Iniciación al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre dos variables en séptimo grado de la educación primaria

Tesis de Maestría en Didácticas Específicas

Autora: Fabiana Kiener

Directora: Sara Beatriz Scaglia

Codirectora: Liliana Nitti

Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL)

Santa Fe, 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Humanidades y Ciencias

Iniciación al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre dos variables en séptimo grado de la educación primaria

Autora: Fabiana Kiener

Directora: Sara Beatriz Scaglia

Codirectora: Liliana Nitti

Tesis de Maestría elaborada para obtener el título de Magíster en Didácticas Específicas de la Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL)

Santa Fe, 2019

DEDICATORIAS

A mi esposo Roque y mis hijas, Milu y Cande.

A mis padres, mis hermanas y mi hermano.

A todos ellos, por su amor y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

- A Sara Scaglia y Liliana Nitti, por su acompañamiento permanente (y paciente), su lecturas atentas y críticas y por darme la posibilidad de aprender muchísimo a partir de sus miradas especializadas sobre cada texto que escribía. A Sara, porque desde que fue mi docente en la carrera de grado no dejó de estimularme para crecer como alumna y luego, como docente y me ayudó a descubrir que la investigación es una tarea que me fascina.
- A las docentes de los dos séptimos grados, Sara y Ángeles, por su entusiasmo con la propuesta y buena predisposición para trabajar en conjunto e implementar las tareas en el aula. A Sara, porque con su gestión de la clase me posibilitó reflexionar sobre lo observado en el aula, establecer relaciones con los aportes teóricos considerados y aprender del trabajo que compartimos.
- A los estudiantes del séptimo grado, porque aceptaron sin problemas nuestra presencia en el aula y trabajaron activamente desde el inicio de la propuesta.
- A la escuela primaria seleccionada, por abrir sus puertas de manera generosa y ofrecer la oportunidad de que trabajemos en conjunto para llevar a cabo la propuesta de enseñanza.
- A Patricia Sadovsky, por compartir generosamente su trabajo de investigación.
- A Roque, Milu y Cande, por quererme tanto y apoyarme con paciencia en este proceso, sabiendo el tiempo que demanda y los cambios de ánimo que provoca.
- A toda mi familia (biológica y política), porque gracias a su enorme paciencia y colaboración pude realizar la carrera de posgrado y culminar el trabajo de tesis.
- A Merry, amiga y pediatra de referencia, porque me ayudó a profundizar en detalles sobre la utilización de ciertos gráficos en medicina.
- A todos mis alumnos/as y exalumnos/as, porque con sus inquietudes me invitan a cuestionar mi práctica docente y a movilizarme para mejorarla.
- A los/las docentes del Profesorado de Matemática porque me formaron para continuar estudiando a lo largo de toda la vida.
- A mis amigas, porque supieron entender y alentarme a tiempo para continuar con el trabajo asumido.
- A las instituciones en las que trabajo y mis colegas, porque cada uno a su manera, me ayuda a reflexionar sobre mi práctica docente para poder enriquecerla y me apoyaron en mi decisión de culminar el estudio de posgrado.

RESUMEN

Esta tesis surge a partir de la preocupación por buscar alternativas para introducir el trabajo algebraico en la escolaridad obligatoria que prevengan los errores frecuentes y favorezcan los aprendizajes.

Coincidimos con Sadovsky (2003) en el interés didáctico por provocar "rupturas" en el trabajo aritmético que inviten a docentes y estudiantes a revisar algunas prácticas matemáticas que utilizaban hasta el momento y estimulen el desarrollo del razonamiento algebraico. Por ese motivo, planteamos una propuesta que se "mueve" en esa frontera, entre lo aritmético y lo algebraico, y nos posibilita estudiar las nociones y el tipo de prácticas que tienen lugar a partir de las interacciones sobre las producciones de los estudiantes y la gestión de la clase por parte del docente. Nuestro objetivo principal consiste en: ***Explorar el trabajo algebraico en torno al establecimiento de relaciones entre variables en séptimo grado de la educación primaria***.

Diseñamos una propuesta de enseñanza mediante un trabajo colaborativo, en el sentido de Boavida y da Ponte (2011), con las docentes de los dos séptimos grados de la escuela seleccionada. Presentamos en esta tesis el proceso de diseño de las tareas y el análisis de la implementación de algunas de ellas en uno de los dos séptimos grados.

Nos posicionamos en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2013) para interpretar la construcción del sentido de las nociones involucradas y consideramos los aportes de la Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 2005) para analizar la atribución de significados a las acciones de los estudiantes en las clases de matemática. Atendemos también a los aspectos mencionados por Sadovsky (2005) para repensar la construcción del sentido en el aula de matemática.

Para plantear las tareas, consideramos una de las vías de entrada al álgebra escolar que propone Sessa (2005) que es la vía de entrada funcional. La misma, habilita el tratamiento y conversión de registros de representación (Duval, 2008) y ofrece la posibilidad de iniciar el trabajo algebraico en el nivel primario, atendiendo a los aportes de la Perspectiva del Álgebra Temprana (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011; Carraher, Schliemann y Schwartz, 2013).

Los intercambios producidos en torno a las tareas y la gestión del docente en las clases observadas ofrecen información relevante para reflexionar sobre el sentido de las nociones involucradas y la atribución de significado a las acciones que los niños llevan a cabo, en relación con las características de las tareas diseñadas.

TABLA DE CONTENIDOS

PRESENTACIÓN

El trabajo de investigación que llevamos a cabo pretende indagar sobre una manera de iniciar el trabajo algebraico en un aula de séptimo grado de la educación primaria desde el establecimiento de relaciones entre variables. Antes de comenzar con el estudio en sí, describiremos brevemente el camino que hemos recorrido para desarrollarlo.

En principio, debemos aclarar que el equipo de trabajo (directora, codirectora y la autora de la tesis) forma parte de un grupo de investigación de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la Universidad Nacional del Litoral que centra sus estudios sobre la construcción del sentido de las nociones matemáticas. El trabajo en torno a esta temática lo iniciamos en el año 2013[1] y continuamos en la actualidad en el marco del proyecto de investigación CAI+D denominado "La construcción del sentido en el aula de matemática desde distintas perspectivas teóricas"[2]

De este modo, la preocupación por promover sentidos o significados a las actividades matemáticas se constituye en el punto de partida para comenzar a delimitar nuestro problema de investigación. Otra decisión que hemos tomado tiene que ver con orientar el trabajo hacia la enseñanza del álgebra en la escuela obligatoria. Esta elección se basa en principio en experiencias de la autora de la tesis como docente del nivel medio y universitario[3]. Las dificultades recurrentes observadas en las clases relacionadas con el trabajo algebraico generó la inquietud por profundizar en la didáctica de este dominio de la matemática. Diversos referentes teóricos reconocidos en esta temática nos confirmaron la necesidad de diseñar, implementar y analizar tareas que difieran del tratamiento usual para la introducción del álgebra mediante la resolución de ecuaciones.

Así, comenzamos por considerar bibliografía referida a la construcción de sentido o significado en matemática, a las interacciones en el aula, a la gestión de la clase por parte del docente y a perspectivas didácticas sobre el álgebra escolar. Realizamos una revisión de los principales antecedentes relacionados con la temática elegida, que incluye investigaciones relacionadas con propuestas de enseñanza del álgebra. En algunos casos se trata del análisis de las tareas presentadas en libros de texto y en otros, se estudia la implementación de las tareas diseñadas en el aula. Atendiendo a los aportes de los autores seleccionados, definimos con mayor precisión el objetivo principal de nuestro trabajo: ***Explorar el trabajo algebraico en torno al establecimiento de relaciones entre variables en séptimo grado de la educación primaria*** y justificamos la relevancia del mismo.

---

[1] Proyecto CAI+D: denominado "La construcción del sentido en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática" con vigencia desde el 01/05/2013 hasta el 30/04/2017. Directora: Sara Beatriz Scaglia. FHUC. UNL.

[2] Proyecto CAI+D con vigencia desde el 01/05/2017 al 30/04/2020. Directora: Sara Beatriz Scaglia. FHUC. UNL.

[3] En la actualidad, la autora de la tesis desempeña sus tareas en dos escuelas en la asignatura Matemática correspondiente a tercero, cuarto y quinto año de la educación secundaria. En el nivel universitario desempeña su tarea docente en las cátedras Álgebra Lineal I, Seminario de Investigaciones en didáctica de la matemática y Taller de álgebra y cálculo del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL). Durante los años de cursado de la Maestría trabajó como docente en la asignatura Matemática de primer año de la escuela secundaria, en el dictado del curso de articulación disciplinar de matemática de la UNL y en el curso de ingreso de la Escuela Industrial Superior (UNL).

Para avanzar en el trabajo, tomamos decisiones sobre las perspectivas teóricas y metodológicas que consideramos más pertinentes para diseñar la propuesta de enseñanza, implementarla y analizar lo sucedido en el aula del séptimo grado seleccionado. En ese período, nos abocamos a llevar a cabo las tres tareas mencionadas (diseño, implementación y análisis de la propuesta), sin dejar de revisar y ampliar la bibliografía relacionada con el tema. Sin dudas, el trabajo más arduo pero a la vez apasionante es el estudio de lo sucedido en el aula al aplicar las tareas planificadas. Se trata de controlar nuestra subjetividad atendiendo a los aportes teóricos que seleccionamos y a algunas estrategias que promueven la "subjetividad disciplinada" (Mc Millan y Schumacher, 2005, p. 419). La autora de la tesis realiza una primera interpretación de los hechos e invita a la directora y codirectora a realizar una lectura crítica del texto producido. Por momentos tuvimos miradas coincidentes y por otros, divergentes. En estos últimos casos, nos obligamos a volver a "mirar" los hechos, analizar las alternativas y llegar a acuerdos sobre las interpretaciones posibles de los mismos. Esta es una de las tareas que más enriqueció mi formación como investigadora en didáctica de la matemática.

Invitamos a leer nuestro trabajo a todo aquel que esté interesado en el estudio de la iniciación al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre variables. Nuestra propuesta no pretende formalizar conceptos algebraicos sino aportar sentidos o significados a lo trabajado en las clases de matemática. Tampoco estamos afirmando que con las tareas planteadas se dé inicio al álgebra como si fuese el punto de partida de una gran carrera. Pensamos las consignas de la secuencia de enseñanza con el fin de que promuevan la reflexión sobre prácticas que en muchos casos se encuentran en la frontera de lo aritmético y lo algebraico.

Coincidimos con Sadovsky (2003) en lo interesante desde el punto de vista didáctico de provocar "rupturas" en el trabajo aritmético que inviten a docentes y estudiantes a revisar algunas normas y prácticas matemáticas que se utilizaban hasta el momento. Por ese motivo, hemos hecho el intento de plantear una propuesta que se "mueva" en esa frontera y nos posibilite estudiar las nociones y el tipo de trabajo que surgen a raíz de las interacciones entre los estudiantes y la gestión de la clase por parte del docente.

CAPÍTULO 1
Introducción teórica y metodológica

Iniciamos el capítulo identificando los aportes de diferentes especialistas en didáctica de la matemática que nos permiten justificar la relevancia del tema elegido (Sección 1.1). Luego, explicitamos los objetivos de nuestra investigación (1.2) y las opciones metodológicas que hemos seleccionado (1.3). Finalmente, realizamos una síntesis de lo abordado en el capítulo y su relación con los capítulos posteriores (1.4).

1.1 INTRODUCCIÓN

El trabajo algebraico en los distintos niveles educativos constituye una problemática de gran interés que ha sido abordada desde diferentes perspectivas. Como muestra de ello, Kieran (2006) nos brinda una síntesis de cómo se han modificado los focos de interés en los estudios sobre esta temática a nivel internacional desde el año 1977 hasta el 2006 considerando los trabajos publicados en los congresos anuales de la Comunidad Internacional de Investigadores y Educadores Matemáticos conocida con el nombre de PME (Psychology of Mathematics Education). Menciona un primer grupo temático referido a la transición de la aritmética al álgebra, nociones de variables e incógnitas, resolución de ecuaciones y problemas verbales de álgebra (1977 a 2006). Un segundo grupo que se centra en el uso de herramientas tecnológicas, múltiples representaciones y la generalización (mediados de 1980 a 2006). El tercer y último grupo temático gira en torno al pensamiento algebraico de estudiantes de la escuela primaria, la enseñanza del álgebra, la modelización en escenarios dinámicos (mediados de 1990 a 2006).

Como observamos en el párrafo anterior, los puntos de interés para estudiar el álgebra escolar son diversos. No obstante, uno de los factores comunes en los estudios sobre esta temática consiste en la preocupación por las múltiples dificultades que presentan los alumnos en relación con el álgebra (Castro, 2012; Barrio, Lalanne y Petich, 2010; Ramírez García y Rodríguez Marcos, 2011; Sessa, 2005; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996; Olmedo, Galíndez, Peralta y Di Bárbaro, 2015). Así, se plantea la necesidad de buscar alternativas para su enseñanza que prevengan los errores frecuentes y favorezcan la construcción del sentido. A continuación, realizaremos un recorrido por diferentes aportes (extranjeros y nacionales) para caracterizar el álgebra escolar y definir los objetivos de nuestro estudio.

The National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) del año 2014 plantea y responde el siguiente interrogante: ¿Qué es el álgebra como parte de un currículo de matemáticas de la escuela para todos los estudiantes?[4] En este sentido, afirma que antes de que los estudiantes realicen la transición al contenido de álgebra como una parte importante de sus cursos, necesitan desarrollar una base sólida en matemáticas desde preescolar hasta la escuela

[4] "What is algebra as a strand of a school mathematics curriculum for all students?" (NCTM, 2014, p.1)

secundaria. Por ejemplo, antes de un estudio extenso de ecuaciones lineales y pendientes, deberían poder escribir e interpretar expresiones numéricas equivalentes, reconocer situaciones en las que las cantidades están relacionadas de manera proporcional y expresar relaciones entre esas cantidades. En particular, en el nivel primario, los estudiantes deberían desarrollar fluidez con los números, explorar la estructura de las operaciones y sus propiedades, y verbalizar relaciones cuantitativas.

Destacan el poder y la utilidad del pensamiento y habilidades algebraicas, evidentes en muchas profesiones y carreras. Finalmente, señalan que la "hebra" de álgebra en el currículo escolar debe ser crítica y accesible para todos los estudiantes.

Arcavi (2013) afirma que la relevancia del conocimiento algebraico no reside sólo en la manipulación y comprensión de expresiones simbólicas, sino también en el desarrollo de una actitud crítica hacia ellas, pudiendo determinar cuándo es apropiado utilizarlas y cuándo no lo es.

> Esto es especialmente importante en una era en la que abunda la información con sus diversos ropajes, muchos de ellos pseudocientíficos y apoyados en argumentos «matemáticos». Un aspecto central del alfabetismo algebraico consistiría pues en la capacidad de inspeccionar y cuestionar cualquier uso, mal uso o abuso de las expresiones algebraicas para sustentar conclusiones. (Arcavi, 2013, p. 14)

Sessa (2005) sostiene que el álgebra constituye una oportunidad esencial para estudiar propiedades y relaciones entre los números, elaborar conjeturas, organizar y producir argumentos, por lo que ofrece una posibilidad para fomentar en los alumnos la justificación matemática de sus respuestas. Al mismo tiempo, su importancia radica en que "está presente en toda la matemática, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico" (Socas et al., 1996, p. 38) y su enseñanza se establece en los documentos oficiales a partir de los últimos años de la escuela primaria (Núcleos de Aprendizaje Prioritarios).

Respecto a las características de su tratamiento en nuestro país (Argentina), Sessa (2005) afirma que suele iniciarse mediante la resolución de ecuaciones. El tratamiento precoz de este tema puede ocasionar serias dificultades en los alumnos, ya que no disponen de suficientes elementos como para explicitar diferencias entre las transformaciones efectuadas al resolverlas y muchas veces terminan memorizando "reglas prácticas" para su resolución, sin entender el sentido de lo que están haciendo (Sessa, 2005; Moreno y Castellanos, 1997). Sessa (2005) señala que generalmente en este tipo de abordaje suelen estar ausentes cuestiones como la explicitación del dominio numérico sobre el que se está trabajando, la resolución de ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones, *el principio de necesidad* (las ecuaciones aparecen como una complicación innecesaria), el estudio de distintos problemas que se resuelvan con la misma ecuación, o de un mismo problema que pueda resolverse con distintas ecuaciones (dependiendo de cómo se seleccionan las variables).

En lo que concierne al tratamiento del álgebra escolar en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), Ruiz, Bosch y Gascón (2010) sostienen que no debería reducirse a la ampliación de la solución aritmética de los problemas mediante el cálculo de ecuaciones, sino que debe iniciarse como herramienta de modelización, poniendo de manifiesto su *razón de ser*.

Desde la misma perspectiva, destacan a la modelización como aspecto fundamental de la actividad matemática: construir un modelo a partir de una situación (intra o extra matemática), trabajar sobre el mismo y luego interpretar los resultados para responder a las cuestiones planteadas (Chevallard, Bosch y Gascón, 2000).

En las tareas de modelización, por la riqueza y complejidad que conllevan, suelen surgir resoluciones de diferente tipo por parte de los estudiantes. Tal como lo plantean Sadovsky y Sessa (2005) las diferencias entre las distintas producciones constituye una fuente potencial de desequilibrio en el aula, necesario para el surgimiento de nuevas preguntas. Señalan este aspecto como característico a la producción de una clase cuando se enfrenta a un cambio significativo en las prácticas, como es el caso de la transición aritmética-álgebra.

En este sentido, consideramos interesante el estudio de la implementación de actividades de modelización que promuevan las razones de ser de las nociones a trabajar, atendiendo a las interacciones entre los diferentes actores, a la gestión de la clase por parte del docente y al surgimiento de nuevos interrogantes a partir del problema inicial. En relación con el modo de proponer el trabajo sobre la *frontera* aritmético-algebraica, optamos por plantear tareas que se orienten hacia el establecimiento de relaciones entre variables. Esta elección se encuentra en consonancia con la actividad de modelización, tal como lo plantea Sadovsky (2003) en el siguiente fragmento:

> Poder sintetizar un conjunto de soluciones en una o varias relaciones entre variables que se vinculan a través de operaciones aritméticas, pone en evidencia más claramente el aspecto modelizador de la actividad matemática, aspecto que, si bien está en juego siempre que se resuelven problemas matemáticos, aparece más oculto en los problemas aritméticos de solución única, dado que el modelo utilizado -la o las operaciones aritméticas seleccionadas- se "esfuman" rápidamente en los resultados numéricos. (p.3)

Estamos interesados en desarrollar una investigación que *movilice* a estudiantes y docentes en cuanto a sus prácticas matemáticas. No pretendemos abordar un contenido en particular, sino generar nuevas miradas y reflexiones sobre problemas que, si bien pueden iniciarse desde el campo aritmético, este abordaje resulta insuficiente para abarcar todas las soluciones. De este modo, diseñamos e implementamos una secuencia de enseñanza centrada la iniciación al trabajo algebraico desde el establecimiento de relaciones entre variables, utilizando diferentes *registros de representación*[5] (Duval, 2008). A continuación expresamos los objetivos de nuestra investigación.

[5] Ampliaremos esta idea en el marco teórico (Capítulo 2).

1.2 OBJETIVOS DEL ESTUDIO

1.2.1 Objetivo general

Explorar la iniciación al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre dos variables en séptimo grado de la educación primaria.

1.2.2 Objetivos particulares

- Diseñar, implementar y analizar una propuesta de enseñanza para séptimo grado de la educación primaria centrada en el establecimiento de relaciones entre variables desde diferentes registros de representación.
- Identificar las nociones que se ponen en juego en las producciones escritas de los estudiantes y en los intercambios orales que se desarrollan en el aula en torno a las tareas planteadas.
- Describir el papel de los intercambios producidos en las clases en relación con la construcción del sentido de las nociones involucradas y significados de las acciones.
- Caracterizar la gestión de la clase por parte del docente en relación con las prácticas matemáticas que habilita/deshabilita y el modo en que se validan las respuestas de los estudiantes.

Considerando las categorías planteadas por Yuni y Urbano (2006), podemos decir que el primero de los objetivos particulares es *secundario*, porque implica "la realización de ciertas acciones de naturaleza metodológica, cuya realización es imprescindible para el logro de resultados cognitivos" (p. 97), mientras que los objetivos que le siguen son *primarios* porque "apuntan al logro de resultados cognitivos" (p. 97).

1.3 METODOLOGÍA

En esta sección caracterizaremos nuestro trabajo desde el punto de vista metodológico, mencionando las instrumentos que nos permiten obtener los datos y la manera en la analizaremos los mismos (1.3.1). A continuación, nos centramos en el curso seleccionado para implementar la propuesta de enseñanza, explicitamos los criterios para la selección del mismo y las características principales del grupo de estudiantes (1.3.2). En el apartado siguiente describimos los rasgos principales de la propuesta de enseñanza y del proceso que llevamos a cabo para el diseño de la misma (1.3.3). Finalmente, incluimos las estrategias que tenemos en cuenta para otorgar validez y fiabilidad a nuestro estudio (1.3.4).

1.3.4 Características generales del estudio

Este trabajo se enmarca en el *paradigma interpretativo* (Cohen y Manion, 1990) dado que, entre otros aspectos, se trata de un estudio a pequeña escala, en el que buscamos la comprensión de los fenómenos en lugar de determinar sus causas y no pretendemos generalizar los resultados.

Desde las categorías propuestas por McMillan y Schumacher (2005) consideramos que se trata de una *investigación cualitativa interactiva*, que caracterizamos como *estudio de caso*. La característica interactiva alude al origen de los datos empleados, se refiere a "un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger los datos de la gente en escenarios naturales" (p. 44). En nuestro caso en particular, la información se obtiene de escenarios naturales puesto que observamos a los estudiantes y a la docente en el aula durante la implementación de la propuesta de enseñanza. Decimos también que se clasifica como estudio de caso porque se trata de un "sistema definido" (séptimo grado seleccionado) que se observa a lo largo de un período de tiempo (nueve clases en total de una hora de reloj cada una aproximadamente).

En el marco de la clasificación de *estudio de caso* que plantea Stake (2007), nos posicionamos en el *caso instrumental* porque nos encontramos ante "una cuestión que se debe investigar" como es la iniciación al trabajo algebraico a través del análisis de situaciones que relacionan dos variables y "consideramos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular" (p. 16). Los sujetos de estudio son la docente y los estudiantes del curso mencionado.

Del mismo modo que lo plantea Romero (1995) en su investigación, el caso elegido tiene un *interés secundario*. Se trata de un soporte que examinamos en profundidad con el fin de facilitar nuestra comprensión acerca de las dificultades y potencialidades de la propuesta de enseñanza diseñada.

En lo que concierne al modo de recolectar los datos para nuestro estudio, cabe destacar que se grabaron en audio las reuniones previas con las docentes de los dos séptimos grados y que durante el período de implementación de la propuesta de enseñanza se dispuso de dos *observadores externos*: una investigadora y una adscripta en investigación[6] que grabaron las interacciones que se producen, fotografiaron las escrituras realizadas en el pizarrón y recopilaron las producciones de los estudiantes. La docente del curso fue la encargada de plantear las tareas y explicar lo necesario a los estudiantes. Las observadoras no participaron de las interacciones producidas en cada clase.

Como método de análisis de datos hemos utilizado la *codificación,* es decir, la revisión de un conjunto de datos (las transcripciones de clase y las producciones de los estudiantes) con la finalidad de determinar patrones que describan características particulares del fenómeno estudiado (McKnight, Magid, Murphy, y McKnigt, 2000).

Algunos de los aspectos que tuvimos en cuenta al momento de realizar el análisis de las transcripciones de clase y de las producciones de los estudiantes son los siguientes:

- Cuestiones que el docente deja pendientes, que ignora, que retoma o realza durante la clase.
- Intercambios durante momentos que fomentan la producción de conjeturas y/o elaboración de argumentos.

[6] Alumna avanzada del Profesorado de Matemática de la UNL que realizó una pasantía en el proyecto de investigación.

- Características de las fases de conclusión: identificamos si se trata de evaluación o validación (Margolinas, 1992), si consiste en una explicación o en un tipo de prueba de acuerdo con las definiciones de Balacheff (2000).
- Características de las prácticas que se despliegan en relación con el trabajo matemático que se promueven con la propuesta.
- Equivocaciones o interpretaciones erróneas que surgen durante los intercambios o producciones de los estudiantes.

En la tabla que sigue (Tabla N° 1) mostramos de un modo sintético las fases de nuestra investigación. Si bien parecen responder a etapas disjuntas ordenadas cronológicamente, se trata de un *diseño emergente*, en el que los procesos de "determinación intencionada de propósitos, la recopilación de datos y el análisis parcial de datos son simultáneos e interactivos en lugar de discretos pasos secuenciales" (McMillan y Schumacher, 2005, p. 403).

Tabla N° 1: Diseño de la investigación

Fases de investigación	**Características**	**N° de capítulo**
I	Delimitación del tema y aspectos metodológicos	1
II	Referentes teóricos y antecedentes.	2
III	Diseño de la propuesta de enseñanza	3
IV	Implementación y análisis de la propuesta de enseñanza	4, 5
V	Reflexiones finales	6

Cabe mencionar que la revisión bibliográfica es una tarea que atraviesa todos los momentos de la investigación. Si bien en una primera instancia consideramos algunos aportes teóricos como punto de partida, ampliamos nuestro marco de referencia a medida que avanzamos en nuestro estudio.

Otro aspecto de la tabla que queremos aclarar es que la fase III, que incluye el análisis de la implementación de las tareas en el aula, se presenta en dos capítulos diferentes (Capítulos 4 y 5). Esta organización se corresponde con las dos partes que conforman estructura general de la propuesta de enseñanza que se denominan Bloque A y B[7]. La intención inicial ha sido analizar los resultados obtenidos durante la implementación de todas las tareas diseñadas. El importante caudal de información obtenido, así como la evidencia recogida respecto de la riqueza de las interacciones producidas en el aula, nos condujo a tomar la decisión de resignar un estudio abarcativo de las tareas en favor de una profundización del análisis de las que corresponden a la primera parte (Bloque A) y de la tarea central de la introducción del lenguaje algebraico (Problema de los gogos, Bloque B).

En los apartados siguientes describimos las características más importantes del curso seleccionado y de la propuesta de enseñanza.

[7] Describiremos las características de cada bloque de la propuesta de enseñanza en el Capítulo 3.

1.3.2 Características generales del curso seleccionado

En primer lugar, queremos explicitar los motivos que nos llevaron a elegir el curso y la escuela primaria seleccionada. Existía un contacto previo tanto con la institución como con la docente de uno de los dos séptimos grados de la escuela por proyectos anteriores. Por este motivo, nos acercamos a plantear nuestra propuesta y aceptaron participar de este nuevo proyecto. Coordinamos un primer encuentro en la institución (del cual participaron también la directora y la docente del otro séptimo grado) para presentar los propósitos de nuestro trabajo. Consideraron interesante la propuesta y confirmaron la posibilidad de trabajar con las docentes de los dos séptimos grados para el diseño e implementación de las actividades en el aula.

Las observaciones de clase las realizamos en uno de los dos séptimos grados (el que corresponde a la docente mencionada al principio del párrafo) porque los dos cursos desarrollan sus clases de matemáticas en simultáneo (lo cual dificultaba la observación de ambos cursos).

A continuación, caracterizamos en términos generales la escuela primaria a la que pertenece el curso seleccionado. La institución se plantea como un centro educativo experimental innovador. Posee un horario extendido de 8 a 15hs. Cuenta con dos divisiones por cada año escolar. En su plan pedagógico contempla la realización de dos o tres proyectos anuales interdisciplinarios en cada grado, en los que se abordan temáticas acordes a las edades e intereses de los alumnos.

En la escuela elegida, cada séptimo grado tiene una única docente que trabaja las cuatro áreas: Matemática, Lengua, Cs. Naturales y Cs. Sociales.

Con respecto a las características generales del grupo de estudiantes, cabe mencionar que se trata de un grupo mixto de niños y niñas de 11/12 años de edad. En cuanto a la dinámica general de las clases, la docente del curso fomenta el papel activo de los estudiantes en el aula y los organiza para intercambiar ideas en los debates colectivos.

Durante los primeros dos meses y medio del año lectivo, los estudiantes trabajaron con un proyecto interdisciplinario denominado *"Dimes y diretes" Sobre las formas del decir*, elaborado por las docentes de los dos séptimos grados de la escuela. En dicho proyecto abordaron cuestiones relativas al lenguaje matemático. En el texto introductorio que leyeron denominado "La gran incógnita" (disponible en el Anexo 1) se plantea la noción de incógnita y se representa con la letra x. Se solicitó a los estudiantes que piensen y anoten una incógnita en un papel para que sea hallada por un compañero, en la que deban descubrir un número del 0 al 9. Las pistas debían elaborarse utilizando lenguaje matemático.

La docente señaló que la tarea mencionada fue lo más próximo al concepto de ecuación que trabajaron los estudiantes. Hasta el momento de implementar la propuesta no habían trabajado con gráficos cartesianos ni con las nociones de variable, ecuación y función.

1.3.3 Características generales de la propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza que plantemos tiene por finalidad introducir el trabajo algebraico en séptimo grado de la educación primaria por medio de una vía funcional, es decir, del establecimiento de relaciones entre variables[8]. Entre sus características generales, cabe mencionar que intentamos abordar el lenguaje algebraico como herramienta de modelización y generar tareas que propicien el desarrollo de conjeturas y argumentos sobre las respuestas dadas. El hilo conductor de toda la secuencia es la noción de variable y puntualmente, la relación entre dos variables. Esta relación se plantea desde diferentes registros de representación en cada una de las tareas (gráfico, tabular, coloquial, simbólico).

Pretendemos promover la construcción del sentido del álgebra escolar atendiendo a los tres aspectos que plantea Sadovsky (2005): la reflexión en torno al modo en que se concibe el conocimiento matemático con el fin de explicitar los asuntos que "constituyen bases esenciales para pensar la enseñanza", la revisión del papel que juegan las interacciones entre los pares en el proceso de producción de conocimientos y el modo en que "los contextos en los que se presentan los problemas matemáticos condicionan la matemática que se produce" (p.19).

En relación con el primer punto, coincidimos con esta autora en la "perspectiva según la cual la *matemática es un producto cultural y social*" (p. 22). Por un lado, sus producciones están atravesadas por las concepciones de la sociedad en la que emergen y condicionan lo que se concibe como posible y relevante por la comunidad de matemáticos. Por otro, "las respuestas que plantean unos, dan lugar a *nuevos problemas que visualizan* otros, las demostraciones que se producen se *validan según las reglas* que se aceptan en cierto momento en la comunidad matemática" (p. 23). Por lo tanto, los avances en esta disciplina se producen como resultado de la interacción entre personas.

En cuanto a la enseñanza de esta disciplina, Sadovsky (2005) considera a la *actividad matemática* como "el asunto" de la clase. Asume la complejidad de dicha actividad desde una doble referencia: a la matemática como disciplina científica y a las condiciones de la institución en las que la actividad se desarrolla. En este marco, surge la noción de *modelización* como posibilidad para pensar el trabajo matemático de forma integrada.

> Muy sucintamente diremos que un proceso de modelización supone en primer lugar recortar cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia. (Sadovsky, 2005, p. 27).

De acuerdo con lo que planteamos en la Introducción, desde la TAD se sostiene que el álgebra escolar debe iniciarse como herramienta de modelización, para poner de manifiesto su razón de ser. En esta misma línea Chevallard et al. (2000) señala que una buena reproducción por parte del alumno de la actividad matemática, exige que éste intervenga en la misma, que

[8] Ampliaremos el significado de vía de entrada funcional en el Capítulo 2.

formule enunciados, pruebe proposiciones, construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que pueda reconocer los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar con su actividad. Itzcovich, Ressia, Novembre y Becerril (2007) añaden al quehacer matemático la resolución de problemas, la producción de conjeturas, la anticipación (justificada) de los resultados de algunas experiencias sin necesidad de realizarlas efectivamente y la producción de propiedades estableciendo las condiciones de validez de las mismas. Este tipo de actuación exige dejar de lado una tendencia clásica en la enseñanza de la matemática, según la cual recae sobre el profesor la responsabilidad de validar todas las afirmaciones y resultados que se trabajen. En las tareas propuestas se promueve el uso del lenguaje algebraico como herramienta de modelización, se propician espacios para la toma de decisiones y la justificación de las respuestas dadas.

En cuanto al segundo punto, el papel de las interacciones en el aula, lo tenemos en cuenta al momento de analizar la implementación de la propuesta de enseñanza, considerando al espacio social de la clase como condición de posibilidad tanto para la producción de nuevos conocimientos como para lograr una mayor comprensión del problema que se esté tratando (Sadovsky, 2005). Entre los aportes de esta autora, destacamos el hecho de que a partir de la discusión sobre el enunciado de un problema se pueden desplegar muchos otros problemas. Las interacciones en torno a esos nuevos problemas tendrán cabida si el docente lo posibilita porque lo considera importante para su proyecto de enseñanza. La decisión del docente de valorar las preguntas que surgen de los estudiantes favorece la atribución de sentido de la actividad que se desarrolla en la clase.

En nuestro análisis sobre la propuesta de enseñanza observamos especialmente aquellos momentos en los que surgen nuevos problemas a partir de las interacciones, el espacio que habilita o deshabilita la docente para discutir en torno a esos nuevos problemas, las nociones matemáticas que surgen en las discusiones y la posibilidad que brinda la puesta en común para lograr una mayor comprensión sobre el problema que se está tratando.

Respecto al tercer aspecto, Sadovsky (2005) señala que:

> …los contextos externos muchas veces aportan aquello que la matemática todavía no puede aportar (porque no se conoce) y justamente ayudan a entender el funcionamiento de un cierto modelo, pero otras veces justamente ocultan aquello que se espera que los alumnos produzcan; en algunos casos permiten controlar la tarea que se realiza y en otros no ofrecen herramientas para ello. Por otro lado, el funcionamiento de un concepto en un cierto contexto no habilita su uso en otro, ya sea este último externo o interno a la matemática. (p. 97-98)

En relación con este aspecto cabe destacar que la propuesta de enseñanza incluye tareas referidas a diferentes contextos extramatemáticos (en su mayoría) y una de ellas, intramatemático. En relación con los primeros, los seleccionamos con las docentes de los dos séptimos grados[9] con el fin de que resulten significativos para los estudiantes.

[9] Tal como mencionamos en 1.3.2 la propuesta se implementa en los séptimos grados en paralelo, pero el registro y análisis se realiza en uno de sólo de ellos.

El diseño definitivo de la propuesta de enseñanza se realiza mediante intercambios del *equipo mixto* conformado por docentes e investigadores (las dos docentes mencionadas, la directora y la autora de la tesis). En esta etapa de la investigación desarrollamos un trabajo de tipo *colaborativo* en el sentido planteado por Boavida y da Ponte (2011), reconocido como estrategia importante al momento de desarrollar investigaciones relacionadas con la práctica.

Tal como lo mencionamos en el apartado 1.3.2 llevamos a cabo un primer encuentro que tenía como fin conocernos, explicitar objetivos, recabar algunas características del grupo de alumnos seleccionado (conocimientos previos, cantidad de alumnos) y del modo de trabajo en el aula, además de analizar la viabilidad de llevar a cabo un proyecto en conjunto. Estuvieron presentes las docentes de los dos séptimos grados, la directora de la institución educativa, la directora y la autora de la tesis. Acordamos horarios posibles para realizar los encuentros semanales del equipo y compartimos con las docentes parte del material teórico que fundamenta la investigación (perspectiva del Álgebra Temprana).

Tal como lo plantean Boavida y da Ponte (2011) “para que haya un proyecto colectivo, tiene que haber un objetivo general, o al menos, un interés común, compartido por todos. Pero, además de eso, pueden ser reconocidos objetivos específicos particulares para cada uno de los miembros del equipo” (p. 129). En nuestro caso, se pone de manifiesto el interés común por lograr prácticas de enseñanza alternativas que promuevan la construcción del sentido de las nociones matemáticas involucradas

En lo que concierne a los intereses particulares, desde nuestro lugar explicitamos los objetivos de la investigación a las docentes de los séptimos grados. Ellas manifiestaron que si bien en su programa no incluyen el concepto de función (en relación con la vía funcional planteada en nuestro estudio), les interesó que a partir de la propuesta de enseñanza se pueda dar un puntapié inicial para trabajar luego el concepto de proporcionalidad directa. Se mostraron entusiasmadas en trabajar en conjunto para lograr que las tareas elaboradas sean apropiadas para el grupo de estudiantes y estén conformes con los objetivos planteados.

Para organizar el diseño de la propuesta, la autora de la tesis elaboró un proyecto inicial, que detallamos en el Capítulo 3, con una versión preliminar de las tareas y objetivos de las mismas. Esta versión fue el punto de partida para trabajar en los distintos encuentros del equipo colaborativo y realizar las modificaciones necesarias sobre las tareas planteadas.

1.3.4 Validez y fiabilidad

Entre las estrategias que mencionan McMillan y Schumacher (2005) para mejorar la validez de una investigación cualitativa, consideramos las siguientes:

1. Estrategias con varios métodos.
2. Datos registrados de manera mecánica.
3. Lenguaje del participante.
4. Investigadores múltiples.

5. Revisión de participantes.

Tal como mencionamos en el apartado correspondiente al diseño del estudio (1.3.1), combinamos diferentes técnicas para recopilar y analizar los datos obtenidos y, como se verá en capítulos posteriores, establecemos articulaciones entre distintas perspectivas teóricas (especialmente en lo que concierne al sentido o significado de las nociones matemáticas). Desarrollamos las mismas en el marco teórico (Capítulo 2) y las retomamos al momento de fundamentar las decisiones en torno a las tareas planteadas y analizar la implementación de la propuesta de enseñanza. Se trata de una *triangulación* de técnicas de recolección de datos y de teorías para interpretarlos (Estrategia N° 1 del listado anterior, Estrategias con varios métodos).

En cuanto al registro de la información obtenida, optamos por realizarlo de forma mecánica (grabadores, fotografías del pizarrón, fotocopias de producciones de estudiantes) con el fin de evitar subjetividades en esta etapa (Estrategia N° 2, Datos registrados de manera mecánica). En relación con el análisis de la información recopilada, consideramos transcripciones textuales de los discursos de los participantes para otorgar validez y claridad a las interpretaciones que realizamos de las mismas (Estrategia N° 3, Lenguaje del participante). Además, esta última tarea la desarrollamos atendiendo a las "miradas" de cada uno de los miembros del equipo de investigación (la autora, la directora y la codirectora de la tesis). La autora realiza una primera interpretación de los datos y luego la somete a discusión por parte del equipo de investigadoras, para promover la asignación de significados similares sobre los datos recogidos. Esta forma de realizar el análisis de la información otorga validez (Estrategia N° 4, Investigadores múltiples) y fiabilidad interna, puesto que se trata de obtener coincidencia entre los investigadores que conforman el mismo estudio (Goetz y LeCompte, 1988).

El estudio de las interacciones entre estudiantes sobre sus producciones y la gestión de la clase por parte del docente se basa fundamentalmente en las transcripciones de las grabaciones registradas. Invitamos a la docente del séptimo grado seleccionado a revisar nuestras interpretaciones y a sugerir cualquier información sobre el análisis realizado. Se trata entonces de poner en juego la Estrategia Nº 5 de validez mencionada (Revisión de los participantes).

Cabe aclarar que en las transcripciones de clase que presentamos hemos modificado los nombres originales de los participantes, para que no resulten identificables. De la misma manera, en relación con la institución educativa seleccionada, describimos las características más relevantes de la misma pero no explicitamos su nombre. Coincidimos con McMillan y Schumacher (2005) en la conveniencia de conservar el anonimato de los participantes y lugares, para resguardar la ética de la investigación.

En lo que concierne a la fiabilidad externa, si bien en la investigación cualitativa la replicabilidad de los estudios es muy compleja, definimos cuidadosamente las técnicas que utilizamos para recopilar los datos, describimos las características del grupo de estudiantes seleccionado y detallamos las decisiones acordadas durante el trabajo colaborativo (entre investigadoras y docentes) para la elaboración de la propuesta de enseñanza (Capítulo 3).

1.4 SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

Comenzamos este capítulo delimitando el tema elegido para nuestro estudio a partir de diferentes aportes teóricos relacionados con la didáctica del álgebra. Las dificultades recurrentes en relación con el aprendizaje de este dominio de la matemática en la escuela obligatoria se suelen asociar al inicio tradicional mediante la resolución de ecuaciones. Pretendemos plantear una introducción alternativa que promueva la construcción del sentido mediante el estudio de relaciones entre variables y el uso de diversos registros de representación. En el análisis de la implementación en el aula identificaremos potencialidades y limitaciones observadas en relación con la propuesta de enseñanza.

En una segunda parte del capítulo nos dedicamos a especificar las características metodológicas que nos permiten acceder al objeto de estudio. Describimos la forma en la que vamos a recolectar y analizar los datos, caracterizamos la fuente de la que provienen los mismos, detallamos la manera de organizarnos como equipo colaborativo para diseñar la propuesta de enseñanza y finalmente, mencionamos las estrategias que tenemos en cuenta para cuidar la validez y la fiabilidad de nuestro estudio.

En el capítulo siguiente profundizaremos en los aportes teóricos que conforman el marco de referencia y los antecedentes de nuestra investigación. Su descripción permite caracterizar el lugar desde el que nos posicionamos para diseñar la propuesta de enseñanza y analizar los datos recolectados en su implementación.

CAPÍTULO 2

Referentes teóricos y antecedentes

En este capítulo realizamos un recorrido por los principales referentes teóricos (sección 2.1) y antecedentes (sección 2.2) considerados para nuestro estudio. Los trabajos que mencionamos constituyen los cimientos para llevar a cabo nuestra investigación. Por un lado, los antecedentes nos permiten conocer diferentes aproximaciones a la iniciación al trabajo algebraico (con el estudio de propuestas de enseñanza y el análisis de su implementación en el aula). Al mismo tiempo, nos posibilitan definir nuestro propio recorrido para profundizar en la temática elegida, atendiendo a las sugerencias y líneas de investigación que señalan. Por otro lado, el marco teórico nos ofrece las nociones y conceptos necesarios para estudiar lo sucedido en las clases observadas con sustento teórico, interpelando nuestras miradas subjetivas. Cabe mencionar en este sentido que no nos enmarcamos en una única perspectiva sobre la didáctica de la matemática, sino que hemos considerado los aportes que nos resultan más significativos de diversos referentes reconocidos en el área. Creemos que esta decisión nos permite enriquecer lo observado considerando aspectos que exceden a una única perspectiva. No obstante, reconocemos la complejidad que entraña nuestro objeto de estudio y la consecuente imposibilidad de atender a todas las aristas que presenta. Proponemos en este trabajo *una manera* de observar lo sucedido desde el punto de vista didáctico, aquella que consideramos más interesante atendiendo a los referentes teóricos seleccionados y a los objetivos de la investigación.

2.1 MARCO TEÓRICO

Esta sección se divide en cuatro apartados que contemplan las ideas más significativas para nuestro estudio. En primer lugar, describimos aspectos relacionados con la cuestión del sentido o el significado en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (2.1.1), estableciendo relaciones entre los aportes de diferentes especialistas en el área. En segundo lugar, caracterizamos algunas posturas en torno a las interacciones en el aula (2.1.2), dado que será uno de los focos de interés de la investigación. Dedicamos un tercer apartado para centrarnos en la gestión de la clase por parte del docente (2.1.3) ya que nos proponemos estudiar las maneras en las que recibe, retoma y valida las intervenciones de los niños. Finalmente, describimos en el cuarto apartado las características principales de la perspectiva sobre la didáctica del álgebra adoptada (2.1.4).

Las ideas y puntos de vista planteados en este capítulo caracterizan nuestra posición en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y, al mismo tiempo, delimitan y fundamentan nuestra manera de “mirar” lo que sucede en el aula.

2.1.1 La cuestión del sentido en educación matemática

La preocupación porque los estudiantes construyan el sentido de las nociones matemáticas trabajadas en el aula en diferentes niveles es manifestada por diferentes miembros de la comunidad de educadores matemáticos (Brousseau, 2007; Chevallard, 2013; Sadovsky, 2005). Un recorrido por los puntos de vista adoptados por distintos autores evidencia que la adquisición del sentido en matemática se aborda desde focos de interés muy diversos, algunos referidos específicamente a la complejidad de los objetos matemáticos y otros que trascienden la matemática para atender cuestiones de tipo sociales, culturales y políticas. Hemos realizado una revisión sobre diferentes posiciones en relación con esta temática (Scaglia, 2016; Scaglia y Kiener, 2015) y optamos por algunas de ellas para llevar a cabo nuestra investigación. A continuación describimos aquellas perspectivas que nos interesan especialmente para poder fundamentar nuestras elecciones didácticas y metodológicas.

Sadovsky (2005) plantea la necesidad de discutir acerca del sentido en educación matemática a partir de volver la mirada sobre uno de los propósitos básicos de la escolaridad obligatoria. La escuela ofrece una oportunidad privilegiada para que los estudiantes accedan a los aspectos de la cultura considerados valiosos por la sociedad. Si bien esto no se traduce necesariamente en una mejora en la escala social para los jóvenes de sectores populares, puede favorecer una transformación subjetiva atravesada por el trabajo intelectual del alumno que "lo posicionará en la sociedad con más y mejores herramientas" (p.11). En la escuela los alumnos pueden aprender a disfrutar de la cultura. Sin embargo, la autora señala la necesidad de hablar del sentido examinando la distancia que muchas veces existe entre estas expectativas y las experiencias educativas que tienen los jóvenes.

En el párrafo anterior la problemática de la construcción del sentido se plantea a partir de la preocupación sobre los estudiantes de la escuela obligatoria. No obstante, esta autora reconoce que esta cuestión afecta directamente al trabajo docente, representado muchas veces por un signo de frustración: "los profesores se sienten tironeando a los alumnos adonde ellos no parecen querer ir. Hablar del sentido es hablar de lograr un modo de trabajo más satisfactorio, más placentero, hablar del sentido es casi una reivindicación gremial" (p.11).

En consecuencia, la necesidad de discutir en torno al sentido se fundamenta en que

> …el sentido que tenía la matemática en la escuela secundaria antes de que se derrumbara, muy basado en la comunicación de mecanismos aislados que algún día irían a ser útiles para abordar "problemas en serio", ya no sostiene a los docentes y a los alumnos en la escena de enseñar y aprender. Hay que instituir el sentido. Hay que construirlo, no es evidente, no va de suyo, no es natural. (Sadosvky, 2005, p. 10)

Con el fin de repensar la cuestión del sentido, esta autora aborda ciertas cuestiones que considera necesarias y que ya hemos mencionado en el capítulo anterior: la reflexión en torno al modo en que se concibe el conocimiento matemático, la revisión del papel que juegan las interacciones entre los pares y los contextos en el proceso de producción de conocimientos. Desarrollaremos con mayor detalle el segundo de estos aspectos en el apartado dedicado al rol de las interacciones en el aula (2.1.1).

Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard (2013) sostiene que los saberes matemáticos son obras que tienen una o varias razones de ser que motivaron su creación y su empleo. Un saber en particular permite responder a determinada/s pregunta/s. Este autor observa críticamente el hecho usual de ocultar en la enseñanza de la disciplina las razones de ser de los saberes, que suelen ser valorados por sí mismos: "se convierten, pues, en monumentos que uno visita, que uno reverencia y frente a los cuales conviene inclinarse sin siquiera intentar conocer las razones de ser que antaño le dieron vida" (p. 25).

En el marco de esta teoría, Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006) señalan que, para que una cuestión matemática pueda estudiarse con sentido en la escuela es necesario que:

1. Provenga de cuestiones que la sociedad propone para que se estudien en la escuela (legitimidad cultural o social).
2. Aparezca en ciertas situaciones ubicadas en la raíz central de las matemáticas (legitimidad matemática).
3. Conduzca a alguna parte -que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la escuela, sean matemáticas o relativas a otras disciplinas (legitimidad funcional).

Estos autores sostienen que si una cuestión determinada no cumple los postulados anteriores, tal cuestión carece de *sentido*, porque ha desaparecido la *razón de ser* de su estudio en la escuela.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico nos ofrece herramientas conceptuales para fundamentar nuestra propuesta de enseñanza en torno a la iniciación al trabajo algebraico, atendiendo a nuestra preocupación por lograr la construcción del sentido de las nociones involucradas. En particular, recuperando los tipos de legitimidades que mencionamos anteriormente, el establecimiento de relaciones entre variables (hilo conductor de nuestra secuencia de enseñanza) se establece como contenido de enseñanza en séptimo grado a través del concepto de proporcionalidad y aparece explícitamente a lo largo de toda la enseñanza en el nivel secundario (por ejemplo, desde el estudio de funciones de distintos tipos). La relación entre variables no sólo es una cuestión que se propone para estudiar en la escuela (legitimidad cultural) sino que también se ubica en la raíz central de la matemática (legitimidad matemática). Por otro lado, también se relaciona con contenidos que se estudian desde otras áreas como la física o la química (legitimidad funcional).

Atendemos a los aportes de la TAD al elegir la noción que organiza la secuencia de enseñanza que diseñamos para iniciar el trabajo algebraico. Al mismo tiempo, proponemos el surgimiento del lenguaje del álgebra como modelo de una situación, haciendo hincapié en las razones de ser que se promueven desde esta Teoría.

La última perspectiva que nos interesa desarrollar en este apartado es la que se funda en los aportes de la Educación Matemática Crítica cuyo principal exponente es el educador matemático Ole Skovsmose (2005).

En su enfoque propone una mirada diferente sobre la problemática de la construcción de *significado* (término que utiliza en lugar de sentido) y observa críticamente al paradigma predominante, que denomina 'conceptismo', dado que está focalizado sobre el significado de los conceptos matemáticos y deja fuera cuestiones esenciales que deben tenerse en cuenta en el proceso educativo, como son el contexto socio-político y cultural de los estudiantes.

Este autor reflexiona sobre la diferencia entre las cuestiones que refieren al "significado de un concepto matemático" y las que surgen del "significado de una tarea (matemática)" en una práctica educativa. Afirma que "para que los estudiantes adscriban significados a los conceptos que tienen que ser aprendidos, es esencial proporcionar significado a la situación educativa en la cual los estudiantes están involucrados" (p.85)

El significado en educación matemática desde esta perspectiva implica interpretar al aprendizaje como un tipo de acción, por lo que el centro de atención se desplaza del *significado de los conceptos* hacia el *significado de la acción*. El estudiante que actúa debe estar en una situación en la que puede realizar una elección y tiene alguna idea sobre las metas que persigue y las razones por las que lo hace. Estas acciones no se realizan en forma mecánica sino que se basan en intenciones. "Las intenciones representan […] el significado (personal) de la acción" (Skovsmose, 2005, p. 89).

A su vez, estas intenciones se fundan en los antecedentes y el porvenir de la persona, que define del siguiente modo:

> Los antecedentes de una persona pueden ser interpretados como la red socialmente construida de relaciones pertenecientes a la historia del grupo social al cual la persona pertenece. Cuando uno trata de comprender las intenciones de un individuo, a menudo refiere a sus antecedentes. Pero igualmente importante es el porvenir de la persona. Por éste, me refiero a aquellas oportunidades que la situación social pone a disposición del grupo social al cual la persona pertenece. (Skovsmose, 2005, p. 89)

A partir de las nociones anteriores, este autor define el significado de la acción de una persona y lo describe como un modelo que incluye sus antecedentes y su porvenir, sus intenciones, sus acciones, los efectos de las mismas, las reflexiones sobre dichos efectos y el reajuste considerando esas reflexiones.

En cuanto a las características de las tareas matemáticas, este autor establece una relación entre las formas de organizar la actividad de los estudiantes y el tipo de referencia que se utiliza, dando lugar a los siguientes seis *ambientes de aprendizaje*:

Tabla N° 2: Ambientes de aprendizaje según Skovsmose (2000, p.10)

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipos de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

En particular, destaca el trabajo por medio de proyectos que promuevan una indagación (que denomina *escenarios de investigación*) relacionados con temáticas que tengan en cuenta las características del grupo de estudiantes. "Un escenario de investigación invita a los estudiantes a formular preguntas y a buscar explicaciones" (p. 8). Se trata de una "situación particular que tiene la potencialidad para promover un trabajo investigativo o de indagación" (Skovsmose, 2000, p. 5).

Tal como observamos en los párrafos anteriores, este autor denomina conceptistas a aquellos que se centran en el significado de los conceptos o nociones matemáticas. La Teoría Antropológica de lo Didáctico se enmarcaría en ese grupo de "conceptistas" y hemos dicho que adherimos a tal teoría.

¿Podemos *promover el sentido de las nociones* matemáticas y al mismo tiempo, pensar en el *significado de las acciones* de los estudiantes? ¿Podemos considerar los aportes de las dos teorías en un mismo trabajo?

Nuestro punto de vista es el siguiente: desde los aportes de la TAD hemos considerado la posibilidad de iniciar el lenguaje algebraico como herramienta de modelización y seleccionamos la relación entre variables como hilo conductor de la secuencia de enseñanza (ya hemos analizado que cumple con las legitimidades propuestas por estos autores). Desde el punto de vista de la Educación Matemática Crítica (EMC) consideramos que la tarea principal que hemos propuesto (Problema de los gogos) genera un trabajo de indagación que se puede clasificar como escenario de investigación con referencias a una semirrealidad, porque pretende generar preguntas e intercambios para hallar respuestas y explicaciones. Su resolución no consiste en aplicar una técnica o procedimiento conocido (paradigma del ejercicio). Se puede iniciar con estrategias aritméticas pero no alcanzan las mismas para dar respuesta al problema.

Además, creemos que el esfuerzo realizado por el equipo mixto para diseñar las tareas se relaciona con el interés por propiciar la construcción de significados de las acciones por parte de los estudiantes. Intentamos equilibrar lo esperado (objetivos de las investigadoras y docentes) con los destinatarios (características de los estudiantes conocidas por las docentes). Además, en algunas de las tareas principales utilizamos soportes materiales que ayudan al "montaje de la escena" sobre la semirrealidad planteada. Con la secuencia de enseñanza planteada esperamos generar reflexiones e intercambios en torno a las tareas que promuevan el uso del lenguaje algebraico y el establecimiento e interpretación de relaciones entre variables.

En el Capítulo 3, dedicado a la propuesta de enseñanza, retomaremos los aportes teóricos que mencionamos en este apartado para el diseño y justificación de las tareas planificadas. Como hemos mencionado, nos interesa especialmente considerar las *razones de ser* de las nociones matemáticas involucradas y definir de manera apropiada los *contextos* de las tareas de modo que sean significativos para los estudiantes del séptimo grado seleccionado.

A continuación profundizaremos en dos aspectos que se encuentran estrechamente vinculados a la construcción del sentido y resultan especialmente relevantes para el análisis de la implementación de la propuesta de enseñanza. Se trata del papel que juegan las interacciones en el aula (2.1.2) y el rol que desempeña el docente en la clase de matemática (2.1.3).

2.1.2 El papel de las interacciones en el aula

Tal como lo mencionamos al principio, Sadovsky (2005) señala ciertas cuestiones que considera necesarias para repensar la construcción del sentido. Entre ellas, se encuentra la revisión del papel que representan las interacciones que se producen entre los sujetos durante el trabajo en el aula de matemática.

En este sentido, esta autora afirma que "la calidad de los aprendizajes cobra mayor espesor cuando se hace evidente que para avanzar hay que tomar decisiones de nuevo tipo, para las cuales diferentes alumnos aportan distintos puntos de vista que es necesario zanjar" (Sadovsky, 2005, p. 61-62). Las decisiones íntimas de cada estudiante se van nutriendo a través de las interacciones que se promueven en el aula, tanto por parte de sus compañeros como por parte del docente. De hecho,

> …un alumno pudo haber resuelto un problema sin poner en juego una perspectiva muy general, pero una invitación del docente a reexaminar de manera colectiva el problema una vez resuelto, cambiando por ejemplo las condiciones de los datos y analizando qué aspectos permanecen y cuáles se modifican, contribuye a modificar la posición del alumno y lo ayuda a instalarse en un proyecto más general. (Sadovsky, 2005, p. 37)

Las puestas en común podrían favorecer un cambio en la perspectiva del estudiante sobre el problema que está resolviendo. Esta nueva posición, que deseamos más general, sobre la tarea puede mejorar cualitativamente su quehacer matemático frente a nuevos problemas. De modo que las interacciones en clase, adecuadamente gestionadas por el docente, podrían contribuir al desarrollo de la *actividad matemática del alumno* que pretendemos lograr (según Chevallard et al., 2000; Itzcovich et al., 2007), que hemos mencionado en el Capítulo 1.

Zack y Graves (2002) interpretan la construcción de significado como la confluencia de un proceso de internalización de las nociones y otro de dominio y apropiación de herramientas culturales. Estudian el rol del discurso en el aula de matemática y sostienen que las formas sociales del significado influyen en el aprendizaje individual, en la medida en que "las ideas de otros se convierten en propias" (p. 230). Muestran evidencias sobre cómo se modifican y construyen las interpretaciones individuales a partir de los intercambios que realizan en clase tres niños de quinto grado durante la resolución de problemas.

Estos autores fundamentan sus análisis sobre cómo el conocimiento puede ser creado y apropiado a través de la participación en la interacción con los aportes de Vygotski (1970, 1986, citado en Zack y Graves, 2002) y de Bajtín (1986, citado en Zack y Graves, 2002).

Los autores mencionados reconceptualizan la noción de zona de desarrollo próximo de Vygotski, como un espacio intelectual, creado en el momento como un resultado de la interacción de participantes específicos, comprometidos con los demás en un momento determinado. No sólo los estudiantes aprenden, sino también el profesor, dado que sus conocimientos y su rol se transforma en el proceso de interacción.

En este sentido, Vygotski (1984) señala al área de desarrollo potencial como característica fundamental del aprendizaje:

> Dicho esto, no es necesario subrayar que el rasgo esencial del aprendizaje es que engendra el área de desarrollo potencial, o sea, que hace nacer, estimula y activa en el niño un grupo de procesos internos de desarrollo dentro del marco de las interrelaciones con otros, que a continuación son absorbidos por el curso de interno de desarrollo y se convierten en adquisiciones internas del niño. (p. 115)

Y en este marco surge el papel relevante de las interacciones sociales en el aprendizaje. Desde esta perspectiva, uno podría preguntarse si el pensamiento se expresa en forma literal por medio del lenguaje en los intercambios que se producen en el aula. Vygotski (1993) diferencia la estructura del pensamiento y del lenguaje como objetos distintos pero interrelacionados:

> La estructura del lenguaje no es el simple reflejo especular de la estructura del pensamiento. Por eso el pensamiento no puede usar el lenguaje como un traje a medida. El lenguaje no expresa el pensamiento puro. El pensamiento se reestructura y se modifica al transformarse en lenguaje. El pensamiento no se expresa en la palabra, sino que se realiza en ella. (p. 298)

El aporte de este autor refuerza la importancia de estudiar los intercambios, no sólo como una manera de aproximarnos al modo de razonar de los niños sobre los problemas propuestos, sino que el hecho de propiciar su participación en clase y la expresión de sus ideas mediante el uso del lenguaje genera modificaciones en su propio pensamiento.

Asimismo, consideramos significativo atender al rol que juegan las diferencias durante las interacciones, es decir, los desacuerdos, las interpretaciones erróneas, las dudas que surgen en clase durante los intercambios. Zack y Graves (2002) le otorgan un papel importante a los intercambios, y para su estudio recurren a la *idea de alteridad* de Bajtín (2011). Esta idea hace referencia al rol que adquieren los enunciados individuales ajenos en la experiencia discursiva de una persona. En efecto, este autor define a esta experiencia como un:

> …proceso de asimilación (más o menos creativa) de palabras ajenas (y no de palabras de la lengua). Nuestro discurso, o sea todos nuestros enunciados […] están llenos de palabras ajenas de diferente grado de "alteridad" o de asimilación, de diferente grado de concientización y de manifestación. (Bajtín, 2011, p. 51-52)

De esta manera, el autor manifiesta la *no independencia de los enunciados durante el diálogo*. Plantea que "los enunciados no son indiferentes entre sí ni son autosuficientes sino que "saben" uno del otro y se reflejan mutuamente" (p. 54). Esta idea resulta central para justificar nuestro interés por analizar de qué modo se construye el sentido de las ideas matemáticas durante los diálogos que se producen en el aula.

Otra idea significativa de este autor es la del *rol activo del otro durante la comunicación*:

> En efecto, el oyente, al recibir y entender el significado (lingüístico) del discurso, al mismo tiempo toma una posición activa de respuesta con respecto a él: está de acuerdo con él (por completo o en parte) o no lo está, lo completa, lo aplica, se dispone a su ejecución, etc.; y esta actitud de respuesta del oyente se forma durante el proceso de escucha y comprensión, desde su comienzo mismo, a veces literalmente desde la primera palabra del hablante. (p.23)

La comprensión del discurso, de acuerdo con Bajtín (2011), genera obligatoriamente la respuesta, y por tanto el oyente se convierte en el hablante: "tarde o temprano lo escuchado y activamente comprendido se manifestará en los discursos posteriores o en el comportamiento del oyente" (p.24).

Desde el punto de vista de este autor la *unidad de la comunicación discursiva es el enunciado*, que posee un principio y un final absolutos.

> Los límites de cada enunciado concreto se determinan por el cambio de sujetos discursivos, o sea por la alternancia de los hablantes […] Antes de su comienzo se encuentran los enunciados de los otros; después de su final, los enunciados de respuesta de los otros (al menos la comprensión silenciosa del otro, o al fin y al cabo una acción de respuesta, fundada en esa comprensión). El hablante termina su enunciado para ceder la palabra al otro mediante un silencioso "dixit", percibido como los oyentes como una señal de que el hablante ha concluido. (p.27)

Si bien un enunciado se nutre de los discursos ajenos, es importante destacar que este autor sostiene "un enunciado no es sólo un reflejo o una expresión de algo existente y fuera de ella que es dado y final. Él siempre crea algo que nunca existió antes, algo absolutamente nuevo e irrepetible" (Batjín, 1981, citado en Zack y Graves, 2002, p. 232).

Además, Bajtín (2011) plantea que "nuestro pensamiento (filosófico, científico, artístico) surge y se forma en el proceso de interacción y controversia con ideas ajenas, lo que sin duda se refleja en la forma de las expresión verbal de las propias" (p. 56). Los aportes que realiza este autor sobre la forma en la que se nutre un enunciado propio de los discursos ajenos y el modo en que se forma nuestro pensamiento fundamenta la importancia de estudiar las interacciones en el aula para la construcción del sentido.

Desde el punto de vista de la enseñanza de la matemática, Sadovsky y Tarasow (2013) señalan que no es sencillo "enseñar *abriendo el juego* para generar en el aula un espacio de intercambio intelectual" (p. 225). En las puestas en común, las intervenciones de los estudiantes no siempre son las esperadas por el docente. Parte de la complejidad de la tarea del profesor reside en que en el momento en que se producen los intercambios debe interpretar las ideas de sus alumnos y tomar la decisión sobre cuáles va a retomar y profundizar, cuánto tiempo le va a dedicar a cada una y estimar cuánto se va a "desviar" de la planificación de su clase. Acordamos con las autoras mencionadas en que la invitación frecuente a discutir las ideas con los estudiantes tiene que ver con un posicionamiento particular del docente. Por este motivo consideramos que no podemos analizar las interacciones en clase independientemente del rol que el docente juegue en las mismas. En el apartado siguiente nos abocamos a profundizar sobre esta cuestión.

2.1.3 La gestión de la clase por parte del docente

Dado que en nuestra investigación realizamos un análisis de lo que ocurre en el aula a partir de la implementación de la propuesta de enseñanza, creemos conveniente otorgar un respaldo teórico a nuestra mirada sobre el rol del docente en las clases observadas. Para ello, consideramos como punto de partida el tipo de actividad que nos interesa promover en los estudiantes. Tal como lo hemos planteado en el Capítulo 1, coincidimos con Chevallard et al. (2000) respecto a la importancia de que el estudiante actúe en el aula como *verdadero matemático* y desarrolle actividades propias del quehacer matemático.

Panizza (2005) señala que para lograr que los alumnos se desenvuelvan de esa manera, no alcanza con diseñar propuestas de enseñanza apropiadas sino que se precisan intervenciones docentes que se ajusten a los razonamientos de los alumnos y promuevan la explicitación de los mismos y formas de validación propias de la matemática.

En este sentido, mencionaremos dos estudios que han identificado algunas características de las intervenciones docentes que favorecen procesos de apropiación de conocimientos por parte de los estudiantes.

Desde el punto de vista de Zack y Graves (2002) el rol del profesor incluye colaborar en desarrollar una comunidad social que problematiza la matemática y comparte la búsqueda de soluciones. El rol del profesor cambió desde el "proporcionador" de conocimiento al de "orquestador" de conocimiento. Si bien en su investigación han observado que la práctica exitosa estaba muy ligada a las habilidades del docente, destacan que su experticia tiene mucho que ver con su rol de "oyente serio" y co-aprendiz. Consideran que ese tipo de enseñanza, esa apertura para la indagación, una vez comprendida, puede ser apropiada.

