UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis Real**

Título de la tesis:

Análisis en el semigrupo generado por el operador de Schrödinger

Institución donde se realizó:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL)

Autor:

Enrique Adrián Cabral

Director de Tesis:

Dra. Eleonor Harboure

Codirector de Tesis:

Dr. Bruno Bongioanni

Defendida ante el jurado compuesto por:

Dra. Raquel Crescimbeni

Dr. Francisco Martin Reyes

Dr. Roberto Scotto

Año de presentación: 2014

Dedicado a

mi familia

Agradecimientos

Me gustaría comenzar dando las gracias a mis padres por su ejemplo y constante sacrificio para que pudiera estudiar y desarrollarme profesionalmente. A mi esposa, por ser mi sostén y mi compañera incondicional todos estos años. A mi hijo Mauro, por la espera, la paciencia y su ternura. A mi hija Juliana por venir a mi vida.

Un agradecimiento muy especial a mis directores de tesis: Pola y Bruno. Gracias por confiar en mí, por la paciencia, el buen humor y siempre estar dispuestos a responder a mis dudas y guiarme durante estos años.

También quiero agradecer a todos mis profesores del profesorado, la licenciatura y el doctorado. En especial a las personas que me incentivaron y ayudaron a seguir estudiando matemáticas después del profesorado, el Dr. Rubén Cerutti, la Dra. Magdalena Lucini y mi amigo Samuel Noya.

Agradezco a los miembros del jurado por haber aceptado leer y comentar este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a las instituciones que me permitieron llevar adelante el doctorado: CONICET, por otorgarme las becas necesarias para sustentarme económicamente, a la Universidad Nacional del Litoral por darme el marco académico para estudiar la carrera y en particular, al Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, que fue el lugar en el que trabajé con mucho placer todo este tiempo. Quiero agradecer a cada uno de los integrantes del IMAL y especialmente a mis compañeros becarios con los que he compartido muy gratos e inolvidables momentos.

Índice general

Resumen

En los últimos 20 años el análisis real asociado a los operadores de tipo Schrödinger ha comenzado a desarrollarse de modo progresivo y especialmente durante la última década muchos han sido los trabajos que buscan extender los espacios y resultados sobre operadores, conocidos en el análisis del Laplaciano, a este contexto.

De manera general, se llama operador de Schrödinger a un operador de la forma $\mathcal{L} = -\Delta + V$, donde V es un potencial no negativo. El propósito de este trabajo es profundizar en el estudio de algunos de los operadores y espacios asociados al análisis armónico relacionado con el semigrupo cuyo operador infinitesimal es el operador de Schrödinger $\mathcal{L}$, donde V es no idénticamente nulo y satisface una desigualdad anti Hölder de orden q con $q > d/2$, donde $d \geq 3$ denota la dimensión.

Más específicamente, estamos interesados en definir y estudiar espacios de tipo Hardy y BMO con pesos en este contexto, $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ y $BMO_{\mathcal{L}}(w)$, como así también estudiar la acotación de ciertos operadores integrales singulares y fraccionarias en tales espacios y en $L^p(w)$. Las clases de pesos a los que hacemos referencia son clases de pesos similares a las introducidas por Muckenhoupt en el contexto clásico, pero con cierta dependencia de ρ, donde

$$\rho(x) = \sup\left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}. \tag{1}$$

A lo largo de este trabajo se desarrolla una teoría general que abarca espacios y operadores relacionados a lo que denominamos función radio crítico, esto es, una función ρ no negativa y continua tal que existen constantes $c_\rho, N_0 \geq 1$ tales que para cada

$x, y \in \mathbb{R}^d$ se cumple

$$c_\rho^{-1}\rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq c_\rho\ \rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}. \tag{2}$$

Es conocido que dado un operador de tipo Schrödinger con un potencial V que satisface las condiciones ya mencionadas, la función ρ definida a partir de tal V por (1) satisface la condición (2) (ver [39]), y es por ello que todo el análisis desarrollado para una función radio crítico es aplicable al contexto de $\mathcal{L}$.

Una de las herramientas principales para llevar adelante esta tarea es el desarrollo de una teoría de extrapolación adecuada a los operadores maximales y pesos que surgen en el análisis de $\mathcal{L}$. Esta teoría es desarrollada en un marco bastante general de manera que puede adaptarse a nuestro contexto.

Como consecuencia de este desarrollo es posible obtener resultados novedosos como la acotación $L^\infty(w)-BMO_{\mathcal{L}}(w)$, $L^1(w)-H^1_{\mathcal{L}}(w)$ y en $L^p(w)$ para operadores característicos del análisis asociados a $\mathcal{L}$ como ser las transformadas de Riesz y otros.

Por otra parte, también estamos interesados en establecer desigualdades con pesos para operadores asociados a $\mathcal{L}$, es decir, desigualdades de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)\ dx,$$

donde, por lo general, T es un operador con cierto grado de singularidad o su conmutador y S es alguna función maximal, ambos dependientes de ρ y por consiguiente de V.

Introducción

El propósito de este trabajo es profundizar en el estudio de algunos de los operadores y espacios asociados al análisis armónico relacionado al semigrupo cuyo operador infinitesimal es el operador de Schrödinger $\mathcal{L} = -\Delta + V$, donde V es un potencial no negativo, no idénticamente nulo que satisface la propiedad anti Hölder-q con $q > d/2$, donde d denota la dimensión la cual se supondrá mayor o igual que tres.

Los resultados fundamentales que sentaron las bases para el desarrollo de la teoría del análisis armónico relacionado al operador de Schrödinger bajo las hipótesis mencionadas anteriormente, se encuentran en el trabajo de Z. Shen (ver [39]).

Allí se introducen las herramientas básicas como la definición de la función radio crítico asociada al potencial V, sus propiedades, las estimaciones de la solución fundamental y el comportamiento de operadores tipo transformada de Riesz, en este contexto, sobre los espacios de Lebesgue.

Dado que el operador $\mathcal{L} = -\Delta + V$ es una perturbación de $-\Delta$, es esperable que localmente y dependiendo del tamaño de V, el comportamiento de los operadores asociados al análisis armónico de $\mathcal{L}$ se parezca al de los operadores clásicos. Este es el papel que juega la función radio crítico. Así, por ejemplo, los núcleos de las transformadas de Riesz de ambos contextos son "similares" en un entorno de la diagonal determinada por esta función radio crítico. Esta similitud significa que la diferencia entre ellos en esa región resulta acotada por un núcleo positivo que genera un operador acotado en todos los espacios de Lebesgue incluyendo los extremos $p = 1$ y $p = \infty$.

Hay aún muchas cuestiones relevantes y resultados que son bien conocidos para el análisis relacionado al operador de Laplace (i.e. $V \equiv 0$) cuyas contrapartes, en el contexto

Schrödinger, no han sido suficientemente investigadas.

Así, recientemente en [5], los autores introducen una familia de pesos A_p^ρ (que incluye a las clases de Muckenhoupt) y demuestran que diversos operadores del análisis relacionados a $\mathcal{L} = -\Delta + V$ resultan acotados sobre $L^p(w)$ para w en A_p^ρ. Entre ellos se encuentran el operador maximal del semigrupo y las transformadas de Riesz.

Los sustitutos naturales para $p = 1$ y $p = \infty$, esto es los espacios $H_{\mathcal{L}}^1$ y $BMO_{\mathcal{L}}$, fueron introducidos y estudiados en [18] y [19] respectivamente. Recientemente, diversos autores han contribuido a enriquecer esta teoría, ver por ejemplo [14], [15], [20], [41], [43], [44] y [45]. En particular, mis directores de tesis han hecho algunos aportes al tema (ver [4]).

Por otra parte, la teoría de extrapolación para el caso del Laplaciano, introducida en 1984 por J.L. Rubio de Francia (ver [37]y también [25]) ha cobrado renovados bríos en los últimos años, obteniéndose nuevas e interesantes aplicaciones, (ver por ejemplo [9], [10], [11], [13], [16], [17], [23] y [32]). Estas incluyen desigualdades vectoriales, desigualdades débiles, en espacios de Orlicz, desigualdades de tipo Sobolev-Poincairé y acotación de diversos operadores en L^p con exponente variable.

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo es poder desarrollar una teoría de extrapolación que se adecúe al contexto Schrödinger, de manera que los resultados obtenidos, además del valor que poseen en sí mismos, permitan obtener desigualdades integrales entre operadores, que por una parte son de comparación y por otra nos dan la acotación de los mismos en $L^p(w)$, para un w pertinente, como así también desigualdades vectoriales.

El teorema de extrapolación original de Rubio de Francia es un elemento teórico de gran profundidad pero, en principio, no resulta fácil su aplicación a casos concretos ya que supone conocer la acotación de un operador en espacios L^p con pesos para un cierto valor p_0, $1 \leq p_0 < \infty$ y para todo peso en la clase A_{p_0} de Muckenhoupt. En la mayoría de los casos, no se dispone de un valor p_0 para el cual resulte más fácil probar la acotación y, por otra parte, los operadores más interesantes no preservan L^p, para $p = 1$ o $p = \infty$. Sin embargo, estos operadores satisfacen en los valores extremos de p alguna acotación con pesos sustitutos, las cuales pueden probarse en forma independiente. En esta dirección, presentamos en nuestro contexto, un par de teoremas de extrapolación (ver Teoremas 4.1.7 y 6.4.6) que nos permiten extrapolar a partir de acotaciones del tipo $L^\infty - BMO$ y $H^1 - L^1$ con pesos.

En [11] los autores dan un nuevo enfoque al teorema de extrapolación para desigualdades L^p pesadas que relacionan dos operadores, donde los pesos varían en la clase A_∞ de Muckenhoupt. Pero, los más interesante es que diseñan un método que permite probar un caso particular en forma relativamente sencilla y aplicable a diversos operadores clásicos. La técnica se basa en una desigualdad probada por Lerner (ver [30]) y en una estimación puntual de la maximal sharp del operador en cuetión.

En este trabajo se prueba que esta técnica puede adaptadarse también a nuestro contexto, donde, tanto los pesos como los operadores están controlados a través de la función radio crítico ρ. Para ello se obtienen versiones apropiadas de la desigualdad de Lerner, usando una maximal sharp adecuada al contexto.

A pesar de que nuestro marco de referencia es el operador de Schrödinger, en general a lo largo de la tesis se desarrolla una teoría a partir de lo que denominamos función radio crítico, esto es una función ρ no negativa y continua para la cual existen constantes $c_\rho, N_0 \geq 1$ tales que para cada $x, y \in \mathbb{R}^d$ se cumple

$$c_\rho^{-1}\rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq c_\rho\ \rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}.$$

A partir de esta función base ρ, se introducen clases de pesos y operadores para los cuales se intenta probar desigualdades en L^p con pesos. Más aún dada ρ, se introducen los espacios extremos correspondientes, esto es, los adecuados sustitutos de H^1 y BMO pesados. Cabe observar que todas las condiciones impuestas a las familias de pesos, operadores o espacios, en el caso límite $\rho = \infty$ (que corresponde a $V = 0$) resultan ser los clásicos, provenientes del operador de Laplace.

Como se mencionó anteriormente, dado un operador de tipo Schrödinger con un potencial V que satisface ciertas condiciones, existe una función radio crítico definida a partir de tal V, y es por ello que todo el análisis desarrollado para una función radio crítico ρ es aplicable al caso de $\mathcal{L}$.

En el primer capítulo presentaremos el contexto del operador de Schrödinger, el cual, como acabamos de mencionar, nos servirá de referencia a lo largo de este trabajo, así como también las herramientas fundamentales para abordar el estudio de los operadores y pesos que surgen en este contexto.

En el segundo capítulo comenzaremos desarrollando una teoría de extrapolación bastante general en términos de una familia de operadores lineales y sus pesos asociados. Este marco surge como una necesidad cuando se quiere trasladar los resultados clásicos de extrapolación del contexto del operador de Laplace al de Schrödinger. Luego, adaptamos resultados de extrapolación ya existentes los cuales están referidos a pares de operadores (ver [12]) y establecemos el enunciado preciso de la propiedad necesaria en nuestro contexto.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, en el tercer capítulo se define lo que es una función radio crítico y se presentan operadores maximales asociados (locales M_ρ^{loc} y no locales M_ρ^θ, con $\theta \geq 0$) y los pesos correspondientes a los mismos, es decir, aquellos que los hacen acotados en $L^p(w)$. Estas clases de pesos resultan ser más grandes que las clases A_p de Muckenhoupt. A continuación, se define un adecuado espacio de oscilación media acotada, $BMO_\rho(w)$ para un peso w en las clases mencionadas y se presenta un operador de tipo maximal sharp $M_\rho^\sharp$, el cual permite caracterizar tal espacio .

En el cuarto capítulo comenzamos probando una apropiada desigualdad de tipo Fefferman-Stein con pesos. Teniendo en cuenta esta desigualdad y algunos de los teoremas de extrapolación provistos en el Capítulo 2, establecemos un teorema que permite extrapolar una desigualdad en $L^p(w)$ y desigualdades a valores vectoriales a partir de una desigualdad $L^\infty(w) - BMO_\rho(w)$. Luego, se introducen familias de operadores T cuyos núcleos satisfacen ciertas propiedades de tamaño y suavidad relacionadas con la función radio crítico ρ. Estas estimaciones son similares a las satisfechas por los núcleos de las integrales singulares clásicas como así también por el núcleo de la integral fraccionaria. De hecho, si permitiéramos a ρ ser idénticamente ∞, se obtendría la teoría clásica. En vista de lo anterior y considerando las propiedades satisfechas por los núcleos, probamos la acotación $L^\infty(w) - BMO_\rho(w)$ para los operadores T antes mencionados y obtenemos, gracias al teorema de extrapolación ya demostrado, la acotación de tales operadores en $L^p(w)$ y en $L^p_{l^q}(w)$, para w apropiados. Posteriormente se aplican los resultados obtenidos a diversos operadores del análisis relacionado a $\mathcal{L}$, especialmente operadores del tipo transformada de Riesz y la integral fraccionaria. Para ello se prueba que los núcleos de tales operadores cumplen con las condiciones necesarias establecidas con anterioridad.

Iniciamos el Capítulo 5 probando una versión ρ-local de la desigualdad de Lerner, una desigualdad bastante general que relaciona la norma $L^1(w)$ de una función localmente integrable f, con la norma $L^1(M^{\text{loc}}_\rho w)$ de $M^\sharp_\rho f$. Luego, se prueban estimaciones puntuales para las funciones sharp de los operadores introducidos en el Capítulo 4 y sus conmutadores, las cuales combinadas con la desigualdad de Lerner y un adecuado teorema de extrapolación permiten obtener desigualdades de comparación de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)\, dx,$$

donde S es un adecuado operador maximal y T son los operadores mencionados anteriormente o sus conmutadores, con w perteneciente a una familia apropiada de pesos, que contiene a la clase A_∞ de Muckenhoupt, y $0 < p < \infty$. Se finaliza el capítulo aplicando los resultados obtenidos a operadores en el contexto Schrödinger.

Finalmente, en el sexto y último capítulo se definen los espacios de Hardy $H^1_\rho(w)$ asociados con una función radio crítico ρ para pesos que cumplen condiciones relativas a la misma ρ. En tales espacios se prueba una descomposición atómica como así también la correspondiente caracterización en término de ciertas transformadas de Riesz ρ-locales. Se demuestra además la acotación $H^1_\rho(w) - L^1(w)$ de los adjuntos de los operadores del tipo integral singular introducidos en el Capítulo 4. Estos resultados son interpretados para el caso $\mathcal{L}$. En este sentido se prueba que los espacios de Hardy considerados, $H^1_\rho(w)$, cuando ρ proviene de un operador de Schrödinger coinciden con los espacios $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ (definidos en [18] y [31]) definidos en términos del operador maximal del semigrupo generado por $\mathcal{L}$. De esta manera, se pueden obtener desigualdades pesadas de tipo $H^1_{\mathcal{L}}(w) - L^1(w)$ para diversos operadores tratados por Shen, que no se conocían con anterioridad. Asimismo, se obtiene en este marco tanto la descomposición atómica como la caracterización mediante transformadas de Riesz asociadas a $\mathcal{L}$, generalizando los resultados de [18] y [31]. Finalmente, se prueba un adecuado resultado de extrapolación que permite concluir la acotación en $L^p(w)$ de tales operadores, a partir de las desigualdades $H^1_\rho(w) - L^1(w)$ obtenidas.

Es pertinente observar que la mayor parte de los resultados originales de este trabajo se encuentran resumidos y publicados en [1] y [2].

Capítulo 1

Contexto Schrödinger

Como hemos acotado en la introducción, a lo largo de esta exposición trabajaremos en un marco general que incluye el análisis armónico proveniente de ciertos operadores de Schrödinger $\mathcal{L} = -\Delta + V$. Más aún este modelo nos servirá de guía y en las diversas instancias aplicaremos los teoremas obtenidos a ese contexto, los cuales resultarán en nuevos aportes a la teoría analítica asociada a $\mathcal{L}$.

Por esta razón comenzaremos describiendo el contexto de los operadores de Schrödinger con los que trabajaremos. Consideremos el operador diferencial de Schrödinger $\mathcal{L} = -\Delta + V$ en $\mathbb{R}^d$, para $d \geq 3$, donde V es un potencial que satisface condiciones bastante generales. En particular, se puede tomar $V(x) = |x|^2$, de modo que incluye el caso del oscilador armónico. Teniendo en cuenta las condiciones sobre V el operador $\mathcal{L}$ genera un semigrupo de difusión. En este capítulo comenzaremos describiendo algunas estimaciones conocidas para los núcleos de los elementos de este semigrupo. De igual modo presentaremos propiedades de una cierta función, que denominaremos función radio crítico ρ, la cual está asociada al operador de Schrödinger y cumple valiosas estimaciones y propiedades que nos serán de gran utilidad.

1.1 El operador $\mathcal{L}$

Durante todo este trabajo vamos a suponer que el potencial V es no negativo, no nulo y pertenece a una clase anti Hölder RH_q, con $q > d/2$. Una función localmente integrable V está en la clase anti Hölder RH_s para algún $s > 1$, si existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V^s(x)\ dx\right)^{1/s} \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)\ dx\right) \tag{1.1.1}$$

se cumple para toda bola B en $\mathbb{R}^d$. El siguiente lema resume algunas propiedades importantes de estas clases (ver [18] y [39], y las referencias en ellos).

Lema 1.1.1. *Sea $q > 1$.*

1. *$RH_p \subset RH_q$, $q \leq p < \infty$.*

2. *Si $V \in RH_q$ entonces existe $\varepsilon > 0$ el cual depende sólo de la constante C en* (1.1.1) *y la dimensión tal que $V \in RH_{q+\varepsilon}$.*

3. *Si $V \in RH_q$ entonces existe $C > 0$ tal que para $0 < r < R < \infty$ se verifica*

$$\frac{1}{r^{d-2}}\int_{B(x,r)} V(y)\ dy \leq C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{d}{q}-2}\frac{1}{R^{d-2}}\int_{B(x,R)} V(y)\ dy. \tag{1.1.2}$$

   Además, V pertenece a la clase de pesos A_∞ de Muckenhoupt. En particular, $V(x)dx$ es una medida doblante, esto es, existe $C_0 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$

$$\int_{B(x,2r)} V(y)\ dy \leq C_0\int_{B(x,r)} V(y)\ dy, \tag{1.1.3}$$

4. *Si V satisface*

$$\max_{x\in B} V(x) \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)\ dx\right).$$

   Entonces, $V \in RH_q$ para todo $q > 1$.

Observación 1.1.2. A partir de (1) y (2) es equivalente considerar en nuestras hipótesis $q > d/2$ o $q \geq d/2$.

Observación 1.1.3. Teniendo en cuenta *4.*, el caso en que V es un polinomio no negativo y en particular, el operador de Hermite $\mathcal{H} = -\Delta + |x|^2$, entran en nuestra consideración.

Bajo las condiciones impuestas al potencial V, es bien sabido que $-\mathcal{L}$ genera un semigrupo de difusión $\{T_t\}_t$, $T_t = e^{-t\mathcal{L}}$ (véase [40] y las referencias en él).

Los operadores T_t son integrales y están dados por núcleos que resultan ser simétricos (en x e y), conjuntamente continuos (en t, x e y) y uniformemente acotados,

$$T_t f(x) = e^{-t\mathcal{L}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} T_t(x,y) f(y)\, dy$$

cuya expresión concreta se desconoce. Sin embargo, a partir de la fórmula de Feynman-Kac se sigue que

$$0 \leq T_t(x,y) \leq W_t(x,y) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

También es posible dar mejores estimaciones para el tamaño de los núcleos $T_t(x,y)$. Para ello es necesario considerar la *función radio crítico* ρ asociada al potencial V, la cual está definida del siguiente modo

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}. \tag{1.1.4}$$

En estos términos se conoce una estimación para la diferencia entre los núcleos T_t y W_t (ver (3.2) en [18]), a saber, dado $\epsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que si $|x-y| < \rho(x)$,

$$|W_t(x,y) - T_t(x,y)| \leq C \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)} \right)^{\epsilon} \frac{1}{|x-y|^d}. \tag{1.1.5}$$

Proposición 1.1.4. *(Ver [21] y [29]) Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, entonces para todo $N > 0$, existe una constante C_N tal que para todo x e y en $\mathbb{R}^d$,*

$$T_t(x,y) \leq C_N\, t^{-d/2}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{C\,t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)} \right)^{-N}. \tag{1.1.6}$$

Además es posible obtener una cierta regularidad Lipschitz para los núcleos, la cual también es consecuencia de que $V \in RH_q$.

Proposición 1.1.5. *(Ver [22]) Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, entonces existe $0 < \delta < \min\{1, 2 - \frac{d}{q}\}$ y $c > 0$ tales que para todo $N > 0$, existe una constante C_N tal que*

$$|T_t(x,y) - T_t(x_0,y)| \leq C_N \left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}} \right)^{\delta} t^{-d/2}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{C\,t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)} \right)^{-N}, \tag{1.1.7}$$

cuando $|x-x_0| < \sqrt{t}$.

1.2 Función radio crítico asociada a $\mathcal{L}$

La función $m(x, V) = 1/\rho(x)$ fue introducida en [38] para un potencial V que satisface

$$\max_{x\in B} V(x) \leq C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)\ dx\Big),$$

para toda bola B en $\mathbb{R}^d$, con el objetivo de estudiar el problema de Neumann sobre un gráfico Lipschitz con dato en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para el operador $\mathcal{L}$. Luego, en [39] se extiende el estudio de ρ considerando más generalmente $V \in RH_q$, $q > d/2$.

A partir de la estimación (1.1.2), y la suposición $q > d/2$ se sigue que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V(y)\ dy = 0$$

y

$$\lim_{r\to \infty} \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V(y)\ dy = \infty.$$

Como consecuencia de tales observaciones es claro que $0 < \rho(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y también

$$\frac{1}{\rho(x)^{d-2}} \int_{B(x,\rho(x))} V(y)\ dy = 1.$$

Más aún, nuevamente por (1.1.2), si

$$\frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V(y)\ dy \simeq 1, \quad \text{entonces } r \simeq \rho(x).$$

El resultado que damos a continuación será muy utilizado en lo que sigue pues permite relacionar el valor de ρ en puntos distintos de $\mathbb{R}^d$ y en particular, afirma que tal función toma valores "similares" para puntos "similares".

Lema 1.2.1. *(Ver [38]) Existen constantes $c_\rho, N_0 \geq 1$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^d$,*

$$c_\rho^{-1}\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq c_\rho \rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}. \tag{1.2.1}$$

En particular, $\rho(x) \simeq \rho(y)$ cuando $|x-y| \leq C\rho(x)$, para alguna constante $C > 0$.

El siguiente lema es usado para controlar la integración de V sobre una bola.

Lema 1.2.2 (Ver [26]). *Supongamos que $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$. Sea $\mu > \log_2 C_0 + 1$, donde C_0 es la constante en (1.1.3). Entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$ existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{B(x_0,cR)} V(y)\, dy \leq CR^{d-2}\left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{\mu}. \tag{1.2.2}$$

1.3 Operadores asociados al semigrupo de difusión

El semigrupo generado por $\mathcal{L}$ da una respuesta al problema de difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\mathcal{L}u(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

en el sentido de que para f adecuadas la solución viene dada por $u(x,t) = T_t f(x)$. En este marco hay varios operadores que resultan importantes para el estudio de las propiedades de las soluciones del problema de difusión o su estado estacionario. Así, para la convergencia en casi todo punto de $u(\cdot,t)$ a f cuando t tiende a cero, se necesitan estimaciones del operador maximal asociado, esto es,

$$T^* f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|.$$

Otra herramienta útil en el estudio de la suavidad de las soluciones son las potencias negativas del operador $\mathcal{L}$ que pueden expresarse en términos del semigrupo mediante

$$\mathcal{L}^{-\alpha/2} f(x) = \int_0^\infty t^{\alpha/2} e^{-t\mathcal{L}} f(x) \frac{dt}{t}$$

y las transformadas de Riesz de primer orden

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L}^{-1/2}, \quad V^{1/2}\mathcal{L}^{-1/2}$$

y sus adjuntas u otras de orden superior como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad V\mathcal{L}^{-1}.$$

Al saber que los operadores T_t vienen dados a través de núcleos $T_t(x, y)$, es posible demostrar que los operadores recién mencionados también tienen núcleos asociados.

En el caso de $\mathcal{L}^{-\alpha/2}$ se pueden derivar estimaciones a partir de las enunciadas en las Proposiciones 1.1.4 y 1.1.5, mientras que en el caso de algunas de las transformadas de Riesz, las que involucran derivadas, se requiere un trabajo más cuidadoso. Estas son de hecho integrales “singulares” y las técnicas desarrolladas por Shen en [39], consisten en comparar con el caso de las correspondientes Riesz clásicas, usando métodos de ecuaciones en derivadas parciales. Estas nuevas integrales singulares son mejores que las de tipo Calderón-Zygmund en cuanto a tamaño en el infinito, pero algunas de ellas son peores en cuanto a suavidad. Esto trae como consecuencia que en el caso $V \in RH_q$, $d/2 < q < d$, las transformadas de Riesz $\nabla\mathcal{L}^{-1/2}$ no resulten operadores acotados en todos los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$.

Incluimos aquí algunos de los teoremas más relevantes probados en [39], que ilustran la situación y serán una herramienta básica en este trabajo (ver Teoremas 0.4, 0.5, 0.8, 3.1 y 5.10).

Teorema 1.3.1. *Si $V \in RH_q$ con $q > d$. Entonces $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$, $(-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$ y $\nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla$ son operadores de Calderón-Zygmund.*

Teorema 1.3.2. *Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Entonces, para $\gamma \in \mathbb{R}^d$, $(-\Delta + V)^{i\gamma}$ es un operador de Calderón-Zygmund.*

Teorema 1.3.3. *Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Entonces los operadores $V^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2}$ y $V(-\Delta+V)^{-1}$ son acotados en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p \leq s$ con $s = 2q$ y $s = q$ respectivamente. Además, cuando $d/2 \leq q < d$, el operador $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p \leq s$ con $1/s = 1/q - 1/d$.*

Otros operadores que contemplamos en este trabajo son los conmutadores de transformadas de Riesz-Schrödinger con operadores de multiplicación puntual por funciones b que pertenecen a una clase un poco más amplia que la clásica BMO. Algunos resultados previos en esta dirección pueden encontrarse en [26], [6] y [7].

Capítulo 2

Resultados sobre extrapolación

El teorema de extrapolación de Rubio de Francia afirma que, dado un operador sublineal T, el conocimiento de la acotación de T en $L^{p_0}(w)$, con $1 < p_0 < \infty$, para todo peso w en la clase de Muckenhoupt A_{p_0}, es suficiente para inferir la acotación de T en $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$ y w en A_p. Este teorema aparece por primera vez en su célebre trabajo [35]. Desde entonces, muchos autores han extendido y generalizado este resultado (ver [25], [36] y [37], entre otros).

Recientemente, en [11] (ver también [12]) los autores dan una prueba simplificada que permite extender la propiedad de extrapolación a algunos espacios de funciones de Banach con pesos, donde desigualdades a valores vectoriales aparecen naturalmente. La herramienta clave es nuevamente el algoritmo de Rubio de Francia, basado en la conexión entre la función maximal de Hardy-Littlewood y los pesos de Muckenhoupt.

En la primera parte de este capítulo nos ocupamos de la propiedad de extrapolación para clases de pesos que surgen de la acotación $L^p(\mathbb{R}^d)$ de una familia de operadores, en lugar de un único operador como es el caso del operador maximal y las clases Muckenhoupt A_p. Nuestro modelo de aproximación a esta situación son los pesos que aparecen en [5], en el contexto del análisis relacionado con el operador de Schrödinger. En ese caso, como veremos en el Capítulo 3, dichas clases de pesos corresponden a los w para los que algún miembro de una determinada familia de operadores maximales $\{M_\rho^\theta\}_{\theta>0}$ es acotado en $L^p(w)$.

En la segunda parte del capítulo adaptaremos, de acuerdo a nuestras necesidades, un resultado de extrapolación para pares de operadores, el cual fué probado inicialmente en [11].

2.1 Un contexto general de extrapolación

En esta sección establecemos teoremas de extrapolación generales en espacios de Lebesgue con pesos los cuales están asociados a una familia de operadores sublineales. Por un peso nos referimos a una función no negativa y localmente integrable definida en $\mathbb{R}^d$.

Supongamos entonces que tenemos una familia de operadores positivos y sublineales $\{T_\theta\}_{\theta\in I}$, donde I es un cierto conjunto de índices, de modo que cada T_θ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < p < \infty$ y $\theta \in I$.

Definición 2.1.1. Dado $\theta \in I$ y $1 < p < \infty$, definimos la familia U_p^θ como el conjunto de pesos w tales que T_θ preserva el espacio $L^p(w)$.

Denotaremos mediante $[w]_{p,\theta} = \|T_\theta\|_{L^p(w)}$ la norma usual del operador T_θ.

Definición 2.1.2. Dado $\theta \in I$ definimos la familia U_1^θ como el conjunto de pesos w tales que para alguna constante C, $T_\theta w \leq Cw$ en casi todo punto.

En tal caso $[w]_{1,\theta}$ se define como el ínfimo de aquellos C que satisfacen la desigualdad anterior. Designamos además $U_p = \bigcup_{\theta\in I} U_p^\theta$ y $U_\infty = \bigcup_{p\geq 1} U_p$.

Adicionalmente vamos a suponer que tales familias cumplen las siguientes propiedades básicas semejantes a las de los pesos de Muckenhoupt:

u1) $U_p \subset U_q$ cuando $1 \leq p \leq q$.

u2) Si $w \in U_p^\theta$, para algún $p > 1$ y un $\theta \in I$, entonces existe $\theta' = \theta'(p,\theta)$, tal que $w^{1-p'} \in U_{p'}^{\theta'}$ y la constante $[w^{1-p'}]_{p',\theta'}$ depende de w solo a través de $[w]_{p,\theta}$.

u3) Si $w_1 \in U_1^{\theta_1}$ y $w_2 \in U_1^{\theta_2}$ para algún par $\theta_1, \theta_2 \in I$, entonces para todo $p \geq 1$ existe $\theta = \theta(p, \theta_1, \theta_2)$ tal que $w_1 w_2^{1-p} \in U_p^\theta$ y la constante $[w_1 w_2^{1-p}]_{p,\theta}$ depende de w_1 y w_2 solo a través de $[w_1]_{1,\theta_1}$ y $[w_2]_{1,\theta_2}$.

Observación 2.1.3. De u2) se sigue que $w \in U_p$ si y sólo si $w^{1-p'} \in U_{p'}$. También, la propiedad u3) dice que si $w_1, w_2 \in U_1$, entonces $w_1 w_2^{1-p} \in U_p$.

Siguiendo a [12] los resultados de extrapolación de esta sección se expresan en términos de pares de funciones (f, g) pertenecientes a $\mathscr{F}$, una familia de pares de funciones medibles y no negativas.

Dado $p > 0$ y un peso $w \in U_q^\theta$, $q \geq 1$, $\theta \in I$, la expresión

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^p w(x)dx, \quad (f, g) \in \mathscr{F}, \tag{2.1.1}$$

significa que la desigualdad vale para todo par $(f, g) \in \mathscr{F}$ siempre que el lado izquierdo sea finito, con una constante C dependiendo de w sólo a través de $[w]_{q,\theta}$.

Bajo las consideraciones anteriores presentamos el siguiente resultado. El mismo también se puede obtener como consecuencia del Teorema 3.28 en [12], sin embargo, es incluido aquí en aras de una mayor exhaustividad y con otra demostración.

Teorema 2.1.4. *Sea* $1 \leq p_0 < \infty$ *y supongamos que* (2.1.1) *vale con* $p = p_0$ *para todo* $w \in U_{p_0}$. *Entonces* (2.1.1) *también vale para todo* p, $1 < p < \infty$, *y todo* $w \in U_p$.

Demostración. La prueba de este resultado sigue las líneas del Teorema 3.9 en [12]. Sean $1 < p < \infty$, $\theta \in I$ y $w \in U_p^\theta$. A partir de u2) se sigue que $w^{1-p'} \in U_{p'}^{\theta'}$ para algún $\theta' \in I$ con $[w^{1-p'}]_{p',\theta'}$ dependiendo de w sólo a través de $[w]_{p,\theta}$. Dadas $h_1 \in L^p(w)$ y $h_2 \in L^{p'}(w)$, ambas no negativas, siguiendo el algoritmo de Rubio de Francia (ver [36]) definimos los operadores

$$\mathscr{R}h_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_\theta^k h_1(x)}{2^k \|T_\theta\|_{L^p(w)}^k}, \qquad \mathscr{R}'h_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T'_{\theta'})^k h_2(x)}{2^k \|T'_{\theta'}\|_{L^{p'}(w)}^k},$$

donde $T'_{\theta'} f = T_{\theta'}(fw)/w$ y T_θ^k, para $k \geq 1$, es la composición del operador T_θ, k veces y T_θ^0 es la identidad (análogamente para $(T'_{\theta'})^k$). La función $\mathscr{R}h_1$ satisface

$$h_1 \leq \mathscr{R}h_1, \tag{2.1.2}$$

$$\|\mathscr{R}h_1\|_{L^p(w)} \leq C\|h_1\|_{L^p(w)}, \tag{2.1.3}$$

$$T_\theta(\mathscr{R}h_1) \leq 2\|T_\theta\|_{L^p(w)}\mathscr{R}h_1, \tag{2.1.4}$$

y para $\mathscr{R}'h_2$, tenemos

$$h_2 \leq \mathscr{R}'h_2, \tag{2.1.5}$$

$$\|\mathscr{R}'h_2\|_{L^{p'}(w)} \leq C\|h_2\|_{L^{p'}(w)}, \tag{2.1.6}$$

$$T_{\theta'}(w\mathscr{R}'h_2) \leq 2\|T'_{\theta'}\|_{L^{p'}(w)}w\mathscr{R}'h_2. \tag{2.1.7}$$

Ahora fijemos $(f, g) \in \mathscr{F}$. Podemos suponer, que f y g son no nulas y están en $L^p(w)$ y considerar

$$h_1 = \frac{f}{\|f\|_{L^p(w)}} + \frac{g}{\|g\|_{L^p(w)}}.$$

Claramente $h_1 \in L^p(w)$ y $\|h_1\|_{L^p(w)} \leq 2$. Como $f \in L^p(w)$, por dualidad, existe $h_2 \in L^{p'}(w)$ con $\|h_2\|_{L^{p'}(w)} = 1$ y tal que

$$\|f\|_{L^p(w)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h_2(x)w(x)dx.$$

Si llamamos $w_1 = \mathscr{R}h_1$ y $w_2 = w\mathscr{R}'h_2$, entonces a partir de (2.1.5) y la desigualdad de Hölder con respecto a la medida w_2 se sigue

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(w)} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)w_1(x)^{-1/p_0'}w_1(x)^{1/p_0'}w_2(x)dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{p_0}w_1(x)^{1-p_0}w_2(x)dx\right)^{1/p_0}\left(\int_{\mathbb{R}^d} w_1(x)w_2(x)dx\right)^{1/p_0'} \\
&= I \times II.
\end{aligned}$$

Vamos a comenzar estimando II. Por la desigualdad de Hölder con respecto a la medida w y las propiedades (2.1.3) y (2.1.6), obtenemos

$$II \leq \|\mathscr{R}h_1\|_{L^p(w)}^{1/p_0'}\|\mathscr{R}'h_2\|_{L^{p'}(w)}^{1/p_0'} \leq 4^{1/p_0'}\|h_1\|_{L^p(w)}^{1/p_0'}\|h_2\|_{L^{p'}(w)}^{1/p_0'} \leq 8^{1/p_0'}.$$

Para estimar I vamos a aplicar la hipótesis para el peso $w_3 = w_1^{1-p_0}w_2$. En efecto, siendo $\|T'_{\theta'}\|_{L^{p'}(w)} \leq [w]_{p,\theta}$, las desigualdades (2.1.4) y (2.1.7) implican que los pesos w_1 y

w_2 pertenecen a U_1^{θ} y $U_1^{\theta'}$ respectivamente con constantes dependiendo de w sólo a través de $[w]_{p,\theta}$. Por lo tanto, de la propiedad u3), existe algún $\sigma = \sigma(p_0, \theta)$, tal que $w_3 \in U_{p_0}^{\sigma}$ con $[w_3]_{p_0,\sigma}$ dependiendo de w sólo a través de $[w]_{p,\theta}$. Para poder utilizar la hipótesis del teorema, debemos comprobar que $I < \infty$. A partir de (2.1.2), tenemos $f \leq \|f\|_{L^p(w)} w_1$, entonces

$$I \leq \|f\|_{L^p(w)}\, II^{p_0'/p_0} \leq 8^{1/p_0} \|f\|_{L^p(w)} < \infty.$$

Por lo tanto, aplicando (2.1.1) con $p = q = p_0$ y considerando que $g \leq \|g\|_{L^p(w)} w_1$, lo cual se desprende de (2.1.2), obtenemos que

$$\begin{aligned} I &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p_0} w_3(x)dx\right)^{1/p_0} \\ &\leq C\|g\|_{L^p(w)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} w_1(x)w_2(x)dx\right)^{1/p_0} \\ &\leq C8^{1/p_0}\|g\|_{L^p(w)}, \end{aligned}$$

y la prueba concluye para el caso $p > 1$.

El caso $p = 1$ se sigue fácilmente considerando $1/p_0' = 0$.

□

Como una consecuencia del Teorema 2.1.4 obtenemos el siguiente resultado de extrapolación con reescalamiento.

Corolario 2.1.5. *Sea* $0 < r < p_0 < \infty$ *y supongamos que* (2.1.1) *vale para* $p = p_0$, *y todo* $w \in U_{p_0/r}$. *Entonces* (2.1.1) *vale para todo* $p > r$ *y con* $w \in U_{p/r}$.

Demostración. Vamos a comenzar denotando con $\mathscr{F}_r$ la familia de pares (f^r, g^r), con $(f, g) \in \mathscr{F}$. Por hipótesis, si $w \in U_{p_0/r}^{\theta}$ para algún $\theta \in I$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x)^r)^{p_0/r} w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{p_0} w(x)dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p_0} w(x)dx \\ &= C\int_{\mathbb{R}^d} (g(x)^r)^{p_0/r} w(x)dx, \end{aligned}$$

donde la constante C depende de w sólo a través de $[w]_{p_0/r,\theta}$.

