FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

ESPECIALIZACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Diseño y análisis de una propuesta didáctica para introducir el concepto de función desde una perspectiva unificada de la matemática

Tesista: Forastieri, Gonzalo Alexander

Director: Pochulu, Marcel David.

Resumen

En este trabajo analizamos y fundamentamos una propuesta didáctica para la introducción del concepto de función en el segundo año del nivel medio (estudiantes de 14 – 15 años) desde una perspectiva unificada de la matemática. Distintos resultados de investigación en educación matemática muestran que aún existe una mirada sobre las distintas áreas de la matemática como compartimentos estancos e inconexos. Motivados por esta situación, hemos determinado que el concepto de función posee una naturaleza unificante, además de una fuerte presencia en el currículum de matemática y notable evolución histórica frente a otros conceptos. Teniendo en cuenta los errores y dificultades que reportan los autores de educación matemática, la evolución histórica y las recomendaciones didácticas existentes, hemos propuesto dos tareas (una de ellas mediadas por el software de geometría dinámica *GeoGebra*) presentando el concepto de función desde una mirada *variacional*. Por último utilizado el constructo idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico realizamos una valoración de la propuesta donde determinamos que la misma tiene alta idoneidad ecológica, mediacional y epistémica y, se podrían mejorar las facetas afectiva, emocional y en menor medida la cognitiva.

ÍNDICE

Introducción **3**

Antecedentes **5**

El objeto matemático función 5

Dificultades y errores que tienen los estudiantes 8

Las recomendaciones didácticas 10

Contexto de la propuesta **11**

Objetivos **12**

Marco epistémico de referencia **12**

Significado institucional de referencia para el concepto de función 13

Propuesta **15**

Actividad 1 15

Actividad 2 18

Idoneidad didáctica de la propuesta **24**

Criterios de idoneidad didáctica 25

Valoración de los indicadores de idoneidad didáctica en nuestra propuesta 31

Idoneidad epistémica 31

Idoneidad ecológica 32

Idoneidad mediacional 32

Idoneidad cognitiva 33

Idoneidad interaccional 33

Idoneidad emocional 33

Representación gráfica de la idoneidad didáctica a priori 34

Consideraciones para la gestión 34

Revisión de la propuesta desde una segunda mirada 36

Reflexiones finales **37**

Referencias bibliográficas **40**

Introducción

En 2017, en Argentina, se llevó adelante un operativo de evaluación llamado *aprender* con el fin de relevar los aprendizajes de los estudiantes de secundaria en distintos aspectos. En lo que respecta a matemática, reportó que el 41,3 % de los estudiantes está *debajo del nivel básico* (es capaz de traducir enunciados coloquiales sencillos a un lenguaje algebraico e interpretar información directa de gráficos sencillos). Por otra parte, un 27,5% se encuentra en *nivel básico* (puede resolver situaciones matemáticas en contextos que les resultan conocidos y en las que cuentan con toda la información necesaria). Un 27% de los estudiantes evaluados fueron capaces de alcanzar el *nivel satisfactorio* (traducir de un modo de representación a otro y resolver situaciones extra e intramatemáticas que involucran conceptos geométricos, de medida, de planteamiento de ecuaciones y de utilización de conocimientos algebraicos para su solución). Y por último, solamente un 4,2% logró un *nivel avanzado,* es decir, logra resolver problemas complejos en los que deben inferir datos implícitos y relacionar conceptos matemáticos entre sí (Reporte Programa Aprender, 2017, p. 47).

Si consideramos este último resultado, menos del 5% de los estudiantes logra relacionar conceptos matemáticos entre sí, nos lleva a pensar que las propias estrategias de enseñanza que se utilizan en la construcción de dichos conceptos no lo hacen. A propósito, Molinolo (2010, p.5) asegura que "existe [...] una tensión evidente entre un saber disciplinario fragmentado y la necesidad, cada vez mayor, de integración de saberes". Resulta central que, en la clase de matemática, las propuestas de enseñanza apunten a unificar la matemática y así superar a las actuales propuestas donde se presentan conceptos aislados, considerando las diferentes áreas de la matemática como compartimentos estancos e inconexos.

Para comenzar a abordar el problema creemos necesario acordar, en primer lugar, qué entendemos por matemática y luego continuar explicando por qué hablamos de una matemática unificada. La Real Academia Española define la matemática como: "ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones". De esta definición podemos advertir que, para explicar en un enunciado el significado del término, se hacen referencia a características universales de la ciencia: propiedades y relaciones. Esta misma conclusión se puede obtener al interpretar otras definiciones como la que da UNESCO (2016, p. 26) donde se pregunta: "¿qué es la matemática si no el desarrollo organizado y consciente de la natural capacidad humana de detectar, examinar, utilizar patrones, resolver problemas y encontrar orden dentro de lo que a primera vista resulta caótico?". En definitiva, aun cuando estas definiciones pueden resultarnos más o menos acertadas de acuerdo a nuestras propias convicciones sobre lo que consideramos (o no) matemática, lo que no podemos negar es que comparten el tratamiento de la ciencia como una unidad.

A propósito de ello, Gutiérrez (2004, p. 23), asegura que "las diferentes áreas de las matemáticas escolares (aritmética, geometría, álgebra, análisis matemático, etc.) no son compartimentos estancos, sino que tienen estrechas relaciones. Estas relaciones tienen que ver, por lo general, con el uso de un área como herramienta en otra". Si bien esta afirmación es contundente, y acordamos profundamente, también es necesario que pongamos de manifiesto otra preocupación: ¿todas las nociones matemáticas pueden abordarse bajo esta premisa? Una respuesta a priori podría ser que algunos conceptos son más adecuados que otros para este tipo de trabajo. Por ello, creemos necesario que la didáctica de la matemática se enfoque en aquellos conceptos que no la fragmentan.

Cabe preguntarnos ahora, ¿qué conceptos matemáticos tienen este carácter unificador? Es posible que uno de ellos sea el concepto de número, sin embargo, para Font (2011, p. 146) "la noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora", es decir que, para el autor, el concepto de función posee las características que reflejan las definiciones. Por otra parte, Ruiz Higueras (1994), acuerda que éste es uno de los conceptos más importantes de la matemática, sin embargo, advierte que "se trata de un concepto complejo ya que contiene una multiplicidad de registros representativos y genera muy distintos niveles de abstracción" (p. 79). Esta autora realiza un relevamiento de las principales investigaciones sobre la concepción de función, entre ellas, aquellas que, a través de cuestionarios, buscan identificar concepciones previas o erróneas del concepto de función concluyendo que "llegar al concepto general de función (tal como lo contempla la matemática en la actualidad) es inherentemente difícil para los alumnos" (Higueras, 1994, p. 127). Dicha conclusión no es menor y en parte explica por qué nuestra atención hacia este concepto.

Otro motivo para centrar nuestra mirada en este concepto es su incesante evolución a través de más de 2000 años de historia de la matemática. Con él han contribuido los numerosos avances de los matemáticos a través de los siglos. Podríamos citar, por ejemplo: la inclusión de un sistema de referencia utilizando coordenadas y dejando de lado las proporciones entre segmentos gracias a la obra de Descartes; la creación del álgebra en combinación con la obra de Descartes que resulta en la aparición de la geometría analítica; y además, la simultaneidad evolutiva de otras ciencias, como puede ser la mecánica de Newton, que de alguna manera interactúan con el concepto de función, dando resultados tan fundamentales como el cálculo infinitesimal.

Por todo esto no es de extrañarnos que los currículos de las diferentes jurisdicciones prescriban, para abordar la enseñanza del concepto de función: el trabajo con otras disciplinas; el abordaje desde la historia de la matemática; los problemas geométricos; los contextos intra y extramatemáticos; la utilización de la más reciente geometría dinámica asistida por ordenadores; los lenguajes de programación informáticos, etc.

Acordando con el diseño curricular de la provincia de Entre Ríos, nos centraremos en el 2° año del nivel secundario (estudiantes de entre 13 y 14 años de edad) para la elaboración de nuestra propuesta, es por ello que en este trabajo presentamos y fundamentamos una propuesta didáctica para introducir el concepto de función, desde una perspectiva unificada de la matemática.

Antecedentes

Considerando que el foco de nuestro trabajo es el diseño de actividades para introducir el concepto de función, obtener fundamentos para ello nos conduce a revisar aquellos antecedentes que aborden: a) el objeto matemático función, b) las dificultades y errores para su aprehensión que reportan las investigaciones más recientes y c) las recomendaciones didácticas que hacen al respecto.

El objeto matemático función

Un objeto matemático tiene su génesis cuando interviene la razón sobre una experiencia física o sensitiva, esto es, cuando se descubren relaciones a través de la interpretación del contexto. Dicho contexto puede ser ajeno o perteneciente al seno de la matemática misma. Para Chevallard (1991) un objeto matemático es "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros" (p. 8). Sin embargo, para Godino y Batanero (1994) es necesaria una separación entre objeto personal y objeto institucional puesto que las prácticas mencionadas por Chevallard pueden modificarse dependiendo de la institución, cambiando al objeto. Por estas razones, es importante para nuestro trabajo revisar aquellos que abordan el objeto matemático *función* para obtener así un marco de referencia claro a la hora de diseñar las actividades.

El objeto matemático función cuenta con una extensa historia de transformación y evolución hasta llegar a ser tal como lo conocemos en la actualidad. Conocer el desarrollo histórico de un objeto matemático tiene ventajas que, como veremos más adelante, serán útiles para el diseño de nuestras propuestas de enseñanza. Por un lado nos ayudará a comprender que la matemática no es un refinado diamante digno de admiración, o parafraseando a Chevallard (2013) el conocimiento no es un monumento para visitar y admirar sin cuestionarnos por qué o cómo se construyó. Por otro lado, la historia de la matemática cuenta con innumerables anécdotas y problemas atrapantes que pueden interesar a nuestros estudiantes.

Vázquez, Rey y Boubée (2008) describen la evolución del concepto de función en tres etapas: Edad Antigua, Edad Media y Moderna. En la primera etapa que va desde 2000 A.C. hasta 500

D.C. hay manifestaciones implícitas del concepto de función que llevan a los autores a asegurar que la noción de función está relacionada con la evolución del concepto de número ya que contar implica hacer corresponder a un conjunto de objetos, elementos de otro conjunto que sirven para el conteo. Si bien, los babilonios no manejaban el concepto de función, la noción está implícita en cuidadosas observaciones astronómicas que realizaban. Otro avance significativo aparece gracias a que, problemas tan conocidos como la cuadratura del círculo, trajeron consigo los fructíferos esfuerzos de recordados genios como Arquímedes produciendo curvas, una de las representaciones del concepto. Una vez más la noción de función yace implícita en estas producciones.

En la segunda etapa, la Edad Media, se da el crecimiento de la aritmética por parte de los árabes y nace la nueva rama conocida como álgebra y con ella, el estudio de fenómenos como el movimiento. La noción de función se define por expresiones verbales o gráficos. Por ejemplo, la representación en el plano que hizo Oresme de lo que los geógrafos representaban en la esfera parece haber sentado las bases para el sistema de ejes cartesianos tal como lo conocemos.

