UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS

ESPECIALIZACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

LA ENSEÑANZA DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA

EL CASO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE FORMOSA

JOSÉ MANUEL CORVALÁN

Directora

DRA. MABEL RODRÍGUEZ

Julio de 2021

RESUMEN

En este trabajo planteamos un estudio de la enseñanza del Principio de Inducción Completa en la formación inicial de profesores de matemática en la Universidad Nacional de Formosa.

El interés se origina por observar, sostenidamente, dificultades en el aprendizaje de este tema, en la asignatura Álgebra del primer año universitario; a la vez que entendemos que es una temática sumamente importante por su aplicabilidad para demostrar resultados de distintos campos matemáticos, que trascienden el álgebra.

Para abordar el estudio analizamos una serie de documentos que fueron propuestos en clases de Álgebra del Profesorado Universitario en Matemática en 2018. Hemos considerado apuntes teóricos que utiliza el docente, carpetas de alumnos, la guía de trabajos prácticos, el programa de la asignatura y evaluaciones.

Enfocamos el trabajo realizado desde dos perspectivas. Por un lado, la matemática y la didáctica, fundamentada esta última en elementos teóricos provenientes del campo de la Educación Matemática.

Asimismo, presentamos aportes provenientes del campo de la Educación Matemática referidos específicamente a la enseñanza del Principio de Inducción Completa.

El trabajo realizado nos ha permitido tener una amplia perspectiva sobre la enseñanza que efectivamente se lleva adelante en Álgebra, en el Profesorado de Matemática en la Universidad Nacional de Formosa y ponerla en diálogo con aportes del campo de la Educación Matemática.

Finalmente, y con base en el trabajo aquí desarrollado, hemos incluido una serie de consideraciones, que podrían tenerse en cuenta para generar propuestas superadoras que permitan acompañar a los estudiantes y favorecer su aprendizaje desde su inserción en el nivel superior.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Es indiscutible la importancia atribuida al aprendizaje del Principio de Inducción Completa (PIC) en la formación inicial de profesores de matemática, como así también, las dudas y la aplicación no efectiva de este método por parte de los alumnos. Esto último, es de fácil comprobación no solo si consideramos los resultados obtenidos por los estudiantes en evaluaciones en la materia que lo aborda inicialmente, sino cuando se debe apelar al PIC en asignaturas siguientes. El hecho que el método sea utilizable en para probar proposiciones de distintos contenidos matemáticos obliga a la necesidad de comprender no sólo cómo debe utilizarse, sino tener completo dominio de cuándo sería factible aplicarlo. Estas dificultades las observamos, en particular, en estudiantes del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de Formosa.

Teniendo en cuenta la importancia del manejo del PIC y las dificultades de aprendizaje presentes en los estudiantes de esta institución, decidimos poner atención en *el proceso de enseñanza* inicial. De este modo, situamos este estudio en el Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades de la Universidad Nacional de Formosa, particularmente en la asignatura Álgebra del primer año de la carrera.

La importancia de la apropiación de este método en la formación de un futuro profesor de matemática, no está en duda. Distintos autores vienen describiendo tipos de conocimientos que deben adquirirse durante la formación docente. Uno de los precursores en esta línea fue Shulman (1987) quien propuso inicialmente una clasificación de los tipos de conocimientos que debería tener un docente, más allá de la materia específica que enseñe. Otros autores, tomaron este aporte como un punto de partida y lograron modelizar estos conocimientos para el caso específico de un profesor de matemática. Mencionamos entre ellos a Ball, Hill & Bass (2005), Ball, Thames & Phelps (2008); Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) o Sosa Guerrero, Flores-Medrano y Carrillo Yañez (2016). Todos coinciden en establecer dos grandes dominios de conocimiento: uno, el matemático, y otro, el pedagógico. La demostración, inherente a la ciencia matemática tiene lugar en estos modelos dentro del conocimiento matemático, y, por su parte y dentro de este espacio, la inducción completa también cobra relevancia por ser un método que se aplica para probar resultados que aluden a distintos campos específicos del conocimiento matemático.

Con el objetivo de profundizar sobre esos conocimientos requeridos a un profesor desde lo matemático y pedagógico para la enseñanza del PIC y contar con elementos apropiados para estudiar el proceso de enseñanza impartido en la clase de Álgebra, recurrimos al campo de la Educación Matemática y sus aportes al respecto.

Desde la perspectiva de cómo planificar las clases de matemática, Rodríguez (2016) nos provee aspectos para la valoración de consignas, como así también criterios para su redacción.

En cuanto a los estilos de un profesor de acuerdo a sus concepciones del proceso de enseñanza y de aprendizaje, Pochulu, D'Andrea y Ferreyro (2019) nos permiten categorizar estos estilos a través de rasgos predominantes.

Autores como Ernest (1984); Ron y Dreyfus (2004); Cusi y Malara (2009; y Crespo Crespo (2016) coinciden en que existen aspectos centrales para que la compresión del método de inducción sea significativa para el alumno. Algunos de los aspectos enunciados son: el tratamiento del caso base, el paso de inducción, errores en la operatoria algebraica, entre otros.

El estudio de estas cuestiones, sumado al análisis de la enseñanza impartida, nos permitió identificar en donde hacer foco a la hora de revisar el proceso de enseñanza.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En la Sección I nos centramos en el análisis de documentos utilizados en la enseñanza del Principio de Inducción Completa, desde dos enfoques, el matemático y el didáctico.

Desde el enfoque matemático abordamos:

- La descripción de la manera en que el profesor plantea su clase a partir de los apuntes teóricos que utiliza, como así también describimos los registros que los alumnos plasman en sus carpetas.
- La resolución de las actividades propuestas tanto el trabajo práctico como en las evaluaciones parciales y finales, intentando cubrir la mayor cantidad de tipos de resoluciones diferentes que identificamos.

Desde el enfoque didáctico realizamos:

- El análisis de las consignas que figuran en los trabajos prácticos y evaluaciones en términos de su formulación.
- La descripción de las clases en términos didácticos que refieran a tipos de clase y modelo de docente.
- El análisis de las relaciones existentes entre los materiales para el alumno, el estilo de clases y el programa.

En la Sección II nos ocupamos de la descripción de los aportes provenientes del campo de la Educación Matemática referidos a la enseñanza del Principio de Inducción Completa.

En la sección III del trabajo nos proponemos realizar una puesta en diálogo entre el planteo didáctico-matemático que ofrece la asignatura y los aportes del campo de la Educación Matemática.

A modo de cierre se expondrán algunas conclusiones y perspectivas planteadas a futuro.

SECCIÓN I: Análisis de la propuesta didáctica existente

Esta sección está organizada en dos partes. En la primera proponemos una mirada matemática de las actividades vinculadas al contenido Principio de Inducción Completa (PIC) en la asignatura Álgebra I del Profesorado en Matemática, de la Universidad Nacional de Formosa. En la segunda, llevamos a cabo un análisis didáctico de la propuesta de enseñanza.

1.A. La propuesta de enseñanza desde el punto de vista matemático

Para iniciar el desarrollo de esta sección consideramos los siguientes materiales de la cátedra y documentos:

- Los apuntes de clase proporcionados por el profesor a los alumnos (Anexo I).
- Dos carpetas de alumnos distintos que registran la enseñanza del profesor. (Anexo II).
- Los ejercicios correspondientes al tema, extraídos de la guía de trabajos prácticos. (Anexo III).
- Las consignas con la que se evalúa el tema, correspondientes a distintas instancias. (Anexo IV).

a.1.Apuntes del profesor

El docente brinda a sus estudiantes el siguiente material, de índole teórico. Encontramos al inicio una introducción coloquial, como facilitar la comprensión de la idea del tema. A continuación, un desarrollo en el que presenta el Principio y anticipa que la demostración se basa en el Principio de Buena Ordenación. Finalmente, demuestra el PIC.

Cabe resaltar que el enunciado del PIC pasa desapercibido en el texto y su formulación, adecuada para la demostración que sigue, no es la que considerará a posteriori al momento de demostrar proposiciones mediante este principio.

Señalamos las partes, a continuación.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA

INTRODUCCION

Proporciona un método de demostración por recurrencia. No es constructivo, en el sentido de generar propiedades, pero hace posible la demostración de éstas cuando son relativas al de Números Naturales.

Para tener una idea intuitiva de dicho principio, consideramos lo siguiente:

Supongamos alineados el conjunto de alumnos de una escuela; se sabe además que si un alumno habla, entonces habla el siguiente. Interesa determinar cuál es la condición para asegurar que, en un momento dado, estén hablando todos los alumnos. Es obvio que para que se de esta situación es suficiente ver que el primero está hablando. En este caso se trata de investigar la propiedad que enunciamos que enunciamos así: "Todos los alumnos están hablando" y para asegurar su verdad se requiere las siguientes condiciones:

a) El primer alumno habla.
b) Si un alumno habla, entonces habla el siguiente.

DESARROLLO

Extendiendo el caso a una propiedad P, relativa al conjunto de los números Naturales queda asegurada la verdad de P para todo n Ɛ **N**, si se verifican las dos condiciones anteriores.

a) P (1) es V
b) Si P (h) es V, entonces P (h+1) es V.

La demostración de este principio se llama "inducción completa", se basa en el principio de buena ordenación. (Todo subconjunto no vacío de **N** tiene primer elemento)

Si S es un subconjunto de N que satisface:

i) 1 Ɛ S
ii) h Ɛ **S** → h+1 Ɛ **S** entonces **S = N**

O sea: Todo subconjunto de **N** que incluya al 1, al siguiente de h siempre que contenga a h, es igual a N.

ENUNCIADO

Hipótesis) S C N

i) 1 Ɛ S
ii) h Ɛ S → h+1 Ɛ S

Tesis) **S = N**

Demostración) Es suficiente ver que N C S, y para esto basta probar que el subconjunto S' de números naturales no pertenecientes a S es vacío, o sea, de acuerdo con la definición de inclusión es falso que haya algún natural que no pertenezca a S.

DEMOSTRACCION

Suponemos que S' ≠ ∅ por tratarse de un subconjunto no vacío de N, de acuerdo al principio de buena ordenación, existe el elemento mínimo m Ɛ S'. (1)

Por hipótesis 1 Ɛ S, y como los elementos de S' no pertenecen a S, es m ≠ 1. Por otra parte, siendo m natural y además distinto de 1, se tiene:

$m > 1$

$m - 1 > 0$

Como $m - 1 < m$, por ser m el mínimo de S', resulta $m - 1$ Ɛ S

De acuerdo a la hipótesis ii) $m - 1 \in S \rightarrow (m-1)+1 \in S \rightarrow m \in S$

Esta proposición es contradictoria con (1). Luego $N \subset S$ y como por. hipótesis $S \subset N$, resulta S = N

Notemos, a continuación, qué es lo que los estudiantes registran de la clase recibida.

a.2. Carpetas de alumnos

A continuación, consideramos las carpetas de dos estudiantes. Se describen los registros realizados (que figuran completos en el Anexo I) en la clase teórica correspondiente al desarrollo del tema Principio de Inducción Completa.

En ambos apuntes podemos evidenciar que la organización dispuesta para registrar la clase es la siguiente:

- Título
- Descripción
- Planteo del Principio de Inducción Completa (PIC)
- Ejemplos

No se observan en ninguno de los casos notas marginales ni aclaratorias.

En la descripción del tema se enuncian algunas características del PIC como ser:

- Es un método de demostración por recurrencia.
- No es constructivo en el sentido de que no genera propiedades.
- Se utiliza para demostrar propiedades relativas al conjunto de los números naturales.

En la Carpeta del Alumno 1, se registra además como idea intuitiva del principio de inducción completa, lo siguiente:

> Supongamos alineados al conjunto de todos los alumnos de una escuela, se sabe además que si un alumno habla entonces habla el siguiente. Interesa determinar cuál es la condición para asegurar que en un momento dado están hablando todos los alumnos. Es obvio que para que se dé esta situación es suficiente ver que el primero está hablando.

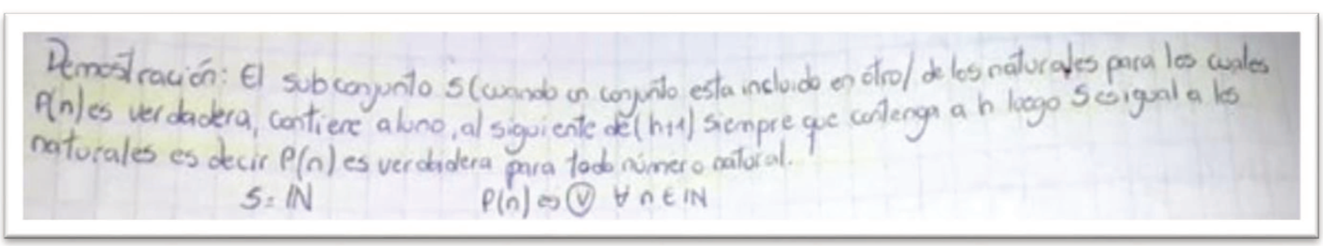
En cuanto al planteo, en ambos apuntes se registraron las mismas anotaciones:

I. Sea P(n) una función proposicional donde $n \in N$. Si ocurre P(1) siendo verdadera y además de la verdad de P(h) se deduce la verdad de P(h+1) entonces P(n) es V $\forall$ n $\in$ N

II. Hipótesis $P(1)$es V $\forall$ h : $P(h) \Rightarrow P(h+1)$ Tesis $\forall$ N :$P(n)$ es V

Bajo el subtítulo de *Demostración*, los estudiantes escribieron en cada caso lo siguiente.

Carpeta Alumno 1



Demostración: El subconjunto S (cuando un conjunto esta incluido en otro/ de los naturales para los cuales P(n) es verdadera, contiene al uno, al siguiente de (h+1) siempre que contenga a h luego S es igual a los naturales es decir P(n) es verdadera para todo número natural.

$S = \mathbb{N}$ P(n) es V $\forall n \in \mathbb{N}$

Carpeta Alumno 2

DEMOSTRACIÓN: EL SUBCONJUNTO S DE NÚMEROS NATURALES PARA LOS CUALES P(n) ES (V) CONTIENE AL 1, AL SIGUIENTE DE n SIEMPRE QUE CONTENGA A n. LUEGO $S = \mathbb{N}$, ES DECIR QUE P(n) ES (V) $\forall n \in \mathbb{N}$

A continuación, registraron expresiones que luego serán consideradas para aplicar el PIC.
Es notorio la diferencia existente en ambos planteos en cuanto a la forma de expresarlas.