Por lo tanto, hemos probado la desigualdad (2.1.1) con exponente $p = p_0/r$ y pesos $w \in U^{\theta}_{p_0/r}$, para la familia $\mathscr{F}_r$. Ahora a partir del Teorema 2.1.4 se sigue para todo $q > 1$ y todo $w \in U_q$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x)^r)^q w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (g(x)^r)^q w(x)dx; \quad (f^r, g^r) \in \mathscr{F}_r,$$

donde la constante C depende de w sólo a través de $[w]_{q,\theta}$ para algún $\theta \in I$. Entonces, dado cualquier $p > r$, tomando $q = p/r$, el resultado se sigue a partir de desigualdad anterior.

□

El siguiente corolario proporciona una desigualdad en norma $L^p(w)$, para $w \in U_\infty$ y $p > 0$.

Corolario 2.1.6. *Sea* $0 < p_0 < \infty$ *y supongamos que* (2.1.1) *vale con* $p = p_0$*, para todo* $w \in U_\infty$*. Entonces* (2.1.1) *vale para todo* p*,* $0 < p < \infty$*, y todo* $w \in U_\infty$*.*

Demostración. Fijemos r, $1 < r < \infty$, y consideremos la familia $\mathscr{F}_0$, de aquellos pares $(f^{p_0/r}, g^{p_0/r})$ tales que $(f, g) \in \mathscr{F}$. Por la hipótesis, si $w \in U^{\theta}_r$ para algún $\theta \in I$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (f(x)^{p_0/r})^r w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{p_0} w(x)dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p_0} w(x)dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^d} (g(x)^{p_0/r})^r w(x)dx,\end{aligned}$$

para todo par $(f, g) \in \mathscr{F}$, con constante C dependiendo de w sólo a través de $[w]_{r,\theta}$.

Por lo tanto, hemos probado la desigualdad (2.1.1) con $p = r$ para la familia $\mathscr{F}_0$ y los pesos U_r. De este modo, aplicando el Teorema 2.1.4, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x)^{p_0/r})^q w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (g(x)^{p_0/r})^q w(x)dx, \quad (f^{p_0/r}, g^{p_0/r}) \in \mathscr{F}_0,$$

para todo $1 < q < \infty$ y todo $w \in U_q$.

Ahora, sea $p > 0$ y $w \in U_\infty$. A partir de la propiedad u1), existe $q > p/p_0$ tal que $w \in U_q$. Tomando $r = p_0 q/p > 1$, entonces $p = p_0 q/r$, y obtenemos la desigualdad deseada.

□

Otra consecuencia del Teorema 2.1.4 es la siguiente desigualdad a valores vectoriales.

Corolario 2.1.7. *Sean* $0 < r < p_0 < \infty$ *y supongamos que* (2.1.1) *vale con* $p = p_0$*, para todo* $w \in U_{p_0/r}$*. Entonces*

$$\left\| \left(\sum_i f_i^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i g_i^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}, \quad \{(f_i, g_i)\}_i \subset \mathscr{F},$$

vale para todo p *y* γ *tales que* $r < p, \gamma < \infty$*, y todo* $w \in U_{p/r}$*.*

Demostración. Sean $r < p, \gamma < \infty$ y consideremos la familia $\mathscr{F}_\gamma$ de pares (F, G), donde

$$F(x) = \left(\sum_i f_i(x)^\gamma \right)^{1/\gamma}, \qquad G(x) = \left(\sum_i g_i(x)^\gamma \right)^{1/\gamma},$$

con $\{(f_i, g_i)\}_i \subset \mathscr{F}$. Usando el Corolario 2.1.5 tenemos que la desigualdad (2.1.1) vale con $p = \gamma$ y $q = \gamma/r$, entonces para todo $w \in U_{\gamma/r}^\theta$, $\theta \in I$, existe una constante C (dependiendo de w sólo a través de $[w]_{\gamma/r,\theta}$) tal que

$$\|F\|_{L^\gamma(w)}^\gamma = \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} f_i(x)^\gamma w(x) dx \leq C \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} g_i(x)^\gamma w(x) dx = C \|G\|_{L^\gamma(w)}^\gamma,$$

para todo $(F, G) \in \mathscr{F}_\gamma$. Ahora, estamos de nuevo en la hipótesis del Corolario 2.1.5 con $p_0 = \gamma$ para la familia $\mathscr{F}_\gamma$. Entonces obtenemos

$$\left\| \left(\sum_i f_i^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} = \|F\|_{L^p(w)} \leq C \|G\|_{L^p(w)} = C \left\| \left(\sum_i g_i^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}$$

para todo $w \in U_{p/r}$ con la dependencia deseada de C.

□

En el próximo resultado nuestro objetivo es la obtención de una desigualdad como (2.1.1) sin pedir la finitud del lado izquierdo. En esta situación, vamos a decir que (2.1.1) vale *irrestrictamente*. Este tipo de resultados están más en el espíritu del teorema original de Rubio de Francia, y son útiles para obtener acotación de operadores en espacios de Lebesgue con pesos.

Teorema 2.1.8. *Sea* $1 \leq p_0 < \infty$ *y supongamos que* (2.1.1) *vale irrestrictamente con* $p = p_0$, *y para todo* $w \in U_{p_0}$. *Entonces* (2.1.1) *vale irrestrictamente para todo* p, $1 < p < \infty$ *y todo* $w \in U_p$.

Demostración. Vamos a aplicar el Teorema 2.1.4 para las familias $\mathscr{F}_n = \{(f_n, g) : (f, g) \in \mathscr{F}\}$, donde $f_n(x) = \chi_{B(0,n)} \min\{f(x), n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $f_n \leq f$, se sigue a partir de la hipótesis que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)^{p_0} w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p_0} w(x) dx, \quad (f, g) \in \mathscr{F},$$

para todo $w \in U_{p_0}$ con la constante C independiente de n y dependiendo de w sólo a través de $[w]_{p_0,\theta}$ siempre que $w \in U_{p_0}^{\theta}$, para algún $\theta \in I$. Ya que el lado izquierdo de la desigualdad es finito, podemos aplicar el Teorema 2.1.4 a cada familia $\mathscr{F}_n$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $1 < p < \infty$ y $w \in U_p$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^p w(x) dx, \quad (f, g) \in \mathscr{F}.$$

Ahora, si $(f, g) \in \mathscr{F}$, por el Teorema de Convergencia Monótona como $f_n \nearrow f$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^p w(x) dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^p w(x) dx.$$

□

Observación 2.1.9. Claramente como consecuencia de este resultado podemos obtener (con la misma prueba que antes) las correspondientes versiones irrestrictas de los Corolarios 2.1.5, 2.1.6 y 2.1.7.

En lo que sigue vamos a demostrar un resultado de extrapolación para un rango limitado de valores de p, a partir de una desigualdad en $p_0 = 1$.

Teorema 2.1.10. *Sea* $1 < s \leq \infty$ *y supongamos que para todo peso* w *tal que* $w^{s'} \in U_1$ *se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) w(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x) w(x)\ dx, \quad (f, g) \in \mathscr{F}. \tag{2.1.8}$$

Entonces, para todo $1 < p < s$ *y para todo* w *tal que* $w^{(s/p)'} = w^{\frac{s}{s-p}} \in U_{\tau_p}$*, con* $\tau_p = s\frac{p-1}{s-p} + 1 = p\big(\frac{s-1}{s-p}\big)$*, se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^p w(x)\, dx, \quad (f,g) \in \mathscr{F}. \tag{2.1.9}$$

Demostración. Fijamos $1 < p < s$ y w tal que $w^{(s/p)'} = w^{\frac{s}{s-p}} \in U_{\tau_p}$. De este modo, se sigue que $w^{(s/p)'(1-\tau_p')} = w^{1-p'} \in U_{\tau_p'}$; luego existe $\theta > 0$ tal que T_θ es acotado en $L^{\tau_p'}(w^{1-p'})$. Así para toda función no negativa $h \in L^{\tau_p'}(w^{1-p'})$ consideramos el algoritmo de iteración

$$\widetilde{\mathscr{R}}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_\theta^k h(x)}{2^k \|T_\theta\|^k_{L^{\tau_p'}(w^{1-p'})}}.$$

Como antes $\widetilde{\mathscr{R}}h$ satisface las siguientes propiedades

$$h \leq \widetilde{\mathscr{R}}h, \tag{2.1.10}$$

$$\|\widetilde{\mathscr{R}}h\|_{L^{\tau_p'}(w^{1-p'})} \leq 2\|h\|_{L^{\tau_p'}(w^{1-p'})}, \tag{2.1.11}$$

y

$$T_\theta(\widetilde{\mathscr{R}}h) \leq 2\|T_\theta\|_{L^{\tau_p'}(w^{1-p'})}\widetilde{\mathscr{R}}h. \tag{2.1.12}$$

En particular, (2.1.12) nos dice que $\widetilde{\mathscr{R}}h \in U_1$.

Sea $(f,g) \in \mathscr{F}$. Podemos suponer que $f \in L^p(w)$. Por dualidad, existe una función no negativa $h \in L^{p'}(w)$ tal que $\|h\|_{L^{p'}(w)} = 1$ y

$$\|f\|_{L^p(w)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h(x)w(x)\, dx.$$

Ahora definimos $H(x) = (\widetilde{\mathscr{R}}(hw)^{s'})^{1/s'}(x)w^{-1}(x)$. Entonces, como $h \in L^{p'}(w)$, observando que $s'\tau_p' = p'$, se sigue que $(hw)^{s'} \in L^{\tau_p'}(w^{1-p'})$. Luego, teniendo en cuenta las propiedades (2.1.10), (2.1.11) y (2.1.12), obtenemos

$$h \leq H, \tag{2.1.13}$$

$$\|H\|_{L^{p'}(w)} \leq 2, \tag{2.1.14}$$

y

$$(Hw)^{s'} \in U_1. \tag{2.1.15}$$

Por lo tanto, a partir de la desigualdad de Hölder y la propiedad (2.1.14) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)H(x)w(x)\ dx &\leq \|f\|_{L^p(w)}\|H\|_{L^{p'}(w)}\\ &\leq 2\|f\|_{L^p(w)} < \infty.\end{aligned}$$

Luego, aplicando las propiedades (2.1.13) y (2.1.14), la hipótesis para el peso Hw obtenemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(w)} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)H(x)w(x)\ dx\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^d} g(x)H(x)w(x)\ dx\\ &\leq C\|g\|_{L^p(w)}\|H\|_{L^{p'}(w)}\\ &\leq C\|g\|_{L^p(w)},\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba.

□

En forma similar a lo realizado para el Teorema 2.1.4 puede probarse que el teorma anterior vale irrestrictamente.

Vamos ahora a probar un teorema de extrapolación similar al Teorema 2.1.4 pero a partir de una desigualdad en el punto extremo $p_0 = \infty$. Dado un peso w tal que $w^{-1} \in U_1^\theta$, $\theta \in I$, la expresión

$$\|fw\|_{L^\infty} \leq C\|gw\|_{L^\infty}, \qquad (f,g) \in \mathscr{F}, \tag{2.1.16}$$

debe entenderse en el sentido de que la desigualdad se cumple para todos los pares $(f,g) \in \mathscr{F}$ siempre que el lado izquierdo sea finito, con una constante C dependiendo de w sólo a través de $[w^{-1}]_{1,\theta}$.

Antes de presentar el teorema, establecemos el siguiente lema técnico cuya prueba es elemental y se puede encontrar en [27] (ver el corolario después del Lema 4 allí).

Lema 2.1.11. *Sea* $1 < p < \infty$ *y* f *en* $L^p(w)$. *Entonces existe una función positiva* F *en* $L^p(w^{-1/(p-1)})$ *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} F^p w^{-1/(p-1)}\right)^{1/p} \leq 2$$

y

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w\right)^{1/p} = \|fw^{1/(p-1)}F^{-1}\|_{L^\infty}.$$

Teorema 2.1.12. *Si* (2.1.16) *vale para todo peso* w *tal que* $w^{-1} \in U_1$, *entonces* (2.1.1) *vale para todo* p, $1 < p < \infty$, *y todo* $w \in U_p$.

Demostración. Sea $w \in U_p$ y $(f, g) \in \mathscr{F}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f y g pertenecen a $L^p(w)$. A partir del Lema 2.1.11, existen un par de funciones no negativas F y G in $L^p(w^{-1/(p-1)})$ tales que

$$\|F\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})} \leq 2, \tag{2.1.17}$$

$$\|f\|_{L^p(w)} = \|fw^{1/(p-1)}F^{-1}\|_{L^\infty}, \tag{2.1.18}$$

$$\|G\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})} \leq 2, \tag{2.1.19}$$

y

$$\|g\|_{L^p(w)} = \|gw^{1/(p-1)}G^{-1}\|_{L^\infty}. \tag{2.1.20}$$

Como $w \in U_p$ existe $\theta \geq 0$ tal que $\widetilde{T}_\theta$ aplica $L^p(w^{-1/(p-1)})$ en sí mismo, donde $\widetilde{T}_\theta f = T_\theta(fw^{-1/(p-1)})/w^{-1/(p-1)}$. Ahora, el algoritmo Rubio de Francia se aplica a $h = F + G$ definiendo

$$\mathscr{R}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{T}_\theta^k h(x)}{2^k \|\widetilde{T}_\theta\|^k_{L^p(w^{-1/(p-1)})}}.$$

De la definición de $\mathscr{R}$, se sigue que

$$h \leq \mathscr{R}h, \tag{2.1.21}$$

$$\|\mathscr{R}h\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})} \leq 2\|h\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})}, \tag{2.1.22}$$

y

$$\widetilde{T}_\theta(\mathscr{R}h) \le 2\|\widetilde{T}_\theta\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})}\mathscr{R}h. \tag{2.1.23}$$

La última desigualdad implica que $w^{-1/(p-1)}\,\mathscr{R}h \in U_1$ con

$$[w^{-1/(p-1)}\,\mathscr{R}h]_{1,\theta} \le 2\|\widetilde{T}_\theta\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})}$$

(al igual que en el Teorema 2.1.4, la cantidad $\|\widetilde{T}_\theta\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})}$ depende de w sólo a través de $[w]_{p,\theta}$).

Por lo tanto, de (2.1.20), (2.1.21) y utilizando la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^p(w)} &= \|gw^{1/(p-1)}G^{-1}\|_{L^\infty}\\ &\ge \|gw^{1/(p-1)}(\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty}\\ &\ge C\|fw^{1/(p-1)}(\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty},\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

siempre que $\|fw^{1/(p-1)}(\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty} < \infty$. En efecto por (2.1.21) y (2.1.18), tenemos

$$\begin{aligned}\|fw^{1/(p-1)}(\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty} &\le \|fw^{1/(p-1)}F^{-1}\|_{L^\infty}\\ &= \|f\|_{L^p(w)} < \infty.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(w)} &\le \|fw^{1/(p-1)}(\mathscr{R}h)^{-1}\|^p_{L^\infty}\|\mathscr{R}h\|^p_{L^p(w^{-1/(p-1)})}\\ &\le C\|g\|^p_{L^p(w)},\end{aligned}$$

donde en la última cadena de desigualdades hemos usado (2.1.24), (2.1.22), (2.1.17) y (2.1.19).

□

Corolario 2.1.13. *Sea* $r > 0$ *y supongamos que* (2.1.16) *vale para todo* w *tal que* $w^{-r} \in U_1$*. Entonces* (2.1.1) *vale para todo* $p > r$ *y todo* $w \in U_{p/r}$*.*

Demostración. Comencemos considerando la familia $\mathscr{F}_r$ de pares (f^r, g^r) con $(f,g) \in \mathscr{F}$. Sea w tal que $w^{-1} \in U_1$ y $(f,g) \in \mathscr{F}$. Usando la hipótesis con $w^{1/r}$,

$$\|f^r w\|^{1/r}_{L^\infty} = \|fw^{1/r}\|_{L^\infty}$$

$$\leq C\|gw^{1/r}\|_{L^\infty}$$
$$= C\|g^r w\|_{L^\infty}^{1/r}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado (2.1.16) para la familia $\mathscr{F}_r$. De este modo, aplicando el Teorema 2.1.12, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{rq} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{rq} w(x)dx, \quad (f^r, g^r) \in \mathscr{F}_r,$$

para todo $q > 1$ y todo $w \in U_q$. Finalmente, dado $p > r$ el resultado se sigue tomando $q = p/r$.

□

Observación 2.1.14. El Teorema 2.1.12 (y su corolario) se pueden probar con la hipótesis más fuerte que (2.1.16) vale irrestrictamente. Para ello podemos modificar ligeramente la prueba tomando $h = G$, ya que no resulta necesario verificar que $\|fw^{1/(p-1)}(\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty} < \infty$. Luego, claramente las conclusiones también se mantienen sin restricciones.

Con el fin de establecer nuestros próximos resultados presentamos las siguientes clases de pesos.

Definición 2.1.15. Dados $1 \leq p, q < \infty$ definimos,

$$U_{p,q} = \{w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) : w^{-p'} \in U_{1+p'/q}\}$$

y

$$U_{p,\infty} = \{w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) : w^{-p'} \in U_1\}.$$

Teorema 2.1.16. *Sea $1 < s < \infty$. Supongamos que la expresión*

$$\|fw\|_{L^\infty} \leq C\|g\|_{L^s(w^s)}, \quad (f, g) \in \mathscr{F},$$

vale para todo peso $w \in U_{s,\infty}$, siempre que el lado izquierdo sea finito, donde la constante C depende de w sólo a través de $[w^{-s'}]_{1,\theta}$ para todo θ tal que $w^{-s'}$ pertenece a U_1^θ. Entonces

$$\|f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|g\|_{L^p(w^p)}, \quad (f, g) \in \mathscr{F}, \tag{2.1.25}$$

vale para todo p y q tal que $1 < p < s$, $1/p - 1/q = 1/s$, y todo $w \in U_{p,q}$, siempre que el lado izquierdo sea finito. Más aún, la constante C en (2.1.25) *depende de w sólo a través de $[w^{-p'}]_{1+p'/q,\sigma}$ siempre que $w^{-p'}$ pertenece $U^{\sigma}_{1+p'/q}$, con $\sigma \in I$.*

Demostración. Sean $1 < p < s$, con $1/p - 1/q = 1/s$ y $w \in U_{p,q}$. Consideramos $f \in L^q(w^q)$ y $g \in L^p(w^p)$, y escribimos

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(w^p)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|g(x)w(x)^{p'}|^s)^{p/s} w(x)^{-p'} dx \right)^{(s/p)(1/s)} \\ &= \|(gw^{p'})^s\|^{1/s}_{L^{p/s}(w^{-p'})}. \end{aligned}$$

De ello se deduce por dualidad que existe una función no negativa G tal que

$$\|G\|_{L^{\frac{p}{s-p}}(w^{-p'})} = 1 \tag{2.1.26}$$

y

$$\|g\|_{L^p(w^p)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)w(x)^{p'}|^s G(x)^{-1} w(x)^{-p'} dx \right)^{1/s}. \tag{2.1.27}$$

Por otra parte, por el Lema 2.1.11, sabemos que existe una función no negativa $F \in L^q(w^{-q'})$ tal que

$$\|F\|_{L^q(w^{-q'})} \leq 2 \tag{2.1.28}$$

y

$$\|f\|_{L^q(w^q)} = \|fw^{q'}F^{-1}\|_{L^\infty}. \tag{2.1.29}$$

Por la definición de la clase $U_{p,q}$ tenemos que $v = w^{-p'} \in U_{1+p'/q}$. Si denotamos $r = 1 + p'/q$, así $r' = q/s'$, y a partir de (2.1.26) y (2.1.28) se sigue que $\|G^{s'/s}\|_{L^{r'}(v)} = 1$ y $\|F^{s'}w^{p'-q's'}\|_{L^{r'}(v)} < 2^{s'}$, respectivamente.

Siendo que $v \in U^{\theta}_r$, para algún $\theta \in I$, existe $\sigma = \sigma(r, \theta) \in I$ tal que el operador $T'_\sigma f = T_\sigma(fv)/v$ aplica $L^{r'}(v)$ en sí mismo con

$$\|T'_\sigma\|_{L^{p'}(v)} \leq [v^{1-p'}]_{r',\sigma}, \tag{2.1.30}$$

pero según u2) la última cantidad depende sólo de $[v]_{r,\theta}$.

Ahora procedemos siguiendo el algoritmo Rubio de Francia con $h = G^{s'/s} + F^{s'} w^{p'-q's'}$ y

$$\mathscr{R}' h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T'_\sigma)^k h(x)}{2^k \|T'_\sigma\|^k_{L^{r'}(v)}}.$$

Así, tenemos que

$$h \leq \mathscr{R}' h, \tag{2.1.31}$$

$$\|\mathscr{R}' h\|_{L^{r'}(v)} \leq 2\|h\|_{L^{r'}(v)}, \tag{2.1.32}$$

y

$$T_\sigma(\mathscr{R}' hv) \leq 2\|T'_\sigma\|_{L^{p'}(v)} \mathscr{R}' hv.$$

La última desigualdad y (2.1.30) afirman que el peso $(\mathscr{R}'h)w^{-p'}$ pertenece a U_1 con

$$[(\mathscr{R}'h)w^{-p'}]_{1,\sigma} \leq 2[v]_{r,\theta}.$$

En consecuencia, por la definición de $U_{s,\infty}$, el peso $u = (\mathscr{R}'h)^{-1/s'} w^{p'/s'}$ pertenece a $U_{s,\infty}$ con constante dependiendo de $w^{-p'}$ sólo a través de $[w^{-p'}]_{r,\theta}$ con $r = 1 + p'/q$.

Ahora, volviendo a (2.1.27) y usando (2.1.31), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^p(w^p)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^s G(x)^{-1} w(x)^{p'(s-1)} dx \right)^{1/s} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^s u(x)^s dx \right)^{1/s} \\
&\geq C\|fu\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado la hipótesis con u bajo el supuesto que

$$\|fu\|_{L^\infty} < \infty.$$

En efecto, como $F^{s'} w^{p'-q's'} \leq \mathscr{R}'h$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\|f(\mathscr{R}'h)^{-1/s'} w^{p'/s'}\|_{L^\infty} &= \|f[(\mathscr{R}'h)^{1/s'} w^{-p'/s'+q'}]^{-1} w^{q'}\|_{L^\infty} \\
&\leq \|fF^{-1} w^{q'}\|_{L^\infty} \\
&= \|f\|_{L^q(w^q)} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, de (2.1.32) y siendo $q = -p' + qp'/s'$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(w^q)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{R}' h(x)^{r'} v(x) dx \right)^{1/q} \|f(\mathscr{R}' h)^{-1/s'} w^{p'/s'}\|_{L^\infty} \\ &\leq C\|g\|_{L^p(w^p)}. \end{aligned}$$

$\square$

2.2 Extrapolación para pares de operadores

El otro resultado de extrapolación que necesitaremos no se encuadra ya en el contexto de una familia de operadores sino que es un caso particular de los resultados para pares de operadores contenidos en [12]. Sin embargo, por completitud, enunciaremos el resultado principal y daremos una versión "irrestricta" del mismo, que nos será de utilidad más adelante

En [12] los autores proporcionan resultados de extrapolación en términos de una familia $\mathscr{F}$ de pares (f, g) de funciones medibles y no negativas. Allí, ellos también consideran un operador maximal y pesos w asociados con una base, $\mathcal{B}$, i.e., una colección de conjuntos abiertos $B \subset \mathbb{R}^d$, definidos del siguiente modo.

$$M_{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, dy,$$

para todo $x \in \cup_{B\in\mathcal{B}} B$ y $M_{\mathcal{B}} f(x) = 0$ en otro caso.

Para cada $1 < p < \infty$, un peso w pertenece a la clases $A_{p,\mathcal{B}}$, si existe una constante C tal que para toda $B \in \mathcal{B}$,

$$\left(\int_B w \right)^{1/p} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{1/p'} \leq C|B|.$$

El ínfimo de todas las constantes C, que satisface la desigualdad anterior es denotado mediante $[w]_{p,\mathcal{B}}$.

Los resultados son obtenidos bajo la hipótesis de que el operador maximal $M_{\mathcal{B}}$ es acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_{p,\mathcal{B}}$ y $1 < p < \infty$. Este tipo de bases son llamadas bases de Muckenhoupt.

Cuando $p = 1$, decimos que $w \in A_{1,\mathcal{B}}$ si $M_{\mathcal{B}}w(x) \leq Cw(x)$ para casi todo x en $\mathbb{R}^d$. El ínfimo de todas las constantes C, que satisface la desigualdad anterior es denotado mediante $[w]_{1,\mathcal{B}}$. Como es usual, vamos a indicar $A_{\infty,\mathcal{B}} = \cup_{p\geq 1} A_{p,\mathcal{B}}$.

Dados dos operadores T y S vamos a denotar mediante $\mathscr{D}(T, S)$ el conjunto de todas las funciones f tales que Tf y Sf son finitas en casi todo punto. Sea $p > 0$ y un peso $w \in A_{q,\mathcal{B}}$, con $q \geq 1$, la expresión

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx, \qquad f \in \mathscr{F}(T, S), \tag{2.2.1}$$

significa que la desigualdad vale para cada $f \in \mathscr{F}(T, S)$ siempre que el lado izquierdo sea finito, con una constante C dependiente de w solo a través de la constante $[w]_{q,\mathcal{B}}$ y la familia $\mathscr{F}(T, S)$ es un subconjunto de $\mathscr{D}(T, S)$.

El siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición 3.20 y el Corolario 3.18 contenidos en [12].

Teorema 2.2.1. *Dada una base de Muckenhoupt $\mathcal{B}$ y dos operadores T y S, supongamos que existe $p_0 > 0$ tal que* (2.2.1) *vale para todo $0 < p < p_0$ y todo $w \in A_{1,\mathcal{B}}$. Entonces la desigualdad* (2.2.1) *vale para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_{\infty,\mathcal{B}}$. Además,*

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |Sf_i|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(w)}, \quad \{f_i\}_i \subset \mathscr{F}(T, S), \tag{2.2.2}$$

vale para $0 < p, q < \infty$ y cada $w \in A_{\infty,\mathcal{B}}$.

Como en la sección anterior, es posible obtener desigualdades como (2.2.1) y (2.2.2) sin pedir la finitud del lado izquierdo. En esta situación diremos que (2.2.1) y (2.2.2) valen *irrestrictamente.*

Teorema 2.2.2. *Dada una base de Muckenhoupt $\mathcal{B}$ y dos operadores T y S, supongamos que existe $p_0 > 0$ tal que* (2.2.1) *vale irrestrictamente para toda $f \in \mathscr{D}(T, S)$, todo $0 < p < p_0$ y $w \in A_{1,\mathcal{B}}$. Entonces, la desigualdad* (2.2.1) *vale irrestrictamente para toda $f \in \mathscr{D}(T, S)$, todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_{\infty,\mathcal{B}}$. Además,* (2.2.2) *vale irrestrictamente para toda $f \in \mathscr{D}(T, S)$, cualesquiera $0 < p, q < \infty$ y $w \in A_{\infty,\mathcal{B}}$.*

Demostración. Sea $T_n f(x) = \chi_{B(0,n)} \text{mín}\{|Tf(x)|, n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $T_n f \leq |Tf|$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mathscr{D}(T,S) \subset \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{D}(T_n, S)$. A partir de estas consideraciones se sigue para $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T_n f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx,$$

para todo $0 < p < p_0$, $w \in A_{1,\mathcal{B}}$ y cada $f \in \mathscr{D}(T,S)$, donde C es independiente de n y depende de w sólo a través de la constante $[w]_{1,\mathcal{B}}$. Podemos aplicar el Teorema 2.2.1 a la familia $\mathscr{D}(T,S) \subset \mathscr{D}(T_n,S)$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $0 < p < \infty$, $w \in A_{\infty,\mathcal{B}}$ y $f \in \mathscr{D}(T,S)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T_n f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx.$$

Ahora, si $f \in \mathscr{D}(T,S)$, por el Teorema de Convergencia Monótona siendo $|T_n f| \nearrow |Tf|$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |T_n f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx.$$

Esto prueba que la desigualdad (2.2.1) vale irrestrictamente para todo $0 < p < \infty$, $w \in A_{\infty,\mathcal{B}}$ y $f \in \mathscr{D}(T,S)$. Un argumento análogo puede ser aplicado para probar (2.2.2).

$\square$

Capítulo 3

Función radio crítico: pesos, maximales y BMO

En este capítulo presentamos el contexto básico en el que trabajaremos en lo que sigue y que como ya dijimos, tiene por modelo el análisis relacionado al operador de Schrödinger bajo las condiciones en el potencial explicitadas en el Capítulo 1.

En el capítulo anterior hemos presentado teoremas de extrapolación en dos contextos: el de los pesos asociados a una familia de operadores y el de los pesos correspondientes a una maximal de promedios asociada a una base de Muckenhoupt. Aquí introduciremos los casos particulares en los que aplicaremos los teoremas de extrapolación. Para ello comenzaremos dando una definición precisa de lo que damos en llamar función radio crítico ρ. A partir de tal función presentamos además dos tipos de operadores maximales y pesos relacionados con los pesos de Muckenhoupt clásicos. Uno de estos operadores es un operador maximal ρ-local el cual fue introducido y caracterizado en [5] mediante pesos que satisfacen la condición de Muckenhoupt para bolas $B(x,r)$ con $r \leq \rho(x)$. Por otra parte, se define una familia de operadores maximales dependiente de un parámetro $\theta > 0$, para la cual cada operador es puntualmente menor al clásico de Hardy-Littlewood y que, en el sentido del capítulo anterior, está asociada a las clases de pesos A_p^ρ, que fueron introducidos en [5].

Dado que para estas clases de pesos queremos aplicar resultados de extrapolación desde $p = \infty$ y que los operadores que nos interesan no preservan L^∞, introducimos espacios de tipo BMO con pesos asociados a la función radio crítico ρ, los cuales indicaremos con $BMO_\rho(w)$, y damos una caracterización del mismo a través de un operador maximal sharp apropiado $M_\rho^\sharp$. Estos espacios resultan de interés pues en los capítulos que siguen se establecerá la acotación $L^\infty(w) - BMO_\rho(w)$ de operadores T característicos del análisis de $\mathcal{L}$ para pesos adecuados en la clase A_∞^ρ. Esta acotación, en conjunción con la caracterización del espacio $BMO_\rho(w)$ mencionada y con algunos resultados de extrapolación del Capítulo 2, nos permitirán deducir la acotación en $L^p(w)$, $1 < p < \infty$ y desigualdades vectoriales para una amplia familia de operadores T, que contiene a los nombrados anteriormente.

3.1 Pesos y funciones maximales asociadas a una función radio crítico ρ

En esta sección nos ocupamos de maximales y clases de pesos que recientemente han surgido en conexión con el operador de Schrödinger (ver [5]). Como dijimos, estas clases se ajustan al contexto general del capítulo anterior para obtener algunas aplicaciones.

Definición 3.1.1. Llamamos *función radio crítico en* $\mathbb{R}^d$ a cualquier función no negativa y continua $\rho : \mathbb{R}^d \mapsto (0, \infty)$ con la propiedad que existen constantes c_ρ, $N_0 \geq 1$ tales que

$$c_\rho^{-1}\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq c_\rho\ \rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}, \tag{3.1.1}$$

para todo par $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Además, una bola $B(x, r) \subset \mathbb{R}^d$ será llamada *crítica* si $r = \rho(x)$.

Observación 3.1.2. Resulta necesario observar que en la expresión (3.1.1) la desigualdad del lado izquierdo puede deducirse a partir de la del lado derecho (y viceversa). Sin embargo, por la frecuencia con la que usaremos estas desigualdades preferimos incluir ambas en la definición de lo que es una función de radio crítico.

No resulta difícil probar que si ρ es una función radio crítico, para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$, la función definida por $\tilde{\rho} = \beta\rho$ también lo es, con constantes N_0 y $c_{\tilde{\rho}} = \max\{1, \beta\}^{N_0} c_\rho$ donde N_0 y c_ρ son las constantes asociadas a ρ. Más aún, si $\beta \leq 1$, es claro que las constantes de ρ y $\tilde{\rho}$ coinciden.

La estimación (3.1.1) implica que si $\sigma > 0$ y $x, y \in \sigma B$, para alguna bola crítica B, entonces

$$\rho(x) \leq C_\sigma \rho(y), \tag{3.1.2}$$

donde $C_\sigma = c_\rho^2 (1+\sigma)^{\frac{2N_0 + N_0^2}{N_0+1}}$.

En [18] los autores obtienen que (3.1.1) determina la siguiente descomposición de $\mathbb{R}^d$ por bolas críticas. Si bien, ellos lo hacen cuando ρ proviene de un potencial V asociado a un operador de Schrödinger $\mathcal{L} = -\Delta + V$, la herramienta que utilizan para probar tal resultado no es más que la desigualdad (3.1.1), más precisamente (3.1.2). Esta descomposición será una valiosa y útil herramienta a lo largo de este trabajo.

Proposición 3.1.3 (Ver [18]). *Existe una sucesión de puntos x_j, $j \geq 1$, en $\mathbb{R}^d$, tal que la familia de bolas críticas $Q_j = B(x_j, \rho(x_j))$, $j \geq 1$, satisface*

I*)* $\cup_j Q_j = \mathbb{R}^d$.

II*) Para todo $\sigma \geq 1$ existen constantes C y N_1 tales que, $\sum_j \chi_{\sigma Q_j} \leq C\sigma^{N_1}$.*

Siguiendo [5] vamos a considerar una clase de pesos locales asociados a ρ.

Definición 3.1.4. Dado $1 < p < \infty$ se define la clase $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$, como el conjunto de pesos w que satisfacen

$$\left(\int_B w\right)^{1/p} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \leq C|B|,$$

para toda bola $B = B(x, r)$, con $r \leq \rho(x)$.

Definición 3.1.5. La clase $A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ está definida como aquellos pesos w que satisfacen

$$\frac{1}{|B|}\int_B w \leq C \inf_B w, \tag{3.1.3}$$

para toda bola $B = B(x, r)$, con $r \leq \rho(x)$, donde el ínfimo debe entenderse como el ínfimo esencial con respecto a la medida de Lebesgue.

Denotaremos además $A_\infty^{\rho,\text{loc}} = \cup_{p\geq 1} A_p^{\rho,\text{loc}}$.

Recordamos una propiedad importante de estas clases cuya prueba se puede encontrar en [5] (ver Corolario 1 allí).

Proposición 3.1.6. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $\beta > 1$. *Entonces*

$$A_p^{\rho,\text{loc}} = A_p^{\beta\rho,\text{loc}}. \tag{3.1.4}$$

Dada una función radio crítico ρ, vamos a definir un operador maximal asociado naturalmente a las clases de pesos $A_p^{\rho,\text{loc}}$.

Algunas de las siguientes definiciones requerirán considerar la familia de bolas

$$\mathcal{B}_\rho = \{B(z,r) : \ z \in \mathbb{R}^d, \ r \leq \rho(z)\}. \tag{3.1.5}$$

Definición 3.1.7. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ definimos el operador maximal ρ-local del siguiente modo

$$M_\rho^{\text{loc}} f(x) = \sup_{x\in B\in\mathcal{B}_\rho} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy.$$

En concordancia con lo afirmado anteriormente, el siguiente teorema relaciona de forma unívoca la maximal M_ρ^{loc} y los pesos $A_p^{\rho,\text{loc}}$. Una prueba del mismo puede encontrarse en [5].

Teorema 3.1.8. *Un peso* w *pertenece a* $A_p^{\rho,\text{loc}}$, $1 < p < \infty$, *si y sólo si* M_ρ^{loc} *es acotada en* $L^p(w)$. *Además, si* w *pertenece a* $A_1^{\rho,\text{loc}}$, *el operador* M_ρ^{loc} *es de tipo débil* $(1,1)$.

Observación 3.1.9. Antes de continuar, queremos señalar que dada una función radio crítico ρ, el teorema anterior asegura que la familia $\mathcal{B}_\rho$ definida en (3.1.5) es, en efecto, una base de Muckenhoupt, en el sentido definido en la Sección 2.2 y el resultado de extrapolación del Teorema 2.2.2 es válido en este contexto .

Análogamente al caso clásico se definen también las clases $A_{p,q}^{\rho,\text{loc}}$.

Definición 3.1.10. Dados $1 < p, q < \infty$ se define la clase $A_{p,q}^{\rho,\text{loc}}$, como el conjunto de pesos w que satisfacen

$$\left(\int_B w^{-p'}\right)^{1/p'} \left(\int_B w^q\right)^{1/q} \leq C|B|^{1/p'+1/q},$$

para toda bola $B = B(x,r)$, con $r \leq \rho(x)$.

Como en el caso clásico es fácil comprobar que $w \in A_{p,q}^{\rho,\text{loc}}$ si y sólo si $w^{-p'} \in A_{1+p'/q}^{\rho,\text{loc}}$ y $w \in A_{p,p}^{\rho,\text{loc}}$ si y sólo si $w^p \in A_p^{\rho,\text{loc}}$. Por otra parte, en asociación a estos pesos tenemos la siguiente función maximal.

Definición 3.1.11. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $0 \leq \alpha < d$ definimos el operador maximal fraccionario ρ-local del siguiente modo

$$M_\rho^{\text{loc},\alpha} f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}_\rho} \frac{1}{|B|^{1-\alpha/d}} \int_B |f(y)| dy.$$

Proposición 3.1.12. *Sea $0 < \alpha < d$. Entonces*

$$\|M_\rho^{\text{loc},\alpha} f \; w\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})}, \tag{3.1.6}$$

si y sólo si w es tal que $w^{d/(\alpha-d)} \in A_1^{\rho,\text{loc}}$.

Demostración. La prueba es la usual en estos casos y sólo es incluida aquí en afán de completitud.

Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y una bola $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ que lo contiene. Consideremos además $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y un peso w tal que $w^{d/(\alpha-d)} \in A_1^{\rho,\text{loc}}$. A partir de la desigualdad de Hölder con exponente d/α y la condición sobre el peso se sigue

$$\begin{aligned}
\int_B |f(y)| \; dy &= \int_B |f(y)| w(y) w^{-1}(y) \; dy \\
&\leq \left(\int_B |f(y)|^{d/\alpha} w(y)^{d/\alpha} \; dy \right)^{\alpha/d} \left(\int_B w(y)^{d/(\alpha-d)} \; dy \right)^{(d-\alpha)/d} \\
&\leq C |B|^{1-\alpha/d} \|f\|_{L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})} \operatorname*{ínf}_B w^{-1}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad anterior se sigue (3.1.6).

Recíprocamente, tomando $f = \chi_{B(x,r)} w^{d/(\alpha-d)}$ con $r \leq \rho(x)$ en (3.1.6), se llega fácilmente a que $w^{d/(\alpha-d)} \in A_1^{\rho,\text{loc}}$.

□

A partir del resultado anterior y del Teorema 2.1.16 para la familia cuyo único operador es $M^{\text{loc}}_{\text{loc},\rho}$ y $\mathscr{F} = (M_\rho^\alpha f, |f|)$, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.13. *Sea $0 < \alpha < d$. Un peso w pertenece a $A_{p,q}^{\rho,\mathrm{loc}}$, $1 < p < d/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/d$ si y sólo si $M_\rho^{\mathrm{loc},\alpha}$ es acotada de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$.*

Vamos ahora a presentar unas clases de pesos (no locales) asociados a la función radio crítico ρ, las cuales fueron introducida en [5] en conexión con el semigrupo generado por $\mathcal{L}$.

