UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de **Doctor en Matemática** en el campo del **Análisis Armónico**.

Operadores de Schrödinger

Propiedades de tamaño y suavidad

Unidad de Investigación donde se realizó:
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (UNL - CONICET)

Autor:
Pablo Quijano
IMAL (UNL - CONICET) - FIQ (UNL)

Directora de Tesis:
Eleonor Ofelia Harboure
IMAL (UNL - CONICET) - FIQ (UNL)

Codirector de Tesis:
Bruno Bongioanni
IMAL (UNL - CONICET) - FICH (UNL)

Resumen

Este trabajo tiene por objeto el estudio de las Transformadas de Riesz asociadas al operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^d$, esto es, $L = -\nabla + V$, donde el potencial V es no negativo, no idénticamente nulo y cumple una desigualdad reverse-Hölder de orden q, con $q > d/2$ y $d \geq 3$. Esta condición expresa que los promedios sobre bolas en norma q están mayorados por una constante veces los promedios, y en particular requiere que V pertenezca a L^q_{loc}. Como la función $V(x) = |x|^2$ satisface esta desigualdad cualquiera sea el valor de q, nuestro trabajo incluye el caso del Oscilador Armónico.

Consideramos solamente las transformadas de Riesz de primero y segundo orden pues son las que interesan a efectos de proveer una información cualitativa sobre soluciones de la ecuación diferencial asociada. A diferencia del caso $V = 0$, aquí las transformadas de Riesz de segundo orden no son una simple composición de las de primer orden, por lo que su estudio debe hacerse independientemente. Más específicamente, los operadores objeto de análisis son: $\nabla L^{-1/2}, \nabla^2 L^{-1}, V^{1/2} L^{-1/2}$, $V L^{-1}$ y $V^{1/2} \nabla L^{-1}$ y sus adjuntos. Respecto a estos últimos, como en este contexto no conmutan las derivadas con el operador diferencial L, las transformadas de Riesz y sus correspondientes adjuntos pueden tener propiedades muy diferentes, como será evidente a lo largo de la exposición.

Para estos operadores, que llamaremos Transformadas de Riesz-Schrödinger, obtendremos distintos tipo de resultados que podemos englobar en estimaciones de suavidad y de tamaño.

Así, en los capítulos 3 y 4, obtenemos acotaciones de algunos de estos operadores sobre apropiadas versiones de espacios BMO y Lipschitz pesados. Bajo estas mínimas condiciones sobre el potencial, Shen demostró que, salvo la transformada $\mathcal{R}_1 = \nabla L^{-1/2}$ cuando $q > d$, todas las restantes mencionadas son acotadas en L^p sólo para p en un intervalo finito del tipo $(1, s]$, por lo que no podemos esperar acotación ni siquiera en BMO. De otro modo, por interpolación, resultarían acotadas en L^p para todo el rango de p, esto es, $1 < p < \infty$. De aquí que nuestros resultados en el Capítulo 3 se aplican mayormente a los adjuntos. Sin embargo, en el siguiente capítulo se dan acotaciones de suavidad para los restantes operadores, suponiendo condiciones más fuertes sobre el potencial.

En cuanto a resultados que dan estimaciones de tamaño de nuestros operadores, obtenemos, en el Capítulo 5, versiones apropiadas de lo que damos en llamar desigualdades de tipo Fefferman-Stein, en las cuales se estima la norma en L^p de Tf respecto a un peso

arbitrario en términos de la norma-p de f respecto a algún operador maximal apropiado aplicado al peso dado. Como es esperable, los operadores maximales que aparecen son los propios del contexto Schrödinger.

Otros resultados en L^p con pesos son obtenidos en el último capítulo. Allí se obtienen para todos las Riesz y sus adjuntas desigualdades con pesos diferentes pero del tipo llamado pesos factorizados. Estas desigualdades incluyen el caso de pesos iguales y constituyen una extensión del caso ya conocido.

Finalmente cabe mencionar que un aporte novedoso de este trabajo reside en encontrar una expresión local para el núcleo de la Transformada de Riesz-Schrödinger de segundo orden $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 L^{-1}$. Esto nos permitió incluirla en nuestro análisis así como aplicar otros resultados ya conocidos para las restantes transformadas, como el caso de la acotación en L^p con pesos iguales.

Índice general

Introducción

El análisis armónico clásico en el espacio euclídeo d-dimensional se basa en el estudio de los operadores relacionados al problema de difusión del calor y a la ecuación de Laplace, esto es,

- Difusión del calor: hallar $u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u, & x \in \mathbb{R}^d, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{1}$$

- Ecuación de Laplace: hallar $u(x)$ tal que

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Para poder obtener información cualitativa de la solución u en términos de los datos g y f respectivamente, se introducen operadores apropiados que actúan sobre estas funciones. El problema se reduce así al estudio de su comportamiento sobre distintos espacios de funciones. En el caso de la ecuación de Laplace juegan un rol muy importante las transformadas de Riesz, que dan información sobre las derivadas de la solución. Con esta motivación, en 1952, A. P. Calderón y A. Zygmund, usando novedosos métodos de variable real, logran probar la acotación de las transformadas de Riesz en los espacios de Lebesgue. En realidad, resuelven un problema mucho más general introduciendo una familia de operadores (que luego pasarán a llamarse integrales singulares de Calderón y Zygmund) y probando su continuidad en tales espacios. De este modo, sus resultados podían aplicarse a ecuaciones elípticas más generales. Este descubrimiento fue fundamental para el avance del análisis armónico y continúa siendo un tema de investigación en la actualidad de gran interés.

El objetivo de este trabajo es incursionar en el comportamiento de las correspondientes transformadas de Riesz en el contexto del operador de Schrödinger, esto es, cambiamos $-\Delta$ en los problemas mencionados por $L = -\Delta + V$, con V una función no negativa y localmente integrable. Más concretamente, para L (que es en particular un operador diferencial de segundo orden y no negativo), podemos plantearnos el semigrupo de difusión generado por L y su correspondiente ecuación del estado estacionario. Esto es,

- Problema de difusión para L: hallar $u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -L_x u, & x \in \mathbb{R}^d, \ t > 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3}$$

- Ecuación de Schrödinger: hallar $u(x)$ tal que

$$Lu(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Las transformadas de Riesz-Schrödinger de primer y segundo orden (que permiten establecer propiedades de las derivadas de la solución u) se definen, como en el caso de Laplace, mediante

$$\mathcal{R}_1 = \nabla L^{-1/2}, \qquad \mathcal{R}_2 = \nabla^2 L^{-1}.$$

Vale aclarar que si $L = -\Delta$ (esto es, $V = 0$) se obtienen las transformadas de Riesz clásicas mencionadas anteriormente.

La presencia del potencial V motiva el estudio del comportamiento de otros operadores como $V^{1/2}L^{-1/2}$, VL^{-1} y $V^{1/2}\nabla L^{-1}$ que incluimos dentro del nombre genérico de transformadas de Riesz-Schrödinger. A menudo, para distinguir un tipo de transformadas de otras, llamaremos a $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ transformadas de Riesz-Schrödinger singulares mientras que nos referiremos a estas últimas como transformadas de Riesz-Schrödinger que involucran el potencial. La razón para diferenciarlas es que mientras $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son tan singulares en el origen como las transformadas de Riesz clásicas, las otras tres transformadas son de hecho operadores acotados en $L^1(dx)$.

En las últimas décadas se ha trabajado intensamente en las propiedades de operadores relacionados al semigrupo generado por $L = -\Delta + V$. Nuestro enfoque aquí sigue el marco que aparece en el trabajo pionero de Z. Shen [31] (1995), donde se imponen condiciones bastante débiles sobre el potencial. Más precisamente, se supone que V satisface una desigualdad de reverse-Hölder de orden $q > d/2$ con $d \geq 3$, esto es, existe alguna constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B V^q \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|} \int_B V, \tag{5}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^d$. En particular esta teoría incluye el caso del Oscilador Armónico ya que la función $V(x) = |x|^2$ satisface esta desigualdad cualquiera sea el valor de q.

Para estas transformadas de Riesz-Schrödinger, Shen realizó un profundo estudio de su comportamiento sobre los espacios L^p, donde se muestra que, dependiendo de q, las propiedades de estos operadores pueden empeorar. Así, por ejemplo, $\mathcal{R}_1$ es un operador de Calderón-Zygmund si $q > d$ mientras que $\mathcal{R}_2$ no es acotado en todos los L^p, cualquiera sea el valor de $q < \infty$.

Más tarde (ver [7]), se estudió la teoría de pesos correspondiente a las transformadas de Riesz-Schrödinger $\mathcal{R}_1$, esto es, determinar los pesos w tales que este operador preserve $L^p(w)$, $1 < p < \infty$. Así, para el caso $q > d$ se obtienen clases denominadas A_p^ρ que incluyen propiamente a las clases de pesos para las integrales singulares clásicas, es decir, las clases A_p de Muckenhoupt. Heurísticamente, esto es debido a que si bien la presencia de V puede hacer perder regularidad en el núcleo, también origina un mayor decaimiento en el infinito. Más recientemente, en [2], se prueban desigualdades con este tipo de pesos para familias de operadores del estilo de las integrales singulares de Calderón-Zygmund, pero adaptadas al contexto Schrödinger, tratando de incluir a todas las transformadas de Riesz-Schrödinger.

Es sabido que en el caso clásico el espacio L^∞ no es preservado por las transformadas de Riesz. Sin embargo, la imagen de L^∞ es un espacio un poco más grande: el espacio BMO de funciones de variación media acotada, estudiado por John y Nirenberg.

En el contexto Schrödinger, en 2005 (ver [13]), se introduce un espacio de tipo BMO que resulta ser un subespacio propio del de John y Nirenberg y que se demuestra que es preservado por ciertos operadores como por ejemplo el maximal del semigrupo generado por L. Siguiendo con esta línea de espacios, se definen en [6] los correspondientes espacios de suavidad, obteniéndose resultados de acotación para la transformada $\mathcal{R}_1$. Más tarde en [23] se prueban resultados de regularidad para una familia de operadores que satisfacen ciertas condiciones de tamaño y suavidad adaptadas al contexto Schrödinger, pero en lo que se refiere a transformadas de Riesz solo es aplicable al caso $\mathcal{R}_1$ con $q > d$.

En cuanto a resultados sobre espacios que miden tamaño, también debemos mencionar algunos otros antecedentes importantes. Como dijimos, en [7] se inició una teoría de pesos adaptada al análisis relacionado con este semigrupo, dando como resultado una familia más amplia que las clases de Muckenhoupt correspondientes al semigrupo del calor. Más tarde, en [2], se obtienen desigualdades con pesos en estas nuevas clases para una familia general de operadores, que incluye a la transformada de Riesz-Schrödinger $\mathcal{R}_1$ y a los operadores $V^{1/2}L^{-1/2}$, VL^{-1} y $V^{1/2}\nabla L^{-1}$, no así al operador $\mathcal{R}_2$.

El objetivo de este trabajo es profundizar el análisis del comportamiento de estas transformadas de Riesz-Schrödinger, dando estimaciones tanto de tamaño como de suavidad. La idea rectora a lo largo de su desarrollo es obtener estos resultados en un marco abarcativo, tratando de englobar los operadores que nos interesan: las transformadas de Riesz de primero y segundo orden que incluyen sólo derivadas, así como aquéllas que involucran potencias positivas del potencial V, además de sus operadores adjuntos.

En este sentido juega un papel crucial la función de radio crítico ρ, que definiremos formalmente en el Capítulo 1, asociada a un potencial V que satisface la condición de reverse-Hölder de orden q, con $q > d/2$. El marco general de $\mathbb{R}^d$ dotado de una función de radio crítico, en el capítulo 2, introduciremos dos familias distintas de operadores, en término de las cuales probaremos teoremas de acotación en espacios de suavidad (Capítulo 3) y desigualdades con pesos (Capítulos 5 y 6). Para poder aplicar luego estos resultados generales, mostraremos, mayormente en el Capítulo 2, cuáles de los operadores de nuestro interés satisfacen las condiciones requeridas para pertenecer a cada familia. Algunas otras estimaciones en esta dirección serán probadas en los capítulos 4 y 5. Cabe mencionar que tanto los espacios de suavidad mencionados así como los pesos están también definidos en términos de una tal función de radio crítico prescindiendo del potencial que la origine.

Como es sabido, para obtener resultados en espacios de regularidad, además del tamaño del núcleo, necesitamos una condición de suavidad, puntual o integral, respecto de la primer variable y así lo requerimos para definir la familia que llamaremos **operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund** (ver cap. 2) la cual está incluida en las clases de operadores consideradas en [2] y generaliza la dada en [23]. En particular, al ser parte de los operadores que aparecen en [2], se pueden obtener los resultados en L^p con pesos obtenidos en ese trabajo, como será también probado en el Capítulo 2.

Aquí vale observar que, bajo las mínimas condiciones en el potencial que estamos suponiendo, salvo la transformada de Riesz de primer ordenen en el caso $q > d$, los demás operadores que nos interesan no pertenecen a esta familia; sin embargo todos los operadores adjuntos de los antes mencionados satisfacen las condiciones requeridas, como es demostrado en el Capítulo 2. En particular destacamos que para la transformada de Riesz de segundo orden o su adjunta, no encontramos en la literatura ni siquiera una expresión para el núcleo de la misma por lo cual debimos resolver primero este problema. De hecho en ese mismo capítulo logramos encontrar una expresión local del mismo que resulta suficiente para probar las estimaciones necesarias para concluir que el adjunto de $\mathcal{R}_2$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund.

En el Capítulo 3 se trabaja con esta primer familia de operadores y se logra un teorema general de acotación en espacios de regularidad con pesos y que luego se aplica a los distintos operadores que integran esta familia, estos resultados están publicados en [4]. Como dijimos, en este análisis no se incluyen a la mayoría de los operadores que nos interesan sino a sus adjuntos. La pregunta que surge entonces es si bajo suposiciones un poco más fuertes sobre el potencial podemos incluir el resto de los operadores que nos interesan: la transformada de Riesz de segundo orden y aquéllas transformadas que contienen potencias de V como $V^{1/2}L^{-1}$, VL^{-1} y $V^{1/2}\nabla L^{-1}$. La respuesta a este problema la damos en el Capítulo 4.

Para definir la segunda familia de operadores hemos tenido en cuenta lo que podríamos llamar el método de comparación introducido por Shen en [31]. Esta técnica consiste en obtener estimaciones de las transformadas de Riesz-Schrödinger de primer orden comparándolas con las correspondientes transformadas de Riesz clásicas asociadas a $-\Delta$. Dado que los núcleos no son positivos, la comparación debe hacerse estimando su diferencia. Esta diferencia resulta ser un núcleo que ya no es singular, que define un operador acotado, incluso en L^1, si se restringe a un entorno adecuado de la diagonal en $\mathbb{R}^{2d}$ el cual varía en función del potencial V, más precisamente con la función de radio crítico ρ. Esta segunda familia, que también introduciremos en el capítulo 2 y a los que nos referiremos como **operadores de Schrödinger localmente comparables con uno de Calderón-Zygmund**, nos permite "traspasar" ciertas desigualdades ya conocidos en el caso clásico al contexto de los operadores singulares relacionados al semigrupo de Schrödinger.

En el mismo Capítulo 2 se muestra que las Transformadas de Riesz-Schrödinger que nos interesan pertenecen ellas mismas a esta segunda familia la cual requiere que los núcleos satisfagan una condición de tamaño con decaimiento y la comparación local con un núcleo de Calderón-Zygmund. En el Capítulo 5 nos dedicamos a obtener desigualdades que llamaremos de Fefferman-Stein para los miembros de esta familia. Por tales desigualdades entenderemos estimaciones del tipo

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p \mathcal{M}w, \tag{6}$$

donde w es un peso arbitrario y $\mathcal{M}$ un operador maximal que depende de las propiedades de T. Dado que esta clase de desigualdades son conocidas para los operadores de Calderón-Zygmund (ver [28]), el método de comparación resulta muy útil para este fin.

En el Capítulo 5 probaremos entonces un teorema general para los miembros de esta segunda familia y donde se dan desigualdades en norma-p tanto para el operador como para su adjunto. El teorema es luego aplicado a diversas instancias y allí aparecen en el miembro derecho operadores maximales propias del contexto Schrödinger. En particular, se obtienen desigualdades para $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y sus adjuntos al igual que para las otras transformadas de Riesz-Schrödinger que involucran el potencial V.

Finalmente, en el Capítulo 6, intentamos dar una generalización de las desigualdades de tipo Fefferman-Stein del capítulo anterior al estilo de las desigualdades con pares de pesos factorizados que aparecen en [11] para el caso clásico. Cabe puntualizar que estos pesos proveen una familia de pares de pesos que depende de dos pesos arbitrarios w_1 y w_2 de modo que, especificando w_1 y w_2, se obtienen pesos u y v para los cuales puede concluirse la acotación de de $L^p(v)$ en $L^p(u)$ del operador en cuestión. Aquí nos ha parecido más conveniente trabajar en el contexto de la primer familia, esto es, la clase de los operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund. Esto se debe en parte a que da pié para probar en el contexto Schrödinger una serie de hechos que resultan de interés en sí mismos y pasibles de otras aplicaciones. Tal es el caso de una desigualdad de Lerner para producto de pesos como así también desigualdades con dos pesos en L^p para operadores maximales asociados a una función de radio crítico ρ.

Con estas herramientas se obtiene también un teorema general para operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund que, si bien puede aplicarse sólo a los operadores adjuntos, un argumento de dualidad nos permite derivar también desigualdades con pesos factorizados para todas las transformadas de Riesz-Schrödinger bajo consideración. Estas desigualdades así obtenidas constituyen una generalización de las ya conocidas para el caso de pesos iguales. Un punto que es necesario señalar es que para aplicar el teorema general se necesitan estimaciones de la función maximal sharp de los operadores adjuntos en cuestión, las que habían sido obtenidas previamente en [2].

Quizás conviene terminar esta introducción aclarando que los resultados de este último capítulo no alcanzan, afortunadamente, a contener a los demostrados en el capítulo anterior, si bien nos proveen de muchas desigualdades que no pueden deducirse de las tipo Fefferman-Stein. Esta situación es puesta de manifiesto en la última sección de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Dedicaremos el primer capítulo de esta tesis a describir la teoría en la que están enmarcados los resultados originales de los capítulos siguientes. Dividimos los preliminares en dos secciones: teoría clásica y contexto Schrödinger.

En la primer sección daremos algunas definiciones y resultados clásicos que pueden encontrarse en cualquier libro de análisis real avanzado (ver, por ejemplo, [12] o [17]). En particular, haremos énfasis en resultados de la teoría de Calderón y Zygmund. El objetivo de esta primer sección no es sólo dar un marco histórico sino que también pretendemos unificar la notación y establecer algunos resultados que serán aplicados en los capítulos que siguen.

La segunda sección está dedicada a describir la teoría relacionada al operador de Schrödinger $L = -\Delta + V$. Allí, daremos algunas definiciones y referencias a resultados conocidos que serán de utilidad más adelante.

1.1. Teoría clásica

En esta sección daremos algunas definiciones y resultados clásicos del análisis real que serán útiles para nuestro trabajo. Comenzamos describiendo los espacios de Lebesgue y de suavidad y sus generalizaciones con pesos para luego pasar a ver algunas nociones de la Teoría de Calderón-Zygmund. Antes pondremos en común algunas notaciones.

A lo largo de esta tesis trabajaremos principalmente en el espacio euclídeo d-dimensional $\mathbb{R}^d$. Denotaremos por $|\cdot|$ a la norma en $\mathbb{R}^d$ y dx a la medida de Lebesgue. Si $x \in \mathbb{R}$ usaremos la notación $x^+ = \text{máx}\{x, 0\}$. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ medible, denotamos $|E|$ a la medida de Lebesgue de E y χ_E a la función característica de E. Dado un cubo Q denotamos por $l(Q)$ la longitud de su lado, de manera que $l(Q)^d = |Q|$. Denotamos por $B(x,r)$ a la bola abierta de centro x y radio r y ω_d la constante que verifica $|B(x,r)| = \omega_d r^d$. Para una función f localmente integrable y un conjunto E de medida positiva, usaremos habitualmente las siguientes notaciones

$$\frac{1}{|E|}\int_E f(x)dx = \fint_E f(x)dx = f_E.$$

Una función w es un **peso** si es no negativa y localmente integrable. Dado un peso w y un conjunto medible E denotamos

$$w(E) = \int_E w(x)dx.$$

1.1.1. Espacios de Lebesgue y generalizaciones

Para $1 \leq p < \infty$ y un peso w, denotamos por $L^p(w)$ al espacio de funciones medibles f tales que

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Usaremos la notación L^p para referirnos a estos espacios cuando $w = 1$. Como es usual, usaremos la notación L^∞ para referirnos al espacio de las funciones esencialmente acotadas. Para $1 < p < \infty$, el espacio dual de L^p es $L^{p'}$, donde p' denota el exponente conjugado de p, esto es,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Dados $1 \leq p,\ q < \infty$, y un par de pesos (u, v), diremos que un operador T es de **tipo fuerte** (p, q) respecto al par (u, v) si existe una constante C tal que

$$\|Tf\|_{L^q(u)} \leq C\|f\|_{L^p(v)},$$

para toda $f \in L^p(v)$. Esto es, T es acotado de $L^p(v)$ en $L^q(u)$. Si $p = q$ y $u = v$ diremos simplemente que T es acotado en $L^p(u)$.

Para poder definir el **tipo débil** debemos definir en primer lugar el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$. Para $1 \leq p < \infty$ y un peso w definimos $L^{p,\infty}(w)$ como el espacio de funciones f tales que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda w(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \lambda\})^{1/p} < \infty.$$

Decimos que un operador T es de tipo débil (p, q) respecto al par (u, v) si existe una constante C tal que

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(u)} \leq C\|f\|_{L^p(v)},$$

o equivalentemente, para todo $\lambda > 0$,

$$u(\{x \in \mathbb{R}^d : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^q}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p v(x)dx\right)^{q/p}.$$

Para establecer las desigualdades pesadas del capítulo 6 debemos definir una familia de espacios de funciones que generalizan a los de Lebesgue: Los espacios de Orlicz. Sin embargo, puesto que nuestro interés es definir operadores maximales asociados, sólo estamos interesados en definir estos espacios en dominios con medida finita. Daremos algunas definiciones y propiedades que necesitaremos en los capítulos siguientes. Remarcamos que estos resultados pueden encontrarse en la literatura sobre espacios de Orlcz (ver, por ejemplo, el libro de M. Rao y Z. Ren [30]).

Diremos que una función $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, es una **función de Young** si es continua, convexa, estrictamente creciente, $\phi(0) = 0$ y $\phi(t)/t \to \infty$ cuando $t \to \infty$. La función identidad $\phi(t) = t$ no es, según esta definición, una función de Young. Sin embargo, algunos resultados que involucran funciones de Young se aplicarán también la función identidad. Haremos explícita esta observación cuando sea el caso.

Dada una función de Young ϕ y un cubo Q definimos el promedio de f respecto a la norma L^ϕ de f en Q como

$$\|f\|_{A,Q} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\}, \tag{1.1.1}$$

siempre que el conjunto sea no vacío. Del mismo modo podemos definir el promedio sobre una bola B o sobre cualquier conjunto de medida positiva y finita. Una propiedad que nos será útil más adelante es la siguiente: dada una función de Young ϕ y un número $r > 0$, $\|f^r\|_{\phi,Q} = \|f\|^r_{\psi,Q}$, donde $\psi(t) = \phi(t^r)$.

Además, es posible definir un orden en la clase de funciones de Young de la siguiente manera: diremos que $\phi(t) \approx \psi(t)$ si existen constantes c_1, c_2 y t_0 positivas tales que $c_1\phi(t) \leq \psi(t) \leq c_2\phi(t)$ para todo $t \geq t_0$ y diremos que $\phi(t) \preceq \psi(t)$ si existen $c > 0$ y $t_0 > 0$ tales que para todo $t \geq t_0$, $\phi(t) \leq \psi(ct)$. Observar que $t \preceq \phi(t)$ para toda función de Young ϕ. De (1.1.1) se sique que si $\phi \preceq \psi$, existe una constante C que depende de ϕ y de ψ tal que para todo cubo Q y función f, $\|f\|_{\phi,Q} \leq C\|f\|_{\psi,Q}$.

Dada una función de Young ϕ se define su **función complementaria** $\bar{\phi}$ como

$$\bar{\phi}(t) = \sup_{s>0}\{st - \phi(s)\}, \;\; t > 0. \tag{1.1.2}$$

ϕ y $\bar{\phi}$ satisfacen $t \leq \phi^{-1}(t)\bar{\phi}^{-1}(t) \leq 2t$ y la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder.

Proposición 1.1.1. *Dada una función de Young ϕ,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{\phi,Q}\|g\|_{\bar{\phi},Q}, \tag{1.1.3}$$

para todo par de funciones f, g y todo cubo Q. Más generalmente, si ϕ, ψ y υ son funciones de Young tales que para todo $t \geq t_0 > 0$ $\psi^{-1}(t)\phi^{-1}(t) \leq c\upsilon^{-1}(t)$, entonces existe C tal que

$$\|fg\|_{\upsilon,Q} \leq C\|f\|_{\phi,Q}\|g\|_{\psi,Q}, \tag{1.1.4}$$

para todo par de funiones f, g y todo cubo Q.

Observación 1.1.2. Todos las propiedades aquí expuestas valen también si consideramos bolas en lugar de cubos.

1.1.2. Espacios de suavidad y BMO

Definiremos aquí el espacio de las funciones con oscilación media acotada introducido por John y Nirenberg en [20] para luego dar algunas propiedades de este espacio y generalizaciones. En la siguiente sección definiremos espacios de este estilo adaptados al contexto del operador de Schrödinger que serán utilizados en los capítulos posteriores.

Dada una función f localmente integrable, diremos que f está en BMO si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f-f_B| \leq C, \text{ para toda bola } B\subset \mathbb{R}^d. \tag{1.1.5}$$

Es posible definir $\|f\|_{BMO}$ como el ínfimo sobre las constantes para las cuales vale 1.1.5, sin embargo $\|\cdot\|_{BMO}$ no es una norma, de hecho, para toda función constante c, $\|c\|_{BMO}=0$. Podemos solucionar este problema pensando en el espacio cociente con las funciones constantes, esto es, pensando que dos funciones que difieren en una constante coinciden como funciones de BMO. Este espacio está íntimamente relacionado con el siguiente operador **maximal sharp**. Para $f\in L^1_{\text{loc}}$ se define

$$M^\sharp f(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B |f-f_B|, \tag{1.1.6}$$

donde el supremo es tomado sobre toda las bolas $B\subset\mathbb{R}^d$ tales que $B\ni x$. Es inmediato que

$$BMO=\{f\in L^1_{\text{loc}} : M^\sharp f\in L^\infty\} \tag{1.1.7}$$

y que $L^\infty\subset BMO$.

Vamos a considerar también la siguiente generalización de estos espacios dada por Peetre en [27] para el caso no pesado. Dado $0\leq\beta<1$ y un peso w definimos el espacio $BMO^\beta(w)$ como el conjunto de las funciones localmente integrables f tales que

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f-f_B| \leq C|B|^{\beta/d}, \text{ para toda bola } B\subset\mathbb{R}^d, \tag{1.1.8}$$

y definimos análogamente $\|f\|_{BMO^\beta(w)}$. Si $\beta=0$ este espacio coincide con el espacio $BMO(w)$ definido por Muckenhoupt y Wheeden en [26]. Además, para el caso $w=1$ y β, estos espacios resultan ser los espacios Lipschitz-β. Más aún, si w es un peso duplicante entonces estos espacios tienen la siguiente descripción puntual debida a Harboure, Salinas y Viviani (ver [19]). Antes, definimos para un peso w y $\beta>0$

$$W_\beta(x,r)=\int_{B(x,r)}\frac{w(z)}{|z-x|^{d-\beta}}dz, \tag{1.1.9}$$

para $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Esta cantidad es finita para casi todo x y es creciente en r para tales x. Como se pone en evidencia en lo que sigue, nos da un módulo de continuidad que puede variar en cada punto dependiendo del tamaño de w.

Proposición 1.1.3. *Si w es un peso duplicante y $0 < \beta < 1$, el espacio $BMO^\beta(w)$ coincide con la versión puntual $\Lambda^\beta(w)$ que contiene a todas las funciones f tales que existe una constante C que satisface*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\left[W_\beta(x, |x-y|) + W_\beta(y, |x-y|)\right], \tag{1.1.10}$$

para casi todo x, $y \in \mathbb{R}^d$.

1.1.3. Pesos de Muckenhoupt

Las clases de pesos A_p desarrolladas por B. Muckenhoupt en el año 1972 ([25]) fueron el comienzo de una gran cantidad de trabajos dedicados a encontrar desigualdades con pesos para operadores del análisis armónico, junto con diversas aplicaciones para estas desigualdades. Daremos las definiciones de estas clases para luego dar algunas propiedades y resultados. En la siguiente sección introduciremos ciertas clases que generalizan a las de Muckenhoupt y serán de gran importancia en algunos de los resultados principales de esta tesis.

Para $1 < p < \infty$ diremos que un peso $w \in A_p$ si existe una constante C tal que

$$\left(\int_B w\right)^{1/p}\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \leq C|B|, \tag{1.1.11}$$

para toda bola $B = B(x, r)$. Para $p = 1$ diremos que $w \in A_1$ si

$$\frac{1}{|B|}\int_B w \leq C \inf_B w, \tag{1.1.12}$$

para toda bola $B = B(x, r)$. Si consideramos M la maximal de Hardy Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f|, \tag{1.1.13}$$

es inmediato que la condición 1.1.12 es equivalente a

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad c.t.p\, x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.1.14}$$

Ejemplos simples de pesos A_p son las potencias de $|x|$. Como es fácil comprobar $w(x) = |x|^\alpha \in A_p$ si y sólo si $-n < \alpha < n(p-1)$, para $1 < p < \infty$. Cuando $p = 1$ este resultado vale para $-n < \alpha \leq 0$. Usaremos la notación $A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p$. Algunas propiedades de estas clases se enuncian a continuación.

Proposición 1.1.4.

1. *$A_p \subset A_q$ si $1 \leq p < q$.*

2. *$w \in A_p$ si y sólo si $w^{1-p'} \in A'_p$.*

3. *Si w_1, $w_2 \in A_1$ entonces $w_1 w_2^{1-p} \in A_p$.*

4. *(Duplicación). Si $w \in A_\infty$ existe una constante C tal que*

$$\int_{B(x,2r)} w(y)dy \leq C \int_{B(x,r)} w(y)dy, \quad r > 0. \tag{1.1.15}$$

5. *(Desigualdad de reverse-Hölder). Si $w \in A_\infty$ existen constantes C y $\varepsilon > 0$ tales que para toda bola $B \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1+\varepsilon}\right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{C}{|B|}\int_B w. \tag{1.1.16}$$

Si consideramos M la maximal de Hardy Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f|, \tag{1.1.17}$$

tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.5. *Sea M la maximal de Hardy Littlewood.*

1. *M es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w si y sólo si $w \in A_1$.*

2. *Si $1 < p < \infty$, M es de tipo fuerte (p,p) respecto a w si y sólo si $w \in A_p$.*

Observación 1.1.6. En las definiciones dadas en esta sub-sección pueden intercambiarse las bolas por cubos puesto que las clases de pesos resultan ser las mismas y las maximales son equivalentes.

1.1.4. Operadores de Calderón-Zygmund

En esta sección describiremos brevemente algunos resultados clásicos sobre operadores de Calderón y Zygmund. Si bien las definiciones y los resultados que expondremos aquí están amplimente tratados en la literatura, queremos explicitarlos por los siguientes motivos:

Por un lado, una da las estrategias que usaremos en este trabajo consiste en definir una clase de operadores con ciertas semejanzas a la de Calderón y Zygmund que contenga a las transformadas de Riesz-Schrödinger y otros ejemplos de operadores relacionados al operador de Schrödinger $L = -\Delta + V$ que nos interesan (ver Capítulo 2). Posteriormente, los resultados que obtendremos en espacios L^p, BMO y de suvidad para estos operadores serán (en algún sentido) similares a los conocidos para los de Calderón y Zygmund (ver capítulos 6 y 3).

Por otro lado, describiremos otra familia de operadores asociados a L que pueden ser *localmente comparados* con los correspondientes operadores asociados a $-\Delta$. En particular, aparecerán naturalmente las transformadas de Riesz que están incluidas en la teoría de Calderón y Zygmund y, en consecuencia, valen para ellas los resultados que describiremos a continuación (ver Capítulo 5).

Diremos que una función K definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ es un **núcleo estandar** con constantes A y δ si satisface la condición de tamaño

$$|K(x,y)| \leq \frac{A}{|x-y|^d} \tag{1.1.18}$$

y las condiciones de regularidad en ambas variables

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq \frac{A|x-x'|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}, \tag{1.1.19}$$

si $|x-y| \geq 2|x-x'|$ y

$$|K(x,y) - K(x,y')| \leq \frac{A|y-y'|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}} \tag{1.1.20}$$

si $|x-y| \geq 2|y-y'|$.

Si K es un núcleo estandar, diremos que un operador lineal T tiene **núcleo asociado** K si satisface

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy \tag{1.1.21}$$

para toda función $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ y $x \notin sop(f)$. Si T tiene un núcleo asociado K y es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$, esto es,

$$\|Tf\|_{L^2} \leq B\|f\|_{L^2}, \tag{1.1.22}$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces diremos que T es un **operador de Calderón-Zygmund** con núcleo asociado K. Enunciamos a continuación resultados clásicos de acotación para operadores de Calderón-Zygmund en espacios $L^p(w)$ y $BMO(w)$.

Observación 1.1.7. Es posible definir esta clase de operadores pidiendo acotación en algún p_0 $1 < p_0 < \infty$ en lugar de L^2 y los resultados que se obtienen son los mismos.

Teorema 1.1.8. *Sea T es un operador de Calderón-Zygmund. Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces T es acotado en $L^p(w)$. Si $w \in A_1$ entonces T es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w.*

Uno de los más importantes ejemplos de un operador de Calderón-Zygmund es la transformada de Hilbert H y sus generalizaciones a dimensión mayor, las transformadas de Riesz de primer orden $\mathbf{R}_1 = \nabla(-\Delta)^{-1/2}$. Estos operadores tendrán un papel importante en este trabajo ya que nos servirán para aproximar localmente las transformadas de Riesz asociadas al operador de Schrödinger en el Capítulo 2.

Para estos operadores valen las acotaciones en $L^p(w)$ dadas en el Teorema 1.1.8. Además, preservan los espacios $BMO^\beta(w)$ para ciertas clases de pesos y $0 \leq \beta < 1$. Más precisamente, si $w \in A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p$ y satisface

$$|B|^{\frac{1-\beta}{d}} \int_{B^c} \frac{w(y)}{|x_B - y|^{d+1-\beta}} dy \leq C \frac{w(B)}{|B|} \quad \text{para toda bola } B \subset \mathbb{R}^d, \tag{1.1.23}$$

entonces $\mathbf{R}_1$ es acotada en $BMO^\beta(w)$ para $0 \leq \beta < 1$ (ver [26] y [24])

También aparecerán más adelante las transformadas de Riesz de segundo orden dadas por $\mathbf{R}_2 = \nabla^2(-\Delta)^{-1}$, relacionadas a las segundas derivadas de una solución de $\Delta u = f$. Sin embargo, como las derivadas conmutan con el Laplaciano se tiene que $\mathbf{R}_2^{i,j} = \mathbf{R}_1^i(\mathbf{R}_1^j)^\star = -\mathbf{R}_1^i \circ \mathbf{R}_1^j$ y así muchos resultados válidos para $\mathbf{R}_1$ pueden trasladarse a $\mathbf{R}_2$.

1.1.5. Integrales fraccionarias

La integral fraccionaria clásica está asociada a potencias negativas de $-\Delta$ y resulta ser un instrumento muy útil en diversos problemas. Como el operador de Laplace contiene derivadas de segundo orden, $(-\Delta)^{1/2}$ da una especie de "integración", es decir, la idea de una operación inversa a la "derivación" $(-\Delta)^{1/2}$. Así, en general, podemos pensar que $(-\Delta)^{-s/2}$ es una integración de orden s y por esta razón se denomina a este operador I_s. Usando la transformada de Fourier es fácil ver que es un operador de convolución. Más precisamente,

$$I_s(f)(x) = 2^{-s}\pi^{-d/2} \frac{\Gamma\left(\frac{d+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)|y|^{s-d} dy. \tag{1.1.24}$$

Estos operadores mejoran la integrabilidad local de las funciones, como veremos a continuación en lo que se conoce como Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev sobre integración fraccionaria.

Teorema 1.1.9. *Sean $0 < s < d$ y $1 \leq p < q < \infty$ tales que*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{s}{d}. \tag{1.1.25}$$

Entonces existe una constante $C = C(d, s, p)$ tal que

$$\|I_s(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad si \;\; p > 1,$$
$$\|I_s(f)\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \quad si \;\; p = 1.$$

Como es de esperar, las integrales fraccionarias también mejoran la suavidad de las funciones. Más precisamente, transforman funciones Lipschitz-α en funciones Lipschitz-$\alpha + s$. En este trabajo no usaremos este tipo de resultados pero el lector interesado puede hallar en [19] una versión en espacios Lipschitz con pesos.

1.2. Contexto Schrödinger

Como ya hemos dicho, las transformadas de Riesz y más generalmente las integrales singulares juegan un rol central en el estudio del semigrupo asociado al operador de

Laplace. En particular, hemos repasado algunas de las propiedades fundamentales de estos operadores, la teoría de pesos asociada y los espacios de suavidad que ellos preservan. En esta sección, nos proponemos rever algunas de estas cuestiones cuando cambiamos el operador diferencial $-\Delta$ por $-\Delta + V$. Esto da origen a un "análisis armónico" que ya no es invariante por traslaciones y por lo tanto los operadores fundamentales no serán de convolución. Además, muchos de estos operadores perderán algo de suavidad dependiendo de las condiciones que pidamos al potencial V.

Comenzaremos describiendo el marco en el que trabajaremos, esto es, las suposiciones sobre V y mencionaremos algunas de las propiedades que pueden obtenerse. Seguiremos el enfoque del trabajo de Shen [31], recordando la función de radio crítico asociada al potencial así como algunas propiedades de la solución fundamental de la ecuación $-\Delta u + Vu = f$.

En lo que resta del capítulo introduciremos y discutiremos algunas propiedades de las familias de pesos propias de este contexto que aparecen en la literatura y su relación con apropiados operadores maximales. También describiremos los correspondientes sustitutos de los espacios BMO y BMO^β con pesos.

1.2.1. El operador de Schrödinger

A lo largo de esta tesis, el operador de Schrödinger que trataremos es de la forma $L = -\Delta + V$ en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ y supondremos siempre que el potencial V es una función no negativa, no idénticamente cero, localmente integrable y que pertenece a la clase reverse-Hölder RH_q para algún $q > d/2$, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V^q\right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|}\int_B V, \tag{1.2.1}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^d$.

Algunas propiedades conocidas de estas clases se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. *Sean $q > 1$ y $V \in RH_q$.*

1. *$RH_q \subset RH_p$ si $q \leq p < \infty$.*
2. *$V \in RH_{q+\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$ que depende sólo de la constante en (1.2.1) y de la dimensión.*
3. *Existe $C > 0$ tal que si $0 < r < R < \infty$ se verifica*
$$\frac{1}{r^{d-2}}\int_{B(x,r)} V(y)dy \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{2-d/q}\frac{1}{R^{d-2}}\int_{B(x,R)} V(y)dy. \tag{1.2.2}$$
4. *$V \in A_\infty$. En particular es un peso duplicante, esto es, existe C_2 tal que*
$$\int_{B(x,2r)} V(y)dy \leq C_2\int_{B(x,r)} V(y)dy, \quad r > 0. \tag{1.2.3}$$

Observación 1.2.2. En vistas de la apertura de las clases reverse-Hölder dada en la proposición anterior, será equivalente considerar $q > d/2$ o $q \geq d/2$.

Observación 1.2.3. En la literatura aparece usualmente la clase RH_∞ definida como el conjunto de las funciones localmente integrables que satisfacen

$$\sup_{x\in B} V(x) \leq \frac{C}{|B|}\int_B V(x)dx \text{ para toda bola } B \subset \mathbb{R}^d. \tag{1.2.4}$$

Es inmediato que $RH_\infty \subset RH_q$ para todo $q > 1$. Este es el caso de cualquier polinomio no negativo y, en particular, del potencial $V(x) = |x|^2$ que está asociado al operador de Hermite $H = -\Delta + |x|^2$.

1.2.2. Función de radio crítico

En su trabajo de 1995 ([31]), Shen introduce la siguiente **función de radio crítico asociada un potencial** V no negativo, no idénticamente nulo y tal que $V \in RH_q$ para $q > d/2$.

$$\rho(x) = \sup\left\{r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}}\int_{B(x,r)} V \leq 1\right\},\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2.5}$$

La idea fundamental de Shen es que los operadores asociados a $L = -\Delta + V$ pueden verse como una perturbación de los correspondientes operadores asociados a $-\Delta$ a escala menor que $\rho(x)$. Esta idea queda en evidencia en la técnica que denominamos *método de comparación*, usada por Shen para obtener desigualdades en L^p para las transformadas de Riesz-Schrödinger y adoptada en este trabajo para definir, en el Capítulo 2, ciertas familias de operadores asociados a L.

Más allá del método de comparación, la función de radio crítico ρ asociada a V ha probado ser una pieza fundamental en el análisis de operadores asociados a L, apareciendo tanto en las estimaciones para los operadores como en las definiciones de algunos espacios relacionados. Dedicaremos lo restante de esta sección a dar algunas propiedades de esta función. En primer lugar notamos que, bajo la hipótesis sobre el potencial, la función de radio crítico satisface $0 < \rho(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Además,

$$\frac{1}{\rho(x)^{d-2}}\int_{B(x,\rho(x))} V(y)dy = 1. \tag{1.2.6}$$

La desigualdad que enunciamos a continuación será de gran utilidad pues nos da una idea de la variación de la función ρ para distintos puntos en $\mathbb{R}^d$.

Proposición 1.2.4. (ver Lema 1.4 en [31]) *Existen constantes C_0, $N_0 \geq 1$ tales que para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}^d$,*

$$C_0^{-1}\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq C_0\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{N_0/N_0+1}. \tag{1.2.7}$$

En particular $\rho(x) \simeq \rho(y)$ si $|x-y| \leq C\rho(x)$ para alguna constante $C > 0$.

Observación 1.2.5. Muchos de los resultados para operadores asociados a L pueden ponerse en el contexto de $\mathbb{R}^d$ con una **función de radio crítico**, esto es, una función $\rho : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ y que satisface, para ciertas constantes C_0 y N_0 la desigualdad (1.2.5), que no necesariamente debe provenir de un potencial V asociado.

A lo largo del trabajo diremos que una bola $B = B(x, r)$ es una bola crítica si $r = \rho(x)$ y que es una bola subcrítica si $r \leq \rho(x)$. También será útil definir el conjunto

$$\mathcal{B}_\rho = \{B(x, r) \subset \mathbb{R}^d : r \leq \rho(x)\}$$

que contiene a todas las bolas subcríticas en $\mathbb{R}^d$. La desigualdad (1.2.7) implica que si $\sigma > 0$ y x, $y \in \sigma B$ para una bola crítica B, entonces

$$\rho(x) \leq C_\sigma \rho(y), \tag{1.2.8}$$

donde $C_\sigma = C_0^2(1 + \sigma)^{\frac{2N_0+1}{N_0+1}}$. Como consecuencia de esto tenemos el siguiente resultado que puede encontrarse en [14].

Proposición 1.2.6. *Existe una sucesión de puntos $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que la familia de bolas críticas $B_j = B(x_j, \rho(x_j))$ satisface*

I) $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \mathbb{R}^d$

II) *Existen constantes C and N_1 such that for any $\sigma \geq 1$, $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{\sigma B_j} \leq C\sigma^{N_1}$.*

La siguiente desigualdad para V será usada repetidas veces en lo que sigue y es consecuencia de (1.2.2) y de (1.2.3).

Lema 1.2.7. *Sea $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$. Sea $N_2 = \log_2 C_2 + (2 - d)$, donde C_2 es la constante de duplicación de V. Entonces, para $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$,*

$$\frac{1}{R^{d-2}} \int_{B(x_0,R)} V(y)dy \leq C \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{N_2} \left(1 + \frac{\rho(x_0)}{R}\right)^{d/q-2}.$$

Enunciamos por último el siguiente lema, que es una útil consecuencia de la desigualdad (1.2.7)

Lema 1.2.8. *Existe $C > 0$ que depende sólo de C_0 y N_0 tal que*

$$1 + \frac{|x - y|}{\rho(y)} \leq C \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(x)}\right)^{N_0+1}$$

para todo x, $y \in \mathbb{R}^d$.

1.2.3. La solución fundamental

Esta sección está dedicada a dar algunas estimaciones de la solución fundamental del operador $L = -\Delta + V$. Supondremos como siempre que el potencial V satisface una desigualdad de reverse-Hölder de orden $q > d/2$. Las siguientes estimaciones para el tamaño y la regularidad de la solución fundamental pueden encontrares en las páginas 517 y 535 de [31].

Proposición 1.2.9. *Sean $V \in RH_q$, con $q > d/2$ y Γ la solución fundamental del operador $L = -\Delta + V$ in $\mathbb{R}^d$. Entonces, para cada $N > 0$, existe una constante C_N tal que*

$$|\Gamma(x,y)| \leq C_N \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{1.2.9}$$

y

$$|\Gamma(x+h,y) - \Gamma(x,y)| \leq C_N \frac{|h|^\delta}{|x-y|^{d-2+\delta}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{1.2.10}$$

para $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$. Más aún, si $V \in RH_q$ con $q > d$,

$$|\nabla\Gamma(x,y)| \leq C_N \frac{1}{|x-y|^{d-1}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}. \tag{1.2.11}$$

Además, enunciamos la siguiente estimación para la diferencia entre la solución fundamental de L y la de $-\Delta$.

Proposición 1.2.10. *Sean $V \in RH_q$, con $q > d/2$, Γ la solución fundamental del operador $L = -\Delta + V$ y Γ_0 la solución fundamental de $-\Delta$ en $\mathbb{R}^d$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\Gamma(x,y) - \Gamma_0(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d-2}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{2-d/q}. \tag{1.2.12}$$

En particular, esta desigualdad nos dice que Γ tiene el mismo tipo de singularidad que Γ_0 en la diagonal.

1.2.4. Clases de pesos asociadas a una función de radio crítico

En esta sección vamos a definir y dar propiedades sobre algunas clases de pesos relacionadas a una función de radio crítico ρ que satisface (1.2.7), en particular para ρ asociada a un potencial V. Estas clases de pesos, que aparecen por primera vez en [7], serán fundamentales para el desarrollo de esta tesis puesto que estarán involucradas en los resultados para las transformadas de Riesz-Schrödinger asociados a L.

En primer lugar, dada una función de radio crítico ρ, definiremos las clases A_p^ρ que contienen a las clases A_p de Muckenhoupt.

Definición 1.2.11. Para $p > 1$ definimos $A_p^\rho = \bigcup_{\theta \geq 0} A_p^{\rho,\theta}$, donde $A_p^{\rho,\theta}$ es la clase de pesos w que satisfacen

$$\left(\int_B w\right)^{1/p} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \leq C|B| \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta, \tag{1.2.13}$$

para toda bola $B = B(x,r)$. Para $p = 1$ definimos $A_1^\rho = \bigcup\limits_{\theta \geq 0} A_p^{\rho,\theta}$, donde $A_1^{\rho,\theta}$ es la clase de pesos w tales que

$$\frac{1}{|B|} \int_B w \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta \inf_B w, \tag{1.2.14}$$

para toda bola $B = B(x,r)$.