Por último, la etapa moderna es muy prolífera, la integración del álgebra y la geometría con la consecuente aparición de la geometría analítica da lugar al estudio de problemas de proporción entre magnitudes. Galileo expresa las leyes del movimiento relacionando la teoría existente sobre proporciones y sobre todo, introduciendo lo numérico a lo gráfico. En la edad moderna, un avance significativo sin dudas, es el que llega de la mano de Descartes. La obra de este matemático podríamos decir que se centra principalmente en separar la geometría de las figuras, y su revolucionaria idea de definir una curva a partir de una ecuación algebraica. Por otra parte, Newton y Leibniz a partir del cálculo integral y diferencial logran explicar la naturaleza por ecuaciones diferenciales, la idea que yace implícita en este hecho es que el concepto de función se vuelve continuo y dinámico.

Por su parte Ugalde (2014) realiza un recorrido por la historia evolutiva del concepto de función, pero pone especial atención en identificar, cómo es que este se pone de manifiesto sin describir de forma explícita las transformaciones. Para el autor, se identifica un punto de partida en el siglo XVII donde el concepto de función aparece como: cualquier relación entre variables, una cantidad que se puede obtener de otra mediante cualquier operación, cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva y cantidades formadas usando expresiones algebraicas. Estos hallazgos son de gran interés didáctico ya que nos dan un panorama de cómo se dio el avance del concepto en sus comienzos, lo que más adelante se constituirá en recomendaciones de abordaje a tener presente en el diseño de actividades para su enseñanza. Sin perder de vista que se sintetizan cientos de años de esfuerzo intelectual de los matemáticos avanzamos al siglo XVIII donde la categoría de *relación* del siglo anterior se transforma en *dependencia*. Sin embargo aún se mantiene la idea de *cantidades* lo que nos hace pensar que limita las funciones al campo de los números –lo que no permitiría que exista una función que relacione matrices por ejemplo- el concepto de función es reconocido como: *cantidades que dependen de una variable.* Por último el autor se detiene en el siglo XIX donde reconoce otro cambio en la noción que suma la categoría *correspondencia*, de este modo el concepto de función se identifica como: *correspondencia entre variables* y *correspondencia entre elementos de dos conjuntos que cumplen ciertas restricciones.* En el apartado c) recomendaciones didácticas, retomaremos algunas ideas que aporta la reflexión de la evolución histórica del concepto de función.

Siguiendo con el análisis del objeto matemático que proponemos, es conveniente que nos enfoquemos en las representaciones del concepto. Como sabemos de Duval (2006) para una correcta aprehensión de un objeto matemático es necesario que se den procesos de transformación –dentro de un mismo registro- como así también de conversión entre los diferentes registros. Para Ugalde (2014) el concepto de función queda representado de 5 maneras y cada una de ellas hace énfasis en algún aspecto del concepto. La *descripción verbal* es el tipo de representación que describe la relación funcional utilizando el lenguaje natural y es útil principalmente para funciones de carácter cualitativo. Los *diagramas (de Venn)* heredados de la teoría conjuntista son útiles para hacer hincapié en la condición de unicidad, sin embargo podría representar una limitación al trabajo con variables discretas. Las *tablas de valores* son un tipo de registro ampliamente conocido y usado generalmente como una herramienta para trazar curvas, sin embargo -a pesar de su prometedora utilidad- el autor advierte que esta representación tiene al menos dos marcadas limitaciones: las variables continuas se pueden confundir con discretas, y –por organizarse en pares de valores- la función se puede considerar sobreyectiva sin que necesariamente lo sea. Un tipo de registro muy usado es el de *gráficos cartesianos* que pueden ser discretos o continuos, este tipo de representación es muy popular debido a su relación estrecha con la evolución histórica del concepto, sin embargo presenta limitaciones al solo permitir representar dos variables, aunque es de destacar su cercano vínculo con el cálculo. Por último, el concepto de función se puede representar mediante una *relación algebraica.* Tal como venimos expresando cada tipo de representación tiene fortalezas y debilidades, la relación algebraica es mejor para identificar relaciones funcionales donde la tabla de valores y la gráfica no son tan buenas, como las sucesiones, ya que permite expresar mediante una fórmula matemática la relación funcional entre los conjuntos.

Por otra parte el autor realiza una caracterización de los tipos de definiciones del concepto de función: *correspondencia entre valores de variables* (son los casos donde se sabe el valor de una variable a partir de conocer el valor de la otra), *dependencia entre dos variables* (la función establece cómo variará la segunda variable, en el segundo conjunto, de acuerdo a la variación de la primera en el primer conjunto), *correspondencia entre elementos de dos* *conjuntos* (es la clásica definición que dado un conjunto A, una función *f* y un conjunto B, asigna a cada elemento *x* de un subconjunto D de A un elemento único *f(x)* de B), y por último *conjuntos de pares ordenados* donde una función es un conjunto de pares ordenados que cumplen la condición de no existir dos pares distintos que comparten el mismo primer elemento.

Dificultades y errores que tienen los estudiantes

Cuando se trata del abordaje de los errores en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, existe en la bibliografía una especial atención en cambiar la mirada que los profesores de matemática tienen sobre ellos. La separación es clara entre dos estereotipos del profesor en cuanto al tratamiento que le dan al error. Si nos permitimos la simplificación para no extendernos demasiado en este punto, la necesidad de promoción que requiere el sistema educativo y los hábitos que se extienden en la comunidad de educadores de matemática ha resultado en un tipo de profesor que hace un *uso* inapropiado del error sancionándolo y acompañado con poca o nula preocupación por las causas del mismo, mientras que el segundo tipo tiene un mirada completamente distinta, acordando con las palabras de Rico (1997, p. 1) "el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido, resultado de un proceso en curso a cuya evolución el profesor debe contribuir". Este modo de pensar el error y las dificultades, es una valiosa fuente de información acerca del conocimiento especializado del profesor de matemática y cómo este lo pone en juego a la hora de diseñar o seleccionar las tareas para sus estudiantes.

La importancia de conocer los errores y dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de tareas que involucran un determinado concepto matemático no se limita únicamente al diseño de tareas que los superen, sino que también reflejan posibles significados conflictivos de parte de los profesores, como afirman Wilhelmi, Godino y Lasa (2014) quienes luego de investigar –en el marco del EOS- un grupo de estudiantes del máster en profesorado de Educación Secundaria –Especialidad Matemática- concluyen que existe una falta de distinción entre ecuación y función por parte de estos. Para los autores esta carencia se debe a que: incógnita, variable, ecuación y función son objetos matemáticos conceptualmente diferentes pero a menudo se representan con los mismos objetos lingüísticos y se refuerza debido al uso prototípico de símbolos de manera confusa, por ejemplo si consideramos la oración: "hallar la pendiente ***p*** de una recta ***r***…". Las letras operan como una abreviatura del nombre del objeto matemático, como un parámetro, una interpretación gráfica y una incógnita que se debe determinar. Por lo tanto, dicha complejidad debe estar acompañada de un nutrido currículo didáctico-matemático en la formación de profesores con el objetivo de clarificar estas nociones. Así mismo ponen de manifiesto que si bien todos los estudiantes tenidos en cuenta para el estudio han superado satisfactoriamente los estudios de grado con un conocimiento operativo de las ecuaciones y funciones, este no es suficiente a la hora de diseñar situaciones que apunten a la identificación y superación de posibles conflictos en estos significados.

Amaya de Armas y Medina Revilla (2013) realizan un trabajo de investigación con 50 estudiantes del último año del nivel medio sobre el concepto de función, y particularmente en cómo estos logran realizar tareas de conversión y tratamiento para las distintas representaciones. Partiendo de la premisa que para acceder al cálculo es indispensable el desarrollo del pensamiento variacional y sin perder de vista la heterogeneidad de las representaciones de un mismo concepto en cada registro, concluyen que existe una "descompensación al identificar y luego relacionar los elementos de una representación en uno o varios registros" (p. 120). Esta afirmación se fundamenta en que:

- Al intentar identificar los elementos de una función, en el registro gráfico, los estudiantes consideran sólo los intervalos visibles.
- La mayoría de los estudiantes no logró establecer congruencias entre el registro figural y el analítico.

Como reflexión final, los autores aseguran que aunque los estudiantes han tenido numerosas experiencias en actividades que involucran esta manipulación entre registros, y en sí mismos, aún presentan serias deficiencias al pasar del registro figural –como registro de partida- a cualquiera de los otros registros. Por último, a modo de cierre aseguran que "se debería iniciar este tipo de trabajo en la escuela desde los grados inferiores hasta lograr la iniciación al cálculo, donde el uso de tales tratamientos y conversiones entre registros se vuelva cotidiano" (p. 137).

Detzel (2006) realiza un estudio muy relevante sobre las prácticas habituales de los profesores de matemática acerca de la enseñanza del concepto de función donde pone de manifiesto que muchas veces, se le da preponderancia a algunos aspectos del concepto sobre otros en las propuestas pedagógicas. Teniendo la observación de clases como instrumento de recolección de datos, y apoyándose en las planificaciones de cátedra y guías de trabajos prácticos que reciben los estudiantes (2° año del nivel medio, 14 – 15 años), centra su atención en: la introducción del concepto, las definiciones, los ejemplos que representan el concepto y las tareas que resuelven los estudiantes. La investigación revela que las definiciones usadas se basan en las nociones de dependencia entre variables y de correspondencia entre elementos de conjuntos (la más empleada). Sin embargo, la autora detecta que las propuestas se enfocan, en todos los casos, en el concepto de univalencia "en las propuestas que analizamos, la *univalencia* de las funciones es una característica privilegiada" (p. 50). A propósito, la mayoría de las propuestas verifican la definición de función dada a través de:

- Diagramas de Venn, donde se identifican valores que no poseen imagen o bien, la "cantidad de flechas" que están representadas y,
- El test de la recta vertical, en los gráficos de ejes cartesianos.

Otra reflexión interesante que hace la autora, surgida de la observación de una clase donde la situación problema refiere a la función que relaciona el lado de un cuadrado con su perímetro, es notar que, al presentarse la función en el registro tabular, el dominio tiende a confundirse a un limitado conjunto de valores discretos elegidos convenientemente por su fácil manipulación aritmética, y acordando con la definición proporcionada en clase (elementos que tienen relación con algún otro) los estudiantes podrían definir sin temor a equivocarse que el dominio son aquellos pocos valores que ocupan la primer columna de la tabla.

Por último la autora sugiere la utilización de propuestas que tengan como vía de acceso al concepto problemas de magnitudes donde se pone énfasis en:

- Definiciones relacionadas a la idea de variabilidad y que son consecuentes con el desarrollo histórico del concepto de función.

- Que la idea de dominio está relacionada a los posibles valores que puede tomar la variable independiente, haciendo necesario inferir todos los valores probables incluidos.

Las recomendaciones didácticas

Diferentes autores se esfuerzan por investigar los aspectos que influyen en la enseñanza de un concepto matemático. A la hora de comunicar ideas nuevas los profesores recurren a diversos recursos como el uso de analogías, sin embargo, como señalan Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo Yáñez (2018) algunas analogías son más adecuadas que otras para hacer más comprensible una idea. Los autores se preguntan por los conocimientos que ponen en juego los profesores al usar una analogía para la enseñanza de la función y concluyen que son potentes al mostrar el concepto de función como *proceso*. Sin embargo advierten que debido a los variados subdominios del conocimiento especializado del profesor que se ponen en juego, se pueden idear diferentes analogías que ayuden a sus estudiantes a comprender el concepto de función desde otras perspectivas. Por otra parte, consideran importante que los profesores sean conscientes de las características de la analogía ya que no es posible abordar todas las dimensiones del concepto de función con una única analogía. A la vez señalan que es determinante tener en cuenta el contexto donde se presentará. Por último concluyen que debido a la extensión del concepto de función en el currículo de secundaria y en la formación inicial de profesores las analogías son potencialmente útiles en el diseño de tareas así como también en la formación continua con el objetivo de generar nuevas propuestas de enseñanza retomando sus experiencias profesionales.