Definición 3.1.14. Dado $p > 1$ y $\theta \geq 0$ las clases $A_p^{\rho,\theta}$ se definen como el conjunto de pesos w tales que

$$\left(\int_B w\right)^{1/p}\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \leq C|B|\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta}, \tag{3.1.7}$$

para toda bola $B = B(x, r)$.

El ínfimo de las constantes en (3.1.7) será denotado mediante $(w)_{p,\theta}$.

Definición 3.1.15. Dado $\theta \geq 0$ la clase $A_1^{\rho,\theta}$ está definida como aquellos pesos w que satisfacen

$$\frac{1}{|B|}\int_B w \leq C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta} \inf_B w, \tag{3.1.8}$$

para toda bola $B = B(x, r)$, donde el ínfimo debe ser entendido como un ínfimo esencial con respecto a la medida de Lebesgue.

Como antes, para este caso, el ínfimo de las constantes en (3.1.8) será denotado mediante $(w)_{1,\theta}$. Usaremos la notación $A_p^\rho = \cup_{\theta\geq 0} A_p^{\rho,\theta}$, $p \geq 1$ y $A_\infty^\rho = \cup_{p\geq 1} A_p^\rho$.

Claramente, las clases $A_p^{\rho,\theta}$ son crecientes con θ, y para $\theta = 0$ coinciden con las clases usuales de Muckenhoupt A_p. Más aún, la inclusión es propia. Tomemos por ejemplo, $\rho \equiv 1$ y $w(x) = 1 + |x|^\beta$. Ahora, para $\beta > d(p-1)$, el peso w pertenece a A_p^ρ, pero no a A_p.

No resulta difícil verificar que si $p \geq 1$, entonces $A_p^\rho \subset A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$. Ahora presentaremos algunas propiedades de las clases A_p^ρ.

Proposición 3.1.16. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$.*

(I) *Si $w \in A_p^\rho$, entonces $w \in A_q^\rho$.*

(II) *Si* $w \in A_p^\rho$, *entonces* $w^{1-p'} \in A_{p'}^\rho$.

(III) *Si* $w_1, w_2 \in A_1^\rho$, *entonces* $w_1 w_2^{1-p} \in A_p^\rho$.

(IV) *Si* $w \in A_1^\rho$, *entonces existe* $\gamma > 1$ *tal que* $w^\gamma \in A_1^\rho$.

Demostración. Las propiedades (I) y (II) son elementales y se prueban de la misma manera como se procede para las clases de Muckenhoupt. Con el fin de probar (III), consideremos $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ y denotemos $B = B(x_0, r)$. Como $w_1, w_2 \in A_1^\rho$, existe $\theta \geq 0$ tal que

$$w_i(B) \leq C|B| \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\theta \inf_B w_i,$$

para $i = 1, 2$. Así

$$w_i(x)^{-1} \leq \sup_B w_i(x)^{-1} = \left(\inf_B w_i(x)\right)^{-1} \leq C\left(\frac{w_i(B)}{|B|}\right)^{-1} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\theta.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_B w_1 w_2^{1-p}\right)^{1/p} \left(\int_B (w_1 w_2^{1-p})^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \\
&\quad \leq C w_1(B)^{1/p} w_2(B)^{(1-p)/p} |B|^{(p-1)/p} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{(p-1)\theta/p} \\
&\qquad\quad \times w_2(B)^{1/p'} w_1(B)^{1/(1-p)p'} |B|^{1/(p-1)p'} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta/(p-1)p'} \\
&\quad = C\left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\theta |B|.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Finalmente, la prueba de la propiedad (IV) se encuentra contenida en el Lema 3 de [7]. □

Observación 3.1.17. Vale la pena mencionar que existe un control preciso de las constantes en las propiedades (II) y (III) en la Proposición 3.1.16. En efecto, se sigue fácilmente a partir de la definición de las clases que $(w^{1-p'})_{p',\theta} = (w)_{p,\theta}$. Con respecto a (III), se sigue de (3.1.9) que $(w_1 w_2^{1-p})_{p,\theta} \leq (w_1)_{1,\theta} (w_2)_{1,\theta}$.

Vamos ahora a definir operadores maximales adecuados para las clases A_p^ρ.

Definición 3.1.18. Dado $\theta \geq 0$ y $f \in L^1_{\text{loc}}$ el operador maximal M^θ_ρ viene definido como

$$M^\theta_\rho f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\theta} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|\, dy.$$

Si para cada $\theta \geq 0$ denotamos $M^\theta_\rho = T_\theta$, veremos en el siguiente teorema que A^ρ_p coincide con las clases U_p de la Sección 2.1, para cada $1 < p < \infty$. Sin embargo, puede no ser cierto que para un θ fijo las clases U^θ_p asociadas con M^θ_ρ coincidan con $A^{\rho,\theta}_p$.

Por otra parte, es fácil verificar que $A^{\rho,\theta}_1 = U^\theta_1$. En efecto, si x es un punto de Lebesgue de w tenemos que $\inf_B w \leq w(x)$ y si (3.1.8) vale, tomando supremo sobre todas las bolas que contienen a x llegamos a $M^\theta_\rho w(x) \leq Cw(x)$. Recíprocamente, si $w \in U^\theta_1$, entonces para cualquier bola $B = B(x_0, r)$, la desigualdad $(1+r/\rho(x_0))^{-\theta}\frac{w(B)}{|B|} \leq M^\theta_\rho w(x) \leq Cw(x)$ vale en casi todo punto x de B, lo cual implica (3.1.8).

Teorema 3.1.19. *Sea $1 < p < \infty$. Un peso w pertenece a A^ρ_p si y sólo si existe $\theta \geq 0$ tal que M^θ_ρ es acotada en $L^p(w)$.*

Demostración. Comencemos suponiendo que para un peso w existen constantes $\theta \geq 0$ y C tales que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |M^\theta_\rho f|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w, \tag{3.1.10}$$

para toda f en $L^p(w)$.

Sea $B = B(x, r)$ para algún $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, y tomemos $f = (w + \epsilon)^{-1/(p-1)}\chi_B$, para $\epsilon > 0$. De este modo, f pertenece a $L^p(w)$. Teniendo en cuenta la definición de M^θ_ρ, y (3.1.10), tenemos

$$\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\theta p} \left(\frac{1}{|B|}\int_B (w+\epsilon)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^p \left(\int_B w\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w \leq C\int_B (w+\epsilon)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Por lo tanto, tomando límite cuando ϵ tiende a cero, obtenemos que $w \in A^{\rho,\theta}_p$.

Por otra parte, supongamos ahora que $w \in A^\rho_p$. Entonces existen $\theta \geq 0$ y C tales que

$$\left(\int_B w\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C|B|^p \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta p}, \tag{3.1.11}$$

para toda bola $B = B(x, r)$.

Para obtener la acotación, será suficiente considerar la versión centrada del operador M_ρ^σ definida mediante

$$\tilde{M}_\rho^\sigma f(x) = \sup_{r>0} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| \,, \qquad f \in L^1_{\text{loc}}.$$

Puede verse sin dificultad que $M_\rho^\sigma f(x) \simeq \tilde{M}_\rho^\sigma f(x)$. Por una parte, es claro que $\tilde{M}_\rho^\sigma f(x) \leq M_\rho^\sigma f(x)$; mientras que a partir de (3.1.1) se sigue que $M_\rho^\sigma f(x) \leq c\tilde{M}_\rho^{\sigma/(N_0+1)} f(x)$, con $c = 2^d(2c_\rho)^{\sigma/(N_0+1)}$. En efecto, si $x \in \mathbb{R}^d$ y $x \in B(x_0, r)$, a partir de la desigualdad (3.1.1) obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2r}{\rho(x)} &\leq 1 + 2c_\rho \frac{r}{\rho(x_0)} \left(1 + \frac{|x - x_0|}{\rho(x_0)}\right)^{N_0} \\ &\leq 1 + 2c_\rho \frac{r}{\rho(x_0)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{N_0} \\ &\leq 2c_\rho \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{N_0+1} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f| \\ &\qquad \leq (2c_\rho)^{\sigma/(N_0+1)} \left(1 + \frac{2r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma/(N_0+1)} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f| \\ &\qquad \leq 2^d(2c_\rho)^{\sigma/(N_0+1)} \left(1 + \frac{2r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma/(N_0+1)} \frac{1}{|B(x,2r)|} \int_{B(x,2r)} |f| \\ &\qquad \leq 2^d(2c_\rho)^{\sigma/(N_0+1)} \tilde{M}_\rho^{\sigma/(N_0+1)} f(x). \end{aligned}$$

A partir de la última estimación, se sigue lo afirmado.

Sea ahora $\sigma \geq 0$ el cual será determinado más adelante. Observemos que si $f \in L^p(w)$, tenemos que

$$\tilde{M}_\rho^\sigma f(x) \leq M_{\rho,1}^\sigma f(x) + M_{\rho,2}^\sigma f(x),$$

donde

$$M_{\rho,1}^\sigma f(x) = \sup_{r \leq \rho(x)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|,$$

y

$$M_{\rho,2}^\sigma f(x) = \sup_{r > \rho(x)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|.$$

Por lo tanto, debemos verificar que tanto $M^{\sigma}_{\rho,1}$ como $M^{\sigma}_{\rho,2}$ son acotados en $L^p(w)$.

Como para todo $\sigma \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$, $M^{\sigma}_{\rho,1} f(x) \leq M^{\text{loc}}_{\rho} f(x)$ y $A^{\rho}_p \subset A^{\rho,\text{loc}}_p$, la acotación de $M^{\sigma}_{\rho,1}$ se sigue a partir de la acotación de M^{loc}_{ρ} para los pesos $A^{\rho,\text{loc}}_p$ (ver Teorema 3.1.8).

Con el fin de acotar $M^{\sigma}_{\rho,2}$, consideremos el cubrimiento $\{Q_k\}_{k\geq 1}$ provisto por la Proposición 3.1.3. Ahora para $x \in Q_k$ llamamos $R_j = \{r : 2^{j-1}\rho(x) < r \leq 2^j\rho(x)\}$, y entonces usando (3.1.1) tenemos

$$\begin{aligned} M^{\sigma}_{\rho,2} f(x) &= \sup_{j\geq 1} \sup_{r\in R_j} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| \\ &\leq C \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\sigma+d)}}{\rho(x)^d} \int_{B(x,2^j\rho(x))} |f| \\ &\leq C \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\sigma+d)}}{\rho(x_k)^d} \int_{c_jQ_k} |f|, \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

con $c_j = 2^j(c_\rho 2^{N_0} + 1)$.

Finalmente, de (3.1.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\sigma}_{\rho,2} f|^p w &\leq \sum_{k\geq 1} \int_{Q_k} |M^{\sigma}_2 f|^p w \\ &\leq C \sum_{k\geq 1} \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\sigma+d)p}}{\rho(x_k)^{dp}} \left(\int_{c_jQ_k} |f|\right)^p \left(\int_{Q_k} w\right) \\ &\leq C \sum_{k\geq 1} \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\sigma+d)p}}{\rho(x_k)^{dp}} \left(\int_{c_jQ_k} |f|^p w\right) \\ &\qquad \times \left(\int_{c_jQ_k} w^{-1/(p-1)}\right)^{p-1} \left(\int_{c_jQ_k} w\right) \\ &\leq C \sum_{k\geq 1} \sup_{j\geq 1} 2^{-j(\sigma-\theta)p} \left(\int_{c_jQ_k} |f|^p w\right) \\ &\leq C \sum_{j\geq 1} 2^{-j(\sigma-\theta)p} \left(\sum_{k\geq 1} \int_{c_jQ_k} |f|^p w\right) \\ &\leq C \left(\sum_{j\geq 1} 2^{-j(\sigma p-\theta p-N_1)}\right) \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w, \end{aligned}$$

donde la última serie converge tomando $\sigma > \theta + N_1/p$. Aquí N_1 es la constante que aparece en la Proposición 3.1.3.

$\square$

Observación 3.1.20. Observar que hemos probado las inclusiones $U_p^\theta \subset A_p^{\rho,\theta} \subset U_p^\sigma$ para $\sigma > (N_0+1)(\theta + N_1/p)$. Además, siguiendo las constantes en el Teorema 3.1.19 tenemos

$$C[w]_{p,\sigma} \leq (w)_{p,\theta} \leq [w]_{p,\theta},$$

para $\sigma > (N_0+1)(\theta + N_1/p)$, y $C > 0$ independiente de w.

Proposición 3.1.21. *Las clases U_p, $1 \leq p < \infty$, asociadas a $\{M_\rho^\theta\}_{\theta>0}$ satisfacen u1), u2) y u3) de la Sección 2.1.*

Demostración. Como $A_p^\rho = U_p$ (ver Teorema 3.1.19), la propiedad u1) se sigue de (I) en la Proposición 3.1.16.

Con el propósito de verificar u2), sea $1 < p < \infty$, $\theta \geq 0$ y $w \in U_p^\theta$. A partir del Teorema 3.1.19 tenemos $w \in A_p^{\rho,\theta}$, y entonces usando (II) de la Proposición 3.1.16, obtenemos que $w^{1-p'} \in A_{p'}^{\rho,\theta}$. Utilizando nuevamente el Teorema 3.1.19 resulta $w^{1-p'} \in U_{p'}^{\theta'}$ con $\theta' > (N_0+1)(\theta + N_1/p')$ (ver Teorema 3.1.19 para conocer el significado de las constantes de esta expresión). Notemos que debido a la Observaciones 3.1.17 y 3.1.20 la constante $[w^{1-p'}]_{p',\theta'}$ depende de w sólo a través de $[w]_{p,\theta}$. La propiedad u3) puede verificarse análogamente.

□

Antes de continuar veamos un resultado que nos será de utilidad posteriormente y nos habla de la acotación de M_ρ^θ para $p = 1$.

Proposición 3.1.22. *Dado un peso $w \in A_1^\rho$, para θ suficientemente grande, la función maximal M_ρ^θ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w.*

Demostración. Supongamos que $w \in A_1^{\rho,\sigma}$ para algún $\sigma > 0$. Sea $Q_k = B(x_k, \rho(x_k))$, $k \geq 1$, el cubrimiento de $\mathbb{R}^d$ provisto por la Proposición 3.1.3. Siguiendo el Teorema 3.1.19 obtenemos

$$M_\rho^\theta f(x) \lesssim M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) \ + \ M_\rho^{\theta,2} f(x)$$

donde

$$M_\rho^{\theta,2} f(x) = \sup_{r > \rho(x)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\theta} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|.$$

Teniendo en cuenta que M_ρ^{loc} es de tipo débil $(1,1)$ para $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$, es suficiente acotar $M_\rho^{\theta,2} f$.

Como en (3.1.12) , para $x \in Q_k$, si denotamos $Q_k^j = c_j Q_k$, con $c_j = 2^j(c_\rho 2^{N_0}+1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} M_\rho^{\theta,2} f(x) &\lesssim C \sup_{j\geq 1} 2^{-j\theta} \frac{1}{|Q_k^j|} \int_{Q_k^j} |f| \leq C \sum_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\theta-\sigma)}}{w(Q_k^j)} \int_{Q_k^j} |f| w \\ &\leq \frac{C}{w(Q_k)} \sum_{j\geq 1} 2^{-j(\theta-\sigma)} \int_{Q_k^j} |f| w = C \frac{A_k}{w(Q_k)} \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que $w \in A_1^{\rho,\sigma}$. Entonces

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^d : \ M_\rho^{\theta,2} f(x) > \lambda\}) &\leq \sum_{k\geq 1} w(\{x \in Q_k : \ A_k/w(Q_k) > \lambda/C\}) \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{j\geq 1} 2^{-j(\theta-\sigma)} \sum_{k\geq 1} \int_{Q_k^j} |f| w \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f| w \left(\sum_{j\geq 1} 2^{-j(\theta-\sigma-N_1)} \right). \end{aligned}$$

y el resultado se sigue tomando $\theta > \sigma + N_1$, donde N_1 es la constante que aparece en la Proposición 3.1.3.

□

También en este caso vamos a considerar una familia de pesos con dos parámetros y la maximal asociada a tales pesos.

Definición 3.1.23. Dados $1 < p, q < \infty$ y $\theta > 0$ se define la clase $A_{p,q}^{\rho,\theta}$, como el conjunto de pesos w que satisfacen

$$\left(\int_B w^{-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_B w^q \right)^{1/q} \leq C |B|^{1/p'+1/q} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^\theta,$$

para toda bola $B = B(x,r)$. Denotaremos mediante $A_{p,q}^\rho = \cup_{\theta\geq 0} A_{p,q}^{\rho,\theta}$.

Además, para $1 < p < \infty$ y $\theta \geq 0$ definimos la clase $A_{p,\infty}^{\rho,\theta}$ como el conjunto de pesos w tales que $w^{-p'} \in A_1^{\rho,\theta}$ y denotamos $A_{p,\infty}^\rho = \cup_{\theta\geq 0} A_{p,\infty}^{\rho,\theta}$.

Observación 3.1.24. No resulta difícil comprobar que $w \in A_{p,q}^\rho$ si y sólo si $w^{-p'} \in A_{1+p'/q}^\rho$ o equivalentemente $w^q \in A_{1+q/p'}^\rho$.

Definición 3.1.25. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \alpha < d$ y $\theta \geq 0$ definimos

$$M_\rho^{\theta,\alpha} f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\theta} \frac{1}{|B(x_0,r)|^{1-\alpha/d}} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|\, dy.$$

A continuación veremos la acotación del operador maximal fraccionario recién definido.

Teorema 3.1.26. *Sean $0 < \alpha < d$, $1 < p < d/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/d$. Un peso w pertenece a $A^\rho_{p,q}$ si y sólo si existe $\theta \geq 0$ tal que $M_\rho^{\theta,\alpha}$ es acotada de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$.*

Demostración. La prueba sigue los lineamientos de la demostración del Teorema 3.1.19. Por tal razón sólo expondremos las diferencias con ese caso. En primer lugar, comenzamos suponiendo que $M_\rho^{\theta,\alpha}$ es acotada de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ y consideramos la función $f = (w + \epsilon)^{-p'}\chi_B$ para una bola $B = B(x,r)$. A partir de aquí se procede como en el Teorema 3.1.19 y se concluye que $w \in A^{\rho,\theta}_{p,q}$.

Para ver la otra implicación, tomamos un peso $w \in A^{\rho,\theta}_{p,q}$, para un $\theta > 0$. Como antes será suficiente considerar la versión centrada del operador $M_\rho^{\sigma,\alpha}$ definida mediante

$$\tilde{M}_\rho^{\sigma,\alpha} f(x) = \sup_{r>0} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\alpha/d}} \int_{B(x,r)} |f|, \qquad f \in L^1_{\text{loc}}.$$

A partir de (3.1.1), se sigue como antes que $M_\rho^{\sigma,\alpha} f(x) \leq c\tilde{M}_\rho^{\frac{\sigma}{(N_0+1)},\alpha} f(x)$, con $c = 2^{d-\alpha}(2c_\rho)^{\sigma/(N_0+1)}$.

Sea $\sigma \geq 0$ el cual será determinado después. Para $f \in L^p(w)$, tenemos que

$$\tilde{M}_\rho^{\sigma,\alpha} f(x) \leq M_{\rho,1}^{\sigma,\alpha} f(x) + M_{\rho,2}^{\sigma,\alpha} f(x),$$

con

$$M_{\rho,1}^{\sigma,\alpha} f(x) = \sup_{r\leq\rho(x)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\alpha/d}} \int_{B(x,r)} |f|,$$

y

$$M_{\rho,2}^{\sigma,\alpha} f(x) = \sup_{r>\rho(x)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\alpha/d}} \int_{B(x,r)} |f|.$$

Para todo $\sigma \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$, resulta $M^{\sigma,\alpha}_{\rho,1} f(x) \leq M^{\mathrm{loc},\alpha}_{\rho} f(x)$ y $A^{\rho}_{p,q} \subset A^{\rho,\mathrm{loc}}_{p,q}$, con lo cual la acotación del operador $M^{\sigma,\alpha}_{\rho,1}$ se sigue a partir de la acotación de $M^{\mathrm{loc},\alpha}_{\rho}$ de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para los pesos $A^{\rho,\mathrm{loc}}_{p,q}$ (ver Teorema 3.1.13).

En forma totalmente análoga a lo hecho para el Teorema 3.1.19 obtenemos que

$$M^{\sigma,\alpha}_{\rho,2} f(x) \leq C \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\sigma+d-\alpha)}}{\rho(x_k)^{d-\alpha}} \int_{c_j Q_k} |f|,$$

con $c_j = 2^j(c_\rho 2^{N_0} + 1)$.

Finalmente, teniendo en cuenta que el peso $w \in A^{\rho,\theta}_{p,q}$ y $q/p > 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |M^{\sigma,\alpha}_{\rho,2} f|^q w^q &\leq \sum_{k\geq 1} \int_{Q_k} |M^{\sigma,\alpha}_{\rho,2} f|^q w^q \\
&\leq C \sum_{k\geq 1} \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\sigma+d-\alpha)q}}{\rho(x_k)^{(d-\alpha)q}} \left(\int_{c_j Q_k} |f| \right)^q \left(\int_{Q_k} w^q \right) \\
&\leq C \sum_{k\geq 1} \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-j(\sigma+d-\alpha)q}}{\rho(x_k)^{(d-\alpha)q}} \left(\int_{c_j Q_k} |f|^p w^p \right)^{q/p} \\
&\qquad \times \left(\int_{c_j Q_k} w^{-p'} \right)^{q/p'} \left(\int_{c_j Q_k} w^q \right) \\
&\leq C \sum_{k\geq 1} \sup_{j\geq 1} 2^{-j(\sigma-\theta)q} \left(\int_{c_j Q_k} |f|^p w^p \right)^{q/p} \\
&\leq C \sum_{j\geq 1} 2^{-j(\sigma-\theta)q} \left(\sum_{k\geq 1} \int_{c_j Q_k} |f|^p w^p \right)^{q/p} \\
&\leq C \left(\sum_{j\geq 1} 2^{-j(\sigma-\theta-\frac{N_1}{p})q} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w^p \right)^{q/p},
\end{aligned}$$

donde la última serie converge tomando $\sigma > \theta + N_1/p$. Aquí N_1 es la constante que aparece en la Proposición 3.1.3.

□

Observación 3.1.27. En este caso no se puede proceder usando técnicas de extrapolación, pues no resulta cierto que dado $\theta > 0$, $\|M^{\theta,\alpha}_{\rho} f\ w\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})}$, para todo peso w tal que $w^{d/(\alpha-d)} \in A^{\rho}_1$.

En vista de lo probado en el Teorema 3.1.19, la Proposición 3.1.21 y la Observación 3.1.20, podemos aplicar los resultados de la Sección 2.1 al contexto de los pesos A^{ρ}_p.

A continuación enunciamos varios teoremas: el primero se deduce de los Corolarios 2.1.5 y 2.1.7, el segundo es consecuencia directa del Teorema 2.1.10, el tercero se sigue de los Corolarios 2.1.13 y 2.1.7 y finalmente, el cuarto se obtiene a partir del Teorema 2.1.16.

Teorema 3.1.28. *Sean $0 < r < p_0 < \infty$ y supongamos que para todo $w \in A^{\rho}_{p_0/r}$ se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{p_0} w(x)dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p_0} w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

Entonces para todo $p > r$ y todo $w \in A^{\rho}_{p/r}$ se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{p} w(x)dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p} w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

Además, para $r < p, \gamma < \infty$ y todo $w \in A^{\rho}_{p/r}$ se cumple

$$\left\| \left(\sum_i f_i^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \le C \left\| \left(\sum_i g_i^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}, \quad \{(f_i,g_i)\}_i \subset \mathscr{F}.$$

Teorema 3.1.29. *Sea $s > 1$ y supongamos que para todo peso w tal que $w^{s'} \in A^{\rho}_1$ se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)w(x)\ dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)w(x)\ dx, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

Entonces, para todo $1 < p < s$ y todo w tal que $w^{(s/p)'} \in A^{\rho}_{\tau_p}$, con $\tau_p = p\left(\frac{s-1}{s-p}\right)$, se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^p w(x)\ dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^p w(x)\ dx, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

Teorema 3.1.30. *Sea $r > 0$ y supongamos que para todo w tal que $w^{-r} \in A^{\rho}_1$ se cumple*

$$\|fw\|_{L^\infty} \le C\|gw\|_{L^\infty}, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

Entonces, para todo $p > r$ y todo peso $w \in A^{\rho}_{r/p}$ se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{p} w(x)dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p} w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

Además, para $r < p, \gamma < \infty$ y todo $w \in A^{\rho}_{p/r}$ se cumple

$$\left\| \left(\sum_i f_i^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \le C \left\| \left(\sum_i g_i^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}, \quad \{(f_i,g_i)\}_i \subset \mathscr{F}.$$

Teorema 3.1.31. *Sea $1 < r < \infty$. Supongamos que para todo peso w tal que $w^{-r'} \in A_1^\rho$ se verifica*

$$\|fw\|_{L^\infty} \leq C\|g\|_{L^r(w^r)}, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

Entonces, para todo par p y q tales que $1 < p < r$, $1/p - 1/q = 1/r$, y todo $w \in A_{p,q}^\rho$ se cumple

$$\|f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|g\|_{L^p(w^p)}, \quad (f,g) \in \mathscr{F}.$$

3.2 Espacios de tipo BMO asociados a ρ

Como en el caso clásico los operadores más interesantes del análisis asociados a $\mathcal{L}$ no preservan $L^\infty(w)$ incluso aún en el caso $w = 1$.

En su lugar ellos aplican $L^\infty(w)$ en un espacio ligeramente más grande. Este espacio es una versión apropiada de BMO, el espacio de John-Nirenberg.

En esta sección presentamos este espacio, el cual puede ser caracterizado en términos de un operador maximal sharp adecuado.

Definición 3.2.1. Dado un peso w definimos el espacio $BMO_\rho(w)$ como el conjunto de las funciones f en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ que satisfacen que para alguna constante C,

$$\frac{\|\chi_B w\|_{L^\infty}}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C, \qquad r < \rho(x), \tag{3.2.1}$$

y

$$\frac{\|\chi_B w\|_{L^\infty}}{|B|} \int_B |f| \leq C, \qquad r = \rho(x), \tag{3.2.2}$$

para toda bola $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^d$, donde $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f$.

La norma $\|f\|_{BMO_\rho(w)}$ en $BMO_\rho(w)$ está definida como la menor constante que satisface (3.2.1) y (3.2.2).

Si tomamos el caso límite $\rho \equiv \infty$, la definición anterior da una de las versiones con pesos de los espacios de oscilación media introducidos por Muckenhoupt y Wheeden en [33]. También notemos que otra versión de estos espacios fue considerados en [3], aunque ambas definiciones coinciden siempre que el peso w sea tal que w^{-1} pertenezca a la clase de Muckenhoupt A_1.

Para una función localmente integrable definimos una versión localizada de la función sharp como sigue.

Definición 3.2.2. Dada $f \in L^1_{\rm loc}$ se define

$$M^\sharp_\rho f(x) = \sup_{x\in B\in\mathcal{B}_\rho} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f_B|dy \; + \sup_{x\in B=B(z,\rho(z))} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy.$$

Como es de esperar, el espacio $BMO_\rho(w)$ puede ser caracterizado por medio del operador $M^\sharp_\rho$.

Lema 3.2.3. *Sea w un peso. Si f pertenece a $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$\frac{1}{2}\|M^\sharp_\rho(f)w\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{BMO_\rho(w)} \leq \|M^\sharp_\rho(f)w\|_{L^\infty}.$$

Demostración. Comencemos probando

$$\|f\|_{BMO_\rho(w)} \leq \|M^\sharp_\rho(f)w\|_{L^\infty}. \tag{3.2.3}$$

Consideremos $B = B(x_0, r)$ con $r < \rho(x_0)$. Entonces, para casi todo punto x en B tenemos

$$\begin{aligned} w(x)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\right) &\leq w(x)M^\sharp_\rho(f)(x) \\ &\leq \|M^\sharp_\rho(f)w\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

En el caso $r = \rho(x_0)$, para casi todo punto x en B,

$$\begin{aligned} w(x)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|\right) &\leq w(x)M^\sharp_\rho(f)(x) \\ &\leq \|M^\sharp_\rho(f)w\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

y así, tomando supremo en x sobre B, obtenemos (3.2.3).

Para ver la otra desigualdad, consideremos $B = B(x_0, r)$ con $r < \rho(x_0)$. Luego, para casi todo punto x en B se sigue

$$\begin{aligned} w(x)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\right) &\leq \|w\chi_B\|_{L^\infty}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\right) \\ &\leq \|f\|_{BMO_\rho(w)}. \end{aligned}$$

Procediendo del mismo modo para los promedios sobre las bolas de la forma $B = B(z, \rho(z))$ obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Capítulo 4

Acotación de operadores asociados a ρ vía extrapolación

El objetivo principal de este capítulo es lograr la acotación de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ y por extrapolación de $L^p(w)$ en sí mismo, de operadores que vienen dados por un núcleo que puede ser singular, el cual cumple ciertas estimaciones de tamaño y suavidad relacionadas con ρ. Como siempre, nuestro modelo de aproximación es el contexto del semigrupo generado por $\mathcal{L}$, pues veremos que existen varios operadores que aparecen en el análisis asociado a $\mathcal{L}$ cuyos núcleos satisfacen estimaciones como las que se presentan aquí. Desigualdades en L^p sin pesos para tales operadores fueron obtenidas por Shen en [39].

En vista de este objetivo, en la primera sección vamos a comenzar estableciendo una desigualdad de tipo Fefferman-Stein la cual será clave para poder extrapolar una desigualdad en $L^p(w)$ y desigualdades a valores vectoriales a partir de una desigualdad $L^\infty(w) - BMO_\rho(w)$, con la ayuda de los resultados del Capítulo 2.

En la Sección 4.2 vamos a presentar operadores T cuyos núcleos K satisfacen ciertas propiedades en términos de ρ y probaremos que tales operadores son acotados de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ para pesos adecuados en A_ρ^∞ y por consiguiente en $L^p(w)$ de acuerdo con el teorema de extrapolación que obtendremos en la Sección 4.1.

Finalmente, en la última sección, aplicaremos los resultados obtenidos en la Sección 4.2 a operadores concretos que aparecen en el contexto del operador de Schrödinger cuyos núcleos, como probaremos, satisfacen las estimaciones necesarias establecidas con anterioridad.

4.1 Una desigualdad de tipo Fefferman-Stein

La desigualdad clásica de Fefferman-Stein establece una relación entre las normas con pesos de la maximal de Hardy-Littlewood y la maximal sharp asociada. Explícitamente

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Mg(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^\sharp g(x)|^p w(x)\, dx,$$

para todo peso $w \in A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p$, siempre que el miembro izquierdo sea finito. Así, para g constante, el miembro izquierdo será infinito y el derecho cero.

En [34] esta desigualdad fue extendida al contexto de espacios de tipo homogéneo, tanto de medida finita como infinita.

Para probar una desigualdad apropiada en nuestro contexto vamos a usar la validez de la desigualdad clásica en una bola, por lo que usaremos la versión de medida finita de [34]. Más precisamente, recurriremos al siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. *Sea (Ω, d, μ) un espacio de tipo homogéneo regular en medida*[1] *y de medida finita. Sea $g \in L^\infty$ una función positiva y $w \in A_\infty$. Entonces, para todo p, $1 < p < \infty$, existe una constante C tal que si $\|Mg\|_{L^p(w)} < \infty$, se cumple*

$$\int_\Omega |Mg(x)|^p w(x)\, d\mu(x) \leq C w(\Omega) \left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega g\, d\mu \right)^p \; + \; C \int_\Omega |M^\sharp g(x)|^p w(x)\, d\mu(x).$$

Observación 4.1.2. Aunque no se menciona en [34], en el caso de medida finita, mirando la prueba es fácil observar que no hace falta suponer la finitud del lado izquierdo y el resultado vale para cualquier función integrable g, siempre que $\|Mg\|_{L^p(w)} < \infty$.

Cuando el espacio de tipo homogéneo es una bola Q en $\mathbb{R}^d$, las definiciones de M_Q y $M_Q^\sharp$, mirando a Q como un espacio de tipo homogéneo, son las siguientes.

[1] Recordemos que un e.t.h. (Ω, d, μ) se dice regular en medida si la medida μ es regular, esto significa que para todo conjunto medible E, dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto G tal que $E \subset G$ y $\mu(G \backslash E) < \varepsilon$.

Definición 4.1.3. Dada una función $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \mathbb{R}^d$,

$$M_Q g(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{F}(Q)} \frac{1}{|B \cap Q|} \int_{B \cap Q} |g|, \quad x \in Q, \tag{4.1.1}$$

y

$$M^\sharp_Q g(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{F}(Q)} \frac{1}{|B \cap Q|} \int_{B \cap Q} |g - g_{B \cap Q}|, \quad x \in Q, \tag{4.1.2}$$

donde $\mathcal{F}(Q) = \{B(y,r) : y \in Q, r > 0\}$.

Las clases de Muckenhoupt correspondientes, las cuales se indican mediante $A_p(Q)$, para $p \geq 1$, también se definen mediante promedios en $B \cap Q$ para $B \in \mathcal{F}(Q)$. Vale la pena notar que para $\Omega = Q$, se tiene que $M_\Omega f(x) \simeq M\overline{f}(x)$, $x \in Q$ y para f integrable en Q y $\overline{f}$ su extensión como cero a todo $\mathbb{R}^d$.

En el contexto en el que estamos trabajando, la versión de la desigualdad de Fefferman-Stein que probaremos involucra la maximal local $M^{\text{loc}}_{\beta\rho}$ para $0 < \beta < 1$ apropiado, la maximal sharp $M^\sharp_\rho$ y los pesos $A^{\rho,\text{loc}}_\infty$ definidos anteriormente. La misma extiende un resultado similar pero en el contexto no pesado establecido en el Lema 2 de [6] y la prueba se desarrolla mediante la misma técnica.

Antes de presentar tal resultado, definimos una función maximal sharp que nos será de utilidad en la prueba de la desigualdad descripta.

Definición 4.1.4. Dada una función radio crítico ρ definimos el siguiente operador maximal para $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \mathbb{R}^d$,

$$M^{\sharp,0}_\rho g(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}_\rho} \frac{1}{|B|} \int_B |g - g_B|, \tag{4.1.3}$$

Es claro que $M^{\sharp,0}_\rho g(x) < M^\sharp_\rho g(x)$ pues

$$M^\sharp_\rho g(x) = M^{\sharp,0}_\rho g(x) \; + \sup_{x \in B = B(z,\rho(z))} \frac{1}{|B|} \int_B |g(y)| dy.$$

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 4.1.5. *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\rho,\text{loc}}_\infty$, entonces existen constantes $0 < \beta < 1$ y $C > 0$ independientes de p tales que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |M^{\text{loc}}_{\beta\rho} g(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^\sharp_\rho \, g(x)|^p w(x) dx,$$

para toda $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Vamos a usar la descomposición $\{Q_k^0\}_k$, del espacio $\mathbb{R}^d$ dada por la Proposición 3.1.3 asociada a la función radio crítico $\rho_0 = \rho/c_0$, donde $c_0 = 4c_\rho 2^{N_0}$ y tanto c_ρ, como N_0 son los dadas en la Definición 3.1.1.

Vamos a denotar $\alpha = \frac{1}{2c_{\rho_0}^2} = \frac{1}{2c_\rho^2}$, pues $c_{\rho_0} = c_\rho$ ya que $1/c_0 < 1$ y tomamos $\beta = \alpha/c_0$.

Siguiendo la prueba del Lema 2 en [6], si Q es una bola crítica con respecto a ρ_0 y $x \in Q$, es fácil ver que

$$M_{\beta\rho}^{\mathrm{loc}} g(x) = M_{\alpha\rho_0}^{\mathrm{loc}} g(x) \leq M_{2Q}(g\chi_{2Q})(x). \tag{4.1.4}$$

También, si $x \in 2Q$, entonces para alguna constante C,

$$M_{2Q}^{\sharp}(g\chi_{2Q})(x) \leq C M_{2\rho_0}^{\sharp,0} g(x). \tag{4.1.5}$$

Aquí $M_{2\rho_0}^{\sharp,0}$ denota el operador maximal sharp localizado definido en (4.1.3) para la función radio crítico $2\rho_0$.

Consecuentemente, si llamamos $w_k = w\chi_{2Q_k^0}$, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^d} |M_{\beta\rho}^{\mathrm{loc}}(g)|^p w \leq \sum_k \int_{Q_k^0} |M_{\beta\rho}^{\mathrm{loc}}(g)|^p w_k.$$

Usando la Proposición 3.1.6 es sencillo verificar que si $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$, luego $w_k \in A_\infty(2Q_k^0)$, para todo $k \geq 1$ con una constante independiente de k. Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.1.1 y las desigualdades (4.1.4) y (4.1.5), para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |M_{\beta\rho}^{\mathrm{loc}}(g)|^p w &\leq \sum_k \int_{2Q_k^0} |M_{2Q_k^0}(g\chi_{2Q_k^0})|^p w_k \\
&\leq C \sum_k \left\{ w_k(2Q_k^0)(g_{2Q_k^0})^p + \|M_{2Q_k^0}^{\sharp}(g\chi_{2Q_k^0})\|_{L^p(w_k,2Q_k^0)}^p \right\} \\
&\leq C \sum_k \left\{ w(2Q_k^0)\left(\frac{1}{|2Q_k^0|}\int_{2Q_k^0} |g|\right)^p + \int_{2Q_k^0} |M_{2\rho_0}^{\sharp,0}(g)|^p w \right\}.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Como $M_{2\rho_0}^{\sharp,0} = M_{\frac{2}{c_0}\rho}^{\sharp,0} \leq M_\rho^{\sharp,0} g$, y usando el solapamiento acotado debido a la Proposición 3.1.3, se sigue

$$\sum_k \int_{2Q_k^0} |M_{2\rho_0}^{\sharp,0} g|^p w \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_k \chi_{2Q_k^0}\Big) |M_\rho^{\sharp,0} g|^p w$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^{\sharp,0} g|^p w$$
$$\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^{\sharp} g|^p w.$$

Con el fin de tratar el otro término en el lado derecho de (4.1.6) veamos primero que, debido a (3.1.1), tenemos

$$2Q_k^0 \subset B(x, \rho(x)) \subset (c_0+1)Q_k^0, \tag{4.1.7}$$

para todo $x \in 2Q_k^0$. En efecto, sea $x \in 2Q_k^0$. Comencemos probando la primera inclusión. De (3.1.1) se deduce

$$\frac{\rho(x_k)}{\rho(x)} \leq c_\rho \left(1 + \frac{|x-x_k|}{\rho(x_k)}\right)^{N_0} < c_\rho \left(1 + \frac{2}{c_0}\right)^{N_0} < c_\rho 2^{N_0} = \frac{c_0}{4}.$$

Ahora si $z \in 2Q_k^0$, entonces

$$|z-x| \leq |z-x_k| + |x_k - x| < \frac{4}{c_0}\rho(x_k) < \rho(x),$$

y así $2Q_k \subset B(x, \rho(x))$.

Por otra parte, usando nuevamente (3.1.1), obtenemos para $x \in 2Q_k^0$

$$\rho(x) \leq c_\rho \rho(x_k) \left(1 + \frac{|x-x_k|}{\rho(x_k)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}} \leq c_\rho \rho(x_k) \left(1 + \frac{2}{c_0}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}} \leq 2^{N_0} c_\rho \rho(x_k).$$

Para $z \in B(x, \rho(x))$, tenemos

$$|z-x_k| \leq |z-x| + |x-x_k| < \rho(x) + \frac{2}{c_0}\rho(x_k) < \left(2^{N_0} c_\rho + \frac{2}{c_0}\right)\rho(x_k) < (c_0+1)\rho(x_k).$$

Por lo tanto, se sigue $B(x, \rho(x)) \subset (c_0+1)Q_k^0$.