Dado un peso w, $\theta \geq 0$ y $p \geq 1$, denotaremos por $[w]_{p,\theta}$ al ínfimo de las constantes en (1.2.13) si $p > 1$ o en (1.2.14) si $p = 1$. Claramente las clases $A_p^{\rho,\theta}$ son crecientes con θ y coinciden con la clase A_p cuando $\theta = 0$. De esta manera, tenemos que $A_p \subset A_p^\rho$. Además, puede verse que esta inclusión es propia tomando, por ejemplo, $\rho \equiv 1$ y $w(x) = 1 + |x|^\beta$. Así, para $\beta > d(p-1)$, se tiene que $w \in A_p^\rho$ pero $w \notin A_p$. A menudo usaremos la notación

$$A_\infty^\rho = \bigcup_{p \geq 1} A_p^\rho.$$

Estas clases de pesos satisfacen ciertas propiedades que son análogas en las clases A_p de Muckenhoupt. Las resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.12. *Sean w, w_1 y w_2 pesos y $1 \leq p < q < \infty$.*

1. $A_p^\rho \subset A_q^\rho$.
2. *Si* $w \in A_p^\rho$, *entonces* $w^{1-p'} \in A_{p'}^\rho$.
3. *Si* w_1, $w_2 \in A_1^\rho$, *entonces* $w_1 w_2^{1-p} \in A_p^\rho$.
4. *Si* $w \in A_p^{\rho,\theta}$ *existe una constante* C *tal que*

$$w(B(x,R)) \leq C w(B(x,r)) \left(\frac{R}{r}\right)^{dp} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^{p\theta},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $r \leq R$.

Motivados por la propiedad 4 podemos definir las siguientes clases de duplicación asociadas a una función de radio crítico.

Definición 1.2.13. Para $\mu \geq 1$ definimos $D_\mu^\rho = \bigcup\limits_{\theta \geq 0} D_\mu^{\rho,\theta}$, donde $D_\mu^{\rho,\theta}$ es la clase de pesos w tales que existe una constante $C > 0$ tal que

$$w(B(x,R)) \leq C w(B(x,r)) \left(\frac{R}{r}\right)^{d\mu} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^\theta, \tag{1.2.15}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $r \leq R$.

De esta manera, tenemos que la propiedad 4 de la Proposición 1.2.12 implica que $A_p^\rho \subset D_p^\rho$. Del mismo modo que con las clases A_p podemos definir las clases de funciones que satisfacen una desigualdad de reverse-Hölder apropiada en este contexto.

Definición 1.2.14. Sea $\eta > 1$, definimos $RH_\eta^\rho = \bigcup_{\theta\geq 0} RH_\eta^{\rho,\theta}$, donde $RH_\eta^{\rho,\theta}$ es la clase de pesos w que satisfacen

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^\eta\right)^{1/\eta} \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta, \tag{1.2.16}$$

para toda bola $B(x,r)$.

La relación entre las clases A_p^ρ y RH_η^ρ fue probada en el Lema 5 en [7].

Teorema 1.2.15. *Si $w \in A_p^\rho$ existe algún $\eta > 1$ tal que $w \in RH_\eta^\rho$.*

Como en el caso clásico, la propiedad de tipo reverse-Hölder para los pesos A_p^ρ tiene las siguientes consecuencias.

Corolario 1.2.16. *Sea $w \in A_p^\rho$ para algún $p \geq 1$. Entonces:*

1. *Existe $\nu > 1$ tal que $w^\nu \in A_p^\rho$.*

2. *Si $p > 1$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}^\rho$.*

3. *Si $p > 1$, $A_p^\rho = \bigcup\limits_{q<p} A_q^\rho$.*

Además, tenemos la siguiente propiedad para las familias RH^ρ.

Lema 1.2.17. *Sea w un peso tal que $w \in A_\infty^\rho \cap RH_\eta^\rho$ para algún $\eta > 1$. Entonces, existe $\gamma > 1$ tal que $w \in RH_{\gamma\eta}^\rho$.*

Demostración. Sea $p > 1$ tal que $w \in A_p^\rho \cap RH_\eta^\rho$ y sea $q = \eta(p-1)$. Existen $p > 1$ y θ_1, $\theta_2 \geq 0$ tales que $w \in A_p^{\rho,\theta_1} \cap RH_\eta^{\rho,\theta_2}$. Usando ambas condiciones es inmediato que $w^\eta \in A_q^\rho$.

Luego, usando el Teorema 1.2.15, existe $\gamma > 1$ tal que $w^\eta \in RH_\gamma^\rho$. Esto nos dice que $w \in RH_{\gamma\eta}^\rho$. $\square$

Clases de pesos locales

Otras clases de pesos que pueden definirse a partir de una función de radio crítico son las clases locales. Definiremos estas clases y daremos algunas de sus propiedades siguiendo nuevamente [7]. Recordemos que, para una función de radio crítico ρ, denotamos $\mathcal{B}_\rho$ como la familia de bolas $B(x,r)$ tales que $r \leq \rho(x)$, esto es, las bolas sub-críticas.

Si $1 < p < \infty$ se define $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ como la clase de pesos w que verifican la condición A_p de Muckenhoupt

$$\left(\int_B w\right)^{1/p}\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \leq C|B|, \tag{1.2.17}$$

solo para bolas $B \in \mathcal{B}_\rho$. Del mismo modo, para $p = 1$ se define $A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ como la clase de pesos w que satisfacen

$$\frac{1}{|B|}\int_B w \leq C \inf_B w, \tag{1.2.18}$$

para toda bola $B \in \mathcal{B}_\rho$. Es inmediato que, para $p \geq 1$ estas clases locales son más grandes que las A_p^ρ, teniendo así

$$A_p \subset A_p^\rho \subset A_p^{\rho,\mathrm{loc}}.$$

Análogamente pueden definirse $RH_\eta^{\rho,\mathrm{loc}}$ como la clase de pesos que satisfacen la condición (1.2.16) para toda bola $B \in \mathcal{B}_\rho$ y $D_\mu^{\rho,\mathrm{loc}}$ como la clase de pesos que satisfacen

$$w(B(x,R)) \leq Cw(B(x,r))\left(\frac{R}{r}\right)^{d\mu} \tag{1.2.19}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $r \leq R \leq \rho(x)$.

Una propiedad sobre estas clases locales que usaremos a menudo se enuncia en la siguiente proposición y fue probada en [7].

Proposición 1.2.18. *Sean ρ una función de radio crítico y $\beta > 1$. Entonces para $\mu \geq 1$, $D_\mu^{\rho,loc} = D_\mu^{\beta\rho,loc}$ y para $1 \leq p < \infty$, $A_p^{\rho,loc} = A_p^{\beta\rho,loc}$.*

1.2.5. Operadores maximales asociados a una función de radio crítico

Dada una función de radio crítico ρ, definiremos en esta sección ciertos operadores maximales asociados que están íntimamente relacionados con las clases de pesos definidas en la sección anterior. Recordemos que, dada una función de Young Φ, una función f localmente integrable y una bola B se definen los promedios Φ de f como

$$\|f\|_{\Phi,B} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B|}\int_B \Phi\left(\frac{|f(t)|}{\lambda}\right)dt \leq 1\right\}, \tag{1.2.20}$$

siempre que el conjunto sea no vacío. Luego, si $\mathcal{B}_\rho$ es el conjunto de bolas $B(x,r)$ tales que $r \leq \rho(x)$ y $\theta \geq 0$ definimos los siguientes operadores maximales asociado a Φ y ρ.

$$M_\Phi^{\rho,\mathrm{loc}} f(x) = \sup_{\substack{B\ni x\\ B\in\mathcal{F}_\rho}} \|f\|_{\Phi,B}, \tag{1.2.21}$$

$$M_\Phi^{\rho,\theta} f(x) = \sup_{B(x_0,r_0)\ni x}\left(1+\frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{-\theta}\|f\|_{\Phi,B}. \tag{1.2.22}$$

Es claro que si $\theta = 0$, el operador definido en (1.2.22) es la maximal de Hardy-Littlewood asociada a una función de Young ϕ. Además, para todo $\theta \geq 0$,

$$M_{\Phi}^{\rho,\mathrm{loc}} f(x) \leq M_{\Phi}^{\rho,\theta} f(x) \leq M_{\phi} f(x). \tag{1.2.23}$$

Vamos a obviar la función ρ en la notación cuando la función de radio crítico sea clara del contexto. Además, vamos a obviar la letra Φ cuando la función sea $\Phi(t) = t$ y vamos a escribir $M_r^{\rho,\mathrm{loc}}$ y $M_r^{\rho,\theta}$ para referirnos al caso en que $\Phi(t) = t^r$.

En las próximas proposiciones veremos la relación entre los pesos asociados a una función de radio crítico y los correspondientes operadores maximales. Una caracterización inmediata de los pesos $A_1^{\rho,\theta}$ y $A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ es la siguiente.

Proposición 1.2.19. *Un peso w está en la clase $A_1^{\rho,\theta}$ si y sólo si $M^{\rho,\theta} w(x) \leq C w(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Del mismo modo, un peso w está en la clase $A_1^{\rho,loc}$ si y sólo si $M^{\rho,loc} w(x) \leq C w(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

Además, al igual que en el caso clásico, los pesos asociados a ρ están caracterizados por la acotación en $L^p(w)$ de los correspondientes operadores maximales.

Teorema 1.2.20. *Sea $1 < p < \infty$. Un peso w pertenece a A_p^{ρ} si y sólo si existe $\theta \geq 0$ tal que $M^{\rho,\theta}$ está acotado en $L^p(w)$. Del mismo modo, un peso w pertenece a $A_p^{\rho,loc}$ si y sólo si $M^{\rho,loc}$ está acotado en $L^p(w)$.*

1.2.6. Espacios de suavidad y BMO asociados a una función de radio crítico

Dedicaremos la última sección de este capítulo a definir ciertos espacios BMO y de suavidad análogos a los de la Sección 1.1.2 pero adaptados al contexto Schrödinger. Trabajaremos sobre operadores asociados a L actuando sobre este tipo de espacios en los Capítulos 3 y 4.

En un trabajo del año 2005 ([13]), Dzsiubański, Garrigós, Martínez, Torrea y Zienkiewicz dan la primera definición del espacio BMO_ρ de funciones de variación media acotada asociado a una función de radio crítico ρ. Buscando el espacio dual del espacio de Hardy natural en el contexto Schrödinger, que había sido previamente definido por Dzsiubanski y Zienkiewicz en [15], definen el espacio BMO_ρ como el conjunto de las funciones $f \in L^1_{loc}$ tales que

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C, \text{ para toda bola } B \tag{1.2.24}$$

y

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C, \text{ para toda bola } B = B(x, R), \text{ con } R \geq \rho(x). \tag{1.2.25}$$

Notemos que la condición (1.2.24) es la que define el espacio BMO clásico de John y Nirenberg, por lo tanto, el espacio BMO_ρ resulta ser un subespacio de BMO. Además, puede definirse una norma en este espacio como el ínfimo sobre las constantes C que satisfacen al mismo tiempo (1.2.24) y (1.2.25).

Los espacios en los que trabajaremos son extensiones de BMO_ρ en dos direcciones: por un lado incluyen un parámetro β que indica el grado de suavidad ($\beta = 0$ sería BMO) y por otra parte incluyen un peso que interviene tanto en las condiciones de tamaño como en las de oscilación/suavidad. Más precisamente, dada una función ρ de radio crítico, para $0 \leq \beta < 1$ y un peso $w \in L^1_{loc}$ se define la siguiente extensión del espacio BMO_ρ. Decimos que una funcion $f \in L^1_{loc}$ pertenece a $BMO^\beta_\rho(w)$ si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{w(B)} \int_B |f - f_B| \leq C|B|^{\beta/d}, \text{ para toda bola } B \tag{1.2.26}$$

y

$$\frac{1}{w(B)} \int_B |f| \leq C|B|^{\beta/d}, \text{ para toda bola } B = B(x,R), \text{ con } R \geq \rho(x). \tag{1.2.27}$$

Este espacio aparece por primera vez en [5]. Del mismo modo que en BMO_ρ, la norma $\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)}$ puede definirse como el ínfimo de las constantes C que satisfacen (1.2.26) y (1.2.27).

Al igual que en el caso clásico, es posible probar que, si $\beta > 0$ y bajo cierta hipótesis de duplicación para el peso w, se puede dar una descripción puntual de tipo Lipschitz a estos espacios. Recordemos que para $\beta > 0$ y $w \in L^1_{loc}$, habíamos definido

$$W_\beta(x,r) = \int_{B(x,r)} \frac{w(z)}{|z - x|^{d-\beta}} dz,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Diremos que f está en el espacio $\Lambda^\beta_\rho(w)$ si existe una constante C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C[W_\beta(x, |x-y|) + W_\beta(y, |x-y|)] \tag{1.2.28}$$

y

$$|f(x)| \leq CW_\beta(x, \rho(x)) \tag{1.2.29}$$

para casi todo x, $y \in \mathbb{R}^d$. De igual manera, puede definirse una norma en este espacio tomando el ínfimo de las constantes C que satisfacen (1.2.28) y (1.2.29).

Como remarcamos anteriormente, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, $W_\beta(x,r)$ es finito para todo $r > 0$ y es siempre creciente como función de r. Además, si $w \in D^\rho_\mu$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.21. *Sea ρ una función de radio crítico. Si $0 < \beta < 1$ y $w \in D^\rho_\mu$ para algún $\mu \geq 1$, entonces*

$$\Lambda^\beta_\rho(w) = BMO^\beta_\rho(w)$$

y las normas son equivalentes.

Reservamos la prueba de esta proposición para la Sección 3.1, donde daremos también otras propiedades sobre los espacios $BMO^\beta_\rho(w)$.

Capítulo 2

Integrales singulares asociadas al operador de Schrödinger

El estudio de integrales singulares asociadas a $L = -\Delta + V$ para V en cierta clase reverse-Hölder fue iniciado por Shen en el año 1995 (ver [31]). En ese trabajo se prueba la continuidad en L^p de ciertos operadores asociados a L tales como las transformadas de Riesz-Schrödinger de orden uno, $\mathcal{R}_1 = \nabla L^{-1/2}$, y de orden dos, $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 L^{-1}$.

Para obtener la continuidad en $L^p(\mathbb{R}^d)$ de $\mathcal{R}_1$, Shen la compara con la transformada de Riesz clásica $\mathbf{R}_1 = \nabla(-\Delta)^{-1/2}$. Esta diferencia tiene un núcleo que ya deja de ser singular en un entonrno de la diagonal que depende del potencial V a través de la función de radio crítico ρ. Por otra parte, Shen muestra que la solución fundamental de la ecuación $Lu = f$ tiene un decaimiento en el infinito, en una escala dada por ρ, mayor que cualquier potencia inversa y este comportamiento se traslada también al núcleo de $\mathcal{R}_1$.

El operador $\mathcal{R}_1$ resulta ser un operador de Calderón-Zygmund si el potencial $V \in RH_q$ con $q > d$, consecuentemente vale la continuidad en L^p para todo $1 < p < \infty$. Sin embargo, si $V \in RH_q$ con $d/2 < q < d$ tenemos que $\mathcal{R}_1$ es acotado en L^p para $1 < p < p_0$, donde p_0 es tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$. Mas aún, Shen probó que este rango es óptimo (ver sección 7 en [31]).

El caso del operador de orden dos $\mathcal{R}_2$ es diferente. Si $V \in RH_q$ con $d/2 < q < \infty$, puede obtenerse la acotación en L^p para el rango $1 < p < q$ y, al igual que en el caso anterior, este rango es óptimo. Como consecuencia de esta última observación vemos que, bajo estas mínimas hipótesis, $\mathcal{R}_2$ no puede ser un operador de Calderón-Zygmund, no importa cual sea el valor de q.

De los resultados obtenidos para $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, vía dualidad, se deduce que $\mathcal{R}_1^\star$ con $q > d$ resulta acotado en L^p para todo p, mientras que $\mathcal{R}_1^\star$ con $d/2 < q < d$ y $\mathcal{R}_2^\star$ resultan acotados en un rango de tipo (r, ∞) con $r > 1$.

Siguiendo algunas ideas de [31], [2] y [23], el propósito de este capítulo es definir dos familias de operadores asociados a L aislando las propiedades fundamentales de los núcleos de las transformadas de Riesz-Schrödinger que nos permitan recuperar resultados de continuidad sobre espacios de tamaño y suavidad.

Para definir la primer familia, en la Sección 2.1, consideramos operadores integrales, acotados en L^p para algún p y definidos a través de un núcleo K que presenta ciertas semejanzas con un núcleo estándar. Aquí, las condiciones de tamaño y suavidad requeridas en el núcleo están adaptadas para englobar a los ejemplos de las transformadas de Riesz-Schrödinger que mencionamos antes. Posteriormente, los resultados de los capítulos 3 y 6 estarán también enunciados en este marco más general y en el cual se encuadran algunos de los operadores que nos interesan.

La segunda familia considera operadores que puedan ser localmente comparados con un operador de Calderón-Zygmund clásico y cuyo núcleo satisfaga una condición de tamaño similar a la que usamos para definir la primer familia. Está familia será definida en la Sección 2.2 y los resultados del Capítulo 5 estarán enunciados para este tipo de operadores.

Luego de definir ambas familias nos dedicaremos a mostrar cuáles de las transformadas de Riesz-Schrödinger y sus adjuntas pertenecen a una u otra familia y sacar algunas conclusiones, la mayoría conocidas, sobre estimaciones en L^p con pesos.

Creemos conveniente finalizar esta introducción con una tabla a modo de resumen que muestre los ejemplos de operadores que consideraremos a lo largo de esta tesis y las pertenencias a las familias $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ que definiremos en las secciones siguientes. Adjuntamos además las referencias donde encontrar cada uno de los resultados. Cabe destacar que la tabla está hecha bajo las hipótesis mínimas, esto es, $V \in RH_q$ para algún $d/2 < q < \infty$.

En la lista hemos incluido todos los operadores que hemos denominado transformadas de Riesz-Schrödinger y sus adjuntos. La tabla muestra que salvo el caso de $\mathcal{R}_1$ cuando $q > d$, el resto de las transforamadas están en la familia $\mathcal{F}_2$ y no en la $\mathcal{F}_1$ mientras que sus adjuntos pertenecen a $\mathcal{F}_1$ y no a $\mathcal{F}_2$. Como dijimos, los resultados de suavidad no pueden valer para las transformadas de Riesz-Schrödinger (salvo el caso excepcional mencionado) ya que están acotads en L^p sólo para p en un intervalo finito de tipo $(1, r)$, por lo que allí debemos trabajar con la familia $\mathcal{F}_1$.

Para los resultados de los capítulos 5 y 6 que contienen desigualdades en L^p con dos pesos, trabajaremos con $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ respectivamente. Sin embargo, el hecho de que un operador esté en la clase y no lo esté su adjunto no es esencial ya que en los dos casos obtendremos conclusiones para ambos.

Operador	$V \in RH_q$	$\mathcal{F}_1(s,\delta)$	$\mathcal{F}_2(s,\varepsilon)$
$\mathcal{R}_1$	$q > d$	$s = \infty$, $\delta = 1 - \frac{d}{q}$ ver Proposición 2.3.1	$s = \infty$, $\varepsilon = 2 - \frac{d}{q}$ ver Proposición 2.3.7
	$\frac{d}{2} < q < d$	no pertenece	$s = p_0$, $\varepsilon = 2 - \frac{d}{q}$ ver Proposición 2.3.7
$\mathcal{R}_1^\star$	$q > d$	$s = \infty$, $\delta = 1$ ver Proposición 2.3.1	$s = \infty$, $\varepsilon = 2 - \frac{d}{q}$ ver Proposición 2.3.7
	$\frac{d}{2} < q < d$	$s = p_0$, $\delta = 2 - \frac{d}{q}$ ver Proposición 2.3.5	no pertenece
$\mathcal{R}_2$	$q > \frac{d}{2}$	no pertenece	$s = q$, $\varepsilon = 2 - \frac{d}{q}$ ver Proposición 2.3.12
$\mathcal{R}_2^\star$	$q > \frac{d}{2}$	$s = q$, $\delta = \text{mín}\left\{1, 2 - \frac{d}{q}\right\}$ ver Proposición 2.3.9	no pertenece
$V^\gamma L^{-\gamma}$	$q > \frac{d}{2}$	no pertenece	$s = q/\gamma$, $\varepsilon = \gamma\left(2 - \frac{d}{q}\right)$ ver Observación 5.3.4
$L^{-\gamma} V^\gamma$	$q > \frac{d}{2}$	$s = q/\gamma$, $\delta = \text{mín}\left\{1, 2 - \frac{d}{q}\right\}$ ver Proposición 2.4.6	no pertenece
$V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$	$q > \frac{d}{2}$	no pertenece	$s = p_\gamma$, $\varepsilon = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{d}{q}\right)$ ver Observación 5.3.7
$L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$	$q > \frac{d}{2}$	$s = p_\gamma$, $\delta = \text{mín}\left\{1, 2 - \frac{d}{q}\right\}$ ver Proposición 2.4.3	no pertenece

Tabla 2.1: Ejemplos de operadores

2.1. Operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund

En esta sección definiremos una primer familia de operadores asociados al operador de Schrödinger con ciertas semejanzas a los de Calderón y Zygmund. Las ideas que dan lugar a las definiciones propuestas vienen de intentar generalizar algunas clases de operadores considerados por Ma, Stinga, Torrea y Zhang en [23] y ciertos tipos de núcleos estudiados por Cabral, Bongioanni y Harboure en [2]. Para comenzar, cabe señalar que la familia que presentaremos está diseñada para englobar los operadores adjuntos de las transformadas de Riesz-Schrödinger. De esta manera, los ejemplos naturales serían $\mathcal{R}_1^\star = L^{-1/2}\nabla$, $\mathcal{R}_2^\star = L^{-1}\nabla^2$, y operadores que involucran el potencial como $L^{-1/2}V^{1/2}$, $L^{-1}V$, $\nabla L^{-1}V^{1/2}$, los cuales, como Shen ha mostrado, son acotados en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para p en un rango de tipo (r,∞), con $r \geq 1$ dependiendo de q.

Por cierto, es posible dualizar cada una de las condiciones y así estaríamos incluyendo a las transformadas de Riesz-Schrödinger $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. De todos modos a efectos de la continuidad en L^p cualquiera de los dos enfoques resulta indiferente pues, mediante dualidad, a partir de la acotación de unos se obtienen la acotación de los otros y recíprocamente ya que $T^{\star\star} = T$. La conveniencia de la definición que damos se verá en el Capítulo 3 donde establecemos resultados de suavidad tipo BMO y Lipschitz, la cual requiere que los operadores sean continuos en L^p para *p cerca de infinito*, que es el caso de los adjuntos de las transformadas de Riesz-Schrödinger. De hecho, es sabido que si un operador preserva L^{p_0} para algún p_0 y también el espacio BMO entonces, por interpolación, también es acotado en L^p, $p \geq p_0$.

En [2], Bongioanni, Cabral y Harboure definen una clase de operadores para los cuales muestran desigualdades pesadas en L^p, donde p está en un rango (r,∞) con $r \geq 1$. Aquí daremos una familia con una condición diferente en la suavidad que, como veremos, resulta ser más fuerte. La razón de esta elección es que bajo estas hipótesis podemos también acotar estos operadores en espacios de tipo $BMO_\rho^\beta(w)$. De todos modos, los ejemplos que nos interesan caen en este enfoque más restrictivo.

Definición 2.1.1. Para $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$ decimos que un operador T es un **operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo** (s,δ) si

(I_s) T está acotado de $L^{s'}$ en $L^{s',\infty}$.

(II_s) T tiene un núcleo asociado $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, en el siguiente sentido

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy, \quad f \in L^{s'} \text{ con soporte compacto y } x \notin \operatorname{sop} f. \tag{2.1.1}$$

Más aún, el núcleo K verifica: Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R} |K(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq C_N R^{-d}\left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{2.1.2}$$

para $|x - x_0| < R/2$. Existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq CR^{-d}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta}, \tag{2.1.3}$$

para $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$, $r < R/2$.

Para s y δ dados, denotaremos $\mathcal{F}_1(s,\delta)$ a la familia de operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ).

Observación 2.1.2. Es fácil ver que si K satisface (2.1.2) sólo para $x = x_0$, entonces también vale para x tal que $|x - x_0| < R/2$. Asimismo, que K satsifaga (2.1.3) para $r < R/2$ equivale a que valga para $r < cR$ para algún $0 < c < 1$.

La condición (2.1.2) es una condición de tamaño integral con decaimiento extra en el infinito mientras que la condición (2.1.3) impone una condición de suavidad en la primera variable. Notar que si un núcleo K satisface (2.1.2) y (2.1.3) para algún $s > 1$, entonces también satisface esas condiciones para cualquier $1 \leq t < s$. Para el caso $s = \infty$ introducimos la siguiente definición donde consideramos estimaciones análogas al caso $s < \infty$ pero puntuales en lugar de integrales.

Definición 2.1.3. Para $0 < \delta \leq 1$ decimos que un operador T es un **operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo** (∞,δ) si

(I_∞) T está acotado de L^1 en $L^{1,\infty}$.

(II_∞) T tiene un núcleo asociado $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, en el sentido de (2.1.1) que verifica: Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^d}\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \text{ para } x \neq y. \tag{2.1.4}$$

Existe una constante C tal que

$$|K(x,y) - K(x_0,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta}, \text{ cuando } |x-y| > 2|x-x_0|. \tag{2.1.5}$$

Para s y δ dados, llamaremos $\mathcal{F}_1(\infty,\delta)$ a la familia de operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞,δ).

Es fácil ver que si un núcleo satisface (2.1.4) y (2.1.5) entonces satisface (2.1.2) y (2.1.3) para todo $1 < s < \infty$.

En el siguiente lema mostramos que si un núcleo satisface las condiciones (2.1.2) y (2.1.3) entonces, en cierto sentido, también podemos obtener un decaimiento extra para la condición de suavidad.

Lema 2.1.4. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ') para algún $1 < s \leq \infty$ y para todo $\delta' \in (0,\delta)$. Entonces, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe una constante C_N tal que el núcleo asociado K satisface*

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq C_N R^{-d}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta'}\left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{2.1.6}$$

para $|x-x_0|<r\leq\rho(x_0)$*,* $r<R/2$ *si* $s<\infty$ *o bien satisface*

$$|K(x,y)-K(x_0,y)|\leq\frac{C}{|x-y|^d}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta'},\ \text{cuando } |x-y|>2|x-x_0|. \tag{2.1.7}$$

si $s=\infty$*. En particular, esto puede aplicarse a cualquier operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo* (s,δ)*.*

Demostración. Sea $\delta'\in(0,\delta)$, elegimos $\tilde{\delta}\in(0,\delta)$ y $\sigma\in(0,1)$ tales que $(1-\sigma)\tilde{\delta}=\delta'$. Sean x_0, $x\in\mathbb{R}^d$ y r, $R>0$, tales que $|x-x_0|<r<\rho(x_0)$ y $r<R/2$. Notar que en esta situación, tenemos que existen C_1 y C_2 tales que $C_1\rho(x)\leq\rho(x_0)\leq C_2\rho(x)$.

Si llamamos A al lado izquierdo de (2.1.6), usando (2.1.2) tenemos que

$$A^\sigma\leq\left(\frac{1}{R^d}\int|K(x,y)|+|K(x_0,y)|\right)^{\sigma/s}\leq C_NR^{-d\sigma}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N\sigma}.$$

Entonces, usando (2.1.3) con $\tilde{\delta}$ para acotar $A^{1-\sigma}$ obtenemos, para nuestra elección de σ,

$$A\leq C_NR^{-d}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta'}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N\sigma}.$$

Como N está a nuestra disposición obtenemos (2.1.6).

□

Estamos ahora en condiciones de enunciar los siguientes resultados de continuidad en espacios $L^p(w)$ para integrales singulares asociadas a L. El primero es un resultado de tipo fuerte en $L^p(w)$ y es una consecuencia directa del Teorema 5 y la Proposición 6 en [2]. El segundo resultado nos da el tipo débil en el extremo $p=1$ para el operador adjunto y puede encontrarse como Teorema 3.6 en [9].

Teorema 2.1.5. *Sea* $1<s<\infty$ *y* T *un operador acotado de* $L^{s'}$ *en* $L^{s',\infty}$ *con núcleo* K *que satisface* (2.1.2) *y para el cual existe una constante* C *tal que*

$$\sum_{k\geq1}(2^kr)^{d/s'}\left(\int_{2^{k+1}B\setminus2^kB}|K(x,y)-K(x_0,y)|^sdy\right)^{1/s}\leq C, \tag{2.1.8}$$

para toda bola $B=B(x_0,r)$ *y para todo* $x\in B$ *con* $r\leq\rho(x_0)$*. Entonces,* T *es acotado en* $L^p(w)$ *para* $s'<p<\infty$ *y para todo* $w\in A^\rho_{p/s'}$*. Consecuentemente, el operador adjunto* $\tilde{T}$ *está acotado en* $L^p(w)$ *para* $1<p<s$ *y para todo* w *tal que* $w^{1-p}\in A^\rho_{p'/s'}$*.*

Teorema 2.1.6. *Sea* $1<s<\infty$ *y* T *un operador acotado de* $L^{s'}$ *en* $L^{s',\infty}$ *con núcleo* K *que satisface* (2.1.2) *y que para cada* $N>0$ *existe una constante* C_N *tal que*

$$\sum_{k\geq1}(2^kr)^{d/s'}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^N\left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k}|K(x,y)-K(x_0,y)|^sdy\right)^{1/s}\leq C_N, \tag{2.1.9}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ y para todo $x \in B$ con $r \leq \rho(x_0)$. Entonces, si $w^{s'} \in A_1^\rho$, el operador adjunto $\tilde{T}$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w.

Como veremos a continuación, ambos teoremas pueden aplicarse a la clase de operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ).

Corolario 2.1.7. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para algún $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. Entonces*

(a) T es acotado en en $L^p(w)$ para $s' < p < \infty$ y para todo $w \in A^\rho_{p/s'}$,

(b) el operador adjunto $\tilde{T}$ está acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < s$ y para todo w tal que $w^{1-p} \in A^\rho_{p'/s'}$,

(c) $\tilde{T}$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w para todo peso w tal que $w^{s'} \in A_1^\rho$.

Más aún, si T es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para todo $s > 1$, entonces

(d) T y $\tilde{T}$ son acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ y para todo $w \in A_p^\rho$,

(e) $\tilde{T}$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w para todo $w \in A_1^\rho$.

En particular, (d) y (e) valen para un operador de Schrödigner-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ).

Demostración. Para aplicar los Teoremas 2.1.5 y 2.1.6 basta verificar que la condición (2.1.6) implica (2.1.9) que a su vez es más fuerte que (2.1.8). Si T es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para algún $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$ tenemos que, usando el Lema 2.1.4, para todo $N > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} \left(2^k r\right)^{d/s'} \left(1 + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^N \left(\int_{B_{k+1}\setminus B_k} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \\ \leq C_N \sum_{k\geq 1} \left(2^k r\right)^{d/s' + d/s - d} 2^{-k\delta'} \\ \leq C_N \sum_{k\geq 1} 2^{-k\delta'} \leq C_N.\end{aligned}$$

Si T es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para todo $s > 1$, el resultado sigue de que $\bigcup_{s>1} A^\rho_{(p/s')} = A^\rho_p$ y $\bigcup_{s'>1} \{w : w^{s'} \in A_1^\rho\} = A_1^\rho$. □

Observación 2.1.8. Como una consecuencia de este resultado, tenemos que las clases $\mathcal{F}_1(s, \delta)$ son, para un δ fijo, decrecientes con s, para $1 < s \leq \infty$.

Para integrales singulares asociadas a L también se conocen algunos resultados de continuidad en espacios de regularidad tipo $BMO_\rho^\beta(w)$ definidos en la Sección 1.2.6. Recordemos que, dada una función de radio crítico ρ, un peso w y $0 \leq \beta < 1$ decimos que una función localmente integrable f **pertenece a** $BMO_\rho^\beta(w)$ si satisface

$$\int_B |f - f_B| \leq C\, w(B)\, |B|^{\beta/d}, \quad \text{para toda bola } B, \tag{2.1.10}$$

y

$$\int_B |f| \leq C\, w(B)\, |B|^{\beta/d}, \quad \text{para toda bola } B = B(x,R), \text{ con } R \geq \rho(x). \tag{2.1.11}$$

En [23] se obtiene el siguiente resultado para operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ). En realidad el enunciado que allí figura requiere de una hipótesis más fuerte puesto que pide una condición de suavidad en ambas variables del núcleo. Omitimos aquí esa condición puesto que no es necesaria para obtener el resultado.

Teorema 2.1.9. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ), para algún $0 < \delta \leq 1$. Entonces, para todo $0 < \beta < \delta$, T está acotado en BMO_ρ^β si y sólo si existe una constante C tal que*

$$\left(\frac{\rho(x)}{r}\right)^\beta \frac{1}{|B|} \int_B |T1(y) - (T1)_B| dy \leq C \tag{2.1.12}$$

para toda bola $B = B(x,r)$ con $r \leq \rho(x)/2$ si $\beta > 0$ o

$$\log\left(\frac{\rho(x)}{r}\right) \frac{1}{|B|} \int_B |T1(y) - (T1)_B| dy \leq C \tag{2.1.13}$$

para toda bola $B = B(x,r)$ con $r \leq \rho(x)/2$ si $\beta = 0$.

Notar que este resultado no puede aplicarse a operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ), para $s < \infty$ puesto que requiere condiciones más fuertes en el núcleo. Un ejemplo en el que valen las hipótesis de este teorema es el operador $\mathcal{R}_1$ con $q > d$, como fue mostrado en [23]. Sin embargo, se habían obtenido previamente, en [6], desigualdades en $BMO_\rho^\beta(w)$ para el operador $\mathcal{R}_1^\star$ que, para $V \in RH_q$ con $q < d$, no satisfacen las condiciones puntuales (2.1.4) y (2.1.5). En el Capítulo 3 daremos resultados en espacios de suavidad pesados para Operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund que generalizan los resultados de [23] y [6].

2.2. Operadores de Schrödinger localmente comparables con operadores de Calderón-Zygmund

En esta sección describiremos otra familia de operadores relacionadas a L influenciada por el *método de comparación* usado por Shen en [31]. La característica que define a estos operadores es la existencia de un operador de Calderón-Zygmund clásico (ver Sección 1.1.4) que aproxima localmente a estos operadores. Aquí, como es usual, la noción de localidad viene dada a través de la función de radio crítico ρ.

Definición 2.2.1. Sea T un operador lineal con núcleo asociado K en el sentido de (2.1.1). Para $1 < s < \infty$ y $0 < \varepsilon \leq 1$, diremos que T es un **operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo** (s, ε) si el núcleo K satisface las siguientes propiedades.

(a_s) Para cada $N > 0$ existe C_N tal que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-x|<2R} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \leq C_N R^{-d}\left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N},$$

siempre que $|y - x_0| < R/2$.

(b_s) Existe un operador de Calderón-Zygmund T_0 con núcleo K_0 tal que, para algunas constantes C y $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-x|<2R} |K(x,y) - K_0(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \leq C R^{-d}\left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{\varepsilon}$$

cualesquiera sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < R \leq \rho(x_0)$, $y \in \mathbb{R}^d$ tal que $|y - x_0| < R/2$.

Para s y ε dados llamaremos $\mathcal{F}_2(s, \varepsilon)$ a la familia de operadores de Schrödinger localmente comparables con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s, ε).

La condición (a_s) puede verse como una condición de tamaño con un cierto "decaimiento en el infinito" para el núcleo, mientras que la condición (b_s) nos dice que K tiene la misma singularidad en el origen que un núcleo de Calderón-Zygmund. Sin embargo, ninguna de estas condiciones es simétrica ya que la integración es siempre en la primer variable. En consecuencia, no obtendremos las mismas estimaciones para T y para $T^\star$.

Se sigue de la definición que las familias $\mathcal{F}_2(s, \varepsilon)$ son, para un $\varepsilon > 0$ fijo, decrecientes con s. Para $s = \infty$ introducimos la siguiente definición considerando estimaciones puntuales en lugar de integrales.

Definición 2.2.2. Sea T un operador lineal con núcleo asociado K en el sentido de (2.1.1). Para $0 < \varepsilon \leq 1$, diremos que T es un **operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo** (∞, ε) si el núcleo K satisface las siguientes propiedades. siguientes condiciones.

(a_∞) Para cada $N > 0$ existe C_N tal que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^d}\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N},$$

(b_∞) Existe un operador de Calderón-Zygmund T_0 con núcleo K_0 tal que, para algunas constantes C y $\varepsilon > 0$

$$|K(x,y) - K_0(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\varepsilon}.$$

Para s y ε dados llamaremos $\mathcal{F}_2(s,\varepsilon)$ a la familia de operadores de Schrödinger localmente comparables con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s,ε).

Observación 2.2.3. La condición (a_s) es similar a la condición (2.1.2) con la diferencia en la variable que estamos integrando en cada caso. Esto se debe a que los modelos de operadores que tuvimos en cuenta para definir $\mathcal{F}_1(s,\delta)$ son los operadores adjuntos de los modelos para $\mathcal{F}_2(s,\varepsilon)$. De esta manera, si $T^\star$ es el operador adjunto de T y el núcleo de $T^\star$ satisface (2.1.2) entonces el núcleo de T satisface la condición (a_s) y recíprocamente. La condición (a_∞) es igual a (2.1.4).

Para operadores en esta familia podemos obtener el siguiente resultado de acotación en L^p que se sigue de generalizar las técnicas empleadas en [31].

Teorema 2.2.4. *Sea T un operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s,ε) para algún $s > 1$ y $0 < \varepsilon \leq 1$. Entonces T es acotado en L^p para todo $1 < p < s$.*

Demostración. Consideremos T un operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s,ε) para algún $s > 1$ y $0 < \varepsilon \leq 1$. Sean T_0 el operador de Calderón-Zygmund que aproxima localmente a T y K_0 su núcleo asociado. Vamos a estimar puntualmente el operador adjunto $T^\star$. Para $x \in \mathbb{R}^d$ y una función f localmente integrable tenemos que

$$\begin{aligned} T^\star f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K^\star(x,y) f(y)dy \\ &= \int_{B(x,\rho(x))} \left[K^\star(x,y) - K_0^\star(x,y)\right] f(y)dy + \int_{B(x,\rho(x))} K_0^\star(x,y) f(y)dy \qquad (2.2.1) \\ &\quad + \int_{B(x,\rho(x))^c} K^\star(x,y) f(y)dy = I + II + III. \end{aligned}$$

En el primer término vamos a usar la desigualdad de Hölder y la condición (b_s) para obtener

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{2^{-j-1}\rho(x) \leq |x-y| < 2^{-j}\rho(x)} |K^\star(x,y) - K_0^\star(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \left(\int_{B(x,2^{-j}\rho(x))} |f|^{s'}\right)^{1/s'} \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\varepsilon} \left(\frac{1}{|B(x,2^{-j}\rho(x))|}\int_{B(x,2^{-j}\rho(x))} |f|^{s'}\right)^{1/s'} \leq CM_{s'}f(x). \end{aligned}$$

En el segundo sumando basta observar que

$$|II| = \left|\int_{B(x,\rho(x))} K_0^\star(x,y) f(y)dy\right| \leq 2\sup_{r>0}\left|\int_{|x-y|>r} K_0^\star(x,y) f(y)dy\right|$$

Finalmente en III, usamos la desigualdad de Hölder y la condición (a_s) para obtener

$$\begin{aligned}|III| &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_{2^j\rho(x)\leq|x-y|<2^{j+1}\rho(x)}|K^\star(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{B(x,2^j\rho(x))}|f|^{s'}\right)^{1/s'}\\ &\leq C_N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-jN}\left(\frac{1}{|B(x,2^j\rho(x))|}\int_{B(x,2^j\rho(x))}|f|^{s'}\right)^{1/s'}\leq CM_{s'}f(x).\end{aligned}$$

con tal de elegir $N>0$. Entonces, se sigue que,

$$|T^\star f(x)|\leq CM_{s'}f(x)+C\sup_{r>0}\left|\int_{|x-y|>r}K_0^\star(x,y)f(y)dy\right|. \qquad (2.2.2)$$

Luego, $T^\star$ resulta acotado en L^p para $p>s'$ y en consecuencia T resulta acotado en L^p para $p<s$. □

2.3. Transformadas de Riesz-Schrödinger singulares

En esta sección consideramos las integrales singulares $\mathcal{R}_1=\nabla L^{-1/2}$ y $\mathcal{R}_2=\nabla^2L^{-1}$, junto con sus operadores adjuntos $\mathcal{R}_1^\star=L^{-1/2}\nabla$ and $\mathcal{R}_2^\star=L^{-1}\nabla^2$. A estros operadores, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ los llamaremos frecuentemente transformadas de Riesz-Schrödinger de orden uno y dos respectivamente.

El propósito de esta sección será analizar cuales de estos operadores están en las familias $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ definidas previamente. Más precisamente, probaremos que $\mathcal{R}_1^\star$ y $\mathcal{R}_2^\star$ son operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ), para algún $s>1$ y $0<\delta\leq 1$. Una vez probado esto, podremos aplicar el Coroloario 2.1.7 para obtener desigualdades en $L^p(w)$ para $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_1^\star$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2^\star$. Además, contaremos con ejemplos para aplicar los resultados de los Capítulos 3 y 6 que están enunciados para esta familia de operadores.

Posteriormente, pasaremos a probar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son operadores de Schrödinger localmente comparables con operadores de Calderón-Zygmund de tipo (s,ε) para ciertos valores de $s>1$ y $\varepsilon>0$. De esta manera, tendremos ejemplos para aplicar más adelante los resultados del Capítulo 5.

Para $\mathcal{R}_1$ las estimaciones necesarias para probar que pertenece a alguna de las familias son conocidas. Por otro lado, el caso de $\mathcal{R}_2$ es diferente ya que no se conocen estimaciones sobre el núcleo. En [31], Shen prueba la acotación en L^p de $\mathcal{R}_2$ para $1<p<q$ siempre que $V\in RH_q$, $q>d/2$. Sin embargo, el método que utiliza no requiere estimaciones para el núcleo asociado pero, a la vez, no puede ser aplicado para obtener resultados con pesos en A_p^ρ. Aquí en la Sección 2.3.2 daremos una expresión precisa (aunque local) para el núcleo de $\mathcal{R}_2$ que nos permitirá probar que $\mathcal{R}_2^\star$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (q,δ) y una estimación para la comparación con la transformada de Riesz clásica $\mathbf{R}_2=\nabla^2(-\Delta)^{-1}$ que servirá para probar que $\mathcal{R}_2$ es un operador de Schrödinger localmente comparable con uno de Calderón-Zygmund de tipo (q,ε).

2.3.1. La transformada de Riesz-Schrödinger de primer orden

Sea V un potencial en la clase reverse-Hölder de orden q para algún $q > d/2$. El análisis para los operadores $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_1^\star$ es diferente en los casos $q > d$ y $d/2 < q < d$.

El Teorema 0.8 en [31] asegura que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_1^\star$ son operadores de Calderón-Zygmund si $q > d$. Entonces, en este caso ambos operadores están acotados en L^p para $1 < p < \infty$ y son de tipo débil para $p = 1$. Más aún, en el mismo teorema se muestra que sus núcleos asociados satisfacen las siguientes condiciones de tamaño y suavidad puntuales (2.1.4) y (2.1.5) con $\delta = 1 - d/q$ para $\mathcal{R}_1$ y $\delta = 1$ para $\mathcal{R}_1^\star$. En consecuencia, tanto $\mathcal{R}_1$ como su adjunto resultan ser operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) con el valor de δ correspondiente en cada caso.

Proposición 2.3.1. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d$. Entonces $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_1^\star$ son operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) con $\delta = 1 - d/q$ y $\delta = 1$ respectivamente.*

Las conclusiones del Corolario 2.1.7 para $\mathcal{R}_1$ y su adjunto para $q > d$ ya son conocidas (ver Teorema 9 en [2] y Teorema 7.2 en [9]). Las enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. *Sea $V \in RH_q$ para $q > d$, entonces los operadores $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_1^\star$ están acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ y para todo $w \in A_p^\rho$. Más aún, si $w \in A_1^\rho$, ambos operadores son de tipo débil $(1, 1)$ respecto a w.*

Dado que el núcleo de estos operadores satisface estimaciones puntuales, pueden obtenerse resultados en espacios de suavidad sin pesos BMO_ρ^β aplicando el Teorema 2.1.9 probado en [23]. La condición $T1$ para $\mathcal{R}_1^\star$ es inmediata ya que $\mathcal{R}_1^\star 1 = 0$. Por otro lado, una prueba de la condición $T1$ para $\mathcal{R}_1$ puede encontrarse en [23], § 4.6. De esta manera, vale el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d$, entonces $\mathcal{R}_1$ está acotado en BMO_ρ^β para todo $0 \leq \beta < 1 - d/q$ y $\mathcal{R}_1^\star$ está acotado en BMO_ρ^β para todo $0 \leq \beta < 1$.*

Cabe destacar que estos resultados para el caso particular de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_1^\star$ habían sido probados previamente en [6], Teorema 1.

Para el caso $d/2 < q < d$, el Teorema 0.5 en [31] nos dice que $\mathcal{R}_1^\star$ es acotado en L^p para $p_0' \leq p < \infty$ con p_0 tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$. Más aún, su núcleo asociado, $\mathcal{K}_1^\star$, satisface las siguientes estimaciones.

Lema 2.3.4. *Sea $V \in RH_q$ para $d/2 < q < d$. Entonces, para $\delta = 2 - d/q$ y para cualquier $N > 0$ existe una constante C_N tal que*

$$|\mathcal{K}_1^\star(x,y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \left(\frac{1}{|x-y|^{d-1}} G(x,y) + \frac{1}{|x-y|^d} \right), \tag{2.3.1}$$

$$|\mathcal{K}_1^\star(x,y) - \mathcal{K}_1^\star(x_0,y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|} \right)^\delta \left(\frac{1}{|x-y|^{d-1}} G(x,y) + \frac{1}{|x-y|^d} \right), \tag{2.3.2}$$

si $|x-x_0| \leq |x-y|/16$, *donde*

$$G(x,y) = \int_{B(y,|x-y|/4)} \frac{V(z)}{|z-y|^{d-1}} dz. \tag{2.3.3}$$

La desigualdades (2.3.1) y (2.3.2) pueden encontrarse en la Sección 5 de [31].

Sean x_0, $x \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$ tales que $|x-x_0| < R/2$. Usando la acotación de la integral fraccionaria clásica I_1 de L^q en L^{p_0} con $1/p_0 = 1/q - 1/d$ (ver Sección 1.1.5) y la propiedad de reverse-Hölder del potencial V obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{R<|x_0-y|<2R} |G(x,y)|^{p_0} dy \right)^{1/p_0} &\leq C \left(\int_{R<|x_0-y|<2R} \left(\int_{B(x,cR)} \frac{V(z)}{|z-y|} dz \right)^{p_0} dy \right)^{1/p_0} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |I_1(\chi_{B(x,cR)} V)|^{p_0} \right)^{1/p_0} \\
&\leq C \left(\int_{B(x_0,\tilde{c}R)} V^q \right)^{1/q} \\
&\leq C R^{d/q-d} \int_{B(x_0,\tilde{c}R)} V \\
&\leq C R^{d/p_0-1} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)} \right)^{N_2},
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

donde, en la última desigualdad, usamos el Lema 1.2.7. Esta estimación, combinada con (2.3.1) nos da (2.1.2) para $\mathcal{K}_1^\star$, esto es, la condición de tamaño para ser un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund con $s = p_0$. Del mismo modo, (2.3.2) y (2.3.4) nos dan (2.1.3) para $\mathcal{K}_1^\star$, obteniendo así el siguiente resultado.

Proposición 2.3.5. *Si* $V \in RH_q$ *con* $d/2 < q < d$, $\mathcal{R}_1^\star$ *es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo* (p_0, δ) *para* p_0 *tal que* $1/p_0 = 1/q - 1/d$ *y* $\delta = 2 - d/q$.