Arcavi (2018) presenta una serie de recomendaciones, sugerencias y desafíos futuros para profesores de matemática y el profesorado, surgidos en el marco de un proyecto para ayudar a estudiantes con poca inclinación hacia la matemática. Diseñan, junto a un equipo de trabajo, problemas que integran distintas áreas de la matemática, con el objetivo de corroborar en qué medida un enfoque unificado de la disciplina podría ser de ayuda para ellos. Parafraseando al autor, aunque el problema tenga la apariencia de ser una "mezcla artificial de temas" (p. 36) requiere la coordinación de conceptos y no la aplicación automática de fórmulas. El problema consiste en que la representación cartesiana de una función lineal debe formar un triángulo con los ejes coordenados, se desconoce la pendiente y para obtenerla se lanza un dado al aire. Luego las consignas indagan sobre probabilidades de obtener tal o cual valor del área de dicho triángulo o un área determinada, etc. Al ser enfrentados con el problema los estudiantes entrevistados coinciden en la notoria diferencia entre este y los que acostumbran resolver y lo caracterizan como un problema donde primero hay que entender, no hay una fórmula que aplicar y se da una combinación de temas. Una primera conclusión que obtiene el autor es que la integración de contenidos debe formar parte indivisible de la práctica diaria de la clase de matemática en oposición a lo que muchas veces vemos: pretender evaluar de forma integrada una serie de contenidos que fueron enseñados de forma aislada.

Contexto de la propuesta

Al elaborar una propuesta de enseñanza, que puede ser una consigna, una tarea o una secuencia de tareas, etc, es necesario ubicarnos en el *contexto* que la delimita. Para Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017) el contexto se describe para ubicarnos en:

- el tipo de trabajo que los estudiantes vienen realizando y el tipo de trabajo que la propia propuesta requiere,
- los conocimientos previos de los que disponen
- las actividades y contenidos desarrollados con anterioridad y los que se pretenden desarrollar luego (p. 51).

Contexto: Los estudiantes están familiarizados con el uso de software de geometría dinámica. Las actividades que resuelven a menudo requieren que formulen conjeturas y las fundamenten. Conocen los elementos constitutivos de un triángulo y los conceptos de perímetro y área de figuras.

Objetivos

- Introducir el concepto de función.
- Establecer conexiones entre las diferentes áreas de la matemática.

Marco epistémico de referencia

El Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática y el conocimiento (EOS) pone a disposición de la educación matemática múltiples herramientas para reflexionar sobre las prácticas, los objetos matemáticos, las tareas y todos los aspectos que interaccionan cuando se planifica, implementa o evalúa la enseñanza de la matemática. La primera diferencia que encontramos entre este enfoque y otras teorías sobre didáctica de la matemática es la distinción entre el carácter personal o institucional del significado de los objetos matemáticos.

El concepto de significado institucional se refiere a identificar, en los libros de texto, diseños curriculares o lineamientos que dispongamos en nuestra jurisdicción a la hora de planificar la enseñanza o seleccionar tareas, cuál es el significado que se pretende sea enseñado de un determinado concepto. A su vez, podemos establecer una separación entre, significado institucional de referencia pretendido por el currículo y de referencia aceptado por la comunidad matemática.

En nuestro caso, construiremos un marco de referencia entre, los Núcleos de Aprendizjes Prioritarios (NAP), Indicadores de Progresión de Aprendizajes Prioritarios (IPAP) que son los lineamientos vigentes a nivel nacional, el cuadernillo "*Predecir*" (material proveniente del Ministerio de Educación referido a la enseñanza del concepto de función) y por último el Diseño Curricular de la provincia de Entre Ríos, revisando cómo se configura el concepto de función para obtener el significado institucional de referencia pretendido por el currículo. Al conjugar estos significados pretendidos, y el obtenido de la revisión histórica planteada, tendremos un camino claro sobre el cual fundamentar nuestra propuesta didáctica.

Significado institucional de referencia para el concepto de función

El Consejo Federal de Educación, en Argentina, es el organismo responsable de generar las políticas necesarias para que todos los estudiantes que se forman en las escuelas de nuestro país tengan las mismas oportunidades de acceder a los conocimientos que la sociedad considera relevantes. Estos lineamientos luego, son considerados por las distintas jurisdicciones, resituados y volcados en sus respectivos diseños curriculares. A continuación nos proponemos identificar el significado institucional de referencia del concepto de función considerando los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP), los Indicadores de progresión de los aprendizajes (IPAP), el cuadernillo del Plan Nacional Aprender Matemática dirigido a docentes –en particular el referido a funciones- y el Diseño Curricular de la provincia de Entre Ríos.

En los NAP se expresa entre los propósitos de la educación, para 1° y 2° año, que los estudiantes estén involucrados en situaciones de enseñanza que impliquen "el reconocimiento, uso y análisis de variaciones funcionales o no en sus diferentes representaciones en situaciones diversas" (p. 12) y más específicamente, al "uso de relaciones entre variables en situaciones problemáticas que requieran: interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos (regularidades numéricas, proporcionalidad directa e inversa, etc." (p. 16).

Identificamos un enfoque empírico del trabajo con el concepto de función, la relación puede ser enunciada de forma verbal y descrita en tablas y gráficos. Esta postura se diferencia de las relaciones arbitrarias entre conjuntos que podríamos tomar como formal, la que se pospone para los grados superiores.

Así mismo en los IPAP se considera para el mismo año, que los estudiantes puedan "leer, interpretar y comunicar relaciones entre variables en distintas representaciones (tablas, gráficos y fórmulas)" (p. 50). Observamos la concordancia entre ambos, dado que estos indicadores fueron elaborados para complementar los NAP.

Por otra parte, el Ministerio de Educación de la Nación dentro de un programa llamado *Aprender Matemática* ha elaborado un material de guía para la enseñanza donde incluyen una serie de cuadernillos con actividades (dirigido a los estudiantes) y otro con las recomendaciones didácticas y fundamentación del modo de abordaje dirigido a docentes de acuerdo a la práctica social a desarrollar. Al analizar este último encontramos que en cuánto al significado institucional de referencia toma los explicados anteriormente provenientes de los NAP e IPAP, sin embargo, es interesante mencionar que dichos cuadernillos, fueron elaborados utilizando como marco teórico el programa socioepistemológico, para el cual, el problema no radica en la constitución de objetos matemáticos abstractos sino que se cargan de sentido mediante el uso compartido y culturalmente situado y a su vez, tiene en cuenta el momento histórico y social en el que un concepto fue gestado como así también en el que será enseñado.

En cuanto al Diseño Curricular de Educación Secundaria de Entre Ríos, en el caso de Matemática, éste se estructura en 4 ejes que se refieren a las distintas áreas, en el caso de funciones se encuentran dentro de un eje llamado "Entre incógnitas y variables: el poder modelizador de las fórmulas algebraicas y de aquellas que trascienden el campo del álgebra expresa la relación de dependencia entre cantidades de magnitud" (p. 38).

Identificamos aquí que se propone abordar la noción de función como *relaciones entre variables* apelando a los registros tabular, gráfico y simbólico. Así mismo hace referencia específicamente a la función de proporcionalidad directa y propone que se utilicen situaciones de variaciones de perímetros en función de las dimensiones de figuras y cuerpos.

	NAP, IPAP, Cuadernillo "*Predecir*"	Diseño Curricular Entre Ríos
Tipo de definición a la que hacen referencia	Relaciones entre variables	Relaciones entre variables
Registros de representación que predominan	Verbal, tabular y gráfico	Tabular, gráfico y simbólico

Para el EOS, el significado institucional de referencia de un objeto matemático queda definido por un conjunto de prácticas que se ponen en juego al resolver determinado tipo de problemas. Estos conjuntos de prácticas pueden organizarse de diversas maneras dando origen a otras categorías de significado institucional. Por ejemplo, si tenemos en cuenta los sistemas de prácticas elegidos por el profesor para diseñar una tarea (contexto-objetivo-consigna), diremos que se trata del significado institucional pretendido. En cambio, si se observan los conjuntos de prácticas puestas en juego una vez llevado a cabo el proceso de instrucción se trataría del significado institucional implementado. A su vez, para diseñar tareas debemos tener en cuenta aquellos conjuntos de prácticas prescritos y que se consideran acordes al nivel donde serán implementadas, es decir, determinar el significado institucional pretendido por el currículum. Por ejemplo, una práctica asociada al concepto de función puede ser: dados tres puntos no alineados del plano, encontrar la parábola que pasa por ellos. Sin embargo, en nuestro caso, no tiene coherencia con las prácticas que se consideran como valiosas para el segundo año de secundaria. A continuación reponemos las prácticas asociadas al concepto de función para el segundo año de secundaria según los NAP:

- interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos (regularidades numéricas, proporcionalidad directa e inversa, etc.);

- modelizar variaciones uniformes y expresarlas eligiendo la representación más adecuada a la situación;

- explicitar y analizar propiedades de las funciones de proporcionalidad directa (variación uniforme, origen en el cero);

- producir y comparar fórmulas para analizar las variaciones de perímetros, áreas y volúmenes, en función de la variación de diferentes dimensiones de figuras y cuerpos;

- producir fórmulas para representar regularidades numéricas en N y analizar sus equivalencias (p. 16).

Propuesta

A continuación presentamos dos tareas con el objetivo de introducir el concepto de función y a la vez mostrar cómo un área de la matemática es utilizada como herramienta en la otra. La primera actividad se enfoca establecer relaciones entre magnitudes que varían, desde un contexto extramatemático, donde los estudiantes serán los encargados de elegir qué variables considerar y cómo hacerlo. En la segunda actividad, se parte de un contexto intramatemático, más precisamente desde un problema de geometría métrica, buscando establecer vínculos entre magnitudes escalares como área, perímetro y altura de un triángulo.

Actividad 1

El objetivo de todo horticultor es producir plantas de alta calidad. Una de las características de una planta de alta calidad es el crecimiento compacto con una buena ramificación, es decir, mayor cantidad de hojas (relacionado a una mejor fotosíntesis) y una buena altura con tallos fuertes y resistentes (demasiada altura con un tallo débil podría producir fragilidad).

Un grupo de estudiantes se propuso determinar qué efecto tendría en un cultivo el riego con: agua potable, agua destilada, agua azucarada, agua salada, agua con amoníaco y agua con limón. Para evitar que otros factores afecten el estudio, utilizarán macetas con la misma tierra y del mismo tamaño, el cultivo estará dentro de un invernadero (por lo que la temperatura e iluminación serán homogéneas en todas las plantas) y los siete cultivos se regarán con la misma cantidad de solución mientras

dure el estudio.

Tarea 1
Diseñar una "ficha de campo" para registrar la calidad del cultivo. ¿Qué incluirías? ¿Qué no? ¿Por qué?

Tarea 2
¿Qué piensas que sucederá con el cultivo?(ver acá)

Incluir en una propuesta de enseñanza de la matemática problemáticas provenientes de otros campos del saber es un hecho sobre el que hay amplio consenso en la literatura de educación matemática. A propósito de ello, Pochulu (2018, p. 13) asegura que "los retos presentados por las diversas ciencias o disciplinas llegan hoy a la clase de matemática convertidos en problemas que plantean la necesidad de un abordaje interdisciplinario". La resolución de estos problemas, incluso para el profesor, no es tarea sencilla y se corre el riesgo de diluir el potencial de una situación si se desconocen algunas pautas importantes sobre Modelización Matemática. Para Rodríguez y Barreiro (en Pochulu, 2018) trabajar la Modelización Matemática implica incluir "situaciones "reales" que provienen de entornos donde la matemática no tiene una presencia explícita"(p. 20).