De las inclusiones en (4.1.7) y la Proposición 3.1.3 resulta

$$\sum_k w(2Q_k^0) \left(\frac{1}{|2Q_k^0|} \int_{2Q_k^0} |g(y)| dy\right)^p$$
$$\leq C \sum_k \int_{2Q_k^0} w(x) \left(\frac{1}{\rho(x)^d} \int_{B(x,\rho(x))} |g(y)| dy\right)^p dx$$
$$\leq C \int_{\mathbb{R}^d} w(x) \left(\frac{1}{\rho(x)^d} \int_{B(x,\rho(x))} |g(y)| dy\right)^p dx$$
$$\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^{\sharp} g(x)|^p w(x) dx.$$

$\square$

Como una consecuencia del Teorema 4.1.5 y el hecho que para toda $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $\beta > 0$, se cumple $g \leq M^{\mathrm{loc}}_{\beta\rho} g$ en casi todo punto, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 4.1.6. *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}_\infty$. Si g pertenece a L^1_{loc}, entonces existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^\sharp_\rho g(x)|^p w(x) dx.$$

En vista de los resultados de la Sección 3.1, podemos reformular la extrapolación en el punto extremo $p = \infty$ para incluir el caso de operadores que están acotados de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ o de $L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})$ en $BMO_\rho(w)$ para ciertos pesos w. Los resultados obtenidos son los siguientes.

Teorema 4.1.7. *Sea $r \geq 1$ y T un operador acotado de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ para cualquier w tal que $w^{-r} \in A^\rho_1$ con constante dependiendo de w sólo a través de $(w^{-r})_{1,\theta}$ siempre que $w^{-r} \in A^{\rho,\theta}_1$. Entonces T es acotado en $L^p(w)$ para todo $r < p < \infty$ y todo $w \in A^\rho_{p/r}$. Además,*

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |f_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\|_{L^p(w)}, \quad \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in L^p_{l^\gamma}(w), \tag{4.1.8}$$

vale para $r < p, \gamma < \infty$, y todo $w \in A^\rho_{p/r}$.

Demostración. Por la hipótesis en T y el Lema 3.2.3 tenemos

$$\|M^\sharp_\rho (Tf) w\|_{L^\infty} \leq C \|fw\|_{L^\infty},$$

para todo peso w tal que $w^{-r} \in A^\rho_1$. Debido al Teorema 3.1.30 llegamos a la conclusión que $M^\sharp_\rho \circ T$ es acotado en $L^p(w)$ siempre que $r < p < \infty$ y $\omega \in A^\rho_{p/r}$. Por lo tanto, la acotación de T se sigue del Corolario 4.1.6. Finalmente, las desigualdades a valores vectoriales también son consecuencia del Teorema 3.1.30.

□

Teorema 4.1.8. *Sean $0 < \alpha < d$ y T un operador acotado de $L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})$ en $BMO_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-d/(d-\alpha)} \in A^\rho_1$ con constante dependiendo de w sólo a través de $(w^{-d/(d-\alpha)})_{1,\theta}$ siempre que $w^{-d/(d-\alpha)} \in A^{\rho,\theta}_1$. Entonces T es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^s(w^s)$ para todo par p y s tales que $1 < p < d/\alpha$ y $1/p - 1/s = \alpha/d$ y todo $w \in A^\rho_{p,s}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta hipótesis en T y el Lema 3.2.3 tenemos

$$\|M_\rho^\sharp(Tf)w\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)},$$

para todo peso w tal que $w^{-d/(d-\alpha)} \in A_1^\rho$. Aplicando el Teorema 3.1.31 con $r = d/\alpha$ se sigue que para todo par p y s tal que $1 < p < d/\alpha$ y $1/p - 1/s = \alpha/d$ y todo $w \in A_{p,s}^\rho$

$$\|(M_\rho^\sharp \circ T)f\|_{L^s(w^s)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Luego, como $w \in A_{p,s}^\rho$, entonces $w^s \in A_{1+s/p'}^\rho$ y en particular $w^s \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$; en vista del Corolario 4.1.6 se sigue la tesis.

□

4.2 Integrales Singulares y Fraccionarias asociadas a ρ

Teniendo en cuenta el último resultado es posible probar la acotación de ciertos operadores en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, a partir de conocer una estimación L^∞-BMO_ρ con pesos para tales operadores.

En [39], Shen prueba la acotación $L^p(\mathbb{R}^d)$ para varios operadores integrales singulares relacionados al contexto Schrödinger. Tales operadores tienen núcleos cuyos tamaños están controlados por la función radio crítico asociada a $\mathcal{L}$. Estos también satisfacen alguna condición de suavidad puntual o integral. Cabe señalar que a veces tales operadores son acotados solo para $p > p_0$ con $p_0 > 1$.

Con esto en mente, en esta sección vamos a considerar ciertas familias de integrales singulares o fraccionarias asociadas a ρ, que, como veremos, sus propiedades nos permitirán ponernos en las hipótesis del Teorema 4.1.7.

Definición 4.2.1. Dada una función radio crítico ρ y $0 \leq \alpha < d$ diremos que el núcleo K pertenece a $\mathcal{S}(\rho, \infty, \alpha)$ si satisface las dos condiciones siguientes:

(I) Para cada $N > 0$ existe C_N tal que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^{d-\alpha}}\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{4.2.1}$$

para todo par $x, y \in \mathbb{R}$.

(II) Existen constantes C y $\lambda > 0$ tales que

$$|K(x,y) - K(x_0,y)| \leq C\frac{|x-x_0|^\lambda}{|x-y|^{d-\alpha+\lambda}}, \tag{4.2.2}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, siempre que $|x - x_0| < \frac{|x-y|}{2}$.

En esta clase, hemos añadido un parámetro adicional α con el propósito de incluir también integrales fraccionarias.

Observación 4.2.2. Es preciso señalar que la condición (I) puede ser planteada equivalentemente en términos de $\rho(y)$. En efecto, teniendo en cuenta de relación (3.1.1) puede verse que

$$1 + \frac{|z-u|}{\rho(z)} \leq c_\rho \left(1 + \frac{|z-u|}{\rho(u)}\right)^{N_0+1} \tag{4.2.3}$$

para todo $z, u \in \mathbb{R}^d$.

Definición 4.2.3. Dada una función radio crítico ρ y $1 < s < \infty$ diremos que el núcleo K pertenece a $\mathcal{S}(\rho, s)$ si el mismo satisface las dos condiciones siguientes:

(I) Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\left(\int_{R<|y-x_0|\leq 2R} |K(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq C_N R^{-d/s'}\left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N}, \tag{4.2.4}$$

para todo $x \in B = B(x_0, r)$, y $R > 2r$.

(II) Existe una constante C tal que

$$\sum_{k\geq 1}(2^k r)^{d/s'}\left(\int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq C, \tag{4.2.5}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ y todo $x \in B$.

Ahora estamos en condiciones de probar la acotación de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ de operadores con núcleos en $\mathcal{S}(\rho, \infty, 0)$ o $\mathcal{S}(\rho, s)$.

Proposición 4.2.4. *Sea T un operador de tipo débil $(1, d/(d-\alpha))$ cuyo núcleo K pertenece a $\mathcal{S}(\rho, \infty, \alpha)$ con $0 < \alpha < d$. Entonces, T es acotado de $L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})$ en $BMO_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-d/(d-\alpha)} \in A_1^\rho$.*

Más aún, si T es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $p > 1$ y K pertenece a $\mathcal{S}(\rho, \infty, 0)$, entonces T es acotado de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-1} \in A_1^\rho$.

Demostración. Sean $B = B(x_0, r)$ y $\tilde{B} = B(x_0, \rho(x_0))$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $r \leq \rho(x_0)$. Escribimos $f = f_1 + f_2 + f_3$, con $f_1 = f\chi_{2B}$ y $f_3 = f\chi_{(2\tilde{B})^c}$.

Sea $0 \leq \alpha < d$. Comencemos estimando uniformemente $|Tf_3(x)|$ para $x \in B$. Cuando $x \in B$ e $y \in (2\tilde{B})^c$ se sigue que $|x - y| \simeq |x_0 - y|$ y además $\rho(x) \leq C\rho(x_0)$. Designemos con $\tilde{B}_k = 2^k\tilde{B}$. Luego, a partir de (4.2.1), la desigualdad Hölder con exponente d/α y considerando θ tal que $w^{-\frac{d}{d-\alpha}} \in A_1^{\rho,\theta}$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
|Tf_3(x)| &\leq C \int_{(2\tilde{B})^c} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{d-\alpha}} \left(1 + \frac{|x_0 - y|}{\rho(x_0)}\right)^{-N} dy \\
&\leq C\rho(x_0)^N \int_{(2\tilde{B})^c} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{d-\alpha+N}} dy \\
&\leq C\rho(x_0)^N \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2^k\rho(x_0))^{d-\alpha+N}} \int_{\tilde{B}_{k+1}} |f(y)| dy \\
&\leq C\|fw\|_{L^{d/\alpha}} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{kN}} \left(\frac{1}{|\tilde{B}_{k+1}|} \int_{\tilde{B}_{k+1}} w(y)^{-d/(d-\alpha)} dy\right)^{(d-\alpha)/d} \\
&\leq C\|fw\|_{L^{d/\alpha}} \sum_{k\geq 1} \frac{2^{-kN}}{\|w\chi_{\tilde{B}_{k+1}}\|_{L^\infty}} \left(1 + \frac{2^{k+1}\rho(x_0)}{\rho(x_0)}\right)^{\theta(1-\frac{\alpha}{d})} \\
&\leq C \frac{||f\omega||_{L^{d/\alpha}}}{||\omega\chi_{\tilde{B}}||_{L^\infty}} \sum_{k\geq 1} 2^{-k(N-\theta(1-\frac{\alpha}{d}))} \\
&\leq C \frac{||f\omega||_{L^{d/\alpha}}}{||\omega\chi_B||_{L^\infty}},
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se sigue considerando N suficientemente grande.

Vamos a estimar ahora $|Tf_2(x) - c_B|$, donde $c_B = Tf_2(x_0)$ y $x \in B$. Designemos con $k_0 = \sup\{k : 2^k r < 2\rho(x_0)\}$ y llamemos $B_k = 2^k B(x_0, r)$. Como $|x - x_0| < |y - x_0|/2$ para todo $x \in B$ e $y \in (2B)^c$, usamos la suavidad del núcleo dada por (4.2.2) y como antes, la desigualdad Hölder con exponente d/α y que el peso w satisface que $w^{-\frac{d}{d-\alpha}} \in A_1^{\rho,\theta}$ para algún $\theta > 0$. Luego,

$$
|Tf_2(x) - c_B| \leq \int_{2\tilde{B}\setminus 2B} |f(y)||K(x_0, y) - K(x, y)| dy
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Cr^{\lambda}\int_{2\tilde{B}\setminus 2B}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^{d-\alpha+\lambda}}dy\\
&\leq Cr^{\lambda}\sum_{k\geq 1}^{k_0}\frac{1}{(2^k r)^{d-\alpha+\lambda}}\int_{B_{k+1}}|f(y)|dy\\
&\leq C\|fw\|_{L^{d/\alpha}}\sum_{k\geq 1}^{k_0}\frac{1}{2^{k\lambda}}\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}w(y)^{-d/(d-\alpha)}dy\right)^{(d-\alpha)/d}\\
&\leq C\|fw\|_{L^{d/\alpha}}\sum_{k\geq 1}^{k_0}\frac{2^{-k\lambda}}{\|w\chi_{B_{k+1}}\|_{L^\infty}}\left(1+\frac{2^{k+1}r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta(1-\frac{\alpha}{d})}\\
&\leq C\frac{||f\omega||_{L^{d/\alpha}}}{||\omega\chi_{\tilde{B}}||_{L^\infty}}\sum_{k\geq 1}2^{-k\lambda}\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^{d/\alpha}}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}},
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado el hecho que $\left(1+2^{k+1}r/\rho(x_0)\right)^{\sigma}\leq 5^{\sigma}$ para todo $k\leq k_0$ y $\theta>0$.

Supongamos ahora que $\alpha>0$. El tipo débil $(1,d/(d-\alpha))$ de T y la desigualdad de Kolmogorov (ver [24]) implican,

$$
\frac{1}{|B|}\int_B|Tf_1(y)|dy\leq C\frac{|B|^{1-(d-\alpha)/d}}{|B|}\int_{2B}|f(y)|dy=C\frac{1}{|B|^{1-\alpha/d}}\int_{2B}|f(y)|dy.
$$

Luego, a partir de la desigualdad de Hölder con exponente d/α y el hecho que $w^{-d/(d-\alpha)}\in A_1^{\rho}$ se sigue

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B|Tf_1(y)|dy&\leq C\|fw\|_{L^{d/\alpha}}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}w(y)^{-d/(d-\alpha)}dy\right)^{1-\alpha/d}\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^{d/\alpha}}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}.
\end{aligned}
$$

lo cual concluye el caso $\alpha>0$.

Consideremos ahora el caso $\alpha=0$. Como $w^{-1}\in A_1^{\rho,\theta}$, para algún $\theta>0$, de acuerdo con (IV) de la Proposición 3.1.16 se sabe que existe $\gamma>1$ tal que $w^{-\gamma}\in A_1^{\rho,\theta}$. Además, a partir de la desigualdad de Hölder's con exponente γ y considerando que T es acotado en L^{γ}, se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|dx &\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|^\gamma dx\right)^{1/\gamma}\\
&\leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_{2B} |f(x)|^\gamma dx\right)^{1/\gamma}\\
&\leq C\|fw\|_{L^\infty}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B} w(x)^{-\gamma} dx\right)^{1/\gamma}\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_{2B}\|_{L^\infty}}\left(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta/\gamma}\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_{B}\|_{L^\infty}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, observemos que tanto para Tf_1 como para Tf_3 hemos estimado los promedios en $B(x_0, r)$ para $r \leq \rho(x_0)$, lo cual implica la acotación de la oscilación. Para Tf_2 hemos estimado la oscilación solamente, pero cuando $r = \rho(x_0)$ es $f_2 \equiv 0$ y la proposición queda probada.

□

Proposición 4.2.5. *Sea $1 < s < \infty$ y T un operador acotado de $L^{s'}$ en $L^{s',\infty}$ con núcleo K perteneciente a $\mathcal{S}(\rho, s)$. Entonces, T es acotado de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-s'} \in A_1^\rho$.*

Demostración. Sea w tal que $w^{-s'} \in A_1^{\rho,\theta}$ para algún $\theta \geq 0$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ y $\tilde{B} = B(x_0, \rho(x_0))$. Escribimos $f = f_1 + f_2 + f_3$, con $f_1 = f\chi_{2B}$ y $f_3 = f\chi_{(2\tilde{B})^c}$. Comenzamos estimando el promedio $\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1|dx$; usando la desigualdad de Kolmogorov y la hipótesis en w obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|dx &\leq C\frac{|B|^{1-1/s'}}{|B|}\left(\int_{2B} |f(x)|^{s'} dx\right)^{1/s'}\\
&\leq C\|fw\|_{L^\infty}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B} w(x)^{-s'} dx\right)^{1/s'}\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_{2B}\|_{L^\infty}}\left(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta/s'} \leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_{B}\|_{L^\infty}}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para $x \in B$, estimaremos $|Tf_3(x)|$. Denotando $\tilde{B}_k = 2^k\tilde{B}$, $k \geq 1$, y considerando que $w^{-s'} \in A_1^{\rho,\theta}$, se sigue

$$\begin{aligned}
\|f\chi_{\tilde{B}_{k+1}}\|_{L^{s'}} &\leq \|fw\|_{L^\infty}\|w^{-1}\chi_{\tilde{B}_{k+1}}\|_{L^{s'}} \\
&\leq C(1+2^{k+1})^{\theta/s'}|\tilde{B}_{k+1}|^{1/s'}\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_{\tilde{B}_{k+1}}\|_{L^\infty}} \\
&\leq C2^{k(\theta+d)/s'}\rho(x_0)^{d/s'}\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}.
\end{aligned}$$

Ahora usamos (4.2.4) para obtener,

$$\begin{aligned}
|Tf_3(x)| &\leq \sum_{k\geq 1}\int_{\tilde{B}_{k+1}\setminus\tilde{B}_k}|K(x,y)||f(y)|dy \\
&\leq \sum_{k\geq 1}\left(\int_{\tilde{B}_{k+1}\setminus\tilde{B}_k}|K(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{\tilde{B}_{k+1}}|f|^{s'}\right)^{1/s'} \\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}\sum_{k\geq 1}2^{k(\theta+d)/s'}\rho(x_0)^{d/s'}\left(\int_{\tilde{B}_{k+1}\setminus\tilde{B}_k}|K(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}\sum_{k\geq 1}2^{-k(N-\theta)},
\end{aligned}$$

donde la última serie converge tomando N suficientemente grande.

Finalmente, vamos a estimar $|Tf_2(x) - c_B|$, con $c_B = Tf_2(x_0)$. Sea $B_k = 2^kB$ y $k_0 = \text{máx}\{k : 2^kr < 2\rho(x_0)\}$. Vamos a usar nuevamente que $w^{-s'} \in A_1^{\rho,\theta}$, para deducir que para todo $k \leq k_0$,

$$\begin{aligned}
\|f\chi_{B_{k+1}}\|_{L^{s'}} &\leq \|fw\|_{L^\infty}\|w^{-1}\chi_{B_{k+1}}\|_{L^{s'}} \\
&\leq C\left(1+\frac{2^{k+1}r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta/s'}|B_{k+1}|^{1/s'}\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_{B_{k+1}}\|_{L^\infty}} \\
&\leq C(2^kr)^{d/s'}\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}.
\end{aligned}$$

La última desigualdad junto con (4.2.5) implican

$$\begin{aligned}
|Tf_2(x) - c_B| &\leq \int_{2\tilde{B}\setminus 2B}|f(y)||K(x,y)-K(x_0,y)|dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0}\left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k}|K(x,y)-K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{B_{k+1}}|f|^{s'}\right)^{1/s'} \\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}\sum_{k=1}^{k_0}(2^kr)^{d/s'}\left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k}|K(x,y)-K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s}
\end{aligned}$$

$$\leq C \frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}.$$

Como antes, hemos estimado los promedios para Tf_1 y Tf_3, y la oscilación para Tf_2; pero como para $r = \rho(x_0)$ es $f_2 \equiv 0$, la acotación en $BMO_\rho(w)$ queda probada.

□

4.3 Algunas aplicaciones al contexto del operador de Schrödinger

En esta sección vamos a considerar un operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 3$,

$$\mathcal{L} = -\triangle + V,$$

donde $V \geq 0$, es un potencial en las condiciones establecidas en el Capítulo 1, es decir, es no nulo y pertenece a RH_q para algún $q > d/2$. Sabemos que asociado al potencial V existe una función auxiliar ρ definida para $x \in \mathbb{R}^d$ como

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}.$$

Además, de acuerdo a [39, Lemma 1.4], si $V \in RH_{q/2}$ la función ρ verifica (3.1.1), es decir, es una función radio crítico.

En vista de esto, vamos a presentar algunas aplicaciones de los resultados obtenidos en las secciones previas a ciertos operadores que aparecen en el análisis de $-\Delta + V$.

Vamos a comenzar aplicando la Proposición 4.2.4 y la Proposición 4.2.5 para algunos operadores asociados a $\mathcal{L}$ que fueron considerados en [39] para el caso sin pesos.

Teorema 4.3.1. *Si $V \in RH_q$ con $q > d$, entonces los operadores $(-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ y $\nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla$ son acotados de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-1} \in A_1^\rho$.*

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1.3.1 estos son operadores de Calderón-Zygmund. Más aún, sus núcleos satisfacen (4.2.1) con $\alpha = 0$ (ver la estimación (6.5) dada en [39]) . Por lo tanto, el resultado se sigue directamente de la Proposición 4.2.4. □

Observación 4.3.2. Es relevante notar que, no obstante el operador $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ es la composición de los otros dos, no se puede deducir su estimación $L^\infty(w)$-$BMO_\rho(w)$ de la de aquellos.

Teorema 4.3.3. *Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, entonces el operador $(-\Delta+V)^{i\gamma}$ es acotado de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-1} \in A_1^\rho$.*

Demostración. Como en la prueba del Teorema 4.3.1 el resultado se sigue directamente de la Proposición 4.2.4, donde las hipótesis se satisfacen debido al Teorema 1.3.2 y la estimación (4.3) en [39].

□

Teorema 4.3.4. *Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, entonces los operadores $(-\Delta+V)^{-1/2}V^{1/2}$, $(-\Delta+V)^{-1}V$ y $(-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$ son acotados de $L^\infty(w)$ en $BMO_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-s'} \in A_1^\rho$, con $s = 2q$, $s = q$ y $1/s = 1/q - 1/d$ cuando $q < d$, respectivamente.*

Demostración. Denotando $T_1 = (-\Delta+V)^{-1/2}V^{1/2}$, $T_2 = (-\Delta+V)^{-1}V$ y $T_3 = (-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$, vamos a aplicar la Proposición 4.2.5 a cada T_j, $j = 1,2,3$. De acuerdo con el Teorema 1.3.3 los operadores T_1, T_2 y T_3 son acotados en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $p \geq (2q)'$, $p \geq q'$ y $p \geq s'$, con s tal que $1/s = 1/q - 1/d$ respectivamente. De modo que resta demostrar que los núcleos de T_j, $j = 1,2,3$, están en $\mathcal{S}(\rho, s_j)$ con $s_1 = 2q$, $s_2 = q$ y $1/s_3 = 1/q - 1/d$ cuando $q < d$.

La prueba de que los núcleos de T_j, $j = 1,2,3$ satisfacen la condición (4.2.5) está contenida en la prueba del Teorema 1 en [26].

Comencemos por verificar la condición (4.2.4) para el núcleo de T_3. De acuerdo a lo probado en [39] (ver pág 538) se sabe que para todo $N > 0$, existe $C > 0$ tal que,

$$|K_3(x,y)| \leq C\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \frac{1}{|x-y|^{d-1}} \left(\frac{1}{|x-y|} + \int_{B(y,|x-y|/4)} \frac{V(z)}{|z-x|^{d-1}} dz\right)$$

Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Tomemos $x \in B(x_0, r)$ y $R \geq 2r$. De este modo si $y \in B(x_0, 2R) \setminus B(x_0, R)$, tenemos que $|x-y| \simeq |x-x_0| \simeq R$, con lo cual en vista de (4.2.3) se sigue

$$|K_3(x,y)| \leq C\left(1+\frac{|x-x_0|}{\rho(x_0)}\right)^{-N/(N_0+1)}\frac{1}{|x-x_0|^{d-1}}\left(\frac{1}{|x-x_0|}+I_1(\chi_{B(x_0,3R)}V)(y)\right)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(\int_{R\leq|y-x_0|<2R}|K_3(x,y)|^{s_3}dy\right)^{1/s_3}&\\ &\lesssim R^{1-d}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N/(N_0+1)}\left(\frac{1}{R}+\|I_1(\chi_{B(x_0,3R)}V)\|_{s_3}\right),\end{aligned}$$

donde I_1 es la integral fraccionaria (clásica) de orden 1. A partir de la acotación de I_1, el hecho que $V \in RH_q$ y la fórmula (1.2.2) (ver Lema 1.2.2) se sigue

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|I_1(\chi_{B(x_0,3R)}V)(y)|^{s_3}dy\right)^{1/s_3} &\leq C\left(\int_{B(x_0,3R)}|V(y)|^q dy\right)^{1/q}\\ &\leq CR^{d/q'}\int_{B(x_0,3R)}|V(y)|dy\\ &\leq CR^{d/q-2}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{\mu}.\end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta que $d/s_3-1=d/q-2$ y $d/s_3'=d-d/q+1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{R\leq|y-x_0|<2R}|K_3(x,y)|^{s_3}dy\right)^{1/s_3}&\\ &\lesssim R^{1-d}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-(N/(N_0+1)-\mu)}\left(R^{d/s_3-1}+R^{d/q-2}\right)\\ &\lesssim R^{-d/s_3'}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-(N/(N_0+1)-\mu)},\end{aligned}$$

lo cual finaliza la prueba siendo N arbitrario.

Por lo tanto, solamente resta verificar la condición (4.2.4) para los núcleos de T_1 y T_2. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $r>0$. Tomemos $x \in B(x_0,r)$ y $R \geq 2r$. A partir de los Lemas 2 y 3 en [26], para cada $N>0$, existe $C>0$ tal que, para $j=1,2$,

$$|K_j(x,y)| \leq C\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}\frac{1}{|x-y|^{d-j}}V(y)^{j/2}$$

De este modo si $y \in B(x_0,2R)\setminus B(x_0,R)$, tenemos que $|x-y| \simeq |x-x_0| \simeq R$, con lo cual teniendo en cuenta (4.2.3) y que $V \in RH_q$ se sigue

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{R\leq|y-x_0|<2R}|K_j(x,y)|^{2q/j}dy\right)^{j/(2q)}\\
&\qquad\lesssim\left(\int_{R\leq|x-x_0|<2R}\left(1+\frac{|x-x_0|}{\rho(x)}\right)^{-2qN/j}\frac{V(y)^q}{|x-x_0|^{(d-j)2q/j}}dy\right)^{j/(2q)}\\
&\qquad\lesssim\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N/(N_0+1)}\frac{1}{R^{d-j}}\left(\int_{B(x_0,2R)}V(y)^q dy\right)^{j/(2q)}\\
&\qquad\lesssim\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N/(N_0+1)}\frac{R^{-jd/2q'}}{R^{d-j}}\left(\int_{B(x_0,2R)}V(y)\,dy\right)^{j/2}\\
&\qquad\lesssim R^{-d/s_j'}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-(N/(N_0+1)-\mu j/2)},
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad hemos usado el Lema 1.2.2 y que $-d/s_j'=d(j/2q-1)$.

Siendo N arbitrario, se sigue la prueba.

$\square$

Como una consecuencia del Teorema 4.1.7 y los teoremas anteriores se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 4.3.5. *Si $V\in RH_q$ con $q>d$, entonces los operadores $(-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$, $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$ y $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ están acotados en $L^p(w)$, para $1<p<\infty$ y para todo peso $w\in A_p^\rho$. Más aún, ellos satisfacen la desigualdad a valores vectoriales* (4.1.8) *con $1<\gamma<\infty$.*

Teorema 4.3.6. *Si $V\in RH_q$ con $q>d/2$, entonces el operador $(-\Delta+V)^{i\gamma}$ está acotado en $L^p(w)$, para $1<p<\infty$ y para todo peso $w\in A_p^\rho$. Más aún, se satisface la desigualdad a valores vectoriales* (4.1.8) *con $1<\gamma<\infty$.*

Teorema 4.3.7. *Si $V\in RH_q$ con $q>d/2$, entonces los operadores $(-\Delta+V)^{-1/2}V^{1/2}$, $(-\Delta+V)^{-1}V$ y $(-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$ están acotados en $L^p(w)$, para $s'<p<\infty$ y para todo peso $w\in A_{p/s'}^\rho$, con $s=2q$, $s=q$ y $1/s=1/q-1/d$ cuando $q<d$, respectivamente. Más aún, ellos satisfacen la desigualdad a valores vectoriales* (4.1.8) *con $s'<\gamma<\infty$.*

Vamos a terminar esta sección con un resultado que prueba la acotación de la integral fraccionaria asociada a $\mathcal{L}$.

Recordemos que dado $0 < \alpha < d$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \geq 1$, la integral fraccionaria asociada a $\mathcal{L}$ está definida como

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \mathcal{L}^{-\alpha/2} f(x) = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x)\, t^{\alpha/2}\, \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}^d} K_\alpha(x,y) f(y)\, dy,$$

donde

$$K_\alpha(x,y) = \int_0^\infty T_t(x,y)\, t^{\alpha/2}\, \frac{dt}{t}, \tag{4.3.1}$$

y $e^{-t\mathcal{L}}$, $t > 0$, es el semigrupo del calor asociado a $\mathcal{L}$. Se sabe (ver Proposiciones 1.1.4 y 1.1.5) que si $V \in RH_q$, $q > d/2$, entonces para cualquier $N > 0$ existe una constante C tal que

$$T_t(x,y) \leq C\, t^{-d/2}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{C\,t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}$$

para todo x e y en $\mathbb{R}^d$, y también que si $0 < \lambda < \text{mín}(1, 2 - \frac{d}{q})$, existe una constante C tal que

$$|T_t(x,y) - T_t(x_0,y)| \leq C \left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^\lambda t^{-d/2}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{C\,t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}$$

siempre que $|x - x_0| < \sqrt{t}$.

Observación 4.3.8. Como una consecuencia de la estimación de T_t, el operador $\mathcal{I}_\alpha$ está acotado puntualmente por la integral fraccionaria clásica y entonces, en particular, $\mathcal{I}_\alpha$ es de tipo débil $(1, d/d - \alpha)$.

La proposición que sigue prueba que el núcleo K_α satisface las condiciones de tamaño y suavidad que nos permitirán usar la Proposición 4.2.4.

Proposición 4.3.9. *Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, entonces K_α pertenece a $\mathcal{S}(\rho, \infty, \alpha)$.*

Demostración. Para probar (4.2.1) supongamos primero que $|y - z| \leq \rho(y)$. Entonces, por (1.1.6) y un cambio de variables, resulta

$$\begin{aligned} K_\alpha(y,z) &\leq \int_0^\infty e^{-\frac{|y-z|^2}{ct}}\, t^{(\alpha-d)/2}\, \frac{dt}{t} \\ &= \frac{C}{|y-z|^{d-\alpha}} \int_0^\infty e^{-s}\, s^{(d-\alpha)/2}\, \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{C}{|y-z|^{d-\alpha}} \left(1 + \frac{|y-z|}{\rho(y)}\right)^{-N}. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Por otra parte, cuando $|y-z| > \rho(y)$, usando nuevamente (1.1.6) y un cambio de variables, obtenemos

$$\begin{aligned} K_\alpha(y,z) &\leq \int_0^\infty e^{-\frac{|y-z|^2}{ct}} \left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N} t^{(\alpha-d)/2}\,\frac{dt}{t} \\ &= \frac{C\rho(y)^N}{|y-z|^{d-\alpha+N}} \int_0^\infty e^{-s}\, s^{(d-\alpha+N)/2}\,\frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{C}{|y-z|^{d-\alpha}} \left(1+\frac{|y-z|}{\rho(y)}\right)^{-N}, \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

lo cual prueba que K_α satisface (4.2.1).

Ahora, dado $M > 0$, probaremos que K_α satisface (4.2.5). Más aún, probaremos que si $|y-x| < |y-z|/2$, para cada $M > 0$ existe una constante C tal que

$$|K_\alpha(y,z) - K_\alpha(x,z)| \leq C\frac{|y-x|^\lambda}{|y-z|^{d-\alpha+\lambda}} \left(1+\frac{|y-z|}{\rho(y)}\right)^{-M}, \tag{4.3.4}$$

En primer lugar, vemos que

$$\begin{aligned} &|K_\alpha(y,z) - K_\alpha(x,z)| \\ &\qquad \leq \int_0^\infty |T_t(y,z) - T_t(x,z)| t^{\alpha/2}\frac{dt}{t} \\ &\qquad \leq \int_0^{|y-x|^2} |T_t(y,z) - T_t(x,z)| t^{\alpha/2}\frac{dt}{t} \;+\; \int_{|y-x|^2}^\infty |T_t(y,z) - T_t(x,z)| t^{\alpha/2}\frac{dt}{t} \\ &\qquad = I + II \end{aligned}$$

Para hacer frente a II usamos (1.1.7) con $N = M$ para obtener

$$II \leq C|y-x|^\lambda \int_0^\infty e^{-\frac{|y-z|^2}{ct}} \left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-M} t^{(\alpha-d-\lambda)/2}\,\frac{dt}{t},$$

y entonces se procede de manera análoga a (4.3.2) y (4.3.3).

Con respecto a I, dado $L \geq 0$, a partir de (1.1.6) con $N = L$ tenemos

$$\begin{aligned} I &\leq C\int_0^{|y-x|^2} e^{-\frac{|y-z|^2}{ct}} \left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-L} t^{(\alpha-d)/2}\,\frac{dt}{t} \\ &\qquad + C\int_0^{|y-x|^2} e^{-\frac{|x-z|^2}{ct}} \left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-L} t^{(\alpha-d)/2}\,\frac{dt}{t} \\ &= III + IV. \end{aligned}$$

Ahora usando la estimación $e^{-s} \lesssim s^{-R/2}$ para $R = \lambda - \alpha + d + L$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
III &\leq C\rho(y)^L \int_0^{|y-x|^2} \left(\frac{|y-z|^2}{t}\right)^{-R/2} t^{(\alpha-d-L)/2}\frac{dt}{t} \\
&= C\frac{\rho(y)^L}{|y-z|^R}\int_0^{|y-x|^2} t^{(\alpha-d-L+R)/2}\frac{dt}{t} \qquad (4.3.5)\\
&= C\frac{|y-x|^\lambda}{|y-z|^{d-\alpha+\lambda}}\left(\frac{|y-z|}{\rho(y)}\right)^{-L}.
\end{aligned}
$$

Si $|y-z| \leq \rho(y)$, escogemos $L = 0$, siendo $1 \leq 2^M(1 + \frac{|y-z|}{\rho(y)})^{-M}$, mientras que si $|y-z| > \rho(y)$, hacemos $L = M$, y así $(\frac{|y-z|}{\rho(y)})^{-M} \leq 2^M(1 + \frac{|y-z|}{\rho(y)})^{-M}$. Por lo tanto,

$$
III \leq C\frac{|y-x|^\lambda}{|y-z|^{d-\alpha+\lambda}}\left(1 + \frac{|y-z|}{\rho(y)}\right)^{-M}.
$$

Para tratar con IV, cuando $|x-y| < \frac{1}{2}|y-z|$, se sigue que $y \in B(x, |y-z|)$ y $|x-z| \simeq |y-z|$. Entonces, usando la estimación (3.1.1) tenemos

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{|y-z|}{\rho(y)} &\leq 1 \ + \ c_\rho\frac{|y-z|}{\rho(x)}\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{N_0} \\
&\lesssim \left(1 + \frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{N_0+1}.
\end{aligned}
$$

Procediendo como en (4.3.5) y usando la estimación previa obtenemos

$$
\begin{aligned}
IV &\leq C\frac{|y-x|^\lambda}{|x-z|^{d-\alpha+\lambda}}\left(1 + \frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{-M} \\
&\leq C\frac{|y-x|^\lambda}{|y-z|^{d-\alpha+\lambda}}\left(1 + \frac{|y-z|}{\rho(y)}\right)^{-\frac{M}{N_0+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_\alpha$ es de tipo débil $(1, d/(d-\alpha))$ (Observación 4.3.8) y la Proposición 4.2.4 obtenemos la acotación $L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})$-$BMO_\rho(w)$ para los pesos correspondientes.

Teorema 4.3.10. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$. El operador $\mathcal{I}_\alpha$ es acotado de $L^{d/\alpha}(w^{d/\alpha})$ en $BMO_\rho(w)$, para todo w tal que $w^{-\frac{d}{d-\alpha}} \in A_1^\rho$.*

Como una consecuencia del Teorema 4.1.8 y el resultado previo obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.11. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$, $1 < p < d/\alpha$ y $1/p - 1/s = \alpha/d$. El operador $\mathcal{I}_\alpha$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^s(w^s)$ para todo peso $w \in A^\rho_{p,s}$.*

Capítulo 5

Desigualdades de comparación con pesos entre operadores asociados a ρ

En este capítulo buscamos desigualdades del tipo

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)\ dx, \tag{5.0.1}$$

donde S y T son operadores, w pertenece a una familia de pesos apropiados y $0 < p < \infty$. Los operadores que tenemos en mente se relacionan con una función radio crítico ρ y en su mayoría ya han ido apareciendo en capítulos anteriores.

Más precisamente, vamos a considerar funciones maximales y maximales sharp ρ-locales, integrales singulares y fraccionarias, así como sus conmutadores, cuyos núcleos tienen un decaimiento extra dependiendo de ρ.

Con respecto a las clases de pesos en (5.0.1), a diferencia del capítulo anterior, vamos a trabajar con pesos ρ-locales $A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ (ver Definición 3.1.4). Estos pesos son los que dan la acotación de la función maximal ρ-local en espacios de Lebesgue pesados.

Las pruebas originales para desigualdades del tipo (5.0.1) en el caso clásico están basadas en la llamada desigualdad de los buenos-λ, que relaciona a las funciones distribución de Sf y Tf. Más recientemente, en [11] se desarrolla un nuevo enfoque para probar estas desigualdades, basado en resultados de extrapolación para pesos A_∞. Los ingredientes necesarios en este enfoque son: una desigualdad integral debida a Lerner, la acotación puntual de la maximal sharp de Tf y un apropiado teorema de extrapolación.

En este capítulo seguiremos el segundo camino para obtener tales desigualdades. Siguiendo esa línea, en la Sección 5.1 probamos una versión ρ-local de la desigualdad de Lerner y establecemos el enunciado preciso de la propiedad de extrapolación para pesos $A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ necesario en nuestro contexto.

En la Sección 5.2 aplicamos esta técnica para dar una prueba alternativa de la desigualdad de Fefferman-Stein que fuera establecida en el capítulo anterior, la cual demandará una estimación puntual de $M_\rho^\sharp(M_\rho^{\mathrm{loc}} f)$.

En las secciones siguientes nos ocupamos de los distintos operadores T introducidos en el capítulo anterior, como así también de sus conmutadores, obteniendo adecuadas estimaciones puntuales para $M_\rho^\sharp(Tf)$, la cual pondrá de relieve cuales son los correspondientes operadores S en cada caso. A continuación, se combinan los tres ingredientes para obtener los resultados buscados.

5.1 Desigualdad de Lerner y extrapolación

El siguiente teorema proporciona una versión ρ-local de la desigualdad de Lerner (ver [30] y [12]).

Teorema 5.1.1. *Si f y u son funciones no-negativas pertenecientes a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)u(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} M_\rho^\sharp f(x) M_\rho^{\mathrm{loc}} u(x)dx, \tag{5.1.1}$$

donde la constante C es independiente de f y u.

Demostración. El punto inicial de la prueba es una versión de la desigualdad de Lerner en espacios de tipo homogéneo que se puede encontrar en [28]. Cuando ésta se aplica a una bola en $\mathbb{R}^d$, se obtiene

$$\int_B f(x)u(x)dx \leq C \int_B M_B^\sharp f(x) M_B u(x)dx, \tag{5.1.2}$$

para f y u funciones no-negativas en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y B una bola de $\mathbb{R}^d$, donde

$$M_B f(x) = \sup_{x\in P\in\mathcal{F}(B)} \frac{1}{|P\cap B|}\int_{P\cap B} |f|,$$

y

$$M_B^\sharp f(x) = \sup_{x\in P\in\mathcal{F}(B)} \frac{1}{|P\cap B|}\int_{P\cap B} |f - f_{P\cap B}| \; + \; \frac{1}{|B|}\int_B |f|,$$

con $\mathcal{F}(B) = \{B(y,r):\ y\in B,\ r>0\}$.