Alumno 1

$1+2=3 \quad (2.3=6:2=3)$

$1+2+3=6$

$1+2+3+4=10$

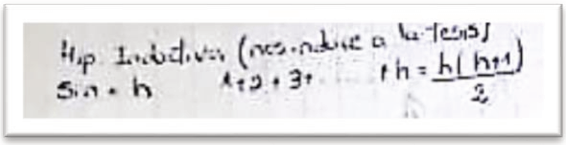
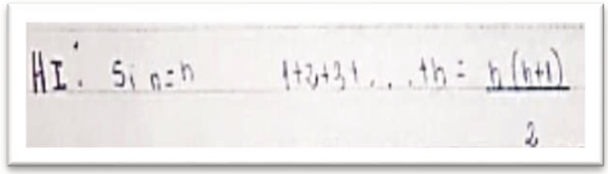
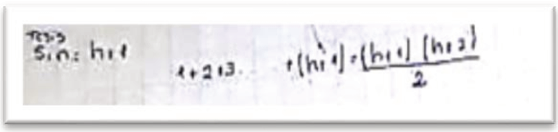
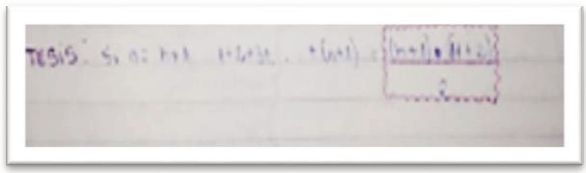
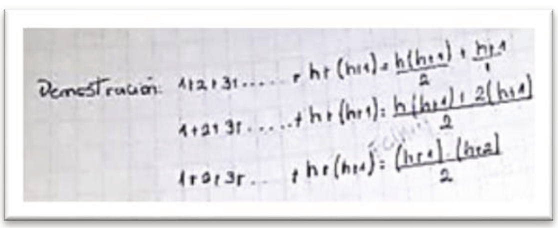
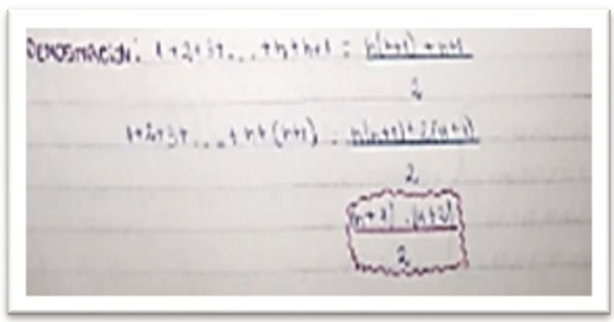
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alumno 2

$$\frac{n.n+1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El siguiente cuadro presenta los planteos y desarrollos realizados por los alumnos al aplicar el Principio de Inducción Completa como método de demostración de las expresiones anteriormente propuestas.

Para n = 1	
H) Si: $n=1$ $1=\frac{1.(1+1)}{2}$ $1=1$	H: Si $n=1$ $1=\frac{1(1+1)}{2}$ $1=\frac{1.2}{2}$ $1=\frac{2}{2}$ $1=1$

<table>
<tr><td colspan="2">Para n = h</td></tr>
<tr><td>
Hip Inductiva (nos conduce a la tesis)
Si n = h 1+2+3+ ... +h = h(h+1)/2</td><td>
HI: Si n=h 1+2+3+...+h = h(h+1)/2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para n = h+1</td></tr>
<tr><td>
Tesis
Si n = h+1 1+2+3 ... +(h+1) = (h+1)(h+2)/2</td><td>
TESIS: Si n = h+1 1+2+3...+(h+1) = (h+1)(h+2)/2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Demostración</td></tr>
<tr><td>
Demostración: 1+2+3+...+h+(h+1) = h(h+1)/2 + h+1
1+2+3...+h+(h+1) = [h(h+1)+2(h+1)]/2
1+2+3...+h+(h+1) = (h+1)(h+2)/2</td><td>
DEMOSTRACIÓN: 1+2+3+...+h+h+1 = h(h+1)/2 + h+1
1+2+3+...+h+(h+1) = [h(h+1)+2(h+1)]/2
(h+1)(h+2)/2</td></tr>
</table>

a.3. Resolución de ejercicios de la guía de trabajos prácticos

Resolvemos las actividades desde el punto de vista matemático, intentando desplegar la mayor cantidad de resoluciones que anticipamos. Por la organización de la materia, las mismas se encuentran en el Trabajo Práctico Nº 1.

En el ítem 2 del Trabajo Práctico N° 1: *Números Naturales* se les solicita a los alumnos la siguiente tarea:

2.- Recordando las definiciones de adición en $\mathbb{N}$:

I. $\forall\, a \in \mathbb{N},\ a + 1 = \text{sg}(a)$
II. $\forall a\,, \forall h \in \mathbb{N},\ a + \text{sg}(h) = \text{sg}\,(a + h)$ o bien $a + (h + 1) = (a + h) + 1$

Demostrar:

a) La adición es asociativa en $\mathbb{N}$: $(a + b) + n = a + (b + n)$

b) La adición es conmutativa en ℕ: $a + n = n + a$

c) El 1 es neutro para la multiplicación, es decir: $n.1 = 1.\, n = n$

d) La multiplicación es asociativa: $(a.\, b).\, n = a.\, (b.\, n)$

e) La multiplicación es distributiva con respecto a la adición: $(a + b)$. n = a.n + b.n

Si bien la tarea solicitada es demostrar las propiedades que allí se enuncian, no se especifica qué método de demostración utilizar.
Realizaremos la demostración aplicando el Principio de Inducción Completa.

Recordemos en qué consiste este método.

El Principio de Inducción Completa es un método de demostración por recurrencia, el mismo es utilizado para demostrar generalmente propiedades pertenecientes a los números naturales. Para probar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo n natural, se debe verificar lo siguiente:

- $P(1)$ Verdadero
- Si $P(h) \Rightarrow P(h + 1)$ verdadero
  Siendo así, resulta $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, realizaremos los planteos para demostrar la propiedad utilizando el Principio de Inducción Completa, correspondiente al ítem 2) a).
Propiedad: La adición es asociativa en ℕ
Es decir, para todo a, b, n números naturales, $(a + b) + n = a + (b + n)$

- Planteo del caso base $P(1)$

$Si\, n = 1 \rightarrow (a + b) + 1 = a + (b + 1)$ debemos probar que esta igualdad se verifica.
Para ello hagamos lo siguiente:
Partamos de $(a + b) + 1$, que por definición I) es igual al $sg(a + b)$ que a su vez por II) es igual a $a + sg(b)$ pero el $sg(b) = (b + 1)$ por lo tanto:
$(a + b) + 1 = sg(a + b) = a + sg(b) = a + (b + 1)$ que era lo que se quería demostrar
Entonces $Si\, n = 1 \Rightarrow (a + b) + 1 = a + (b + 1)$ es verdadero

- Planteo de $P(h)$

$Si\, n = h \Rightarrow (a + b) + h = a + (b + h)$
Es lo que se denomina Hipótesis Inductiva y tomaremos esta afirmación como Verdadera.

- Planteo de $P(h + 1)$

$Si\, n = (h + 1) \Rightarrow (a + b) + (h + 1) = a + [b + (h + 1)]$
Es lo que se denomina Tesis Inductiva y debe demostrarse a partir de la verdad de P(h), es decir $P(h) \rightarrow P(h + 1)$.

Para la demostración de $P(h+1)$, partimos de $(a+b)+(h+1)$

$(a+b)+(h+1) = (a+b)+sg(h)$ (por I)

$= sg[(a+b)+h]$ (por II)

$= sg[a+(b+h)]$ (por H.I.)

$= a+sg(b+h)$ (por II)

$= a+[b+sg(h)]$ (por II)

$= a+[b+(h+1)]$ (por I)

Que era lo que queríamos demostrar, es decir:

$$(a+b)+(h+1) = (a+b)+sg(h) = sg[(a+b)+h] = sg[a+(b+h)]$$
$$= a+sg(b+h) = a+[b+sg(h)] = a+[b+(h+1)]$$

Hemos demostrado que P(1) es verdadero y considerando P(h) verdadero concluimos que P(h+1) también lo es. Por lo tanto $(a+b)+n = a+(b+n)$ se verifica para todo n $\in \mathbb{N}$. Queda así demostrada la propiedad.

Para la propiedad b) se procede de la misma manera.

No así en las propiedades c), d) y e) en las que se requiere de los axiomas de multiplicación en $\mathbb{N}$, pero el método de demostración es el mismo.

Ahora bien, pasemos al ítem 9) donde la tarea solicitada es la siguiente.

Ejercicio 9. Aplicando el Principio de inducción completa demostrar la validez de las siguientes proposiciones en el conjunto de los números naturales:

a) $\sum_{i=0}^{n-1} 4^i = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}$

b) $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1$

c) $\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

d) Demostrar que $6^n - 1$ es múltiplo de 5.

e) 6 + 24 + 42 +………+(18n – 12) = 3n.(3n – 1)

f) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{2}$

g) Si $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n.a$

h) Si $x < 0$ y n es un número natural cualquiera, entonces $x^{2.n-1} < 0$.

Observando las propiedades propuestas para demostrar aplicando el Principio de Inducción Completa podemos diferenciar cuatro categorías de propiedades, a saber.

- *De sumatorias*

Son proposiciones en las que figura una expresión algebraica equivalente a una suma de una cantidad finita de términos.

Ejemplos: Para todo n natural valen las siguientes igualdades

a) $\sum_{i=0}^{n-1} 4^i = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}$
b) $\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$
c) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{2}$
d) $6 + 24 + 42 + \ldots\ldots\ldots + (18n - 12) = 3n.(3n - 1)$

- *De productorias*

Son proposiciones en las que figura una expresión algebraica equivalente al producto de una cantidad finita de términos.

Ejemplo: para todo n natural vale que $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1$.

- *De divisibilidad*

Son proposiciones en las que se plantea que una cierta expresión algebraica, que presenta un parámetro que recorre los números naturales resulta múltiplo de/divisible por un cierto número dado.

Ejemplo: para todo n natural, $6^n - 1$ es múltiplo de 5.

- *De desigualdades*

Son proposiciones que plantean una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, alguna/s de las cuales tienen una variable que recorre el conjunto de los números naturales.

Ejemplo: para todo n natural vale que:

a) Si $a \geq -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + n.a$
b) Si $x < 0$ y n es un número natural cualquiera, entonces $x^{2n-1} < 0$.

Resolveremos una de cada categoría, dado que los procedimientos son similares.

Resolución de una consigna *de desigualdades*

Consigna: probar que para todo n natural vale que $\sum_{i=0}^{n-1} 4^i = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}$.

Una primera exploración que podrían hacer los estudiantes, podría llevarlos a calcular algunos sumandos para luego reescribir la suma propuesta, es decir:

$i = 0$	$\Rightarrow$	4^0
$i = 1$	$\Rightarrow$	4^1

$i = 2$	$\Rightarrow$	4^2
$i = 3$	$\Rightarrow$	4^3
$i = 4$	$\Rightarrow$	4^4
$\cdots$		
$i = n-1$	$\Rightarrow$	4^{n-1}

De donde $\sum_{i=0}^{n-1} 4^i = 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots + 4^{n-1}$.

Lo que se debe probar es que para todo número natural n vale que:

$$4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}$$

También podrían intentar comprobar la propiedad para algunos valores de “n”.

$n = 1$	$\Rightarrow$	$\sum_{i=0}^{1-1} 4^i =$	$\sum_{i=0}^{0} 4^i$	$\Rightarrow$	4^0	=	$\frac{4^1}{3} - \frac{1}{3} = 1$
$n = 2$	$\Rightarrow$	$\sum_{i=0}^{2-1} 4^i =$	$\sum_{i=0}^{1} 4^i$	$\Rightarrow$	$4^0 + 4^1$	=	$\frac{4^2}{3} - \frac{1}{3} = 5$
$n = 3$	$\Rightarrow$	$\sum_{i=0}^{3-1} 4^i =$	$\sum_{i=0}^{2} 4^i$	$\Rightarrow$	$4^0 + 4^1 + 4^2$	=	$\frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = 21$
$n = 4$	$\Rightarrow$	$\sum_{i=0}^{4-1} 4^i =$	$\sum_{i=0}^{3} 4^i$	$\Rightarrow$	$4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3$	=	$\frac{4^4}{3} - \frac{1}{3} = 85$

Hechos estos ejemplos, dejamos expresados los casos generales siguientes

$n = h$	$\Rightarrow$	$\sum_{i=0}^{h-1} 4^i =$	$\sum_{i=0}^{h-1} 4^i$	$\rightarrow$	$4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{h-1}$	=	$\frac{4^h}{3} - \frac{1}{3} = \cdots$
$n = h + 1$	$\Rightarrow$	$\sum_{i=0}^{(h+1)-1} 4^i$	$\sum_{i=0}^{h} 4^i$		$4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{h-1} + 4^h$	=	$\frac{4^{h+1}}{3} - \frac{1}{3} = \cdots$

A continuación, realizamos los planteos para demostrar la propiedad utilizando el Principio de Inducción Completa.

<u>Demostración</u>

Planteo del caso base P(1)

$Si\ n = 1 \Rightarrow 4^0 = \frac{4^1}{3} - \frac{1}{3} = 1$ el cual se verifica, es decir, P(1) es verdadero.

Planteo del caso P(h)

$Si\, n = h \;\Rightarrow 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{h-1} = \frac{4^h}{3} - \frac{1}{3}$ (Planteo de la hipótesis inductiva)

Planteo del caso P(h+1)

$Si\, n = h + 1 \;\Rightarrow 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{h-1} + 4^h = \frac{4^{h+1}}{3} - \frac{1}{3}$ (tesis inductiva)

Para la demostración de la tesis inductiva, partimos de $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{h-1} + 4^h$.

Asociamos los "h" primeros términos de la suma $(4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{h-1}) + 4^h$

Hacemos notar que esas "h" sumas corresponden a la hipótesis inductiva y la reemplazamos por su expresión equivalente.

Con lo cual se obtiene $\frac{4^h}{3} - \frac{1}{3} + 4^h$.

Realizamos la suma de expresiones fraccionarias y asociamos convenientemente, con lo que nos queda $\frac{(4^h + 3.4^h) - 1}{3}$

Como $(4^h + 3.4^h) = (1.4^h + 3.4^h) = 4.4^h = 4^{h+1}$ lo reemplazamos en la expresión anterior por su equivalente, obteniendo así $\frac{(4^{h+1}) - 1}{3} = \frac{4^{h+1}}{3} - \frac{1}{3}$ que es la expresión deseada.

En conclusión, verificamos que P(1) es verdadero, y que, considerando P(h) verdadero, P(h + 1) también lo es. Por lo tanto, P(n) es verdadera para todo número natural n.

<u>Resolución de una consigna *de productoria*</u>

<u>Consigna:</u> Probar que para todo n natural vale $\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}} = \mathrm{n} + 1$.

El planteo es equivalente a:

$\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}} = \frac{(1+1)}{1} . \frac{(2+1)}{2} . \frac{(3+1)}{3} \ldots \frac{(n+1)}{n} = n + 1$ o lo que es lo mismo,

$$\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}} = \frac{2}{1} . \frac{3}{2} . \frac{4}{3} \ldots \frac{(n+1)}{n} = n + 1$$

<u>Demostración</u>

Para el planteo del caso base P(1)

$$Si\, n = 1 \;\Rightarrow \frac{(1+1)}{1} = 1 + 1 \;\rightarrow \frac{2}{1} = 2$$

Para el planteo del caso P(h)

$Si\, n = h \;\Rightarrow \frac{(1+1)}{1} . \frac{(2+1)}{2} . \frac{(3+1)}{3} \ldots \frac{(h+1)}{h} = h + 1$ (hipótesis inductiva)

Para el planteo del caso P(h+1)

$Si\ n = (h+1)\ \rightarrow\ \frac{(1+1)}{1}.\frac{(2+1)}{2}.\frac{(3+1)}{3}\dots\frac{(h+1)}{h}.\frac{(h+1+1)}{(h+1)} = h+1+1$

$\frac{(2)}{1}.\frac{3}{2}.\frac{(4)}{3}\dots\frac{(h+1)}{h}.\frac{(h+2)}{(h+1)} = h+2$ (tesis inductiva)

Para probar la tesis inductiva, partimos de: $\frac{(2)}{1}.\frac{3}{2}.\frac{(4)}{3}\dots\frac{(h+1)}{h}.\frac{(h+2)}{(h+1)} = (h+1).\frac{(h+2)}{(h+1)}$ (aquí se usa la hipótesis inductiva, en la última igualdad), de donde resulta, simplificando:

$$= h+2$$

Luego

$\frac{(2)}{1}.\frac{3}{2}.\frac{(4)}{3}\dots\frac{(h+1)}{h}.\frac{(h+2)}{(h+1)} = h+2$ que es la tesis buscada.