Si consideramos el problema planteado, pedimos a los estudiantes que diseñen una "ficha de campo" para registrar a lo largo del tiempo la evolución del cultivo. Para comenzar podríamos plantearnos algunas preguntas y poder determinar qué datos son significativos y cuáles se consideran menos relevantes: ¿Que entendemos por calidad de un cultivo? ¿Con qué frecuencia se realizarán las mediciones *in situ*? ¿Qué variables afectan a ese cultivo en particular? Notemos que en ningún momento se les dijo a los estudiantes de qué cultivo se trata, por lo tanto, la construcción de la "ficha de campo" deberá incluir espacio para alguna característica específica que se considere importante en la calidad de ese cultivo en especial, por ejemplo: si se considera un cultivo de tomates, la poda, el tutorado y los cambios repentinos de temperatura en el ambiente afectan notablemente el crecimiento de la especie. Estos razonamientos iniciales coinciden con lo que Rodríguez y Barreiro (en Pochulu, 2018, p. 22) consideran "delimitación del sistema inicial, situación o cuestionamiento" y señalan que es la etapa donde "reconocemos la situación, la recortamos, la simplificamos, intentamos identificar las variables que intervienen y tomamos decisiones sobre cuáles de ellas consideraremos, tratando de inferir o postular relaciones entre ellas".

Lote:	Sustancia de riego:								
N° de observación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N° de hojas									
Perímetro del tallo									
Altura de la planta									

Otros interrogantes sobre los que habrá que decidir podrían ser: ¿Cuántos días pasan entre cada observación? ¿En qué unidades es conveniente considerar el perímetro del tallo y la altura de la planta?

A continuación presentamos algunas relaciones que podemos establecer entre variables a modo de ejemplo sin perder de vista que estas elecciones deben estar fundamentadas en específico para el período de tiempo, el tipo de cultivo, etc.

<u>Altura de la planta – Tiempo</u>

Este indicador nos podría dar información del ritmo de crecimiento, por ejemplo: cm/semana, cm/mes, etc. y en una etapa futura establecer una comparación con las plantas que fueron regadas con otro tipo de sustancia.

<u>Altura de la planta – perímetro del tallo</u>

Por un lado sabemos que se considera una planta de buena calidad, cuando su altura y el perímetro de su tallo guardan cierta relación, por lo tanto resultaría interesante establecer un cociente entre altura y perímetro (podría ser adimensional si se eligió la misma unidad para ambos valores), un valor mayor de este cociente para dos plantas de la misma altura indicaría un tallo mas débil lo que se traduce en fragilidad. A su vez, este cociente puede ser evaluado en el tiempo dando origen a una nueva relación Altura/perímetros - tiempo.

Las posibilidades de establecer este tipo de relaciones son amplias y dependerán del cultivo considerado y de la exhaustividad del trabajo que se pretende realizar. Nos parece importante resaltar que al relacionar variables por pares, en una etapa posterior, los resultados pueden presentarse en gráficos (utilizando *GeoGebra* por ejemplo) permitiendo un análisis más global.

Si pensamos en términos del proceso de Modelización Matemática, estaríamos transitando su segunda etapa que está relacionada con "decisiones sobre las variables a considerar; establecimiento de relaciones y uso de lenguaje matemático" (Rodríguez y Barreiro, en Pochulu, 2018, p. 22).

Actividad 2

Consideremos un triángulo cualquiera. Analizar y fundamentar cómo se verían modificadas sus características y elementos constitutivos si uno de sus lados cambia de longitud libremente.

La resolución de esta consigna, en un primer momento, apunta a los interrogantes ¿qué cambia? y ¿por qué cambia? sin interesarnos en *cómo* lo hace. La intención es encontrar que hay una relación de variación causada por el aumento de la longitud de un lado en el área o perímetro. Por otra parte, los ángulos interiores también cambian si el triángulo no es equilátero, en ese caso, resultaría interesante relacionar la longitud del lado que cambia con la suma de ángulos interiores del triángulo, como explicaremos más adelante, en un primer acercamiento a la función constante.

Es importante aclarar que si bien, la consigna puede resolverse con lápiz y papel, o utilizando un geoplano, que consideramos apropiado como disparador de conjeturas, estamos seguros (y diversos autores así lo aseguran) que el software de geometría dinámica es una herramienta que se debe tener en cuenta para el diseño de propuestas didácticas, a propósito Pochulu (2018) asegura que "no se trata de destinar una clase entera para trabajar con comandos específicos de un software, sino más bien, integrar las TIC para permitir la creación de una nueva matemática y el surgimiento de una nueva cultura de aprendizaje" (p. 15). Incluir *GeoGebra* nos permitirá abordar la situación de manera más eficiente, en cuanto al tiempo, y poniendo énfasis en lo que sucede desde un punto de vista global y no enfocando la atención en cálculos aritméticos (como podría ser encontrar una y otra vez el área para cada nuevo triángulo), o los pormenores de la construcción con regla y compás.

A propósito del trabajo con software de geometría dinámica (SGD), González y Lupinacci (2011) plantean que "la visualización y la interacción que permiten los entornos de geometría dinámica pueden ser una herramienta muy potente a la hora de elaborar conjeturas" (p.4). Sin embargo advierten que no alcanza con la incorporación del SGD sino que el tipo de trabajo propuesto debe propiciar la elaboración de conjeturas.

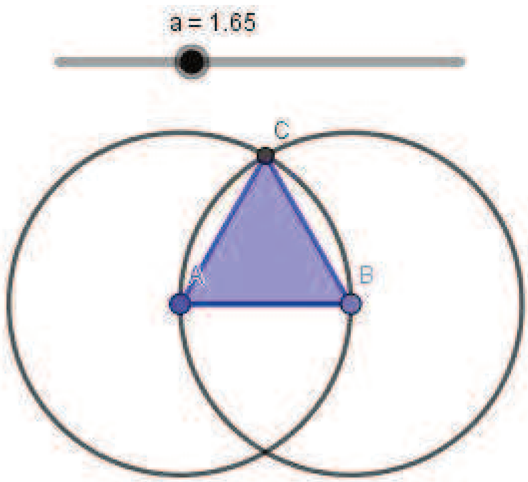
A continuación comenzamos a pormenorizar el análisis de algunos aspectos del trabajo que se desprende de la consigna sin perder de vista que, a pesar de nuestros esfuerzos, la variedad de enfoques y abordajes puede ser más amplia de lo que presentamos.

Nuestra consigna no aclara de qué tipo de triángulo estamos hablando, por lo tanto puede abordarse desde el caso más general utilizando triángulos escalenos hasta el caso más particular, utilizando triángulos equiláteros.

Considerando esta posibilidad de exploración y que la consigna no tiene de antemano una serie de pasos a seguir, podemos asegurar que tiene un *potencial matemático rico,* es decir, "abre las posibilidades al estudiante para que él explore y argumente" (Rodríguez et al. 2017, p. 28).

El caso del triángulo equilátero

Al abordar la resolución mediante software de geometría dinámica, los estudiantes podrían tomar dos caminos. Por un lado, si se hace una reproducción del método utilizado para regla y compás, y por otro utilizando la herramienta polígono regular. En el primer caso (que se muestra en la figura) permite la incorporación de un deslizador que define la longitud del segmento AB. En el caso de utilizar la construcción mediante polígono regular, podemos modificar el tamaño del triángulo realizando arrastres de los vértices. En ambos casos, no debemos perder de vista que si bien la elección del triángulo es libre, el lado que se modifica sufre una transformación de homotecia.

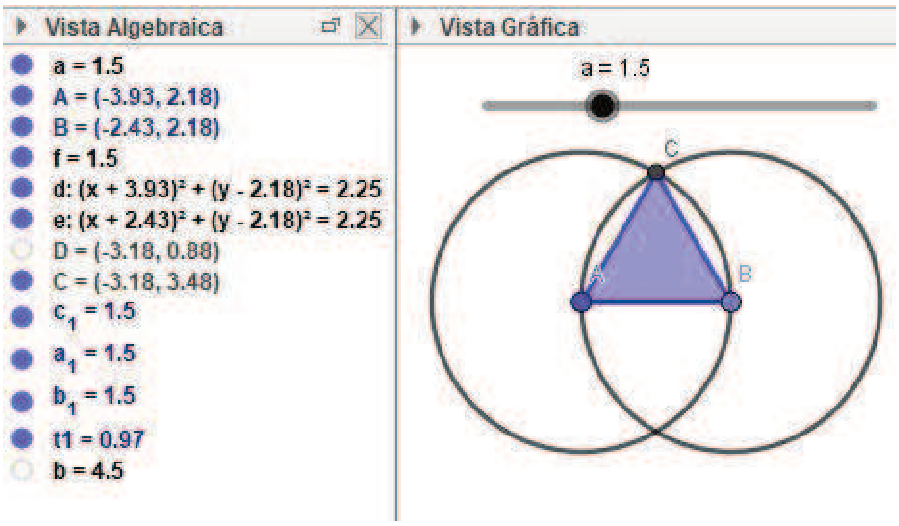


Las construcciones mediadas por software permiten explorar propiedades en una figura que esperamos se cumplan, por ejemplo, los ángulos interiores de un rectángulo se mantienen rectos a pesar del arrastre de alguno de sus vértices y qué propiedades se ponen en juego para lograrlo.

El arrastre en software de geometría dinámica, se clasifica según la función que desarrolla, por ejemplo, si el objetivo es verificar que una construcción mantiene las propiedades impuestas originalmente (que sea equilátero por ejemplo) se llamará *arrastre de test* (Gutiérrez, 2005, p. 34). Por otra parte el *arrastre de exploración* como menciona Acosta

(2005) consiste en buscar una evidencia visual que pueda ser interpretada como una propiedad geométrica y de este modo permite ***elaborar conjeturas***.

La evidencia que buscamos, la encontraremos en la vista algebraica de *Geogebra*, al observar los valores que se modifican con el arrastre (o con la animación del deslizador). Iniciamos la búsqueda de respuesta al interrogante ¿cómo está cambiando? (que no pretendemos responder de manera formal) sino intuitiva, en cuanto a que para comprender el concepto de función como una *relación entre variables* no es conveniente acudir al registro simbólico demasiado pronto. Sin embargo, como explicaremos más adelante, la actividad se puede ampliar a niveles más altos de generalización y abstracción abarcando conceptos que incluso escapan al nivel secundario.



Observando la vista algebraica notamos que el deslizador ***a*** y el valor ***t1*** representan la longitud del lado y el área del triángulo respectivamente.

A su vez, sumando las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ (c_1), $\overline{BC}$ (a_1) y $\overline{AC}$ (b_1) se obtiene el perímetro ***b***. Resulta importante el registro en una tabla (como la que sigue a continuación) para, en primer lugar, sacar "en limpio" los valores que nos interesan ya que acompañados de otros elementos de la vista algebraica (como las ecuaciones de las circunferencias) puede resultar confuso de observar. En segundo lugar, organizados en filas y columnas la observación "por pares" sería inmediata, es decir, relacionando un valor de la longitud del lado $\overline{AB}$ con uno del área A o perímetro P, situación favorable a la hora de detectar comportamientos.

