 2, tomamos $1 \leq q < \infty$ y obtenemos que

$$\|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g\|_{L^q_\delta}^q \gtrsim \int_0^c x^{(-\frac{1}{p}+\sigma)q} \log^{(1-\theta)q}\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

siendo la integral de la derecha infinita pues $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $(1-\theta)q > -1$. Por lo tanto, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g \notin L^q_\delta$.

Para el caso 3, si ahora además suponemos que $\sigma = \beta + 1$ entonces $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) \simeq \log^{1-\theta}\left(\frac{1}{x}\right)$, para todo $0 < x < c$. Probaremos que $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g$ no pertenece a $L^{q,\infty}_\delta$. Observar que bajo nuestras hipótesis tenemos $\delta = -\frac{1}{q}$. Sabiendo que $\log^{1-\theta}\left(\frac{1}{x}\right)$ crece, pues $\theta > 1$, hacemos el cambio $\lambda = \log^{1-\theta}\left(\frac{1}{t}\right)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g\|_{L^{q,\infty}_\delta}^q &\simeq \sup_{0<t<c} \log^{(1-\eta)q}\left(\frac{1}{t}\right)\int_t^c \frac{dx}{x} \\ &= \sup_{0<t<c} \log^{q(1-\theta)}\left(\frac{1}{t}\right)\log\frac{c}{t} \\ &\gtrsim \sup_{0<t<c^2} \log^{q(1-\theta)+1}\left(\frac{1}{t}\right), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $c^2 < c$ y que $\frac{1}{2}\log\frac{1}{t} \leq \log\frac{c}{t} \leq \log\frac{1}{t}$ para todo $0 < t < c^2$. Luego, como $q(1-\theta)+1 > 0$, este último supremo es infinito y por lo tanto $h \notin L^{q,\infty}_\delta$.

Probaremos ahora la parte 4. Llamemos $\xi = \delta + \frac{1}{p} - \beta - 1$. Entonces, para $y \in (0, c)$,

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) \simeq \frac{1}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_0^x y^{-\xi} \log^{-\theta}\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y}.$$

Como $\delta > \beta + 1 - \frac{1}{p}$ implica $\xi > 0$, para todo y suficientemente chico tenemos que $\log \frac{1}{y} \lesssim y^{-\frac{\xi}{\theta}}$, y por lo tanto $\log^{-\theta} \frac{1}{y} \gtrsim y^{\xi}$. Luego,

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) \gtrsim \frac{1}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_0^x \frac{1}{y} \frac{dy}{y} = \infty$$

para todo $0 < x < c$, con c suficientemente chico.

Por último, probaremos la parte 5. Tomando $\theta > 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) &\gtrsim \frac{1}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_{\frac{x}{2}}^x y^{\beta+1-\frac{1}{p}-\delta} \log^{-\theta} \frac{1}{y} \frac{dy}{y} \\ &\simeq x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \int_{\log \frac{1}{x}}^{\log \frac{2}{x}} u^{-\theta} du \\ &\simeq x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \left[\log^{1-\theta} \frac{1}{x} - \log^{1-\theta} \frac{2}{x}\right] \end{aligned}$$

Para estimar la diferencia del lado derecho, usaremos el teorema del valor medio con la función $\varphi(t) = \log^{1-\theta} \frac{1}{t}$ en el intervalo $(\frac{x}{2}, x)$. Como $\varphi'(t) = (\eta - 1)\frac{1}{t} \log^{-\theta} \frac{1}{t}$, y $\log^{-\theta} \frac{1}{t}$ es creciente, tenemos que $\varphi(x) - \varphi(x/2) = \frac{x}{2}\varphi'(\tilde{x}) \geq C_\eta \log^{-\theta} \frac{2}{x}$, donde $\frac{x}{2} < \tilde{x} < x$. Luego, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} g(x) \gtrsim h(x)$, donde $h(x) = \chi_{(0,c)}(x) x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \log^{-\theta}\left(\frac{2}{x}\right)$. Tomemos ahora $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$ y un δ cualquiera. Si $q = \infty$ entonces $\sigma - \frac{1}{p} < 0$ y $h(x)x^\delta = x^{\sigma-\frac{1}{p}} \log^{-\theta} \frac{1}{x} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. Luego, $h \notin L^\infty_\delta$. Para $q < \infty$, probaremos ahora que la norma $L^{q,\infty}_\delta$ de h es infinita.

Si $\sigma - \frac{1}{p} - \delta \geq 0$, la función h es creciente en $(0, c)$. Luego

$$\begin{aligned} \|h\|^q_{L^{q,\infty}_\delta} &= \sup_{t>0} h(t)^q \int_{\{x\in(0,c): h(x)>h(t)\}} x^{\delta q} dx \\ &\geq \sup_{0<t<\frac{c}{2}} t^{(\sigma-\frac{1}{p})q-\delta q} \log^{-\theta q} \frac{2}{t} \int_t^{2t} x^{\delta q} dx \\ &\simeq \sup_{0<t<\frac{c}{2}} t^{(\sigma-\frac{1}{p})q+1} \log^{-\theta q} \frac{2}{t}. \end{aligned}$$

Como $(\sigma - \frac{1}{p})q + 1 < 0$, la función del lado derecho tiende a infinito a medida que t se acerca a cero. Luego, $\|h\|_{L^{q,\infty}_\delta} = \infty$. Consideremos ahora $\sigma - \frac{1}{p} - \delta < 0$. Si c es lo suficientemente chico, h es decreciente en $(0, c)$ y entonces

$$\|h\|^q_{L^{q,\infty}_\delta} = \sup_{t>0} h(t)^q \int_0^{\text{mín}\{t,c\}} x^{\delta q} dx.$$

Supondremos $\delta q > -1$ pues, caso contrario, $\|h\|_{L^{q,\infty}_\delta} = \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \|h\|^q_{L^{q,\infty}_\delta} &\gtrsim \sup_{0<t<c} h(t)^q t^{\delta q+1} \\ &\simeq \sup_{0<t<c} t^{(\sigma-\frac{1}{p})q+1} \log^{-\theta q} \frac{2}{t}, \end{aligned}$$

donde el supremo del lado derecho, como dijimos antes, es infinito si $\sigma - \frac{1}{p} - \delta < 0$.

Por lo tanto, hemos concluído que el operador $\widetilde{\mathrm{H}}^{\beta,\sigma}_0$ no es de tipo débil restringido (p, q) cuando $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, o lo que correspoda cuando $p = 1$, $p = \infty$ o $q = \infty$.

□

Lema 4.8.2. *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, $\sigma \geq 0$, $\eta > -1$ y δ real. Entonces:*

1. *La función $f = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$ pertenece a L^p_δ, $1 \leq p \leq \infty$, y a $L^{p,1}_\delta$, $1 < p < \infty$, pero $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty f \notin L^q_\delta$, $1 \leq q < \infty$, si $\delta = -\eta - \frac{1}{q}$.*
2. *Para $f = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, tenemos que $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty f \notin L^{q,\infty}_\delta$ si $1 \leq q \leq \infty$ y $\delta < -\eta - \frac{1}{q}$, o si $1 \leq q < \infty$, $\eta = 0$ y $\delta \leq -\frac{1}{q}$.*
3. *Para $\delta = -\frac{1}{q} - \eta$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, la función*

$$g(x) = \chi_{(0,c)} \log^{-\theta}\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\delta-\frac{1}{p}}, \tag{4.61}$$

con $\frac{1}{p} < \theta < 1$ y para algún $0 < c < 1$ suficientemente chico, pertenece a L^p_δ, $1 < p \leq \infty$, pero $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty g \notin L^{q,\infty}_\delta$, para $1 \leq q \leq \infty$.

4. *Para $\eta = \sigma$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta = -\eta - \frac{1}{q}$ (o equivalentemente $\delta = -\frac{1}{p}$), la función g dada por (4.61) con $\frac{1}{p} < \theta < 1$ pertenece a $L^{p,1}_\delta$, $1 < p < \infty$, pero $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty g \notin L^{q,\infty}_\delta$, $1 \leq q \leq \infty$.*

5. *Para todo δ real, $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} g(x) \gtrsim h(x)$ para todo $x \in (0,\tilde{c})$, donde g está dada por (4.61), con $\theta > 1$, y $h(x) = \chi_{(0,\tilde{c})}(x) x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \log^{-\theta}\frac{1}{x}$. Además, si $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$, entonces $h \notin L_\delta^{q,\infty}$.*

Demostración. Caso 1. Sea $f = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$. Claramente, $f \in L_\delta^p$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L_\delta^{p,1}$ para $1 < p < \infty$, para todo δ real. Por otra parte, para todo $0 < x < \frac{1}{2}$), se tiene

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} f(x) &= x^\eta \int_{(x,\infty)\cap(0,\frac{1}{2})} \frac{e^{-y}}{y^{\eta+1-\sigma}} dy \\
&\simeq x^\eta,
\end{aligned}$$

y además, si $1 \leq q < \infty$ y $\delta = -\eta - \frac{1}{q}$, entonces

$$\|x^\eta\|_{L_\delta^q}^q \geq \int_0^{\frac{1}{2}} x^{(\eta+\delta)q} dx = \infty.$$

Luego, $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} f \notin L_\delta^q$.

Caso 2. Consideramos nuevamente la función $f = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, con la cual ya hemos visto que $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} f(x) \simeq x^\eta$ para todo $x \in (0,\frac{1}{2})$. Para $q = \infty$, resulta claro que $x^{\eta+\delta} \notin L^\infty(0,\frac{1}{2})$ si $\delta < -\eta$. Luego, $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} f \notin L_\delta^\infty$ bajo esa condición. Consideremos ahora $q < \infty$. Para $\eta \neq 0$, tenemos que

$$\|x^\eta\|_{L_\delta^q(0,\frac{1}{2})}^q = \sup_{t>0} t^{\eta q} \int_{\{x\in(0,\frac{1}{2}): x^\eta > t^\eta\}} x^{\delta q} dx.$$

Si $\eta > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x^\eta\|_{L_\delta^q(0,\frac{1}{2})}^q &= \sup_{0<t<\frac{1}{2}} t^{\eta q} \int_t^{\frac{1}{2}} x^{\delta q} dx \\
&\gtrsim \sup_{0<t<\frac{1}{4}} t^{\eta q} \int_t^{2t} x^{\delta q} dx \\
&\simeq \sup_{0<t<\frac{1}{4}} t^{\eta q+\delta q+1},
\end{aligned}$$

donde el último supremo es infinito si supongo $\delta < -\eta - \frac{1}{q}$. Si, en cambio, $\eta < 0$, entonces

$$\|x^\eta\|_{L_\delta^q(0,\frac{1}{2})}^q \gtrsim \sup_{0<t<\frac{1}{2}} t^{\eta q} \int_0^t x^{\delta q} dx$$

donde, si $\delta q \leq -1$, la integral del lado derecho es infinita, y, caso contrario, el supremo que resulta también lo es, al tomar $\delta < -\eta - \frac{1}{q}$.

Considero ahora $\eta = 0$. Como $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_{\infty} f(x) = C$ para todo $x \in (0, \frac{1}{2})$, eso nos da que, para $0 < \lambda < C$,

$$\int_{\{x\in(0,\frac{1}{2}):|\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_{\infty} f(x)|>\lambda\}} x^{\delta q} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\delta q} dx$$

donde la integral del lado derecho es infinita si tomo $\delta \leq -\frac{1}{q}$. Luego, $\|\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_{\infty} f\|_{L^{q,\infty}_{\delta}} = \infty$.

Por lo tanto, hemos obtenido que si $\delta < -\eta - \frac{1}{q}$ para $1 \leq q \leq \infty$, (recordar que $L^{q,\infty} = L^{\infty}$), o si $\eta = 0$ y $\delta \leq -\frac{1}{q}$ para $1 \leq q < \infty$, entonces $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_{\infty} f \notin L^{q,\infty}_{\delta}$.

Caso 3. Considero la función (4.61), para algún $0 < c < 1$. Como hemos visto en el Lema 4.8.1, parte 1, $g \in L^p_\delta$ si $\frac{1}{p} < \theta < 1$. Veremos ahora que $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_{\infty} g(x) \gtrsim \tau(x)$, para todo $x \in (0, c^2)$, con $\tau(x) \doteq x^\eta \log^{1-\theta}(\frac{1}{x})$, y luego que $\tau \notin L^{q,\infty}_{\delta}$, para $1 \leq q \leq \infty$.