A continuación, de acuerdo con la Proposición 3.1.3, podemos considerar $\{B_k\}_k$ un cubrimiento por bolas de radio crítico, pero asociada a la función radio crítico $\rho/2$, es decir, $B_k = B(x_k, \rho(x_k)/2)$ y llamamos $u_k = u\chi_{B_k}$ y $f_k = f\chi_{B_k}$.

No resulta díficil verificar que para todo $x\in B_k$,

$$M_{B_k} u_k(x) \lesssim M_\rho^{\text{loc}} u(x) \tag{5.1.3}$$

y

$$M_{B_k}^\sharp f_k(x) \lesssim M_\rho^\sharp f(x). \tag{5.1.4}$$

En efecto, sean $x\in B_k$ y $B\in\mathcal{F}(B_k)$, con $x\in B$ y $B = B(z,r)$. Supongamos primeramente que $r\geq\rho(x_k)$. Es claro que en este caso $B_k\subset B$, y así $B\cap B_k = B_k$. Luego

$$\frac{1}{|B\cap B_k|}\int_{B\cap B_k} u_k \; = \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} u_k \; \leq M_{\rho/2}^{\text{loc}} u(x) \leq M_\rho^{\text{loc}} u(x).$$

Además,

$$\frac{1}{|B\cap B_k|}\int_{B\cap B_k} |f_k - (f_k)_{B\cap B_k}| \; = \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} |f - f_{B_k}| \; \leq M_{\rho/2}^\sharp f(x) \leq M_\rho^\sharp f(x).$$

Por otra parte, si $r<\rho(x_k)$, existen $\tilde{x}\in B\cap B_k$ y $\tilde{r} = r/4$ tales que la bola $\tilde{B} = B(\tilde{x},\tilde{r})$ verifica $\tilde{B}\subset B\cap B_k$. De este modo

$$\frac{1}{|B\cap B_k|}\int_{B\cap B_k} |u_k| \; \leq \frac{1}{|\tilde{B}|}\int_B |u| \; \leq \frac{4}{|B|}\int_B |u| \leq 4M_\rho^{\text{loc}} u(x),$$

esto concluye la prueba de (5.1.3). Asimismo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B\cap B_k|}\int_{B\cap B_k}|f_k-(f_k)_{B\cap B_k}| &\leq \frac{1}{|B\cap B_k|}\int_{B\cap B_k}|f-f_{\tilde{B}}| \quad + \quad |f_{\tilde{B}}-f_{B\cap B_k}| \\
&\leq \frac{2}{|\tilde{B}|}\int_{B}|f-f_{\tilde{B}}| \\
&\lesssim \frac{1}{|B|}\int_{B}|f-f_{B}| \quad + \ |f_B-f_{\tilde{B}}| \\
&\lesssim \frac{1}{|B|}\int_{B}|f-f_{B}| \quad + \ \frac{1}{|\tilde{B}|}\int_{\tilde{B}}|f-f_B| \\
&\lesssim \frac{1}{|B|}\int_{B}|f-f_{B}| \\
&\lesssim M_\rho^\sharp f(x).
\end{aligned}$$

Como también $|B_k|^{-1}\int_{B_k}|f_k|\leq M_\rho^\sharp f(x)$, queda probada la desigualdad (5.1.4).

Finalmente, usando la desigualdad (5.1.2) y la propiedad de solapamiento acotado dada por la Proposición 3.1.3, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)u(x)dx &\leq \sum_{k\geq 1}\int_{B_k} f_k(x)u_k(x)dx \\
&\lesssim \sum_{k\geq 1}\int_{B_k} M^\sharp_{B_k} f_k(x) M_{B_k}u_k(x)dx \\
&\lesssim \sum_{k\geq 1}\int_{B_k} M^\sharp_{\rho} f(x) M^{\mathrm{loc}}_{\rho}u(x)dx \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} M^\sharp_{\rho} f(x) M^{\mathrm{loc}}_{\rho}u(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Antes de finalizar la sección presentamos el teorema de extrapolación que nos será de utilidad a lo largo de todo el capítulo. Dada una función radio crítico ρ, el Teorema 3.1.8 asegura que la familia $\mathcal{B}_\rho$ introducida en (3.1.5) es, en efecto, una base de Muckenhoupt, en el sentido definido en la Sección 2.2 y el resultado de extrapolación del Teorema 2.2.2 es válido en este contexto. Más precisamente, recordando que $\mathscr{D}(T,S)$ denota el dominio común de T y S, es decir, el conjunto de todas las funciones f tales que Tf y Sf son finitas en casi todo punto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.1.2. *Dados dos operadores T y S, supongamos que existe $p_0 > 0$ tal que para todo $0 < p < p_0$ y todo $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx, \quad f \in \mathscr{D}(T,S).$$

Entonces, para todo $0 < p < \infty$ y todo $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx, \quad f \in \mathscr{D}(T,S).$$

Además, para cualesquiera $0 < p, r < \infty$ y $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ se tiene

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |Sf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}, \quad \{f_i\}_i \subset \mathscr{F}(T,S).$$

5.2 Una prueba alternativa de la desigualdad de Fefferman - Stein

En esta sección vamos a presentar una prueba alternativa de la desigualdad de tipo Fefferman-Stein relativa a los operadores maximal sharp local $M_\rho^\sharp$ y maximal local M_ρ^{loc} con pesos ρ-locales, la cual ya fué establecida en la Sección 4.1. Sin embargo, esta nueva versión del teorema presenta dos ventajas, a saber, extiende el rango de p hasta 0 y además proporciona una desigualdad a valores vectoriales. El enunciado preciso es el siguiente.

Teorema 5.2.1. *Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$, entonces existe una constante $C > 0$ y $0 < \eta < 1$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |M_{\eta\rho}^{\mathrm{loc}} f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^\sharp f(x)|^p w(x)dx, \tag{5.2.1}$$

para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ entonces existe una constante C y $\eta < 1$ tal que

$$\left\| \left(\sum_i |M_{\eta\rho}^{\mathrm{loc}}(f_i)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M_\rho^\sharp(f_i)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}. \tag{5.2.2}$$

Como fue mencionado en la introducción vamos a probar este resultado siguiendo la técnica desarrollada en [11]. En la sección previa hemos obtenido dos de los ingredientes principales, una desigualdad de Lerner adaptada y un apropiado teorema de extrapolación. Por lo tanto, solo necesitamos probar alguna desigualdad puntual entre $M^\sharp_\rho \circ M^{\mathrm{loc}}_{\eta\rho}$ y $M^\sharp_\rho$.

Proposición 5.2.2. *Sea $0<\delta<1$. Entonces existe una constante $C>0$ tal que para toda $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$,*

$$[M^\sharp_\rho(M^{\mathrm{loc}}_\rho f)^\delta(x)]^{1/\delta} \le C M^\sharp_{\beta\rho} f(x),$$

para algún $\beta>1$ dependiendo solo de las constantes c_ρ y N_0 en (3.1.1).

Demostración. Sea $x_0\in\mathbb{R}^d$ y una bola $B=B(y_0,r)$ la cual contiene a x_0 y $r\le\rho(y_0)$. Llamemos $B^+=\{x\in B: M^{\mathrm{loc}}_\rho f(x)^\delta > ((M^{\mathrm{loc}}_\rho f)^\delta)_B\}$. Entonces,

$$\frac{1}{|B|}\int_B |M^{\mathrm{loc}}_\rho f(x)^\delta - ((M^{\mathrm{loc}}_\rho f)^\delta)_B|dx = \frac{2}{|B|}\int_{B^+}[M^{\mathrm{loc}}_\rho f(x)^\delta - ((M^{\mathrm{loc}}_\rho f)^\delta)_B]dx.$$

Vamos a considerar también dos operadores auxiliares

$$M^{\mathrm{loc},-}_\rho f(x) = \sup\left\{\frac{1}{|P|}\int_P |f(y)|dy : x\in P\subset 3B,\ r_P\le\rho(x_P)\right\},$$

$$M^{\mathrm{loc},+}_\rho f(x) = \sup\left\{\frac{1}{|P|}\int_P |f(y)|dy : x\in P,\ P\cap(3B)^c\neq\emptyset,\ r_P\le\rho(x_P)\right\},$$

donde x_P y r_P son el centro y el radio de la bola P respectivamente.

A partir de estas definiciones, se sigue para $x\in B$,

$$M^{\mathrm{loc}}_\rho f(x) = \max\{M^{\mathrm{loc},-}_\rho f(x), M^{\mathrm{loc},+}_\rho f(x)\} \ \text{ y } \ M^{\mathrm{loc},-}_\rho f(x)\le M^{\mathrm{loc}}_\rho(f\chi_{3B})(x).$$

Por lo tanto, si $W_1=\{x\in B^+ : M^{\mathrm{loc},-}_\rho f(x) > M^{\mathrm{loc},+}_\rho f(x)\}$ y $W_2 = B^+\setminus W_1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{2}{|B|}\int_{B^+}^{[} M^{\mathrm{loc}}_\rho f(x)^\delta - ((M^{\mathrm{loc}}_\rho f)^\delta)_B]\,dx &= \frac{2}{|B|}\int_{W_1}[M^{\mathrm{loc},-}_\rho f(x)^\delta - ((M^{\mathrm{loc}}_\rho f)^\delta)_B]\,dx \\ &\quad + \frac{2}{|B|}\int_{W_2}[M^{\mathrm{loc},+}_\rho f(x)^\delta - ((M^{\mathrm{loc}}_\rho f)^\delta)_B]\,dx\end{aligned}$$

$$= I + II.$$

Para estimar I, observemos que a partir de la desigualdad triangular, $M_\rho^{\mathrm{loc},-} f(x) \leq M_\rho^{\mathrm{loc}}((f - f_{3B})\chi_{3B})(x) + f_{3B}$, para $x \in B$. Se sigue entonces

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{2}{|B|} \int_{W_1} [M_\rho^{\mathrm{loc}}((f - f_{3B})\chi_{3B})(x)^\delta] \, dx \; + \; 2 \, [(f_{3B})^\delta - ((M_\rho^{\mathrm{loc}} f)^\delta)_B] \\ &= III + IV. \end{aligned}$$

Considerando el hecho que M_ρ^{loc} es de tipo débil $(1,1)$, la desigualdad de Kolmogorov implica

$$III \leq C \bigg(\frac{1}{|B|} \int_{3B} |f(x) - f_{3B}| dx \bigg)^\delta \leq C (M_{3\rho}^\sharp f(x_0))^\delta.$$

Con el fin de acotar IV, supongamos primero que $3r \leq \rho(y_0)$, entonces $f_{3B} \leq M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x)$, para todo $x \in B$, de modo que $IV \leq 0$. Por otra parte, si $\rho(y_0) < 3r \leq 3\rho(y_0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} IV &< 2 \bigg(\frac{1}{|3B|} \int_{3B} |f(y)| dy \bigg)^\delta \leq 2 \bigg(\frac{3^d}{|B(y_0, 3\rho(y_0))|} \int_{B(y_0, 3\rho(y_0))} |f(y)| dy \bigg)^\delta \qquad (5.2.3) \\ &\leq C (M_{3\rho}^\sharp f(x_0))^\delta. \end{aligned}$$

Para estimar II es suficiente mostrar que para cualquier $x \in B$, $M_\rho^{\mathrm{loc},+} f(x)^\delta - ((M_\rho^{\mathrm{loc}} f)^\delta)_B \leq C (M_{3\rho}^\sharp f(x_0))^\delta$. Sea $x \in B$ y $P = P(z_0, s)$, tal que $x \in P$ y $P \cap (3B)^c \neq \emptyset$, con $s \leq \rho(z_0)$, así $B \subset 3P$. Una vez más hay que distinguir entre dos posibles situaciones. Supongamos primero que $3s \leq \rho(z_0)$, esto implica que $M_\rho^{\mathrm{loc}} f(y) \geq f_{3P}$, para todo $y \in B$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (f_P)^\delta - ((M_\rho^{\mathrm{loc}} f)^\delta)_B \; &\leq \; (f_P)^\delta - (f_{3P})^\delta \; \leq \; |f_P - f_{3P}|^\delta \; \leq \; \bigg(\frac{1}{|P|} \int_P |f(y) - f_{3P}| dx \bigg)^\delta \\ &\leq \; C \bigg(\frac{1}{|3P|} \int_{3P} |f(y) - f_{3P}| dx \bigg)^\delta \; \leq \; C (M_\rho^\sharp f(x_0))^\delta. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $\rho(z_0) < 3s \leq 3\rho(z_0)$, se procede como en (5.2.3) para obtener

$$(f_P)^\delta - ((M_\rho^{\mathrm{loc}} f)^\delta)_B \; \leq \; (f_P)^\delta \; \leq \; (f_{3P})^\delta \; \leq \; C (M_{3\rho}^\sharp f(x_0))^\delta.$$

Tomando supremo sobre P, obtenemos la desigualdad buscada.

Ahora vamos a probar que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{|B(y_0,\rho(y_0))|}\int_{B(y_0,\rho(y_0))} M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x)^\delta dx \leq C(M_{\beta\rho}^\sharp f(x_0))^\delta.$$

para algún $\beta > 3$. Para este fin, primero vamos a demostrar que existe $\beta > 3$ tal que $M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) \leq M(f\chi_{B(y_0,\beta\rho(y_0))})(x)$, para todo $x \in B(y_0,\rho(y_0))$.

Denotamos $Q = B(y_0,\rho(y_0))$ y tomemos $x \in Q$. Sea $P = B(x_P, r_P)$ tal que $x \in P$ y $r_P \leq \rho(x_P)$. Teniendo en cuenta (3.1.1) obtenemos $\rho(x_P) \leq c_\rho 2^{N_0}\rho(x)$ y $\rho(x) \leq c_\rho 2^{\frac{N_0}{N_0+1}}\rho(y_0)$, debido a que $x \in Q$. Sea $z \in P$ y definamos $\beta = 1 + c_\rho^2 2^{N_0+1+\frac{N_0}{N_0+1}}$, entonces

$$|z - y_0| \leq |z - x_P| + |x_P - x| + |x - y_0| \leq 2\rho(x_P) + \rho(y_0) \leq \beta\rho(y_0).$$

Por lo tanto, $P \subset \beta Q$, lo cual implica $M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) \leq M(f\chi_{\beta Q})(x)$, para todo $x \in Q$.

Por la desigualdad de Kolmogorov,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x)^\delta dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q M(f\chi_{\beta Q})(x)^\delta dx \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\beta Q}|f(x)|dx\right)^\delta \\ &\leq C(M_{\beta\rho}^\sharp f(x_0))^\delta.\end{aligned}$$

y la prueba queda terminada ya que $M_{a\rho}^\sharp \leq M_{b\rho}^\sharp$ para $a < b$.

□

Corolario 5.2.3. *Existe* $0 < \eta < 1$ *tal que*

$$[M_{\eta\rho}^\sharp (M_{\eta\rho}^{\mathrm{loc}} f)^\delta(x)]^{1/\delta} \leq CM_\rho^\sharp f(x),$$

para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Observemos que para $\eta = \frac{1}{\beta} < 1$, las funciones radio crítico ρ y $\eta\rho$ satisfacen la desigualdad (3.1.1) con las mismas constantes (c_ρ y N_0). Por lo tanto, la Proposición 5.2.2 es válida intercambiando ρ/β y ρ.

□

Teniendo en cuenta esta estimación, la prueba del teorema se sigue fácilmente.

Prueba del Teorema 5.2.1. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $w \in A_1^{\rho,\text{loc}}$. Si $0 < q < 1$, debido al Teorema 5.1.1 y el Corolario 5.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |M^{\text{loc}}_{\eta\rho} f(x)|^q \; w(x)\; dx &\le C \int_{\mathbb{R}^d} M^{\sharp}_{\eta\rho}(M^{\text{loc}}_{\eta\rho} f)^q(x)\; M^{\text{loc}}_{\eta\rho} w(x)\; dx \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\sharp}_{\rho} f(x)|^q \; M^{\text{loc}}_{\rho} w(x)\; dx \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\sharp}_{\rho} f(x)|^q \; w(x)\; dx.\end{aligned}$$

El resultado se sigue ahora a partir de Teorema 5.1.2. □

5.3 Operadores integrales singulares y fraccionarias asociados a ρ

El objetivo de esta sección es lograr probar desigualdades del tipo (5.0.1) para el caso en que T es un operador integral singular o fraccionario con un núcleo K, el cual satisface condiciones de suavidad y tamaño relacionadas a ρ. Este tipo de operadores fueron ya considerados en el capítulo anterior.

Con el fin de dar el enunciado preciso de nuestros resultados necesitamos introducir el siguiente operador maximal.

Definición 5.3.1. Dado $0 < s < \infty$, $0 \le \alpha < d$ y $\theta \ge 0$ definimos

$$M^{\theta,\alpha}_{\rho,s} f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\theta} |B(x_0,r)|^{\alpha/d} \left(\frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f|^s\right)^{1/s}.$$

Vamos a abandonar el parámetro α en la notación anterior cuando $\alpha = 0$ y el parámetro s cuando $s = 1$. Teniendo en cuenta este operador maximal vamos a probar los siguientes resultados.

Teorema 5.3.2. *Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A^{\rho,\text{loc}}_{\infty}$. Si T es un operador de tipo débil (s', s') para algún $s > 1$ y su núcleo pertenece a $\mathcal{S}(\rho, s)$, entonces para cualquier $\theta > 0$ existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x) dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\theta}_{\rho,s'} f(x)|^p w(x) dx, \tag{5.3.1}$$

se verifica para toda $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ *existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M^{\theta}_{\rho,s'} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}. \tag{5.3.2}$$

Teorema 5.3.3. *Sea* $0 < p < \infty$ *y* $w \in A^{\rho,\text{loc}}_{\infty}$. *Si* T *es un operador de tipo débil* $(1, d/(d-\alpha))$, *con* $0 \leq \alpha < d$ *y su núcleo pertenece a* $\mathcal{S}(\rho, \infty, \alpha)$, *entonces para cualquier* $\theta > 0$ *existe una constante* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\theta,\alpha}_{\rho} f(x)|^p w(x)dx, \tag{5.3.3}$$

para toda $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ *existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M^{\theta,\alpha}_{\rho} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}. \tag{5.3.4}$$

Como en la sección previa, para probar estos teoremas necesitamos una estimación puntual para la función maximal sharp de cada familia de operadores.

Proposición 5.3.4. *Sea* $1 < s < \infty$ *y* T *un operador de tipo débil* (s', s') *con núcleo* K *perteneciente a* $\mathcal{S}(\rho, s)$. *Entonces, si* $0 < \delta \leq 1$ *y* $\theta \geq 0$, *existe una constante* C *tal que*

$$[M^{\sharp}_{\rho}(|Tf|^{\delta})(x)]^{1/\delta} \leq C M^{\theta}_{\rho,s'} f(x),$$

para toda $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Sea $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $\theta \geq 0$. Consideremos $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ tal que $x \in B$. Escribimos f como $f = f_1 + f_2 + f_3$, con $f_1 = f\chi_{2B}$ y $f_3 = f\chi_{B(x_0, 2\rho(x_0))^c}$.

Como $0 < \delta \leq 1$, se sigue

$$\left| |Tf|^{\delta} - c_B^{\delta} \right| \leq |Tf - c_B|^{\delta} \leq |Tf_1|^{\delta} + |Tf_2 - c_B|^{\delta} + |Tf_3|^{\delta}$$

donde $c_B = Tf_2(x_0)$. El hecho que c_B sea finita se sigue de la finitud de $Tf_2(x_1)$ para algún $x_1 \in B$ (debido a que T es de tipo débil (s', s')) y la suposición (4.2.5).

El tipo débil (s', s') de T, nos permite aplicar la desigualdad de Kolmogorov y obtener para $\delta < s'$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(y)|^\delta\right)^{1/\delta} dy &\leq C\frac{|B|^{1/\delta-1/s'}}{|B|^{1/\delta}}\left(\int_{2B} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'}\\ &\leq C\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'}\\ &\leq CM^\theta_{\rho,s'} f(x).\end{aligned}$$

Ahora veremos que $|Tf_3(y)| \leq CM^\theta_{\rho,s'} f(x)$, para todo $y \in B$. Sea $\tilde{B}_k = 2^k\tilde{B}$, donde $\tilde{B} = B(x_0, \rho(x_0))$ y $N > 0$. Entonces, a partir de (4.2.4) tenemos

$$\begin{aligned}|Tf_3(y)| &\leq \int_{(2\tilde{B})^c} |f(z)||K(y, z)|dz\\ &\leq \sum_{k\geq 1}\int_{\tilde{B}_{k+1}\setminus\tilde{B}_k} |f(z)||K(y, z)|dz\\ &\leq C\sum_{k\geq 1} 2^{-kN}\left(\frac{1}{|\tilde{B}_{k+1}|}\int_{\tilde{B}_{k+1}} |f(z)|^{s'} dz\right)^{1/s'}\\ &\leq CM^\theta_{\rho,s'} f(x) \sum_{k\geq 1} 2^{-k(N-\theta)},\end{aligned}$$

y la serie es finita tomando $N > \theta$.

Finalmente, veamos que $|Tf_2(y) - c_B| \leq CM^\theta_{\rho,s'} f(x)$ para todo $y \in B$. Sea $B_k = 2^kB$ y $k_0 = \text{máx}\{k : 2^kr < 2\rho(x_0)\}$.

En este caso, usamos (4.2.5) para obtener

$$\begin{aligned}
|Tf_2(y) - c_B| &\leq \int_{2\tilde{B}\setminus 2B} |f(z)||K(y,z) - K(x_0,z)|dz \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0} \left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k} |K(y,z) - K(x_0,z)|^s dy \right)^{1/s} \left(\int_{B_{k+1}} |f(z)|^{s'} dz \right)^{1/s'} \\
&\leq CM^{\theta}_{\rho,s'} f(x) \sum_{k=1}^{k_0} (2^k r)^{d/s'} \left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k} |K(y,z) - K(x_0,z)|^s dy \right)^{1/s} \\
&\leq CM^{\theta}_{\rho,s'} f(x) \sum_{k\geq 1} (2^k r)^{d/s'} \left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k} |K(y,z) - K(x_0,z)|^s dy \right)^{1/s} \\
&\leq CM^{\theta}_{\rho,s'} f(x),
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

donde hemos usado el hecho que $\left(1 + \frac{2^{k+1}r}{\rho(x_0)}\right)^{\gamma} \leq 5^{\gamma}$, para $k \leq k_0$ y $\gamma \geq 0$.

Notemos que, tanto para Tf_1 como para Tf_3, hemos hecho estimaciones puntuales, por lo que de hecho, hemos estimado sus promedios para bolas $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ y por lo tanto, sus oscilaciones. Por otra parte, para Tf_2 hemos estimado solo su oscilación sobre B, sin embargo no es necesario estimar su promedio ya que en el caso $B(x_0, r)$ con $r = \rho(x_0)$, la función f_2 es idénticamente cero.

La prueba de la Proposición está completa.

$\square$

Proposición 5.3.5. *Sea T un operador de tipo débil $(1, d/(d-\alpha))$, con $0 \leq \alpha < d$ y núcleo K perteneciente a $\mathcal{S}(\rho, \infty, \alpha)$. Entonces, si $0 < \delta < d/(d-\alpha)$ y $\theta \geq 0$, existe una constante C tal que*

$$[M^{\sharp}_{\rho}(|Tf|^{\delta})(x)]^{1/\delta} \leq CM^{\theta,\alpha}_{\rho} f(x),$$

para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\theta \geq 0$ y $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ tal que $x \in B$. Se procede dividiendo la función $f = f_1 + f_2 + f_3$ como en la Proposición 5.3.4. Como allí, será suficiente estimar los promedios de Tf_1 y Tf_3 y la oscilación de Tf_2 cuando $r < \rho(x_0)$.

El tipo débil $(1, d/(d-\alpha))$ de T y la desigualdad de Kolmogorov implican para $0 < \delta < d/(d-\alpha)$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(y)|^\delta\right)^{1/\delta} dy &\le C\frac{|B|^{1/\delta-(d-\alpha)/d}}{|B|^{1/\delta}}\left(\int_{2B}|f(y)|dy\right)\\ &\le C\left(\frac{1}{|2B|^{1-\alpha/d}}\int_{2B}|f(y)|dy\right)\\ &\le CM_\rho^{\theta,\alpha}f(x).\end{aligned}$$

A fin de probar $|Tf_3(y)| \le CM_\rho^{\theta,\alpha}f(x)$, para todo $y \in B$, consideramos $\tilde{B}_k$ como antes. Entonces para $y \in B$ y $z \in \tilde{B}_{k+1}\setminus\tilde{B}_k$, tenemos $\rho(y) \lesssim \rho(x_0)$ y $|z-x_0| \le 2|z-y|$.

Ahora, a partir de (4.2.1), obtenemos para $N > 0$,

$$\begin{aligned}|K(y,z)| &\le \frac{C}{|z-y|^{d-\alpha}}\left(1+\frac{|z-y|}{\rho(y)}\right)^{-N}\\ &\le \frac{C}{|z-x_0|^{d-\alpha}}\left(1+\frac{|z-x_0|}{\rho(x_0)}\right)^{-N}\\ &\le C\frac{2^{-kN}}{(2^k\rho(x_0))^{d-\alpha}} = C\frac{2^{-kN}}{|\tilde{B}_{k+1}|^{1-\alpha/d}},\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Entonces, usando la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}|Tf_3(y)| &\le \sum_{k\ge1}\int_{\tilde{B}_{k+1}\setminus\tilde{B}_k}|f(z)||K(y,z)|dz\\ &\le C\sum_{k\ge1}2^{-kN}\left(\frac{1}{|\tilde{B}_{k+1}|^{1-\alpha/d}}\int_{\tilde{B}_{k+1}}|f(z)|dz\right)\\ &\le CM_\rho^{\theta,\alpha}f(x)\left(\sum_{k\ge1}2^{-k(N-\theta)}\right),\end{aligned}$$

y la serie es finita tomando $N > \theta$.

Finalmente, veremos que $|Tf_2(y) - c_B| \le CM_\rho^{\theta,\alpha}f(x)$ para todo $y \in B$, donde $c_B = Tf_2(x_0)$. El hecho que c_B es finito se sigue de (4.2.1) y la definición de f_2. Vamos a denotar $B_k = 2^kB$. Por lo tanto, para $y \in B$ y $z \in B_{k+1}\setminus B_k$, tenemos que $|y-x_0| < \frac{|z-x_0|}{2}$.

Ahora, a partir de la condición (4.2.2) se sigue

$$|K(x_0,z)-K(y,z)| \le C\frac{|y-x_0|^\lambda}{|x_0-z|^{d-\alpha+\lambda}} \le C\frac{2^{-k\lambda}}{(2^kr)^{d-\alpha}} \le C\frac{2^{-k\lambda}}{|B_{k+1}|^{1-\alpha/d}}. \tag{5.3.7}$$

Por lo tanto, para k_0 como en (5.3.5), obtenemos

$$\begin{aligned}|Tf_2(y) - c_B| &\leq \int_{2\tilde{B}\setminus 2B} |f(z)||K(y,z) - K(x_0,z)|dz \\ &\leq C\sum_{k=1}^{k_0} \frac{2^{-k\lambda}}{|B_{k+1}|^{1-\alpha/d}} \int_{B_{k+1}} |f(z)|dz \\ &\leq CM_\rho^{\theta,\alpha} f(x).\end{aligned}$$

□

Prueba del Teorema 5.3.2. Sean $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\theta \geq 0$ y $w \in A_1^{\rho,\text{loc}}$. Si $0 < q < 1$, debido a la desigualdad de Lerner (Teorema 5.1.1) y la Proposición 5.3.4 vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^q w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^d} M_\rho^\sharp(|Tf|^q)(x) M_\rho^{\text{loc}} w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |M^\theta_{\rho,s'} f(x)|^q w(x)dx.$$

El resultado, se sigue ahora del Teorema de extrapolación (Teorema 5.1.2). □

Prueba del Teorema 5.3.3. La prueba es similar a la del Teorema 5.3.2 pero usando la Proposición 5.3.5 en lugar de la Proposición 5.3.4. □

5.4 Conmutadores de integrales singulares y fraccionarias asociados a ρ

En esta sección nos ocuparemos de los conmutadores de los operadores considerados en la sección previa con símbolos pertenecientes a una clase de funciones más grande que la usual BMO, los cuales fueron introducidos en [6]. Los tres ingredientes utilizados en la sección anterior para probar las desigualdades de nuestro interés, a saber, desigualdad de Lerner, alguna estimación puntual y extrapolación, ya no serán suficientes para tratar con ellos. En efecto, deberemos apelar además a los resultados de la Sección 5.3.

Asímismo, vamos a requerir suposiciones ligeramente más fuertes sobre los núcleos de los operadores por lo que introduciremos subclases de $\mathcal{S}(\rho, s)$ y $\mathcal{S}(\rho,\infty,\alpha)$. Más precisamente,

Definición 5.4.1. Dado $1 < s < \infty$ diremos que un núcleo K pertenece a $\mathcal{S}_0(\rho, s)$ si éste satisface la desigualdad (4.2.4) y la siguiente condición de suavidad

(II') Para cada $\tau \geq 0$ existe una constante C_τ tal que

$$\sum_{k\geq 1} k(2^k r)^{d/s'} \left(1 + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\tau} \left(\int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq C_\tau, \tag{5.4.1}$$

para toda $B = B(x_0, r)$ con $r > 0$ y casi todo punto $x \in B$.

Definición 5.4.2. Dado $0 \leq \alpha < d$ diremos que un núcleo K pertenece a $\mathcal{S}_0(\rho, \infty, \alpha)$ si este satisface la desigualdad (4.2.1) y la condición de suavidad siguiente

(II') Para cada $M > 0$ y algún $0 < \lambda < 1$ existe una constante C tal que

$$|K(x,z) - K(y,z)| \leq C \frac{|x-y|^\lambda}{|x-z|^{d-\alpha+\lambda}} \left(1 + \frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{-M}, \tag{5.4.2}$$

siempre que $|x - y| < \frac{1}{2}|x - z|$.

Con respecto a los símbolos, utilizaremos las clases BMO_ρ^θ, introducidos en [6] y cuyo estudio fué profundizado en [7].

Definición 5.4.3. Dado $\theta > 0$, el espacio BMO_ρ^θ es definido como el conjunto de las funciones localmente integrables b que satisfacen

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |b(y) - b_B| dy \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta}, \tag{5.4.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$.

El ínfimo de las constantes en (5.4.3) da una norma para $b \in BMO_\rho^\theta$, denotada por $[b]_\theta$. Consideramos además $BMO_\rho^\infty = \cup_{\theta>0} BMO_\rho^\theta$.

A partir de la definición (5.4.3), es claro que $BMO \subset BMO_\rho^\theta \subset BMO_\rho^{\theta'}$ para $0 < \theta \leq \theta'$, y por lo tanto $BMO \subset BMO_\rho^\infty$. Más aún, esta es, en general, una clase más grande. Por ejemplo, cuando ρ es constante (lo cual se corresponde a V una constante positiva) las funciones $b_j(x) = |x_j|$, $1 \leq j \leq d$, pertenecen a BMO_ρ^∞ pero no a BMO.

Para estos símbolos daremos una propiedad de sus oscilaciones en la cual tienen participación espacios de Orlicz.

Dada una función de Young φ y una función localmente integrable f vamos a considerar φ-promedios sobre una bola o un cubo (denotada/o por Q) definidos como

$$\|f\|_{\varphi,Q} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Si denotamos por $\tilde{\varphi}$ la función de Young conjugada de φ, es bien conocida que la siguiente versión de la desigualdad de Hölder vale

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |fg| \;\leq\; 2\,\|f\|_{\varphi,Q}\|g\|_{\tilde{\varphi},Q}. \tag{5.4.4}$$

La siguiente proposición contiene algunas propiedades del espacio BMO_ρ^∞ que serán útiles a lo largo de esta sección.

Proposición 5.4.4. *Sea $\theta > 0$, y $b \in BMO_\rho^\theta$.*

I) *Para cada $1 < s < \infty$,*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |b - b_B|^s\right)^{1/s} \;\lesssim\; [b]_\theta \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta'}, \tag{5.4.5}$$

para toda $B = B(x,r)$, con $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, donde $\theta' = (N_0 + 1)\theta$ y N_0 es la constante que aparece en (3.1.1).

II) *Para $\psi(t) = e^t - 1$, también tenemos*

$$\|b - b_B\|_{\psi,B} \;\lesssim\; [b]_\theta \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta'}, \tag{5.4.6}$$

para cualquier bola $B = B(x,r)$, con θ' como en (5.4.5).

III) *Para cada $1 < s < \infty$,*

$$\left(\frac{1}{|2^kB|}\int_{2^kB} |b - b_B|^s\right)^{1/s} \;\lesssim\; [b]_\theta\, k \left(1 + \frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'}, \tag{5.4.7}$$

para cualquier bola $B = B(x_0,r)$ y $k \in \mathbb{N}$, con θ' como en (5.4.5).

Demostración. Las pruebas de (5.4.5) y (5.4.7) aparecen en [6]. La desigualdad (5.4.6) se puede demostrar en forma casi idéntica a la prueba de la Proposición 3 en [6], excepto que en lugar de la desigualdad (9) allí, necesitamos mostrar que dada una bola B_0 existe una constante C tal que

$$\|g - g_B\|_{e^t-1,B} \leq C\|g\|_{BMO(B_0)}, \tag{5.4.8}$$

para toda bola B con $B \subset B_0$ y $g \in BMO(B_0)$. Aquí, por $BMO(B_0)$ y la correspondiente norma $\|\cdot\|_{BMO(B_0)}$, nos referimos a la versión localizada de BMO donde solo las bolas contenidas en B_0 son consideradas.

Con el fin de probar la desigualdad (5.4.8), por la definición $\|g-g_B\|_{e^t-1,B}$, es suficiente mostrar que para alguna constante C,

$$\frac{1}{|B|}\int_B \exp\left(\frac{|g(x)-g_B|}{C\|g\|_{BMO(B_0)}}\right) - 1\ dx \leq 1.$$

Recordando la desigualdad clásica de John-Nirenberg, se sigue que existen constantes C_1 y C_2, dependiendo solo de la dimensión d, tal que si $B \subset B_0$ y $t > 0$, entonces

$$|\{x \in B : |g(x) - g_B| > t\}| \leq C_1 \exp\left(-\frac{C_2 t}{\|g\|_{BMO(B_0)}}\right)|B|,$$

para toda $g \in BMO(B_0)$.

Por lo tanto, tomando $C > (1 + C_1)/C_2$, se deduce

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|}\int_B \exp\left(\frac{|g(x)-g_B|}{C\|g\|_{BMO(B_0)}}\right) - 1\ dx \\
&\quad = \frac{1}{|B|}\int_0^\infty e^t\,|\{x \in B : |g(x) - g_B| > Ct\|g\|_{BMO(B_0)}\}|dt \\
&\quad \leq C_1\int_0^\infty e^{(1-CC_2)t}dt = \frac{C_1}{CC_2 - 1} \leq 1.
\end{aligned}$$

□

Con el fin de establecer los resultados principales de esta sección, vamos a considerar la siguiente función maximal.

Definición 5.4.5. Para $\sigma > 0$, $0 \leq \alpha < d$ y una función de Young φ, definimos

$$M_{\rho,\varphi}^{\sigma,\alpha} f(x) = \sup_{x \in B = B(z,r)} \left(1 + \frac{r}{\rho(z)}\right)^{-\sigma} |B|^{\alpha/d} \|f\|_{\varphi,B}.$$

Observemos que cuando $\varphi(t) = t^s$, con $s \geq 1$, la función maximal $M_{\rho,\varphi}^{\sigma,\alpha}$ coincide con la función $M_{\rho,s}^{\sigma,\alpha}$ considerada en la sección previa.

Antes de continuar, recordemos que dado un cierto operador T y una función b se define el conmutador $[T, b]$ del siguiente modo

$$[b, T]f(x) = T(bf)(x) - b(x)Tf(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

A continuación presentamos los principales resultados de esta sección.

Teorema 5.4.6. *Sea $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ y $b \in BMO_\rho^\infty$. Si T es un operador de tipo débil (s', s') para algún $s > 1$ y su núcleo pertenece a $\mathcal{S}_0(\rho, s)$, entonces para todo $\sigma > 0$ existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b, T]f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^{\sigma} f(x)|^p w(x)dx. \tag{5.4.9}$$

para toda f acotada y de soporte compacto, donde $\psi(t) = t^{s'} \log(1 + t)^{s'}$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ entonces existe una constante C tal que

$$\left\| \left(\sum_i |[b, T]f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M_{\rho,\psi}^{\sigma} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}, \tag{5.4.10}$$

para cualquier sucesión $\{f_i\}$ de funciones acotadas y de soporte compacto.

Teorema 5.4.7. *Sea $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ y $b \in BMO_\rho^\infty$. Si T es un operador de tipo débil $(1, d/(d - a))$, $0 \leq \alpha < d$, con su núcleo perteneciente a $\mathcal{S}_0(\rho, \infty, \alpha)$, entonces para cualquier $\sigma > 0$ existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b, T]f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^{\sigma,\alpha} f(x)|^p w(x)dx, \tag{5.4.11}$$

para toda f acotada y con soporte compacto, donde $\psi(t) = t \log(1 + t)$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \left(\sum_i |[b,T]f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M^{\sigma,\alpha}_{\rho,\psi} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}, \tag{5.4.12}$$

para toda sucesión $\{f_i\}$ *de funciones acotadas y de soporte compacto.*

Como en las secciones previas, para probar estos teoremas necesitamos estimaciones para la función maximal sharp de cada familia de operadores.

Proposición 5.4.8. *Sea* $\theta > 0$, $1 < s < \infty$, $b \in BMO^\theta_\rho$ *y* T *un operador de tipo débil* (s', s') *con núcleo* K *perteneciente a* $\mathcal{S}_0(\rho, s)$. *Entonces, si* $0 < \delta \leq 1$, $\delta < \epsilon$ *y* $\sigma \geq 0$, *existe una constante* C *tal que*

$$(M^\sharp_\rho(|[b,T]f|^\delta)(x))^{1/\delta} \leq C[b]_\theta\{(M^{\text{loc}}_\rho(Tf)^\epsilon(x))^{1/\epsilon} + M^\sigma_{\rho,\psi} f(x)\} \quad a.e.\ x,$$

para toda f *acotada y con soporte compacto, donde* $\psi(t) = t^{s'} \log(1+t)^{s'}$.

Demostración. Sea f una función acotada y de soporte compacto, $x \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \geq 0$ y $0 < \delta \leq 1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}(M^\sharp_\rho(|[b,T]f|^\delta)(x))^{1/\delta} \lesssim &\sup_{x \in B \in \mathcal{B}_\rho} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| |[b,T]f|^\delta(y) - c^\delta_B \right| dy \right)^{1/\delta} \\ &+ \sup_{x \in B(\xi,\rho(\xi))} \left(\frac{1}{|B|} \int_{B(\xi,\rho(\xi))} |[b,T]f(y)|^\delta dy \right)^{1/\delta}.\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Para tratar con el primer término de (5.4.13), consideramos $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ tal que $x \in B$. Escribamos f como $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{2B}$, y entonces

$$\begin{aligned}\left| |[b,T]f|^\delta - c^\delta_B \right| &\leq |[b,T]f - c_B|^\delta \\ &\leq |(b - b_{2B})Tf|^\delta + |T(f_1(b - b_{2B}))|^\delta + |T(f_2(b - b_{2B})) - c_B|^\delta,\end{aligned}$$

con $c_B = T(f_2(b - b_{2B}))(x_0)$ (esta cantidad es finita debida a las hipótesis sobre f y b, y la condición (5.4.1)).