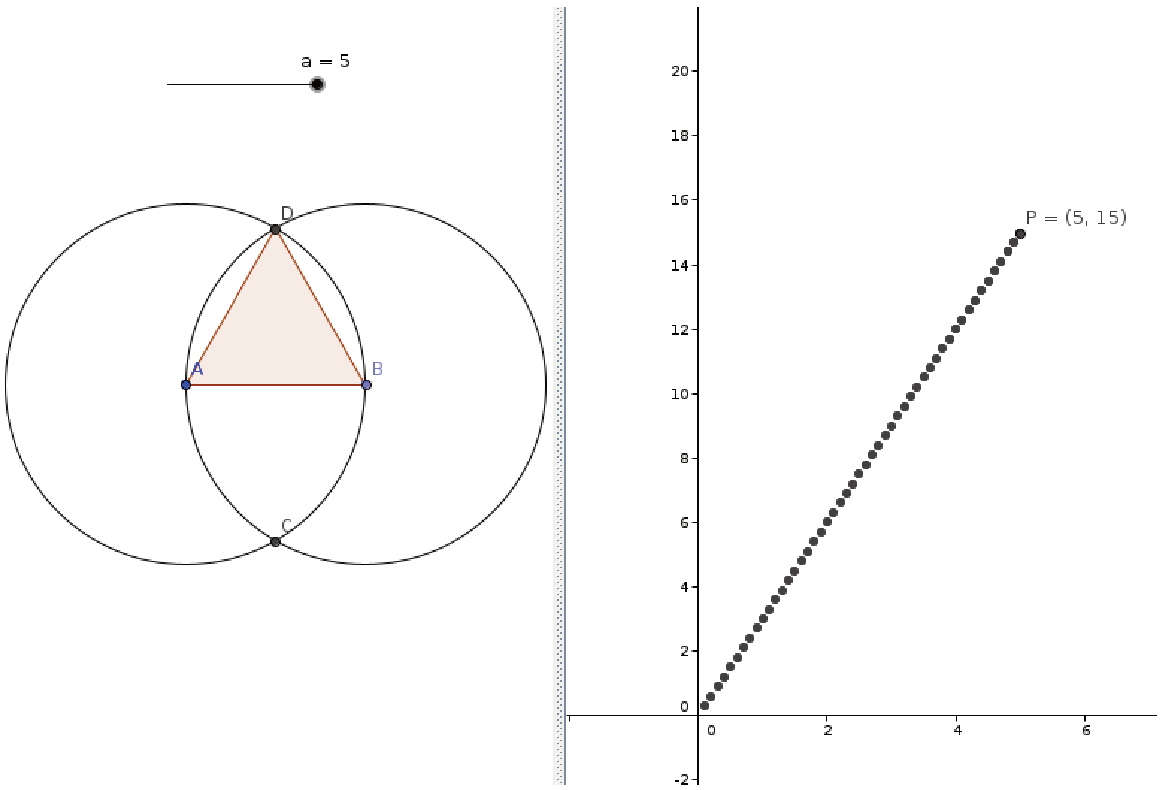
AB	P	A
0.5	1.5	0.11
1	3	0.43
1.5	4.5	0.97
2	6	1.73
2.5	7.5	2.71
3	9	3.9
3.5	10.5	5.3

La primera conclusión obtenida de la resolución de esta consigna puede ser, ***"a medida que la longitud de la base aumenta, también lo hacen el perímetro y el área"***.

Aquí encontramos el concepto de función como relación entre variables acordando con el significado de referencia (histórico) y el pretendido por el currículum.

Pasaje al registro gráfico

Proponemos continuar trabajando con el software para el pasaje al registro gráfico. *Geogebra* ofrece, además de la pantalla principal donde normalmente se hacen las construcciones principales, una segunda vista gráfica donde pueden representarse objetos que dependan de los existentes en la vista principal. En nuestro caso los pares ordenados de la gráfica estarán definidos por los valores que tomen el lado $\overline{AB}$ y el perímetro P, es decir cada punto es $(\overline{AB}, P)$. Lo que nos aproxima a la idea de la función definida como el lugar geométrico de todos los puntos $(x, f(x))$. A medida que el deslizador ***a*** cambia, el punto **P** se desplaza.



Tal como sugieren los autores que abordamos en los antecedentes, se recomienda la utilización de propuestas que tengan como vía de acceso al concepto problemas relacionados a la idea de variabilidad y que son consecuentes con el desarrollo histórico del concepto de función.

Si bien entendemos que este problema puede parecer artificial, diseñado para obtener conclusiones guiadas y no aborda una temática con datos de la vida real, utilizando variables como dinero, viajes, compras o movimientos, consideramos que los lectores sabrán ver más allá del problema en sí, no tomándolo como un ejemplo concreto para su reproducción sino más bien como un modo de abordaje que devuelve al concepto de función su carácter dinámico.

Un camino hacia el registro simbólico

¿Cuánto mediría el perímetro si el lado $\overline{AB}$ toma un valor particular?

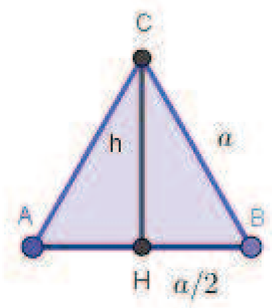
Cuando $\overline{AB}$ vale 100 cm, el perímetro sería $p = 3 * 100cm = 300$.

Con la resolución de estos interrogantes pretendemos reflexionar acerca de ¿qué sucede exactamente con los valores del perímetro cuando $\overline{AB}$ cambia de longitud? Abandonando la respuesta genérica que era suficiente al comienzo, iniciamos una posible transición al registro de representación simbólico. Pretendemos obtener una conclusión similar a ***"el valor del perímetro es el triple de la longitud del lado"***. Ciertamente estamos abordando el problema aritmético derivado del problema geométrico inicial.

AB	Perímetro
0,5	1,5
1	3
1,5	4,5
2	6
2,5	7,5
3	9
3,5	10,5
…	…
100	300
…	…
1000	3000

Esta parte de la actividad es independiente de si los estudiantes han realizado o no una transición entre aritmética y álgebra, ya que si no lo hicieron, es una buena oportunidad para ello. A propósito Burgos y Godino (2020) remarcan que "la implementación del significado algebraico de la proporcionalidad en la escuela secundaria es un factor positivo para el progreso del aprendizaje matemático de los estudiantes" por lo tanto dado que el perímetro y la longitud del lado se relacionan $p = k.\overline{AB}$ vemos en este apartado del problema, un camino hacia el registro simbólico del concepto de función.

Otra posibilidad de acceso al registro de representación simbólico, para los cursos más avanzados, es la que nos plantea la relación entre área y longitud del lado AB. Considerando que nuestra variable es la longitud de AB, queremos hallar una expresión que muestre de qué manera están relacionados el área y AB. Al trazar la altura correspondiente al lado AB que pasa por C queda determinado el triángulo rectángulo HCB. A partir de allí, a través del teorema de Pitágoras y realizando las correspondientes acciones de *tratamiento* dentro del registro simbólico:



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \ , a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2, \frac{\sqrt{3}}{2}a = h$$

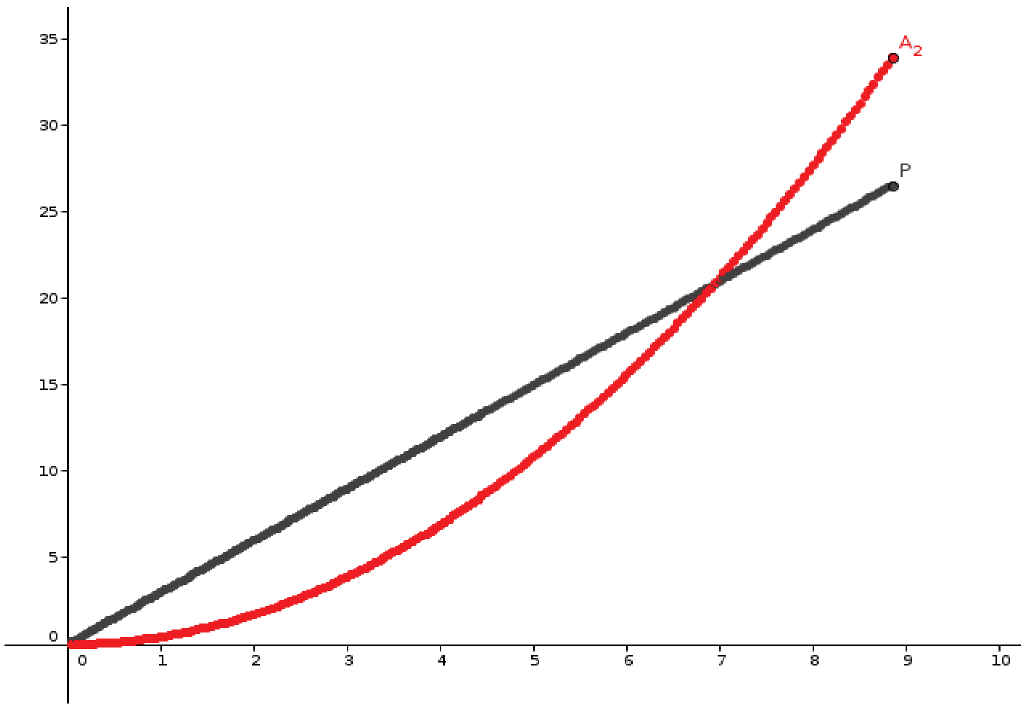
Luego, al reemplazar en la fórmula del área:

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$

Al plantearnos esta *conversión* al registro de representación simbólico, intervienen conceptos y herramientas de la geometría métrica que posibilitan el pasaje al lenguaje algebraico, tal como expresan Burgos y Godino (2020, p. 20) "un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado con niveles de algebrización diferentes". Por lo que a continuación también planteamos otro abordaje con un nivel de algebrización más complejo que podría dirigirse al ciclo orientado de secundaria, o incluso al profesorado.

Perímetro y área en función del lado

La relación entre el lado del triángulo y el área sobre la que se habló en los párrafos anteriores está representada, como es evidente por su expresión algebraica, por una parábola (o parte de ella), y como vimos en el apartado del perímetro, este está en relación de proporcionalidad directa al lado, es decir que queda representado por una recta.



El trabajo con estas dos relaciones, y el punto de intersección de las curvas, habilitaría una discusión en torno al significado de los sistemas mixtos de ecuaciones. Observar cuidadosamente la situación nos muestra que si bien existe un punto en común entre ambas curvas presentaría una debilidad en cuanto al sentido de los valores hallados. La recta representa el perímetro (cm) y la parábola área (cm^2) por lo tanto carece de sentido geométrico encontrar un valor del lado para el que perímetro y área coincidan. Este razonamiento nos conduce a una conclusión importante, si bien el problema es de mucha riqueza en cuanto al trabajo matemático que de él se desprende, es importante no perder de vista que no todos los caminos nos conducen a un trabajo matemático rico. Por esta razón creemos que constituye una buena oportunidad para analizar junto a los estudiantes la representatividad de un resultado o en este caso, la interpretación geométrica.

Una relación especial

En la página 17, dejamos entrever una posibilidad que nos resulta interesante para contribuir al concepto de función y tal vez, plantear nuevos interrogantes que reabran el debate sobre las relaciones entre variables que son consideradas función, saliendo de la típica prueba de unicidad.