Quaranta y Tarasow (2004), señalan que las siguientes intervenciones del docente permiten mantener la incertidumbre y propiciar la validación por parte de los alumnos:

a) No responde directamente las preguntas, sino que las devuelve al grupo de alumnos.

b) No convalida de entrada las respuestas correctas.

c) Argumenta a favor de una respuesta errónea.

d) Pide mayores explicaciones (al tomar respuestas de forma literal, al plantear que no entiende una respuesta).

e) Deja asentada la duda respecto a la validez de la respuesta al escribirla con lápiz (ya que puede borrarse y corregirse). (p. 232)

Estas autoras centran su estudio en los procesos de búsqueda de criterios, por parte de los estudiantes, para establecer si sus producciones son correctas, y en las intervenciones docentes que apoyan tales procesos. Mencionan algunas diferencias respecto al conocimiento que se produce y circula en el aula, de acuerdo al modo en que se realice la evaluación de las producciones. Lo más frecuente es que el docente evalúe, dando por finalizada la actividad en torno al problema y limitando el desafío para los estudiantes. Cuando se apela a un criterio externo (como por ejemplo: la autoridad del docente, el libro de texto) para validar las respuestas, no se ofrece la oportunidad de que el alumno "avance en la comprensión de las razones por las cuales un conocimiento funciona de una manera determinada" (p. 230) ni de que realice un trabajo reflexivo sobre las respuestas.

Se produce un cambio cualitativo cuando se delega en los estudiantes la evaluación de los resultados o ideas matemáticas generadas en la clase. Esto no significa que el docente deba sostener permanentemente la incertidumbre, sino que en determinado momento debe recuperar su papel de "responsable del saber" en el aula para retomar los conocimientos que se pusieron en juego, reordenarlos y establecer nuevas relaciones.

Margolinas (1992) establece ciertas categorías para clasificar el modo en que los estudiantes acceden a la validez sobre sus producciones. Denomina fase de conclusión a "la fase en el curso de la cual el alumno accede a una información sobre la validez de su respuesta. Esta información debe ser pertinente desde el punto de vista del problema y del saber" (p. 128). A partir de la necesidad de dar cuenta de la validez matemática del resultado obtenido por el estudiante, esta fase queda bajo la responsabilidad del docente. Sin embargo, esta autora sugiere dos formas diferentes de ejercer dicha responsabilidad, a partir de las modalidades que describimos a continuación:

1. "La fase de conclusión es una fase de evaluación cuando la responsabilidad del maestro se ejerce bajo la forma de un trabajo público para el alumno, en relación con el problema y el saber" (p.128). El docente, atendiendo a su relación privilegiada con el saber, proporciona un juicio de validez sin recurrir a la respuesta del estudiante.
2. "La fase de conclusión es una fase de validación si el alumno decide él mismo la validez de su respuesta" (p.128). En este caso, el trabajo del docente no está ausente (porque sigue manteniendo la responsabilidad), pero es privado, porque no lo explicita al estudiante.

Esta última modalidad nos resulta más interesante puesto que posibilita que los estudiantes se posicionen de otra manera respecto a sus propias producciones y la de sus compañeros. La necesidad de buscar argumentos que posibiliten obtener información sobre la validez de sus respuestas se vincula con el quehacer matemático que pretendemos desarrollar en el aula.

Además, entendemos que propiciar la fase de validación contribuye a que los estudiantes comprendan el rol de la demostración en matemática y se formen, paulatinamente, para ser capaces de interpretarla y producirla (Mariotti, 2001). No obstante, las investigaciones han puesto de manifiesto que los alumnos suelen interpretar a las demostraciones como un conjunto de reglas formales desconectadas de su actividad matemática personal, en lugar de reconocerla como una forma de establecer la validez de sus ideas (Battista y Clements, 1995).

En relación con esta temática, Balacheff (2000) menciona algunas definiciones que resultan de interés para estudiar y caracterizar la actividad argumentativa. Considera que la explicación "establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad, es decir, sus propias reglas de decisión de la verdad" (p.12). Es decir, cuando se desarrolla una explicación tiene como fin hacer evidente la verdad de las proposiciones. Mientras que cuando la explicación se lleva a cabo en un discurso para asegurar la validez de una proposición y es aceptada por una comunidad, se habla del pasaje de la explicación a la prueba. La demostración consiste en una serie de enunciados organizados a partir de un conjunto de reglas y es un tipo de prueba dominante en las matemáticas (Balacheff, 2000).

Según este autor, el término razonamiento refiere a la actividad intelectual que implica la manipulación de la información dada o adquirida con el objetivo de producir una nueva información. La expresión proceso de validación se asigna a esta misma actividad, cuando el fin consiste en asegurarse de la validez de una proposición y producir una explicación.

Además, denomina “pruebas pragmáticas a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión”, y “pruebas intelectuales a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones” (Balacheff, 2000, p. 22).

El interés por desarrollar este tipo de habilidades en los estudiantes está presente en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios, puesto que se recomienda promover “la producción e interpretación de conjeturas y afirmaciones de carácter general y el análisis de su campo de validez, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales” (Ministerio de educación, 2006, p.16).

El hecho de que los estudiantes tengan lugar para desarrollar argumentaciones en relación con sus producciones se relaciona directamente con la intencionalidad del docente. Entre muchas maneras de organizar un debate, priorizamos aquellas en los que se da espacio para que los alumnos “precisen sus afirmaciones y expliciten las razones en las que se apoyan para sostenerlas” a la vez que se difundan entre todos las ideas que van surgiendo (Sadovsky y Tarasow, 2013, p. 227-228).

En nuestro trabajo en particular, atendiendo a los aportes de los autores mencionados, analizaremos la implementación de la propuesta de enseñanza a la luz de los intercambios producidos en el aula, identificando las ideas que surgen, la organización del debate por parte de la docente, las características de las intervenciones de los estudiantes a partir de los conceptos definidos por Balacheff (2000) y el tipo de fase de conclusión que se privilegia de acuerdo con las categorías de Margolinas (1992).

2.1.4 Didáctica del álgebra

Tal como describimos en el Capítulo 1, existen numerosos estudios que muestran preocupación por las dificultades que presentan los estudiantes en torno al trabajo algebraico (Barrio, Lalanne y Petich, 2010; Ramírez García y Rodríguez Marcos, 2011; Sessa, 2005; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996; Olmedo, Galíndez, Peralta y Di Bárbaro, 2015). En lugar del tradicional inicio mediante la resolución de ecuaciones, Sessa (2005) propone diversas puertas de entrada al álgebra escolar. Una de ellas es la denominada *funcional*, que privilegia la noción de variable y propone la “construcción de la idea de dependencia entre dos magnitudes o cantidades y […] la consideración de las letras para expresar esas cantidades variables” (Sessa, 2005, p. 71).

Consideramos interesante la propuesta de introducir el álgebra desde una vía funcional, porque posibilita, entre otras cosas, aproximarse a nociones como la de variable o dependencia y comprender que el uso de las letras excede la noción de incógnita de una ecuación.

En este sentido, nos interesa detenernos en la distinción que plantea Tarski (1977) entre *constantes* y *variables*, desde el punto de vista matemático, para precisar mejor los conceptos involucrados en nuestro trabajo. El autor señala que en la aritmética intervienen constantes como “1”, “0”, “+” porque “cada uno de estos términos tiene un significado fijo que permanece inalterado en el curso de las consideraciones" (p.26). Por el contrario, las constantes, que suelen ser letras aisladas, no tienen un significado propio. Así, por ejemplo, la pregunta:

> *¿Es cero un número entero?* se puede contestar siempre afirmativa o negativamente; la respuesta puede ser verdadera o falsa, pero en todo caso tendrá sentido. En cambio, una pregunta que afecta a x, como por ejemplo: *¿Es x un número entero?* no puede contestarse significativamente. (p.26)

De la misma manera que la expresión *x es un número* entero no representa una afirmación que pueda ser confirmada o refutada. La letra *x,* utilizada como variable, no posee ninguna propiedad determinada, en todo caso, sus propiedades varían de caso en caso.

Hecha esta salvedad, nos interesa desarrollar una perspectiva denominada *Álgebra Temprana (Early Algebra)* que plantea, entre otros aspectos, la iniciación al trabajo algebraico desde el establecimiento de relaciones entre variables. Cabe mencionar que hemos adoptado este enfoque para diseñar nuestra propuesta de enseñanza.

En primer lugar, Kaput (2008) plantea la necesidad de repensar nuestra concepción acerca de lo que es el álgebra y el razonamiento algebraico, porque esto influye necesariamente en su abordaje en el aula, especialmente si se propone su tratamiento para el nivel primario. Sostiene que el tipo de visión del álgebra escolar que dominó durante años en muchos países incluía principalmente manipulaciones simbólicas guiadas por la sintáctica. Esta perspectiva constituye una base inadecuada para la reconsideración de su lugar en la escuela. Se precisa una visión más amplia y profunda del álgebra que posibilite su integración en las matemáticas de cada nivel escolar.

En este sentido, afirma que centrarse en la pregunta sobre *qué es el álgebra* destaca a esta disciplina como un cuerpo de conocimiento independiente, como un artefacto cultural. La pregunta sobre *qué es el razonamiento algebraico,* enfatiza el álgebra como una actividad humana. El autor ejemplifica diciendo que aquellos que conciben el álgebra como tema heredado pueden referirse a la ley conmutativa de la adición, por ejemplo, sin tener que establecer cómo se formó la ley o cómo los estudiantes aprenden (o no); mientras que quienes sostienen que el álgebra es un razonamiento se inclinan por considerar las formas de hacer, pensar y hablar de las matemáticas de los estudiantes como algo fundamental. Kaput (2008) considera que los dos puntos de vistas son útiles, dependiendo de los propósitos que se persigan.

El autor ofrece un punto de vista más amplio acerca de la simbolización del álgebra, que combina las dos identidades expresadas en el párrafo anterior (como herencia cultural y como actividad humana) y posibilita organizar su tratamiento en todos los niveles. Presenta un análisis de contenidos del álgebra que incluye dos aspectos básicos o centrales y tres líneas que se relacionan con los mismos.

Considera que un aspecto central del razonamiento algebraico es la *generalización* y la expresión de la generalización en sistemas de símbolos convencionales cada vez más sistemáticos (Aspecto Básico A). Como segundo aspecto central plantea la *acción guiada* *sintácticamente sobre los símbolos* dentro de los sistemas organizados de símbolos (Aspecto Básico B).

Kaput (2008) menciona la falta de consenso sobre los roles de los dos Aspectos Básicos en el aprendizaje temprano de álgebra. Algunos tratan las acciones basadas en reglas sobre los símbolos (Aspecto Básico B) como el sello distintivo del razonamiento algebraico, ya sea que estas acciones promuevan o no a la generalización o al modelado. Otros, minimizan la sintaxis convencional a favor de la expresión de generalizaciones y modelos de situaciones a través de otros registros, especialmente el lenguaje natural y los dibujos, para presentar más tarde una notación algebraica, gráficos y otras clases de representaciones convencionales. Otros, por último, sostienen que el Aspecto Básico B, debe atenderse desde el principio en el aprendizaje de álgebra, porque las formas convencionales (notación algebraica, gráficos, tablas y lenguaje natural) no sólo pueden expresar, sino también enriquecer y profundizar el razonamiento algebraico en los estudiantes.

El autor completa su descripción del álgebra añadiendo tres líneas en las que aparecen de alguna manera cada uno de los dos aspectos centrales mencionados.

1 Álgebra como estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidos los que surgen en la aritmética (álgebra como aritmética generalizada) y en el razonamiento cuantitativo.

2 El álgebra como estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.

3 Álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelado dentro y fuera de las matemáticas.

La primera línea es considerada en muchos casos como la ruta principal hacia el álgebra. Incluye generalizar operaciones aritméticas y sus propiedades y razonar sobre relaciones más generales y sus formas e implica observar las expresiones aritméticas de una manera nueva, en términos de su forma en lugar de su valor cuando se calcula.

La segunda línea se relaciona con la noción de función, en el sentido de que la expresión de la generalización describe la variación sistemática de instancias en algún dominio. El aspecto sintáctico del álgebra se aplica generalmente para cambiar la forma de las expresiones que denotan regularidades, al comparar diferentes expresiones de un patrón para determinar si son equivalentes, o al hallar cuándo las funciones toman valores particulares (por ejemplo, raíces) o satisfacen restricciones (construir y resolver ecuaciones). Utiliza una amplia gama de sistemas de símbolos, además de los habituales, que incluyen tablas, gráficos y estrategias pedagógicas, como las "máquinas de función".

La tercera línea es el modelado como actividad algebraica y se organiza en tres tipos según cómo se utilizan los dos aspectos básicos mencionados. Un primer tipo es *numérico o cuantitativo*. Normalmente toma la forma de la declaración de una restricción, generalmente en la forma de una ecuación, que luego requiere el uso del aspecto sintáctico del álgebra para obtener una solución. En este caso la variable se considera como una incógnita.

Un segundo tipo de modelado utiliza el primer aspecto central *al generalizar y expresar patrones* y regularidades en situaciones o fenómenos, que surgen dentro o fuera de las matemáticas. Aquí, el dominio de generalización es la situación que se está modelando y, en algunos casos la expresión de la generalización utiliza una o más variables que pueden expresar una función o clase de funciones. Trabajar con tales expresiones para comprender mejor la situación que se está modelando implica el aspecto sintáctico del álgebra.

Un tercer tipo de modelado algebraico involucra *generalizar soluciones a una situación de modelado de respuesta única* del primer tipo o de problemas aritméticos que no requirieron maniobras algebraicas para su resolución. En este caso, el álgebra ingresa a medida que uno relaja las limitaciones del problema dado para explorar su forma más general, alcance y relaciones más profundas, incluidas las comparaciones con otros modelos o situaciones. En este caso la introducción de variables que expresan la generalidad de la situación normalmente toma la forma de parámetros.

El autor señala que esta red de conexiones (entre aspectos y líneas mencionadas) permite que el álgebra desempeñe el papel clave en las matemáticas desde el Nivel Inicial hasta los 12 años (K - 12). Este análisis de contenido es coherente con el proporcionado por el grupo de trabajo de álgebra del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM).

En relación con los aportes de Kaput (2008) podemos decir que en la secuencia de enseñanza diseñada se promueve el uso del segundo tipo de modelado, porque se trabaja en torno al establecimiento de relaciones entre variables. Pero a su vez, en lo que concierne a los aspectos básicos y líneas relacionadas con los mismos, clasificamos las tareas propuestas como coherentes con el Aspecto Básico A que apunta a la expresión de generalizaciones y a las líneas 2 y 3 relacionadas con el estudio de variación conjunta y modelado, respectivamente.

Blanton, Brizuela, Stephens, Knuth, Isler, Murphy Gardiner, Stroud., Fonger, y Stylianou (2018) señalan que involucrar a los niños de educación primaria en la actividad de generalizar es vital porque fortalece su capacidad para filtrar información matemática con características comunes y extraer conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas. El acto de representar no solo expresa las generalizaciones que los niños obtienen de las situaciones problemáticas, sino que también determina la naturaleza misma de su comprensión de estos conceptos.

Añaden, además, que al justificar las generalizaciones, los estudiantes desarrollan argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta. En los grados de educación primaria, las formas de argumentos que hacen los estudiantes son a menudo justificaciones empíricas ingenuas (naive).

Desde el punto de vista de estos autores, el Álgebra Temprana tiene el potencial de integrar conceptos aritméticos en tareas algebraicas de manera que puedan profundizar la comprensión de los niños de los conceptos aritméticos. En este sentido, esta perspectiva no introduce una dicotomía en las matemáticas escolares (es decir, aritmética o álgebra), sino que las tareas se designan para resaltar el nexo entre el pensamiento algebraico y aritmético utilizando el trabajo aritmético como un “trampolín” para observar, representar y razonar por ejemplo sobre la estructura de las operaciones. Se plantean como objetivo facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico y la comprensión matemática, a través de entornos de aprendizaje que se basan en investigaciones de pequeños grupos de tareas abiertas en las que los estudiantes representan sus ideas de diferentes maneras (por ejemplo, a través de dibujos o lenguaje escrito) y un rico discurso en el aula que apoya el desarrollo de la fluidez de los conceptos y prácticas algebraicas.

Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) afirman que el objetivo de la perspectiva del Álgebra Temprana no es añadir álgebra a los planes de estudio del nivel primario, sino ayudar a que emerja el carácter algebraico de la matemática que se trabaja desde los primeros años de la escuela primaria. El álgebra se encuentra implícita en situaciones problemáticas, en contenidos (como por ejemplo las operaciones básicas) y en diferentes sistemas de representación (como tablas, gráficos, escritura en notación aritmética).

En relación con el tipo de razonamiento que se requiere para el Álgebra Temprana mencionan la consideración de *premisas tácitas* sobre las situaciones problemáticas que se plantean y la realización de *generalizaciones hipotéticas*, resaltando su carácter no deductivo y la relevancia que tiene para la formulación de hipótesis matemáticas. El foco de atención de la investigación se dirige de las operaciones numéricas a las relaciones funcionales.

En la misma línea, Carraher, Schliemann y Schwartz (2013, p. 156) sostienen que

> *Cualquier* enunciado aritmético puede ser considerado como una instancia particular de un enunciado algebraico más general y ser expresado como tal por medio de la notación de funciones. Toda situación que involucre a la aritmética proporciona una oportunidad para pensar acerca de relaciones algebraicas.

Esto no significa que cada concepto o técnica aritmética sea evidentemente algebraico, sino que se trata de nociones *potencialmente algebraicas* y que precisan del diseño de actividades y de intervenciones docentes adecuadas para hacer visible el álgebra que esconden (Schliemann et al., 2011).

En las situaciones problemáticas que plantean trabajan con cantidades indeterminadas. Estos autores reconocen que el éxito en la introducción del Álgebra Temprana depende muchas veces del aprovechamiento adecuado de la ambigüedad en las situaciones problemáticas.

En relación con la elección del concepto de función como puerta de entrada al trabajo algebraico consideran que se trata de una noción que posibilita articular un gran conjunto de temas que de otra manera permanecerían aislados (operaciones numéricas, fracciones, razón y proporción, fórmulas, etc.). Advierten sobre la necesidad de diferenciar las funciones de sus representaciones y de reconocer que cada representación resalta alguna característica de la función, pero puede presentar limitaciones para explicitar alguna otra característica (por ejemplo, la continuidad en una tabla, los valores precisos de la función en un gráfico).

Desde el punto de vista anterior, se puede iniciar el trabajo algebraico desde los primeros años de la educación primaria (o desde la educación inicial). Si nuestra propuesta está destinada a un séptimo grado ¿Por qué podemos afirmar que se enmarca en la perspectiva del Álgebra Temprana? Básicamente, porque adherimos a sus principales características:

- *No añadir álgebra al currículum sino identificar ideas potencialmente algebraicas.* En nuestro caso, hemos identificado, junto con las docentes de los dos séptimos grados, la posibilidad de ubicar nuestra propuesta previo al tratamiento de la proporcionalidad directa, planteando situaciones que se puedan retomar en el abordaje de dicho tema. Las nociones que aparecen en la propuesta diseñada son: relaciones entre variables, diferentes registros de representación (gráficos, tablas, símbolos y lenguaje coloquial) para expresar dichas relaciones y algunas propiedades de las operaciones en el conjunto de los números naturales. No concebimos la secuencia de enseñanza como un anexo a la planificación anual del docente, sino que, en coherencia con el planteo del trabajo colaborativo de equipo mixto, trabajamos para diseñar actividades que se puedan integrar a la planificación y aporten al desarrollo de prácticas y reflexiones que se relacionen con el razonamiento algebraico.

- *Trabajar con cantidades indeterminadas y utilizar la noción de función para abordar el álgebra.* En el estudio que llevamos a cabo, el hilo conductor de la propuesta de enseñanza es la relación entre dos variables y se aborda la misma desde diferentes registros de representación. De acuerdo con estos autores, en cada una de las representaciones utilizadas se encuentra implícitamente el álgebra. En el Problema de los gogos, se propone un trabajo de exploración que habilita el uso de letras para representar cantidades indeterminadas. En ningún momento se aborda explícitamente el concepto de función, sino que pretendemos iniciar su abordaje desde el establecimiento de relaciones entre dos variables.
- *Utilizar el soporte contextual en las situaciones problemáticas, introducir de modo gradual la notación formal y articular con los demás temas del currículo.* La propuesta de enseñanza que diseñamos no desarrolla formalmente nociones algebraicas, sino que plantea problemas que pueden iniciarse desde la aritmética pero estas estrategias resultan insuficientes para dar respuesta a la situación inicial. Utilizamos diversos contextos en las tareas propuestas (en algunos casos con soporte material) y se promueve la articulación con los temas del currículum (lograda a través del trabajo colaborativo de equipo mixto mencionado).

Finalmente, para el diseño de las tareas hemos retomado algunas consignas que plantean referentes del Álgebra Temprana y realizamos algunas modificaciones sobre los contextos de las mismas para adecuarlas al grupo de estudiantes. A las docentes de los dos séptimos grados les compartimos bibliografía relacionada con esta perspectiva antes del diseño e implementación de la propuesta de enseñanza.

Consideramos potente la idea que sostienen acerca de promover un tipo de prácticas que se vayan aproximando a lo algebraico, sin apresurar la aparición de definiciones formales. Creemos que una propuesta que persiga una reflexión crítica sobre lo que se realiza, revisando las normas y prácticas que se venían utilizando hasta el momento (porque no permiten dar respuesta cabal al problema) puede resultar significativa para los estudiantes. Pensamos que un trabajo de este tipo, posicionado en la frontera de lo aritmético y algebraico, genera "rupturas" en la actividad matemática que se despliega en el aula (Sadovsky, 2003) que podrían favorecer la iniciación al razonamiento algebraico y la construcción del sentido de las nociones abordadas.

En la siguiente sección, recuperamos algunos trabajos de la perspectiva del Álgebra Tempana para caracterizar el estudio de la implementación de tareas en el aula (Apartado 2.2.2).

2.2 ANTECEDENTES

En la comunidad de educadores matemáticos la investigación en torno a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha recibido especial atención, como se pone de manifiesto a través de la inclusión de capítulos especiales en algunos de los principales handbooks (Grouws, 1992; Bishop, Clements, Keitel-Kreidt, Kilpatrick y Laborde, 1996; Lester, 2007) y de la compilación de volúmenes sobre el tema en algunas publicaciones relevantes. Como ejemplos de estos últimos, mencionamos el número 3 del Vol. 9 de la revista Mathematical Thinking and Learning, publicado en el año 2007 (Nathan y Koellner, 2007) que recibió como título Supporting the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning [Apoyando la transición de la aritmética al razonamiento algebraico], y el volumen de ZDM Mathematics Education publicado en 2007, que incluye 9 artículos bajo la cuestión especial que aborda la comprensión de la generalización en Álgebra desde el prescolar hasta el grado 12 (Becker y Rivera, 2007).

Asimismo, es importante señalar que la enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha tenido una presencia casi constante en las distintas ediciones del Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), evento de relevancia central para la comunidad de educadores matemáticos, que se realiza con una periodicidad de 4 años. Esta presencia se manifiesta en la inclusión de grupos de estudio en torno a esta problemática, con la asistencia de investigadores de distintos países. A lo largo de los años, estos grupos recibieron diversas denominaciones, entre otras: Algebra en el nivel escolar (ICME 2, Reino Unido, en el año 1972) (Howson, 1973), El lugar del álgebra en educación secundaria y terciaria (ICME 7, Canadá, en el año 1992) (Gaulin, Hodgson, Wheeler. y Egsgard, 1994), Enseñanza y aprendizaje del álgebra (ICME 12, Corea, en el año 2012), entre otros. Cabe destacar que en la última edición (ICME 13), realizada en el año 2016 en Hamburgo (Alemania) se constata la presencia de dos grupos de estudio (Topic Study Group-TSG): Enseñanza y aprendizaje del Álgebra Temprana (TSG 10) y Enseñanza y aprendizaje del álgebra (TSG 11), respectivamente (Kaiser, 2017). Asimismo, la próxima edición, que se realizará en Shanghai (China) en 2020, también incluirá dos de estos grupos dedicados al álgebra: TSG 6 (Teaching and learning of algebra at primary level) y TSG 7 (Teaching and learning of algebra at secondary level). Esto último pone de manifiesto la relevancia que ha adquirido en los últimos años la investigación en torno a la enseñanza y el aprendizaje el álgebra en el nivel primario.

Dado que nuestro estudio se focaliza en la iniciación al álgebra escolar, nos interesa especialmente realizar un recorrido sobre aquellos estudios relacionados con esta temática. De la gran cantidad de indagaciones referidas al tema, centramos nuestra mirada en la articulación aritmética-álgebra desde trabajos referidos al análisis de libros de textos (2.2.1) e investigaciones que estudian la implementación de propuestas de enseñanza en el aula (2.2.2). Los primeros nos muestran, de alguna manera, el tratamiento usual de esta temática y realizan una mirada crítica sobre dicho tratamiento que nos posiciona de una mejor manera al momento de diseñar nuestra propuesta de enseñanza. Los segundos, conforman los antecedentes fundamentales para nuestro estudio ya que analizan tareas relacionadas con el trabajo algebraico en el aula, nos brinda posibles estrategias metodológicas para recolectar la información y focos de interés para la observación y análisis de las clases.

2.2.1 Estudios sobre libros de texto

Sessa y Cambriglia (2007) analizan el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales en tres libros de texto argentinos de gran circulación, centrando el estudio en el rol que juegan propiedades y gráficos cartesianos en la validación de los procedimientos de resolución. Destacan el valor cognitivo que aporta la articulación entre distintos registros de representación.

Las autoras reflexionan en torno al papel que juegan las extensiones de propiedades y relaciones válidas en un dominio matemático cuando se trabajan en otro. En particular, cuando se extienden propiedades de las igualdades de números al campo de las ecuaciones. Esta idea se relaciona con la planteada por Ramírez García y Rodríguez Marcos (2011) respecto a las consecuencias que tiene trasladar el significado “aritmético” del signo igual al terreno del álgebra.

El trabajo de Sessa y Cambriglia (2007) tiene especial relevancia para nuestro estudio puesto que focaliza su atención en la validación que se promueve en los textos, a partir del tratamiento de nociones algebraicas y en las vinculaciones que se suelen establecer entre la aritmética y el álgebra. En nuestro caso en particular, diseñamos una propuesta de enseñanza atendiendo a la sugerencia de las autoras de articular diferentes registros de representación (idea que puede vincularse fácilmente con la vía de entrada funcional que hemos elegido). Además, tal como lo hemos planteado en uno de los objetivos particulares de la investigación, uno de los focos de atención es la manera de gestionar las fases de conclusión por parte del docente. En este sentido, pretendemos observar si se favorece el desarrollo de validaciones por parte de los estudiantes.

Oller Marcén y Meavilla Seguí (2014) realizan un estudio histórico de libros de textos sobre el carácter aritmético/algebraico de una familia de problemas (que denominan de “trabajo cooperativo”) con el objetivo de brindar herramientas para pensar trayectorias didácticas que faciliten la transición de la aritmética al álgebra. Este tipo de problemas se presenta en contextos muy diversos y se enuncian en forma general del siguiente modo: “Conocido el tiempo que necesita cada uno de una serie de “agentes” para llevar a cabo una determinada tarea, se pretende saber el tiempo que necesitarían para completarla conjuntamente y/o la parte del trabajo que realizará cada uno de ellos” (p. 106).

Debido a su persistencia en el tiempo, los autores centran su estudio en uno de los contextos que aparece, denominado “problemas de grifos”, que refiere al tiempo que requiere llenar o vaciar un recipiente de líquido. Presentan ejemplos de problemas de este tipo en libros de textos de distintos períodos históricos, analizan los enunciados, el capítulo en el que se proponen dichos problemas y las ideas que los autores de los textos ponen en juego al resolverlos.

A partir del siglo XIX observan que se comienza a utilizar el álgebra (en forma algo forzada) para resolver este tipo de problemas, ya que se incluyen en el listado de actividades correspondientes a ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Concluyen su análisis destacando la persistencia en el tiempo y la variedad de enfoques de resolución que han tenido los "problemas de grifos". Además, señalan que desde un punto de vista histórico, este tipo de problemas debe considerarse esencialmente aritmético, a pesar del progresivo desplazamiento que se produjo a lo largo del tiempo desde los capítulos dedicados a la aritmética (en concreto a la proporcionalidad) hacia los dedicados al álgebra.

Este artículo resulta de interés para nuestro estudio por el tipo de análisis que presenta sobre los problemas planteados en los textos. La cuestión de identificar si un enunciado puede resolverse por medios aritméticos o precisa de un trabajo más bien algebraico para obtener la respuesta, hace referencia a la ausencia o presencia del ya mencionado "principio de necesidad" de Sessa (2005). La utilización del mismo cobra especial relevancia didáctica cuando el foco de estudio constituye la construcción del sentido de las nociones a enseñar. Por este motivo, en el diseño de las tareas que proponemos atendemos especialmente a esta cuestión. Si bien la resolución del Problema de los gogos puede iniciarse por medio de estrategias aritméticas, éstas resultan insuficientes para dar respuesta al problema.

En relación con el estudio de libros de texto vale la pena mencionar el Proyecto 2061 que consiste en una iniciativa a largo plazo de la *American Association for the Advancement of Science* (AAAS) para realizar investigaciones y desarrollar herramientas y servicios que pueden utilizar los educadores, investigadores y creadores de políticas para llevar a cabo mejoras importantes en el sistema educativo de Estados Unidos. En el marco de dicho proyecto se establecen categorías y criterios para analizar y evaluar libros de textos sobre la enseñanza del álgebra. Algunos aspectos que tienen en cuenta al definir las categorías son: identificar un sentido de propósito del tema o unidad, considerar los conocimientos previos, proporcionar contextos variados, justificar los procedimientos, estimular a los estudiantes para que desarrollen explicaciones y razonamientos y realizar una evaluación sobre el tema.

Si bien tenemos en cuenta varios de los aspectos anteriores para el diseño de nuestra propuesta de enseñanza, consideramos especialmente significativo el primero de ellos, ya que alude al sentido que pueden otorgarle los estudiantes al aprendizaje de un tema determinado. Tal como lo menciona Arcavi (2013), de los doce libros de texto de álgebra estudiados por el Proyecto 2061, sólo cinco se clasifican como satisfactorios o buenos en relación con ese criterio. Parecería que los textos no suelen preocuparse por "otorgarle al álgebra un sentido de propósito, y esto puede (y suele) redundar en una visión del álgebra como una actividad carente de una finalidad relevante" (Arcavi, 2013, p. 15).

La preocupación de este autor por promover la construcción del sentido del álgebra lo conduce a plantear las componentes más importantes que conforman lo que denomina "el sentido de los símbolos" (Arcavi, 2005). Planteamos a continuación cada una de ellas de un modo sintético:

1- *Amigabilidad con los símbolos:* Supone la comprensión de los símbolos y del sentido estético de su poder. Específicamente, cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados para mostrar relaciones, generalidades y realizar demostraciones que de otro modo permanecerían implícitas.

2- *Capacidad para 'manipular' y 'leer a través' de expresiones simbólicas*, como aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos.

3- *Conciencia de que uno puede diseñar de forma exitosa relaciones simbólicas* que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada.

4- *Capacidad para seleccionar una posible representación simbólica* (elegir la variable a la cual asignar un símbolo), y en ciertos casos, inclusive reconocer nuestra propia insatisfacción con esa selección e ingeniarse para buscar una mejor.

5- *Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos* durante la aplicación de un procedimiento, resolución de un problema o inspección de un resultado, y comparar esos significados con las intuiciones sobre los resultados esperados y la situación que plantea el problema.

6- *Conciencia de que los símbolos pueden cumplir roles distintos* en diferentes contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias.

Somos conscientes de que las componentes que menciona este autor se deben trabajar en forma progresiva a lo largo de la escolaridad y por lo tanto no aspiramos a considerar todas ellas en nuestra secuencia de enseñanza. Pretendemos comenzar a trabajar la componente 3 con las tareas diseñadas (ampliaremos la explicación en el próximo capítulo destinado a la secuencia de enseñanza).

Bufarrini (2005) realiza un análisis de libros de texto sobre los elementos que caracterizan la "ruptura-continuidad" entre la aritmética y el álgebra. Señala que en general se inicia el trabajo algebraico mediante el "oscurecimiento" de problemas que pueden resolverse, de un modo más sencillo, por medios aritméticos. Además, afirma que en todo momento promueven la conceptualización de la letra como número a develar mediante:

> …la identificación de ecuación con igualdad numérica, el trabajo con ecuaciones donde aparece "una sola letra", el concepto de ecuación ligado al hecho de resolverla (encontrar el valor de la incógnita), una mayoría abrumadora de problemas con solución única y aún más, donde se declara ya en el enunciado la existencia y la unicidad de tal solución. (p. 67-68)

Esta autora señala que la imposición de la nueva "herramienta" no sólo oculta su verdadero sentido, sino que también inhibe la capacidad de decidir el uso de la herramienta por parte del alumno. No obstante, advierte que no se trata de evitar este tipo de problemas en clase, sino que plantea las dificultades que implica el uso de los mismos *para introducir a los estudiantes en prácticas algebraicas*. Indica que iniciar el trabajo algebraico mediante problemas que no admitan una resolución por medios meramente aritméticos no significa disociar la aritmética del álgebra. Un desafío consiste en lograr trabajar la construcción de la conexión en ambos sentidos (aritmética- álgebra y álgebra- aritmética), e identificar las ventajas de elegir una u otra perspectiva, según el problema que se esté resolviendo (Lee y Wheler, 1987, citado en Buffarini, 2005). En las tareas que diseñamos se promueve en varios momentos esta articulación y la necesidad de tomar decisiones sobre el tipo de respuesta (numérica o algebraica) que corresponde, de acuerdo con la tarea.

En su estudio también menciona otros antecedentes (Sessa, 2003; Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999; Panizza, Sadovsky, Sessa, 1997, citados en Buffarini, 2005), que apoyan su hipótesis acerca del tipo de trabajo que se promueve con las propuestas de los libros de texto. En concreto, se pone de manifiesto mediante estas investigaciones las dificultades para encontrar una propuesta didáctica en los libros que fomente la construcción del sentido de las nociones algebraicas en el momento en que se introducen, especialmente mediante situaciones que precisen del uso de las mismas de manera ineludible, es decir, que constituyan herramientas necesarias para finalizar la resolución de las tareas planteadas.

En el diseño de nuestra secuencia, realizamos un esfuerzo especial por considerar las sugerencias mencionadas para introducir prácticas algebraicas. Dado que uno de nuestros puntos de interés es la construcción del sentido, detallamos a continuación la explicación de Buffarini (2005) acerca de las características de las tareas que contribuyen al mismo:

> Entendemos que las situaciones que son gestoras del sentido de un concepto son aquellas para las cuales las estrategias que posee un alumno son suficientes para un primer abordaje pero no alcanzan para dar una respuesta satisfactoria al problema (resultan insuficientes para su total resolución o antieconómicas). El alumno deberá emprender la construcción de herramientas nuevas que confluirán -con una intencionalidad docente puesta de manifiesto en su gestión de la clase- a la introducción del nuevo concepto. (Buffarini, 2005, p.38)

Esta descripción no se contradice con las componentes del sentido de los símbolos planteadas por Arcavi (2005), sino que cada autor centra su mirada en cuestiones diferentes. Buffarini (2005) caracteriza al *tipo de tarea* que promueve la construcción del sentido de nociones matemáticas en general, lo cual se relaciona directamente con el *principio de necesidad* de Sessa (2005). También podemos pensar en vincular esta definición con las *razones de ser* de las nociones abordadas que se plantea desde la TAD y la promoción de la modelización en la iniciación al trabajo algebraico (Ruiz, Bosch y Gascón, 2010; Sadovsky, 2003). Arcavi (2005), por su parte, explicita las capacidades que se espera que logren los alumnos en relación con el uso, manipulación e interpretación de los símbolos. Este autor se centra en la *actividad del estudiante* en relación con los símbolos, en lugar de considerar las características de las consignas, aunque se pueden tener en cuenta las componentes de los símbolos para plantear tareas que favorezcan su apropiación o desarrollo.

¿Podemos decir que la perspectiva de Arcavi (2005) se acerca más a la construcción de significados de Skovsmose (2005) que al desarrollo del sentido de las nociones matemáticas mediante las razones de ser planteado por la TAD?

Es difícil responder a este interrogante con certeza absoluta, pero a partir de nuestra interpretación podemos decir que Arcavi (2005) plantea implícitamente en las componentes de los símbolos *las razones de ser* de los mismos en matemática: cuándo y cómo se utilizan, qué roles pueden desempeñar. Al mismo tiempo, promueve *una actitud crítica* hacia los mismos: “leer a través” de expresiones simbólicas, revisar el significado de los símbolos, compararlo con las intuiciones sobre resultados esperados y el contexto en el que se plantea el problema. Creemos que puede encontrarse un punto de contacto con Skovsmose (2000, 2005) en las acciones que describimos en segundo lugar, lo cual se refuerza en la cita de Arcavi (2013) que realizamos al comienzo del Capítulo 1 y recordamos a continuación: "Un aspecto central del alfabetismo algebraico consistiría pues en la capacidad para inspeccionar y cuestionar cualquier uso, mal uso o abuso de las expresiones algebraicas para sustentar conclusiones" (p. 14)

Este tipo de actitud de "desconfianza" hacia las expresiones simbólicas se puede enmarcar en una propuesta que apunte a las razones de ser de las nociones matemáticas. Consideramos que para lograr una actitud de este tipo el estudiante debe involucrarse en la tarea propuesta y sentirse capaz de cuestionar y buscar explicaciones. Estas son características de los escenarios de investigación planteados por Skovsmose (2000). Pero estas acciones también se favorecen con la actividad de modelización sugerida por la TAD y por Sadovsky (2005).

En síntesis, no vemos contradicciones entre una perspectiva y otra, más allá del descuerdo de Skovsmose hacia el conceptismo. Creemos que estos puntos de vista, centrados en cuestiones diferentes, nos ayudan a enriquecer nuestra mirada sobre el complejo hecho educativo y a promover el tipo de actividad matemática que deseamos por parte de los estudiantes (mencionada en 1.3.3).

2.2.2 Estudios sobre la implementación de propuestas en torno al trabajo algebraico

Uno de los objetivos de nuestro estudio consiste en analizar las interacciones que se producen en el aula al implementar la propuesta de enseñanza. Si bien en el Capítulo 1 caracterizamos de *emergente* el diseño del estudio, creemos que la indagación previa de antecedentes nos posiciona de una mejor manera al momento de analizar la información recabada. Por este motivo, consideramos pertinente tener en cuenta diversos estudios sobre la enseñanza de prácticas algebraicas.

El estudio desarrollado por Sadovsky (2003) constituye un antecedente de especial relevancia para nuestra investigación. Esto se debe principalmente a que se trata de un trabajo en el que se indaga sobre las condiciones didácticas para la articulación entre las prácticas aritméticas y las algebraicas en séptimo grado de la educación primaria. Plantea una ingeniería didáctica para explorar el tipo de conocimientos que producen los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que generan alguna "ruptura" con las prácticas aritméticas y "empujan" hacia prácticas algebraicas. Su trabajo no consiste en una serie de requisitos para abordar el álgebra, sino que se dedica a "explorar la posibilidad de enriquecer las prácticas aritméticas a partir de trascender el nivel estrictamente calculatorio […], ofreciendo la posibilidad de que se desplieguen capacidades y conocimientos que continuarán profundizándose a través de las prácticas algebraicas" (p. 4-5). El estudio se centra en dos grandes líneas para el diseño e implementación de las secuencias de enseñanza: por un lado, considerar las operaciones como relaciones entre números y por otro, resolver problemas que relacionen dos variables que no están determinadas.

¿Por qué este estudio nos resulta tan significativo? Por un lado, porque en nuestro caso, también centramos la mirada en el estudio de relaciones entre variables para iniciar las prácticas algebraicas. Por otro lado, coincidimos con Sadovsky (2003) en la manera de interpretar las interacciones que se producen en el aula en torno a la resolución de los problemas propuestos. En este sentido, las puestas en común constituyen espacios idóneos para generar nuevos problemas (algunos de los cuales pueden escapar de lo esperado), para revisar las normas del trabajo matemático en el aula y para "empujar" hacia una perspectiva más general a aquellos alumnos con prácticas más aritméticas.

¿Se trata nuestro estudio de una *réplica o reproducción*[10] de este antecedente? Si bien hemos mencionado los fuertes puntos de contacto entre ambas investigaciones, también observamos algunas cuestiones que nos distancian. Por un lado, el marco teórico o perspectiva desde la que nos posicionamos no coincide totalmente con la adoptada por Sadovsky (2003). La autora se enmarca fuertemente desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, mientras que en nuestro caso, hemos considerado aspectos relevantes de diferentes perspectivas (en particular, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Educación Matemática Crítica y Álgebra Temprana). Por otro lado, si bien el foco de los dos estudios se sitúa en el trabajo en torno a la relación entre dos variables, en nuestro caso optamos por introducir dichas relaciones a partir de gráficos cartesianos, tablas y lenguaje natural, mientras que Sadovsky (2003) opta por los registros que surgen de los estudiantes a partir del enunciado de problemas coloquiales. Finalmente, otro punto de divergencia se ubica en la metodología, ya que la autora plantea una ingeniería didáctica para llevar a cabo su investigación, mientras que en nuestro caso, desarrollamos un trabajo colaborativo de equipo mixto para la elaboración de la secuencia de enseñanza.

Cabe destacar que al finalizar su trabajo se plantea, entre otros, el siguiente interrogante: "¿Qué relación es viable, es pertinente, entre el docente que implementa un trabajo propuesto con fines de investigación y el equipo que desarrolla el estudio?" (p. 289)

Con nuestro estudio generamos una posible respuesta a ese interrogante mediante un *trabajo colaborativo* al momento de diseñar las tareas de la propuesta de enseñanza y enmarcarlas en la planificación de temas a desarrollar por parte del docente para ese año. En la experiencia que desarrollamos, notamos que este modo de trabajar posibilita llegar a un acuerdo entre los intereses y objetivos particulares de cada una de las partes y enriquece el diseño de las actividades con aportes que se generan desde lugares diferentes (uno, centrado en indagar sobre una manera de introducir prácticas algebraicas y otro, en el conocimiento de los estudiantes y los objetivos de la enseñanza para ese curso en particular).

Entre los objetivos de nuestro estudio también se menciona la caracterización de la gestión de la clase por parte del docente, cuestión que deja pendiente Sadovsky (2003) al plantear los interrogantes que surgen para futuras investigaciones:

> Comenzar a contestar estas preguntas vuelve nuestra mirada hacia la necesidad de un estudio en el que el foco esté puesto en las interpretaciones que hace el docente de estos contenidos, en su manera de gestionarlos en la clase, en la forma en que los articula con los contenidos aritméticos. (p. 289)

[10] Somos conscientes de la imposibilidad de realizar reproducciones idénticas de un estudio cualitativo. No obstante, la pregunta tiene como fin identificar algunos de los aspectos en los que se diferencian ambos estudios.

Si bien hemos señalado algunos puntos en los que nos diferenciamos y otros que compartimos, creemos importante explicitar que al intentar responder a algunos de los interrogantes que se plantea Sadovsky (2003) como perspectivas que surgen de su trabajo, posicionamos el nuestro en continuidad con el suyo. En el análisis que realizamos de las interacciones en clase y producciones de los estudiantes, se generan reiterados puntos de contacto sobre lo que sucede en este espacio de articulación de prácticas aritméticas y algebraicas (Capítulos 4 y 5).

Otro antecedente de interés es la investigación desarrollada por Panizza, Sadovsky, y Sessa (1999), centrada en el estudio didáctico de ecuaciones con dos variables. Este trabajo aporta evidencias sobre la afirmación de Sessa (2005) acerca del modo en que suele iniciarse el álgebra escolar en nuestro país. Consideran como punto de partida una indagación previa sobre una propuesta de enseñanza para la iniciación al álgebra representativa de las prácticas usuales: se introduce el trabajo algebraico a través de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en el primer año de la escuela secundaria. Señalan en dicha instancia que los estudiantes elaboran una concepción según la cual la ecuación consiste en una igualdad numérica y las letras que aparecen en las mismas son números que deben develarse, coincidiendo con las observaciones que realiza el estudio de Buffarini (2005). Luego, entrevistan a alumnos que ya han trabajado sistemas de ecuaciones lineales (15-16 años) en la misma escuela donde realizaron el estudio sobre la propuesta de enseñanza. Les presentan un problema que trata acerca de los precios de dos objetos y cuyo planteo involucra una ecuación lineal con dos variables. Después de analizar posibles soluciones a la ecuación, las autoras proponen una nueva ecuación con dos variables (y establecen un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas) para analizar si los estudiantes establecen relaciones entre la solución que obtienen para el sistema y las soluciones de la ecuación original.

Entre los principales resultados que obtienen cabe destacar aquellos que resultan de especial interés para nuestra investigación. La mayoría de los alumnos indican que la ecuación debe tener una única solución y justifican su respuesta en el contexto del problema o en la concepción que tienen de las letras como números ya establecidos pero desconocidos. Un sólo estudiante plantea una perspectiva funcional para obtener las soluciones de la ecuación, aunque se observa la influencia del contexto del problema en las soluciones que propone.

En términos generales, concluyen que “la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números” (p. 459). La construcción del sentido del nuevo objeto se obstaculiza por la concepción enraizada de las letras como incógnitas. Finalmente, plantean la necesidad de avanzar en el estudio de la relación entre el aprendizaje de las nociones de incógnita y variable para abordar la compleja relación entre la aritmética y el álgebra.

Retomando la perspectiva del Álgebra Temprana que desarrollamos en el apartado 2.1.4, consideramos como antecedente la implementación de una secuencia didáctica con el objetivo de introducir el trabajo algebraico a través de la dependencia de variables en cuatro aulas de una escuela con diversidad étnica en el área suburbana de la ciudad de Boston desde mitad de segundo grado hasta final de cuarto del nivel primario (Carraher et al., 2013). A partir del análisis de los registros de clase, los autores observan un cambio en el modo de razonamiento de los alumnos y resaltan el cambio cualitativo de pasar "de pensar en relaciones entre números y medidas determinadas a pensar en relaciones entre conjunto de números y medidas, que pasa de calcular respuestas numéricas a describir y representar las relaciones entre las variables" (p.161).

En otro estudio que adopta el mismo enfoque, describen experiencias sobre el tratamiento de las operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación en los primeros años del nivel primario (Schliemann et al., 2011). Sus propuestas didácticas se caracterizan por utilizar el soporte contextual en las situaciones problemáticas, introducir de modo gradual la notación formal y articular con los demás temas del currículo.

En la misma línea, Brizuela, Blanton, Murphy Gardiner, Newman-Owens y Sawrey (2015) desarrollan experimentos de enseñanza durante ocho semanas en seis aulas: dos de preescolar, dos de primer grado y dos de segundo grado de dos escuelas de educación primaria de Estados Unidos. Dado que su interés se centra en explorar las ideas de los niños, en muchas ocasiones al finalizar las lecciones no arriban a ideas o representaciones convencionales.

En el marco de dicha investigación presentan un estudio de caso sobre una estudiante de primer grado (Rebeca) que explora las variables y su notación. Analizan las respuestas de la niña de 6 años en tres entrevistas realizadas antes (entrevista inicial) y durante el tratamiento de las tareas de Álgebra Temprana en el aula (entrevista media y final). El estudio pretende (y logra) mostrar cómo se modifican las comprensiones de la niña sobre las variables y su notación durante cada una de las entrevistas (y entre una entrevista y otra). Cuestionan, ante la diversidad de comprensiones que observaron (ver Imagen Nº 1), el argumento dominante según el cual las dificultades de los estudiantes con las variables se deben fundamentalmente a sus propias limitaciones.

Imagen Nº 1: "Comprensiones que demostró Rebeca en cada una de las entrevistas" (Brizuela et al., 2015, p. 25)

El estudio ofrece evidencias de que "la notación de variables está al alcance de los alumnos de grados inferiores de educación primaria, y que las comprensiones de la notación de variables no son fijas sino que varían" en el tiempo (Brizuela et al., 2015, p.26). Atendiendo a las "comprensiones profundas" que muestra Rebeca sobre variables y notación, sostienen que "la presentación tardía del álgebra y de las variables, centrada en algoritmos, podría estar contribuyendo a las dificultades con las que se enfrentan los alumnos mayores" (p.26). Se refuerza de este modo la iniciación temprana en nociones algebraicas a través de perspectivas que exploren el sentido de las ideas y representaciones. Este tipo de tratamiento podría aminorar las dificultades de los estudiantes de grados superiores en relación con el trabajo algebraico.

En el marco de la misma perspectiva, Castro y Molina (2007) estudian las respuestas y explicaciones de 18 alumnos de entre ocho y nueve años, sobre igualdades numéricas basadas en propiedades aritméticas básicas, compuestas por números naturales y operaciones elementales de la estructura aditiva. El análisis se focaliza en identificar la evolución del significado del signo igual y el uso de estrategias de resolución que utilicen relaciones y propiedades aritméticas (pensamiento relacional).

Las autoras utilizan la noción de *pensamiento relacional* (o pensamiento centrado en relaciones) como un tipo de actividad cognitiva estrechamente ligada al trabajo algebraico, especialmente, con el estudio y generalización de patrones y relaciones. En su trabajo de tesis, Molina (2006) realiza una revisión de diversas acepciones y estudios vinculados con el pensamiento relacional. Plantea, para el contexto del trabajo con expresiones aritméticas, que esta noción se refiere a la actividad intelectual de examinar globalmente dichas expresiones, lo cual implica reconocer ciertas relaciones entre ellas o entre sus términos. En este sentido, se entiende que:

> …la importancia del pensamiento relacional radica en que uno de los objetivos de su uso es centrar la atención en las propiedades de las operaciones, en cómo trasformar expresiones y operaciones, y en cómo esta trasformación afecta a las operaciones. La abstracción de los patrones de comportamiento de las operaciones aritméticas al ser manipuladas responde a un aprendizaje significativo de la aritmética y contribuye a la adquisición de una buena base para el posterior estudio formal del álgebra. (Castro y Molina, 2007, p. 71)

Como resultados de su estudio, las autoras refuerzan el hecho de que los estudiantes de educación primaria suelen concebir el signo igual como comando para dar una respuesta y tienden a proceder de izquierda a derecha. Concluyen que:

> …el trabajo con sentencias numéricas verdaderas y falsas basadas en relaciones o propiedades aritméticas básicas, en el que se da prioridad a la discusión y explicación de lo realizado por parte de los alumnos, favorece y desarrolla la comprensión de las igualdades en los estudiantes de dicho nivel escolar. (Castro y Molina, 2007, p. 90)

Añaden que con este tipo de tareas, los estudiantes pueden desarrollar el pensamiento relacional y profundizar su conocimiento sobre las operaciones aritméticas. Por otra parte, las tareas que involucran la construcción de igualdades favorecen la comprensión del signo igual, atendiendo al obstáculo recurrente de hallar en la igualdad el resultado de las operaciones que contiene.

Además de enriquecer el trabajo algebraico, la utilización de una vía funcional sugerida desde la perspectiva de Álgebra Temprana, posibilita la articulación de diferentes lenguajes, lo cual constituye una de las recomendaciones de Socas et al. (1996) para favorecer la comprensión algebraica. Al mismo tiempo, se relaciona con la potente idea de Duval (2008) acerca de que el único modo de acceder a los objetos matemáticos es a través de las representaciones semióticas y que no sólo se debe pasar de un registro a otro que utilice la misma clase de signos (*tratamiento*) sino que se deben propiciar espacios para la *conversión* de un registro a otro, que utilice distintos tipos de signos.

Duval (2008) sostiene que la actividad matemática necesariamente se realiza en un "contexto de representación", por lo que los estudiantes deberían poder reconocer el mismo objeto matemático en distintas representaciones. Por otro lado, señala que los profesores observan generalmente que la adquisición del conocimiento matemático no introduce a gran parte de los alumnos en las características propias del pensamiento matemático, como por ejemplo en la habilidad para cambiar el registro de representación.

Atendiendo a la riqueza conceptual que propicia esta vía de entrada al trabajo algebraico, la propuesta de enseñanza que planteamos adopta esta perspectiva. Veamos a continuación otros antecedentes que realizan aportes sustanciales para nuestro trabajo, porque no sólo se centran en la articulación aritmética-álgebra sino también en el papel que juegan las interacciones en el aula para promover el sentido de las nociones involucradas.

Desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, Sadovsky y Sessa (2005) estudian el rol que juegan los procesos de adaptación al medio y las interacciones sociales que se establecen en los debates entre compañeros y el docente en la transición de la aritmética al álgebra. En el marco de una ingeniería didáctica, describen la implementación de una parte de la propuesta de actividades que involucra ecuaciones con dos variables y un grado de libertad en un séptimo grado de la educación primaria. Organizan el trabajo en el aula en diferentes etapas, que incluyen momentos de trabajo individual, grupal y de debate colectivo. Las autoras se proponen identificar condiciones para constituir un *milieu* generador de nuevas preguntas y estudiar los conocimientos relativos a la transición aritmética/ álgebra que surgen cuando estudiantes de séptimo grado discuten sobre las producciones de sus compañeros.

Este estudio tiene varios puntos de contacto con la investigación que llevamos a cabo. Entre ellos cabe destacar que la propuesta de actividades para iniciar el trabajo algebraico se aplica en un séptimo grado de la educación primaria y que también se opta por la vía de entrada funcional. Los estudiantes deben considerar las nociones de variable y de dependencia, aunque sea implícitamente, para resolver el problema ya que cada solución es un par de números que tiene determinada relación entre sí, y el conjunto solución está compuesto por "muchos" pares. El énfasis de dicho estudio, también compartido, consiste en instalar prácticas nuevas en relación con el trabajo matemático, más que en introducir un nuevo concepto.

Además, cabe destacar que uno de los focos de atención al estudiar las transcripciones de clase son las interacciones entre pares y el docente, identificando aquellas que generan nuevas preguntas y caracterizando las que proponen justificaciones para los procedimientos propios o ajenos. En su descripción sobre el aporte didáctico de los intercambios producidos en clase resaltan el hecho de que el trabajo del otro interpela al propio. Los límites que encuentra cada estudiante para validar las aceptaciones y rechazos sobre los procedimientos de los otros, ofrecen la oportunidad para dar lugar a nuevas preguntas. Se ensancha la capa de relaciones matemáticas y normas de trabajo que se ponen en juego en el debate colectivo. En muchos casos, la formulación de preguntas nuevas es una tarea del docente que sólo puede tener lugar en el marco de los debates que generados como resultado de la confrontación (Sadovsky y Sessa, 2005).

Por otro lado, entre las conclusiones de dicha investigación las autoras resaltan la necesidad de llevar a cabo indagaciones que atiendan a la complejidad de la gestión del docente con el fin de contribuir a la conformación de verdaderas comunidades de producción en las clases de matemática. Este será uno de los puntos a tener en cuenta en nuestro estudio, considerando especialmente los aspectos que señalan en relación con el tipo de decisiones que debe tomar el docente en la clase de matemática: duración de cada actividad, cuestiones que se dejan pendientes, que se cierran o que se ignoran en el momento de la clase y hasta qué punto sostener producciones de los estudiantes que se distancian del proyecto de enseñanza.

Las mismas autoras participan de numerosas investigaciones relacionadas con la temática que nos interesa. En particular, en Cambriglia, Sadovsky y Sessa (2010) relatan el análisis de dos episodios en un aula de 1er año del nivel secundario en el que se evidencia que la producción colectiva da lugar a nuevos problemas: el estudio de una propiedad y la validación de la misma.

Uno de los supuestos de partida de su trabajo es que la interacción en el aula puede considerarse como "medio de construcción", porque posibilita la emergencia de nuevas relaciones en la clase como producto de tensiones en las interacciones más que el producto de determinados sujetos (aislados). Esta perspectiva trasciende al tradicional modelo comunicacional de emisor – mensaje – receptor, ya que considera que los sujetos que participan asumen roles de productores e intérpretes, en algunas ocasiones de manera fusionada.

Nos interesa destacar algunas de las ideas que surgen del trabajo mencionado en lo que concierne al rol del docente. Las autoras sostienen que constituye una parte fundamental en la conformación de las interacciones como *medio para la producción* y en particular, para la evolución de los procesos de generalización con las diferentes acciones que despliega el profesor a partir de las distintas posiciones de los alumnos. Por otro lado, indican que "las generalizaciones en el aula de matemática se darían con y contra la gestión del docente" (p. 143), de hecho, se evidencian situaciones en las que los roles se "intercambian" en referencia a las acciones de explicar y aprender.

Resaltan el papel de los intercambios y tensiones producidas en clase como generadores de condiciones para que los estudiantes "interpelen lo general pudiendo dar origen a interrogantes que no tendrían cabida si la producción personal no se viera confrontada con la de los otros o con la que se va elaborando con los otros" (p. 150).

No sólo compartimos la postura de estas autoras, tanto en lo que concierne al rol del docente como al papel de las interacciones en el aula, sino que la asumimos como supuesto de partida al momento de interpretar las transcripciones de clase.

Arcavi (2005) describe un estudio piloto llevado a cabo con estudiantes de 13-14 años de edad en una escuela que abarca distintos niveles educativos. Implementan una actividad para introducir la idea de inecuación y su notación simbólica, inspirada en las "matemáticas realistas" de la escuela holandesa. Luego del análisis de la situación con ejemplos particulares y del diálogo entre el docente y los alumnos, surge la representación en símbolos de una inecuación pertinente para el problema utilizando dos letras diferentes para identificar a la variable. La representación en la recta numérica es propuesta por el docente (a pesar de que los estudiantes ya conocían esta forma de representación, no surge de ellos para este problema), lo mismo que la pregunta acerca de si las dos representaciones (simbólica y gráfica) "dicen" lo mismo. Esta última intervención docente resulta apropiada porque plantea la discusión explícita acerca de diferentes maneras de expresar una idea o proposición y porque ofrece una oportunidad a los estudiantes para expresar libremente cómo perciben a los símbolos en comparación con otras representaciones (Arcavi, 2005).

El autor desarrolla este estudio con el fin de ejemplificar propuestas de enseñanza que promuevan algunos aspectos de la definición con respecto al sentido de los símbolos (mencionada en el apartado 2.2.1). Reconoce, finalmente, algunas acciones docentes que podrían favorecer dicho sentido:

a) identificar el potencial de las situaciones relacionadas con el sentido de los símbolos y hacerles lugar en los diálogos que se plantean en el aula,
b) promover la expresión de percepciones subjetivas acerca de los símbolos,
c) respetar y estimular ideas desarrolladas parcialmente, y
d) no apresurarse demasiado en realizar un "cierre" del tema (Arcavi, 2005)

En nuestro análisis de los intercambios producidos en clase a partir de la implementación de la propuesta, consideramos como uno de los puntos de interés las intervenciones docentes. Coincidimos con Arcavi (2005) acerca de la relevancia de las acciones del docente para promover u obstaculizar la construcción del sentido de los símbolos. Además, notamos una similitud entre las dos últimas acciones mencionadas por este autor y las planteadas en términos generales por Quaranta y Tarasow (2004), que permiten mantener la incertidumbre y fomentar la validación por parte de los alumnos (explicitamos las mismas en el apartado 2.1.2 de este capítulo).

Buffarini (2005) realiza el estudio de libros de texto que describimos en el apartado anterior como parte del *análisis a priori* de su investigación, caracterizada como ingeniería didáctica. En la parte experimental de su investigación, la docente propone un problema a estudiantes universitarios con la modalidad de trabajo individual. Luego, los agrupa de forma conveniente (de acuerdo con el tipo de estrategia que desplegaron en la primera parte) y les pide que acuerden un procedimiento de resolución del problema y justifiquen su elección. La investigadora graba en audio los intercambios producidos en cada grupo y luego los analiza. Profundizaremos en la forma de organizar este análisis porque resulta un insumo importante para nuestro estudio sobre los intercambios producidos a partir de la implementación de la propuesta de enseñanza.

La autora identifica "pequeños enunciados" de interés didáctico que se expresan en términos de reflexiones. Las mismas "se agruparon tanto en torno a los procesos de construcción de conocimientos en el dominio del álgebra como alrededor del papel de las interacciones como medio de evolución en la construcción de dichos conocimientos" (p. 206). Los objetos de análisis del trabajo en interacción con la producción del otro son los siguientes:

> …los pedidos de explicación que los alumnos demandan a sus compañeros sobre las producciones individuales, las explicaciones y justificaciones que dan, las discusiones que se generan, la coordinación de procedimientos propios con los del otro, las co-elaboraciones en el proceso de búsqueda de un acuerdo, las intervenciones del docente, los momentos en que se puede identificar que hubo evolución de estrategias, entre otros. (p. 215).

Esta autora observa que el dispositivo de conformar grupos para fomentar intercambios con las producciones de otros y lograr consensos, resulta fértil si las producciones son muy diferentes y existe un cierto grado de incertidumbre sobre la producción propia. En otro caso, se concluye rápidamente y no se produce ninguna discusión. Además, identifica algunos efectos del tipo de trabajo que se despliega a partir del intercambio con las producciones de los otros:

a) Cuando el estudiante debe dar una fundamentación sobre su producción se enfrenta con lo que verdaderamente hizo o sabe y esto permite desplegar lo individual (que muchas veces permanece oculto inclusive para el propio productor).

b) Algunos estudiantes logran recién en esta etapa comprender el problema o evolucionar la visión que tenía sobre el mismo.

c) El estudiante revisa y reelabora su producción a raíz de los intercambios producidos en el grupo. "El aporte de unos modifica, en algún sentido, el sistema de decisiones de otros y contribuye a profundizar el conocimiento sobre los objetos puestos en juego y los sentidos de los mismos" (p.221).

d) El trabajo grupal permite conocer mejor las relaciones que se ponen en juego en la resolución escrita. Estas últimas pueden estar basadas en "declaraciones" que los estudiantes no pueden justificar, lo cual se pone en evidencia a partir del trabajo con otros. Además, dos producciones escritas similares pueden provenir de conocimientos diferentes de cada alumno. En el caso de las producciones escritas grupales, pueden conllevar distintos grados de adhesión de los miembros del grupo, en función de cuánto se involucraron al momento de las interacciones.

Además, entre las cuestiones que surgen del trabajo grupal señala al contexto del problema como posible restricción de las soluciones de la ecuación y los conocimientos de los estudiantes sobre la validación en matemática (por ejemplo: es más directo justificar con números, la aceptación por contrato del trabajo algebraico para justificar, la idea de que si funciona con números "grandes" o "feos" es más seguro que funcione para cualquier número, justificar equivale a explicar con palabras lo realizado).

En lo que concierne a las intervenciones docentes, Buffarini identifica algunos aspectos de las mismas que promueven la evolución de aprendizajes individuales a partir de las interacciones entre estudiantes. Entre ellos, cabe destacar que ciertos aportes del profesor permiten que surjan concepciones de los alumnos que de otro modo permanecerían en el ámbito privado. Además, posibilitan un retorno reflexivo sobre la acción:

> …comparar y coordinar distintas producciones, señalar contradicciones, reformular algo dicho por un alumno para que haga perceptible para todos, exigir no evadirse de entender una cosa porque se entendió otra, repreguntar en el caso que esto no surja dentro del mismo grupo, hacer explícito procedimientos para reorientar el trabajo en caso de ser necesario, recordar cuestiones que hayan surgido en el grupo en un momento previo, habilitar los procedimientos de todos los alumnos, activar conocimientos que algún alumno disponga y que no fueran activados por la discusión, hacer síntesis parciales de lo que se vaya avanzando en el trabajo en el grupo, demandar formas de validación, no resignar a que se establezcan acuerdos rápidos y se tomen "decisiones sin análisis". (p. 222).

Tanto los efectos del trabajo en interacción con otros como la caracterización del tipo de intervenciones docentes que realiza esta autora resultan sumamente significativos para el análisis de los intercambios producidos en las clases estudiadas. Si bien Buffarini realiza su investigación con estudiantes universitarios, compartimos el propósito de "precisar las condiciones bajo las cuales las interacciones entre pares, con intervención y sostén docente, colaboran en la evolución de las conceptualizaciones de los alumnos y en la adquisición de nuevos sentidos para el trabajo algebraico" (p. 215). Además, esta autora plantea la necesidad de estudiar el papel de las interacciones en otros trayectos, que involucren diferentes conocimientos y distintos momentos de la escolaridad, lo cual da lugar al trabajo que proponemos para la iniciación al lenguaje algebraico con niños de séptimo grado.

Por último, añadimos la observación que realiza Buffarini (2005) sobre la apropiación del álgebra como herramienta de modelización y validación superando la imagen de la misma como un conjunto de técnicas de cálculo. Sugiere que se presenten problemas en los que al mismo tiempo que el álgebra sea necesaria para su resolución se conjugue con la construcción de la técnica de resolución.

En nuestro caso en particular, el foco de atención se coloca en la construcción del sentido del lenguaje algebraico por sobre el aprendizaje de técnicas para manipular la simbología, teniendo en cuenta que los estudiantes seleccionados se inician en el álgebra escolar con la propuesta de enseñanza diseñada y que hacemos prevalecer el Aspecto Básico A sobre el B para este momento escolar (Kaput, 2008).