<u>Resolución de una consigna *de divisibilidad*</u>

<u>Consigna:</u> Demostrar que $6^n - 1$ es múltiplo de 5.

<u>Demostración</u>

Que un número sea múltiplo de 5 significa que dicho número puede expresarse como el producto de 5 por algún número natural.

En nuestro caso $6^n - 1$ representa un número natural y debemos verificar si para cualquier "n" natural este número es múltiplo de 5.

Consideraremos entonces probar que vale para todo n natural, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $6^n - 1 = 5k$.

P(n): "existe algún $k \in \mathbb{N}$ / $6^n - 1 = 5k$"

Para el caso base

Si $n = 1 \Rightarrow 6^1 - 1 = 6 - 1 = 5$ entonces existe $k = 1$ que verifica $6^1 - 1 = 5.1$

Para el caso de un h natural, arbitrario:

$Si\ n = h$, existe $k \in \mathbb{N}$ / $6^h - 1 = 5.k$ (hipótesis inductiva)

Para el caso (h+1)

Si $n = (h+1)$, debemos probar que existe $m \in \mathbb{N}/\ 6^{h+1} - 1 = 5.m$ (tesis inductiva)

$6^{h+1} - 1 = 6^h.6 - 1$

$6^h.6 - 1 = 6^h.(5+1) - 1$

$6^h.(5+1) - 1 = 6^h.5 + 6^h - 1$

$6^h.5 + 6^h - 1 = 6^h.5 + 5.k$

$6^h.5 + 5.k = 5.(6^h + k)$. Basta considerar $m = (6^h + k)$ como el valor natural buscado. Cabe señalar que es un número natural pues h y k lo son, por lo tanto, la operación indicada da por resultado un natural. Luego, $5.(6^h + k) = 5.m$

Por lo tanto, $6^{h+1} - 1 = 5.m$ nos permite afirmar que $6^{h+1} - 1$ es múltiplo de 5.

<u>Resolución de una consigna de *desigualdades*</u>

<u>Consigna:</u> probar que, para todo n natural, si $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n.a$.

<u>Demostración</u>

- $Si\ a \geq -1, n = 1 \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1 + 1.a \rightarrow (1+a) = 1 + a$
- $Si\ a \geq -1, n = k \Rightarrow (1+a)^k \geq 1 + k.a$ (hipótesis inductiva)
- $Si\ a \geq -1, n = (k+1) \Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1).a$ (tesis inductiva)

$(1+a)^{k+1} = (a+1).(1+a)^k \geq (1+a).(1+k.a)$ (por hipótesis inductiva)

$(1+a)^{k+1} \geq (1+a).(1+k.a) = 1 + a + k.a + k.a^2, k.a^2 > 0$

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + a + k.a + k.a^2 > 1 + a + k.a$

Como $k.a^2 > 0$

$$(1 + a + k.a) + k.a^2 > (1 + a + k.a)$$

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + a + k.a = 1 + a.(k+1)$

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + a.(k+1) = 1 + (k+1).a$

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1).a.$

Estas resoluciones, aquí exhibidas son representativas de las demás dadas.

a.4. Evaluaciones

Hemos accedido a consignas que han sido seleccionadas como parte de distintos exámenes parciales y a una de un final libre. Las presentamos a continuación.

15p- 1) Demostrar aplicando el Principio de Inducción Completa:

$$2 + 16 + 54 + \ldots\ldots\ldots + 2\,n^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{2} \quad ; \forall\, n \in N$$

1.- Demostrar que $P(n) = n^2\,(n+1)^2$ es divisible por 4 para todo números naturales.

20p- 1) Demostrar aplicando el Principio de Inducción Completa:

$$6 + 7 + 9 + \ldots\ldots\ldots + (2n + 3) = n \cdot (n + 4) \qquad ; \forall n \in N$$

15p 1) Demostrar aplicando el principio de Inducción Completa:

$$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \frac{(2n-1).3^{n+1} + 3}{4}$$

La siguiente consigna fue administrada en un final libre.

2.-Aplicando el principio de inducción matemática demuestre que: la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es siempre divisible por 9.

Todas ellas están dentro de alguna de las tipologías presentadas, por lo que consideramos que no es necesario presentar su resolución matemática.
Volveremos en adelante para analizarlas desde una perspectiva didáctica.

1.B. La propuesta de enseñanza desde el punto de vista didáctico

En esta sección analizamos la propuesta de enseñanza, desde el punto de vista didáctico. Tomamos los mismos materiales que en la sección anterior y, para su análisis, presentamos en cada apartado los conceptos de la Educación Matemática que ponemos en juego.
Hacia el final, establecemos relaciones entre los materiales destinados al trabajo del estudiante, con la propuesta de clase y el programa de la asignatura.

b.1. Análisis de las consignas del Trabajo Práctico

Describimos brevemente, a continuación, los conceptos de Educación Matemática que ponemos en juego en el análisis de las consignas que recibieron los estudiantes, tanto sea para el trabajo en clase, domiciliario o en evaluaciones.
Uno de ellos es el de *potencial matemático de una consigna* (PM) (Rodríguez, 2017). Este concepto hace referencia a dos aspectos esenciales que permiten realizar una valoración a priori de una consigna, de acuerdo a las posibilidades que permita desarrollar a los alumnos. Estas son:

- las posibilidades de exploración que la consigna habilita o no (lo que incluye no solo variedad de caminos a elegir, sino que no tenga sugeridos pasos a seguir); y

- las posibilidades de argumentar sobre la validez de la resolución o de la respuesta.

Que una consigna de lugar a la posibilidad de explorar y argumentar le permitirá al alumno tomar sus propias decisiones al organizar y abordar su resolución.

Para que esto suceda, la consigna debe admitir más de una resolución, como así también no debe contener en su enunciado de manera explícita los pasos a seguir para su desarrollo. Asimismo, suele enfatizarse lo valioso de agregar preguntas o consignas posteriores a la resolución de modo tal de provocar en el estudiante el reconocimiento de la utilidad o no de distintas vías de resolución. La posibilidad de reflexionar sobre sus intentos le dará elementos para reconocer la utilidad de los recursos matemáticos y así decidir qué y cuándo podrían resultarle útiles ante otra situación a resolver.

La posibilidad de argumentar le permitirá explicar cómo fue el proceso de construcción de su respuesta y por qué le parece válida la afirmación de su propuesta.

De acuerdo a las posibilidades que brinden las consignas podemos hablar de:

- Potencial matemático pobre: cuando la consigna no invita -o no habilita- a la exploración y no requiere una argumentación.
- Potencial matemático rico: cuando la consigna permita lo contrario a la anterior, es decir, invite al alumno a explorar y argumentar.

Cabe resaltar que otras opciones provocarían valoraciones intermedias. Es decir, no todo debe enmarcarse necesariamente en uno de estos dos casos. El hecho de realizar este análisis, más allá de la valoración en sí, nos dará elementos para el momento de considerar algún tipo de mejora a la propuesta didáctica dado que habrá quedado de manifiesto algún aspecto que podría atenderse.

En esta misma línea también incluimos en nuestro análisis cuestiones referidas a la redacción de los enunciados. Para ello tomaremos como referencia algunos criterios para la redacción de consignas. Rodríguez (2016) enuncia los siguientes:

- Criterio 1: Evitar descripciones, redactar las consignas tal como serán recibidas por los estudiantes.
- Criterio 2: Si el enunciado relata alguna situación real, proponer preguntas que tengan que ver con el relato y evitar hacer preguntas sobre los objetos matemáticos.
- Criterio 3: Evitar dar información que asegure existencia y/o unicidad de algo buscado.
- Criterio 4: Evitar el pedido expreso de hallar fórmulas, resolver ecuaciones, trazar gráficos, etc.
- Criterio 5: Incluir el pedido de argumentaciones o justificaciones en lenguaje coloquial.
- Criterio 6: Cuando se plantea seleccionar opciones correctas entre varias, solicitar explicaciones del porqué se descarta el resto.

Estos criterios aplican a las consignas matemáticas. Cabe señalar que otro tipo de consignas (Rodríguez, 2017) son las metacognitivas, tanto personales como matemáticas. Las mismas refieren a los planteos que el docente hace de modo que el estudiante advierta cómo se ha sentido durante su proceso de aprendizaje (*consignas metacognitivas personales*) y qué cuestiones matemáticas capitalizará, trascendiendo la resolución particular que realizó (*consignas metacognitivas matemáticas*).

Otro concepto que nos proporciona herramientas para analizar las consignas es el de *registros de representaciones semióticas*. Duval (1998) afirma que accedemos a los objetos matemáticos mediante el uso de diversas representaciones. Esas representaciones denominadas representaciones semióticas se expresan en diferentes tipos de registros semióticos. Los que consideramos en este trabajo son: el verbal o coloquial, algebraico o simbólico, numérico y gráfico.

Para que un sistema semiótico represente un registro de representación semiótica debe además permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- la representación de un conjunto de signos identificable,
- la posibilidad de realizar transformaciones de una representación en un registro a otra que pertenezca al mismo registro. Esto es denominado *tratamiento* y
- la *conversión* de una representación de un objeto matemático de un registro a otra representación correspondiente a otro registro.

Con estos elementos podremos identificar en qué tipo de registros se presentan los objetos matemáticos en las consignas planteadas y determinar qué actividades cognitivas podría realizar el alumno para la resolución de las mismas.

La teoría mencionada alerta de la necesidad de articular al menos dos registros de representación semiótica para lograr la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Por este motivo, consideramos que el análisis desde esta perspectiva nos permitirá contar con más elementos para una eventual propuesta superadora.

Entendemos que no es necesario un análisis individualizado de las consignas y, en cambio, proponemos un análisis conjunto dado que, excepto mención específica, en la mayoría podemos extraer las mismas conclusiones.

Las consignas que aparecen en los documentos que tomamos como referencia tienen características similares en cuanto a su potencial matemático. En casi la totalidad de ellas que se plantean en el Trabajo Práctico, excepto una que analizaremos aisladamente, podemos notar que no permiten exploración por parte del alumno. El método de demostración para abordar la validez de la proposición se indica en la propia consigna, como puede verse en el siguiente enunciado. Como se verá, se da una indicación general de probar por inducción y se continúa el enunciado listando un conjunto de funciones proposicionales para argumentar sobre su validez. Estas involucran planteos con sumas, tanto expresadas simbólicamente como mediante un desarrollo explícito (con uso de puntos suspensivos); productoria, divisibilidad y desigualdades.

9.- Aplicando el Principio de inducción completa demostrar la validez de las siguientes proposiciones en el conjunto de los números naturales:

Ocurre lo mismo en casi la totalidad de las consignas enunciadas en exámenes parciales y finales en las cuales también, como en la anterior, se indica el método con el cual se debe demostrar la proposición. Puede verse en los siguientes casos.

1) Demostrar aplicando el principio de Inducción Completa:

$$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots\ldots + n.3^n = \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}$$

20p- 1) Demostrar aplicando el Principio de Inducción Completa:

$$6 + 7 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2n+3) = n.(n+4) \qquad ; \forall n \in N$$

Respecto de la argumentación, mencionamos lo siguiente. Dado que lo esperado es que el estudiante utilice el PIC, sin otro tipo de justificación o pregunta que permita entender si ha comprendido él método, la adecuación de su uso, etc., el hecho de ver escrita una resolución simbólicamente correcta no es suficiente garantía de haber alcanzado la comprensión de por qué ese tipo de resolución permite afirmar la validez de la función proposicional. Puede verse en Falsetti, Marino y Rodríguez (2004), un ejemplo de esto. Allí se muestra cómo un estudiante podría generar reglas de manipulación simbólica que no puede justificar matemáticamente pero que, en algunos casos, le permitirán resolver adecuadamente los ejercicios.

En este sentido, la valoración que podemos realizar sobre estas consignas en torno a la utilización del método de Inducción Completa es de un PM pobre ya que direccionan a la aplicación inmediata del método sin dejar libertad para decidir de qué modo resolver, si podría probarse de otro modo, o promover una reflexión de si es adecuado, o si es posible aplicarlo o no y por qué. Cabe resaltar que, tal como los enunciados indican, la totalidad de las consignas es resoluble por este método.

Ahora bien, en otras consignas presentes en los documentos podemos observar algunas diferencias respecto de las anteriores, como por ejemplo la siguiente planteada también en el Trabajo Práctico que expresa:

2.- Recordando las definiciones de adición en N:

a) $\forall a \in N$, **a + 1 = sga**

b) $\forall a, \forall h \in N$, **a + sgh = sg (a + h) o bien a + (h + 1) = (a + h) +1**

Demostrar:

a) La adición es asociativa en N: **(a + b) + n = a + (b + n)**

b) La adición es conmutativa en N: **a + n = n + a**

c) El 1 es neutro para la multiplicación, es decir**: n.1 = 1.n =n**

d)La multiplicación es asociativa: **(a.b). n = a. (b.n)**

e) La multiplicación es distributiva con respecto a la adición: **(a + b). n = a.n + b.n**

En la misma no se especifica qué método utilizar a la hora de realizar las demostraciones, sin embargo, como vimos en la sección 1 A, una manera posible de realizarlo es aplicando el Principio de Inducción Completa.

En este caso la consigna otorga cierta libertad al alumno a la hora de explorar el método a utilizar para la demostración, por lo que consideramos posee un PM distinto a las anteriores. Aunque no solicite ningún tipo de argumentación ni justificación sobre la resolución, entendemos que la riqueza se encuentra en la demostración en sí misma. Así como la demostración utilizando inducción ya fue presentada en el apartado a.3, señalamos aquí otras argumentaciones posibles desde la teoría de conjuntos.

Para nuestra demostración consideraremos verdaderas las siguientes afirmaciones, donde C(A) denota el cardinal del conjunto A.

I. Sean A, B y M tres conjuntos finitos y disjuntos donde C(A) = a, C(B) = b y C(M) = n, donde a, b, n pertenecen al conjunto de números naturales.

II. Sabemos también que para todo A, B disjuntos $C(A \cup B) = C(A) + C(B)$

Como a, b, n son números naturales (a + b) + n también es un número natural. Por lo tanto, podemos decir que:

$(a + b) + n = C(A \cup B) + C(M) = C(A) + C(B) + C(M) = C(A) + C(B \cup M) = a + (b + n)$.

La posibilidad de resolver de distintas formas, sumando a que no esté indicado cómo resolver y la riqueza de la argumentación matemática que podría darse, permiten afirmar que el PM de esta consigna es rico.

No se encuentran consignas de tipo metacognitivas, ni personales ni matemáticas.

Respecto de los criterios para enunciar consignas, están tomadas como las han recibido los estudiantes, por lo que el primero de ellos se cumple. Los demás –excepto el 4-, no aplican, por el tipo de formulación estandarizada de "*demostrar usando PIC…*" a lo que le siguen proposiciones. El criterio 4 propone que no se pida expresamente utilizar un cierto objeto matemático y esto claramente no se cumple, por lo recién mencionado, no dejando grados de libertad al estudiante para decidir cómo justificar la validez de la propiedad.

Como mencionamos en la sección a.3 las proposiciones a demostrar aplicando el método de inducción completa presentes en los documentos analizados pueden categorizarse como propiedades en las que se expresan sumatoria, productoria, dde divisibilidad y de desigualdades
Analizamos los registros semióticos en los que se presentan las consignas y en los que podrían utilizarse para sus resoluciones.