Al hacer variar la longitud del lado de un triángulo y preguntar ¿Qué cambia? Es bastante evidente que uno de los elementos del triángulo que se ve alterado es la medida de sus ángulos interiores. Sin embargo, sea o no un conocimiento previo de los estudiantes, sabemos que la suma es igual a un ángulo llano, por lo tanto al relacionar las diferentes medidas del lado que cambia libremente y la Suma de los Ángulos Interiores (SAI) del triángulo, obtendremos una relación ***constante*** entre las variables. Este tipo de función es radicalmente diferente a las estudiadas hasta el momento, en los interrogantes abordados anteriormente siempre que una variable tomaba valores distintos, producía el mismo efecto en la otra variable.

En la próxima sección veremos cómo se configuran los indicadores de idoneidad didáctica para las actividades propuestas con respecto a la introducción del concepto de función.

Idoneidad didáctica de la propuesta

El EOS tiene un amplio modelo de valoración de los procesos de instrucción como describen (Pochulu y Font, 2011) que consta de cinco tipos de análisis, cada uno de ellos con sus propias herramientas.

1) Identificación de prácticas matemáticas. Se refiere a identificar las prácticas que se desarrollaron o desarrollarán en el proceso de instrucción por ej: *enseñanza del concepto de función en estudiantes de 2do año de secundaria (14-15) años.*

2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Se refiere a los diferentes lenguajes, gráfico, simbólico, verbal, etc, que se ponen en juego con los conceptos, proposiciones y procedimientos para considerar esa práctica matemática correcta.

3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas. En el EOS (Godino et al, 2006) se proponen cuatro tipos de interacción. La configuración correspondiente a un proceso donde el alumno asume el problema como propio y busca una solución independientemente de lo que piensa que el profesor está esperando se considera *a-didáctica*. Por otro lado, un tipo de interacción se da cuando el alumno resuelve las situaciones sin intervención alguna del profesor, por lo que se denomina *personal*. Otro episodio es el que sucede al momento de la institucionalización, que es posible con los estudiantes que han asumido el problema en el primer tipo de interacción, por ende hay una interacción *dialógica.* Por último, si los alumnos no asumen la resolución y la interacción dialógica es aparente, hablamos de un tipo de interacción *magistral*, marcada por una serie de procedimientos a seguir expuestos por el profesor.

4) Identificación del sistema de normas y meta-normas. Se refiere a las normas que rigen el proceso de instrucción dado que hay múltiples interacciones como se explicó anteriormente, y que el proceso de instrucción se desarrolla entre docente y discentes en un determinado contexto social, por ejemplo una norma metacognitiva "para aprender matemática hay que hacer muchos ejercicios" (Pochulu y Font, 2011, p. 377)

Dada la complejidad de este entramado, las características (no implementado) y la extensión requerida para el presente trabajo es que hemos considerado tomar el último tipo de análisis, para valorar la propuesta.

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Criterios de idoneidad didáctica

Los criterios de idoneidad didáctica son un constructo que pertenece al seno del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) y su intención es medir el grado en que un proceso de instrucción matemática es adecuado o no en determinadas circunstancias y con los recursos disponibles (Godino, Contreras y Font, 2006).

Breda, Font y Pino-Fan (2018) realizan un estudio detallado sobre el proceso que dio origen a estos criterios señalando que surgen como una necesidad de articular las herramientas descriptivas de la didáctica, con herramientas prescriptivas que posibiliten *guiar la mejora* de los procesos de enseñanza-aprendizaje matemáticos. Como señalan los autores, para la formación de estos criterios se tuvieron en cuenta aspectos sobre los que existe amplio consenso en la comunidad matemática que califican un proceso de instrucción como óptimo.

Las distintas teorías de educación matemática actuales acuerdan que debe enseñarse una matemática *importante.* Por esta razón, al reflexionar qué entendemos por matemática importante, se desprenden dos interpretaciones que dan origen a dos criterios de idoneidad didáctica.

Por un lado, entendemos como matemática importante aquella que presenta una estrecha relación entre el significado holístico o de referencia (del seno de la propia ciencia) y el significado pretendido o previsto en el proceso de instrucción, a esto denominamos **idoneidad epistémica**. Por otro, que sea una matemática que tenga en cuenta las prescripciones del currículum, el proyecto educativo y las condiciones sociales del entorno, es decir, que presente **idoneidad ecológica**.

Otro aspecto sobre el que hay un marcado consenso según los autores, es en la incorporación de tecnologías (en el sentido de recursos tecnológicos como software, audiovisuales, internet, apps, etc) que impactan positivamente en el tipo de matemática que se enseña. Es decir entonces que las propuestas de enseñanza que incorporen este tipo de herramientas tendrán un nivel más alto de **idoneidad mediacional** que aquellas que no lo hagan. Así mismo, aunque una propuesta tenga alto grado de idoneidad mediacional, si los aprendizajes pretendidos están demasiado alejados de las posibilidades de ser abordados con los saberes previos que disponen los estudiantes, diremos que el proceso de instrucción tiene una baja **idoneidad cognitiva**.

Aunque una propuesta cuente con un buen equilibrio entre el grado de idoneidad epistémica, ecológica, mediacional y cognitiva sería apresurado calificarlo como idóneo, si no se tiene en cuenta su implementación (efectiva o potencial). Las interacciones que se dan en la clase de matemática deberían permitirnos identificar y resolver conflictos de significados, a la vez que los estudiantes participan activamente de la construcción de los nuevos saberes. Por eso decimos que un proceso de estudio pensado para favorecer estos modos de interacción tendrá un alto grado de **idoneidad interaccional**.

Por último, si una propuesta cuenta con alto grado de idoneidad en los criterios descritos hasta el momento, por ejemplo: se aborda un concepto/saber importante para la matemática, se puede construir desde los saberes previos disponibles, se incorporan recursos tecnológicos, forma parte del currículo prescripto y es acorde al contexto social y se propone la metodología aula taller pero al momento de implementar la propuesta se tienen en cuenta únicamente las argumentaciones de los algunos estudiantes sobre otros por afinidad, diremos entonces que el proceso de instrucción tiene bajo grado de **idoneidad emocional**.

Hasta el momento hemos realizado una descripción general de los criterios de idoneidad didáctica, sin embargo, para que estos se vuelvan operativos es necesario descomponerlos en un conjunto de *indicadores observables* (Breda y Lima, 2016).

Idoneidad epistémica	
Indicadores	**Descriptores**
Errores	Observación de prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	Observación de ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los estudiantes: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Para uno o varios significados parciales se propone una muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.) y las tareas de tratamiento y conversiones entre ellos.
Idoneidad cognitiva	

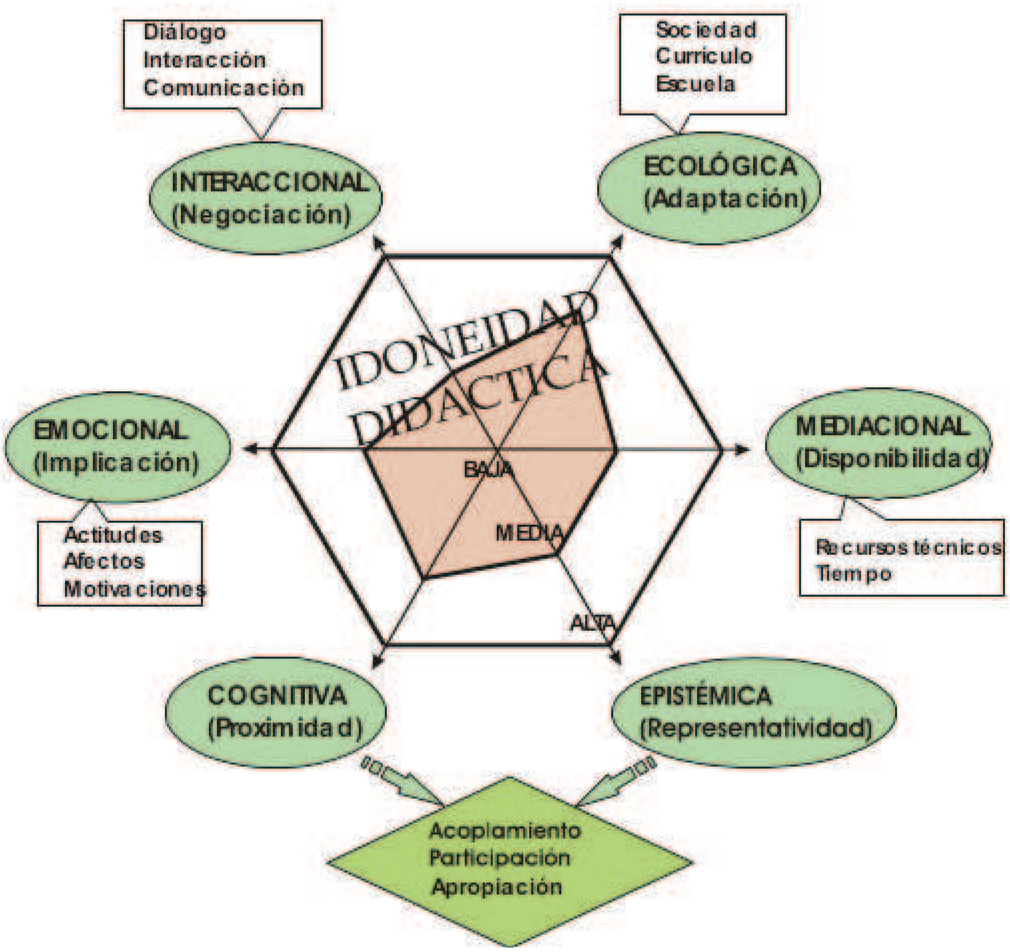
Conocimientos previos	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc). Promueve procesos meta-cognitivos.
Idoneidad interaccional	
Interacción docente – discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) Se busca llegar a consensos con base al argumento. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase, no la exclusión.
Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.

	Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio.
Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
Idoneidad Mediacional	
Recursos materiales	Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las clases a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de la enseñanza tutorización, tiempo de aprendizaje)	Adecuación de los significados pretendidos / implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.
Idoneidad Emocional	
Intereses y necesidades	Selección de tareas de interés para los alumnos.

	Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a la matemática. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de la matemática.
Idoneidad Ecológica	
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinas (contexto extra-matemáticos).
Utilidad socio-laboral	Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Fuente: Breda y Lima (2016, p. 80)

Estos indicadores y descriptores se interpretan relativizando su validez al contexto, por lo tanto, el profesor establecerá el peso de cada criterio. Este hecho es esquematizado por Godino y colaboradores con un hexágono. Cada criterio de idoneidad es un vértice y su posición respecto del centro depende del grado de idoneidad que se le ha otorgado, por ende, un hexágono regular representará un equilibrio armónico en la idoneidad del proceso de instrucción.



Fuente: Godino et al. (2006, p. 6).

Valoración de los indicadores de idoneidad didáctica en nuestra propuesta

Idoneidad epistémica

La definición de función que se introduce a través de nuestra propuesta proviene, por una parte, del análisis de la evolución histórica del concepto, " se identifica un punto de partida en el siglo XVII donde el concepto de función aparece como: cualquier relación entre variables"

(p. 6). Creemos que al presentar de esta manera el concepto, evitaremos posibles conflictos futuros como los que señalábamos en las sección dificultades y errores, “existe una falta de distinción entre ecuación y función […] son objetos matemáticos conceptualmente diferentes pero a menudo se representan con los mismos objetos lingüísticos y se refuerza debido al uso prototípico de símbolos de manera confusa” (p.8). Por otra parte, en cuanto a las recomendaciones didácticas, advertíamos sobre la prevalencia de la condición de univalencia al hablar de función en un trabajo realizado con estudiantes de 14 y 15 años por lo que se recomienda la utilización de “Definiciones relacionadas a la idea de variabilidad y que son consecuentes con el desarrollo histórico del concepto de función”(p. 10).