Nuevamente, las estimaciones obtenidas en $L^p(w)$ al aplicar el Corolario 2.1.7 son conocidas (ver Teorema 11 en [2] y Teorema 7.3 en [9]). Las enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.6. *Sea* $V \in RH_q$ *para* $d/2 < q < d$ *y* p_0 *tal que* $1/p_0 = 1/q - 1/d$, *entonces el operador* $\mathcal{R}_1^\star$ *está acotado en* $L^p(w)$ *para* $p_0' < p < \infty$ *y para todo* $w \in A^\rho_{p/p_0'}$. *Consecuentemente el operador* $\mathcal{R}_1$ *es acotado en* $L^p(w)$ *para* $1 < p < p_0$ *y para todo* w *tal que* $w^{1-p} \in A^\rho_{p'/p_0'}$. *Más aún, si* $w^{p_0'} \in A_1^\rho$, $\mathcal{R}_1$ *es de tipo débil* $(1,1)$ *respecto a* w.

En este caso no podemos aplicar el Teorema 2.1.9 para obtener estimaciones en espacios de suavidad. Sin embargo, en [6] se prueban desigualdades en $BMO_\rho^\beta(w)$ para estos operadores en el caso $d/2 < q < d$, usando métodos diferentes (ver Teorema 2).

Pasaremos ahora a probar que $\mathcal{R}_1$ es un operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s, ε) para ciertos valores de s y ε que dependen de q. De la Observación 2.2.3 y las estimaciones dadas arriba para $\mathcal{R}_1^\star$ se sigue que $\mathcal{K}_1$, el núcleo asociado a $\mathcal{R}_1$ satisface (a_s) con $s = p_0$ si $d/2 < q < d$ y satisface (a_∞) si $q > d$.

Resta probar la condición (b_s). Para esto, consideramos la transformada de Riesz clásica $\mathbf{R}_1 = \nabla(-\Delta)^{-1/2}$. Para el caso $q > d$, la condición (b_∞) fue enunciada y probada con $\varepsilon = 2 - d/q$ en [6], Lema 3. Para el caso $d/2 < q < d$ tenemos la siguiente desigualdad que puede encontrarse en [31] como (5.9).

Si $V \in RH_q$ con $d/2 < q < d$, existe una constante C tal que

$$|\mathcal{K}_1(x,y) - \mathbf{K}_1(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d-1}} \left(\tilde{G}(x,y) + \frac{1}{|x-y|} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)} \right)^{2-d/q} \right),$$

donde $\tilde{G}(x,y) = G(y,x)$ con G definida en (2.3.3) y $\mathbf{K}_1$ el núcleo de $\mathbf{R}_1$. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < R \leq \rho(x_0)$, $y \in \mathbb{R}^d$ tal que $|y - x_0| < R/2$. Podemos seguir los pasos de (2.3.4) usando nuevamente el Lema 1.2.7 pero teniendo en cuenta ahora que $R < \rho(x_0)$

$$\left(\int_{R<|x_0-y|<2R} |\tilde{G}(x,y)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \leq C R^{d/p_0 - 1} \left(\frac{R}{\rho(x_0)} \right)^{2-d/q}, \tag{2.3.5}$$

con p_0 tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$. Aplicando las últimas dos estimaciones obtenemos (b_s) de la Definición 2.2.1 para $\mathcal{R}_1$ con $s = p_0$ y $\varepsilon = 2 - d/q$, probando así el siguiente resultado.

Proposición 2.3.7. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Entonces $\mathcal{R}_1$ es un operador de Schrödinger localmente comparable a un operador de Calderón-Zygmund de tipo $(p_0, 2 - d/q)$ con p_0 tal que $1/p_0 = (1/q - 1/d)^+$.*

2.3.2. La transformada de Riesz-Schrödinger de segundo orden

Sea $V \in RH_q$ para $q > d/2$. Daremos, en primer lugar, una expresión para núcleo $\mathcal{K}_2^\star$ de $\mathcal{R}_2^\star$ que nos servirá para probar que $\mathcal{R}_2^\star$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (q, δ) con $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$. Posteriormente, estableceremos un resultado de comparación entre $\mathcal{R}_2$ y $\mathbf{R}_2$ que nos permitirá probar que $\mathcal{R}_2$ es un operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo $(q, 2 - d/q)$.

Consideramos $\mathcal{R}_2^\star$ para un potencial $V \in RH_q$, $q > d/2$. En primer lugar, del Teorema 0.3 en [31] sabemos que $\mathcal{R}_2^\star$ está acotado en L^p para $q' \leq p < \infty$. Entonces, el siguiente paso es encontrar una expresión para su núcleo $\mathcal{K}_2^\star$ y probar que satisface (2.1.2) y (2.1.3) para $s = q$. Como esperamos que este operador sea una integral singular, debemos ser muy precisos al escribir su núcleo.

Sea $\Gamma(x,y)$ la solución fundamental de L. Usaremos que, para un y fijo, $u(x) = \Gamma(x,y)$ satisface $Lu = 0$ en una bola B tal que $d(y,B) > 0$.

Sea entonces u una solución de $Lu = 0$. Para localizar la función u fijamos dos puntos diferentes a, $b \in \mathbb{R}^d$ y tomamos $0 < R \leq |a - b|$. Sea ahora φ una funcion radial $\mathcal{C}^\infty$,

$0 \leq \varphi \leq 1$, soportada en $B(0,3/8)$ y tal que $\varphi(x)=1$ para todo $x \in B(0,1/4)$. Con esta función φ localizamos la solución u a la bola $B_1 = B(a,R/4)$ multiplicando u por $\eta_{B_1} = \varphi\left(\frac{\cdot - a}{R}\right)$. De esta manera nos aseguramos también que sus primeras y segundas derivadas están acotadas por CR^{-1} y CR^{-2} para alguna constante C independiente del centro y del radio de la bola.

Como en la página 532 de [31], para una solución u de $Lu = 0$ en $B(a,R)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta(u\eta_{B_1}) &= \eta_{B_1}\Delta(u) + u\Delta(\eta_{B_1}) + 2\nabla u \cdot \nabla \eta_{B_1}\\ &= \eta_{B_1} V u + u\Delta(\eta_{B_1}) + 2\nabla u \cdot \nabla \eta_{B_1}.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Si Γ_0 es la solución fundamental de $-\Delta$, tenemos entonces que si $x \in B(a,3R/8)$

$$\begin{aligned}u(x)\eta_{B_1}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_0(x,\xi)(-\Delta(u\,\eta_{B_1})(\xi))d\xi\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_0(x,\xi)\eta_{B_1}(\xi)V(\xi)u(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_0(x,\xi)u(\xi)\Delta\eta_{B_1}(\xi)d\xi\\ &\quad + 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_2\Gamma_0(x,\xi)\cdot\nabla\eta_{B_1}(\xi)u(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Ahora, podemos reemplazar u por $\Gamma(\cdot,y)$ siendo y cualquier punto fijo en $B(b,R/8)$. A continuación, para $x \in B(a,R/8)$ siendo $\eta_{B1}(x) = 1$, tomamos derivadas segundas a ambos lados para obtener una expresión del núcleo de $\mathcal{R}_2$ para tales x e y,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(x,y) = \nabla_1^2\Gamma(x,y) &= -\nabla_1^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_0(x,\xi)\eta_{B_1}(\xi)V(\xi)\Gamma(\xi,y)d\xi\\ &- \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\Gamma_0(x,\xi)\Gamma(\xi,y)\Delta\eta_{B_1}(\xi)d\xi + 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(x,\xi)\cdot\nabla\eta_{B_1}(\xi)\Gamma(\xi,y)d\xi,\end{aligned}$$

donde ∇_1 y ∇_2 denotan las derivadas respecto de la primer y segunda variable respectivamente. Notar que para x, y como arriba, la segunda y tercer integral convergen absolutamente, dado que $\Delta\eta_{B_1}$ y $\nabla\eta_{B_1}$ están soportadas en la corona $R/4 \leq |a-\xi| \leq 3R/8$, con lo cual $|x-\xi| \geq R/8$ y $|y-\xi| \geq R/4$. Luego, en ambos casos estamos integrando en un conjunto compacto y alejado de las singularidades. El primer término es, salvo un signo, la transformada de Riesz de segundo orden asociada al Laplaciano aplicada a una función en L^q con soporte compacto. Entonces, el primer término puede ser escrito como $-\mathbf{R}_2(\eta_{B_1}V\Gamma(\cdot,y))(x)$.

Entonces, para obtener una expresión para el núcleo $\mathcal{K}_2^\star$ de $\mathcal{R}_2^\star$, intercambiamos x e y en la expresión de arriba. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2^\star(x,y) = &-\mathbf{R}_2(\eta_{B_1}V\Gamma(x,\cdot))(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\Gamma_0(y,\xi)\Gamma(x,\xi)\Delta\eta_{B_1}(\xi)d\xi\\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(y,\xi)\cdot\nabla\eta_{B_1}(\xi)\Gamma(x,\xi)d\xi,\end{aligned}$$

para $x \in B(b, R/8)$ e $y \in B(a, R/8)$, donde hemos usado la simetría de la función Γ. Para hacer la notación más amigable vamos a renombrar los centros de las bolas haciendo $a = y_0$ y $b = x_0$ y escribiendo $\eta_0 = \varphi\left(\frac{\cdot - y_0}{R}\right)$ en lugar de η_{B_1}. Con esta notación tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2^\star(x,y) = &- \mathbf{R}_2\left(\Gamma(x,\cdot)V\eta_0\right)(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\Gamma_0(y,\xi)\Gamma(x,\xi)\Delta\eta_0(\xi)d\xi \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(y,\xi)\cdot\nabla\eta_0(\xi)\Gamma(x,\xi)d\xi,\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

para $x \in B(x_0, R/8)$, $y \in B(y_0, R/8)$, $R \le |x_0 - y_0|$.

Ahora, vamos a usar esta representación del núcleo para verificar las condiciones (2.1.2) y (2.1.3) y probar así que $\mathcal{K}_2^\star$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund. Para lograr esto necesitamos hacer la siguiente observación.

Observación 2.3.8. Para verificar las condiciones (2.1.2) and (2.1.3) tenemos x_0, $x \in \mathbb{R}^d$, r, $R > 0$ dados, con $|x - x_0| < r < R/2$ y debemos integrar en la corona $C_R = \{y \in \mathbb{R}^d : R < |x_0 - y| < 2R\}$. Por la Observación 2.1.2 podemos suponer que $r < R/8$. Para poder usar la representación (2.3.7) elegimos una cantidad finita de puntos $\{y_i\}_{i=1}^M$ con $y_i \in C_R$ y tales que $\{B(y_i, R/8)\}_{i=1}^M$ sea un cubrimiento de C_R. Remarcamos que M puede ser elegido dependiendo sólo de la dimension d. De esta manera, podemos usar (2.3.7) para $x \in B(x_0, R/8)$, $y \in B(y_i, R/8)$ con $\eta_i = \varphi\left(\frac{\cdot - y_i}{R}\right)$.

Proposición 2.3.9. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Entonces $\mathcal{R}_2^\star = L^{-1}\nabla^2$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (q, δ), con $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$.*

Demostración. Como $\mathcal{R}_2^\star$ es acotado en $L^{q'}$ sólo resta verificar que su núcleo $\mathcal{K}_2^\star$ satisface las condiciones (2.1.2) y (2.1.3). Sean entonces x, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$ con $|x - x_0| < R/8$. Aplicando la Observación 2.3.8 y llamando $C_R = \{y \in \mathbb{R}^d : R < |x_0 - y| < 2R\}$ podemos escribir

$$\left(\int_{C_R} |\mathcal{K}_2^\star(x,y)|^q dy\right)^{1/q} \le \sum_{i=1}^M \left(\int_{B_i} |\mathcal{K}_2^\star(x,y)|^q dy\right)^{1/q}.$$

En cada bola $B_i = B(y_i, R/8)$ podemos aplicar la representación (2.3.7), luego

$$\left(\int_{C_R} |\mathcal{K}_2^\star(x,y)|^q dy\right)^{1/q} \le \sum_{j=1}^3\sum_{i=1}^M \left(\int_{B_i} |\mathcal{K}_{2,j}^\star(x,y)|^q dy\right)^{1/q},$$

donde para $y \in B_i$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{2,1}^\star(x,y) &= \mathbf{R}_2\left(\Gamma(x,\cdot)V\eta_i\right)(y), \\ \mathcal{K}_{2,2}^\star(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\Gamma_0(y,\xi)\Gamma(x,\xi)\Delta\eta_0(\xi)d\xi, \\ \mathcal{K}_{2,3}^\star(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(y,\xi)\cdot\nabla\eta_0(\xi)\Gamma(x,\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Para $\mathcal{K}^\star_{2,1}$, como $\mathbf{R}_2$ es un operador de Calderón-Zygmund tenemos que, para cada B_i

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_i} |K^\star_{2,1}(x,y)|^q dy\right)^{1/q} &= \left(\int_{B_i} |\mathbf{R}_2\left(\Gamma(x,\cdot)V\eta_i\right)(y)|^q dy\right)^{1/q}\\ &\leq C\left(\int_{\tilde{B}_i} |\Gamma(x,\xi)V(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q},\end{aligned}$$

donde $\tilde{B}_i = B(y_i, 3R/8)$. Usando la estimación (1.2.9), la propiedad de reverse-Hölder de V y el Lema 1.2.7 obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_i} |\mathcal{K}^\star_{2,1}(x,y)|^q dy\right)^{1/q} &\leq C_N \frac{1}{R^{d-2}}\left(\int_{\tilde{B}_i} V^q(\xi)d\xi\right)^{1/q}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}\\ &\leq C_N \frac{1}{R^{d-2}}\frac{R^{d/q}}{R^d}\int_{\tilde{B}_i} V(\xi)d\xi\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}\\ &\leq C_{\tilde{N}} R^{-d/q'}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-\tilde{N}}.\end{aligned}$$

Para $\mathcal{K}^\star_{2,2}$ e $y \in B_i$, para $i = 1, 2, \ldots, M$

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}^\star_{2,2}(x,y)| &\leq \int_{\tilde{B}_i\setminus B_i} |\Gamma(x,\xi)||\nabla^2_1\Gamma_0(y,\xi)||\Delta\eta_i(\xi)|d\xi\\ &\leq \frac{1}{R^d} C_N\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N},\end{aligned}$$

donde hemos usado el soporte y el tamaño de $\Delta\eta_i$, junto con las estimaciones de tamaño para Γ y Γ_0 lejos de sus singularidades. En consecuencia, tenemos que para cada B_i

$$\left(\int_{B_i} |\mathcal{K}^\star_{2,2}(x,y)|^q dy\right)^{1/q} \leq \frac{R^{d/q}}{R^d} C_N\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N} = R^{-d/q'} C_N\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}. \quad (2.3.8)$$

Finalmente, usando un argumento similar, podemos obtener la misma estimación para $\mathcal{K}^\star_{2,3}$. Como el número M depende sólo de la dimensión, (2.1.2) queda probada para $\mathcal{K}^\star_2$.

Ahora, debemos verificar la condición (2.1.3). Como antes, usamos la Observación 2.3.8 para escribir

$$\left(\int_{C_R} |\mathcal{K}^\star_2(x,y) - \mathcal{K}^\star_2(x_0,y)|^q dy\right)^{1/q} \leq \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{M}\left(\int_{B_i} |\mathcal{K}^\star_{2,j}(x,y) - \mathcal{K}^\star_{2,j}(x_0,y)|^q dy\right)^{1/q}.$$

Para $\mathcal{K}^\star_{2,1}$ tenemos que en cada bola B_i

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_i} |\mathcal{K}^\star_{2,1}(x,y) - \mathcal{K}^\star_{2,1}(x_0,y)|^q dy\right)^{1/q} &\leq \left(\int_{B_i} |T_0\left([\Gamma(x,\cdot) - \Gamma(x_0,\cdot)]V\eta_i\right)(y)|^q dy\right)^{1/q}\\ &\leq C\left(\int_{\tilde{B}_i} |[\Gamma(x,\xi) - \Gamma(x_0,\xi)]V(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Usando la estimación (1.2.10), la propiedad de reverse-Hölder del potencial y el Lema 1.2.7 obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_i}|\mathcal{K}^\star_{2,1}(x,y)-\mathcal{K}^\star_{2,1}(x_0,y)|^q dy\right)^{1/q}&\\ &\leq C_N\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \frac{1}{R^{d-2}}\left(\int_{\tilde{B}_i} V(\xi)^q d\xi\right)^{1/q}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}\\ &\leq C_N\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \frac{R^{d/q}}{R^d}\frac{1}{R^{d-2}}\int_{\tilde{B}_i} V(\xi)d\xi\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}\\ &\leq C\left(\frac{r}{R}\right)^\delta R^{-d/q'}.\end{aligned}$$

Sumando sobre i se obtiene la desigualdad requerida.

Finalmente, podemos obtener las estimaciones de suavidad para $\mathcal{K}^\star_{2,2}$ and $\mathcal{K}^\star_{2,3}$ de la misma manera en que obtuvimos las estimaciones de tamaño, usando la desigualdad (1.2.10) en lugar de (1.2.9). □

El Corolario 2.1.7 junto con la Proposición 2.3.9 nos dan desigualdades en L^p con pesos para ambos $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}^\star_2$.

Teorema 2.3.10. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$, entonces:*

(*a*) *$\mathcal{R}^\star_2$ está acotado en $L^p(w)$ para $q' < p < \infty$ y para todo peso $w \in A^\rho_{p/q'}$,*

(*b*) *$\mathcal{R}_2$ está acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < q$ y para todo peso w tal que $w^{1-p'} \in A^\rho_{p'/q'}$,*

(*c*) *$\mathcal{R}_2$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w siempre que $w^{q'} \in A^\rho_1$.*

Más aún, si $V \in RH_q$ para todo $q \geq 1$, entonces:

(*d*) *$\mathcal{R}_2$ and $\mathcal{R}^\star_2$ están cotados en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y para todo $w \in A^\rho_p$,*

(*e*) *$\mathcal{R}_2$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w siempre que $w \in A^\rho_1$.*

Recientemente, en [22], fueron obtenidas estas desigualdades en $L^p(w)$. Las clases de pesos, aunque parezcan diferentes, puede probarse que son exactamente las mismas. Sin embargo, el autor sigue un camino diferente, probando desigualdades de tipo good-λ adecuadas. Las desigualdades de tipo débil $(1,1)$ para $\mathcal{R}_2$ son nuevas, aún en el caso no pesado.

Nuevamente, al no poder contar con estimaciones puntuales para el núcleo $\mathcal{K}^\star_2$, los resultados de suavidad del Teorema 2.1.9 no pueden aplicarse.

Para finalizar esta sección probaremos que $\mathcal{R}_2$ es un operador de Schrödinger comparable a un operador de Calderón-Zygmund. Como en el caso de la transformada de primer orden, las estimaciones que probamos para $\mathcal{K}_2^\star$ implican que $\mathcal{K}_2$ satisface (a_s) para $s = q$. Resta probar (b_s). Antes, debemos enunciar el siguiente resultado de comparación, considerando $\mathbf{R}_2 = \nabla^2(-\Delta)^{-1}$ la transformada de Riesz clásica de segundo orden cuyo núcleo llamaremos $\mathbf{K}_2$.

Lema 2.3.11. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Sean y, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$ tales que $R \leq |y - x_0| \leq \rho(x_0)$. Sea $x \in B(x_0, R/8)$, entonces existe una constante C tal que*

$$|\mathcal{K}_2(x, y) - \mathbf{K}_2(x, y)| \leq C|\mathbf{R}_2(V\Gamma(y, \cdot)\chi_{B(x_0,R/4)})(x)| + \frac{C}{R^d}\left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^\delta,$$

con $\varepsilon = 2 - d/q$.

Demostración. Sean Γ y Γ_0 las soluciones fundamentales de L y $-\Delta$ respectivamente. Como puede verse en la página 540 de [31],

$$\Gamma(x, y) - \Gamma_0(x, y) = -\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_0(x, \xi)V(\xi)\Gamma(y, \xi)d\xi. \tag{2.3.9}$$

De esto podemos obtener la siguiente expresión

$$\mathcal{K}_2(x, y) - \mathbf{K}_2(x, y) = \nabla_1^2\Gamma(x, y) - \nabla_1^2\Gamma_0(x, y) = -\nabla_1^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_0(x, \xi)V(\xi)\Gamma(y, \xi)d\xi. \tag{2.3.10}$$

A continuación, definimos los siguientes dominios de integración: $J_1 = B(x_0, R/4)$, $J_2 = B(y, R/4)$ y $J_3 = (J_1 \cup J_2)^c$. El término correspondiente a la integral sobre J_1 es, salvo un signo, la transformada de Riesz de orden dos aplicada a una función en L^q con soporte compacto.

$$|\nabla_1^2 \int_{J_1} \Gamma_0(x, \xi)V(\xi)\Gamma(y, \xi)d\xi| = |\mathbf{R}_2(V\Gamma(y, \cdot)\chi_{B(x_0,R/4)})(x)|. \tag{2.3.11}$$

En J_2, como estamos lejos de la singularidad de Γ_0, podemos usar las estimaciones de tamaño de Γ y Γ_0 junto con la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{J_2} \nabla_1^2\Gamma_0(x, \xi)V(\xi)\Gamma(y, \xi)d\xi\right| \\
&\qquad \leq \frac{C}{R^d}\int_{B(y,R/4)} \frac{V(\xi)}{|y - \xi|^{d-2}}d\xi \\
&\qquad \leq \frac{C}{R^d}\left(\int_{B(y,R/4)} V^q(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B(y,R/4)} \frac{d\xi}{|y - \xi|^{(d-2)q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

En la primera integral podemos usar la condición de reverse-Hölder para V junto con el Lema 1.2.7, mientras que en la segunda integral $q > d/2$ implica $(d - 2)q' < d$, entonces

$$\left|\int_{J_2} \nabla_1^2\Gamma_0(x, \xi)V(\xi)\Gamma(y, \xi)d\xi\right| \leq \frac{C}{R^d}\frac{1}{\rho(y)^{2-d/q}}R^{\frac{d}{q'}-(d-2)} \leq \frac{C}{R^d}\left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{2-d/q}, \tag{2.3.13}$$

dado que $y \in B(x_0, \rho(x_0))$.

Para estimar la integral en J_3 escribimos el dominio como $J_{31} \cup J_{32}$ donde $J_{31} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : R/4 \leq |y-\xi| < 2R \wedge |x_0 - \xi| \geq R/4\}$ y $J_{32} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |y-\xi| \geq 2R\}$. En J_{31} estamos lejos de las singularidades de Γ y Γ_0, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{J_{31}} \nabla_1^2 \Gamma_0(x,\xi) V(\xi) \Gamma(y,\xi) d\xi\right| &\leq C \int_{J_{31}} \frac{V(\xi)}{|x-\xi|^d |y-\xi|^{d-2}} d\xi \\ &\leq \frac{C}{R^{2d-2}} \int_{B(y,2R)} V(\xi) d\xi \leq \frac{C}{R^d} \left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{2-d/q},\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

donde hemos usado nuevamente el Lema 1.2.7 en la última desigualdad.

En cuanto a J_{32} es fácil ver que $|x-\xi| \geq 3|y-\xi|/8$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{J_{32}} \nabla_1^2 \Gamma_0(x,\xi) V(\xi) \Gamma(y,\xi) d\xi\right| &\leq C_N \int_{J_{32}} \frac{V(\xi)}{|x-\xi|^d |y-\xi|^{d-2}} \left(1 + \frac{|y-\xi|}{\rho(y)}\right)^{-N} d\xi \\ &\leq C_N \int_{J_{32}} \frac{V(\xi)}{|y-\xi|^{2d-2}} \left(1 + \frac{|y-\xi|}{\rho(y)}\right)^{-N} d\xi.\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Supongamos que $2R < \rho(y)$. En este caso dividimos el dominio de integración en $J_{321} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : 2R \leq |y-\xi| < \rho(y)\}$ y $J_{322} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |y-\xi| \geq \rho(y)\}$. En J_{321} para $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k_0-1}R \leq \rho(x) \leq 2^{k_0}R$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{2R \leq |y-\xi| < \rho(y)} \frac{V(\xi)}{|y-\xi|^{2d-2}} d\xi &\leq \sum_{k=2}^{k_0} \int_{2^{k-1}R \leq |y-\xi| < 2^k R} \frac{V(\xi)}{|y-\xi|^{2d-2}} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{(2^k R)^d} \frac{1}{(2^k R)^{d-2}} \int_{B(y,2^k R)} V(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{C}{R^d} \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-kd} \left(\frac{2^k R}{\rho(y)}\right)^{2-d/q} \\ &\leq \frac{C}{R^d} \left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{2-d/q},\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

donde hemos usado el Lema 1.2.7 y que $d > 2 - d/q$. En J_{322}, sea $\mu = \log_2 C_1$, donde C_1

es la constante de duplicación del potencial V. Con esta notación

$$\begin{aligned}
C_N \int_{|x-\xi|\geq\rho(y)} \frac{V(\xi)}{|y-\xi|^{2d-2}} \left(\frac{\rho(y)}{|y-\xi|}\right)^N d\xi &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_N}{2^{kN}} \int_{2^{k-1}\rho(x)|y-\xi|<2^{k+}\rho(y)} \frac{V(\xi)}{|y-\xi|^{2d-2}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_N}{2^{kN}} \frac{1}{(2^k\rho(yx))^{2d-2}} \int_{B(y,2^k\rho(y))} V(\xi)d\xi \\
&\leq \frac{C_N}{\rho(y)^d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(2d-2+N-\mu)}} \frac{1}{\rho(y)^{d-2}} \int_{B(y,\rho(y))} V(\xi)d\xi \\
&\leq \frac{C}{\rho(y)^d} \leq \frac{C}{R^d} \left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{2-d/q},
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

eligiendo N suficientemente grande y usando que $\rho(y) \simeq \rho(x_0)$, $R < C\rho(x_0)$ y $2-d/q < d$.

Finalmente, si $2R > \rho(y)$, el conjunto J_{321} es vacío y la estimación sobre J_{32} se sigue de las desigualdades (2.3.17). □

Con estas estimaciones estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Proposición 2.3.12. *Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, $\mathcal{R}_2$ es un operador de Schrödinger comparable a un operador de Calderón-Zygmund de tipo $(q, 2-d/q)$.*

Demostración. Como hemos dicho, sólo resta verificar la condición (b_s) para el núcleo $\mathcal{K}_2$. Sean x_0, $y \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$ tales que $|y-x_0| < R/2$ y $R \leq \rho(x_0)$. Vamos a comprobar la condición (b_s) con $s = q$. Usando la Observación 2.3.8 y el Lema 2.3.11,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R<|x_0-x|<2R} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_0(x,y)|^q dx\right)^{1/q} \\
&\qquad \leq \sum_{i=1}^{M} \left(\int_{B_i} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_0(x,y)|^q dx\right)^{1/q} \\
&\qquad \leq \sum_{i=1}^{M} \left(\int_{B_i} \left(|\mathbf{R}_2(V\Gamma(y,\cdot)\chi_{B(x_i,R/4)})(x)| + \frac{C}{R^d}\left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{2-d/q}\right)^q dx\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

donde las bolas B_i son de la forma $B(x_i, R/8)$, para ciertos centros x_i tales que $R < |x_0 - x_i| < 2R$. Dividiendo la integral en dos términos es inmediato que el segundo nos da el resultado deseado. Para el primer término, usando que $\mathbf{R}_2$ es un operador acotado en L^q y aplicando el Lema 1.2.7 y la estimación para el tamaño de la solución fundamental (1.2.9),

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_i} |R_2(V\Gamma(y,\cdot)\chi_{B(x_0,R/4)})(x)|^q dx\right)^{1/q} \\
&\leq C\left(\int_{B(x_i,R/4)} V^q(x)|\Gamma(y,x)|^q dx\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{C}{R^{d-2}}\left(\int_{B(x_i,R/4)} V^q\right)^{1/q} \\
&\leq CR^{-d/q'}\left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{2-d/q}.
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

□

2.4. Transformadas de Riesz-Schrödinger que involucran el potencial

En esta sección consideraremos los operadores $L^{-\gamma}V^{\gamma}$ para $0 < \gamma < d/2$, y $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ para $1/2 < \gamma \leq 1$. Estos operadores fueron considerados por primera vez por Shen en [31], los primeros para el caso $\gamma = 1/2$ y $\gamma = 1$ y los segundos sólo para el caso $\gamma = 1$. Allí se prueba la acotación en L^p para p en un rango de tipo $[s, \infty)$, $1 < s < \infty$.

Aquí, vamos a establecer algunos resultados generales que nos llevarán a mostrar que estos operadores resultan ser operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para algún s adecuado en cada caso y, posteriormente, obtener desigualdades en $L^p(w)$ mediante el corolario 2.1.7. Si bien es cierto que estos operadores también resultan ser ejemplos de operadores de Schrödinger comprables a uno de Calderón-Zygmund, dejaremos la prueba de esto para el Capítulo 5. Esto se debe a que las estimaciones que obtendremos para el tamaño serán un poco mejores que las requeridas aquí, permitiéndonos probar inmediatamente la condición (b_s) para $T_0 = 0$.

Nuestro punto de partida será ver que todos estos operadores pueden escribirse como un operador fraccionario compuesto con la multiplicación por una potencia del potencial V. Esto, que es inmediato para operadores de la forma $L^{-\gamma}V^{\gamma}$, resulta cierto también para los de la forma $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$. Por esta razón, comenzamos estudiando algunas integrales fraccionarias generales relacionadas a L. Posteriormente, en el capítulo 3, este enfoque abstracto nos será de utilidad para probar condiciones tipo $T1$ para estos operadores.

En esta sección supondremos que el potencial satisface una desigualdad de reverse-Hölder de orden $q > d/2$. A menudo usaremos técnicas diferentes para los casos $d/2 < q < d$ y $q \geq d$. En este último caso podemos suponer $q > d$ puesto que las clases reverse-Hölder son abiertas.

2.4.1. Un contexto general

Sea T un operador integral con núcleo asociado K, esto es,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y), \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4.1}$$

Sea $0 < \nu < d$, $1 < \sigma < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. Diremos que un núcleo K es un **núcleo ρ-fraccionario de tipo** (ν, σ, δ) si para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R} |K(x,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma} \leq C_N R^{-d+\nu}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{2.4.2}$$

para $|x - x_0| < R/2$ y

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R} |K(x,y)-K(x_0,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma} \leq C_N R^{-d+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{2.4.3}$$

para $|x - x_0| < r < \rho(x_0)$ y $r < R/2$. En el caso límite $\sigma = \infty$, diremos que K es un **núcleo ρ-fraccionario de tipo** (ν, ∞, δ) si satisface las siguientes estimaciones: Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$|K(x,y)| \leq C_N \frac{1}{|x-y|^{d-\nu}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \text{ para } x \neq y, \tag{2.4.4}$$

y

$$|K(x,y)-K(x_0,y)| \leq C_N \frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d-\nu+\delta}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \text{ cuando } |x-y| > 2|x-x_0|. \tag{2.4.5}$$

Observación 2.4.1. Notar que si K es un núcleo ρ-fraccionario de tipo (ν, ∞, δ), entonces es de tipo (ν, σ, δ) para todo $\sigma > 1$.

Ahora, suponiendo que K_ν es un núcleo ρ-fraccionario, vamos a obtener propiedades de un operador T con núcleo $H(x,y)$ definido como

$$H(x,y) = K_\nu(x,y)V^{\nu/2}(y). \tag{2.4.6}$$

Proposición 2.4.2. *Sea T un operador con núcleo H definido como arriba, con $V \in RH_q$ para $q > d/2$. Supongamos que K_ν es un núcleo ρ-fraccionario de tipo (ν, σ, δ) con $d/\nu \geq \sigma'$. Entonces, T es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) con s tal que $1/s = 1/\sigma + \nu/2q$.*

Demostración. Daremos una prueba para $\sigma < \infty$, si $\sigma = \infty$ el resultado sigue mediante los mismos argumentos, usando las desigualdades (2.4.4) y (2.4.5) en lugar de (2.4.2) y (2.4.3). Observemos que la hipótesis $d/\nu \geq \sigma'$ implica $q > \sigma'\nu/2$, luego $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{\sigma} + \dfrac{\nu}{2q} < 1$.

En primer lugar, vamos a verificar las condiciones (2.1.2) y (2.1.3) para H. Sean x_0, $x \in \mathbb{R}^d$ $R > 0$ tales que $|x - x_0| < R/2$. Usando la desigualdad de Hölder, la estimación (2.4.2) y la propiedad de reverse-Hölder del potencial tenemos que para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{R^d}\int_{B(x_0,2R)\setminus B(x_0,R)} |K_\nu(x,y)V^{\nu/2}(y)|^s dy\right)^{1/s} \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{R^d}\int_{B(x_0,2R)\setminus B(x_0,R)} |K_\nu(x,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma} \left(\frac{1}{R^d}\int_{B(x_0,2R)} |V(y)|^q dy\right)^{\nu/2q} \\
&\quad \leq C_N R^{-d+\nu}\left(\frac{1}{R^d}\int_{B(x_0,2R)} V(y)dy\right)^{\nu/2}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N} \\
&\quad \leq R^{-d}C_N\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N+N_2\nu/2},
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

donde hemos usado el Lema 1.2.7 en la última desigualdad. Usando la estimación (2.4.3) y un argumento similar obtenemos la condición de suavidad

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{R^d}\int_{B(x_0,2R)\setminus B(x_0,R)} |K_\nu(x,y)V^{\nu/2}(y) - K_\nu(x_0,y)V^{\nu/2}(y)|^s dy\right)^s \\
&\qquad\qquad \leq C_N R^{-d}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N},
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

para $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$ y $r < R/2$.

Para ver que T es acotado de $L^{s'}$ en $L^{s',\infty}$ vamos a mostrar que Tf está puntualmente acotado por un operador maximal de Hardy-Littlewod adecuado aplicado a f, a saber,

$$M_{s'}f(x) = \sup_{B\ni x}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^{s'}dy\right)^{1/s'},$$

que es acotado de $L^{s'}$ en $L^{s',\infty}$. De hecho

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} K_\nu(x,y)V^{\nu/2}(y)f(y)dy\right| \\
&\leq \int_{B(x,\rho(x))} |K_\nu(x,y)|V^{\nu/2}(y)|f(y)|dy + \int_{B(x,\rho(x))^c} |K_\nu(x,y)|V^{\nu/2}(y)|f(y)|dy \\
&= A_1 + A_2.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Para A_1 dividimos la bola $|x - y| < \rho(x)$, llamando $B_{-j} = \{|x - y| < 2^{-j}\rho(x)\}$. Usando la desigualdad de Hölder, la estimación (2.4.2), y la propiedad de reverse-Hölder para V

junto con la definición de ρ, tenemos que

$$
\begin{aligned}
A_1 &= C\sum_{j=0}^{\infty}\int_{B_{-j}\setminus B_{-j-1}} |K_\nu(x,y)|V^{\nu/2}(y)|f(y)|dy \\
&\le C\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_{B_{-j}\setminus B_{-j-1}} |K_\nu(x,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma} \\
&\qquad\qquad \times\left(\int_{B_{-j}} V(y)^q dy\right)^{\nu/2q}\left(\int_{B_{-j}} |f(y)|^{s'}dy\right)^{1/s'} \\
&\le C\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j}\rho(x))^\nu\left(\frac{1}{|B_{-j}|}\int_{B_{-j}} V(y)^q dy\right)^{\nu/2q} \\
&\qquad\qquad \times\left(\frac{1}{|B_{-j}|}\int_{B_{-j}} |f(y)|^{s'}dy\right)^{1/s'} \\
&\le CM_{s'}f(x)\rho(x)^\nu\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j\left(\nu-\frac{d\nu}{2q}\right)}\left(\frac{1}{\rho(x)^d}\int_{B(x,\rho(x))} V^q(y)dy\right)^{\nu/2q} \\
&\le CM_{s'}f(x)\rho(x)^\nu\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\frac{j\nu}{2}\left(2-\frac{d}{q}\right)}\left(\frac{1}{\rho(x)^d}\int_{B(x,\rho(x))} V(y)dy\right)^{\nu/2} \\
&\le CM_{s'}f(x),
\end{aligned}
\tag{2.4.10}
$$

puesto que $2-d/q>0$. Para A_2 usamos la desigualdad de Hölder y la estimación (2.4.7) . Llamando $B_j=\{|x-y|<2^j\rho(x)\}$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
A_2 &\le C\sum_{j=0}^{\infty}(2^j\rho(x))^d\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j\setminus B_{j-1}} |H(x,y)|^s\right)^{1/s}\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} |f(y)|^{s'}(y)\right)^{1/s'} \\
&\le C_N M_{s'}f(x)\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j(N-N_2\nu/2)} \\
&\le CM_{s'}f(x),
\end{aligned}
\tag{2.4.11}
$$

eligiendo N suficientemente grande. □

2.4.2. Operadores de tipo $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$

Para ver que este tipo de operadores resultan ser de Schrödinger-Calderón-Zygmund vamos a estudiar el operador fraccionario $L^{-\gamma}\nabla$ y aplicar los resultados de la subsección anterior en este caso. Notar que $L^{-\gamma}\nabla$ debería ser un operador fraccionario de orden $2\gamma-1$. Para mantener la notación de 2.4.1 vamos a llamar K_ν a su núcleo asociado, con $\nu=2\gamma-1$. Cuando $\gamma=\nu=1$, el operador $L^{-1}\nabla$ tiene núcleo asociado

$$K_1(x,y)=\nabla_2\Gamma(x,y), \tag{2.4.12}$$

donde ∇_2 es el gradiente respecto a la segunda variabe y $\Gamma(x,y)$ es la solución fundamental de L. Cuando $1/2<\gamma<1$, y entonces $0<\nu<1$,

$$K_\nu(x,y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\tau)^{-\frac{\nu+1}{2}}\nabla_2\Gamma(x,y,\tau)d\tau, \tag{2.4.13}$$

donde $\Gamma(x,y,\tau)$ es la solución fundamental del operador $L+i\tau$. Para obtener esto utilizamos (2.4.12) y la siguiente fórmula del cálculo funcional

$$L^{-\gamma} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i\tau)^{-\gamma}(L+i\tau)^{-1}d\tau, \quad 1/2<\gamma<1.$$

La siguiente estimación para el núcleo $\nabla_2\Gamma(x,y,\tau)$ puede encontrarse en la página 538 de [31]. Para cada $N>0$, existe una constante C_N tal que

$$|\nabla_2\Gamma(x,y,\tau)| \leq \frac{C_N}{(1+|\tau|^{1/2}|x-y|)^N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N}\left(\frac{1}{|x-y|^{d-2}}A(x,y)+\frac{1}{|x-y|^{d-1}}\right), \tag{2.4.14}$$

con A definido como en (2.3.3).

Si $q>d$ tenemos la siguiente estimación (ver ecuación (6,1) en [31]). Para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$|\nabla_2\Gamma(x,y,\tau)| \leq \frac{C_N}{(1+|\tau|^{1/2}|x-y|)^N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N}\frac{1}{|x-y|^{d-1}}. \tag{2.4.15}$$

Si $d/2<q<d$, sean $R>0$ y p_0 tal que $\dfrac{1}{p_0}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{d}$. Usando (2.4.14) junto con (2.3.3) tenemos que para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$\left(\int_{R<|x-y|<2R}|\nabla_2\Gamma(x,y,\tau)|^{p_0}dy\right)^{1/p_0} \leq \frac{C_N}{(1+|\tau|^{1/2}R)^N\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^N}R^{-d/p_0'+1}. \tag{2.4.16}$$

Tomando $\tau=0$ obtenemos que K_1 satisface (2.4.4) si $q>d$ y satisface (2.4.2) en el caso $d/2<q<d$, con $\nu=1$ y p_0 tal que $\frac{1}{p_0}=\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{d}\right)^+$.

Para K_ν, con $0<\nu<1$ observamos que

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{-\frac{\nu+1}{2}}}{(1+\tau^{1/2}R)^N}d\tau = \frac{C_N}{R^{1-\nu}}, \tag{2.4.17}$$

si $N>1$. Volviendo a (2.4.13) nos queda

$$|K_\nu(x,y)| \leq C_N\frac{1}{|x-y|^{d-\nu}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{2.4.18}$$

cuando $q > d$ y

$$\left(\int_{R<|x-y|<2R} |K_\nu(x,y)|^{p_0} dy\right)^{1/p_0} \leq C_N R^{-d/p_0'+\nu}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \qquad (2.4.19)$$

para $d/2 < q < d$. Esto es, para $1/2 < \gamma < 1$, el núcleo de $L^{-\gamma}\nabla$ satisface (2.4.4) si $q > d$ y satisface (2.4.2) si $d/2 < q < d$, con $\nu = 2\gamma - 1$, y $\sigma = p_0$ yal que $\frac{1}{p_0} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{d}\right)^+$.

Para obtener una estimación de suavidad sobre K_ν usaremos la siguiente desigualdad (ver ecuación (21) in [18]). Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\begin{aligned}&|\nabla_2\Gamma(x,y,\tau) - \nabla_2\Gamma(x_0,y,\tau)|\\ &\quad\leq \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^\delta \frac{C_N}{(1+|\tau|^{1/2}|x-y|)^N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N}\left(\frac{1}{|x-y|^{d-2}}A(x,y) + \frac{1}{|x-y|^{d-1}}\right),\end{aligned}$$

para $\delta = \text{mín}\{1, 2-d/q\}$, siempre que $|x-x_0| < 2|x-y|$. Con un argumento similar al que utilizamos para obtener las estimaciones de tamaño podemos ver que, si $0 < \nu \leq 1$ y $\delta = \text{mín}\{1, 2-d/q\}$, para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$|K_\nu(x,y) - K_\nu(x_0,y)| \leq C_N\frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d-\nu+\delta}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \text{ cuando } |x-y| > 2|x-x_0|,$$

si $q > d$ y

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R} |K_\nu(x,y) - K_\nu(x_0,y)|^{p_0} dy\right)^{1/p_0}\\ &\qquad\qquad \leq C_N R^{-d+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N},\end{aligned} \qquad (2.4.20)$$

para $|x-x_0| < r < \rho(x_0)$ y $r < R/2$, si $d/2 < q < d$.

Notar que los valores de p_0 y ν para los cuales valen las estimaciones cumplen $d/\nu \geq p_0'$. Entonces, podemos aplicar la Proposición 2.4.2 que nos da el siguiente resultado.

Proposición 2.4.3. *Sean $1/2 < \gamma \leq 1$ y $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$. Entonces, $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (p_γ, δ) con $\delta = \text{mín}\{1, 2-d/q\}$ y p_γ tal que $\dfrac{1}{p_\gamma} = \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{d}\right)^+ + \dfrac{2\gamma-1}{2q}$.*

Como una aplicación del Corolario 2.1.7 obtenemos las siguientes desigualdades en espacios $L^p(w)$ para estos operadores.

Teorema 2.4.4. *Sea $1/2 < \gamma \leq 1$, $V \in RH_q$ con $q > d/2$, $1/2 \leq \gamma < 1$ y p_γ tal que $\dfrac{1}{p_\gamma} = \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{d}\right)^+ + \dfrac{2\gamma-1}{2q}$. Entonces:*

(a) $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ está acotado en $L^p(w)$ para $p_\gamma' < p < \infty$ y $w \in A^\rho_{p/p_\gamma'}$,

(*b*) *$V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ está acotado en $L^p(w)$ para $1<p<p_\gamma$ y w tal que $w^{1-p'}\in A_{p'/p'_\gamma}$,*

(*c*) *$V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w siempre que $w^{p'_\gamma}\in A_1^\rho$.*

Más aún, si $V\in RH_q$ para todo $q\geq 1$, entonces:

(*d*) *$L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ y $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ están acotados en $L^p(w)$ para $1<p<\infty$ y $w\in A_p^\rho$,*

(*e*) *$V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w si $w\in A_1^\rho$.*

Observación 2.4.5. El Teorema 4.3 en [31] garantiza la acotación en $L^1(\mathbb{R}^d)$ para el operador $V^{1/2}\nabla L^{-1}$. Es esperable que este resultado pueda extenderse para los demás valores de γ aquí propuestos y en el correspondiente espacio $L^1(w)$. Sin embargo, no podemos garantizarlo a través del Teorema 2.1.5. En el Capítulo 5 obtendremos este resultado esperado, utilizando otros métodos.

2.4.3. Operadores de tipo $L^{-\gamma}V^\gamma$

Para estudiar estos operadores procederemos como en la subsección anterior. Consideramos, para $0<\gamma<d/2$, el operador fraccionario $L^{-\gamma}$ y su núcleo asociado J_γ tal que

$$L^{-\gamma}V^\gamma f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}J_\gamma(x,y)V^\gamma(y)f(y)dy. \tag{2.4.21}$$

Para J_γ tenemos las siguientes estimaciones que pueden encontrarse en [?], página 587. Para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$|J_\gamma(x,y)|\leq\frac{1}{|x-y|^{d-2\gamma}}C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{2.4.22}$$

y existe una constante C tal que

$$|J_\gamma(x,y)-J_\gamma(z,y)|\leq C\frac{|x-z|^\delta}{|x-y|^{d-2\gamma+\delta}},\quad \text{if } 2|x-z|<|x-y|, \tag{2.4.23}$$

para $\delta<\min\{1,2-d/q\}$. Un argumento similar al dado en el Lema 2.1.4 nos dice que para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$|J_\gamma(x,y)-J_\gamma(z,y)|\leq\frac{|x-z|^\delta}{|x-y|^{d-2\gamma+\delta}}C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N},\quad \text{if } 2|x-z|<|x-y|, \tag{2.4.24}$$

para $\delta<\min\{1,2-d/q\}$.

Las desigualades (2.4.22) y (2.4.24), junto con la Proposición 2.4.2 nos dan el siguiente resultado.

Proposición 2.4.6. *Sea $0<\gamma<d2$ y $V\in RH_q$ para algún $q>d/2$. Entonces, $L^{-\gamma}V^\gamma$ Es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ) con $\delta=\min\{1,2-d/q\}$ y $s=q/\gamma$.*

Aplicando el Corolario 2.1.7 obtenemos las siguientes propiedades de acotación en $L^p(w)$ para estos operadores

Teorema 2.4.7. *Sea $0 < \gamma < d/2$ y $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Entonces:*

(*a*) *$L^{-\gamma}V^{\gamma}$ está acotado en $L^p(w)$ para $(q/\gamma)' < p < \infty$ y $w \in A^{\rho}_{p/(q/\gamma)'}$,*

(*b*) *$V^{\gamma}L^{-\gamma}$ está acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < q/\gamma$ y w tal que $w^{1-p'} \in A_{p'/(q/\gamma)'}$,*

(*c*) *$V^{\gamma}L^{-\gamma}$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a w siempre que $w^{(q/\gamma)'} \in A^{\rho}_1$.*

Más aún, si $V \in RH_q$ para todo $q \geq 1$, entonces:

(*d*) *$L^{-\gamma}V^{\gamma}$ y $V^{\gamma}L^{-\gamma}$ están acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\rho}_p$,*

(*e*) *$V^{\gamma}L^{-\gamma}$ es de tipo débil $(1,1)$ si $w \in A^{\rho}_1$.*

Este resultado era conocido sólo en los casos $\gamma = 1/2$ y $\gamma = 1$ (ver [2] y [32]).

Observación 2.4.8. Al igual que para el operador $V^{1/2}\nabla L^{-1}$, se conoce acotación en $L^1(\mathbb{R}^d)$ para VL^{-1} y $V^{1/2}L^{-1/2}$ (ver Teorema 3,1 y Teorema 5,10 en [31]). Es esperable que este resultado también pueda extenderse para los demás valores de γ aquí propuestos y en el correspondiente espacio $L^1(w)$. Sin embargo, no podemos garantizarlo a través del Teorema 2.1.5. En el Capítulo 5 obtendremos este resultado esperado, utilizando otros métodos.

Capítulo 3

Continuidad en espacios de suavidad y BMO

Trabajaremos en este capítulo en la continuidad de operadores asociados a L sobre los espacios $BMO_\rho^\beta(w)$ definidos en la Sección 1.2.6. Los operadores sobre los cuales daremos resultados serán los pertenecientes a la primer familia definida en el capítulo anterior, esto es, los operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund (ver Sección 2.1). Esta familia resulta ser adecuada para trabajar en espacios de regularidad y BMO puesto que la condición (2.1.3) requerida es una condición de suavidad para el núcleo asociado.