Por la desigualdad de Hölder con exponente ϵ/δ, y usando (5.4.5) obtenemos que para

$\nu = \text{máx}\{1, \epsilon\delta/(\epsilon-\delta)\}$,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B|}\int_B (|b(z)-b_{2B}||Tf(z)|)^{\delta}dz\right)^{1/\delta} \\
&\qquad\qquad \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |b(z)-b_{2B}|^{\nu}dz\right)^{1/\nu}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf(z)|^{\epsilon}dz\right)^{1/\epsilon} \\
&\qquad\qquad \leq C[b]_{\theta}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf(z)|^{\epsilon}dz\right)^{1/\epsilon} \\
&\qquad\qquad \leq C[b]_{\theta}(M_{\rho}^{\text{loc}}(Tf)^{\epsilon})^{1/\epsilon}(x).
\end{aligned}
\tag{5.4.14}
$$

Del hecho que T es de tipo débil (s', s'), y usando la desigualdad de Kolmogorov's con $\delta < \epsilon < s'$, la desigualdad (5.4.4) con $\varphi(t) = \exp(t^{1/s'}) - 1$, y la desigualdad (5.4.6) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T(f_1(b-b_{2B}))(z)|^{\delta}dz\right)^{1/\delta} &\leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_{2B} (|f(z)||b(z)-b_{2B}|)^{s'}dz\right)^{1/s'} \\
&\leq C\Big(\|f^{s'}\|_{\tilde{\varphi},2B}\|(b-b_{2B})^{s'}\|_{\varphi,2B}\Big)^{1/s'} \\
&= C\|f\|_{\psi,2B}\|b-b_{2B}\|_{e^t-1,2B} \\
&\leq C[b]_{\theta}\left(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'}\|f\|_{\psi,2B} \\
&\leq C[b]_{\theta}M_{\rho,\psi}^{\sigma}f(x),
\end{aligned}
\tag{5.4.15}
$$

para cualquier $\sigma > 0$ con C dependiendo de $\sigma > 0$ ya que $r \leq \rho(x_0)$.

Ahora vamos a ver que $|T(f_2(b-b_{2B}))(y) - c_B| \leq C[M_{\rho,\psi}^{\sigma} + M_{\rho,s'}^{\sigma}](f)(x)$ para todo $y \in B$, donde $c_B = T(f_2(b-b_{2B}))(x_0)$. Denotando $B_k = 2^k B$ y

$$
\mathcal{K}^k(x_0,y) = (2^k r)^{d/s'}\left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k} |K(y,z)-K(x_0,z)|^s dz\right)^{1/s},
$$

de la desigualdad de Hölder se deduce

$$\begin{aligned}
|T(f_2(b-b_{2B}))(y)-c_B| &\le C\sum_{k\ge1}\int_{B_{k+1}\setminus B_k}|K(y,z)-K(x_0,z)||f(z)(b(z)-b_{2B})|dz\\
&\le C\sum_{k\ge1}\mathcal{K}^k(x_0,y)\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)(b(z)-b_{2B})|^{s'}dz\right)^{1/s'}\\
&\le C\sum_{k\ge1}\mathcal{K}^k(x_0,y)\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)(b(z)-b_{B_{k+1}})|^{s'}dz\right)^{1/s'}\\
&\quad + C\sum_{k\ge1}\mathcal{K}^k(x_0,y)|b_{2B}-b_{B_{k+1}}|\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)|^{s'}dz\right)^{1/s'}.
\end{aligned}$$

Entonces, a partir de la desigualdad (5.4.4) con $\varphi(t)=\exp(t^{1/s'})-1$, (5.4.7) y (5.4.6), la última expresión está acotada por un múltiplo de

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge1}\mathcal{K}^k(x_0,y)\|b-b_{B_{k+1}}\|_{e^t-1,B_{k+1}}\|f\|_{\psi,B_{k+1}}\\
&\quad+[b]_\theta\sum_{k\ge1}\mathcal{K}^k(x_0,y)k\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'}\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)|^{s'}dz\right)^{1/s'} \qquad (5.4.16)\\
&\le C[b]_\theta[M^\sigma_{\rho,\psi}+M^\sigma_{\rho,s'}](f)(x)\left(\sum_{k\ge1}k\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'+\sigma}\mathcal{K}^k(x_0,y)\right)
\end{aligned}$$

y la serie converge debido a la hipótesis (5.4.1).

Ahora vamos a tratar con el segundo término de (5.4.13). Sea Q una bola crítica tal que $x\in Q$ y, como antes, escribamos $f=f_1+f_2$, con $f_1=f\chi_{2Q}$. Entonces

$$|[b,T]f|^\delta\le|(b-b_{2Q})Tf|^\delta+|T(f_1(b-b_{2Q}))|^\delta+|T(f_2(b-b_{2Q}))|^\delta.$$

El promedio de los dos primeros términos de la expresión anterior, puede ser acotado de igual modo al que fue realizado en (5.4.14) y (5.4.15) respectivamente. Para afrontar el tercer término, veamos que $|T(f_2(b-b_{2Q})(y))|\le C[M^\sigma_{\rho,\psi}+M^\sigma_{\rho,s'}](f)(x)$ para todo $y\in Q$.

Si denotamos $Q_k = 2^k Q$, a partir de la desigualdad de Hölder y (4.2.4) se sigue

$$\begin{aligned}
|T(f_2(b-b_{2Q}))(y)| &\leq \sum_{k\geq 1} \int_{Q_{k+1}\setminus Q_k} |K(y,z)f(z)(b(z)-b_{2Q})|dz \\
&\leq C\sum_{k\geq 1} 2^{-kN}\left(\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} |f(z)(b(z)-b_{2Q})|^{s'}dz\right)^{1/s'} \\
&\leq C\sum_{k\geq 1} 2^{-kN}\left(\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} |f(z)(b(z)-b_{Q_{k+1}})|^{s'}dz\right)^{1/s'} \\
&\quad + C\sum_{k\geq 1} 2^{-kN}|b_{2Q}-b_{Q_{k+1}}|\left(\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} |f(z)|^{s'}dz\right)^{1/s'}.
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Finalmente, usando nuevamente (5.4.4) con $\varphi(t) = \exp(t^{1/s'}) - 1$, (5.4.7) y (5.4.6) obtenemos que la última expresión está acotada por un múltiplo de

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 1} 2^{-kN}\|b-b_{Q_{k+1}}\|_{e^t-1,Q_{k+1}}\|f\|_{\psi,Q_{k+1}} \\
&\qquad + C[b]_\theta \sum_{k\geq 1} 2^{-kN}k(1+2^k)^{\theta'}\left(\frac{1}{|Q_{k+1}|}\int_{Q_{k+1}} |f(z)|^{s'}dz\right)^{1/s'} \qquad (5.4.18)\\
&\leq C[b]_\theta[M^\sigma_{\rho,\psi} + M^\sigma_{\rho,s'}](f)(x)\left(\sum_{k\geq 1} k2^{-k(N-\theta'-\sigma)}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, escogiendo $N > \theta' + \sigma$ la última suma es finita.

Y la prueba concluye a partir del hecho que $M^\sigma_{\rho,s'} \leq M^\sigma_{\rho,\psi}$.

□

Proposición 5.4.9. *Sea $\theta > 0$, $b \in BMO^\theta_\rho$ y T un operador de tipo débil $(1, d/(d-\alpha))$, $0 \leq \alpha < d$, con núcleo K perteneciente a $\mathcal{S}_0(\rho,\infty,\alpha)$. Entonces, para $0 < \delta < \epsilon \leq 1$ y $\sigma \geq 0$, existe una constante C tal que*

$$(M^\sharp_\rho(|[b,T]f|)^\delta(x))^{1/\delta} \leq C[b]_\theta\{(M^{\text{loc}}_\rho(Tf)^\epsilon(x))^{1/\epsilon} + M^{\sigma,\alpha}_{\rho,\psi}f(x)\} \quad a.e.\ x,$$

para toda f acotada y con soporte compacto, donde $\psi(t) = t\log(1+t)$.

Demostración. Sea f una función acotada y de soporte compacto y $x \in \mathbb{R}^d$. Como antes

$$\begin{aligned}(M_\rho^\sharp(|[b,T]f|^\delta)(x))^{1/\delta} \lesssim \sup_{x\in B\in\mathcal{B}_\rho}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left||[b,T]f|^\delta(y) - c_B^\delta\right| dy\right)^{1/\delta} \\ + \sup_{x\in B(\xi,\rho(\xi))}\left(\frac{1}{|B|}\int_{B(\xi,\rho(\xi))} |[b,T]f(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta}.\end{aligned} \tag{5.4.19}$$

Para acotar el primer término, sea $B = B(x_0, r)$ con $r \le \rho(x_0)$ tal que $x \in B$. Como en la Proposición 5.4.8, vamos a proceder dividiendo la función f, como $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{2B}$. Siendo $0 < \delta < d/(d-\alpha)$, se deduce

$$\left||[b,T]f|^\delta - c_B^\delta\right| \le |(b - b_{2B})Tf|^\delta + |T(f_1(b - b_{2B}))|^\delta + |T(f_2(b - b_{2B})) - c_B|^\delta,$$

con $c_B = T(f_2(b - b_{2B}))(x_0)$ (esta cantidad es finita por la desigualdad (4.2.1) y las suposiciones sobre f y b).

El promedio de los dos primeros términos puede acotarse de igual forma a la realizada en (5.4.14) y (5.4.15) con $s' = 1$.

Vamos a demostrar ahora que $|T(f_2(b - b_{2B}))(y) - c_B| \le C[M_{\rho,\psi}^{\sigma,\alpha} + M_\rho^{\sigma,\alpha}](f)(x)$ para todo $y \in B$, donde $c_B = T(f_2(b - b_{2B}))(x_0)$. Denotamos $B_k = 2^k B$. Por lo tanto, para $y \in B$ y $z \in B_{k+1} \setminus B_k$ tenemos $|x_0 - y| < \frac{|x_0 - z|}{2}$. A partir de (5.4.2), obtenemos para $M > 0$ y $0 < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned}|K(x_0,z) - K(y,z)| &\le C\frac{|x_0 - y|^\lambda}{|x_0 - z|^{d-\alpha+\lambda}}\left(1 + \frac{|x_0 - z|}{\rho(x_0)}\right)^{-M} \\ &\le C\frac{2^{-k\lambda}}{(2^k r)^{d-\alpha}}\left(1 + \frac{|x_0 - z|}{\rho(x_0)}\right)^{-M} \\ &\le C\frac{2^{-k\lambda}}{|B_{k+1}|^{1-\alpha/d}}\left(1 + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-M}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la estimación previa se sigue que

$$
\begin{aligned}
&|T(f_2(b-b_{2B}))(y)-c_B| \\
&\quad\le C\sum_{k\ge1}\int_{B_{k+1}\setminus B_k}|K(y,z)-K(x_0,z)||f(z)(b(z)-b_{2B})|dz \\
&\quad\le C\sum_{k\ge1}2^{-k\lambda}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{-M}|B_{k+1}|^{\alpha/d}\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)(b(z)-b_{2B})|dz\right) \\
&\quad\le C\sum_{k\ge1}2^{-k\lambda}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{-M}|B_{k+1}|^{\alpha/d}\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)(b(z)-b_{B_{k+1}})|dz\right) \\
&\qquad+C\sum_{k\ge1}2^{-k\lambda}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{-M}|b_{2B}-b_{B_{k+1}}||B_{k+1}|^{\alpha/d}\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)|dz\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, con los mismos argumentos que en (5.4.16), se sigue que la última expresión puede acotarse por un múltiplo de

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\ge1}2^{-k\lambda}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{-M}|B_{k+1}|^{\alpha/d}\|b-b_{B_{k+1}}\|_{e^t-1,B_{k+1}}\|f\|_{\psi,B_{k+1}} \\
&\qquad+[b]_\theta\sum_{k\ge1}k2^{-k\lambda}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{-M+\theta'}|B_{k+1}|^{\alpha/d}\left(\frac{1}{|B_{k+1}|}\int_{B_{k+1}}|f(z)|dz\right) \\
&\quad\le C[b]_\theta[M^{\alpha,\sigma}_{\rho,\psi}+M^{\alpha,\sigma}_{\rho}](f)(x)\left(\sum_{k\ge1}k2^{-k\lambda}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{-M+\theta'+\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, eligiendo un apropiado valor de M, la última suma es finita.

Ahora nos ocuparemos del segundo término de (5.4.19). Sea $Q=B(x_0,\rho(x_0))$ una bola crítica tal que $x\in Q$ y, como antes, escribimos $f=f_1+f_2$, con $f_1=f\chi_{2Q}$. Entonces

$$|[b,T]f|^\delta\le|(b-b_{2Q})Tf|^\delta+|T(f_1(b-b_{2Q}))|^\delta+|T(f_2(b-b_{2Q}))|^\delta.$$

El promedio de los dos primeros términos puede acotarse como antes. Para el tercer término veremos que $|T(f_2(b-b_{2Q})(y))|\le C[M^{\sigma,\alpha}_{\rho,\psi}+M^{\sigma,\alpha}_{\rho}](f)(x)$ para todo $y\in Q$. Si denotamos $Q_k=2^kQ$, para $y\in B$ y $z\in Q_k\setminus Q_k$, se sigue $|z-x_0|\le 2|z-y|$ y por (3.1.1) obtenemos $\rho(y)\lesssim\rho(x_0)$. A partir de (5.3.6), obtenemos que para $N>0$,

$$|K(y,z)|\le C\frac{2^{-kN}}{|Q_{k+1}|^{1-\alpha/d}}.$$

Entonces, la desigualdad se sigue como en (5.4.17) y (5.4.18) con $s'=1$.

Y la prueba concluye siendo $M^{\sigma,\alpha}_{\rho}f\le M^{\sigma,\alpha}_{\rho,\psi}f$. $\square$

Prueba del Teorema 5.4.6. Sea f una función acotada y de soporte compacto, $\sigma \geq 0$ y $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$. Fijamos ϵ, $0 < \epsilon \leq 1$. Debido al Teorema 5.1.1 y la Proposición 5.4.8 tenemos que para cualquier $0 < p < \epsilon$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |[b,T]f(x)|^p w(x)dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} M_\rho^\sharp(|[b,T]f|^p)(x) M_\rho^{\mathrm{loc}} w(x)dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^{\mathrm{loc}}(Tf)^\epsilon(x)|^{p/\epsilon} w(x)dx \ + \ C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^\sigma f(x)|^p w(x)dx.\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

Por lo tanto, a partir del Teorema 5.1.2, la desigualdad anterior también vale para todo $0 < \epsilon \leq 1$, $0 < p < \infty$ y cualquier $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Fijemos $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty^{\mathrm{loc}}$. Como $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ sabemos que $w \in A_\beta^{\rho,\mathrm{loc}}$ para algún $\beta \geq 1$. Ahora escogiendo $\epsilon < \text{mín}\{p/\beta, 1\}$ tenemos $A_\beta^{\rho,\mathrm{loc}} \subset A_{p/\epsilon}^{\rho,\mathrm{loc}}$ y usando la acotación de M_ρ^{loc} en $L^{p/\epsilon}(v)$ para pesos $v \in A_{p/\epsilon}^{\rho,\mathrm{loc}}$ (ver Teorema 3.1.8) y el Teorema 5.3.2 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |[b,T]f(x)|^p w(x)dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^{\mathrm{loc}}(Tf)^\epsilon(x)|^{p/\epsilon} w(x)dx \ + \ C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^\sigma f(x)|^p w(x)dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \ + \ C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^\sigma f(x)|^p w(x)dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,s'}^\sigma f(x)|^p w(x)dx \ + \ C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^\sigma f(x)|^p w(x)dx.\end{aligned}$$

El resultado se deduce entonces del hecho que $M_{\rho,s'}^\sigma f \leq M_{\rho,\psi}^\sigma f$ a.e..

En cuanto a la desigualdad a valores vectoriales (5.4.10), a partir de la desigualdad (5.4.20) y el Teorema 5.1.2 se sigue que para cualesquiera $0 < p, r < \infty$, $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$ y $0 < \epsilon \leq 1$,

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_i |[T,b]f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} &\leq C \left\| \left(\sum_i |M_\rho^{\mathrm{loc}}[(Tf_i)^\epsilon]|^{r/\epsilon} \right)^{\epsilon/r} \right\|_{L^{p/\epsilon}(w)}^{1/\epsilon} \\ &\quad + \ C \left\| \left(\sum_i |M_{\rho,\psi}^\sigma f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)},\end{aligned} \tag{5.4.21}$$

para toda sucesión $\{f_i\}_i$ de funciones acotadas y de soporte compacto.

Observemos ahora que de acuerdo con el Teorema 3.1.8, $\mathcal{B}_\rho = \{B(z,r) : r \in \mathbb{R}^d,\ r \leq \rho(z)\}$ es una base de Muckenhoupt, es decir, que la maximal asociada M_ρ^{loc}, es acotada en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y todo $w \in A_p^{\rho,\text{loc}}$. Entonces, a partir del Corolario 3.12 en [12], se sigue que

$$\left\| \left(\sum_i |M_\rho^{\text{loc}} g_i|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^\gamma(v)} \leq C \left\| \left(\sum_i |g_i|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^\gamma(v)}, \tag{5.4.22}$$

para todo par $0 < q, \gamma < \infty$ y todo $v \in A_\gamma^{\rho,\text{loc}}$.

Como antes, fijando $0 < p, r < \infty$ y $w \in A_\infty^{\rho,\text{loc}}$ en la expresión (5.4.21), se sigue que como $w \in A_\beta^{\rho,\text{loc}}$ para algún $\beta \geq 1$, escogiendo $\epsilon < \text{mín}\{p/\beta, 1\}$ tenemos que $w \in A_{p/\epsilon}^{\rho,\text{loc}}$. Luego, a partir de (5.4.22) con $\gamma = p/\epsilon$ y $q = r/\epsilon$ y el Teorema 5.3.2 obtenemos,

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_i |M_\rho^{\text{loc}}[(Tf_i)^\epsilon]|^{r/\epsilon} \right)^{\epsilon/r} \right\|_{L^{p/\epsilon}(w)}^{1/\epsilon} &\lesssim \left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{\epsilon/r} \right\|_{L^{p/\epsilon}(w)}^{1/\epsilon} \\ &= \left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_i |M_{\rho,s'}^\sigma f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}. \end{aligned}$$

A partir de la estimación anterior, la desigualdad (5.4.21) y teniendo en cuenta que $M_{\rho,s'}^\sigma f \leq M_{\rho,\psi}^\sigma f$ a.e., se sigue la tesis.

□

Prueba del Teorema 5.4.7. La prueba es similar a la del Teorema 5.4.6 pero usando la Proposición 5.4.9 y el Teorema 5.3.3 en lugar de la Proposición 5.4.8 y el Teorema 5.3.2 respectivamente.

□

5.5 Aplicaciones al contexto del operador de Schrödinger

Los siguientes teoremas establecen un control de algunos de los operadores más importantes que aparecen en el análisis de $(-\Delta + V)$ (ver [39]) por apropiadas funciones maximales.

Teorema 5.5.1. *Sea* $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$, $\sigma > 0$ *y* $b \in BMO_\rho^\infty$. *Si* $V \in RH_q$ *con* $q > d$, *y* $T_1 = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, $T_2 = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ *y* $T_3 = \nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla$, *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T_j f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^\sigma f(x)|^p w(x)dx, \quad j = 1, 2, 3;$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b, T_j]f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^\sigma f(x)|^p w(x)dx, \quad j = 1, 2, 3;$$

para toda función f *acotada y con soporte compacto, donde* $\psi(t) = t\log(1 + t)$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \left(\sum_i |T_j(f_i)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M_\rho^\sigma f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}, \quad j = 1, 2, 3;$$

y

$$\left\| \left(\sum_i |[b, T_j](f_i)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M_{\rho,\psi}^\sigma f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}, \quad j = 1, 2, 3;$$

para toda sucesión $\{f_i\}$ *de funciones acotadas y con soporte compacto.*

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1.3.1, los operadores $(-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$, $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$ y $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ son de tipo Calderón-Zygmund y por lo tanto, son de tipo débil $(1,1)$. Más aún, sus núcleos satisfacen (4.2.1) para $\alpha = 0$ (ver estimación (6.5) dada en [39]). Por lo último, usando la estimación (39) dada en [4], la desigualdad (19) en [6] y la desigualdad (6.6) en [39][1] se sigue que los núcleos de tales operadores satisfacen la condición (5.4.2) . Por lo tanto, los resultados se siguen directamente de los Teoremas 5.3.3 y 5.4.7.

□

Teorema 5.5.2. *Sea* $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$, $\sigma > 0$ *y* $b \in BMO_\rho^\infty$. *Si* $V \in RH_q$ *con* $q > d/2$ *y* $T = (-\Delta + V)^{i\gamma}$, *para* $\gamma \in \mathbb{R}$, *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^\sigma f(x)|^p w(x)dx,$$

[1]Aunque la desigualdad (6.6) en [39] es probada para $N = 0$, un argumento similar puede ser aplicado para cualquier constante positiva N.

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b,T]f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\sigma}_{\rho,\psi} f(x)|^p w(x)dx,$$

para toda función f acotada y con soporte compacto, donde $\psi(t) = t\log(1+t)$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ entonces existe una constante C tal que

$$\left\| \left(\sum_i |Tf_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M^{\sigma}_{\rho} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)},$$

y

$$\left\| \left(\sum_i |[b,T](f_i)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M^{\sigma}_{\rho,\psi} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)},$$

para toda sucesión $\{f_i\}$ de funciones acotadas y con soporte compacto.

Demostración. El resultado se sigue a partir del Teorema 5.3.3 y el Teorema 5.4.7, donde las hipótesis se satisfacen debido al Teorema 1.3.2 y la estimación (4.3) en [39][2].

□

Teorema 5.5.3. *Sea $0 < p < \infty$, $w \in A^{\rho,\text{loc}}_{\infty}$, $\sigma > 0$ y $b \in BMO^{\infty}_{\rho}$. Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, y $T_1 = (-\Delta + V)^{-1/2}V^{1/2}$, $T_2 = (-\Delta + V)^{-1}V$ y $T_3 = (-\Delta + V)^{-1/2}\nabla$, entonces existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T_j f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\sigma}_{\rho,s'_j} f(x)|^p w(x)dx, \quad j = 1,2,3;$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b,T_j]f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M^{\sigma}_{\rho,\psi} f(x)|^p w(x)dx, \quad j = 1,2,3;$$

para toda función f acotada y con soporte compacto, donde $\psi(t) = t^{s'_j}\log(1+t)^{s'_j}$, con $s_1 = 2q$, $s_2 = q$ y $1/s_3 = 1/q - 1/d$ cuando $q < d$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ entonces existe una constante C tal que

$$\left\| \left(\sum_i |T_j(f_i)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M^{\sigma}_{\rho,s'_j} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}, \quad j = 1,2,3;$$

---

[2]La estimación (5.4.2) es probada en [39] para el caso $N = 0$, el mismo argumento es válido para todo $N > 0$.

y

$$\left\| \left(\sum_i |[b, T_j](f_i)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M^\sigma_{\rho,\psi} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)}, \quad j = 1, 2, 3;$$

para toda sucesión $\{f_i\}$ de funciones acotadas y con soporte compacto.

Demostración. Vamos a aplicar el Teorema 5.3.2 y el Teorema 5.4.6 a cada T_j, $j = 1, 2, 3$.

A partir del Teorema 1.3.3, los operadores T_1, T_2 y T_3 son acotados en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $p \geq s_j'$, respectivamente.

La prueba de que los núcleos de T_j, $j = 1, 2, 3$ satisfacen la condición (4.2.4) está contenida en la prueba del Teorema 4.3.4.

Por otra parte, la estimación (5.4.1) para el núcleo de T_3 se sigue directamente a partir del Lema 6 en [7]. En efecto, en tal lema se muestra una estimación similar sobre las diferencias respecto de la segunda variable para el núcleo del operador adjunto de T_3, es decir, $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$.

Por lo tanto, sólo queda por verificar (5.4.1) para los núcleos de T_1 y T_2.

Denotamos por K_j los núcleos de los operadores T_j, $j = 1, 2$. Se sabe (ver [26]), que si $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$, entonces para $j = 1, 2$

$$|K_j(x, y) - K_j(x_0, y)| \leq C \frac{|x - x_0|^\lambda}{|x_0 - y|^{d-j+\lambda}} \left(1 + \frac{|x_0 - y|}{\rho(x_0)}\right)^{-N} V(y)^{j/2}, \tag{5.5.1}$$

cuando $|x - x_0| < \frac{|x_0 - y|}{2}$, para todo $N > 0$ y algún $0 < \lambda < 1$. [3]

Por la desigualdad de Hölder, es suficiente probar que K_j satisface (5.4.1) para $s_j = \frac{2}{j}q$. Sea $B = B(x_0, r)$ y denotemos $B_k = 2^k B$. Por lo tanto, para $x \in B$ y $k \geq 1$, teniendo en

[3] Los autores prueban en [26] que (5.5.1) vale para $|x - x_0| < \frac{|x_0 - y|}{16}$, pero usando las desigualdades (8) y (10) en [26], y la desigualdad (7) en [7], no resulta difícil ver que (5.5.1) sigue siendo cierta para $|x - x_0| < \frac{|x_0 - y|}{2}$.

cuenta (5.5.1) con $N = M(1 + j/2)$ y tomando $M > (\log_2 C_0 + 1)$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k} |K_j(x,y) - K_j(x_0,y)|^{\frac{2q}{j}}\,dy\right)^{j/(2q)} \\
&\qquad\le C\frac{r^\lambda}{(2^k r)^{d-j+\lambda}}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-N}\left(\int_{B_{k+1}} V(y)^q dy\right)^{j/(2q)} \\
&\qquad\le C\frac{r^\lambda (2^k r)^{-dj/2q'}}{(2^k r)^{d-j+\lambda}}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-N}\left(\int_{B_k} V(y) dy\right)^{j/2} \\
&\qquad\le C\frac{r^\lambda (2^k r)^{-dj/2q'}}{(2^k r)^{d-j+\lambda}}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-M}(2^k r)^{(d-2)\frac{j}{2}} \\
&\qquad\le C r^\lambda \frac{(2^k r)^{-d(1-\frac{j}{2q})}}{(2^k r)^\lambda}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-M} \\
&\qquad\le C r^\lambda \frac{(2^k r)^{-d/(2q/j)'}}{(2^k r)^\lambda}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-M},
\end{aligned}$$

donde en las desigualdades previas hemos utilizado que el potencial $V \in RH_q$, es doblante y además la estimación (1.2.2) contenida en el Lema 1.2.2. Así, para cualquier τ fijo, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge 1} k(2^k r)^{d/(2q/j)'}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\tau}\left(\int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B} |K(x,y) - K(x_0,y)|^{\frac{2q}{j}} dy\right)^{j/(2q)} \\
&\qquad\le C\sum_{k\ge 1} k 2^{-k\lambda}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-M+\tau},
\end{aligned}$$

y la serie es finita e independiente de x_0 tomando M suficientemente grande. Para ver esto último se divide la suma hasta k_0 y desde k_0+1 en adelante, con k_0 tal que $2^{k_0} r \simeq \rho(x_0)$. La primer suma se acota por $C\sum_{k\ge 1} k2^{-k\lambda}$ y la segunda se estima por $C(\frac{\rho(x_0)}{r})^{M-\tau}\sum_{k\ge k_0+1} 2^{k(-M+\tau)} \lesssim C$.

□

Para finalizar la sección vamos a establecer un resultado de comparación para el operador $\mathcal{I}_\alpha$.

Como una consecuencia de la Observación 4.3.8, sabemos que $\mathcal{I}_\alpha$, es de tipo débil $(1, d/(d-\alpha))$. Además, a partir de la Proposición 4.3.9, se tiene que $K_\alpha \in \mathcal{S}(\rho,\infty,\alpha)$, más aún teniendo en cuenta la estimación (4.3.4), $K_\alpha \in \mathcal{S}_0(\rho,\infty,\alpha)$. Entonces, a partir del Teorema 5.3.3 y el Teorema 5.4.7, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.5.4. *Sea* $V \in RH_q$ *con* $q > d/2$, $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty^{\rho,\mathrm{loc}}$, *y* $b \in BMO_\rho^\infty$. *Entonces, para cualquier* $\sigma > 0$ *existe una constante* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{I}_\alpha f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_\rho^{\sigma,\alpha} f(x)|^p w(x)dx,$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} |[b,\mathcal{I}_\alpha] f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |M_{\rho,\psi}^{\sigma,\alpha} f(x)|^p w(x)dx,$$

para toda función f *acotada y con soporte compacto, donde* $\psi(t) = t\log(1+t)$.

Más aún, si $0 < r < \infty$ *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \left(\sum_i |\mathcal{I}_\alpha f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M_\rho^{\sigma,\alpha} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)},$$

y

$$\left\| \left(\sum_i |[b,\mathcal{I}_\alpha] f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_i |M_{\rho,\psi}^{\sigma,\alpha} f_i|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(w)},$$

para toda sucesión $\{f_i\}$ *de funciones acotadas y de soporte compacto.*

Capítulo 6

Espacios de Hardy con pesos asociados a una función radio crítico

Durante los últimos años varios autores como [18], [19], [20], [21], [22], [31] y [45] han definido, estudiado y caracterizado espacios de Hardy en el contexto del operador $\mathcal{L}$.

En particular, Dziubański y Zienkiewicz introducen en [18] un espacio de Hardy apropiado en el contexto de los operadores de Schrödinger como el conjunto de funciones integrables tales que sus imágenes bajo el operador maximal del semigrupo generado por $\mathcal{L}$ también son integrables. Allí, los autores obtienen una descomposición atómica de tal espacio y una caracterización por medio de adecuadas transformadas de Riesz. Recientemente, en [31], los autores ampliaron estos resultados a espacios de Hardy con pesos, también en el contexto Schrödinger, donde los pesos se toman en la clase de Muckenhoupt A_1. En otra dirección, en [21], se trata el caso de los espacios no pesados $H^p_{\mathcal{L}}$, para $p < 1$, obteniéndose también una descomposición atómica. Vale la pena resaltar que en el camino los autores muestran que estos espacios pueden caracterizarse mediante una adecuada localización del operador maximal asociado al semigrupo del calor clásico.

Uno de los objetivos de este capítulo es definir espacios de Hardy con pesos en relación con ρ, donde los pesos en cuestión pertenecen a las clases A_1^{ρ} y A_1^{loc}, como así también, obtener una descomposición atómica para tales espacios. Al igual que en [18] y [31] basamos nuestra descomposición atómica en la de los llamados espacios de Hardy locales pesados estudiados por primera vez por Bui en [8] y más recientemente por Tang en [42]. Cabe mencionar que espacios de Hardy sin pesos asociados a una función ρ, fueron estudiados en [45] en el contexto de un espacio de tipo homogéneo cuya medida satisface una propiedad de anti-duplicación.

Además, vamos a demostrar que algunas de las familias de integrales singulares introducidas en el Capítulo 4 o sus adjuntos están acotados de $H^1(w)$ en $L^1(w)$.

En particular, estos resultados pueden aplicarse al semigrupo de Schrödinger y obtener la acotación de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$ de varios tipos de transformadas de Riesz como $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$, las cuales fueron presentadas originalmente en [39], más aún, $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ puede ser caracterizado por medio de $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$.

Por otra parte, siguiendo algunos resultados contenidos en el Capítulo 3 vamos a probar una propiedad de extrapolación a partir de desigualdades $H^1_{\mathcal{L}}(w)$-$L^1(w)$ con pesos en A_1^ρ .

6.1 Espacios de Hardy

Comenzaremos esta sección considerando cuatro tipos de operadores maximales. Los dos primeros están relacionados con una función radio crítico genérica ρ y el semigrupo del calor clásico, mientras que los dos siguientes, se definen a partir del semigrupo $\{T_t\}_t$ asociado a un operador de tipo Scrödinger $\mathcal{L}$. Veremos a continuación que tales operadores están acotados por funciones maximales consideradas en el Capítulo 3 e introduciremos espacios de Hardy determinados por los mismos, probando además, la equivalencia de tales espacios bajo las condiciones adecuadas.

Dada una función radio crítico ρ introducimos los siguientes operadores maximales

$$W_\rho^* f(x) = \sup_{0<t<\rho^2(x)} |W_t f(x)|$$

y

$$W_\rho^{*,0} f(x) = \sup_{0<t<\rho^2(x)} |W_t^{\text{loc}} f(x)|$$

donde W_t es el operador integral asociado al núcleo del calor clásico

$$W_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

y W_t^{loc} es el operador integral asociado al núcleo

$$W_t^{\mathrm{loc}}(x,y) = W_t(x,y)\chi_{B(x,\rho(x))}(y).$$

Cuando ρ proviene de un operador de Schrödinger $\mathcal{L} = -\Delta + V$ con $V \in RH_q$ para $q > d/2$, vamos a considerar también otros dos operadores maximales, a saber,

$$T^* f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$$

y

$$T^{*,0} f(x) = \sup_{t>0} |T_t^{\mathrm{loc}} f(x)|$$

donde $\{T_t\}_t$ es el semigrupo cuyo generador infinitesimal es $\mathcal{L}$. Como ya se ha dicho, T_t está dado por un operador integral con un cierto núcleo $T_t(x,y)$. Análogamente, T_t^{loc} es el operador integral con núcleo

$$T_t^{\mathrm{loc}}(x,y) = T_t(x,y)\chi_{B(x,\rho(x))}(y).$$

Siendo V no negativo la fórmula de Feynman-Kac implica que $0 \leq T_t(x,y) \leq W_t(x,y)$.

En lo que sigue, nuestro objetivo es demostrar que cualquiera de estos operadores maximales aplicados a una determinada función f está acotado por debajo por $|f|$. Para este fin vamos a comprobar que, para apropiados pesos w, estos son los operadores maximales asociados a alguna aproximación a la identidad en $L^1(w)$ en casi todo punto.

En primer lugar vamos a ver que tanto W_ρ^* como T^* están acotados puntualmente por cualquier función maximal M_ρ^θ, con $\theta > 0$, mientras que los operadores locales $W_\rho^{*,0}$ y $T^{*,0}$ están controlados por $M_\rho^{\mathrm{loc}} f$.

En efecto, la siguiente proposición se cumple.

Proposición 6.1.1. *Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Entonces*

a) $W_\rho^*(|f|) \leq C_\theta M_\rho^\theta f$ y $T^*(|f|) \leq C_\theta M_\rho^\theta f$, para todo $\theta > 0$.

b) $W_\rho^{*,0}(|f|) \leq CM_\rho^{\text{loc}} f$ *y* $T^{*,0}(|f|) \leq CM_\rho^{\text{loc}} f$.

Demostración. Para ver la primer desigualdad en a) tomamos $B_k = B(x, 2^k\sqrt{t})$ y $N > d+1$. Luego,

$$\begin{aligned}
W_t(|f|)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} W_t(x,y)|f(y)|\,dy \\
&\leq C\frac{1}{t^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-N} |f(y)|\,dy \\
&\leq C\frac{1}{t^{d/2}} \sum_{k\geq 0} \int_{B_{k+1}\setminus B_k} \left(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-N} |f(y)|\,dy \\
&\qquad + C\frac{1}{t^{d/2}} \int_{B(x,\sqrt{t})} \left(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-N} |f(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

El primer término está acotado por un múltiplo de

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 0} \frac{1}{t^{d/2}} \frac{1}{(1+2^k)^N} \int_{B_{k+1}} |f(y)|\,dy \\
&\qquad \leq C \sum_{k\geq 0} 2^{-k}\, \frac{(1+2^k)^{-N+d+1}}{|B_{k+1}|} \int_{B_{k+1}} |f(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

Ahora, si $t \leq \rho(x)^2$ obtenemos que $2(1+2^k) \geq 1 + \frac{2^{k+1}\sqrt{t}}{\rho(x)}$ y entonces la última expresión está acotada por $M_\rho^{N-d-1} f(x)$. Tomando $N = \theta + d + 1$, obtenemos la acotación buscada.

Para afrontar el segundo término observemos que, si $t \leq \rho(x)^2$, tenemos $2^{-\theta} \leq (1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)})^{-\theta}$ para todo $\theta > 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t^{d/2}} \int_{B(x,\sqrt{t})} \left(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-N} |f(y)|\,dy \\
&\qquad \leq \frac{1}{t^{d/2}} \int_{B(x,\sqrt{t})} |f(y)|\,dy \\
&\qquad \leq C\left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-\theta} \frac{1}{|B(x,\sqrt{t})|} \int_{B(x,\sqrt{t})} |f(y)|\,dy \\
&\qquad \leq CM_\rho^\theta f(x).
\end{aligned}$$

Observemos también que la primera desigualdad en b) se sigue con los mismos pasos, pero ahora la suma se extiende hasta $k_0 - 1$ con $k_0 = \max\{k : 2^k\sqrt{t} < \rho(x)\}$, por lo tanto aparece un nuevo término

$$C\frac{1}{t^{d/2}} \int_{B(x,\rho(x))\setminus B(x,2^{k_0}\sqrt{t})} \left(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-N} |f(y)|\,dy$$

Así, teniendo en cuenta que para $N > d+1$ es $(1+2^k)^{-N+d+1} < 1$ y $2^{k_0}\sqrt{t} \simeq \rho(x)$ obtenemos

$$W_t^{\text{loc}}|f|(x) \lesssim \sum_{k=0}^{k_0} \frac{2^{-k}}{|B(x,2^k\sqrt{t})|} \int_{B(x,2^k\sqrt{t})} |f(y)|\,dy \;+\; \frac{2^{-k_0}}{|B(x,\rho(x))|} \int_{B(x,\rho(x))} |f(y)|\,dy$$

y la desigualdad se obtiene pues los radios de las bolas son a lo sumo como $\rho(x)$. Nótese que no usamos aquí que $t \leq \rho(x)^2$.

En cuanto a la segunda desigualdad en $b)$ el hecho que $0 \leq T_t(x,y) \leq W_t(x,y)$ y la observación anterior implican

$$T^{*,0}|f|(x) = \sup_{t>0} T_t^{\text{loc}}|f|(x) \leq \sup_{t>0} W_t^{\text{loc}}|f|(x) \leq M_\rho^{\text{loc}} f(x). \tag{6.1.1}$$

Finalmente, designando $\tilde{B}_k = 2^k B(x,\rho(x))$, la desigualdad restante se sigue considerando la estimación (1.1.6) con exponente $N > 0$ y el hecho que $e^{-s} \lesssim s^{-\frac{\eta}{2}}$ con $d+1 < \eta < N$

$$\begin{aligned}
(T_t - T_t^{\text{loc}})|f|(x) &\lesssim \sup_{t>0}\, t^{-d/2}\left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N} \int_{B(x,\rho(x))^c} e^{-\frac{|x-y|^2}{ct}}|f(y)|\,dy \\
&\lesssim \sup_{t>0}\, t^{-d/2}\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{\eta}\left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\eta} \int_{\tilde{B}_k\setminus\tilde{B}_{k-1}} |f(y)|\,dy \\
&\leq \frac{1}{\rho(x)^d} \sum_{k\geq 1} 2^{-k\eta} \int_{\tilde{B}_k} |f| \\
&\leq C \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\left(\frac{1}{1+2^k}\right)^{\eta-d-1} \frac{1}{|\tilde{B}_k|}\int_{\tilde{B}_k} |f| \\
&\leq C M_\rho^{\eta-d-1} f(x).
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

donde la tercer desigualdad se sigue fácilmente considerando separadamente los casos $0 < t < \rho(x)^2$ y $t \geq \rho(x)^2$.