2.3 SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo realizamos un recorrido por los referentes teóricos y antecedentes más importantes para nuestra investigación. En la descripción que hemos presentado consideramos especialistas que se enmarcan en diferentes perspectivas sobre la didáctica de la matemática. No obstante, creemos que podemos establecer algunos vínculos entre determinados aportes que nos posibilitan acercarnos a la situación educativa desde distintos lugares. El objeto de estudio es complejo e imposible de abarcar en su totalidad. Tomamos decisiones para realizar un recorte de la realidad estudiada y ubicarnos en determinada posición para diseñar las tareas y luego, observar y analizar lo sucedido en la clase.

En este sentido, intentamos integrar las nociones principales que tuvimos en cuenta en la Imagen Nº 2 que presentamos debajo. Uno de los objetivos de nuestra investigación consiste en diseñar una propuesta de enseñanza que articule prácticas aritméticas y algebraicas y genere al menos algunos aspectos de la *actividad matemática* del estudiante que hemos planteado en el Capítulo 1 (apartado 1.3.3), desde el punto de vista de Chevallard et al. (2000).

Consideramos la *relación entre variables* como hilo conductor de la secuencia atendiendo a la vía de entrada funcional al trabajo algebraico sugerida por la perspectiva del Álgebra Temprana (Brizuela et al., 2015; Schliemann et al., 2011; Carraher et al., 2013) y Sessa (2005). Desde este lugar, planteamos tareas desde diferentes *registros de representación* (gráfico, tabular, coloquial, simbólico), utilizando principalmente la *conversión de registros* como parte de las consignas a resolver (Duval, 2008). Algunas tareas promueven un trabajo de indagación que se corresponde con características de los *escenarios de investigación* y generalmente con referencias a una *semirrealidad* (Skovsmose, 2000).

Consideramos desde la perspectiva del Álgebra Temprana el aprovechamiento de nociones *potencialmente algebraicas*, el establecimiento de *relaciones con otros temas del currículum* y la *introducción gradual de la notación formal*. A partir del trabajo colaborativo con el equipo mixto se ubica la propuesta de enseñanza previo al tratamiento de la proporcionalidad y se eligen situaciones que podrían retomarse durante el abordaje de dicho tema. Además, en algunas tareas surge la posibilidad de recuperar propiedades de las operaciones con los números naturales.

Imagen Nº 2: Síntesis de aportes teóricos considerados para la propuesta de enseñanza

En relación con el Problema de los gogos (actividad principal de la secuencia) se espera que surja el registro simbólico como herramienta para dar respuesta al problema, considerando el *principio de necesidad* mencionado por Sessa (2005) y las características de las actividades promotoras de *sentido* que describe Buffarini (2005). La tarea también favorece el uso de la expresión algebraica como *modelo* de la situación, poniendo de manifiesto la *razón de ser* señalada por la TAD para contribuir a la construcción del *sentido* del trabajo algebraico. La elección de estudiar relaciones entre variables y utilizar el álgebra para modelar se relaciona con el *Aspecto Básico A* y las líneas 2 y 3 mencionadas por Kaput (2008) en su caracterización de álgebra y razonamiento algebraico.

Los aportes de Arcavi (2005) en relación con el *sentido de los símbolos* nos posibilitan delimitar nuestras tareas para contribuir al abordaje de la tercera componente mencionada, entendiendo que su desarrollo se debe propiciar en un proyecto a largo plazo.

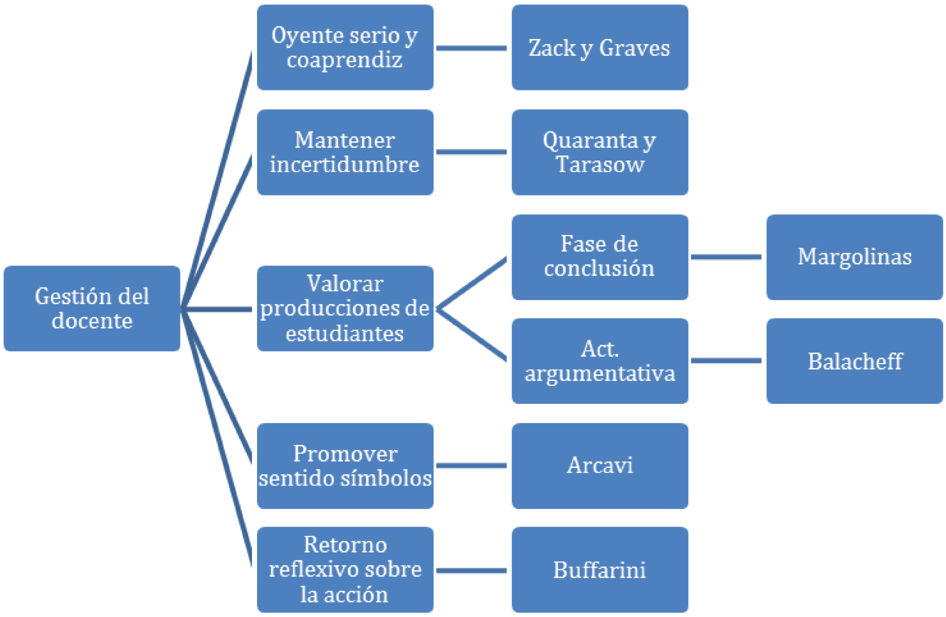
Las características del grupo de estudiantes, antecedentes y porvenir de los mismos, en términos de Skovsmose (2005) delimitan el *significado* que otorgarán a las tareas planteadas por el docente y se reflejarán en las intenciones que los conducen a actuar de determinada manera. Reconocemos la importancia de las características de la propuesta de enseñanza (en particular lo referido a los *contextos* y al *tipo de desafío* que impliquen) por lo que hemos tomado decisiones en equipo con las docentes de los séptimos grados de la institución elegida (*trabajo colaborativo* para el diseño de las tareas). Sadovsky (2005) plantea la necesidad de reflexionar sobre las potencialidades y limitaciones que aporta determinado *contexto*. Volveremos sobre esta cuestión al analizar las tareas implementadas.

En la parte superior de la Imagen Nº 2 expresamos el interrogante *¿construimos sentido o significado?* Si bien en los párrafos anteriores describimos sintéticamente el modo en que hemos articulado los aportes teóricos para la elaboración de la propuesta de enseñanza, la reflexión en torno a dicho interrogante la haremos luego de implementar las tareas en el aula. Como puede apreciarse en la misma ilustración, recogemos datos (audios sobre los intercambios, fotografías de resoluciones en el pizarrón, producciones de estudiantes) que nos posibilitan reconstruir lo sucedido y repensar la cuestión del sentido y/o significado centrando el análisis en la actividad de los estudiantes y el docente.

Coincidimos con Panizza (2005) en que la riqueza de una propuesta de enseñanza se despliega en su totalidad si se la combina con *intervenciones del docente* que favorezcan el *intercambio y la validación* de las producciones por parte de los estudiantes. El papel del mismo en la clase puede propiciar espacios para reflexionar e intercambiar ideas y producciones o simplemente escuchar y copiar. Si bien los casos mencionados resultan extremos creemos que la manera en la que se gestiona la clase influye en el modo en el que los alumnos se apropian de las tareas y participan de las mismas. En relación con el rol del docente en el aula (ver Imagen Nº 3), consideramos rasgos mencionados por didactas que nos posibilitan identificar intervenciones que favorecen *mantener la incertidumbre*, *reflexionar* en torno a lo realizado (Quaranta y Tarasow, 2004; Arcavi, 2005; Buffarini, 2005) y asumir el rol de *oyente serio* y *coaprendiz* (Zack y Graves, 2002). De la misma manera, también caracterizamos la manera de validar las producciones de los estudiantes o *fase de conclusión* según Margolinas (1992) y las categorías que surgen en torno a la *actividad argumentativa* según se trate de una explicación, validación o prueba (Balacheff, 2000)

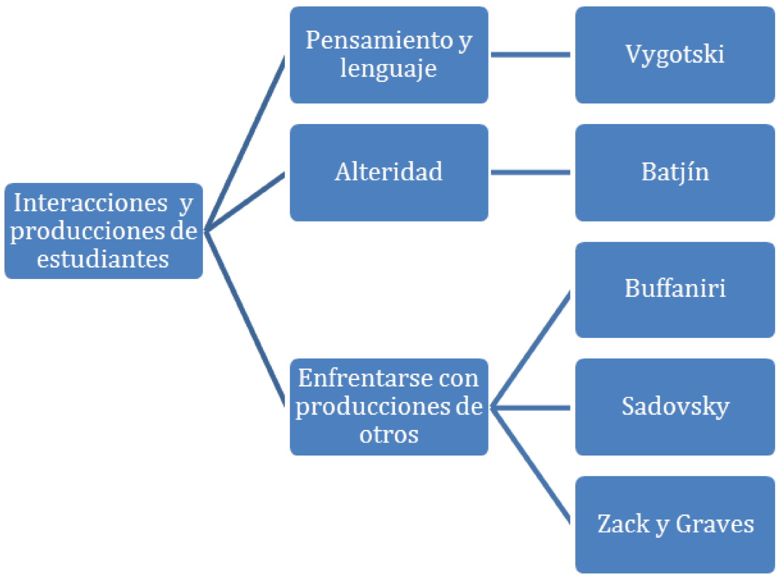
Los diferentes aportes en relación con el actuar del docente nos permiten observar sistemáticamente la gestión de las clases observadas. Los sintetizamos en la imagen siguiente:

Imagen Nº 3: Aportes teóricos para estudiar la gestión de la clase por parte del docente



Otro foco de interés para estudiar la implementación de la propuesta reside en las interacciones que se producen en el aula en torno a las tareas. Sadovsky (2005) menciona su consideración como aspecto a tener en cuenta al momento de repensar la cuestión del sentido en educación matemática. Es por ello que dedicamos un apartado especial en este capítulo para describir los trabajos de diferentes autores que centran su mirada en las interacciones entre docentes y alumnos y el modo en que las mismas pueden influir en la concepción personal de la tarea planteada y las nociones involucradas. Sintetizamos los aportes en relación con esta cuestión en la siguiente imagen:

Imagen Nº 4: Aportes teóricos sobre el análisis de las interacciones en el aula



Como podemos observar, un grupo de especialistas (Buffarini, 2005; Sadovsky, 2005; Zack y Graves, 2002) señalan algunos de los efectos que pueden surgir a partir de los intercambios entre estudiantes en torno a sus propias producciones. Entre ellos, rescatamos la posibilidad de *repensar* la producción propia al compararla con otras alternativas, adoptar una *posición más general* en torno a un problema, la necesidad de *validar* o dar *explicaciones* sobre la propia producción o la de un compañero porque no "convence" o resulta confusa para algún interlocutor (que podría ser el docente). A su vez, los aportes de Vygotski (1993, 1984) sobre la interrelación entre *pensamiento* y *lenguaje* y de Bajtín (2011) acerca de la posibilidad de *nutrir nuestros enunciados* con "porciones" de otros, nos ayudan a comprender la potencialidad de los intercambios al momento de promover aprendizajes. Estas nociones guían nuestra observación de las interacciones que tienen lugar en la clase a raíz de la implementación de la propuesta de enseñanza.

Finalmente, en lo que concierne a los antecedentes (Sección 2.2) nos posibilitan conocer diferentes miradas sobre la articulación de la aritmética y el álgebra en propuestas de enseñanza (de libros de texto o diseñadas e implementadas por los investigadores). Entre las principales conclusiones de estos trabajos rescatamos la preocupación por plantear formas alternativas para la enseñanza de este dominio de la matemática, puesto que su introducción usual mediante resolución de ecuaciones suele limitar la potencialidad de las nociones trabajadas y generar dificultades para lograr aprendizajes posteriores. Al momento de analizar nuestra propuesta de enseñanza, estudiamos la posibilidad de establecer conexiones con otros estudios relacionados con la temática elegida.

Como puede observarse en las tres imágenes anteriores, los constructos teóricos que hemos considerado en nuestro estudio provienen en su mayoría de los referentes del Marco Teórico (Sección 2.1). No obstante, también incluimos algunos aportes relevantes que surgieron de los antecedentes[11] (Sección 2.2), por ejemplo, las componentes del sentido de los símbolos de Arcavi (2005). En síntesis, algunos de los trabajos que mencionamos en este capítulo nos ayudan a delinear los objetivos de la investigación; otros, contribuyen al diseño de las tareas y análisis de su implementación en el aula, pero todos, en su conjunto, conforman nuestras herramientas teóricas para llevar adelante la investigación.

Las nociones teóricas descriptas en este capítulo guían nuestras decisiones y especialmente, las interpretaciones que hacemos de los datos recogidos. Somos conscientes de que con la misma información y desde otra perspectiva teórica, se podría llegar a diferentes lecturas sobre lo acontecido en el aula, por lo que consideramos de especial importancia describir claramente desde dónde nos posicionamos para desarrollar nuestro estudio. Esta caracterización también otorga fiabilidad al trabajo, puesto que no podría reproducirse en condiciones similares si se adopta otra postura.

[11] Somos conscientes de que lo correcto es incluir en el marco teórico todos los constructos que se utilicen en el estudio. No obstante, para evitar reiterar algunos trabajos en dos secciones consecutivas (Marco teórico y antecedentes) lo ubicamos en la sección de antecedentes (porque se trata de estudios relacionados con la temática elegida) y luego, en la síntesis del capítulo (Sección 2.3) destacamos las herramientas conceptuales con las que llevamos a cabo nuestra investigación.

CAPÍTULO 3
La propuesta de enseñanza

En este capítulo describimos el recorrido realizado para llegar al diseño definitivo de la propuesta de enseñanza. Tal como lo mencionamos en el Capítulo 1, la elaboración de la propuesta implicó un *trabajo colaborativo* entre investigadoras (la directora y la autora de la tesis) y las docentes de los dos séptimos grados de la escuela seleccionada.

En cuanto a la organización del capítulo, el mismo está compuesto por tres secciones. La primera de ellas (sección 3.1) refiere a la fundamentación de la propuesta de enseñanza a partir de referentes teóricos mencionados en el capítulo anterior. Dedicamos la segunda sección (Sección 3.2) a explicitar en detalle el trabajo colaborativo que hemos llevado a cabo para el diseño de las tareas. Organizamos esta sección en cuatro apartados. Comenzamos con los acuerdos realizados entre docentes y las investigadoras en relación con los objetivos y articulación con los temas de la planificación anual de los séptimos grados elegidos (Apartado 3.2.1). En segundo lugar, explicitamos el proyecto inicial de la propuesta de enseñanza que presentamos a las docentes para trabajar en torno al diseño definitivo de las tareas (Apartado 3.2.2). En tercer lugar, describimos las modificaciones realizadas sobre dicho proyecto inicial a raíz de los intercambios producidos en los encuentros del equipo mixto (Apartado 3.2.3). En el cuarto apartado, incluimos el diseño definitivo de las tareas, junto con un análisis previo de las mismas (Apartado 3.2.4).

Al final, como lo hemos hecho en cada uno de los capítulos anteriores, recuperamos los aspectos más importantes relacionados con el diseño de la propuesta en la síntesis del capítulo (Sección 2.4).

3.1 FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La propuesta de enseñanza que planteamos tiene como objetivo principal iniciar el trabajo algebraico en séptimo grado de la educación primaria desde una *vía funcional*. Tal como lo indicamos en el capítulo anterior, la puerta de entrada al álgebra que hemos elegido es una de las sugeridas por Sessa (2005) como una posible alternativa al tratamiento mediante la resolución de ecuaciones. Desde la perspectiva del Álgebra Temprana adoptada, también se destaca la potencialidad de la noción de función para pensar en articular prácticas algebraicas con otros temas del currículum desde los primeros años del nivel primario. Cabe aclarar que no es nuestro propósito abordar en forma exhaustiva ni formalizar las nociones de función y variable con los niños de séptimo grado (ni lo plantean de este modo los autores considerados). La vía de entrada funcional hace referencia al trabajo en torno al establecimiento de *relaciones entre variables* partiendo de los saberes previos de los estudiantes y ofrece la posibilidad de articular diferentes *registros de representación* (Duval, 2008).

La mayoría de las tareas planteadas se enmarcan en un *contexto* que pretendemos que resulte significativo para los estudiantes, teniendo en cuenta el punto de vista de Skovsmose (2000, 2005). Por este motivo, cobra especial relevancia el *trabajo colaborativo* que realizamos con las docentes de los dos séptimos grados para el diseño de las tareas, bajo el supuesto de que sus conocimientos acerca de las características del grupo de estudiantes elegido (y de niños de esa etapa etaria en general) enriquecen notablemente los aportes de las investigadoras. Las modificaciones que proponen se vinculan especialmente con los contextos y complejidad de las tareas, adecuándolas al grupo de estudiantes.

En relación con lo anterior, vale la pena recordar que el *soporte contextual* es uno de los principios a considerar desde la perspectiva del Álgebra Temprana. Sadovsky (2005) señala el papel del *contexto* como uno de los aspectos a tener en cuenta al momento de repensar la *construcción del sentido*, advirtiendo que el mismo puede facilitar u obstaculizar tal construcción, porque condiciona la matemática que se produce en el aula. Retomaremos esta discusión al momento de analizar la implementación de la propuesta.

Otro de los aspectos que hemos considerado tiene que ver con la *actividad de modelización* como una de las *razones de ser* del trabajo algebraico, desde los aportes de la TAD. Para contribuir a la construcción del sentido desde esta perspectiva, planteamos algunas tareas en las que la expresión algebraica surge como modelo de la situación problemática.

OBSERVACIÓN:

Si bien en esta página se utiliza en reiteradas ocasiones la palabra “contexto” queremos hacer hincapié en las características diferentes que adopta este término según el marco teórico que lo sustente. Sadovsky (2005) cuestiona la suposición de que en educación matemática, siempre que sea posible, *la fuente de sentido* debe provenir de contextos extramatemáticos. Invita a reflexionar críticamente en torno a qué es lo que aportan y qué ocultan los contextos elegidos para abordar determinados conceptos, y en función de dicho análisis, decidir si conviene o no utilizarlos. Desde el punto de vista de la Educación Matemática Crítica, se utiliza el término “referencias” (que pueden corresponder a la matemática, a una semirrealidad o a la realidad) y se señala que “incluyen el contexto para ubicar un objetivo para la realización de una acción (llevada a cabo por los estudiantes en un salón de clase)” (Skovsmose, 2000, p.9). En esta perspectiva, el foco se centra en la atribución de significados a las acciones realizadas por los estudiantes, más que en los conceptos matemáticos.

En síntesis, ninguna de las dos perspectivas asume como axioma el uso de contextos extramatemáticos para dotar de sentido/significado a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En el primer caso se propone un análisis didáctico previo sobre los contextos que se pretenden utilizar para determinar su conveniencia desde el punto de vista matemático; en el segundo caso, se plantea la selección de contextos que inviten a los estudiantes a involucrarse en la actividad propuesta, con el objetivo de favorecer la atribución de significado a las acciones que llevan a cabo.

En la tabla siguiente (Tabla Nº 3) presentamos la estructura general de la propuesta de enseñanza. Se divide en dos bloques con objetivos diferenciados:

Tabla N° 3: Estructura general de la propuesta de enseñanza	
Bloque	**Objetivos**
A	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos. Interpretar gráficos.
B	Introducir el lenguaje algebraico. Articular registros coloquial, simbólico, gráfico y tabular.

El Bloque A incluye en principio tareas lúdicas para abordar las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos. Luego presentamos gráficos que refieren a contextos diversos (acordes con las características de los estudiantes) para su interpretación.

El Bloque B se inicia con el Problema de los gogos. En dicha tarea se introduce el lenguaje algebraico como herramienta para dar respuesta a la situación planteada. La expresión simbólica es un modelo para representar la relación entre las variables involucradas. En Kiener (2015) justificamos detalladamente esta tarea. A continuación, recuperamos los rasgos más sobresalientes de la misma.

Una de las características que vale la pena mencionar acerca del Problema de los gogos es que pone de manifiesto el *principio de necesidad* de Sessa (2005). Su resolución puede iniciarse por estrategias aritméticas, pero las mismas no alcanzan para dar respuesta al problema. Con este tipo de tareas pretendemos evitar el uso forzado del álgebra en problemas aritméticos (Buffarini, 2005; Oller et al., 2014) para *promover el sentido* de este dominio de la matemática, ausente en los tratamientos de muchos libros de textos (de acuerdo con el Proyecto 2061 mencionado en el capítulo anterior).

La tarea en cuestión hace referencia a una de la *razones de ser* del lenguaje algebraico: representar con símbolos la relación entre dos cantidades indeterminadas. Consideramos que esta es una forma de iniciar un camino, en el nivel primario, que proyecte trabajar en los niveles siguientes el álgebra como *herramienta de modelización y validación*, al modo que lo plantea Buffarini (2005) en su trabajo con estudiantes universitarios. Intentamos, de esta manera, promover la *construcción del sentido* desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Al recuperar la concepción del *sentido de los símbolos* que propone Arcavi (2005), en el proceso de elaboración de las tareas tuvimos como propósito iniciar el desarrollo de la tercera componente que explicitamos a continuación:

- Conciencia de que uno puede *diseñar en forma exitosa relaciones simbólicas* que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada.

Queremos aclarar que de ningún modo estamos afirmando que con la propuesta de enseñanza diseñada abordamos de forma exhaustiva la componente mencionada (ni creemos que eso sea posible desde una única secuencia de enseñanza). El autor describe las componentes del sentido de los símbolos para organizar un trabajo a largo plazo que promueva dichos aspectos durante la escolaridad.

En nuestro caso en particular, intentamos desarrollar las componentes señaladas con las tareas correspondientes al Bloques B de la propuesta de enseñanza (en el Bloque A se trabaja la relación entre variables pero desde el registro gráfico). Pretendemos trabajar en torno a la expresión en símbolos de determinada información sobre la relación entre dos variables y al mismo tiempo, promover la comprensión de los símbolos que intervienen y de la capacidad que tienen para modelizar la situación planteada.

Al final del Bloque B de la propuesta de enseñanza, sin perder de vista que los contextos resulten cercanos a los estudiantes, profundizamos la articulación entre diferentes registros de representación, considerando la importancia significativa de los mismos en el aprendizaje de la matemática en general (Duval, 2008) y del trabajo desde la perspectiva funcional, en particular.

En términos generales pretendemos promover, a partir de las tareas diseñadas, la expresión de las ideas por parte de los estudiantes, la toma de decisiones y justificación de las respuestas, aprovechando las oportunidades que ofrece el espacio de articulación de prácticas aritméticas y algebraicas para ello (Sadovsky, 2003). No obstante, sabemos que para lograr los intercambios deseados debe gestionarse la clase para favorecerlos. En los dos capítulos siguientes vinculamos las tareas con las intervenciones docentes y las producciones orales y escritas de los estudiantes.

A continuación describimos el proceso que llevamos a cabo para el diseño de la propuesta de enseñanza, teniendo en cuenta el trabajo colaborativo realizado con las maestras.

3.2 DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

El relato sobre el proceso de diseño de las tareas está organizado en cuatro apartados. En primer lugar, mencionamos los acuerdos realizados entre docentes e investigadoras en torno a objetivos y articulación de la propuesta en relación con la planificación anual para el curso seleccionado (Apartado 3.2.1). En segundo lugar, incluimos el proyecto inicial de la propuesta de enseñanza que elaboramos las investigadoras y presentamos a las maestras para ponerlo en discusión y realizar las modificaciones que sean necesarias (Apartado 3.2.2). Como tercer punto, describimos las sugerencias y modificaciones que surgieron sobre las tareas planificadas a raíz de los encuentros del equipo mixtos (Apartado 3.2.3). Finalmente, presentamos el diseño definitivo de las tareas que conforman la propuesta de enseñanza (apartado 3.2.4).

3.2.1 Acuerdos generales sobre el diseño de la propuesta

Como lo mencionamos en la metodología (Capítulo 1), las investigadoras proporcionamos a las docentes de los séptimos grados parte del material teórico que fundamenta nuestra investigación (referido a la perspectiva del Álgebra Temprana), junto con el siguiente objetivo: "Explorar las dificultades y potencialidades de la iniciación al trabajo algebraico en séptimo grado de la escuela primaria mediante una propuesta didáctica centrada en la construcción del concepto de variable y dependencia"

Las docentes se muestran interesadas desde el principio en generar propuestas motivadoras para los estudiantes que promuevan la construcción del sentido de las nociones involucradas.

Señalan que la noción de dependencia entre variables no forma parte explícita de los contenidos que deben desarrollar, por lo que debemos pensar de qué manera articular las tareas con el programa que planificaron para el año lectivo. Además, manifiestan preocupación por llegar a trabajar en profundidad los temas que se evalúan en los exámenes de ingreso al nivel secundario en las dos escuelas dependientes de la Universidad Nacional del Litoral[12]. Por este motivo, analizamos en conjunto los temas que se incluyen en los programas mencionados e identificamos la noción de "Proporcionalidad directa" como tema conector entre nuestra propuesta y la de las docentes. De modo que la secuencia de enseñanza constituiría, en parte, una preparación previa para desarrollar dicho tema, en el sentido de que se podrían retomar algunas tareas para reflexionar en torno a la noción de proporcionalidad directa.

Una vez acordado este punto, reprogramamos un nuevo encuentro para trabajar en torno a la versión inicial de las tareas.

3.2.2 Proyecto inicial de la propuesta de enseñanza

El criterio principal que utilizamos para organizar las tareas es introducir el álgebra escolar desde una vía funcional, sin perder de vista que debemos articular con el tema "Proporcionalidad directa" según lo mencionado anteriormente.

En el proyecto inicial, comenzamos con tareas que llamamos "Introductorias" (Bloque A). En las mismas se abordan las nociones de pares ordenados, ejes cartesianos e interpretación de un gráfico dado.

La tarea central de la propuesta es la Tarea 1, "El problema de los sobres de figuritas", con la cual se inicia el Bloque B. La misma tiene como propósito introducir, por primera vez, el lenguaje algebraico como modelo de la relación que existe entre dos variables. Por ese motivo, es la tarea que analizaremos *a priori* y *a posteriori* con mayor profundidad.

Las dos tareas siguientes (Tareas 2 y 3) promueven el establecimiento de relaciones entre el lenguaje coloquial, simbólico y tabular. En particular, en la Tarea 3 aparece un proceso inductivo en el cual deben encontrar la regla para relacionar pares de valores dados. Este trabajo, puramente intuitivo, requerirá un tratamiento más formal en etapas posteriores.

[12] Se trata de la Escuela Industrial Superior y la Escuela Secundaria de la UNL. La preocupación de las docentes está vinculada con que gran parte de sus estudiantes pretende ingresar a alguna de estas dos escuelas.

La Tarea 4 retoma el registro gráfico de las tareas “Introductorias” para articularlo con el tabular y simbólico que venían trabajando en las Tareas 1, 2 y 3. Además, incluye una relación de proporcionalidad directa (aunque no se explicita este concepto). Uno de los propósitos de esta tarea es que las docentes puedan retomar la misma para desarrollar el tema mencionado en una etapa posterior. Es de destacar que este problema posibilita discutir en torno al dominio de validez de los elementos involucrados (número de alfajores y precios).

La Tarea 5 presenta diferentes relaciones funcionales, a partir de las cuales los estudiantes harán uso de los distintos registros de representación.

Las dos últimas tareas (Tareas 6 y 7) promueven la relación entre funciones afines, con el propósito de establecer comparaciones e interpretaciones a partir del uso de distintos registros de representación.

Presentamos a continuación la descripción del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza. Partimos de su estructura general organizada en la Tabla Nº 4 para luego detallar las características de las tareas.

Tabla Nº 4: Organización de tareas y objetivos del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza

Bloque	N° Tarea	Nombre	Objetivo
A	1	**Batalla Naval**	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.
	2	**Bingo de pares ordenados**	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.
	3	**Búsqueda del tesoro**	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.
	4	**El paseo de Carolina**	Interpretar gráficos.
B	1	**El problema de los sobres de figuritas**	Introducir el lenguaje algebraico.
	2	**Lenguaje coloquial y simbólico**	Realizar traducciones del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.
	3	**Descubre la regla**	Identificar la expresión simbólica que representa la relación entre los pares de valores dados.
	4	**El problema de los alfajores**	Articular registros gráfico, simbólico y tabular. Identificar pares de valores que no corresponden a la situación.

	5	**Para practicar lo aprendido**	Profundizar la articulación entre registros de representación. Comparar los distintos gráficos y establecer relaciones con sus expresiones simbólicas.
	6	**El problema de la billetera**	Comparar representaciones gráficas.
	7	**Para practicar lo aprendido**	Comparar representaciones gráficas.

Descripción de tareas del BLOQUE A (Proyecto inicial)

***Tarea 1:* Batalla Naval**

Objetivo: Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.

Se solicita a los alumnos que lleven el juego a clase. Juegan en parejas.

***Tarea 2:* Bingo de pares ordenados**

Objetivo: Interpretar las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.

Se entrega a cada alumno un cartón que contiene un gráfico que consta de un par de ejes cartesianos ortogonales y algunos pares ordenados resaltados, como se muestra en la siguiente imagen:

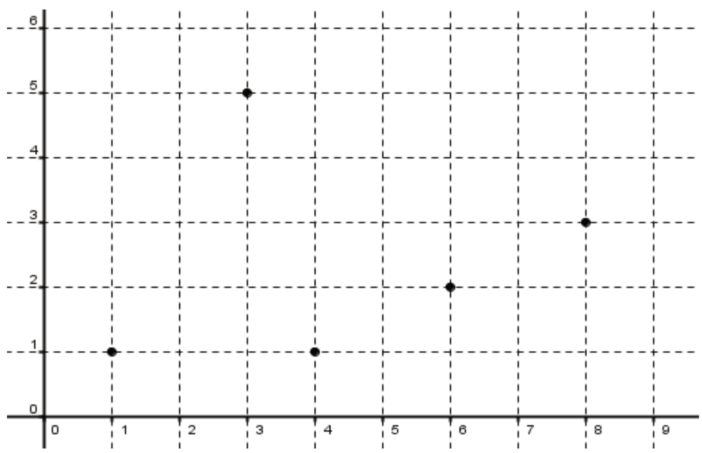


Imagen Nº 5: Ejemplo de cartón del bingo de pares ordenados

Se juega al bingo con pares ordenados del siguiente modo: la maestra extrae papelitos en los que se han anotado pares ordenados de una bolsa, de a uno por vez. Enuncia en voz alta cada par extraído y a continuación lo coloca en un afiche ubicado al costado del pizarrón.

Cada alumno controla si salió alguno de los pares ordenados que tiene en su cartón y si acierta, lo señala con una cruz. Gana el que completa primero el cartón.

El alumno ganador pasa al frente y ubica los pares ordenados de su cartón en el pizarrón (donde previamente se dibujaron los ejes) y señala dichos pares en el afiche que contiene los pares ordenados que se obtuvieron en el sorteo. El resto de los alumnos debe verificar si su compañero efectivamente ganó.

Tarea 3 (opcional): Búsqueda del tesoro

Objetivo: Interpretar las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.

En un afiche se exponen un gráfico que consta del primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos en el que se han identificado las coordenadas de 0 a 10 en los semiejes positivos de las variables x e y. En el mismo gráfico se han distinguido algunos puntos de coordenadas enteras como lugares en los que están escondidos los tesoros. Todos los pares ordenados de coordenadas enteras se encuentran ocultos debajo de un círculo de cartulina. Los alumnos expresan pares ordenados en voz alta al azar y la maestra (o el mismo alumno) destapa del afiche el punto correspondiente, para comprobar si en ese lugar hay o no un tesoro oculto. Se deberían esconder varios tesoros.

Tarea 4: El paseo de Carolina[13]

Objetivo: Interpretar gráficos.

Carolina salió a caminar ayer. El siguiente gráfico muestra la distancia de Carolina a su casa en varios momentos, durante la caminata. A continuación, escribe una historia sobre el paseo de Carolina. Intenta ser lo más preciso posible.

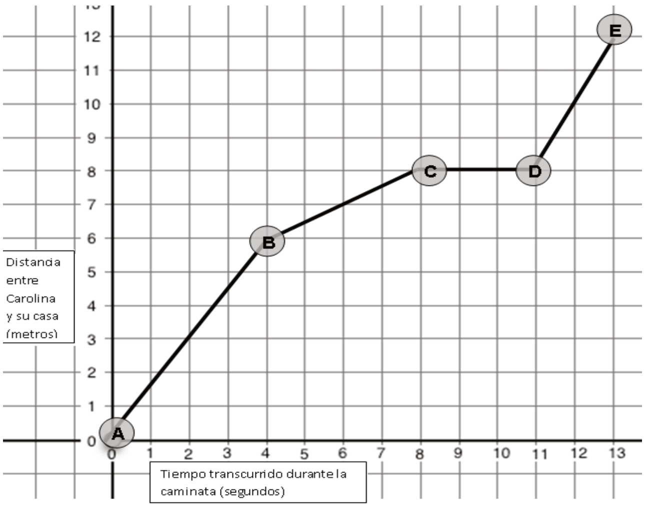


Imagen Nº 6: Gráfico sobre el paseo de Carolina

Se realiza una puesta en común con el fin de explorar el significado que atribuyen a los puntos y a los segmentos determinados entre esos puntos.

[13]Problema extraído de https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/display/EarlyAlgebraResources/Varying+Speed (Traducción personal y modificación en el nombre del personaje)

Descripción de tareas del BLOQUE B (Proyecto inicial)

***Tarea 1:* El problema de los sobres de figuritas**[14]

Objetivo: Introducir el lenguaje simbólico.

Primera parte: Trabajo individual

El docente les dice a los alumnos que:

- el sobre que sostiene en su mano izquierda es de Pablo, y que contiene todas las figuritas que tiene Pablo.
- el sobre que sostiene en su mano derecha es de Camila y que las figuritas que tiene Camila son las que están en el sobre más tres figuritas que tiene sueltas arriba del sobre.
- Cada sobre contiene el mismo número de figuritas.

Luego, los invita a que expresen por escrito lo que saben sobre el número de figuritas que tienen Pablo y Camila. Puede hacer circular los sobres (deben estar bien cerrados y les dice a los alumnos que no deben abrirlos).

Segunda parte: *Trabajo colectivo*

El docente escribe en el pizarrón las respuestas de los alumnos sobre la consigna planteada y organiza las mismas en una tabla como la que sigue (*se puede llevar la tabla en un afiche para agilizar el desarrollo de la clase)*:

Tabla Nº 5: Ejemplo de tabla completa para el problema de los sobres de figuritas (Tarea 1 del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)

Alumno	Número de figuritas de Pablo	Número de figuritas de Camila
Nicolás	10	13
Tomás	3	6
Sofía	7	13

Se les pide a los alumnos que no especificaron una cantidad determinada, que indiquen valores posibles y realicen una predicción.

Luego, añade una columna a la tabla para colocar el resultado de la diferencia entre el número de figuritas de Pablo y Camila. En esta instancia, es probable que algunos alumnos identifiquen algunos pares de valores que no son correctos. Entonces el docente promueve la discusión sobre estos pares de valores para que los alumnos justifiquen sus respuestas. La idea es que puedan precisar que si bien en principio Pablo y Camila pueden tener cualquier número natural[15] de figuritas, una vez que se indica un valor para uno de ellos, el otro no puede tomar cualquier otro valor. En esta situación, el docente pregunta a los alumnos si hay

[14] Problema extraído de Carraher et al (2013).
[15] Consideramos al conjunto de los naturales con el número uno como primer elemento.

alguna manera de escribir esto. Por ejemplo: "Si en principio Pablo puede tener cualquier número de figuritas, podríamos decir N figuritas, ¿les parece que lo podríamos indicar así? (escribiendo N en la celda que corresponde al número de figuritas de Pablo). Entonces ¿cómo podríamos escribir el número de figuritas de Camila? (invita a los alumnos a responder la pregunta y explicar sus respuestas)"

***Tarea 2:* Lenguaje coloquial y simbólico**

Objetivo: Realizar traducciones del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.

Consigna: Si llamamos N al número de figuritas de Pablo, completa los espacios en blanco de la siguiente tabla para expresar el número de figuritas de otros compañeros de Pablo.

Tabla Nº 6: Números de figuritas en palabras y símbolos
(Tarea 2 del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)

Compañero	Número de figuritas en palabras	Número de figuritas en símbolos
Tomás	Tiene 2 figuritas menos que Pablo	
Tatiana	Tiene la mitad de las figuritas que tiene Pablo	
Sofía		5N
Lautaro	Tiene dos figuritas más que el triple de la cantidad de figuritas de Pablo.	
Nicolás		2N-1

***Tarea 3*: Descubre la regla**[16]

Objetivo: Identificar la expresión simbólica que representa la relación entre los pares de valores dados.

Consignas:

a. Halla la regla que permite pasar de un número a otro y completa los valores que faltan.

Tabla Nº 7: Hallar la regla para pasar de un número a otro.
(Tarea 3a del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)

$$
\begin{array}{lcl}
4 & \longrightarrow & 20 \\
3 & \longrightarrow & 15 \\
7 & \longrightarrow & \ldots \\
13 & \longrightarrow & \ldots \\
n & \longrightarrow & \ldots
\end{array}
$$

[16] El inciso a es un problema extraído y modificado de Schliemann, Carraher y Brizuela (2011)

b. Halla la regla que permite pasar de un número a otro y completa los valores que faltan.

Tabla Nº 8: Hallar la regla para pasar de un número a otro.
(Tarea 3b del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)

2	$\longrightarrow$	8
3	$\longrightarrow$	15
5	$\longrightarrow$	…
11	$\longrightarrow$	…
n	$\longrightarrow$	…

c. Inventa una regla para pasar de un número a otro y luego completa las dos primeras filas de la tabla. Intercambia la tabla con otro compañero y averigüen cuál es la regla.

Tabla Nº 9: Inventa la regla para pasar de un número a otro (Tarea 3c del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)	
2	…..
5	…..
8	…..
11	…..
14	…..

<u>Tarea 4:</u> El problema de los alfajores[17]

<u>Objetivos:</u> Articular los registros gráfico, simbólico y tabular.

Identificar pares de valores que no correspondan a la situación planteada.

Con la tarea propuesta se promueve el análisis de la relación que existe entre las dos variables involucradas y la reflexión en torno a pares de valores que pueden o no corresponderse con tal relación y/o con el dominio de cada variable (determinado por el contexto).

<u>Consigna:</u>

En la cantina de la escuela se venden alfajores. Completa los espacios en blanco de la tabla que relaciona el número de alfajores con su precio:

[17] El inciso a es un problema extraído y modificado de Schliemann et al. (2011)

Tabla Nº 10: Número de alfajores y precio (Tarea 4 del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)	
Número de alfajores	**Precio**
2	$6
5	
	$21
12	
	$45
9	
	$39

b) Representa gráficamente los pares de valores de la tabla anterior, en un sistema de ejes cartesianos.

c) ¿Qué característica observas en el gráfico?

d) ¿Cuál es el precio que corresponde a n alfajores?

e) Agrega un par de valores más a la tabla y al gráfico.

f) Para responder al inciso e ¿podrías haber elegido al punto (14, 38)? Justifica tu respuesta.

g) ¿Y al punto (2,5, 7,5)? Justifica tu respuesta.

h) Indica un par de valores que no se hayan mencionado y que estés seguro de que no podrían agregarse a la tabla. Justifica tu respuesta.

***Tarea 5:* Para practicar lo aprendido**

Objetivos: Profundizar la articulación entre registros de representación. Comparar los distintos gráficos y establecer relaciones con sus expresiones simbólicas.

Consignas:

I) Un auto se dirige con velocidad constante de 80km/h.

a. Completa la tabla que indica el espacio recorrido en relación con el tiempo.

Tabla Nº 11: Tiempo y espacio recorrido (Tarea 5 del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza	
Tiempo (en hora)	**Espacio recorrido (Km)**
3	
	320
2,5	

7	
	720
12	

b. Representa gráficamente los pares de valores de la tabla anterior, en un sistema de ejes cartesianos.

c. ¿Qué característica observas en el gráfico?

d. ¿Cuál es el espacio recorrido en t horas?[18]

II)[19] Una pileta con capacidad de 7500 litros se está llenando a una velocidad de 25 litros por minuto. En el momento en que se comienzan a tomar mediciones había 1500 litros de agua.

a. Representa mediante una tabla y un gráfico la relación entre el tiempo que transcurre desde que se comienza la medición y la cantidad de agua en la pileta.

b. Compara este gráfico con el anterior. Extrae conclusiones.

c. ¿Cómo podrías expresar la relación entre el tiempo que transcurre desde que se comienza la medición y la cantidad de agua en la pileta en símbolos?

III) Para diseñar una fuente circular, se toma en cuenta el radio de la misma y su área.

a. Representa mediante una tabla y un gráfico la relación entre el radio de la fuente y el área de la misma.

b. Expresa la relación en símbolos.

c. Compara este gráfico con los anteriores. Extrae conclusiones.

<u>Tarea 6:</u> El problema de la billetera[20]

<u>*Objetivo:*</u> Comparar representaciones gráficas.

Primera parte: trabajo individual/en parejas

Matías tiene $8 en la mano y el resto de su dinero en la billetera. Franco tiene exactamente tres veces el dinero que Matías tiene en la billetera.

Expresa por escrito lo que puedes decir sobre las cantidades de dinero de Matías y Franco.

[18] En este caso, en la tarea no se especifica cota superior para el conjunto de valores posibles para t. Si bien a partir de la tabla se podría suponer que el máximo es 12, no hay aclaración al respecto.
[19] Problema extraído y modificado de Itzcovich y Novembre (2006)
[20] Problema extraído y modificado de Carraher et al. (2013)

Segunda parte: Trabajo colectivo

Se realiza una puesta en común de las respuestas de los alumnos. El docente les pide que expliquen sus respuestas.

Una vez que llegan a un acuerdo, escribe la siguiente tabla en el pizarrón y les pide a los alumnos que la completen:

Tabla Nº 12: Dinero de Matías y Franco (Tarea 6 del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)		
Dinero en la billetera de Matías	Dinero que tiene Matías	Dinero que tiene Franco
B		
	8	
1		
		6
	11	
4		
	17	
		18
	13	
		30
11		
	20	
8		

Tercera parte: Representación gráfica

El docente les pide que representen en el siguiente sistema de ejes cartesianos los valores de las dos primeras columnas de la tabla (cantidad de dinero en la billetera de Matías y cantidad total de dinero que tiene Matías).

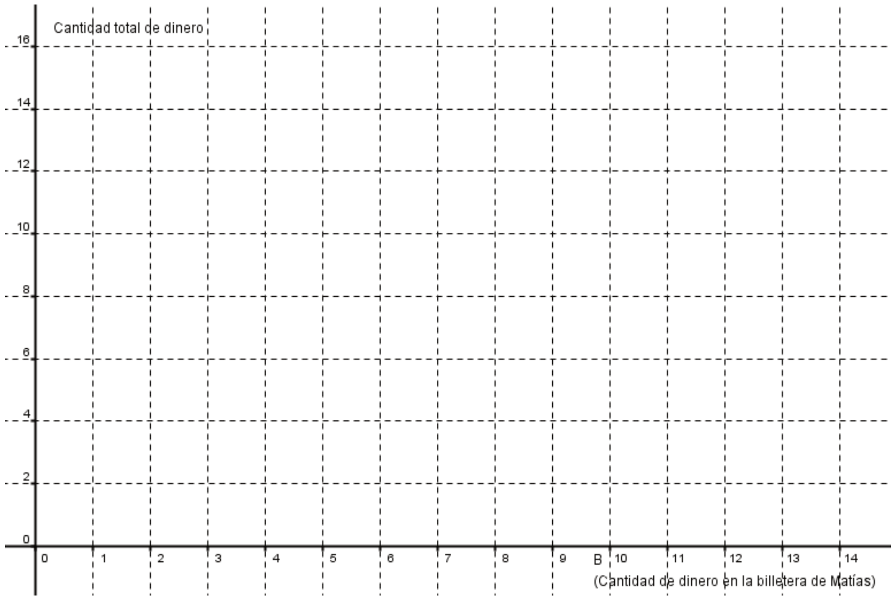


Imagen Nº 7: Sistema de ejes cartesiano Dinero en billetera de Matías-Total de dinero (Tarea 6 del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza)

Luego, les pide que agreguen, en el mismo gráfico pero con otro color, la cantidad total de dinero de Franco en relación con la cantidad de dinero en la billetera de Matías, considerando también los valores de la tabla.

Algunas cuestiones que puede plantear el docente:

- Expresa qué característica puedes observar en los gráficos realizados.
- ¿Son iguales los dos gráficos? Explica tu respuesta.
- ¿En algún momento tienen la misma cantidad de dinero? Explica tu respuesta.
- Expresa lo anterior en símbolos.

Tarea 7: Para practicar lo aprendido

I) Mateo y Diana tienen diferentes planes de teléfono. En el caso de Mateo, por cada llamada que hace, le cobran 10 centavos por minuto. Diana, en cambio, paga 60 centavos por mes, más 5 centavos por minuto de cada llamada que realiza.

a. Si tuvieses que elegir uno de estos planes, ¿cuál elegirías? ¿por qué?
b. Representa gráficamente los valores que obtuviste en a.
c. En un mes determinado, Mateo y Diana hablaron exactamente la misma cantidad de minutos y pagaron lo mismo ¿Cuántos minutos hablaron durante ese mes? ¿Cuánto pagaron ese mes?

II) Un auto parte de Santa Fe y se dirige a Rosario, con una velocidad constante de 90km/h. Otro auto parte de Coronda (a 50km de Santa Fe en dirección a Rosario) y se incorpora a la misma autopista del primero, con una velocidad constante de 80km/h. Si los dos autos se incorporan a la autopista a la misma hora, ¿se encuentran en algún momento? Si la respuesta es afirmativa, indicar cuándo y a qué distancia de Santa Fe.

3.2.3 Modificaciones realizadas a partir del trabajo colaborativo

El proyecto inicial de la propuesta de enseñanza descripto en el apartado anterior tiene como fin propiciar intercambios entre docentes e investigadoras integrantes del equipo mixto para ajustar las tareas a las características del grupo de estudiantes, sin perder de vista los objetivos de la investigación.

En cada tarea, analizamos los objetivos perseguidos, algunos procedimientos esperados y posibles dificultades. A raíz de dichas interacciones, seleccionamos, eliminamos y/o modificamos consignas para establecer el diseño definitivo de la propuesta de enseñanza.

En este apartado detallaremos los cambios efectuados sobre el proyecto inicial y la justificación de los mismos. Para organizar esta descripción recordemos la Tabla Nº 4 en la que se incluye las tareas y objetivos del proyecto inicial:

Tabla Nº 4: Organización de tareas y objetivos del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza

Bloque	N° Tarea	Nombre	Objetivo
A	1	**Batalla Naval**	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.
	2	**Bingo de pares ordenados**	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.
	3	**Búsqueda del tesoro**	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos.
	4	**El paseo de Carolina**	Interpretar gráficos.
B	1	**El problema de los sobres de figuritas**	Introducir el lenguaje algebraico.
	2	**Lenguaje coloquial y simbólico**	Realizar traducciones del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.
	3	**Descubre la regla**	Identificar la expresión simbólica que representa la relación entre los pares de valores dados.
	4	**El problema de los alfajores**	Articular los registros gráfico, simbólico y tabular. Identificar pares de valores que no corresponden a la situación.

	5	**Para practicar lo aprendido**	Profundizar la articulación entre registros de representación. Comparar los distintos gráficos y establecer relaciones con sus expresiones simbólicas.
	6	**El problema de la billetera**	Comparar representaciones gráficas.
	7	**Para practicar lo aprendido**	Comparar representaciones gráficas.

Modificaciones sobre las tareas del BLOQUE A del proyecto inicial

La primera tarea del Bloque A es el juego de la Batalla Naval. Esta tarea se excluye de la secuencia porque ya había sido utilizada por las maestras en clases previas. La tarea de la Búsqueda del tesoro pasa a ser obligatoria (en el proyecto inicial figuraba como opcional). Además, las maestras sugieren alternar el orden entre este juego y el bingo de pares ordenados, ya que el primero se puede realizar como un trabajo colectivo en el pizarrón (con todos los estudiantes), mientras que el segundo requiere de un seguimiento del cartón del bingo en forma individual.

Las docentes proponen incluir en la segunda parte del trabajo sobre las tareas del Bloque A, situaciones relacionadas con las características físicas de los niños (por ejemplo, gráficos de percentiles relacionados con el crecimiento) o temas trabajados en otras áreas (como las precipitaciones). Finalmente, acordamos añadir dos tareas que utilicen el registro gráfico y que atiendan a las sugerencias de las docentes. Una de ellas relaciona la edad con la estatura de 0 a 19 años, mientras que la otra representa la velocidad de crecimiento en estatura. En ambos casos se diferencian las curvas según el sexo.

Modificaciones sobre las tareas del BLOQUE B del proyecto inicial

Tarea Nº 1: Los sobres de figuritas

Dado que en esta tarea se incorpora el registro simbólico, la denominamos de ahora en adelante como tarea principal de la propuesta de enseñanza. Las docentes sugieren cambiar las figuritas por otro tipo de objeto que resulte más cercano a los estudiantes de los séptimos grados. Surge en principio la idea de utilizar "stickers" en lugar de figuritas, pero pronto se reemplaza por "gogos" que son muñecos pequeños que utilizan los niños para jugar en el recreo de un modo similar al juego del Bowling. Si bien el juego es más característico de los varones, las maestras señalan que las niñas también lo conocen y juegan en algunas ocasiones. De esta manera, en esta tarea modificamos "sobres de figuritas" por "cajas con gogos".

Tarea Nº 2: Lenguaje coloquial y simbólico

Esta tarea está relacionada con la anterior por lo cual también se reemplazan las figuras por los gogos. Además, incluimos el punto para indicar la multiplicación entre una letra y un número porque las docentes sostienen que de este modo evitan posibles confusiones para los estudiantes y pueden centrar la discusión en la transformación de registros (coloquial y simbólico).

Tarea Nº 3: Descubre la regla

Esta tarea se reubica en el diseño definitivo a continuación del problema de los alfajores porque las docentes afirman que posiblemente resulte compleja y confusa para los estudiantes en el momento en que estaba planteada. Las investigadoras aceptamos el cambio porque no altera el objetivo con el que estaba propuesta.

Tarea Nº 4: El problema de los alfajores

Las maestras señalan que debería incluirse una tarea previa a este problema que continúe con las ideas involucradas en las tareas anteriores.

Las investigadoras proponemos una tarea denominada "El problema incompleto o borrado", en la que se muestra una tabla de valores y los alumnos deben completar la frase en lenguaje coloquial indicando la relación entre la cantidad de gogos de dos niños. Luego, deben expresar la relación en forma simbólica. Se articulan en esta tarea el registro coloquial, simbólico y tabular.

Con respecto al problema de los alfajores incluimos los ejes cartesianos con la misma escala que se realiza en el pizarrón, para facilitar la discusión sobre las respuestas a las preguntas planteadas. En los intercambios, resaltamos la importancia de analizar si la cantidad de alfajores que se compran puede ser una cantidad racional positiva no entera.

Tarea Nº 5: Para practicar lo aprendido

Las docentes proponen suprimir esta tarea para reducir el tiempo que demandará la implementación de la propuesta de enseñanza. Además, observamos que una de las tareas involucra la noción del área del círculo y los estudiantes no la trabajaron hasta el momento.

Las investigadoras estamos de acuerdo con la modificación, porque no constituye un cambio sustancial en cuanto al propósito de la secuencia de enseñanza planteada.

Tarea Nº 6: El problema de las billeteras

Este problema se conserva tal como fue planteado originalmente. Sólo se agrega la participación de alumnos en el planteo oral de la tarea y la utilización de material concreto (billetera y billetes).

Tarea Nº 7: Para practicar lo aprendido

Estos problemas se eliminan de la secuencia porque las docentes indican que su complejidad es excesiva. Las investigadoras aceptamos este cambio porque no altera el propósito de la secuencia de enseñanza.

3.2.4 Diseño definitivo de la propuesta de enseñanza

A continuación presentamos sintéticamente el diseño definitivo de la propuesta de enseñanza, (Tabla Nº 13).

Tabla Nº 13: Tareas y objetivos de la propuesta de enseñanza

Bloque	Código Tarea	Nombre de Tarea	Objetivos
A	A1 A2	Búsqueda del tesoro. Bingo de pares ordenados.	Introducir las nociones de par ordenado y ejes cartesianos.
	A3 A4	Gráficos de percentiles edad-estatura. Gráfico velocidad de crecimiento estatura.	Interpretar gráficos. Identificar usos sociales de gráficos.
	A5	El paseo de Carolina.	Interpretar gráficos.
B	B1	El problema de los gogos.	Introducir el lenguaje algebraico.
	B2	Lenguaje coloquial y simbólico sobre el número de gogos	Realizar traducciones del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.
	B3	El problema incompleto (o borrado).	Articular los registros coloquial, simbólico y tabular.
	B4	El problema de los alfajores	Articular los registros gráfico, simbólico y tabular. Identificar pares de valores que no corresponden a la situación planteada
	B5	Descubre la regla	Identificar la expresión simbólica que representa la relación entre los pares de valores dados.
	B6	El problema de la billetera y la alcancía	Articular los registros de representación. Comparar representaciones gráficas.

Cabe aclarar que al momento de escribir la tesis, añadimos dos columnas a la tabla original. Una de ellas indica el tipo de bloque (A y B) al que corresponde cada tarea. Tal como lo describimos en la primera sección de este capítulo, la diferenciación de bloques nos posibilita organizar mejor nuestra interpretación de la implementación de las tareas en el aula. En la tabla original (entregada a las docentes) se identificaron las tareas del Bloque A con la etiqueta de *Introductorias*, porque en las mismas se inicia el trabajo en torno a las nociones de pares ordenados, sistemas de ejes cartesianos e interpretación de gráficos. En el Bloque B se introduce la expresión simbólica y el registro tabular para estudiar la relación entre dos variables y se finaliza la propuesta recuperando el registro gráfico del primer bloque.

En la tabla también se observa una columna que indica el *código de la tarea* (segunda columna). Añadimos el mismo después de la implementación de la propuesta de enseñanza en el aula, porque nos facilita identificar de modo sintético las tareas y bloques correspondientes (por ejemplo, Tarea A2 indica que es la segunda tarea del Bloque A).

A continuación describimos cada una de las tareas del proyecto definitivo de la propuesta de enseñanza. Indicamos objetivos, materiales, consignas y nuestras expectativas en relación con cada tarea.

Descripción de tareas del BLOQUE A

Tarea 1: Búsqueda del tesoro.

Objetivo:

- Introducir las nociones de par ordenado y ejes cartesianos.

Materiales:

- Afiche con una porción del primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos. Los pares ordenados de coordenadas enteras se encuentra ocultos bajo cuadraditos de cartulina.
- Cuatro alfajores para alumnos ganadores.
- Caramelos para todos por haber participado.

Desarrollo de la tarea:

En el pizarrón se coloca un afiche que contiene los ejes cartesianos con escalas etiquetadas del 0 al 8 para el eje de abscisas y del 0 a 6 para el eje de ordenadas, sobre un cuadriculado de líneas de puntos que indica los pares ordenados de coordenadas enteras. Cada uno de estos pares ordenados se encuentra tapado con un cuadrado de cartulina. En cuatro de ellos se esconden los tesoros (indicados con una estrella).

Los alumnos deben enunciar en voz alta pares ordenados y la maestra (u otro alumno) destapa el par indicado del afiche que contiene los ejes cartesianos. Si al destapar el par enunciado se observa que hay un tesoro escondido, el alumno recibe como premio un alfajor.

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Con esta tarea presentamos las denominaciones de los ejes cartesianos y la convención matemática para expresar pares ordenados. Consideramos que el carácter lúdico de la misma podría estimular la participación de los estudiantes y por lo tanto, el uso de la convención deseada.

Además, el hecho de tener que comunicar oralmente un par ordenado para que un compañero lo descubra requiere no sólo saber expresar sino también interpretar el par indicado para poder ubicarlo gráficamente. Implica un rol activo por parte del emisor (quien debe controlar que su compañero ubique de manera correcta el punto indicado) y del receptor (que debe interpretar y descubrir el par comunicado).

A priori, creemos que podrían surgir algunas confusiones respecto del orden en el que deben indicarse las coordenadas de un punto del plano. No obstante, esperamos que la misma dinámica del juego posibilite que se recuerde la convención las veces que sea necesario.

***Tarea 2*: Bingo de pares ordenados**

Objetivos:

- Afianzar la convención matemática para expresar pares ordenados.

Materiales:

- Un cartón de bingo para cada alumno. El mismo contiene una porción del primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos (con escalas desde el cero hasta el seis identificadas sobre cada eje) y cinco pares ordenados resaltados.
- Tarjetas con pares ordenados para realizar el sorteo.
- Cinta adhesiva para pegar las tarjetas en el pizarrón.
- Escuadra para realizar ejes en el pizarrón.
- Alfajor para el alumno ganador.
- Caramelos para todos por haber participado.

Desarrollo de la tarea:

La docente reparte los cartones del bingo. A continuación se muestra un ejemplo de cartón:

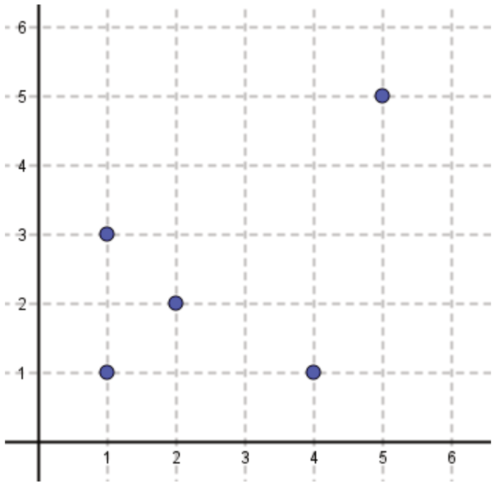


Imagen Nº 8: Ejemplo de cartón del bingo de pares ordenados (Tarea A2)

Se procede a jugar al bingo con los pares ordenados que indican las tarjetas. La docente o un alumno extrae las tarjetas de una bolsa, de a una por vez y expresa los valores del par seleccionado en voz alta. Coloca las tarjetas obtenidas en el pizarrón.

Cada alumno debe identificar y señalar si coincide alguno de los pares ordenados que figuran resaltados en su cartón con el que se obtiene en cada tarjeta. Gana el que completa primero el cartón.

El alumno ganador y ubica los pares ordenados de su cartón en un sistema de ejes cartesianos dibujados en el pizarrón y señala las tarjetas que contienen tales pares ordenados. El resto de los alumnos debe verificar si su compañero efectivamente ganó.

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Planteamos el bingo de pares ordenados como *refuerzo* de la convención matemática establecida en Búsqueda del tesoro (Tarea A1) sobre cómo enunciar un par ordenado. Por las características que posee el juego del bingo, requiere especial concentración por parte de los estudiantes para escuchar e interpretar correctamente cada par ordenado que sale sorteado y luego, identificarlo en su cartón. A diferencia de la tarea anterior que se trataba de un trabajo colectivo, en este caso *cada estudiante* debe controlar en su propio cartón para identificar si aparecen los pares ordenados que se obtienen en el sorteo.

Nuevamente, escogemos una tarea con *carácter lúdico* porque creemos que promueve la participación y motivación de los estudiantes, cuestión que vinculamos con la producción de significado en el sentido de Skovsmose (2005). En lo que refiere a posibles dificultades, consideramos que podrían ocurrir confusiones con la convención matemática, a pesar de que ya se trabajó en la tarea anterior.

Tarea 3: ***Gráficos de percentiles estatura-edad de 5 a 19 años***

Objetivos:

- Interpretar gráficos referidos a contextos reales.

- Identificar usos sociales de gráficos.

Materiales:

- Gráficos que representan las variables estatura y edad desde los cinco a los diecinueve años de edad (ver Imágenes Nº 9 y 10). Se realizan impresiones en tamaño grande (hoja A3) para pegar en el pizarrón y en tamaño más pequeño para los estudiantes (trece copias del gráfico de varones y trece de la correspondiente a las niñas).

- cinta métrica para medir la estatura de los estudiantes.

- cinta adhesiva para pegar la cinta métrica.

Desarrollo de la tarea:

La docente entrega a cada estudiante un gráfico de percentiles que relaciona la estatura con la edad de 5 a 19 años (diferenciando los gráficos de niñas y niños al momento de repartirlas). Los mismos gráficos ampliados se colocan en el pizarrón. Explica de dónde provienen los gráficos. Por ejemplo: "La OMS (Organización Mundial de la Salud) utiliza gráficos como las que están el pizarrón para relacionar la estatura con la edad hasta los diecinueve años. Los mismos se construyeron a partir de estudios que involucraron una cantidad muy grande de niños y niñas. Para interpretarlos observen los valores que aparecen a la derecha. Se llaman percentiles. Por ejemplo, el percentil 50 indica que el 50% de las niñas de 6 años miden 114cm (1,14m). Vamos a medirnos y cada uno va a ubicar sus datos (edad-estatura) en su gráfico" Debe aclarar que la edad se expresa en años y meses.

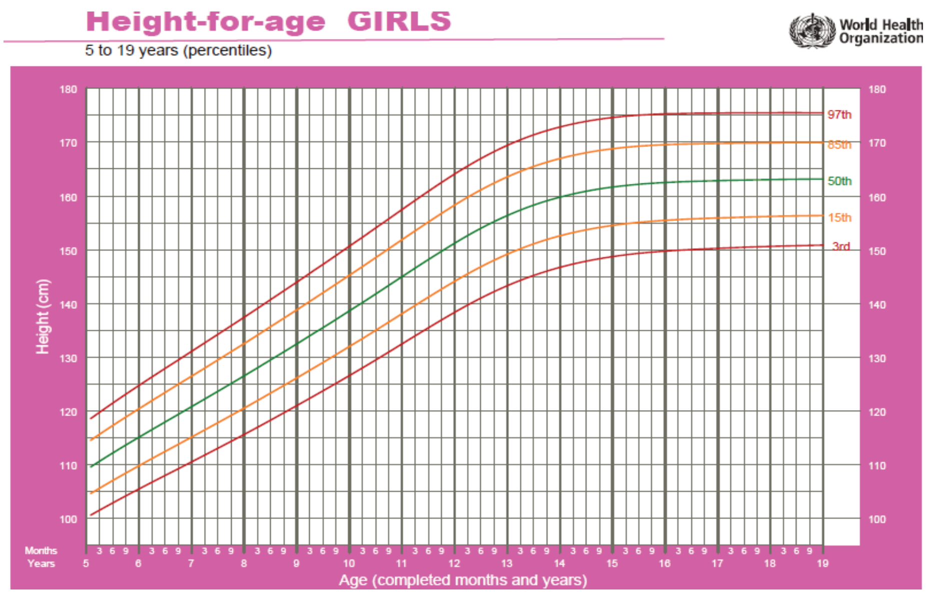


Imagen Nº 9: Gráfico estatura-edad para niñas de 0 a 19 años (Tarea A3)

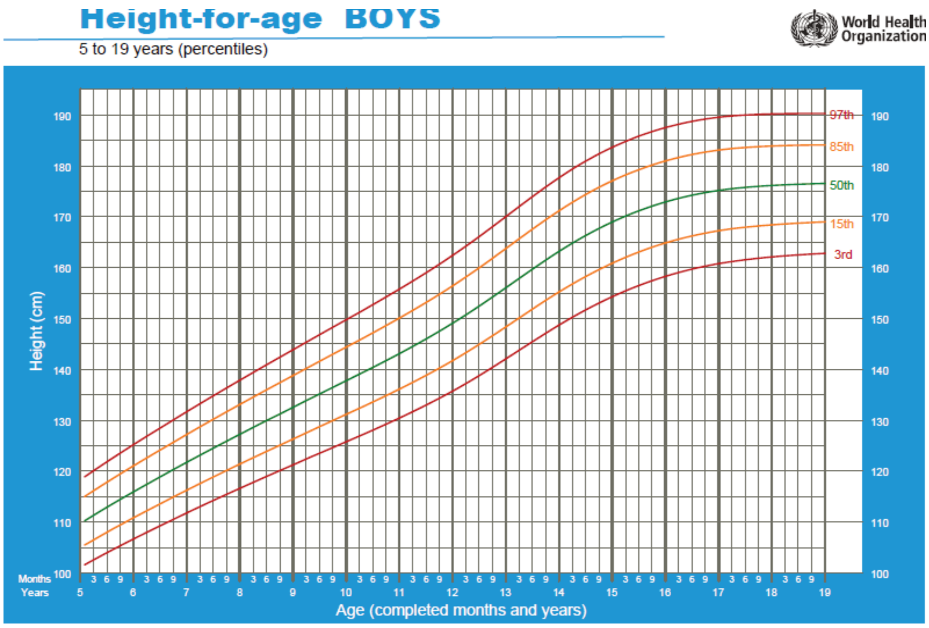


Imagen Nº 10: Gráfico estatura-edad para niños de 0 a 19 años (Tarea A3)

<u>Nuestras expectativas en relación con esta tarea</u>

Dado que las gráficas consideradas para esta tarea corresponden al resultado de estudios estadísticos publicados por la Organización Mundial de la Salud y sus principales destinatarios son los profesionales de la salud e investigadores en esta área, creemos conveniente comenzar describiendo brevemente como deben interpretarse las mismas. La Sociedad Argentina de Pediatría presenta la siguiente explicación:

> Si queremos saber si un niño de 8,0 años tiene estatura normal, necesitamos conocer la talla de la población de niños normales de esa edad. Para ello debemos tomar una muestra representativa de individuos de 8,0 años y medir las estaturas. Veremos entonces que no todos los niños tienen igual talla; a pesar de que todos tienen exactamente la misma edad cronológica, existe una variación normal de la estatura a una edad dada. En la *Figura 3.1* se ilustra esta variación con una curva de distribución de frecuencias. La mayor cantidad de individuos se concentra alrededor de los valores medios, habiendo unos pocos más altos y otros pocos más bajos que el grupo central. El 100% de los niños está contenido en el área limitada por la curva y el eje de las x.
> Por un simple cálculo matemático es posible estimar el valor del eje de las x que divide la muestra en dos mitades iguales, es decir, la estatura con respecto a la cual el 50% de los individuos es más alto y el otro 50% es más bajo. Ese valor de las x es llamado mediana o centilo 50 […]
> Para comprender su significado podemos imaginar a todos los niños de 8,0 años parados y ordenados en una fila de acuerdo con sus estaturas en orden creciente. Caminando a lo largo de esta fila, llegamos a un punto entre dos niños donde la mitad está por detrás y la otra mitad por delante de nosotros. La estatura correspondiente a este punto es el centilo 50. Si seguimos caminando hacia los individuos más altos alcanzamos otro punto en que el 75% de los individuos está por detrás y el 25% por delante. La estatura correspondiente a este punto es el centilo 75. En forma similar, es posible determinar puntos que dividan a la fila en porcentajes que sean de nuestro interés. Estos porcentajes están representados por

> las áreas limitadas por los centilos en un ejemplo en la *Figura 3.3*.
> Podemos en consecuencia definir los centilos como puntos estimativos de una distribución de frecuencias que ubican un porcentaje dado de individuos por debajo o por encima de ellos. Es de aceptación universal numerar los centilos de acuerdo con el porcentaje de individuos existentes por debajo de ellos y no por encima. Así, el valor que divide a la población en un 95% por debajo y un 5% por encima es el percentilo 95” (SAP, 2013, p. 99-100).