En el Teorema 2.1.9, probado por Ma, Stinga, Torrea y Zhang en [23], se da una condición necesaria y suficiente sobre la función $T1$ para obtener la acotación de un operador T de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) en $BMO_\rho^\beta(w)$ para el peso $w = 1$. Como hemos visto en el capítulo anterior, algunos ejemplos relevantes de operadores asociados a L no pertenecen a esta familia de operadores, con la hipótesis mínima de $V \in RH_q$.

Nuestro principal objetivo en este capítulo será extender el Teorema 2.1.9 en dos direcciones. Por un lado, queremos ampliar su alcance para que incluya a los de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) también en los casos $s < \infty$. Por otro lado queremos establecer los resultados de acotación en espacios $BMO_\rho^\beta(w)$ para pesos w asociados a la función de radio crítico ρ, definidos en la Sección 1.2.4. Al igual que en el caso $s = \infty$ debemos agregar una condición sobre la oscilación de $T1$ a las estimaciones que definen las clases $\mathcal{F}_1(s, \delta)$, que resulta también necesaria.

Finalmente, aplicaremos el resultado de continuidad en espacios $BMO_\rho^\beta(w)$ a los ejemplos de operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund presentados en el Capítulo 2. Para ello nos quedará solamente verificar que satisfacen el requerimiento sobre $T1$, lo cual será posible demostrar en todos los casos.

Para los operadores que habían sido considerados por Ma et al. (esto es, operadores de tipo (∞, δ)), obtenemos desigualdades similares pero pesadas. Para los operadores que son de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) con $s < \infty$ queremos destacar los casos particulares de $\mathcal{R}_1^\star$ cuando $d/2 < q < d$ y $\mathcal{R}_2^\star$ para $d/2 < q < \infty$.

Para $\mathcal{R}_1^\star$ podemos recuperar resultados que habían sido probados en [6] por distintos métodos, obteniendo aquí una clase de pesos más grande. Para $\mathcal{R}_2^\star$ los resultados son totalmente nuevos, incluso en el caso $w = 1$. Por último, para el caso de $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ y $L^{-\gamma}V^{\gamma}$ mostraremos que satsifacen la condición $T1$ mediante un tratamiento general al estilo del Capítulo 2.

3.1. Algunas propiedades de los espacios $BMO_\rho^\beta(w)$

Recordemos que, para una función de radio crítico ρ, un peso w y un parámetro $0 \leq \beta < 1$, el espacio $BMO_\rho^\beta(w)$ fue definido en la Sección 1.2.6 como el conjunto de las funciones localmente integrables tales que existe una constante C que verifica

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f - f_B| \leq C|B|^{\beta/d}, \text{ para toda bola } B \tag{3.1.1}$$

y

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f| \leq C|B|^{\beta/d}, \text{ para toda bola } B = B(x,R), \text{ con } R \geq \rho(x). \tag{3.1.2}$$

Observación 3.1.1. Si una función f satisface (3.1.2) para cierta bola B, entonces también satisface (3.1.1) para la misma bola. Luego, es suficiente pedir (3.1.1) para bolas $B(x,r)$ con $r < \rho(x)$.

Las clases de pesos para las cuales obtendremos resultados en $BMO_\rho^\beta(w)$ son subconjuntos de las clases de Muckenhoupt asociadas a una función de radio crítico ρ, definidas en la sección 1.2.4. Para pesos en estas clases podemos dar algunas propiedades de los espacios $BMO_\rho^\beta(w)$ que nos serán útiles más adelante.

La primera propiedad que presentamos a continuación nos da una definición equivalente para el espacio $BMO_\beta^\rho(w)$ bajo hipótesis apropiadas para el peso. De forma más precisa, nos muestra que es suficiente verificar la condición (3.1.2) para bolas críticas. Para una prueba de esto, referimos a la Proposición 4 en [1]

Lema 3.1.2. *Sean $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ para algún $p \geq 1$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Si*

$$A = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{w(B(x,\rho(x)))\rho(x)^\beta}\int_{B(x,\rho(x))} |f| < \infty, \tag{3.1.3}$$

entonces existe una constante C tal que

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d \\ r\geq\rho(x)}} \frac{1}{w(B(x,r))r^\beta}\int_{B(x,r)} |f| < cA. \tag{3.1.4}$$

Observamos que, siguiendo la prueba dada en [1], resulta fácil relajar la condición sobre el peso y alcanza con pedir que sea duplicante local, esto es, $w \in D_\mu^{\rho,\mathrm{loc}}$ para algún $\mu \geq 1$.

La segunda propiedad que enunciamos seguidamente es una consecuencia de una desigualdad de tipo John-Nirenberg y nos da normas equivalentes en los espacios $BMO_\rho^\beta(w)$. Puede encontrarse como Lema 4 en [1].

Lema 3.1.3. *Sea $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$, $1 < s \leq p'$, $0 \leq \beta < 1$ y $f \in BMO_\rho^\beta(w)$. Entonces,*

$$\frac{1}{|B|^{\beta/d}}\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f|^s w^{1-s}\right)^{1/s} \leq C\|f\|_{BMO_\rho^\beta(w)}, \tag{3.1.5}$$

para toda bola $B = B(x,r)$ con $r \geq \rho(x)$, y

$$\frac{1}{|B|^{\beta/d}}\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f - f_B|^s w^{1-s}\right)^{1/s} \leq C\|f\|_{BMO_\rho^\beta(w)}, \tag{3.1.6}$$

para toda bola $B = B(x,r)$.

Observación 3.1.4. Como una consecuencia del lema anterior podemos obtener una norma equivalente en $BMO_\rho^\beta(w)$ para cada $1 < s \leq p'$, ya que las desigualdades opuestas se siguen de la desigualdad de Hölder.

La última propiedad nos da una condición puntual que es suficiente para verificar que una función pertenece a $BMO_\rho^\beta(w)$.

Lema 3.1.5. *Sea $0 < \beta < 1$ y $w \in A_p^\rho$ para algún $p \geq 1$. Si para alguna función medible f existe una constante C tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq Cw(B(x,|x-y|))|x-y|^{\beta-d} \text{ para } x,\ y \in \mathbb{R}^d, \text{ con } |x-y| \leq \rho(x) \tag{3.1.7}$$

y

$$|f(x)| \leq Cw(B(x,\rho(x)))\rho(x)^{\beta-d} \text{ para } x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1.8}$$

entonces $f \in BMO_\rho^\beta(w)$.

Demostración. Sea f una función que satisface (3.1.7) y (3.1.8). En primer lugar, vamos a verificar la condición (3.1.2). Por el Lema 3.1.2 es suficiente considerar bolas críticas, ya que $w \in A_p^\rho \subset A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y B_ρ la bola $B_\rho = B(x_0, \rho(x_0))$. Usando la desigualdad (1.2.7), tenemos que si $x \in B_\rho$, existen constantes c_1 y c_2, que dependen sólo de ρ, tales que $c_1\rho(x_0) \leq \rho(x) \leq c_2\rho(x_0)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |f(x)|dx &\leq C\int_{B_\rho} w(B(x,\rho(x)))\rho(x)^{\beta-d}dx\\ &\leq C\rho(x_0)^\beta w(B(x_0, 2c_2\rho(x_0)))\\ &\leq C\rho(x_0)^\beta w(B(x_0,\rho(x_0))),\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad usamos que $w \in A_p^\rho \subset D_p^\rho$, es decir, tiene la propiedad de duplicación (ver Proposición 1.2.12).

Vamos a verificar ahora la condición (3.1.1). Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y B la bola $B = B(x_0, r)$, con $r \leq \rho(x_0)$. Aplicando (3.1.7), tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_B |f(x) - f_B| dx &\leq \frac{1}{|B|} \int_B \int_B |f(x) - f(y)| dy dx \\
&\leq C \frac{1}{|B|} \int_B \int_B w(B(x, |x-y|)) |x-y|^{\beta - d} dy dx \\
&\leq C \frac{w(B(x_0, 4r))}{|B|} \int_B \int_B |x-y|^{\beta-d} dy dx \\
&\leq C r^\beta w(B(x_0, r)),
\end{aligned}$$

donde usamos nuevamente que $w \in D_p^\rho$. □

3.2. Un Teorema $T1$ para espacios de suavidad con pesos

En esta sección enunciaremos el resultado central del capítulo y algunas de sus consecuencias. Este teorema nos da un criterio de tipo $T1$ para establecer la continuidad de un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) en espacios $BMO_\rho^\beta(w)$.

En primer lugar necesitamos hacer algunas consideraciones sobre el significado de Tf siendo T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) y f una función en $BMO_\rho^\beta(w)$.

Recordemos que un operador T es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) si es acotado de $L^{s'}$ en $L^{s',\infty}$ y tiene un núcleo asociado K que satisface las condiciones de tamaño y suavidad (2.1.2) y (2.1.3) (ver Definición 2.1.1).

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $R \geq \rho(x_0)$, definimos

$$Tf(x) = T(f\chi_{B(x_0,2R)})(x) + \int_{B(x_0,2R)^c} K(x,y) f(y) dy, \quad x \in B(x_0, R). \tag{3.2.1}$$

Como veremos en la prueba del Teorema 3.2.2, el primer término del lado derecho tiene sentido si w satisface las hipótesis allí impuestas ya que, en este caso $f\chi_{B(x_0,2R)} \in L^{s'}$ para f en $BMO_\rho^\beta(w)$ (basta tomar $k = 0$ en (3.3.7)). Además, la integral en el segundo término es absolutamente convergente (ver ecuación (3.3.4)). Sin embargo, lo que importa en este momento es verificar que la definición tiene sentido para el caso especial $f = 1$.

De hecho, $\chi_{B(x_0,2R)} \in L^{s'}$ y además, usando el tamaño el núcleo dado por 2.1.2,

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,2R)^c} |K(x,y)|dy &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^kR\leq|x_0-y|<2^{k+1}R} |K(x,y)|dy \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{2^kR\leq|x_0-y|<2^{k+1}R} |K(x,y)|^s dy\right)^{1/s} (2^{k+1}R)^{d/s'} \\ &\leq C_N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho(x)}{2^kR}\right)^N < \infty,\end{aligned}$$

eligiendo N suficientemente grande. Aquí hemos usado que para cualquier $x \in B(x_0, R)$, $\rho(x) \leq C_0 2^{N_0} R$ por la desigualdad (1.2.7).

Además, vale destacar que la definición de Tf dada en la ecuación (3.2.1) es independiente de R. De hecho, si $B(x_0, R) \subset B(x_0', R')$ tenemos que

$$\begin{aligned}T(f\chi_{B(x_0',R')})(x) &- T(f\chi_{B(x_0,R)})(x) \\ &= T(f\chi_{B(x_0',R')\setminus B(x_0,R)})(x) \\ &= \int_{B(x_0',R')\setminus B(x_0,R)} K(x,y)f(y)dy \\ &= \int_{B(x_0',R')} K(x,y)f(y)dy - \int_{B(x_0,R)} K(x,y)f(y)dy,\end{aligned}$$

para casi todo $x \in B(x_0, R)$.

Para poder establecer desigualdades en $BMO_\rho^\beta(w)$ para nuestra familia de operadores que depende de un parámetro s, $1 < s < \infty$, debemos introducir la clase de pesos F_s^ρ definida como

$$F_s^\rho = \bigcup_{\eta > s'} RH_\eta^\rho \cap A_{s/\eta'}^\rho. \tag{3.2.2}$$

Para obtener ejemplos de pesos en esta clase basta considerar un peso w tal que $w^{s'} \in A_1^\rho$. De esta manera, como $w^{s'} \in A_1^\rho$ existe algún $\sigma > 1$ tal que $w^{s'} \in RH_\sigma^\rho$ (ver Proposición 1.2.12). Luego, existen constantes θ_1 y θ_2 tales que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{s'\sigma}\right)^{s'\sigma} &\leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{s'}\right)^{s'}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta_1} \\ &\leq C \inf_B w \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta_2/s'+\theta_1} \\ &\leq C\frac{1}{|B|}\int_B w\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta_2/s'+\theta_1}.\end{aligned}$$

Esto implica que $w \in RH_\eta^\rho$ para $\eta = \sigma s' > s'$. Además, usando la desigualdad de Hölder es fácil comprobar que $w^{s'} \in A_1^\rho$ implica $w \in A_1^\rho$. Entonces, tenemos que $w \in F_s^\rho$. Para ejemplos de pesos A_1^ρ puede verse el Lema 4 en [8] y recordar además que $A_1 \subset A_1^\rho$.

En la siguiente proposición daremos algunas propiedades de estas clases que serán útiles más adelante.

Proposición 3.2.1. *Las clases F_s^ρ son crecientes con s, más aún*

$$\bigcup_{s>1} F_s^\rho = A_\infty^\rho.$$

Demostración. Si $s_1 < s_2$ entonces $\eta > s_1'$ implica que $\eta > s_2'$ y $RH_\eta^\rho \cap A_{s_1/\eta'}^\rho \subset RH_\eta^\rho \cap A_{s_2/\eta'}^\rho$.

Por otro lado, para todo $\eta > 1$, $RH_\eta^\rho \cap A_{s/\eta'}^\rho \subset A_\infty^\rho$, entonces $\bigcup_{s>1} F_s^\rho \subset A_\infty^\rho$. Recíprocamente, si $w \in A_\infty^\rho$, por definición, $w \in A_p^\rho$ para algún $p > 1$. Entonces, como mencionamos arriba, $w \in RH_\eta^\rho$ para algún $\eta > 1$. Ahora, podemos escoger s tal que $s/\eta' = p$. En este caso, tenemos que $w \in A_{s/\eta'}^\rho \cap RH_\eta^\rho$ para $\eta > s'$ y $s > 1$, entonces $w \in \bigcup_{s>1} F_s^\rho$. □

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema $T1$ para espacios de suavidad con pesos que anunciamos anteriormente.

Teorema 3.2.2. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ) para algún $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. Sean β y μ fijos tales que $0 \leq \beta < \delta$ y $1 \leq \mu < 1 + \frac{\delta-\beta}{d}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) existe una constante C tal que la función $T1$ satisface

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T1(y) - (T1)_B|dy \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta+d(\mu-1)}, \tag{3.2.3}$$

para toda $B = B(x_0,r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r < \rho(x_0)/2$, si $\beta > 0$ or $\mu > 1$, o bien

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T1(y) - (T1)_B|dy \leq C\log^{-1}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right), \tag{3.2.4}$$

para toda $B = B(x_0,r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r < \rho(x_0)/2$, si $\beta = 0$ y $\mu = 1$.

(b) T está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ para todo $w \in F_s^\rho \cap D_\mu^\rho$ con la norma del operador dependiendo de w sólo a través de las constantes de las clases F_s^ρ y D_μ^ρ.

(c) T está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ para pesos w de la forma $w(x) = |x - x_0|^{d(\mu-1)}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, con norma independiente de x_0.

Aplicando el resultado anterior y la Proposición 3.2.1, obtenemos el siguiente resultado para $s = \infty$.

Corolario 3.2.3. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ) para algún $0 < \delta \leq 1$ y para todo $s > 1$. Sean β y μ tales que $0 \leq \beta < \delta$ y $1 \leq \mu < 1+\frac{\delta-\beta}{d}$. Entonces, tanto (a) como (c) del Teorema 3.2.2 son equivalentes a la acotación de T en $BMO_\rho^\beta(w)$ para todo peso $w \in A_\infty^\rho \cap D_\mu^\rho$. En particular, este resultado vale para operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞,δ).*

Si especificamos el Corolario 3.2.3 para $\mu = 1$ obtenemos la siguientes equivalencias.

Corolario 3.2.4. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para todo $s > 1$ y para algún $0 < \delta \leq 1$. Sea $0 \leq \beta < \delta$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Esixte una constante C tal que la función $T1$ satisface la desigualdad

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T1(y) - (T1)_B|dy \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta}, \tag{3.2.5}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $0 < r < \rho(x_0)/2$, si $\beta > 0$ o la desigualdad

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T1(y) - (T1)_B|dy \leq C\log^{-1}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right), \tag{3.2.6}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $0 < r < \rho(x_0)/2$, si $\beta = 0$.

(b) T está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ para todo peso $w \in A_\infty^\rho \cap D_1^\rho$ con norma del operador dependiendo de w sólo a través de las constantes de las clases F_s^ρ y D_μ^ρ.

(c) T está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ para $w = 1$.

Observamos este resultado vale, en particular, para operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) y que en este caso (a) $\Longleftrightarrow$ (c) es exactamente el enunciado del Teorema 2.1.9 probado por Ma et al. Por lo tanto, nuestros resultados dan una equivalencia adicional para este caso. En particular, cualquier operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ para $w = 1$, está automáticamente acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ para todos los pesos de la forma $w \in A_\infty^\rho \cap D_1^\rho$. Como hemos mencionado anteriormente, esta clase contiene a la clase A_1^ρ.

Muchos de los ejemplos que presentaremos más adelantes son operadores que satisfacen la condición (3.2.3) para α en un intervalo abierto. Teniendo en cuenta esto, podemos escribir la siguiente consecuencia (aquí F_∞^ρ quiere decir A_∞^ρ).

Corolario 3.2.5. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) con $1 < s \leq \infty$ tal que para cada $\alpha \in (0, \varepsilon)$ existe una constante C_α que satisface*

$$\frac{1}{|B|}\int_{B(x_0,r)} |T1(x) - (T1)_B|dx \leq C_\alpha\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} \tag{3.2.7}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)/2$. Sea $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \varepsilon\}$, entonces para todo $0 \leq \beta < \tilde{\delta}$, T está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ siempre que $w \in F_s^\rho \cap D_\mu^\rho$, con $1 \leq \mu < 1 + \frac{\tilde{\delta}-\beta}{d}$.

De esta manera, obtenemos desigualdades en-$BMO_\rho^\beta(w)$ para todos los ejemplos que aparecen en [23].

3.3. Prueba del Teorema

Antes de dar una demostración del Teorema 3.2.2 necesitamos enunciar y demostrar algunos lemas técnicos. En el primer lema damos una estimación sobre los promedios en bolas sub-críticas en términos de la norma $BMO_\rho^\beta(w)$. Recordemos que las funciones de este espacio tienen sus promedios acotados en bolas super-críticas y las oscilaciones sobre bolas sub-críticas.

Lema 3.3.1. (ver Lema 5 en [1]) *Sea $B = B(x_0, r)$ con $r < \rho(x_0)$ y $f \in BMO_\rho^\beta(w)$ con $w \in D_\mu^\rho$. Si $\mu > 1$ o $\beta > 0$, existe una constante C tal que*

$$|f_B| \leq C\|f\|_{BMO_\rho^\beta(w)} \frac{w(B)}{|B|} r^\beta \left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{d(\mu-1)+\beta}. \tag{3.3.1}$$

Si $\mu = 1$ y $\beta = 0$, existe una constante C tal que

$$|f_B| \leq C\|f\|_{BMO_\rho^\beta(w)} \frac{w(B)}{|B|} \left(1 + \log \frac{\rho(x_0)}{r}\right). \tag{3.3.2}$$

En el siguiente lema estimamos oscilaciones sobre bolas super-críticas para una $f \in BMO_\rho^\beta(w)$ en términos de su norma.

Lema 3.3.2. *Sea $w \in A_{\sigma'}^\rho \cap D_\mu^\rho$ y $0 \leq \beta < 1$. Entonces existen constantes $\theta \geq 0$ y $C > 0$ tales que para toda función $f \in BMO_\rho^\beta(w)$ y cualquiera sea la bola $B = B(x_0, r)$ y $k \in \mathbb{N}$ se verifica*

$$\begin{aligned} w(2^k B)^{1/\sigma'} &\left(\int_{2^k B} |f - f_B|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma} \\ &\leq C\|f\|_{BMO_\rho^\beta(w)} r^\beta w(B) 2^{k(d\mu+\beta)} \left(1 + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^\theta, \end{aligned}$$

si $\mu > 1$ o $\beta > 0$, y

$$w(2^k B)^{1/\sigma'} \left(\int_{2^k B} |f - f_B|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma} \leq c\|f\|_{BMO_\rho^\beta(w)} w(B) k 2^{kd} \left(1 + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^\theta,$$

si $\mu = 1$ y $\beta = 0$.

Demostración. Como $w \in A_{\sigma'}^\rho \cap D_\mu^\rho$, existe $\theta' \geq 0$ tal que $w \in A_{\sigma'}^{\rho,\theta'} \cap D_\mu^{\rho,\theta'}$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} & w(2^k B)^{1/\sigma'} \left(\int_{2^k B} |f - f_B|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma} \\ & \leq w(2^k B)^{1/\sigma'} \left(\int_{2^k B} |f - f_{2^k B} + f_{2^k B} - f_{2^{k-1} B} + \ldots + f_{2B} - f_B|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma} \\ & \leq w(2^k B)^{1/\sigma'} \left[\left(\int_{2^k B} |f - f_{2^k B}|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma} + \left(w^{1-\sigma}(2^k B)\right)^{1/\sigma} \sum_{i=1}^k |f_{2^i B} - f_{2^{i-1} B}|\right] \\ & = A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Para A_1 usamos el Lema 3.1.3 y la duplicación de w para obtener

$$\begin{aligned} A_1 &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)}(2^k r)^\beta w(2^kB)^{1/\sigma} w(2^kB)^{1/\sigma'} \\ &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)}(2^k r)^\beta w(2^kB) \\ &\leq C\|f\|_{BMO_\rho(w)} r^\beta w(B) 2^{k(d\mu+\beta)} \left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'}. \end{aligned}$$

Para A_2 usamos la condición $A^{\rho;\theta}_{\sigma'}$ junto con la duplicación. Suponiendo que $d\mu - d + \beta > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} A_2 &\leq w(2^kB)^{1/\sigma'}\left(w^{1-\sigma}(2^kB)\right)^{1/\sigma}\sum_{i=1}^k \frac{1}{|2^iB|}\int_{2^iB}|f-f_{2^iB}| \\ &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)}|2^kB|\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'}\sum_{i=1}^k (2^i r)^\beta \frac{w(2^iB)}{|2^iB|} \\ &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} r^\beta |2^kB| \frac{w(B)}{|B|}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{2\theta'}\sum_{i=1}^k 2^{i(d\mu-d+\beta)} \\ &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} r^\beta w(B) 2^{k(d\mu+\beta)}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{2\theta'}. \end{aligned}$$

Como $\mu \geq 1$ y $\beta \geq 0$, $d\mu - d + \beta \geq 0$ y es nulo si y sólo si $\mu = 1$ y $\beta = 0$. Entonces, en ese caso tenemos que

$$A_2 \leq \|f\|_{BMO_\rho(w)} w(B) k 2^{kd}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{2\theta'}.$$

Entonces, para $\theta = 2\theta'$ se cumple la desigualdad que queríamos probar.

□

Ahora, estamos en condiciones de dar una prueba del Teorema 3.2.2

Demostración del Teorema 3.2.2. Para ver que (a) $\implies$ (b), tomemos una función $f \in BMO^\beta_\rho(w)$ y un peso $w \in F^\rho_s \cap D^\rho_\mu$. Antes de verificar la condición (3.1.2) hacemos la siguiente observación. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ y $B_R = B(x_0, R)$. Sea g una función tal que $g = f\chi_{2B_R}$ si $R \geq \rho(x_0)$ y $g = (f - f_{B_R})\chi_{2B_R}$ si $R < \rho(x_0)$. En cualquiera de estos casos, afirmamos que existen $\sigma > s'$ y $\tilde{\theta} \geq 0$ tal que

$$\left(\int_{2B_R}|g|^\sigma\right)^{1/\sigma} \leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(x)} R^\beta w(2B_R)|B_R|^{-1/\sigma'}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\theta}}. \tag{3.3.3}$$

Para ver esto, sean $\eta > s'$ y $\theta \geq 0$ tales que $w \in A^{\rho,\theta}_{s/\eta'} \cap RH^{\rho,\theta}_\eta \cap D^{\rho,\theta}_\mu$ y $\sigma \in \left(s', \frac{s}{s-\eta'}\right)$ a elegir. Definimos $\zeta = \frac{s}{s-\eta'}\frac{1}{\sigma}$ y aplicamos la desigualdad de Hölder con ζ y ζ' para obtener

$$\begin{aligned}\left(\int_{2B_R} |g|^\sigma\right)^{1/\sigma} &\leq C\left(\int_{2B_R} |g|^\sigma w^{1/\zeta-\sigma} w^{\sigma-1/\zeta}\right)^{1/\sigma} \\ &\leq C\left(\int_{2B_R} |g|^{\sigma\zeta} w^{1-\sigma\zeta}\right)^{\frac{1}{\sigma\zeta}} \left(\int_{2B_R} w^{\frac{\sigma\zeta-1}{\zeta-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma\zeta'}}.\end{aligned}$$

Como $\sigma\zeta = \left(\frac{s}{\eta'}\right)'$ y $w \in A^\rho_{s/\eta'}$ podemos usar el Lema 3.1.3 en el primer factor para acotarlo en términos de la norma $BMO^\beta_\rho(w)$. Para el segundo factor hacemos la siguiente observación: como $w \in RH^\rho_\eta \cap A^\rho_\infty$, por el Lema 1.2.17, existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in RH^\rho_{\eta+\varepsilon}$. Observemos que $\sigma > s'$ implica $\frac{\sigma\zeta-1}{\zeta-1} > \eta$ y además $\frac{\sigma\zeta-1}{\zeta-1} \to \eta$ cuando $\sigma \to s'$. Entonces, podemos escoger $\sigma > s'$ pero suficientemente cerca a s' tal que $\tilde{\eta} = \frac{\sigma\zeta-1}{\zeta-1} \leq \eta + \varepsilon$. En conjunto, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{2B_R} |g|^\sigma\right)^{1/\sigma} &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} R^\beta w(2B_R)^{\frac{1}{\sigma}+\frac{\tilde{\eta}}{\sigma\zeta'}} |B_R|^{\frac{1-\tilde{\eta}}{\sigma\zeta'}} \left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\theta}} \\ &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} R^\beta(x_0) w(B_R)|B_R|^{-1/\sigma'} \left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\theta}},\end{aligned}$$

para alguna constante C que depende de w sólo a través de las constantes de las clases F^ρ_s y D^ρ_μ y $\tilde{\theta} = \frac{\theta\tilde{\eta}}{\sigma\zeta'}$.

Para verificar la condición (3.1.2), por el Lema 3.1.2, es suficiente considerar bolas críticas. Sea B_ρ la bola $B_\rho = B(x_0, \rho(x_0))$. De acuerdo al significado que dimos a Tf, dividimos la función de la siguiente manera

$$f = f\chi_{2B_\rho} + f\chi_{(2B_\rho)^c} = f_1 + f_2.$$

Aplicando el Teorema 2.1.5, sabemos que T está acotado en L^p para $p > s'$ con $w = 1$. Esto, junto con la estimación (3.3.3), nos da

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Tf_1| &\leq \left(\int_{B_\rho} |Tf_1|^\sigma\right)^{1/\sigma} |B_\rho|^{1/\sigma'} \\ &\leq \left(\int_{2B_\rho} |f|^\sigma\right)^{1/\sigma} |B_\rho|^{1/\sigma'} \\ &\leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} \rho^\beta(x_0) w(B_\rho).\end{aligned}$$

Para f_2, si $x \in B_\rho$,

$$\begin{aligned}|Tf_2(x)| &\leq \int_{(2B_\rho)^c} |K(x,y)|\,|f(y)|\,dy \\ &\leq C\sum_{k=1}^\infty \left(\int_{2^{k+1}B_\rho\setminus 2^k B_\rho} |K(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \left(\int_{2^{k+1}B_\rho} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'}.\end{aligned}$$

Para estimar el segundo factor en la suma podemos usar nuevamente la desigualdad (3.3.3). Así, para $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left(\int_{2^{k+1}B_\rho} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'} &\le \left(\int_{2^{k+1}B_\rho} |f(y)|^{\sigma} dy\right)^{1/\sigma} |2^k B_\rho|^{1/s'-1/\sigma} \\ &\le C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(x)} (2^k\rho(x_0))^\beta w(2^k B_\rho)|2^k B_\rho|^{-1+1/s'} 2^{k\theta} \\ &\le C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} \rho(x_0)^\beta \frac{w(B_\rho)}{|B_\rho|} 2^{k(d\mu-d+2\theta+\beta)}|2^k B_\rho|^{1/s'},\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, usamos que $w \in D^{\rho,\theta}_\mu$.

Luego, como el núcleo de T cumple la condición de tamaño (2.1.2), sumando sobre k resulta que

$$\begin{aligned}|Tf_2(x)| &\le C_N \|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} \rho(x_0)^\beta \frac{w(B_\rho)}{|B_\rho|} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(N-d\mu+d-2\theta+\beta)} \\ &\le C_N \|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} \rho(x_0)^\beta \frac{w(B_\rho)}{|B_\rho|},\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

escogiendo N suficientemente grande. Con estas estimaciones queda probado que Tf cumple la condición de promedios sobre bolas críticas (3.1.2).

Ahora, veremos que la condición sobre las oscilaciones (3.1.1) se satisface para Tf. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r < \rho(x_0)$ y sea B la bola $B = B(x_0, r)$. Dividimos la función f de la siguiente manera

$$f = (f - f_B)\chi_{2B} + (f - f_B)\chi_{(2B)^c} + f_B = f_1 + f_2 + f_3. \tag{3.3.5}$$

Elegimos $R \ge \rho(x_0)$ tal que $2B \subset B(x_0, R) = \tilde{B}$. Aplicando la definición dada en (3.2.1) a esta descomposición, sumando y restando f_B en la integral sobre $\tilde{B}^c$, tenemos que para $x \in 2B$

$$\begin{aligned}Tf(x) &= T(f\chi_{\tilde{B}})(x) + \int_{\tilde{B}^c} K(x,y)f(y)dy \\ &= T(f_1)(x) + T((f - f_B)\chi_{\tilde{B}\setminus 2B})(x) + f_B T(\chi_{\tilde{B}})(x) \\ &+ \int_{\tilde{B}^c} K(x,y)(f - f_B) + f_B \int_{\tilde{B}^c} K(x,y)dy \\ &= T(f_1)(x) + \int_{(2B)^c} K(x,y)(f(y) - f_B)dy + f_B T1(x).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_B |Tf(x)-(Tf)_B|dx \le& \frac{1}{|B|}\int_B\int_B |Tf_1(x)-Tf_1(z)|dzdx\\ &+\frac{1}{|B|}\int_B\int_B\int_{(2B)^c}|K(x,y)-K(z,y)||f(y)-f_B|dydzdx\\ &+\int_B |Tf_3(x)-(Tf_3)_B|dx.\end{aligned}$$

Para el término correspondiente a f_1 procedemos igual que antes, usando nuevamente la acotación en L^p para $p>s'$ de T y la desigualdad (3.3.3). Para el segundo término, si x, $z\in B$,

$$\begin{aligned}&\int_{(2B_r)^c}|K(x,y)-K(z,y)||f(y)-f_B|dy\\ &\quad\le \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|K(x,y)-K(z,y)|^s\right)^{1/s}\left(\int_{2^{k+1}B}|f-f_B|^{s'}\right)^{1/s'}.\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

Acotemos primero el segundo factor de la suma. Para γ tal que $\gamma s'=(s/\eta')'$, usando nuevamente el Lema 3.1.3 y la condición de Reverse-Hölder-η del peso w junto con el Lema 3.3.2 y la duplicación D^ρ_μ obtenemos, suponiendo $\mu>1$ o $\beta>0$,

$$\begin{aligned}&\left(\int_{2^{k+1}B}|f-f_B|^{s'}\right)^{1/s'}\\ &\quad\le\left(\int_{2^{k+1}B}|f-f_B|^{\gamma s'}w^{1-\gamma s'}\right)^{\frac{1}{\gamma s'}}\left(\int_{2^kB}w^\eta\right)^{\frac{1}{\gamma' s'}}\\ &\quad\le\left(\int_{2^{k+1}B}|f-f_B|^{\gamma s'}w^{1-\gamma s'}\right)^{\frac{1}{\gamma s'}}w(2^kB)^{\frac{\eta}{\gamma' s'}}|2^kB|^{\frac{1-\eta}{\gamma' s'}}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^\theta\\ &\quad\le C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)}r^\beta w(B)2^{k(d\mu+\beta)}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{3\theta}|2^kB|^{\frac{1}{s'}-1}\\ &\quad\le C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)}r^\beta\frac{w(B)}{|B|}2^{k(d\mu-d+\beta)}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{3\theta}|2^kB|^{\frac{1}{s'}}.\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

Por otra parte, para el primer factor podemos usar la condición de suavidad con decaimiento dada en el Lema 2.1.4, con δ' tal que $d\mu-d+\beta<\delta'<\delta$. De esta manera, volviendo a la desigualdad (3.3.6),

$$
\begin{aligned}
&\int_{(2B_r)^c} |K(x,y)-K(z,y)||f(y)-f_B|dy \\
&\qquad \leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} r^\beta \frac{w(B)}{|B|} \sum_{k\in\mathbb{N}} |2^kB|^{-\frac{1}{s'}} 2^{-k\delta'} 2^{k(d\mu-d+\beta)} \left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{3\theta-N} |2^kB|^{\frac{1}{s'}} \\
&\qquad \leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} r^\beta \frac{w(B)}{|B|} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{k(d\mu-d+\beta-\delta')} \left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^{3\theta-N} \\
&\qquad \leq C\|f\|_{BMO^\beta_\rho(w)} r^\beta \frac{w(B)}{|B|},
\end{aligned}
$$

con tal de elegir N suficientemente grande y usando que $d\mu - d + \beta < \delta'$. De la misma forma, podemos arribar al correspondiente resultado si $\mu = 1$ y $\beta = 0$.

Finalmente, para estimar el término corrspondiente a f_3, usamos el Lema 3.3.1 y la condición $T1$. Si $\mu > 1$ o $\beta > 0$,

$$
\begin{aligned}
\int_B |Tf_3(x) - (Tf_3)_B|dx &\leq |f_B| \int_B |T1(x) - (T1)_B| \\
&\leq \|f\| \frac{w(B)}{|B|} r^\beta \left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{d(\mu-1)+\beta} \int_B |T1(x) - (T1)_B| \\
&\leq \|f\| w(B) r^\beta.
\end{aligned}
$$

De la misma forma podemos obtener el resultado en el caso restante, en el que $\mu = 1$ y $\beta = 0$.

Para mostrar que (b) $\Longrightarrow$ (c), vamos a probar que los pesos $w_{x_0} = |x - x_0|^{d(\mu-1)} \in F^\rho_s \cap D^\rho_\mu$ uniformemente en x_0. De hecho, vamos a mostrar que estos pesos pertenecen a la clases correspondientes a $\theta = 0$, es decir, las clases de pesos clásicas, las cuales son invariantes por traslaciones. Consideraremos solamente el caso $\mu > 1$, ya que si $\mu = 1$ tenemos que $w_{x_0} \equiv 1$.

Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $\mu > 1$. En primer lugar, vamos a probar que $w_{x_0} = |x - x_0|^{d(\mu-1)} \in D_\mu$. Sean $r > 0$, $\sigma > 1$, $B = B(y,r)$ y $\sigma B = B(y,\sigma r)$.

Supongamos primero que $|y - x_0| \geq 2\sigma r$. Si $x \in \sigma B$ tenemos que $|x - x_0| \leq |x-y| + |x_0 - y| \leq \sigma r + |x_0 - y| \leq 3|x_0 - y|$ y si $x \in B$, $|x - x_0| \geq |y - x_0| - |y - x| \geq |y - x_0| - r \geq |y - x_0|/2$. Luego, obtenemos

$$
\begin{aligned}
w_{x_0}(\sigma B) &= \int_{B(y,\sigma r)} |x - x_0|^{d(\mu-1)} dx \leq C|y - x_0|^{d(\mu-1)} (\sigma r)^d \\
&\leq C\sigma^d \int_{B(y,r)} |x - x_0|^{d(\mu-1)} dx \leq C\sigma^d w_{x_0}(B) \leq C\sigma^{d\mu} w_{x_0}(B)
\end{aligned}
\tag{3.3.8}
$$

con C independiente de x_0.

Veamos ahora el caso $|y - x_0| < 2\sigma r$. Si $x \in \sigma B$, $|x - x_0| \le |x - y| + |x_0 - y| \le 2\sigma r$. Entonces, como $d(\mu - 1) > 0$

$$\begin{aligned} w_{x_0}(\sigma B) &= \int_{B(y,\sigma r)} |x - x_0|^{d(\mu-1)} dx \\ &\le C(\sigma r)^{d\mu} \\ &\le C\sigma^{d\mu} \int_{B(x_0,r)} |x - x_0|^{d(\mu-1)} dx \\ &\le C\sigma^{d\mu} \int_{B(y,r)} |x - x_0|^{d(\mu-1)} dx \\ &\le C\sigma^{d\mu} w_{x_0}(B). \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Podemos concluir que $w_{x_0} = |x - x_0|^{d(\mu-1)} \in D_\mu$.

Finalmente, siendo w_{x_0} un peso potencia, se sabe que $w_{x_0} \in A_\infty$ y que $w_{x_0} \in \cap_{\eta \ge 1} RH_\eta$, con constante independiente de x_0.

Para ver que (c) $\implies$ (a) vamos a considerar solamente el caso $\mu > 1$, puesto que, si $\mu = 1$, $w_{x_0} \equiv 1$ y la prueba es la misma que la del Teorema 1.1 en [23]. Consideramos la familia de funciones

$$h_{x_0}(x) = \text{máx}\{\rho(x_0)^{d(\mu-1)+\beta} - |x - x_0|^{d(\mu-1)+\beta}, 0\},$$

para $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Aplicando el Lema 3.1.5, que nos provee de una condición suficiente, veremos que estas funciones están en $BMO_\rho^\beta(w_{x_0})$ uniformemente en x_0. En primer lugar vamos a verificar la condición de suavidad. Como $\text{máx}\{0, t\}$ es una función Lipschitz-1 y t^γ es Lipschitz-γ para $0 \le \gamma \le 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} |h_{x_0}(x) - h_{x_0}(y)| &\le \left| |x_0 - x|^{d(\mu-1)+\beta} - |x_0 - y|^{d(\mu-1)+\beta} \right| \\ &\le C \left| |x_0 - x| - |x_0 - y| \right|^{d(\mu-1)+\beta} \\ &\le C|x - y|^{d(\mu-1)+\beta}. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Por otro lado, si $|x - x_0| \ge 2|x - y|$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{w_{x_0}(B(x, |x - y|))}{|x - y|^{d-\beta}} &\ge C|x - x_0|^{d(\mu-1)} |x - y|^\beta \\ &\ge C|x - y|^{d(\mu-1)+\beta}, \end{aligned}$$

y si $|x - x_0| \le 2|x - y|$

$$\frac{w_{x_0}(B(x, |x - y|))}{|x - y|^{d-\beta}} \ge C|x - y|^{d(\mu-1)+\beta}.$$

Luego, estas desigualdades junto con (3.3.10) prueban la condición de suavidad.

Para ver la condición de tamaño que exige el Lema 3.1.5 podemos suponer que $x \in B(x_0, \rho(x_0))$, de lo contrario $h_{x_0}(x) = 0$. Entonces, $\rho(x) \simeq \rho(x_0)$.Tomando y_0 tal que $2\rho(x_0) < |y_0 - x_0| < 3\rho(x_0)$ tenemos que $h_{x_0} = 0$ y la estimación de arriba nos da

$$|h_{x_0}(x)| \leq C \frac{w_{x_0}(B(x, \rho(x)))}{\rho(x)^{d-\beta}}.$$

Notar que en ambos casos las constantes son independientes de x_0.

Ahora, supongamos que T está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ para pesos de la forma $w(x) = |x - x_0|^{d(\mu-1)}$. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r < \rho(x_0)/2$, consideramos $B = B(x_0, r)$. Para este x_0, consideramos la función h_{x_0} definida anteriormente que, como vimos, pertenece a $BMO_\rho^\beta(w_{x_0})$ con norma independiente de x_0. Podemos escribir $Th_{x_0} = Th_1 + Th_2 + Th_3$, donde $h_1 = (h_{x_0} - (h_{x_0})_B)\chi_{2B}$, $h_2 = (h_{x_0} - (h_{x_0})_B)\chi_{2B^c}$ y $h_3 = (h_{x_0})_B$. Como $w_{x_0} \in F_s^\rho \cap D_\mu^\rho$, podemos verificar que Th_1 y Th_2 están en $BMO_\rho^\beta(w_{x_0})$ de la misma manera que fue hecho al probar (a) $\Longrightarrow$ (b), ya que no usamos la condición $T1$ sino sólo las hipótesis generales sobre el operador. Entonces, para la oscilación sobre B de Th_3 obtenemos

$$\begin{aligned}(h_{x_0})_B \int_B |T1 - (T1)_B| &\leq \int_B |Th_{x_0} - (Th_{x_0})_B| + \sum_{i=1}^{2} \int_B |Th_i - (Th_i)_B| \\ &\leq C w_{x_0}(B) r^\beta \leq C r^{d\mu+\beta},\end{aligned}$$

Para una constante C independiente de x_0. Finalmente, usando que $(h_{x_0})_B \geq C\rho(x_0)^{d(\mu-1)+\beta}$,

$$\frac{1}{|B|} \int_B |T1 - (T1)_B| \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{d(\mu-1)+\beta}$$

□

3.4. Aplicaciones

En está sección aplicaremos los resultados de la Sección 3.2 para obtener continuidad en espacios $BMO_\rho^\beta(w)$ de algunos operadores singulares asociados a L que fueron introducidos en el Capítulo 2. En particular, probaremos la acotación en $BMO_\beta^\rho(w)$ para las transformadas de Riesz-Schrödinger $\mathcal{R}_1$ si $q > d$, $\mathcal{R}_1^\star$ y $\mathcal{R}_2^\star$ si $q > d/2$ y para algunas familias de operadores que involucran a V, a saber, $L^{-\gamma}V^\gamma$ para $0 < \gamma < d/2$ y $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ para $0 < \gamma \leq 1$.

En el Capítulo 2 se probó que todos estos operadores resultan ser de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para ciertos valores de s y δ en cada caso. Entonces, de acuerdo a los resultados obtenidos en la sección 3.2, resta probar la condición (3.2.7) sobre $T1$ para poder establecer la continuidad en $BMO_\beta^\rho(w)$ para estos operadores.

3.4.1. Transformadas de Riesz-Schrödinger singulares

Supongamos que el potencial V está en la clase RH_q para $q > d/2$, siendo d la dimensión del espacio y sea p_0 tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$. Para las transformadas de Riesz-Schrödinger de primer orden debemos distinguir dos casos: $d/2 < q < d$ y $q \geq d$.

En el primer caso, como hemos mencionado, $\mathcal{R}_1$ está acotado en L^p para $p \in (1, p_0]$ y este rango es óptimo. En consecuencia, no podemos obtener desigualdades en $BMO_\rho^\beta(w)$ para este operador. Por otro lado, es inmediato que se verifican la condición (3.2.7) para su operador adjunto $\mathcal{R}_1^\star = L^{-1/2}\nabla$, puesto que $\mathcal{R}_1^\star(1) = 0$. De esto y la Proposición 2.3.5 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4.1. *Sea $V \in RH_q$ con $d/2 < q < d$ y $\delta = 2 - d/q$. Entonces, para cualquier $0 \leq \beta < \delta$, $\mathcal{R}_1^\star$ está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ siempre que $w \in F_{p_0}^\rho \cap D_\mu^\rho$, con $1 \leq \mu < 1 + \frac{\delta - \beta}{d}$ y p_0 tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$.*

Para el caso $q > d$, vimos que tanto $\mathcal{R}_1$ como $\mathcal{R}_1^\star$ resultan operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) con $\delta = 1 - d/q$ para $\mathcal{R}_1$ y $\delta = 1$ para $\mathcal{R}_1^\star$ (ver Proposición 2.3.1). Nuevamente, la condición (3.2.7) se verifica trivialmente para $\mathcal{R}_1^\star$ mientras que para $\mathcal{R}_1$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.4.2. (ver Proposición 4.12 en [23]) *Sea $V \in RH_q$ con $q > d$ y $B = B(x_0, r)$ para $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r \leq \rho(x_0)/2$. Entonces,*

(I) $$\log\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right) \frac{1}{|B|} \int_B |\mathcal{R}_1(y) - (\mathcal{R}_1)_B| dy \leq C,$$

(II) $$\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^\alpha \frac{1}{|B|} \int_B |\mathcal{R}_1(y) - (\mathcal{R}_1)_B| dy \leq C, \text{ para } \alpha < 1 - d/q.$$

Aplicando el Corolario 3.2.5 tenemos el siguiente resultado para $\mathcal{R}_1$ y su adjunto cuando $q > d$.

Teorema 3.4.3. *Sea $V \in RH_q$ para $q > d$ y sea $w \in A_\infty^\rho \cap D_\mu^\rho$. Entonces*

(a) Si $0 \leq \beta < 1 - d/q$ y $1 \leq \mu < 1 + \frac{1 - d/q - \beta}{d}$, entonces $\mathcal{R}_1$ está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$.

(b) Si $0 \leq \beta < 1$ y $1 \leq \mu < 1 + \frac{1-\beta}{d}$, entonces $\mathcal{R}_1^\star$ está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$.

Para la transformada de Riesz-Schrödinger de segundo orden $\mathcal{R}_2$ sabemos que es acotada en L^p para $p \in (1, q]$ si $V \in RH_q$ y $q > d/2$. Nuevamente, este rango resulta óptimo, por lo que no podemos esperar obtener acotación en espacios $BMO_\rho^\beta(w)$ si $q < \infty$. Por otro lado, vimos en la Proposición 2.3.9 que el operador adjunto $\mathcal{R}_2^\star$ resulta ser un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (q, δ) con $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$. De esto y del Corolario 3.2.5 obtenemos.

Teorema 3.4.4. *Sean $V \in RH_q$ con $q > d/2$ y $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$. Entonces, para $0 \leq \beta < \delta$, $\mathcal{R}_2^\star$ está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ siempre que $w \in F_q^\rho \cap D_\mu^\rho$, con $1 \leq \mu < 1 + \frac{\delta - \beta}{d}$.*

3.4.2. Transformadas de Riesz-Schrödinger que involucran el potencial

En esta sección retomaremos los operadores $L^{-\gamma}V^{\gamma}$ para $0<\gamma<d/2$, y $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ para $1/2<\gamma\leq 1$ que fueron introducidos en la Sección 2.4. Sabemos que estos operadores son de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ) para ciertos valores de s y δ especificos en cada caso. Por lo tanto, para obtener la continuidad de estos operadores en $BMO_\rho^\beta(w)$, resta verificar que cada operador aplicado a la función 1 satisface la condición (3.2.7). De hecho, probaremos esta condición en un contexto más general como el de la Sección 2.4.1.

Recordemos que un núcleo K es un **núcleo ρ-fraccionario de tipo** (ν,σ,δ) si para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R}|K(x,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma}\leq C_N R^{-d+\nu}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{3.4.1}$$

para $|x-x_0|<R/2$ y

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R}|K(x,y)-K(x_0,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma}\leq C_N R^{-d+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}, \tag{3.4.2}$$

para $|x-x_0|<r<\rho(x_0)$ y $r<R/2$. En el caso límite, $\sigma=\infty$ decimos que K es un **núcleo ρ-fraccionario de tipo** (ν,∞,δ) si satisface las estimaciones puntuales (2.4.4) y (2.4.5).

Notemos que la primera condición impone un cierto tamaño y decaimiento mientras que la segunda se relaciona con la suavidad lejos de la diagonal y requiere también decaimiento en el infinito. En particular, el parámetro ν está asociado al tamaño, δ a la suavidad y σ indica la norma en la cual se miden ambas propiedades.

En la siguiente proposición establecemos un resultado de continuidad entre espacios L^p y BMO_ρ para un operador integral con núcleo ρ-fraccionario que nos ayudará a probar la condición $T1$ ya que, como vimos en la Sección 2.4, los operadores que involucran V pueden mirarse como un operador fraccionario multiplicado por una potencia de V.