Registros semióticos de las consignas de sumatoria

En esta categoría, donde se plantea la suma de finitos términos de sucesiones, podemos identificar que el registro en el que presenta la consigna es el algebraico. Pero a su vez en este registro se pueden observar dos variantes:

- En las que aparece el símbolo de sumatoria ($\sum$):

$$\sum_{i=0}^{n-1} 4^i = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}\ (3^n - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{2}$$

- Y en las que aparece un desarrollo explícito de sumas sucesivas con puntos suspensivos:

15p- 1) Demostrar aplicando el Principio de Inducción Completa:

$$2 + 16 + 54 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2\,n^3 = \frac{n^2 . (n+1)^2}{2} \qquad ;\forall n \in N$$

4) Demostrar aplicando el principio de Inducción Completa:

$$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots\ldots + n.3^n = \frac{(2n-1).3^{n+1}}{4}$$ [illegible]

20p- 1) Demostrar aplicando el Principio de Inducción Completa:

$$6 + 7 + 9 + \ldots\ldots\ldots + (2n+3) = n \cdot (n+4) \qquad ; \forall n \in N$$

En ambos casos no se precisa necesariamente un cambio de registro para abordar la demostración por PIC, pero puede ser posible que los alumnos realicen una transformación del registro al interior del mismo, es decir, un tratamiento para pasar del símbolo de sumatoria al de sumas sucesivas o viceversa.

Registros semióticos de las consignas de productoria

En esta categoría, ocurre lo mismo que en la recién mencionada. En ella se encuentra planteado el producto de finitos términos de alguna sucesión, y una expresión equivalente. Ejemplo de ello es probar que para todo n natural vale $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1$.

El registro en el que está planteada la proposición es el algebraico, y no presenta ninguna necesidad de cambio de un registro a otro.

Registros semióticos de las consignas de desigualdades

En estos casos, el planteo viene dado en registro algebraico, dentro del cual, debe hacerse tratamiento para su resolución.

Registros semióticos de las consignas de divisibilidad

En la categoría de divisibilidad, encontramos planteadas las proposiciones en registro verbal.

d) Demostrar que **$6^n - 1$** es múltiplo de 5.

En este caso, como vemos en las resoluciones presentadas, el alumno necesita realizar una conversión de una representación de un registro a otro para poder realizar la demostración por el método solicitado. Es decir, efectuar un pasaje del verbal al algebraico.

La conversión de representaciones entre registros puede presentarse como una dificultad a la hora de realizar una demostración por inducción.

La totalidad de resoluciones requiere poner en juego el registro simbólico y el numérico. Este último en el caso del análisis de la validez para el caso n = 1. Luego de reemplazar por el valor 1, se debe realizar tratamiento al interior del registro numérico.

Por otra parte, es clave para la correcta resolución el dominio del tratamiento algebraico que permite utilizar la hipótesis de que P(n) es verdadera para llegar a que entonces P(n + 1) también lo es.

Finalmente, y para cerrar este apartado, mencionamos que si consideramos cada una de las consignas, aisladamente, podemos concluir que mayoritariamente presentan un PM pobre y no se alinean a los requerimientos establecidos en el criterio 4 mencionado, pues expresamente se da la indicación de demostrar de un cierto modo. Asimismo, cada categoría de enunciado conlleva un registro (todos algebraico, excepto la de divisibilidad), en todos ellos se requiere dominio del tratamiento en registro algebraico para resolver y en el caso excepcional mencionado, una previa conversión al mismo.

b.2. Análisis de las clases

El análisis de las consignas nos permitió realizar una valoración en términos del potencial matemático de las mismas, de los registros de representación semiótica involucrados y de cómo se presentan los enunciados a los estudiantes. Por otra parte, para complementar el análisis de la propuesta de enseñanza, pretendemos también realizar una descripción de las clases en términos didácticos. Hemos focalizado en *modelos de docentes* y *tipos de clases* que proponemos inferir a partir de los materiales disponibles. Pretendemos conocer si la propuesta que estamos analizando podría enmarcarse en alguno, si es el caso, o conocer si hay rasgos de algún enfoque que prevalezcan.

Para ello consideramos los siguientes referentes que nos permitirán encuadrar el análisis. Si bien en el trabajo siguiente los autores se centran en la enseñanza de matemática en carreras de ingeniería, podemos considerar algunas cuestiones que son aplicables para las clases de Algebra I del Profesorado en Matemática de la Universidad de Formosa.

Pochulu, D'Andrea y Ferreyro (2019) sostienen que:

> Si buscamos caracterizar el modo en que se enseña matemática en una carrera de ingeniería, lograríamos establecer tres estilos básicos: formalista/estructuralista, mecanicista/empirista y contextualizado/realista (Figura 1). Estos estilos los podemos imaginar ocupando los vértices de un triángulo y la clase de matemática que estemos analizando estaría en algún punto del mismo, lo cual dependerá de las concepciones sobre enseñanza y aprendizaje que posee el profesor.

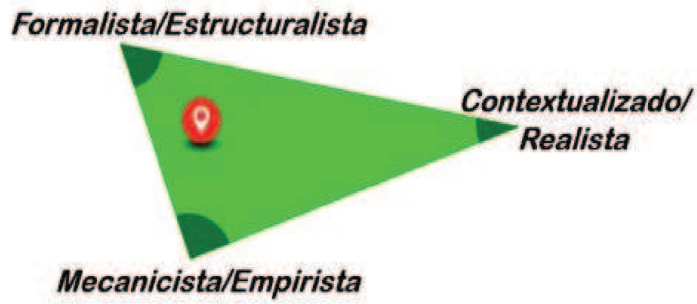


Figura 1: Estilos de enseñanza de la matemática (p.69)

El estilo *formalista/estructuralista* hace referencia a un profesor cuyo énfasis está enfocado en definir conceptos, propiedades, lemas, teoremas, etc., desde una metodología de clases magistrales. Es él quien define, ejemplifica, demuestra; mientras que los alumnos en una actitud pasiva simplemente toman nota, primeramente, para luego aplicar lo visto en problemas intramatemáticos. Este estilo de enseñanza tiene un correlato en bibliografías tradicionales de matemática, en prácticas antiguas de cómo dar una clase y en especial las de álgebra, donde generalmente la estructura de presentación es la de teoría/ejemplos/ejercicios.

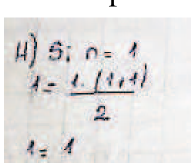
Otro estilo es el *mecanicista/empirista* en el que las prácticas del profesor se centran en la aplicación de procedimientos y algoritmos, otorgándole a los conceptos, propiedades y teoremas un valor no tan significativo. La metodología predilecta es la repetición continua de mecanismos, reglas y algoritmos en la resolución de ejercicios tipo. Este estilo suele ser aceptado en gran parte por el alumnado dado que su actividad consiste básicamente en aprenderse las reglas de resolución que necesita sin la necesidad de profundizar en ellas y hasta no siendo imprescindible su comprensión ni toma de decisiones, colocándolo también en una actividad pasiva de aprendizaje.

El estilo *contextualizado/realista* propone un acercamiento al conocimiento desde la integración tanto de lo teórico como de lo práctico. Puede propiciarse por la observación, investigación, debates, que permitan al alumno explorar, argumentar, redefinir, elaborar nuevos interrogantes, acciones que favorecen a la construcción de su propio conocimiento como así también avanzar hacia otros nuevos.

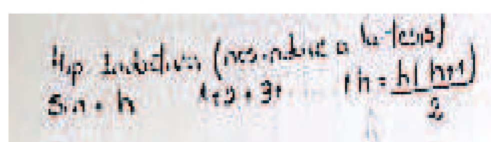
A partir de las evidencias que pudimos observar tanto en las carpetas de los alumnos como en los apuntes brindados por el profesor, consideramos que el estilo predominante en las clases donde se desarrolla el contenido matemático Principio de Inducción Completa como método de demostración es el formalista/estructuralista. Esto se debe a que se presenta el método de demostración, se lo prueba, se ejemplifica y se plantean ejercicios similares para su aplicación. Esta estructura de las clases puede verse en los apartados en los que analizamos los materiales

brindados por el docente y en las carpetas de estudiantes. También pueden verse en los Anexos I y II.
Asimismo, podemos notar, considerando la propuesta de trabajos prácticos que el docente brinda a los estudiantes, que las clases podrían tener rasgos del estilo mecanicista/empirista. Esto se debe a que los ejercicios que el estudiante recibe se presentan agrupados, aunque no esté dicho explícitamente, según la tipología que hemos señalado: de sumatorias, de productorias, de divisibilidad, de desigualdades. Cada uno de estos tipos se aborda con procedimientos y técnicas similares que hemos desarrollado en el apartado del tratamiento matemático. Entonces, ante un ejercicio, al alumno le bastaría reconocer a qué categoría pertenece la proposición y activar las técnicas y procedimientos correspondientes. De este modo, podría realizar la demostración exitosamente, más allá de cómo resulte la comprensión lograda del tema.
Un procedimiento que podría surgir para los casos que se presentan como sumatoria –y seguramente replicable a otros- es el mencionado en Marino, Falsetti y Rodríguez (2004). El mismo dio lugar a identificar estudiantes que producen escritos correctos, sin tener comprensión sobre lo realizado. Lo que se reporta en ese trabajo es que los estudiantes logran establecer una secuencia de pasos a seguir, común a todas las proposiciones de este tipo que logran repetir independizándose de qué es lo matemático que están haciendo. De ese modo, se embarcan en realizar pasos automatizadamente, manipulando objetos. Estos son:
Paso 1: Plantear y verificar P(1)
Paso 2: Plantear P(h) copiando el enunciado dado, eventualmente cambiando la letra recibida y denominar a ese escrito “hipótesis inductiva”
Paso 3: Plantear P(h+1) reemplazando en la variable por h+1 y denominar a esa expresión “tesis inductiva”
Paso 4: Tomar el primer miembro de la tesis (que siempre será una sumatoria) y poner que es igual a la suma de lo que figure en la hipótesis inductiva más el término correspondiente a h+1.
Paso 5: Realizar operaciones algebraicas en esta última suma hasta lograr obtener la expresión del segundo miembro de la tesis inductiva (planteado en el paso 3).
En el trabajo mencionado, se resalta la necesidad de pedir explicaciones de lo realizado para asegurar que hay comprensión matemática.

Hemos encontrado estos pasos en las carpetas de los estudiantes, como indicamos a continuación.

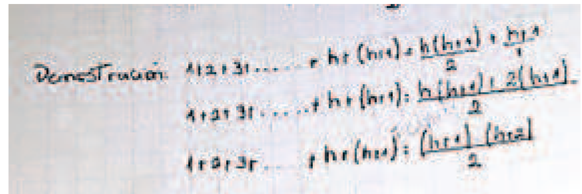


Paso 1



Paso 2

Paso 3



Pasos 4 y 5

Si el alumno considera únicamente seguir estos pasos de manera mecánica, sin control sobre lo que realiza, confirmaría nuestra advertencia de rasgos del estilo mecanicista/empirista de enseñanza por el tipo de consigna que el docente propone a los estudiantes. De este modo, en la agrupación de estas proposiciones del Trabajo Práctico, el foco de la tarea estaría puesto en la habilidad algebraica que posea el alumno y no en el sentido de la aplicación del PIC. Sin embargo, los requerimientos de la consigna podrían ser considerados como alcanzados (demostrar la validez de las proposiciones aplicando PIC) y el docente podría no advertir la no comprensión.

El estudiante puede adquirir destreza en la manipulación simbólica y no ser capaz de hacer explícitas ni inteligibles las razones, ni matemáticas ni personales, por las cuales realiza un procedimiento o técnica o asegura que una propiedad es verdadera o falsa (Falsetti, Marino y Rodríguez, 2004). Esto es lo que nos alerta el trabajo mencionado y que en la clase pareciera no estar contemplada esta posibilidad.

b.3.Relación entre los materiales para el alumno, el estilo de clases y el programa

En este apartado proponemos relacionar las actividades que fueron propuestas para ser desarrolladas por los estudiantes, con las clases y el programa de la materia (que pueden verse en los Anexos III, II y IV respectivamente).

Tomamos rasgos del programa de la asignatura, seleccionados por estar directamente relacionados con el PIC o aquellos que, entendemos, son transversales a distintos contenidos matemáticos.

La fundamentación que se encuentra en el programa de la materia se plantea lo siguiente:

> La enseñanza del Álgebra, objeto del conocimiento de esta asignatura está fuertemente unificada por medio de la teoría del número y de las estructuras fundamentales, buscando nuevos métodos y medios para la enseñanza de la matemática basados en la nueva filosofía para la educación, preparado para el aprendizaje individual, orientado hacia la investigación y el descubrimiento de acuerdo a la Ley Federal de Educación. (Autor[1], 2018, p.41)

No pudimos dar con evidencias que indiquen la enseñanza desde un enfoque que contemple las nuevas filosofías para la educación, ni cuestiones concretas relacionadas a lo que propone la Ley

[1] Para proteger la identidad del docente, dado que el programa no está de público acceso, utilizamos Autor y las páginas hacen referencia al anexo de este trabajo.

Federal de Educación. Los rasgos formalistas/estructuralista y mecanicistas/empirista detectados en las concepciones de enseñanza del profesor nos permiten argumentar nuestra afirmación.

Entre los objetivos generales propuestos nos centramos en los siguientes.

> Que el alumno:
>
> - Relacione el significado de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos y de las propiedades que las caracterizan.
> - Aplique los fundamentos teóricos en la resolución de situaciones problemáticas. (Autor, 2018, p.42)

El primer objetivo seleccionado tiene un alcance que incluye la demostración a través de la aplicación PIC. Esta es una herramienta de prueba por excelencia para las propiedades de las operaciones del conjunto de números naturales y otras propiedades que en él se verifican. Entendemos que este objetivo se aborda, al estar incluidas las actividades propuestas en el Trabajo Práctico analizado y en vínculo con las clases dadas, como se mencionó en el apartado b.3.

Respecto al segundo objetivo, su presencia, al estudiar PIC, sería relativa. Es decir, si los estudiantes abordaran una situación problemática, la analizaran, decidieran utilizar PIC para realizar una prueba –eventualmente de una conjetura que surge de la modelación de una situación problemática- podríamos decir que estaría presente en las clases o materiales. En este sentido, las evidencias observadas en los documentos analizados no nos permiten afirmar que este objetivo se haya trabajado en clase, y por lo tanto no se puede asegurar que esté logrado por los estudiantes.

En cuanto a los objetivos específicos para la unidad I en la cual se ubica el contenido matemático, tomamos dos de las cuatro planteados ya que se relacionan de manera total o parcial con la aplicación del PIC. Estos son

> UNIDAD 1: Números naturales
>
> Objetivos:
>
> Que el alumno:
>
> - Demuestre propiedades de las operaciones con números naturales.
> - Aplique el Principio de Inducción Completa a diversas situaciones. (Autor, 2018, p. 42)

En cuanto al primer objetivo seleccionado, como mencionamos anteriormente la demostración de las propiedades de las operaciones con números naturales son un campo fértil para la aplicación del PIC.

Ahora bien, para el segundo objetivo nos preguntamos a qué se refiere en cuestiones de aplicación del método en situaciones diversas. Si la diversidad radica en el tipo de propiedades a demostrar (sumatorias y/o productorias finitas, divisibilidad, desigualdad) vemos que tanto en los registros de clase de los alumnos, en el Trabajo Práctico, exámenes parciales y finales se evidencia esa multiplicidad de situaciones. Pero si consideramos que con *situaciones diversas* podría referirse a consignas intramatemáticas y otras extrematemáticas, notamos que lo intramatemático es lo predominante.

En lo que respecta a aspectos metodológicos para la clase, que se declaran en el programa, notamos una gran variedad de propuestas significativas que podrían aplicar para la enseñanza del PIC. Decidimos limitarnos solamente a aquellas sobre las que podemos expedirnos, por contar con los materiales sometidos a consideración en este trabajo.