Teniendo en cuenta que η es arbitrario, la estimación anterior junto con (6.1.1), permiten obtener la segunda desigualdad de $a)$ pues $M_\rho^{\text{loc}} \leq 2^\theta M_\rho^\theta$ para cualquier $\theta \geq 0$.

□

Observación 6.1.2. Los operadores W_ρ^* y T^* son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a los pesos A_1^ρ. Lo mismo acurre para $W_\rho^{*,0}$ y $T^{*,0}$ con respecto a los pesos $A_1^{\rho,\text{loc}}$. Esto es una consecuencia de los resultados correspondientes para M_ρ^θ y M_ρ^{loc}. En particular, los dos primeros aplicados a funciones en $L^1(w)$ con $w \in A_1^\rho$, son finitos en casi todo punto y lo mismo es válido para los otros dos aplicados a funciones en $L^1(w)$ con $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Lema 6.1.3. *Si $f \in C_0$, el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto, entonces $W_t f$, $T_t f$, $W_t^{\mathrm{loc}} f$ y $T_t^{\mathrm{loc}} f$ convergen puntualmente a f cuando t tiende a cero.*

Demostración. La afirmación es bien conocida para el semigrupo del calor. Para el resto de los casos, vamos a demostrar que sus diferencias tienden a cero. En efecto,

$$\begin{aligned} |(W_t - W_t^{\mathrm{loc}})f(x)| &\leq \int_{|x-y|>\rho(x)} W_t(x,y)|f(y)|\, dy \\ &\leq C\|f\|_\infty \int_{|z|>\rho(x)/2\sqrt{t}} e^{-z^2}\, dz. \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Siendo $\rho(x) > 0$ para todo x, la última integral tiende a cero con t.

Además, a partir de la estimación dada en [21], para $t \leq \rho(x)^2$,

$$|T_t(x,y) - W_t(x,y)| \leq \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^\varepsilon \frac{1}{t^{d/2}}\, g\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right)$$

donde g es una función de Schwartz positiva y $\varepsilon > 0$, obtenemos el resultado para $T_t f$.

Por último, observamos que

$$|(T_t - T_t^{\mathrm{loc}})f(x)| \leq (W_t - W_t^{\mathrm{loc}})|f|(x)$$

lo cual se sigue de la estimación puntual $T_t(x,y) \leq W_t(x,y)$ entre los núcleos. Luego, procediendo como en (6.1.3), se concluye la prueba.

□

Con estas observaciones, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 6.1.4. *Las siguientes desigualdades valen en casi todo punto*

I) $|f| \leq W_\rho^* f$ *y* $|f| \leq T^* f$ *para* $f \in L^1(w)$ *y* $w \in A_1^\rho$.

II) $|f| \leq W_\rho^{*,0} f$ *y* $|f| \leq T^{*,0} f$ *para* $f \in L^1(w)$ *y* $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Demostración. Como una consecuencia de la Observación 6.1.2, el lema previo y la densidad de C_0 en $L^1(w)$, por argumentos estándar, obtenemos la convergencia a f de $W_t f$, $T_t f$, W_t^{loc} y T_t^{loc} en casi todo punto, para f en $L^1(w)$ y w según corresponda. Usando que el límite está acotado por el supremo y que $\rho(x) > 0$ se obtiene I) y II).

$\square$

Ahora estamos en condiciones de introducir los espacios de Hardy de nuestro interés.

Definición 6.1.5. Para una función ρ que satisface (3.1.1) y un peso w, podemos definir los espacios de Hardy

$$H^1_\rho(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \|W^*_\rho f\|_{L^1(w)} < \infty \right\},$$

y

$$H^1_{\rho,0}(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \|W^{*,0}_\rho f\|_{L^1(w)} < \infty \right\}.$$

Si $w \in A_1^\rho$, por la Proposición 6.1.4 la cantidad $\|W^*_\rho f\|_{L^1(w)}$ se convierte en una norma y lo mismo ocurre cuando $w \in A_1^{\rho,\text{loc}}$ para $\|W^{*,0}_\rho f\|_{L^1(w)}$.

De este modo definimos

$$\|f\|_{H^1_\rho(w)} \doteq \|W^*_\rho f\|_{L^1(w)} \quad \text{y} \quad \|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \doteq \|W^{*,0}_\rho f\|_{L^1(w)}.$$

Además, por la Proposición 6.1.4, tenemos que $\|f\|_{L^1(w)} \leq \|f\|_{H^1_\rho(w)}$ y $\|f\|_{L^1(w)} \leq \|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)}$ para $w \in A_1^\rho$ y $w \in A_1^{\rho,\text{loc}}$ respectivamente.

Definición 6.1.6. Cuando ρ está asociada a un operador $\mathcal{L} = -\Delta + V$, podemos definir también

$$H^1_{\mathcal{L}}(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \|T^* f\|_{L^1(w)} < \infty \right\},$$

y

$$H^1_{\mathcal{L},0}(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \|T^{*,0} f\|_{L^1(w)} < \infty \right\},$$

con normas dadas por

$$\|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)} \doteq \|T^* f\|_{L^1(w)} \quad \text{y} \quad \|f\|_{H^1_{\mathcal{L},0}(w)} \doteq \|T^{*,0} f\|_{L^1(w)}.$$

Consideraciones análogas a las realizadas anteriormente son válidas para estos espacios y así

$$\|f\|_{L^1(w)} \leq \|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)}, \quad \text{para} \quad w \in A_1^{\rho},$$

y

$$\|f\|_{L^1(w)} \leq \|f\|_{H^1_{\mathcal{L},0}(w)}, \quad \text{para} \quad w \in A_1^{\rho,\text{loc}}.$$

Es preciso señalar que el espacio $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w = 1$ fue introducido por J. Dziubański y J. Zienkiewicz en [18] como el espacio de Hardy natural en el contexto Schrödinger y también esta definición aparece en [31] para $w \in A_1$.

El resultado principal de esta sección se ocupa de las relaciones entre estos espacios.

Teorema 6.1.7. *Dada ρ y un peso w, tenemos*

a) $H^1_\rho(w) = H^1_{\rho,0}(w)$ para $w \in A_1^\rho$ con normas equivalentes.

b) Cuando ρ proviene de un operador de Schrödinger $\mathcal{L}$, $H^1_\rho(w) = H^1_{\mathcal{L}}(w)$ para $w \in A_1^\rho$ y $H^1_{\rho,0}(w) = H^1_{\mathcal{L},0}(w)$ para $w \in A_1^{\rho,\text{loc}}$, con normas equivalentes en ambos casos.

En particular, los cuatro espacios coinciden cuando ρ proviene de un tal $\mathcal{L}$ y $w \in A_1^\rho$.

Demostración. En vista de la Proposición 6.1.4 será suficiente mostrar que

I) $|W_\rho^* - W_\rho^{*,0}| \lesssim S_1$.

II) $|T^* - T^{*,0}| \lesssim S_1$.

III) $|W_\rho^{*,0} - T^{*,0}| \lesssim S_2$.

con S_1 acotado en $L^1(w)$ para $w \in A_1^\rho$ y S_2 acotado en $L^1(w)$ para $w \in A_1^{\rho,\text{loc}}$.

Sea $Q_k = B(x_k, \rho(x_k))$, $k \geq 1$, un cubrimiento de $\mathbb{R}^d$ como en la Proposición 3.1.3 y $w \in A_1^{\rho,\sigma}$.

Para I), denotamos $B_j = 2^j B(x, \rho(x))$ con $x \in \mathbb{R}^d$ y observamos que dado $N > d$

$$\begin{aligned}
|(W_\rho^* - W_\rho^{*,0})f(x)| &\leq \sup_{t \leq \rho^2(x)} \int_{|x-y|>\rho(x)} \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}}{t^{d/2}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C \sup_{t \leq \rho^2(x)} t^{(N-d)/2} \int_{|x-y|>\rho(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^N}\, dy \\
&\leq C\rho(x)^{(N-d)} \sum_{j \geq 0} \int_{B_{j+1} \setminus B_j} \frac{|f(y)|}{|x-y|^N}\, dy \\
&\leq C \sum_{j \geq 0} \frac{2^{-j(N-d)}}{|B_{j+1}|} \int_{B_{j+1}} |f(y)|\, dy \\
&= CS_1 f(x).
\end{aligned}$$

A partir de (3.1.1) es sencillo verificar que para cualquier $x \in Q_k$ existe una dilatación fija tal que $B(x, \rho(x)) \subset \tilde{Q}_k = \mathcal{C} Q_k$, con $\mathcal{C} = c_\rho 2^{N_0} + 1$. Siendo $\rho_k = \rho(x_k) \simeq \rho(x)$ y usando que $w \in A_1^{\rho,\sigma}$, se sigue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} S_1 f \; w &\leq C \sum_{k \geq 0} w(Q_k) \sum_{j \geq 0} \frac{2^{-j(N-d)}}{|2^j \tilde{Q}_k|} \int_{2^j \tilde{Q}_k} |f| \\
&\leq C \sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-d)} \sum_{k \geq 0} \frac{w(2^j \tilde{Q}_k)}{|2^j \tilde{Q}_k|} \int_{2^j \tilde{Q}_k} |f| \\
&\leq C \sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-d-\sigma)} \sum_{k \geq 0} \int_{2^j \tilde{Q}_k} |f| w \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f| w \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-d-\sigma-N_1)} \right),
\end{aligned}$$

donde N_1 es la constante de la Prposición 3.1.3. La estimación se consigue tomando N suficientemente grande.

En cuanto a II), procediendo análogamente a lo hecho en (6.1.2) obtenemos, para $N > 0$,

$$|(T^* - T^{*,0})f(x)| \leq C\, \rho(x)^{-d} \sum_{j \geq 1} 2^{-jN} \int_{2^j B(x,\rho(x))} |f(y)|\; dy = CS_1 f(x).$$

Finalmente para verificar III), sea $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ y observemos que

$$\begin{aligned}
|(W_\rho^{*,0} - T^{*,0})f(x)| &\leq \sup_{t>0} |(W_t^{\mathrm{loc}} - T_t^{\mathrm{loc}})f(x)| \; + \sup_{t > \rho(x)^2} |(W_t^{\mathrm{loc}} f(x)| \\
&= S_{2,1} f(x) \; + \; S_{2,2} f(x).
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Para tratar con el primer término utilizamos la estimación (1.1.5), la cual afirma que dado $\epsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$|W_t(x,y) - T_t(x,y)| \leq C \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\epsilon} \frac{1}{|x-y|^d},$$

cuando $|x-y| < \rho(x)$.

Como antes, si $x \in Q_k$, entonces $B(x,\rho(x)) \subset \tilde{Q}_k$ y $\rho_k = \rho(x_k) \simeq \rho(x)$. Por lo tanto

$$S_{2,1}f(x) \leq C\rho_k^{-\epsilon} \int_{\tilde{Q}_k} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-\epsilon}}\, dy$$

y así

$$\int_{Q_k} S_{2,1}f(x\ )w(x)\, dx \leq C\rho_k^{-\epsilon} \int_{\tilde{Q}_k} |f(y)| \left(\int_{Q_k} \frac{w(x)}{|x-y|^{d-\epsilon}}\, dx\right) dy$$

Para $y \in \tilde{Q}_k$, la bola $Q_k \subset \tilde{B} = B(y, M\rho(y))$ con $M = c_\rho(\mathcal{C}+1)^{N_0+1}$ y $\rho(y) \simeq \rho_k$. Entonces la integral interior se estima por

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{B}} \frac{w(x)}{|x-y|^{d-\varepsilon}}\, dx &\leq C\rho_k^{\varepsilon} \sum_{j\geq 0} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^{-j}\tilde{B}|} \int_{2^{-j}\tilde{B}} w(x)\ dx \\
&\leq C\rho_k^{\varepsilon} \sum_{j\geq 0} 2^{-j\varepsilon} \operatorname*{ínf}_{2^{-j}\tilde{B}} w \\
&\leq C\rho_k^{\varepsilon} w(y).
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado que $A_1^{\rho,\mathrm{loc}} = A_1^{M\rho,\mathrm{loc}}$.

Por consiguiente,

$$\int_{Q_k} S_{2,1}f\ w \leq C \int_{\tilde{Q}_k} |f|\ w,$$

para alguna constante C que depende solo de las constantes en (3.1.1). Luego, teniendo en cuenta el solapamiento finito de $\{Q_k\}_k$, la suma en k da

$$\int_{\mathbb{R}^d} S_{2,1}f\ w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|\ w.$$

Para el segundo término en (6.1.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t>\rho(x)^2} |W_t^{\mathrm{loc}} f(x)| &\leq \sup_{t>\rho(x)^2} \frac{1}{t^{d/2}} \int_{B(x,\rho(x))} |f(y)|\ dy \\
&\leq \frac{1}{\rho(x)^d} \int_{B(x,\rho(x))} |f(y)|\ dy,
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} S_{2,2}f(x)w(x)\,dx &\le \sum_{k\ge 1}\int_{Q_k}\frac{1}{\rho(x)^d}\left(\int_{B(x,\rho(x))}|f(y)|\,dy\right)w(x)\,dx\\ &\le C\sum_{k\ge 0}\frac{w(\tilde{Q}_k)}{|\tilde{Q}_k|}\int_{\tilde{Q}_k}|f(y)|dy\\ &\le C\sum_{k\ge 0}\inf_{x\in\tilde{Q}_k} w(x)\int_{\tilde{Q}_k}|f(y)|dy\\ &\le C\sum_{k\ge 0}\int_{\tilde{Q}_k}|f(y)|w(y)\,dy\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|w(y)\,dy.\end{aligned}$$

□

6.2 Descomposición atómica y caracterización por transformadas de Riesz ρ-locales

No resulta difícil obtener una descomposición atómica para los espacios de tipo Hardy definidos en la sección previa a partir de la realizada por Bui en [8] para el espacio de Hardy local con pesos en A_1.

Definición 6.2.1. Dado $w \in A_1$ se define el espacio de Hardy local del siguiente modo

$$h^1(w) = \Big\{f \in L^1(w) : \sup_{0<t<1}|W_t f(x)| \in L^1(w)\Big\},$$

Este resulta ser un caso particular de $H^1_\rho(w)$ con $\rho \equiv 1$. Más aún, podemos considerar un espacio de Hardy R-local de la siguiente manera.

Definición 6.2.2. Dado $w \in A_1$ y $R > 0$ definimos el espacio de Hardy R-local como

$$h^1_R(w) = \Big\{f \in L^1(w) : \sup_{0<t<R^2}|W_t f(x)| \in L^1(w)\Big\}.$$

Como así también

$$h^1_{R,0}(w) = \Big\{f \in L^1(w) : \sup_{0<t<R^2}|W_t^{\mathrm{loc}} f(x)| \in L^1(w)\Big\}.$$

Aplicando el Teorema 6.1.7, obtenemos

$$\|f\|_{h^1_R(w)} = \|W^*_\rho f\|_{L^1(w)} \simeq \|W^{*,0}_\rho f\|_{L^1(w)},$$

para $\rho \equiv R$ y $w \in A_1$.

Siguiendo lo realizado por Bui en [8] vamos a considerar la siguiente noción de átomo local.

Definición 6.2.3. Dado $R > 0$ y un peso w, se dice que una función a es un h^1_R-átomo si satisface que existe x_0 y r tales que $\operatorname{sop} a \subset B(x_0, r)$, y

I) $\|a\|_\infty \leq w(B)^{-1}$;

II) $\int_B a = 0,$ si $r < \frac{R}{2}$.

Teorema 6.2.4. *(Teorema 5.2 en [8]) Sea $w \in A_1$. Una función f pertenece a $h^1_R(w)$ si y sólo si existe una sucesión de h^1_R-átomos $\{a_i\}_i$ y números $\{\lambda_i\}_i$ tales que*

$$f = \sum_i \lambda_i a_i,$$

en el sentido de $L^1(w)$ y $\sum_i |\lambda_i| < \infty$. Además,

$$\|f\|_{h^1_R(w)} \simeq \text{ínf}\left\{ \sum_i |\lambda_i| : \ f = \sum_i \lambda_i a_i, \ \textit{para } a_i \ h^1_R\textit{-átomos} \right\}.$$

Observación 6.2.5. En [31] también aparece la siguiente propiedad de tal descomposición: si $f \in h^1_R(w)$ es tal que $\operatorname{sop} f \subset B(x, r)$ con $r \geq R$, entonces los átomos pueden ser escogidos con soportes contenidos en $B(x, C_0 r)$ para una constante C_0 independiente de f y r.

La prueba del Teorema 6.2.4 aparece en [8] para $R = 1$. Con respecto a la Observación 6.2.5, a pesar de que fue citada en [31] como probada en [8] no hemos sido capaces de encontrar tal resultado allí. De hecho, Bui obtiene la descomposición atómica como consecuencia de un resultado análogo para $H^1(w)$, el espacio de Hardy clásico con pesos A_1, y siguiendo la equivalencia: $f \in h^1_1(w)$ si y sólo si $f - \psi * f \in H^1(w)$, donde ψ pertenece a $\mathscr{S}$, la clase de Schwartz, $\int \psi = 1$ y tiene momentos de orden superior nulos.

Vale la pena señalar que una descomposición atómica arbitraria de una función con soporte compacto $f \in h_1^1(w)$ puede no compartir la propiedad señalada en la Observación 6.2.5. Además, la descomposición construida en [8] para funciones en $H^1(w)$ con soporte compacto no parece gozar de esta propiedad. Según consideramos, es necesario exhibir una descomposición atómica que satisfaga tal afirmación. Para este fin, un paso crucial es la construcción de los átomos con soportes en los conjuntos de nivel de una función gran maximal que permita la convolución sólo con funciones de soporte compacto ψ.

Esta función gran maximal caracteriza el espacio $h_1^1(w)$ a partir de la siguiente observación trivial.

Proposición 6.2.6. *Sea w un peso en la clase A_1. Entonces, $f \in h_1^1(w)$ si y sólo si $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}} f(x) = \sup_{t<1, \psi \in \mathfrak{A}} |\psi_t * f(x)| \in L^1(w)$, donde $\mathfrak{A}$ es una subclase cualquiera de $\mathcal{B}_1$.*

Aquí, $\mathcal{B}_1$ es la clase dada en [8] por

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \phi \in \mathscr{S} : \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N_1} \|x^\alpha D^\beta \phi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

donde N_1 es un número suficientemente grande que sólo depende de w y d. La prueba de la proposición es una consecuencia directa del Corolario 1 allí presentado.

Entonces, podemos elegir $\mathfrak{A} = \{\psi \in B_1 : \text{ sop } \psi \subset B(0, c)\}$. De este modo resulta que una construcción de los átomos puede ser desarrollada de un modo similar a lo hecho en [8] para $H^1(w)$, pero con algunas variantes adaptadas a la naturaleza local de los espacios y siempre que c se tome lo suficientemente grande.

Sin embargo, la constante c puede elegirse de modo que sólo dependa de la dimensión. Esta vez los átomos son construidos con soporte en los cubos contenidos en $\Omega_0 = \{x : \mathcal{M}_{\mathfrak{A}} f(x) > 0\}$. La ventaja es que cuando f está soportada en $B(x_0, r)$, con $r \geq 1$, entonces $\Omega_0 \subset B(x_0, r + c) \subset B(x_0, (1 + c)r)$. Llamando $C_0 = 1 + c$, la Observación 6.2.5 se sigue para $R = 1$.

Señalamos aquí que en [42] (en un contexto más general) el autor introduce espacios de Hardy locales pesados por medio de una función gran maximal envolviendo también convoluciones con funciones de soporte compacto.

Para $R \neq 1$, el problema puede ser reducido a $R = 1$ por medio de la siguiente observación.

Observación 6.2.7. Una función $f \in h^1_R(w)$ si y sólo si $f(R\cdot)$ pertenece $h^1_1(w_{1/R})$, donde, como es usual, $w_{1/R}(x) = w(Rx)/R^d$. Más aún, la aplicación $f \mapsto f(R\cdot)$ es una isometría. Además, señalamos que $w_{1/R}$ pertenece a A_1 si y sólo si $w \in A_1$ y con la misma constante. Esto permite mostrar que la equivalencia entre las normas atómica y la maximal dada en el Teorema 6.2.4 puede escribirse con constantes independientes de R.

En lo que sigue vamos a denotar por γ la constante

$$\gamma = \gamma(\rho, d) = 2c_\rho C_0(1 + 2C_0)^{N_0}$$

donde C_0 es la constante de la Observación 6.2.5, c_ρ y N_0 son las constantes de ρ dadas en (3.1.1). Con esta notación podemos introducir la noción de (ρ, w)-átomos.

Definición 6.2.8. Una función integrable a se dice que es un (ρ, w)-átomo si

(I) Existe una bola $B(x_0, r)$ con $r \leq \gamma\rho(x_0)$ tal que $\operatorname{sop} a \subset B(x_0, r)$.

(II) $\|a\|_\infty \leq \frac{1}{w(B(x_0,r))}$.

(III) Si $r < \gamma^{-1}\rho(x_0)$, entonces $\int_{\mathbb{R}^d} a = 0$.

Según fue establecido en la Proposición 3.1.6, para cualquier $\beta > 1$, la clase $A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ coincide con $A_1^{\beta\rho,\mathrm{loc}}$ pero con una constante que puede crecer con β. Con esto en mente, es fácil obtener la siguiente propiedad para estos pesos.

Proposición 6.2.9. *Sea $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ y $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ para $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Entonces existe un peso $v \in A_1$ tal que $v|_{B_0} = w|_{B_0}$ y además la constante de v en A_1 depende sólo de la constante de w en $A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$.*

Demostración. Vamos a usar el hecho de que si un peso satisface la desigualdad A_1 para toda bola contenida en B_0, es posible encontrar la extensión v, (ver [5]). Para verificar que $w|_{B_0}$ satisface tal propiedad, consideramos $B = B(x, r) \subset B_0$. Por (3.1.1) existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1\rho(x_0) \leq \rho(x) \leq c_2\rho(x_0)$ y entonces, si $r \leq \rho(x_0)$, tenemos

$r \leq \frac{\rho(x)}{c_1}$ y por la Proposición 3.1.6 $w \in A_1^{\rho/c_1,\mathrm{loc}}$. Por lo tanto, la desigualdad A_1 es válida para la bola B. $\square$

Observación 6.2.10. Como $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ implica que $w \in A_1^{\beta\rho,\mathrm{loc}}$ podemos encontrar una extensión A_1 de $w|_{\beta B_0}$ para cualquier $\beta > 1$.

Ahora estamos en condiciones de establecer y probar la siguiente caracterización del espacio $H^1_{\rho,0}(w)$.

Teorema 6.2.11. *Sea ρ una función que satisface* (3.1.1) *y $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$. Entonces, una función $f \in H^1_{\rho,0}(w)$ si y sólo si existe una sucesión de (ρ,w)-átomos $\{a_i\}_i$ y escalares $\{\lambda_i\}_i$ tales que*

$$f = \sum_i \lambda_i a_i, \tag{6.2.1}$$

en el sentido de $L^1(w)$. Además,

$$\|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \simeq \text{ínf}\left\{ \sum_i |\lambda_i| : f = \sum_i \lambda_i a_i,\ a_i\ (\rho,w)\text{-átomo}\right\} \tag{6.2.2}$$

Demostración. Primero vamos a mostrar que para cualquier descomposición de f tenemos $\|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \leq \sum_i |\lambda_i|$. De modo usual es suficiente probar que para cualquier (ρ,w)-átomo a se verifica que $a \in H^1_{\rho,0}(w)$ y además existe una constante fija C tal que

$$\|a\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \leq C.$$

Consideremos a y $B_0 = B(x_0,r)$ como en la Definición 6.2.8, esto es $\operatorname{sop} a \subset B(x_0,r)$, $r \leq \gamma\rho(x_0)$. Vamos a estimar las normas $\|W_\rho^{*,0}a\|_{L^1(\lambda B_0,w)}$ y $\|W_\rho^{*,0}a\|_{L^1((\lambda B_0)^c,w)}$, para alguna constante $\lambda > 1$ que será elegida más adelante.

Claramente, siendo $W_t \geq 0$ y $\|W_t(x,\cdot)\|_{L^1} = 1$, resulta que $W_\rho^{*,0}a \leq \|a\|_\infty$, con lo cual se tiene

$$\|W_\rho^{*,0}a\|_{L^1(\lambda B_0,w)} \leq \frac{w(\lambda B_0)}{w(B_0)} \leq C,$$

donde C depende de λ y la constante $A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ de w.

Para estimar $\|W_\rho^{*,0}a\|_{L^1((\lambda B_0)^c,w)}$, recordemos que

$$W_\rho^{*,0}a(x) = \sup_{t<\rho^2(x)} \left| \int_{B(x,\rho(x))\cap B_0} W_t(x,y)a(y)dy \right|.$$

Por lo tanto, $W_\rho^{*,0}a(x) > 0$ implica $|x-x_0| < r+\rho(x) \leq (\gamma+(2+\gamma)^{N_0}c_\rho)\rho(x_0) = \tilde{\gamma}\rho(x_0)$. Entonces,

$$\|W_\rho^{*,0}a\|_{L^1((\lambda B_0)^c,w)} = \int_{\lambda r<|x-x_0|<\tilde{\gamma}\rho(x_0)} W_\rho^{*,0}a(y)dy.$$

Escogiendo $\lambda = \gamma\widetilde{\gamma} \geq 2$, se sigue que sólo tenemos que considerar el caso $r \leq \rho(x_0)/\gamma$ y por consiguiente $\int_{\mathbb{R}^d} a = 0$. Usando esta propiedad y el hecho que $|x-x_0| \geq \lambda r$ y $|y-x_0| < r$ implican $|x-x_0| \simeq |x-y|$, el teorema de valor medio proporciona,

$$\begin{aligned} W_\rho^{*,0}a(x) &\leq \sup_{t>0}\int_{|y-x_0|<r} |W_t(x,y)-W_t(x,x_0)|\,|a(y)|dy \\ &\lesssim \|a\|_\infty \left(\frac{r}{|x-x_0|}\right)^{d+1}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $|\nabla W|(z) \lesssim \frac{1}{|z|^{d+1}}$. Por lo tanto, escogiendo j_0 tal que $2^{j_0-1}r < \widetilde{\gamma}\rho(x_0) < 2^{j_0}r$ se sigue que

$$\begin{aligned} \|W_\rho^{*,0}a\|_{L^1((\lambda B_0)^c,w)} &\leq \|a\|_\infty r^{d+1}\int_{2r<|x-x_0|<\tilde{\gamma}\rho(x_0)} \frac{w(x)}{|x-x_0|^{d+1}}dx \\ &\lesssim \|a\|_\infty \sum_{j=2}^{j_0} \frac{1}{2^{j(1+d)}}\int_{|x-x_0|<2^j r} w(x)dx \\ &\lesssim \frac{|B_0|}{w(B_0)}\inf_{B_0} w\sum_{j=2}^{j_0} 2^{-j} \lesssim 1, \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

ya que $w \in A_1^{\beta\rho,\mathrm{loc}}$ con $\beta = 2\widetilde{\gamma}$.

Con el fin de demostrar la recíproca, vamos a considerar un cubrimiento $\{Q_k\}_k$ de $\mathbb{R}^d$ por bolas de radio crítico $Q_k = B(x_k,\rho(x_k))$ como en la Proposición 3.1.3. En relación con este cubrimiento, existe una partición de la unidad $\{\psi_k\}_k$, la cual puede elegirse de modo que satisfaga las siguientes propiedades (ver [19])

I) $0 \leq \psi_k \leq 1$, $\operatorname{sop}\psi_k \subset 2Q_k$.

II) $\psi_k \in C_1(\mathbb{R}^d)$ con $|\nabla\psi_k| \leq \frac{A}{\rho_k}$, donde $\rho_k = \rho(x_k)$.

III) $\sum_k \psi_k = 1$.

Asociado con tal cubrimiento, existe también una sucesión $\{w_k\}_k$ de pesos en la clase A_1 tal que $w_k|_{2C_0Q_k} = w|_{2C_0Q_k}$, de acuerdo a la Observación 6.2.10 (donde C_0 es la constante de la Observación 6.2.5). En particular, todos los pesos w_k tienen constante A_1 independiente de k. Claramente, $f = \sum_k f\psi_k$ y teniendo en cuenta la propiedad de solapamiento finito de $\{2C_0Q_k\}_k$, la suma tiene un número finito de términos para cada $x \in \mathbb{R}^d$. Además, vamos a probar la siguiente afirmación:

Si $f \in H^1_{\rho,0}(w)$, entonces $f\psi_k \in h^1_{\rho_k}(w_k)$ y para alguna constante C, tenemos

$$\sum_k \|f\psi_k\|_{h^1_{\rho_k}(w_k)} \leq C\|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)}. \tag{6.2.4}$$

Para probar la afirmación, primero observemos que $\operatorname{sop} f\psi_k \subset 2Q_k$, y de este modo la función $W^{*,0}_{\rho_k}(f\psi_k)$ está soportada en $3Q_k$ y para $x \in 3Q_k$ se sigue

$$\begin{aligned}
W^{*,0}_{\rho_k}(f\psi_k)(x) &= \sup_{t<\rho_k^2}\left|\int_{|x-y|<\rho_k} W_t(x,y)f(y)\psi_k(y)dy\right| \\
&\lesssim \sup_{t<\rho_k^2}\int_{|x-y|<\rho_k} W_t(x,y)|f(y)|\,|\psi_k(y)-\psi_k(x)|dy \\
&\quad + \sup_{t<\rho_k^2}\left|\int_{|x-y|<\rho_k} W_t(x,y)f(y)dy\right|\psi_k(x) \\
&= B_k^1 + B_k^2.
\end{aligned}$$

Utilizando que $|\psi_k(x)-\psi_k(y)| \lesssim \frac{|x-y|}{\rho_k}$ y $W_t(x,y) \lesssim \frac{1}{|x-y|^d}$ obtenemos

$$B_k^1 \lesssim \frac{1}{\rho_k}\int_{|x-y|<\rho_k}\frac{f(y)}{|x-y|^{d-1}}dy.$$

Como $C_0 \geq 2$ tenemos que $w_k = w$ en $3Q_k$ y entonces

$$\int_{3Q_k} B_k^1(x)w(x)\,dx \lesssim \frac{1}{\rho_k}\int_{4Q_k}|f(y)|\int_{|x-y|<\rho_k}\frac{w(x)}{|x-y|^{d-1}}dx\,dy \tag{6.2.5}$$

Descomponemos diádicamente la integral interior y la acotamos por

$$\begin{aligned}
\rho_k\sum_{j\geq 0}\frac{2^{-j}}{(2^{-j}r)^d}\int_{B(y,2^{-j}\rho_k)} w &\lesssim \rho_k\sum_j 2^{-j}\inf_{B(y,2^{-j}\rho_k)} w \\
&\lesssim \rho_k w(y)
\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

para todo $y \in 4Q_k$, donde hemos tenido en cuenta el hecho que $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$. Por lo tanto, a partir de la propiedad de solapamiento acotado de $\{4Q_k\}_k$ logramos ver que

$$\sum_k\int_{3Q_k} B_k^1\,w \lesssim \sum_k\int_{4Q_k}|f|w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d}|f|w \lesssim \|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)}.$$

Volviendo con B_k^2, teniendo en cuenta que está soportada en $2Q_k$, y que a partir de (3.1.1) existen constantes c_1 y c_2 dependiente sólo de ρ, tales que $c_1\rho_k \leq \rho(x) \leq c_2\rho_k$ para todo $x \in 2Q_k$, resulta

$$\begin{aligned}
B_k^2(x) &\lesssim \psi_k(x) \sup_{t>0} \int_{c_1\rho_k<|x-y|<c_2\rho_k} W_t(x,y)|f(y)|dy \\
&\quad + \psi_k(x) \sup_{t<\rho_k^2} \left| \int_{|x-y|<\rho(x)} W_t(x,y) f(y) dy \right| \\
&= B_k^{2,1} + B_k^{2,2}.
\end{aligned}$$

Para $x \in 2Q_k$, llamando $\tilde{c}_2 = c_2 + 2$ se sigue

$$B_k^{2,1} \lesssim \frac{1}{\rho_k^d} \int_{|y-x_k|<\tilde{c}_2\rho_k} |f(y)|dy$$

y entonces,

$$\int_{2Q_k} B_k^{2,1}(x)w(x)dx \lesssim \frac{w(2Q_k)}{\rho_k^d} \int_{\tilde{c}_2Q_k} |f(y)|dy \lesssim \int_{\tilde{c}_2Q_k} |f(y)|w(y)dy, \tag{6.2.7}$$

donde hemos usado que $w \in A_1^{\beta\rho,\mathrm{loc}}$ para $\beta = \tilde{c}_2$. Nuevamente, la suma sobre k resulta acotada por $\|f\|_{L^1(w)}$.

Finalmente, para $x \in 2Q_k$ tenemos

$$\begin{aligned}
B_k^{2,2}(x) &\lesssim \psi_k(x) \sup_{t<\rho(x)^2} \left| \int_{|x-y|<\rho(x)} W_t(x,y) f(y) dy \right| \\
&\quad + \psi_k(x) \sup_{c_1\rho_k^2<t<c_2\rho_k^2} \int_{|x-y|<\rho(x)} W_t(x,y)|f(y)|dy
\end{aligned}$$

Claramente la suma sobre k del primer término da $W_\rho^{*,0}f(x)$ y entonces $\|W_\rho^{*,0}f\|_{L^1(w)} = \|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)}$.

Por otra parte, el segundo término está acotado

$$\frac{1}{\rho_k^d} \int_{\tilde{c}_2Q_k} |f(y)|dy$$

para cada $x \in 2Q$ y la estimación se sigue como en (6.2.7) .

De este modo, la prueba de la afirmación está completa.

Ahora, teniendo en cuenta que cada w_k pertenece a A_1 y $f\psi_k \in h^1_{\rho_k}(w_k)$ podemos aplicar el Teorema 6.2.4 y obtener para cada k, una sucesión de $h^1_{\rho_k}(w_k)$-átomos $\{a_j^k\}_j$ y escalares $\{\lambda_j^k\}_j$ tales que

$$f\psi_k = \sum_j \lambda_j^k a_j^k,$$

y

$$\sum_j |\lambda_j^k| \leq C\|f\psi_k\|_{h^1_{\rho_k}(w_k)},$$

donde en la última desigualdad la constante es independiente de k.

Por lo tanto, por la afirmación probada

$$\sum_{j,k} |\lambda_j^k| \lesssim \sum_k \|f\psi_k\|_{h^1_{\rho_k}(w_k)} \lesssim \|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)}.$$

De modo que sólo queda por demostrar que cada a_j^k es un (ρ, w)-átomo. Fijamos k. Como cada a_j^k es un $h^1_{\rho_k}(w_k)$-átomo, ellos satisfacen

(a) sop $a_j^k \subset B_j^k = B(x_j^k, r_j^k)$,

(b) $\|a_j^k\|_\infty \leq w_k(B_j^k)^{-1}$,

(c) si $r_j^k \leq \frac{1}{2}\rho_k$ entonces $\int_{\mathbb{R}^d} a_j^k = 0$.

Más aún, por la Observación 6.2.5, como la función $f\psi_k$ está soportada en $B(x_k, 2\rho_k)$ se tiene que $B(x_j^k, r_j^k) \subset B(x_k, 2C_0\rho_k)$. En consecuencia,

$$|x_j^k - x_k| < 2C_0\rho_k \quad \text{y} \quad r_j^k \leq 2C_0\rho_k \tag{6.2.8}$$

De la condición (3.1.1) resulta que

$$\rho_k = \rho(x_k) \leq c_\rho(1 + 2C_0)^{N_0}\rho(x_j^k)$$

y luego

$$r_j^k \leq 2c_\rho C_0(1 + 2C_0)^{N_0}\rho(x_j^k) = \gamma\rho(x_j^k).$$

Así la condición (I) se satisface.

Ahora, como $B(x_k, 2C_0\rho_k) = 2C_0Q_k$ y teniendo en cuenta que w y w_k coinciden allí, tenemos que $w_k(B(x_j^k, r_j^k)) = w(B(x_j^k, r_j^k))$ y así (II) se sigue de (b).

Finalmente, supongamos que $r_j^k < \rho(x_j^k)/\gamma$. A partir de (6.2.8) y la desigualdad (3.1.1) deducimos

$$\rho(x_j^k) \leq c_\rho(1+2C_0)^{N_0/(N_0+1)}\rho(x_k) \leq \frac{1}{2}\gamma\rho_k.$$

Por lo tanto, $r_j^k < \frac{1}{2}\rho_k$ y por (c) arribamos a que $\int_{\mathbb{R}^d} a_j^k = 0$ como queríamos ver.

□

Observación 6.2.12. Observemos que cuando $\rho(x) = R$, el Teorema 6.2.11 da una extensión del resultado de Bui, establecido anteriormente como el Teorema 6.2.4.

En efecto, cuando $w \in A_1^R$ demostramos que $h_R^1(w)$ coincide con $h_{R,0}^1(w)$ y como $A_1^R \subset A_1^{R,\mathrm{loc}}$ obtenemos una descomposición atómica para el espacio $h_R^1(w)$ cuando $w \in A_1^R$, estos son los pesos para los cuales existe $\theta \geq 0$ tal que

$$\frac{w(B(x,r))}{|B(x,r)|} \lesssim \left(1+\frac{r}{R}\right)^\theta \inf_{B(x,r)} w.$$

No es difícil ver que los pesos de la forma $w(x) = 1+|x|^\beta$ satisfacen la condición anterior pero no están en la clase A_1.

Observación 6.2.13. A partir de la prueba del teorema anterior se deduce que

$$\|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \simeq \sum_{k\geq 1} \|f\psi_k\|_{h^1_{\rho_k}(w_k)}.$$

Una de las desigualdades está contenida en la afirmación. Para la otra, teniendo en cuenta la descomposición atómica que figura en la prueba, se tiene

$$\|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \lesssim \sum_{k,j} |\lambda_j^k| \leq \sum_k \sum_j |\lambda_j^k| \lesssim \sum_k \|f\psi_k\|_{h^1_{\rho_k}(w_k)}.$$

Para terminar esta sección damos una caracterización del espacio de Hardy $H^1_{\rho,0}(w)$ en términos de una transformada de Riesz ρ-local.

Definición 6.2.14. Sea η una función suave, radial, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \eta \leq 1$, sop $\eta \subset B(0,2)$ y $\eta \equiv 1$ en $B(0,1)$. Si R_j denota la transformada de Riesz clásica con núcleo

$k_j(z) = z_j/|z|^{d+1}$, se define el operador transformada de Riesz ρ-local como

$$R_j^\rho f(x) = v.p. \int k_j(x-y)\ \eta\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right) f(y)\ dy$$
$$= v.p. \int k_j^\rho(x-y) f(y)\ dy.$$

Es conocido que este tipo de operadores están acotados en $L^p(w)$, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ (ver [5]), incluso si consideramos un corte no suave, más precisamente $\eta = \chi_{B(0,1)}$.