Como $\eta + 1 - \sigma + \delta + \frac{1}{p} = 1$, para todo $x \in (0, c^2)$ tenemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_{\infty} g(x)| &\simeq x^\eta \int_x^c \log^{-\theta}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y} \\ &\simeq x^\eta \int_{\log\frac{1}{c}}^{\log\frac{1}{x}} u^{-\theta} du \\ &\gtrsim x^\eta \int_{\log\frac{1}{c}}^{\log\frac{1}{x}} u^{-\theta} du \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $u = \log\frac{1}{y}$. Al considerar $0 < x < c^2$, tenemos $\log\frac{1}{c} < \frac{1}{2}\log\frac{1}{x} < \log\frac{1}{x}$ y entonces

$$|\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_{\infty} g(x)| \gtrsim x^\eta \log^{1-\theta}\left(\frac{1}{x}\right),$$

donde hemos integrado usando que $\theta < 1$.

Veremos ahora que $\tau(x) = \chi_{(0,c^2)} x^\eta \log^{1-\theta}(\frac{1}{x})$ no pertence a L^{∞}_{δ}, para $\theta < 1$. Cuando $q = \infty$, tenemos $\delta = -\eta$ y entonces $\tau(x)x^\delta = \log^{1-\theta}(\frac{1}{x})$, que tiende a infinito a medida que x se acerca a cero. Luego, $\tau \notin L^{\infty}_{\delta}$. Para $1 \leq q < \infty$, veremos que $\tau \notin L^{q,\infty}_{\delta}$. Observar que

$$\begin{aligned}\|\tau\|^q_{L^{q,\infty}_\delta} &= \sup_{\lambda>0}\lambda^q\int_{\{x\in(0,c^2):\tau(x)>\lambda\}} x^{\delta q}dx\\ &= \sup_{0<t<c^2}\tau(t)^q\int_{\{x\in(0,c^2):\tau(x)>\tau(t)\}} x^{\delta q}dx.\end{aligned}$$

Si $\eta<0$, tenemos que τ decrece y $\delta q>-1$, y entonces

$$\begin{aligned}\|\tau\|^q_{L^{q,\infty}_\delta} &= \sup_{0<t<c^2} t^{\eta q}\log^{(1-\theta)q}\left(\frac{1}{t}\right)\int_0^t x^{\delta q}dx\\ &= C\sup_{0<t<c^2}\log^{(1-\theta)q}\left(\frac{1}{t}\right)\\ &= \infty\end{aligned}$$

donde hemos usado $\eta q+\delta q+1=0$ y $1-\theta>0$.

Si $\eta=0$, τ también decrece y $\delta q=-1$. Luego, para todo $0<t<c^2$,

$$\int_{\{x\in(0,c^2):\tau(x)>\tau(t)\}} x^{\delta q}dx=\int_0^t\frac{1}{x}dx=\infty$$

y por lo tanto la norma $L^{q,\infty}_\delta$ de τ es infinita.

Si $\eta>0$ entonces τ crece en $(0,c^2)$, si tomamos c suficientemente chico. Luego

$$\|\tau\|^q_{L^{q,\infty}_\delta}=C\sup_{0<t<c^2} t^{\eta q}\log^{(1-\theta)q}\left(\frac{1}{t}\right)\int_t^{c^2} x^{\delta q}dx$$

Si consideramos $0<t<\frac{c^2}{2}$, entonces $\int_t^{c^2} x^{\delta q}dx\geq\int_t^{2t} x^{\delta q}dx=Ct^{\delta q+1}$. Luego

$$\|\tau\|_{L^{q,\infty}_\delta}\geq C\sup_{0<t<\frac{c^2}{2}}\log^{(1-\theta)q}\left(\frac{1}{t}\right)=\infty,$$

al ser $\theta<1$.

Caso 4. Como ya hemos visto en el caso anterior que $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta,\sigma}_\infty g(x)\gtrsim\tau(x)$, con $\tau\notin L^{q,\infty}_\delta$ para $\theta<1$, sólo nos restaría probar que $g\in L^{p,1}_\delta$. En el Lema anterior probamos que $g\in L^{p,1}_\delta$ si $\theta>1$ y $\delta+\frac{1}{p}\neq 0$, o si $\theta>\frac{1}{p}$ y $\delta+\frac{1}{p}=0$. En este caso, como $\eta=\sigma$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\sigma$ y $\delta=-\eta-\frac{1}{q}$, tenemos $\delta=-\frac{1}{p}$ y por lo tanto podemos decir que $g\in L^{p,1}$, eligiendo $\frac{1}{p}<\theta<1$.

Caso 5. Análogamente al caso 5 del Lema 4.8.1, podemos probar que, para todo $0 < x < \frac{c}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma} g(x) &\simeq x^{\eta} \int_x^c y^{-\delta-\frac{1}{p}-\eta+\sigma} \log^{-\theta}\frac{1}{y}\frac{dy}{y} \\ &\gtrsim x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \int_x^{2x} \log^{-\theta}\frac{1}{y}\frac{dy}{y} \\ &\gtrsim x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} \log^{-\theta}\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

donde la función de la derecha, como hemos visto en el Lema 4.8.1, caso 5, no pertenece a $L_{\delta}^{q,\infty}$, $1 \le q \le \infty$, cuando $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$. Con esto concluímos la demostración.

□

Demostración del Teorema 4.8.1. Consideremos $1 \le p, q \le \infty$ y δ real. Para obtener las condiciones suficientes para el tipo fuerte (p, q) con peso x^{δ}, usaremos la desigualdad de Hölder, que nos dará resultados por encima de la recta $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$. Para p y q en esa recta, usaremos el teorema para pesos más generales 4.6.1, considerando $\omega(x) = x^{\delta}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)| &\le \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \int_0^x |f(y)| y^{\delta} y^{\beta-\delta} dy \\ &\le \|f\|_{L_{\delta}^p} \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \|y^{\beta-\delta}\|_{L^{p'}(0,x)}. \end{aligned}$$

Si $p > 1$ y $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$, o si $p = 1$ y $\delta \le \beta$, entonces $\|y^{\beta-\delta}\|_{L^{p'}(0,x)} = Cx^{\beta+1-\frac{1}{p}-\delta}$. Luego, bajo esas hipótesis tenemos

$$|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)| \le \|f\|_{L_{\delta}^p} x^{\sigma-\frac{1}{p}-\delta} e^{-x} \tag{4.62}$$

y tomando la norma L_{δ}^q en cada lado, obtenemos

$$\|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f\|_{L^q_\delta} \leq \|f\|_{L^p_\delta} \|x^{\sigma-\frac{1}{p}} e^{-x}\|_q.$$

Si además $q < \infty$ y $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$, o si $q = \infty$ y $\frac{1}{p} \leq \sigma$, entonces $\|x^{\sigma-\frac{1}{p}} e^{-x}\|_q < \infty$ y por lo tanto el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ será de tipo fuerte (p,q) con peso x^δ.

Observar que, excepto para $q = \infty$, usando Hölder hemos obtenido resultados sólo para p y q tales que $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$. Para la recta $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, con $p \geq 1$ y $q < \infty$, usaremos el Teorema 4.6.1. Sin mucha dificultad podemos probar que, si $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, entonces $\omega(x) = x^\delta$ satisface la condición (4.47).

Ordenando, hemos obtenido que $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso x^δ si

- $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$, $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$.
- $p = 1$, $1 \leq q < \infty$, $\frac{1}{q} > 1 - \sigma$, $\delta \leq \beta$.
- $p = 1$, $1 \leq q < \infty$, $\frac{1}{q} = 1 - \sigma$, $\delta < \beta$.
- $p = 1$, $q = \infty$, $\sigma \geq 1$, $\delta \leq \beta$.

Por la parte 1 del Lema 4.8.1, está claro que para $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$, $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ no es de tipo fuerte ni débil (p,q) con peso x^δ, si $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$. Veremos mas adelante que para esos valores de δ, el operador es de tipo debil dual para $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$, y tipo débil restringido, para $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$.

Para $p = 1$, $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$ y $\delta \leq \beta$, obtuvimos que $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ es de tipo fuerte, excepto cuando $\frac{1}{q} = 1 - \sigma$ y $\delta = \beta$, donde no lo es, como establece la parte 2 del Lema 4.8.1. Sin embargo, como veremos a continuación, el operador es de tipo débil, siempre y cuando $\sigma \neq \beta + 1$. Caso contrario, por la parte 3 del Lema 4.8.1, no tendremos tipo débil $(1,q)$.

Consideremos $p = 1$, $\frac{1}{q} = 1 - \sigma$ y $\delta = \beta$. Por la desigualdad (4.62), tenemos

$$\left|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)\right| \lesssim \|f\|_{L^1_\delta} x^{-\frac{1}{q}-\delta} e^{-x}.$$

Por la parte 3 del Lema 1.3.4, $x^{-\frac{1}{q}-\delta} e^{-x} \in L^{q,\infty}(x^{\delta q} dx)$ si y sólo si $\delta \neq -\frac{1}{q}$, o , equivalentemente, $\sigma \neq \beta + 1$. Luego, tendremos tipo débil $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ para $\delta = \beta$ si consideramos $\sigma \neq \beta + 1$. La condición es también necesaria, como establece la parte 3 del Lema 4.8.1.

Veremos ahora los tipo débil dual (p,q) con peso x^δ para $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$ cuando $q < \infty$, o $\frac{1}{p} \le \sigma$ cuando $q = \infty$. Usando la desigualdad de Hölder para espacios de Lorentz, siendo $\big(L^{p,1}(x^{\delta p}dx)\big)' = L^{p',\infty}(x^{\delta p}dx)$, con $1 < p < \infty$, obtenemos

$$|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)| \le \|f\|_{L^{p,1}_\delta} \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1-\sigma}} \|y^{\beta-\delta p}\|_{L^{p',\infty}((0,x),x^{\delta p})}.$$

Notar que $\beta - \delta p = (\beta+1)(p-1) \neq 0$ y $(\beta - \delta p)p' + \delta p + 1 = 0$. Entonces, por la parte 2 del Lema 1.3.3, tenemos

$$|\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f(x)| \le \|f\|_{L^{p,1}_\delta} e^{-x} x^{\frac{1}{p}+\sigma-\delta}. \tag{4.63}$$

Como, por el Lema 1.3.4, $e^{-x}x^{\frac{1}{p}+\sigma-\delta} \in L^q_\delta$ si $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$, cuando $1 \le q < \infty$, o $\frac{1}{p} \le \sigma$ cuando $q = \infty$, tenemos el resultado deseado. Para probar que $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ no es de tipo débil dual (p,q) cuando $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$, basta con aplicar la parte 2 del Lema 4.8.1.

Probaremos ahora el tipo débil restringido (p,q), considerando $1 < p < \infty$ y $1 \le q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$. Por la desigualdad (4.63), tendremos que $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} f \in L^{q,\infty}_\delta$ si $e^{-x}x^{-\frac{1}{q}-\delta} \in L^{q,\infty}_\delta$. Como ya hemos mencinado (ver sino Lema 1.3.4), esto pasa si $\sigma \neq \beta+1$. Que $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ no es de tipo débil restringido cuando $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, $\delta = \beta + 1 - \frac{1}{p}$ y $\sigma = \beta + 1$ sale de la parte 3 del Lema 4.8.1.