A continuación presentamos las figuras a las que se hace referencia en los párrafos anteriores (Figura 3.1 y 3.3, respectivamente):

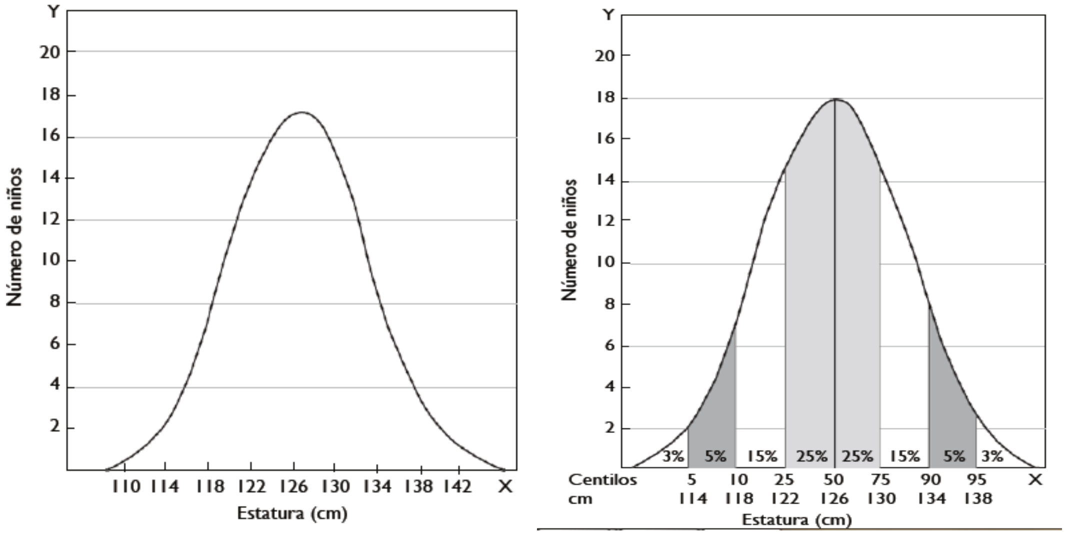


Imagen Nº 11: Gráficos estatura (cm) y nùmero de niños (SAP, 2013, p.99-100)

El uso frecuente entre médicos, educadores e investigadores de las gráficas de percentiles se debe a que

> … son fáciles de comprender, informan sobre la posición de un individuo respecto de la población y sobre su probabilidad de pertenecer a un universo normal o patológico. Dadas las limitaciones inherentes al concepto de lo “normal” y “anormal” constituyen un instrumento muy útil para el estudio del crecimiento y desarrollo infantil. (SAP, 2013, p. 103)

En cuanto a la determinación de un crecimiento normal, podemos decir que luego de sucesivas mediciones de talla de un niño (lo mismo sucede con el peso), se ubican estas medidas como puntos en el gráfico correspondiente y se unen con una línea, obteniendo la curva de crecimiento del niño. “Si esta curva es paralela a las de la gráfica, el crecimiento del niño es normal [mientras que] si los puntos se alejan progresivamente hacia curvas menores (aún dentro del área normal) el crecimiento es lento” (UNICEF, 2012, P. 27-29). Los percentilos reflejan los límites de variación normal para cada medición, por lo que “si la estatura se ubica entre los percentilos 3º y 97º, la estatura debe considerarse normal; si se encuentra por fuera de estos límites, debe considerarse patológica” (SAP, 2013, p. 111).

En cuanto a la interpretación de la curva que se obtiene al medir la estatura de un niño en distintos momentos, podemos decir que

> La curva tiene una pendiente pronunciada en los primeros años, luego se hace

> progresivamente menos empinada hasta la adolescencia, etapa en la que se observa un gran incremento en estatura, seguido de un aplanamiento progresivo, hasta que se alcanza la estatura final adulta. Este incremento se denomina empuje puberal del crecimiento.[…] No hay ninguna aceleración del crecimiento antes del empuje puberal. Cualquier niño normal que sea medido periódicamente describirá una curva de crecimiento similar a la graficada. (SAP, 2013, p. 109)

La elección de esta tarea se corresponde con el propósito de presentar gráficos que refieran a fenómenos relacionados con características de los niños del grupo estudiado. En nuestro caso en particular, los niños poseen 12 años aproximadamente. En esta franja etaria, se manifiestan diferencias visibles en el crecimiento de la estatura de acuerdo con el sexo que pueden observarse al comparar las dos gráficas presentadas (la gráfica para las niñas adquiere mayor pendiente antes que la de los niños). Al finalizar la tarea sería interesante que se ponga en evidencia este hecho mediante la comparación de las gráficas correspondientes a niñas y niños, observando la distribución de los puntos ubicados en ambas gráficas.

Por otro lado, al tener que representar sus datos con un punto en el gráfico, los estudiantes expresan mediante un par ordenado dos variables previamente definidas (edad-estatura). Aunque no esperamos que los niños logren una interpretación formal del gráfico anterior y de las nociones estadísticas involucradas, creemos que el hecho de que el significado de cada variable les resulte conocido facilita que identifiquen un uso social de gráficos que relacionan dos variables. El contexto elegido para esta tarea favorece la vinculación de la matemática como generadora de modelos para interpretar situaciones reales.

***Tarea 4*: Gráfico de velocidad de crecimiento en estatura**

Objetivos:

- Interpretar gráficos referidos a contextos reales.
- Identificar usos sociales de gráficos.

Materiales:

- Un gráfico para cada alumno sobre velocidad de crecimiento en estatura (ver Imagen Nº 12 debajo[21]). Una versión del gráfico en tamaño mayor para el pizarrón (en hoja A3).
- Cuestionario acerca del gráfico para cada alumno.

Desarrollo de la tarea:

El siguiente gráfico muestra la velocidad de crecimiento en estatura para varones y mujeres. Describe con tus palabras lo que interpretás del gráfico.

[21]Gráfico extraído de *http://www.dra-amalia-arce.com/2012/09/pubertad-y-crecimiento.html*

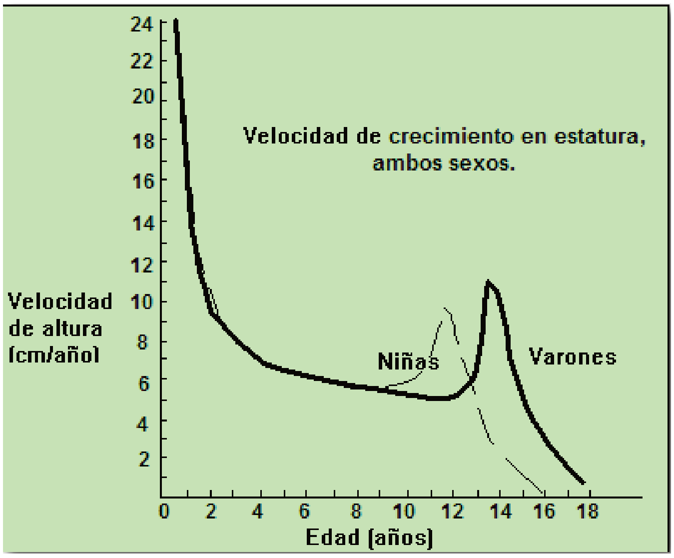


Imagen Nº 12: Gráfico sobre velocidad de crecimiento en estatura según el sexo (Tarea A4)

Los niños trabajan un primer momento en forma individual y se les pide que piensen y escriban lo que pueden interpretar del gráfico. Luego, se entrega una copia a cada alumno con los siguientes interrogantes:

a. ¿Qué significa que un niño de 2 años tenga una velocidad de crecimiento de su estatura de 10cm/año?
b. ¿Con qué velocidad crece la estatura de un niño de 8 años?
c. ¿En algún momento la velocidad de crecimiento de la estatura llega a ser de 11cm/año?
d. ¿Cuál es la velocidad máxima? ¿cuándo se produce?
e. ¿Cuál es la velocidad mínima? ¿cuándo se produce?
f. Observa los gráficos de 0 a 9 años ¿Qué sucede con la velocidad? Explica tu respuesta.
g. Observa los gráficos de 9 a 18 años ¿Qué sucede con la velocidad? Explica tu respuesta.
h. En el caso de las niñas, ¿en qué período aumenta la velocidad de crecimiento de la estatura?
i. ¿y en el caso de los niños?

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Desde nuestras experiencias en las aulas, observamos que en los últimos años del nivel primario y en los primeros del nivel secundario se produce generalmente una diferencia en el crecimiento en estatura entre mujeres y varones. Este hecho, tan evidente desde lo empírico, fue estudiado científicamente y se pone de manifiesto en los gráficos de percentiles de la tarea anterior (Tarea A3). Consideramos que se trata de una cuestión interesante para abordar en el aula porque se vincula directamente con las características del grupo de estudiantes seleccionado.

Si bien se pueden establecer comparaciones según el sexo utilizando los gráficos de percentiles de edad- estatura, el hecho de no poder superponerlos complejiza esta tarea y las diferentes curvas que aparecen en esos gráficos pueden funcionar como distractores al momento de realizar la comparación. Por este motivo, la autora de la tesis recurre a un gráfico utilizado por una pediatra para plantear una tarea que forme parte de la secuencia de enseñanza. El gráfico elegido (Imagen Nº 12) tiene la ventaja de que las curvas correspondientes a los dos sexos se representan en *un mismo sistema de ejes cartesianos* y la desventaja de utilizar la noción de *velocidad de crecimiento en estatura* como variable dependiente de la *edad*.

Cabe aclarar que elegimos para esta tarea un gráfico *simplificado* sobre la velocidad de crecimiento en estatura, ya que los publicados por la Sociedad Argentina de Pediatría consideran por separado a niñas y niños, utilizan percentiles y áreas sombreadas. Mostramos a continuación una de dichas gráficas a modo de ejemplo:

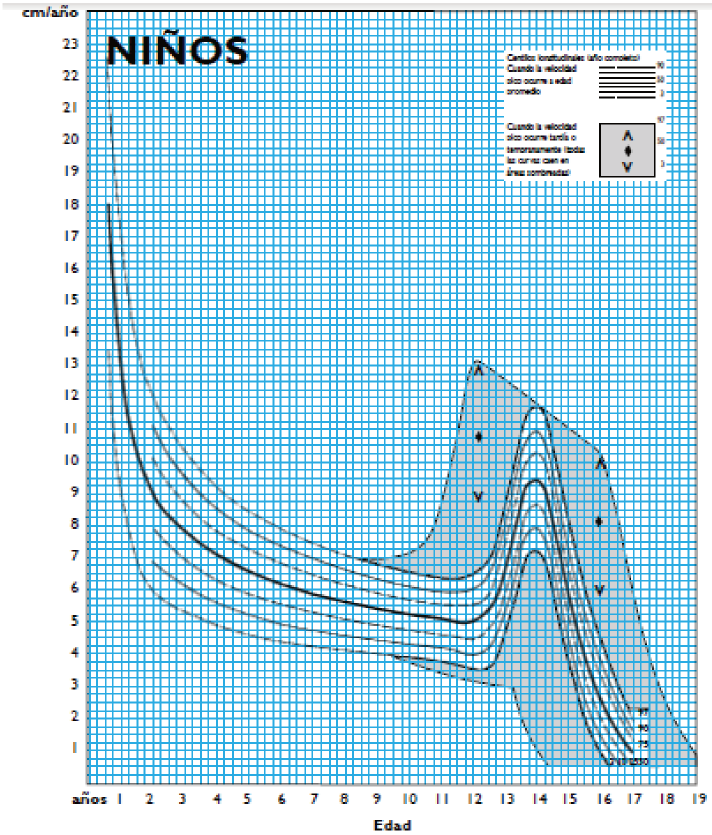


Imagen Nº 13: Gráfico velocidad de crecimiento en estatura de niños según edad (SAP, 2013, p.83)

La gráfica que hemos elegido para esta tarea es notablemente más simple que la anterior y más apropiada para su trabajo con los niños de 11/12 años. No obstante, la noción de velocidad de crecimiento en estatura entraña cierta complejidad para su comprensión, por lo que precisaremos el modo en el que se calcula para las ciencias médicas:

> La velocidad se calcula a partir de dos mediciones de peso o estatura separadas por un intervalo de tiempo, según la fórmula: **V = e/t** en la cual:
> **V =** Velocidad de crecimiento, expresado en cm/año o grs/año.

e = Diferencia de cm/grs entre las estaturas o los pesos tomadas en las dos mediciones.
t = Intervalo de tiempo (en años) transcurrido entre las dos mediciones. Este intervalo debe ser calculado en términos decimales.
Para calcular el intervalo de tiempo transcurrido entre las dos mediciones conviene utilizar la edad decimal en cada medición […]. Una vez calculada la edad decimal en años, el intervalo transcurrido se obtiene restando ambas edades. (SAP, 2013, p.103)

	Edad	Estatura
1ª medición	5,42 años	103,6 cm
2ª medición	6,38 años	108,9 cm

Δe = 108,9 cm – 103,6 cm = 5,3 cm
Δt = 6,38 años – 5,42 años = 0,96 años

$$V = \frac{5{,}3 \text{ cm}}{0{,}96 \text{ años}} = 5{,}5 \text{ cm/año}$$

Imagen Nº 14: Cálculo de velocidad de crecimiento en estatura según edad (SAP, 2013, p.103)

El punto de la velocidad no se grafica ni en la edad correspondiente a la 1ª medición (e1) ni a la 2ª medición (e2), sino en la edad central entre ambas […]

En el ejemplo anterior, la velocidad de 5,5 cm/año se grafica a la edad de 5,9 años. Las edades en que fueron tomadas las dos mediciones deben señalarse con dos pequeños guiones verticales, quedando entonces graficada la longitud del intervalo en que se basa la velocidad calculada. (SAP, 2013, p. 103).

Dado que la primera consigna de la tarea consiste en que los niños interpreten la gráfica dada, creemos que resulta imprescindible contar con la interpretación técnica de la misma para considerar como marco de referencia al estudiar las respuestas obtenidas. En este sentido, podemos decir que, en términos generales, se observa:

…una alta velocidad en los primeros años seguida de una paulatina disminución (deceleración), para luego presentar una marcada aceleración (aceleración puberal), y una posterior deceleración hasta que la curva tiende a cero, el niño alcanza su estatura final y deja de crecer. Si bien en la Figura 4.2 el pico máximo de aceleración puberal se encuentra alrededor de los 14 años, no todos los niños lo presentan a la misma edad. Las niñas experimentan este empuje, en promedio, a los 12 años, con una variación individual entre los 10 y 14 años. Los niños, en cambio, lo presentan, en promedio, a los 14 años, con una variación individual de 12 a 16 años. Esto significa que no todos los individuos alcanzan el final de su crecimiento a la misma edad. Las diferencias individuales en la edad del empuje puberal del crecimiento y en la edad de la detención definitiva del mismo son debidas al hecho de que no todos los niños maduran físicamente con la misma velocidad, ni alcanzan su estatura adulta a la misma edad. Esa variación individual en la maduración física es causa de diferencias importantes en la estatura durante la adolescencia, que se compensan cuando todos los niños alcanzan su estatura final, persistiendo entonces sólo las diferencias genéticas. […] Sólo el 6% de los niños normales tienen una velocidad de crecimiento durante dos años inferior al centilo 25 de velocidad, y la persistencia de la velocidad por debajo de ese límite debe considerarse patológica (SAP, 2013, p. 109-111).

Cabe aclarar, que la noción velocidad que se utiliza en el gráfico de la tarea refiere a la velocidad media o promedio. No obstante, en este trabajo se utiliza la misma terminología empleada en las Ciencias Médicas.

El gráfico presentado en esta tarea refleja una relación entre dos variables que puede vincularse al fenómeno estudiado en la tarea anterior (Tarea A3). No obstante, cabe aclarar que en ninguna de las dos tareas pretendemos determinar si el crecimiento de los niños es normal o no lo es (ni contamos con la preparación suficiente como para hacerlo). El propósito consiste en realizar una comparación entre las curvas que corresponden a niños y niñas y observar las diferencias que se evidencian, en general, en cualquier grupo mixto de esa franja etaria.

En la segunda parte de la tarea, planteamos una serie de interrogantes con el propósito de profundizar la interpretación del gráfico. Sin mencionar explícitamente los términos específicos, en las preguntas se ponen de manifiesto cuestiones relativas a la imagen o preimagen de un valor determinado de una de las variables, a intervalos de crecimiento o decrecimiento y valores extremos. Estas nociones se encuentran estrechamente vinculadas al análisis de funciones que se realiza en el nivel secundario de escolaridad, por lo que consideramos interesante conocer la forma intuitiva en la que los alumnos las interpretan.

Finalmente, reiteramos que somos conscientes de la complejidad que entraña la interpretación del fenómeno representado en esta tarea. No obstante, creemos que la elección de la misma se justifica por la relación estrecha que podemos establecer con las experiencias vitales de los niños. Como en la tarea anterior, nuestros propósitos se relacionan con *introducir la idea de relaciones entre variables mediante diferentes registros de representación* (en este caso, el gráfico). Con el fin de vincular nuestro objetivo con *contextos cercanos* al grupo de estudiantes, planteamos esta tarea para estudiar las *interpretaciones* que surgen de los niños en relación con la misma.

<u>Tarea 5:</u> El paseo de Carolina

<u>Objetivo:</u>

- Interpretar el gráfico.

<u>Materiales:</u>

- Una copia para cada alumno con el gráfico sobre el paseo de Carolina (ver Imagen Nº 6) y la consigna de la tarea.
- Gráfico del paseo de Carolina en tamaño mayor para el pizarrón (Hoja A3).

<u>Desarrollo de la tarea</u>:

Carolina salió a caminar ayer. El siguiente gráfico muestra la distancia de Carolina a su casa en varios momentos, durante la caminata. Escribe una historia sobre el paseo de Carolina. Intenta ser lo más preciso posible.

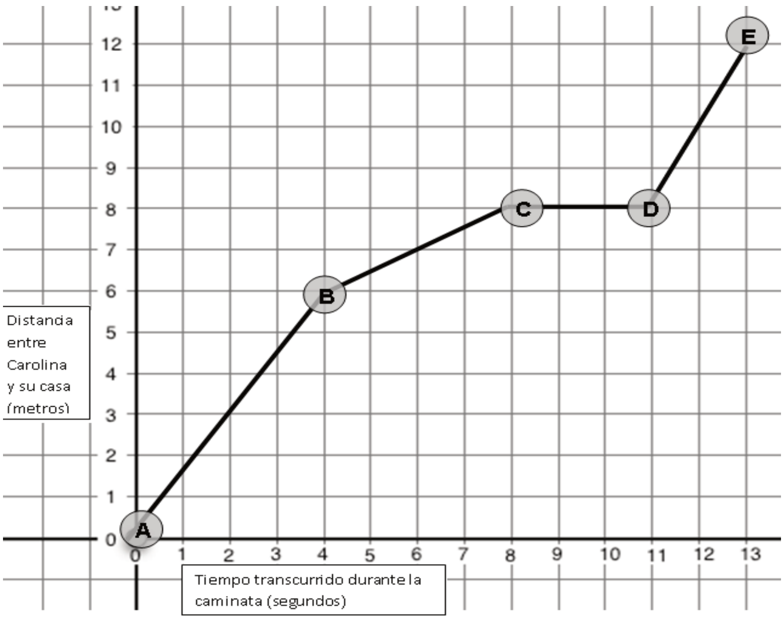


Imagen Nº 6: Gráfico sobre el paseo de Carolina (Tarea A5)

Se destina un período de tiempo para que los niños piensen y escriban la historia. Luego, se genera una discusión en torno a las interpretaciones de los alumnos.

<u>Nuestras expectativas en relación con esta tarea</u>

Esta tarea ya formaba parte del proyecto inicial de la propuesta de enseñanza. No es de nuestra autoría, como ya hemos indicado al presentarla por primera vez. Consideramos interesante la consigna de escribir una historia (en la que pueden intervenir los personajes, las situaciones y los lugares que los estudiantes deseen) para explorar los significados que los niños atribuyen a los puntos y segmentos que aparecen en el gráfico (Imagen Nº 6). La consigna invita a utilizar la imaginación para resolver una tarea en la clase de matemática.

Nuevamente aclaramos que nuestro propósito no es introducir formalmente conceptos como el de *pendiente*, sino estudiar las interpretaciones de los niños sobre los gráficos que presentamos. Por supuesto que creemos que aún trabajando desde lo intuitivo si durante el desarrollo de la clase surgen concepciones erróneas pueden debatirse para ayudar a superarlas.

Descripción de tareas del BLOQUE B

***Tarea 1*: Problema de los gogos**

Objetivos:

- Introducir el lenguaje simbólico como modelo para representar la relación entre variables.
- Articular los registros coloquial, simbólico y tabular.

Materiales:

- Dos cajas bien cerradas que contiene gogos en su interior.
- Tres gogos sueltos (ver Imagen Nº 15)

Imagen Nº 15: Soportes materiales para el Problema de los gogos (Tarea B1)

Desarrollo de la clase:

Primera parte: Trabajo en parejas.

La docente les cuenta a los estudiantes que Pablo y Lucas son hermanos. Su abuela les regaló para Navidad una caja con igual cantidad de gogos para cada uno (les muestra las cajas y las mueve para que sientan el ruido de los gogos). Pero Lucas ya tenía tres gogos de antes.

Luego, los invita a que expresen por escrito lo que saben sobre el número de gogos que tienen Pablo y Lucas. Puede hacer circular las cajas (deben estar bien cerradas y les dice a los alumnos que no deben abrirlas).

Segunda parte: *Trabajo colectivo*

La docente escribe en el pizarrón las respuestas de los alumnos a la consigna planteada organizándolas en una tabla como la que sigue:

Tabla Nº 14: Ejemplo de tabla completa para el Problema de los gogos (Tarea B1)	
Número de gogos de Pablo	**Número de gogos de Lucas**
10	13
3	6
7	13

A los alumnos que no especificaron una cantidad determinada, les pide que indiquen valores posibles, que realicen una predicción. Luego, añade una columna a la tabla para colocar el resultado de la diferencia entre el número de gogos de Pablo y Lucas.

Tabla Nº 15: Ejemplo de tabla con columna *Diferencia* para el Problema de los gogos (Tarea B1)		
Número de gogos de Pablo	**Número de gogos de Lucas**	***Diferencia***
10	13	3
3	6	3
7	13	6

En esta instancia, es probable que algunos estudiantes identifiquen algunos pares de valores que no son correctos. Entonces la docente promueve la discusión sobre estos pares de valores para que los alumnos justifiquen sus respuestas. La idea es que puedan precisar que si bien en principio Pablo y Lucas pueden tener cualquier número de gogos, una vez que se indica un valor para uno de ellos, el otro no puede tomar cualquier otro valor. En esta situación, la docente pregunta a los alumnos si hay alguna manera de escribir esto. Por ejemplo: "Si en principio Pablo puede tener cualquier número de gogos, podríamos decir N gogos, ¿les parece que lo podríamos indicar así? (escribiendo N en la celda que corresponde al número de gogos de Pablo). Entonces ¿cómo podríamos escribir el número de gogos de Lucas?" (invita a los alumnos a responder la pregunta y explicar sus respuestas)

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Esta tarea parte de la propuesta por referentes del Álgebra Temprana (Carraher et al., 2013) acerca de los sobres con figuritas. La sugerencia de las docentes de modificar el contexto para acercarlo a los estudiantes promueve la *construcción de significados* desde el punto de vista de Skovsmose (2005).

Consideramos al Problema de los gogos como la actividad principal de nuestra secuencia de enseñanza porque con ella se introduce por primera vez el lenguaje algebraico como modelo para expresar la relación entre dos variables (que hasta el momento se analizaba desde el registro gráfico).

Esperamos que la consigna de expresar lo que se sabe sobre el número de gogos de Pablo y Lucas genere alguna "ruptura" entre las prácticas aritméticas y algebraicas, desde el punto de vista de Sadovsky (2003). La tarea se puede iniciar con estrategias aritméticas, siempre y cuando se admita la posibilidad de asignar valores al número de gogos de uno de los niños (para hallar el número de gogos del otro).

¿Cómo aparece el álgebra en esta tarea? ¿Cómo se relaciona con las tareas anteriores? Creemos que esta tarea mantiene el hilo conductor de la secuencia que es la *relación entre variables*, y por tal motivo, nos parece adecuado incluirla en la propuesta de enseñanza. No obstante, consideramos que se produce un salto conceptual en relación con las tareas anteriores (y por eso el cambio de bloque) porque en este caso se introduce el lenguaje simbólico para expresar la relación entre las variables involucradas.

No sabemos si la expresión simbólica surgirá de los estudiantes o si, finalmente, la docente terminará por proponerla. Desearíamos que se cumpla la primera opción. Pero aún en el segundo caso, la exploración inicial sobre pares de valores posibles podría mejorar las condiciones de los estudiantes para "adoptar" una expresión que no surgió de ellos y comenzar a comprender que es posible *diseñar una relación simbólica* sobre la información dada (Componente 3 el sentido de los símbolos de Arcavi, 2005).

En esta tarea se manifiestan las condiciones sugeridas desde la perspectiva del Álgebra Temprana para iniciar el trabajo algebraico: existe un soporte contextual (cajas con gogos) y la situación es *ambigua* (el número de gogos no está determinado para ninguno de los dos niños) y se aprovecha esta última característica para introducir el lenguaje algebraico.

Finalmente queremos aclarar que la consigna de la tarea no ofrece información que restrinja el conjunto de valores posibles de las variables que intervienen. No obstante –y aquí se asoma la reflexión sobre el *contexto* que propone Sadovsky (2005)- las cajas y los gogos que se utilizan como soporte material pueden condicionar el dominio de cada una de las variables. Por ejemplo, el número de gogos de Lucas no podría ser mil porque no entrarían en una caja. Nos preguntamos ¿hasta qué punto el soporte material nos ayuda para resolver la tarea? Volveremos sobre esta cuestión en el Capítulo 5, al analizar lo sucedido en la clase.

***Tarea 2*: Lenguaje coloquial y simbólico sobre el número de gogos.**

Objetivo:

- Realizar traducciones del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.

Materiales:

- Copia con la consigna y la tabla para cada alumno.
- Tabla ampliada para el pizarrón (impresa en hoja A3).

Desarrollo de la tarea:

Si llamamos N al número de gogos de Pablo, completa los espacios en blanco de la siguiente tabla para expresar el número de gogos de otros compañeros de Pablo.

Tabla Nº 15: Número de gogos en palabras y símbolos (Tarea B2)		
Compañero	**Número de gogos en palabras**	**Número de gogos en símbolos**
Franco	Tiene 2 gogos menos que Pablo	
José	Tiene la mitad de los gogos que tiene Pablo	
Andrés		5.N
Lautaro	Tiene dos gogos más que el triple de la cantidad de gogos de Pablo.	
Nicolás		2.N-1

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Esta tarea conserva el contexto (número de gogos) de la tarea anterior pero "quita" el soporte material que acompañaba al problema de lo gogos. En este caso, los estudiantes no podrán sostener cajas y sopesarlas como en el caso anterior, porque suponemos que a partir de las interacciones y la expresión simbólica lograda en la Tarea Nº 5, los niños podrán resolver la nueva consigna basándose en la información coloquial o simbólica que se da en cada renglón de la Tabla Nº 15.

La conversión de registros, en este caso, simbólico y coloquial, puede dar lugar a recuperar las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, en el caso del número de gogos de Lautaro, puede tener lugar la discusión acerca de si es lo mismo escribir en símbolos 3.N+2 o 2+3.N. Lo interesante, desde nuestro punto de vista, es explorar las maneras en que los estudiantes *justifican* sus respuestas, tras la habilitación del docente para hacerlo (Margolinas, 1992).

En esta tarea también abordamos la componente 3 del sentido de los símbolos (Arcavi, 2005) porque los estudiantes deben expresar las relaciones en símbolos a partir de la información coloquial o viceversa.

Tarea 3: El problema incompleto (o borrado).

Objetivo:

- Articular los registros simbólico, coloquial y tabular.

Materiales:

- Copia para cada alumno de la consigna y tabla.

Desarrollo de la tarea:

Del problema siguiente se borró una parte:

Se sabe que Mateo tiene	gogos que tiene Pablo.

Un alumno que intentó resolverlo armó una tabla como la que sigue con los valores posibles para los gogos de Pablo y Mateo:

Tabla Nº 16: Número de gogos de Pablo y Mateo (Tarea B3)	
Número de gogos de Pablo	**Número de gogos de Mateo**
8	4
4	2
6	3
12	6

a) Completa el enunciado del problema.

b) ¿Cómo se podría indicar cuántos gogos tiene Mateo si Pablo tiene N gogos?

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Esta tarea surge "a pedido" de las docentes como refuerzo de lo trabajado hasta el momento y preparación para las Tareas Nº 4 y 5. En este caso, la información sobre la relación entre las dos variables está dada desde el registro tabular. Los niños deben reconocer cuál es la relación entre los pares de valores que se ofrecen en la tabla. La expresión que se deduce de este problema es N:2 (una relación que ya habían trabajado en la Tarea Nº 2 con los gogos de José y Pablo).

Si bien se podría cuestionar de la tarea la falta de precisión sobre el dominio de validez de las variables que intervienen (número de gogos de Mateo y Pablo), el interés en este caso se focaliza sobre la *identificación de la relación* entre las cantidades de gogos y *en el modo de expresarla en palabras y en símbolos.* Por lo tanto, continuamos haciendo alusión a la tercera componente del sentido de los símbolos (Arcavi, 2005).

Tarea 4: ***El problema de los alfajores***

Objetivos: Articular los registros gráfico, simbólico y tabular. Identificar pares de valores que no corresponden a la situación planteada.

Materiales:

- Copia para cada alumno de consignas, tabla y ejes cartesianos.

Desarrollo de la actividad:

a) En la cantina de la escuela se venden alfajores. Completa los espacios en blanco de la tabla que relaciona el número de alfajores con su precio:

Tabla Nº 10: Número de alfajores y precio (Tarea B4)	
Número de alfajores	**Precio**
2	$6
5	
	$21
12	
	$45
9	
	$39

b) ¿Cuál es el precio que corresponde a n alfajores?

c) Representa gráficamente los pares de valores de la tabla anterior en el siguiente sistema de ejes cartesianos.

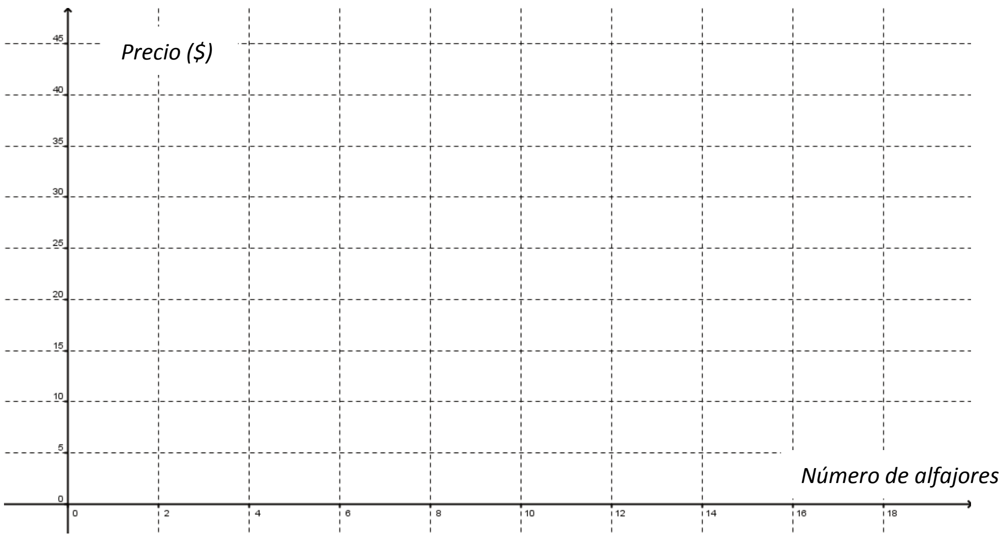


Imagen Nº 16: Sistema de ejes cartesianos Número de alfajores-precio (Tarea B4)

d) ¿Qué característica observas en el gráfico?

e) Agrega un par de valores más a la tabla y al gráfico.

f) Para responder al inciso e, ¿podrías haber elegido al punto (20, 60)? Justifica tu respuesta.

g) Para responder al inciso e, ¿podrías haber elegido al punto (14, 38)? Justifica tu respuesta.

h) ¿Y al punto (2,5, 7,5)? Justifica tu respuesta.

i) Indica un par de valores que no se hayan mencionado y que estés seguro de que no podrían agregarse a la tabla. Justifica tu respuesta.

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Esta tarea agrega algunas cuestiones interesantes desde el punto de vista didáctico. Por un lado, la relación entre las dos variables *se debe deducir de un par de valores* dados en el primer renglón de la tabla, los cuales constituyen pares ordenados. La relación es sencilla por lo que no creemos que genere dificultades para los estudiantes. No obstante, una vez identificada tal relación deben completar una tabla en la que en algunos casos el dato conocido es el valor de la variable dependiente (precio de alfajores).

Luego, se *articula el registro tabular con los registros simbólico y gráfico*. Aquí aparece la consigna de ubicar pares ordenados de valores (dados a partir de la tabla) en un sistema de ejes cartesianos. Algo similar a lo trabajado en las primeras tareas del Bloque A de la secuencia (Búsqueda del tesoro y Bingo de pares ordenados), aunque en ese caso no se utilizó el registro tabular.

Esta tarea también se vincula con las Tareas 3 y 4 del Bloque A en el sentido de que se promueve una interpretación del gráfico. Pero lo más interesante es que plantea una serie de interrogantes que invitan a reflexionar sobre la posibilidad de incluir determinados pares de valores en la tabla y el gráfico. Aquí intentamos detenernos en dos aspectos:

- Conjunto de valores posibles de las variables involucradas.
- Conjunto de pares de valores que satisfacen la relación entre las variables dadas.

Respecto al primer punto, podemos decir que el número de alfajores que se venden en la cantina (variable independiente) debe ser un número natural. Otra vez, como en el problema de los gogos, no tenemos una restricción sobre el máximo valor posible de esta variable. La pregunta h apunta a esta cuestión. El par dado cumple con la relación entre las variables, pero ¿podemos comprar 2,5 alfajores? Quizás puedo comprar un alfajor a medias con un compañero… Preferimos dejar abierta esta cuestión y estudiar lo sucedido en la clase.

La pregunta g, en cambio, propone un par de valores que no satisfacen la relación entre las variables por lo que no podría incluirse ni en la tabla ni en el gráfico. En el último interrogante se deja libertad al alumno para elegir un par de valores que no se pueda incluir como posibilidad y que justifique su respuesta. En este caso, puede centrarse en el primero o segundo aspecto que hemos mencionado.

Finalmente, cabe aclarar que planteamos este problema teniendo presente que puede retomarse en una etapa posterior durante el tratamiento de proporcionalidad directa.

Tarea 5: Descubre la regla

Objetivos: Identificar la expresión simbólica que representa la relación entre los pares de valores dados.

Materiales:

- Copia para cada alumno de consignas.

Desarrollo de la actividad:

a. Halla, en cada caso, la regla que permite pasar de un número a otro y completa los valores que faltan

Tabla Nº 17: Casos para hallar la regla para pasar de un nùmero a otro (Tarea B5a)

CASO 1		
4	→	20
3	→	15
7	→	.....
13	→	.....
n	→	.....

CASO 2		
4	→	28
9	→	63
6	→	.....
8	→	.....
n	→	...

CASO 3		
2	→	5
3	→	7
4	→	9
5	→	.....
11	→	.....
n	→	...

CASO 4		
4	→	11
3	→	8
7	→	20
8	→	.....
10	→	....
n	→	....

b. Inventa una regla para pasar de un número a otro.

REGLA:

c. Completa la siguiente tabla con la regla que inventaste:

Tabla Nº 18: Inventa una regla para pasar de un número a otro (Tarea B5c)	
2	
5	
8	
11	
14	
n	

d. Completa **<u>SÓLO las dos primeras filas</u>** de la tabla que sigue teniendo en cuenta la regla que inventaste. Recorta e intercambia esta tabla con la de tu compañero y averigüen cuál es la regla que inventó cada uno.

Tabla Nº 18: Inventa una regla para pasar de un número a otro (Tarea B5c)	
2	
5	
8	
11	
14	
n	

Las correcciones del último inciso las efectúan ellos mismos. Cada uno evalúa al compañero con el que intercambió su tabla.

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

El inciso a de esta tarea fue extraído y modificado de referentes del Álgebra Temprana (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011). Las respuestas a la primera consigna (inciso a) de la tarea son las siguientes

Caso 1: $5 .n$; Caso 2: $7.n$; Caso 3: $2.n+1$; Caso 4: $3.n-1$

Esta tarea está descontextualizada y no se explicita cuál es el dominio considerado. Se deja abierta la posibilidad para discutir en torno a esta cuestión.

Nos pareció interesante invitar a los estudiantes a que inventen su propia regla, la intercambien con un compañero y se evalúen mutuamente. Se pone de manifiesto en esta tarea la componente 3 del sentido de los símbolos de Arcavi (2005).

Tarea 6: *El problema de la billetera y la alcancía*

Objetivos: Articular registros de representación. Comparar representaciones gráficas.

Materiales:

- 1 billetera
- 1 alcancía
- $8.

<u>Desarrollo de la actividad:</u>

Primera parte: trabajo individual/en parejas

La docente pide a dos alumnos que pasen al pizarrón. A uno de ellos le entrega la alcancía y los $8 y al otro, la billetera. Utilizando los nombres reales de los alumnos voluntarios plantea el siguiente problema:

Matías tiene $8 en el bolsillo y el resto de su dinero en la alcancía. Franco tiene en su billetera exactamente tres veces el dinero que Matías tiene en la alcancía.

Expresa por escrito lo que puedes decir sobre las cantidades de dinero de Matías y Franco.

Segunda parte: Trabajo colectivo

Se realiza una puesta en común de las respuestas de los alumnos. La docente les pide que expliquen sus respuestas.

Una vez que llegan a un acuerdo, escribe la siguiente tabla en el pizarrón y les pide a los alumnos que la completen:

Tabla Nº 19: Dinero en la alcancía y total de dinero de Matías y Franco (Tarea B6)

Dinero en la alcancía de …….	Dinero total de …..	Dinero total de…...
A		
	8	
1		
		6
	11	
4		
	17	
		18
	13	
		30
11		
	20	
8		

Tercera parte: Representación gráfica

La docente solicita que representen en el siguiente sistema de ejes cartesianos los pares ordenados de valores correspondientes a las dos primeras columnas de la tabla (cantidad de dinero en la alcancía de Matías y cantidad total de dinero que tiene Matías).

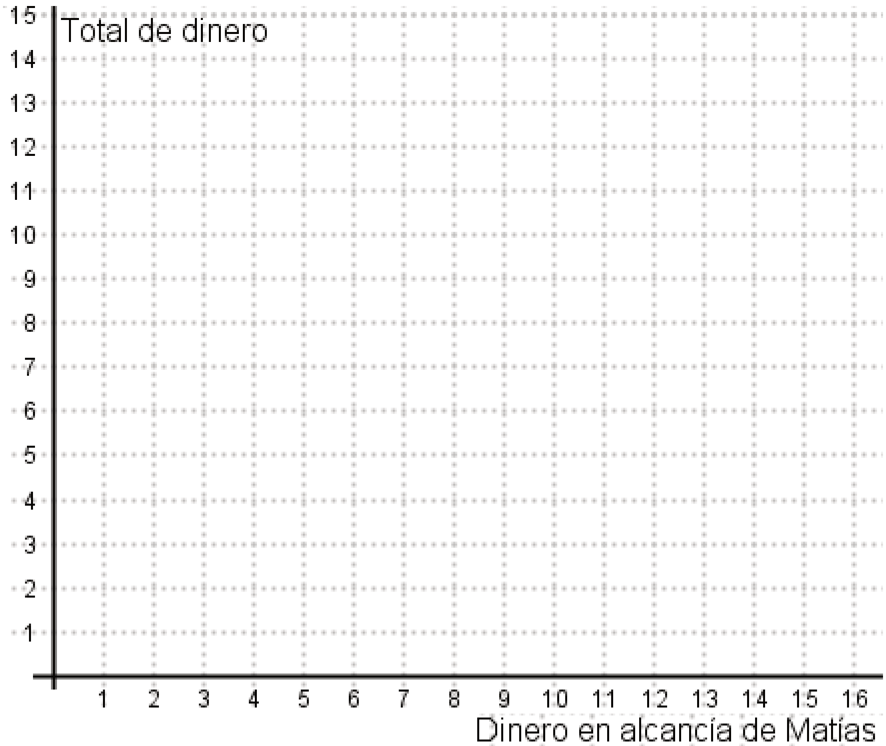


Imagen Nº 17: Sistema de ejes cartesiano Dinero en alcancía de Matías-Total de dinero (Tarea B6)

Luego, les pide que agreguen en el mismo gráfico pero con otro color, la cantidad total de dinero de Franco en relación con la cantidad de dinero en la alcancía de Matías, considerando también los valores de la tabla.

Otras consignas que puede proponer la docente:

- Expresa qué característica puedes observar en los gráficos realizados.
- ¿Son iguales los dos gráficos? Explica tu respuesta.
- ¿En algún momento tienen la misma cantidad de dinero? Explica tu respuesta.
- Expresa lo anterior en símbolos.

Nuestras expectativas en relación con esta tarea

Esta tarea parte de una propuesta de referentes del Álgebra Temprana (Carraher et al., 2013). Pretendemos con la misma articular de alguna manera lo que estuvimos trabajando durante toda la secuencia de enseñanza. Se relacionan en esta tarea los registros gráficos, tabular, simbólico y coloquial. Tiene una primera parte que se asemeja al Problema de los gogos (Tarea B1) porque se parte de una situación expresada oralmente en la cual aparecen cantidades indeterminadas (variables) y se solicita a los niños que escriban lo que pueden decir sobre estas cantidades. En este caso, a diferencia de la tarea mencionada, se utilizan tres variables (cantidad de dinero en la alcancía de Matías, cantidad total de dinero que tiene

Matías y cantidad de dinero que tiene Franco en su billetera).

Luego, se trabaja con el registro tabular de una manera similar a lo realizado con el Problema de los alfajores (Tarea B4), con la diferencia ya mencionada (y no menor) referida a la cantidad de variables que intervienen. En el primer renglón de la tabla los estudiantes deben expresar en símbolos la relación entre las variables, haciendo uso de la componente 3 del sentido de los símbolos de Arcavi (2005).

El último paso involucra al registro gráfico y a la interpretación de la información que se obtiene desde dicho registro. Los niños ya tuvieron la posibilidad de comparar curvas en un mismo sistema de ejes cartesianos (Tarea A4) pero con características diferentes de las planteadas en este caso.

Este problema también ofrece la posibilidad de recuperarlo durante el tratamiento de la proporcionalidad directa, porque pone en evidencia una relación que cumple y una que no cumple con dicha proporcionalidad.

Finalmente, reconocemos que el conjunto de valores posibles de las variables que intervienen en este problema, por tratarse de cantidades de dinero, está conformado por valores racionales con hasta dos cifras decimales (dependiendo de la unidad monetaria). No obstante, los valores que figuran en la tabla son todos naturales y ponemos en discusión la cuestión del dominio de validez en esta tarea.

3.3 SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo realizamos una descripción del proceso llevado a cabo para el diseño de la propuesta de enseñanza. Nuestra intención, desde el comienzo de dicho proceso, es que el hilo conductor de las tareas sea el estudio de *relaciones entre variables*, colocando especial énfasis en la articulación de diferentes *registros de representación* (Duval, 2008). Esto se pone de manifiesto en la Tabla Nº 20 que presentamos a continuación, donde resumimos la relación entre las tareas, los registros y el tipo de referencia utilizados en las mismas.

Tabla Nº 20: Relación entre tareas, registros de representación y tipo de referencia								
		Registros de representación				Tipo de referencia		
COD	**Nombre de Tarea**	**Gráfico**	**Coloquial**	**Tabular**	**Simbólico**	**Matemático**	**Semirrealidad**	**Realidad**
A1	Búsqueda del tesoro.	X	X			X		
A2	Bingo de pares ordenados	X	X			X		
A3	Gráficos de percentiles edad-estatura.	X	X					X
A4	Gráfico velocidad de crecimiento estatura.	X	X					X
A5	El paseo de Carolina.	X	X				X	
B1	El problema de los gogos.		X	X	X		X	
B2	Lenguaje coloquial y simbólico sobre el número de gogos.		X		X		X	
B3	El problema incompleto (o borrado).		X	X	X		X	
B4	El problema de los alfajores	X	X	X	X		X	
B5	Descubre la regla.			X	X	X		
B6	El problema de la billetera y la alcancía	X	X	X	X		X	

En la tabla observamos una diferencia notoria entre el primer y el segundo bloque. En el Bloque A se introducen las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos con tareas que contienen elementos lúdicos y luego, se trabaja la *interpretación de gráficos* desde diversos contextos, en algunos casos con referencias a la realidad y en otros a una semirrealidad. En el Bloque B, la novedad la constituye el *registro simbólico* y *tabular*. En la propuesta de enseñanza intentamos *articular los cuatro registros* y *tipos de referencia* de forma variada y al mismo tiempo, *utilizar los símbolos* con el fin de representar la relación entre las variables involucradas en cada tarea, es decir, como *modelo de la situación*. En este sentido, creemos que con las tareas del Bloque B estamos contribuyendo al desarrollo de la tercera componente del sentido de los símbolos mencionada por Arcavi (2005):

- Conciencia de que uno puede *diseñar en forma exitosa relaciones simbólicas* que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada.

A este aspecto, añadimos las expectativas generales de enseñanza en relación con las tareas planteadas:

- Generarán *intercambios* en torno a las producciones de los estudiantes que contribuirán a la *construcción del sentido* de las nociones abordadas.
- Involucran *contextos* que favorecerán la *atribución de significados* a las acciones desarrolladas por los estudiantes.
- Promoverán la *articulación de registros de representación*, la vinculación de las letras con la noción de *variable* y el uso del lenguaje algebraico como *modelo* para representar *relaciones entre variables*.

Antes de cerrar esta sección, nos interesa detenernos en el siguiente interrogante: ¿cuál es el sentido de dedicar todo un capítulo a detallar el *proceso de elaboración de la propuesta de enseñanza*? Intentamos caracterizar con la mayor claridad posible cómo desarrollamos esta parte del estudio, porque apunta precisamente a uno de nuestros *objetivos particulares*: "Diseñar, implementar y analizar una propuesta de enseñanza para séptimo grado de la educación primaria centrada en el establecimiento de relaciones entre variables desde diferentes registros de representación"

Además, hay otro aspecto que desde nuestro punto de vista no es menor. En la metodología planteamos que la elaboración de la propuesta de enseñanza se llevaría a cabo por medio de un *trabajo colaborativo de equipo mixto* ¿Podemos saltear las características que tuvo este trabajo si tenemos el supuesto de que incide en la posibilidad de *construir significado* de las tareas por parte de los estudiantes (Skovsmose, 2005)?

Creemos que el detalle provisto en este capítulo es sumamente necesario y fundado para nuestra investigación. En la primera sección (Sección 3.1) recuperamos los aportes teóricos que habíamos mencionado en el capítulo anterior y que enmarcan en forma general nuestra propuesta de enseñanza. Observamos que los constructos teóricos que aparecen en la Imagen Nº 2 al sintetizar el Capítulo 2 son los mismos que se mencionan al principio de este capítulo.

No obstante, al inicio de la Sección 3.2 aclaramos que antes de elaborar el *proyecto inicial de la propuesta de enseñanza* tuvimos encuentros con las docentes de los séptimos grados y llegamos a acuerdos que buscaban articular nuestros objetivos de investigación con los suyos, de enseñanza. Surgió así la necesidad de plantear tareas que puedan retomarse al momento de abordar la noción de proporcionalidad directa, por ejemplo.

En el Apartado 3.2.2 explicitamos el *proyecto inicial de la propuesta de enseñanza* que presentamos a las docentes para trabajar en torno al diseño definitivo de las tareas. Este proyecto fue planteado para iniciar las discusiones e intercambios con el equipo mixto, sin el propósito de realizar una imposición. No sólo por una cuestión de respeto a las docentes que están a cargo de los cursos, sino también porque confiamos en que sus conocimientos acerca de *cómo enseñar matemática a niños de 11/12 años* y cómo *motivarlos o comprometerlos* con las tareas (conocimientos que exceden lo meramente teórico y se conjugan con la experiencia) nos posibilita "tener los pies en la tierra" al plantear las tareas pensando en la construcción de significados, desde el punto de vista de Skovsmose (2005).

La *versión definitiva de la propuesta de enseñanza* contempla lo que nos proponemos desde nuestro trabajo de investigación: algunas tareas se pueden caracterizar como *escenarios de investigación sobre una semirrealidad*, las expresiones simbólicas surgen como *modelos* para representar la información que brindan los problemas, permitiendo articular diferentes *registros de representación* y el hilo conductor es el establecimiento de *relaciones entre variables*. Sin embargo, las tareas también expresan *la voz de las docentes*, de lo que ellas creen que sus alumnos son capaces de hacer, entender e interesarse. Creemos que habilitar la participación de las dos partes (docentes e investigadoras) para lograr el diseño de las tareas no sólo las enriquece desde todo punto de vista, sino que también favorece una *actitud positiva* hacia la etapa que sigue que trata de la implementación de las tareas en el aula.

Esta última idea no es *comprobable* en términos de resultado de un experimento de laboratorio pero sí nos interesa relacionarla con una cita de Sadovsky (2005) que mencionamos en el capítulo anterior. La autora plantea la cuestión de *repensar el sentido en educación matemática* también refiere a la imagen recurrente del docente "tironeando" a los estudiantes para llevarlos a donde ellos no parecen querer ir. Dice *hablar del sentido* también es tratar una reivindicación gremial. Es decir, cuando hablamos del sentido no nos referimos sólo a las posibilidades de su construcción por parte de los alumnos. También la tarea del docente necesita estar *cargada de sentido*.

Retomando la idea que señalábamos antes, creemos que lograr un *trabajo en equipo* (expresión que muchas veces suena desconocida en el ámbito docente) para planificar tareas ya es un gran paso. Y si además, habilitamos la posibilidad de *repensar las propuestas de enseñanza* considerando aportes teóricos que nos ayudan a promover la construcción del sentido/significado *nos posicionamos* de una mejor manera para disfrutar nosotros también de la tarea que desempeñamos en el aula (como docentes/investigadores).

CAPÍTULO 4
Análisis de las tareas del Bloque A

En este capítulo, realizamos un análisis de la implementación en el aula de las cinco tareas que denominamos *Introductorias*, que conforman el Bloque A. En dichas tareas se introducen las nociones de pares ordenados y sistemas de ejes cartesianos y se promueve la interpretación de representaciones gráficas, aludiendo en algunos casos al uso social de las mismas.

El mismo consta de dos secciones. En la primera de ellas analizamos la implementación de cada una de las cinco tareas (Sección 4.1) y en la segunda, sintetizamos los aspectos más importantes del estudio realizado (Sección 4.2).

Para el análisis de cada una de las tareas tuvimos en cuenta *las características de su implementación* en el aula en el siguiente sentido: en algunas tareas se privilegia el trabajo colectivo o las *instancias de intercambio oral,* mientras que en otras, el trabajo se focaliza más en las *producciones escritas* de los estudiantes. Por este motivo, analizamos las tres primeras a partir de fragmentos de las transcripciones de clase, ya que en estos casos se promueve el trabajo con el grupo clase. Las dos últimas tareas favorecen producciones escritas de los estudiantes (individuales o grupales), por lo que posibilitan centrar la atención en las respuestas de los alumnos. No obstante, en estas tareas incluimos un breve comentario sobre las interacciones que tuvieron lugar en el aula.

4.1 ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Para realizar el estudio de cada una de las tareas introductorias nos centramos en los siguientes focos de interés:

- El rol del *contexto.*
- El papel de las *interacciones* en clase en instancias de puesta en común.
- Las características de la *gestión de la clase* por parte de la docente.

Estos aspectos se relacionan con los que hemos mencionado en el Capítulo 2 como herramientas teóricas que deben tenerse en cuenta al momento de pensar la construcción del sentido de las nociones matemáticas. Si bien en estas tareas no se ponen de manifiesto nociones algebraicas en forma explícita, sí se recurre al establecimiento de *relaciones entre variables* a partir del registro gráfico. Esta noción dará lugar, en tareas posteriores a la iniciación al lenguaje algebraico desde un punto de vista funcional.

4.1.1. Tarea N° 1: Búsqueda del tesoro[22]

Implementación de la tarea

El objetivo de esta tarea es introducir las nociones de par ordenado y ejes cartesianos ortogonales de una manera lúdica. Recordemos sus características:

En el pizarrón se coloca un afiche que contiene los ejes cartesianos con escalas etiquetadas del 0 al 8 para el eje de abscisas y del 0 a 6 para el eje de ordenadas, sobre un cuadriculado de líneas de puntos que indica los pares ordenados de coordenadas enteras. Cada uno de estos pares ordenados se encuentra tapado con un cuadrado de cartulina. En cuatro de ellos se esconden los tesoros (indicados con una estrella).

Los alumnos deben indicar en voz alta pares ordenados y la maestra (u otro alumno) destapa el par indicado del afiche que contiene los ejes cartesianos. Se encuentran escondidos cuatro tesoros.

Los estudiantes se muestran entusiasmados y participan activamente del juego. La maestra los organiza solicitándoles que levanten la mano. Mientras un alumno indica oralmente un par ordenado, otro lo destapa del afiche para determinar si hay un tesoro escondido en ese lugar.

Durante el desarrollo del juego sucede que varios estudiantes intervienen al mismo tiempo, por lo que la docente debe pedir silencio y volver a organizarlos para continuar con la dinámica.

Análisis de la tarea

Cuando la docente presenta el afiche (que en ese momento denomina “el tablero de juego”) un estudiante lo relaciona con la Batalla Naval[23] y otros dos estudiantes con los paralelos y meridianos (frases 2 y 7 de la Transcripción 1 que aparece más adelante). Esta última relación no es escuchada, o al menos, no es tenida en cuenta por la maestra en ese momento.

Más tarde, la docente insiste para que establezcan alguna otra asociación (frase 9) y los alumnos lo vinculan con “los paralelos y meridianos”, tema que estaban trabajando en Ciencias Sociales. Esta relación da lugar a diferentes intercambios que nos permiten organizar lo sucedido en la clase en tres momentos:

1. Ubicación del cero en el plano de coordenadas cartesianas ortogonales. º
2. Caracterización del tablero de juego y establecimiento de convenciones matemáticas.
3. Comunicación de pares ordenados.

Describimos a continuación el análisis de esta clase diferenciando estos tres momentos.

Primer momento: Ubicación del cero en el plano de coordenadas cartesianas

Para estudiar lo sucedido en esta primera etapa del desarrollo de la clase, transcribimos el episodio inicial, en el que se presenta el tablero y los estudiantes realizan comentarios sobre el mismo.

[22] Una parte del análisis de la Tarea N° 1 y 3 fue presentada en Camissi, Kiener y Scaglia (2016).
[23] Como hemos mencionado en el capítulo anterior, los estudiantes habían jugado a la Batalla Naval en clases anteriores.

1- D: Cuando yo les entregué el tablero de juego, podemos decir así, el tablero de juego, hay alguien que dijo la Batalla Naval. En realidad esto no es una Batalla Naval, sino una búsqueda del tesoro.
Los alumnos festejan.
2- A: Paralelos y meridianos.
3- A: Búsqueda del tesoro, ¡vamos!
4- D: En este tablero, en este tablero hay cuatro tesoros escondidos, la idea es que ustedes los descubran.
5- A1: Uh de acá ya veo uno. *(El alumno se dirige a su compañero de banco).*
6- D: Pero antes de empezar a arriesgar posibles ubicaciones del tesoro, quiero que analicemos el tablero de juego.
7- A1: Latitud 5, longitud 3. *(En simultáneo con la docente).*
8- A: Es como una Batalla Naval.
9- D: Es como una Batalla Naval, es ¿Cómo qué más?
10-A: Parece como los paralelos y los meridianos.
11-D: Parecen la gráfica, la red de los paralelos y meridianos que es justo el tema que estamos viendo en sociales.
12-Marcos: Pero nada más que no está el cero en el medio.
13-Giovanni: Si como que no está separado por ecuadores y…
14-A: No está separado por el Ecuador y el meridiano.
15-Varios: ¡Sí!
16-A: Pero no hay Norte y Sur.

Transcripción 1: Frases 1-16 de la Tarea A1

Como podemos observar en la transcripción anterior, un estudiante expresa enseguida una diferencia entre el tablero de juego y el mapa indicando que en el primero “no está el cero en el medio” (frase 12). Otros compañeros comentan que no está separado por el Ecuador y el meridiano y que no hay Norte y Sur en el tablero. La observación del primer alumno es retomada por la docente para preguntar a los estudiantes sobre la ubicación del cero en el plano de coordenadas cartesianas:

17-D: ¿Dónde pondrían el cero que dice Marcos?
Hablan todos juntos.
18-A: El meridiano en el 4 y el Ecuador en el 3.
19-D: A ver que no entendí porque hablaron todos juntos, Juliana está levantando la mano.
20-Juliana: El ecuador en el 3 en la línea del 3 y el de Greenwich en el 4.
21-A: No, no es el medio.
22-D: Lo que está diciendo Juliana, a ver, pensándolo en relación al planisferio que el Ecuador sería el 3, ¿Por qué? El eje 3, ¿Por qué?
23-Juliana: Porque está en la mitad.
24-D: Porque es la mitad de este plano.
25-A: Del 1 al 6.
26-D: Y ahí estaría el 0 grados, estoy tratando de seguir tu pensamiento ¿Es así? ¿Es lo que estás pensando?
27-Nicolás: También podría ir donde se cruzan las rayitas.
28-D: ¿Y el meridiano de Greenwich en este plano? *(en simultáneo con Nicolás).*
29-A: En el 4.
30-A: En el 4,5.
31-D: En el 4,5.
32-A: Y en el 3,5 también el otro.
33-A: No.
34-A: Si, porque sino hay dos cuadraditos para abajo.
35-D: Bien, si esto fuera toda la Tierra digamos, pero yo pregunté en este tablero…

36-Nicolás: También puede ser donde se cruzan las flechitas.
37-D: Bien, pero tiene que ver con la pregunta lo que vos estás contestando. Por eso, vuelvo a preguntar porque algunos no escucharon, ¿Dónde ubicarían el cero Nicolás?
38-Nicolás: Donde se cruzan las flechitas.
39-D: Donde se cruzan las flechitas, si, ¿están de acuerdo?
40-Alumnos: Sí.

Transcripción 2: Frases 17-40 de la Tarea A1

Notamos que los niños interpretan que la pregunta de la docente se refiere a la ubicación del Ecuador y del meridiano de Greenwich en el afiche, por lo que indican los puntos medios aproximados de las escalas visibles en cada eje.

Cabe aclarar que la escala para el eje de abscisas incluye el valor 9, aunque no se muestra su etiqueta, por eso los estudiantes indican que el punto medio es el 4,5. Del mismo modo, en el caso del eje de ordenadas, la escala visible se extiende hasta el valor 6,5 aproximadamente, por lo que el punto medio sería aproximadamente 3,25, aunque uno de ellos menciona al 3,5. Si bien aparecen diferencias en los valores que indican algunos estudiantes sobre el punto medio de cada escala, no se discuten las mismas y no se explicita finalmente cuál es la respuesta más exacta.

En medio del debate, uno de ellos, Nicolás, indica que el cero “también podría ir donde se cruzan las rayitas” (frase 27). La docente reformula la pregunta inicial aclarando que se refiere al tablero de juego (frase 35) y es el mismo alumno el que le responde (frase 36 y 38).

En la transcripción anterior se manifiesta la intención de la docente de *seguir el pensamiento* de los estudiantes (frase 26), de *valorar sus ideas* y *hacerlas prosperar aunque no coincidan exactamente con el camino previsto* para el desarrollo de la clase. Esto se evidencia a partir del interrogante inicial referido a la ubicación del cero en el plano de coordenadas cartesianas. No obstante, no descarta las intervenciones de los estudiantes que intentan ubicar el Ecuador y el Meridiano de Greenwich en el plano de ejes cartesianos. Posibilita que se expresen y luego retoma la pregunta inicial, realizando la aclaración correspondiente: “Bien, si esto fuera toda la Tierra digamos, pero yo pregunté en este tablero…” (frase 35).

Finalmente, la pregunta de la docente acerca de la ubicación del cero en el gráfico presenta cierta impresión, aunque entendemos que se refiere a la ubicación del par ordenado de coordenadas (0,0).

Segundo momento: Caracterización del tablero de juego y establecimiento de convenciones matemáticas

La clase prosigue con preguntas que realiza la docente con la intención de caracterizar el plano de ejes cartesianos. Surgen en este momento una serie de relaciones entre el tablero de juego y las nociones geométricas de rectas, semirrectas opuestas, rectas perpendiculares, ángulos de 90° y ángulos opuestos por el vértice, que habían abordado con anterioridad (frases 43-74 de la Transcripción de la Clase Nº 1 en el Anexo 2).

La docente finaliza estos intercambios retomando la relación con paralelos y meridianos para introducir la denominación convencional de los ejes cartesianos.

74-D: Son semirrectas al ser cortadas por el punto cero, perfecto. Bien, vuelvo a lo que nosotros estamos viendo en sociales, el eje horizontal ¿que vendría a ser en el planisferio?
75-A: Latitud.
76-A: Los paralelos.
77-D: Los paralelos, ¿y el vertical?
78-A: Los meridianos.
79-D: Y en este gráfico fíjense, ¿cómo se llaman los ejes?
80-A: Filas y columnas.
81-A1: Latitud y longitud.
82-A: Tienen números.
83-A: Una recta y griega y otra recta x.
84-D: Muy bien, ustedes saben que en matemática hablando de convención, hoy estábamos hablando de convención en las ciencias sociales.
85-A1: Semirrecta x y semirrecta y.
86-D: En realidad está nombrando la recta, el eje vertical ¿Cómo se llama?
87-A: Y griega.
88-D: Y griega, y el eje horizontal… x.
89-A1: x… la incógnita. *(En voz baja).*
90-D: En matemática hay una convención, hablamos de miles de convenciones desde el primer día, convenciones para el lenguaje, para comunicarnos, en matemática hay una convención, es decir, un acuerdo por el que el eje horizontal en un gráfico como este, de ejes cartesianos, el eje horizontal se denomina, se nombra como x, que es el eje de las abscisas y el eje y es el eje vertical, eso es pura convención.
*91-*A1: ¿Qué es la abscisa? *(dirigiéndose a su compañero de banco).*
92-D: Bueno, trajimos todas esas convenciones para jugar a la búsqueda del tesoro y ahora nos largamos, ¿está bien?

[…] *(La docente organiza a los estudiantes para participar del juego)*

100-D: Shh, no, Andrea lo va a anunciar a la posición del punto que ella arriesgue y Agustín lo va a descubrir.
101-A: ¿Cuántos tesoros hay?
102-D: Son cuatro.
103-Andrea: Dos.
104-A: Dos x.
105-D: Agustín descubre.
106-Agustín: ¿Qué dijo?
107-Andrea: Dos y griega.
108-A: ¿Cómo es?
109-D: ¿Cómo es? A ver…
110-A: Dos horizontal.
111-A1: Latitud dos.
112-D: Hoy hablamos, bueno no sé si hoy u otro día, hablamos de una convención, ¿Qué decimos primero? ¿el horizontal o vertical?
113-A: La latitud.
114-A: Horizontal.
115-D: El valor horizontal, si, en matemática también usamos esa convención, vamos a decir primero el valor horizontal y luego el vertical.