La propuesta metodológica del Programa enuncia:

> Al ser Algebra I una asignatura de formación básica e instrumental, la tarea docente se focaliza en proporcionar condiciones óptimas para el proceso de enseñanza y de aprendizaje logrando una participación activa del alumno en su propio aprendizaje incentivando la reflexión, creatividad y autonomía por medio de técnicas grupales y guías de estudio elaboradas con situaciones problemáticas motivadoras.
>
> A través de la metodología utilizada, el alumno adquirirá método de estudio, capacidad para interpretar situaciones problemáticas, plantear y discutir soluciones ejercitándose así su juicio crítico. (autor, 2018, p.45)

Cuestiones analizadas en secciones anteriores nos permiten observar que algunas de las condiciones propuestas no se ven plasmadas si nos basamos en los documentos que han sido objeto de análisis. Asimismo, el *potencial matemático pobre* que poseen las consignas del Trabajo Práctico, no permiten anticipar la participación activa del estudiante, ni la creatividad y autonomía del alumno. Respecto a la reflexión, no hemos encontrado consignas de tipo metacognitiva, como hemos mencionado en el apartado en el que las analizamos, didácticamente.

SECCIÓN II: Aportes provenientes de la Educación Matemática

En esta sección compartimos aportes para la enseñanza del PIC que se han producido en el seno de la Educación Matemática.

En sus trabajos sobre el tema, Ernest (1984) aborda el análisis del Principio de Inducción Completa desde una dimensión pedagógica, determina y describe las habilidades necesarias que debe poseer un estudiante a la hora de emprender una demostración por este método, del mismo modo establece las diferencias entre las distintas áreas conceptuales que se ponen en juego al momento de aplicar el principio de inducción. Se incluyen, además, interpretaciones incorrectas en el aprendizaje de inducción y propuestas que permiten dilucidar estas dificultades en los alumnos. Se establecen, también, criterios para el análisis del tratamiento de inducción en libros de textos.

Ron y Dreyfus (2004) proponen en su documento, el estudio de modelos utilizados por los profesores para la enseñanza del PIC. Plantean que la compresión significativa del método de demostración por inducción es un proceso complejo en el cual se pueden considerar tres aspectos: la comprensión de la estructura de la demostración por inducción; la compresión de la etapa base; y de la etapa del paso de inducción. Su análisis se basa en la información obtenida en entrevistas con docentes de nivel secundario en cuanto a cómo inician el estudio del tema con sus alumnos. Estos modelos consisten en el planteo de situaciones iniciales como las fichas de dominó dispuestas en filas o el juego de la torre de Hanoi los cuales permitan una aproximación a la idea del principio de inducción. Sostienen que la utilización de estos modelos propuestos en un lenguaje no formal contribuye a la explicación del método y favorece la comprensión por parte del alumno sobre el sentido de la demostración a través del principio de inducción.

En el mismo sentido, Cusi y Malara (2009) consideran la etapa del paso de inducción como el aspecto más significativo para la enseñanza del PIC. A partir de esta consideración, proponen un recorrido que contempla ciertos pasos esenciales como el análisis exhaustivo del concepto de implicación lógica; la introducción del método trazando paralelismos entre el PIC y el orden de los números naturales como así también el uso de referencias metafóricas; y la presentación de ejemplos que permitan resaltar la importancia del caso base.

Ruiz Cordovés (2010) aporta desde su trabajo, ideas para la enseñanza de la inducción completa. Ubica la demostración como un problema para los estudiantes, de modo que promueve la aplicación de procedimientos heurísticos. Estos últimos son útiles en la enseñanza de la resolución de problemas y, como caso particular la demostración. Propone, de este modo, que el alumno establezca reglas heurísticas de acuerdo al tipo de propiedad y la forma en que la misma este planteada.

Crespo Crespo (2016) plantea en su trabajo una reflexión acerca de los orígenes, alcance, limitaciones y errores frecuentes en la aplicación del método de demostración por inducción completa. Se ubica en el enfoque socioepistemológico, centrándose en analizar las características del discurso escolar y las formas de argumentar en el aula de matemática como así también en el lenguaje utilizado. Afirma que los estudiantes aplican el PIC como un proceso mecánico al cual no le atribuyen el sentido, ni incorporan la esencia detrás del mismo. Tomando como base el análisis de situaciones de aula establece una categorización de casos en donde refleja errores y acciones realizadas por los alumnos. Mencionamos entre ellos: 1) errores de operatoria algebraica; 2) la importancia del caso base; 3) para qué propiedades es aplicable la inducción completa y 4) realizar inducción completa sin hacer las cuentas. Como conclusión establece que las demostraciones aplicando el PIC requieren un tratamiento con propuestas que permitan comprender su significado y no restringir su uso a técnicas algebraicas. Esto se lograría presentándolas en distintos contextos matemáticos poniendo énfasis en por qué lo aplican y en qué casos es posible aplicarlo.

SECCIÓN III: Análisis de la propuesta de enseñanza a la luz de las recomendaciones del campo de la Educación Matemática

En esta sección proponemos una puesta en diálogo, entre el planteo didáctico-matemático que la asignatura Álgebra I ofrece respecto al tratamiento de la enseñanza del principio de inducción completa, con los aportes encontrados del campo de Educación Matemática.

Iniciamos con los apuntes brindados por el profesor, analizados en la sección I. En ellos podemos notar que, en la introducción al tema, se describe una situación real como idea intuitiva del método de inducción completa. La presencia de analogías es valorada desde la Educación Matemática, como señala Ernest (1984), quien afirma que: *"*la utilización de analogías ilustra la relación entre el método de inducción y el ordenamiento de los números naturales" (p. 183). Por su parte, en consonancia, y llamando a estas analogías *modelos*, Ron y Dreyfus (2004) sostienen:

> Consideramos la contribución potencial de los modelos para explicar la demostración por medio de inducción, hemos demostrado que los profesores podrían hacer un uso más profundo de los modelos, en particular con respecto a los puntos delicados relacionados con la hipótesis de inducción (p.120).

Otros temas a destacar en la introducción brindada por el profesor, es el tratamiento superficial a cuestiones que permitan desarrollar las habilidades que un estudiante requiere para realizar demostraciones mediante el método de inducción. Estas habilidades, según Ernest (1984), son: i) la habilidad para probar el caso base, ii) la habilidad para probar el paso de inducción y, iii) la habilidad de presentar una prueba de manera correcta.

Otros autores como Cusi y Malara (2009) consideran la realización de micropruebas individuales de las implicaciones $P(1) \Rightarrow P(2)$, $P(2) \Rightarrow P(3)$, $P(3) \Rightarrow P(4)$, … previo a abordar $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ contribuyen a la comprensión y desarrollo de habilidades para la prueba del paso de inducción. En este sentido, no se advierte en la propuesta de enseñanza, este tipo de exploración. En los apuntes tomados por los alumnos de las clases del tema no se advierte tratamiento que tienda a potenciar el desarrollo de estas habilidades.

Si nos ubicamos en el tratamiento del caso base, podemos notar nuevamente su poca atención en los documentos analizados. No se encuentra específicamente realzada la necesidad de ponerle atención. Esto podría deberse en términos de Crespo Crespo (2016) a que:

> La demostración del caso base en una demostración por inducción completa, suele ser sencilla y en muchas oportunidades, trivial. Los estudiantes, se concentran normalmente en

> la realización del paso inductivo, ya que es el que les puede traer mayores dificultades y por lo tanto a veces descuidan el caso base y su significado e importancia (p. 246).

Otra cuestión que colabora con el entendimiento del método, y no registran evidencias en los documentos, es el debate de cuáles son aquellas propiedades que involucran a los números naturales que puedan o no ser demostrarlas por inducción. En esta línea, Crespo Crespo (2016) menciona: *"Otra situación que puede darse en las aulas de matemática es que los estudiantes apliquen la inducción completa siempre que encuentren una propiedad que menciona a los números naturales, sin analizar si es aplicable o no"* (p. 248).

En la siguiente sección proponemos un cierre del estudio presentado aquí y dejamos ciertas líneas de trabajo para abordar a futuro.

CONCLUSIONES

El estudio realizado sobre la enseñanza del Principio de Inducción Completa en la formación inicial de profesores de matemática de la Universidad Nacional de Formosa nos ha brindado la posibilidad de comprender, desde lo matemático y lo didáctico, el primer abordaje con el que los estudiantes se enfrentan respecto del tema.

La Educación Matemática nos ha permitido tener una perspectiva didáctica respecto de la propuesta de enseñanza y, a partir de las descripciones presentadas tenemos claridad para comenzar a delinear algunas pautas que permitan sostener y acompañar a los estudiantes en el aprendizaje del tema. Al respecto, mencionamos que a partir del análisis de la valoración del potencial matemático (Rodríguez, 2017) de las consignas propuestas en el trabajo práctico, como en el de las evaluaciones, podríamos considerar abrir los enunciados de modo de dejar grados de libertad a los estudiantes para decidir cuándo optar por el PIC. Esto, a su vez, permitiría poner en discusión la necesidad de tener en claro ante qué situaciones sería aplicable. Por otra parte, las actividades podrían dar lugar a la exploración y esto podría lograrse, simplemente reformulando algunos de los enunciados de modo de dejar que sean los estudiantes quienes propongan, por ejemplo, expresiones que podrían representar una suma finita de términos.

Predomina en el planteo de estas consignas el registro simbólico y quedan en casi la totalidad de los casos, los demás registros. Sabemos, a raíz de los aportes de Duval (1998) que una condición para la aprehensión conceptual, o la comprensión es la posibilidad de articular al menos dos registros de representación semiótica. Esto nos invita a pensar cómo promover el uso del registro verbal, numérico y gráfico tanto para el planteo de las consignas como para las instancias de exploración que estamos proponiendo incluir.

Consideramos que será necesario incluir consignas de tipo metacognitivas matemáticas para dar lugar a la reflexión respecto del trabajo matemático realizado, sobre todo si este incluye desde la formulación de las proposiciones, luego de exploración, hasta la prueba alcanzada.

Por otra parte, en cuanto al estilo de enseñanza del profesor, que hemos conjeturado a partir de analizar los materiales que utiliza y las carpetas de estudiantes, detectamos un predominio del formalista/estructuralista y del mecanicista/empirista. Esto podría dar lugar a que los alumnos realicen escritos correctos sin tener comprensión de lo realizado y se limiten a realizar simplemente una secuencia de pasos mecanizados desplazándose así el énfasis a desarrollar la habilidad algebraica y no al sentido de la comprensión del método. Podríamos imaginar que un planteo de consignas más abierto, sumado a clases en las que se dé lugar a la exploración, formulación de enunciados por parte de los estudiantes, para cuya validación deba apelarse al PIC, podrían favorecer los aprendizajes de los estudiantes y naturalmente se correría el estilo docente de los antes descriptos.

Si fuera posible diseñar una enseñanza que tome en cuenta el tipo de sugerencias que quedan descriptas aquí, sería interesante considerar la inclusión de recursos tecnológicos. Estos podrían utilizarse al momento del planteo de las conjeturas y también, una vez establecida, para explorar el campo de validez con recursos que naturalmente podrían permitir la articulación de los registros numérico, gráfico y simbólico.

Finalmente, las clases observadas conservan cierta coherencia interna respecto del estilo docente y materiales, aunque no así con algunos rasgos que se encuentran declarados en el programa de la materia y que podrían darse en concordancia con las sugerencias recién expuestas.

Los aportes matemáticos y didácticos que hemos puesto en juego en este trabajo nos han permitido no solo tener claridad y poder describir con precisión la enseñanza puesta en juego sino lo que consideramos más valioso, nos dejan un sinnúmero de ideas potentes para mejorar las propuestas didácticas y, por lo tanto, los aprendizajes de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: ¿Who know mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-46.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5)*,* 389-407.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L., & Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. En *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22* (pp.185-205). Irem de Strasbourg. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_22/adsc-2017_007esp.pdf.

Crespo Crespo, C. (2016). Argumentaciones en el aula de matemática. La estrategia de inducción completa. En E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 243-252). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cusi, A., & Malara, N. A. (2008). Mejorar la conciencia sobre el significado del principio de inducción matemática. *Actas de la Reunión Conjunta de PME, (32)*, 393-398.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamericano.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics, 15(2)*, 173–189. https://doi.org/10.1007/bf00305895

Falsetti, M.; Marino, T. y Rodríguez, M. (2004). Validación en Matemática en situación de aprendizaje. *Actas del VI Simposio de Educación Matemática*. https://e9c5a09f-0538-4107-8408-2f03e760c306.filesusr.com/ugd/7bf699_9018bfa56fe74b6397233a5b9d862099.pdf.

Pochulu, M., D'Andrea, L., & Ferreyro, M. (2019). Indicadores de referencia para valorar planificaciones de matemática orientadas al desarrollo de competencias en ingeniería. *Revista Electrónica De Divulgación De Metodologías Emergentes En El Desarrollo De Las STEM, 1(1)*, 66-83. http://www.revistas.unp.edu.ar/index.php/rediunp/article/view/94.

Rodríguez (coord). (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Ediciones UNGS.

Ron, G., & Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 113-120. https://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR249_Ron.pdf.

Ruiz Cordovés, R., & Zamora Pellicier, M. (2010). Enseñar a demostrar aplicando la inducción completa: algunas recomendaciones metodológicas. *EduSol, 10*(31), 50-59.

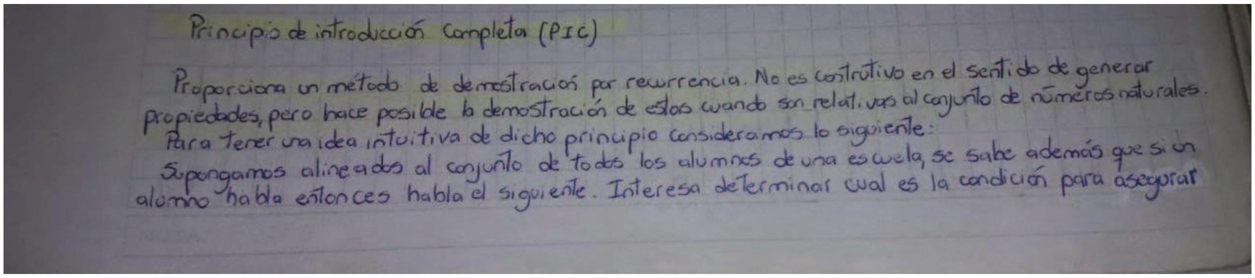
Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Sosa Guerrero, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo Yañez, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática,* 28 (2), 151-174.