A su vez, la idoneidad epistémica, se refiere a una matemática importante en cuanto propone procesos relevantes para la actividad matemática. Por medio de las consignas (usando los distintos tipos de arrastre) se favorece la elaboración de conjeturas. Por otra parte, la construcción de una tabla con los valores de las variables y la posterior obtención de una conclusión verbal constituye una conversión entre registros de representación. Por estas razones consideramos que la propuesta tiene un alto grado de idoneidad epistémica.

Idoneidad ecológica

La idoneidad ecológica como ya se explicó está relacionada con una matemática relevante en cuanto está adecuada a los lineamientos curriculares y al entorno socio-económico donde se implementará el proceso de instrucción. En nuestra propuesta, se tuvieron en cuenta los documentos oficiales, a nivel nacional, sobre priorización de contenidos y aprendizajes para determinar el significado de referencia (p. 13) y a nivel provincial el Diseño Curricular de Entre Ríos, en este último se indica para segundo año del ciclo básico: “Concepto de relaciones entre variables: tablas, gráficos y fórmulas en diferentes contextos” (p. 43). Otro aspecto preponderante en esta faceta son las conexiones intra y extramatemáticas de los contenidos, en el que consideramos que nuestra propuesta cumple de manera satisfactoria ya que en la primera parte, comenzamos desde un contexto extramatemático para derivar en nociones estocásticas que allanen el camino hacia la segunda parte en la que un problema geométrico nos lleva hacia la noción de función, por la aritmética. De esta manera, geometría, aritmética y cálculo quedarían interconectadas. Por todo ello consideramos que la propuesta tiene un alto grado de idoneidad ecológica.

Idoneidad mediacional

Creemos que hay un buen uso de recursos gracias a la incorporación del software, respaldado del lápiz y papel. Esta interacción de recursos permitirá desarrollar buenas situaciones matemáticas (conjeturas, argumentaciones, etc.). Visualizar el carácter dinámico del concepto de función a través de los arrastres, contribuye a la construcción del significado pretendido.

Con respeto al tiempo de desarrollo de la propuesta, consideramos que serán necesarias 2 (dos) clases, en grupos de estudiantes familiarizados al trabajo con este tipo de consignas y el software, en ese caso, sería una cantidad de tiempo adecuada para la introducción de un nuevo concepto que se continuará estudiando a lo largo del curso o en años posteriores. En el caso de grupos menos aggiornados a esta modalidad de trabajo, podrían plantearse clases previas a modo de preparación antes del desarrollo de esta propuesta lo que incrementaría significativamente el tiempo, en tal caso, se podría pensar una alternativa sin el uso de software optimizando el tiempo disponible. Consideramos que por estas razones la propuesta tiene un alto grado de idoneidad mediacional.

Idoneidad cognitiva

Los saberes previos necesarios para abordar la propuesta (p. 12) son acordes al grado al que se dirige y como se dijo en la faceta anterior, el proceso de instrucción propuesto fomenta la realización de procesos cognitivamente relevantes, formulación de conjeturas, contraposición de unas conclusiones con otras, pasajes entre registros de representación, entre otros. Sin embargo, la propuesta no cuenta con tareas o apartados destinados a la evaluación del nivel de concordancia entre el significado pretendido y el implementado. Por ello, consideramos que la propuesta tiene un grado medio de idoneidad cognitiva.

Idoneidad interaccional

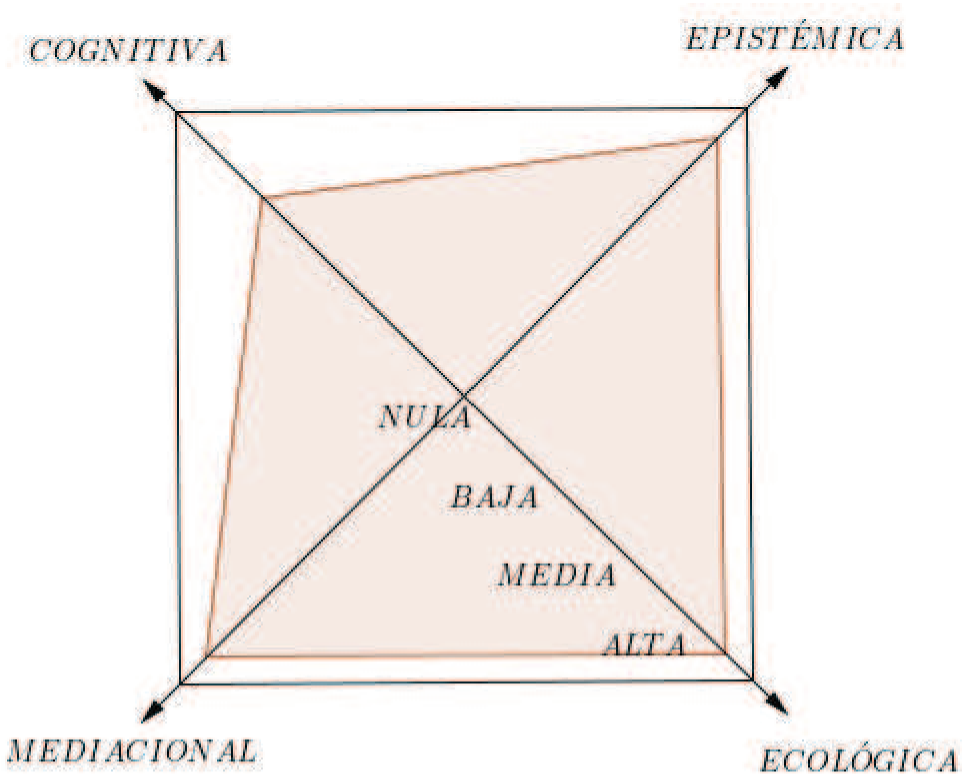
Dado que el análisis de indicadores lo hemos realizado sobre la propuesta didáctica, sin implementación real, podemos anticipar algunos aspectos de la propuesta que favorecerían o no esta faceta. Al tratarse de una propuesta con incorporación de software, los estudiantes que hayan tenido mayor contacto con este tipo de trabajo (ya sea por su biografía escolar o por simple interés personal por los recursos tecnológicos) podrían tomar el lugar de expertos colaborando con aquellos estudiantes que están menos familiarizados. Este diálogo se puede extender a la discusión de sucesos matemáticos que están ocurriendo, y favorecer positivamente a la faceta cognitiva. Por estas razones creemos que la propuesta tiene un alto potencial de desarrollo de la faceta interaccional.

Idoneidad emocional

En cuanto a la idoneidad emocional, creemos que la incorporación del recurso en sí mismo, la modalidad de trabajo, el cambio de roles descrito en la faceta anterior y la posibilidad de conjeturar libremente (dado el carácter abierto de la primer consigna), son rasgos que aumentarían el interés de los estudiantes en la clase. Por otra parte, sin perder de vista que estamos analizando la faceta emocional de una propuesta no implementada, así como el buen manejo del software para algunos puede resultar en una interesante interacción con sus pares, lo opuesto puede generar frustración y pérdida de interés. A priori podemos concluir que la propuesta corre el riesgo de tener un grado bajo de idoneidad emocional si las facetas interaccional, cognitiva y mediacional no son gestionadas con mucha atención en el grupo en el que se pretenda implementar la propuesta.

Presentamos a continuación una adaptación del hexágono, propuesto por Godino et al (2006), que creemos conveniente teniendo en cuenta que dos de las seis facetas no fueron evaluadas.

Representación gráfica de la idoneidad didáctica *a priori*



Podemos concluir que la propuesta cuenta con un buen equilibrio de las idoneidades epistémica, ecológica, mediacional y cognitiva. Como dijimos al presentar la noción de idoneidad didáctica en páginas anteriores, un grado bajo en algunas facetas no necesariamente implica que el proceso de instrucción no sea idóneo, dado que todas las facetas están en constante diálogo e interacción.

Consideraciones para la gestión

Para una futura ampliación de este trabajo, resultaría pertinente su implementación y la consecuente valoración de las seis facetas *a posteriori.* Esto nos permitiría establecer comparaciones con las valoraciones *a priori* que hemos realizado. Es allí donde no queremos dejar de mencionar que, si bien los indicadores de idoneidad analizados nos sirvieron para calificar la propuesta como idónea, de nada serviría si al llevar adelante la implementación la gestión de la clase es deficiente. A continuación detallamos algunos puntos que creemos se deben evitar:

<table>
<tr><td>Actividad 1</td><td>Actividad 2</td></tr>
<tr><td>Sugerir a los estudiantes el uso de algún software para recolectar datos, o sugerir cuál.

Forzar o sugerir la incorporación de conceptos estocásticos como única forma de resumir los datos.

Sugerir a los estudiantes, si fuera el caso, qué tipo de gráfico es más pertinente para presentar sus hipótesis u obligar el uso de los mismos.

Delimitar las variables que se tendrán en cuenta para determinar la calidad del cultivo.</td><td>Sugerir a los estudiantes construcciones de algún caso particular de triángulo.

Advertirles con demasiada anticipación, si fuera el caso, por qué la construcción realizada no es robusta frente al arrastre coartando sus posibilidades de reflexión.

Sugerir el uso de comandos de entrada por ejemplo perímetro[] perdiendo así el estudiante la posibilidad de recordar qué se entiende por perímetro y cómo se puede obtener.

Sobrevalorar el buen manejo del recurso en algunos estudiantes desviando el foco (no es una clase sobre el software).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sobre la gradualidad en la introducción del concepto de función (en ambas actividades).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombrar el tipo de modelo que se ajusta a la situación: lineal, cuadrático, exponencial, etc.

Utilizar lenguaje específico en lugar de palabras provenientes del contexto del problema.

Apresurar el pasaje al registro simbólico.</td></tr>
</table>

Revisión de la propuesta desde una segunda mirada

Como dijimos al presentar la noción de idoneidad didáctica la investigación en educación matemática persigue al menos dos objetivos bien definidos 1) producir constructos para interpretar y describir los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y 2) proponer sugerencias, criterios, o indicadores para valorar o diseñar procesos de instrucción que sean acordes a las demandas actuales de la sociedad. Por ello creemos importante realizar un recorrido por nuestra propuesta tratando de distinguir cómo se articulan dichos criterios.

Queremos destacar que, como pudimos ver, en las consignas planteadas los estudiantes deberán tomar decisiones acerca del camino a seguir en la resolución y los conceptos matemáticos que pondrán en juego. En la primera tarea, están a cargo de la elección de aquellas variables que consideren relevantes, fundamentando esa elección con saberes previos del contexto tanto extra como intramatemático. Podríamos pensar que la consigna planteada (diseñar una ficha de campo) se puede resolver, por ejemplo, realizando una descripción verbal del estado del cultivo y por ende alejarse de una estrategia que contemple la matemática como herramienta principal. Sin embargo, consideramos que este hecho es muy conveniente ya que, a diferencia de consignas que "obligan" a desarrollar directamente un concepto o proceso matemático irremediablemente, en este caso la solución matemática surge como un camino que aporta ventajas como la exactitud, comparación, proyección, etc. Por este motivo podemos asegurar que la propuesta reúne las condiciones para considerarse como denominan Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017, p. 27) con *potencial matemático rico* "consideramos valioso que una consigna pueda admitir que el estudiante tenga posibilidades de exploración y argumentación porque eso le permitirá tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución". Consideramos también, que las consignas de la segunda tarea son acordes con esta pauta de diseño, dado que no se considera un caso particular de triángulo, protocolo establecido de construcción, etc. Por otra parte consideramos que dichas libertades no interfieren en absoluto con el objetivo planteado. Tomando como ejemplo la segunda tarea, se haya considerado un triángulo equilátero, acutángulo, rectángulo, etc., o bien, un triángulo genérico dibujado aleatoriamente, su perímetro indefectiblemente se verá alterado al modificar uno de los lados lo que nos conduce a la noción de función como relación entre variables. Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017, p. 53) advierten "no debería ocurrir que por alguna vía de resolución, el objetivo no sea alcanzado" en tal caso se perdería la coherencia entre la consigna y el objetivo, debiendo reajustarse algunos de ellos.