Cuando $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$ o $\delta > \beta + 1 - \frac{1}{p}$, por el Lema 4.8.1, no tenemos tipo débil restringido $p,q)$, ni débil $(1,q)$, ni débil dual $(1,\infty)$, para el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$. □

Demostración del Teorema 4.8.2. Procederemos análogamente a como hicimos con el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$. Aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma} f(x)| &\le x^\eta \int_x^\infty |f(y)| \frac{e^{-y}}{y^{\eta+1-\sigma}} dy \\ &\le \|f\|_{L^p_\delta}\ x^\eta\ \|e^{-y} y^{\sigma-\eta-1-\delta}\|_{L^{p'}(x,\infty)} \\ &\lesssim \|f\|_{L^p_\delta}\ x^\eta e^{-cx} \varphi(x), \end{aligned} \tag{4.64}$$

donde, por el Lema 1.3.4, parte 5, $\varphi(x) \equiv 1$ para $x \geq 1$ y para $0 < x < 1$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \delta < \sigma - \eta - \frac{1}{p}; \\ (\log \frac{2}{x})^{\frac{1}{p'}}, & \delta = \sigma - \eta - \frac{1}{p}; \\ x^{\sigma-\eta-\delta-\frac{1}{p}}, & \delta > \sigma - \eta - \frac{1}{p}, \end{cases}$$

si $1 < p \leq \infty$, y

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \delta \leq \sigma - \eta - 1; \\ x^{\sigma-\eta-\delta-1}, & \delta > \sigma - \eta - 1, \end{cases}$$

si $p = 1$. Luego, el operador está bien definido en L^p_δ para todos los p y δ posibles, y para obtener que es de tipo fuerte (p, q) alcanza con ver que $x^\eta e^{-cx}\varphi(x) \in L^q_\delta$, o, simplificado, que $x^{\eta+\delta}\varphi(x) \in L^q(0, 1)$.

Considero primero $1 \leq q < \infty$. Para $\delta \leq \sigma - \beta - \frac{1}{p}$, con $p \geq 1$, tenemos que $x^{\eta+\delta}\varphi(x) \in L^q(0, 1)$ si y sólo si $(\eta + \delta)q + 1 > 0$, es decir, $\delta > -\frac{1}{q} - \eta$. Para $\delta > \sigma - \eta - 1$, esto pasará si $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$.

Luego, para obtener el tipo fuerte (p, q), con $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, pedimos $\delta > -\frac{1}{q} - \eta$ y $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$. Notar que también podemos agregar el segmento de recta $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, para $1 \leq p \leq q < \infty$, usando el Teorema 4.6.1. Fácilmente se puede probar que si $\delta > -\frac{1}{q} - \eta$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ entonces $\omega(x) = x^\delta$ satisface la condición (4.48) y tenemos que $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta;\sigma}_\infty$ es de tipo fuerte (p, q). Observar que, por el Lema 4.8.2, parte 1, para $\delta = -\frac{1}{q} - \eta$, $q < \infty$, no tenemos tipo fuerte ni tipo débil dual (p, q). Para $q = \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que $x^{\eta+\delta}\varphi(x) \in L^\infty(0, 1)$ si y sólo si $\delta \geq -\eta$ y $\frac{1}{p} \leq \sigma$, excepto cuando $p > 1$, $\delta = -\eta$ y $\frac{1}{p} = \sigma$, pues en ese caso $\varphi(x) = (\log \frac{2}{x})^{\frac{1}{p'}}$, que no está acotada en cero. Por el Lema 4.8.2, parte 3, tenemos que en ese caso el operador no es de tipo fuerte $(\frac{1}{\sigma}, \infty)$, pero sí de tipo débil dual, como veremos más adelante, aunque si y sólo si $\sigma \neq \eta$.

Usando la desigualdad (4.64), probaremos el tipo débil (p, q), con $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, para $\widetilde{\mathrm{H}}^{\eta;\sigma}_\infty$. Para eso bastará probar que $x^\eta\varphi(x)e^{-cx} \in L^{q,\infty}(x^{\delta q}dx)$. Consideraremos $\delta = -\eta - \frac{1}{q}$, pues para $\delta > -\eta - \frac{1}{q}$ ya obtuvimos el tipo fuerte. Observar que si $p > 1$ y $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$, entonces $\delta < \sigma - \eta - \frac{1}{p}$ y en ese caso $\varphi(x) \equiv 1$. Para $p = 1$ y $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$, también tenemos $\varphi(x) \equiv 1$. En esos casos, por la parte 3 del Lema 1.3.4, $x^\beta\varphi(x)e^{-cx} = x^\eta e^{-cx} \in$

$L^{q,\infty}(x^{\delta q}dx)$ si y sólo si $\eta \neq 0$. Luego, obtenemos tipo débil (p,q), con $\delta = -\frac{1}{q} - \eta$, para $p > 1$ y $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$, o $p = 1$ y $\frac{1}{q} \geq 1 - \sigma$, siempre que $\eta \neq 0$. Como consecuencia del Lema 4.8.2, parte 2, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ no es de tipo débil restingido (p,q), cuando $\eta = 0$ y $\delta = -\frac{1}{q}$. Por otra parte, si $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ y $p > 1$, $\varphi(x) = \left(\log \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{p'}}$. En ese caso tampoco tenemos tipo fuerte, como implica la parte 3 del Lema 4.8.2, sino tipo débil restingido (p,q), como veremos mas adelante.

Probaremos ahora el tipo débil dual y el tipo débil restringido (p,q) con peso x^{δ}. Tomaremos $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$.

Por los resultados que hemos obtenido, alcanza con considerar $\delta = -\frac{1}{q} - \eta$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$. Aplicando Hölder para espacios de Lorentz en la definición de $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$, y usando, en la segunda desigualdad, la parte 6 del Lema 1.3.4 con $\eta = \sigma - \eta - 1 - \delta p$, $\gamma = \delta p$ y $r = p'$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma} f(x)| &\leq \|f\|_{L_{\delta}^{p,1}} \; x^{\eta} \; \|e^{-y} y^{\sigma-\eta-1-\delta p}\|_{L^{p',\infty}((x,\infty),x^{\delta p}dx)} \\ &\lesssim \|f\|_{L_{\delta}^{p,1}} \; x^{\eta} \; e^{-cx} \psi(x), \end{aligned}$$

donde, al ser $\eta + (\gamma+1)\frac{1}{p'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} - \sigma = 0$, tenemos $\psi(x) \equiv 1$ cuando y $\delta p + 1 \neq 0$, o $\psi(x) = \left(\log \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{p'}}$, cuando $\delta p + 1 = 0$. Observar que $\delta p + 1 = 0$ si y sólo si $\eta = \sigma$.

Consideramos primero $\eta \neq \sigma$ para así tener $\psi(x) \equiv 1$. Observar que $x^{\eta} \; e^{-cx} \in L_{\delta}^{q}$ si y sólo si $\delta > -\eta - \frac{1}{q}$, cuando $q < \infty$, y $\delta \geq -\eta$, cuando $q = \infty$ (ver Lemas 1.3.4 y 1.3.5). Luego, como tenemos $\delta = -\eta - \frac{1}{q}$, el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ es de tipo débil dual (o débil restringido) (p,∞) con peso x^{δ}, pero, para $1 \leq q < \infty$, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ no es de tipo fuerte ni débil dual (p,q) como implica el contraejemplo del Lema 4.8.2, parte 1. Sin embargo, sí tendremos tipo débil restringido, siempre que $\eta \neq 0$, pues, por el Lema 1.3.4, $e^{-cx} x^{\eta} \in L_{\delta}^{q,\infty}$ si $\delta \geq -\frac{1}{q} - \eta$, cuando $\eta \neq 0$, o si $\delta > -\frac{1}{q}$, cuando $\eta = 0$. Como ya hemos observado antes, cuando $\eta = 0$ y $\delta = -\frac{1}{q}$ no tenemos tipo débil restringido (p,q).

Si consideramos $\eta = \sigma$, por la parte 4 del Lema 4.8.2, $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ no es tipo débil restringido (p,q) para $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, con peso x^{δ}, para $\delta = -\frac{1}{q} - \eta$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$.

Cuando $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$ o $\delta < -\eta + 1 - \frac{1}{q}$, por el Lema 4.8.2, no tenemos tipo débil restringido (p,q), ni débil $(1,q)$, ni débil dual $(1,\infty)$, para el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$.

□

Otra forma de expresar los resultados. En los siguientes Corolarios, escribiremos los resultados de los Teoremas 4.8.1 y 4.8.2 dividiéndolos por zonas (distintos valores de p y q) y no por el tipo de continuidad. De esta forma resultará más fácil deducir los resultados de la siguiente sección para la integral fraccionaria de Laguerre con pesos potencia (Teorema 4.9.1), considerando $\beta = \eta = \alpha/2$.

Corolario 4.8.3.

- ***Para la zona 1:*** $1 \leq p, q \leq \infty$ ***tales que*** $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo fuerte* (p, q) *y tipo débil con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p}$*, para* $p > 1$*, y* $\delta \leq \beta$*, para* $p = 1$*.* $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo débil dual y tipo débil restringido* (p, q) *con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta \leq \beta + 1 - \frac{1}{p}$*.*

- ***Para la zona 2:*** $1 < p \leq \infty$ ***y*** $1 \leq q < \infty$ ***tales que*** $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo fuerte, débil y débil dual* (p, q) *con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta < \beta+1-\frac{1}{p}$*.* $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo débil restringido* (p, q) *con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta \leq \beta+1-\frac{1}{p}$*, para* $\sigma \neq \beta + 1$ *y* $\delta < \beta + 1 - \frac{1}{p} = -\frac{1}{q}$*, para* $\sigma = \beta + 1$*.*

- ***Para la zona 3:*** $p = 1$ ***y*** $q = \frac{1}{1-\sigma}$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta < \beta$*, con* $\delta \leq \beta$ *en el caso de que* $q = \infty$*.* $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo débil* $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta \leq \beta$*, para* $\sigma \neq \beta + 1$*, y* $\delta < \beta = -\frac{1}{q}$*, para* $\sigma = \beta + 1$*.*

- ***Para la zona 4:*** $p = \frac{1}{\sigma}$ ***y*** $q = \infty$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(\frac{1}{\sigma}, \infty)$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta < \beta + 1 - \sigma$*, y de tipo débil dual si y sólo si* $\delta \leq \beta + 1 - \sigma$*.*

Corolario 4.8.4.

- ***Para la zona 1:*** $1 \leq p, q \leq \infty$ ***tales que*** $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \sigma$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ *es de tipo fuerte* (p, q) *y tipo débil dual con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta > -\eta-\frac{1}{q}$*, para* $q < \infty$*, y* $\delta \geq -\eta$*, para* $q = \infty$*.* $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,\sigma}$ *es de tipo débil y tipo débil restringido* (p, q) *con peso* x^δ *si y sólo si* $\delta > -\eta - \frac{1}{q}$*, para* $\eta \neq 0$*, y* $\delta > -\frac{1}{q}$*, para* $\eta = 0$*.*

- ***Para la zona 2:*** $1 < p \leq \infty$ ***y*** $1 \leq q < \infty$ ***tales que*** $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta;\sigma}$ *es de tipo fuerte, débil y débil dual* (p,q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\delta > -\eta - \frac{1}{q}$. $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta;\sigma}$ *es de tipo débil restringido* (p,q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\delta > -\eta - \frac{1}{q}$*, para* $\eta \neq 0$ *y* $\eta \neq \sigma$*, y* $\delta > -\frac{1}{q} - \eta$*, para* $\eta = 0$ *o* $\eta = \sigma$*.*

- ***Para la zona 3:*** $p = 1$ ***y*** $q = \frac{1}{1-\sigma}$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta;\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\delta > -\eta - 1 + \sigma$*, con* $\delta \geq -\eta$ *en el caso de que* $q = \infty$*.* $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta;\sigma}$ *es de tipo débil* $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\delta \geq -\eta - 1 + \sigma$*, para* $\eta \neq 0$*, y* $\delta > -\frac{1}{q}$*, para* $\eta = 0$*.*

- ***Para la zona 4:*** $p = \frac{1}{\sigma}$ ***y*** $q = \infty$***, tenemos que:***

  $\widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta;\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(\frac{1}{\sigma}, \infty)$ *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $\delta > -\eta$*, y de tipo débil dual si y sólo si* $\delta \geq -\eta$*, para* $\eta \neq \sigma$*, y* $\delta > -\eta$*, para* $\eta = \sigma$*.*

4.9. Resultados ajustados con pesos potencia para $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$.

Para pesos potencia, aplicando los Teoremas 4.3.1 y 4.3.3 con $\omega(x) = x^{\delta}$, con δ real, obtenemos condiciones suficientes para el tipo fuerte (p,q) con $p \leq q$ y tipo débil $(1,q)$. Sin embargo, podemos obtener mejores resultados. Más concretamente, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 4.9.1. *Sean* $\alpha > -1$ *y* $0 < \sigma < \alpha + 1$*. Entonces, para el operador* $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$*, tenemos los siguientes resultados con pesos potencia.*

Zona 1: $1 \leq p, q \leq \infty$ *tales que* $\frac{1}{p} - \sigma < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma$*.*

- $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$ *es de tipo fuerte* (p,q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} < \delta < \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$*, agregándose el extremo izquierdo cuando* $q = \infty$ *y el derecho cuando* $p = 1$*.*
- $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$ *es de tipo débil* (p,q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} \leq \delta < \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$*, cuando* $\alpha \neq 0$*, o* $-\frac{1}{q} < \delta < 1 - \frac{1}{p}$*, cuando* $\alpha = 0$*, agregándose el extremo derecho cuando* $p = 1$*.*
- $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$ *es de tipo débil dual* (p,q) *con peso* x^{δ} *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} < \delta \leq \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$*, agregándose el extremo izquierdo cuando* $q = \infty$*.*

- $L_\alpha^{-\sigma}$ *es de tipo débil restringido* (p,q) *con peso* x^δ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q} \le \delta \le \frac{\alpha}{2}+1-\frac{1}{p}$, *cuando* $\alpha \neq 0$, *o* $-\frac{1}{q} < \delta \le 1-\frac{1}{p}$, *cuando* $\alpha = 0$.