116-Andrea: seis horizontal x y dos eh…
117-A1: Latitud…
Se oye alumnos que conversan entre sí.
118-D: Déjenla a ella que se decida… A ver…
119-Andrea: seis horizontal y dos vertical.

Transcripción 3: Frases 74-119 de la Tarea A1

Consideramos interesante el modo de presentar las convenciones matemáticas en esta clase. Con respecto a las denominaciones de cada eje cartesiano, la docente solicita a los estudiantes que observen el afiche para identificarlos y les aclara que como sucede en otras áreas, se trata de una *convención*. En lo que concierne a la forma de indicar un par ordenado en matemática, espera que surja el *conflicto de comunicación* para presentar la forma convencional de mencionarlo. Habilita el inicio del juego para que surja la *necesidad de ponerse de acuerdo* sobre cómo expresarlo y cómo interpretarlo.

La denominación utilizada para los pares ordenados en matemática (indicando primero el valor correspondiente a la abscisa y luego el de la ordenada) constituye una convención que los niños deben adoptar y, como tal, no existe un argumento matemático o de algún otro tipo que la justifique. No obstante, podemos decir que la docente intenta *cargar de sentido* a dicha convención al hacer uso del *Principio de necesidad* (Sessa, 2005) y presentarla como *solución a un conflicto comunicacional*.

En cuanto a la forma de explicar la convención matemática para expresar pares ordenados, observamos que la docente realiza una *vinculación directa* con la convención geográfica, porque en las dos disciplinas se menciona primero el valor horizontal (o latitud) y luego, el vertical (longitud) (frases 112-115).

No obstante, debemos distinguir a qué nos referimos con valor horizontal y vertical en el planisferio. La latitud (paralelo) gráficamente es una línea horizontal y su valor se obtiene en el margen vertical del mapa, mientras que la longitud (meridiano) es una línea vertical y su valor se obtiene en el margen horizontal. Por lo tanto, si nos guiamos por la forma de leer los valores para expresar un par ordenado (o un punto en el mapa), la convención para nombrar una ubicación en el planisferio es exactamente opuesta a la utilizada en matemática en el plano cartesiano. Este hecho dio lugar a confusiones que se manifiestan en reiterados momentos durante el desarrollo del juego. Analizaremos las mismas en el siguiente apartado.

Tercer momento: Comunicación de pares ordenados

En el siguiente fragmento observamos la discusión que se desencadena al intentar ubicar el par ordenado (6, 2) enunciado por Andrea, la primera estudiante en participar del juego.

119-Andrea: seis horizontal y dos vertical.
120-José: ¡No llega el Augustito!
121-Agustín: Gracias.
122-José: No, pero nadie llega allá arriba.
123-D: Seis,dos. Mostrale y preguntale. ¿Es ese? *(dirigiéndose a Agustín)*
124-A: No, al revés, el dos de arriba.

125- D: A ver… ¿Es éste o éste el que vos querés? *(señalando en el gráfico los puntos (6,2) y (2,6)).*
126- A: No, el otro.
127- A: Dijo seis vertical.
128- A: Es como latitud.
129- D: Vos dijiste un par de valores, depende como lo enuncies vamos a entender si es horizontal o vertical, decilo, a ver.
130- Andrea: Eh… dos horizontal y seis vertical.
131- D:¡Ah! Ahora lo cambiaste me parece.
132- A: No.
133- A: Latitud dos…
134- D: ¿Así? primero el dos y después seis.
135- A: Si.
136- A: ¡Dale Agustito!
137- A: ¿Cómo son?
138- A: ¿Por qué es primero el vertical?
139- Varios: ¡¡Yo, Seño!! *(Solicitan participar del juego)*
140- D: José escuchá lo que anuncia Mariana y anotalo de paso así lo vemos bien.

Hablan varios al mismo tiempo.

141- D: Ella quiere decirlo como si fuera el planisferio.
142- Mariana: Eh… latitud cuatro, longitud siete.
143- A: Cinco dijo.
144- Varios: ¡¡Cuatro dijo!!
145- Varios: cuatro y siete.
146- D: ¿Está bien?
147- A: Si.
148- D: Pero ¿Vos no dijiste cuatro primero?
149- A: No.
150- Varios: ¡¡¡Latitud cuatro!!!
151- D: Se dice así *(señalando el gráfico),* en el vertical.
152- A: ¿Pero Latitud no es ahí abajo?
153- D: Claro, pero lo que pasa es que, a ver, nos vamos a correr del planisferio, vamos al gráfico que tenemos.
154- A: ¿Y cómo lo tenemos que decir?
155- D: Bueno, pero no estamos haciendo latitud y longitud.
156- A: Pero es más fácil así.
157- D: A ver, primero dijimos, digan, lean, el valor horizontal y luego el vertical.
158- A: ¿Cómo? Primero decimos los que están así? *(señalando el gráfico)*

La docente explica señalando el gráfico los valores correspondientes.
Hablan todos juntos.

159- A: Ah...entonces lo dijo al revés Mariana.
160- A: No entiendo.

Transcripción 4: Frases 119-160 de la Tarea A1

En el intercambio, una niña pretende enunciar el par (7, 4) pero utiliza la convención usada en geografía: latitud 4 y longitud 7 (frase 142). Realiza correctamente la interpretación del par ordenado en términos de las nociones de latitud y longitud. La docente (frases 148, 151, 157) intenta retomar el orden convencional usado en matemática y *desprenderse* de la convención geográfica, notando que ocasiona confusiones.

Lo interesante, desde nuestro punto de vista, es que la maestra *no se limita a explicar cómo debe decirse correctamente*, sino que retoma el diálogo con la niña que había indicado el último par ordenado (4,7) para *que sea ella la que explique el origen de su confusión*. Como puede observarse en el fragmento que sigue, la docente aprovecha la ocasión porque el par ordenado (7, 4) no puede ubicarse en el afiche (a menos que se prolongue el eje vertical).

162- A: Entonces lo dijo mal Mariana.
163- José: ¡Pero no Seño, es cierto, no puede ser siete así! *(Señalando en el gráfico)*
Hablan todos juntos.
164- A: No se dice primero la latitud.
165- A: Ahora no vamos a saber si había tesoro.
166- D: Sacalo.
Hablan todos juntos.
167- D: Mariana, ¿qué te había pasado? A ver, contá, porque por ahí dijeron que no existe ¿Qué es lo que no existe?
168- Mariana: No, porque yo me confundí, dije primero, porque vos nos dijiste que era primero el horizontal, y yo no sabía si era, o sea, de las líneas que están así horizontal…
169- A: Claro yo también entendí lo mismo.
170- D: A ver, porque los paralelos se marcan así *(señala el gráfico).*
171- Giovanni: Además en Ciencias Sociales siempre decimos primero la latitud.
172- D: Está bien, pero acá el valor horizontal, está expresado aquí abajo y sube verticalmente.
173- A: Entonces eso es latitud.
174- A: ¡Yo, Seño, Yo yoyo!
175- D: Bueno pero lo primero que vos habías dicho en realidad era (4, 7) en ese orden o lo habías dicho de otra manera ¿Por qué dijo José "pero no existe ese punto"?
176- A: Porque no tenía siete
177- José: Porque no hay siete.
178- D: No hay siete.
Hablan todos juntos.
179- D: Porque no hay siete por eso él no lo marcó.

Transcripción 5: Frases 162-179 de la Tarea A1

En el diálogo se pone de manifiesto que la confusión de los estudiantes se debe a la forma de leer los valores horizontales y verticales en el mapa. En la frase 172 y en el fragmento que sigue la docente pretende aclarar la confusión introduciendo los términos "horizontal" para referirse a la abscisa de cada punto y "vertical" para la ordenada.

190- D: A ver, fíjense los valores del eje horizontal, ¿podes marcar los valores del eje horizontal? ¿Cuál es el eje horizontal?
Marcos señala en el gráfico.
191- D: El eje, el eje, la recta horizontal, ¿Cómo se llama?
192- Alumnos: x.
193- D: ¿Podés marcarlo con el dedo?
Marcos señala el eje x con el dedo.
194- D: Bien.
195- Marcos: Pero sería que están vertical.
196- D: Claro, los valores que están en el eje horizontal tienen una línea de puntos que se extiende para arriba.
197- A: Es como lo que dijo Luciana.
198- D: No me acuerdo que dijo Luciana.

199- A: Que iba de Este a Oeste y de Norte a Sur.
200- D: Ah, estamos hablando de planisferio, seguimos con los hemisferios, está bien, está bien, pero la prolongación de esos valores para poder ver la posición del punto en el plano, esta prolongación está en una línea horizontal, por eso por ahí nos confundimos.
201- A: Sería entonces esto son horizontales *(señalando el gráfico).*
202- D: Este es el eje horizontal y este es el eje vertical *(señalando)* que se llama y ¿sí?
203- A: Estos serían los verticales.
204- D: Estos son los horizontales y los valores horizontales.
205- A: Estos se dicen primero.
206- D: Primero se dicen los que están en el eje horizontal, él lo dijo bien.

Transcripción 6: Frases 190-206 de la Tarea A1

No obstante, el uso de los términos horizontal y vertical no favorece la interpretación porque conduce a los niños a continuar prestando atención a las líneas horizontales y verticales del cuadriculado, que corresponden a la ordenada y a la abscisa, respectivamente. Esto puede evidenciarse en el intercambio en el cual los niños discuten en torno al par ordenado (5, 3) expresado verbalmente por Ana (frase 263, transcripción 7), luego de que la docente le solicita a esta alumna que *explique lo que pensó*:

263- Ana: Yo pensaba que diciendo cinco vertical y después... no ... cinco horizontal y después tres vertical era por ejemplo el cinco y tres para la derecha
264- A: No entendí.
265- D: A ver ¿Podes decirlo de otra manera para que te entiendan?
266- Ana: Yo había dicho 3 vertical y 5 horizontal entonces pensé que era si decía tres vertical eran 5 para arriba.
Micaela levanta la mano.
267- D: Mica.
268- Mica: Bueno yo creo que entendió que si decía 5 horizontal significa que decía las líneas que están horizontal.
269- D: Que es lo que nos está pasando con el tema de los paralelos.
270- A: Yo al principio entendí la diferencia.
271- A: Como le pasaba a Corti.
272- D: La diferencia con los paralelos así horizontal pero en realidad tenemos que leer acá el valor horizontal, pregunto una cosa, ¿vos qué ubicaste (5,3) o (6,3)?

Transcripción 7: Frases 263-272 de la Tarea A1

En primer lugar, notamos *el* intento de Ana por *explicar su interpretación* de la denominación de los pares ordenados ante la incomprensión de un compañero (frases 263 a 266). Además, se evidencia el esfuerzo que realiza otra niña *por entender la interpretación* de la compañera y aclarar al resto de la clase dicha interpretación (frase 268).

Observamos que, a pesar de que la confusión se manifiesta en varias ocasiones durante el desarrollo del juego, la docente continúa procurando *que sean los propios estudiantes los que expliquen su razonamiento al resto*. Esto resulta interesante porque los obliga a *poner en palabras su razonamiento*. Por otro lado, podemos relacionar el intento de otra alumna por explicar lo que pensó su compañera con el papel de *oyente activo* en una comunicación, desde el punto de vista de Bajtín (2011).

4.1.2 Tarea N° 2: Bingo de pares ordenados

Implementación de la tarea

Recordemos las características de esta tarea:

La docente reparte los cartones del bingo (que se trata de un sistema de ejes cartesianos en el cual figuran resaltados cinco pares ordenados, con escalas del cero al seis en cada eje).

Se procede a jugar al bingo con los pares ordenados que indican las tarjetas. La docente o un alumno extrae las tarjetas de una bolsa, de a una por vez y expresa los valores del par seleccionado en voz alta. Coloca las tarjetas obtenidas en el pizarrón.

En la implementación de la tarea, *un alumno* extrae un tarjeta de un balde y *otro* lo marca con una cruz en el mismo afiche que habían utilizado para el juego anterior (Búsqueda del tesoro, ver Imagen N° 18). Cada estudiante debe controlar su cartón y marcar si sale alguno de los puntos que tienen indicados en azul. Gana el que marca primero los cinco puntos de su cartón.

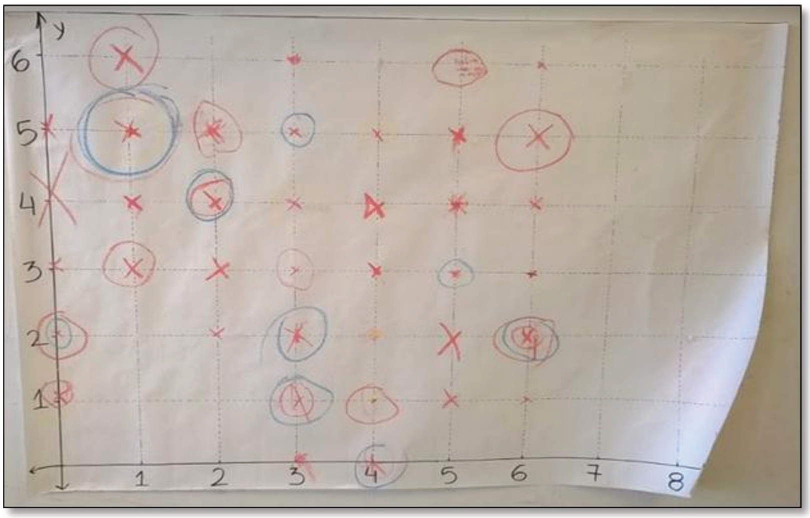


Imagen N° 18: Fotografía del afiche utilizado para el juego de la Búsqueda del tesoro y el Bingo de pares ordenados (Tareas A1 y A2).

Análisis de la tarea

En esta tarea los alumnos evidencian mayor seguridad para mencionar los pares ordenados, en relación con la Tarea 1. La docente realiza una revisión de las convenciones trabajadas con el juego de la Búsqueda del Tesoro (nombres de cada eje, cómo mencionar un par ordenado) y si bien vuelve a surgir la relación con paralelos y meridianos en esta instancia, no surgen confusiones con la convención geográfica durante el desarrollo del juego.

A modo de síntesis de esta clase podemos decir que los estudiantes aprenden a mencionar pares ordenados sin hacer uso de los términos horizontal o latitud y vertical o longitud. En los casos en los que algún estudiante se muestra inseguro, sus compañeros contestan su duda. A modo de ejemplo, citamos un fragmento de la clase en el que este hecho se pone de manifiesto:

> 89-Fátima: Cero y dos.
> 90-D: Miren lo que marcó Mica ¿qué dicen?
> 91-A: ¡Perfecto!
> 92-A: ¡Está bien!
>
> ***Transcripción 8: frases 89-92 de la Tarea A2.***

Como podemos observar, la docente *no valida directamente* lo que realiza la alumna (Micaela) encargada de marcar el par ordenado en el afiche que está en el pizarrón, sino que deja esta tarea a cargo de los estudiantes. Esto concuerda con lo planteado por Quaranta y Tarasow (2004) en el Capítulo 2, sobre una de las características o rasgos distintivos de un docente que *conserva la incertidumbre* y *propicia la validación* por parte de los alumnos, porque no convalida de entrada las respuestas correctas y con la *fase de conclusión de validación* de Margolinas (1992), aunque no se solicita justificación.

En esta clase no evidenciamos otras interacciones interesantes para destacar y analizar. El juego se desarrolla sin dificultades.

4.1.3 Tarea N° 3: Gráficos percentiles estatura-edad de 5 a 19 años

Implementación de la tarea

Recordemos primeramente las características de la tarea:

La docente entrega a cada estudiante un gráfico de percentiles que relaciona la estatura con la edad de 5 a 19 años (diferenciando las gráficas de niñas y niños al momento de repartirlas). Los mismos gráficos ampliados se colocan en el pizarrón. Explica de dónde provienen las gráficas. Por ejemplo: "La OMS (Organización Mundial de la Salud) utiliza gráficos como las que están el pizarrón para relacionar la estatura con la edad hasta los diecinueve años. Los mismos se construyeron a partir de estudios que involucraron una cantidad muy grande de niños y niñas. Para interpretarlos observen los valores que aparecen a la derecha. Se llaman percentiles. Por ejemplo, el percentil 50 indica que el 50% de las niñas de 6 años miden 114cm (1,14m). Vamos a medirnos y cada uno va a ubicar sus datos (edad-estatura) en su gráfica" Debe aclarar que su edad la ubiquen en años y meses.

Los gráficos con las que se trabaja en esta tarea son las siguientes:

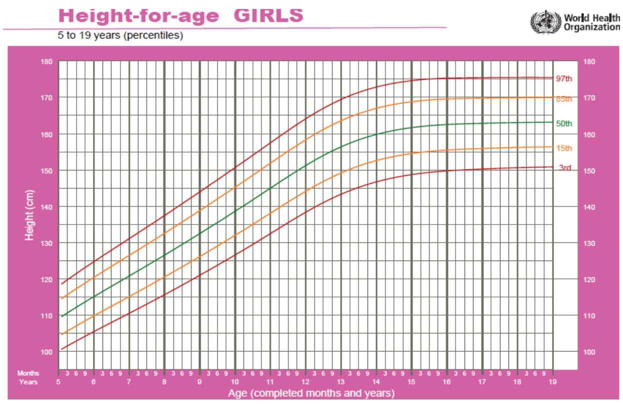


Imagen Nº 9: Gráfico estatura-edad para niñas de 0 a 19 años (Tarea A3)

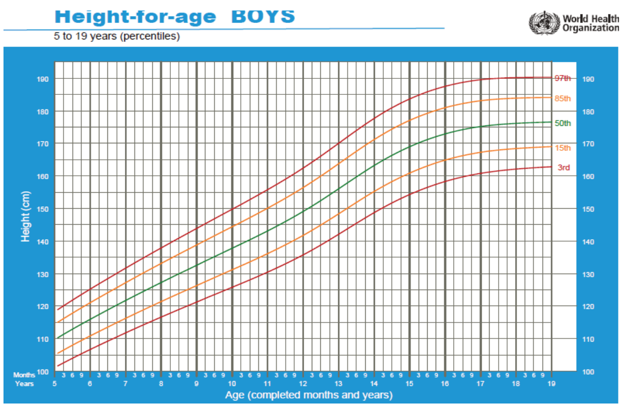


Imagen Nº 10: Gráfico estatura-edad para niños de 0 a 19 años (Tarea A3)

Esta tarea tiene por objetivo promover interpretaciones sobre la relación entre dos variables (edad y estatura de los niños) a partir de su representación gráfica e identificar un uso social de estas gráficas.

En un primer momento, la docente fomenta la interpretación de los gráficos por partes de los estudiantes, en lugar de brindar la explicación que estaba planificada sobre las características de estos gráficos.

Luego, los niños marcan en los gráficos que se encuentran en el pizarrón el punto que representa su edad y estatura (ver Imagen N° 19).

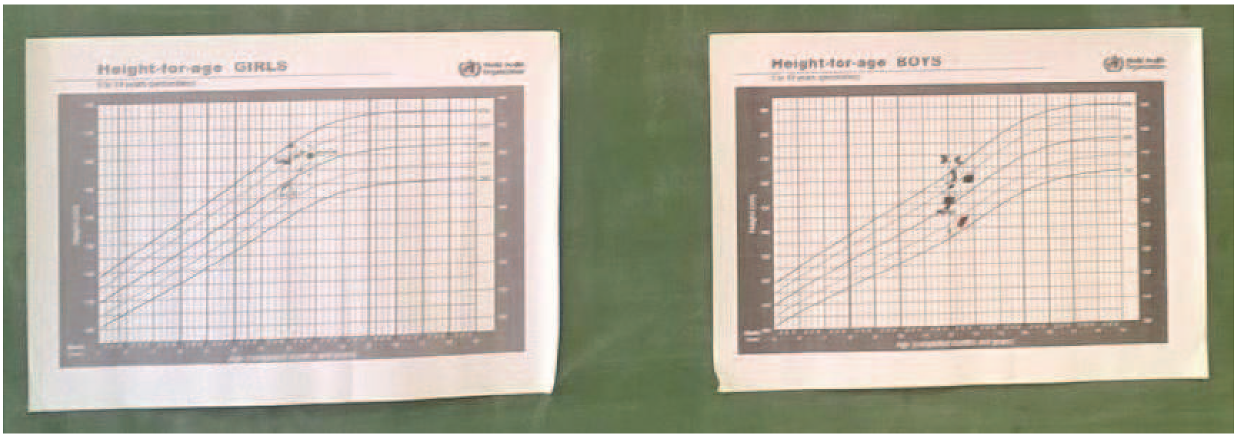


Imagen N° 19: Fotografía de los gráficos de percentiles edad-estatura de niñas y niños de 0 a 19 años, con las marcas que hicieron los estudiantes.

Análisis de la tarea

Tal como lo indicamos arriba, la docente entrega los gráficos sin dar ninguna explicación. Esto da lugar a un intercambio en torno al *significado de las variables* que aparecen en el gráfico, es decir, intentan determinar qué se representa en cada eje cartesiano.

1. D: Bueno podemos compartir lo que cada uno pudo observar. El que quiera participar que levante la mano *(organiza a los estudiantes)* Ehh a ver Gerónimo. Gerónimo empieza y sigue el que quiera contando lo que observó.
2. Gerónimo: **esta tabla la tenía el médico cuando fuimos a revisarnos**. Tenía la del peso y la de la estatura.
3. A: Es verdad.
4. Gerónimo: Te marcaba si estabas gordo…
5. A: ¡Cierto!
6. *Hablan varios juntos.*
7. Gerónimo: o si estabas flaco o si estabas… era para controlar si estabas creciendo bien o estabas creciendo mal…
8. D: Ajá y justamente por eso se midió y anotó en...
9. Gerónimo: No, ¿dónde?
10. D: Digo porque ayer me dijiste que habían ido a medir… que ya tenías la medida por eso… el otro día.
11. Gerónimo: Si fui pero…
12. José: Pero depende de la edad dice que es gordo… *(inaudible)*
13. *Hablan varios al mismo tiempo*
14. D: Lu está levantando la mano por eso le doy la palabra a ella.
15. Luciana: **Creo que es un gráfico que depende de tu edad y del peso que deberías tener o algo así.**
16. Docente: Ese creo, a ver, ¿en qué se fundamenta?
17. Luciana: Porque no sé qué son esos números y porque hay cuatro líneas.
18. A: Porque son los meses y los años.
19. Docente: A ver ¿quién toma lo que dice Luciana?, a ver Andrea
20. Andrea: **Yo... a mí, hace mucho cuando era más chiquitita, bueno, no tan chiquitita, me hicieron uno así que era para ver cuánto medía y cuánto pesaba, y... ¡era distinto**!
21. Docente: Era distinto, acá ¿se ve el peso?
22. Alumnos: No.
23. D: ¿Qué se ve?

24. A: La altura y los meses.
25. D: La altura y ¿qué?
26. A: Y el tiempo.

Transcripción 9: frases 1-26 de la Tarea A3

La discusión en torno a la interpretación de los gráficos pone de manifiesto cómo la contextualización en una situación conocida por los alumnos *contribuye* a la interpretación del modelo matemático que la describe (Sadovsky, 2005). En las frases 2, 15 y 20 de la transcripción anterior observamos que los niños evocan experiencias relacionadas con controles médicos para interpretar el gráfico. De igual modo ocurre en la siguiente frase:

65. A: Ajá, es percentilos!, porque **cuando yo fui al examen,** viste que hay que ir cada año al doctor **y te dicen que percentilo tenés**, a mí creo que me dijeron 50, que era o sea el más normal, que el peso concuerda con mi altura.

Transcripción 10: frase 65 de la Tarea A3.

Los niños tratan de dar sentido a los números que leen en la gráfica e intercambian opiniones acerca de sus interpretaciones. Una niña pregunta sobre *el significado* de los números que aparecen en los gráficos y un compañero le indica que corresponden a los años y meses (frases 17 y 18, Transcripción 9).

Otro intercambio refiere a la interpretación de la variable representada en el eje vertical. Dado que en varios momentos se alude al peso (frases 2, 15 y 20, Transcripción 9), los niños discuten acerca de si es posible que esa variable sea el peso, porque además uno de ellos observa que aparece la letra P en el gráfico (frase 40, Transcripción 11). Veamos a continuación cómo se resuelve esta discusión:

40. A: Pero esto es el peso no es la altura porque dice **P**.
41. D: A ver, ¿es de peso o altura?
42. Estanislao: De peso.
43. A: **¿Qué? ¿Vos pesás 210 kilos Estanislao?**
44. *Varios niños se ríen.*
45. A: Y pero acá dice... coso... acá dice P.
46. A: Y pero dice entre paréntesis **centímetros**, y **empezamos desde 100 kilos sino**.
47. D: Yo los escucho, mientras pego estoy escuchándolos y me parece re interesante lo que están diciendo, yo no sé si allá están escuchándolos *(mientras coloca los gráficos en el pizarrón).*

Transcripción 11: frase 40-47 de la Tarea A3.

En la transcripción anterior, los niños analizan si resulta *razonable* interpretar que los valores del eje vertical corresponden al peso de niños de 5 a 19 años (frase 43 y 46). A partir de su conocimiento sobre el peso aproximado de los sujetos de su edad y de reconocer la unidad de medida de longitud (cm) expresada junto al eje vertical, concluyen que se trata de la altura.

Lo que está en juego en los intercambios anteriores es que *los valores posibles de una variable*, en un contexto determinado, *deben tener relación* con lo que la variable representa.

Si bien no logramos identificar de dónde obtiene el valor 210 el niño de la frase 43, la intención de su mensaje es mostrarle a su compañero la *imposibilidad* de tal valor para la variable peso de un niño de 11/12 años. De manera análoga, el niño de la frase 46 hace referencia al valor 100 (valor inicial en el eje vertical) con la expresión "**empezamos desde 100 kilos sino**".

Si recuperamos los aportes de Balacheff (2000) del Capítulo 2, notamos que el último niño mencionado utiliza una *explicación,* arraigada en sus conocimientos, para establecer y validar su idea de que el eje vertical representa la estatura. Recurre a dos razones: la unidad expresada (cm) en dicho eje y la imposibilidad de iniciar los valores posibles del peso de niños de 5 a 19 años con 100kg. En la frase 47 la docente manifiesta su interés por las explicaciones de los estudiantes.

En la transcripción siguiente la docente continúa promoviendo la interpretación del gráfico a partir de los intercambios entre los niños.

51. Andrea: Es como, **como más general esta tabla**, porque dice chicas y en el otro dice chicos, **es como más general**.
52. D: Habla como en general, no está hablando de uno en particular, sino… ¿coinciden?

[…]

62. D: Hay uno de chicas y uno de chicos, y ¿por qué será eso?
63. A: **Porque son diferentes cuerpos** y… como así… las chicas tendrían que pesar eso con diferencia de masa y cuerpo y los chicos también por diferencia de masa y cuerpo deberían pesar esto.
64. D: Bien, hay algunas diferencias entre el crecimiento de los hombres y las mujeres que se van manifestando en el cuerpo, ¿sí? Eh… se manifiestan, incluso creo que se van dando cuenta, porque entre ustedes no hay tanta diferencia de edad, no llega a ser un año la diferencia de ninguno de ustedes y el crecimiento en ese sentido va siendo desparejo.

Transcripción 12: frase 51-64 de la Tarea A3.

La intervención de Andrea al principio de la transcripción (frase 51) da cuenta de que la niña observa que el gráfico representa algo general. Como dijimos al presentar esta tarea, no forma parte de nuestros objetivos el formalizar la noción de percentiles ni explicar detalladamente cómo se logra un gráfico de este tipo. No obstante, creemos que el hecho de que los niños perciban intuitivamente que el gráfico representa de alguna manera *algo que sucede en general*, valores *frecuentes* de la altura según la edad, podría contribuir la consideración del gráfico como *modelo* para representar una determinada situación de la realidad. Consideramos que el *contexto* de la tarea resulta *significativo* para los estudiantes porque pueden relacionarlo con experiencias vividas e interpretar intuitivamente lo que el gráfico representa.

En un momento de la clase un niño pregunta qué son los percentilos. La docente intenta explicarlo sin entrar en detalles formales:

67. D: Es un valor que se saca entre la masa corporal, el peso, la altura, se promedia y se estima también teniendo en cuenta unos parámetros generales como dice Andrea, si vos te acercás más o menos a esos indicadores generales, se calcula un valor que tiene que ver con lo que te digo, con la masa, con el peso con la

altura, y por supuesto la edad para ver si cada uno de nosotros va creciendo como corresponde o hay algún problema en el crecimiento.

Transcripción 13: frase 67 de la Tarea A3

Los estudiantes parecen conformes con tal explicación, aunque más adelante surge la cuestión sobre qué representan las diferentes curvas que aparecen en el gráfico.

106. A: ¿Y que serían las 5 linitas? **la del medio que estás bien la de arriba que estás un poco más alto** y la de…

Transcripción 14: frase 106 de la Tarea A3

158. Yoni: **Vos tenés que estar en una línea según la edad y el peso.**
159. D: O dentro de los rangos que marcan.
160. A: **Si no estás en ese lugar o... significa que estás mal, estás más bajo de lo que tenés que estar o más alto.**
161. D: No necesariamente mal, pero si estás más como vos dijiste recién, en determinado momento estás más alto o bajo de lo que en general, lo normalmente corresponde a la edad o a la altura.

Transcripción 15: frases 158-161 de la Tarea A3

Si bien reconocemos la imprecisión con la que se aborda la noción de percentil y que en una intervención vuelve a surgir la confusión con el peso (frase 158, Transcripción 15), lo que expresan los estudiantes en las frases 106 y 160 de la últimas transcripciones manifiestan una interpretación intuitiva, considerando cuáles son los conocimientos con los que cuenta al momento de realizar tal interpretación.

En el transcurso de la clase también tienen lugar algunos intercambios en torno a las diferencias en los gráficos de acuerdo con el sexo. Entre ellos, rescatamos las frases 63 y 64 de la Transcripción 12 que utilizamos anteriormente y los intercambios de la Transcripción 14 que planteamos a continuación:

77. D: Claro, con ser varones o mujeres, porque vieron que yo no les di a todos la misma. **El ser varón o ser mujer determina distintos valores**. Bien, pero en realidad la tabla de uno y de otro tiene los mismos valores en un eje y en otro.
78. Andrea: Pero son distintos, **los gráficos son distintos**, **porque los varones como que crecen con el tiempo y las mujeres se quedan no se**...
79. D: Bien ya te vas dando cuenta al comparar estos dos porque ya vas viendo con Alejo en comparación, perfecto Andrea lo que vos aportaste, pero fíjense que las dos tablas las hicieron del mismo modo, teniendo en cuenta los mismos valores, no se compara...

Transcripción 14: frases 77-79 de la Tarea A3

La docente retoma esta cuestión luego de que los niños señalaron el punto del gráfico que representa su edad y estatura.

127. D: Fíjense donde quedaron concentrados los puntos, **¿alguien le encuentra alguna explicación?**
128. *Hablan varios al mismo tiempo.*
129. A: Las chicas...

130. A: Porque tenemos la misma edad.
131. D: Veamos la de los muchachos acá y las nenas acá (*hablan varios al mismo tiempo*).
132. A: ¡Están más prolijitos los de los varones, Seño!
133. D: ¿Están más prolijitos? ¿Qué diferencias observan?
134. A: **Que las mujeres están con percentilos arriba, más arriba que los hombres.**
135. D: Ajá, qué las medidas… ¿la altura?
136. A: Sobretodo que…
137. D: Ajá, de algunas mujeres…
138. A: **Sí, pero la tabla de las mujeres va más en subida y la tabla de los varones va más baja y sube**.
139. D: **La subida es como más abrupta…**
140. A: Ajá.
141. A1: **¡Claro, como que es así! Como que es así, hace así y se queda y los varones hace así hasta que llega** (dibuja la forma de la gráfica en el aire)
142. D: Bien.
143. A1: O sea**, como que las mujeres crecen mucho de golpe y después se quedan ahí y los varones van creciendo…**

Transcripción 15: frases 127-143 de la Tarea A3

En la transcripción anterior se ponen de manifiesto las diferencias en la estatura según el sexo, que es característica de la edad de los niños de la clase (en promedio 12 años). El contexto de la tarea, muy cercano a sus experiencias de vida, favorece el reconocimiento de la potencia de la matemática para *modelizar* aspectos determinantes del crecimiento de los sujetos y como una herramienta útil para evaluar el desarrollo. Por otro lado, nos interesa resaltar las interpretaciones de los niños al comparar los puntos señalados en los dos gráficos del pizarrón (Imagen Nº 19).

Por un lado, rescatamos la intención de la docente de *generar explicaciones* sobre las características de los puntos identificados en cada gráfico. No se satisface con que los niños hayan interpretado lo que representa cada variable involucrada ni que hayan identificado el par ordenado que les corresponde a cada uno. Los invita a ir un poco más allá para comparar la concentración de puntos obtenidos en cada gráfico.

Detengámonos un momento en las características del desafío propuesto por la docente. Los niños deben comparar dos gráficos sin la posibilidad de superponerlos, con el agregado de que en cada uno de ellos aparecen varias curvas (que representan los diferentes percentiles) y que podrían funcionar de "distractores" al momento de realizar la comparación. No obstante, la disposición de los gráficos en el pizarrón (Imagen Nº 19) favorece la comparación.

En las expresiones utilizadas por los niños notamos cierta falta de precisión en la utilización de algunos términos (como *tabla* en lugar de *gráfico*), que no es tomado en cuenta por la docente. También observamos que algunos niños (a partir de la frase 138) modifican el asunto que se estaba tratando (comparar la concentración de puntos en las dos gráficos) para pasar a un asunto más general que es la comparación de las dos representaciones gráficas. La docente *se suma* al análisis de los gráficos que realizan los estudiantes.

Entendemos que el hecho de expresar en forma coloquial lo que observamos en representaciones gráficas no es un *procedimiento mecánico*, especialmente cuando se introduce por primera vez esta cuestión en la clase de matemática. Se trata de realizar una *conversión*, en términos de Duval (2008) del registro gráfico al coloquial.

Una niña intenta explicar la diferencia entre ambos gráficos pero no concluye su idea "Pero son distintos, **los gráficos son distintos**, porque los **varones como que crecen con el tiempo y las mujeres se quedan no sé**…" (frase 78, Transcripción 14). Más tarde, otro estudiante recurre a representar con un dedo en el aire la forma de cada gráfico acompañado de algunas expresiones "**Como que es así, hace así y se queda**" (frase 141, Transcripción 15). Luego, *encuentra las palabras* para completar su propia explicación y expresar verbalmente lo que observa "O sea, como que las mujeres **crecen mucho de golpe y después se quedan ahí y los varones van creciendo…**" (frase 143, Transcripción 15).

La invitación de la docente a manifestar oralmente las diferencias entre los gráficos los obliga a buscar palabras para expresar eso que aparece a simple vista. Recuperamos a continuación una cita de Vygotski (1993) que mencionamos en el Capítulo 2 porque nos ayuda a precisar el desafío que implica *poner en palabras* lo que pensamos en un momento determinado.

> Por eso el pensamiento no puede usar el lenguaje como un traje a medida. El lenguaje no expresa el pensamiento puro. El pensamiento se reestructura y se modifica al transformarse en lenguaje. El pensamiento no se expresa en la palabra, sino que se realiza en ella (p. 298)

Destacamos el salto cualitativo que produce el estudiante que *pasa* de acompañar sus enunciados orales con gestos (porque quizás implícitamente se da cuenta de que las palabras que usa no expresan *todo lo que quiere decir*) a expresar sus ideas utilizando sólo el lenguaje coloquial.

4.1.4 Tarea N° 4: Gráfico de velocidad de crecimiento en estatura

Implementación de la tarea

Recordemos las características de la tarea:

El siguiente gráfico muestra la velocidad de crecimiento en estatura para varones y mujeres. Describe con tus palabras lo que interpretás del gráfico.

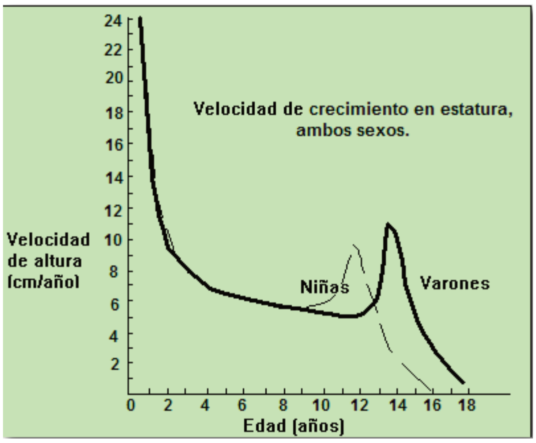


Imagen Nº 12: Gráfico sobre velocidad de crecimiento en estatura según el sexo (Tarea A4)

Los niños trabajan un primer momento en forma individual y se les pide que piensen y escriban lo que pueden interpretar del gráfico. Luego, se entrega una copia a cada alumno con los siguientes interrogantes:

a) ¿Qué significa que un niño de 2 años tenga una velocidad de crecimiento de su estatura de 10cm/año?
b) ¿Con qué velocidad crece la estatura de un niño de 8 años?
c) ¿En algún momento la velocidad de crecimiento de la estatura llega a ser de 11cm/año?
d) ¿Cuál es la velocidad máxima? ¿cuándo se produce?
e) ¿Cuál es la velocidad mínima? ¿cuándo se produce?
f) Observa los gráficos de 0 a 9 años ¿Qué sucede con la velocidad? Explica tu respuesta.
g) Observa los gráficos de 9 a 18 años ¿Qué sucede con la velocidad? Explica tu respuesta.
h) En el caso de las niñas, ¿en qué período aumenta la velocidad de crecimiento de la estatura?
i) ¿y en el caso de los niños?

La primera consigna de esta tarea tiene por objetivo conocer la interpretación que realizan los estudiantes del gráfico que se les presenta (Imagen Nº 12). En dicho gráfico se representa la velocidad de crecimiento en estatura en función de la edad, diferenciando niñas de niños desde los 0 a los 18 años.

Si bien consideramos que el concepto de velocidad de crecimiento puede resultar complejo para niños de 12/13 años que aún no han abordado nociones de física, creemos que resulta interesante analizar las interpretaciones que realizan a partir de sus conocimientos previos, teniendo en cuenta que nuestros propósitos para esta primera parte de la propuesta de enseñanza consisten en que interpreten gráficos y conozcan algunos usos sociales de los mismos.

La tarea se plantea para resolverla de a dos, con el objetivo de que puedan debatir y ponerse de acuerdo respecto a lo que interpretan del gráfico dado.

Análisis de la tarea

En el caso del análisis de esta tarea en particular, por las características que presenta, consideramos en principio las respuestas escritas de los estudiantes. Por otro lado, dado que la tarea se divide en dos partes (primero la interpretación libre del gráfico y luego, la respuesta a las preguntas dadas) también el análisis tiene características diferentes en cada caso. Para organizar el estudio de la tarea proponemos los siguientes puntos:

1. Producciones escritas de los estudiantes sobre la primera parte de la tarea
2. Intercambios sobre las producciones escritas de la primera parte de la tarea
3. Producciones escritas de los estudiantes sobre la segunda parte de la tarea

En los puntos 1 y 3 consideramos como 100% el total de las 22 respuestas obtenidas. Iniciamos a continuación la descripción del punto 1.

1. Producciones escritas de los estudiantes sobre la primera parte de la tarea

Para la primera consigna planteamos (*a posteriori*) una clasificación de las mismas de acuerdo con las siguientes categorías:

I) No diferencia ambos sexos. En este caso en la respuesta no se mencionan las diferencias que se presentan entre las curvas según refieran a varones o niñas. Ejemplo:

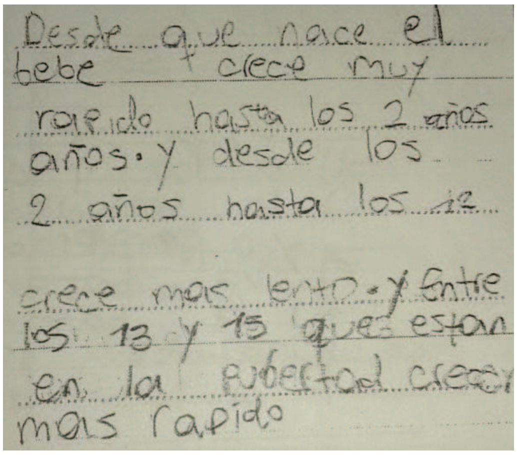

Desde que nace el
bebe crece muy
rapido hasta los 2 años
años. y desde los
2 años hasta los 12
crece mas lento. y Entre
los 13 y 15 que estan
en la pubertad crecen
mas rapido

Imagen N° 20: *"Desde que nace el bebe crece muy rapido hasta los 2 años. Y desde los 2 años hasta los 12 crece más lento. Y entre los 13 y los 15 que estan en la pubertad crecen más rapido" (Estudiante 21)*

II) Diferencia ambos sexos. En la respuesta se menciona alguna diferencia en la velocidad de crecimiento en estatura, según las características de las curvas que corresponden a varones o niñas. Podemos distinguir las respuestas obtenidas a partir de las siguientes subcategorías.

II.1 Interpretación global. Describe en términos generales qué representa el gráfico. Ejemplo:

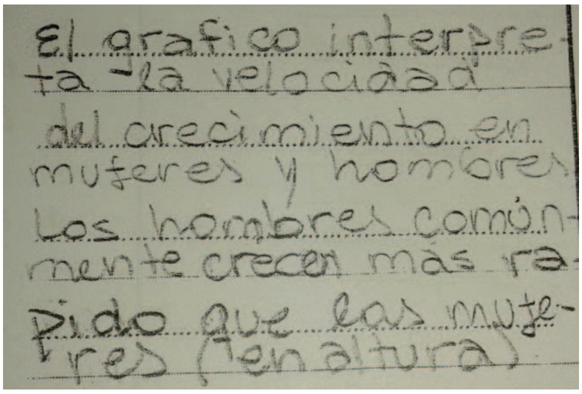

El grafico interpre-
ta la velocidad
del crecimiento en
mujeres y hombres
Los hombres común-
mente crecen más ra-
pido que las muje-
res (en altura)

Imagen N° 21: *"El gráfico interpreta la velocidad de crecimiento en mujeres y hombres. Los hombres comúnmente crecen más rápido que las mujeres (en altura)" (Estudiante 7)*

II.2 Interpretación detallada. Incluye características particulares como períodos de crecimiento y decrecimiento de cada curva. Ejemplo:

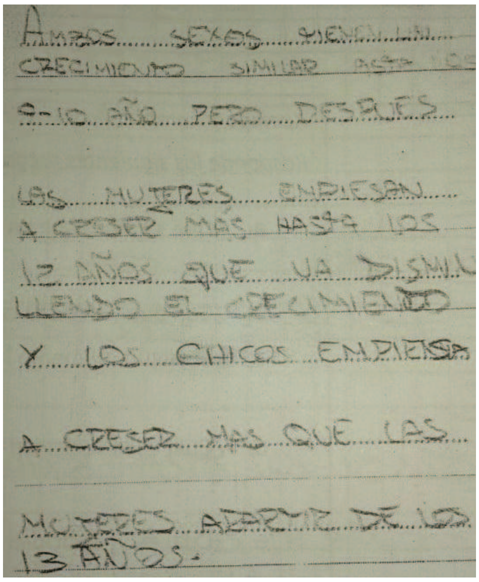


Imagen N° 22: *"Ambos sexos tienen un crecimiento similar hasta los 9-10 años pero después las mujeres empiesan a creser más hasta los 12 años que va disminullendo el crecimiento y los chicos empiesan a creser mas que las mujeres apartir de los 13 años" (Estudiante 11)*

III) No interpreta. Copia textual las palabras que aparecen en el gráfico (título, etiquetas de cada eje).

Ejemplo:

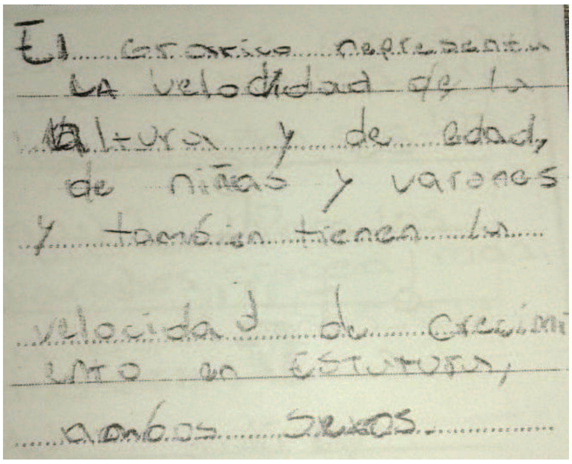


Imagen N° 23: *"El grafico representa la velocidad de la altura y de edad de niñas y varones y también tienen la velocidad de crecimiento en estatura, ambos sexos" (Estudiante 4)*

A modo de resumen, presentamos los siguientes gráficos, indicando el porcentaje de respuestas que se corresponde con cada categoría:

Imagen N° 24: Clasificación de interpretaciones del gráfico de velocidad de crecimiento en estatura (Tarea 4A)

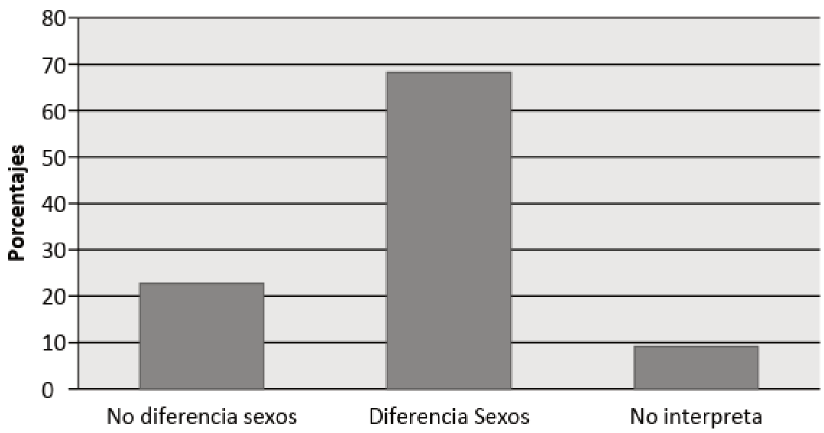
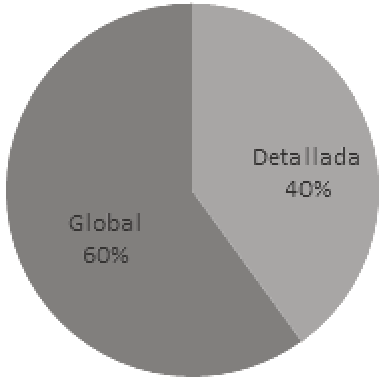


Imagen N° 25: Clasificación de interpretaciones que diferencian sexos sobre el gráfico de velocidad de crecimiento en estatura (Tarea 4A)



Como se observa en el gráfico representado en la imagen N° 24, sobre el total de alumnos del curso seleccionado, sólo dos estudiantes no pudieron interpretar el gráfico de velocidad de crecimiento y su respuesta se limita a transcribir las palabras que figuran en el gráfico (ver el ejemplo de categoría III en Imagen Nº 23).

Por otro lado, notamos que la mayor parte de los estudiantes opta por realizar una descripción del gráfico haciendo referencia a las *características de las curvas según correspondan a varones o niñas* (aproximadamente el 70% en Imagen N° 24). A su vez, dentro de este grupo, con porcentajes cercanos al 50% se presentan interpretaciones con descripciones globales y detalladas (Imagen N° 25), superando las primeras a las segundas (60% y 40%, respectivamente). Desde un punto de vista matemático, resulta interesante que los estudiantes sean capaces de expresar en palabras *rasgos particulares* del gráfico vinculados con los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los valores extremos. Por este motivo, el momento de la puesta en común de las respuestas cobra especial relevancia considerando que posibilita completar las interpretaciones globales, agregando detalles adicionales.

Tal como podemos observar en las categorías que hemos definido, nuestro interés se centra en distinguir diferentes tipos de interpretaciones, más que en clasificar las respuestas de acuerdo con la precisión de los conceptos que utilizan o del vocabulario específico que emplean. No esperábamos que los estudiantes *comprendan formalmente* el significado de velocidad de crecimiento en estatura, pero sí que puedan *interpretar intuitivamente* la información que aporta el gráfico, considerando que las diferencias se presentan a partir de los 9 años entre ambos sexos, y que las mismas se ponen en evidencia en el curso. Se pone de manifiesto que en general, la altura de las niñas en general es superior a la de los varones (lo cual ya se había considerado para la tarea anterior sobre los gráficos de percentiles edad-estatura).

Otro de los aspectos que resulta pertinente considerar, desde un punto de vista cualitativo, se relaciona con aquellas frases de los estudiantes que no reflejan datos que aporta el gráfico. Entre ellas, podemos distinguir dos tipos:

A) **Interpretaciones inadecuadas o incompletas de la información que aporta el gráfico.** En las respuestas que presentamos a continuación, colocamos en negrita las interpretaciones inadecuadas o incompletas del gráfico dado.

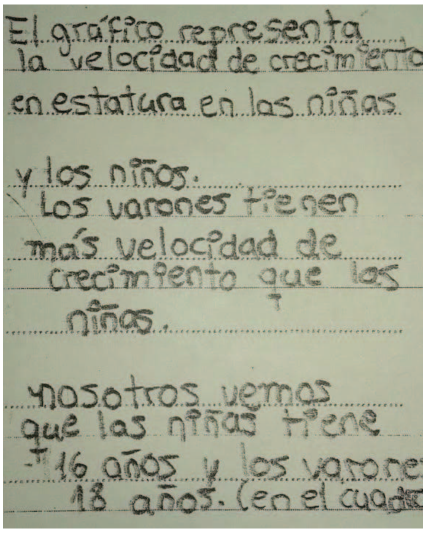


Imagen N° 26. *"El gráfico representa la velocidad de crecimiento en estatura en las niñas y los niños. Los varones tienen mas velocidad de crecimiento que las niñas.* ***Nosotros vemos que las niñas tienen 16 años y los varones 18 años*** *(En el cuadro)" (Estudiante 12)*

El Estudiante 1 responde de la misma manera que la Imagen Nº 26 presentada anteriormente. Transcribimos el resto de las respuestas incluidas en esta categoría:

"Interpretamos que en el grafico muestra que los varones tardan mas en crecer en comparación con las mujeres, ***sin embargo ellos crecen mas****. Que es un grafico general,* ***que es lo que tendrian que medir dependiendo su edad"*** *(Estudiantes 9 y 22).*

"Las ***niñas crecen mas*** *entre los 11 y los 12 años que los varones. Pero* ***los varones crecen mas a los 14 años que las chicas****" (Estudiante 5).*

"En el gráfico podemos ver que cuando tenemos 1 año ***llegamos a crecer 24 cm****. Luego va bajando y a los 9 años (niñas) sube y a los 12 años (niñas) baja (velocidad de altura****). Los niños crecen igual*** *que las niñas pero en vez de subir a los 9 años sube a los 13 años y baja a los 14 años" (Estudiantes 15 y 19).*

En general, en estas respuestas se pone de manifiesto una dificultad para interpretar la variable dependiente en términos de velocidad de crecimiento. Hemos indicado que su interpretación es compleja. Cada valor de la variable pone en juego a su vez, la relación entre otras dos variables (altura de una persona en función del tiempo).

B) Nociones previas de los estudiantes. En este caso, el estudiante añade información adicional a la aportada por el gráfico relacionada con sus conocimientos previos. Identificamos la siguiente respuesta dentro de esta categoría y resaltamos en negrita la expresión que corresponde a la información adicional.

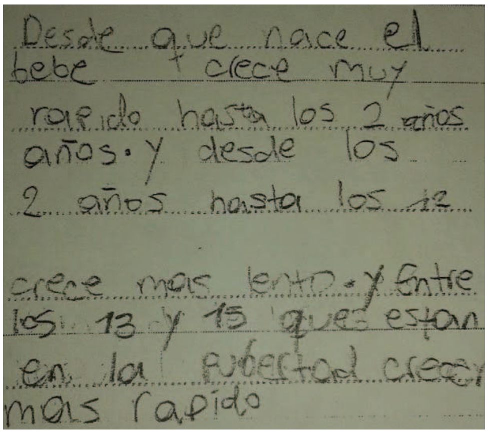


Imagen N° 27: "*Desde que nace el bebe crece muy rapido hasta los 2 años. Y desde los 2 años hasta los 12 crece mas lento. Y entre los 13 y los 15* ***que estan en la pubertad*** *crecen mas rapido***"(***Estudiante 21)*

Transcribimos a continuación las otras dos respuestas que incluimos en la categoría B:

"Se determina que los barones tienen mas velocidad de crecimiento que las mujeres. ***Aprox entre los 25-30 años los humanos dejamos de crecer****" (Estudiante 8).*

"Los varones tiene mayor velocidad de crecimiento en su estatura que las mujeres. ***Pero no significa que todos ellos termines mas altos que las mujeres****" (Estudiante 10).*

La categoría A se puede relacionar con la complejidad del concepto de velocidad de crecimiento en estatura que planteamos al principio. La categoría B, más interesante desde nuestro punto de vista, puede asociarse al papel del contexto en la tarea planteada.

En esta tarea en particular, las ideas que añaden los estudiantes, independientemente de que sean adecuadas o no, se relacionan con *nociones previas ajenas a la matemática* que poseen sobre las variables representadas en el gráfico. La posibilidad de incorporar en sus respuestas conocimientos previos se favorece con la selección de *contextos apropiados*. Este es uno de los caminos señalados por algunos de los autores de los Capítulos 2 y 3 (Sadovsky, 2005, Skovsmose, 2005, Carraher y otros, 2013) para otorgar significatividad a las tareas planteadas y lo tuvimos en cuenta al momento de diseñar la propuesta de enseñanza.

2. *Intercambios orales sobre las producciones escritas de la primera parte de la tarea*

En relación con los intercambios, lo primero que debemos decir es que los niños trabajan en parejas para resolver la tarea. Entregan sus producciones al finalizar la clase y la puesta en común sobre las mismas se realiza a la clase siguiente.

La docente habilita la palabra a aquellos que quieran compartir su interpretación del gráfico. En las interacciones se pone de manifiesto que algunos diferencian según el sexo y otros no realizan tal distinción.

Nos interesa especialmente recuperar de la transcripción de la clase la intervención de una niña, Andrea, que centra su mirada en la generalidad del gráfico.

24. Andrea**: Interpreto que es un gráfico general, que es lo que tendrían que medir**…
25. D: Dale, ¡más fuerte!
26. Andrea: Que es un gráfico general, que **es lo que tendrían que medir dependiendo de su edad**.
27. D: Claro, me encanta, porque vos seguís pensando en esa generalidad que

representa el gráfico ¿no? No es de uno particular, sino de un estudio de casos y de una estadística que se refleja en el gráfico. En líneas generales podemos decir que las niñas y los niños de acuerdo a su edad, manifiestan un crecimiento que se puede representar de esta manera, pero por supuesto que puede haber algunos que crezcan un poco más rápido, más despacio, porque somos humanos y todos diferentes, fíjense acá lo diferente que son ustedes teniendo la misma edad; además de sexos diferentes, los que son del mismo sexo tienen diferencias. Bueno, vamos a las preguntas concretas que se hacían sobre el gráfico, a ver cómo interpretaron. *(Un alumno se ofrece a leer las preguntas)*. Eso iba a decir, ¿querés leer la primera?

Transcripción 17: frases 24-27 de la Tarea A4

En el análisis de la tarea anterior (Tarea A3) Andrea también centró su mirada en la generalidad que ofrece el gráfico, y si bien hay imprecisiones en su interpretación (porque se refiere a la estatura en lugar de velocidad de crecimiento en estatura) creemos que este tipo de interpretaciones tienden a poner en evidencia que el gráfico representa *un modelo* sobre una situación real estudiada (aunque no se haya hablado en esos términos con los niños). La docente realza la intervención de la niña y establece relaciones entre las alturas de los niños del curso.

Consideramos que el hecho de compartir interpretaciones con miradas diferentes sobre un mismo gráfico puede enriquecer la producción personal sobre la tarea siempre y cuando el *oyente* tenga un rol *activo*, en el sentido de Bajtín (2011).

3. *Producciones escritas de los estudiantes sobre la segunda parte de la tarea*

Con respecto al cuestionario que se plantea en la segunda parte de la tarea, realizamos el análisis centrándonos en las respuestas de los estudiantes para cada una de los interrogantes.

a. ¿Qué significa que un niño de 2 años tenga una velocidad de crecimiento de su estatura de 10cm/año?

En primer lugar, debemos reiterar que resulta complejo desentrañar las relaciones que se ponen de manifiesto en el gráfico. Para interpretar qué significa que a los dos años la velocidad de crecimiento en estatura sea de 10cm/año deberíamos conocer cómo fue construido el gráfico. Guiándonos por la explicación sobre la gráfica de velocidad de crecimiento en estatura publicada por la Sociedad Argentina de Pediatría que describimos en el Capítulo 3, entendemos que se trata del cálculo del promedio del cociente incremental entre estatura y tiempo de una muestra de niños, obteniendo la rapidez media, y luego se unen los puntos mediante una curva. No obstante, no conocemos los intervalos de tiempo para los cuales se realizan estos cálculos para la gráfica elegida.

Si bien resulta complejo de interpretar, recuperamos el motivo por el cual hemos elegido este gráfico: pone de manifiesto las diferencias en el crecimiento en estatura entre niños y niñas en la franja etaria correspondiente al grupo de estudiantes seleccionados.

Retomando el interrogante, observamos que propone la interpretación de un punto del gráfico de velocidad de crecimiento en estatura. Clasificamos las respuestas de los estudiantes considerando el aspecto o cuestión al que aluden:

Tabla N°21: Clasificación de respuestas al interrogante a de la Tarea A4		
Categoría	**Cantidad de estudiantes**	**N° estudiante**
Valor numérico de la velocidad	5	5, 8, 14, 15, 19
Crecimiento adecuado o normal	11	2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 16, 17, 20, 22
Crecimiento fuera del rango normal	4	1, 4, 12, 13
Otras interpretaciones	1	21
No responde	1	18

A partir de la Tabla N° 21 notamos que el 23% de los estudiantes realiza un intento de interpretar el valor numérico de la velocidad, es decir, el par ordenado (2, 10) para el gráfico dado. Mostramos a continuación un ejemplo de este tipo de respuestas:

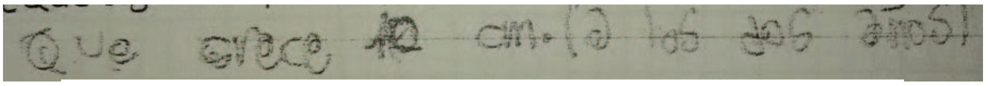


Imagen N° 28: *"Que crece 10 cm. (a los dos años)" (Estudiante 19).*

El 50% de los estudiantes refieren a un crecimiento normal o adecuado, tal como puede evidenciarse en este caso:

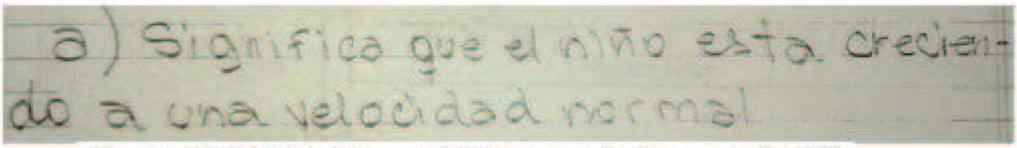


Imagen N° 29: *"Significa que el niño esta creciendo a una velocidad normal" (Estudiante 7).*

Creemos que esta alusión podría relacionarse con lo trabajado en la tarea anterior sobre los gráficos de percentiles de estatura de acuerdo con la edad. No obstante, del total de estudiantes considerados dentro de esta categoría, encontramos dos respuestas que en parte nos desconciertan. Si bien refieren a un crecimiento normal, agregan un comentario al final que resulta difícil de interpretar:

"Significa que está creciendo a la velocidad adecuada, ***aunque un poco lento****" (Estudiante 17)*

"Significa que está creciendo a la velocidad adecuada, ***aunque unos cm más lentos****" (Estudiante 6)*

Por otro lado, surgen otras cuatro respuestas que refieren a un crecimiento anormal. Desconocemos el motivo por el cual los estudiantes realizan esta alusión, dado que no esbozan ningún tipo de explicación. Mostramos a continuación un ejemplo de las mismas:

Imagen N° 30: "Significa que tiene un problema en el crecimiento" (Estudiante 13).

En la categoría *Otras interpretaciones*, incluimos una respuesta que no se corresponde con ninguna de las categorías establecidas y cuya interpretación resulta confusa (ver Imagen N° 31).

Imagen N° 31: *"Porque deja de ser tan niño" (Estudiante 21).*

b. ¿Con qué velocidad crece la estatura de un niño de 8 años?

En la Tabla N° 22 sintetizamos la clasificación que realizamos sobre las respuestas de los estudiantes a este interrogante:

Tabla N° 22: Clasificación de respuestas al interrogante b de la Tarea A4		
Categoría	**Cantidad de estudiantes**	**N° estudiante**
Valor numérico de la edad	17	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21
Velocidad normal	2	1, 12
Intercambio de variables	2	16, 20
Otras interpretaciones	1	22

Como puede observarse en la tabla anterior, la mayoría de los niños realiza una aproximación adecuada del valor numérico de la ordenada que le corresponde a la abscisa 8, aunque no suelen utilizar la unidad apropiada, como puede observarse en el siguiente ejemplo:

Imagen N° 32: *"crece aprox. 6cm" (Estudiante 14).*

Dos niños responden 2 cm por año (ver Imagen N° 33). Creemos que posiblemente haya una confusión sobre las variables al interpretar el gráfico, dado que hacen referencia al par (2, 8).

Imagen N° 33: *"a 2cm por año" (Estudiante 20).*

Notamos que dos estudiantes que trabajaron juntos aluden a un crecimiento normal, aunque agregan un comentario al final que nos resulta confuso. Mostramos a continuación dicha respuesta:

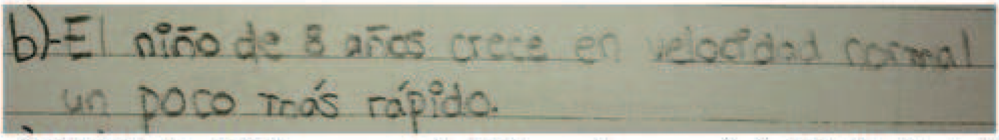


Imagen N° 34: *"El niño de 8 años crece en velocidad normal un poco más rápida" (Estudiante 12).*

Finalmente, un niño que responde que la velocidad de crecimiento es de 10 o 12cm como se observa en la Imagen N° 35. Nos resulta complejo entender la interpretación que realiza, aunque podría ponerse de manifiesto otro intercambio de variables observando los pares (10, 8) y (12, 8) para la curva que corresponde a las niñas.

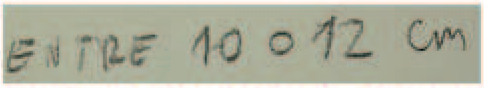


Imagen N° 35: *"ENTRE 10 o 12 cm" (Estudiante 22).*

c. ¿En algún momento la velocidad de crecimiento de la estatura llega a ser de 11cm/año?

Por un lado, este interrogante habilita una respuesta que afirme o niegue lo que se pregunta sin la necesidad de identificar un valor numérico. Hay dos estudiantes que responden en este sentido (ver imagen N° 36).

Imagen N° 36: *"La velocidad si puede llegar a los 11cm" (Estudiante 12).*

Por otro lado, en el caso de que se pretenda identificar el valor de la abscisa que corresponde a la ordenada 11cm/año, cabe mencionar que existe más de un valor posible. Si bien la mayoría de los niños logró identificar un solo valor (59%), dos estudiantes mencionaron dos valores posibles para la abscisa de 11cm/año (ver Imagen N° 37).

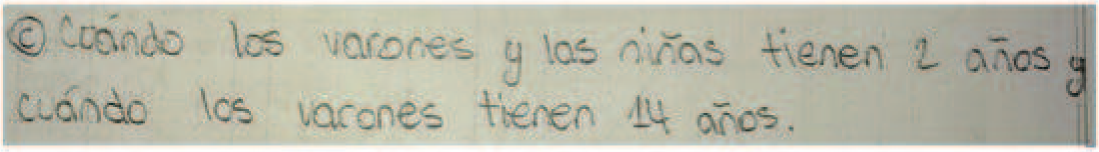


Imagen N° 37: *"Cuando los varones y las niñas tienen 2 años y cuándo los varones tienen 14 años" (Estudiante 6).*

Otros dos niños hacen referencia a una determinada edad (1 año) en la que se supera la velocidad indicada, como se muestra en el siguiente ejemplo:

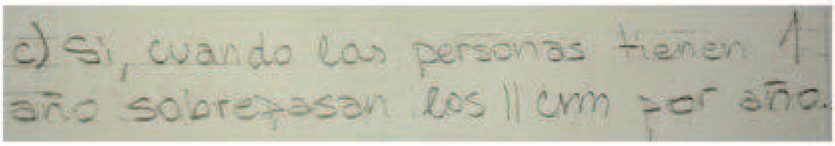


Imagen N° 38: *"Si, cuando las personas tienen 1 año sobrepasan los 11 cm por año" (Estudiante 7).*

La respuesta de un niño (ver Imagen N° 39) nos conduce a pensar en la posibilidad de que haya confundido las variables, de la misma manera que lo hizo en el interrogante anterior

(Imagen Nº 35).