Proposición 3.4.5. *Sea K un núcleo ρ-fraccionario de tipo (ν,σ,δ) y T el operador integral asociado. Entonces, T es acotado de L^p en $BMO_\rho^{\nu-d/p}$, si $p>\sigma'$ y $\frac{d}{\nu}<p<\frac{d}{(\nu-\delta)^+}$, donde $(\nu-\delta)^+=\max\{\nu-\delta,0\}$.*

Demostración. Podemos suponer que $\sigma<\infty$, ya que el caso $\sigma=\infty$ se sigue de la Observación 2.4.1. Sea $f\in L^p$. En primer lugar observamos que para cada bola $B=B(x_0,R)$ con $R>0$, $x_0\in\mathbb{R}^d$ se tiene que

$$\frac{1}{|B|}\int_B|T(f\chi_{2B})(x)|dx\leq C\|f\|_p R^{\nu-d/p}.$$

De hecho, podemos usar la condición de tamaño (3.4.1) para obtener que para cada $x\in B$,

$$
\begin{aligned}
|T(f\chi_{2B})(x)| &\leq \int_{B(x,4R)} |K(x,y)||f(y)|dy \\
&\leq C\sum_{j=-2}^{\infty}\left(\int_{2^{-j}B\setminus 2^{-j-1}B}|K(x,y)|^{\sigma}\right)^{1/\sigma}\left(\int_{2^{-j}B}|f(y)|^{\sigma'}dy\right)^{1/\sigma'} \\
&\leq C\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_{2^{-j}B}|f(y)|^{p}dy\right)^{1/p}(2^{-j}R)^{\nu-d/p} \\
&\leq C\|f\|_p R^{\nu-d/p}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j(\nu-d/p)} \leq C\|f\|_p R^{\nu-d/p},
\end{aligned}
$$

ya que $p > \sigma'$ y $\nu - d/p > 0$.

Ahora, para mostrar que $Tf \in BMO_\rho^{\nu-d/p}$, vamos a verificar en primer lugar la condición (3.1.2) sobre promedios en bolas críticas. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $B_\rho = B(x_0, \rho(x_0))$. Escribimos $f = f\chi_{2B_\rho} + f\chi_{(2B_\rho)^c}$. La observación anterior aplicada a B_ρ nos da la estimación necesaria para f_1. Para verificar la condición para f_2 usamos nuevamente la estimación (3.4.1) y la desigualdad de Hölder. Así, para $x \in B_\rho$,

$$
\begin{aligned}
|T(f_2)(x)| &\leq \int_{(2B_\rho)^c}|K(x,y)||f(y)|dy \\
&\leq C\sum_{j=2}^{\infty}\left(\int_{w^jB_\rho\setminus 2^{j-1}B_\rho}|K(x,y)|^{\sigma}\right)^{1/\sigma}\left(\int_{2^jB_\rho}|f(y)|^{\sigma'}dy\right)^{1/\sigma'} \\
&\leq C_N\sum_{j=2}^{\infty}\left(\int_{2^jB_\rho}|f(y)|^{p}dy\right)^{1/p}(2^j\rho(x_0))^{\nu-d/p}2^{-jN} \\
&\leq C_N\|f\|_p\rho(x_0)^{\nu-d/p}\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j(N-\nu+d/p)} \leq C\|f\|_p\rho(x_0)^{\nu-d/p},
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

puesto que $\rho(x) \simeq \rho(x_0)$ y podemos elegir $N > \nu - d/p$.

Finalmente, debemos verificar la condición (3.1.1) sobre las oscilaciones en bolas subcríticas. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < r < \rho(x_0)$ y $B = B(x_0, r)$. Escribimos $f = f\chi_{2B} + f\chi_{(2B)^c}$. Como antes, sólo resta verificar la condición para f_2. Como en (3.4.3), usando esta vez la propiedad de suavidad (3.4.2) tenemos que, para $x,\, z \in B$

$$\begin{aligned}
&|T(f_2)(x) - T(f_2)(z)| \\
&\leq C \sum_{j=2}^{\infty} \left(\int_{2^jB\setminus 2^{j-1}B} |K(x,y) - K(z,y)|^{\sigma} \right)^{1/\sigma} \left(\int_{2^jB} |f(y)|^{\sigma'} dy \right)^{1/\sigma'} \\
&\leq C_N \sum_{j=2}^{\infty} \left(\int_{2^jB} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} (2^j r)^{\nu - d/p} 2^{-j\delta} \qquad (3.4.4) \\
&\leq C\|f\|_p r^{\nu-d/p} \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j(\delta-\nu+d/p)} \\
&\leq C\|f\|_p r^{\nu-d/p},
\end{aligned}$$

donde usamos que $p(\nu-\delta) < d$, esto es, $p < \frac{d}{(\nu-\delta)^+}$. □

Observación 3.4.6. La Proposición 3.4.5 implica, en particular, que si T es un operador integral con núcleo ρ-fraccionario de tipo (ν, σ, δ) entonces

$$|Tf(x) - Tf(z)| \leq C\|f\|_p |x-z|^{\nu-d/p},$$

siempre que $p > \sigma'$ y $\frac{d}{\nu} < p < \frac{d}{(\nu-\delta)^+}$. Esto se sigue de que el espacio BMO^{β} clásico coincide con $\mathrm{Lip}(\beta)$ clásico para $\beta > 0$.

Ahora, aplicando la proposición anterior y la Proposición 2.4.2, vamos a obtener estimaciones para la oscilación de $T1$, donde el operador T tiene un núcleo $H(x,y)$ definido por

$$H(x,y) = K_{\nu}(x,y) V^{\nu/2}(y)$$

y K_{ν} es un núcleo ρ-fraccionario.

Proposición 3.4.7. *Sea T un operador integral con núcleo H tal que $H(x,y) = K_{\nu}(x,y)V^{\nu/2}(y)$, donde $V \in RH_q$ con $q > d/2$ y K_{ν} es un núcleo ρ-fraccionario de tipo (ν, σ, δ) con $d/\nu \geq \sigma'$. Entonces para todo $0 < \alpha < \min\{\delta, \nu(2-d/q)/2\}$ existe una constante C_{α} tal que*

$$\frac{1}{|B|} \int_{B(x_0,r)} |T1(x) - (T1)_B| dx \leq C_{\alpha} \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{\alpha} \qquad (3.4.5)$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)/2$.

Demostración. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < r \leq \rho(x_0)/2$, $B_r = B(x_0,r)$ y $B_{\rho} = B(x_0, \rho(x_0))$. Si x, $z \in B_r$

$$\begin{aligned}
|T1(x) - T1(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} H(x,y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} H(z,y)dx \right| \\
&\leq \left| \int_{B_{\rho}} H(x,y) - H(z,y)dy \right| + \int_{(B_{\rho})^c} |H(x,y) - H(z,y)|\, dy \\
&= A_1 + A_2
\end{aligned}$$

Por la proposición 2.4.2, como $d/\nu \geq \sigma'$, T es un operador de Schrödigner-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ) con $1/s = 1/\sigma + \nu/2q$. Entonces, si definimos $C_j = \{2^{j-1}\rho(x) \leq |x-y| < 2^j\rho(x)\}$, podemos usar la condición de suavidad (2.1.3) para obtener

$$\begin{aligned} A_2 &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} |H(x,y) - H(z,y)| dy \\ &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{C_j} |H(x,y) - H(z,y)|^s dy \right)^{1/s} (2^{j+1}\rho(x_0))^{d/s'} \\ &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{s}{2^j \rho(x_0)} \right)^{\delta} \leq C \left(\frac{s}{\rho(x_0)} \right)^{\delta}. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Para estimar A_1 vamos a aplicar la Proposición 3.4.5 que acabamos de demostrar. Sea T_ν un operador integral con núcleo asociado K_ν, sea $\alpha < \delta$ y sea $p \in \left(\frac{d}{\nu}, \frac{d}{(\nu-\delta)^+} \right)$ a elegir. Como K_ν satisface (3.4.1) y (3.4.2) tenemos que, de acuerdo a la proposición anterior, T_ν está acotado de L^p en $BMO_\rho^{\nu - d/p}$, entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= \left| \int_{|x_0 - y| < \rho(x_0)} K_\nu(x,y) V^{\nu/2}(y) - K_\nu(z,y) V^{\nu/2}(y) dy \right| \\ &= \left| T_\nu(V^{\nu/2}\chi_{B_\rho})(x) - T_\nu(V^{\nu/2}\chi_{B_\rho})(z) \right| \\ &\leq C r^{\nu - d/p} \left(\int_{B_\rho} V^{p\nu/2} \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Si $\dfrac{2q}{\nu} < \dfrac{d}{(\nu-\delta)^+}$ podemos elegir $p = 2q/\nu$ y usar la propiedad de reverse-Hölder de orden q del potencial V para obtener

$$\begin{aligned} A_1 &\leq C r^{\frac{\nu}{2}\left(2 - \frac{d}{q}\right)} \left(\int_{B_\rho} V^q \right)^{\nu/2q} \\ &\leq C r^{\frac{\nu}{2}\left(2 - \frac{d}{q}\right)} \left(\rho(x_0)^{-d} \int_{B_\rho} V \right)^{\nu/2} \rho(x_0)^{\frac{d\nu}{2q}} \\ &\leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{\frac{\nu}{2}\left(2 - \frac{d}{q}\right)}, \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

donde, en la última desigualdad, usamos la definición de ρ.

Si $\dfrac{2q}{\nu} \geq \dfrac{d}{(\nu-\delta)^+}$, debe ser $\nu > \delta$. Luego, para cualquier $0 < \alpha < \delta$, podemos elegir $p = \dfrac{d}{\nu - \alpha}$, de manera que $p\nu/2 < q$. Usando nuevamente la propiedad de reverse-Hölder y la definición de ρ obtenemos

$$\begin{aligned} A_1 &\leq Cr^{\alpha}\rho^{\nu-\alpha}\left(\rho(x_0)^{-d}\int_{B_\rho} V\right)^{\nu/2} \\ &\leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

□

Ahora estamos listos para enunciar resultados de suavidad para las transformadas de Riesz-Schrödigner adjuntas que involucran el potencial. Consideremos primero los operadores $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ para $1/2 < \gamma \leq 1$ y $V \in RH_q$ con $q > d/2$. En la Sección 2.4.2 vimos que estos operadores resultan ser de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) con $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$ y s tal que

$$\frac{1}{s} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{d}\right)^{+} + \frac{2\gamma - 1}{2q}.$$

Más aún, sabemos que

$$L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_\nu(x,y)V^{\gamma-1/2}(y)f(y)dy, \tag{3.4.10}$$

donde K_ν es un núcleo ρ-fraccionario de tipo (ν, p_0, δ) con $\nu = 2\gamma - 1$, $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$ y p_0 tal que $1/p_0 = (1/q - 1/d)^+$. De esto y aplicando los resultados de la Sección 3.2 y la Proposición 3.4.7 tenemos el siguiente resultado de continuidad en $BMO_\rho^\beta(w)$ para estos operadores.

Teorema 3.4.8. *Sean $V \in RH_q$ con $q > d/2$, $1/2 < \gamma \leq 1$ y $\tilde{\delta} = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{d}{q}\right)$. Entonces, para todo $0 \leq \beta < \tilde{\delta}$, $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ está acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ siempre que $w \in F_s^\rho \cap D_\mu^\rho$, con $1 \leq \mu < 1 + \frac{\tilde{\delta}-\beta}{d}$ y s tal que $\frac{1}{s} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{d}\right)^{+} + \frac{2\gamma-1}{2q}$.*

Más aún, si $V \in RH_q$ para todo $q \geq 1$, el resultado vale para $w \in A_\infty^\rho \cap D_\mu^\rho$, y $\tilde{\delta} = 2\gamma - 1$.

Finalmente consideramos operadores de tipo $L^{-\gamma}V^{\gamma}$ para $0 < \gamma < d/2$. En la Sección 2.4.3 vimos que estos operadores son de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) con $s = q/\gamma$ y $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$. Además

$$L^{-\gamma}V^{\gamma}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} J_\gamma(x,y)V^{\gamma}(y)f(y)dy, \tag{3.4.11}$$

donde J_γ es un núcleo ρ-fraccionario de tipo $(2\gamma, \infty, \delta)$. Aplicando los resultados de la Sección 3.2 y la Proposición 3.4.7 obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 3.4.9. *Sean* $V \in RH_q$ *con* $q > d/2$*,* $0 < \gamma < d/2$ *y* $\tilde{\delta} = \text{mín}\{\delta, \gamma(2 - d/q)\}$*. Entonces, para todo* $0 \leq \beta < \tilde{\delta}$*,* $L^{-\gamma}V^{\gamma}$ *está acotado en* $BMO_{\rho}^{\beta}(w)$ *siempre que* $w \in F_{q/\gamma}^{\rho} \cap D_{\mu}^{\rho}$*, con* $1 \leq \mu < 1 + \frac{\tilde{\delta}-\beta}{d}$*.*

Más aún, si $V \in RH_q$ *para todo* $q \geq 1$*, el resultado vale para* $w \in A_{\infty}^{\rho} \cap D_{\mu}^{\rho}$*, y* $\tilde{\delta} = \text{mín}\{1, 2\gamma\}$*.*

Capítulo 4

Más resultados de suavidad bajo suposiciones más fuertes en el potencial

En el Capítulo 3 dimos resultados de suavidad para $\mathcal{R}_1$ cuando $q > d$, y para $\mathcal{R}_1^\star$ y $\mathcal{R}_2^\star$ cuando $q > d/2$. Sin embargo, no establecimos ninguna propiedad de regularidad para $\mathcal{R}_1$ cuando $d/2 < q < d$, y $\mathcal{R}_2$. De hecho, sabemos desde el trabajo de Shen ([31]) que bajo la hipótesis de $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$, los operadores $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ preservan los espacios L^p para valores de p en un intervalo de tipo $(1, s]$, con s un número que depende de q. Además, Shen prueba que este rango de espacios es óptimo para estos operadores. De esta manera, no podemos esperar conseguir resultados en espacios de tipo BMO o de regularidad de tipo BMO^β con sólo la suposición de que V pertenezca a RH_q. El objetivo de este capítulo es encontrar hipótesis sobre el potencial V que nos den condiciones suficientes para garantizar la acotación en espacios de regularidad $BMO_\beta^\rho(w)$ de estos y otros operadores que involucran el potencial como VL^{-1} y $V^{1/2}\nabla L^{-1}$.

La respuesta para $\mathcal{R}_1$ en el caso $q > d$ y $w \equiv 1$, fue dada por Ma, Stinga Torrea y Zhang en [23]. Más aún, como hemos probado en el Capítulo 2, $\mathcal{R}_1$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) con $\delta = 1 - d/q$, si $q > d$. En [23], los autores muestran un teorema general para luego aplicarlo en particular a este caso. Posteriormente, nuestro Teorema 3.2.2 permite extender estos resultados al caso pesado.

El caso de la transformada $\mathcal{R}_2$ es esencialmente diferente. Como Shen probó, si $V \in RH_q$ para $q > d/2$, se tiene que $\mathcal{R}_2$ es acotado en L^p para $1 < p \le q$, y que este rango es óptimo. De esta manera, para poder conseguir resultados en espacios BMO_ρ^β debemos considerar alguna hipótesis adicional sobre el potencial V. Al menos, necesitamos que el potencial V sea tal que asegure la acotación en L^p para todo $p > 1$.

De acuerdo con el Corolario 2.8 y la prueba del Teorema 0.3 en [31], esto sucede si V satisface

$$V(x) \le \frac{C}{\rho^2(x)}, \quad \text{para todo } x. \tag{4.0.1}$$

Sin embargo, creemos que esta hipótesis no es suficiente para obtener resultados de suavidad, y por lo tanto proponemos que V pertenezca a $RH_{d/2}$ y además que existan constantes α y C tales que

$$|V(x) - V(y)| \leq C\frac{|x-y|^\alpha}{\rho^{2+\alpha}(x)}, \quad \text{para } |x-y| < \rho(x). \tag{4.0.2}$$

No es difícil ver, que (4.0.2) implica (4.0.1). Supongamos que V satisface (4.0.2). Sea $x \in \mathbb{R}^d$ e $y \in B = B(x, \rho(x))$. Por (4.0.2), tenemos

$$V(x) \leq V(y) + \frac{C|x-y|^\alpha}{\rho^{2+\alpha}(x)} \leq V(y) + \frac{C}{\rho^2(x)}.$$

Si integramos, y usamos la definición de ρ, tenemos

$$V(x) \leq \frac{1}{|B|}\int_B V(x)dy \leq \frac{1}{|B|}\int_B V + \frac{C}{\rho^2(x)} \leq \frac{C'}{\rho^2(x)}.$$

A lo largo de este capítulo, trabajaremos con el potencial de Schrödinger cuyo potencial $V \in RH_{d/2}$ y satisface la condición (4.0.2) para algún $\alpha > 0$.

4.1. Regularidad de $\mathcal{R}_2$

Dedicaremos esta sección a probar un resultado de regularidad para $\mathcal{R}_2$ bajo las condiciones en el potencial V descriptas anteriormente. La estrategia será probar que $\mathcal{R}_2$ resulta ser de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) para cierto valor de δ. Luego, bastará probar una condición de tipo $T1$ para obtener, mediante el Corolario 3.2.5, la acotación en $BMO_\rho^\beta(w)$ para los valores de β y pesos w allí presentados.

Proposición 4.1.1. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$ y supongamos que V satisface* (4.0.2). *Entonces $\mathcal{R}_2$ es un operador de tipo $(\infty, \tilde{\delta})$, con $\tilde{\delta} = \min\{1, 2 - d/q, \alpha\}$.*

Demostración. Para probar las estimaciones (2.1.4) y (2.1.5) vamos a hacer uso de la expresión del núcleo $\mathcal{K}_2$ de $\mathcal{R}_2$ dada en la sección 2.3.2. Sean x, $y \in \mathbb{R}^d$, y definimos $R = |x-y|$. Elegimos $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $x \in B(x_0, R/8)$. De esta manera, podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(x,y) = &-\mathbf{R}_2(\eta_{x_0}\Gamma(\cdot,y)V)(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\Gamma_0(x,\xi)\Gamma(\xi,y)\Delta\eta_{x_0}(\xi)d\xi \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(x,\xi)\cdot\nabla\eta_{x_0}(\xi)\Gamma(\xi,y)d\xi,\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

donde η_{x_0} es una función $\mathcal{C}_0^\infty$ soportada en $B(x_0, 3R/8)$ que vale 1 en $B(x_0, R/4)$, Γ y Γ_0 son las soluciones fundamentales de L y $-\Delta$ respectivamente y $\mathbf{R}_2 = \nabla^2(-\Delta)^{-1}$ es la transformada de Riesz de orden dos asociada al Laplaciano.

Para estimar el tamaño de $\mathcal{K}_2(x,y)$ dividimos el núcleo en los tres sumandos anteriores que llamamos $\mathcal{K}_{2,1}$, $\mathcal{K}_{2,2}$ y $\mathcal{K}_{2,3}$.

Para $\mathcal{K}_{2,1}$, si $\mathbf{K}_2$ es el núcleo de $\mathbf{R}_2$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_{2,1}(x,y)| &= \left| \int_{B(x,R/2)} \mathbf{K}_2(x-z)\eta_{x_0}(z)\Gamma(z,y)V(z)dz \right| \\
&= \left| \int_{B(x,R/2)} \mathbf{K}_2(x-z)\left[\eta_{x_0}(z)\Gamma(z,y)V(z) - \Gamma(x,y)V(x)\right] dz \right| \\
&\leq \int_{B(x,R/2)} |\mathbf{K}_2(x-z)|\eta_{x_0}(z)|\Gamma(z,y)||V(z)-V(x)|dz \\
&\qquad + \int_{B(x,R/2)} |\mathbf{K}_2(x-z)|\eta_{x_0}(z)V(x)|\Gamma(z,y)-\Gamma(x,y)|dz \\
&\qquad\quad + \int_{B(x,R/2)} |\mathbf{K}_2(x-z)||\Gamma(x,y)|V(x)|\eta_{x_0}(z)-1|dz \\
&= I + II + III.
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

En I podemos usar (4.0.2), el soporte de η_{x_0}, el tamaño de $\mathbf{K}_2$ y de Γ y el Lema 1.2.8 para acotar

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{C_N}{\rho^{2+\alpha}(x)} \int_{B(x_0,3R/8)} \frac{|x-z|^\alpha}{|x-z|^d|z-y|^{d-2}} \left(1+\frac{|z-y|}{\rho(y)}\right)^{-N} dz \\
&\leq \frac{C_N}{R^{d-2}\rho^{2+\alpha}(x)} \left(1+\frac{R}{\rho(y)}\right)^{-N} \int_{B(x_0,3R/8)} \frac{dz}{|x-z|^{d-\alpha}} \\
&\leq \frac{C_N}{R^d}\left(\frac{R}{\rho(x)}\right)^{2+\alpha}\left(1+\frac{R}{\rho(y)}\right)^{-N} \\
&\leq \frac{C_N}{R^d}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-\tilde{N}}.
\end{aligned}$$

con $\tilde{N} = N/(N_0+1) - 2 - \alpha$.

Para estimar II vamos a usar el tamaño de $\mathbf{K}_2$, las estimaciones (1.2.10) y (4.0.1), y que el soporte de η_{x_0} está contenido en $B(x_0, 3R/8)$.

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{C_N}{\rho^2(x)R^{d-2+\delta}}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N} \int_{B(x_0,3R/8)} \frac{dz}{|x-z|^{d-\delta}} \\
&\leq \frac{C_N}{R^d}\left(\frac{R}{\rho(x)}\right)^2\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N} \\
&\leq \frac{C_N}{R^d}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N+2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para III usamos (1.2.9) y (4.0.1), y que $\operatorname{sop}(1-\eta_{x_0}) \subset B(x_0,R/4)^c$, para obtener

$$\begin{aligned}
III &\leq \frac{C_N}{\rho^2(x)R^{d-2}}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}\int_{B(x,R/2)\setminus B(x_0,R/4)}\frac{dz}{|x-z|^{d-1}} \\
&\leq \frac{C_N}{R^d}\left(\frac{R}{\rho(x)}\right)^2\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N} \\
&\leq \frac{C_N}{R^d}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N+2}.
\end{aligned}$$

Combinando las estimaciones para I, II y III obtenemos la estimación de tamaño deseada para $\mathcal{K}_{2,1}$.

Veamos ahora el término $\mathcal{K}_{2,2}$. La herramienta principal es usar que el soporte de $\Delta\eta_{x_0}(\xi)$ esta incluido en el anillo $\{\xi \in \mathbb{R}^d : R/4 < |x_0-\xi| < 3R/8\}$, luego estamos suficientemente lejos de las singularidades de Γ y de Γ_0. Además, como $|\Delta\eta_{x_0}(\xi)| \leq C/R^2$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_{2,2}(x,y)| &\leq \frac{C_N}{R^2}\int_{R/4<|x_0-\xi|<3R/8}\left(1+\frac{|x-\xi|}{\rho(x)}\right)^{-N}\frac{d\xi}{|y-\xi|^{d-2}|x-\xi|^d} \\
&\leq \frac{C_N}{R^d}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Puesto que si $R/4 \leq |x_0-\xi| \leq 3R/8$, tenemos que $|x-\xi| \simeq |y-\xi| \simeq R$. La estimación de tamaño del término $\mathcal{K}_{2,3}$ puede hacerse de igual manera.

Veamos ahora que el núcleo $\mathcal{K}_2$ satisface (2.1.5). Sean x, x', $y \in \mathbb{R}^d$ tales que $|x-x'| < |x-y|/16$ y sea $R=|x-y|$. Podemos encontrar x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tales que $|y_0-x_0| \geq R$, x, $x' \in B(x_0, R/8)$, $y \in B(y_0, R/8)$. De esta manera, dividiendo el nÃžcleo $\mathcal{K}_2$ como antes, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_2(x,y)-\mathcal{K}_2(x',y)| \leq\; &|\mathcal{K}_{2,1}(x,y)-\mathcal{K}_{2,1}(x',y)| \\
&+|\mathcal{K}_{2,2}(x,y)-\mathcal{K}_{2,2}(x',y)| \\
&+|\mathcal{K}_{2,3}(x,y)-\mathcal{K}_{2,3}(x',y)|
\end{aligned}$$

Para la suavidad de $\mathcal{K}_{2,1}$ vamos a usar que el operador $\mathbf{R}_2$ está acotado en espacios Lipschitz-$\tilde{\delta}$, esto es,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_{2,1}(x,y)-\mathcal{K}_{2,1}(x',y)| &= |\mathbf{R}_2(\Gamma(\cdot,y)V\eta_{x_0})(x)-\mathbf{R}_2(\Gamma(\cdot,y)V\eta_{x_0})(x')| \\
&\leq \|V\Gamma(\cdot,y)\eta_{x_0}\|_{\mathrm{Lip}^{\tilde{\delta}}}|x-x'|^{\tilde{\delta}}
\end{aligned}$$

con $\tilde{\delta} = \text{mín}\{1, 2-d/q, \alpha\}$.

A continuación, vamos a estimar la norma $\|V\Gamma(\cdot,y)\eta_{x_0}\|_{\mathrm{Lip}^{\tilde{\delta}}}$. En primer lugar recordemos que $\operatorname{sop}(\eta_{x_0}) \subset B(x_0, 3R/8) \subset B(x, R/2)$. Entonces, si $z \notin B(x,R/2)$ tenemos que $|V(z)\Gamma(z,y)\eta_{x_0}(z)| = 0$. Si $z \in B(x,R/2)$, usando que $|z-y| \simeq R$ y (4.0.1),

$$|V(z)\Gamma(z,y)\eta_{x_0}(z)| \leq \frac{C_N}{R^d}\left(\frac{R}{\rho(z)}\right)^2\left(1+\frac{R}{\rho(z)}\right)^{-N} \leq \frac{C}{R^d},$$

eligiendo $N > 2$. Luego, si $|z - z'| \geq R/4$,

$$|V(z)\Gamma(z,y)\eta_{x_0}(z) - V(z')\Gamma(z',y)\eta_{x_0}(z')| \leq C\frac{|z-z'|^{\tilde{\delta}}}{R^{d+\tilde{\delta}}}. \tag{4.1.4}$$

Por otro lado, si $|z - z'| < R/4$, descomponemos

$$\begin{aligned}|V(z)\Gamma(z,y)\eta_{x_0}(z) - V(z')\Gamma(z',y)\eta_{x_0}(z')| &\leq V(z)\eta_{x_0}(z)|\Gamma(y,z) - \Gamma(y,z')| \\ &\quad + V(z)|\Gamma(z',y)||\eta_{x_0}(z) - \eta_{x_0}(z')| \\ &\quad + |\Gamma(z',y)|\eta_{x_0}(z')|V(z) - V(z')| \\ &= A + B + C.\end{aligned}$$

En A tenemos que si $z \notin B(x, R/2)$, $A = 0$. Si $z \in B(x, R/2)$, $z' \in B(x, 3R/4)$ y $|z - y| \simeq |z' - y| \simeq R$. Entonces si $\delta = \text{mín}\{1, 2 - d/q\}$,

$$A \leq \frac{C_N|z-z'|^{\delta}}{R^{d+\delta}}\left(\frac{R}{\rho(z)}\right)^2\left(1+\frac{R}{\rho(z)}\right)^{-N} \leq \frac{C|z-z'|^{\delta}}{R^{d+\delta}},$$

eligiendo $N > 2$.

Si z, $z' \notin B(x, R/2)$ tenemos que $B = 0$. Si $z \in B(x, R/2)$, se sigue que $z' \in B(x, 3R/4)$ y $|z - y| \simeq |z' - y| \simeq R$. Entonces

$$B \leq C_N\frac{|z-z'|}{R^{d+1}}\left(\frac{R}{\rho(z)}\right)^2\left(1+\frac{R}{\rho(z')}\right)^{-N} \leq C_N\frac{|z-z'|}{R^{d+1}}\left(1+\frac{R}{\rho(z')}\right)^{-\tilde{N}} \leq C\frac{|z-z'|}{R^{d+1}},$$

eligiendo N suficientemente grande.

En C tenemos que si $z' \notin B(x, R/2)$, $C = 0$. Si $z' \in B(x, R/2)$, $z \in B(x, 3R/4)$ y $|z - y| \simeq |z' - y| \simeq R$. Entonces, si $|z - z'| < \rho(z)$ podemos usar (4.0.2) para obtener

$$C \leq C_N\frac{|z-z'|^{\alpha}}{R^{d+\alpha}}\left(\frac{R}{\rho(z')}\right)^{2+\alpha}\left(1+\frac{R}{\rho(z')}\right)^{-N} \leq C\frac{|z-z'|^{\alpha}}{R^{d+\alpha}},$$

eligiendo $N > 2+\alpha$. Si $|z-z'| \geq \rho(z)$, Acotamos $|V(z)-V(z')| \leq V(z)+V(z')$ obteniendo dos términos C_1 y C_2. En cada uno de ellos usamos (4.0.1) para obtener

$$\begin{aligned}C_1 &\leq \frac{C_N}{\rho^2(z)R^{d-2}}\left(1+\frac{R}{\rho(z')}\right)^{-N} \\ &\leq \frac{C_N|z-z'|}{R^{d+1}}\left(\frac{\rho(z)}{|z-z'|}\right)\left(\frac{R}{\rho(z)}\right)^2\left(1+\frac{R}{\rho(z)}\right)^{-\tilde{N}} \\ &\leq \frac{C|z-z'|}{R^{d+1}},\end{aligned}$$

eligiendo N suficientemente grande.

Combinando estas estimaciones tenemos que $\|V\Gamma(\cdot,y)\eta_{x_0}\|_{\mathrm{Lip}^{\tilde{\delta}}} \leq CR^{-d-\tilde{\delta}}$, entonces

$$|\mathcal{K}_{2,1}(x,y) - \mathcal{K}_{2,1}(x',y)| \leq C\frac{|x-x'|^{\tilde{\delta}}}{|x-y|^{d+\tilde{\delta}}}.$$

Para estimar la suavidad de $\mathcal{K}_{2,2}$ vamos a usar que

$$|\nabla_1^2\Gamma_0(x,\xi) - \nabla_1^2\Gamma_0(x',\xi)| \leq \frac{|x-x'|}{|x-\xi|^{d+1}},$$

que $\mathrm{sop}(\Delta\eta_{x_0}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : R/8 \leq |x-\xi| \leq R/2\}$ y que $|\Delta\eta_{x_0}| \leq C/R^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_{2,2}(x,y) - \mathcal{K}_{2,2}(x',y)| &= \left|\int \left[\nabla_1^2\Gamma_0(x,\xi) - \nabla_1^2\Gamma_0(x',\xi)\right]\Gamma(y,\xi)\Delta\eta_{x_0}(\xi)d\xi\right| \\
&\leq \frac{C}{R^2}\int_{R/8\leq|x-\xi|\leq R/2} \frac{|x-x'|}{|x-\xi|^{d+1}|y-\xi|^{d-2}}d\xi \\
&\leq \frac{C|x-x'|}{R^d}\int_{R/8\leq|x-\xi|\leq R/2} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{d+1}} \\
&\leq \frac{C|x-x'|}{R^{d+1}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $\mathcal{K}_{2,3}$ usaremos la estimación

$$|\nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(x,\xi) - \nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(x',\xi)| \leq \frac{|x-x'|}{|x-\xi|^{d+2}},$$

que $\mathrm{sop}(\nabla\eta_{x_0}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : R/8 \leq |x-\xi| \leq R/2\}$ y que $|\nabla\eta_{x_0}| \leq C/R$, para obtener

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_{2,3}(x,y) - \mathcal{K}_{2,3}(x',y)| &= 2\left|\int \left[\nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(x,\xi) - \nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(x',\xi)\right]\cdot\nabla\eta_{x_0}(\xi)\Gamma(y,\xi)d\xi\right| \\
&\leq \frac{C}{R}\int_{R/8\leq|x-\xi|\leq R/2} \frac{|x-x'|}{|x-\xi|^{d+2}|y-\xi|^{d-2}}d\xi \\
&\leq \frac{C|x-x'|}{R^{d-1}}\int_{R/8\leq|x-\xi|\leq R/2} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{d+2}} \\
&\leq \frac{C|x-x'|}{R^{d+1}}.
\end{aligned}$$

□

A continuación, vamos a usar el Corolario 3.2.5 para obtener el siguiente resultado.

Teorema 4.1.2. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$, que satisface* (4.0.2) *para cierto valor de $\alpha > 0$. Si $\tilde{\delta} = \text{mín}\{1, 2-d/q, \alpha\}$ y $0 \leq \beta < \tilde{\delta}$, entonces el operador $\mathcal{R}_2$ es acotado en $BMO_\rho^\beta(w)$ siempre que $w \in A_\infty^\rho \cap D_\mu^\rho$, con $1 \leq \mu < 1 + \frac{\tilde{\delta}-\beta}{d}$.*

Para poder aplicar el Corolario 3.2.5, tenemos que probar que $\mathcal{R}_2(1)$, bajo las condiciones del Teorema 4.1.2, satisface la estimación de oscilación (3.2.7) para algún $\epsilon > 0$. Para probar la desigualdad requerida, necesitamos establecer las siguientes herramientas. La primera es una consecuencia del Lema 2.3.11 dónde se comparan los núcleos $\mathcal{K}_2$ con $\mathbf{K}_2$, enunciada en el siguiente lema.

Lema 4.1.3. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$, y sean $\mathcal{K}_2$ y $\mathbf{K}_2$ los núcleos de $\mathcal{R}_2$ y $\mathbf{R}_2$ respectivamente. Existe una constante C tal que si $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $r \le \rho(x_0)/2$,*

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\int_{B(x_0,r)} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)|dydx \le C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta},$$

con $\delta = \text{mín}\{1, 2-d/q\}$.

Demostración. En primer lugar hacemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\int_{B(x_0,r)} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)|dydx \\
&\qquad \le \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\int_{B(y,2r)} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)|dxdy \\
&\qquad \le \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-j}r\le|x-y|\le 2^{-j+1}r} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)|dxdy.
\end{aligned}$$

Para y, j fijos podemos cubrir cada corona $\{x : 2^{-j}r \le |x-y| \le 2^{-j+1}r\}$ con una colección de bolas $\{B_{i,j} = B(x_i^j, 2^{-j-3}r)\}$ de manera que los centros x_i^j pertenecen a la corona y la cantidad M sólo depende de la dimesión. Luego, para $x \in B_{i,j}$ podemos aplicar la expresión dada en el Lema 2.3.11 para obtener

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\int_{B(x_0,r)} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)|dydx \\
&\qquad \le \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\int_{B_{i,j}} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)|dxdy \\
&\qquad \le C\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\int_{B_{i,j}} |\mathbf{R}_2(V\Gamma(\cdot,y)\chi_{\tilde{B_{i,j}}})(x)|dxdy \\
&\qquad + \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\int_{B_{i,j}} \frac{(2^{-j}r)^{\delta}}{(2^{-j}r)^d\rho^{\delta}(x_{i_j})}dxdy \\
&\qquad = A + B.
\end{aligned}$$

Para estimar B es facil ver que

$$B \le CM\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j\delta} \le C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta}.$$

En A para $p > 1$, podemos hacer

$$\begin{aligned}
A &\leq C\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(\int_{B_{i,j}}|\mathbf{R}_2(V\Gamma(\cdot,y)\chi_{\tilde{B_{i,j}}})(x)|^p dx\right)^p (2^{-j}r)^{d/p'}dy\\
&\leq C\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(\int_{\tilde{B_{i,j}}}|V(\xi)\Gamma(\xi,y)|^p d\xi\right)^p (2^{-j}r)^{d/p'}dy\\
&\leq CM\frac{1}{|B(x_0,r)|\rho^2(x_0)}\int_{B(x_0,r)}\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j}r)^{d/p+d/p'-d+2}dy\\
&\leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^2,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que el operador $\mathbf{R}_2$ es acotado en L^p, la estimación (1.2.9) para Γ y la estimación de tamaño (4.0.1) para el potencial.

□

El siguiente resultado establece una estimación sobre la suavidad de la diferencia de los núcleos.

Lema 4.1.4. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$, y sean $\mathcal{K}_2$ y $\mathbf{K}_2$ los núcleos de $\mathcal{R}_2$ y $\mathbf{R}_2$ respectivamente. Existe una constante C tal que si x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $R \leq |x_0 - y_0| \leq \rho(x_0)$, x y x' pertenecen a $B(x_0, r)$ con $r < R/8$, e $y \in B(y_0, R/8)$,*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_2(x,y)-&\mathbf{K}_2(x,y) - [\mathcal{K}_2(x',y) - \mathbf{K}_2(x'y)]\,|\\
&\leq \frac{Cr}{R^{d-1}\rho(x_0)^2} + |\mathbf{R}_2(V\Gamma(y,\cdot)\eta_{x_0})(x) - \mathbf{R}_2(V\Gamma(y,\cdot)\eta_{x_0})(x')|.
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Demostración. De acuerdo a [31] (pág. 530),

$$\Gamma(x,y) - \Gamma_0(x,y) = -\int \Gamma_0(x,\xi)V(\xi)\Gamma(y,\xi)d\xi.$$

Usando la notación $D(x,y) = \mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)$ y la ecuación de arriba tenemos que

$$\begin{aligned}
&|D(x,y) - D(x',y)|\\
&\quad= \left|\nabla_1^2\int \Gamma_0(x,\xi)V(\xi)\Gamma(y,\xi)d\xi - \nabla_1^2\int \Gamma_0(x',\xi)V(\xi)\Gamma(y,\xi)d\xi\right|\\
&\quad\leq \left|\nabla_1^2\int \Gamma_0(x,\xi)V(\xi)\Gamma(y,\xi)\eta_{x_0}(\xi)d\xi - \nabla_1^2\int \Gamma_0(x',\xi)V(\xi)\Gamma(y,\xi)\eta_{x_0}(\xi)d\xi\right|\\
&\quad+ \left|\nabla_1^2\int \Gamma_0(x,\xi)V(\xi)\Gamma(y,\xi)(1-\eta_{x_0}(\xi))d\xi - \nabla_1^2\int \Gamma_0(x',\xi)V(\xi)\Gamma(y,\xi)(1-\eta_{x_0}(\xi))d\xi\right|\\
&\quad= I + II.
\end{aligned}$$

Para I, tenemos que

$$I = |\mathbf{R}_2(V\Gamma(y,\cdot)\eta_{x_0})(x) - \mathbf{R}_2(V\Gamma(y,\cdot)\eta_{x_0})(x')|.$$

En II, vamos a usar que $\mathrm{sop}(1-\eta_{x_0}) \subset (B(x_0,R/4))^c$, entonces

$$II \leq \int_{|\xi - x_0|\geq R/4} |\mathbf{K}_2(x,\xi) - \mathbf{K}_2(x',\xi)|V(\xi)|\Gamma(y,\xi)|d\xi.$$

Para acotar este término vamos a dividir $\{|\xi - x_0| \geq R/4\} U J_1 + J_2 + J_3$, donde $J_1 = \{|y-\xi| \leq R/8\}$, $J_2 = \{R/8 < |y-\xi| < 2\rho(x_0), |x_0 - \xi| \geq R/8\}$ y $J_3 = \{|y-\xi| \geq 2\rho(x_0)\}$.

En J_1, $|x-\xi| \simeq |x'-\xi| \simeq R$,

$$\begin{aligned}\int_{J_1} |\mathbf{K}_2(x,\xi) - \mathbf{K}_2(x',\xi)|V(\xi)|\Gamma(y,\xi)|d\xi &\leq \frac{Cr^\delta}{R^{d+\delta}\rho^2(x_0)} \int_{B(y,R/8)} \frac{d\xi}{|y-\xi|^{d-2}} \\ &\leq \frac{C}{R^d}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^2.\end{aligned}$$

En J_2,

$$\begin{aligned}\int_{J_2} |\mathbf{K}_2(x,\xi) - \mathbf{K}_2(x',\xi)|V(\xi)|\Gamma(y,\xi)|d\xi &\leq \frac{Cr^\delta}{R^{d-2}\rho^2(x_0)} \int_{|x-\xi|\geq R/16} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{d+\delta}} \\ &\leq \frac{C}{R^d}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^2.\end{aligned}$$

Finalmente, en J_3, como $|x-\xi| \geq \rho(x_0)$, vamos a usar el Lema 1.2.8 para obtener

$$\begin{aligned}&\int_{J_3} |\mathbf{K}_2(x,\xi) - \mathbf{K}_2(x',\xi)|V(\xi)|\Gamma(y,\xi)|d\xi \\ &\qquad \leq C_N \frac{r^\delta}{\rho(x_0)^{d+\delta}} \int_{|y-\xi|\geq 2\rho(x_0)} \frac{1}{|y-\xi|^{d-2}\rho^2(\xi)} \left(1 + \frac{|y-\xi|}{\rho(y)}\right)^{-N} d\xi \\ &\qquad \leq C_N \frac{r^\delta}{\rho(x_0)^{d+\delta}} \int_{|y-\xi|\geq 2\rho(x_0)} \frac{1}{|y-\xi|^{d}} \left(1 + \frac{|y-\xi|}{\rho(\xi)}\right)^{2} \left(1 + \frac{|y-\xi|}{\rho(y)}\right)^{-N} d\xi \\ &\qquad \leq C_N \frac{r^\delta}{\rho(x_0)^{d+\delta}} \int_{|y-\xi|\geq 2\rho(x_0)} \frac{1}{|y-\xi|^{d}} \left(1 + \frac{|y-\xi|}{\rho(y)}\right)^{-N+2N_0+2} d\xi \\ &\qquad \leq C_N \frac{r^\delta}{\rho(x_0)^{d+\delta-\tilde{N}}} \int_{|y-\xi|\geq 2\rho(x_0)} \frac{d\xi}{|y-\xi|^{d+\tilde{N}}} \\ &\qquad \leq C \frac{r^\delta}{\rho(x_0)^{d+\delta}} \leq \frac{C}{R^d}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^2.\end{aligned}$$

Aquí hemos usado también que $\rho(x_0) \simeq \rho(y)$, puesto que $|x_0 - y| \leq 2\rho(x_0)$.

$\square$

A continuación damos la prueba del Teorema 4.1.2.

Demostración del Teorema 4.1.2. Vamos a usar la Proposición 4.1.1 y el Corolario 3.2.3. Como dijimos, bastará ver que $\mathcal{R}_2(1)$ satisface la condición de oscilación (3.2.7).

Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r < \rho(x_0)/2$ y x, $x' \in B(x_0, r)$. Escribimos

$$\begin{aligned}
|T1(x) - T1(x')| &= \left| \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)dy - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x'-y|>\varepsilon} K(x',y)dy \right| \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right) dy - \int_{|x'-y|>\varepsilon} K(x',y)\varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right) dy \right| \\
&+ \left| \int K(x,y)\left(1 - \varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right)\right) dy - \int K(x',y)\left(1 - \varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right)\right) dy \right| \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon + B,
\end{aligned}$$

donde φ es una función $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[-2,2]$ y que vale 1 en $[-1,1]$. Si $\mathbf{K}_2$ es el núcleo de $\mathbf{R}_2$ y $D(x,y) = \mathcal{K}_2(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)$, descomponemos A_ε de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} [\mathcal{K}(x,y) - \mathbf{K}_2(x,y)]\, \varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right) dy \right. \\
&\left. - \int_{|x'-y|>\varepsilon} [\mathcal{K}(x',y) - \mathbf{K}_2(x',y)]\, \varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right) dy \right| \\
&\leq \left| \int_{|x-y|>r} D(x,y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right) dy - \int_{|x-y|>r} D(x',y)\varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right) \right| \\
&+ \int_{|x-y|<r} |D(x,y)|dy + \int_{|x'-y|<r} |D(x',y)|dy = A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Para A_2 vamos a usar el Lema 4.1.3 para estimar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x_0,r)|^2} \int_{B(x_0,r)} \int_{B(x_0,r)} A_2\, dxdx' &\leq \frac{C}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} \int_{B(x_0,2r)} |D(x,y)|dydx \\
&\leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\delta,
\end{aligned}$$

con $\delta = \min\{1, 2 - d/q\}$. Es inmediato que podemos estimar A_3 de igual manera.

Vamos a dividir el término correspondiente a A_1 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left| \int D(x,y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right)\chi_{|x-y|>r}(y) - D(x',y)\varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right)\chi_{|x'-y|>r}(y)dy \right| \\
&\leq \int |D(x,y)-D(x',y)|\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right)\chi_{|x-y|>r}(y)dy \\
&+ \int |D(x',y)|\left[\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right) - \varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right)\right]\chi_{|x-y|>r}(y)dy \\
&+ \int |D(x',y)|\varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right)\left|\chi_{|x-y|>r}(y) - \chi_{|x'-y|>r}(y)\right| dy \\
&= A_{11} + A_{12} + A_{13}.
\end{aligned}$$

En A_{11} podemos descomponer de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
A_{11} &\leq \int_{r\leq|x-y|\leq 8\rho(x_0)} |D(x,y)-D(x',y)|dy \\
&\leq \sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^j r\leq|x-y|\leq 2^{j+1}r} |D(x,y)-D(x',y)|dy,
\end{aligned}$$

con $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j_0}r < 8\rho(x_0) \leq 2^{j_0+1}r$. Podemos cubrir cada corona con una colección de bolas $\{B_{i.j} = B(y_{i,j}, 2^{j-2}r)\}_{i=1}^{M}$ de manera que los centros están todos dentro la corona y la cantidad M depende sólo de la dimensión. Luego, para $y \in B_{i,j}$ podemos usar el Lema 4.1.4, para obtener

$$\begin{aligned}
A_{11} &\leq \sum_{j=0}^{j_0}\sum_{i=1}^{M}\int_{B_{i,j}} |D(x,y)-D(x',y)|dy \\
&\leq C\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{i=1}^{M}\int_{B_{i,j}} |\mathbf{R}_2(V\Gamma(y,\cdot)\eta_{B_j})(x) - \mathbf{R}_2(V\Gamma(y,\cdot)\eta_{B_j})(x')|dy \\
&+ C\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{i=1}^{M}\int_{B_{i,j}} \frac{r}{(2^j r)^{d-1}\rho(x_0)^2}dy \\
&= A_{111} + A_{112},
\end{aligned}$$

donde $B_j = B(x_0, 2^{j-1}r)$. Así, es inmediato que

$$A_{112} \leq CM\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^2 \sum_{j=0}^{j_0} 2^j \leq C\frac{r}{\rho(x_0)}.$$

Para A_{111} observamos que para $\tilde{\delta} = \min\{1, 2-d/q, \alpha\}$, tenemos

$$A_{111} \leq C|x-x'|^{\tilde{\delta}} \sum_{j=0}^{j_0}\sum_{i=1}^{M}\int_{B_{i,j}} \|V\Gamma(y,\cdot)\eta_{B_j}\|_{\mathrm{Lip}^{\tilde{\delta}}}dy.$$

Ahora, si $y \in B_{i,j}$, vamos a estimar $\|V\Gamma(y,\cdot)\eta_{B_j}\|_{\mathrm{Lip}^{\tilde{\delta}}}$. En primer lugar, si z, z' son tales que $|z-z'| < 2^{j-2}r$ tenemos que

$$\begin{aligned} |V(z)\Gamma(y,z)\eta_{B_j}(z) - V(z')\Gamma(y,z')\eta_{B_j}(z')| &\leq |V(z)-V(z')||\Gamma(y,z)|\eta_{B_j}(z) \\ &\quad + V(z')|\Gamma(y,z)-\Gamma(y,z')|\eta_{B_j}(z) \\ &\quad + V(z')|\Gamma(y,z')||\eta_{B_j}(z)-\eta_{B_j}(z')| \\ &= I + II + III. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Para estimar I observamos que $I = 0$ si $z \notin B_j$. Luego, si $z \in B_j$, tenemos que $|z-y| \simeq 2^j r$ y

$$I \leq \frac{|z-z'|^\alpha}{\rho^{2+\alpha}(x_0)(2^j r)^{d-2}} \leq \frac{|z-z'|^\alpha}{\rho^2(x_0)(2^j r)^{d-2+\alpha}}.$$

En II tenemos que, de la misma manera, $II = 0$ si $z \notin B_j$, luego si $z \in B_j$, $|z-y| \simeq |z'-y| \simeq 2^j r$ y

$$II \leq \frac{C|z-z'|^\delta}{\rho^2(x_0)(2^j r)^{d-2+\delta}},$$

con $\delta = \min\{1, 2-d/q\}$. Finalmente, $III = 0$ si $z \notin B_j$ y $z' \notin B_j$. Luego, si alguno de estos puntos está en B_j $|z-y| \simeq |z'-y| \simeq 2^j r$. Usando la suavidad de η_{B_j},

$$III \leq C\frac{|z-z'|}{\rho^2(x_0)(2^j r)^{d-1}}.$$

Por otro lado, si $z \in B_j$

$$|V(z)\Gamma\eta_{B_j}(z)| \leq \frac{C}{\rho^2(x_0)(2^j r)^{d-2}}$$

y vale cero si $z \notin B_j$. Entonces, si $|z-z| \geq 2^{j-2}r$ tenemos que

$$|V(z)\Gamma(y,z)\eta_{B_j}(z) - V(z')\Gamma(y,z')\eta_{B_j}(z')| \leq C\frac{|z-z'|^{\tilde{\delta}}}{\rho^2(x_0)(2^j r)^{d-2+\tilde{\delta}}}.$$

Entonces, concluimos que

$$\|V\Gamma(y,\cdot)\eta_{B_j}\|_{\mathrm{Lip}^{\tilde{\delta}}} \leq \frac{C}{\rho^2(x_0)(2^j r)^{d-2+\tilde{\delta}}}.$$

Luego,

$$A_{111} \leq CM\frac{|x-x'|^{\tilde{\delta}}r^{2-\tilde{\delta}}}{\rho^2(x_0)}\sum_{j=0}^{j_0} 2^{j(2-\tilde{\delta})} \leq C\frac{|x-x'|^{\tilde{\delta}}r^{2-\tilde{\delta}}}{\rho^2(x_0)}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{2-\tilde{\delta}} \leq C\left(\frac{|x-x'|}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\delta}}.$$

Acotemos ahora A_{12}. En primer lugar observemos que

$$\operatorname{sop}\left(\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right) - \varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right)\right) \subset \{y \in \mathbb{R}^d : 2\rho(x_0) \leq |x'-y| \leq 10\rho(x_0)\}. \tag{4.1.7}$$

Aplicando el teorema del valor medio para φ tenemos que

$$A_{12} \leq C\left(\frac{|x-x'|}{\rho(x_0)}\right)\int_{2\rho(x_0)\leq|x'-y|\leq 10\rho(x_0)} |\mathcal{K}_2(x',y)| + |\mathbf{K}_2(x'-y)|dy \leq C\left(\frac{|x-x'|}{\rho(x_0)}\right),$$

usando las estimaciones de tamaño para $\mathcal{K}_2$ y $\mathbf{K}_2$.