ANEXOS

Anexo I: Carpeta de los estudiantes

Alumno 1

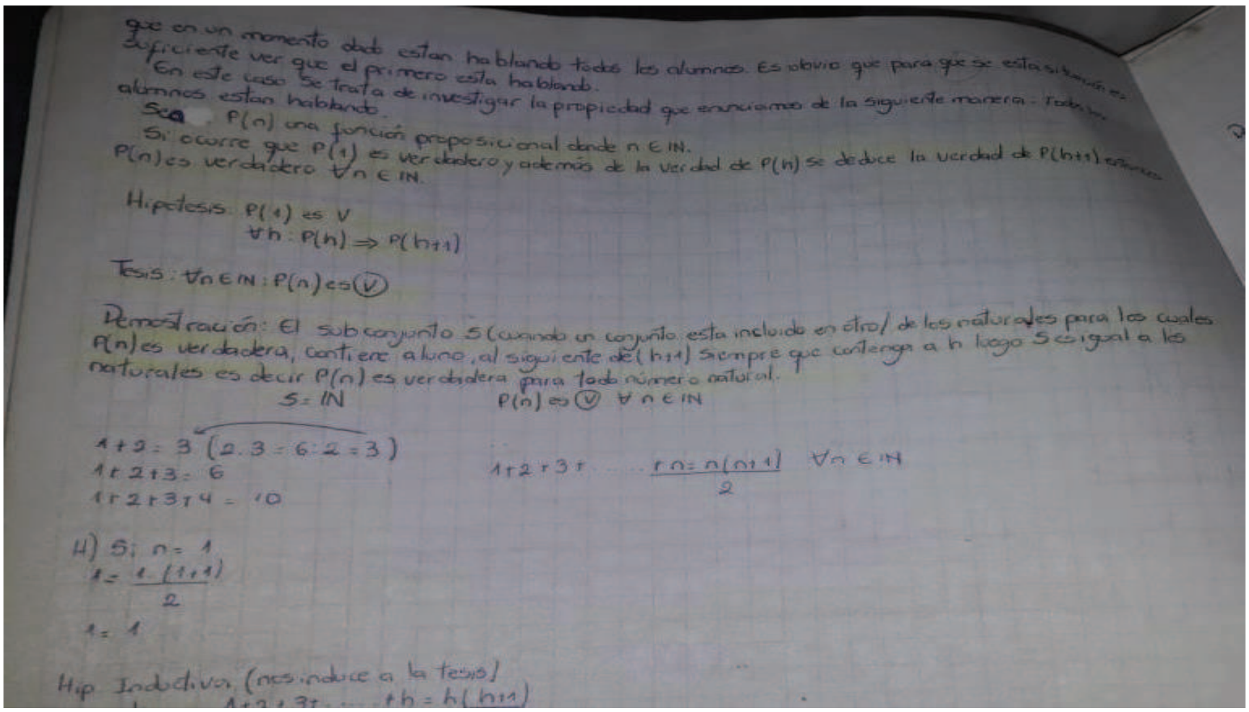


Principio de introducción Completa (PIC)

Proporciona un método de demostración por recurrencia. No es contrutivo en el sentido de generar propiedades, pero hace posible la demostración de estos cuando son relativos al conjunto de números naturales.

Para tener una idea intuitiva de dicho principio consideramos lo siguiente:

Supongamos alineados al conjunto de todos los alumnos de una escuela, se sabe además que si un alumno habla entonces habla el siguiente. Interesa determinar cual es la condición para asegurar



que en un momento dado estan hablando todos los alumnos. Es obvio que para que se esta situación es suficiente ver que el primero esta hablando.

En este caso se trata de investigar la propiedad que enunciamos de la siguiente manera: Todos los alumnos estan hablando.

Sea $P(n)$ una función proposicional donde $n \in IN$.

Si ocurre que $P(1)$ es verdadero y además de la verdad de $P(h)$ se deduce la verdad de $P(h+1)$ entonces $P(n)$ es verdadero $\forall n \in IN$.

Hipotesis: $P(1)$ es V

$\forall h: P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Tesis: $\forall n \in IN: P(n)$ es V

Demostración: El subconjunto S (cuando un conjunto esta incluido en otro) de los naturales para los cuales P(n) es verdadera, contiene al uno, al siguiente de (h+1) siempre que contenga a h luego S es igual a los naturales es decir P(n) es verdadera para todo número natural.

$S = IN$ $\qquad$ $P(n)$ es V $\forall n \in IN$

$1+2=3 \; (2.3=6:2=3)$

$1+2+3=6$

$1+2+3+4=10$

$1+2+3+ \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in IN$

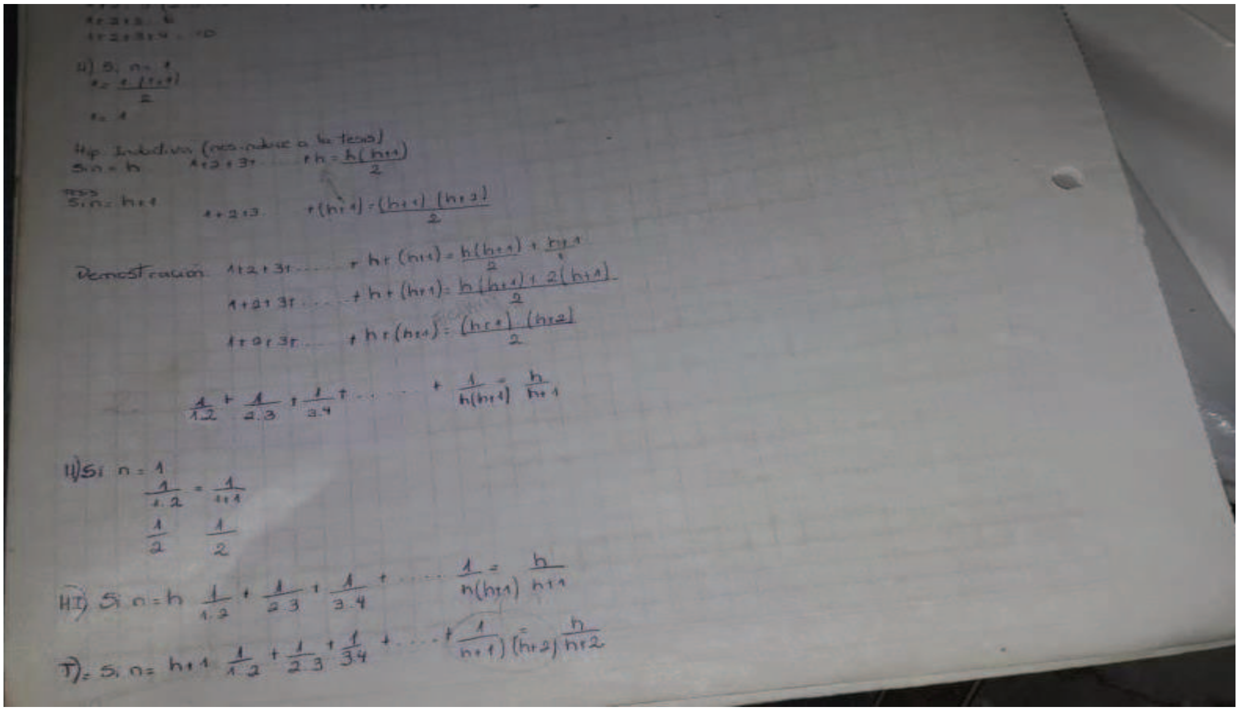
H) Si $n=1$

$1 = \frac{1.(1+1)}{2}$

$1 = 1$

Hip. Inductiva (nos induce a la tesis)

$1+2+3+ \ldots + h = h(h+1)$



$1+2+3=6$

$1+2+3+4=10$

I) Si $n=1$

$1=\frac{1(1+1)}{2}$

$1=1$

Hip. Inductiva (nos conduce a la tesis)

Si $n=h$ $\quad 1+2+3+\dots+h=\frac{h(h+1)}{2}$

Tesis

Si $n=h+1$ $\quad 1+2+3\dots+(h+1)=\frac{(h+1)(h+2)}{2}$

Demostración $\quad 1+2+3+\dots+h+(h+1)=\frac{h(h+1)}{2}+\frac{h+1}{1}$

$1+2+3+\dots+h+(h+1)=\frac{h(h+1)+2(h+1)}{2}$

$1+2+3+\dots+h+(h+1)=\frac{(h+1)(h+2)}{2}$

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{h(h+1)}=\frac{h}{h+1}$

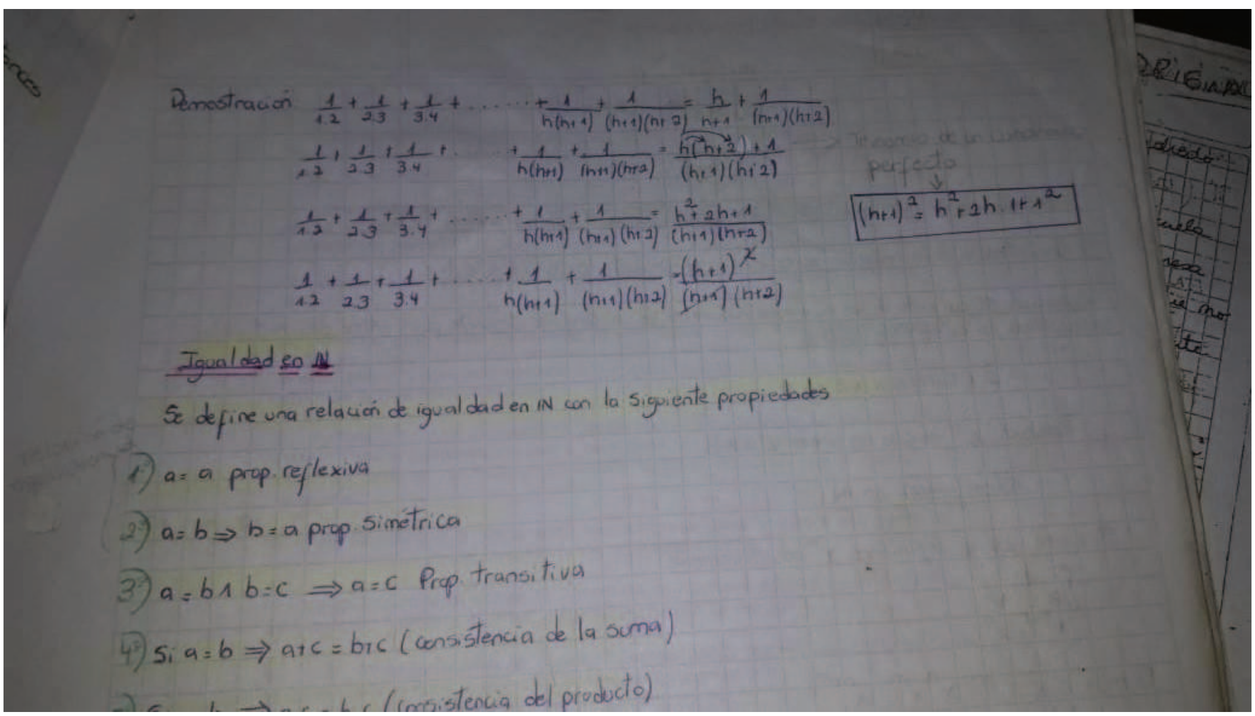
I) Si $n=1$

$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

HI) Si $n=h$ $\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots\frac{1}{h(h+1)}=\frac{h}{h+1}$

T) Si $n=h+1$ $\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h}{h+2}$



Demostración $\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{h(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h}{h+1}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}$

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{h(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h(h+2)+1}{(h+1)(h+2)}$

Trinomio de un cuadrado perfecto

$\boxed{(h+1)^2=h^2+2h.1+1^2}$

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{h(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h^2+2h+1}{(h+1)(h+2)}$

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{h(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{(h+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(h+1)}(h+2)}$

Igualdad en IN

Se define una relación de igualdad en IN con la siguiente propiedades

1) $a=a$ prop. reflexiva

2) $a=b \Rightarrow b=a$ prop. simétrica

3) $a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$ Prop. transitiva

4) Si $a=b \Rightarrow a+c=b+c$ (consistencia de la suma)

5) ... (consistencia del producto)

Alumno 2

23/05/13

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA (PIC)

- Proporciona un método de demostración por recurrencia, no es constructivo, en el sentido de generar propiedades pero hace posible la demostración de ellas cuando son relativas al conjunto de $\mathbb{N}$.
- Sea $P(n)$ una función proposicional donde $(n) \in \mathbb{N}$. Si ocurre $P(1)$ siendo verdadera y además de la verdad de $P(h)$ se deduce la verdad de $P(h+1)$ entonces $P(n)$ es (V) $\forall n \in \mathbb{N}$

HIPOTESIS: $P(1)$ es (V) $\quad \forall h: P(h) \Rightarrow P(h+1)$

TESIS: $\forall \mathbb{N}: P(n)$ es (V)

DEMOSTRACIÓN: El subconjunto S de números naturales para los cuales $P(n)$ es (V) contiene al 1, al siguiente de h siempre que contenga a h. Luego $S = \mathbb{N}$, es decir que $P(n)$ es (V) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{n \; n+1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

H: Si $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1 \; 2}{2}$$

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = \cancel{1}$$

HI: Si $n=h$ $\quad 1+2+3+\ldots+h = \frac{h(h+1)}{2}$

TESIS: Si $n=h+1$ $\quad 1+2+3+\ldots+(h+1) = \boxed{\frac{(h+1) \cdot (h+2)}{2}}$

DEMOSTRACIÓN: $1+2+3+\ldots+h+h+1 = \frac{h(h+1)+h+1}{2}$

$$1+2+3+\ldots+h+(h+1) = \frac{h(h+1)+2(h+1)}{2}$$

$$\boxed{\frac{(h+1) \cdot (h+2)}{2}}$$

2^{da} $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

H: si $n=1$ $\quad \frac{1}{1.(1+1)}=\frac{1}{1+1}$ $\quad (h+1)\,(n+1)+1$

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

HI: si $n=h$ $\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{h(h+1)}=\frac{h}{h+1}$

TESIS: si $n=h+1$ $\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}\dots+\frac{1}{(h+1).(h+2)}=\boxed{\frac{h+1}{h+2}}$

DEMOSTRACION $\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{h(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h}{h+1}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}$

$$\frac{1}{h(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h\,(h+2)+1}{(h+1)\,(h+2)}$$

$$\frac{1}{h(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h^2+2h+1}{(h+1).(h+2)}$$

$$\frac{1}{h(h+1)}=\frac{(h+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(h+1)}(h+2)}$$

$$\frac{1}{h(h+1)}=\boxed{\frac{h+1}{h+2}}$$

IGUALDAR EN IN

. Se define una relación de igualdad en IN con las siguientes propiedades.

1. A = A Todo IN es igual A sí mismo. PROPIEDAD REFLEXIVA
2. A = b ⇒ b = a. PROPIEDAD SIMÉTRICA
3. A = b ∧ b = c ⇒ A = C. PROPIEDAD TRANSITIVA

Anexo II: Apuntes brindados por el profesor

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA

Proporciona un método de demostración por recurrencia. No es constructivo, en el sentido de generar propiedades, pero hace posible la demostración de éstas cuando son relativas al de Números Naturales.

Para tener una idea intuitiva de dicho principio, consideramos lo siguiente:

Supongamos alineados el conjunto de alumnos de una escuela; se sabe además que si un alumno habla, entonces habla el siguiente. Interesa determinar cuál es la condición para asegurar que, en un momento dado, estén hablando todos los alumnos. Es obvio que para que se de esta situación es suficiente ver que el primero está hablando. En este caso se trata de investigar la propiedad que enunciamos que enunciamos así: "Todos los alumnos están hablando" y para asegurar su verdad se requiere las siguientes condiciones:

a) El primer alumno habla.
b) Si un alumno habla, entonces habla el siguiente.

Extendiendo el caso a una propiedad P, relativa al conjunto de los números Naturales queda asegurada la verdad de P para todo n £ **N**, si se verifican las dos condiciones anteriores:

a) P (1) es V
b) Si P (h) es V, entonces P (h+1) es V.

La demostración de este principio se llama "inducción completa", se basa en el principio de buena ordenación. (Todo subconjunto no vacío de **N** tiene primer elemento)

Si S es un subconjunto de N que satisface:

i) 1 £ S
ii) h £ S → h+1 £ S entonces **S = N**

O sea: Todo subconjunto de **N** que incluya al 1, al siguiente de h siempre que contenga a h, es igual a N.

Hipótesis) S C N

i) 1 £ S
ii) h £ S → h+1 £ S

Tesis) **S = N**

Demostración) Es suficiente ver que N C S, y para esto basta probar que el subconjunto S' de números naturales no pertenecientes a S es vacío, o sea, de acuerdo con la definición de inclusión es falso que haya algún natural que no pertenezca a S.