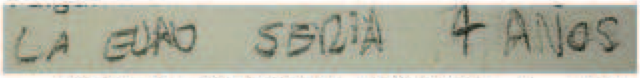


Imagen N° 39: "LA EDAD SERIA 4 AÑOS" (Estudiante 22).

Finalmente, encontramos una respuesta que nos resulta confusa y no logramos encontrarle una explicación razonable (Imagen N° 40).

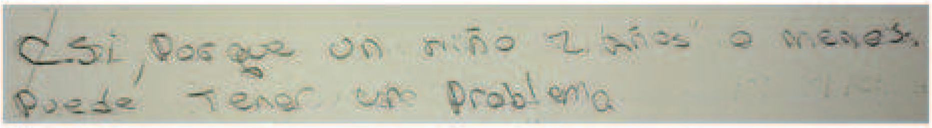


Imagen N° 40: "Si, porque un niño 2 años o menos puede tener un problema" (Estudiante 13).

La Tabla siguiente presenta una síntesis de la clasificación de las respuestas al interrogante c:

Tabla N° 23: Clasificación de respuestas al interrogante c de la Tarea A4		
Categoría	**Cantidad de estudiantes**	**N° estudiante**
Solo afirma	2	1, 12
Identifica un valor para la abscisa	13	2, 4, 5, 8, 9, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21
Identifica dos abscisas posibles	2	6, 17
Intercambia variables	1	22
Otras interpretaciones	3	3, 7, 13
No responde	1	10

d. ¿Cuál es la velocidad máxima? ¿cuándo se produce?

En primer lugar, mostramos la síntesis de las respuestas obtenidas en la siguiente tabla:

Tabla N° 24: Clasificación de respuestas al interrogante d de la Tarea A4		
Categoría	**Cantidad de estudiantes**	**N° estudiante**
Primeros meses de vida	1	11
Alrededor del primer año	12	2, 3, 6, 7, 8, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21
Dos años o menos	2	4, 18
18 años	5	1, 9, 10, 12, 22
24 cm	1	13
No responde	1	5

Como podemos observar, la mayoría de los niños interpreta de un modo adecuado que alrededor del primer año de vida la velocidad de crecimiento en estatura es máxima y es de aproximadamente 24cm/año (Imagen N° 41). Un niño indica que se produce durante los primeros meses de vida y otros dos estudiantes señalan que se alcanza cuando la edad es menor o igual a los dos años (Imagen N° 42 y 43).

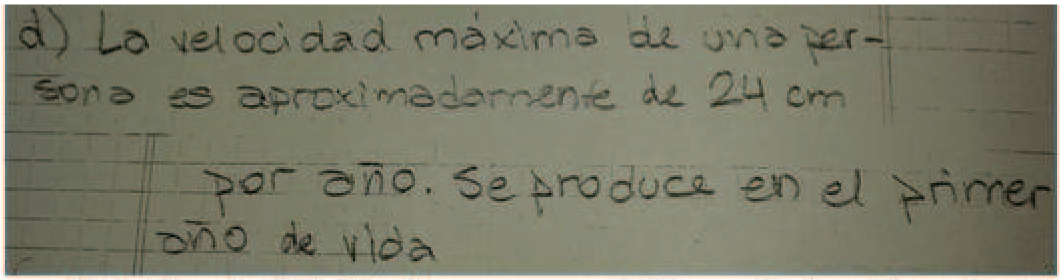


Imagen N° 41: *"La velocidad máxima de una persona es de 24cm por año. Se produce en el primer año de vida" (Estudiante 7).*

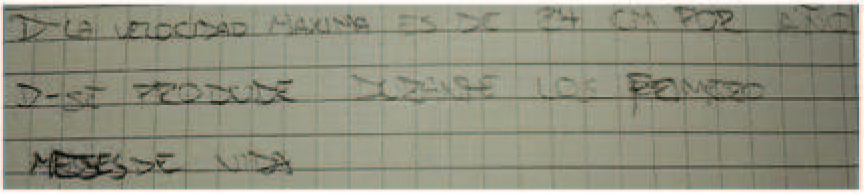


Imagen N° 42: *"La velocidad maxima es de 24 cm por año. Se produce durante los primero meses de vida" (Estudiante 11).*

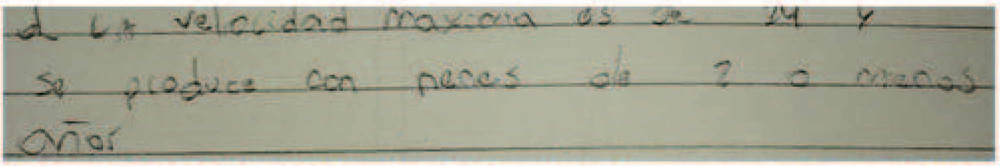


Imagen N° 43: *"La velocidad maxima es de 24 y se produce con nenes de 2 o menos años" (Estudiante 4).*

En cinco respuestas observamos que los niños relacionan los valores máximos de las dos variables al dar la respuesta, es decir, mencionan el valor máximo de la velocidad (24cm/año) e indican que se alcanza en el valor máximo de la escala para la edad del gráfico dado (18 años) (Imagen N° 44).

Finalmente, un estudiante sólo indica 24 cm, sin hacer referencia al momento en el que se alcanza (imagen N° 45). Tanto en este caso como en varias de las respuestas clasificadas en las categorías anteriores, los niños utilizan una unidad incorrecta para la velocidad u omiten colocar unidades.

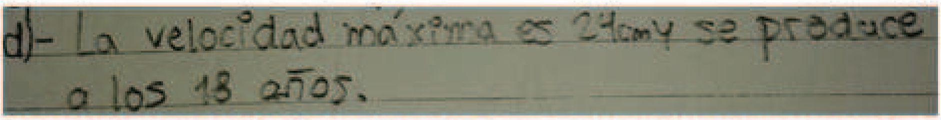


Imagen N° 44: *"La velocidad máxima es 24cm y se produce a los 18 años" (Estudiante 12).*

Imagen N° 45: *"24 cm" (Estudiante 13).*

e. ¿Cuál es la velocidad mínima? ¿cuándo se produce?

Resumimos en la Tabla N° 25 la clasificación que realizamos de las respuestas de los niños:

Tabla N° 25: Clasificación de respuestas al interrogante e de la Tarea N A4		
Categoría	**Cantidad de estudiantes**	**N° estudiante**
0 cm/año a los 18 años	2	4, 13
1 cm/año a los 18 años	7	2, 8, 14, 16, 18, 20, 21
A los 18 años porque ya no crecemos	2	6, 17
1 cm/año a los 16 años (mujeres) y 18 años (varones)	2	15, 19
Otras respuestas	5	1, 9, 10, 12, 22
No responde	4	3, 5, 7, 11

Este interrogante, a diferencia del anterior, admite dos respuestas distintas según se refiera a la curva correspondiente a niñas o varones. Sólo dos estudiantes realizaron esta distinción según el sexo (Imagen Nº 46).

Imagen N° 46: *"La velocidad mínima es 1cm, 16 años (mujeres) 18 años (varones)" (Estudiante 19).*

Como observamos en la Tabla N° 25, la mayoría de las respuestas obtenidas menciona que la velocidad mínima se alcanza a los 18 años de edad, aunque difieren en el valor de dicha velocidad. Algunos de ellos indican 0 cm/año, otros 1cm/año y 2 niños aluden a que "ya no crecemos" en lugar de dar un valor numérico (Imagen N° 47, 48 y 49, respectivamente). Entendemos que este último tipo de respuesta refiere a una relación entre lo que representa el gráfico y nociones previas de los estudiantes.

Imagen N° 47: *"0cm a los 18" (Estudiante 13).*

Imagen N° 48: *"a los 18 la velocidad minima que es 1 cm" (Estudiante 14).*

Imagen N° 49: *"A partir de los 18 años que ya no crecemos" (Estudiante 17).*

Por último, identificamos como "Otras respuestas" aquellas que aluden a otros valores de la velocidad mínima (como 2cm/año) o a otra edad (a partir del nacimiento o a los 4 años). No logramos encontrar una explicación al razonamiento de estos niños (Imagen N° 50 y 51).

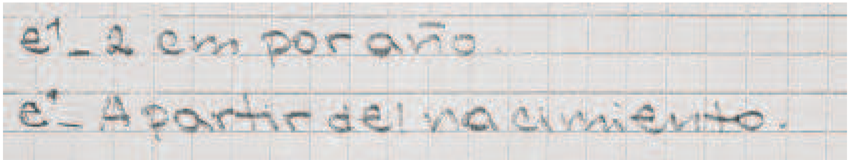


Imagen Nº 50: "e¹_2 cm por año. e¹_A partir del nacimiento" (Estudiante 10)

Imagen N° 51: "0 cm y a los 4 años" (Estudiante 22).

Tal como sucede en los interrogantes anteriores, en muchas respuestas se utilizan unidades inadecuadas para la velocidad. Se incrementa en este interrogante la cantidad de niños que no responden (18%).

f. Observa las gráficas de 0 a 9 años ¿Qué sucede con la velocidad? Explica tu respuesta.

Sintetizamos las respuestas obtenidas en la siguiente tabla:

Tabla N° 26: Clasificación de respuestas al interrogante f de la Tarea A4		
Categoría	**Cantidad de estudiantes**	**N° estudiante**
La velocidad disminuye	12	1, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21
El gráfico desciende y luego de los 4 "se mantiene"	2	16, 20
La velocidad aumenta	3	9, 18, 22
Diferencia sexos	2	2, 11
No responde	3	3, 5, 7

Como podemos observar en la Tabla N° 26, la mayoría de los estudiantes interpreta adecuadamente el comportamiento del gráfico en el intervalo solicitado, indicando de alguna manera que la velocidad disminuye en dicho período. Entre este tipo de respuestas, encontramos algunas que añaden razones para justificar el comportamiento del gráfico en el intervalo [0, 9], como el siguiente ejemplo:

Imagen N° 52: "va disminuyendo, porque los primeros años crecemos mucho y luego crecemos un poco menos" (Estudiante 19)

Este tipo de justificaciones pone de manifiesto la interpretación que realizan los estudiantes del gráfico dado, porque aportan información adicional a la dada.

Dos niños describen el comportamiento del gráfico indicando que primero desciende y luego de los cuatro (interpretamos que se refieren a años), el gráfico se mantiene más que antes

(Imagen N° 53[24]). Consideramos que posiblemente estos estudiantes centran su mirada en las características de la pendiente de la curva en el intervalo solicitado, aunque desconozcan el término pendiente. En forma intuitiva, se evidencia una pendiente o inclinación más pronunciada en el tramo de 0 a 4 años que de 4 a 9 años.

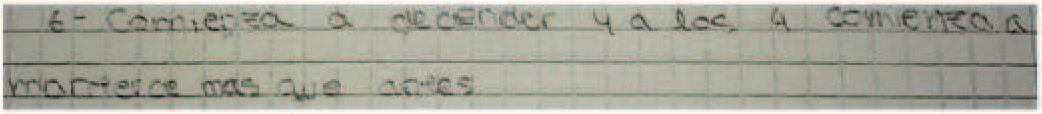


***Imagen N° 53:** "Comienza a decender y a los 4 comienza a mantenerce mas que antes" (Estudiante 16).*

Otros tres niños se refieren a un crecimiento o aumento de la velocidad. Entre ellos, identificamos dos tipos de respuestas: una menciona que "crece con mayor velocidad" y otra, "crece mucho desde los 0 y luego no tanto" (Imagen N° 54 y 55, respectivamente). En relación con la primera respuesta, no arriesgamos una interpretación posible; en cuanto a la segunda, entendemos que quizás responda al hecho de que cerca del cero la velocidad de crecimiento adquiere determinados valores que disminuyen a medida que la edad aumenta (entre 0 y 9 años).

***Imagen N° 54:** "Crecen con mayor velocidad" (Estudiante 22)*

***Imagen N° 55:** "crece mucho desde los 0 y luego no tanto" (Estudiante 18)*

Finalmente, dos estudiantes focalizan su respuesta en la diferencia entre las curvas para ambos sexos. Uno de ellos describe el comportamiento común en el intervalo [0, 9] e indica que la diferencia se produce a partir de los 10 años, extendiendo el intervalo propuesto en el interrogante (intervalo [0, 9]). El otro alumno señala que la curva de las niñas es "más alta" que la de los niños a los 9 años, cuando en realidad la diferencia se produce a partir de ese valor. En este caso, no hace referencia al comportamiento del gráfico en el intervalo solicitado (Imágenes N° 56 y 57, respectivamente).

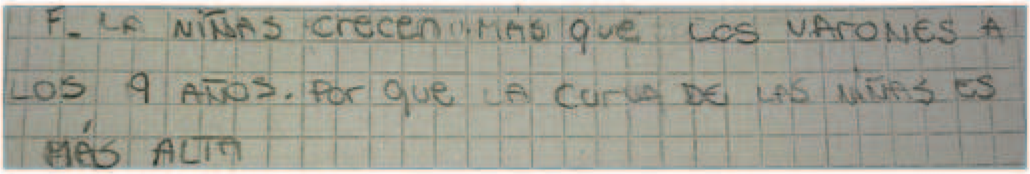


***Imagen N° 56:** "Las niñas crecen más que los varones a los 9 años. Por que la curva de las niñas es más alta" (Estudiante 2)*

[24] En esta respuesta se observa que el estudiante coloca 6 en lugar de f antes de responder. Eso se debe a que enumera las respuestas en lugar de colocar la letra que corresponde a cada interrogante.

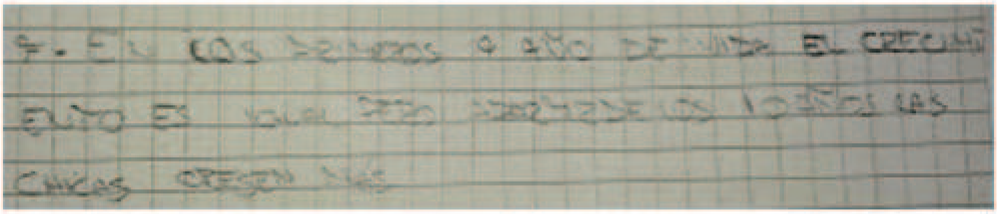


Imagen N° 57: "En los primeros 9 año de vida el crecimiento es igual pero a partir de los 10 años las chicas cresen más" (Estudiante 11)

g. Observa las gráficas de 9 a 18 años ¿Qué sucede con la velocidad?

En la tabla que sigue clasificamos las respuestas obtenidas para este interrogante:

Tabla N° 27: Clasificación de respuestas al interrogante g de la Tarea A4

Categoría	Cantidad de estudiantes	N° estudiante
La velocidad aumenta y luego disminuye	8	4, 13, 6, 15, 16, 17, 18, 19
La velocidad aumenta o disminuye	5	1, 9, 12, 21, 22
Comparación entre los extremos del intervalo	1	10
Diferencia las curvas para ambos sexos	1	11
Otras respuestas	4	8, 14
No responde	5	2, 3, 5, 7, 20

En este caso notamos que un 36% de los estudiantes se refieren a un período de crecimiento y otro de decrecimiento de la velocidad, cinco niños aluden sólo a uno de estos dos comportamientos, mientras que un solo estudiante establece una comparación entre los valores de la velocidad en los extremos del intervalo solicitado (Imagen N° 58, 59 y 60, respectivamente).

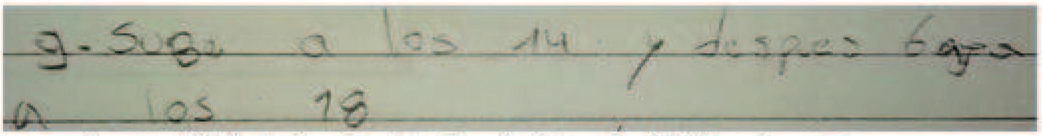


Imagen N° 58: "sube a los 14 y después baja a los 18" (Estudiante 4)

Imagen N° 59: "La velocidad va subiendo" (Estudiante 12)

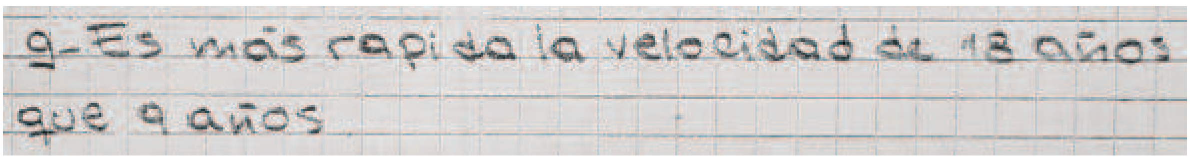


Imagen N° 60: "Es más rapida la velocidad de 18 años que 9 años" (Estudiante 10)

Con respecto al primer grupo de respuestas mencionado, cabe destacar que dos niños se refieren al período de "desarrollo" de la persona o adolescencia para justificar el cambio de comportamiento de la velocidad (primero aumenta y luego disminuye) en el intervalo solicitado (Imagen N° 61).

Imagen N° 61: *"va aumentando y después disminuye, porque esos años son los que nos desarrollamos/adolescencia" (Estudiante 19)*

Una sola respuesta señala las diferencias observables entre las curvas que corresponden a niños y niñas en el intervalo [9, 18] (Imagen N° 62).

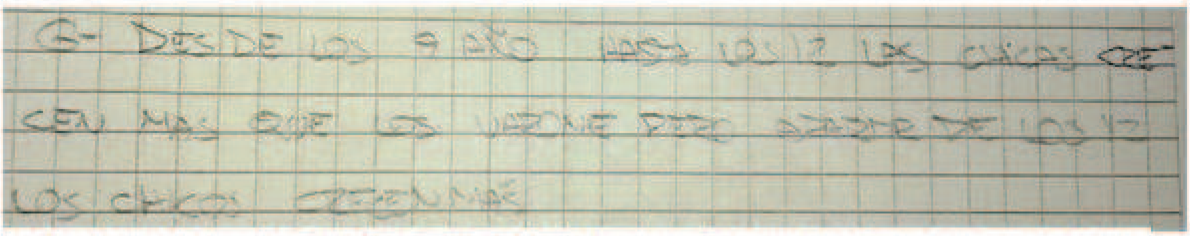


Imagen N° 62: *"Desde los 9 año hasta los 12 las chicas crecen mas que los varone pero apartir de los 12 los chicos crecen más" (Estudiante 11)*

Finalmente, en Otras respuestas hemos considerado aquellos niños que se refieren al momento en el que se produce el "estirón", entre los 13 y 16 años, remarcando que en ese período "empezás a crecer" (Imagen N° 63).

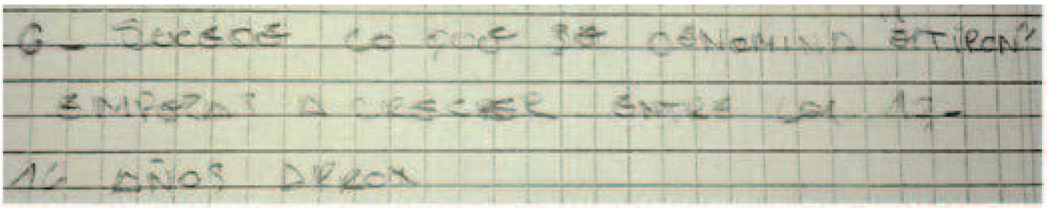


Imagen N° 63: *"sucede lo que se denomina "estirón" empezas a crecer entre los 13 y los 16 años aprox" (Estudiante 8).*

En conclusión, notamos que cuatro niños intentan encontrar una explicación relacionada con sus experiencias vitales al hacer referencia al "estirón" o etapa de desarrollo o adolescencia para explicar el crecimiento de la velocidad que se observa en el gráfico, mientras que otros realizan una lectura literal del gráfico dado. Creemos que la posibilidad de explicar con sus palabras utilizando nociones previas lo que observan en un gráfico determinado se relaciona directamente con la elección de contextos apropiados al grupo de estudiantes. Esta fue la razón principal por la que hemos propuesto esta tarea, aun teniendo en cuenta la complejidad de la noción de velocidad de crecimiento en estatura que involucra.

h. En el caso de las niñas, ¿en qué período aumenta la velocidad de crecimiento de la estatura?

i. ¿y en el caso de los niños?

Realizamos el estudio de los interrogantes h e i de manera conjunta debido a que plantean el mismo tipo de pregunta para la curva correspondiente a niñas y niños. En la tabla siguiente sintetizamos las respuestas obtenidas:

Tabla N° 28: Clasificación de respuestas al interrogante h y i de la Tarea A4			
N° de Estudiante	**Respuesta h**	**Respuesta i**	**Clasificación**
1 y 12	"Aumenta los 10cm"	"Aumenta a los 11 cm"	**Extremo inferior del intervalo de crecimiento**
4	"A los 10 años de velocidad"	"A los 11 años de velocidad"	
13	"a los 10 años"	"a los 11 años"	
15 y 19	"a los 9 años"	"a los 12/13 años"	
11	"Apartir de los 10 años hasta los 12 años"	"Apartir de los 13 año hasta los 14 años"	**Intervalo**
9 y 22	"de 8 a 12 años"	"de 13 a 15"	
6	"Entre los 10 y los 14 años"	"Entre los 12 y los 15 años"	
17	"Entre los 10 y los 14 años"	"Entre los 12 y 15 años"	
8	"en los 12-13 años"	"en los 14-15 años"	**Abscisa del máximo relativo**
10	"A los 12 años se puede notar mayor diferencia de altura que otros años"	"Entre los 14 y 15 años sucede el cambio de velocidad"	
14	"En los 12 y 13 años"	"En los 14 y 15 años"	
18	"a los 12 años"	"a los 14 años"	
21	"a los 12 años"	"a los 14 años"	
2	"9 años"	"15 años"	**Otras respuestas**
3, 5, 7, 16 y 20	NR	NR	**No responde**

Como podemos observar en la tabla anterior, a excepción de un estudiante (Estudiante N° 2), cada niño expresa el mismo tipo de respuesta para los dos interrogantes. En la clasificación que hemos propuesto diferenciamos aquellos casos en los que se señala, aproximadamente, el extremo inferior del intervalo de crecimiento de la velocidad de aquellos en los que se menciona la abscisa del máximo relativo de cada curva o se expresa un intervalo para la variable edad. En este último caso, notamos que tres estudiantes realizan una aproximación apropiada del intervalo de crecimiento (Imagen N° 64, para interrogante h), mientras que otros dos mencionan un período que no resulta adecuado para indicar cuándo aumenta la velocidad (Imagen N° 65, para interrogante h). Consideramos que quizás estos dos niños pretenden expresar un entorno del "pico" observable en cada curva (el momento en el que se alcanza el máximo relativo).

Imagen N° 64: "de 8 a 12 años" (Estudiante 9).

Imagen N° 65: "Entre los 10 y los 14 años" (Estudiante 17).

4.1.5 Tarea N° 5: El paseo de Carolina

Implementación de la tarea

Cuando finaliza la puesta en común de la Tarea N° 4 la docente reparte la consigna de esta nueva tarea sin realizar indicaciones. Recordemos de qué se trata la tarea propuesta:

Carolina salió a caminar ayer. El siguiente gráfico muestra la distancia de Carolina a su casa en varios momentos, durante la caminata. Escribe una historia sobre el paseo de Carolina. Intenta ser lo más preciso posible.

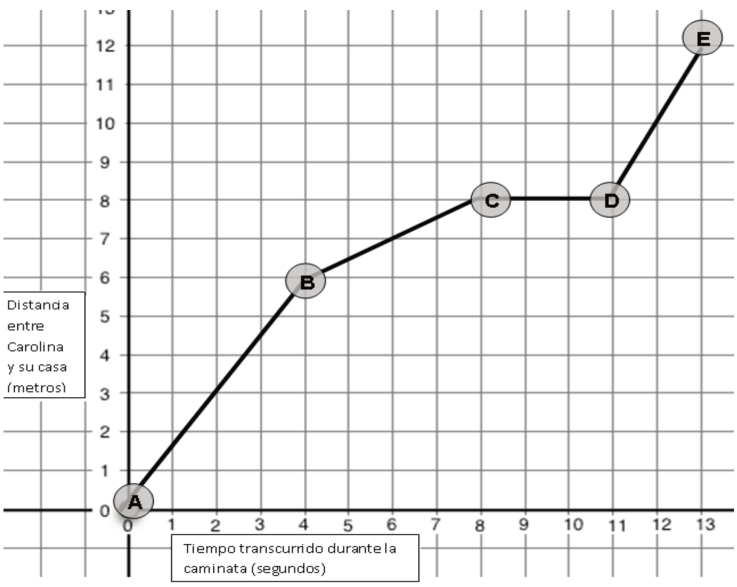


Imagen Nº 6: Gráfico sobre el paseo de Carolina (Tarea A5)

La mayoría de los estudiantes se agrupan de a dos o de a tres para leer la consigna y escribir la historia sobre el paseo de Carolina.

Tal como lo indicamos en el capítulo anterior, queremos observar el modo en que los estudiantes interpretan cada uno de los segmentos y/o puntos que aparecen en el gráfico a través de la escritura de una historia sobre el paseo de Carolina. Nos interesa especialmente la relación que puedan establecer entre las variables involucradas en el gráfico (distancia y tiempo).

Análisis de la tarea

Para estudiar las producciones escritas de los estudiantes definimos las siguientes categorías:

A) Contexto extramatemático: Identificamos en este caso aquellas historias cuyo relato incluye lugares u objetos extramatemáticos al narrar el paseo de Carolina.

A1: Sí

A2: No

B) Orientación del Paseo de Carolina: Diferenciamos los relatos según la orientación del gráfico que hayan elegido para describir el paseo de Carolina. En definitiva, se trata de distinguir el punto de partida y de llegada identificado por cada estudiante, aunque cabe aclarar que todos ubicaron la casa de Carolina en el origen de coordenadas (punto A).

B1: Trayecto AE

B2: Trayecto EA

C) Interpretación del gráfico: En esta categoría intentamos señalar una característica distintiva de cada relato. Observamos si el estudiante interpreta los segmentos que aparecen en el gráfico como desplazamientos de Carolina (con dirección y sentido), si alude a nociones relacionadas con la velocidad o rapidez o si interpreta el gráfico de una manera puntual (en el relato se centra en los puntos señalados en el gráfico). Las subcategorías que indicamos a continuación no son mutuamente excluyentes.

C1: Interpreta segmentos como desplazamientos (con dirección y sentido).

C2: Utiliza expresiones referidas a la velocidad o rapidez

C3: No interpreta segmentos. Se refiere a los puntos señalados.

D) Interpretación del tramo CD: Señalamos en este caso el modo en el que el estudiante se refiere al tramo constante (segmento CD), distinguiendo de alguna manera a una "pausa" en el paseo de Carolina (es decir, que Carolina se detiene por algún motivo) o interpreta este tramo de una manera alternativa.

D1: Hace referencia a una "pausa" en el paseo de Carolina

D2: No lo interpreta como "pausa".

En el Anexo incluimos una tabla en la que se analizan las producciones de acuerdo con estas cuatro categorías (Tabla N° 29 del Anexo 3). A partir de la misma podemos decir que la mayoría de los estudiantes utiliza elementos extramatemáticos en sus relatos (el 73%)[25] y elige como punto de partida el punto A y de llegada el punto E (91%). Sólo dos estudiantes realizan la elección contraria. Una característica común de estas últimas producciones es que se trata de trabajos individuales y de interpretaciones puntuales del gráfico. Sólo uno de ellos recurre a elementos extramatemáticos.

En lo que concierne a la interpretación del gráfico notamos que seis estudiantes aluden a desplazamientos con dirección y sentido, cinco alumnos hacen referencia a la velocidad o rapidez en sus relatos y once estudiantes realizan una interpretación puntual del gráfico.

En relación con el primer caso, cuatro producciones corresponden a estudiantes que formaban parte de un mismo grupo y recurrieron a elementos extramatemáticos para narrar su historia (mencionan la casa, tienda de deportes, carnet, farmacia, restaurante). Para los dos primeros tramos (AB y BC) indican que Carolina camina "hacia la derecha" y el tramo constante CD lo

[25] Consideramos como 100% al total de estudiantes presentes ese día (22 estudiantes).

describen de la siguiente manera: “en 2 segundos cruza una puerta que te lleva directamente hasta la farmacia (D)” (Estudiantes 1, 15, 18 y 21). Las otras dos producciones correspondientes a este caso utilizan términos “camino en diagonal” y “subió” para referirse a los tramos BC y DE y “camino derecho” y “Carolina se fue para la derecha” para el tramo CD (Estudiantes 25 y 24, respectivamente).

En relación con los ejemplos anteriores, notamos que si bien los estudiantes identifican la variable tiempo (mencionan los segundos que corresponden a cada punto), al indicar la dirección y el sentido del desplazamiento muestran una interpretación del gráfico semejante a un mapa o plano de un lugar geográfico determinado.

En cuanto al uso de nociones relacionadas con la velocidad o rapidez, hay cuatro producciones correspondientes a un mismo grupo (Estudiantes 3, 7, 9 y 12) y una producción individual (Estudiante 6).

A continuación transcribimos el relato elaborado por el grupo mencionado:

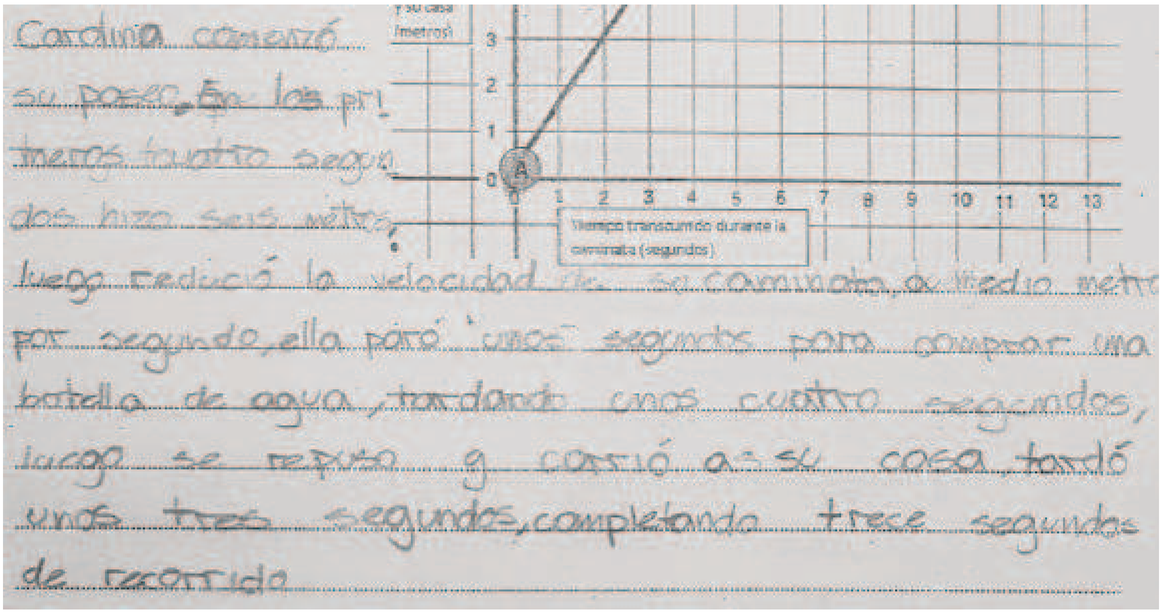


Imagen N° 66: *“Carolina comenzó su paseo. En los primeros cuatro segundos hizo seis metros, luego redució la velocidad de su caminata a medio metro por segundo ellá paró unos segundos para comprar una botella de agua, tardando unos cuatro segundos, luego se repuso y corrió a su casa, tardó unos tres segundos, completando trece segundos de recorrido” (Estudiante 3).*

Como puede observarse, los estudiantes interpretan correctamente que el hecho de que Carolina recorra dos metros en cuatro segundos, refiere a que su velocidad (media) es de medio metro por segundo.

Transcribimos la narración de la producción individual para facilitar su análisis:

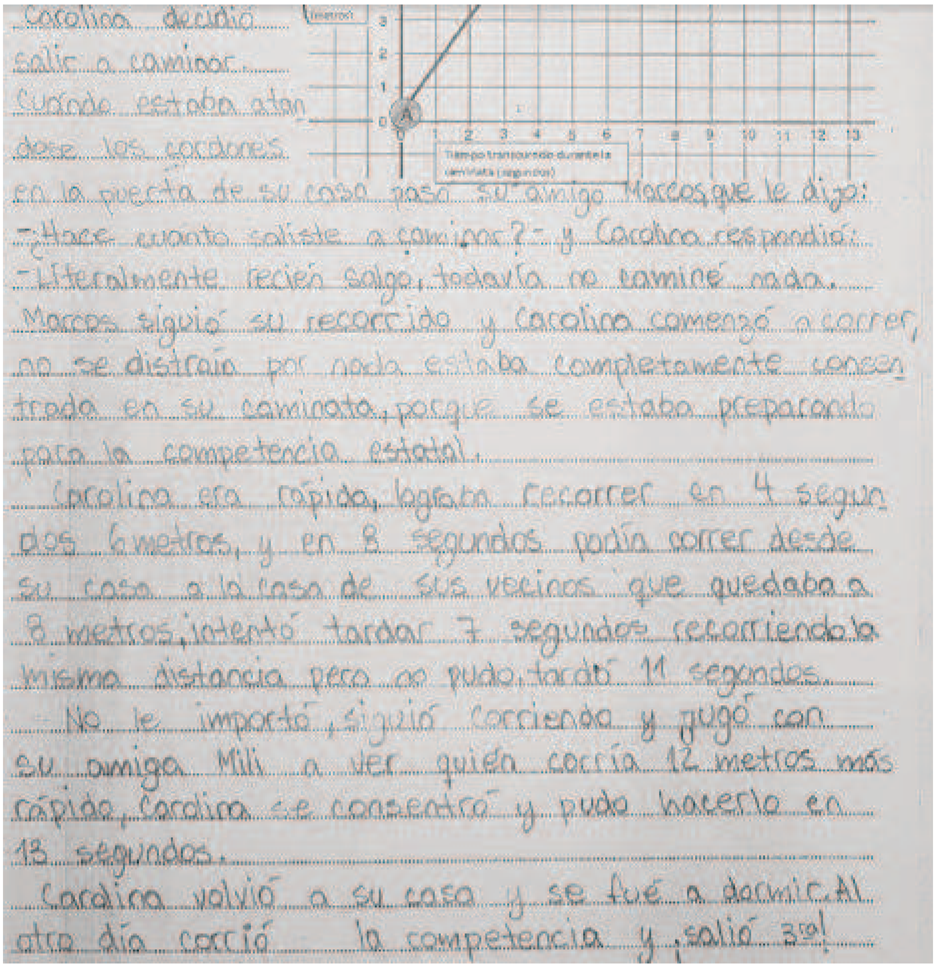


Imagen Nº 67: *"Carolina decidió salir a caminar. Cuando estaba atándose los cordones en la puerta de su casa pasó su amigo Marcos que le dijo [...] Marcos siguió su recorrido y Carolina empezó a correr, no se distraía por nada estaba completamente consentrada en su caminata, porque se estaba preparando para la competencia estatal. Carolina era rápida, lograba recorrer en 4 segundos 6 metros, y en 8 segundos podía correr desde su casa a la casa de sus vecinos que quedaba a 8 metros, intentó tardar 7 segundos recorriendo la misma distancia pero no pudo, tardó 11 segundos. No le importó, siguió corriendo y jugó con su amiga Mili a ver quién corría 12 metros más rápido, Carolina se consentró y pudo hacerlo en 13 segundos.*

Carolina volvió a su casa y se fue a dormir. Al otro día corrió la competencia y ¡salió 3ra!" *(Estudiante 6).*

En este relato evidenciamos al menos dos cuestiones de interés. Por un lado, el estudiante indica que "Carolina era rápida" y logra explicar por qué la caracteriza de esa manera. En su explicación, alude al significado de los puntos B y C en términos de las variables representadas. No hace referencia a la diferencia entre los segmentos AB y BC. Por otro lado, al referirse al segmento CD, realiza una interpretación que no logramos comprender: "*intentó tardar 7 segundos recorriendo la misma distancia pero no pudo, tardó 11 segundos*". Observamos que identifica que la distancia recorrida es la misma en el punto C y en el punto D.

En relación con lo anterior, elaboramos una tabla para analizar el modo en que los estudiantes aluden al tramo CD (tramo constante), segmento que une los puntos (8,8) y (11,8).

Tabla Nº 30: Interpretación del tramo constante CD (Tarea A5)
A) Hace referencia a que se detiene
“ella paró unos segundos para comprar una botella de agua, tardando unos cuatro segundos” (E3, E7, E9 y E12) “a los 8 segundos había hecho 8 metros de su recorrido y llego hasta su restaurante favorito, pensó en tomarse algo. Unos segundos después se arrepintió y siguió su camino” (E17) “Las dos siguieron caminando juntas, hasta que a los 8 segundos de tiempo ya estaban a los 8 metros de la casa de Carolina, donde pararon a comprar una gaseosa para tomar algo. A los 11 segundos de tiempo seguían en los 8 metros y se encontraron con Juli” (E5) “Después de eso descanso 3 segundos y retomo 4 metros en 3 segundos” (E2, E22) “Luego le faltaban 8 metros y tardó 11 segundos. Pero se ve que estaba cansada, se tomó un helado y siguió, pero ahí en 8 segundos estaba en su casa” (E19)
B) Alude a un desplazamiento
B1) Refiere al tiempo que demora en desplazarse de un lugar a otro.
“en 2 segundos cruza una puerta que te lleva directamente hacia la Farmacia (D)” (E1, E15, E18 y E21) “Luego pasa a comprar la carne que queda a 8 metros y 8s. después pasa a la farmacia a comprar sus medicamentos que esta a 3 segundos de la carnicería” (E13) “Luego paso a comprar la carne que queda a 8 metros y 8’’. Después paso a la farmacia a comprar sus medicamentos que esta a 4’’ de la carnicería” (E10) “Luego paso a comprar la carne que queda a 8 metros y 8 segundos después paso a la farmacia a comprar sus medicamentos que esta a 8 metro y 3 segundos de la carnisería” (E11) “en 8 segundos podía correr desde su casa a la casa de sus vecinos que quedaba a 8 metros, intentó tardar 7 segundos recorriendo la misma distancia pero no pudo, tardó 11 segundos” (E6)
B2) Alude a una modificación en la dirección y sentido
“Carolina se fue para la derecha 3 segundos y por último subió”(E24) “Caminó derecho hasta los diez segundos y volvió a caminar en diagonal” (E25)
C) No hace referencia a ese tramo en particular.
“Carolina empeso desde el punto A y camino hasta el punto E en 13 segundos y a medida que llega a cada punto se va alejando más de su casa” (E23)
D) Otros.
“El C a 8 metros la diferencia entre el C y el D son los segundos el C: 8 seg D: 10 seg” (E8)

Como podemos observar en la Tabla N° 30, nueve estudiantes interpretan el tramo CD como una “pausa” en el paseo de Carolina. En su relato, añaden detalles para explicar la detención de Carolina (para descansar, para comprar una botella de agua, tomar un helado o una gaseosa). Ocho estudiantes se centran en el tiempo que demora en “desplazarse” del punto C al punto D. Nos interesa destacar la interpretación de uno de los grupos, que hace referencia al cruce “de una puerta que te lleva directamente hacia la Farmacia (D)”. Los estudiantes notan que los dos puntos se encuentran a la misma distancia de la casa de Carolina, por lo que recurren a una puerta para “lograr” que entre los dos lugares (que representan los puntos C y D) la distancia hasta la casa de Carolina sea prácticamente nula. Otro de los grupos considera que en uno de los puntos está la farmacia y en otro la carnicería y la diferencia entre los dos lugares es de tres segundos.

En relación con lo anterior, nos preguntamos lo siguiente: si los puntos C y D se encuentran a la misma distancia de la casa de Carolina, ¿se puede tratar de lugares distintos? Si volvemos a la consigna de la tarea, observamos que no se especifica el tipo de recorrido que realiza Carolina (por ejemplo, no se indica que se desplaza en línea recta) entonces si el gráfico dado y el relato elaborado por cada grupo se tendrían que complementar con un mapa o plano sobre el desplazamiento realizado por Carolina, una posibilidad es que los puntos C y D se ubiquen en lugares distintos pero a la misma distancia de la casa de Carolina (es decir, sobre la misma circunferencia de radio representado por 8m con centro en la casa de Carolina).

Retomando la tabla anterior, otros estudiantes se refieren a cambios en la dirección y el sentido del desplazamiento (sobre lo cual ya hemos hecho referencia), un estudiante alude a la diferencia de tiempo entre los dos puntos y otro no menciona ese tramo en particular en su relato.

El papel de las interacciones en esta tarea

Hasta el momento analizamos las producciones escritas de los estudiantes sobre la Tarea N° 5. Nos interesa complementar dicho análisis con un estudio sobre el modo en que *uno de los grupos construye su relato* y cómo influyen en dicha construcción las *interacciones* entre las integrantes del grupo y la puesta en común con el grupo clase.

El motivo que nos condujo a seleccionar a este grupo tiene que ver el uso que realizan del término "velocidad" en el relato que elaboran y nos interesa saber de qué manera llegan a dicha expresión.

Cabe aclarar que, a diferencia del análisis de las Tareas N° 1, 2 y 3, en el caso de esta tarea no realizamos la transcripción completa sino que sólo transcribimos aquellos fragmentos que contienen *enunciados de interés didáctico* en términos de Buffarini (2005). Por este motivo, las frases no están enumeradas.

El grupo seleccionado para el análisis está compuesto por cuatro niñas. Antes de comenzar a trabajar, las estudiantes leen dos veces las consignas en voz alta. Luego, se inician los intercambios en torno a la elaboración del relato sobre el paseo de Carolina:

> A2:Carolina comenzó su paseo ehhh
> A1: comenzó su paseo… aumentando su velocidad.
> A2: No, jodeme.
> […]
> A2: Ahh iba por la calle PAPAPAPAPAPA [hacen ruido de moto]
> A3: En el medio de la vereda.
> A: Pero chicas, si va en auto, piensen, piensen tiene que ir caminando porque si va en moto o en lo que sea, no puede atravesar…
> A2: ¿Pero por qué atraviesa?
> A: Es Spider Man porque atraviesa las calles entre medio… Mirá lee lo que dice acá y lee lo que dice acá.
> [leen las etiquetas de cada eje]
> A2: ¿Entonces cómo hacemos?
> A: No ves en 4 segundos recorrió 6 metros
> A2: ¿en 4 segundos recorrió 6 metros?
> A: Entonces ponemos comenzó su recorrido ehh su paseo que en 4 segundos recorrió 6 metros, después de esos 6 metros en 8 segundos, en 4 segundos más recorrió 8 metros, luego en 10 segundos, 2 segundos más recorrió 8 metros derecho, después de 11 segundos recorrió 12 metros
> A3: ¿Esta es la casa?

A4: Creo que esta es la casa, ¿a dónde se dirigía?
A3: ¿Por qué va así y no así?
A4: Porque va disminuyendo

Transcripción 18: frases correspondientes a la Tarea A5

Como podemos observar, la primera discusión que tiene lugar se centra en definir aspectos importantes para iniciar la historia. La estudiante que señala que Carolina debe ir caminando porque no puede ir atravesando las calles "entre medio" interpreta el gráfico como si fuese un mapa o plano de un lugar geográfico. No obstante, indica al resto del grupo que lea las etiquetas de cada eje para esclarecer su idea y resalta luego que "en 4 segundos recorrió 6 metros". Notamos una doble interpretación del gráfico por parte de esta estudiante. Al mismo tiempo que señala que las variables involucradas son el tiempo y la distancia, hace referencia a dirección y sentido del desplazamiento cuando se refiere a "cruzar las calles entre medio" y más adelante "2 segundos más recorrió 8 metros derecho" para referirse al tramo constante CD.

En el transcurso de los intercambios, la misma estudiante indica a sus compañeras que Carolina reduce la velocidad de su caminata en el tramo BC:

A1: Carolina comenzó su paseo. En los primeros 4 segundos hizo 6 metros
A: Luego redució
A1: Noo no redució al contrario
A: Noo si redu si en 4 segundos si en 4 segundos hizo 6 metros y después en 8 segundos hizo 8 metros. Si en 4 segundos hizo 6 en 8 tendría que hacer 12 no 8, lo lo disminuyó.
A1: Ahhhh
A2: Bueno vamos a poner luego redució
A: Pongan coma,
A3: ¿Coma?
A: Luego redució
A3: luego redució
A1: La velocidad, la velocidad de su caminata
A3: La velocidad de su caminata
A2: Caminata coma.
A1: Avanzó, pará… hizo 4 metros más
A: Hizo en 8 segundos… 8 metros.
A1: Si, avanzó 4 metros más
A: No, qué cuatro metros más, avanzó 2 metros más.
A1: Ahh es verdad es verdad sí me confundí…
[…]
A1: Coma, luego… ¿en 8 segundos hizo 8 metros?
A: No no es así, porque o sea hasta acá hizo 4 segundos, después sigue y son 8 segundos pero en 8 segundos hizo 2 metros… Y ponemos 2 segundos a…
A1: ¿A?
A: A medio metro por segundo.
A1: ¿A medio metro por segundo?
D: Bueno vamos a corregir lo que salió.
A1: A medio metro por segundo.
A2: Y avanzó… pará.

Transcripción 19: frases correspondientes a la Tarea A5

En los diálogos que se producen entre las estudiantes de este grupo notamos que surge la idea de velocidad. La alumna que indica que Carolina reduce su velocidad en el tramo BC debe dar explicaciones a sus compañeras. Para ello, se refiere a las coordenadas de cada punto (B y C) y hace uso de la noción de proporcionalidad directa (implícitamente) para indicar lo que sucedería si la velocidad fuese constante (si duplico el tiempo, duplico la distancia recorrida). En intercambios posteriores la estudiante logra precisar que la velocidad se reduce a medio metro por segundo, aunque no explica esta noción a sus compañeras y no tenemos certezas de que la hayan comprendido.

A partir de ese momento, surge la discusión en torno a cómo interpretar el tramo constante CD:

> A3: ¿En dónde nos quedamos entonces? ¿En el C?
> D: Yo puse en el pizarrón el mismo gráfico que uds tienen, ¿a quién le falta terminar?
> A1: A nosotras.
> D: ¿Pero ya tienen la historia?
> A2: Maso.
> […]
> A1: Por segundos…
> […]
> A1: Dale chicas por segundos que se tienen que llevar las hojas.
> A: Pero no sé cómo es esto porque va para el costado pero no avanza ninguno.
> A1: Luego siguió derecho tres segundos más…
> A: Sin avanzar ningún metro.
> A1: Y capaz que es una … ponele
> […]
> A1: Esperen que le voy a preguntar a la seño porque no entiendo.
> A1: No me dijo nada me dijo que ahora lo vamos a corregir.
> D: Bueno a ver capaz que las historias que ya terminaron ayudan a los que todavía no saben qué escribir.

Transcripción 20: frases correspondientes a la Tarea A5

En este fragmento observamos que aparecen ideas contradictorias "se va para el costado pero no avanza ninguno", "siguió derecho tres segundos más", "sin avanzar ningún metro". No logran ponerse de acuerdo sobre qué es lo que efectivamente sucede en este tramo del recorrido de Carolina. Consultan con la docente pero no les da ninguna "pista" para poder continuar con la historia. Las estudiantes de este grupo detienen su narración para escuchar las producciones de sus compañeros en la puesta en común.

Destacamos en este momento la actitud de la docente frente a la consulta de las estudiantes. No otorga pistas sobre cómo deben interpretar el tramo CD. Les dice que las historias que elaboraron sus compañeros pueden ayudarlas a terminar la propia.

> D: Vamos a escuchar… Escuchamos las tres que ya están terminadas y después tenemos 5 minutitos más para que el que no terminó la termine y la entregue.
> […]
> D: Marcos lee primero.

Marcos: “El punto E muestra que Carolina estaba a 12 metros de su casa y tardó 13 segundos en llegar. Luego le faltaban 8 metros y tardó 11 segundos. Pero se ve que estaba cansada, se tomó un helado y siguió, pero ahí en 8 segundos estaba en su casa. Estaba anocheciendo y le faltaban 6 metros, pero decidió ir al supermercado. Cuando salió en 4 segundos estaba en su casa. Fin”
A4: ¿Qué va de abajo para arriba?
Marcos: No porque si era de abajo para arriba se iba alejando de su casa
A4: Y si tenía que irse alejando
Marcos: Bueno pero …
D: ¿La casa dónde está en A o en E?
Varios: En E.
D: ¿Marcos vos cómo lo sentiste?
Marcos: ¡En A!
A7: Salió de su casa.
D: Su casa ¿está en A o en E?
A5: Salió a caminar,
A6: No, volvía de caminar.
A7: Y volvía también.
A8: Salió y volvió.
D: ¿estaba volviendo de su casa?
D: Él hizo así ¿todos hicieron así?
Varios: ¡No!
D: ¿Cuál es la diferencia en cómo lo hicieron uds?
[inaudible]
D: Está bien, a ver Marina vos qué…
Marina: Ehh que dice que salió a caminar entonces para nosotras la casa estaba en el punto cero [inaudible].
A9: No porque podría haber salido y ahí marcabas la letra.
Marina: Ahí dice 0 metros recorridos y 0 segundos.
D: Entonces Uds, claro, atendiendo a que dice salió a caminar vos es como que ehh como dice Estanislao ¿que salió y está volviendo?
[Inaudible]
D: A ver otra historia.
José: Puse qué significa cada punto.
José: El punto E muestra que Carolina estaba a 13 metros de su casa, el D muestra que está a 8 metros de la misma, el C a 8 metros la diferencia entre el C y el D son los segundos el C: 8 seg D: 10 seg
A10: a 11
José: A 11 seg. El punto B está a 6 metros y el A a 0 metros.
D: Bien, había que inventar una historia con eso. A ver uds, Victoria…
Victoria: Carolina decidió salir a caminar. Cuando estaba atándose los cordones en la puerta de su casa pasó su amigo Marcos que le dijo […] Marcos siguió su recorrido y Carolina empezó a correr, no se distraía por nada estaba completamente concentrada en su caminata, porque se estaba preparando para la competencia estatal. Carolina era rápida, lograba recorrer en 4 segundos 6 metros, y en 8 segundos podía correr desde su casa a la casa de sus vecinos que quedaba a 8 metros, intentó tardar 7 segundos recorriendo la misma distancia pero no pudo, tardó 11 segundos. No le importó, siguió corriendo y jugó con su amiga Mili a ver quién corría 12 metros más rápido, Carolina se concentró y pudo hacerlo en 13 segundos.
Carolina volvió a su casa y se fue a dormir. Al otro día corrió la competencia y ¡salió 3era!
A8: ¿Salió cuánto?
V: Tercera.
A9: Pero igual te equivocaste porque [inaudible]

Hablan varios al mismo tiempo.

Transcripción 21: frases correspondientes a la Tarea A5

Del fragmento anterior podemos señalar que la docente conserva la actitud que manifiesta desde la Tarea N° 1, *no convalida de entrada las respuestas de los estudiantes*, devuelve las preguntas y promueve las explicaciones de parte de ellos. Estas características son algunas de las indicadas por Quaranta y Tarasow (2004) para mantener la incertidumbre y propiciar la validación por parte de los alumnos.

El discurso de Marina sobre la ubicación de la casa de Carolina tiene las características de una *explicación d*e acuerdo con Balacheff (2000) porque para establecer la verdad de una proposición se basa en sus propias reglas y conocimientos.

El último fragmento de la transcripción es el que presentamos a continuación. En el mismo, el grupo seleccionado de estudiantes retoma y completa su relato sobre el paseo de Carolina.

A2: Ahora podemos poner ¡ey! Podemos poner Carolina se detuvo, se quedó en el café tardando …
A: No sé, 4 segundos adentro del café luego salió…
D: Ahora escuchen, Gustavo escuchá.
A9: Carolina iba a la casa del abuelo para pasar un fin de semana. Él le pidió que en el camino pase a comprar leche, cupcakes, carnes y unos medicamentos que necesita. En la panadería compro la leche y los cupcakes que está a 6 metros y 4 segundos de su casa. Luego pasa a comprar la carne que queda a 8 metros y 8 segundos después pasa a la farmacia a comprar sus medicamentos que está a 3 segundos de la carnicería. Finalmente llega a la casa del abuelo que queda a 12 metros y 13 segundos de donde partió.
D: A 12 metros 3 segundos de ¿su casa?
A9: Sí.
A10: Pero puede ser la C y la D que están en el mismo en el mismo en los mismos metros pero más segundos
D: Puede ser…
A10: el lugar depende de dónde salís
D: Claro, si y que son los lugares donde uds la situaron que es la carnicería ¿y?
A9: La panadería y la farmacia
D: Ah la panadería y la farmacia que están en la misma distancia nada más que tienen una diferencia en segundos. Bueno, a ver nos tomamos unos minutitos para terminar y entregar eso.
Varios: ¡Sí!
A2: Bueno dale chicas […]
Luciana: Puse ella paró unos segundos para comprar una botella de agua tardando unos cuatro segundos.
[Dicta a sus compañeras y terminaron de escribir la historia]
Los estudiantes entregan sus historias al mismo tiempo que la docente reparte las libretas. Finaliza de este modo la clase.

Transcripción 22: frases correspondientes a la Tarea A5

En este último fragmento notamos dos cuestiones de interés. A partir del último relato leído en la puesta en común, surge la duda de un estudiante en torno a la ubicación de los puntos C y D, teniendo en cuenta que están “en los mismos metros pero más segundos”. El grupo que leyó ubicó en uno de esos puntos la carnicería y en otro la farmacia. Pero, si los dos puntos se ubican a la misma distancia de la casa de Carolina ¿podrían tratarse entonces de lugares distintos? Realizamos una reflexión sobre este aspecto en el análisis sobre la Tabla N° 30. Pensamos que dado que surge la duda sobre este aspecto en la clase, una posibilidad hubiese sido plantear como tarea el bosquejo del plano sobre el desplazamiento realizado por Carolina en su paseo.

La segunda cuestión que nos interesa es el modo en que el grupo de estudiantes que seleccionamos logra finalizar su relato, que se había detenido por la ausencia de un criterio común para interpretar el tramo CD. Ahora, luego de escuchar las historias de sus compañeros, interpretan este tramo como una “pausa” en el paseo de Carolina, que se detiene a comprar una botella de agua.

De este modo, se pone en evidencia el papel de las interacciones para nutrir las ideas propias, para posicionarse de otra manera frente a la tarea y para comprender aquellas cuestiones que habían quedado pendientes en el trabajo hacia el interior del grupo (Sadovsky, 2005 y Zack y Graves, 2002).

4.2 SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

El estudio que realizamos de las tareas introductorias nos posibilita identificar algunas características de los estudiantes del cuso y de la docente. Los primeros, se muestran en general, participativos y comprometidos con la resolución de las tareas planteadas. La docente, por su parte, demuestra en las cinco tareas la misma actitud frente a las consultas de los alumnos: mantiene la incertidumbre, devuelve las preguntas, no convalida de entrada las respuestas. Su gestión de la clase presenta características similares a las indicadas por Quaranta y Tarasow (2004) y suele optar por la fase de validación de Margolinas (1992), otorgando la responsabilidad a los estudiantes para argumentar a favor o en contra de una determinada respuesta.

En relación con el papel del contexto, podemos decir que en general favoreció la resolución de las tareas y posibilitó, en algunos casos, la utilización de conocimientos previos escolares en las Tareas N° 1, 2 y 3 y extraescolares, como en el caso de la Tarea N° 4 y 5. No obstante, en algunas situaciones se pone de manifiesto que el contexto también puede generar confusiones. Esto se observó en el caso de la Tarea N° 1, en la que los estudiantes utilizaban la terminología y convenciones geográficas para mencionar pares ordenados. En la Tarea N° 5, convivieron al menos dos formas de interpretar el gráfico (como gráfico distancia-tiempo y como mapa o plano de desplazamiento). Creemos que en este caso, se podría añadir a la consigna la elaboración del plano (o el plano terminado) que describa el recorrido de Carolina para trabajar la relación entre las dos representaciones.

Finalmente, en lo que concierne al rol de las interacciones en el aula notamos que se pone de manifiesto en la mayoría de las transcripciones que los aportes de los otros ponen en tela de juicio los propios, promoviendo la revisión y reflexión sobre los propios procedimientos y los ajenos.

Se observa cómo las intervenciones de los pares ayudan a descubrir el error e intentar superarlo. Sadovsky (2005) hace un análisis similar sosteniendo que un procedimiento puede actuar como marco de control sobre los demás. Se trata de momentos en los cuales los alumnos reflexionan sobre sus propias producciones y esto es fundamental en el aprendizaje matemático ya que como afirman (Quaranta y Wolman, 2003) el mismo se basa en

> …la reflexión acerca de lo realizado: los procedimientos empleados, los conocimientos involucrados deben convertirse en objeto de reflexión. Los intercambios con los compañeros y el docente son aquí cruciales: es decir, las explicitaciones, las confrontaciones y las justificaciones entre los alumnos constituyen un factor de progreso para todos. Permiten ir construyendo el camino que los llevará a validar el trabajo que se hace. Esta actividad reflexiva enriquecerá, recíprocamente, las futuras resoluciones de todos los alumnos. (p. 193-194)

A modo de conclusión parcial de nuestra indagación, podemos decir que, dada las características de la docente del curso seleccionado, nos encontramos en condiciones apropiadas para iniciar el trabajo algebraico por medio de una vía funcional con el Problema de los gogos. El tipo de gestión de la clase posibilita numerosos intercambios entre los estudiantes y la posibilidad de que sean ellos mismos los que corrijan sus errores, validen y den explicaciones sobre sus respuestas. Consideramos en esta aula se genera un ambiente propicio para el tipo de actividad matemática que nos interesa y las condiciones son asimilables a lo planteado por Chevallard y otros (2000).

CAPÍTULO 5
El Problema de los gogos

En este capítulo nos abocamos al estudio de la *tarea principal* de nuestra propuesta de enseñanza. Se trata de la primera tarea del Bloque B, denominada Problema de los gogos.

El capítulo cuenta con una primera sección dedicada a describir la implementación de la tarea en el aula (Sección 5.1), especialmente en lo que refiere al enunciado de la misma. Describimos en esta parte algunas respuestas esperadas. En la segunda sección, nos abocamos al análisis de lo sucedido en el aula en relación con la tarea (Sección 5.2). Nos centramos en el estudio de diversos episodios, interesantes desde el punto de vista didáctico. Luego, realizamos una reflexión sobre el papel de dos sujetos durante la resolución de la tarea (un estudiante y la docente). Finalmente, en la tercera sección, recuperamos nuestras expectativas iniciales y las comparamos con lo sucedido en la clase (Sección 5.3).

5.1 IMPLEMENTACIÓN DE LA TAREA

Recordemos en primer lugar, las características de la primera parte de la tarea:

Primera parte: Trabajo en parejas.

La docente les cuenta a los estudiantes que Pablo y Lucas son hermanos. Su abuela les regaló para Navidad una caja con igual cantidad de gogos para cada uno (les muestra las cajas y las mueve para que sientan el ruido de los gogos). Pero Lucas ya tenía tres gogos de antes.

Luego, los invita a que expresen por escrito lo que saben sobre el número de gogos que tienen Pablo y Lucas. Puede hacer circular las cajas (deben estar bien cerradas y les dice a los alumnos que no deben abrirlas).

Imagen Nº 15: Soportes materiales para el Problema de los gogos (Tarea B1)

Al momento de presentar la tarea la docente expresa lo siguiente: *"Vamos a suponer que estas cajas pertenecen a un tal Pablo y un tal Juan"* (frase 3, Transcripción de Clase 5 en el Anexo 4). Un estudiante dice *"Pablo y Juanjo"* (frase 8, Transcripción de Clase 5 en el Anexo 4) y la docente acepta la modificación en el nombre del segundo niño.

Por lo tanto, de ahora en adelante, la tarea consistirá en expresar el número de gogos de Pablo y Juanjo. El objetivo es introducir el lenguaje simbólico como herramienta *necesaria* para resolver la situación y expresar la relación entre las dos variables. Una expresión posible es la siguiente: $P = J + 3$, donde P y J representan el número de gogos de Pablo y Juanjo, respectivamente.

Si bien esperamos que en principio surjan respuestas numéricas, el propósito es que los alumnos identifiquen características generales a partir de los ejemplos propuestos y expresen por escrito *la relación* entre el "número de gogos de Pablo" y el "número de gogos de Juanjo".

El hecho de acompañar el enunciado verbal con los *elementos concretos* (las dos cajas y los tres gogos) y promover la *circulación de dichos objetos* entre los alumnos, podría generar que algunos estudiantes intenten estimar la cantidad de gogos utilizando algunas acciones como mover las cajas o sopesarlas, como lo describen Carraher et al. (2013) en el problema de los sobres de figuritas.

La decisión didáctica de considerar gogos para *contextualizar* el problema se corresponde con nuestra intención de utilizar contextos cercanos a los estudiantes que favorezcan su interés y participación en las tareas planteadas.

A priori, consideramos que durante la resolución de la tarea propuesta los niños podrían proponer valores numéricos (*respuesta aritmética*), identificar la relación entre las dos variables y expresarla en lenguaje simbólico (*respuesta algebraica*). Como señalamos en el Capítulo 3, no tenemos certeza sobre el tipo de acompañamiento del docente que requerirán los estudiantes para acceder el segundo tipo de respuesta.

5.2 ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA TAREA

El problema de los gogos se presenta a los alumnos en forma oral y se trabaja en forma colectiva mediante un debate que es organizado por el docente. En los intercambios surgen diversos *enunciados de interés didáctico* (Buffarini, 2005) que recuperaremos en esta sección para profundizar en su estudio. Organizamos la información desde tres focos de interés que determinarán los apartados de esta sección:

1. *Intercambios producidos en la clase:* Identificamos momentos cruciales, desde el punto de vista didáctico, durante el desarrollo de la tarea que se ordenan temporalmente. El estudio se centra en los intercambios entre los estudiantes y el docente.
2. *Intervenciones de José*. Consideramos el caso particular de un estudiante porque juega un rol significativo en relación con normas y prácticas matemáticas que se ponen en juego en la clase estudiada.
3. *Gestión de la clase por parte del docente*. En este punto no centramos en el rol del docente y en sus intervenciones durante la clase, especialmente en relación con las fases de conclusión (Margolinas, 1992).

Entendemos que el hecho de observar una clase e identificar los *puntos de interés* sobre la misma implica realizar un *recorte* de la realidad. Elegimos en qué detenernos de acuerdo con los objetivos de nuestra investigación y los referentes teóricos considerados. Los tres focos de atención mencionados anteriormente implican realizar "cortes" de diferente tipo en la clase observada. El primer punto, *el estudio de los intercambios*, se realiza a partir de una serie de cortes transversales de determinados episodios durante la resolución del problema. Mientras que los dos puntos siguientes, las *intervenciones de José y* la *gestión de la clase por parte del docente*, implican *cortes longitudinales* sobre lo sucedido en la clase. Si nos imaginamos observando la clase desde una cámara de video, para el primer foco de atención debemos *fragmentar* ese video para profundizar el análisis de cada "porción". En cambio, para desarrollar los focos de interés siguientes, debemos "hacer zoom" y agregar "definición" sobre las actuaciones de determinados sujetos (docente y José) durante *el transcurso de toda la clase*. Sintetizamos la organización del análisis en la siguiente tabla:

Tabla Nº 31: Estudio de los intercambios sobre el problema de los gogos							
Análisis de episodios						**Análisis de casos**	
Producción de nuevos problemas	Desacuerdos en el debate colectivo	Revisión de la respuesta propia	Razones para explicar el patrón	Discusión sobre cantidad de soluciones	Utilización del lenguaje simbólico	Intervenciones de José	Gestión de la clase por parte del docente

5.2.1 Análisis de episodios sobre los intercambios producidos en la clase.

Los episodios seleccionados para realizar este análisis se presentan ordenados de acuerdo a su ocurrencia temporal. Titulamos cada momento con una referencia directa al hecho principal que analizamos en el mismo (como puede observarse en la Tabla Nº 31).

Primer episodio: Producción de nuevos problemas

El interrogante del problema ("*¿Cuántos gogos tiene Juanjo y cuántos gogos tiene Pablo?*") moviliza rápidamente a los alumnos a buscar una respuesta. Mientras un grupo vuelve públicas sus dudas, otros discuten con su compañero de banco en voz baja. Transcribimos a continuación las intervenciones que tuvieron lugar en el debate colectivo:

9. D: Juanjo, vamos a ponerle Pablo y Juanjo. . . que tienen la misma cantidad, y Pablo ganó tres gogos más en el recreo. La pregunta es la siguiente, primero para pensarla cerramos la boca, no digo lo primero que se me ocurre. Cierro un poquito la boca y pienso. Después sí de pensarlo, levanto la mano y digo mi opinión. ¿Cuántos gogos tiene Pablo y cuántos gogos tiene Juanjo?
10. José: ¿Contando esos o no?
11. *La docente les llama la atención para que no digan lo primero que se les ocurre. Vuelve a leer el enunciado del problema.*
12. José: Pero no sabemos a quién le ganó Pablo.
13. A1: ¡yoyoyo!
14. A2: No, no entiendo.
15. *La docente les dice que levanten la mano. Vuelve a repetir el problema.*
16. JOSÉ: Capaz que le ganó a Juanjo.
17. A1: Claro, capaz que se los ganó a Juanjo.
18. A2: Pero pueden ser varias posibilidades.
19. D: Bueno, a Juanjo no se los ganó porque Juanjo sigue teniendo la misma caja con la que vino a la escuela, que tiene la misma cantidad que la que tiene Pablo. Entonces a Juanjo no se los ganó.
20. José: No los sacó de la mochila todavía.