Para A_3 vamos a usar que sop $\left(\chi_{|x-y|>r} - \chi_{|x'-y|>r}\right) \subset B(x_0, 4r)$ y el Lema 4.1.3 para estimar

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x_0,r)|^2}\int_{B(x_0,r)}\int_{B(x_0,r)} A_{13}dxdx' &\leq \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\int_{B(x_0,4r)} |D(x',y)|dydx' \\ &\leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta},\end{aligned}$$

con $\delta = \text{mín}\{1, 2-d/q\}$.

Por último vamos a acotar el término B. En primer lugar escribimos

$$\begin{aligned}B \leq &\left|\int \mathcal{K}_2(x,y)\left(\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right) - \varphi\left(\frac{|x'-y|}{4\rho(x_0)}\right)\right)dy\right| \\ &+ \left|\int (\mathcal{K}(x,y) - \mathcal{K}(x',y))\left(1-\varphi\left(\frac{|x-y|}{4\rho(x_0)}\right)\right)dy\right| = B_1 + B_2.\end{aligned}$$

En B_1 usamos (4.1.7), el teorema del valor medio para φ y el tamaño de $\mathcal{K}_2$ para obtener

$$B_1 \leq C\left(\frac{|x-x'|}{\rho(x_0)}\right)\int_{2\rho(x_0)\leq|x'-y|\leq 10\rho(x_0)} |\mathcal{K}_2(x,y)|dy \leq C\left(\frac{|x-x'|}{\rho(x_0)}\right). \tag{4.1.8}$$

Finalmente, en B_2, vamos a usar la suavidad de $\mathcal{K}_2$ para estimar

$$\begin{aligned}B_2 &\leq \int_{|x-y|\geq 2\rho(x_0)} |\mathcal{K}_2(x,y) - \mathcal{K}_2(x',y)|dy \\ &\leq C|x-x'|^{\tilde{\delta}}\int_{|x-y|\geq 2\rho(x_0)} \frac{dy}{|x-y|^{d+\tilde{\delta}}} \\ &\leq C\left(\frac{|x-x'|}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\delta}}.\end{aligned}$$

De todas las estimaciones anteriores se deduce que $\mathcal{R}_2(1)$ satisface (3.2.7) con $\varepsilon = \tilde{\delta} = \text{mín}\{1, 2-d/q, \alpha\}$.

□

4.2. Operadores que involucran el potencial

En esta sección analizaremos transformadas de Riesz-Schrödinger de tipo $V^\gamma L^{-\gamma}$ para $0<\gamma<d/2$, y $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ para $1/2<\gamma\leq 1$, actuando sobre espacios $BMO_\rho^\beta(w)$. La estrategia será similar a la sección anterior. En primer lugar probar que son operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund y posteriormente aplicar el Corolario 3.2.5 para obtener correspondientes resultados en espacios de suavidad.

4.2.1. Operadores $V^\gamma L^{-\gamma}$

Consideramos operadores de tipo $V^\gamma L^{-\gamma}$ para $0<\gamma<d/2$. En primer lugar, mostraremos que, bajo las hipótesis adicionales sobre V, estos operadores resultan de Schrödinger-Calderón-Zygmund. Para esto observamos que el núcleo asociado viene dado por

$$V^\gamma L^{-\gamma} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} V^\gamma(x) J_\gamma(x,y) f(y)dy,$$

donde J_γ es el núcleo asociado al operador integral fraccionario $L^{-\gamma}$ que, como vimos en el Capítulo 2, satisface las condiciones de tamaño y suavidad (2.4.22) y (2.4.24).

Proposición 4.2.1. *Sea $V\in RH_q$ con $q>d/2$ y $0<\gamma<d/2$. Si existe $\alpha>0$ tal que V satisface* (4.0.2) *entonces $V^\gamma L^{-\gamma}$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo $(\infty,\tilde{\delta})$ con $\tilde{\delta}=\text{mín}\{1,2-d/q,\alpha,\alpha\gamma\}$.*

Demostración. Sea $0<\gamma<q/2$ y $V\in RH_q$ con $q>d/2$, que satisface (4.0.2) para algún $\alpha>0$. En primer lugar vamos a mostrar que el núcleo $V^\gamma(x)J_\gamma(x,y)$ satisface la condición de tamaño puntual (2.1.4). Utilizando (4.0.1) y (2.4.22) tenemos que, para cada $N>0$ existe C_N tal que, si $x\neq y$,

$$\begin{aligned} |V^\gamma(x)J_\gamma(x,y)| &\leq \frac{C_N}{\rho^{2\gamma}(x)|x-y|^{d-2\gamma}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \\ &\leq \frac{C_N}{|x-y|^d}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2\gamma}. \end{aligned}$$

Para ver la condición de suavidad puntal (2.1.5) consideramos $|x-y|>2|x-x'|$ y escribimos

$$\begin{aligned} |V^\gamma(x)J_\gamma(x,y)-&V^\gamma(x')J_\gamma(x',y)| \\ &\leq V^\gamma(x)|J_\gamma(x,y)-J_\gamma(x',y)| + |J_\gamma(x',y)||V^\gamma(x)-V^\gamma(x')|. \end{aligned}$$

Para el primer término usamos la suavidad del núcleo J_γ dada en (2.4.24) y la estimación (4.0.1) para obtener

$$\begin{aligned} V^\gamma(x)|J_\gamma(x,y) - J_\gamma(x',y)| &\le \frac{C_N|x-x'|^\delta}{\rho(x)^{2\gamma}|x-y|^{d-2\gamma+\delta}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \\ &\le C_N \frac{|x-x'|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2\gamma}, \end{aligned}$$

con $\delta = \text{mín}\{1, 2 - d/q\}$.

Para el segundo término vamos a usar que la función $t \mapsto t^\gamma$ es Lipschitz-$\tilde{\gamma}$ con $\tilde{\gamma} = \text{mín}\{1, \gamma\}$. Usando además (4.0.2), (2.4.22) y el Lema 1.2.8 obtenemos

$$\begin{aligned} |J_\gamma(x',y)||V^\gamma(x) - V^\gamma(x')| &\le |V(x) - V(x')|^{\tilde{\gamma}} \frac{C_N}{|x'-y|^{d-2\gamma}} \left(1 + \frac{|x'-y|}{\rho(y)}\right)^{-N} \\ &\le C_N \frac{|x-x'|^{\alpha\tilde{\gamma}}}{\rho(x)^{(2+\alpha)\tilde{\gamma}}|x-y|^{d-2\tilde{\gamma}}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^{-N} \\ &\le C_N \frac{|x-x'|^{\tilde{\gamma}\alpha}}{|x-y|^{d+\tilde{\gamma}\alpha}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N/(N_0+1)}. \end{aligned}$$

□

Usando la proposición anterior y el Corolario 3.2.5 podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.2. *Sean* $0 < \gamma < d/2$, $V \in RH_q$ *para* $q > d/2$ *y supongamos que* V *satisface* (4.0.2) *para cierto* $0 < \alpha \le 1$. *Si* $\tilde{\delta} = \text{mín}\{1, 2 - d/q, \alpha, \alpha\gamma\}$ *y* $0 \le \beta < \tilde{\delta}$, *entonces* $V^\gamma L^{-\gamma}$ *es acotado en* $BMO_\rho^\beta(w)$ *siempre que* $w \in A_\infty^\rho \cap D_\mu^\rho$ *y* $1 \le \mu < 1 + \frac{\tilde{\delta}-\beta}{d}$.

Demostración. Por la Proposición 4.2.1 tenemos que $V^\gamma L^{-\gamma}$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ). Por lo tanto, resta probar que el operador $V^\gamma L^{-\gamma}$ satisface (3.2.7) para poder aplicar el Corolario 3.2.5 y obtener el resultado deseado. Para ver esto consideremos $x \in \mathbb{R}^d$ y $z \in B(x, \rho(x))$, y escribimos

$$\begin{aligned} |V^\gamma L^{-\gamma}1(x) - V^\gamma L^{-\gamma}1(z)| &= \left| V^\gamma(x) \int_{\mathbb{R}^d} J_\gamma(x,y)dy - V^\gamma(z) \int_{\mathbb{R}^d} J_\gamma(z,y)dy \right| \\ &\le V^\gamma(x) \int_{\mathbb{R}^d} |J_\gamma(x,y) - J_\gamma(z,y)|dy \\ &\quad + |V^\gamma(x) - V^\gamma(z)| \int_{\mathbb{R}^d} |J_\gamma(z,y)|dy = A + B \end{aligned}$$

Para tratar A vamos a dividir la integral sobre $\mathbb{R}^d$ en los siguientes dominios $D_1 = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \le 2|x-z|\}$, $D_2 = \{y \in \mathbb{R}^d : 2|x-z| < |x-y| < \rho(x)\}$ y $D_3 = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \ge \rho(x)\}$. De esta manera, podemos usar la condición (4.0.1) para escribir

$$A \le \frac{C}{\rho^{2\gamma}(x)} \sum_{i=1}^{3} \int_{D_i} |J_\gamma(x,y) - J_\gamma(z,y)|dy = A_1 + A_2 + A_3.$$

En A_1 no podemos usar la estimación de la suavidad de J_γ. Acotamos la diferencia por la suma y obtenemos dos términos A_{11} y A_{12}. En A_{11} obtenemos

$$\begin{aligned}A_{11} &\leq \frac{C}{\rho^{2\gamma}(x)}\int_{|x-y|\leq 2|x-z|}|J_\gamma(x,y)|dy\\ &\leq \frac{C}{\rho^{2\gamma}(x)}\int_{|x-y|\leq 2|x-z|}\frac{dy}{|x-y|^{d-2\gamma}}\\ &\leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{2\gamma}.\end{aligned}$$

De igual manera puede obtenerse la misma estimación para A_{12}.

En A_2 podemos usar (2.4.23). Si $\delta = \text{mín}\{1, 2-d/q\} < 2\gamma$,

$$A_2 \leq C\frac{|x-z|^\delta}{\rho^{2\gamma}(x)}\int_{|x-y|<\rho(x)}\frac{dy}{|x-y|^{d-2\gamma+\delta}} \leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^\delta.$$

Por otro lado, si $\delta > 2\gamma$,

$$A_2 \leq C\frac{|x-z|^\delta}{\rho^{2\gamma}(x)}\int_{2|x-z|<|x-y|}\frac{dy}{|x-y|^{d-2\gamma+\delta}} \leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{2\gamma}.$$

Finalmente, cuando $\delta = 2\gamma$, para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos

$$A_2 \leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^\delta\frac{1}{|x-z|^\varepsilon}\int_{|x-y|<\rho(x)}\frac{dy}{|x-y|^{d-\varepsilon}} \leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{\delta-\varepsilon}.$$

Para A_3, usamos la estimación (2.4.24), y obtenemos

$$A_3 \leq \frac{C_N|x-z|^{\tilde\delta}}{\rho^{2\gamma-N}(x)}\int_{|x-y|\geq\rho(x)}\frac{dy}{|x-y|^{d-2\gamma+\tilde\delta+N}} \leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{\tilde\delta},$$

eligiendo N suficientemente grande.

Para estimar B usamos (4.0.2), (2.4.22) y que la función $t \mapsto t^\gamma$ es Lipschitz-$\tilde\gamma$ con $\tilde\gamma = \text{mín}\{1,\gamma\}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}B &\leq |V(x)-V(z)|^{\tilde\gamma}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{C_N}{|z-y|^{d-2\gamma}}\left(1+\frac{|z-y|}{\rho(z)}\right)^{-N}dy\\ &\leq C\frac{|x-z|^{\alpha\tilde\gamma}}{\rho(z)^{2\gamma+\alpha\tilde\gamma}}\left(\int_{|z-y|<\rho(z)}\frac{dy}{|z-y|^{d-2\gamma}}+\rho^N(z)\int_{|z-y|\geq\rho(z)}\frac{dy}{|z-y|^{d-2\gamma+N}}\right)\\ &\leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(z)}\right)^{\alpha\tilde\gamma},\end{aligned}$$

eligiendo $N > 2\gamma$.

□

4.2.2. Operadores $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$

En esta sección consideramos el operador $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ para $1/2 < \gamma \leq 1$. Llamemos K_γ al núcleo asociado al operador $\nabla L^{-\gamma}$. Si $\gamma = 1$, tenemos que, para si $f \in L^1_{\text{loc}}$,

$$V^{1/2}\nabla L^{-1}f(x) = V^{1/2}(x)\int \nabla_1\Gamma(x,y)f(y)dy = V^{1/2}(x)\int K_1(x,y)f(y)dy.$$

Mientras que, para $1/2 < \gamma < 1$,

$$K_\gamma(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i\tau)^{-\gamma}\nabla_1\Gamma(x,y,\tau)d\tau, \tag{4.2.1}$$

donde $\Gamma(x,y,\tau)$ es la solución fundamental del operador $-\Delta + (V + i\tau)$.

Vamos a usar esta expresión del núcleo para probar que, bajo las hipótesis adicionales sobre el potencial, $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund. Para ello, necesitaremos la siguiente estimación para $\Gamma(x,y,\tau)$, que puede encontrarse en la página 538 de [31]. Si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\begin{aligned} |\nabla_1\Gamma(x,y,\tau)| \leq\, & C_N\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \\ & \times\left(\frac{1}{|x-y|^{d-2}}\int_{B(x,|x-y|/4)}\frac{V(u)}{|x-u|^{d-1}}du + \frac{1}{|x-y|^{d-1}}\right). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Antes de probar que el núcleo asociado a $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ satisface condiciones de tamaño y suavidad necesitamos probar el siguiente lema que nos da una estimación para la derivada segunda de $\Gamma(x,y,\tau)$ bajo las hipótesis sobre el potencial que estamos considerando en este capítulo.

Lema 4.2.3. *Sea $\Gamma(x,y,\tau)$ la solución fundamental de $-\Delta + (V + i\tau)$. Sea $V \in RH_q$ con $q > d/2$ y tal que satisface* (4.0.2) *para cierto $\alpha > 0$. Entonces, para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que*

$$|\nabla_1^2\Gamma(x,y,\tau)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^d}\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-3}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \quad \textit{para } x \neq y.$$

Demostración. Llamamando $\Gamma(x,y,\tau)$ a la solución fundamental de $-\Delta + (V + i\tau)$ y $\Gamma_0(x,y,\tau)$ a la solución fundamental de $-\Delta + i\tau$ es posible obtener la siguiente formula similar a (4.1.1),

$$\begin{aligned}\nabla_1^2\Gamma(x,y,\tau) &= -\nabla_1^2\int_{\mathbb{R}^d}\Gamma_0(x,\xi,\tau)\eta_{x_0}(\xi)\Gamma(\xi,y,\tau)V(\xi)d\xi\\ &-\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_1^2\Gamma_0(x,\xi,\tau)\Gamma(\xi,y,\tau)\Delta\eta_{x_0}(\xi)d\xi \\ &+2\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_1^2\nabla_2\Gamma_0(x,\xi,\tau)\cdot\nabla\eta_{x_0}(\xi)\Gamma(\xi,y,\tau)d\xi = A+B+C.\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Aquí $|x-x_0|<|x-y|/8$ y η es una función infinitamente diferenciable tal que $\operatorname{sop}(\eta)\subset B(x_0,3|x-y|/8)$ y $\eta\equiv 1$ en $B(x_0,|x-y|/4)$.

Para la solución fundamental $\Gamma(x,y,\tau)$ tenemos las siguientes desigualdades que pueden encontrarse en [31] (pág. 535 y Teorema 2.7). Para cada $N>0$ existe C_N tal que

$$|\Gamma(\xi,y,\tau)|\leq\frac{C_N}{|\xi-y|^{d-2}}\left(1+\tau^{1/2}|\xi-y|\right)^{-N}\left(1+\frac{|\xi-y|}{\rho(y)}\right)^{-N}. \tag{4.2.4}$$

Además, si $|\xi-x|\leq|x-y|/2$

$$|\Gamma(\xi,y,\tau)-\Gamma(x,y,\tau)|\leq\frac{C}{(1+\tau^{1/2}|x-y|)^3}\frac{|x-\xi|^\delta}{|x-y|^{d-2+\delta}}, \tag{4.2.5}$$

con $\delta=\min\{1,2-d/q\}$. De esta manera, podemos estimar B y C al igual que se hizo en (4.1.3).

El término correspondiente a A puede pensarse como una integral singular con núcleo $\mathbf{K}_2^\tau$. Este núcleo puede no tener promedio cero sobre coronas, sin embargo, podemos escribir

$$\mathbf{K}_2^\tau(x,y)=(\mathbf{K}_2^\tau(x,y)-\mathbf{K}_2^0(x,y))+\mathbf{K}_2^0(x,y) \tag{4.2.6}$$

El núcleo $\mathbf{K}_2^0$ tiene promedio cero sobre coronas. De esta manera podemos seguir la estimación que hicimos en (4.1.2) usando ahora (4.2.4) y (4.2.5) junto con las hipótesis adicionales sobre el potencial para obtener para cada $N>0$ una constante C_N tal que

$$\left|\int\mathbf{K}_2^0(x,\xi)\Gamma(\xi,y,\tau)\eta_{x_0}(\xi)V(\xi)d\xi\right|\leq\frac{C_N}{|\xi-y|^d}\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-3}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}. \tag{4.2.7}$$

Para el término correspondeinte a la diferencia entre $\mathbf{K}_2^\tau$ y $\mathbf{K}_2^0$ usamos la siguiente estimación

$$|\mathbf{K}_2^\tau(x,y)-\mathbf{K}_2^0(x,y)|\leq\frac{C\tau}{|x-y|^{d-2}}. \tag{4.2.8}$$

Aplicando esta desigualdad y la estimación (4.2.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,3|x-y|/8)} &|\mathbf{K}_2^\tau(x,\xi)-\mathbf{K}_2^0(x,\xi)|\Gamma(\xi,y,\tau)\eta_{x_0}(\xi)V(\xi)d\xi \\
&\leq C_N\tau\int_{B(x_0,3|x-y|/8)}\frac{\left(1+\tau^{1/2}|\xi-y|\right)^{-N}\left(1+\frac{|y-\xi|}{\rho(y)}\right)^{-N}}{|x-\xi|^{d-2}|y-\xi|^{d-2}\rho^2(\xi)}d\xi \\
&\leq C_N\tau\frac{\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+3N_0+1}}{|x-y|^{d-2}\rho^2(x)}\int_{B(x,|x-y|)}\frac{d\xi}{|x-\xi|^{d-2}} \\
&\leq \frac{C_N\tau|x-y|^2}{|x-y|^d}\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+3N_0+3} \\
&\leq \frac{C_N}{|x-y|^d}\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N+2}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+3N_0+3}
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

□

Proposición 4.2.4. *Sea* $V\in RH_q$ *para* $q>d/2$. *Si existe* $\alpha>0$ *tal que* V *satisface* (4.0.2) *entonces* $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ *es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo* $(\infty,\tilde{\delta})$, *con* $\tilde{\delta}=\min\{1,\alpha(\gamma-1/2)\}$.

Demostración. En primer lugar escribimos

$$\begin{aligned}
|\nabla_1\Gamma(x,y,\tau)| &\leq C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}\frac{\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}}{|x-y|^{d-2}}\int_{B(x,|x-y|/4)}\frac{V(u)}{|x-u|^{d-1}}du \\
&+C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}\frac{\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}}{|x-y|^{d-1}}=I+II.
\end{aligned}$$

Ahora usando la condición (4.0.1) podemos estimar I de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
I &\leq C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}\frac{\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}}{|x-y|^{d-2}}\int_{B(x,|x-y|/4)}\frac{du}{\rho^2(u)|x-u|^{d-1}} \\
&\leq C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2N_0}\frac{\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}}{\rho^2(x)|x-y|^{d-2}}\int_{B(x,|x-y|/4)}\frac{du}{|x-u|^{d-1}} \\
&\leq C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2N_0+2}\frac{\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-N}}{|x-y|^{d-1}},
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

donde hemos usado también la desigualdad (1.2.7).

De esta manera, tenemos que para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$|K_1(x,y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^{d-1}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}. \tag{4.2.11}$$

Para $1/2<\gamma<1$, usando la ecuación (4.2.1) y haciendo un cambio de variables $\tau|x-y|^2 = s^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|K_\gamma(x,y)| &\leq C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2N_0+2}\frac{1}{|x-y|^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{s}{|x-y|}\right)^{-2\gamma}\frac{2s}{(1+s)^N|x-y|^2}ds\\
&\leq C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2N_0+2}\frac{1}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}\int_{\mathbb{R}}\frac{s^{-2\gamma+1}}{(1+s)^N}ds\\
&\leq C_N\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2N_0+2}\frac{1}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Luego, si $1/2<\gamma\leq 1$ podemos usar la condición (4.0.1) y obtener para cada $N>0$ una constante $C_N>0$ tal que

$$\begin{aligned}
|V^{\gamma-1/2}(x)K_\gamma(x,y)| &\leq \frac{C_N}{\rho(x)^{2\gamma-1}|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2N_0+2}\\
&\leq \frac{C_N}{|x-y|^d}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2N_0+2\gamma+1}.
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Veamos ahora la condición de suavidad. Sean $|x-x'|<|x-y|/2$. En primer lugar notamos la siguiente consecuencia del Lema 4.2.3. Para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$|\nabla_1\Gamma(x,y,\tau)-\nabla_1\Gamma(x',y,\tau) \leq \frac{C_N|x-x'|}{|x-y|^d}\left(1+\tau^{1/2}|x-y|\right)^{-3}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}. \tag{4.2.14}$$

Usando esta estimación y procediendo como en (4.2.12) tenemos que si $1/2<\gamma\leq 1$, para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$|K_\gamma(x,y)-K_\gamma(x',y)| \leq \frac{C_N|x-x'|}{|x-y|^{d+1-(2\gamma-1)}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}. \tag{4.2.15}$$

Ahora, escribimos

$$\begin{aligned}
|V^{\gamma-1/2}(x)K_\gamma(x,y)-V^{\gamma-1/2}(x')K_\gamma(x',y)| &= |V^{\gamma-1/2}(x)|K_\gamma(x,y)-K_\gamma(x',y)|\\
&\quad + |K_\gamma(x',y)||V^{\gamma-1/2}(x)-V^{\gamma-1/2}(x')| = A+B.
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Usando la estimación (4.2.15) junto con la condición (4.0.1) tenemos para cada $N > 0$ una constante C_N tal que

$$\begin{aligned} A &\le \frac{C_N|x-x'|}{\rho(x)^{2\gamma-1}|x-y|^{d+1-(2\gamma-1)}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \\ &\le \frac{C_N|x-x'|}{|x-y|^{d+1}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2\gamma-1}. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Para estimar B vamos considerar dos casos. Si $|x-x'| < \rho(x)$ podemos usar la condición (4.0.2) junto con la estimación (4.2.12) para obtener, para cada $N > 0$,

$$\begin{aligned} B &\le \frac{C_N}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}|V(x)-V(x')|^{\gamma-1/2} \\ &\le \frac{C_N}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}\frac{|x-x'|^{\alpha(\gamma-1/2)}}{\rho(x)^{(2+\alpha)(\gamma-1/2)}} \\ &\le \frac{C_N|x-x'|^{\alpha(\gamma-1/2)}}{|x-y|^{d+\alpha(\gamma-1/2)}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2\gamma-1+\alpha(\gamma-1/2)}. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Finalmente, si $|x-x'| > \rho(x)$, vamos acotar la diferencia de los potenciales por la suma. En el primer término podemos usar la condición (4.0.1) junto con la estimación (4.2.12) para obtener en cada término,

$$\begin{aligned} B &\le \frac{C_N}{\rho(x)^{2\gamma-1}|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \\ &\le \frac{C_N|x-x'|}{|x-y|^{d+1}}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N+2\gamma}. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

□

A continuación aplicaremos la proposición anterior y el Corolario 3.2.5 para obtener el siguiente resultado de regularidad para el operador $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$.

Teorema 4.2.5. *Sea $V \in RH_q$ para $q > d/2$ y supongamos que V satisface* (4.0.2) *para cierto* $0 < \alpha \le 1$. *Sea $\tilde{\delta} = \text{mín}\{1, \alpha(\gamma-1/2)\}$ y $0 \le \beta < \tilde{\delta}$, entonces $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es acotado en $BMO^{\beta}_{\rho}(w)$ siempre que $w \in A^{\rho}_{\infty} \cap D^{\rho}_{\mu}$ y $1 \le \mu < 1 + \frac{\tilde{\delta}-\beta}{d}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.2.4 tenemos que $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo $(\infty, \tilde{\delta})$, con $\delta = \text{mín}\{1, \alpha(\gamma-1/2)\}$. Para poder aplicar el Corolario 3.2.5 tenemos que mostrar que el operador satisface una condición tipo $T1$. Sean x, $z \in B(x_0, r)$ con $r < \rho(x_0)/2$. Escribimos

$$\begin{aligned}|V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}1(x) - V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}1(z)| &= V^{\gamma-1/2}(x)\int K_\gamma(x,y)dy - V^{1/2}(z)\int K_\gamma(z,y)dy \\ &\leq |V^{\gamma-1/2}(x) - V^{\gamma-1/2}(z)|\int |K_\gamma(x,y)|dy \\ &+ V^{\gamma-1/2}(z)\int |K_\gamma(x,y) - K_\gamma(z,y)|dy = A + B.\end{aligned}$$

En A vamos a usar (4.0.2) junto con la estimación (4.2.12) para obtener

$$\begin{aligned}A &\leq C_N|V(x) - V(z)|^{\gamma-1/2}\int \frac{1}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} dy \\ &\leq C_N\frac{|x-z|^{\alpha(\gamma-1/2)}}{\rho(x)^{(2+\alpha)(\gamma-1/2)}(x)}\left(\int_{|x-y|<\rho(x)}\frac{dy}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}} + \rho^N(x)\int_{|x-y|\geq\rho(x)}\frac{dy}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)+N}}\right) \\ &\leq C_N\frac{|x-z|^{\alpha(\gamma-1/2)}}{\rho(x)^{(2+\alpha)(\gamma-1/2)}(x)}\rho(x)^{2\gamma-1} \\ &\leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha(\gamma-1/2)},\end{aligned}$$

eligiendo $N > 1$.

En B escribimos

$$\begin{aligned}B &\leq V^{\gamma-1/2}(z)\int_{|x-y|\geq 2|x-z|}|K_\gamma(x,y) - K_\gamma(z,y)|dy \\ &+ V^{\gamma-1/2}(z)\int_{|x-y|<2|x-z|}|K_\gamma(x,y) - K_\gamma(z,y)|dy = B_1 + B_2.\end{aligned}$$

En B_1 podemos usar la estimación de suavidad para K_γ dada en (4.2.15) junto con (4.0.1), eligiendo $N > 0$ arbitrariamente pequeño

$$B_1 \leq C_N\frac{|x-z|}{\rho(x_0)^{2\gamma-1}}\rho(x)^N\int_{|x-y|\geq 2|x-z|}\frac{dy}{|x-y|^{d+1-(2\gamma-1)+N}} \leq C_N\left(\frac{|x-z|}{\rho(x_0)}\right)^{(2\gamma-1)-N}.$$

Finalmente, en B_2, acotamos $|K_\gamma(x,y) - K_\gamma(z,y)| \leq |K_\gamma(x,y)| + |K_\gamma(z,y)|$, obteniendo dos tÃľrminos. Estimamos ambos de igual manera.

$$\begin{aligned}V^{\gamma-1/2}(z)\int_{|x-y|<2|x-z|}|K_\gamma(x,y)| &\leq \frac{C}{\rho(z)^{2\gamma-1}}\int_{|x-y|<2|x-z|}\frac{dy}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}} \\ &\leq C\left(\frac{|x-z|}{\rho(x_0)}\right)^{2\gamma-1}.\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Desigualdades de tipo Fefferman-Stein

En la teoría de desigualdades pesadas en L^p un problema relevante es el siguiente: dado un operador T y $1 < p < \infty$, encontrar un operador positivo $\mathcal{M}$ tal que desigualdades del tipo

$$\int |Tf|^p w \leq \int |f|^p \mathcal{M}w, \tag{5.0.1}$$

valgan para alguna familia razonable de funciones, bajo mínimas hipótesis sobre el peso w. Sin embargo, una desigualdad como esta sólo tiene sentido cuando $\mathcal{M}w$ es finito c.t.p. y, por supuesto, es deseable obtener un operador $\mathcal{M}$ lo más pequeño posible.

La primer aparición de este tipo de desigualdades es un clásico resultado de Fefferman-Stein ([16]) para $T = \mathcal{M} = M$ el operador maximal de Hardy-Littlewood, esto es,

$$\int |Mf|^p w \leq \int |f|^p Mw, \tag{5.0.2}$$

para $1 < p < \infty$.

Cuando T es un operador integral singular, Córdoba y Fefferman mostraron en [10] que la desigualdad (5.0.1) vale tomando $\mathcal{M}w = M_r w = (M(w^r))^{1/r}$, para cualquier $1 < r < \infty$. Sin embargo, se sabe que la desigualdad no vale cuando $r = 1$ y T es la transformada de Hilbert.

Posteriormente, en [33], Wilson obtiene desigualdades para $1 < p < 2$ y $\mathcal{M} = M \circ M$, mejorando los resultados de [10] puesto que $M \circ M(w) \leq M(w^r)^{1/r}$ para todo $r > 1$ y vale la desigualdad estricta para ciertos pesos w

En 1995, C. Pérez ([28]) dio una respuesta completa a este problema con técnicas diferentes incluyendo desigualdades de tipo débil para $p = 1$. Para obtener una desigualdad más justa propone trabajar con operadores maximales que involucren promedios asociados a funciones de Young que pueden ser más pequeños que M_r. Enunciaremos precisamente estos resultados pues serán esenciales para nuestro trabajo, pero primero necesitamos recordar e introducir algunos conceptos.

Las definiciones de funciones de Young y de los operadores maximales asociados a ellas fueron definidos en el Capítulo 1. Aquí necesitamos definir además $\mathcal{D}_p$ como la clase de funciones A de Young que satisfacen

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{p'-1} \frac{dt}{t} < \infty \tag{5.0.3}$$

para algún $c > 0$.

Teorema 5.0.6. (ver Teorema 1.5 y §3 en [28]) *Sea $1 < p < \infty$, y sea T un operador de Calderón-Zygmund. Supongamos que $A \in \mathcal{D}_p$. Entonces existe una constante C tal que para cada peso w*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(y)|^p w(y)dy \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p M_A w(y)dy. \tag{5.0.4}$$

El siguiente teorema trata el caso límite $p = 1$ y también es un resultado de C. Pérez. Aquí enunciamos una versión que puede encontrarse en [11] como Teorema 9.31.

Teorema 5.0.7. *Sean T un operador de Calderón-Zygmund y $A \in \bigcup_{p>1} \mathcal{D}_p$. Entonces existe una constante C tal que para cada peso w y para todo $\lambda > 0$ se tiene*

$$w(\{y \in \mathbb{R}^d : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M_A w(y)dy. \tag{5.0.5}$$

Algunos ejemplos de funciones en la clase $\mathcal{D}_p$ son $A(t) = t \log^{p-1+\varepsilon}(1+t)$ o $A(t) = t \log^{p-1}(1+t) \log^{p-1+\varepsilon}(\log(1+t))$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Para la clase $\bigcup_{p>1} \mathcal{D}_p$, podemos tomar $A(t) = t \log^{\varepsilon}(1+t)$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

En este capítulo vamos a probar resultados de este tipo para operadores asociados a L. La clase de operadores con la que vamos a trabajar es la familia de operadores de Schrödinger localmente comparables con operadores de Calderón-Zygmund definida en la Sección 2.2. Elegimos trabajar con esta familia ya que la técnica que usaremos consiste en comparar localmente con operadores de Calderón-Zygmund clásicos, para los cuales podemos aplicar los Teoremas 5.0.6 y 5.0.7. Enunciamos estos resultados generales en la Sección 5.1 y damos las correspondientes demostraciones en la Sección 5.2.

Posteriormente, en la Sección 5.3 vamos aplicar los resultados de este capítulo a los ejemplos de operadores de Schrödinger localmente comparables con operadores de Calderón-Zygmund dados en la sección 2.3, esto es, los operadores $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ y sus adjuntos $\mathcal{R}_1^\star$ y $\mathcal{R}_2^\star$. Para estos operadores, conseguimos obtener desigualdades del tipo (5.0.4) con algunas diferencias. En todos los casos, el operador maximal que aparece del lado derecho satisface $\mathcal{M}1 \leq 1$, luego las desigualdades que obtengamos implican acotación en L^p. Por lo tanto, el rango de p será a veces limitado, exactamente como en el trabajo original de Shen. Por otra parte, podemos esperar obtener un operador $\mathcal{M}$ más pequeño debido al decaimiento de estas transformadas de Riesz-Schrödinger en el infinito. Además, puesto que los núcleos no son simétricos, es esperable que los resultados sean distintos para T y su adjunto. Aquí, queremos remarcar que las desigualdades que mostramos para los operadores adjuntos no son obtenidas por un argumento de dualidad. De hecho, procediendo de esta manera no podríamos obtener una desigualdad con un peso arbitrario en el lado izquierdo como las que buscamos.

En la Sección 5.3 también mostramos resultados para operadores de tipo $L^{-\gamma}V^{\gamma}$ para $0 < \gamma < d/2$ y $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ para $1/2 < \gamma \leq 1$. Estos operadores pertenecen a la familia mencionada eligiendo $T_0 \equiv 0$. Esto se debe a que los núcleos no son singulares y por lo tanto las integrales que los definen existen en el sentido de Lebesgue. De hecho satisfacen, además del decaimiento, una condición de tamaño en la diagonal que asegura, por ejemplo, la acotación fuerte en $L^1(w)$ para $w \in A_1^{\rho}$. Hemos elegido entonces tratarlos separadamente de los casos $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ para enfatizar las mejores propiedades de sus núcleos que nos permiten obtener mejores desigualdades. Sin embargo, como veremos, usaremos en la prueba estimaciones obtenidas en el caso anterior.

Finalmente, en la Sección 5.4 usaremos los resultados previos para dar condiciones suficientes sobre la función f que aseguren integrabilidad local de Tf, siendo T alguno de los operadores mencionados. A su vez, estos resultados pueden aplicarse a ecuaciones diferenciales asociadas a L y derivar condiciones suficientes para que, por ejemplo, las primeras o segundas derivadas sean localmente integrables en norma-p. Esta aplicación aparece al final de la Sección 5.4.

5.1. Resultados obtenidos por comparación

En esta sección vamos a considerar el espacio $\mathbb{R}^d$ con una función de radio crítico $\rho : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$, esto es, una función que satisface (1.2.7). Vale recordar que si ρ es una función de radio crítico, entonces para cualquier $\gamma > 0$, $\gamma\rho$ también es una función de radio crítico. Más aún, si $\gamma \leq 1$, $\gamma\rho$ satisface (1.2.7) con las mismas constantes que ρ.

La técnica que aquí usaremos para lograr desigualdades tipo Fefferman-Stein difiera de la de los capítulos anteriores y rescata las ideas originales de Shen sobre comparación local de los operadores Riesz-Schrödinger con los de la teoría asociada al operador de Laplace. Si bien también enunciaremos resultados generales, las hipótesis están orientadas a explotar tal comparación, alentados por las desigualdades ya mencionadas para operadores de Calderón-Zygmund (Teorema 5.0.6 y Teorema 5.0.7).

Enunciamos a continuación los teoremas principales de este capítulo. Los operadores maximales que aparecen aplicados al peso w son los definidos en el Capítulo 1, Sección 1.2.5.

Teorema 5.1.1. *Sea T un operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s, ε) para algún $1 < s < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, para cada $\theta \geq 0$ y cualquier $w \in L^1_{\text{loc}}$, $w \geq 0$, T y $T^{\star}$ satisfacen las siguientes desigualdades*

$$\int |Tf|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M_r^\theta w, \tag{5.1.1}$$

siempre que $1 < p < s$ *y* $r = (s/p)'$,

$$\int |T^\star f|^p w \leq C_{\theta,A} \int |f|^p (M_A^{\mathrm{loc}} + M^\theta) w, \tag{5.1.2}$$

con $s' < p < \infty$ *y cualquier función de Young* $A \in \mathcal{D}_p$.

Si el núcleo K satisface estimaciones puntuales podemos obtener un estimación más precisa para T, como corolario del teorema anterior.

Corolario 5.1.2. *Sea T un Operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (∞, ε) para algún $\varepsilon > 0$. Entonces, T y $T^\star$ satisfacen* (5.1.2) *para* $1 < p < \infty$ *y cualquier función de Young* $A \in \mathcal{D}_p$.

El Corolario 5.1.2 se sigue inmediatamente del Teorema 5.1.1 puesto que las condiciones (a_∞) y (b_∞) implican a las condiciones (a_s) y (b_s) para todo $1 < s < \infty$, y son simétricas en x e y.

Para el caso límite $p = 1$ podemos obtener las siguientes desigualdades de tipo débil.

Teorema 5.1.3. *Sea T un Operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s, ε) para algún $1 < s < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, T satisface*

$$w(\{|Tf| > \lambda\}) \leq \frac{C_\theta}{\lambda} \int |f| M_{s'}^\theta w, \text{ para } \lambda > 0, \tag{5.1.3}$$

cualquiera sea el peso $w \in L^1_{\mathrm{loc}}$, $w \geq 0$. Más aún, si T es un Operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (∞, ε), entonces, para cualquier función de Young $A \in \bigcup_{p>1} \mathcal{D}_p$,

$$w(\{|Tf| > \lambda\}) \leq \frac{C_\theta}{\lambda} \int |f| \left(M_A^{\mathrm{loc}} + M^\theta\right) w, \text{ para } \lambda > 0. \tag{5.1.4}$$

Asimismo, la desigualdad (5.1.4) *también vale para* $T^\star$.

El núcleo asociado a algunos operadores relacionados a L satisface una condición de tamaño mas fuerte que (a_s). Para estos operadores podemos obtener desigualdades más precisas sin necesidad de usar la técnica de comparación.

Teorema 5.1.4. *Sea T un operador lineal con núcleo asociado K. Supongamos que para algún $s > 1$ y $\delta > 0$, K satisface*

(c_s) *Para cada $N > 0$ existe C_N tal que*

$$\left(\int_{R<|x_0-x|<2R} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \leq C R^{-d/s'} \left(1 + \frac{\rho(x_0)}{R}\right)^{-\delta} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N}$$

Cualesquiera sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, $y \in \mathbb{R}^d$ *tales que* $|y - x_0| < R/2$.

Entonces, para cada $\theta \geq 0$, T *satisface* (5.1.1) *para* $1 \leq p < s$ *y además*

$$\int |T^{\star} f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M^\theta(w), \tag{5.1.5}$$

para $s' < p < \infty$ *y cualquier y* $w \in L^1_{\text{loc}}$, $w \geq 0$.

5.2. Pruebas

Antes de dar las demostraciones de los teoremas de la sección anterior debemos establecer algunos lemas técnicos que serán útiles en lo que sigue. En general, los operadores maximales no pueden controlarse puntualmente por operadores localizados. Sin embargo, esto es posible si estamos considerando funciones soportadas en bolas sub-críticas y para puntos cercanos al soporte. En el siguiente lema determinamos cuanto debemos contraer una bola crítica para que podamos establecer este tipo de control.

Lema 5.2.1. *Sea* A *una función de Young y* B_0 *una bola crítica. Existe* $\gamma_0 > 0$ *tal que si* $0 < \gamma \leq \gamma_0$ *entonces para toda función* f *medible,*

$$M_A(f\chi_{\gamma B_0})(x) \leq C M_A^{\text{loc}}(f)(x), \tag{5.2.1}$$

para todo $x \in 2\gamma B_0$. *Aquí, la constante* C *depende sólo de la dimensión y de la función* A.

Demostración. Supongamos $x \in 2\gamma B_0$ con γ a elegir. Sea M_A^c la correspondiente maximal centrada, esto es, tomando supremo sólo sobre bolas con centro en el punto x. Como $M_A(f)(x) \leq C M_A^c(f)(x)$ para cualquier función f con constante dependiendo sólo de la dimensión y de la función A, es suficiente considerar bolas centradas en x. Sea x_0 el centro de B_0 y supongamos $r > 3\gamma\rho(x_0)$. Entonces $B(x,r) \supset B(x, 3\gamma\rho(x_0)) \supset \gamma B_0$ y

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)\cap\gamma B_0} |g| \;\leq\; \frac{1}{|B(x,3\gamma\rho(x_0))}\int_{\gamma B_0} |g| \leq \frac{1}{|B(x,3\gamma\rho(x_0))|}\int_{B(x,3\gamma\rho(x_0))} |g|,$$

para cualquier g no negativa.

Ahora, Si $\lambda > 0$, podemos aplicar la desigualdad anterior a $g = A(|f|/\lambda)$ obteniendo que, para $r \geq 3\gamma\rho(x_0)$,

$$\|f\chi_{\gamma B_0}\|_{A,B(x,r)} \leq \|f\|_{A,B(x,3\gamma B_0)}.$$

Entonces, si $x \in 2\gamma B_0$,

$$M_A^c(f\chi_{\gamma B_0})(x) \;\leq\; \sup_{r\leq 3\gamma\rho(x_0)} \|f\|_{A,B(x,r)}.$$

Para completar la prueba, basta tomar γ tal que $3\gamma\rho(x_0) \leq \rho(x)$ para todo $x \in 2\gamma B_0$.

De la desigualdad (1.2.7), tenemos que $\rho(x_0) \leq \rho(x) C_0 (1+2\gamma)^{N_0}$, luego γ debe tomarse tal que

$$3\gamma C_0(1+2\gamma)^{N_0} \leq 1. \tag{5.2.2}$$

Como el lado izquierdo tiende a 0 con γ, existe $\gamma_0 > 0$ tal que, para $0 < \gamma \leq \gamma_0$ vale la desigualdad. □

Las condiciones (a_s) y (b_s) están escritas de manera apropiada para probar las desigualdades propuestas para $T^\star$. Para esclarecer la prueba de las desigualdades enunciadas para T proponemos las siguientes condiciones equivalentes.

Lema 5.2.2. *Para cada $s > 1$, las condiciones (a_s) y (b_s) son respectivamente equivalentes a las condiciones*

(a'_s) *Para cada $N > 0$ existe C_N tal que*

$$\left(\int_{B(x_0,R/2)} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \leq C_N R^{-d/s'} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N},$$

para $R < |y - x_0| < 2R$.

(b'_s) *Existen C y $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\left(\int_{B(x_0,R/2)} |K(x,y) - K_0(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \leq C R^{-d/s'} \left(\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{\varepsilon}$$

para $R < |y - x_0| < 2R$ y $R \leq \rho(x_0)$.

Observación 5.2.3. En (a_s) la corona $R < |x - x_0| < 2R$ puede ser reemplazada por la corona $R < |x - x_0| < c_0 R$, $c_0 \geq 1$ con un cambio fijo en la constante C_N. Similarmente, en (a'_s), la corona $R < |y-x_0| < 2R$ puede sustituirse por $R < |y-x_0| < c_1 R$. Esto resulta de aplicar (a_s) o (a'_s) un número finito de veces. Comentarios análogos valen para (b_s) y (b'_s)

Demostración del Lema 5.2.2. Sea K un núcleo que satisface (a_s) para algún $s > 1$. Vamos a mostrar, en primer lugar, que $(a_s) \implies (a'_s)$. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ e y tales que $R < |x_0 - y| < 2R$. Es fácil verificar que $B(x_0, R/2) \subset \{x : R/2 < |x - y| < 4R\}$. Entonces, aplicando la conidición (a_s) y la observación anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(x_0,R/2)} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} &\leq \left(\int_{R/2<|y-x|<4R} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \\
&\leq C_N R^{-d/s'} \left(1 + \frac{R}{\rho(y)}\right)^{-N} \\
&\leq C_N R^{-d/s'} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-\tilde{N}},
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 1.2.8 en la última desigualdad.

Par ver que $(a'_s) \implies (a_s)$ sean $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ e $y \in B(x_0, R/2)$. El anillo $\{x : R < |x - x_0| < 2R\}$ puede cubrirse por $M = M(d)$ bolas de radio $R/4$ y centros x_i, tales que

$R < |x_i - x_0| < 2R$, para $i = 1, \dots, M$. Para cada una de estas bolas puede verse que $R/2 < |x_i - y| < 5R/2$. Aplicando la condición (a'_s) en cada bola,

$$\begin{aligned}\left(\int_{R/2<|y-x|<4R} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} &\leq \sum_{i=1}^{M}\left(\int_{B(x_i,R/4)} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s}\\ &\leq \sum_{i=1}^{M} C_N R^{-d/s'}\left(1+\frac{R}{\rho(x_i)}\right)^{-N}\\ &\leq C_N R^{-d/s'}\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-\tilde{N}},\end{aligned}$$

donde usamos nuevamente el Lema 1.2.8 en la última desigualdad.

Omitimos la prueba de $(b_s) \iff (b'_s)$ pues sigue las mismas lineas que la anterior.

□

Daremos a continuación las demostraciones de los teoremas de la sección anterior.

Demostración del Teorema 5.1.1. Sea T un operador de Schrödinger comparable a un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s, ε), para algún $s > 1$, $\varepsilon > 0$. Sea T_0 el correspondiente operador de Calderón-Zygmund con núcleo K_0. Sean K el núcleo de T, w un peso, $\theta \geq 0$, $1 < p < s$ y A una función de Young que satisface (5.0.3).