Suponemos que $S' \neq \emptyset$ por tratarse de un subconjunto no vacío de N, de acuerdo al principio de buena ordenación, existe el elemento mínimo $m \in S'$. (1)

Por hipótesis $1 \in S$, y como los elementos de S' no pertenecen a S, es $m \neq 1$. Por otra parte, siendo m natural y además distinto de 1, se tiene:

$m > 1$

$m - 1 > 0$

Como $m - 1 < m$, por ser m el mínimo de S', resulta $m - 1 \in S$

De acuerdo a la hipótesis ii) $m - 1 \in S \rightarrow (m-1) + 1 \in S \rightarrow m \in S$

Esta proposición es contradictoria con (1). Luego $N \subseteq S$ y como por hipótesis $S \subseteq N$, resulta $S = N$

Anexo III: Trabajo Práctico

UNIVERSIDAD NACIONAL DE FORMOSA
FACULTAD DE HUMANIDADES
PROFESORADO EN MATEMÁTICA
ÁLGEBRA I - 2019

TRABAJO PRACTICO N° 1

NÚMEROS NATURALES

1.- ¿Cuántos números naturales hay entre 15 y 20, entre 50 y 100? Deduzca una fórmula que permita calcular cuántos números naturales hay entre dos sin contarlos.

2.- Recordando las definiciones de adición en N:

a) $\forall a \in N$, a + 1 = sga

b) $\forall a$, $\forall h \in N$, a + sgh = sg (a + h) o bien a + (h + 1) = (a + h) +1

Demostrar:

a) La adición es asociativa en N: (a + b) + n = a + (b + n)

b) La adición es conmutativa en N: a + n = n + a

c) El 1 es neutro para la multiplicación, es decir: n.1 = 1.n =n

d) La multiplicación es asociativa: (a.b). n = a. (b.n)

e) La multiplicación es distributiva con respecto a la adición: (a + b). n = a.n + b.n

3.- Demostrar las propiedades de la sumatoria:

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

b) $\sum_{i=1}^{n} k.a_i = k. \sum_{i=1}^{n} a_i$

4.- Desarrolle y si es posible calcule el valor de las siguientes sumatorias o productorias

a) $\sum_{i=1}^{n} i^2 =$ b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} =$ c) $\sum_{j=1}^{n} a =$ d) $\prod_{j=1}^{4} j^2 =$

e) $\prod_{i=1}^{n} 5 =$ f) $\prod_{j=0}^{n} \frac{j}{2} =$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE FORMOSA
FACULTAD DE HUMANIDADES
PROFESORADO EN MATEMÁTICA
ÁLGEBRA I - 2019

5.- Utilizando el símbolo de sumatoria o productoria según corresponda exprese las siguientes sumas y productos.

a) La suma de los cubos de los n números impares.

b) El producto de los 7 primeros múltiplos de 7.

c) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$

d) $1.2.4.8.16.32.64$

6.- **Nota histórica.** Cuenta la leyenda, que en el año 1787, cuando Carl Friedrich Gauss tenía apenas 10 años, un alboroto en el aula del colegio provocó que el maestro J. B. Büttner enojado, pidiera a los alumnos que sumaran todos los números del 1 al 100, creyendo que el castigo sería tenerlos a todos un buen rato ocupados.
Al rato nomás, Gauss se levantó del pupitre, y le entregó el resultado de la suma al profesor: 5050. El profesor, asombrado y seguramente creyendo que su alumno había puesto un número arbitrariamente, se dispuso él mismo a hacer la interminable suma. Al cabo de un buen rato, comprobó que el resultado de "Carlitos" era correcto.
¿Como hizo Gauss para resolver la suma en tan pocos minutos? Encuentre una fórmula que permita calcular la suma de los n primeros números naturales como lo hizo Gauss.

7.- Observe las siguientes igualdades:

$8 = 3 + 5$
$27 = 7 + 9 + 11$
$64 = 13 + 15 + 17 + 19$
¿Cuáles son las dos filas siguientes? Enuncie una regla general.

8.- Observe la siguiente secuencia, cuente la cantidad de cuadros blancos en cada caso y determine el número de cuadros blancos de la figura n-ésima.

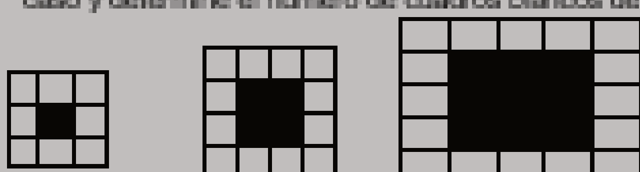
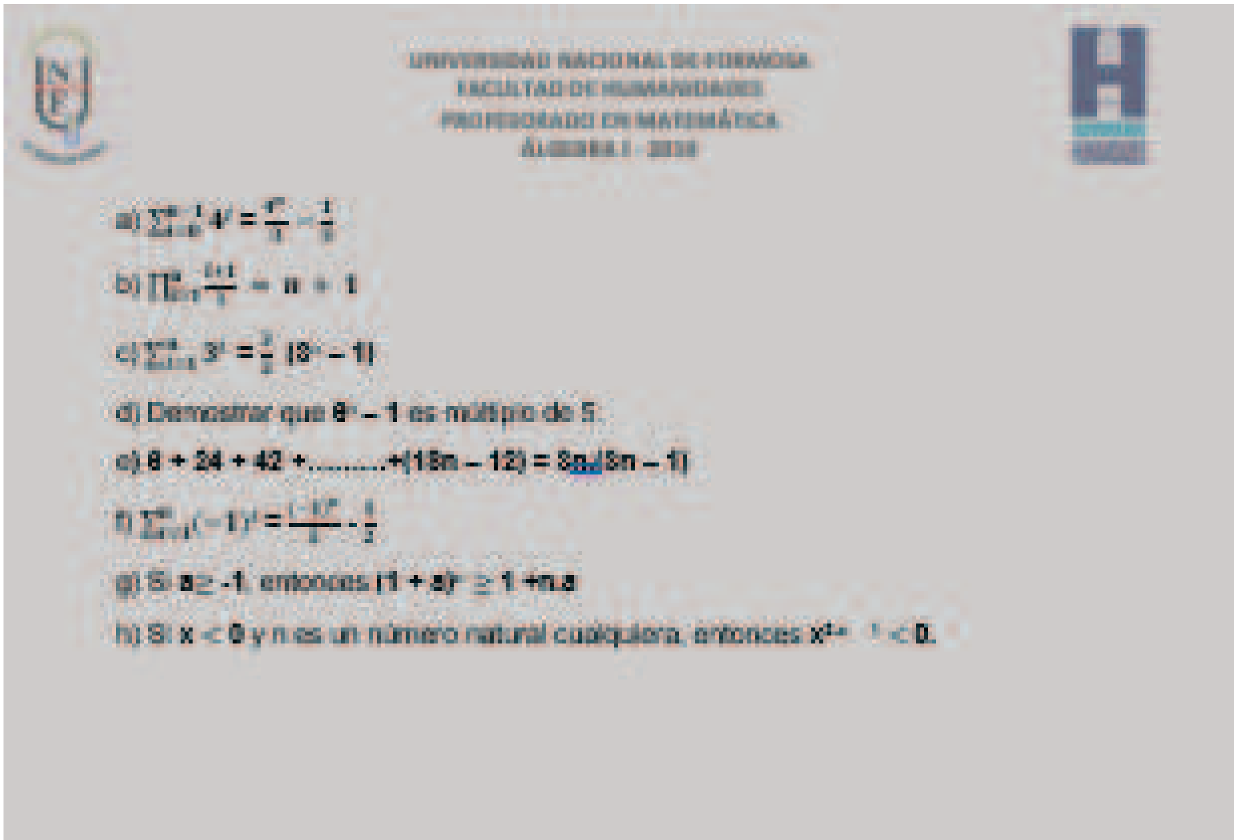


Figura1 Figura2 Figura3

9.- Aplicando el Principio de inducción completa demostrar la validez de las siguientes proposiciones en el conjunto de los números naturales:


UNIVERSIDAD NACIONAL DE FORMOSA
FACULTAD DE HUMANIDADES
PROFESORADO EN MATEMÁTICA
b) $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1$
d) Demostrar que $6^n - 1$ es múltiplo de 5.
e) $6 + 24 + 42 + \dots + (18n - 12) = 3n(3n - 1)$
f) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{2}$
g) Si $a \geq -1$ entonces $(1 + a)^n \geq 1 + n.a$
h) Si $x < 0$ y n es un número natural cualquiera, entonces $x^{2n-1} < 0$.

Anexo IV: Programa de la asignatura

Aclaramos que hemos modificado el formato para adjuntarlo en este anexo, no así los contenidos. También borramos el nombre de los docentes responsables, para proteger su identidad.

<table>
<tr><td colspan="4">CARRERA: PROFESORADO EN MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="4">ASIGNATURA: ÁLGEBRA I</td></tr>
<tr><td colspan="4">AÑOS LECTIVOS: 2018 - 2019</td></tr>
<tr><td colspan="3">CARÁCTER DE LA ASIGNATURA</td><td></td></tr>
<tr><td>DICTADO</td><td colspan="2">HORAS DE CLASE</td><td>PROFESORES</td></tr>
<tr><td>Cuatrimestral</td><td>9hs
Semanales</td><td>TOTAL
135hs</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">ASIGNATURAS CORRELATIVAS PRECEDENTES</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprobadas</td><td>Regularizadas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ninguna</td><td>Ninguna</td></tr>
</table>

<u>PROGRAMA DE LA ASIGNATURA</u>

FUNDAMENTACIÓN

El aprendizaje del Álgebra representa uno de los objetivos mayores de la educación matemática.
La formación matemática requiere de materias instrumentales como ésta para obtener las herramientas vigentes en la actualidad, necesarias para el buen desempeño en el campo de las aplicaciones científicas en constante evolución.
La enseñanza del Álgebra, objeto del conocimiento de esta asignatura está fuertemente unificada por medio de la teoría del número y de las estructuras fundamentales, buscando nuevos métodos y medios para la enseñanza de la matemática basados en la nueva filosofía para la educación, preparado para el aprendizaje individual, orientado hacia la investigación y el descubrimiento de acuerdo a la Ley Federal de Educación.
El Álgebra es el proceso de conceptualización para la construcción mental de conceptos y propiedades matemáticas y su utilización.
El conocimiento del Álgebra condiciona el éxito de todo aprendizaje científico posterior, la generalidad y la abstracción caracterizan al Álgebra y a ellas se debe su incalculable utilidad para resolver problemas que se plantean en las ciencias físicas, biológicas y sociales, así también en la tecnología y en las artes. La esencia del Álgebra es esa generalidad que permite por medio de su lenguaje expresar de modo breve e intuible relaciones sumamente complicadas.
A pesar de su aparente simplicidad, el aprendizaje del Álgebra constituye un obstáculo importante para la mayoría de los alumnos y es el origen de una buena parte del fracaso escolar.
Los alumnos aprenden cometiendo errores y la corrección de estos errores forma parte del trabajo del profesor. Desde el punto de vista de la investigación, el análisis y la clasificación de los errores nos permite identificar los conocimientos matemáticos que faltan al alumno y los conocimientos implícitos que utiliza el experto. Nos permite también estudiar el funcionamiento cognitivo del alumno, pues, a partir de la explicación que el alumno da de su error, es posible analizar el razonamiento empleado.
La asignatura Álgebra I que involucra contenidos como los conjuntos numéricos, desde los Números Naturales hasta los Números Reales, sus operaciones y propiedades, Combinatoria y Polinomios en el actual plan del Profesorado en Matemática, tiene desarrollo cuatrimestral y su dictado corresponde al Primer Cuatrimestre de Primer Año. Esta asignatura constituye un instrumento guía que permite al alumno el proceso de construcción de los métodos algebraicos iniciales.
El tiempo de dictado es de 9 horas semanales destinadas a clases teóricas y prácticas.

Álgebra I aporta un considerable bagaje de instrumentos y metodología que necesitan para las que le suceden como Álgebra II (Álgebra Lineal) y Álgebra III (Estructuras Algebraicas), Geometría I (Geometría Analítica) y Geometría II (Geometría Métrica), Análisis Matemático I, II, III y IV.

CONTENIDOS MÍNIMOS

NÚMEROS NATURALES: Principio de Inducción. Principio de buena ordenación. NÚMEROS ENTEROS: Divisibilidad. Máximo común divisor, algoritmo de Euclides. Teorema fundamental de la aritmética. Sistemas de numeración en distintas bases. CONGRUENCIAS: Relaciones de equivalencia, particiones, congruencias módulo "n". COMBINATORIA: Cálculo combinatorio. Variaciones. Combinaciones, números combinatorios. Binomio de Newton. Introducción a la teoría de grafos. Números racionales y Reales. NÚMEROS COMPLEJOS: Operaciones. Módulo y conjugado, producto y cociente en forma polar. Potenciación. Fórmula de Moivre. Polinomios y ecuaciones algebraicas. Operaciones. Algoritmo de Euclides, raíces, cálculo de raíces. Teorema fundamental del álgebra.

OBJETIVOS

Que el alumno:

- Desarrolle sus capacidades potenciales relacionadas con las operaciones mentales a través de las teorías numéricas.
- Comprenda las estructuras conceptuales que se hayan elaborado sobre el campo numérico.
- Relacione el significado de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos y de las propiedades que las caracterizan.
- Aplique los fundamentos teóricos en la resolución de situaciones problemáticas.
- Ejercite la capacidad de abstracción, el razonamiento inductivo-deductivo y la creatividad.
- Reconozca los valores estéticos propios de la actividad matemática.

DESARROLLO PROGRAMÁTICO

UNIDAD 1: Números naturales

Objetivos:

Que el alumno:

- Fundamente axiomáticamente los números naturales.
- Demuestre propiedades de las operaciones con números naturales.
- Aplique el Principio de Inducción Completa a diversas situaciones.
- Aplique los símbolos de sumatoria y productoria en diversos ejercicios.

Números naturales: Fundamentación axiomática del número natural. Axiomas de Peano. Definición de adición. Propiedades. Definición de multiplicación. Propiedades. Relación de igualdad en N. Relación de orden en N. Sustracción en N. Potenciación en N. División en N. Principio de inducción completa. El símbolo de sumatoria y el símbolo de productoria.

Bibliografía:

- Gentile, Enzo. (1984*). Notas de Algebra.* EUDEBA. Buenos Aires.
- Hernandez, Roberto, Rojo, Armando, Rabuffeti, Hebe, S. de Hernandez, María Esther. (1966). *Conceptos básicos de Matemática Moderna*- Editorial Codex S. A. –Buenos Aires.
- Alvarez, E.,Vecino, M.S. ,Oliver, M. I. (2012). Temas de Álgebra. Red Olímpica.
- Noriega, R.- Sanchez, C. (1979). *El Álgebra.* Editorial Docencia. Buenos Aires.
- Apuntes de la cátedra disponibles en el Centro de Estudiantes.

UNIDAD 2: Análisis Combinatorio

Objetivos:

Que el alumno:

- Distinga los arreglos, las permutaciones y las combinaciones simples.
- Transfiera y aplique dichos conceptos a situaciones problemáticas diversas.
- Distinga los arreglos, las permutaciones y las combinaciones con repetición.
- Valore la informática como medio adecuado para mejorar el proceso de aprendizaje

Análisis Combinatorio: Función factorial. Análisis combinatorio simple. Arreglos, permutaciones y combinaciones simples. Definición y deducción de fórmulas. Números combinatorios. Números combinatorios complementarios. Fórmula de Stieffel. Análisis combinatorio con repetición. Potencia de un binomio. Binomio de Newton. Demostración aplicando el principio de inducción completa. Propiedades.