Otro aspecto relevante a tener en cuenta, continuando con el análisis de las tareas, es la utilización de algún procesador de datos, texto, base de datos, etc., en la primera y del software de geometría dinámica en la segunda. En ambos casos, las tareas pueden ser resueltas sin mediación de las TIC, sin embargo y sobre todo en la segunda, los procedimientos de arrastre descritos contribuyen sustancialmente a la noción de función que pretendemos introducir. Si bien es cierto que calcular un puñado de casos particulares, y luego inferir una relación entre variables -con una buena gestión de la clase- podría lograr el objetivo, la actividad no sería lo suficientemente potente para evidenciar el carácter dinámico del concepto de función que queremos remarcar. Por ello, consideramos que la segunda tarea cumple con el criterio de "imprescindibilidad de las TIC" (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez, 2017, p. 79)

Reflexiones finales

En este trabajo hemos analizado y fundamentado una propuesta didáctica para introducir el concepto de función desde una mirada unificada de la matemática. Comenzamos a partir de la necesidad de generar este tipo de propuestas de enseñanza que contribuyan a unificar la matemática, dejando de lado la arraigada visión de las distintas áreas de la matemática como compartimentos estancos e inconexos. Consideramos que la integración de contenidos debe formar parte indivisible de la práctica diaria de la clase de matemática en oposición a lo que muchas veces vemos.

Esta preocupación nos llevó a preguntarnos sobre la existencia de algún concepto matemático que sea unificador de la matemática, es decir que existan problemáticas provenientes de otras áreas que recaen en él. Pudimos asegurar que dicho concepto es el de función, dada su relevancia modelizadora de procesos extra e intramatemáticos, su incesante evolución a través de más de 2000 años, la simultaneidad evolutiva con otras ciencias (como la mecánica de Newton) que de alguna manera interactúan con el concepto de función y su extendida presencia en el currículo de matemática desde los primeros años de la escuela secundaria hasta el nivel universitario.

Para determinar el significado de referencia del concepto de función revisamos su evolución histórica, las dificultades y errores reportados por las investigaciones en educación matemática y los lineamientos curriculares vigentes. En cuanto a la evolución histórica consideramos que tener en cuenta los complejos procesos de construcción y génesis de un concepto matemático y los problemas no resueltos que perduraron por siglos constituye una mirada enriquecedora desde lo epistémico. Podemos asegurar que pasar por alto estos aspectos derivará en la enseñanza de una matemática formal y de compleja elaboración obviando en cierta medida que es el producto de siglos de esfuerzos colectivos. Pudimos concluir que, prácticas ligadas a la noción variacional son las más adecuadas en este sentido.

Al mismo tiempo, presentar una propuesta bien fundamentada nos exigió revisar aquellos conflictos o dificultades más frecuentes que se han estudiado en diversos trabajos de investigación. Algunos de ellos son, la falta de distinción entre ecuación y función debida al uso prototípico de símbolos, la descompensación al relacionar los elementos de una representación en uno o varios registros, la prevalencia de la condición de unicidad (ligada al registro de representación gráfico), etc. Por otra parte, fue fundamental contar con las recomendaciones didácticas y sugerencias que realizan los investigadores que han abordado la enseñanza de función. Pudimos reponer que existe una tendencia arraigada a utilizar diagramas de Venn (donde se identifican valores que no poseen imagen) o el test de la recta vertical (si se dispone de un gráfico cartesiano) como técnicas inseparables cuando la noción de función está en juego. Esta circunscripción afecta negativamente a la noción de función dado que el significado de un objeto matemático (para el EOS) está determinado por las prácticas que se asocian a él, por lo tanto se corre el riesgo de confundir la noción de función con estas dos prácticas. Para superar estas dificultades se recomienda asociarlo a tipos de problemas que encierran la idea de variabilidad y que son consecuentes con el desarrollo histórico de la noción.

La elección del EOS como marco teórico se fundamentó en la variedad de herramientas con las que este enfoque cuenta a la hora de analizar un proceso de instrucción tanto a priori como a posteriori. En primer lugar de las distinciones del significado entre personal (global, declarado, logrado, inicial y final) e institucional (referencial, pretendido, implementado y evaluado) tomamos algunas de las referidas al significado institucional. Y en segundo lugar, tomamos el constructo de *idoneidad didáctica* para valorar la propuesta didáctica que presentamos. Distintos autores de educación matemática acuerdan que existe una demanda de parte de los profesores y futuros profesores de una didáctica de la matemática que brinde herramientas prescriptivas que guíen el diseño de propuestas de enseñanza y aprendizaje tal como afirman (Font, Breda, Seckel y Pino-Fan, p. 72) "los profesores necesitan herramientas para dirigir su atención a los aspectos más destacados de los episodios de enseñanza y que estas herramientas pueden ser enseñadas como parte de la formación del profesorado".

Otro aspecto de central importancia en la elección de la noción idoneidad didáctica es que pone en valor la labor del profesor de matemática al reflexionar sobre su práctica (propuesta, implementada o evaluada) y le da un rol central en la mejora de sus propias producciones. En definitiva, el profesor no tiene que seguir una receta diseñada por *expertos* en educación matemática que aunque quisieran no pueden abarcar la especificidad del profesor como conocedor del entorno socio-económico, y las condiciones previas del aprendizaje de la matemática del grupo al que va destinada la propuesta. Es el profesor quién le otorga un *peso* a cada faceta evaluada con sus respectivos descriptores, por lo tanto una baja idoneidad en alguna de las dimensiones no significa *falta de idoneidad global* sino que puede indicar que esa faceta tiene poco peso ante la realidad en la que se pretende implementar el proceso de instrucción, es decir, pone especial énfasis en el criterio pedagógico y didáctico del profesor.

Además presentamos una serie de sugerencias que se deberían evitar a la hora de gestionar la puesta en práctica de estas tareas, dado que un proceso de instrucción que presenta alta idoneidad en sus facetas evaluadas *a priori* no necesariamente asegura que una vez implementado produzca los aprendizajes deseados. Entre estas sugerencias destacamos: evitar responder a los estudiantes con más información de la necesaria, no condicionar qué esperamos que respondan o concluyan, valorar el manejo de las TIC por sobre los procesos matemáticos en juego, delimitar variables a considerar o indicar unos caminos de resolución sobre otros, etc.

Pensar en un proceso de instrucción matemática en la actualidad que no esté atravesado por el uso de tecnologías, tiene cada vez menos asidero. ¿Cómo podríamos generar una propuesta de enseñanza acorde a los desafíos y requerimientos de la sociedad actual obviando la presencia de las TIC? acordamos con la siguiente afirmación: “estamos transitando el camino hacia la naturalización del uso de las TIC” (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez, 2017, p.72) y esto nos supone un desafío, abre nuevos interrogantes y nos interpela. La matemática a lo largo los siglos de evolución que ostenta ha sabido beneficiarse de los cambios que acontecieron a la humanidad. Desde aquellas anotaciones elementales en tablillas, pasando por los papiros, la imprenta, las calculadoras, el primer ordenador, hasta la llegada de internet y toda clase de software especializado. Hoy tenemos la oportunidad de trascender los paradigmas heredados hacia un horizonte de una matemática atractiva, significativa y actual.

A modo de cierre queremos mencionar que aportar una visión unificada de la matemática, es un objetivo ambicioso y que de ninguna manera damos por satisfecho únicamente con las dos actividades presentadas. Sin embargo, estamos seguros que este es el rumbo a seguir. Presentar actividades que parten de problemáticas de alguna de las áreas de la matemática y permiten construir nuevos saberes en otra, o bien, actividades de contexto extramatemático que inicialmente no se sabe cuántas ni cuáles de ellas se verán involucradas.

Por último, y observando todo el trabajo presentado podemos concluir que es posible introducir cambios sustanciales en el modo de enseñar matemática y por ende en los aprendizajes que se logran. Lo que queda en evidencia es que requiere que el profesor cuente con herramientas de análisis, acceso a investigaciones recientes y espacios de construcción y reflexión para apropiarse de la disciplina, y por apropiarse no nos referimos a conocer largas listas de contenidos matemáticos, propiedades y complejas teorías provenientes del seno más duro de la ciencia, sino poder responderse a sí mismo por qué, para qué y cómo enseñar.

Referencias bibliográficas

Acosta Gempeler, M. E. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(003), 121-140.

Amaya de Armas, T. R., y Medina Rivilla, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación matemática*, *25*(2), 119-140.

Arcavi, A., (2018). Hacia una visión integradora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Educación matemática*, *30*(2), 33-48. https://doi.org/10.24844/em3002.02

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. D y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en matemática*. Ediciones UNGS.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. Bolema, 32(60), 255-278.

Breda, A., y Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM*, 18, 1-20.

Chevallard, Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education,* 2 (2), 161 -182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Consejo General de Educación (2011). *Diseño Curricular de Educación Secundaria - Tomo I.* Entre Ríos, Argentina.

Detzel, P., (2006). La enseñanza de las funciones y la condición de univalencia. En M. E. Ascheri y R. A. Pizarro (Eds). *I Repem – Memorias*. Universidad Nacional del Comahue. (pp. 43-52)

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 9.1*. Recuperado de http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo Yáñez, J., (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(3), 301-324.

Font, V. (2011). *Funciones.* En L. Goñi (Coord.). *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar.* (pp. 145- 185). Barcelona, España: Graó.

Godino J. D. y Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.*

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.

Gonzalez, C., y Lupinacci, L. J., (2011). *Una propuesta integradora para la formación docente continua en educación matemática*. Ponencia presentada en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.

Gutiérrez, A. (2004). Reflexiones sobre la Enseñanza de la Geometría Euclidiana en Secundaria. *Yupana*, *1*(1), 11-26. doi: https://doi.org/10.14409/yu.v1i1.237

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), 27-44.

Ministerio de Educación de la Nación Argentina. (2017). *Operativo aprender*. Recuperado de: https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/reporte_nacional_2017_secundaria_0.pdf

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2018). *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios de Matemática*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Molinolo, S. (2010). *Fortalecimiento y mejora de la enseñanza de la matemática: hacia un aprendizaje para todos*. Congreso Iberoamericano de Educación (METAS 2021).

NAP Ciclo Básico Educación Secundaria 1° y 2°/ 2° y 3° Años (2013).

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 14(3)*, 361-394.

Rico, L., (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Epsilon*, *38*, 185- 198. ISSN: 1131-9321.

Ruiz Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, *14(1)*. https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1564

UNESCO. (2016). *Aportes para la enseñanza de la matemática*. Disponible en: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000244855

Vázquez, P., Rey, G.; Boubée, C., (2008). *El concepto de función a través de la historia.* UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16, 141-155.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*, 573-582. Salamanca: SEIEM.