Probaremos en primer lugar la desigualdad (5.1.1). Sea γ_0 como en el Lemma 5.2.1. Para algún $\gamma \leq \gamma_0$ a elegir, sea $\{B_n\}$ la descomposición del espacio dada en la Proposición 1.2.6 para la función de radio crítico $\gamma\rho$. Podemos escribir

$$\begin{aligned}\int |Tf|^p w &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |Tf|^p w\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{2B_n}) + T(f\chi_{(2B_n)^c}) \pm T_0(f\chi_{2B_n})|^p w\\ &\leq C_p\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{2B_n}) - T_0(f\chi_{2B_n})|^p w + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{(2B_n)^c})|^p w\right.\\ &\left.+\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T_0(f\chi_{2B_n})|^p w\right) = C_p\left(I + II + III\right).\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

En III, como T_0 es un operador de Calderón-Zygmund, podemos aplicar el Teorema 5.0.6 y el Lema 5.2.1 para obtener

$$\begin{aligned}
III &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |T_0(f\chi_{2B_n})|^p (w\chi_{B_n}) \\
&\leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f\chi_{2B_n}|^p M_A(w\chi_{B_n}) \\
&\leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{2B_n} |f|^p M_A^{\mathrm{loc}}(w) \\
&\leq C \int |f|^p M_A^{\mathrm{loc}}(w),
\end{aligned}$$

puesto que $A \in \mathcal{D}_p$.

Para estimar II usamos las desigualdades de Minkowski y Hölder, obteniendo

$$\begin{aligned}
II &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{(2B_n)^c})|^p w \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} \left[\int_{(2B_n)^c} |K(x,y)||f(y)|dy\right]^p w(x)dx \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\int_{(2B_n)^c} |f(y)| \left(\int_{B_n} |K(x,y)|^p w(x)dx\right)^{1/p} dy\right]^p \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{2^k B_n \setminus 2^k B_n} |f(y)| \left(\int_{B_n} |K(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \left(\int_{B_n} w^r(x)dx\right)^{1/rp} dy\right]^p.
\end{aligned}$$

con $r = (s/p)'$. A continuación, aplicamos la condición (a_s') para K, que es equivalente a la condición (a_s) por el Lema 5.2.2. Para cada $N > 0$,

$$\begin{aligned}
II &\leq C_N \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} |2^k B_n|^{-1/s'} 2^{-kN} \int_{2^k B_n} |f(y)| \left(\int_{B_n} w^r(x)dx\right)^{1/rp} dy\right]^p \\
&\leq C_N \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} |2^k B_n|^{-1/s'+1/p'} 2^{-kN} \left(\int_{2^k B_n} |f(y)|^p \left(\int_{2^k B_n} w^r(x)dx\right)^{1/r} dy\right)^{1/p}\right]^p \\
&\leq C_N \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N-\theta/p)} \left(\int_{2^k B_n} |f(y)|^p\, 2^{k\theta} \left(\frac{1}{|2^k B_n|} \int_{2^k B_n} w^r(x)dx\right)^{1/r} dy\right)^{1/p}\right]^p \\
&\leq C_N \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N-\theta/p)} \left(\int_{2^k B_n} |f(y)|^p\, M_r^\theta w(y)dy\right)^{1/p}\right]^p.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la desigualdad de Hölder para la suma en k y eligiendo $N = N_1 + \theta/p + 1$, donde N_1 es la constante en Proposición 1.2.6, obtenemos

$$\begin{aligned}
II &\leq C_\theta \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N_1+1)} \int_{2^k B_n} |f(y)|^p\, M_r^\theta w(y)dy\right] \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N_1+1)}\right]^{p/p'} \\
&\leq C_\theta \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N_1+1)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{2^k B_n}\right) |f|^p\, M_r^\theta w \\
&\leq C_\theta \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\, M_r^\theta w.
\end{aligned}$$

Sólo resta estimar I. Sea $D(x,y) = K(x,y) - K_0(x,y)$, observando que para $x \in B_n$ y debido a nuestra elección de γ, $2B_n \subset B(x,\rho(x))$, resulta

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{2B_n}) - T_0(f\chi_{2B_n})|^p w \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} \left[\int_{2B_n} |D(x,y)||f(y)|dy\right]^p w(x)dx \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} \left[\int_{B(x,\rho(x))} |D(x,y)||f(y)|dy\right]^p w(x)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^p w(x)dx = \|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d,w)},
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

donde

$$h(x) = \int_{B(x,\rho(x))} |D(x,y)||f(y)|dy.$$

Ahora bien, por la elección de B_n se puede ver que para cada k fijo y cualquiera sea n podemos tomar 2^{dk} bolas disjuntas de la forma $B^l_{n,k} = B(x^l_{n,k}, 2^{-k}\gamma\rho(x_n))$ tales que para $\sigma > \sqrt{d}$,

$$B_n \subset \bigcup_{l=1}^{2^{dk}} \sigma B^l_{n,k} \subset 2\sigma B_n.$$

Más aún, existe una constante que depende sólo de σ y d tal que,

$$\sum_{l=1}^{2^{dk}} \chi_{\sigma B^l_{n,k}} \leq C_{d,\sigma}\chi_{2\sigma B_n}.$$

Entonces, por la Proposición 1.2.6, $\{\sigma B^l_{n,k}\}_{l,n}$ cubre $\mathbb{R}^d$ y

$$\sum_{l,n} \chi_{\sigma B^l_{n,k}} \leq C_{d,\sigma,\rho}.$$

Fijemos $\sigma = 2\sqrt{d}$. Es posible elegir γ suficientemente pequeño tal que, si $x \in 2\sqrt{d}B^l_{n,k}$ y $2^{-k-1}\rho(x) \le |y-x| \le 2^{-k}\rho(x)$ entonces

$$y \in E^l_{n,k} = \{y : 4\sqrt{d}\gamma 2^{-k}\rho(x_n) \le |y - x^l_{n,k}| \le \beta\gamma 2^{-k}\rho(x_n)\}.$$

para cierto $\beta > 4\sqrt{d}$ (por ejemplo, podemos tomar $\gamma = (2C_0(5\sqrt{d})^{N_0+1})^{-1}$ y $\beta = 3C_0^2(5\sqrt{d})^{N_0+2}$).

Ahora, escribimos h de la siguiente manera

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{-k}\rho(x))\setminus B(x,2^{-k-1}\rho(x))} |D(x,y)||f(y)|dy.$$

Entonces, para el cubrimiento del espacio $\{2\sqrt{d}B^l_{n,k}\}_{n,l}$, se tiene, para $r = (s/p)'$,

$$\begin{aligned}
\|h_k\|^p_{L^p(w)} &\le \sum_{n,l} \int_{2\sqrt{d}B^l_{n,k}} \left[\int_{B(x,2^{-k}\rho(x))\setminus B(x,2^{-k-1}\rho(x))} |D(x,y)||f(y)|dy\right]^p w(x)dx \\
&\le \sum_{n,l} \int_{2\sqrt{d}B^l_{n,k}} \left[\int_{E^l_{n,k}} |D(x,y)||f(y)|dy\right]^p w(x)dx \\
&\le \sum_{n,l} \left[\int_{E^l_{n,k}} |f(y)| \left(\int_{2\sqrt{d}B^l_{n,k}} |D(x,y)|^p w(x)dx\right)^{1/p} dy\right]^p \\
&\le \sum_{n,l} \left[\int_{E^l_{n,k}} |f(y)| \left(\int_{2\sqrt{d}B^l_{n,k}} |D(x,y)|^s dx\right)^{1/s} \left(\int_{2\sqrt{d}B^l_{n,k}} w^r(x)dx\right)^{1/(rp)} dy\right]^p,
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

donde hemos aplicado las desigualdades de Minkowski y Hölder en los últimos dos pasos. Ahora, usando la condición (b'_s) para $D(x,y)$ y la Observación 5.2.3 y la definición de M^θ_r para bolas sub-críticas obtenemos

$$\begin{aligned}
\|h_k\|^p_{L^p(w)} &\le C \sum_{n,l} (2^{-k}\rho(x_n))^{-dp/s'} 2^{-k\varepsilon p} \left[\int_{\beta B^l_{n,k}} |f(y)| \left(\int_{\beta B^l_{n,k}} w^r(x)dx\right)^{1/(rp)} dy\right]^p \\
&\le C 2^{-k\varepsilon p} \sum_{n,l} \int_{\beta B^l_{n,k}} |f(y)|^p \left(\frac{1}{|\beta B^l_{n,k}|}\int_{\beta B^l_{n,k}} w^r(x)dx\right)^{1/r} dy \\
&\le C_\theta 2^{-k\varepsilon p} \sum_{n,l} \int_{\beta B^l_{n,k}} |f(y)|^p M^\theta_r w(y)dy \\
&\le C_\theta 2^{-k\varepsilon p} \|f\|^p_{L^p(M^\theta_r w)}.
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Finalmente,

$$\|h\|_{L^p(w)} \le \sum_{k\ge 0} \|h_k\|_{L^p(w)} \le C \sum_{k \ge 0} 2^{-k\varepsilon} \|f\|_{L^p(M^\theta_r w)} \le C\|f\|_{L^p(M^\theta_r w)}. \tag{5.2.7}$$

Usando ahora las estimaciones obtenidas para I, II y III llegamos a la desigualdad (5.1.1).

Ahora, vamos a probar la desigualdad (5.1.2). Como en (5.2.3) podemos escribir

$$\int |T^\star f|^p w \leq C_p(I^\star + II^\star + III^\star),$$

y estimar $III^\star$ de la misma manera que hicimos para III, puesto que $T_0^\star$ también es un operador de Calderón-Zygmund.

Para $II^\star$, se tiene

$$\begin{aligned} II^\star &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T^\star(f\chi_{(2B_n)^c})|^p w \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} \left(\int_{(2B_n)^c} |K(x,y)||f(x)|dx \right)^p w(y)dy \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Si $y \in B_n$, usando nuevamente la desigualdad de Hölder y la condición (a_s),

$$\begin{aligned} &\int_{(2B_n)^c} |K(x,y)||f(x)|dx \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_{2^{k+1}B_n \setminus 2^k B_n} |K(x,y)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_{2^{k+1}B_n} |f|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_{2^{k+1}B_n \setminus 2^k B_n} |K(x,y|^s dx \right)^{1/s} \left(\int_{2^{k+1}B_n} |f|^p \right)^{1/p} |2^k B_n|^{1/s'-1/p} \\ &\leq C_N \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kN} \left(\fint_{2^{k+1}B_n} |f|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C_N \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kN} \fint_{2^{k+1}B_n} |f|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kN} \right]^{1/p} \\ &\leq C_N \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kN} \fint_{2^{k+1}B_n} |f|^p \right]^{1/p}. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Entonces, recordando la definición de M^θ para bolas super-críticas,

$$\begin{aligned} II^\star &\leq C_N \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kN} \frac{1}{|2^{k+1}B_n|} \int_{2^{k+1}B_n} |f|^p \int_{2^{k+1}B_n} w(y)dy \\ &\leq C_N \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N-\theta)} \int_{2^{k+1}B_n} |f|^p M^\theta w \\ &\leq C_N \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N-\theta)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{2^{k+1}B_n} \right) |f|^p M^\theta w \\ &\leq C_\theta \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p M^\theta w, \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

eligiendo $N = N_1 + \theta + 1$, donde N_1 es la constante que aparece en el lema de cubrimiento por bolas críticas (ver Proposición 1.2.6).

Sólo resta estimar $I^\star$. Procedemos como en (5.2.4) para llegar a

$$I^\star = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T^\star(f\chi_{2B_n}) - T_0^\star(f\chi_{2B_n})|^p w \leq \|h^\star\|^p_{L^p(w)},$$

donde

$$h^\star(y) = \int_{B(y,\rho(y))} |D(x,y)||f(x)|dx.$$

Ahora,

$$h^\star(y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^\star(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(y,2^{-k}\rho(y))\setminus B(y,2^{-k-1}\rho(y))} |D(x,y)||f(x)|dx.$$

Para cada k fijo, usamos la desigualdad de Hölder y escribiendo $B(y,\rho(y)) = B_y$,

$$h_k^\star(y) \leq C \left(\int_{2^{-k}B_y \setminus 2^{-k+1}B_y} |D(x,y)|^s dx \right)^{1/s} \left(\int_{2^{-k}B_y} |f|^p \right)^{1/p} (2^{-k}\rho(y))^{d/((s/p')'p')}. \tag{5.2.11}$$

Ahora, para un k fijo, consideramos nuevamente el cubrimiento $\{B(x_{n,k}^l, 2\sqrt{d}\gamma 2^{-k}\rho(x_n))\}_{n,l}$. Usando la condición (b_s), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|h_k^\star\|^p_{L^p(w)} &\leq \sum_{n,l} \int_{B_{n,k}^l} |h_k^\star(y)|^p w(y)dy \\
&\leq C \sum_{n,l} \left(\int_{\beta B_{n,k}^l} |f|^p \right) (2^{-k}\rho(y_j))^{dp(1/s'-1/p)} \int_{B_{n,k}^l} \left(\int_{E_{n,k}^l} |D(x,y)|^s dx \right)^{p/s} w(y)dy \\
&\leq C \sum_{n,l} \left(\int_{\beta B_{n,k}^l} |f|^p \right) \frac{2^{-kp'\varepsilon}}{(2^{-k}\rho(y_n))^d} \int_{\beta B_{n,k}^l} w(y)dy \\
&\leq C \sum_{n,l} 2^{-kp\varepsilon} \int_{\beta B_{n,k}^l} |f(x)|^p \frac{1}{|\beta B_{n,k}^l|} \int_{\beta B_{n,k}^l} w(y)dydx \\
&\leq C_\theta 2^{-kp\varepsilon} \sum_{n,l} \int_{\beta B_{n,k}^l} |f|^p M^\theta w \\
&\leq C_\theta 2^{-kp\varepsilon} \|f\|^p_{L^p(M^\theta w)}
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Entonces, como hicimos en (5.2.7)

$$\|h^\star\|_{L^p(w)} \leq C \sum_k \|h_k^\star\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(M^\theta w)} \tag{5.2.13}$$

Usando las estimaciones para $I^\star$, $II^\star$ y $III^\star$ obtenemos (5.1.2).

$\square$

Observación 5.2.4. Vale notar que las estimaciones obtenidas para I y II también son válidas en el caso $p=1$. Siguiendo las mismas ideas llegamos a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{B_n}|T(f\chi_{(2B_n)^c})|w \leq C_\theta\int_{\mathbb{R}^d}|f|M^\theta_{s'}(w), \tag{5.2.14}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{B_n}|T(f\chi_{2B_n})-T_0(f\chi_{2B_n})|w \leq C_\theta\int_{\mathbb{R}^d}|f|M^\theta_{s'}(w). \tag{5.2.15}$$

A continuación damos una prueba para las desigualdades de tipo débil $(1,1)$ del Teorema 5.1.3

Demostración del Teorema 5.1.3. Sea T un operador de Schrödinger comparable localmente con un operador de Calderón-Zygmund de tipo (s,ε). Sean T_0 el correspondiente operador de Calderón-Zygmund, K y K_0 los núcleos asociados a T y T_0 y w un peso. Supongamos primero que $1<s<\infty$. Consideramos de nuevo $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la partición del espacio asociada a $\gamma\rho$, con γ elegido como en la prueba del Teorema 5.1.1. Sea $\lambda>0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
w(\{|Tf|>\lambda\}) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} w(\{x\in B_n : |Tf(x)|>\lambda\})\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} w(\{x\in B_n : |T(f\chi_{2B_n})(x)-T_0(f\chi_{2B_n})(x)|>\lambda/3\})\\
&+\sum_{n\in\mathbb{N}} w(\{x\in B_n : |T(f\chi_{(2B_n)^c})(x)|>\lambda/3\}).\\
&+\sum_{n\in\mathbb{N}} w(\{x\in B_n : |T_0(f\chi_{2B_n})(x)|>\lambda/3\}) = I+II+III.
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Para estimar III podemos usar esta vez el Teorema 5.0.7 junto con el Lema 5.2.1 para obtener

$$\begin{aligned}
III &= \sum_{n\in\mathbb{N}} w(\{x\in B_n : |T_0(f\chi_{2B_n})(x)|>\lambda/3\})\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} w\chi_{B_n}(\{x : |T_0(f\chi_{2B_n})(x)|>\lambda/3\})\\
&\leq \frac{C}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{2Q_n}|f|M_A(w\chi_{B_n})\\
&\leq \frac{C}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{2Q_n}|f|M_A^{\mathrm{loc}}(w)\\
&\leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f|M_A^{\mathrm{loc}}(w),
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

para toda $A \in \bigcup_{p>1} \mathcal{D}_p$. En particular, podemos elegir $A(t) = t^{s'}$ ya que no vamos a obtener nada mejor en los otros términos.

Para estimar I y II podemos usar las desigualdades de tipo fuerte para $p = 1$ enunciadas en la Observación 5.2.4, obteniendo así (5.1.3).

Ahora, supongamos que $s = \infty$, esto es, que el núcleo K satisface las condiciones puntuales (a_∞) y (b_∞). Sea $\lambda > 0$, usamos la misma descomposición que en (5.2.16) para obtener

$$w(\{|Tf > \lambda\}) \leq I + II + III,$$

y tratamos III de la misma forma, arribando a

$$III \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f| M_A^{\mathrm{loc}}(w),$$

para cualquier $A \in \bigcup_{p>1} \mathcal{D}_p$.

Para estimar II usamos la desigualdad de Chebyshev,

$$\begin{aligned}
II &= \sum_{n\in\mathbb{N}} w(\{x \in B_n : |T(f\chi_{(2B_n)^c})(x)| > \lambda/3\}) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3}{\lambda} \int_{B_n} |T(f\chi_{(2B_n)^c})|(x) w(x)dx \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3}{\lambda} \int_{B_n} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{2^{k+1}B_n \setminus 2^k B_n} |K(x,y)||f(y)|dy \right) w(x)dx.
\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Ahora, usando la condición (a_∞) y la definición de M^θ,

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{C_N}{\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^{-kN}}{(2^k \rho(x_n))^d} \left(\int_{2^{k+1}B_n} |f(y)|dy \right) w(x)dx \\
&\leq \frac{C_N}{\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kN} \int_{2^{k+1}B_n} |f(y)| \left(\frac{1}{|2^{k+1}B_n|} \int_{2^{k+1}B_n} w(x)dx \right) dy \\
&\leq \frac{C_N}{\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N-\theta)} \int_{2^{k+1}B_n} |f(y)| M^\theta(w) dy \\
&\leq C_N \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k(N-\theta)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{2^{k+1}B_n} \right) |f(y)| M^\theta(w) dy \\
&\leq C_\theta \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M^\theta(w) dy,
\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

eligiendo $N = N_1 + \theta + 1$.

Para estimar I usamos la desigualdad de Chebyshev y (b_∞), obteniendo

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j\in\mathbb{N}} w(\{x \in B_n : |(T-T_0)(f\chi_{2B_n})(x)| > \lambda/3\}) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3}{\lambda} \int_{B_n} \left(\int_{2B_n} |K(x,y) - K_0(x,y)||f(y)|dy \right) w(x)dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B_n} \left(\int_{2B_n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^d} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)} \right)^{\varepsilon} dy \right) w(x)dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(x_n)^{d/q-2} \int_{2B_n} |f(y)| \int_{B_n} |x-y|^{\varepsilon-d} w(x)dx\, dy.
\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

Ahora, si $y \in 2B_n$, llamando $B_n^y = B(y, 3\gamma\rho(x_n))$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{B_n} |x-y|^{\varepsilon-d} w(x)dx &\leq \int_{B_n^y} |x-y|^{\varepsilon-d} w(x)dx \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{2^{-k+1}B_n^y \setminus 2^{-k}B_n^y} |x-y|^{\varepsilon-d} w(x)dx \\
&\leq C\rho(x_n)^{\varepsilon} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^{-k}\rho(x_n))^d} \int_{2^{-k+1}B_n^y} w(x)dx \\
&\leq C\rho(x_n)^{\varepsilon} M^{\mathrm{loc}} w(y).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$I \leq \frac{C}{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{2Q_j} |f(y)| M^{\mathrm{loc}} w(y)dy \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M^{\mathrm{loc}} w(y)dy. \tag{5.2.21}$$

Reuniendo las estimaciones para I, II, y III llegamos a 5.1.4. La misma desigualdad puede obtenerse para $T^\star$ porque las condiciones (a_∞) y (b_∞) son simétricas en x e y en vistas del Lema 1.2.8.

□

Terminamos esta sección con la prueba del Teorema 5.1.4.

Demostración del Teorema 5.1.4. Sea T un operador lineal con núcleo K que satisface (c_s). En primer lugar, observamos que la condición (c_s) implica las condiciones (a_s) y (b_s) con $K_0 = 0$. Entonces, procediendo como en (5.2.3) escribimos

$$\begin{aligned}
\int |Tf|^p w &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{2B_n}) + T(f\chi_{2B_n^c})|^p w \\
&\leq C_p \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{2B_n})|^p w + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T(f\chi_{2B_n^c})|^p w \right) = C_p(I + II).
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

De esta manera, la estimación (5.1.1) vale para $1 \leq p < s$ siguiendo la prueba del Teorema 5.1.1 y teniendo en cuenta la Observación (5.2.4) en el caso $p = 1$.

Para obtener la estimación (5.1.5) procedemos como arriba para obtener

$$\int |T^\star f|^p w \leq C_p \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T^\star(f\chi_{2B_n})|^p w + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |T^\star(f\chi_{2B_n^c})|^p w \right) = C_p(I^\star + II^\star) \tag{5.2.23}$$

y tratamos $I^\star$ y $II^\star$ de la misma manera que en la prueba del Teorema 5.1.1. □

5.3. Aplicación a operadores relacionados a L

En esta sección aplicaremos los resultados que acabamos de probar a algunos operadores asociados a L. Particularmente, trabajaremos con las transformadas de Riesz-Schrödinger singulares presentadas en la sección 2.3 y aquellas que involucran al potencial V introducidos en la sección 2.4.

Para las transformadas de Riesz-Schrödinger $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ probamos que son operadores de Schrödinger comparables con un operador de Calderón-Zygmund en las Proposiciones 2.3.7 y 2.3.12. Luego, aplicamos los Teoremas 5.1.1 y 5.1.3 para obtener desigualdades de tipo fuerte (p, p) y de tipo débil $(1, 1)$ respectivamente. Resumimos estas desigualdades en los siguientes teoremas.

Teorema 5.3.1. *Sean $V \in RH_q$ para $q > d/2$, $\theta \geq 0$ y p_0 tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$ Entonces, para todo peso w valen las siguientes desigualdades cuando $q < d$:*

$$\int |\mathcal{R}_1 f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M_r^\theta w, \tag{5.3.1}$$

para $1 < p < p_0$ y $r = (p_0/p)'$,

$$\int |\mathcal{R}_1^\star f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p (M_A^{\text{loc}} w + M^\theta) w, \tag{5.3.2}$$

para $p_0' < p < \infty$ y cualquier función de Young $A \in \mathcal{D}_p$,

$$w(\{|\mathcal{R}_1 f| > \lambda\}) \leq \frac{C_\theta}{\lambda} \int |f| M_{p_0'}^\theta w. \tag{5.3.3}$$

Si $q > d$, tenemos que

$$\int |\mathcal{R}_1 f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p (M_A^{\text{loc}} w + M^\theta) w, \tag{5.3.4}$$

para $1 < p < \infty$ y cualquier función de Young $A \in \mathcal{D}_p$ y además para $p = 1$,

$$w(\{|\mathcal{R}_1 f| > \lambda\}) \leq \frac{C_\theta}{\lambda} \int |f| M_A^\theta w, \tag{5.3.5}$$

$$w(\{|\mathcal{R}_1^\star f| > \lambda\}) \leq \frac{C_\theta}{\lambda}\int |f| M_A^\theta w, \tag{5.3.6}$$

para cualquier función de Young $A \in \bigcup_{p>1}\mathcal{D}_p$.

Teorema 5.3.2. *Sean* $V \in RH_q$ *para* $q > d/2$ *y* $\theta \geq 0$. *Entonces para todo peso* w *valen las siguientes desigualdades:*

$$\int |\mathcal{R}_2 f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M_r^\theta w, \tag{5.3.7}$$

para $1 < p < q$ *y* $r = (q/p)'$,

$$\int |\mathcal{R}_2^\star f|^p w \leq C_{\theta,A}\int |f|^p (M_A^{\mathrm{loc}} + M^\theta) w, \tag{5.3.8}$$

para $q' < p < \infty$ *y cualquier función de Young* $A \in \mathcal{D}_p$,

$$w(\{|\mathcal{R}_2 f| > \lambda\}) \leq \frac{C_\theta}{\lambda}\int |f| M_{q'}^\theta w. \tag{5.3.9}$$

Observación 5.3.3. Es claro que a medida que q crece los rangos de p se hacen más grandes. Además en los casos $\mathcal{R}_1$ si $q < d$ y $\mathcal{R}_2$ las desigualdades para los adjuntos son mejores y no dependen de q. En cambio los operadores maximales de (5.3.1) y (5.3.7) van variando con q y acercándose a la estimación obtenida para los adjuntos cuando q tiende a d y a infinito respectivamente.

Finalizamos esta sección considerando, para $V \in RH_q$, $q > d/2$, los operadores de tipo $V^\gamma L^{-\gamma}$ para $0 < \gamma < d/2$ y $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ que fueron introducidas en la Sección 2.4. Mostraremos que estos operadores satisfacen la condición de tamaño (c_s), lo que nos permitirá aplicar el Teorema 5.1.4.

Comencemos con los operadores de la forma $V^\gamma L^{-\gamma}$. Para cada $0 < \gamma < d/2$, podemos escribir K_γ, el núcleo de $V^\gamma L^{-\gamma}$, como

$$K_\gamma(x,y) = V^\gamma(x) J_\gamma(x,y)$$

donde J_γ es el núcleo correspondiente del operador integral fraccionario $L^{-\gamma}$. Para J_γ tenemos la siguiente estimación puntual que puede encontrarse en [23], página 587. Para cada $N > 0$ existe C_N tal que

$$|J_\gamma(x,y)| \leq \frac{1}{|x-y|^{d-2\gamma}} C_N \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}. \tag{5.3.10}$$

Vamos a mostrar que esta estimación para J_γ nos da la condición (c_s) para K_γ con $s = q/\gamma$. En efecto, sean x_0, $y \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$ tales que $|y - x_0| < R/2$. Aplicando los lemas 1.2.7 y 1.2.8 obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R<|x-x_0|<2R} |K_\gamma(x,y)|^{q/\gamma} dx\right)^{\gamma/q} \\
&\qquad \leq \frac{C_N}{R^{d-2\gamma}}\left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N/(N_0+1)} \left(\int_{B(x_0,2R)} V^q\right)^{\gamma/q} \\
&\qquad \leq C_N R^{-d/(q/\gamma)'}\left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-\tilde{N}} \left(1 + \frac{\rho(x_0)}{R}\right)^{-\gamma(2-d/q)},
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

con $\tilde{N} = N/(N_0+1) - \gamma N_2$.

Observación 5.3.4. De estas estimaciones se sigue que si $0 < \gamma < d/2$, el operador $V^\gamma L^{-\gamma}$ es un operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo $(q/\gamma, \gamma(2-d/q))$.

Aplicando estas estimaciones junto con el Teorema 5.1.4 llegamos al siguiente resultado.

Teorema 5.3.5. *Sean $V \in RH_q$ para $q > d/2$, $0 < \gamma < d/2$ y $\theta \geq 0$. Entonces, para todo $w \geq 0$, $w \in L^1_{\text{loc}}$, se verifican*

$$\int |V^\gamma L^{-\gamma} f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M_r^\theta w, \tag{5.3.12}$$

para $1 \leq p < q/\gamma$, $r = (q/(\gamma p))'$ y

$$\int |L^{-\gamma} V^\gamma f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M^\theta w, \tag{5.3.13}$$

para $(q/\gamma)' < p < \infty$.

Como mencionamos en la introducción de esta sección, podemos aplicar este teorema para obtener la acotación en $L^1(w)$ de este operador que no estaba garantizada en el Teorema 2.4.7.

Corolario 5.3.6. *Si $V \in RH_q$ para $q > d/2$, y $0 < \gamma < d/2$, el operador $V^\gamma L^{-\gamma}$ es acotado en $L^1(w)$ siempre que $w^{(q/\gamma)'} \in A_1^\rho$. Más aún, si $V \in RH_q$ para todo $q \geq 1$ entonces $V^\gamma L^{-\gamma}$ es acotado en $L^1(w)$ siempre que $w \in A_1^\rho$.*

Demostración. Sea $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$ y w un peso tal que $w^{(q/\gamma)'} \in A_1^\rho$. Por el Teorema 1.2.19 tenemos que existe $\theta \geq 0$ tal que $M^\theta w^{(q/\gamma)'}(x) \leq C w^{(q/\gamma)'}(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^d$. Esto es, $M^\theta_{(q/\gamma)'} w(x) \leq C w(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^d$. Aplicando el Teorema 5.3.5 para el correspondiente θ tenemos que

$$\int |V^\gamma L^{-\gamma} f| w \leq C \int |f| M^\theta_{(q/\gamma)'} w \leq C \int |f| w.$$

Ahora, si $V \in RH_q$ para todo $q > d/2$ tenemos que para todo $r > 1$ y para todo $\theta \geq 0$ existe C tal que

$$\int |V^\gamma L^{-\gamma} f| w \leq C_\theta \int |f| M_r^\theta w. \tag{5.3.14}$$

Por otro lado, si $w \in A_1^\rho$ existe $r > 1$ tal que $w^r \in A_1^\rho$, luego existe $\theta \geq 0$ y $C > 0$ tal que $M_r^\theta w(x) \leq C w(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Combinando esto con (5.3.14) tenemos el resultado deseado. $\square$

Consideramos ahora los operadores $V^{\gamma-1/2} \nabla L^{-\gamma}$ para $1/2 < \gamma \leq 1$. En la sección 2.4 mostramos que su núcleo asociado K^γ puede escribirse como el producto $K^\gamma(x,y) =$

$K_\nu(x,y)V^{\gamma-1/2}(x)$, donde K_ν es un núcleo fraccionario de orden $\nu = 2\gamma - 1$ tal que para cada N existe una constante C_N tal que

$$|K_\nu(x,y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^{d-2\gamma+1}} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^{-N}, \tag{5.3.15}$$

si $V \in RH_q$ con $q > d$ y que si $d/2 < q < d$,

$$\left(\int_{R<|x-y|<2R} |K_\nu(x,y)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \leq C R^{-d/p_0'+2\gamma-1} \left(1 + \frac{R}{\rho(y)}\right)^{-N}, \tag{5.3.16}$$

con p_0 tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$.

Veremos que esta última desigualdad implica (c_s) para $s = p_\gamma$ donde p_γ satisface

$$\frac{1}{p_\gamma} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{d}\right)^+ + \frac{2\gamma-1}{2q}. \tag{5.3.17}$$

Sean x_0, $y \in \mathbb{R}^d$ y $R > 0$ tal que $|y - x_0| < R/2$. Si $q > d$, y en consecuencia $p_\gamma = 2q/(2\gamma-1)$, podemos usar la estimación (5.3.15), la condición reverse-Hölder de V y el Lema 1.2.7 para obtener

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R<|x-x_0|<2R} |K_\gamma(x,y)V^{\gamma-1/2}(x)|^{\frac{2q}{2\gamma-1}} dx\right)^{\frac{2\gamma-1}{2q}} \\
&\qquad \leq \frac{C_N}{R^{d-2\gamma+1}} \left(\int_{B(x_0,2R)} V^q\right)^{\frac{2\gamma-1}{2q}} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N} \\
&\qquad \leq C_N R^{-d/p_\gamma'} \left(1 + \frac{\rho(x_0)}{R}\right)^{-(\gamma-1/2)(2-d/q)} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-\tilde{N}},
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

con $\tilde{N} = N - N_2(\gamma - 1/2)$.

Si $d/2 < q < d$ se tiene que $1/p_\gamma = 1/p_0 + (2\gamma-1)/(2\gamma)$. La desigualdad de Hölder junto con (5.3.16) y una nueva aplicación del Lema 1.2.7 nos da

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{R<|x-x_0|<2R} |K_\gamma(x,y)V^{\gamma-1/2}(x)|^{p_\gamma} dx\right)^{1/p_\gamma} \\
&\qquad \leq \left(\int_{R<|x-x_0|<2R} |K_\gamma(x,y)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \left(\int_{B(x_0,2R)} V^q\right)^{\frac{2\gamma-1}{2q}} \\
&\qquad \leq C R^{-d/p_\gamma'} \left(1 + \frac{\rho(x_0)}{R}\right)^{-(\gamma-1/2)(2-d/q)} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-\tilde{N}}.
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Observación 5.3.7. De estas estimaciones se sigue que si $1/2 < \gamma \leq 1$, el operador $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es un operador de Schrödinger localmente comparable con un operador de Calderón-Zygmund de tipo $(p_\gamma, (\gamma-1/2)(2-d/q))$ con p_γ como en (5.3.17).

Aplicando estas estimaciones junto con el Teorema 5.1.4 llegamos al siguiente resultado.

Teorema 5.3.8. *Sean $V \in RH_q$ para $q > d/2$, $1/2 < \gamma \leq 1$ y $\theta \geq 0$. Entonces, si p_γ satisface* (5.3.17), *las siguientes desigualdades valen para todo $w \geq 0$, $w \in L^1_{\text{loc}}$,*

$$\int |V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma} f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M_r^\theta w, \tag{5.3.20}$$

para $1 \leq p < p_\gamma$, $r = (p_\gamma/p)'$ y

$$\int |L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2} f|^p w \leq C_\theta \int |f|^p M^\theta w, \tag{5.3.21}$$

para $p'_\gamma < p < \infty$.

Al igual que hicimos con el operador $V^\gamma L^{-\gamma}$ podemos obtener la acotación en $L^1(w)$ para este operador, generalizando el resultado dado en el Teorema 2.4.4 en el extremo $p = 1$. Omitimos la prueba pues es análoga a la del Corolario 5.3.6.

Corolario 5.3.9. *Si $V \in RH_q$ para $q > d/2$, y $1/2 < \gamma \leq 1$, el operador $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es acotado en $L^1(w)$ siempre que $w^{p'_\gamma} \in A_1^\rho$. Más aún, si $V \in RH_q$ para todo $q \geq 1$ entonces $V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}$ es acotado en $L^1(w)$ siempre que $w \in A_1^\rho$.*

5.4. Sobre la integrabilidad local de Tf y $T^\star f$

En esta sección aplicaremos los resultados de la sección 5.1 a un peso de la forma $w = \chi_B$. Estudiando el efecto de los operadores maximales obtenidos actuando sobre w vamos a obtener condiciones sobre f que aseguren algún tipo de integrabilidad local de Tf.

Lema 5.4.1. *Sean $\theta \geq 0$, ϕ una función de Young y $Q = B(x_Q, \rho(x_Q))$. Existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que*

$$c_1 \left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\rho(x_Q)}\right)^{-\theta} \leq M_\phi^\theta \chi_Q(x) \leq c_2 \left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\rho(x_Q)}\right)^{-\theta/(N_0+1)} \tag{5.4.1}$$

Demostración. Sean $Q = B(x_Q, \rho(x_Q))$ una bola crítica y $\theta \geq 0$. Sea ϕ una función de Young, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\phi(1) = 1$. Recordando que

$$M_\phi^\theta \chi_Q(x) = \sup_{B(x_B, r_B) \ni x} \left(1 + \frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{-\theta} \|\chi_Q\|_{\phi,B},$$

observamos que basta considerar bolas B tales que $Q \cap B \neq \emptyset$. De lo contrario $\|\chi_Q\|_{\phi,B} = 0$, ya que

$$\begin{aligned} \|\chi_Q\|_{\phi,B} &= \text{ínf}\left\{\lambda : \frac{1}{|B|}\int_B \phi\left(\frac{\chi_Q}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\lambda : \frac{1}{|B|}\int_{B\cap Q} \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq 1\right\}. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Consideremos en primer lugar una bola $B = B(x_B, r_B)$ con $r_B \leq \rho(x_B)$. Si $x \in B$ e $y \in B \cap Q$,

$$|x - x_Q| \leq |x - y| + |y - x_Q| \leq 2r_B + \rho(x_Q) \leq 2\rho(x_B) + \rho(x_Q).$$

Además, como B es sub-crítica, Q es una bola crítica y $B \cap Q \neq \emptyset$ tenemos que $\rho(x_B) \simeq \rho(y) \simeq \rho(x_Q)$. Entonces,

$$|x - x_Q| \leq \tilde{C}\rho(x_Q), \tag{5.4.3}$$

para alguna constante $\tilde{C} > 0$. Entonces, si $x \notin \tilde{Q} = B(x_Q, \tilde{C}\rho(x_Q))$

$$M_\phi^{\mathrm{loc}}(\chi_Q)(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ r_B \leq \rho(x_B)}} \|\chi_Q\|_{\phi,B} = 0.$$

Por otra parte, si $x \in \tilde{Q}$ y $B \cap Q \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} \|\chi_Q\|_{\phi,B} &= \operatorname{ínf}\left\{\lambda : \frac{|B \cap Q|}{|B|}\phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &\leq \operatorname{ínf}\left\{\lambda : \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= 1/\phi^{-1}(1) = 1. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Entonces, tomando el supremo sobre todas las bolas tenemos que, si $x \in \tilde{Q}$,

$$M_\phi^{\mathrm{loc}}(\chi_Q)(x) \leq 1 \leq \left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\rho(x_Q)}\right)^{-\sigma}, \tag{5.4.5}$$

para cualquier $\sigma > 0$.

A continuación, consideramos el operador

$$M_\phi^{\theta.glob}(\chi_Q)(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ r_B \geq \rho(x_B)}} \left(1 + \frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{-\theta} \|\chi_Q\|_{\phi,B}. \tag{5.4.6}$$

Como antes, basta tomar el supremo sobre todas las bolas B tales que $Q \cap B \neq \emptyset$. Sea $y \in Q \cap B$, entonces $\rho(y) \simeq \rho(x_Q)$. Aplicando el Lema 1.2.8

$$\left(1 + \frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{-\theta} \leq C\left(1 + \frac{r_B}{\rho(y)}\right)^{-\theta/(N_0+1)} \leq C\left(1 + \frac{r_B}{\rho(x_Q)}\right)^{-\theta/(N_0+1)}.$$

Sea $x \in B$. Supongamos en primer lugar que $x \notin 2Q$, entonces

$$|x - x_Q| \leq |x - y| + |y - x_Q| \leq 2r_B + \rho(x_Q) \leq 2r_B + |x - x_Q|/2$$

y por lo tanto $|x - x_Q| \leq 4r_B$. Luego,

$$\left(1 + \frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{-\theta} \leq C\left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\rho(x_Q)}\right)^{-\theta/(N_0+1)}.$$

Como antes, tenemos que $\|\chi_Q\|_{\phi,B} \leq 1$. Entonces, si $x \notin 2Q$,

$$M_\phi^{\theta.glob}(\chi_Q)(x) \leq C\left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\rho(x_Q)}\right)^\sigma,$$

donde $\sigma = \theta/N_0$.

Por otro lado, si $x \in 2Q$, podemos concluir

$$M_\phi^{\theta.glob}(\chi_Q)(x) \leq M_\phi(\chi_Q)(x) = \sup_{B \ni x} \|\chi_Q\|_{\phi,B} \leq 1.$$

Entonces, como $|x - x_Q|/\rho(x_Q) \leq 2$,

$$M_\phi^{\theta.glob}(\chi_Q)(x) \leq C\left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\rho(x_Q)}\right)^{-\sigma},$$

para cualquier $\sigma > 0$.

Usando que $M_\phi^\sigma \leq M_\phi^{\text{loc}} + M_\phi^{\theta,glob}$, las estimaciones anteriores nos dan la desigualdad de la derecha en (5.4.1). Para la otra desigualdad, dado x consideramos $B_x = B(x_Q, |x - x_Q| + \rho(x_Q))$: Entonces $x \in B_x$ y $\|\chi_Q\|_{\phi,B_x} = 1$. En consecuencia,

$$M_\phi^\theta(\chi_Q)(x) \geq \left(1 + \frac{|x - x_Q| + \rho(x_Q)}{\rho(x_Q)}\right)^{-\theta} \geq 2^{-\theta}\left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\rho(x_Q)}\right)^{-\theta}.$$

□

Observación 5.4.2. Como una consecuencia del Lema 5.4.1, todos los operadores maximales que aparecen en los Teoremas 5.1.1, 5.1.3 y 5.1.4 y en el Corolario 5.1.2 satisfacen la desigualdad (5.4.2) para ciertas constantes c_1 y c_2 cuando son aplicados a la función χ_Q para Q una bola crítica.

Proposición 5.4.3. *Sean $p \geq 1$ y ϕ una función de Young. Existe $\theta \geq 0$ tal que, para toda bola crítica $Q = B(x_0, \rho(x_0))$*

$$\int |f|^p M_\phi^\theta(\chi_Q) < \infty \tag{5.4.7}$$

si y sólo si existe $\sigma > 0$ tal que

$$\int \frac{|f|^p}{(1 + |x|)^\sigma} < \infty. \tag{5.4.8}$$

Demostración. Sean $p \geq 1$ y ϕ una función de Young. Sea $Q = B(x_0, \rho(x_0))$ una bola crítica. Es inmediato que existen constantes positivas c y $\tilde{c}$ que dependen sólo de x_0 y ρ tales que

$$\frac{c}{1 + \frac{|x - x_0|}{\rho(x_0)}} \leq \frac{1}{1 + |x|} \leq \frac{\tilde{c}}{1 + \frac{|x - x_0|}{\rho(x_0)}} \tag{5.4.9}$$

vale. Entonces, la equivalencia entre las condiciones (5.4.7) y (5.4.8) se sigue de la ecuación (5.4.9) y el Lema 5.4.1. □

Teorema 5.4.4. *Sean $1 \leq p < \infty$ y T un operador tal que para alguna función de Young ϕ y todo $\theta \geq 0$ existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p M_\phi^\theta w, \tag{5.4.10}$$

para todo peso w. Entonces, si una función f satisface (5.4.8), *$Tf \in L^p_{\text{loc}}$. En particular Tf es finita en casi todo punto.*

Demostración. Sean $1 \leq p < \infty$ y T como se enunció. Sea f una función que satisface (5.4.8) para algún $\sigma > 0$. Entonces, aplicando la Proposición 5.4.3, existe algún $\theta \geq 0$ tal que (5.4.7) vale para toda bola crítica Q.

Sea B una bola en $\mathbb{R}^d$, de acuerdo con la Proposición 1.2.6 podemos cubrir B por una cantidad finita de bolas críticas $B_1, \ldots B_N$. Usando la hipótesis en el operador para tal θ,

$$\begin{aligned}\int_B |Tf|^p &\leq \sum_{i=1}^N \int |Tf|^p \chi_{B_i} \\ &\leq C \sum_{i=1}^N \int |f|^p M_\phi^\theta \chi_{B_i} < \infty,\end{aligned}$$

ya que f cumple la condición (5.4.8). □

Para los operadores que satisfacen una desigualdad de tipo débil para $p = 1$ se puede obtener un resultado análogo siguiendo las mismas líneas que en la prueba del teorema anterior.

Teorema 5.4.5. *Sea T un operador tal que para alguna función de Young ϕ y para todo $\theta \geq$ existe una constante C tal que*

$$w(\{|Tf| > \lambda\}) \leq C \int |f| M_\phi^\theta w, \ \textit{para todo}\ \lambda > 0, \tag{5.4.11}$$

para todo peso w. Entonces, si una función f satisface (5.4.8) *con $p = 1$, $Tf \in L^{1,\infty}_{\text{loc}}$. En particular Tf es finito en casi todo punto.*

Estos resultados pueden ser aplicados a todos los operadores considerados en la sección 5.3 ya que, como vimos, los toeremas de la sección 5.1 valen en estos casos. En particular, destacamos que para $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_1^\star$ podemos aplicar los teoremas 5.4.4, para $1 < p < \infty$, y 5.4.5, si $V \in RH_q$ con $q > d$. Para el caso $d/2 < q < d$, la conclusión vale para $1 < p < p_0$ y $p > p_0'$ respectivamente. Por otro lado, los Teoremas 5.4.4 y 5.4.5 se pueden aplicar a $\mathcal{R}_2$ para $1 < p < q$ y $q > d/2$. De manera similar VL^{-1}, $V^{1/2}\nabla L^{-1}$ y $V^{1/2}L^{-1/2}$ cumplen las hipótesis del Teorema 5.4.4 para $1 \leq p < q$, $1 \leq p < p_1$ y $1 \leq p < 2q$ respectivamente.

En [31], Shen obtuvo estimaciones en L^p para las derivadas de soluciones de ecuaciones diferenciales relacionadas al operador de Schrödinger como consecuencia de la continuidad en L^p de las transformadas de Riesz-Schrödinger (ver corolarios 0,9 y 0,10). Aquí, con nuestros resultados, podemos dar información cualitativa sobre su integrabilidad local.

Corolario 5.4.6. *Supongamos $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$ y que $-\Delta u + Vu = f$ en $\mathbb{R}^d$, con f que satisface* (5.4.8) *para algún $\sigma > 0$ y $p \geq 1$. Entonces,*

1. *si $1 < p < q$, $\nabla^2 u \in L^p_{\mathrm{loc}}$,*
2. *si $1 \leq p < q$, $Vu \in L^p_{\mathrm{loc}}$,*
3. *si $1 \leq p < p_1$, $V^{1/2}\nabla u \in L^p_{\mathrm{loc}}$,*

donde p_1 satisface $1/p_1 = (1/q - 1/d)^+ + 1/(2q)$.

Demostración. Poniendo $u = L^{-1}f$ resulta $\nabla^2 u = \nabla L^{-1} f$, $Vu = VL^{-1}f$ y $V^{1/2}\nabla u = V^{1/2}\nabla L^{-1} f$. Como hemos hecho notar, los operadores $\mathcal{R}_2$, VL^{-1} y $V^{1/2}\nabla L^{-1}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 5.4.4 para los valores de p indicados por lo que este corolario es una consecuencia de ese Teorema. □

Corolario 5.4.7. *Sea $V \in RH_q$ para algún $q > d/2$ y sea p_0 tal que $1/p_0 = (1/q - 1/d)^+$. Supongamos que $-\Delta u + Vu = \nabla \cdot F$, con F una función vectorial tal que $|F|$ satisface* (5.4.8) *para algún $\sigma > 0$. Entonces,*

1. *si $p_0' < p < p_0$, $\nabla u \in L^p_{\mathrm{loc}}$,*
2. *si $p_0' < p < 2q$, $V^{1/2} u \in L^p_{\mathrm{loc}}$.*

Demostración. Demostraremos solamente 1 ya que 2 es análogo. Si ponemos $u = L^{-1}\nabla \cdot F$ resulta $\nabla u = \mathcal{R}_1(\mathcal{R}_1^\star \cdot F)$. Por lo tanto, para demostrar que $\nabla u \in L^p_{\mathrm{loc}}$ será suficiente verificar que los operadores $T_j = \mathcal{R}_1 \cdot R_{1,j}^\star$ satisfacen las hipótesis del Teorema para $p_0' < p < p_0$. De hecho, para un tal valor de p, usando el Teorema 5.3.1 se tiene

$$\begin{aligned}\int |\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_{1,j}^\star g)|^p w &\leq C_\theta \int |\mathcal{R}_{1,j}^\star g|^p M_r^\theta w \\ &\leq C_\theta \int |g|^p M_\nu^\theta M_r^\theta w,\end{aligned}$$

para cualquier $\nu > 1$ ya que $A(t) = t^\nu \in \mathcal{D}_p$. Eligiendo $\nu > r$ resulta fácil ver que $M_\nu^\theta \circ M_r^\theta \leq M_r^\theta$, por lo que 1 se sigue aplicando el Teorema 5.4.4 ya que $|F_j|$ satisface (5.4.8) para $1 \leq j \leq d$.