21. D: Entonces a Juanjo no se los ganó. Bien, esa es una duda descartada. La pregunta es: ¿Cuántos gogos tiene Juanjo y cuántos gogos tiene Pablo?
22. José: ¡Yo!
23. A2: Ah, pero si no sabemos…
24. D: Nadie me dice cantidades todavía, tienen que tener la mano levantada.

Se escucha alumnos hablando entre ellos (no dirigiéndose hacia la maestra)

25. A3: ¿Pablo es el que empezó por la derecha?
26. A5: Dividiendo en dos…
27. A3: ¿Pablo es el que empezó por la derecha?
28. A4: Pueden ser muchas posibilidades…
29. D: Bueno, levanto la mano. Ahora sí escucho, shhh, levanto la mano. Vos ya aclaraste tu duda ya está *(se dirige a José).* A ver Ana.

Transcripción 23: frases 9-29 de la Tarea B1

En las interacciones anteriores de los alumnos con la docente observamos que no todos los estudiantes realizan la misma lectura de la situación. Si nos centramos por un momento en el caso particular de José, notamos que sus planteos hacen referencia a información que no se *explicitó* en la situación problemática enunciada:

- ¿Para indicar cuántos gogos tiene cada uno deben contarse los que están dentro de las cajas o no?
- ¿A quién le ganó Pablo los tres gogos en el recreo (quizás a Juanjo)?

La docente decide no responder directamente a la primera cuestión, sino repetir nuevamente el enunciado del problema. Luego, cuando el alumno plantea que no sabe a quién le ganó Pablo, la maestra repite por tercera vez el enunciado. No obstante, el estudiante insiste con su inquietud y plantea la posibilidad de que se los haya ganado a Juanjo. La docente aclara públicamente este interrogante, a lo que este estudiante agrega información adicional que posiblemente lo ayuda a *imaginar* completamente la situación (No se los ganó a Juanjo porque Juanjo "*no los sacó de la mochila todavía"*).

Los planteos de José tienen sentido y son pertinentes si nos detenemos en el enunciado del problema. Es cierto que esa información no se explicita y que podrían dar lugar a diferentes interpretaciones (a diferentes problemas). La docente debe *tomar decisiones didácticas* en el momento, que requieren, posiblemente, analizar cuestiones no previstas.

En este caso en particular, entendemos que surgen otras alternativas de respuestas en relación con los interrogantes de José. Respecto al primero de ellos, por ejemplo, podría haber optado por explicitar su propia interpretación del problema ("para responder al problema *se cuentan* los gogos que están dentro de las cajas") o plantear la posibilidad de analizar las dos alternativas ("como el problema no lo aclara, *pensemos* en las *dos opciones*: qué podemos decir si los contamos y qué, si no los consideramos"). En relación al segundo interrogante, podría haber optado por no responderlo (como sucedió con el primero) o sugerir que se analicen las distintas posibilidades:

- Pablo gana los tres gogos a Juanjo.
- Pablo gana dos gogos a Juanjo y un gogo a otro niño.
- Pablo gana un gogo a Juanjo y dos gogos a otro/s niño/s.
- Pablo gana los tres gogos a otro/s niño/s.

El episodio de clase transcripto muestra que los alumnos son capaces de generar *nuevos* *problemas* a partir de un planteo inicial del docente y que sus interpretaciones no siempre se *ajustan* a lo previsto. Los alcances de una tarea no pueden ser completamente especificados con anterioridad porque dependen de las características de los niños, de sus interacciones y de la gestión de la clase por parte del docente (Zack y Graves, 2002; Sadovsky, 2005).

En la sección 2.1.1 ubicamos este problema en el ambiente 4 desde el punto de vista de Skovsmose (2000), es decir, como un escenario de investigación con referencia a una semirrealidad. Tal como lo plantea este autor, "la semirrealidad no se usa como una fuente para la formulación de ejercicios sino como una invitación para que los estudiantes exploren y expliquen" (p. 118).

Destacamos de lo anterior, el papel relevante que juega el docente (sus decisiones e intervenciones instantáneas) en relación con habilitar o deshabilitar la reflexión en torno a los nuevos problemas que emergen en el marco de las interacciones. Acordamos con Sadovsky (2005) en el sentido de que "alrededor del enunciado del problema se organizan una cantidad muy rica de actividades que no están 'contenidas' en dicho enunciado y que son totalmente dependientes de la gestión que realice el docente a partir de las primeras interacciones de los alumnos con el problema" (p.89).

Los planteos que realiza José posiblemente "descolocan" al docente porque se encuentran fuera de sus previsiones. Estas son algunas de las situaciones que evidencian que en el aula no sólo los estudiantes aprenden, sino también el docente, dado que en muchas ocasiones sus conocimientos y su rol se transforma durante el proceso de interacción (Zack y Graves, 2002). Si el mismo docente debe plantear esta tarea a otro grupo de estudiantes, quizás se sienta con mayor seguridad para recibir y problematizar este tipo de cuestionamientos de los alumnos, porque ya tuvo una experiencia previa en torno a este problema.

Otro aspecto que interesa analizar son las intervenciones del resto de los estudiantes a partir de los planteos de José. Observamos que otro alumno "se suma" o "se apropia" de lo que sugiere su compañero ("*claro, capaz que se los ganó a Juanjo")* y que un tercer estudiante interviene con una expresión ("*Pero pueden ser varias posibilidades*") que no podemos determinar si sigue la idea de José (y piensa en las distintas interpretaciones del problema que describimos antes) o se refiere a las soluciones que pueden obtenerse interpretando el problema del modo que lo hace la docente.

El planteo de la tarea en forma oral puede favorecer la explicitación de razonamientos o ideas de aquellos estudiantes que son más extrovertidos. El resto de los alumnos, si están atentos a las interacciones públicas, pueden juzgar lo que plantea algún compañero y considerarlo para construir y/o revisar sus propias estrategias de resolución del problema. En este sentido, recuperamos los aportes de Zack y Graves (2002) cuando señalan que las ideas de cada uno *se llenan* con diversos grados de "otredad" y de "propiedad". Bajtín (2011) afirma, en el mismo sentido, que nuestro pensamiento "surge y se forma en el proceso de interacción y controversia con ideas ajenas" (p. 56).

Segundo episodio. Desacuerdos en el debate colectivo.

Como se pone en evidencia en la Transcripción 23 del episodio anterior, el enunciado del problema de los gogos da lugar a planteos diversos por parte de los estudiantes. Uno de ellos parece realizar un cálculo para determinar la respuesta al problema: "*Dividiendo en dos…*" (frase 26, Transcripción 23), pero no logramos reconstruir su razonamiento.

Otro alumno pregunta dos veces si la caja de Pablo es la que comenzó a circular por el lado derecho del aula "*¿Pablo es el que empezó por la derecha?*" (frases 25 y 27, Transcripción 23). Estas intervenciones muestran que el estudiante centra su atención en los soportes materiales que acompañan al enunciado de la situación (cajas con gogos), en lugar de considerar los datos que aporta el problema. La docente no responde el interrogante del alumno.

La primera estudiante que utiliza una respuesta *de tipo aritmético* es Ana. Esta estudiante expresa que Pablo tiene 11 gogos y Juanjo, 8. La docente anota este resultado en una tabla en el pizarrón (cuyas columnas son "Cantidad de gogos de Pablo" y "Cantidad de gogos de Juanjo"). Veamos los intercambios sucedidos en torno a esta respuesta:

29. D: […]A ver Ana:
30. Ana: 11.
31. D: ¿Quién?
32. Ana: Pablo.
33. D: Pablo tiene 11.
34. A6: ¿Cuál es el que empezó por el lado de José?
35. D: Ehh no, no porque como eran iguales las cajas pudo haber sido la de Pablo o la de Juan.
36. A7: Pero qué ¿tienen la misma cantidad?
37. D: 11 tiene Pablo y ¿Juanjo? Shhh *(dirige la pregunta a Ana)*
38. Ana: Ehh, 8.

Transcripción 24: frases 29-38 de la Tarea B1

En este fragmento, un alumno consulta cuál de los dos (si Pablo o Juanjo) es el que empezó por el lado de José, haciendo referencia a las cajas de gogos que circulan (frase 34). La docente decide aclarar la situación (frase 35). Otro estudiante pregunta si los dos tienen las mismas cantidades (frase 36). La docente no responde a esta pregunta (quizás porque no la oye) y continúa interactuando con Ana primero, y luego con otros estudiantes que proponen otras alternativas de soluciones (*respuestas de tipo aritméticas*). Durante ese intercambio, José se dirige a su compañero de banco y exclama: "*¡Ehh! ¿De dónde sacaron esas cantidades*?" (frase 45, Transcripción de Clase 5 en el Anexo 4). No se escucha ninguna respuesta a su pregunta.

La docente otorga la palabra a una alumna llamada Luciana que plantea si se puede tener en cuenta *el peso de los gogos* (frase 58, Transcripción 25). A partir de ese momento comienzan a intervenir otros estudiantes.

58. Luciana: ¿Teniendo en cuenta lo que te parece que **pesan?**
59. D: Vos tené en cuenta lo que quieras.
60. Luciana: Porque por ahí puede tener uno más que el otro.
61. Nicolás: Perdón, porque hay gogos más grandes que otros.
62. A1: Son más…
63. A2: ¡Devuelvan las cajas!
64. D: A ver…
65. José: Pero si no sabés cuántos tenían, no se puede.

66. A1: Sí se puede pero hay muchas posibilidades.
67. A: Yo, yo...
68. D: Sí puede ser cualquier número.
69. Mariana: Y puede ser 80 y 83.
70. D: Esa es una posibilidad y dice Luciana …
71. A: Yo, yo...
72. A1: Al revés seño, es 83 y 80 *(no logramos identificar si se trata de Luciana)*
73. José: Seño, ¿es a tirarle a pegar?
74. D: Ajá.
75. José: ¡Ahh!
76. A: Y sí, son muchas posibilidades.
77. A1: Yo quiero 11 y 8 no 12 y 13.
78. D: Es arriesgar.
79. D: Ehh, ¿al revés Lu? ¿83 y 80?
80. A: Yo, Seño, ¡yo!
81. D: Luciana..., yo no sé si escucharon. Luciana me preguntó si tenía que tener en cuenta el peso. yo le dije que tuviera en cuenta lo que ella necesitara tener en cuenta. En principio en los datos que yo les di no dije nada sobre el peso y un compañero contestó que pueden ser algunos más pesados y otros más livianos. El dato que yo les dí es que tenían la misma cantidad.

Transcripción 25: frases 58-81 de la Tarea B1

Podemos notar algunos aspectos interesantes que surgen a partir de la intervención de Luciana (frase 58). Por un lado, instala en la clase otro tipo de mirada sobre la situación: antes de arriesgar una *respuesta aritmética*, consulta acerca de una posible *variable* a tener en cuenta (el peso de los gogos). Parecería que Luciana se preocupa por establecer *cuál es la variable* a tener en cuenta para realizar su estimación de manera acertada (aunque la niña no utilice el término “variable”).

Si pensamos en nuestro interés por desarrollar actividades de modelización con los estudiantes, la intervención de Luciana cobra especial relevancia porque apunta a qué variables debemos tener en cuenta para dar una respuesta al problema (peso de los gogos, tamaño de los gogos, tamaño de las cajas, etc.).

Sin embargo, nos quedan algunas dudas acerca de la naturaleza de su interrogante. Podría ser que la alumna se refiera a la necesidad de utilizar la variable peso con algunos de los objetivos siguientes:

- para intentar acertar una respuesta particular (o mejorar la estimación) a partir de considerar un *peso promedio* de un gogo (sopesando las cajas, por ejemplo).
- para indicar que hay varias posibilidades de solución (considerando que los gogos pueden tener distintos pesos).
- para mostrar que las cajas podrían diferir en la cantidad de gogos que contiene cada una (asumiendo que deben tener el mismo peso, en lugar de la misma cantidad).

A raíz de la segunda intervención de la alumna “*Porque por ahí puede tener uno más que el otro*” (frase 60, Transcripción 25) podría estar refiriéndose al tercer aspecto que mencionamos. No obstante, observamos que luego propone una solución particular que considera que las dos cajas contienen lo mismo. No podemos determinar con precisión de qué manera influye su atención en el *peso de los gogos* en la respuesta que sugiere, porque los valores que propone (80 y 83) no consideran por ejemplo, el tamaño de las cajas utilizadas.

Por otro lado, a partir de la intervención de Luciana, otro estudiante (Nicolás) irrumpe diciendo "*Perdón, porque hay gogos más grandes que otros*" (frase 61, Transcripción 25). Su planteo puede interpretarse de diversas formas: podría querer demostrar su acuerdo con el de su compañera (aunque su discurso apunta a otra variable que es el *tamaño de los gogos*) o podría estar proponiendo precisamente la consideración del tamaño de los gogos como una *nueva variable* a tener en cuenta, o bien unifica las variables considerando que a mayor tamaño corresponde mayor peso, entre otras. La docente interpreta que el alumno se refiere al primer aspecto mencionado cuando dice: "*un compañero contestó que pueden ser algunos más pesados y otros más livianos*" (frase 81, Transcripción 25).

Entre las interacciones que se desencadenan a raíz del planteo de Luciana, vemos que José insiste en su inquietud acerca de cómo se obtienen las respuestas aritméticas que indican sus compañeros "*Pero si no sabés cuántos tenían, no se puede*" (frase 65, Transcripción 25). En un primer momento, un compañero le responde que pueden existir varias posibilidades. La docente reafirma esta idea con una expresión que podríamos cuestionar por falta de precisión "*Sí, puede ser cualquier número*" (frase 68, Transcripción 25), pero también podemos interpretar desde su intención de "no dar pistas" para condicionar la resolución de los estudiantes.

No obstante, José vuelve a intervenir más adelante pero esta vez dirigiéndose directamente a la docente "*Seño, ¿es a tirarle a pegar?*" (frase 73, Transcripción 25). La docente le responde afirmativamente y otro estudiante repite que pueden ser varias alternativas de solución. Creemos que José observa *con preocupación* que del enunciado del problema no se deducen directamente las respuestas que dan sus compañeros. Si bien en el momento en el que ocurren las interacciones podría interpretarse que este alumno no comprende *qué es lo que hay que hacer*, desde nuestro punto de vista, creemos que su mirada es más general que la del resto. Podría ser que perciba que el problema sólo establece *relaciones entre dos variables* y este aspecto también nos interesa desde el punto de vista de la modelización.

Destacamos en este caso el papel que juega el discurso del otro en el punto de vista personal. José no se cansa de buscar razones para poder entender *cómo están razonando* sus compañeros sobre el problema para llegar a sus *respuestas*. A pesar de que partieron todos del mismo enunciado, no todos los interpretan de la *misma manera*. Se pone de manifiesto en este caso que "un tipo de interacción sostenida para el conjunto puede ayudar a los que todavía no entraron en un cierto juego matemático, a construir una posición de búsqueda de razones, necesaria para producir conocimiento" (Sadovsky, 2005, p. 89). Si bien José parece haber comprendido la dinámica de la clase después del intercambio anterior, otro estudiante cuestiona en dos oportunidades posteriores a sus compañeros si "le tiran a pegar" con las respuestas que dan, demostrando que no se convenció (o no prestó atención en su momento) con las explicaciones que recibió José.

Los cuestionamientos de algunos estudiantes acerca de cómo se obtienen las *respuestas aritméticas* que brindan sus compañeros manifiesta que posiblemente no están familiarizados con tareas de este tipo, donde aparentemente hay *varias respuestas posibles* y no está claro *qué calculo* realizan para obtenerlas. Este es el espacio en el que se producen "rupturas" desde el punto de vista de Sadovsky (2003) entre las prácticas aritméticas y algebraicas. En este caso en particular creemos que el problema invita a revisar algunas *normas del trabajo* *matemático* en el aula. Es probable que la acción de *elegir* un número, que se utiliza en esta primera parte del problema (se selecciona un número para la cantidad de gogos de Pablo y se halla la correspondiente cantidad de gogos de Juanjo) no haya sido una acción frecuente para dar respuestas a problemas matemáticos en la experiencia escolar de estos niños.

A partir de la descripción realizada notamos que aparecen *enunciados*, según la terminología de Batjín (2011), de diferente naturaleza en torno a la situación problemática planteada por la docente. Según las características de cada una de ellas, proponemos las siguientes categorías:

- *De naturaleza concreta:* incluimos en esta categoría a aquellas intervenciones de los estudiantes que priorizan los soportes materiales (las cajas concretas con gogos) por sobre los datos que aporta el problema. Por tal motivo, insisten en poder distinguir cuál es la caja de Pablo y cuál la de Juan, en lugar de considerar el dato de que tienen la misma cantidad.

- *De naturaleza aritmética*: adoptamos esta denominación de Buffarini (2005) para considerar aquellas respuestas que señalan valores numéricos particulares para la cantidad de gogos de Juanjo y Pablo, sin intentar explicitar las relaciones que establece el problema.

- *De naturaleza relacional- funcional:* incluimos aquí a las intervenciones que sugieren que el problema admite *varias soluciones*, a los cuestionamientos sobre los *modos de obtener* las soluciones particulares y a las propuestas de *variables* a considerar para resolver la situación.

Estos distintos tipos de enunciados constituyen diferentes miradas que se dirigen hacia un mismo fin (resolver la situación) y que tienen lugar en el debate colectivo. Creemos que los diversos aportes que se producen en esta clase invitan a revisar la interpretación personal del problema y en muchos casos, la enriquecen. Por ejemplo, los enunciados que corresponden al tercer tipo (relacional-funcional) resultan más interesantes, desde el punto de vista matemático, que las dos primeras categorías (concreta y aritmética). Las intervenciones que proponen variables a considerar o la indicación de que existen muchas soluciones podrían interpelar a aquellos alumnos que dan respuestas aritméticas o concretas. El hecho de que haya compañeros que manifiesten razonamientos totalmente diferentes al propio obliga al menos, a intentar comprender *cómo* está pensando *el otro*.

También sucede otro tanto en el sentido contrario: los cuestionamientos acerca del modo de obtener las soluciones particulares no hubiesen tenido lugar si no hubiesen surgido respuestas de este tipo. Por lo tanto, la divergencia de voces en el debate provoca el avance colectivo en la búsqueda de razones para lograr un criterio común y resolver finalmente la situación. Tal como lo plantea Batjín (1986 en Zack y Graves, 2002) la diferencia sirve como un mecanismo de pensamiento, dada la función dialógica del lenguaje que permite el desacuerdo y las múltiples voces. En nuestro caso particular, se muestra que la heterogeneidad de puntos de vista contribuye a iniciar un camino para modelizar la situación.

Tercer episodio: Revisión de la respuesta propia

En este apartado analizaremos el modo en el que un alumno, Gerónimo, percibe que debe revisar su respuesta al observar las de sus compañeros. Esto sucede mientras la docente se encuentra escribiendo las respuestas particulares que le dictan algunos alumnos. Consideremos el siguiente fragmento de lo sucedido en la clase:

83. A1: Seño, yo calculé mal el mío ¿me lo podés borrar?
84. D: A ver, ya vamos ya vamos, por supuesto… Sí, Mariana.
85. Mariana: Pablo 24…
86. D: Ajá.
87. Mariana: Y Juanjo 21.
88. D: ¿Venti?
89. Mariana: 1.
90. A: Mariana ¿le tiraste a pegar?
91. Mariana: Sí.
92. D: José.
93. José: Pablo 9 y Juanjo 6.
94. A: Ése iba a decir yo.
95. A1: Le tiraste a pegar, ¿no es cierto?
96. A2: Pablo 6 y Juanjo 3.
97. D: Bien, ahí llego. Gerónimo, ¿por qué vos decís que te equivocaste?
98. Gerónimo: Porque hice mal el cálculo...
99. D: A ver…
100. Gerónimo: Porque pensé que como decía que coleccionaron juntos, pensé que Pablo y Juanjo hacían 5 y 5, entonces se sumaban… eran 10 y 3 que ganaba Pablo, hacían 13.
101. D: Bien, ¿Cuál es el tuyo?
102. Gerónimo: 13 y 5.
103. Todos: 13 y 5.
104. D: ¿Y por qué esto está mal, entonces?
105. Gerónimo: Porque…
106. D: ¿Cuánto te tiene que dar?
107. A: Tienen que tener diferencia de 3.
108. A1: Porque ahí hay 8 cositos de diferencia.
109. D: Ajá. ¿Eso es lo que estás diciendo, lo que dicen las chicas?
110. Gerónimo: Si.
111. D: Bien, entonces ¿qué número tendría que escribir acá?
112. Gerónimo: 10.
113. A1: Eso es lo que iba a decir yo.
114. Varios: O cambiaría el otro.
115. D: ¿O? Dejenlo a Gerónimo decidir porque él está corrigiendo su posibilidad. A ver, ¿o…?
116. *(Silencio)*
117. D: 13 ó 10, está bien eso. Sino lo que dicen las chicas es si vos dejás un 5 acá ¿cuánto tendrías que tener?
118. Gerónimo: Ah, 8.
119. Varios: 8.
120. D: Esa es la otra posibilidad. Porque como están diciendo también la diferencia tiene que ser ¿cuánto?
121. Varios: De 3.
122. D: ¿Quién dijo 11 y 8?
123. Ana: Yo.
124. D: Ana. La diferencia ¿cuánto es?

125. Ana: 3.

Transcripción 26: frases 83-125 de la Tarea B1

Si centramos nuestra mirada en la explicación (muy clara) que da el alumno sobre su razonamiento, notamos que su primera respuesta (13 y 5) responde a una lógica determinada y que podría aceptarse como una *posible interpretación* del enunciado del problema. Lo único que podría cuestionarse es que indica esos valores para que la docente los complete en las columnas que dicen Pablo y Juanjo (en ese orden).

Para este estudiante resultó clave la confrontación de respuestas que se escribieron en el pizarrón. Sin las mismas, no podría haber identificado la suya como "diferente" de las demás y, lo más importante, no habría tenido la necesidad de revisarla y poner en palabras su razonamiento. Este hecho concuerda con lo señalado por Sadovsky (2005):

> …la tarea de analizar los distintos procedimientos hace posible (seguramente entre muchos otros matices) considerar la propia producción como marco para analizar y controlar otras, abrirse a nuevos problemas que sólo pueden venir de la mano de quien pensó lo mismo "de otra forma", poner el propio trabajo en pie de igualdad con otros para realizar una confrontación que resulta clarificadora. […] algunos niños encuentran los errores de ciertos procedimientos haciéndolos funcionar y otros, los menos fuertes en su vínculo con la matemática, encuentran en esta tarea una oportunidad de comprender "de qué se trata". (p. 73-74)

Por otra parte, dado que su explicación tiene sentido y concuerda con el enunciado del problema, también constituye una oportunidad para plantear a todos nuevos interrogantes que sigan la línea de razonamiento del compañero, es decir, analizar el problema original *si lo interpretamos del modo en que lo hizo Gerónimo*. Nuevamente, aclaramos que somos conscientes que la docente debe seleccionar (muy rápidamente) con cuáles de los problemas que surgen en la clase se quedará y cuáles descartará o dejará para más adelante, atendiendo, entre otras cosas, a sus objetivos, tiempos disponibles y anticipaciones realizadas en torno a la tarea.

Retomando la explicación de Gerónimo, observamos en el fragmento anterior que intervienen otras alumnas que hacen referencia a que la diferencia entre los dos valores debe ser tres. Esto no significa que Gerónimo no se haya dado cuenta de esto (al momento de corregir su respuesta) sino que, posiblemente, sus compañeras se adelantaron en explicitarlo. Aún así, gracias a la intervención de la docente, que desde el principio se muestra *decidida* a que sea el propio autor el que explique *por qué* su respuesta es incorrecta, el alumno logra explicar su razonamiento y realizar modificaciones para corregir su respuesta. Como mencionamos en el Capítulo 2, cuando el estudiante debe dar una fundamentación sobre su producción *se enfrenta con lo que verdaderamente hizo o sabe* y esto permite *desplegar lo individual* (que muchas veces permanece oculto inclusive para el propio productor) (Buffarini, 2005).

Destacamos la gestión de la maestra ante la aparición de una "equivocación". En lugar de *cerrar* la discusión la *abre*, convoca a los estudiantes a que den sus propias justificaciones, a que se *hagan cargo* de sus respuestas al modo que lo plantean Chevallard et al (2000). Este modo de proceder, evita instalar "la sensación de que el juego que tienen que jugar los alumnos está regido por reglas cuya razonabilidad no es asunto de los estudiantes" (Sadovsky, 2005, p. 54) y promueve, por lo tanto, la construcción del sentido del trabajo matemático que están desarrollando.

Cuarto episodio: Razones para explicar el patrón

La intervención de Gerónimo relatada en el episodio anterior, no sólo posibilita poner en palabras su interpretación de la tarea sino que promueve una *mirada más general sobre* el problema porque ubica el foco de atención en el *valor constante de la diferencia* entre cada par de soluciones particulares. Al indicar públicamente que su respuesta es incorrecta, provoca que el resto de los estudiantes intenten identificar el origen de esa diferencia (Zack y Graves, 2002). Este cambio de actividad -ya no se trata de proponer valores particulares sino de buscar la regularidad en la relación entre los valores que están escritos en el pizarrón, qué es lo que tienen en común- desemboca en que los números de cada par propuesto "*tienen que tener diferencia de tres*". De modo que este aspecto general (o más bien, relacional entre las dos variables) surge en el seno de la clase a raíz de la intervención de Gerónimo y no por solicitud de la docente. En todo caso, la maestra aprovecha esta ocasión para hacer especial hincapié en el *nuevo descubrimiento*[26], buscando que aquellos que aún no lograron esta perspectiva más general sobre el problema se encaminen en esta dirección. Para ello, continúa la clase retomando las otras respuestas que estaban en el pizarrón para que sus autores indiquen cuánto da la diferencia entre los valores propuestos y que expliquen por qué sucede esto. Veamos en el siguiente fragmento cómo responden los estudiantes:

143. D: ¿Por qué la diferencia siempre nos da 3?
144. A1: Porque tienen la misma cantidad...
145. A: Porque Pablo menos Juanjo…
146. *Se escuchan varios estudiantes que intentan explicar al mismo tiempo.*
147. D: Uno que explique ¡por favor! pero, están levantando la mano los compañeros.
148. A: Porque los dos tenían la misma cantidad de gogos pero o sea… por ejemplo, uno tenía 8 y el otro tenía 8.
149. D: Ujú.
150. A: Y uno ganó tres y el otro se quedó con lo mismo que tenía antes.
151. D: Muy bien, quién quiere decirlo también pero ¿de otra manera? A ver... Nicolás
152. Nicolás: Que. .. en el caso de Paulina 11 y 8. Eh, Pablo tenía 8 y Juanjo también la misma cantidad. Y Pablo ganó 3, y le sumás 3 y te da 11.
153. X: Pero yo entendí que pueden tener distintas posibilidades.
154. D: A ver.
155. X: Que cuando ganaron 3 gogos ahí sí tuvieron lo mismo.
156. A: Claro, capaz que...
157. D: ¿Pero eso dije yo? ¿Que después de ganar tres tenían la misma cantidad?
158. Varios: No.
159. X: No, pero no aclaraste que después de tener la misma cantidad ellos ... *(inaudible)*
160. *Se oyen comentarios más bajos de otros compañeros.*
161. D: Bien, yo les dije que tenían la misma cantidad hasta el día de hoy en que en el día de hoy en el recreo Pablo…
162. A: Capaz que las cajas tienen lo mismo, capaz que tienen 8 y 8. *(En simultáneo con el discurso docente).*

[26] Hablamos de *nuevo descubrimiento* pero no quiere decir que todos los estudiantes perciban recién en este momento que la diferencia debe ser tres, sino que destacamos el hecho de que lo que tal vez formaba parte del conocimiento de algunos (en forma privada y quizás, implícita), se explicita y se propone como conocimiento común para todos.

163. D: La caja tiene la misma cantidad. Una y otra. Además, fíjense que por eso son iguales por eso cuando me preguntan cuál es de Pablo y cuál es de Juanjo no las puedo distinguir.
164. José: ¿Quién dijo 7 y 10?
165. D: Bien, eh ¿Marcos?
166. Marcos: Pablo menos Juanjo te da cero. Si tienen los dos 7, 7-7, 0 más los tres que ganó te da 3, y la diferencia es 3.

Transcripción 27: frases 143-166 de la Tarea B1

La nueva consigna que plantea la docente de fundamentar por qué la diferencia debe ser tres exige que los alumnos *pongan en palabras* lo que posiblemente tuvieron en cuenta al proponer los valores particulares. Este tipo de actividad se relaciona con nuestra postura sobre el modo del trabajo matemático que esperamos se despliegue en el aula: que sean los estudiantes los verdaderos protagonistas, que se encarguen de explicar y justificar sus respuestas (Chevallard, et. al., 2000). Por un lado, las intervenciones de la docente, que promueve más de una explicación sobre el mismo hecho, favorece que los estudiantes asuman la tarea de reconstrucción matemática como proyecto personal (Sadovsky, 2005). Por otro lado, ayuda a que algunos alumnos que no habían tenido posibilidad de indicar valores particulares, se apropien de la respuesta del otro, para generar explicaciones. Es el caso de Nicolás "*Que... en el caso de Paulina 11 y 8 [...]*" (frase 152, Transcripción 27). Nuevamente retomamos el aporte de Zack y Graves (2002), en cuanto a que lo que dicen los niños se nutre con ideas propias y ajenas, haciendo referencia a la naturaleza dialógica del aprendizaje de Vygotsky y el punto de vista de Batjín acerca de que los pensamientos y las prácticas de los demás se integran en la propia.

Otro aspecto a resaltar de las interacciones anteriores es la intervención de una alumna que parece que en ese momento se da cuenta de que su interpretación de la situación no coincide con la del resto: "*Que cuando ganaron 3 gogos ahí sí tuvieron lo mismo.*" (frase 155, Transcripción 27). También en esta ocasión se pone de manifiesto lo que plantea Sadovsky (2005) acerca de la posibilidad que brindan las interacciones para *revisar los propios razonamientos* y muchas veces *comprender* la tarea. Si bien en varios momentos de la clase se aclara el hecho de que las dos cajas contienen la misma cantidad, evidentemente, esta alumna, por algún motivo no había asimilado esa información. Tal como lo señala Buffarini (2005) algunos estudiantes logran recién en los momentos de intercambios *comprender* el problema o *evolucionar la visión* que tenían sobre el mismo.

Quinto episodio: Discusión sobre la cantidad de soluciones

Las intervenciones en relación con el valor de la diferencia entre las cantidades de gogos de Pablo y Juanjo analizadas en el episodio anterior, desembocan en la discusión en torno a la cantidad de soluciones que admite la tarea propuesta a partir de una pregunta de la docente que transcribimos a continuación:

167. D: La diferencia entre ellos es tres, la diferencia es 3. Bien. ¿Y estas son las únicas posibilidades?
168. Varios: Nooo.

169. A: Hay infinitas.
170. A1: ¡Infinitas!
171. D: A ver…
172. A: 3 y 0, 4 y 1, 5 y 2, 6 y 3.
173. D: A ver Lu terminá tu idea.
174. Luciana: Hay infinitas posibilidades, porque puede ser ehh diez mil millones y diez mil millones tres.
175. D: ¿Qué dicen sobre lo que está diciendo Luciana? Sí Alejo a ver...
176. Alejo: 14 y 11. 14 Pablo y 11 Juanjo.
177. D: Bien, la que había pensado Camila. Justo, estaba levantando la mano. Y ¿qué dicen de la posibilidad que está diciendo Luciana?

Transcripción 28: frases 167-177 de la Tarea B1

Observamos que las respuestas de muchos estudiantes sobre el número de soluciones que admite el problema, se refieren a que conforman un conjunto *infinito de posibilidades*. La docente solicita mayores explicaciones a los alumnos. Un estudiante indica varios *ejemplos particulares* a modo de justificación (frase 172). Una alumna, Luciana, añade una solución posible que incluye valores "grandes" en comparación con los que estaban escritos en el pizarrón (frase 174).

En los dos casos mencionados se recurre a un tipo de *justificación pragmática* en términos de Balacheff (2000) ya que se valida por medio de ejemplos particulares. La intervención de Luciana la relacionamos con los aportes de Buffarini (2005) sobre algunas ideas de los estudiantes acerca de la validación en matemática: si funciona con números "grandes" o "feos" es más seguro que funcione para cualquier número.

Al final de la transcripción anterior notamos que la docente invita en dos ocasiones a los estudiantes a tener en cuenta la posibilidad señalada por Luciana (frases 175 y 177, Transcripción 28). Analizamos a continuación los intercambios que tienen lugar a partir de esta propuesta de la docente.

177. D: Bien, la que había pensado Camila. Justo, estaba levantando la mano. Y ¿qué dicen de la posibilidad que está diciendo Luciana?
178. A: También está bien porque al no saber cuánto tenés en la caja podés decir cualquier posibilidad.
179. D: Puede ser que haya un millón de gogos en una…y en otra un millón de gogos...
180. A: Pero no, ¡tienen que entrar en la caja! *(en simultáneo con la docente)*
181. A1: Dos millones trescientos ochenta mil…
182. A: ¡Nunca dijo que tienen que entrar en la caja!
183. D: ¡Y si ya están adentro! ¡Tienen que entrar!
184. A: Pero no dijiste que ...
185. D: No de este tamaño, un millón de estos gogos no creo que entren, ¿no?
186. *Se escuchan risas.*
187. D: Pero podrían ser figuritas de estos gogos también, ¿no? y puede haber un millón en cada caja.
188. A: No puede entrar diez millones *(en simultáneo con el discurso de la docente)*
189. D: Un millón, pero Pablo tendría ¿cuánto? Un millón… Hoy por ganar en el recreo, un millón ¿cuánto?
190. Varios: ¡Tres!

Transcripción 29: frases 177-190 de la Tarea B1

Hay dos aspectos que consideramos relevantes de la transcripción anterior:

- Las *razones* por las que la docente decide debatir en torno a la intervención de Luciana.
- La influencia del *contexto* para determinar la cantidad de soluciones del problema.

En cuanto al primero de ellos, pensamos algunos motivos que podrían fundamentar la decisión didáctica adoptada. Dado que el objetivo de la tarea es introducir el lenguaje algebraico, creemos que la maestra pretende orientar el debate hacia la escritura simbólica de la cantidad de gogos de Pablo y Juanjo. La mención explícita que realiza Luciana sobre la existencia de *infinitas posibilidades* y el hecho de ejemplificar con valores numéricos "grandes" apoyan la conjetura de que se puede aceptar cualquier número natural como cantidad de gogos en la caja de Pablo o de Juanjo (si un número "tan grande" como mil millones es una solución posible, puede "funcionar" cualquier número como cantidad de gogos en cada caja).

En cuanto a la segunda cuestión, consideramos que al momento de analizar la cantidad de soluciones se puede trabajar con el contexto de al menos dos formas diferentes. Una de ellas consiste en reconocer que las características de la situación con los soportes materiales que la acompañan *limitan* la cantidad de soluciones (desde el dominio numérico considerado hasta el máximo y mínimo aproximado, en función del tamaño de cada gogo y de las cajas) y se trata entonces de establecer el rango de valores posibles para las respuestas al problema. Otra alternativa podría ser *flexibilizar* algunas cuestiones relativas al contexto (o parte del mismo) en este momento de la resolución.

En la discusión sobre la influencia del tamaño de las cajas dadas y los gogos en la cantidad de soluciones admisibles, algunos estudiantes parecen considerar las cajas como ilustrativas de la situación (no como las cajas que *efectivamente* tenían Pablo y Juanjo) por eso creemos que sostienen que la maestra *nunca* dijo que la cantidad de gogos que tenía cada uno deben entrar en las cajas (frase 182, Transcripción 29). Otros, más centrados en los soportes materiales, insisten en que determinadas cantidades no se pueden considerar dentro del conjunto solución por el *tamaño* de las cajas dadas.

La docente realiza dos tipos de intervenciones que resultan claves para la continuación del debate:

- Expresa que *no indicó* que los gogos deben entrar en las cajas porque ya estaban adentro de cada una (frase 183) y añade que un millón de gogos posiblemente *no entren* en esas cajas (frase 185).
- Señala que en lugar de gogos las cajas podrían contener *figuritas* de gogos por lo que sí podrían contener un millón de figuritas de gogos. (frase 187)

Consideramos que el primer tipo de intervención vuelve la mirada sobre las cajas concretas que se presentaron al inicio del problema y hace referencia a una limitación del material concreto en cuanto a su capacidad (finita). Este tipo de observación podría dar lugar al problema de averiguar el rango de valores posibles para las cantidades de gogos que caben en las cajas dadas (lo cual implicaría cálculos de volúmenes y capacidad). Este tipo de tarea, que exige explicitar el dominio de las variables implicadas, es característica de un trabajo de *modelización*.

En la clase estudiada, la docente decide ir por otro camino y realiza una modificación en el contexto del problema: cambia gogos por figuritas de gogos con el fin de que entren un millón en cada caja. Un alumno realiza una intervención que podría apuntar a que las cantidades posibles no son infinitas (frase 188). La maestra no considera este aporte y continúa con el diálogo con el resto de los estudiantes.

Tal como lo plantea Sadovsky (2005), el *contexto extramatemático* puede facilitar u obstaculizar la interpretación de las nociones matemáticas abordadas Si bien al momento de plantear el problema a los estudiantes la contextualización y el soporte material colaboraron con la interpretación de la situación, notamos que al analizar la cantidad de soluciones no se profundiza lo suficiente y se intenta *flexibilizar* de alguna manera las limitaciones que plantea el contexto.

Sexto episodio: Utilización del lenguaje simbólico

En este episodio se discute en torno al modo de expresar la relación entre el número de gogos de Pablo y Juanjo. Para ello la docente recupera una intervención de Luciana diciendo: *"¿por qué hay infinitas posibilidades? Yo escribí en el pizarrón algo que dijo Luciana que es lo que estamos pensando, cualquier número podría ser.", "¿cómo podríamos entonces lo que tiene Pablo y lo que tiene Juanjo sin pensar en un número concreto, de qué manera?"* (frases 198 y 200, Transcripción de Clase 5 en el Anexo 4). Un alumno sugiere abrir la caja. La docente afirma que de ese modo se pueden contar, pero repregunta de qué modo matemáticamente se puede escribir.

Un estudiante irrumpe diciendo que con la letra x u otra letra (antes de que la docente termine de preguntar). Veamos a continuación como se desarrolla el debate a partir de este punto:

202. D: Abriendo… ahí contamos. Pero digo de qué matemáticamente …
203. A: **Con la letra x o otra letra.**
204. D: Podemos usar una letra para eso.
205. A: **La incógnita.**
206. José: **¡x! Juanjo tiene x y Pablo tiene el mismo x que Juanjo más tres.**
207. D: ¡Appa! A ver… ¿estás escuchando?
208. A2: **Sí, ¡x más tres!**
209. A3: **Como las ecuaciones.**
210. D: Pablo tiene x+ 3 dicen acá y Juanjo tiene x, ¿están de acuerdo?
211. Varios: ¡Sí!
212. D: ¿Si? Porque Pablo tiene tres gogos más que Juanjo que tiene x. Muy bien. Otra forma podría ser decir, como es cualquier número, que Pablo tiene…
213. A: La culpa la tiene *(inaudible) (en simultáneo con el discurso de la docente)*
214. D: Podemos poner una n para señalar el universo de los números más tres y Juanjo tiene n, ¿sí?

Transcripción 30: frases 202-214 de la Tarea B1

Tal como podemos observar en la transcripción anterior, surgen en la discusión algunos términos interesantes: *incógnita* y *ecuación*. En relación con el primero de ellos, tal como mencionamos en el Capítulo 1 la docente había trabajado con los niños el texto "La gran incógnita" (disponible en el Anexo 1). En lo que concierne al segundo, los estudiantes no abordaron el tratamiento de ecuaciones en la escuela, pero quizás algunos de ellos reciben apoyo adicional para prepararse para el examen de ingreso en el nivel secundario[27].

Respecto al surgimiento de una expresión simbólica para el número de gogos de Juanjo y Pablo, notamos que José es el primero en lograrlo (frase 206, Transcripción 30). La docente refuerza su aporte llamando la atención del resto de la clase y repitiendo lo que dijo este alumno (frase 207, Transcripción 30). Aunque algunos alumnos proponen la letra x, la docente utiliza otra letra y señala: "*Podemos poner una n para señalar el universo de los números más tres y Juanjo tiene n, ¿sí?*" (frase 214, Transcripción 30)

No podemos afirmar que los estudiantes hayan comprendido la razón por la cual la maestra escribe el número de gogos de cada uno como "n" y "n+3", en lugar de utilizar la letra "x" que había surgido de ellos. Creemos que la decisión docente se basa en la planificación de la tarea. Recordemos la parte de la misma que hacía referencia a la utilización del lenguaje simbólico:

En esta situación, la docente pregunta a los alumnos si hay alguna manera de escribir esto. Por ejemplo: "Si en principio Pablo puede tener cualquier número de gogos, podríamos decir N gogos, ¿les parece que lo podríamos indicar así? (escribiendo N en la celda que corresponde al número de gogos de Pablo). Entonces ¿cómo podríamos escribir el número de gogos de Lucas?" (invita a los alumnos a responder la pregunta y explicar sus respuestas)

Desde nuestro punto de vista, consideramos que no resulta oportuno el cambio de letra en ese momento de la clase en la que el *salto conceptual* es muy grande. Se pasa de indicar respuestas aritméticas a escribir en símbolos la relación entre la cantidad de gogos de los dos niños. Además, interpretamos que la elección de los niños de la letra x se podría relacionar con la actividad sobre el texto "La gran incógnita" que trabajó la docente con ellos al principio del cursado (ver Anexo 1). En ese caso, la letra representaba un número a develar. Un camino posible para abordar una de las componentes del sentido de los símbolos Arcavi (2005) que tiene que ver con los *roles* que pueden desempeñar las letras sería retomar ese trabajo y relacionarlo con el problema de los gogos.

La clase continúa con la discusión en torno al resultado de realizar $x+3-x$. Esta idea surge de un estudiante, como podemos ver en el episodio siguiente:

216. A1: ¡Seño! x+3-x te da lo de… eh.. te da Pablo.
217. D: A ver...él dice x+3-x te da ¿qué?
218. A1: Pablo.
219. Varios: La diferencia.
220. D: Ahh y entonces ¿cómo se hallaría esto?
221. A2: ¡3!
222. A3: x menos … x más x menos…no, no.
223. José: Ah, tenés que saber…
224. D: La diferencia te va a dar ahí o ¿no?
225. José: Ah, ¡es que tenés que saber lo que vale x!
226. A: No ¡Seño!
227. D: ¿Cómo hago la diferencia?
228. A2: ¡Restando!

[27] Cono ya mencionamos, muchos de los niños de esta escuela pretenden ingresar a alguna de las dos instituciones de nivel secundario dependientes de la UNL. Para ello deben rendir un examen de ingreso que incluye el área matemática.

229. A1: x-x-3 *(en simultáneo con el discurso del estudiante anterior)*
230. D: Ahh.
231. A3: Pero imposible...
232. A: A x le restás x… no, si a x+3 le restás x te da 3 *(en simultáneo con el discurso del estudiante anterior).*
233. D: Ajá. Bien, pero porque sé que es tres en este caso. Lo que estás diciendo vos Nicolás es que x+3 que es lo que tiene Pablo (escribe en el pizarrón) menos x te va a dar igual a 3, que es la diferencia, ¿sí? porque sé que es 3 la diferencia en este caso. Bueno, teniendo en cuenta esto les vamos a pedir que traten de completar el siguiente cuadro. Pero primero, a ver… nadie tiene que decir… la consigna es la siguiente: cada uno lea el cuadro, hay espacios para completar.

Transcripción 31: frases 216-233 de la Tarea B1

En esta transcripción observamos que algunos niños parecen operar con una expresión algebraica sin conocer las reglas formales del álgebra. Inferimos que lo logran a partir de establecer relaciones con el contexto. Por otro lado, en medio de los intercambios surgen dos expresiones algebraicas equivalentes $x+3-x$ y $x-x+3$ (frases 216 y 229). La docente no trata esta cuestión en la clase.

5.2.2 Análisis de casos

En este apartado centramos la mirada en dos personajes que jugaron un rol importante en la clase estudiada. Realizamos una lectura de la clase en su totalidad para caracterizar la participación de cada uno de estos sujetos durante la resolución del problema de los gogos.
Por un lado, estudiamos el caso de un alumno, José, que por su gran participación en clase y las características de sus aportes, creemos que merece una atención diferenciada porque nos posibilita seguir de alguna manera su *razonamiento* en el transcurso de la clase.
Por otro lado, atendemos al papel que juega la docente en el debate colectivo. Caracterizamos el tipo de interacción que promueve entre los estudiantes y los aportes que realiza, porque consideramos que influye especialmente en las posibilidades de construir sentido del trabajo matemático que se realiza en el aula.

Las intervenciones de José durante la resolución del problema

En este análisis nos proponemos identificar algunas estrategias que surgieron durante el abordaje de la tarea en el debate colectivo. Teniendo en cuenta que cada niño puede transitar un camino diferente para resolver la situación, elegimos seguir el razonamiento de José a partir de sus distintas intervenciones.

Tabla Nº 32: Intervenciones de José en el problema de los gogos (Tarea B1)			
Episodio	**Intervenciones de José**	**Frase Nº**	**Transcripción Nº**
1. Producción de nuevos problemas	*¿Contando esos o no?*	10	23
	Pero no sabemos a quién le ganó Pablo.	12	
	Capaz que le ganó a Juanjo.	16	
	No los sacó de la mochila todavía.	20	
2. Desacuerdos en el debate colectivo.	*Pero si no sabés cuántos tenían, no se puede.*	65	25
	Seño, ¿es a tirarle a pegar?	73	
	¡Ahh!	75	
3. Revisión de la respuesta propia	*Pablo 9 y Juanjo 6.*	93	26
4. Razones para explicar el patrón	*¿Quién dijo 7 y 10?*	164	27
5. Discusión sobre la cantidad de soluciones			
6. Utilización del lenguaje simbólico	*¡x! Juanjo tiene x y Pablo tiene el mismo x que Juanjo más tres.*	206	30
	Ah, tenés que saber...	223	31
	Ah, ¡es que tenés que saber lo que vale x!	225	

Si atendemos a las intervenciones de José durante el abordaje del problema de los gogos, identificamos de alguna manera ciertas etapas por las que fue transcurriendo su razonamiento:

- Sostiene una *posición crítica* sobre el enunciado de la situación.
- Observa *escépticamente* las respuestas aritméticas de sus compañeros.
- *Comprende* el modo de obtener las respuestas aritméticas de sus compañeros.
- Indica una *respuesta aritmética*.
- *Expresa la relación* entre el número de gogos de Pablo y Juanjo utilizando la letra x.

Si seguimos *la traza* de las intervenciones de José notamos que este estudiante demuestra su preocupación constante por otorgar *significado* a lo que se hace en la clase. Desde el comienzo, centra su mirada en el enunciado del problema e identifica cuestiones que no se explicitaron y que podrían interpretarse de diferente manera. Las intervenciones de José durante el primer episodio generan un *desafío* para la docente porque señalan cuestiones no previstas y que deben contestarse de alguna manera para continuar con el desarrollo de la clase (frases 10, 12, 16, 20, Transcripción 23). En el segundo episodio, José *reclama justificaciones* a sus compañeros y a la docente acerca del modo de obtener las respuestas aritméticas que estaban surgiendo. En una de sus expresiones alude a una *norma* del trabajo matemático que posiblemente estaba instalada en la clase: la imposibilidad de asignar números al azar para dar respuesta a un problema (frase 73, Transcripción 25). En el tercer episodio, José indica una *respuesta aritmética* para el problema. Finalmente, en el último episodio, este estudiante es el primero en utilizar el *lenguaje simbólico* para establecer la

relación entre el número de gogos de Pablo y Juanjo. Su intervención *impulsa* el debate hacia la escritura de las expresiones simbólicas correspondientes.
En las intervenciones de José se pone en evidencia que el problema planteado produce "rupturas" en las prácticas aritméticas que posibilitan aproximarse a prácticas algebraicas (Sadovsky, 2003). En este espacio fronterizo, donde se habilitan estrategias de naturaleza aritmética pero que resultan insuficientes para dar respuesta al problema, es donde se manifiesta el principio de necesidad de Sessa (2005) para dar lugar al lenguaje algebraico. Esto también es coherente con las tareas gestoras de sentido desde el punto de vista de Buffarini (2005):

> Entendemos que las situaciones que son gestoras del sentido de un concepto son aquellas para las cuales las estrategias que posee un alumno son suficientes para un primer abordaje pero no alcanzan para dar una respuesta satisfactoria al problema (resultan insuficientes para su total resolución o antieconómicas). El alumno deberá emprender la construcción de herramientas nuevas que confluirán -con una intencionalidad docente puesta de manifiesto en su gestión de la clase- a la introducción del nuevo concepto. (p.38)

La gestión de la clase por parte del docente

En esta parte del capítulo, vamos a detenernos en la gestión de la clase por parte del docente. Para ello, confeccionamos una tabla en la que identificamos las intervenciones docentes en todos los episodios de esta clase (ver Tabla Nº 33, en el Anexo 5).
En principio, queremos centrarnos en el modo de presentar la tarea a los estudiantes. Transcribimos a continuación ese momento:

1. *La maestra comienza la actividad diciéndoles a los alumnos que van a resolver un problema con gogos y les pregunta de qué manera juegan con los gogos.*
2. A: ¿Y qué tienen que ver los gogos con la matemática?
3. D: Vamos a suponer que estas cajas pertenecen a un tal Pablo y un tal Juan. Tienen gogos adentro *(les llama la atención para que hagan silencio).* Yo voy a pasar las cajas por acá, no vale abrirlas, simplemente la tienen que tocar, hacerla sonar y demás y la pasan. Pablo y Juan tienen la misma cantidad de gogos adentro de sus cajas. Vienen coleccionando y llegaron a juntar la misma cantidad de gogos. *(le llama la atención a un alumno para que pase la caja*). Tienen la misma cantidad de gogos, hasta ahora, hasta hoy. Venían coleccionando y juntaron la misma cantidad de gogos. La cuestión es que Pablo hoy en el recreo ganó tres más.
4. A: Uhh.
5. A: Pará ¿cuál es Pablo?
6. A1: ¿Pablo Díaz? *(estudiante del otro séptimo grado)*
7. D: Capaz, este es habilidoso en lo gogos, con los gogos. Pablo que tiene una caja igual que Juan, con la misma cantidad, hoy en el recreo…
8. A: Pablo y Juanjo.
9. D: Juanjo, vamos a ponerle Pablo y Juanjo. . . que tienen la misma cantidad, y Pablo ganó tres gogos más en el recreo. La pregunta es la siguiente, primero para pensarla cerramos la boca, no digo lo primero que se me ocurre. Cierro un poquito la boca y pienso. Después si de pensarlo, levanto la mano y digo mi opinión. ¿Cuántos gogos tiene Pablo y cuántos gogos tiene Juanjo?

Transcripción 32: frases 1-38 de la Tarea B1

En este primer momento de la tarea la docente resalta el papel del contexto con varias intervenciones:

- *Pregunta* a los estudiantes cómo se juega con los gogos.
- *Presenta* el enunciado del problema.
- *Atiende* las preguntas de los estudiantes acerca de *qué Pablo podría ser*.
- *Modifica* el nombre de Juan por Juanjo a partir de una *sugerencia de un estudiante*.

Notamos su intención de *involucrar* a los estudiantes en la tarea colocando especial énfasis en el contexto. Por ejemplo, cuando uno de ellos pregunta si podría ser el Pablo del otro séptimo grado (frase 6, Transcripción 32), no responde "*No, es un nombre ficticio, es un problema de matemática"*. Prefiere dejar abiertas las posibilidades que plantean los niños cuando imaginan la situación que se plantea en el problema y responde: "*Capaz, este es habilidoso en lo gogos, con los gogos. Pablo que tiene una caja igual que Juan, con la misma cantidad, hoy en el recreo…"* (frase 7, Transcripción 32). De igual modo, acepta la sugerencia de modificar el nombre de Juan por Juanjo, que era un compañero del otro séptimo grado. Encontramos en este sentido un punto de contacto con el inicio de uno de los proyectos relatados por Skovsmose (1999), en el cual se hace referencia a la posibilidad de que los estudiantes utilicen su imaginación en el *montaje del escenario* en el cual se propone la tarea (Proyecto La Conejera).

Durante los intercambios producidos en la resolución del Problema de los gogos, encontramos frases de la docente que se relacionan con algunos aportes teóricos mencionados en el Capítulo 2. Por ejemplo, en la siguiente frase *"¿Pero eso dije yo? ¿Que después de ganar tres tenían la misma cantidad?" (*frase 157, Transcripción 27) observamos que la docente n*o responde directamente* la pregunta que le realiza un estudiante, sino que la devuelve al grupo de alumnos (Quaranta y Tarasow, 2004). En varias ocasiones, solicita *mayores explicaciones* cuando los estudiantes dan una respuesta, promoviendo los intercambios y evitando *acuerdos rápidos* y *decisiones sin análisis* profundos (Quaranta y Tarasow, 2004; Buffarini, 2005). Mencionamos a continuación algunas frases que ejemplifican este último aspecto: *"¿Por qué la diferencia siempre nos da 3?"* (frase 143, Transcripción 27), *"Uno que explique ¡por favor![…]"* (frase 147, Transcripción 27), *"Muy bien, quién quiere decirlo también pero ¿de otra manera? A ver... Nicolás*" (frase 151, Transcripción 27), "*Ahh y entonces ¿cómo se hallaría esto?"* (frase 220, Transcripción 31), *"¿cómo hago la diferencia?"* (frase 224, Transcripción 31), "*La diferencia entre ellos es tres, la diferencia es 3. Bien. ¿Y estas son las únicas posibilidades?"* (frase 167, Transcripción 28*), "Abriendo… ahí contamos. Pero digo de qué matemáticamente …"*(frase 202, Transcripción 30). Esta solicitud constante de explicaciones por parte de la docente manifiesta que *no se apresura* demasiado a realizar un "cierre" del tema. Este es uno de los aspectos señalados por Arcavi (2005) para favorecer el sentido de los símbolos.

Buffarini (2005) menciona otra característica en relación con la gestión de la clase por parte del docente tiene que ver con *reformular* algo dicho por un alumno para que haga perceptible para el resto de los estudiantes. Este tipo de intervenciones de la docente se manifiesta en la siguiente frase: "*Luciana..., yo no sé si escucharon. Luciana me preguntó si tenía que tener en cuenta el peso. yo le dije que tuviera en cuenta lo que ella necesitara tener en cuenta. En* *principio en los datos que yo les di no dije nada sobre el peso y un compañero contestó que pueden ser algunos más pesados y otros más livianos. El dato que yo les dí es que tenían la misma cantidad"* (frase 81, Transcripción 25).

En otras ocasiones pero con el mismo propósito, la docente llama la atención de los alumnos para que se centren en la producción de un determinado estudiante. Algunos ejemplos son los siguientes: "*¿Qué dicen sobre lo que está diciendo Luciana? Sí Alejo a ver..".* (frase 175, Transcripción 28)**,** *"Y ¿qué dicen de la posibilidad que está diciendo Luciana?" (*frase 177, Transcripción 28), *"¡Appa! A ver… ¿estás escuchando? [haciendo referencia a la expresión simbólica que expresa José]"* (frase 207, Transcripción 30).

Otra característica de su gestión es que no *convalida de entrada* las respuestas correctas, manteniendo la incertidumbre en el debate colectivo (Quaranta y Tarasow, 2004). Un ejemplo de este último accionar se produce cuando reitera lo indicado por José en relación con el número de gogos expresado en lenguaje simbólico: "*Pablo tiene x+ 3 dicen acá y Juanjo tiene x, ¿están de acuerdo?"* (frase 210, Transcripción 30).

En el tercer episodio del análisis de los intercambios de esta clase (Apartado 5.2.1) estudiamos la revisión de la respuesta de Gerónimo. Se pone de manifiesto en este caso la intención de la docente de *propiciar validaciones* por parte de los estudiantes (Quaranta y Tarasow, 2004). En principio anota en el pizarrón la respuesta que expresa el alumno *sin dar indicios* de que es errónea. Cuando el estudiante señala que quiere corregir los valores que indicó, ella interviene *sin explicitar su valoración* sobre esa respuesta, e inclusive *no se apresura* a que se corrija el error[28]. Transcribimos las frases de la docente en este episodio:

- *"A ver, ya vamos ya vamos, por supuesto… Sí, Mariana*"[cuando Gerónimo indica que quiere modificar su respuesta] (frase 84, Transcripción 26)
- *"Bien, ahí llego. Gerónimo, ¿por qué vos decís que te equivocaste*?" (frase 97, Transcripción 26)
- *"¿Y por qué esto está mal, entonces?"* (frase 104, Transcripción 26)
- *"¿Cuánto te tiene que dar?"* (frase 106, Transcripción 26)

Quaranta y Tarasow (2004) sugieren que el docente *argumente a favor* de una respuesta errónea para que los estudiantes deban analizar la validez de la misma. En las últimas intervenciones transcriptas, la docente adopta una *posición neutral* para favorecer la validación por parte de Gerónimo. Si bien no coincide exactamente por lo planteado por las autoras, creemos que se encuentra en la misma línea: la intención de *devolver la responsabilidad de validar* a los estudiantes *ocultando su juicio de valor* sobre las respuestas. De modo que en este tipo de situaciones, la *fase de conclusión* se resuelve por medio de una modalidad de *validación* (Margonlinas, 1992).

En relación con los aportes de Buffarini (2005) sobre algunos aspectos de la gestión de la clase por parte del profesor que promueven la *evolución de aprendizajes* individuales a partir de las *interacciones* entre estudiantes, recuperamos el hecho de *habilitar* los procedimientos de *todos* los alumnos. Una situación que refleja la apertura de la docente en este sentido se observa en el momento en el que Luciana plantea si puede tener en cuenta el peso de los

[28] El estudiante señala su intención de modificar su respuesta en la frase 83 y ella habilita que lo corrija en la frase 98 de la Transcripción 26.

gogos y la docente le responde "*Vos tené en cuenta lo que quieras"* (frase 59, Transcripción 25).

Finalmente, notamos que en general, la docente *respeta y estimula* las ideas parciales y percepciones subjetivas de los estudiantes acerca de los símbolos (Arcavi, 2005). Un ejemplo en este sentido se produce cuando un niño exclama "*¡Seño! x+3-x te da lo de… eh… te da Pablo*", la docente expresa que "*A ver...él dice x+3-x te da ¿qué?"* (frases 216 y 217, Transcripción 31). Retoma la expresión indicada por el estudiante para volverla objeto de análisis de la clase.

De este modo, observamos que la docente *oculta* intencionalmente su juicio sobre las respuestas de los alumnos, para que sean ellos mismos los que las validen, favoreciendo de esta forma no sólo la comprensión y el aprendizaje de las nociones involucradas, sino también, los modos propios del *quehacer matemático* que mencionamos en el Capítulo 1 (Chevallard et al., 2000). Intenta en la mayoría de las ocasiones no explicitar *su manera* de interpretar y resolver la tarea, para no condicionar las respuestas de los estudiantes.

5.3 SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

Como observamos en los distintos apartados, las interpretaciones de los alumnos acerca de lo que "deben hacer" para resolver la situación son muy variadas: desde niños que recurren a respuestas aritméticas a otros que se preguntan por variables a considerar para dar respuesta al problema. No estamos en condiciones de establecer un punto de inicio del trabajo algebraico con una determinada tarea. Sí sostenemos que el problema de los gogos se puede ubicar en una zona fronteriza entre lo aritmético y lo algebraico. Por sus características, posibilita estrategias de resolución aritméticas para explorar la relación entre las variables involucradas. No obstante, la respuesta sobre el número de gogos de cada niño no se halla en el campo aritmético. Se precisa del lenguaje algebraico para expresar lo solicitado en la tarea. El álgebra se utiliza como herramienta para resolver la situación, para modelizar la relación entre las variables consideradas.

Entendemos que esta manera de utilizar el lenguaje algebraico podría promover su sentido, desde el punto de vista de Buffarini (2005), aplicando el *Principio de necesidad* de Sessa (2005). Consideramos que la tarea genera un espacio de intercambios donde surgen "rupturas" entre lo aritmético y lo algebraico (Sadovsky, 2003), que orientan el camino hacia el estudio de relaciones entre variables.

¿Qué sucedió con nuestras expectativas en relación con esta tarea? Si bien habíamos previsto en el Capítulo 3 algunas intervenciones docentes y respuestas de estudiantes para favorecer la aparición del lenguaje simbólico, la observación y el estudio de la clase superó nuestras expectativas, fundamentalmente en relación con dos aspectos. El primero de ellos tiene que ver con la aparición de otras variables a tener en cuenta en relación con el enunciado de la tarea (como por ejemplo *a quién* le ganó Pablo los tres gogos en el recreo). El segundo, refiere a la gestión de la clase por parte del docente. Si bien habíamos hecho un recorrido por diferentes referentes teóricos referidos al rol docente para favorecer la evolución de los aprendizajes, no habíamos dado pautas a la docente sobre cómo intervenir en las discusiones

con los estudiantes. Nos sorprendió el modo en que la maestra reguló los intercambios con los niños (desde el comienzo de la propuesta de enseñanza). Como lo destacamos en el apartado anterior, aparece un vínculo estrecho entre sus acciones y las descriptas por los autores que consideramos.

En relación con el papel del *contexto* en la tarea, creemos que por el hecho de resultar familiar, contribuyó a que los estudiantes se involucren en la resolución del problema. No obstante, reconocemos que en uno de los episodios de la clase, el contexto generó un conflicto en torno a la cantidad de soluciones de la tarea (Episodio 5). En ese momento, la docente optó por *flexibilizar* los condicionantes que surgen de los soportes materiales que acompañaron al planteo del problema (si no entran los gogos en las cajas, podemos colocar figuritas de esos gogos). Sostenemos que reflexionar sobre la cantidad de soluciones manteniendo los soportes materiales hasta el final genera otro tipo de trabajo matemático (interesante) sobre el problema original.

Finalmente, consideramos que la tarea analizada genera la posibilidad de que los estudiantes se formulen preguntas y busquen explicaciones. Estas son algunas de las características de los *escenarios de investigación* desde el punto de vista de Skovsmose (2000), aunque reconocemos que este autor plantea proyectos que exceden el trabajo de una sola clase. En lo concierne al sentido de los símbolos, creemos que el problema de los gogos promueve el desarrollo de la capacidad para *diseñar relaciones simbólicas* que expresen cierta información (en este caso, verbal) dada (Arcavi, 2005).

CAPÍTULO 6
Reflexiones finales

En este capítulo haremos una recapitulación de la investigación que hemos desarrollado volviendo la mirada sobre los objetivos del estudio.

6.1 LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

El primer objetivo particular que nos planteamos es el siguiente:

Diseñar, implementar y analizar una propuesta de enseñanza para séptimo grado de la educación primaria centrada en el establecimiento de relaciones entre variables desde diferentes registros de representación.

En lo que concierne al *diseño de la propuesta*, consideramos que el trabajo colaborativo llevado a cabo con las docentes de los dos séptimos grados constituyó una experiencia que posibilitó ajustar las tareas a los destinatarios y al proyecto de enseñanza del año lectivo. En este proceso se encontró el supuesto implícito de que cada integrante (tanto docentes como investigadoras) respeta y aprende de la mirada del otro.

Estamos convencidas de que está dinámica de trabajo es un *camino posible* para articular la investigación en didáctica de la matemática con la práctica en el aula, porque atiende a los objetivos y expectativas de los diferentes actores, respeta y estimula su participación activa en el diseño de las tareas. El trabajo desarrollado con el equipo mixto generó intercambios que ampliaron el horizonte de nuestra propia perspectiva.

El hilo conductor de la propuesta de enseñanza fue el estudio de *relaciones entre dos variables* desde diferentes *registros de representación*. Utilizamos diversos *contextos* de referencia, intentando que resulten cercanos para los estudiantes. Planificamos el problema de los gogos con el fin de que se utilice el *lenguaje algebraico* como herramienta para dar respuesta al problema. Planteamos algunas tareas con *elementos lúdicos* (bingo de pares ordenados y la búsqueda del tesoro) y otras que aluden a *usos sociales* de los gráficos (gráficos de percentiles y de velocidad de crecimiento en estatura). En algunas tareas se promueve el desarrollo de la *imaginación* de los niños (el paseo de Carolina), complementando en algunos casos con soportes materiales para contribuir al *montaje del escenario*, aludiendo a la terminología de la Educación Matemática Crítica (en el problema de los gogos y el problema de la billetera y la alcancía).