Zona 2: $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, *con* $1 < p \le \infty$ *y* $1 \le q < \infty$.

- $L_\alpha^{-\sigma}$ *es de tipo fuerte, débil y débil dual* (p,q) *con peso* x^δ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q} < \delta < \frac{\alpha}{2}+1-\frac{1}{p}$.
- $L_\alpha^{-\sigma}$ *es de tipo débil restringido* (p,q) *con peso* x^δ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q} \le \delta \le \frac{\alpha}{2}+1-\frac{1}{p}$, *cuando* $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha \neq 2\sigma$, $-\frac{1}{q} < \delta \le 1-\frac{1}{p}$, *cuando* $\alpha = 0$, *o* $-\sigma-\frac{1}{q} < \delta \le \sigma+1-\frac{1}{p}$ *(equivalentemente* $-\frac{1}{p} < \delta \le 1-\frac{1}{q}$*), cuando* $\alpha = 2\sigma$.

Zona 3: $p = 1$, $q = \frac{1}{1-\sigma}$.

- $L_\alpha^{-\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}+\sigma-1 < \delta < \frac{\alpha}{2}$.
- $L_\alpha^{-\sigma}$ *es de tipo débil* $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2}+\sigma-1 \le \delta \le \frac{\alpha}{2}$, *cuando* $\alpha \neq 0$, *o* $\sigma - 1 < \delta \le 0$ *(equivalentemente* $-\frac{1}{q} < \delta \le 0$*), cuando* $\alpha = 0$.

Zona 4: $q = \infty$, $p = \frac{1}{\sigma}$.

- $L_\alpha^{-\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(\frac{1}{\sigma}, \infty)$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2} < \delta < \frac{\alpha}{2}+1-\sigma$.
- $L_\alpha^{-\sigma}$ *es de tipo débil dual* $(\frac{1}{\sigma}, \infty)$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $-\frac{\alpha}{2} \le \delta \le \frac{\alpha}{2}+1-\sigma$, *cuando* $\alpha \neq 2\sigma$, *o* $-\sigma < \delta \le 1$ *(equivalentemente* $-\frac{1}{p} < \delta \le 1$*), cuando* $\alpha = 2\sigma$.

Demostración. Para probar las condiciones suficientes usaremos la estimación por arriba dada en la Proposición 4.4.1. Observar que, por el Corolario 4.5.1, la integral fraccionaria local $L_{\alpha,loc}^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p,q) para cualquier peso x^δ en toda la región considerada, es decir, $1 \le p,q \le \infty$ tales que $\frac{1}{p}-\sigma \le \frac{1}{q} < \frac{1}{p}+\delta$.

Usando entonces los resultados de acotación con pesos potencia para los operadores de Hardy, enunciados en la sección anterior, tomando $\eta = \beta = \frac{\alpha}{2}$, obtenemos las condiciones suficientes deseadas.

Para ver que esas condiciones son también necesarias, usamos la estimación por abajo (4.22) dada en la Proposición 4.4.1 y nuevamente los Teoremas 4.8.1 y 4.8.2, esta vez las afirmaciones sobre las condiciones necesarias sobre el exponente δ. Esto es posible hacerlo ya que las funciones test usadas en las demostraciones están soportadas en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$.

□

Por último, enunciaremos como un Corolario otra forma de escribir el Teorema 4.9.1, considerando los casos posibles de δ.

Corolario 4.9.2. *Sean $\alpha < -1$, $0 < \sigma < \alpha + 1$ y $1 \le p, q \le \infty$. Entonces, para $\frac{1}{p} - \sigma \le \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma$, el operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ tiene las siguientes propiedades de acotación respecto $\omega(x) = x^\delta$. En todos los casos, los rangos de δ y α son óptimos.*

a) Si $-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q} < \delta < \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p, q). Más aún, si $p = 1$ y $1 \le q < \frac{1}{1-\sigma}$, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es también de tipo fuerte para $\delta = -\frac{\alpha}{2}$, y si $q = \infty$ y $\frac{1}{\sigma} < p \le \infty$, es de tipo fuerte para $\delta = -\frac{\alpha}{2}$. Para $\sigma = 1$, $p = 1$ y $q = \infty$, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo fuerte en ambos bordes.

b) Para $\delta = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q}$, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo débil (p, q) si $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$ y $\alpha \neq 0$ (con $p > 1$ y $q < \infty$), o si $p = 1$, $q = \frac{1}{1-\sigma}$ y $\alpha \neq 0$ (con $q < \infty$). Por otra parte, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo débil dual si $q = \infty$, $p = \frac{1}{\sigma}$ y $\alpha \neq 2\sigma$ (con $p > 1$), y de tipo débil restringido si $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2\sigma$ (con $p > 1$ y $q > \infty$).

c) Para $\delta = \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{p}$, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo débil dual (p, q) si $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \sigma$ (con $p > 1$ y $q < \infty$), o si $q = \infty$ y $p = \frac{1}{\sigma}$ (con $p > 1$). Además, $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ es de tipo débil si $p = 1$ y $q = \frac{1}{1-\sigma}$ (con $q < \infty$), y de tipo débil restringido si $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$ (con $p > 1$ y $q > \infty$).

4.10. La integral fraccionaria asociada al sistema $\{\varphi_n^\alpha\}$.

Llamemos $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$ a la integral fraccionaria asociada al sistema de funciones de Laguerre $\{\varphi_n^\alpha\}$ dado por (1.2). La relación $\varphi_n^\alpha(x) = \mathcal{L}_n^\alpha(x^2)(2x)^{1/2}$ nos permite escribir el núcleo de la integral fraccionaria $K_{\varphi^\alpha}^\sigma(x, y)$, dado en forma general por (4.4), como $K_\varphi^{\sigma,\alpha}(x, y) = 2(xy)^{\frac{1}{2}} K^{\sigma,\alpha}(x^2, y^2)$, donde el núcleo del lado derecho es el de la integral fraccionaria $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$, asociada al sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, que estuvimos estudiando en las secciones anteriores de este capítulo. Más aún, tenemos que

$$\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma} f(x) = x^{\frac{1}{2}} \mathrm{L}_\alpha^{-\sigma} g(x^2), \qquad \text{con } g(z) = f(z^{\frac{1}{2}}) z^{-\frac{1}{4}}. \tag{4.65}$$

Con esta relación podríamos obtener resultados de tipo fuerte (p, q), pero sólo obtendríamos algo sin pesos, o con $p = q$. Utilizaremos mejor las estimaciones puntuales para

$\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ de la Proposición 4.4.1 obteniendo una similar para $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$, en términos de operadores de Hardy modificados y la maximal fraccionaria local.

Enunciaremos ahora los resultados de continuidad con pesos generales para $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$. Aca también consideraremos los clases $A_{\eta,\beta}^{p,q}$ y $A_{\eta,\beta}^{1,q\,*}$ dadas por las Definiciones 4.3.1 y 4.3.2, tomando esta vez $\eta = \beta = \alpha + \frac{1}{2}$. Observemos que para este sistema el rango de p y q se agranda, ya que consideramos $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - 2\sigma$ en lugar de $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \sigma$, como sucedía con el operador $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$.

Teorema 4.10.1. *Sean $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha+1$ y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Para $1 < p \leq q < \infty$ (o $p = 1$ y $q = \infty$) tales que $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - 2\sigma$, o para $p = 1$ y $1 \leq q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{q} > 1 - 2\sigma$, o para $q = \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} < 2\sigma$, se tiene que el operador $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p, q) con peso $\omega \in A_{\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}}^{p,q}$. Para $p = 1$ y $1 \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 2\sigma$, el operador $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo débil $(1, q)$ con peso $\omega \in {A_{\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}}^{1,q}}^{*}$.*

Para demostrar este teorema usaremos la siguiente estimación del operador $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$.

Lema 4.10.1. *Sean $\alpha > -1$ y $0 < \sigma < \alpha + 1$. Para toda f medible en $\mathbb{R}^+$ y todo $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene*

$$|\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma} f(x)| \lesssim \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma}|f|(x) + |\mathrm{L}_{\varphi^\alpha,loc}^{-\sigma} f(x)| + \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma}|f|(x),$$

donde $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha,loc}^{-\sigma}$ es la integral fraccionaria local asociada a este sistema, dada por

$$\mathrm{L}_{\varphi^\alpha,loc}^{-\sigma} f(x) \doteq \int_{\frac{x}{2}}^{2x} K_\varphi^{\sigma,\alpha}(x,y) f(y)\,dy, \tag{4.66}$$

y los operadores de Hardy $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma}$ y $\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma}$ están dados por

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,2\sigma} f(x) \doteq \frac{e^{-cx^2}}{x^{\beta+1-2\sigma}} \int_0^x f(y) y^\beta\,dy$$

y

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\eta,2\sigma} f(x) \doteq x^\eta \int_x^\infty \frac{e^{-cy^2}}{y^{\eta+1-2\sigma}} f(y)\,dy.$$

Observar que los operadores de Hardy modificados con exponencial ahora tienen un factor e^{-cx^2} en lugar de e^{-cx}, como los hemos venido considerando. Sin embargo, este cambio no afecta en nada los resultados de continuidad que hemos demostrado en las secciones 2.5 y 2.8.

Demostración del Lema 4.10.1. Para demostrar esto, usaremos la relación

$$K_{\varphi}^{\sigma,\alpha}(x,y) = 2(xy)^{\frac{1}{2}} K^{\sigma,\alpha}(x^2,y^2) \tag{4.67}$$

y la Proposición 4.4.1. Observar que en esa Proposición, para demostrar las estimaciones de $\mathrm{L}_{\alpha}^{-\sigma}$ restringida a la zona global, se probó que el núcleo $K^{\sigma,\alpha}(x,y)$ en la zona $0 < y < \frac{x}{4}$ satisface (4.33). Luego, para $0 < y < \frac{x}{2}$, usando (4.67) se obtiene

$$K_{\varphi}^{\sigma,\alpha}(x,y) \lesssim e^{-cx^2} \frac{y^{\alpha+\frac{1}{2}}}{x^{\alpha+\frac{1}{2}+1-2\sigma}}.$$

Luego, integrando contra f en $(0, \frac{x}{2})$ obtenemos

$$\left| \int_0^{\frac{x}{2}} K_{\varphi}^{\sigma,\alpha}(x,y) f(y) dy \right| \lesssim \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma} f(x)$$

y análogamente

$$\left| \int_{2x}^{\infty} K_{\varphi}^{\sigma,\alpha}(x,y) f(y) dy \right| \lesssim \widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma} f(x).$$

□

Observar que en la demostración del Teorema 4.3.1, hemos considerado valores generales η y β, obteniendo así que para un peso ω en $A_{\eta,\beta}^{p,q}$, el operador $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} + \widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ es de tipo fuerte (p,q) para $1 < p \le q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$, o $p = 1$ y $\frac{1}{q} > 1 - \sigma$, o $q = \infty$ y $\frac{1}{p} < \sigma$. Lo mismo hicimos en el Teorema y 4.3.3, obteniendo que $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\beta,\sigma} + \widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\eta,\sigma}$ es de tipo débil $(1,q)$ para $\frac{1}{q} \ge 1 - \sigma$ y $\omega \in {A_{\eta,\beta}^{1,q}}^*$. Luego, si consideramos 2σ en lugar de σ y $\eta = \beta = \alpha + \frac{1}{2}$, obtendremos los resultados de continuidad deseados para $\widetilde{\mathrm{H}}_0^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma} + \widetilde{\mathrm{H}}_{\infty}^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma}$. Por lo tanto, usando la estimación del operador $\mathrm{L}_{\varphi^{\alpha}}^{-\sigma}$ del Lema 4.10.1, el Teorema 4.10.1 quedará demostrado si establecemos un resultado de continuidad para la integral fraccionaria local $\mathrm{L}_{\varphi^{\alpha},loc}^{-\sigma}$, que enunciaremos a continuación.