Bibliografía:

- Becker, M.E.-Pietrocola, N.- Sanchez, C. (1996). *Notas de Combinatoria*. Red Olímpica. Buenos Aires.
- Sobel, Max, Lerner, Norbert. Álgebra. Cuarta Edición. México. Edit. Prentice –Hall Hispanoamericana, S.A.
- Apuntes de la cátedra disponibles en el Centro de Estudiantes.

UNIDAD 3: Números enteros

Objetivos:

Que el alumno:

- Identifique y caracterice a los números enteros en el marco de las estructuras del álgebra.
- Demuestre las distintas propiedades de las operaciones con números enteros.
- Realice demostraciones aplicando divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Comprenda la relación de congruencia y su aplicación a situaciones problemáticas diversas.

Números enteros: Definición. Relación de igualdad en Z. Operaciones en Z. Adición en Z. Propiedades. Función valor absoluto. Relación de orden en Z. Representación en la recta numérica. Multiplicación en Z. Propiedades. Estructura de (Z,+,.). Potenciación en Z. División en Z. Divisibilidad en Z. Algoritmo de la división. Máximo común divisor. Números primos. Enteros coprimos. Mínimo común múltiplo. Teorema fundamental de la aritmética. Relación de congruencia en Z. Propiedades. Ecuaciones lineales de congruencia.

Bibliografía:

- Gentile, Enzo. (1984*). Notas de Algebra.* EUDEBA. Buenos Aires.
- Hernandez, Roberto, Rojo, Armando, Rabuffeti, Hebe, S. de Hernandez, María Esther. (1966). *Conceptos básicos de Matemática Moderna*- Editorial Codex S. A. –Buenos Aires.
- Alvarez, E.,Vecino, M.S. ,Oliver, M. I. (2012). Temas de Álgebra. Red Olímpica.
- Noriega, R.- Sanchez, C. (1979). *El Álgebra.* Editorial Docencia. Buenos Aires.
- Pietrocola, N. *El algoritmo de la división entera. Aritmética. Nota 14. El máximo común divisor. Aritmética. Nota 20. Números primos y factorización. Aritmética. Nota 23.*Olimpiada Matemática Argentina.

UNIDAD 4: Números racionales

Objetivos:

Que el alumno:

- Identifique y caracterice a los números racionales en el marco de las estructuras del álgebra.
- Represente números racionales en la recta numérica.
- Opere con números racionales.

Números racionales: Axiomas de definición. Relación de igualdad en Q. Axiomas de operatividad. Relación de orden en Q. Representación en la recta numérica. Operaciones en Q. Adición en Q. Definición y propiedades. Multiplicación en Q. Definición y propiedades. Densidad de Q. Estructura de (Q , + , .). División de números racionales. Potenciación en Q. Radicación en Q. Desarrollos decimales de números racionales.

Bibliografía:

- Gentile, Enzo. (1984*). Notas de Algebra.* EUDEBA. Buenos Aires.

- Hernandez, Roberto, Rojo, Armando, Rabuffeti, Hebe, S. de Hernandez, María Esther. (1966). *Conceptos básicos de Matemática Moderna*- Editorial Codex S. A. –Buenos Aires.
- Alvarez, E.,Vecino, M.S. ,Oliver, M. I. (2012). Temas de Álgebra. Red Olímpica.
- Noriega, R.- Sanchez, C. (1979). *El Álgebra.* Editorial Docencia. Buenos Aires.
- Apuntes de la cátedra disponibles en el Centro de Estudiantes.

UNIDAD 5: Números reales
Objetivos:
Que el alumno:

- Identifique y caracterice a los números reales en el marco de las estructuras del álgebra.
- Represente números reales en la recta numérica.
- Opere con números reales.

Números reales: Necesidad de la creación de los números irracionales. Representación de los números reales en la recta real. Adición y multiplicación en R. Estructura de (R , +, .) . Relación de orden en R. Principio de Arquímedes. Densidad de los números reales. Teorema de completitud. Potenciación en R. Radicación en R. Propiedades.
Bibliografía:

- Gentile, Enzo. (1984*). Notas de Algebra.* EUDEBA. Buenos Aires.
- Hernandez, Roberto, Rojo, Armando, Rabuffeti, Hebe, S. de Hernandez, María Esther. (1966). *Conceptos básicos de Matemática Moderna*- Editorial Codex S. A. –Buenos Aires.
- Alvarez, E.,Vecino, M.S. ,Oliver, M. I. (2012). Temas de Álgebra. Red Olímpica.
- Noriega, R.- Sanchez, C. (1979). *El Álgebra.* Editorial Docencia. Buenos Aires.
- Apuntes de la cátedra disponibles en el Centro de Estudiantes.

UNIDAD 6: Números complejos
Objetivos:
Que el alumno:

- Identifique y caracterice a los números complejos en el marco de las estructuras del álgebra.
- Opere con números complejos en sus distintas formas.
- Halle las enésimas raíces de un número complejo.

Números complejos. El cuerpo de los números complejos. Relación de igualdad en C. Operaciones en C. Adición y multiplicación. Propiedades. Estructura de (C , + , .) . La unidad imaginaria. Potencias de la unidad imaginaria. La conjugación en C. Complejos conjugados. Propiedades de la conjugación. Módulo de un complejo. Propiedades del módulo. Forma trigonométrica de un complejo. Igual dad de complejos en forma trigonométrica. Operaciones en forma trigonométrica: Producto. Cociente. Potenciación de exponente natural. Fórmula de De Moivre. Radicación en C. Raíces primitivas de la unidad. Potencia racional de un complejo. Forma exponencial de un complejo. Igualdad de complejos en forma exponencial. Operaciones en forma exponencial: Producto. Cociente. Potenciación. Radicación. Logaritmación en C. Exponencial compleja general.
Bibliografía:

- Gentile, Enzo. (1984*). Notas de Algebra.* EUDEBA. Buenos Aires.
- Figallo, Aldo. Números Complejos. Universidad Nacional de San Juan.
- Rojo Armando. (1973). Algebra I. Editorial El Ateneo. Buenos Aires.
- Apuntes de la cátedra disponibles en el Centro de Estudiantes.

UNIDAD 7: Polinomios
Objetivos:
Que el alumno:

- Identifique y caracterice a los polinomios en el marco de las estructuras del álgebra.

- Calcule las raíces de un polinomio.
- Relacione las raíces y los coeficientes de un polinomio.

Polinomios: Reglas de construcción. Reglas de operatividad. Operaciones. Adición de polinomios. Propiedades. Multiplicación de un polinomio por un número real. Propiedades. Estructura de (P , + , K, .) . Sustracción de polinomios. Multiplicación de polinomios. Propiedades. Anillo de polinomios con coeficientes reales. División de polinomios. Algoritmo de la división. Divisibilidad. Polinomios irreducibles. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo. Especialización de la indeterminada x. Raíz de un polinomio. Lema. Teorema del resto. Regla de Ruffini. Raíces simples y múltiples Polinomio con coeficientes enteros: Teorema de Gauss. Raíces complejas de polinomios reales. Teorema fundamental del Álgebra. Descomposición factorial de polinomios reales. Relaciones entre raíces y coeficientes.

Bibliografía:

- Nassin y Lopez. Lecciones de Algebra y Geometría Analítica. Editorial Universitaria Cultural Argentina.
- Figallo, Aldo. Polinomios. Universidad Nacional de San Juan.
- Rojo Armando. (1973). Algebra II. Editorial El Ateneo. Buenos Aires.
- Apuntes de la cátedra disponibles en el Centro de Estudiantes.

METODOLOGÍA

En lo metodológico la cátedra ha adoptado los fundamentos del constructivismo y del aprendizaje significativo, considerando los conocimientos previos de los estudiantes, en los que se detectan constantemente carencias en el dominio instrumental de la matemática.

Al ser Algebra I una asignatura de formación básica e instrumental, la tarea docente se focaliza en proporcionar condiciones óptimas para el proceso de enseñanza y de aprendizaje logrando una participación activa del alumno en su propio aprendizaje incentivando la reflexión, creatividad y autonomía por medio de técnicas grupales y guías de estudio elaboradas con situaciones problemáticas motivadoras.

A través de la metodología utilizada, el alumno adquirirá método de estudio, capacidad para interpretar situaciones problemáticas, plantear y discutir soluciones ejercitándose así su juicio crítico.

El equipo docente asumirá en forma conjunta las dificultades particulares y generales más comunes, puestas de manifiesto, facilitando adecuar acciones, ajustes metodológicos y reenseñanza de contenidos evaluados en actividades posteriores.

Se pretende que el desarrollo del programa signifique una oportunidad para compartir los aprendizajes significativos para lo cual se propone:

- Para determinar el nivel con el que los alumnos llegan a cursar la asignatura al iniciar el curso se tomará una prueba de diagnóstico que permitirá realizar ajustes en el proceso de enseñanza - aprendizaje.
- Exposiciones didácticas e interrogatorios donde se presentan fundamentos teóricos de los temas del programa.
- Breve introducción histórica al inicio de los temas fundamentales.
- Al término de una unidad dar trabajos individuales que les sirvan de autoevaluación.
- Guiar y controlar los trabajos prácticos.
- Proponer a los alumnos que elaboren ejercicios de algunos temas precisos.
- Plantear diferentes situaciones a partir de una dada, de tal modo que se lo haga reflexionar al alumno.
- A partir del error construir el objeto de estudio.
- Relacionar conceptos de esta asignatura con los de Introducción a la Matemática que se dicta paralelamente.
- Resolver situaciones problemáticas propuestas en la guía de trabajos prácticos.
- Usar el material bibliográfico necesario para el estudio de los diferentes temas del programa.
- Realizar demostraciones usando el rigor de los fundamentos teóricos.
- Lectura, interpretación y análisis en clase de conceptos importantes.

- Presentar trabajos elaborados en forma grupal referentes a distintos temas para conocimiento, análisis, discusión y elaboración por toda la clase.
- Posibilitar que el alumno codifique y descodifique la información, que sea capaz de transferir los conocimientos a situaciones nuevas.
- Resolver las actividades de autoevaluación a fin de tomar conciencia del aprendizaje.

ACTIVIDADES

CARGA HORARIA TOTAL EN RELACIÓN A LA CARGA HORARIA DEL CURSO		
Tipo de actividad	**Lugar donde se llevan a cabo**	
	Aula	
Desarrollo teórico de contenidos	**55 horas**	
Desarrollo de trabajos prácticos	**55 horas**	
Resolución de problemas	**25 horas**	
Sumatoria	**135 horas**	

PROGRAMACIÓN DE TRABAJOS PRÁCTICOS

Los trabajos prácticos consistirán en la aplicación de los contenidos y responderán a las características de la materia y la especialidad de la carrera, de modo tal que asegure la complementación y la secuenciación de contenidos.

Objetivo:

- Transferir y aplicar los contenidos de la asignatura a la resolución de situaciones problemáticas a través de procesos lógicos del pensamiento.

UNIDAD 1: Números naturales: Ejercicios aplicando las distintas operaciones entre números naturales. Demostración de propiedades de las operaciones con números naturales. Ejercicios aplicando el Principio de inducción completa. Ejercicios de Sumatoria y Productoria.
UNIDAD 2: Análisis Combinatorio: Ejercicios y problemas donde distingan los arreglos, las permutaciones y las combinaciones simples y con repetición. Resolución de problemas. Resolución de ecuaciones aplicando las fórmulas de arreglos, permutaciones y combinaciones.
UNIDAD 3: Números enteros: Demostraciones de propiedades de distintas operaciones con números enteros. Ejercicios aplicando dichas propiedades y las propiedades de valor absoluto. Ejercicios de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Ejercicios aplicando definición de congruencia y sus propiedades. Resolución de ecuaciones lineales de congruencia.
UNIDAD 4: Números racionales: Demostraciones de propiedades de distintas operaciones con números racionales. Ejercicios aplicando dichas propiedades. Representación en la recta numérica de números racionales. Resolución de problemas aplicando números racionales.
UNIDAD 5: Números reales: Demostraciones de ejercicios con números reales. Representación en la recta numérica de números reales. Demostración de propiedades de las operaciones en R.
UNIDAD 6: Números complejos: Ejercicios aplicando los números complejos en sus distintas formas: binómica, trigonométrica y exponencial. Cálculo de producto, cociente de complejos y de las potencias y las raíces enésimas de un complejo.
UNIDAD 7: Polinomios: Ejercicios aplicando las distintas operaciones con polinomios. Hallar las distintas raíces de un polinomio. Aplicar las relaciones entre raíces y coeficientes de un polinomio en distintos ejercicios.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Pizarrón, elementos de geometría, fibrones, tizas, cañón, computadoras.

EVALUACIÓN

Criterios de Evaluación: Se evaluará:

a) Habilidad del alumno a resolver problemas mediante aplicación de conceptos básicos de la asignatura y fundamentar la validez de los mismos.

b) Capacidad para transferir los conocimientos adquiridos a diferentes situaciones.

Instrumentos de Evaluación:

a) Prueba diagnóstica.

Al inicio del año, luego de dar el Cursillo Introductorio se tomará una Evaluación diagnóstica que permitirá evaluar las competencias y los conocimientos previos que traen los alumnos del nivel secundario.

b) Interrogatorios de sondeo.

Mediante interrogatorios se indagará sobre los conocimientos previos que tiene el alumno antes de iniciar un tema nuevo, tanto en las clases teóricas como prácticas.

c) Trabajos prácticos.

Los trabajos prácticos se desarrollarán en las clases prácticas, los alumnos trabajarán en grupos y luego se hará la puesta en común en el pizarrón.

d) Exámenes Parciales.

Los exámenes parciales se elaborarán y se corregirán en forma conjunta por el equipo de cátedra, teniendo en cuenta los temas abordados y los aprendizajes adquiridos por los alumnos y aquellos más relacionados con la carrera.

La devolución de los parciales se hará en forma individual, y/o grupal fundamentando y explicando en cada corrección los errores cometidos. Esto permitirá al alumno analizar y reflexionar sobre su aprendizaje, su propia producción, logrando así que el “error” sea “construcción”, “reelaboración” y no castigo.

e) Examen final escrito y oral.

Los exámenes finales para alumnos regulares se basarán fundamentalmente en contenidos teóricos de la asignatura. Dicha evaluación se desarrollará en forma escrita, comenzando por alguna unidad temática elegida por el alumno, permitiendo brindar seguridad y poniendo de manifiesto su interés por un tema relevante para él. Luego se seleccionarán otros contenidos curriculares, que a criterio del equipo de cátedra sean fundamentales para la aprobación de la asignatura. Además de la elaboración escrita, el alumno deberá explicitar en forma oral los procedimientos utilizados, fundamentando sus argumentaciones, que den validez a las afirmaciones que sostiene, mostrando la reflexión sobre sus propias estrategias de pensamiento, permitiendo evaluar sus conocimientos matemáticos.

Los exámenes finales para los alumnos libres, tendrán un examen previo sobre los temas desarrollados en las clases prácticas, que deberán aprobar para pasar a la instancia explicitada anteriormente para los alumnos regulares.

Fechas de exámenes parciales:

Primer Parcial: Última semana de mayo**.**

Segundo Parcial: Primera semana de julio.

Recuperatorio: Segunda semana de julio

Sistema de promoción:

- Asistencia a clases teóricas y prácticas. (80%).
- Aprobación de dos exámenes parciales al final del cuatrimestre. (Con un recuperatorio) para lograr la condición de alumno regular.
- En el caso de no cumplir alguno de los requisitos anteriores, el alumno quedará en condición de libre.
- Aprobación del examen final teórico en caso de ser regular y en caso de ser libre un examen teórico-práctico. (Art.32 del Régimen Pedagógico UNAF-1993-).