En [8] se da una caracterización del espacio de Hardy local $h_1^R(w)$ para un peso $w \in A_1$ en términos de R_j^ρ con $\rho = R$. De hecho, esta es realizada para $R = 1$, pero se extiende fácilmente a cualquier $R > 0$ (ver Observación 6.2.7). Señalamos que las constantes en la equivalencia de normas son independientes de R y que sólo dependen del peso w sólo a tráves de la constante A_1. Para obtener la caracterización en términos de la transformda de Riesz ρ-local del espacio $H^1_{\rho,0}(w)$, para $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$, vamos a proceder en forma similar a la prueba del Teorema 6.2.11 con el fin de reducirla al caso $h_R^1(w)$.

Teorema 6.2.15. *Sea ρ una función radio crítico y $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$. Entonces $f \in H^1_{\rho,0}(w)$ si y sólo si f, $R_j^\rho f$, $j = 1, ..., d$ pertenecen a $L^1(w)$. Además*

$$\|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \simeq \|f\|_{L^1(w)} + \sum_{j=1}^{d} \|R_j^\rho f\|_{L^1(w)}.$$

Demostración. En primer lugar probaremos que si $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$, R_j^ρ es acotada sobre átomos, más precisamente

$$\|R_j^\rho a\|_{L^1(w)} \leq C$$

donde a es un (ρ, w)-átomo soportado en una bola $B = B(x_0, r)$, $r \leq \gamma\rho(x_0)$. Como antes, vamos a estimar $\|R_j^\rho a\|_{L^1(\lambda B, w)}$ y $\|R_j^\rho a\|_{L^1((\lambda B)^c, w)}$, para algún $\lambda > 1$ que será establecido más adelante. Para la primera norma, usando que $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ y la acotación de R_j^ρ en $L^p(w)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\|R_j^\rho a\|_{L^1(\lambda B, w)} &\leq \|R_j^\rho a\|_{L^p(w)} w(\lambda B)^{1/p'} \leq C\|a\|_{L^p(w)} w(\lambda B)^{1/p'}\\ &\leq C\|a\|_\infty w(\lambda B) \leq C\frac{w(\lambda B)}{w(B)}\\ &\leq C\frac{|\lambda B|}{w(B)} \inf_{\lambda B} w \leq C\lambda^d \frac{|B|}{w(B)} \inf_B w\\ &\leq C\lambda^d.\end{aligned}$$

donde usamos que $w \in A_1^{\lambda\gamma\rho,\text{loc}}$ de acuerdo a la Proposición 3.1.6.

Teniendo en cuenta que sop $\eta \subset B(0,2)$ y procediendo en forma similar a la prueba del Teorema 6.2.11, podemos elegir $\lambda = \gamma\tilde{\gamma}$ con $\tilde{\gamma} = \gamma + 2c_\rho(3+\gamma)^{N_0}$. Por la elección de λ, tenemos como antes que $R_j^\rho a(x) \equiv 0$ para $x \notin \lambda B$ a menos que $r \leq \gamma^{-1}\rho(x_0)$ y entonces $\int a = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} |R_j^\rho a(x)| &\leq \int |k_j^\rho(x-y) - k_j^\rho(x-x_0)||a(y)|\ dy \\ &\leq C\|a\|_\infty \left(\frac{r}{|x-x_0|}\right)^{d+1} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $|\nabla k_j^\rho(z)| \leq C/|z|^{d+1}$ y que $|x-y| \simeq |x-x_0|$ para $y \in B$ y $x \notin \lambda B$.

Por lo tanto, procediendo como en (6.2.3) obtenemos la estimación deseada.

Ahora, supongamos que f y $R_j^\rho f$ están en $L^1(w)$. Vamos a probar un resultado similar a (6.2.4), a saber, para cada j

$$\sum_{k\geq 1} \|R_j^{\rho_k}(f\psi_k)\|_{L^1(w_k)} \lesssim \|R_j^\rho f\|_{L^1(w)} \ + \ \|f\|_{L^1(w)} \tag{6.2.9}$$

con la misma notación de allí.

En efecto, hagamos

$$\begin{aligned} |R_j^{\rho_k}(f\psi_k)(x)| &\leq |\psi_k(x)R_j^{\rho_k}f(x)| \ + \ |R_j^{\rho_k}(f\psi_k)(x) - \psi_k(x)R_j^{\rho_k}f(x)| \\ &= I(x) \ + \ II(x). \end{aligned}$$

Para el segundo término, teniendo en cuenta las propiedades de ψ_k, obtenemos para $x \in Q_k$

$$II(x) \leq \int_{B(x,2\rho_k)} \frac{|\psi_k(y) - \psi_k(x)|}{|x-y|^d}|f(y)|\ dy \leq \frac{C}{\rho_k}\int_{B(x,2\rho_k)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-1}}dy,$$

y la estimación se sigue en forma similar a (6.2.5) y (6.2.6), pues la función $R_j^{\rho_k}(f\psi_k)$ está soportada en $4Q_k$.

Por otra parte,

$$I(x) \leq |\psi_k(x)(R_j^{\rho_k} - R_j^\rho)f(x)| \ + \ |\psi_k(x)R_j^\rho f(x)| = I_1(x) \ + \ I_2(x).$$

Teniendo en cuenta que para $x \in 2Q_k$, tenemos que $c_1\rho_k \le \rho(x) \le c_2\rho_k$, con $c_1 = (c_\rho 3^{N_0})^{-1}$ y $c_2 = c_\rho 3^{\frac{N_0}{N_0+1}}$, tenemos

$$I_1(x) \le C\psi_k(x) \int_{c_1\rho_k<|x-y|<2c_2\rho_k} |k_j(x-y)||f(y)|\, dy \le C\frac{\psi_k(x)}{\rho_k^d} \int_{cQ_k} |f(y)|\, dy.$$

donde $c = 2(c_2+1)$. Continuando como en (6.2.7) y teniendo en cuenta que sop $I_1 \subset 2Q_k$, podemos estimar la expresión por $\|\psi_k f\|_{L^1(w)}$.

Por lo tanto, integrando $I_2(x)w(x)$ y sumando sobre k obtenemos (6.2.9).

A continuación, siendo w_k un peso A_1, utilizamos la caracterización por transformadas de Riesz de $h_1^{\rho_k}(w_k)$ para obtener

$$\|f\psi_k\|_{h_1^{\rho_k}(w_k)} \lesssim \|f\psi_k\|_{L^1(w_k)} + \sum_{j=1}^{d} \|R_j^{\rho_k}(f\psi_k)\|_{L^1(w_k)}.$$

Finalmente, en vista de la Observación 6.2.13 y por (6.2.9) logramos ver

$$\|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} \lesssim \|f\|_{L^1(w)} + \sum_{j=1}^{d} \|R_j^\rho f\|_{H_{L^1(w)}}$$

lo cual concluye la prueba del teorema.

$\square$

6.3 Acotación en espacios de Hardy de integrales singulares de tipo ρ

En los Capítulos 4 y 5 consideramos algunos tipos de integrales singulares asociadas a ρ. En esta sección vamos a estudiar el comportamiento de los adjuntos de tales operadores actuando en el espacio de Hardy $H^1_\rho(w)$ para $w \in A_1^\rho$.

Definición 6.3.1. Dada una función radio crítico ρ diremos que el núcleo K pertenece a $\mathcal{S}'(\rho,\infty)$ si satisface las dos condiciones siguientes:

1) Para cada $N > 0$ existe C_N tal que

$$|K(x,y)| \le \frac{C_N}{|x-y|^d}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^{-N}, \tag{6.3.1}$$

para todo par $x, y \in \mathbb{R}$.

2) Existen constantes C y $\lambda > 0$ tales que

$$|K(x,y_0) - K(x,y)| \leq C\frac{|y-y_0|^\lambda}{|x-y_0|^{d+\lambda}}, \tag{6.3.2}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, siempre que $|y - y_0| < \frac{|x-y_0|}{2}$.

Observación 6.3.2. Es preciso recordar que la condición (6.3.1) puede ser planteada equivalentemente en términos de $\rho(x)$ de acuerdo a lo establecido en la Observación 4.2.2 como consecuencia de la desigualdad (4.2.3).

Antes de establecer los teoremas principales de esta sección, presentamos un resultado que nos será de utilidad y cuya prueba puede encontrarse en [5] (ver Lema 5 allí). El mismo nos proporciona una desigualdad de tipo anti Hölder para las clases A_p^ρ.

Lema 6.3.3. *Si $w \in A_p^\rho$, $1 \leq p < \infty$, entonces existen constantes positivas δ, η y C tales que*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^\eta,$$

para toda bola $B = B(x,r)$.

Teorema 6.3.4. *Sea T un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $p \geq p_0$, para algún $p_0 \geq 1$ tal que su núcleo $K \in \mathcal{S}'(\rho,\infty)$ y $w \in A_1^\rho$. Entonces T aplica $H_\rho^1(w)$ en $L^1(w)$ continuamente.*

Demostración. Es suficiente verificar que para cualquier (ρ,w)-átomo a, $\|Ta\|_{L^1(w)} \leq C$. Sea $B = B(x_0,r)$ tal que sop $a \subset B$ con $r \leq \gamma\rho(x_0)$. Entonces, si denotamos $\tilde{B} = 2B$

$$\int_{\tilde{B}} |Ta|w \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|Ta|^p\right)^{1/p}\left(\int_{\tilde{B}} w^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Teniendo en cuenta el Lema 6.3.3, si escogemos $p = \text{máx}\{1+1/\delta, p_0\}$, obtenemos que w satisface la desigualdad anti Hölder con exponente p' y entonces

$$\int_{\tilde{B}} |Ta|w \leq C\left(\int_{\tilde{B}}|a|^p\right)^{1/p}|\tilde{B}|^{-1/p}w(\tilde{B}) \leq C\|a\|_\infty w(\tilde{B}) \leq C.$$

donde en la última desigualdad usamos que $w \in A_1^{2\rho,\text{loc}}$.

Por otra parte, observemos que si $y \in B$ y $x \notin \tilde{B}$ tenemos que $|x - x_0| \simeq |x - y|$.

Llamando $B_0 = B(x_0, \gamma^{-1}\rho(x_0))$ se verifica que $\tilde{B}^c = (\tilde{B}^c \cap B_0^c) \cup (B_0 \setminus \tilde{B})$. Entonces, usando que $\rho(y) \simeq \rho(x_0)$ para $y \in B$ y la condición (6.3.1) resulta

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{B}^c \cap B_0^c} |Ta(x)| w(x)\, dx &\leq C \int_{B_0^c} w(x) \int_B \frac{\|a\|_\infty}{|x - x_0|^d} \left(\frac{|x - x_0|}{\rho(x_0)} \right)^{-N} dy\, dx \\
&\leq C \|a\|_\infty \frac{r^d}{\rho(x_0)^{-N}} \sum_{j \geq 1} \int_{2^{j+1}B_0 \setminus 2^j B_0} \frac{w(x)}{|x - x_0|^{N+d}} dx \\
&\leq C \frac{r^d}{w(B)} \sum_{j \geq 1} 2^{-jN} \frac{w(2^{j+1}B_0)}{|2^j B_0|} \\
&\leq C \frac{r^d}{w(B)} \inf_B w \sum_{j \geq 1} 2^{-j(N-\theta)} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

donde θ es tal que $w \in A_1^{\rho,\theta}$ y N es tomado lo suficientemente grande.

A continuación, observemos que $B_0 \setminus \tilde{B} \neq \emptyset$ si y sólo si $2r < \gamma^{-1}\rho(x_0)$ y entonces podemos suponer que $\int a = 0$. Por lo tanto, para $x \in B_0 \setminus \tilde{B}$, usando la condición (6.3.2) se tiene

$$|Ta(x)| \leq \int_B |K(x, y) - K(x, x_0)||a(y)|\, dy \leq C \|a\|_\infty \left(\frac{r}{|x - x_0|} \right)^{d+\lambda}.$$

Por lo tanto, para j_0 tal que $2^{j_0} r \simeq \gamma^{-1}\rho(x_0)$, se sigue

$$\begin{aligned}
\int_{B_0 \setminus \tilde{B}} |Ta(x)| w(x)\, dx &\leq C \|a\|_\infty r^{d+\lambda} \sum_{j=1}^{j_0} \int_{|x - x_0| \simeq 2^j r} \frac{w(x)}{|x - x_0|^{d+\lambda}} dx \\
&\leq C \frac{r^d}{w(B)} \sum_{j=1}^{j_0} 2^{-j\lambda} \frac{w(2^j B)}{|2^j B|} \\
&\leq C \frac{r^d}{w(B)} \inf_B w \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

ya que para cualquier $1 \leq j \leq j_0$, $2^j r \leq \gamma^{-1}\rho(x_0)$. □

Operadores con núcleo en la clase $\mathcal{S}'(\rho, \infty)$ aparecen en el contexto Schrödinger cuando el potencial V satisface una desigualdad anti Hölder de orden $q \geq d$. Sin embargo, cuando $d/2 < q < d$, incluso las transformadas de Riesz tienen núcleos que no están en $\mathcal{S}'(\rho, \infty)$.

Con el fin de considerar esos casos se introduce la clase $\mathcal{S}'(\rho, s)$.

Definición 6.3.5. Dada una función radio crítico ρ y $1 < s < \infty$ diremos que el núcleo K pertenece a $\mathcal{S}'(\rho, s)$ si el mismo satisface las dos condiciones siguientes:

1') Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\left(\int_{R<|x-x_0|\leq 2R} |K(x,y)|^s dx \right)^{1/s} \leq C_N R^{-d/s'} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N}, \tag{6.3.3}$$

para todo $y \in B = B(x_0, r)$ y $R > 2r$.

2') Existe una constante C tal que

$$\sum_{k\geq 1} (2^k r)^{d/s'} \left(\int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B} |K(x,y) - K(x,x_0)|^s dx \right)^{1/s} \leq C, \tag{6.3.4}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ y todo $y \in B$.

Teorema 6.3.6. *Sea T un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$, para todo $1 < p < s$, para algún $s > 1$ tal que su núcleo $K \in \mathcal{S}'(\rho, s)$. Entonces T es acotado de $H^1_\rho(w)$ en $L^1(w)$ para todo w tal que $w^{s'} \in A^\rho_1$.*

Demostración. Sea a un (ρ, w)-átomo y $B = B(x_0, r)$ su soporte. Procedemos como en el teorema anterior dividiendo el dominio de integración. Comenzamos integrando sobre $\tilde{B} = 2B$.

$$\int_{\tilde{B}} |Ta| w \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |Ta|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\tilde{B}} w^{p'} \right)^{1/p'}.$$

Escogemos ahora $p < s$, pero lo suficientemente cerca, de modo que $w^{s'}$ satisfaga la desigualdad anti Hölder con exponente p'/s' y siendo $r \leq \gamma\rho(x_0)$ dicha cantidad está acotada por un múltiplo de

$$\frac{|B|}{w(B)} \left(\frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} w^{s'} \right)^{1/s'}.$$

Usando la condición A^ρ_1 para el peso $w^{s'}$ se sigue la estimación.

A continuación, como antes, separamos $\tilde{B}^c = (\tilde{B}^c \cap B_0^c) \cup (B_0 \setminus \tilde{B})$. Observemos que $B_0 \setminus \tilde{B} \neq \emptyset$ si y sólo si $2r < \gamma^{-1}\rho(x_0)$ y entonces, al igual que antes, podemos suponer $\int a = 0$. Teniendo en cuenta esto, la condición (6.3.4) y tomando j_0 de modo que $2^{j_0} r \simeq \gamma^{-1}\rho(x_0)$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_0\setminus\tilde{B}} |Ta(x)|w(x)\,dx \\
&\qquad \leq C\|a\|_\infty \sum_{j\geq 0}^{j_0} [w^{s'}(2^{j+1}B)]^{1/s'} \int_B \left(\int_{2^{j+1}B\setminus 2^jB} |K(x,y)-K(x,x_0)|^s dx\right)^{1/s} dy \\
&\qquad \leq C\frac{|B|}{w(B)} \inf_B w \\
&\qquad \leq C,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $2^j r \leq \gamma^{-1}\rho(x_0)$ para $j \leq j_0$.

Para acotar el primer término de la unión, descomponemos la integral diádicamente y logramos ver que

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{B}^c\cap B_0^c} |Ta(x)|w(x)\,dx \\
&\qquad \leq C\|a\|_\infty \int_B \left(\int_{B_0^c} |K(x,y)|w(x)\,dx\right) dy \\
&\qquad \leq C\|a\|_\infty \sum_{j\geq 0} [w^{s'}(2^{j+1}B_0)]^{1/s'} \int_B \left(\int_{2^{j+1}B_0\setminus 2^jB_0} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} dy.
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Ahora, si $2r < \gamma^{-1}\rho(x_0)$ podemos aplicar la condición (6.3.3) con $R = 2^j\gamma^{-1}\rho(x_0)$. Luego, como $w^{s'} \in A_1^{\rho,\theta}$, para algún $\theta > 0$, tomando $N > \theta/s'$, resulta

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{B}^c\cap B_0^c} |Ta(x)|w(x)\,dx &\leq C\|a\|_\infty |B| \sum_{j\geq 1} 2^{-j(N-\frac{\theta}{s'})} \inf_{2^jB_0} w \\
&\leq C\frac{|B|}{w(B)} \inf_{B_0} w \\
&\leq C\frac{|B|}{w(B)} \inf_B w \\
&\leq C.
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Por otra parte, en caso de ser $2r \geq \gamma^{-1}\rho(x_0)$, se sigue que $r \simeq \rho(x_0)$ y $B_0 \setminus \tilde{B} = \emptyset$. Entonces, procedemos como en (6.3.5) y (6.3.6) pero con $R = 2^j r$ y tomando $N > \theta/s'$ obtenemos.

$$\int_{\tilde{B}^c\cap B_0^c} |Ta(x)|w(x)\,dx \leq C\|a\|_\infty \int_B \left(\int_{\tilde{B}^c} |K(x,y)|w(x)\,dx\right) dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|a\|_\infty \sum_{j\geq 0} \int_B \left(\int_{2^{j+1}\tilde{B}\setminus 2^j\tilde{B}} |K(x,y)|^s dx \right)^{1/s} dy [w^{s'}(2^j\tilde{B})]^{1/s'} \\
&\leq C\|a\|_\infty |B| \sum_{j\geq 0} \left(1 + \frac{2^{j+1}r}{\rho(x_0)}\right)^{-(N-\frac{\theta}{s'})} \inf_{2^j\tilde{B}} w \\
&\leq C\frac{|B|}{w(B)} \inf_{\tilde{B}} w \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

□

6.4 El caso Schrödinger

En esta sección vamos a tratar con operadores derivados del contexto del operador de Schrödinger $\mathcal{L} = -\Delta + V$, con V un potencial no negativo y que satisface una desigualdad de tipo anti Hölder de orden q, $q > d/2$ y $d \geq 3$. De modo que, de aquí en adelante, ρ es la función definida por (1.1.4) que, como hemos dicho, satisface la desigualdad (3.1.1).

Como fue probado en la Sección 2, cuando $w \in A_1^\rho$ el espacio de Hardy $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ coincide con $H^1_\rho(w) = H^1_{\rho,0}(w)$ por lo que podemos aplicar todos los resultados obtenidos en las secciones anteriores. Por lo tanto, se tiene una descomposición atómica de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$, una caracterización por una transformada de Riesz ρ-local , así como la acotación de operadores "ρ-singulares" de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$.

Ahora vamos a aplicar los resultados de la sección anterior a algunos operadores derivados de $\mathcal{L}$ que, como veremos, satisfacen los supuestos anteriores.

Teorema 6.4.1. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d$. Entonces los operadores $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$, $(-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$ y $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ son acotados de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$ para $w \in A_1^\rho$. Además, si $V \in RH_q$ con $q > d/2$ lo mismo vale para el operador $(-\Delta + V)^{i\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración. De acuerdo a lo establecido en los Teoremas 1.3.1 y 1.3.2, estos son operadores de tipo Calderon Zygmund, así sus núcleos satisfacen la condición (6.3.2) y son acotados en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < \infty$. Además, sus núcleos verifican (6.3.1) (ver prueba de los Teoremas 4.3.1 y 4.3.3) . Observar que aunque los núcleos pueden no ser simétricos, $\rho(y)$ en el lado derecho de (6.3.1) puede ser reemplazado por $\rho(x)$ en vista de la desigualdad (4.2.3). $\square$

Teorema 6.4.2. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d/2$ y sean $T_1 = V^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$, $T_2 = V(-\Delta+V)^{-1}$ y $T_3 = \nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$. Entonces los operadores T_j, $j = 1,2,3$ son acotados de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$ para pesos w tales que $w^{s'_j} \in A^\rho_1$ donde $s_1 = 2q$, $s_2 = q$ y s_3 satisface $1/s_3 = 1/q - 1/d$ cuando $q < d$.*

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1.3.3, los operadores T_1, T_2 y T_3 son acotados en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $p \geq s'_j$, respectivamente.

El hecho que los núcleos de T_j, $j = 1,2,3$, satisfacen la condición (6.3.3) es consecuencia de que los núcleos $\tilde{K}_j$, de los operadores adjuntos $\tilde{T}_j$, satisfacen la condición (4.2.4), lo cual fue establecido en la prueba del Teorema 4.3.4. En efecto, dados $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, $y \in B(x_0, r)$ y $R > 2r$, se sigue que para todo $N > 0$, existe una constante C_N tal que

$$\begin{aligned}\left(\int_{R<|x-x_0|\leq 2R} |K_j(x,y)|^{s_j}\,dx\right)^{1/s_j} &= \left(\int_{R<|x-x_0|\leq 2R} |\tilde{K}_j(y,x)|^{s_j}\,dx\right)^{1/s_j}\\ &\leq C_N R^{-d/s'}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N}.\end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Análogamente, la prueba de que los núcleos de los operadores T_j, $j = 1,2,3$, satisfacen la condición (6.3.4) se sigue a partir del hecho que los núcleos de los operadores adjuntos satisfacen la condición (4.2.5), lo cual está contenido en la prueba del Teorema 1 en [26]. $\square$

En lo que sigue vamos a demostrar que al igual que en el caso sin pesos, el espacio $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ con $w \in A^\rho_1$, puede ser caracterizado en términos de la transformada de Riesz-Schrödinger, a saber, por las componentes $\mathcal{R}_j$ del operador vectorial $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$.

Teorema 6.4.3. *Supongamos que $\mathcal{L} = -\Delta+V$ con $V \in RH_q$ y sea w un peso. Entonces, $f \in H^1_{\mathcal{L}}(w)$ si y sólo si f y $\mathcal{R}_j f \in L^1(w)$, y se cumple además alguna de las siguientes condiciones* *a) Si* $q \geq d$ *y* $w \in A_1^\rho$.

b) Si $d/2 < q < d$ *y* $w^{s'} \in A_1^\rho$ *con* $1/s = 1/q - 1/d$.

Más aún, en cualquiera de los casos,

$$\|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)} \simeq \|f\|_{L^1(w)} + \sum_{j=1}^{d} \|\mathcal{R}_j f\|_{L^1(w)}.$$

Demostración. A partir de los teoremas anteriores sólo necesitamos probar que si f y $\mathcal{R}_j f$ están en $L^1(w)$ entonces $f \in H^1_{\mathcal{L}}(w)$.

Nuestro objetivo es utilizar la caracterización previa dada en el Teorema 6.2.15. Siguiendo la prueba del Teorema 3 en [5] escribimos

$$\begin{aligned} R_j^\rho f(x) &= (R_j^\rho f(x) - R_j(f\chi_{E_x})(x)) \; + \; (R_j - \mathcal{R}_j)(f\chi_{E_x})(x) \; - \; \mathcal{R}_j(f\chi_{E_x^c})(x) \\ &+ \; \mathcal{R}_j f(x) = A_j^1 f(x) \; + \; A_j^2 f(x) \; + \; A_j^3 f(x) \; + \; \mathcal{R}_j f(x), \end{aligned}$$

donde R_j denota la transformada de Riezs clásica y $E_x = \{y \in \mathbb{R}^d : \; |x-y| < \rho(y)\}$.

Siguiendo el argumento en [5], página 13, las normas $L^1(w)$ de A_j^2 y A_j^3 están acotadas por $\|f\|_{L^1(w)}$ para $w \in A_1^\rho$ si $q \geq d$, o $w^{s'} \in A_1^\rho$ si $d/2 < q < d$.

Ahora, para el primer término, observamos que $B(x, c^{-1}\rho(x)) \subset E_x \subset B(x, c\rho(x))$, con $c = c_\rho 2^{k_0}$. Además, siendo $\eta \equiv 1$ en $B(0,1)$ y $\eta \equiv 0$ en $B(0,2)^c$ se obtiene para su valor absoluto,

$$\begin{aligned} |A_j^1 f(x)| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left|\eta\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right) - \chi_{E_x}(y)\right| \frac{|f(y)|}{|x-y|^d} \, dy \\ &\lesssim \frac{1}{\rho(x)^d} \int_{B(x,(c+2)\rho(x))} |f(y)| \, dy. \end{aligned}$$

Finalmente como para $x \in Q_k$, $\rho(x) \simeq \rho(x_k)$, la norma $\|A_j^1 f\|_{L^1(w)}$ está acotada por $\|f\|_{L^1(w)}$ procediendo como en (6.2.7) para cualquier $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Por lo tanto, usando el Teorema 6.1.7 y el Teorema 6.2.15 obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)} \lesssim \|f\|_{H^1_{\rho,0}(w)} &\lesssim \|f\|_{L^1(w)} + \sum_{j=1}^{d} \|R_j^\rho f\|_{L^1(w)} \\ &\lesssim \|f\|_{L^1(w)} + \sum_{j=1}^{d} \|\mathcal{R}_j f\|_{L^1(w)}, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. $\square$

Para finalizar el capítulo, vamos a utilizar un resultado de extrapolación que fue demostrado en el Capítulo 3, y permite extrapolar una desigualdad en norma $L^p(w)$ a partir de una desigualdad en norma $L^1(w)$ para pesos w que serán detallados en breve. Esto está motivado por el siguiente hecho, cuando decimos que un operador S es acotado de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$ para un cierto peso w, en definitiva, tenemos una desigualdad en norma $L^1(w)$ entre los operadores S y T^*, más precisamente, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|w(x)dx = \|Sf\|_{L^1(w)} \leq C\|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(w)} = C\int_{\mathbb{R}^d} |T^*f(x)|w(x)dx,$$

donde T^* es el operador maximal asociado al semigrupo generado por $\mathcal{L}$.

Si consideramos dos operadores S y T, a partir del Teorema 3.1.29 aplicado a la familia $\mathscr{F} = \{(|Sf|, |Tf|) : \ f \in \mathscr{D}(T, S)\}$[1], obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.4.4. *Sea $1 < s \leq \infty$, supongamos que para todos los pesos w tales que $w^{s'} \in A^\rho_1$ se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|w(x)\ dx \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|w(x)\ dx.$$

Entonces, para todo $1 < p < s$ y todo w tal que $w^{(s/p)'} = w^{\frac{s}{s-p}} \in A^\rho_{\tau_p}$, con $\tau_p = s\frac{p-1}{s-p} + 1 = p\left(\frac{s-1}{s-p}\right)$, se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)\ dx \leq C\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\ dx.$$

Observación 6.4.5. Dados $1 < p < s$, si un peso w satisface que $w^{(s/p)'} \in A^\rho_{\tau_p}$ entonces, $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^\rho_{p'/s'}$ y recíprocamente.

Teniendo en cuenta el teorema anterior y que el operador maximal del semigrupo T^* es acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ y $w \in A^\rho_p$ (ver Teorema 2 en [5]), es posible obtener resultados de acotación en $L^p(w)$ para operadores que sean acotados de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$.

Teorema 6.4.6. *Sea $1 < s \leq \infty$. Supongamos que el operador S es acotado de $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$ para todos los pesos w tales que $w^{s'} \in A^\rho_1$. Entonces, S es acotado de $L^p(w)$ en sí mismo para todo $1 < p < s$ y todo w tal que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^\rho_{p'/s'}$.*

[1] Recordamos que $\mathscr{D}(T, S)$ denota el conjunto de todas las funciones f tales que Tf y Sf son finitas en casi todo punto

Demostración. La prueba se sigue directamente a partir del teorema anterior y el hecho que para $1 < p < \infty$, si un peso w es tal que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/s'}$ entonces $w \in A^{\rho}_{p}$.

$\square$

A partir del teorema anterior y los resultados principales de la sección previa es posible obtener resultados de acotación en $L^p(w)$ para operadores que satisfacen ciertas condiciones de acotación en $L^p(\mathbb{R}^d)$ y cuyos núcleos pertenecen a $\mathcal{S}'(\rho,\infty)$ ó $\mathcal{S}'(\rho,s)$. Más precisamente, a partir de los Teoremas 6.3.4 y 6.3.6, y el Teorema de extrapolación 6.4.6 obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 6.4.7. *Sea T un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $p \geq p_0$, para algún $p_0 \geq 1$, tal que su núcleo $K \in \mathcal{S}'(\rho,\infty)$. Entonces, T es acotado de $L^p(w)$ en sí mismo para todo $1 < p < \infty$ y todo $w \in A^{\rho}_{p}$.*

Teorema 6.4.8. *Sea T un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$, para todo $1 < p < s$, para algún $s > 1$, tal que su núcleo $K \in \mathcal{S}'(\rho,s)$. Entonces, T es acotado de $L^p(w)$ en sí mismo para todo $1 < p < s$ y todo peso w tal que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/s'}$.*

Como consecuencia de los teoremas previos obtenemos.

Teorema 6.4.9. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d$. Entonces los operadores $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$, $(-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$ y $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ aplican $L^p(w)$ en sí mismo para todo $1 < p < \infty$ y todo $w \in A^{\rho}_{p}$. Además, si $V \in RH_q$ con $q > d/2$ lo mismo vale para el operador $(-\Delta+V)^{i\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{R}$.*

Teorema 6.4.10. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d/2$ y sean $T_1 = V^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$, $T_2 = V(-\Delta+V)^{-1}$ y $T_3 = \nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$. Entonces los operadores T_i, $i = 1,2,3$ aplican $L^p(w)$ en sí mismo para todo $1 < p < s_i$ y todos los pesos w tales que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/s'_i}$ donde $s_1 = 2q$, $s_2 = q$ y s_3 satisface $1/s_3 = 1/q - 1/d$ cuando $q < d$.*

Conclusiones

En esta tesis hemos podido definir y caracterizar espacios de tipo Hardy y BMO con pesos, $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ y $BMO_{\mathcal{L}}(w)$, en el contexto del operador de Schrödinger $\mathcal{L}$. Las clases de pesos que hemos considerado son clases similares a las introducidas por Muckenhoupt en el contexto clásico, pero con cierta dependencia de la función radio crítico ρ asociada al potencial V.

De forma general, hemos sido capaces de desarrollar una teoría que abarca espacios y operadores relacionados a lo que denominamos función radio crítico ρ. Teniendo en cuenta que asociado al potencial V, el cual determina a un operador de tipo $\mathcal{L}$, se tiene una tal ρ, todo el análisis llevado adelante para una función radio crítico ρ es aplicable al contexto de $\mathcal{L}$.

Para realizar esta tarea, se ha desarrollado con éxito una teoría de extrapolación en un marco bastante general, de modo que pudo ser aplicada al contexto Schrödinger y extiende a este contexto algunos de los resultados sobre extrapolación que han sido probados en la última década.

Además, pudimos probar la acotación $L^\infty(w) - BMO_{\mathcal{L}}(w)$ de algunas integrales singulares y fraccionarias, como así también, que los adjuntos de tales operadores singulares aplican $H^1_{\mathcal{L}}(w)$ en $L^1(w)$. Como una consecuencia de los resultados de extrapolación ya mencionados, obtuvimos la acotación en $L^p(w)$ de tales operadores. En particular, estos operadores integrales incluyen a operadores clásicos del análisis armónico adaptados al contexto de $\mathcal{L}$, como ser las transformadas de Riesz $\nabla\mathcal{L}^{-1/2}$, $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$, la integral fraccionaria $\mathcal{L}^{-\alpha/2}$, entre otros.

Por otra parte, también hemos podido establecer desigualdades con pesos de la forma

$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim \|Sf\|_{L^p(w)}$, donde, por lo general, T es un operador con cierto grado de singularidad o su conmutador y S es alguna función maximal, ambos dependientes de la función radio crítico ρ asociada al potencial V.

Bibliografía

[1] B. Bongioanni, A. Cabral, and E. Harboure. *Extrapolation for Classes of Weights Related to a Family of Operators and Applications.* Potential Anal., 38(4): 1207–1232, 2013.

[2] B. Bongioanni, A. Cabral, and E. Harboure. *Lerner's inequality associated to a critical radius function and applications.* J. Math. Anal. Appl., 407(1): 35–55, 2013.

[3] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. *Weigthed inequalities for negative powers of Schrödinger operators.* J. Math. Anal. Appl., 348(1): 12–27, 2008.

[4] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. *Riesz transforms related to Schrödinger operators acting on BMO type spaces.* J. Math. Anal. Appl., 357(1): 115–131, 2009.

[5] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. *Classes of weights related to Schrödinger operators.* J. Math. Anal. Appl., 373(2): 563–579, 2011.

[6] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. *Commutators of Riesz transforms related to Schrödinger operators.* J. Fourier Anal. Appl., 17(1): 115–134, 2011.

[7] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. *Weighted inequalities for commutators of Schrödinger-Riesz transforms.* J. Math. Anal. Appl., 392(1): 6–22, 2012.

[8] H.Q. Bui *Weighted Hardy spaces.* Math. Nachr., 103:45–62, 1981.

[9] M. Carro and M. Lorente. *Rubio de Francia's extrapolation theorem for B_p weights.* Proc. Amer. Math. Soc. , 138(2): 629–640, 2010.

[10] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza,J. Martell, and C. Pérez. *The boundedness of classical operators on variable L^p spaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. , 31(1): 239–264, 2006.

[11] D. Cruz-Uribe, J. Martell, and C. Pérez. *Extrapolation from A_∞ weights and applications.* J. Funct. Anal., 213(2): 412–439, 2004.

[12] D. Cruz-Uribe, J. Martell, and C. Pérez. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, volume 215 of *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[13] D. Cruz-Uribe and C. Pérez. *Two weight extrapolation via the maximal operator.* J. Funct. Anal., 174(1): 1–17, 2000.

[14] W. Czaja and J. Zienkiewicz. *Atomic characterization of the Hardy space $H^1_L(\mathbb{R})$ of one-dimensional Schrödinger operators with nonnegative potentials.* Proc. Amer. Math. Soc., 136(1): 89–94, 2008.

[15] J.F. Dong and H.P. Liu. *The* BMO_L *space and Riesz transforms associated with Schrödinger operators.* Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 26(4): 659–668, 2010.

[16] J. Duoandikoetxea. *Some remarks about extrapolation of weights.* Margarita mathematica, 255–263, Univ. La Rioja, Logroño, 2001.

[17] J. Duoandikoetxea. *Extrapolation of weights revisited: new proofs and sharp bounds.* J. Funct. Anal., 260(6): 1886–1901, 2011.

[18] J. Dziubański and J. Zienkiewicz. *Hardy spaces H^1 associated to Schrödinger operators with potential satisfying reverse Hölder inequality.* Revista Matemática Iberoamericana, 15(2): 279–296, 1999.

[19] J. Dziubański, and G. Garrigós, and T. Martínez, and J.L. Torrea, and J. Zienkiewicz. *BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality.* Math. Z., 249(2): 329–356, 2005.

[20] J. Dziubański and M. Preisner. *Riesz transform characterization of Hardy spaces associated with Schrödinger operators with compactly supported potentials* Ark. Mat., 48(2): 301–310, 2010.

[21] J. Dziubański and J. Zienkiewicz. *H^p spaces for Schrödinger operators.* Fourier Analysis and Related Ropics (Bedlewo), 56: 45–53, 2002.

[22] J. Dziubański and J. Zienkiewicz. *H^p spaces associated with Schrödinger operators with potentials from reverse Hölder classes.* Colloq. Math., 98(1): 5–38, 2003.

[23] L. Grafakos and J.M. Martell. *Extrapolation of weighted norm inequalities for multivariable operators and applications.* J. Geom. Anal. , 14(1): 19–46, 2004.

[24] M. de Guzmán. *Real Variable Methods in Fourier Analysis*, North-Holland Math. Studies 46. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[25] J. García-Cuerva. *An extrapolation theorem in the theory of A_p weights.* Proc. Amer. Math. Soc., 87(3):422–426, 1983.

[26] Z. Guo, P. Li, and L. Peng. *L^p boundedness of commutators of Riesz transforms associated to Schrödinger operator.* J. Math. Anal. Appl., 341(1):421–432, 2008.

[27] E. Harboure, R. Macías, and C. Segovia. *Extrapolation results for classes of weights.* Amer. J. Math., 110(3):383–397, 1988.

[28] G. Hu, X. Shi, and Q. Zhang. *Weighted norm inequalities for the maximal singular integral operators on spaces of homogeneous type.* J. Math. Anal. Appl., 336(1):1–17, 2007.

[29] K. Kurata. *An estimate on the heat kernel of magnetic Schrödinger operators and uniformly elliptic operators with non-negative potentials.* J. London Math. Soc. (2), 62(3): 885–903, 2000.

[30] A. Lerner. *Weighted norm inequalities for the local sharp maximal function.* J. Fourier Anal. Appl., 10(5):465–474, 2004.

[31] H. Liu, L. Tang and H. Zhu. *Weighted Hardy spaces and BMO spaces associated with Schrödinger operators.* Math. Nachr., 285(17-18): 2173–2207, 2012.

[32] M. Lorente and M.S. Riveros. *Two extrapolation theorems for related weights and applications.* Math. Inequal. Appl., 10(3): 643–660, 2007.

[33] B. Muckenhoupt and R. Wheeden. *Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform.* Studia Math., 54(3):221–237, 1975/76.

[34] G. Pradolini and O. Salinas. *Commutators of singular integrals on spaces of homogeneous type.* Czechoslovak Math. J., 57(132)(1):75–93, 2007.

[35] J.L. Rubio de Francia. *Factorization and extrapolation of weights.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 7(2):393–395, 1982.

[36] J.L. Rubio de Francia. *A new technique in the theory of A_p weights.* In Topics in modern harmonic analysis, Vol. I, II (Turin/Milan, 1982), pages 571–579. Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Rome, 1983.

[37] J.L. Rubio de Francia. *Factorization theory and A_p weights.* Amer. J. Math., 106(3):533–547, 1984.

[38] Z. Shen. *On the Neumann problem for Schrödinger operators in Lipschitz domains potentials.* Indiana Univ. Math. J., 43(1): 143–176, 1994.

[39] Z. Shen. *L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 45(2): 513–546, 1995.

[40] B. Simon. *Schrödinger semigroups.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 7(3): 447–526, 1982.

[41] L. Song and L. Yan. *Riesz transforms associated to Schrödinger operators on weighted Hardy spaces*, J. Funct. Anal., 259(6): 1466–1490, 2010.

[42] L. Tang. *Weighted local Hardy spaces and their applications.* Illinois J. Math., 56(2): 453–495, 2013.

[43] C. Tang and C. Bi. *The boundedness of commutator of Riesz transform associated with Schrödinger operators on a Hardy space*, J. Funct. Spaces Appl., 7(3): 241–250, 2009.

[44] D. Yang, and D. Yang, and Y. Zhou *Localized BMO and BLO spaces on RD-spaces and applications to Schrödinger operators*, Commun. Pure Appl. Anal., 9(3): 779–812, 2010.

[45] D. Yang and Y. Zhou. *Localized Hardy spaces H^1 related to admissible functions on RD-spaces and applications to Schrödinger operators*, Trans. Amer. Math. Soc., 363(3): 1197–1239, 2011.