Lema 4.10.2. *Sea $0 < \sigma < \alpha+1$. Para $\mathrm{L}_{\varphi^{\alpha},loc}^{-\sigma}$, la integral fraccionaria local asociada al sistema $\{\varphi_n^{\alpha}\}$ dada por (4.66) se tiene:*

1. *Si* $1 < p \le q < \infty$, *o si* $p = 1$ *y* $q = \infty$, *tales que* $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - 2\sigma$, *entonces* $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ *es de tipo fuerte* (p, q) *para un peso* $\omega \in A^{p,q}_{loc}$.
2. *Si* $p = 1$ *y* $\frac{1}{q} > 1 - 2\sigma$, *entonces* $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ *es de tipo fuerte* $(1, q)$ *para* $\omega \in A^{1,q}_{loc}$.
3. *Si* $p = 1$ *y* $1 \le q < \infty$ *tal que* $\frac{1}{q} = 1 - 2\sigma$, *entonces* $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ *es de tipo débil* $(1, q)$ *para* $\omega \in A^{1,q}_{loc}$.
4. *Si* $q = \infty$ *y* $1 < p \le \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} > 2\sigma$, *entonces* $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ *es de tipo fuerte* (p, ∞), *para* $\omega \in A^{p,\infty}_{loc}$.

Demostración. Evitaremos hasta el final de la demostración el caso $p = 1$ y $q = \infty$, de manera de tener $\epsilon < 1$ si $\epsilon = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Observar que por la relación entre los núcleos de los sistemas $\{\varphi_n^\alpha\}$ y $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$ tenemos

$$\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc} f(x) = x^{\frac{1}{2}} \mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha, loc} g(x^2), \qquad \text{con } g(z) = f(z^{\frac{1}{2}}) z^{-\frac{1}{4}}.$$

Recordemos la diferencia entre los dos operadores locales: para definir $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ integramos en $(\frac{x}{2}, 2x)$ y para $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha, loc}$, en $(\frac{x}{4}, 4x)$. Por la estimación de $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\alpha, loc}$ dada por (4.21), para todo $0 < \epsilon < 1$ tal que $\epsilon < 2\sigma$, obtenemos

$$|\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc} f(x)| \lesssim \frac{x^{2\sigma - \epsilon}}{1 + x^{2(2\sigma - \epsilon)}} x^{\frac{1}{2} - \epsilon} \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,16} g(x^2).$$

Por la misma manera en que se probó (2.25), se puede ver que $x^{\frac{1}{2} - \epsilon} \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,16} g(x^2) \lesssim \mathrm{M}_{loc,4} f(x)$. Luego, despreciando el término $\frac{x^{2\sigma - \epsilon}}{1 + x^{2(2\sigma - \epsilon)}}$, obtenemos

$$|\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc} f(x)| \lesssim \mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,4} f(x) \tag{4.68}$$

para todo $0 \le \epsilon < 1$ tal que $\epsilon < 2\sigma$.

Luego, por el Teorema 1.4.2 del capítulo 1, usamos la continuidad de $\mathrm{M}^{\epsilon}_{loc,4}$ con $\epsilon = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ para obtener que $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ es de tipo fuerte (p, q) con un peso $\omega \in A^{p,q}_{loc}$, para $1 < p \le q \le \infty$ tales que $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - 2\sigma$.

Para $p = 1$ y $1 \le q < \infty$ tal que $\frac{1}{q} > 1 - 2\sigma$, usamos que $\omega \in A^{1,q}_{loc}$ sí y solo si $\omega^{-1} \in A^{q',\infty}_{loc}$ y entonces, por lo probado recién, $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ es de tipo fuerte (q', ∞) con peso ω^{-1}. Luego, el resultado deseado sale por ser el operador $\mathrm{L}^{-\sigma}_{\varphi^\alpha, loc}$ autoadjunto. 4.3.1

Consideremos ahora $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 2\sigma$, con $q < \infty$. Luego, tenemos $\sigma < \frac{1}{2}$. Observar que en la zona local $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, tenemos $K_{\varphi}^{\sigma,\alpha}(x,y) \simeq xK^{\sigma,\alpha}(x^2,y^2)$. Usando la estimación del núcleo $K^{\sigma,\alpha}(x,y)$ dada por el Lema 4.4.1, tenemos que $K_{\varphi}^{\sigma,\alpha}(x,y) = K_{\varphi,A}^{\sigma,\alpha}(x,y) + K_{\varphi,B}^{\sigma,\alpha}(x,y)$, donde

$$K_{\varphi,A}^{\sigma,\alpha}(x,y) \simeq x\frac{1}{x^{2-2\sigma}}e^{-cx^2} \lesssim \frac{1}{x^{1-\sigma}}$$

y

$$\begin{aligned} K_{\varphi,B}^{\sigma,\alpha}(x,y) &\simeq \int_0^{\min\{1,x^2\}} s^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-csx^2}e^{-c\frac{|x-y|^2}{4s}}\frac{ds}{s} \\ &\lesssim \int_0^{\infty} s^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-c\frac{|x-y|^2}{4s}}\frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Al integrar $K_{\varphi,A}^{\sigma,\alpha}(x,y)$ contra f en $(\frac{x}{2},2x)$, fácilmente se obtiene que está acotada por $\mathrm{M}_{loc,4}^{2\sigma}f(x)$, que es de tipo fuerte (p,q), con $p>1$, y de tipo débil $(1,q)$, con peso $\omega \in A_{loc}^{p,q}$, siempre que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 2\sigma$.

Para el núcleo $K_{\varphi,B}^{\sigma,\alpha}(x,y)$, haciendo el cambio de variable $t = \frac{|x-y|^2}{s}$, $\frac{dt}{t} = -\frac{ds}{s}$, obtenemos

$$K_{\varphi,B}^{\sigma,\alpha}(x,y) \lesssim \frac{1}{|x-y|^{1-2\sigma}}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-\sigma}e^{-ct}\frac{dt}{t}$$

donde la integral del lado derecho es una constante finita pues $\sigma < \frac{1}{2}$. Luego, al integrar, obtenemos

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} K_{\varphi,B}^{\sigma,\alpha}(x,y)|f(y)|dy \lesssim \mathrm{I}_{loc,2}^{2\sigma}|f|(x),$$

donde $\mathrm{I}_{loc,2}^{2\sigma}$ es la integral fraccionaria clásica, definida en la sección 1.4 de Preliminares por (1.26). Luego, por la Proposición 1.4.1 , tomando $\epsilon = 2\sigma$ y $\kappa = 2$, obtenemos que $\mathrm{I}_{loc,2}^{2\sigma}$, y por lo tanto también $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha,loc}^{-\sigma}$, es de tipo fuerte (p,q) y débil $(1,q)$, con peso $\omega \in A_{loc}^{p,q}$, para $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 2\sigma$.

Por último, tomemos $p = 1$ y $q = \infty$. Observar que $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - 2\sigma$ implica $2\sigma \geq 1$. Por la estimación para $\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma}$ (4.44), y haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos que

$$\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}f(x) \lesssim \frac{x^{2\sigma-1}}{1+x^{2(2\sigma-1)}}\int_{\frac{x}{2}}^{2x}|f(y)|dy \lesssim \int_{\frac{x}{2}}^{2x}|f(y)|dy.$$

Luego, procedemos como hicimos para $\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma}$ en la demostración de la Proposición 4.5.1 para este caso, y obtenemos que $\|\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma} f\|_{L^\infty_\omega} \lesssim \|f\|_{L^1_\omega}$. □

Finalmente, para obtener resultados ajustados con pesos potencia, para $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} - 2\sigma \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + 2\sigma$, análogos a los obtenidos para $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ en la sección 4.7, se usa la estimación por arriba del Lema 4.10.1 y la siguiente estimación por abajo, que se obtiene fácilmente de (4.22) y de la relación entre los núcleos de $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$ y $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$: para toda f medible con soporte en $(0, \frac{1}{4})$ y todo $x \in (0, \frac{1}{4})$, tenemos

$$\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}|f|(x) \gtrsim \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma}|f|(x) + \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{\alpha+\frac{1}{2},\sigma}|f|(x). \tag{4.69}$$

Observar que por el Lema 4.10.2, los resultados de continuidad de $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha,loc}^{-\sigma}$ valen para todo peso potencia, para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - 2\sigma$. Para extenderlo a $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + 2\sigma$, notar que por la estimación

$$|\mathrm{L}_{\varphi^\alpha,loc}^{-\sigma} f(x)| \lesssim \frac{x^{2\sigma}}{1 + x^{4\sigma}} \mathrm{M}_{loc,4} f(x),$$

tenemos un resultado análogo a la Observación 4.5.1 para $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha,loc}^{-\sigma}$, en la zona deseada. Luego, las condiciones necesarias y suficientes para la continuidad de $\mathrm{L}_{\varphi^\alpha}^{-\sigma}$ con pesos potencia saldrán de los Teoremas de la sección 4.8 para operadores de Hardy, con $\eta = \beta = \alpha + \frac{1}{2}$. Estos resultados pueden enunciarse reemplazando, en el Teorema 4.9.1, σ por 2σ y α por $2\alpha + 1$.

4.11. Resultados para el sistema $\{\ell_n^\alpha\}$.

Consideremos ahora el sistema de funciones de Laguerre dadas por (1.3). El operador a tratar viene dado por

$$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma} f(x) = \int_0^\infty K_\ell^{\sigma,\alpha}(x,y) f(y) y^\alpha dy = \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K^{\sigma,\alpha}(x,y) f(y) dy$$

donde $K^{\sigma,\alpha}(x,y)$ es el núcleo de $\mathrm{L}_\alpha^{-\sigma}$. De las estimaciones para $K^{\sigma,\alpha}(x,y)$ del Lema 4.4.1 se obtiene

$$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma} f \lesssim \widetilde{\mathrm{H}}_0^{\alpha,\sigma} f + \mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma} f + \widetilde{\mathrm{H}}_\infty^{0,\sigma} f,$$

donde $\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma}$ es la misma integral fraccionaria local del sistema $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}$, y los operadores de Hardy tienen el factor exponencial e^{-cx}. De la Proposición 4.5.1 para $\mathrm{L}_{\alpha,loc}^{-\sigma}$ y de los Teoremas para los operadores de Hardy de la Sección 4.5, considerando la clase $A_{\eta,\beta}^{p,q}$ y $A_{\eta,\beta}^{1,q\,*}$ con $\eta = 0$ y $\beta = \alpha$, obtenemos, como vinimos haciendo hasta ahora para los otros sistemas, los siguientes resultados.