Nuestra evaluación en torno a la propuesta de enseñanza es positiva, ya que observamos que las tareas resultaron comprensibles (y en muchos casos motivadoras) para los estudiantes y dieron lugar a diversos intercambios en el aula acerca de diferentes estrategias de resolución y maneras de interpretar los enunciados de los problemas. Las interacciones fueron significativas desde el punto de vista didáctico, porque posibilitaron establecer relaciones con los aportes teóricos considerados y los resultados obtenidos por los antecedentes de la investigación.

6.2 INTERCAMBIOS PRODUCIDOS EN EL AULA

Dos de nuestros objetivos particulares se refieren a las producciones escritas y los intercambios orales de los estudiantes sobre las tareas propuestas:

Identificar las nociones que se ponen en juego en las producciones escritas de los estudiantes y en los intercambios orales que se desarrollan en el aula en torno a las tareas planteadas.

Describir el papel de los intercambios producidos en las clases en relación con la construcción del sentido de las nociones involucradas y significados de las acciones de los estudiantes.

En cuanto al *análisis de las tareas diseñadas*, consideramos que logramos vincular los resultados con los aportes teóricos que definen nuestra postura en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Los constructos seleccionados resultaron *operativos* al momento de relacionarlos con lo sucedido en el aula. Si bien las categorías para el análisis de las tareas las elaboramos generalmente *a posteriori*, nos basamos en los aportes de los referentes que habíamos considerado en el marco teórico y en lo sucedido en el aula. Por esta característica, decimos al principio que nuestro estudio posee un *diseño emergente*.

En el análisis de las tareas uno de nuestros focos de atención fueron las *producciones orales y escritas* de los estudiantes. En cuanto a las ideas que se pusieron en juego en dichas producciones podemos señalar que tuvieron que ver principalmente con las nociones de pares ordenados, ejes cartesianos, relaciones entre variables desde diferentes registros de representación (gráficos cartesianos, tablas de valores, expresiones coloquiales o simbólicas). El estudio de *relaciones entre variables* fue el hilo conductor de la propuesta de enseñanza y observamos que se puso de manifiesto en las intervenciones de los niños.

¿Qué aprendieron los estudiantes en relación con las tareas abordadas? No disponemos de elementos suficientes para contestar este interrogante y excede los objetivos de nuestra investigación. En su lugar, podemos señalar las evidencias que encontramos en nuestro trabajo al analizar las producciones orales y escritas de los niños. En general, observamos que las tareas diseñadas favorecieron el establecimiento de vínculos con contextos cercanos para los niños, y en algunos casos, la recuperación de experiencias previas que tuvieron lugar fuera del escenario escolar. Las características de las tareas (y la gestión de la clase por parte del docente) promovieron los intercambios entre niños sobre sus resoluciones e interpretaciones de las consignas, dando lugar en varias ocasiones al surgimiento de nuevos problemas.

Si bien a los niños no se les explicitó cuál era el objetivo general de la propuesta de enseñanza (estudiar relaciones entre variables), la dinámica del trabajo que tuvo lugar en el aula y las producciones orales y escritas de los estudiantes nos dieron indicios de que el objetivo *estaba en marcha*. Los niños, en general, fueron capaces de interpretar relaciones entre dos variables desde diferentes registros de representación. No siempre coincidieron en sus *lecturas* sobre enunciado del problema o la información que se obtiene de un gráfico. Sin embargo, tuvieron el espacio para expresar con libertad la manera en que razonaron sobre cada tarea y comparar su producción con las de sus compañeros.

El análisis que planteamos sobre las respuestas de los niños no se centra en discriminar las correctas de las incorrectas, sino en *identificar características* que nos ayuden a entender el punto de vista desde el cual el niño interpreta el problema. En varias de las tareas se incluyen nociones que resultan complejas para la edad de los estudiantes (como el gráfico de percentiles y el de velocidad de crecimiento en estatura). Como ya lo mencionamos, nuestros propósitos no se refieren a abordar con profundidad estas nociones en el aula de séptimo grado, sino a explorar las interpretaciones de los niños en relación con dichos temas, vinculados con su rango etario.

Por un lado, los intercambios producidos en clase enriquecieron las discusiones y habilitaron la posibilidad de abordar cuestiones que quizás no hubiesen tenido lugar en un trabajo individual. Durante la puesta en común del Problema de los gogos, las interacciones claramente promovieron la evolución de las estrategias, desde prácticas aritméticas a prácticas algebraicas, favoreciendo la atribución del sentido al uso de las letras para expresar una relación entre dos variables.

Por otro, las intervenciones de los niños en el abordaje de cada tarea ofrecen evidencias de que no responden de manera mecánica a un pedido de la docente, sino que se involucran en la situación planteada y la relacionan con sus experiencias, atribuyendo por tanto, significado a las acciones que llevan a cabo.

6.3 GESTIÓN DE LA CLASE POR PARTE DEL DOCENTE

El último objetivo particular de nuestro estudio es el siguiente:

Caracterizar la gestión de la clase por parte del docente en relación con las normas y prácticas matemáticas que habilita/deshabilita y el modo en que se validan las respuestas de los estudiantes.

El estudio realizado sobre las interacciones que tuvieron lugar en el aula posibilitó *ampliar nuestras expectativas* en relación con las tareas. Esto se debe no sólo a los *aportes no previstos* realizados por los estudiantes, sino también a la manera en que la docente habilitó el espacio para estas intervenciones y giró en algunos casos el *timón* con el que conduce su proyecto de enseñanza.

Como mencionamos en el capítulo anterior, en ningún momento hemos dado *pautas* a la docente en relación con *cómo desenvolverse* en el aula. Esto se debe principalmente a dos motivos. Por un lado no era nuestro propósito *influir* en sus formas de gestionar la clase. Por otro, no nos sentimos posicionados en un escalón superior del podio de la enseñanza como para *impartir* lecciones en ese sentido. Asumimos implícitamente desde el comienzo del trabajo colaborativo que íbamos a respetar y aprender de las experiencias y conocimientos de las docentes.

Creemos, sinceramente, que eso sucedió. La docente del curso observado nos sorprendió en muchas ocasiones con *sus maneras* de presentar las tareas (omitiendo las explicaciones iniciales) y de gestionar los intercambios con los niños. Desde ningún punto de vista, la *explicación* de la docente fue el centro en la dinámica de las clases. Siempre priorizó *la palabra de los estudiantes* y habilitó el espacio propicio para que expresen libremente sus maneras de razonar sobre el problema, inclusive cuando se centraban en cuestiones que desde el punto de vista matemático parecen insignificantes (como cuando un niño pregunta si el Pablo del problema de los gogos es el del otro curso).

Interpretamos, a partir de las clases observadas, que uno de los supuestos que guía el accionar de esta docente es el *respeto por las percepciones subjetivas de los niños*. Las explicaciones muy breves que surgen en el contexto de las clases siempre tienen lugar a partir de las ideas que expresan los estudiantes. Establecemos en este sentido un vínculo estrecho entre la gestión de la clase por parte de la docente y las características señaladas por Jacques Rancière (2007) en su obra el *Maestro ignorante:*

> La revelación que captó Joseph Jacotot conduce a esto: hay que invertir la lógica del sistema explicador. La explicación no es necesaria para remediar una incapacidad de comprender. Por el contrario, justamente esa incapacidad es la ficción estructurante de la concepción explicadora del mundo. Es el explicador quien necesita del incapaz y no a la inversa; es él quien constituye al incapaz como tal. Explicar algo a alguien es, en primer lugar, demostrarle que no puede comprenderlo por sí mismo. […] El truco característico del explicador consiste en ese doble gesto inaugural. Por un lado, decreta el comienzo absoluto: en este momento, y sólo ahora, comenzará el acto de aprender. Por el otro, arroja un velo de ignorancia sobre todas las cosas a aprender, que él mismo se encarga de levantar. Hasta que él llegó, el hombrecito tanteaba a ciegas, adivinaba. Ahora aprenderá. (Rancière, 2007, p.21).

La docente observada conoce el tema que debe enseñar, pero parte de la base de que los niños *también tienen conocimientos* en relación con ese tema y se propone volverlos explícitos. No establece una *distancia* con ellos al plantear las tareas sino que pretende acercarse, mostrándose interesada en sus planteos y relatos de experiencias.

6.4 ¿CONSTRUIMOS SENTIDO O SIGNIFICADO?

Recuperamos un interrogante que nos hicimos en el Capítulo 2 con el título de esta sección. En primer lugar, deberíamos decir que la pregunta es imprecisa porque no indica sobre qué o quiénes. Esa ambigüedad nos posibilita detenernos en distintos aspectos/actores para responderla.

En relación con las tareas, *¿podemos decir que promueven el sentido de las nociones abordadas?* En el diseño de la propuesta de enseñanza tuvimos en cuenta los aportes de distintos referentes en relación con este aspecto. Particularmente, destacamos los aportes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico sobre las *razones de ser* de los saberes. Intentamos, a partir del problema de los gogos, que el lenguaje simbólico se utilice como herramienta para expresar el número de gogos de cada niño. En este caso, apelamos al *Principio de necesidad* de Sessa (2005) y al punto de vista de Buffarini (2005) sobre actividades *gestoras de sentido*. Consideramos las expresiones simbólicas que dan respuesta a las tareas como *modelos* que representan la relación que puede establecerse entre las variables involucradas, utilizando los aportes de Sadovsky (2005) y una de las componentes del *sentido de los símbolos* de Arcavi (2005).

Desde otra perspectiva teórica, *¿promovemos el significado de las acciones de los estudiantes?* La propuesta de llevar a cabo un trabajo colaborativo para diseñar las tareas se relaciona con la elección de *contextos cercanos* a los estudiantes. Los *montajes de escenarios* que describe Skovsmose (1999), principal referente de la Educación Matemática Crítica, exceden por mucho a las tareas que planteamos. El autor señala que los escenarios de investigación que plantea no otorgan *el* significado, sino que proporcionan *algo de significado a las acciones* que los niños llevan a cabo para responder las tareas.

En lo que concierne a las tareas diseñadas, creemos que intentamos ofrecer la oportunidad para que los niños atribuyan significado a las acciones que tienen lugar en el trabajo áulico. Las referencias utilizadas con mayor frecuencia en la propuesta de enseñanza (semirrealidad y realidad) "proveen significado a los conceptos matemáticos y a las actividades dentro del salón de clases" (Skovsmose, 2000, p.3).

Finalmente, nos interesa retomar una reflexión que hicimos al final del Capítulo 3 y que relaciona la noción de *sentido* con el rol docente a partir de los aportes de Sadovsky (2005). Coincidimos con la autora en la necesidad de *repensar la tarea del docente* en el aula. Añadimos, desde nuestra investigación, que el trabajo en *equipo mixto* puede contribuir a establecer vínculos estrechos entre investigación y práctica, promover el diseño de tareas que se fundamenten en aportes teóricos acerca de la construcción de sentido o significado y finalmente, a lograr desempeñar nuestros roles (docentes e investigadores) de la manera más placentera posible.

6.5 LÍMITES DE NUESTRO ESTUDIO Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

En la sección 6.1 describimos las características más relevantes de la propuesta de enseñanza. Si bien consideramos que atendimos a los aportes teóricos seleccionados, también creemos que las tareas pueden mejorarse desde al menos dos perspectivas. Por un lado, desde el punto de vista de la Educación Matemática Crítica se sugiere el planteo de escenarios de investigación como proyectos interdisciplinarios que impliquen el montaje de un escenario que insuma un período de trabajo más extenso. Esto podría generarse desde la noción de relaciones entre variables y se proporcionaría de este modo *algo más* de significado. Por otro lado, desde los aportes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y Sadovsky (2005), la *modelización* es la actividad principal desde el punto de vista matemático. Creemos que las tareas podrían propiciar tareas en las que la modelización se trabaje más profundamente.

En lo que concierne al análisis de la implementación de la propuesta de enseñanza, entendemos que se puede profundizar el análisis de las tareas desde otras miradas, como puede ser la de docentes y estudiantes mediante la realización de entrevistas. Esto resultaría un insumo significativo para el estudio, añadiendo una mirada posiblemente diferente de la propuesta por las investigadoras. Dejamos pendiente este desafío para un estudio futuro.

Otra limitación del estudio tiene que ver con el estudio de la totalidad de las tareas de propuesta de enseñanza. En este trabajo presentamos el análisis en profundidad de una parte de las tareas y esperamos continuar en el futuro con el estudio de las restantes. Consideramos, no obstante, que con la investigación realizada hemos atendido a nuestro objetivo general:

Explorar la iniciación al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre dos variables en séptimo grado de la educación primaria.

El presente estudio se presenta en continuidad con los antecedentes que mencionamos y da lugar a nuevas líneas de investigación. Consideramos que este trabajo se convierte en nuestro punto de partida para generar estudios que profundicen en la temática elegida: *la introducción al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre variables*.

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, A (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 13-22). Granada, España: Editorial Comares.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics* 25, 42- 48.

Arce, A. (2012) *Pubertad y crecimiento.* Recuperado de: http://www.dra-amalia-arce.com/2012/09/pubertad-y-crecimiento.html

Bajtín, M. (2011). *Las fronteras del discurso*. (Trad. Borovsky, L.) Buenos Aires, Argentina: Las cuarenta.

Balacheff, G. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Barrio, L., Lalanne y A. Petich (2010) *Entre Aritmética y Álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario: investigaciones y aportes.* Buenos Aires, Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Battista, T. y Clements, D. (1995) Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, 88 (1), 48-54.

Becker, J.R y Rivera, F.D. (2007). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *ZDM Mathematics Education*, 40, 1.

Bishop, A., Clements, M.A., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Blanton, M., Brizuela B., Stephens A., Knuth E., Isler, I., Murphy Gardiner A., Stroud R., Fonger, N. y Stylianou D. (2018) Implementing a Framework for Early Algebra. C. Kieran (Ed.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 27-49), Montreal, Canada: Springer.

Boavida, A. M. y da Ponte, J. P. (2011) Investigación colaborativa: potencialidades y problemas (Trad. Pérez, D. A. y Jaramillo, D.) *Revista Educación y Pedagogía*, 23 (59), pp. 125-135.

Bosch, M., García, F.J., Gascón, J. y Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática,* 18(2), pp. 37-74.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Murphy Gardiner, A., Newman-Owens, A., Sawrey, K. (2015) Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología,* 36 (1) pp. 151-165

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

Buffarini, F. (2005). *La dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación: las interacciones en el aula como medio para su evolución*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto.

Cambriglia, V., Sadovsky, P. y Sessa, C. (2010) Procesos colectivos de generalización.

*Memorias III Reunión Pampeana de Educación Matemática (*pp 140-151) Santa Rosa, Argentina.

Cammisi, M. E., Kiener, F. y Scaglia, S. (2016) El rol de las interacciones y del contexto en la construcción del sentido. *VI Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 244-253). Santa Rosa, Argentina. Disponible en: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/descargas/MemoriasVIREPEM2016_completas.pdf

Carraher, D., Schliemann, D. y Schwartz, J. (2013). ¿Álgebra en la escuela primaria? En C. Broitman (comp.), *Matemáticas en la escuela primaria (II).* Saberes y conocimientos de niños y docentes (pp. 121-167). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM

Castro, E. y Molina, M. (2007) Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, 19 (2), pp. 67-94

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2000). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, España: Horsori.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, España: La Muralla.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G, Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education. Epistemology, History, Classroom and Culture,* (pp.49-62). Rotterdam: Sense Publishers.

Gaulin, C., Hodgson, B.R., Wheeler, D.H. y Egsgard, J. (Eds.) (1994). *Proceedings of the Seventh International Congress on Mathematical Education.* Quebec: Les Presses de l'Université Laval.

Goetz, J. P. y LeCompte, M-D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid, España: Ediciones Morata.

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York, NY: Macmillan.

Howson, A.G. (Ed.) (1973). *Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Itzcovich, H. y Novembre, A. (coord.) (2006) Matemática M7. EGB 3. Buenos Aires, Argentina: Tinta Fresca.

Itzcovich, H., Ressia, B., Novembre, A. y Becerril, M. (2007). *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Aique Educación.

Kaiser, G. (Ed.) (2017). *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education.* ICME-13. Hamburgo: Springer Open. Disponible en https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-62597-3.pdf

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Kiener, F. (2015) Una propuesta para iniciar el trabajo algebraico en la escuela primaria: el caso de los gogos. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*. 32(2), 90, pp. 39-48.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Róterdan, Países Bajos: Sense Publishers.

Lester, F. Jr. (Ed.) (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Greenwich: Information AgePublishing.

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), pp. 113-158.

Mariotti, A. (2001) *Algunos pensamientos luego de ICME 9. Una entrevista con Paolo Boero*. (Trad. Herbst, P). Disponible en: http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/01Hiver/01HiverThemeES.html

McKnight, C., Magid, A., Murphy, T. y McKnigt, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa.* 5° edición. Madrid, España: Pearson. Addison Wesley.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2006): *Núcleos de Aprendizaje Prioritarios.* 3º Ciclo EGB/Nivel Medio 7º, 8º y 9º años. Argentina. Disponible en: http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Disponible en: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF.

Moreno, I. y Castellanos L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA*. 2 (3), pp. 247-258.

Moreno, I. y Castellanos L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. Revista EMA 2 (3), 247-258.

Nathan, M.J. y Koellner, K. (2007). A Framework for Understanding and Cultivating the Transition from Arithmetic to Algebraic. *Reasoning, Mathematical Thinking and Learning,* 9(3), pp. 179-192.

Oller Marcén, A. M., Meavilla Seguí, V. (2014) Entre la aritmética y el álgebra. Un análisis histórico de los "problemas de grifos". Educación matemática, 26 (1) pp. 103-126. Arcavi, A (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 13-22). Granada, España: Editorial Comares.

Olmedo, N., Galíndez, M., Peralta, J. y Di Bárbaro, M. (2015). *Errores y concepciones de los alumnos en álgebra.* XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México. Recuperado de http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/877/367

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer: aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999) La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (3), pp. 453-461

Proyecto 2061. *Algebra Textbooks Evaluation*. Extraído el 2/2/16 de: http://www.project2061.org/publications/textbook/algebra/summary/criteria.htm

Quaranta, M.E. y Tarasow, P. (2004). Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. *Relime*, 7(3), pp. 219-234.

Ramírez García, M., Rodríguez Marcos P. (2011) Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. *Revista UNIÓN*. 26, pp. 41-55.

Rancière, J. (2007). *El maestro ignorante. Cinco lecciones sobre la emancipación intelectual* (Trad. Fagaburo, C.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal (1987).

Romero, Isabel (1995). *La introducción del número real en educación secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada

Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

Sadovsky (2003) *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*. Tesis de doctorado. Universidad de Buenos Aires.

Sadovsky P. y Sessa C. (2005). The adidactical interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics*, 59, pp. 85-112.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. y Tarasow, P. (2013): “Transformar ideas con ideas. El espacio de discusión en la clase de matemática”. En Broitman, C. (Comp.): *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes* (pp. 221-236) Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Scaglia S. (2016) Reflexiones sobre la construcción de sentido en la formación inicial del profesor de matemática. En L. Rico Romero, M. C. Cañadas Santiago, A. Marin Del Moral y M. T. Sánchez Compaña (Eds.) *Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Moisés Coriat* (pp. 241-251). Granada, España: Comares.

Scaglia, S. y Kiener, F. (2015). La construcción del sentido en matemática desde distintas perspectivas. *Novedades Educativas*, 292, pp. 40-46.

Schliemmann, A.D., Carraher, D.W. y Brizuela, B.M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Paidós Cuestiones de Educación.

Sessa, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos

Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sessa, C. y Cambriglia, V. (2007). La validación de procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. *Yupana*, 4, pp. 11-24.

Silberschatz, C. (2010) Varying Speed. *Early Algebra Resources*. Recuperado de: https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/display/EarlyAlgebraResources/Varying+Speed

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá,

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), pp. 3-26.

Skovsmose, O. (2005). Meaning in Mathematics Education. En J. Kilpatrick, C. Hoykles y O. Skovsmose (eds), *Meaning in Mathematics Education* (83- 104). New York, Estados Unidos: Springer.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1996) *Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid, España: Síntesis.

Sociedad Argentina de Pediatría (2013) *Guía para la evaluación del crecimiento físico. Comité Nacional de Crecimiento y Desarrollo*. Buenos Aires, Argentina: Ideográfica.

Stake, R. (2007) *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Tarski, A. (1977) *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*. (Trad. T. R. Bachiller y J. R. Fuentes) Madrid, España: Espasa-Calpe (1951).

The National Council of Teacher of Mathematics (2014) *Algebra as a Strand of School Mathematics for All Students.* A Position of the National Council of Teachers of Mathematics.

UNICEF (2012) *Evaluación del crecimiento de niños y niñas. Material de apoyo para equipos de atención primaria de la salud*. Gobierno de Salta. Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia.

Vygotski, L. S. (1984) Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. *Infancia y aprendizaje.* 27/28, pp. 105-116. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/668448.pdf

Vygotski, L. S. (1993) *Obras Escogidas II. Problemas de Psicología General* (Trad. Bravo J. M.) Madrid, España: Visor Distribuciones (1982).

Yuni, J. y Urbano, C. (2006) *Técnicas para investigar. Recursos metodológicos para la Preparación de Proyectos de Investigación*. Volumen 1. Córdoba, Argentina: Brujas.

Zack, V. y Graves, B. (2002) Making mathematical meaning through dialogue: “once you think of it, the z minus three seems pretty weird” *Educational Studies in Mathematics* 46, pp. 229–271, Kluwer Academic Publishers.

.

ANEXOS

ANEXO 1:
Fragmento del Proyecto “Dimes y diretes”

A continuación presentamos un fragmento del Proyecto N° 1: *“Dimes y diretes” Sobre las formas del decir*, elaborado por las docentes de los dos séptimos grados de la escuela seleccionada, llevado a cabo durante los primeros dos meses y medios del año 2015.

Lenguaje matemático

- Leemos el enigma y vemos cómo logra resolverse

TEATRO: «La gran incógnita»

(En escena aparecen tres huéspedes del hotel [Bob, Jack y Rosa], los dueños Paco y Lourdes y el inspector Rop de la policía.)

ROP: Bien. Van ustedes a relatarme lo que ha sucedido en el hotel.

PACO: Mire señor inspector, aquí nunca había pasado nada extraño. Es un hotel muy pequeño, con pocas habitaciones y muy lejos del pueblo... y hoy por la mañana al ir a servir los desayunos... ¡señor!, ¡qué disgusto!..., la caja fuerte del hotel donde se guardaba nuestro dinero y el de los huéspedes estaba abierta y ¡VACIA!

LOURDES: No Paco, había una nota...

PACO: Sí. Una cuartilla con una letra escrita en rojo: una x.

ROP: Déjeme ver esta nota...

(El inspector examina cuidadosamente la nota y prosigue el interrogatorio.)

ROP: ¿Dónde estaban ustedes en el momento en que esta nota fue descubierta?

BOB: Yo estaba en mi habitación, la número 10, afeitándome.

JACK: Yo estaba haciendo una quiniela en la mesilla de mi habitación.

ROSA: Estaba releyendo la última edición de la obra de Agata Christie, *La ratonera*.

LOURDES: Me encontraba llevando las tazas y platos del café con leche.

PACO: Yo crucé en diagonal la recepción corriendo para llamarle.

ROP: El caso es realmente difícil: ¡Todos ustedes son sospechosos! En efecto, Bob está en la habitación 10 que es el número representado por los romanos por la letra x. Jack se entretenía rellenando quinielas, es decir, haciendo crucecitas, o sea, x, Rosa leía un libro que ahora se ha publicado con la décima edición, de nuevo 10 o x. Lourdes servía 5 tazas y 5 platos, es decir, 10 cosas y Paco cruzó en diagonal la recepción. La diagonal tiene ecuación $y=x$. Todos pudieron ser..., pero cualquiera pudo haber dejado esta pista falsa para inculpar a los demás.

ROSA: Se equivoca inspector. Ahora todo está muy claro. El ladrón ha sido... ¡usted!

ROP: ¡Por Dios!, no diga tonterías.

ROSA: El señor Paco no sabe álgebra, sólo números para hacer cuentas: no pudo pensar en un símbolo tan abstracto y el ladrón no podía preveer que cruzaría la recepción en diagonal. La señora Lourdes sirve tres tazas y tres platos y no diez piezas porque los dueños desayunan antes. Bob en la habitación 10 y Jack con sus quinielas no podían tener interés en el robo: los dos están de vacaciones después de haber ganado cien millones en la lotería..., usted vino de noche y dejó su firma una x, no una letra x, no el número romano diez..., la x de signo de multiplicar: por, es decir, leído al revés ¡rop! Usted.

ROP *(llorando)*: ¡Malditos libros de suspense!

(Los huéspedes atan al inspector por las manos.)

Texto extraído de: Alsina, C. Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). Invitación a la didáctica de la geometría. Madrid: Editorial Síntesis.

- Reconocemos símbolos matemáticos que se utilizaron. Recordamos otros.
- Pensar y anotar una incógnita en un papel para que sea resuelta por un compañero, en la que deban descubrir un número del 0 al 9. Las pistas serán armadas utilizando lenguaje matemático.
- En algunos casos no pudo resolverse, ¿por qué? Anotamos una conclusión en la carpeta.

Algunos de los símbolos del lenguaje matemático son:

Logogramas: signos inventados para referirse a conceptos totales. Además de las diez cifras (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) están los operatorios y los relacionantes (+, -, x, >, <, =). No tienen parecido alguno con lo que significan.

Pictogramas: íconos geométricos, imagen estilizada pero interpretable con total claridad del objeto en cuestión. Los signos de ángulo, de cuadrado, de triángulo son ejemplos.

Símbolos de puntuación: tomados de la ortografía pero con funciones

ANEXO 2:
Fragmento de transcripción de Clase Nº 1

A continuación presentamos un fragmento de la Transcripción de la Clase Nº 1 (frases 1-78)

La docente comienza la clase explicando que los grabadores se van a utilizar para grabar la voz, para ver cómo van resuelven la actividad, cómo participan y qué es lo que aportan. También destaca la importancia de participar de a uno por vez para poder escucharse bien. Reparte las fotocopias de los ejes cartesianos con las mismas escalas que se indican en el afiche.

1- D: Cuando yo les entregué el tablero de juego, podemos decir así, el tablero de juego, hay alguien que dijo la batalla naval. En realidad esto no es una batalla naval, sino una búsqueda del tesoro.
Los alumnos festejan.
2- A: Paralelos y meridianos.
3- A: Búsqueda del tesoro, ¡vamos!
4- D: En este tablero, en este tablero hay cuatro tesoros escondidos, la idea es que ustedes los descubran.
5- A1: Uh de acá ya veo uno. *(El alumno se dirige a su compañero de banco).*
6- D: Pero antes de empezar a arriesgar posibles ubicaciones del tesoro, quiero que analicemos el tablero de juego
7- A1: Latitud 5, longitud 3 *(En simultáneo con el discurso de la docente).*
8- A: Es como una batalla naval.
9- D: Es como una batalla naval, es ¿Cómo qué más?
10- A: Parece como los paralelos y los meridianos.
11- D: Parecen la gráfica, la red, de los paralelos y meridianos que es justo el tema que estamos viendo en sociales.
12- Marcos: Pero nada más que no está el cero en el medio.
13- Giovanni: Si como que no está separado por ecuadores y…
14- A: No está separado por el Ecuador y el Meridiano.
15- Varios: ¡Sí!
16- A: Pero no hay Norte y Sur.
Hablan varios al mismo tiempo.
17- D: ¿Dónde pondrían el cero que dice Marcos?
Hablan varios al mismo tiempo.
18- A: El Meridiano en el 4 y el Ecuador en el 3.
19- D: A ver que no entendí porque hablaron todos juntos, Juliana está levantando la mano
20- Juliana: El ecuador en el 3 en la línea del 3 y el de Greenwich en el 4.
21- A: No, no es el medio.
22- D: Lo que está diciendo Juliana, a ver, pensándolo en relación al planisferio que el Ecuador sería el 3, ¿Por qué? El eje 3, ¿Por qué?
23- Juliana: Porque está en la mitad.
24- D: Porque es la mitad de este plano.
25- A: Del 1 al 6.
26- D: Y ahí estaría el 0 grados, estoy tratando de seguir tu pensamiento ¿Es así? ¿Es lo que estás pensando?
27- Nicolás: También podría ir donde se cruzan las rayitas. (*En simultáneo con el discurso de la docente).*
28- D: ¿Y el meridiano de Greenwich en este plano?
29- A: En el 4.
30- A: En el 4,5.
31- D: En el 4,5.

32- A: Y en el 3,5 también el otro.
33- A: No.
34- A: Si, porque sino hay dos cuadraditos para abajo.
35- D: Bien, si esto fuera toda la Tierra digamos, pero yo pregunté en este tablero…
36- Nicolás: También puede ser donde se cruzan las flechitas.
37- D: Bien, pero tiene que ver con la pregunta lo que vos estás contestando. Por eso, vuelvo a preguntar porque algunos no escucharon, ¿Dónde ubicarían el cero Nicolás?
38- Nicolás: Donde se cruzan las flechitas.
39- D: Donde se cruzan las flechitas, si, ¿están de acuerdo?
40- Alumnos: Si.
41- D: Bien, ese sería el valor cero, ¿Lu?
42- Luciana: También está el cero… *(frase inaudible)*
43- D: Y con respecto a la posición de estos ejes ¿cómo se podrían llamar estos ejes? En matemática vimos, ¿cómo se llaman estas líneas?
44- A: Perpendiculares.
45- D: ¿Qué tienen las líneas?
46- A: Columnas.
47- A: Rectas.
48- D: Son líneas rectas, ¿Por qué?
49- A: Porque no tienen ni principio ni final.
50- A: Si tiene principio.
51- A: No.
52- A: Si porque ahí se cruzan todas.
53- D: ¿Dónde?
54- A: ¡Se cruzan en el punto cero!
55- D: En el punto cero se cruzan ¿Qué cosas?
56- A: Ah, es verdad son semirrectas.
57- Varios: ¡Semirrectas opuestas!
Hablan varios al mismo tiempo.
58- D: Bien, a ver, ordenen. En el punto cero se cruzan ¿Qué cosas?
59- A: Ángulos opuestos por el vértice.
60- Micaela: Son rectas perpendiculares.
61- D: Bien, son rectas perpendiculares ¿Por qué Mica?
62- Micaela: Porque forman ángulos de 90°.
63- D: Porque forman… ¿Cuántos ángulos de 90°?
64- A: Uno.
65- A: Cuatro.
66- D: ¿Uno solo?
67- A: Cuatro porque sigue la línea.
68- D: Bien, hay cuatro ángulos….
69- A: ¡Son ángulos opuestos por el vértice!
70- D: Bien, que a su vez son opuestos por el vértice entre sí… miren todos los conocimientos matemáticos que estamos recuperando ¿sí? Bien, y estas líneas, son rectas pero a su vez cuando se cortan en el punto cero ¿qué determinan?
71- A: Cuatro ángulos rectos.
72- D: Determinan los ángulos, bien, pero ¿siguen siendo rectas?
73- A: No, son dos semirrectas opuestas. O sea, cada recta se hace dos semirrectas opuestas.
74- D: Son semirrectas al ser cortadas por el punto cero, perfecto. Bien, vuelvo a lo que nosotros estamos viendo en sociales, el eje horizontal ¿que vendría a ser en el planisferio?
75- A: Latitud.
76- A: Los paralelos.
77- D: Los paralelos, ¿y el vertical?
78- A: Los meridianos.

ANEXO 3:

Tabla Nº 29

Tabla N° 29: Análisis de respuestas de estudiantes a la Tarea A5					
N° estudiante	**Introducción**	**Trayecto AB**	**Trayecto BC**	**Trayecto CD**	**Trayecto DE**
1		"Carolina sale del trabajo (A=casa), camina hacia la derecha 6 metros (4 segundos) hasta la tienda de deportes (B),"	"luego camina 2 metros (2 segundos) hacia la derecha hasta llegar al carnet (C),"	"en 2 segundos cruza una puerta que te llevan directamente hasta la farmacia (D)."	"Finalmente anochecio, le dio hambre entonces se fue al restaurante (E) que cada a 4 metros (4 segundos). FIN"
2		"Carolina en 4 segundos caminó 6 metros"	"cuatro segundos después camino 2 metros más"	"Después de eso descanso 3 segundos"	"y retomo 4 metros en 3 segundos. En total hizo 12 metros en 13 segundos"
3	"Carolina comenzó su paseo."	"En los primeros cuatro segundos hizo seis metros,"	"luego redució la velocidad de su caminata a medio metro por segundo"	"ellá paró unos segundos para comprar una botella de agua, tardando unos cuatro segundos,"	"luego se repuso y corrió a su casa, tardó unos tres segundos, completando trece segundos de recorrido"
4	AUSENTE				
5	"Carolina salio a caminar hasta la casa de su amiga loli, ya que ella hacia una pijamada. La casa de Loli esta situada en el punto E."	"Carolina a los 4 segundos de tiempo durante la caminata ya estaba a los 6 metros de su casa donde se encontró a Coti que también se iba a la casa de Loli."	"Las dos siguieron caminando juntas,"	"hasta que a los 8 segundos del tiempo ya estaban a los 8 metros de la casa de Carolina, donde pararon a comprar una gaseosa. A los 11 segundos del tiempo seguían en los 8 metros y se encontraron a Juli"	"Las tres iban directo a la casa de Loli. Cuando llegaron a la casa de Loli, estaban a los 13 segundos y a los 12 metros de distancia."

6	“Carolina decidió salir a caminar. Cuando estaba atándose los cordones en la puerta de su casa pasó su amigo Marcos que le dijo […]”	“Marcos siguió su recorrido y Carolina empezó a correr, no se distraía por nada estaba completamente consentrada en su caminata, porque se estaba preparando para la competencia estatal. Carolina era rápida, lograba recorrer en 4 segundos 6 metros,”	“y en 8 segundos podía correr desde su casa a la casa de sus vecinos que quedaba a 8 metros,”	“intentó tardar 7 segundos recorriendo la misma distancia pero no pudo, tardó 11 segundos.”	“No le importó, siguió corriendo y jugó con su amiga Mili a ver quién corría 12 metros más rápido, Carolina se consentró y pudo hacerlo en 13 segundos. Carolina volvió a su casa y se fue a dormir. Al otro día corrió la competencia y ¡salió 3era!”
7		“Carolina comenzó su paseo. En los primeros 4 segundos hizo 6 metros,”	“luego reducio la velocidad de su caminata a medio metro por segundo,”	“ella para unos segundos para comprar una botella de agua, tardando unos 4 segundos”	“por ultimo se repuso y corrió hasta su casa, tardo unos 3 segundos, completando 13 segundos de recorrido”
8		“EL PUNTO E MUESTRA QUE CAROLINA ESTABA A 13 METROS DE SU CASA, EL D MUESTRA QUE ESTÁ A 8 METROS DE LA MISMA, EL C A 8 METROS LA DIFERENCIA ENTRE EL C Y EL D SON LOS SEGUNDOS EL C: 8 SEG D: 10 SEG. EL PUNTO B ESTÁ A 6 METROS Y EL A A 0 METROS.”			
9		“Carolina comenzó con su paseo. En los primeros 4 segundos hizo 6 metros,”	“luego reducio la velocidad de su caminata a medio metro por segundo.”	“Ella paro unos segundos para comprar una botella de agua, tardando, unos 4 segundos”	“por ultimo se repuso y corrio hasta su casa unos tres segundos, llegando a 13 segundos”
10	“CAROLINA IBA A LA CASA DEL ABUELO PARA PASAR EL FINDE SEMANA. EL LE PIDIO QUE EN EL CAMINO PASE A COMPRAR LECHE, CUP, CARNE Y UNOS MEDICAMENTOS QUE NECESITA.”	“EN LA PANADERÍA COMPRO LA LECHE Y CUP QUE ESTA A 6 METROS Y 4” DE SU CASA”	“LUEGO PASO A COMPRAR LA CARNE QUE QUEDA A 8 METROS Y 8” ”	“DESPUES PASO A LA FARMACIA A COMPRAR SUS MEDICAMENTO QUE ESTA A 4” DE LA CARNICERÍA”	“FINALMENTE LLEGO A LA CASA DEL ABUELO QUE ESTA A 12 METROS Y 13” DE DONDE PARTIO”

11	"CAROLINA IBA A LA CASA DE SU ABUELO PARA PASAR EL FINDESEMANA. EL LE PIDIO QUE EN EL CAMINO PASE A COMPRAR LECHE, CUPKEY, CARNE Y UNOS MEDICAMENTOS."	"EN LA PANADERÍA COMPRO LA LECHE Y LOS CUPKEY QUE QUEDA A 6 METROS Y 4 SEGUNDOS DE SU CASA"	"LUEGO PASO A COMPRAR LA CARNE QUE QUEDA A 8 METRO Y 8 SEGUNDOS "	"DESPUES PASO A LA FARMACIA A COMPRAR LOS MEDICAMENTO QUE ESTA A 8 METRO Y 3 SEGUNDOS DE LA CARNISERÍA"	"FINALMENTE LLEGO A LA CASA DEL ABUELO QUE ESTA A 12 METROS Y 13 SEGUNDOS DE SU CASA"
12		"Carolina comenzó su paseo. En los primeros 4 segundos hizo 6 metros,"	"luego redució la velocidad de su caminata a medio metro por segundo."	"Ella paro unos segundos para comprar una botella de agua, tardando, unos 4 segundos"	"luego se repuso y corrió hasta su casa unos 3 segundos llegando a 13 segundos"
13	"Carolina iba a la casa del abuelo para pasar un finde semana. El le pidió que en el camino pase a comprar leche, cupkakes, carnes y unos medicamentos que nesecita."	"En la panadería compro la leche y los cupkakes que esta a 6 metros y 4 segundos de su casa"	"Luego pasa a comprar la carne que queda a 8 metros y 8 segundos"	"después pasa a la farmacia a comprar sus medicamento que esta a 3 segundos de la carnisería"	"Finalmente llega a la casa del abuelo que queda a 12 metros y 13 segundos de donde partio"
14	AUSENTE				
15		"Carolina sale del trabajo (A:casa), camina hacia la derecha 6 metros (4 segundos) hasta la tienda de deportes (B),"	"luego camina 2 metros (2 segundos) hacia la derecha hasta llegar al carnet (C),"	"en 2 segundos cruza una puerta que lleva directamente hacia la farmacia (D)."	"Finalmente anocheción, le dio hambre, entonces se fue al restaurant (E) que queda a 4 metros (4 segundos). FIN"
16	AUSENTE				
17	"Carolina salió de su casa para hacer un recorrido hasta la biblioteca su trayecto fue así:"	"Salió de su casa, pasaron los 4 segundos que ya había recorrido 6 metros hasta la plaza"	"siguió su trayecto y a los 8 segundos había hecho 8 metros de su recorrido"	"y llego hasta su restaurante favorito, pensó en tomarse algo. Unos segundos después se arrepintió y siguió su camino. Siguió y a los 11 segundos pasó por la casa de sus abuelos. Tomó unos mates con ellos luego se retiró y siguió"	"A los 13 segundos ya había hecho 12 metros y llegó a la biblioteca y buscó uno libros e hizo el mismo recorrido para llegar a su casa de nuevo"

18		"CAROLINA sale del trabajo (A:casa), camina hacia la derecha 6 metros (4 segundos) hasta la tienda de deportes (B),"	"luego camina 2 metros (2 seg) hacia la derecha hasta llegar a hacerse el carnet (C),"	"en 2 segundos cruza una puerta que te lleva directamente hacia la farmacia (D)."	"Finalmente anochesio y le dió hambre, entonces se fue al restaurante que cada a 4 metros (E). FIN"
19		"El punto E muestra que Carolina estaba a 12 metros de su casa y tardó 13 segundos en llegar. Luego le faltaban 8 metros y tardó 11 segundos. Pero se ve que estaba cansada, se tomó un helado y siguió, pero ahí en 8 segundos estaba en su casa. Estaba anocheciendo y le faltaban 6 metros, pero decidió ir al supermercado. Cuando salió en 4 segundos estaba en su casa. Fin"			
20	"Carolina iba a la casa del abuelo para pasar el fin de semana. El le pidió que en el camino pase a comprar leche, cupkace, carne y unos medicamentos que necesita."	"En la panadería compro la leche y cupkace que esta a 6 metros y 4 segundos de su casa"	"Luego pasa a comprar la carne que queda a 8 metros y 8 s"	"después pasa a la farmacia a comprar sus medicamento que esta a 3 segundos de la carnicería"	"Finalmente llego a la casa del abuelo que queda a 12 metros y 13 segundos de donde partio"
21		"Carolina sale del trabajo (casa), camina hacia la derecha 6 metros (4 segundos) hasta la tienda de deportes (B),"	"luego camina 2 metros (2 segundos hacia la derecha hasta llegar al carnet (C),"	"en 2 segundos cruza una puerta que te lleva directamente hasta la farmacia (D),"	"finalmente anochecio, le dio hambre, entonces se fue al restaurante que que queda a 4 metros (4 segundos). FIN"
22		"Carolina en 4 segundos camino 6 metros,"	"cuatro segundos despues hizo 4 metros"	"despues de eso descanzo por 3 segundos"	"y retomo con 4 metros en 3 segundos. En total hizo 12 metros en 13 segundos"
23		"Carolina empeso desde el punto A y camina hasta el punto E en 13 segundos y a medida que llega a cada punto se va alejando más de su casa"			
24		"Carolina empezó en A sería 0 metro y 0 segundos. Luego subió a B 4 segundos y 6 metros"	"Después subió 2 metros y 8 segundos"	"Carolina se fue para la derecha 3 segundos"	"y por ultimo subío a E con 12 metros y 14 segundos. En total subio 12 metro y 13 segundos."

25	"Carolina había salido a caminar"	"A los cuatro segundos ya había avanzado 6 metros"	"Camino en diagonal, y a los ocho segundos ya había llegado a los ocho metros desde que salió de su casa"	"Caminó derecho hasta los diez segundos"	"y volvió a caminar en diagonal. A los trece segundos de caminata ella había recorrido 12 metros en total."

ANEXO 4:

Fragmento de transcripción de Clase Nº 5

A continuación presentamos un fragmento de la Transcripción de la Clase Nº 5 (frases 1-236)

1. La maestra comienza la actividad diciéndoles a los alumnos que van a resolver un problema con gogos y les pregunta de qué manera juegan con los gogos.
2. A: ¿Y qué tienen que ver los gogos con la matemática?
3. D: Vamos a suponer que estas cajas pertenecen a un tal Pablo y un tal Juan. Tienen gogos adentro *(les llama la atención para que hagan silencio).* Yo voy a pasar las cajas por acá, no vale abrirlas, simplemente la tienen que tocar, hacerla sonar y demás y la pasan. Pablo y Juan tienen la misma cantidad de gogos adentro de sus cajas. Vienen coleccionando y llegaron a juntar la misma cantidad de gogos. (le llama la atención a un alumno para que pase la caja "Corti, un poquito y paso, dale, egoísta). Tienen la misma cantidad de gogos, hasta ahora, hasta hoy. Venían coleccionando y juntaron la misma cantidad de gogos. La cuestión es que Pablo hoy en el recreo ganó tres más.
4. A: Uhh.
5. A: Pará ¿cuál es Pablo?
6. A1: ¿Pablo Díaz? *(estudiante del otro séptimo grado)*
7. D: Capaz, este es habilidoso en lo gogos, con los gogos. Pablo que tiene una caja igual que Juan, con la misma cantidad, hoy en el recreo…
8. A: Pablo y Juanjo.
9. D: Juanjo, vamos a ponerle Pablo y Juanjo. . . que tienen la misma cantidad, y Pablo ganó tres gogos más en el recreo. La pregunta es la siguiente, primero para pensarla cerramos la boca, no digo lo primero que se me ocurre. Cierro un poquito la boca y pienso. Después si de pensarlo, levanto la mano y digo mi opinión. ¿Cuántos gogos tiene Pablo y cuántos gogos tiene Juanjo?
10. JOSÉ: ¿Contando esos o no?
11. *La docente les llama la atención para que no digan lo primero que se les ocurre. Vuelve a leer el enunciado del problema.*
12. JOSÉ: Pero no sabemos a quién le ganó Pablo.
13. A1: ¡Yoyoyo!
14. A2: No, no entiendo.
15. *La docente les dice que levanten la mano. Vuelve a repetir el problema.*
16. JOSÉ: Capaz que le ganó a Juanjo.
17. A1: Claro, capaz que se los ganó a Juanjo.
18. A2: Pero pueden ser varias posibilidades.
19. D: Bueno, a Juanjo no se los ganó porque Juanjo sigue teniendo la misma caja con la que vino a la escuela, que tiene la misma cantidad que la que tiene Pablo. Entonces a Juanjo no se los ganó.
20. JOSÉ: No los sacó de la mochila todavía.
21. D: Entonces a Juanjo no se los ganó. Bien, esa es una duda descartada. La pregunta es ¿Cuántos gogos tiene Juanjo y cuántos gogos tiene Pablo?
22. JOSÉ: ¡Yo!
23. A2: Ah, pero si no sabemos…
24. D: Nadie me dice cantidades todavía, tienen que tener la mano levantada.

Se escucha alumnos hablando entre ellos (no dirigiéndose hacia la maestra)

25. A3: ¿Pablo es el que empezó por la derecha?
26. A5: Dividiendo en dos…
27. A3: ¿Pablo es el que empezó por la derecha?
28. A4: Pueden ser muchas posibilidades…
29. D: Bueno, levanto la mano. Ahora sí escucho, shhh, levanto la mano. Vos ya aclaraste tu duda ya está *(se dirige a José).* A ver Ana.
30. Ana: 11.

31. D: ¿Quién?
32. Ana: Pablo.
33. D: Pablo tiene 11.
34. A6: ¿Cuál es el que empezó por el lado de José?
35. D: Ehh no, no porque como eran iguales las cajas pudo haber sido la de Pablo o la de Juan.
36. A7: Pero qué ¿tienen la misma cantidad?
37. D: 11 tiene Pablo y ¿Juanjo? Shhh *(dirige la pregunta a Ana)*
38. Ana: Ehh, 8.
39. D: Shh primero escuchen. Primero digan lo que piensan, después vamos a pensar y discutir.
40. Ana: 8.
41. D: 11 y Juanjo 8. Bien, ¿vos?
42. A1: Ehhh, 13.
43. D: ¿Quién?
44. A1: Ehh Pablo 13 y 5.
45. José: ¡Ehh! ¿De dónde sacaron esas cantidades? *(en voz baja, se dirige a su compañero de banco)*
46. D: Bien, sigamos, Estanislao.
47. Estanislao: Ehh, 12 y 9.
48. D: ¿12?
49. Estanislao: Y 9.
50. A2: Y bueno.
51. D: ¿Andrea?
52. A: Yo iba a decir 11 pero no, ya está.
53. A2: 5 + 13…
54. José: ¡Yo!
55. D: A ver vamos a analizar las distintas posibilidades que van surgiendo. Lu, que ya se está acalambrando.
56. Luciana: Yo te quería hacer una duda.
57. *Se escucha que otros alumnos conversan entre ellos sobre el problema.*
58. Luciana: ¿Teniendo en cuenta lo que te parece que pesan?
59. D: Vos tené en cuenta lo que quieras.
60. Luciana: Porque por ahí puede tener uno más que el otro.
61. Nicolás: Perdón, porque hay gogos más grandes que otros.
62. A1: Son más…
63. A2: ¡Devuelvan las cajas!
64. D: A ver…
65. José: Pero si no sabés cuántos tenían, no se puede.
66. A1: Sí se puede pero hay muchas posibilidades.
67. A: Yo, yo...
68. D: Sí puede ser cualquier número.
69. Mariana: Y puede ser 80 y 83.
70. D: Esa es una posibilidad y dice Luciana …
71. A: Yo, yo...
72. A1: Al revés seño, es 83 y 80.
73. José: Seño, ¿es a tirarle a pegar?
74. D: Ajá.
75. José: ¡Ahh!
76. A: Y sí son muchas posibilidades.
77. A1: Yo quiero 11 y 8 no 12 y 13.
78. D: Es arriesgar.
79. D: Ehh, ¿al revés Lu? ¿83 y 80?
80. A: Yo, Seño, ¡yo!
81. D: Luciana..., yo no sé si escucharon. Luciana me preguntó si tenía que tener en cuenta el peso. yo le dije que tuviera en cuenta lo que ella necesitara tener en cuenta. En principio en los datos que yo les di no dije nada sobre el peso y un compañero contestó que pueden ser algunos más pesados y otros

más livianos. El dato que yo les dí es que tenían la misma cantidad.
82. A: ¿Quién dijo 12 y 9?
83. A1: Seño, yo calculé mal el mío ¿me lo podés borrar?
84. D: A ver, ya vamos ya vamos, por supuesto… Sí, Mariana.
85. Mariana: Pablo 24…
86. D: Ajá.
87. Mariana: Y Juanjo 21.
88. D: ¿Venti?
89. Mariana: 1.
90. A: Mariana ¿le tiraste a pegar?
91. Mariana: Sí.
92. D: José.
93. José: Pablo 9 y Juanjo 6.
94. A: Ése iba a decir yo.
95. A1: Le tiraste a pegar, ¿no es cierto?
96. A2: Pablo 6 y Juanjo 3.
97. D: Bien, ahí llegó. Gerónimo, ¿por qué vos decís que te equivocaste?
98. Gerónimo: Porque hice mal el cálculo...
99. D: A ver…
100. Gerónimo: Porque pensé que como decía que coleccionaron juntos, pensé que Pablo y Juanjo hacían 5 y 5, entonces se sumaban… eran 10 y 3 que ganaba Pablo, hacían 13.
101. D: Bien, ¿cuál es el tuyo?
102. Gerónimo: 13 y 5.
103. Todos: 13 y 5.
104. D: ¿Y por qué esto está mal, entonces?
105. Gerónimo: Porque…
106. D: ¿Cuánto te tiene que dar?
107. A: Tienen que tener diferencia de 3.
108. A1: Porque ahí hay 8 cositos de diferencia.
109. D: Ajá. ¿Eso es lo que estás diciendo, lo que dicen las chicas?
110. Gerónimo: Sí.
111. D: Bien, entonces ¿qué número tendría que escribir acá?
112. Gerónimo: 10.
113. A1: Eso es lo que iba a decir yo.
114. A: O cambiaría el otro *(varios)*
115. D: ¿O? Dejenlo a Gerónimo decidir porque él está corrigiendo su posibilidad. A ver, ¿o…?
116. (Silencio)
117. D: 13 o 10, está bien eso. Sino lo que dicen las chicas es si vos dejás un 5 acá ¿cuánto tendrías que tener?
118. Gerónimo: Ah, 8.
119. Varios: 8.
120. D: Esa es la otra posibilidad. Porque como están diciendo también la diferencia tiene que ser ¿cuánto?
121. Varios: de 3.
122. D: ¿Quién dijo 11 y 8?
123. Ana: Yo.
124. D: Ana. La diferencia cuánto es?
125. Ana: 3.
126. D: 3. Vamos a ver la otra posibilidad. 12 y 9 ¿quién dijo?
127. A: 3.
128. Estanislao: Yo.
129. D: ¿Quién?
130. Estanislao: Yo.
131. D: El Estanislao. ¿De cuánto es la diferencia?

132. Estanislao: De 3.
133. M. 3. ¿10 y 7?
134. A: 3.
135. A1: 83 y 80.
136. A: 3.
137. D: ¿24 y 21?
138. A: 3.
139. D: ¿9 y 6?
140. A: 3.
141. D: ¿6 y 3?
142. A: 3.
143. D: ¿Por qué la diferencia siempre nos da 3?
144. A1: Porque tienen la misma cantidad...
145. A: Porque Pablo menos Juanjo…
146. Se escuchan varios que intentan explicar al mismo tiempo.
147. D: ¡Uno que explique por favor! Pero, están levantando la mano los compañeros.
148. A: Porque los dos tenían la misma cantidad de gogos pero o sea… por ejemplo, uno tenía 8 y el otro tenía 8.
149. D: Ujú.
150. A: Y uno ganó tres y el otro se quedó con lo mismo que tenía antes.
151. D: Muy bien, ¿quién quiere decirlo también pero de otra manera? A ver... Nicolás.
152. Nicolás: Que. .. en el caso dePaulina 11 y 8. Eh, Pablo tenía 8 y Juanjo también la misma cantidad. Y Pablo ganó 3, y le sumás 3 y te da 11.
153. X: Pero yo entendí que pueden tener distintas posibilidades.
154. D: A ver.
155. X: Que cuando ganaron 3 gogos ahí sí tuvieron lo mismo.
156. A: Claro, capaz que...
157. D: ¿Pero eso dije yo? ¿Que después de ganar tres tenían la misma cantidad?
158. Varios: No.
159. X: No, pero no aclaraste que después de tener la misma cantidad ellos ... *(inaudible)* .
160. Se oyen comentarios más bajos de otros compañeros.
161. D: Bien, yo les dije que tenían la misma cantidad hasta el día de hoy en que en el día de hoy en el recreo Pablo…
162. A: Capaz que las cajas tienen lo mismo, capaz que tienen 8 y 8 *(en simultáneo con el discurso docente).*
163. D: La caja tiene la misma cantidad. Una y otra. Además, fíjense que por eso son iguales por eso cuando me preguntan cuál es de pablo y cuál es de Juanjo no las puedo distinguir.
164. José: ¿Quién dijo 7 y 10?
165. D: Bien, eh ¿Marcos?
166. Marcos: Pablo menos Juanjo te da cero. Si tienen los dos 7, 7-7, 0 más los tres que ganó te da 3, y la diferencia es 3.
167. D: La diferencia entre ellos es tres, la diferencia es 3. Bien. ¿Y estas son las únicas posibilidades?
168. Varios: Nooo.
169. A: Hay infinitas.
170. A1: ¡Infinitas!
171. D: A ver…
172. A: 3 y 0, 4 y 1, 5 y 2, 6 y 3.
173. D: A ver Lu terminá tu idea.
174. Luciana: Hay infinitas posibilidades, porque puede ser ehh diez mil millones y diez mil millones tres.
175. D: ¿Qué dicen sobre lo que está diciendo Luciana? Sí Alejo a ver...
176. Alejo: 14 y 11. 14 Pablo y 11 Juanjo.
177. D: Bien, la que había pensado Camila. Justo, estaba levantando la mano. Y ¿qué dicen de la

posibilidad que está diciendo Luciana?
178. A: También está bien porque al no saber cuánto tenés en la caja podés decir cualquier posibilidad.
179. D: Puede ser que haya un millón de gogos en una…y en otra un millón de gogos...
180. A: Pero no, ¡tienen que entrar en la caja! *(en simultáneo con el discurso de la docente)*
181. A1: Dos millones trescientos ochenta mil…
182. A: ¡Nunca dijo que tienen que entrar en la caja!
183. D: ¡Y si ya están adentro! ¡Tienen que entrar!
184. A: Pero no dijiste que ...
185. D: No de este tamaño, un millón de estos gogos no creo que entren, ¿no?…
186. Se escuchan risas.
187. D: Pero podrían ser figuritas de estos gogos también, no? y puede haber un millón en cada caja,
188. A: No puede entrar diez millones *(en simultáneo con el discurso de la docente)*
189. D: Un millón, pero Pablo tendría ¿cuánto? un millón … hoy por ganar en el recreo, un millón ¿cuánto?
190. Varios: ¡Tres!
191. D: Un millón tres, bien. La diferencia es tres.
192. A: No, puede ser que tenga un millón y el otro tenga menos.
193. M. ¿Cómo?
194. A: Y el otro tenga menos.
195. A1: Un millón y novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y siete.
196. D: ¿Cuánto va a tener el otro? Si uno tiene un millón… Si Pablo tiene ….
197. A1: Novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y siete.
198. D: Ah, ah bien! Tres menos, bien, perfecto. ¿por qué hay infinitas posibilidades? Yo escribí en el pizarrón algo que dijo Luciana que es lo que estamos pensando, cualquier número podría ser.
199. A: Porque no te dice la cantidad que tiene cada uno.
200. D: Claro, es lo que tenemos que estimar, ¿sí? Y ¿cómo podríamos entonces lo que tiene Pablo y lo que tiene Juanjo sin pensar en un número concreto, ¿de qué manera?
201. a: Abriendo la caja.
202. D: Abriendo… ahí contamos. Pero digo de qué matemáticamente …
203. A: Con la letra x o otra letra.
204. D: Podemos usar una letra para eso.
205. A: La incógnita.
206. José: ¡x! Juanjo tiene x y Pablo tiene el mismo x que Juanjo más tres.
207. D: ¡Appa! A ver… ¿estás escuchando?
208. A2: Si, ¡x más tres!
209. A3: Como las ecuaciones.
210. D: Pablo tiene x+ 3 dicen acá y Juanjo tiene x, ¿están de acuerdo?
211. Varios: ¡si!
212. D: ¿Si? Porque Pablo tiene tres gogos más que Juanjo que tiene x. Muy bien. Otra forma podría ser decir, como es cualquier número, que Pablo tiene…
213. A: La culpa la tiene *(inaudible) (en simultáneo con el discurso de la docente)*
214. D: Podemos poner una n para señalar el universo de los números más tres y Juanjo tiene n, ¿si?
215. A: La culpa la tiene *(inaudible)*
216. A1: ¡Seño! x+3-x te da lo de… eh.. te da Pablo.
217. D: A ver...él dice x+3-x te da ¿qué?
218. A1: Pablo.
219. Varios: La diferencia.
220. D: Ahh y entonces ¿cómo se hallaría esto?
221. A2: ¡3!
222. A3: x menos … x más x menos…no, no.
223. José: Ah, tenés que saber…
224. D: La diferencia te va a dar ahí o ¿no?
225. José: Ah, ¡es que tenés que saber lo que vale x!!

226. A: No ¡seño!
227. D: ¿cómo hago la diferencia?
228. A2: ¡restando!
229. A1: x-x-3 *(en simultáneo con el discurso del último estudiante)*
230. D: Ahh.
231. A3: Pero imposible...
232. A: A x le restás x… no, si a x+3 le restás x te da 3 *(en simultáneo con el discurso del último estudiante).*
233. D: Ajá. Bien, pero porque sé que es tres en este caso. Lo que estás diciendo vos Nicolás es que x+3 que es lo que tiene Pablo (escribe en el pizarrón) menos x te va a dar igual a 3, que es la diferencia, ¿si? porque sé que es 3 la diferencia en este caso. Bueno, teniendo en cuenta esto les vamos a pedir que traten de completar el siguiente cuadro. Pero primero, a ver… nadie tiene que decir… la consigna es la siguiente: cada uno lea el cuadro, hay espacios para completar
234. A: Podemos hacerlo de a dos *(interrumpe a la docente)*
235. D: Escuchá primero toda la consigna. Hay espacios para completar. Todo el mundo tiene que intentar completar esos espacios y después sí, después de ese intento primero después si cada uno va a expresar esto de no entendí esto, no entendí aquello, me parece que esto está mal, etc. En el mientras tanto tiene que haber un murmullo de trabajo de a dos, vamos a trabajar de a dos, ¿eh? como están así sentados, compartiendo lo que piensan y tratando de resolver. Pero nadie grita ¿qué es esto? ¡no entiendo! No, eso después lo charlamos. ¿Sí? Primero, intenten resolver con el compañero de al lado.
236. Se escuchan murmullos. Los niños comienzan a resolver la segunda tarea del Bloque B.

ANEXO 5:

Tabla Nº 33

Tabla Nº 33: Intervenciones de la docente en el Problema de los gogos (Tarea B1)			
Episodio	**Intervenciones de la docente**	**Frase Nº**	**Transcripción Nº**
1. Producción de nuevos problemas	*Bueno, a Juanjo no se los ganó porque Juanjo sigue teniendo la misma caja con la que vino a la escuela, que tiene la misma cantidad que la que tiene Pablo. Entonces a Juanjo no se los ganó.*	19	23
	Entonces a Juanjo no se los ganó. Bien, esa es una duda descartada. La pregunta es ¿Cuántos gogos tiene Juanjo y cuántos gogos tiene Pablo?	21	
	Nadie me dice cantidades todavía, tienen que tener la mano levantada.	24	
	Bueno, levanto la mano. Ahora sí escucho, shhh, levanto la mano. Vos ya aclaraste tu duda ya está (se dirige a José). A ver Ana:	29	
2. Desacuerdos en el debate colectivo.	*¿Quién?*	31	24
	Pablo tiene 11.	33	
	Ehh no, no porque como eran iguales las cajas pudo haber sido la de Pablo o la de Juan.	35	
	11 tiene Pablo y Juanjo? Shhh	37	
	Vos tené en cuenta lo que quieras.	59	25
	Sí puede ser cualquier número.	68	
	Esa es una posibilidad y dice Luciana ...	70	
	Ajá.	74	
	Es arriesgar.	78	
	Ehh, ¿al revés Lu? ¿83 y 80?	79	
	Luciana..., yo no sé si escucharon. Luciana me preguntó si tenía que tener en cuenta el peso. yo le dije que tuviera en cuenta lo que ella necesitara tener en cuenta. En principio en los datos que yo les di no dije nada sobre el peso y un compañero contestó que pueden ser algunos más pesados y otros más livianos. El dato que yo les dí es que tenían la misma cantidad.	81	
3. Revisión de la respuesta	***A ver, ya vamos ya vamos, por supuesto…*** *Sí, Mariana.*	84	26

propia	*Ajá*	86	
	Venti?	88	
	José	92	
	Bien, ahí llegó. Gerónimo, por qué vos decís que te equivocaste?	97	
	A ver…	99	
	Bien, ¿cuál es el tuyo?	101	
	¿Y por qué esto está mal, entonces?	104	
	¿Cuánto te tiene que dar?	106	
	Ajá. ¿Eso es lo que estás diciendo, lo que dicen las chicas?	109	
	Bien, entonces ¿qué número tendría que escribir acá?	111	
	¿O? Dejenlo a Gerónimo decidir porque él está corrigiendo su posibilidad. A ver, ¿o…?	115	
	13 o 10, está bien eso. Sino lo que dicen las chicas es si vos dejás un 5 acá ¿cuánto tendrías que tener?	117	
	esa es la otra posibilidad. Porque como están diciendo también la diferencia tiene que ser cuánto?	120	
	¿Quién dijo 11 y 8?	122	
	Ana. La diferencia ¿cuánto es?	124	
4. Razones para explicar el patrón	***¿Por qué la diferencia siempre nos da 3?***	143	27
	Uno que explique ¡por favor! pero, están levantando la mano los compañeros.	147	
	ujú	149	
	Muy bien, quién quiere decirlo también pero ¿de otra manera? A ver... Nicolás	151	
	A ver.	154	
	¿Pero eso dije yo? ¿Que después de ganar tres tenían la misma cantidad?	157	
	Bien, yo les dije que tenían la misma cantidad hasta el día de hoy en que en el día de hoy en el recreo Pablo…	161	

	La caja tiene la misma cantidad. Una y otra. Además, fíjense que por eso son iguales por eso cuando me preguntan cuál es de Pablo y cuál es de Juanjo no las puedo distinguir.	163	
	Bien, eh ¿Marcos?	165	
5. Discusión sobre la cantidad de soluciones	*La diferencia entre ellos es tres, la diferencia es 3. Bien.* ***¿Y estas son las únicas posibilidades?***	167	28
	A ver…	171	
	A ver Lu terminá tu idea.	173	
	¿Qué dicen sobre lo que está diciendo Luciana? *Sí Alejo a ver...*	175	
	Bien, la que había pensado Camila. Justo, estaba levantando la mano. ***Y ¿qué dicen de la posibilidad que está diciendo Luciana?***	177	
	Puede ser que haya un millón de gogos en una…y en otra un millón de gogos...	179	29
	¡Y si ya están adentro! ¡Tienen que entrar!	183	
	No de este tamaño, un millón de estos gogos no creo que entren, ¿no?	185	
	Pero podrían ser figuritas de estos gogos también, ¿no? y puede haber un millón en cada caja.	187	
	Un millón, pero Pablo tendría ¿cuánto? un millón ... hoy por ganar en el recreo, un millón ¿cuánto?	189	
6. Utilización del lenguaje simbólico	***Abriendo… ahí contamos. Pero digo de qué matemáticamente …***	202	30
	Podemos usar una letra para eso.	204	
	¡Appa! A ver… ¿estás escuchando?	207	
	Pablo tiene x+ 3 dicen acá y Juanjo tiene x, ¿están de acuerdo?	210	
	¿Si? Porque Pablo tiene tres gogos más que Juanjo que tiene x. Muy bien. Otra forma podría ser decir, como es cualquier número, que Pablo tiene…	212	
	Podemos poner una n para señalar el universo de los números más tres y Juanjo tiene n, ¿si?	214	
	A ver...él dice x+3-x te da ¿qué?	217	31
	Ahh y entonces ¿cómo se hallaría esto?	220	
	La diferencia te va a dar ahí o ¿no?	224	

	¿cómo hago la diferencia?	227	
	Ahh.	230	
	Ajá. Bien, pero porque sé que es tres en este caso. Lo que estás diciendo vos Nicolás es que x+3 que es lo que tiene Pablo (escribe en el pizarrón) menos x te va a dar igual a 3, que es la diferencia, ¿si? porque sé que es 3 la diferencia en este caso. Bueno, teniendo en cuenta esto les vamos a pedir que traten de completar el siguiente cuadro. Pero primero, a ver… nadie tiene que decir… la consigna es la siguiente: cada uno lea el cuadro, hay espacios para completar.	233	