Teorema 4.11.1. *Sean $\alpha > -1$, $0 < \sigma < \alpha+1$ y $1 \le p \le q \le \infty$. Para $1 < p \le q < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \sigma$, o para $p = 1$ y $1 \le q \le \infty$ tal que $\frac{1}{q} > 1 - \sigma$, o para $q = \infty$ y $1 \le p \le \infty$ tal que $\frac{1}{p} < \sigma$, se tiene que el operador $\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso $\omega \in A_{0,\alpha}^{p,q}$. Por otra parte , si $p = 1$ y $1 \le q < \infty$ es tal que $\frac{1}{q} \ge 1 - \sigma$, entonces $\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo débil $(1,q)$ con peso $\omega \in A_{0,\alpha}^{1,q\,*}$.*

Teorema 4.11.2. *Sean $\alpha > -1$ y $0 < \sigma < \alpha + 1$. Entonces, para el operador $\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$, tenemos los siguientes resultados con pesos potencia.*

Zona 1: *$1 \le p, q \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} - \sigma < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \sigma$.*

- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo fuerte (p,q) con peso x^δ si y sólo si $-\frac{1}{q} < \delta < \alpha+1-\frac{1}{p}$, agregándose el extremo izquierdo cuando $q = \infty$ y el derecho cuando $p = 1$.*
- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo débil (p,q) con peso x^δ si y sólo si $-\frac{1}{q} < \delta < \alpha+1-\frac{1}{p}$, agregándose el extremo derecho cuando $p = 1$.*
- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo débil dual (p,q) con peso x^δ si y sólo si $-\frac{1}{q} < \delta \le \alpha + 1 - \frac{1}{p}$, agregándose el extremo izquierdo cuando $q = \infty$.*
- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo débil restringido (p,q) con peso x^δ si y sólo si $-\frac{1}{q} < \delta \le \alpha+1-\frac{1}{p}$.*

Zona 2: *$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$, con $1 < p \le \infty$ y $1 \le q < \infty$.*

- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo fuerte, débil y débil dual (p,q) con peso x^δ si y sólo si $-\frac{1}{q} < \delta < \alpha + 1 - \frac{1}{p}$.*
- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo débil restringido (p,q) con peso x^δ si y sólo si $-\frac{1}{q} < \delta \le \alpha+1-\frac{1}{p}$.*

Zona 3: *$p = 1$, $q = \frac{1}{1-\sigma}$.*

- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo fuerte $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ con peso x^δ si y sólo si $\sigma - 1 < \delta < \alpha$.*
- *$\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ es de tipo débil $(1, \frac{1}{1-\sigma})$ con peso x^δ si y sólo si $\sigma - 1 < \delta \le \alpha$.*

Zona 4: $q = \infty$, $p = \frac{1}{\sigma}$.

- $\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ *es de tipo fuerte* $(\frac{1}{\sigma}, \infty)$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $0 < \delta < \alpha + 1 - \sigma$.
- $\mathrm{L}_{\ell^\alpha}^{-\sigma}$ *es de tipo débil dual* $(\frac{1}{\sigma}, \infty)$ *con peso* x^δ *si y sólo si* $0 \le \delta \le \alpha + 1 - \sigma$.

CAPÍTULO 5

APÉNDICE: LA MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD LOCAL Y BMO.

En este capítulo definiremos un tipo local de espacio BMO con pesos sobre $\mathbb{R}^+$ y probaremos la continuidad de la maximal local de Hardy-Littlewood en esos espacios, bajo la condición de que el peso pertenezca a la clase local A^1_{loc}. Aunque los resultados de este apéndice se utilizan en el capítulo 3, se lo puede considerar independiente de los capítulos 2 a 4, y de los sistemas de Laguerre. Sin embargo, lo incluímos en la Tesis pues nos parece de interés por sí mismo, ya que amplia lo conocido para $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ y define un espacio BMO apropiado para ese operador.

5.1. Introducción

Repasemos la definición de intervalos locales, críticos, y la maximal local, de la sección 1.4. Fijemos $\kappa > 1$. Decimos que $I = (a, b)$ es un κ **-intervalo local** si $0 < a < b < \kappa a$, y llamaremos **intervalos críticos** a los de la forma $(a, \kappa a)$ para $a > 0$. También denotaremos con $\mathcal{I}_\kappa$ a la familia de los intervalos locales con respecto a κ. Como ya hemos visto, la maximal local de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}^+$ de orden κ está dada, para cualquier función medible $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, por

$$\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) = \sup_{x \in I \in \mathcal{I}_\kappa} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Recordemos que este operador es de tipo fuerte (p,p), $p>1$, y de tipo débil $(1,1)$ con un peso ω si y sólo si $\omega \in A^p_{loc}$, la clase de los pesos A_p locales de $\mathbb{R}^+$, introducidos en la Definición 1.4.2 de la sección 1.4. Recordemos que A^p_{loc} es independiente de κ aunque la seminorma A^p_{loc} sí puede depender. Será muy útil en esta sección la propiedad de duplicación local, dada en el Lema 1.4.1, y que para $p=1$ surge directamente de la definición de la clase A^1_{loc}.

Es bien sabido que M, la función maximal usual de Hardy-Littlewood, no está acotada en BMO, el espacio de oscilación media acotada de John y Nirenberg. De hecho, Bennet, Sharpley y De Vore demostraron en [**BDS81**] que para todo función f en $BMO(\mathbb{R}^n)$, o bien $\mathrm{M}f \equiv \infty$ o bien $\mathrm{M}f \in BMO$. También en ese mismo artículo, se demuestra que cuando el espacio de base considerado es un cubo, entonces sí la maximal M es acotada en BMO (ver el Teorema 1.5.1 de la sección 1.5 para el caso $\omega \equiv 1$).

El objetivo de este capítulo es investigar el comportamiento de la maximal local de Hardy-Littlewood $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ en un espacio BMO con pesos que sea apropiado. Este resultado es nuevo aún en el caso sin pesos.

El espacio BMO local con pesos, $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$, se definirá en la Sección 2. En la sección 3, más precisamente en el Teorema 5.3.1, enunciaremos la continuidad de $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ en $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ para pesos ω tales que $\omega \in A^1_{loc}$. Notar que si definimos $L^{\infty}_{\omega^{-1}} = \{f : f\omega^{-1} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+)\}$, está claro que $\mathrm{M}_{loc,\kappa} : L^{\infty}_{\omega^{-1}} \longrightarrow L^{\infty}_{\omega^{-1}}$ para pesos $\omega \in A^1_{loc}$. Tal clases de pesos se pueden ver como el caso límite de las desigualdades con pesos en L^p, es decir $\mathrm{M}_{loc,\kappa} : L^p(\omega^p) \longrightarrow L^p(\omega^p)$, ya que la condición requerida, $\omega^p \in A^p_{loc}$, es equivalente a $\omega^{-p'} \in A^{p'}_{loc}$. Como $L^{\infty}_{\omega^{-1}} \subset BMO(\omega) \subset BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$, es natural pedir $\omega \in A^1_{loc}$ para así obtener la acotación de $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ en $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$. Observar que para la maximal Hardy-Littlewood clásica M (ver el Teorema 1.5.1 de la sección 1.5), ese tipo de continuidad no se satisface.

5.2. El espacio BMO local.

Definición 5.2.1. Para $\kappa > 1$ y un peso ω en $\mathbb{R}^+$, denotaremos con $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ a la familia de todas las funciones $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ que satisfacen la *condición de oscilación* *media acotada*

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)-f_I|dx \leq C_\kappa, \quad \text{para todo } I \in \mathcal{I}_\kappa, \tag{5.1}$$

y la *condición de promedio acotado*

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx \leq C_\kappa, \quad \text{para todo } I \in \mathcal{I}_\kappa^c, \tag{5.2}$$

donde hemos considerado $\mathcal{I}_\kappa^c = \{(a,b) : a > 0, b \geq \kappa a\}$. La norma $BMO_{loc}^\kappa(\omega)$ de f es la menor constante C_κ que satisface ambas condiciones, y será denotada con $\|f\|_{BMO_{loc}^\kappa(\omega)}$.

Enumeraremos algunas propiedades del espacio $BMO_{loc}^\kappa(\omega)$.

Observar que por la condición (5.2), $\|f\|_{BMO_{loc}^\kappa(\omega)}$ es una norma y no sólo seminorma, como sucede con el espacio BMO usual. Por otra parte, dado que $\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)-f_I|dx \leq 2\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx$ para todo I subconjunto medible de los reales, se tiene que si $f \in BMO_{loc}^\kappa(\omega)$ entonces la condición de oscilación media acotada (5.1) se satisface para todo $I \subset \mathbb{R}^+$. Luego, $BMO_{loc}^\kappa(\omega) \subset BMO$. Además, si $1 < \kappa < \kappa'$ entonces $BMO_{loc}^k(\omega) \hookrightarrow BMO_{loc}^{k'}(\omega)$. Más aún, tenemos que:

Lema 5.2.1. *Si $\omega \in A_{loc}^\infty$ entonces $BMO_{loc}^k(\omega) = BMO_{loc}^{k'}(\omega)$ para todo $\kappa, \kappa' > 1$, es decir $\|f\|_{BMO_{loc}^\kappa(\omega)} \simeq \|f\|_{BMO_{loc}^{k'}(\omega)}$ para todo f en esos espacios, con las normas y las constantes de equivalencia dependiendo sólo de ω, κ y κ'.*

Demostración. Consideremos $1 < \kappa < \kappa'$. Por la observación hecha antes del Lema, será suficiente con probar que si $f \in BMO_{loc}^{\kappa'}(\omega)$ y $I \in \mathcal{I}_\kappa^c$, entonces $\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx \leq C\|f\|_{BMO_{loc}^{\kappa'}}$, con $C = C(\kappa, \kappa', \omega)$. Eso nos dará $BMO_{loc}^k(\omega) \subset BMO_{loc}^{k'}(\omega)$.

Si $I \in \mathcal{I}_{k'}^c$ entonces no hay nada que probar. Si $I = (a,b) \in \mathcal{I}_{k'} \cap \mathcal{I}_\kappa^c$ tenemos $\kappa a \leq b < \kappa' a$. Entonces, usando el Lema 1.4.1, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_I |f(x)|dx &\leq \int_a^{\kappa' a} |f(x)|dx \\
&\leq \|f\|_{BMO_{loc}^{\kappa'}}\omega((a,\kappa' a)) \\
&\leq C\|f\|_{BMO_{loc}^{\kappa'}}\omega((a,\kappa a)) \\
&\leq C\|f\|_{BMO_{loc}^{\kappa'}}\omega(I),
\end{aligned}$$

y con esto completamos la prueba. $\square$

El siguiente Lema dice que es suficiente con probar la condición de promedio acotado (5.2) sólo para intervalos críticos para obtener que una función está en $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$.

Lema 5.2.2. *Sea $\omega \in A^{\infty}_{loc}$. Si una función f satisface (5.2) para todo $I = (a, \kappa a)$ con $a > 0$, entonces f satisface (5.2) para todo $I \in \mathcal{I}^c_\kappa$.*

Demostración. Sea $I = (a, b)$ con $b > \kappa a$ y sea $j_0 \geq 1$ un entero tal que $\kappa^{j_0} a < b \leq \kappa^{j_0+1} a$. Entonces

$$\int_I |f(x)|dx \leq \sum_{j=0}^{j_0} \int_{\kappa^j a}^{\kappa^{j+1} a} |f(x)|dx.$$

Dado que cada $(\kappa^j a, \kappa^{j+1} a)$ son intervalos críticos, por hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} \int_I |f(x)|dx &\leq C_\kappa \sum_{j=0}^{j_0} \omega\left((\kappa^j a, \kappa^{j+1} a)\right) \\ &\leq C_\kappa \left[\omega(I) + \omega\left((\kappa^{j_0} a, \kappa^{j_0+1} a)\right)\right]. \end{aligned}$$

Como el intervalo $(\kappa^{j_0-1} a, \kappa^{j_0+1} a)$ pertenece a $\mathcal{I}_{\kappa^3}$, el Lema 1.4.1 implica que

$$\begin{aligned} \omega\left((\kappa^{j_0} a, \kappa^{j_0+1} a)\right) &\leq \omega\left((\kappa^{j_0-1} a, \kappa^{j_0+1} a)\right) \\ &\leq C_\kappa\, \omega((\kappa^{j_0-1} a, \kappa^{j_0} a)) \\ &\leq C_\kappa \omega(I). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos obtenido $\int_I |f(x)|dx \leq C_\kappa\, \omega(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}^c_\kappa$. $\square$

Otra propiedad muy útil es el siguiente Lema de equivalencia de normas. Notar que, en el contexto del BMO clásico, esto es consecuencia de la desigualdad de John-Nirenberg (ver el Lema 1.5.1 de la sección 1.5).

Lema 5.2.3. *Propiedad de equivalencia de normas. Sea $\omega \in A^p_{loc}$ y $\kappa > 1$. Para $1 \leq r \leq p'$, existe una constante $C_\kappa = C(r, \kappa, [\omega]_{p,\kappa})$ tal que si $f \in BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ entonces*

$$\left(\frac{1}{\omega(I)} \int_I |f(x) - f_I|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \leq C_\kappa\, \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \tag{5.3}$$

para todo $I \in \mathcal{I}_\kappa$, y

$$\left(\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \leq C_\kappa \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \tag{5.4}$$

para todo $I \in \mathcal{I}_\kappa^c$.

Demostración. Sea $\omega \in A^p_{loc}$ y $f \in BMO^\kappa_{loc}(\omega)$. Primero, probaremos que se cumple (5.3). Para todo $i \in \mathbb{Z}$, sea $J_i = (\kappa^i, \kappa^{i+3})$. Entonces, $\omega \in A^p_{loc}$ y $J_i \in \mathcal{I}_{\kappa^4}$ implican $\omega \in A^p(J_i)$, con $[\omega]_{A^p(J_i)} \leq [\omega]_{p,\kappa}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Como $BMO^\kappa_{loc}(\omega) \subset BMO(\omega)$, el BMO con peso soportado en $\mathbb{R}^+$, $f|_{J_i} \in BMO_{J_i}(\omega)$, y por la desigualdad de equivalencia de normas para $BMO_{J_i}(\omega)$, tenemos

$$\left(\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x) - f_I|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \leq C_i \|f\|_{BMO_\rho(\omega)},$$

para todo $I \subset J_i$. Dado que la constante C_i depende de i sólo a través de $[\omega]_{A^p(J_i)}$, podemos reemplazarla por una constante C_κ independiente de J_i. Por lo tanto, como todo intervalo local $I \in \mathcal{I}_\kappa$ está contenido en algún J_i, $i \in \mathbb{Z}$, obtenemos el resultado deseado (5.3).

Para probar que también se satisface (5.4) para $I = (a, \kappa a)$, observar que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} &\leq \left(\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x) - f_I|^r \omega^{1-r}(x)dx\right)^{1/r} \\ &+ \left(\frac{\omega^{1-r}(I)}{\omega(I)}\right)^{1/r} |f_I|.\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho, está acotado por $\|f\|_{BMO^\kappa_{loc}(\omega)}$. Podemos probar esto siguiendo el mismo argumento que utilizamos par demostrar (5.3). Para el segundo término, observar que I pertenece a $\mathcal{I}_{\kappa^2}$ y que ω^{1-r} pertenece a A^r_{loc}, ya que $\omega \in A^p_{loc}$ y $p \leq r'$, y ésto implica $\omega^{1-r}(I)^{1/r}\omega(I)^{1/r'} \leq C_\kappa\, |I|$. Entonces

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega^{1-r}(I)}{\omega(I)}\right)^{1/r} |f_I| &\leq C_\kappa \frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx \\ &\leq C_\kappa\, \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}.\end{aligned}$$

Para extender este resultado a $I = (a,b)$ con $b > \kappa a$, hay que proceder análogamente a la prueba del Lema 5.2.2. $\square$

5.3. Continuidad de $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ en $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$.

Ahora estableceremos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.3.1. *Dados $\kappa > 1$ y $\omega \in A^1_{loc}$, existe una constante $C = C(\kappa, [\omega]_{1,\kappa})$ tal que*

$$\|\mathrm{M}_{loc,\kappa} f\|_{BMO_{\rho}(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_{\rho}(\omega)}$$

para todo $f \in BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$.

Demostración. Sea $f \in BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$. Primero probaremos que la condición de oscilación media acotada (5.1) se satisface para $\mathrm{M}_{loc,\kappa} f$. Consideremos $I = (a,b) \in \mathcal{I}_{\kappa}$, es decir, con $0 < a < b < \kappa a$. Vamos a probar que

$$\frac{1}{\omega(I)} \int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) - c| dx \leq C\|f\|_{BMO_{\rho}(\omega)}, \tag{5.5}$$

para alguna constante c dependiendo de f, I y $C = C(\kappa, [\omega]_{1,\kappa})$.

Sea $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\kappa^{j_0} < a \leq \kappa^{j_0+1}$, llamemos $I_0 \doteq (\kappa^{j_0-1}, \kappa^{j_0+3})$. Entonces, para todo $x \in I$ y todo $J = (a', b') \in \mathcal{I}_{\kappa}$ con $x \in J$, tenemos $J \subset I_0$. Esto es cierto ya que $I \cap J \neq \emptyset$ implica $a' < b$ y $b' > a$, y por lo tanto $b' < \kappa a' < \kappa b < \kappa^2 a \leq \kappa^{j_0+3}$ y $a' > b'/\kappa > a/\kappa > \kappa^{j_0-1}$. Entonces, para todo $x \in I$, se tiene que

$$\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) \leq M_{I_0} f(x),$$

donde M_{I_0} es la maximal de Hardy-Littlewood soportada en I_0, es decir, para cada $x \in I$, se toman los promedios en f sólo sobre intervalos que contienen a x y están contenidos en I_0.

A continuación, acotamos el lado izquierdo de (5.5) por la suma de A y B, donde

$$A = \frac{1}{\omega(I)} \int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) - M_{I_0} f(x)| dx$$

y

$$B = \frac{1}{\omega(I)} \int_I |M_{I_0} f(x) - c| dx.$$

Consideramos primero A. Dado que para todo $x \in I$ tenemos $\mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) \leq M_{I_0} f(x) \leq \mathrm{M}_{loc,\kappa} f(x) + \widetilde{\mathrm{M}}^{\kappa}_{loc} f(x)$, donde

$$\widetilde{\mathrm{M}}^{\kappa}_{loc} f(x) = \sup_{x \in J \subset I_0, J \in \mathcal{I}^c_\kappa} \frac{1}{|J|} \int_J |f(y)| dy,$$

entonces

$$A \leq \frac{1}{\omega(I)} \int_I \widetilde{\mathrm{M}}^{\kappa}_{loc} f(x) dx.$$

Si $J \in \mathcal{I}^c_\kappa = \{(\alpha, \beta) : \alpha > 0, \beta \geq \kappa\alpha\}$ y $J \subset I_0 = (\kappa^{j_0 - 1}, \kappa^{j_0+3})$, entonces $|J| > (\kappa - 1)\kappa^{j_0-1} = \frac{\kappa-1}{\kappa^4-1} |I_0|$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{M}}^{\kappa}_{loc} f(x) &\leq C_\kappa \frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} |f(y)| dy \\ &\leq C_\kappa \, \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \frac{\omega(I_0)}{|I_0|}, \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, donde la última desigualdad sale de (5.2), ya que $f \in BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ y $I_0 \in \mathcal{I}^c_\kappa$.

Entonces

$$A \leq C_\kappa \, \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \frac{|I|}{\omega(I)} \frac{\omega(I_0)}{|I_0|}. \tag{5.6}$$

Como $\omega \in A^1_{loc}$, $I_0 \in \mathcal{I}_{\kappa^5}$ y $I \subset I_0$, (1.23) implica

$$\omega(I_0) \leq C_\kappa \frac{|I_0|}{|I|} \omega(I)$$

y entonces A está acotada por $\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}$ multiplicado por una constante $C = C(\kappa, [\omega]_{1,\kappa})$.

Para obtener lo mismo para

$$B = \frac{1}{\omega(I)} \int_I |M_{I_0} f(x) - c| dx,$$

consideramos $c = (M_{I_0} f)_I$. Observar que $M_{I_0} f < \infty$ en *c.t.p.*, pues $f \in BMO(\omega)$. Además, $\omega \in A^1_{loc}$ y $I_0 \in \mathcal{I}_{\kappa^5}$ implica $\omega \in A^1(I_0)$, con la constante $A^1(I_0)$ dependiendo sólo de $[\omega]_{1,\kappa^5}$, y por lo tanto es independiente de I_0 y de I. Luego, usamos el Teorema 1.5.1 con $Q = I_0$ para obtener $B \leq C\|f\|_{BMO_{I_0}(\omega)}$, con $C = C(\kappa, \omega)$. Como $\|f\|_{BMO_{I_0}(\omega)} \leq \|f\|_{BMO(\omega)} \leq \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}$, hemos obtenido la desigualdad deseada.

Ahora probaremos que la condición de promedio acotado (5.2) se cumple para $\mathrm{M}_{loc,\kappa}f$. Por el Lema 5.2.2, será suficiente con probar

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x)|dx \leq C_\kappa \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \tag{5.7}$$

para $I = (a, \kappa a)$, donde $a > 0$.

Sea $I^* \doteq (a/\kappa, \kappa^{\frac{3}{2}}a)$ y consideremos $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{I^*}$ y $f_2 = f\chi_{I^{*c}}$, donde el complemento se toma en $\mathbb{R}^+$. Probaremos que la desigualdad (5.7) se cumple para $\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_1$ y $\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_2$ por separado.

Consideremos primero $\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_1$. Usando la desigualdad de Hölder , obtenemos

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_1(x)|dx \leq \left(\frac{1}{\omega(I)}\int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_1(x)|^2\omega^{-1}(x)dx\right)^{1/2}. \tag{5.8}$$

Como $\omega \in A^1_{loc} \subset A^2_{loc}$ y por lo tanto $\omega^{-1} \in A^2_{loc}$, por la continuidad de la maximal de Hardy-Littlewood local (Teorema 1.4.1 de la sección 1.4), tenemos que $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ es de tipo fuerte $(2,2)$ con peso ω^{-1}. Entonces, el lado derecho de (5.8) está acotado por una constante multiplicando

$$\left(\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f_1(x)|^2\omega^{-1}(x)dx\right)^{1/2}. \tag{5.9}$$

Dado que $I^* \in \mathcal{I}_{\kappa^3}$, $I \subset I^*$ y $|I^*| = C_\kappa|I|$, la propiedad (1.23) implica $\omega(I^*) \leq C_\kappa\ \omega(I)$, y por lo tanto (5.9) está acotada por

$$C_\kappa\left(\frac{1}{\omega(I^*)}\int_{I^*} |f(x)|^2\omega^{-1}(x)dx\right)^{1/2}.$$

Finalmente, como $I^* \in \mathcal{I}^c_\kappa$, usamos la desigualdad (5.4) con $r = 2$ para obtener que el lado izquierdo de (5.8) está acotado por una constante $C = C([\omega]_{1,\kappa}, \kappa)$ multiplicada por $\|f\|_{BMO_\rho(\omega)}$.

Consideremos ahora $\mathrm{M}_{loc,\kappa}f_2(x)$, con $x \in I = (a, \kappa a)$. Observar que para f_2 y ese x, es suficiente con tomar el supremo de los promedios de la maximal local sólo sobre aquellos $J \in \mathcal{I}_\kappa$ tales que $x \in J$ y $J \cap I^{*c} \neq \emptyset$. Recordemos que $I^* = (\frac{a}{\kappa}, \kappa^{\frac{3}{2}}a)$. Si un intervalo $J = (a', b')$ satisface $J \cap I \neq \emptyset$, entonces $a' < \kappa a$ y $a < b'$. Si también $J \in \mathcal{I}_\kappa$, entonces $a' > a/\kappa$ y $b' < \kappa^2 a$. Luego, obtenemos $J \subset I^{**}$, donde $I^{**} \doteq (a/\kappa, \kappa^2 a)$. Observar que

$I^* \subset I^{**}$, ya que $\kappa > 1$. Además, si $J \cap I^{*c} \neq \emptyset$ entonces $b' \geq \kappa^{\frac{3}{2}} a$ y ésto, junto a $a' < \kappa a$, implica $|J| > C_\kappa |I^{**}|$. Luego, para todo $x \in I$ hemos obtenido

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{loc,\kappa} f_2(x) &\leq C_\kappa \frac{1}{|I^{**}|} \int_{I^{**}} |f(y)| dy \\ &\leq C_\kappa \, \|f\|_{BMO_\rho(\omega)} \frac{\omega(I^{**})}{|I^{**}|}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde la última desigualdad se cumple pues $f \in BMO^\kappa_{loc}(\omega)$ y $I^{**} \in \mathcal{I}^c_\kappa$.

Por último, dado que $\omega \in A^1_{loc}$, $I^{**} \in \mathcal{I}_{\kappa^4}$ y $I \subset I^{**}$, la propiedad de duplicación (1.23) de la sección 1.4 implica

$$\frac{1}{\omega(I)} \int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa} f_2(x)| dx \leq C_\kappa \, \|f\|_{BMO_\rho(\omega)}.$$

De esta manera hemos probado el Teorema 5.3.1.

□

5.4. Una condición necesaria.

En [**MW76**], Muckenhoupt y Wheeden introdujeron otra versión de un espacio BMO con pesos. Más precisamente, dado un intervalo I, en la condición de oscilación media acotada, $\omega(I)$ es reemplazada por $\operatorname{ess\,inf}_{x\in I} \omega(x)|I|$. De manera similar, consideremos en esta sección la correspondiente versión local de ese espacio.

Definición 5.4.1. Denotaremos con $BMO^{\kappa,*}_{loc}(\omega)$ al espacio de todas las funciones f localmente integrables en $\mathbb{R}^+$ que satisfacen

$$\frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_{x\in I} \omega(x)|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx \leq C_\kappa, \quad \text{para todo } I \in \mathcal{I}_\kappa, \tag{5.11}$$

y

$$\frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_{x\in I} \omega(x)|I|} \int_I |f(x)| dx \leq C_\kappa, \quad \text{para } I = (a, \kappa a), a > 0. \tag{5.12}$$

La norma $\|f\|_{BMO^{\kappa,*}_{loc}(\omega)}$ será la menor constante C_κ que satisface ambas condiciones.

Es claro que $BMO^{\kappa,*}_{loc}(\omega) \subset BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$, ya que para cualquier peso ω y cualquier intervalo I se tiene $\omega(B) \geq \operatorname{ess\,inf}_{x\in I}\omega(x)|I|$, y, por el Lema 5.2.2, una función sólo necesita satisfacer la condición de promedio acotado en intervalos críticos para pertenecer a $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$. Además, si suponemos $\omega \in A^1_{loc}$, entonces $BMO^{\kappa,*}_{loc}(\omega) = BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$, con equivalencia de normas. Luego, por el Teorema 5.3.1, tenemos que $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ está acotada de $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ en $BMO^{\kappa,*}_{loc}(\omega)$, si $\omega \in A^1_{loc}$. Probaremos ahora que la recíproca de este resultado también es cierta.

Teorema 5.4.1. *Si $\kappa > 1$, entonces $\mathrm{M}_{loc,\kappa} : BMO^{\kappa}_{loc}(\omega) \longrightarrow BMO^{\kappa,*}_{loc}(\omega)$ si y sólo si $\omega \in A^1_{loc}$.*

Demostración. Por lo remarcada después de la definición 5.4.1, sólo necesitamos probar la necesidad de la condición $\omega \in A^1_{loc}$. Supongamos que $\mathrm{M}_{loc,\kappa}$ está acotada de $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$ en $BMO^{\kappa,*}_{loc}(\omega)$ y consideremos un intervalo $I \in \mathcal{I}_\kappa$. Dado que $L^\infty(\omega^{-1}) = \{f : f\omega^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^+)\}$ está contenido en $BMO^{\kappa}_{loc}(\omega)$, tenemos

$$\frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_{x\in I}\omega(x)|I|^2}\int_I\int_I |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) - \mathrm{M}_{loc,\kappa}f(y)|dxdy \leq C\|f\omega^{-1}\|_\infty, \tag{5.13}$$

para todo $f \in L^\infty(\omega^{-1})$.

Dividimos el intervalo I en seis subintervalos disjuntos con igual longitud, es decir, hacemos

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6$$

donde todos los I_i son disjuntos y $|I_i| = \frac{|I|}{6}$. Más precisamente, si $I = (a,b)$ entonces $I_i = (a + \frac{b-a}{6}(i-1), a + \frac{b-a}{6}i)$, $i = 1, ..., 6$.

Si consideramos $f = \omega\chi_{I_1}$, entonces (5.13) implica

$$\int_{I_4}\int_{I_1} |\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) - \mathrm{M}_{loc,\kappa}f(y)|dxdy \leq C|I|^2 \inf_{x\in I}\omega(x), \tag{5.14}$$

Si $x \in I_1$ entonces claramente $\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) \geq \frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}|f| = \frac{\omega(I_1)}{I_1}$. Si $y \in I_4$ entonces para todo intervalo J tal que $y \in J$ y $J \cap I_1 \neq \emptyset$ se tiene $|J| > |I_2 \cup I_3| = 2|I_1|$. Luego, $\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(y) \leq \frac{1}{2}\frac{\omega(I_1)}{I_1}$ y eso implica $|\mathrm{M}_{loc,\kappa}f(x) - \mathrm{M}_{loc,\kappa}f(y)| \geq C\omega(I_1)/|I|$ para todo $x \in I_1$ y $y \in I_4$. Por lo tanto, si integramos sobre I_1 y I_4, la desigualdad (5.14) nos da

$$\omega(I_1) \leq C|I| \inf_{x \in I} \omega(x).$$

Análogamente, podemos obtener la misma desigualdad para los otros intervalos I_i, $i = 2, ..., 6$, considerando $f = \omega \chi_{I_i}$ e integrando sobre x en I_i e y sobre I_j, donde I_j está al menos una distancia $|I|/3$ lejos de I_i. Por ejemplo, a I_2 lo comparamos con I_5, y a I_3 con I_1 o I_6.

Luego, siguiendo este camino llegamos a

$$\omega(I_i) \leq C|I| \inf_{x \in I} \omega(x), \quad \text{for } i = 1, ..., 6.$$

Finalmente, sumando en i obtenemos que se satisface la condición A^1 para el intervalo $I \in \mathcal{I}_\kappa$. Por lo tanto, $\omega \in A^1_{loc}$. $\square$

EPÍLOGO.

La media mañana adormece mi mesa de trabajo.

Un sol leve apoya un dedo sobre este teorema, un dedo que atraviesa los densos nubarrones, la gris nave nodriza del viento y las tormentas que agita las más altas ramas de los árboles del botánico, una verde tribuna a tres pisos del suelo que luce alegre, arengadora y de repente se queda quieta, pasmosa y paralizante.

(Hay algo que me dicen y mi cabeza no sabe que es. Pero mi cuerpo parece entender y por eso lo escribe.)

Todo es fruto del cielo, del sol que está vedado en estos días, aunque a veces una franja pequeña y celeste aparezca y nos brinde un retazo de color puro. entre tanta penumbra ocre de muebles de madera.

Abbey Road surgiendo de un vinilo crea una atmósfera donde el tiempo se eterniza.

No conozco el año de este acontecimiento. No existen coordenadas que lo puedan contener.

(Al cerrar los ojos mi cuerpo se escapa en un reflejo que se vuelve sonido y llega al botánico, entre los remolinos que dejan los coches a mas de 60 km por hora por la avenida).

BIBLIOGRAFÍA

[AFT06] I. Abu-Falahah and J. L. Torrea. Transferring strong boundedness among Laguerre function spaces. preprint, 2006.

[AK82] K. F. Andersen and R. A. Kerman. Weighted norm inequalities for generalized Hankel conjugate transformations. *Studia Math.*, 71(1):15–26, 1981/82.

[AM82] Kenneth F. Andersen and Benjamin Muckenhoupt. Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions. *Studia Math.*, 72(1):9–26, 1982.

[BCRFRM10a] J. J. Betancor, A. Chicco Ruiz, J. C. Fariña, and L. Rodríguez-Mesa. Maximal operators, Riesz transforms and Littlewood-Paley functions associated with Bessel operators on BMO. *J. Math. Anal. Appl.*, 363(1):310–326, 2010.

[BCRFRM10b] J. J. Betancor, A. Chicco Ruiz, J. C. Fariña, and L. Rodríguez-Mesa. Odd BMO($\mathbb{R}$) functions and Carleson measures in the Bessel setting. *Integral Equations Operator Theory*, 66(4):463–494, 2010.

[BDS81] Colin Bennett, Ronald A. DeVore, and Robert Sharpley. Weak-L^∞ and BMO. *Ann. of Math. (2)*, 113(3):601–611, 1981.

[BS88] Colin Bennett and Robert Sharpley. *Interpolation of operators*, volume 129 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[CRH07] Anibal Chicco Ruiz and Eleonor Harboure. Weighted norm inequalities for heat-diffusion Laguerre's semigroups. *Math. Z.*, 257(2):329–354, 2007.

[CRH09] Anibal Chicco Ruiz and Eleonor Harboure. Weighted local BMO spaces and the local Hardy-Littlewood maximal operator. *Cuad. Mat. Mec.*, page 11, 2009.

[Duo01] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[Dzi08] Jacek Dziubański. Hardy spaces for Laguerre expansions. *Constr. Approx.*, 27(3):269–287, 2008.

[EMOT53] Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G. Tricomi. *Higher transcendental functions. Vols. I, II.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[Mar82] C. Markett. Mean Cesàro summability of Laguerre expansions and norm estimates with shifted parameter. *Anal. Math.*, 8(1):19–37, 1982.

[MROSSG97] F. J. Martín-Reyes, P. Ortega Salvador, and M. D. Sarrión Gavilán. Boundedness of operators of Hardy type in $\Lambda^{p,q}$ spaces and weighted mixed inequalities for singular integral operators. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 127(1):157–170, 1997.

[MST05] R. Macías, C. Segovia, and J. L. Torrea. Heat-diffusion maximal operators for laguerre semigroups with negative parameters. *J. Funct. Anal.*, 229(2):300–316, 2005.

[MST06] R. Macías, C. Segovia, and J. L. Torrea. Weighted norm estimates for the maximal operator of the laguerre functions heat diffusion semigroup. *Studia Math.*, 172(2):149–167, 2006.

[Muc69] Benjamin Muckenhoupt. Poisson integrals for Hermite and Laguerre expansions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 139:231–242, 1969.

[Muc70] Benjamin Muckenhoupt. Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 419-431; ibid.*, 147:433–460, 1970.

[Muc72] Benjamin Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, 44:31–38, 1972.

[MW76] Benjamin Muckenhoupt and Richard L. Wheeden. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. *Studia Math.*, 54(3):221–237, 1975/76.

[Now03] Adam Nowak. Heat-diffusion and Poisson integrals for Laguerre and special Hermite expansions on weighted L^p spaces. *Studia Math.*, 158(3):239–268, 2003.

[NS06] Adam Nowak and Krzysztof Stempak. Weighted estimates for the Hankel transform transplantation operator. *Tohoku Math. J. (2)*, 58(2):277–301, 2006.

[NS09] Adam Nowak and Peter Sjögren. The multi-dimensional pencil phenomenon for Laguerre heat-diffusion maximal operators. *Math. Ann.*, 344(1):213–248, 2009.

[Paz83] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[ST05] Krzysztof Stempak and José Luis Torrea. BMO results for operators associated to Hermite expansions. *Illinois J. Math.*, 49(4):1111–1131 (electronic), 2005.

[Ste90] Krzysztof Stempak. Mean summability methods for Laguerre series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 322(2):671–690, 1990.

[Ste92] K. Stempak. Almost everywhere summability of Laguerre series. II. *Studia Math.*, 103(3):317–327, 1992.

[Ste94] Krzysztof Stempak. Heat-diffusion and Poisson integrals for Laguerre expansions. *Tohoku Math. J. (2)*, 46(1):83–104, 1994.

[SW71] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[Tha90a] S. Thangavelu. On almost everywhere and mean convergence of Hermite and Laguerre expansions. *Colloq. Math.*, 60/61(1):21–34, 1990.

[Tha90b] S. Thangavelu. Summability of Laguerre expansions. *Anal. Math.*, 16(4):303–315, 1990.

[Tha93] Sundaram Thangavelu. *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, volume 42 of *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[Wat66] G. N. Watson. *A treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, 1966.

[Wel75] G. V. Welland. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51:143–148, 1975.