□

Capítulo 6

Desigualdades con pesos factorizados

El objetivo de este capítulo es obtener desigualdades con dos pesos para los operadores integrales singulares asociados a L que fueron considerados en los capítulos anteriores. Los pares de pesos que exhibiremos son bastante generales y están expresados como productos cuyos factores dependen de dos pesos arbitrarios w_1 y w_2.

La motivación de esta elección de pares de pesos viene de intentar generalizar las desigualdades de tipo Fefferman-Stein que fueron obtenidas en el Capítulo 5. Sin embargo, veremos sobre el final de este capítulo (ver Sección 6.6) que si bien obtenemos muchos ejemplos de pares de pesos, no alcanzamos a recuperar algunas de las desigualdades mostradas en el capítulo anterior. Por otra parte, las desigualdades con pesos factorizados que aquí analizaremos sí contienen el caso de pesos iguales, recuperando las acotaciones en $L^p(w)$ presentadas en el Teorema 2.1.5. Esto no es posible al menos en forma directa, a partir de las desigualdades de tipo Fefferman-Stein.

La familia para la cual estarán enunciados los resultados de este capítulo es la primer familia definida en el Capítulo 2, esto es, los operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund. Esta elección se debe en parte a que da pié para probar en el contexto Schrödinger una serie de hechos que resultan de interés en sí mismos y que podrían tener otras aplicaciones.

Por otro lado, una de las herramientas claves en este capítulo será conocer el comportamiento de una apropiada función sharp aplicada a Tf. Cuando T es un operador de tipo Schrödinger-Calderón-Zygmund se conocen algunos resultados dados por Cabral, Bongioanni y Harboure en [3]. Para ser más precisos, dada una función de radio crítico ρ se define la **maximal sharp local** de una función $f \in L^1_{\text{loc}}$ como

$$M^\sharp_\rho f(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ B \in \mathcal{B}_\rho}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f_B|dy + \sup_{B(z,\rho(z))} \frac{1}{|B(z,\rho(z))|}\int_{B(z,\rho(z))} |f(y)|dy, \qquad (6.0.1)$$

Para los operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund definidos en el Capítulo 2 tenemos la siguiente desigualdad que involucra la maximal sharp.

Proposición 6.0.8. *Sean $1 < s < \infty$ y T un operador de Schrödinger-Calderón-*

Zygmund de tipo (s,δ)*. Entonces, si* $0<\eta\le 1$ *y* $\sigma\ge 0$ *existe una constante* C *tal que*

$$\left[M_\rho^\sharp(|Tf|^\eta)(x)\right]^{1/\eta}\le CM_{s'}^\sigma f(x), \tag{6.0.2}$$

para toda función $f\in L_{\mathrm{loc}}^{s'}$*. Además, si el núcleo asociado* K *satisface las estimaciónes puntuales* (2.1.4) *y* (2.1.5)*, para* $0<\eta<1$ *y* $\sigma\ge 0$*, existe una constante* C *tal que*

$$\left[M_\rho^\sharp(|Tf|^\eta)(x)\right]^{1/\eta}\le CM^\sigma f(x), \tag{6.0.3}$$

para toda función $f\in L_{\mathrm{loc}}^1$*.*

La proposición 6.0.8 se sigue inmediatamente de las Proposiciones 3 y 4 en [3].

6.1. Desigualdades con pesos factorizados

Los pesos con los que trabajaremos se llaman *pesos factorizados* y tienen la ventaja de proporcionar una forma constructiva de generar pares de pesos para los cuales valgan desigualdades en L^p con pesos distintos. Enunciamos a continuación, de forma precisa, el resultado central de este capítulo. Para operadores que satisfacen una desigualdad como (6.0.2), en particular los operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund, podemos obtener la siguiente desigualdad en norma p con pesos factorizados.

Teorema 6.1.1. *Sean* $1<s\le\infty$ *y* T *un operador que satisface la desigualdad* (6.0.2) *para todo* $\theta\ge 0$ *y* $0<\eta<1$*. Dados* $s'<p<\infty$ *y dos pesos* w_1 *y* w_2*, sean* ϕ *y* ψ *un par de funciones de Young tales que* $\phi(t)=t\log^{p+\delta}(1+t)$*, para* $\delta>0$ *y* $\xi(t)=\psi(t^{(p/s')'})$ *es tal que* $\bar{\xi}\in\mathcal{E}_{(p/s')}$*. Entonces, para cada* $\theta\ge 0$ *existe una constante* $C=C(p,\theta,\phi,\psi)$ *tal que*

$$\int |Tf|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'}\le C\int |f|^p (M_\phi^\theta w_1) w_2^{1-p/s'}. \tag{6.1.1}$$

En particular, si ψ *duplica y satisface*

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{p/s'-1}\frac{dt}{t}<\infty, \tag{6.1.2}$$

se cumple la desigualdad (6.1.1)*.*

Desigualdades de este estilo aparecen en [11] en el caso clásico. Observemos que, bajo la suposición de $V\in RH_q$ con $q>d/2$, los operadores a los cuales aplicaremos este teorema serán los adjuntos de las transformadas de Riesz-Schrödinger. De todas maneras, las desigualdades obtenidas se pueden dualizar y nos dan resultados similares para las transformadas de Riesz-Schrödinger.

Reservamos la prueba del Teorema 6.1.1 para la Sección 6.5, ya que necesitamos algunas herramientas que desarrollaremos en las secciones siguientes y que pueden tener interés en sí mismas.

Es natural pensar que una buena desigualdad con pares de pesos para un operador T, recupere los resultados conocidos para desigualdades con el mismo peso. En lo que sigue veremos que del teorema que acabamos de enunciar se obtienen los resultados establecidos en el Capítulo 2 para operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund. Para ello necesitamos enunciar y demostrar la siguiente generalización del clásico lema de factorización de pesos A_p.

Lema 6.1.2. *Sean $1 < p < \infty$ y w un peso en A_p^ρ, existen dos pesos w_1 y $w_2 \in A_1^\rho$ tales que $w = w_1 w_2^{1-p}$.*

Demostración. En primer lugar consideramos $p \geq 2$ y $w \in A_p^\rho$, esto es, existe $\theta \geq 0$ tal que $w \in A_p^{\rho,\theta}$. Por la proposición 1.2.12 tenemos que $w^{1-p'} \in A_{p'}^{\rho,\theta}$. Aplicando el Teorema 1.2.20 podemos elegir $\sigma > \text{máx}\{\theta/p + N_1, \theta/p' + N_1\}$ de manera que M^σ resulte acotado en $L^p(w)$ y en $L^{p'}(w^{1-p'})$. Para ese σ definimos el operador

$$S_\sigma f = \left(w^{-1/p} M^\sigma (f^{p-1} w^{1/p})\right)^{1/(p-1)} + w^{1/p} M^\sigma (f w^{-1/p}).$$

Es fácil ver que S_σ está bien definido y es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$. Además para f, $g \geq 0$ y $\lambda \geq 0$

$$S_\sigma(f+g) \leq S_\sigma(f) + S_\sigma(g), \qquad S_\sigma(\lambda f) = \lambda S_\sigma(f).$$

Para ver esto observamos que cada promedio

$$\left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\sigma} \left(\frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f|^{p-1} w^{1/p}\right)^{1/(p-1)}$$

es sublineal respecto a f, ya que $p - 1 \geq 1$. Tomando el supremo sobre las bolas que contienen a x obtenemos la sublinealidad del primer término de S_σ. La sublinealidad del segundo término se sigue de la sublinealidad de M^σ.

Llamando $C(w) = \|S_\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ y tomando una función $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 1$, definimos la función $\varphi_\sigma \in L^p$ como la suma de la serie convergente

$$\varphi_\sigma = \sum_{j \in \mathbb{N}} (2C(w))^{-j} S_\sigma^j(g),$$

donde S_σ^j es la composición j veces del operador S_σ. Esta serie converge absolutamente en L^p puesto que $\|S_\sigma^j\| \leq C(w)^j$. Tomemos ahora,

$$w_1 = w^{1/p} \varphi^{p-1} \quad \text{ y } \quad w_2 = w^{-1/p} \varphi.$$

Es inmediato que $w = w_1 w_2^{1-p}$, más aún, podemos ver w_1 y w_2 están en la clase A_1^σ. De hecho,

$$S_\sigma(\varphi) \leq 2C(w) \sum_{j \in \mathbb{N}} (2C(w))^{-j-1} S_\sigma^{j+1}(g) \leq 2C(w)\varphi.$$

Esto es,

$$\left(w^{-1/p} M^\sigma (\varphi^{p-1} w^{1/p})\right)^{1/(p-1)} + w^{1/p} M^\sigma (\varphi w^{-1/p}) \leq 2C(w)\varphi.$$

Entonces, usando que $\varphi = (w^{-1/p}w_1)^{1/(p-1)} = w^{1/p}w_2$,

$$M^\sigma w_1 \leq 2C(w)w_1 \quad \text{y} \quad M^\sigma w_2 = 2C(w)w_2.$$

Así, aplicando la Proposición 1.2.19, tenemos que w_1, $w_2 \in A_1^\sigma$.

Para el caso $1 < p < 2$ usamos que si $w \in A_p^{\rho,\theta}$, entonces $w^{1-p'} \in A_{p'}^{\rho,\theta}$ y $p' > 2$. Luego, por lo probado, existen v_1, $v_2 \in A_1^\rho$ tales que $w^{1-p'} = v_1 v_2^{1-p'}$, esto es, $w = v_2 v_1^{1-p}$.

$\square$

Ahora, estamos en condiciones de probar que la desigualdad con pesos factorizados (6.1.1) implica la continuidad en $L^p(w)$ dada en el Teorema 2.1.5. Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s, δ) para algún $s > 1$ y $0 < \delta \leq 1$. Sean $w \in A_{p/s'}^\rho$ y $f \in L^p(w)$ para algún $p > s'$. Por el Teorema de factorización de pesos tenemos que existen dos pesos w_1 y w_2 en la clase A_1^ρ tales que $w = w_1 w_2^{1-p/s'}$. Para w_1 existe θ_1 tal que $w_1 \in A_1^{\rho,\theta_1}$. Además, aplicando el Lema 1.2.15, tenemos que existen $r_1 > 1$ y $\nu_1 \geq 0$ tales que $w_1 \in RH_{r_1}^{\rho,\nu_1}$. Esto es, para cualquier $B = B(z, r)$,

$$\|w_1\|_{r_1,B} = \left(\frac{1}{|B|}\int_B w_1^{r_1}\right)^{1/r_1} \leq C\left(1 + \frac{r}{\rho(z)}\right)^{\nu_1} \frac{1}{|B|}\int_B w_1. \tag{6.1.3}$$

Sean ϕ como en el Teorema 6.1.1 y $\theta \geq 0$ a elegir, usando la estimación anterior y que $w_1 \in A_1^{\rho,\theta_1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
M_\phi^\theta w_1(x) &= \sup_{B(z,r)\ni x} \|w_1\|_{\phi,B(z,r)} \left(1 + \frac{r}{\rho(z)}\right)^{-\theta} \\
&\leq C \sup_{B(z,r)\ni x} \|w_1\|_{r_1,B(z,r)} \left(1 + \frac{r}{\rho(z)}\right)^{-\theta} \\
&\leq C \sup_{B(z,r)\ni x} \left(\frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} w_1\right)\left(1 + \frac{r}{\rho(z)}\right)^{-\theta+\nu_1} \\
&\leq C w_1(x) \sup_{B(z,r)\ni x} \left(1 + \frac{r}{\rho(z)}\right)^{-\theta+\nu_1+\theta_1} \\
&\leq C w_1(x),
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

eligiendo $\theta \geq \theta_1 + \nu_1$. Del mismo modo, podemos elegir θ suficientemente grande para que exista una constante C tal que $M_\psi^\theta w_2(x) \leq C w_2(x)$.

Entonces, aplicando el Teorema 6.1.1 con θ elegido como arriba tenemos que

$$\begin{aligned}\int |Tf|^p w &= \int |Tf|^p w_1 w_2^{1-p/s'} \\ &\le C \int |Tf|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'} \\ &\le C \int |f|^p (M_\phi^\theta w_1) w_2^{1-p/s'} \\ &\le C \int |f|^p w_1 w_2^{1-p/s'} \\ &\le C \int |f|^p w.\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

6.2. Descomposición de Calderón-Zygmund en un cubo

Para probar las desigualdades con pesos factorizados del Teorema 6.1.1 vamos a necesitar versiones adaptadas al contexto Schrödinger de desigualdades clásicas como la desigualdad de Lerner y la desigualdad con dos pesos para la Maximal de Hardy-Littlewood.

La técnica que usaremos para demostrar las desigualdades que necesitamos consiste en probarlas, en primer lugar, cuando el espacio es un cubo $R \subset \mathbb{R}^d$. En esta situación, es decir cuando el espacio sea un cubo, usaremos tanto en la maximal como en la definición de las clases de pesos, cubos en lugar de bolas. La razón es que nos basaremos en la descomposición de Calderón-Zygmund que presentamos más abajo, para la cual la geometría de los cubos resulta más apropiada. Luego, cuando extendamos las desigualdades a todo $\mathbb{R}^d$ vía la descomposición en bolas críticas, volveremos a las versiones de maximales y pesos basadas en bolas.

Para un cubo R fijo en $\mathbb{R}^d$ y una función f integrable sobre R definimos la función maximal sobre cubos asociada a R como

$$M_R f(x) = \sup_{\substack{Q\subset R\\ Q\ni x}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|. \tag{6.2.1}$$

Del mismo modo, introducimos la maximal diádica como

$$M_R^d f(x) = \sup_{\substack{Q\in\mathcal{D}_R\\ Q\ni x}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|.$$

Donde $\mathcal{D}_R$ es la familia de sub-cubos diádicos obtenidos al bisecar R.

A continuación desarrollaremos una descomposición de tipo Calderón-Zygmund cuando el espacio es un cubo $R \subset \mathbb{R}^d$. Esta herramienta será fundamental para poder obtener los resultados de las siguientes secciones. La prueba de este resultado es muy parecida al caso de $\mathbb{R}^d$ con obvias modificaciones.

Lema 6.2.1. *Sean R un cubo en $\mathbb{R}^d$ y $f \in L^1(R)$. Entonces*

1. *Para cada $\lambda > \dfrac{1}{|R|}\displaystyle\int_R |f|$ existe una colección de cubos $\{Q_j\}$ en $\mathcal{D}_R$, maximales y disjuntos tales que*

$$\Omega_\lambda^d = \left\{x \in R : M_R^d f(x) > \lambda\right\} = \bigcup_j Q_j,$$

con la propiedad

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f| < 2^d\lambda. \tag{6.2.2}$$

2. *Sean $a > 2^d$ y k_0 tal que $a^{k_0-1} \leq \dfrac{1}{|R|}\displaystyle\int_R |f| < a^{k_0}$. Para $k \geq k_0$ denotamos $\{Q_j^k\}$ la familia de cubos diádicos de altura $\lambda = a^k$ dada en 1 y $\Omega_k^d = \Omega_{a^k}^d = \bigcup_j Q_j^k$. Sea $E_j^k = Q_j^k \setminus \Omega_{k+1}^d$. Entonces los conjuntos E_j^k son disjuntos dos a dos, $E_j^k \subset Q_j^k$ y $|E_j^k| \geq \beta |Q_j^k|$ para alguna constante fija $\beta \in (0,1)$ que depende sólo de la dimensión y de a.*

3. *Sea $\Omega_\lambda = \{x \in R : M_R f(x) > \lambda\}$, para $\lambda > \frac{4^d}{|R|}\int_R |f|$. Entonces si $\{Q_j\}_j$ es la familia de cubos diádicos dada en 1 de altura $\lambda/4^d$, tenemos que*

$$\Omega_\lambda \subset \cup_j \tilde{Q}_j,$$

donde $\tilde{Q}_j = 3Q_j \cap R$.

Demostración. Sea $f \in L^p(R)$. Para probar 1 podemos suponer $\Omega_\lambda^d \neq \emptyset$ pues de otra manera no hay nada que probar. Sea $\lambda > \fint_R |f|$, consideramos

$$\Lambda_\lambda = \left\{Q \in \mathcal{D}_R : \fint_Q |f| > \lambda\right\},$$

que será no vacío. Por la hipótesis sobre λ, tenemos que para cada $Q \in \Lambda_\lambda$ existe un cubo Q' maximal tal que $Q \subset Q' \subsetneq R$ y $Q' \in \Lambda_\lambda$. Denotamos por $\{Q_j\}_j$ la familia de estos cubos maximales. De esta manera, si $\tilde{Q}_j$ es el padre diádico de Q_j

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f| \leq \frac{2^d}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j} |f| < 2^d\lambda.$$

Para ver 2 procedemos igual que en $\mathbb{R}^d$. Sean $a > 2^d$ y k_0 tal que $a^{k_0-1} \leq \fint_R |f| < a^{k_0}$. Para $k \geq k_0$ consideramos $\{Q_j^k\}$ la familia de cubos diádicos para altura $\lambda = a^k$ dada en 1 y así tendremos $\Omega_k^d = \Omega_{a^k}^d = \bigcup_j Q_j^k$. Sea $E_j^k = Q_j^k \setminus \Omega_{k+1}^d$. De $\Omega_{k+1}^d \subset \Omega_k^d$, se sigue que los conjuntos E_j^k son disjuntos dos a dos. Por otro lado, si $Q_j^k \cap Q_i^{k+1} \neq \emptyset$ entonces, de la maximalidad de los cubos se deduce $Q_i^{k+1} \subsetneq Q_j^k$. Luego,

$$\begin{aligned} |Q_j^k \cap \Omega_{k+1}| &= \sum_{i:Q_i^{k+1}\subsetneq Q_j^k} |Q_i^{k+1}| \leq \sum_{i:Q_i^{k+1}\subsetneq Q_j^k} \frac{1}{a^{k+1}} \int_{Q_i^{k+1}} |f| \\ &\leq \frac{1}{a^{k+1}} \int_{Q_j^k} |f| \leq \frac{2^d}{a} |Q_j^k|. \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Así $|E_j^k| \geq \dfrac{a-2^d}{a}|Q_j^k|$.

Veamos finalmente 3. Sea $\tilde{\lambda} = \lambda/4^d \geq \fint_R |f|$, consideramos la familia de cubos maximales disjuntos $\{Q_j\}$ dada en 1 para altura $\tilde{\lambda}$. Entonces, vale 6.2.2 para cada j y $\tilde{\lambda}$.

Si $x \in \Omega_\lambda$, por definición, existe $Q \subset R$ tal que $\fint_Q |f| > \lambda$. Tomamos n_0 tal que $2^{n_0-1} < l(Q)/l(R) \leq 2^{n_0}$. Existen $N \leq 2^d$ cubos distintos $P_1, P_2, \dots P_N \in \mathcal{D}_R$, que intersecan a Q y tales que $l(P_i) = 2^{n_0} l(R)$ para $i = 1, \dots, N$. Más aún, $Q \subset \bigcup_{i=1}^N P_i$. Debe existir entonces $i_0 \leq N$ tal que $\int_{P_{i_0}} |f| > \frac{\lambda}{N}|Q|$, pues de otro modo

$$\lambda < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \leq \frac{1}{|Q|}\sum_{i=1}^N \int_{P_i} |f| \leq \lambda.$$

Así,

$$\frac{1}{|P_{i_0}|}\int_{P_{i_0}} |f| > \frac{\lambda|Q|}{N|P_{i_0}|} \geq \frac{\lambda}{4^d} = \tilde{\lambda}.$$

Entonces, existe un cubo Q_{j_0} en la familia maximal $\{Q_j\}$ de altura $\tilde{\lambda}$ tal que $P_{i_0} \subset Q_{j_0}$. Como $Q \cap P_{i_0} \neq \emptyset$ y $l(Q) \leq l(P_{i_0}) \leq l(Q_{j_0})$ afirmamos que $Q \subset \tilde{Q}_{j_0} = 3Q_{j_0} \cap R$. En efecto, sean $y \in Q$, $z \in Q \cap P_{i_0}$ y llamemos x_{i_0} al centro de P_{i_0}, tenemos que

$$\begin{aligned} d_\infty(y, x_{i_0}) &\leq d_\infty(y,z) + d_\infty(z, x_{i_0}) \leq l(Q) + l(P_{i_0})/2 \\ &\leq l(P_{i_0}) + l(P_{i_0})/2 \leq 3l(Q_{j_0})/2. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Esto es, $Q \subset 3Q_{j_0} \cap R$. □

6.3. Una desigualdad de Lerner para pesos factorizados

En esta sección probaremos una desigualdad de Lerner para pesos factorizados que generalizará la dada en [21]. Como mencionamos, la técnica consiste en probar en primer lugar una versión de esta desigualdad cuando el espacio es un cubo $R \subset \mathbb{R}^d$. Para esto, definimos el siguiente operador maximal sharp asociado a un cubo:

$$M_R^\sharp f(x) = \sup_{\substack{Q\in\mathcal{D}_R \\ Q\ni x}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| + \frac{1}{|R|}\int_R |f|, \tag{6.3.1}$$

donde $\mathcal{D}_R$ es la familia de cubos diádicos que se obtiene a partir de R por bisección. Por otro lado, necesitamos definir las correspondientes clases de pesos cuando el espacio es un cubo R. Decimos que un peso $w \in A_p(R)$ si existe una constante C tal que

$$\left(\int_Q w\right)^{1/p}\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \leq C|Q|, \tag{6.3.2}$$

para todo cubo $Q \subset R$. Del mismo modo, decimos que un peso w está en la clase $RH_\infty(R)$ si existe una constante C tal que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} w(x) \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w \tag{6.3.3}$$

para todo cubo $Q \subset R$. Además vamos a necesitar los siguientes resultados, cuyas demostraciones omitiremos por ser análogas al caso $\mathbb{R}^d$.

Lema 6.3.1. *1. Si $w \in RH_\infty(R)$ entonces existe $p \geq 1$ tal que $w \in A_p(R)$.*

2. Si $w \in A_p(R)$, $1 \leq p < \infty$ entonces existe una constante C tal que

$$\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^p \leq C\frac{w(E)}{w(Q)},$$

para todo cubo Q y todo conjunto $E \subset Q$ medible.

Con esta herramienta demostraremos una versión de la desigualdad de Lerner en cubos y con dos pesos.

Proposición 6.3.2. *Sea R un cubo en $\mathbb{R}^d$ y sean w y W dos pesos tales que w, $W \in L^1(R)$ y $W \in RH_\infty(R)$. Entonces, para $f \geq 0$ se tiene*

$$\int_R f\,w\,W \leq C\int_R M_R^\sharp f\, M_R^d w\, W, \tag{6.3.4}$$

con C una constante que depende sólo de la dimensión y de la constante de RH_∞ de W.

Demostración. Como $W \in RH_\infty(R)$ tenemos que $W \in L^\infty(R)$. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $w \in L^\infty(R)$. En efecto, llamando $w_n(x) = \min\{w(x), n\}$,

$$\int_R f\,w_n\,W \leq C\int_R M_R^\sharp f\, M_R^d w_n\, W \leq C\int_R M_R^\sharp f\, M_R^d w\, W,$$

ya que $M_R^d w_n(x) \leq M_R^d w(x)$. Entonces, como $w_n \uparrow w$, podemos usar el teorema de la convergencia monótona para obtener

$$\int_R f\,w\,W = \lim_{n\to\infty}\int_R f\,w_n\,W \leq C\int_R M_R^\sharp f\, M_R^d w\; W.$$

Sea $u = wW$, por la observación anterior podemos suponer $u \in L^\infty(R)$. Sean $a > 2^d$ y m y k_0 los únicos enteros tales que $a^{m-1} < \|u\|_{L^\infty(R)} \leq a^m$ y $a^{k_0-1} \leq u_R < a^{k_0}$. Para cada $k_0 \leq k \leq m$ consideramos $\{Q_j^k\}_j$ los cubos de Calderón-Zygmund de altura a^k para la función u, dados por el inciso 1 del Lema 6.2.1. Entonces

$$\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} u > a^k, \text{ para cada } j \geq 1,$$

$$\Omega_k^d = \{x \in R : M_R^d u(x) > a^k\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^k.$$

Es claro que $\Omega_m^d = \emptyset$ y $\Omega_{k_0}^d = R$.

Para $k_0 - 1 < k < m$ definimos

$$b_k(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (u(x) - u_{Q_j^k})\chi_{Q_j^k}(x),$$

$$g_k(x) = u(x) - b_k(x) = \begin{cases} u_{Q_j^k} & \text{si} \quad x \in Q_j^k \\ u(x) & \text{si} \quad x \in R \setminus \Omega_k \end{cases}$$

y $b_{k_0-1}(x) = u(x) - u_R$, $g_{k_0-1} = u_R$, $b_m(x) = 0$. Entonces, podemos escribir

$$u(x) = \sum_{k=k_0-1}^{m-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) + g_{k_0-1}(x).$$

Para cada $k_0 - 1 \leq k \leq m - 1$ y $j \geq 1$,

$$(b_k(x) - b_{k+1}(x))\chi_{Q_j^k}(x) = (u(x) - u_{Q_j^k})\chi_{Q_j^k}(x) - \sum_{i:Q_i^{k+1}\subset Q_j^k} (u(x) - u_{Q_i^{k+1}})\chi_{Q_i^{k+1}(x)}. \tag{6.3.5}$$

Entonces, como $u_{Q_j^k} \leq 2^d a^k$, tenemos que para casi todo $x \in Q_j^k$

$$\begin{aligned} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| &\leq \left| u(x)\chi_{Q_j^k}(x) - \sum_{i:Q_i^{k+1}\subset Q_j^k} u(x)\chi_{Q_i^{k+1}}(x) \right| + u_{Q_j^k} + \sum_{i:Q_i^{k+1}\subset Q_j^k} u_{Q_i^{k+1}}\chi_{Q_i^{k+1}}(x) \\ &\leq a^{k+1} + 2^d a^k + 2^d a^{k+1} \leq (1 + 2a)2^d a^k = ca^k, \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

donde, para el primer sumando, hemos usado que para $x \in Q_j^k \setminus \Omega_{k+1}^d$ tenemos que $a^k < M_R^d u(x) < a^{k+1}$ y así, por el Teorema de diferenciación de Lebesgue, $u(x) \leq a^{k+1}$ en casi todo punto de $Q_j^k \setminus \Omega_{k+1}^d$.

Además, integrando (6.3.5)

$$\int_{Q_j^k} b_k(x) - b_{k+1}(x)dx = 0.$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_R f(x)u(x)dx &= \int_R f(x)g_{k_0-1}(x)dx + \sum_{k_0-1}^{m-1}\int_R f(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x))dx \\ &= u_R\int_R f(x)dx + \sum_{k_0-1}^{m-1}\sum_j \int_{Q_j^k}(f(x)-f_{Q_j^k})(b_k(x)-b_{k+1}(x))dx\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Tomando valor absoluto, siendo $f \geq 0$ y $u \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_R f(x)u(x)dx &\leq u_R\int_R f(x)dx + c\sum_{k_0-1}^{m-1}\sum_j a^k\int_{Q_j^k}(f(x)-f_{Q_j^k})dx \\ &\leq u_R\int_R f(x)dx + c\sum_{k_0-1}^{m-1}\sum_j u_{Q_j^k}\int_{Q_j^k}|f(x)-f_{Q_j^k}|dx \\ &= I + II.\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Para estimar I usamos que $W \in RH_\infty(R)$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{|R|}\int_R w(x)W(x)dx\int_R f(x)dx \\ &\leq \frac{1}{|R|}\int_R w(x)dx\ \frac{1}{|R|}\int_R W(x)dx\int_R f(x)dx \\ &\leq \int_R\left(\frac{1}{|R|}\int_R w\right)\left(\frac{1}{|R|}\int_R f\right)W(x)dx \\ &\leq \int_R M_R^d w\, M_R^\sharp f\, W.\end{aligned}$$

Para estimar II vamos a usar la parte 2 del Lema 6.2.1. Tenemos que, para cada Q_j^k existe un conjunto $E_j^k \subset Q_j^k$ tal que $|E_j^k| \geq \beta|Q_j^k|$ con $\beta \in (0,1)$ dependiendo solamente de la dimensión y del número a. Además los conjuntos E_j^k son disjuntos dos a dos en j y en k. Como $W \in RH_\infty$ existe una constante C y $p \geq 1$ tal que

$$\left(\frac{|E_j^k|}{|Q_j^k|}\right)^p \leq C\frac{W(E_j^k)}{W(Q_j^k)},$$

Para todo j, k.

Entonces,

$$\begin{aligned}u_{Q_j^k} &= \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} w(x)W(x)dx \\ &\leq \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} w(x)dx\ \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} W(x)dx \\ &\leq C_{\beta,p}\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} w(x)dx\ \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{E_j^k} W(x)dx\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
II &= c\sum_{k_0-1}^{m-1}\sum_j u_{Q_j^k}\int_{Q_j^k}|f(x)-f_{Q_j^k}|dx\\
&\le C\sum_{k_0-1}^{m-1}\sum_j \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k}w(x)dx\int_{E_j^k}W(x)dx\,\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k}|f(x)-f_{Q_j^k}|dx\\
&\le C\sum_{k_0-1}^{m-1}\sum_j \int_{E_j^k} M_R^{\sharp}f\, M_R^d w\, W\\
&\le C\int_R M_R^{\sharp}f\, M_R^d w\, W.
\end{aligned}$$

□

Del lema anterior podemos pasar a una desigualdad también de tipo Lerner en el espacio $\mathbb{R}^d$ que tenga en cuenta la función ρ. Recordemos que

$$M^{\rho,\mathrm{loc}}f(x)=\sup_{\substack{B\ni x\\ B\in\mathcal{B}_\rho}}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|dy. \tag{6.3.10}$$

Donde, $\mathcal{B}_\rho=\{B(x,r):r\le\rho(x)\}$. Además, como los resultados previos se han obtenido para cubos, hacemos la siguiente observación sobre la Proposición 1.2.6.

Observación 6.3.3. Dada una función de radio crítico ρ, podemos aplicar la Proposición 1.2.6 a $\tilde{\rho}=\rho/\sqrt{d}$, logrando un cubrimiento por bolas críticas respecto a ρ, $\{B_n=B(x_n,\rho(x_n))\}$, de manera tal que la familia $\{\tilde{B_n}=B(x_n,\rho(x_n)/\sqrt{d})\}$ también sea un cubrimiento. De esta manera, si denotamos por Q_n al cubo inscripto en B_n, la familia $\{Q_n\}$ será un cubrimiento por cubos de $\mathbb{R}^d$ conservando la misma propiedad de solapamiento acotado enunciado en la Proposición 1.2.6.

Teorema 6.3.4. *Sea ρ una función de radio crítico y $\{Q_n\}$ el cubrimiento por cubos asociado a ρ como el descripto previamente. Sea W un peso en $\mathbb{R}^d$ tal que $W\in RH_\infty(Q_n)$ uniformemente en n. Entonces, para cualquier peso w y $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$, $f\ge 0$, se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,w\,W\ \le C\int_{\mathbb{R}^d} M_\rho^{\sharp}f\, M^{\rho,\mathrm{loc}}w\, W, \tag{6.3.11}$$

para C que depende solamente de la dimensión y de las constantes de ρ y de reverse-Hölder de W.

Demostración. Sean $w_n=w\chi_{Q_n}$ y $f_n=f\chi_{Q_n}$. Afirmamos que, para $x\in Q_n$, existe una constante C independiente de n tal que

$$M_{Q_n}^d(w_n)(x)\le CM^{\rho,\mathrm{loc}}(w)(x)\quad \text{y}\quad M_{Q_n}^{\sharp}(f_n)(x)\le CM_\rho^{\sharp}(f)(x). \tag{6.3.12}$$

Para ver esto tomemos $x\in Q_n$ y un cubo $Q\in\mathcal{D}_{Q_n}$ tal que $x\in Q$. Consideramos $B_Q=B(x_Q,r_Q)$, donde x_Q es el centro de Q y $r_Q=d^{1/2}l(Q)/2$. De esta manera $Q\subset B_Q\subset B_n$

y $|B_Q| = c_d|Q|$ para alguna constante c_d que depende sólo de d. Definimos $\alpha = 2^{-N_0}C_0^{-1}$, donde N_0 y C_0 son las constantes que aparecen en (1.2.7). De esta manera, si $r_Q \leq \alpha\rho(x_n)$,

$$r_Q \leq \alpha c_\rho \left(1 + \frac{|x_n - x_Q|}{\rho(x_n)}\right)^{N_0} < \alpha c_\rho 2^{N_0}\rho(x_Q) = \rho(x_Q).$$

Luego, si $r_Q \leq \alpha\rho(x_n)$, B_Q es una bola sub-crítica y así

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w_n \leq \frac{c_d}{|B_Q|}\int_{B_Q} w \leq CM^{\rho,\mathrm{loc}}w(x).$$

Por otro lado, si $r_Q > \alpha\rho(x_n)$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w_n \leq \frac{c_d}{|B_Q|}\int_{B_Q} w \leq \frac{c_d}{\alpha^d|B_n|}\int_{B_n} w \leq CM^{\rho,\mathrm{loc}}w(x).$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Consideramos nuevamente $x \in Q_n$ y $Q \in \mathcal{D}_{Q_n}$ con $x \in Q$. Sean B_Q, r_Q y α como antes. Entonces se tiene que

$$\frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} |f| \leq \frac{c_d}{|B_n|}\int_{B_n} |f|$$

y

$$|f_Q - f_{B_Q}| \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_{B_Q}| \leq \frac{c_d}{|B_Q|}\int_{B_Q} |f - f_{B_Q}|.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| &\leq \frac{c_d}{|B_Q|}\int_{B_Q} |f - f_Q| \\
&\leq \frac{c_d}{|B_Q|}\int_{B_Q} \big(|f - f_{B_Q}| + |f_{B_Q} - f_Q|\big) \qquad (6.3.13)\\
&\leq \frac{\tilde{c}_d}{|B_Q|}\int_{B_Q} |f - f_{B_Q}|.
\end{aligned}$$

Consideramos nuevamente dos casos. Si $r_Q \leq \alpha\rho(x_n)$ tenemos que B_Q es una bola sub-crítica. Luego,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| + \frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} |f| \leq \frac{\tilde{c}_d}{|B_Q|}\int_{B_Q} |f - f_{B_Q}| + \frac{c_d}{|B_n|}\int_{B_n} |f| \leq CM^\sharp_\rho f(x).$$

Por otro lado, si $r_Q > \alpha\rho(x_n)$, como $Q \subset B_n$ y $|Q| \geq |B_n|/C_{d,\rho}$, podemos obtener

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| + \frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} |f| &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_{B_n}| + |f_{B_n} - f_Q| + \frac{C_d}{|B_n|}\int_{B_n} |f| \\
&\leq \frac{C_{d,\rho}}{|B_n|}\int_{B_n} |f - f_{B_n}| + \frac{c_d}{|B_n|}\int_{B_n} |f| \\
&\leq CM^\sharp_\rho f(x),
\end{aligned}$$

para $x \in Q$ y para C que depende sólo de d y de ρ. Teniendo en cuenta la Proposición 6.3.2, las desigualdades anteriores y el solapamiento controlado de los cubos Q_n resulta

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f\, w\, W &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{Q_n} f_n\, w_n\, W \\
&\leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{Q_n} M^\sharp_{Q_n} f_n\, M^d_{Q_n} w_n\, W \\
&\leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} M^\sharp_\rho f\, M^{\rho,\mathrm{loc}} w\, W \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} M^\sharp_\rho f\, M^{\rho,\mathrm{loc}} w\, W,
\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado que $W \in RH_\infty(Q_n)$ uniformemente en n. □

6.4. Desigualdad con dos pesos para M^σ

En esta sección desarrollaremos una desigualdad en L^p con dos pesos para la maximal M^σ asociada a una función de radio crítico ρ. Recordemos que la función maximal $M^\sigma f$ para una función localmente integrable f se define como

$$M^\sigma f(x) = \sup_{B=B(x_B,r_B)\ni x} \left(1 + \frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B|} \int_B |f|. \tag{6.4.1}$$

Al igual que en la sección anterior, probaremos en primer instancia una desigualdad análoga a la buscada cuando el espacio es un cubo $R \subset \mathbb{R}^d$ y el operador es la maximal de Hardy-Littlewood correspondiente M_R sobre cubos. Nuestra herramienta principal será nuevamente la descomposición de Calderón-Zygmund dada en la Sección 6.2 y por esta razón la maximal será tomada sobre cubos.

Más precisamente, para un cubo $R \subset \mathbb{R}^d$, consideramos la maximal M_R definida en (6.2.1). Decimos que un par de pesos (w, v) está en $A_p(R)$ si existe alguna constante C tal que

$$w(Q \cap R)^{1/p} [v^{-p'/p}(Q \cap R)]^{1/p'} \leq C |Q \cap R|, \tag{6.4.2}$$

para todo cubo Q con centro $x_Q \in R$. Al igual que en el caso de $\mathbb{R}^d$, no podemos asegurar que la maximal M_R esté acotada de $L^p(v)$ en $L^p(w)$ con sólo esta hipótesis. Una condición suficiente viene dada por lo que se conoce como condición *bump*, esto es, (w, v) satisface

$$\|w^{1/p}\|_{p,Q\cap R} \|v^{-1/p}\|_{\phi,Q\cap R} \leq C, \tag{6.4.3}$$

para todo cubo Q con centro $x_Q \in R$ y una función de Young ϕ adecuada. Observar que $Q \cap R$ puede no ser un cubo pero tampoco será un rectángulo muy excéntrico ya que el centro del cubo Q pertenece a R por lo que $|Q \cap R| \geq c|Q|$.

Más precisamente, dado $1 < r < \infty$, decimos que una función de Young $\varphi \in \mathcal{E}_r$ si para alguna constante $c > 0$,

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t^r}\frac{dt}{t} < \infty. \tag{6.4.4}$$

Bajo esta hipótesis en φ es posible asegurar la acotación en $L^p(\mathbb{R}^d)$ de la función maximal

$$M_\varphi f(x) = \sup_{\substack{Q\subset\mathbb{R}^d\\ Q\ni x}} \|f\|_{\varphi,Q}.$$

Teorema 6.4.1. *Sea $1 < p < \infty$, M_ψ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ si y sólo si $\psi \in \mathcal{E}_p$.*

Para una prueba de este resultado puede verse [29].

Observación 6.4.2. Si φ es una función de Young tal que ella y su conjugada $\bar{\varphi}$ duplican, (6.4.4) es equivalente a

$$\int_c^\infty \left(\frac{t^{r'}}{\bar{\varphi}(t)}\right)^{r-1}\frac{dt}{t} < \infty. \tag{6.4.5}$$

Una prueba de este resultado puede encontrarse en la Proposición 5.10 de [11].

Enunciamos a continuación el resultado de acotación con dos pesos para el operador M_R cuando R es un cubo en $\mathbb{R}^d$.

Teorema 6.4.3. *Sean $1 < p < \infty$ y ϕ una función de Young tal que su conjugada $\bar{\phi} \in \mathcal{E}_p$. Si el par de pesos (w, v) satisface la condición (6.4.3) entonces M_R es acotada de $L^p(v, R)$ en $L^p(w, R)$ con norma dependiendo sólo de p, d y de la constante que aparece en (6.4.3).*

Demostración. Sean R un cubo en $\mathbb{R}^d$, $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(v, R)$. Suponemos sin pérdida de generalidad $f \geq 0$. Definimos $a = 2^{d+1}$ y k_0 como el menor entero tal que $\frac{1}{|R|}\int_R f < a^{k_0}$. Consideramos para cada $k \geq k_0$ la familia de cubos de Calderón-Zygmund $\{Q_j^k\}_{j\geq 1}$ de altura a^k dados en el Lema 6.2.1. Entonces, para cada $j \geq 1$,

$$a^k < \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} f \leq 2^d a^k.$$

Aplicando el Lema 6.2.1 tenemos que, para cada $k \geq k_0$

$$\tilde{\Omega}_k = \{x \in R : M_R f(x) > 4^d a^k\} \subset \bigcup_{j\geq 1} \tilde{Q}_j^k,$$

donde $\tilde{Q}_j^k = 3Q_j^k \cap R$. Sea (w, v) un par de pesos que satisfacen (6.4.3) para alguna función ϕ tal que $\bar{\phi} \in \mathcal{E}_p$.

$$\begin{aligned}\int_R |M_R f|^p w &= \int_{R\setminus\tilde{\Omega}_{k_0}} |M_R f|^p w + \sum_{k\geq k_0}\int_{\tilde{\Omega}_k\setminus\tilde{\Omega}_{k+1}} |M_R f|^p w\\ &\leq \int_{R\setminus\tilde{\Omega}_{k_0}} |M_R f|^p w + \sum_{k\geq k_0} 4^d a^{k+1} w(\tilde{\Omega}_{k+1}) = I + II.\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

Para acotar I notamos que si $x \in R \setminus \tilde{\Omega}_{k_0}$,

$$M_R f(x) \leq 4^d a^{k_0} \leq \frac{4^d a}{|R|} \int_R f$$

y que la condición (6.4.3) para el par (w, v) implica

$$\|w^{1/p}\|_{p,R} \|v^{-1/p}\|_{p',R} \leq C,$$

Tomando $Q = R$ y usando $\bar{\phi} \in \mathcal{E}_p$. Entonces,

$$\begin{aligned} I &\leq a^p 4^{dp} \left(\frac{1}{|R|} \int_R f \right)^p w(R) \\ &= a^p 4^{dp} \left(\frac{1}{|R|} \int_R f v^{1/p} v^{-1/p} \right)^p w(R) \\ &\leq C_{d,p} \|f v^{1/p}\|_{p,R}^p \|v^{-1/p}\|_{p',R}^p w(R) \\ &\leq C(d,p,v,w) |R| \|f v^{1/p}\|_{p,R}^p \\ &= C(d,p,v,w) \int_R f^p v. \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Para II, aplicando la desigualdad de Hölder y la condición (6.4.3) a $3Q_j^k \cap R$ lo cual es posible ya que $Q_j^k \subset R$,

$$\begin{aligned} II &\leq \sum_{k \geq k_0} 4^d a^{k+1} \sum_{j \geq 1} w(\tilde{Q}_j^k) \\ &\leq C(d) \sum_{\substack{k \geq k_0 \\ j \geq 1}} \left(\frac{1}{|Q_j^k|} \int_{Q_j^k} f \right)^p w(\tilde{Q}_j^k) \\ &\leq C(d,p) \sum_{\substack{k \geq k_0 \\ j \geq 1}} \|f v^{1/p}\|_{\bar{\phi}, Q_j^k}^p \|v^{-1/p}\|_{\phi, \tilde{Q}_j^k} w(\tilde{Q}_j^k) \\ &\leq C(d,p,v,w) \sum_{\substack{k \geq k_0 \\ j \geq 1}} \|f v^{1/p}\|_{\bar{\phi}, Q_j^k}^p |\tilde{Q}_j^k|. \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

Finalmente, podemos usar la parte 2 del Lema 6.2.1 junto con el Teorema 6.4.1 para obtener

$$\begin{aligned} II &\leq C(d,p,v,w) \sum_{\substack{k \geq k_0 \\ j \geq 1}} \|f v^{1/p}\|_{\bar{\phi}, Q_j^k}^p |E_j^k| \\ &\leq C(d,p,v,w) \sum_{\substack{k \geq k_0 \\ j \geq 1}} \int_{E_j^k} M_{\tilde{\phi}} (f v^{1/p} \chi_R)^p \\ &\leq C(d,p,v,w) \int_{\mathbb{R}^d} M_{\tilde{\phi}} (f v^{1/p} \chi_R)^p \\ &\leq C(d,p,v,w,\phi) \int_R |f|^p v, \end{aligned} \tag{6.4.9}$$

ya que E_j^k son disjuntos, $E_j^k \subset Q_j^k \subset R$ y $|E_j^k| \geq c|Q_j^k|$.

$\square$

A continuación vamos a aplicar el Teorema 6.4.3 para obtener una desigualdad con dos pesos para M^σ. Antes, debemos dar algunas definiciones y hacer algunas aclaraciones sobre la notación. En primer lugar, dado un cubo Q de centro x_Q y lado l_Q vamos a denotar r_Q a la cantidad $r_Q = \sqrt{d} l_Q/2$. De esta manera $Q \subset B(x_Q, r_Q)$, la bola circunscripta.

Como en la sección anterior, para obtener el resultado para M^σ, la idea es cubrir $\mathbb{R}^d$ por cubos y aplicar el resultado previo en cada cubo. Para ello usaremos el cubrimiento descripto en la Observación 6.3.3.

Antes de enunciar el teorema, definimos las clases de pesos que resultarán adecuadas para la acotación de esta maximal. Dado $1 < p < \infty$, $\theta \geq 0$ y una función de radio crítico ρ, decimos que un par de pesos (w, v) satisface una condición (p, ρ, θ)-bump si existe una función de Young ϕ con $\bar{\phi} \in \mathcal{E}_p$ tal que

$$\|w^{1/p}\|_{p,B} \|v^{-1/p}\|_{\phi,B} \leq A \left(1 + \frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^\theta, \tag{6.4.10}$$

para toda bola $B(x_B, r_B) \subset \mathbb{R}^d$.

Observación 6.4.4. Si en la desigualdad anterior reemplazamos las bolas B por cubos $Q = Q(x_Q, r_Q)$, ambas desigualdades resultan equivalentes con un cambio en la constante que denominamos $\tilde{A}$ dependiendo sólo de la dimensión y de θ.

Teorema 6.4.5. *Sean $1 < p < \infty$, $\theta \geq 0$ y un par de pesos (w, v) que satisface una condición (p, ρ, θ)-bump. Entonces, existe σ_0 tal que para todo $\sigma \geq \sigma_0$ el operador M^σ es acotado de $L^p(v)$ en $L^p(w)$.*

Demostración. En primer lugar notemos que si consideramos la correspondiente maximal centrada

$$\tilde{M}^\sigma f(x) = \sup_{r>0} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|, \tag{6.4.11}$$

se tiene, de (1.2.7),

$$\tilde{M}^\sigma f(x) \leq M^\sigma f(x) \leq 2^d C_0 \tilde{M}^{\sigma/(N_0+1)} f(x). \tag{6.4.12}$$

Por lo tanto, basta mostrar el resultado para $\tilde{M}^\sigma$. Comenzamos acotando $\tilde{M}^\sigma f(x)$ por

$$\begin{aligned} \tilde{M}^\sigma f(x) &\leq \sup_{0<r\leq\rho(x)} \frac{1}{|B|} \int_B |f| + \sup_{r>\rho(x)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| \\ &= \tilde{M}_{\mathrm{loc}} f(x) + \tilde{M}^\sigma_{\mathrm{glob}} f(x). \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

Sea $\{Q_n\}$ el cubrimiento de la Observación 6.3.3 que cumple $B(x_n, d^{-1/2}\rho(x_n)) \subset Q_n \subset B_n = B(x_n, \rho(x_n))$. Sea $B = B(x, r)$, con $r \leq \rho(x)$ y n tal que $x \in Q_n$. Afirmamos que existe $\gamma = \gamma(\rho)$ tal que $B \subset \gamma Q_n$. En efecto, si $y \in B$,

$$\begin{aligned} |y - x_n| &\leq |y - x| + |x - x_n| \leq r_B + \rho(x_n) \leq \rho(x) + \rho(x_n) \\ &\leq \left(1 + 2^{N_0/(N_0+1)}\right) \rho(x_n) = \gamma d^{-1/2} \rho(x_n). \end{aligned}$$

Llamando $\tilde{Q}_n = \gamma Q_n$ tenemos que para $x \in Q_n$,

$$\tilde{M}_{\mathrm{loc}} f(x) \leq M_{\tilde{Q}_n}\left(f \chi_{\tilde{Q}_n}\right)(x), \tag{6.4.14}$$

ya que si $B \subset \tilde{Q}_n$, también lo estará el cubo circunscripto.

Ahora, para poder aplicar el Teorema 6.4.3 debemos ver que el par de pesos $w_n = w\chi_{\tilde{Q}_n}$ y $v_n = v\chi_{\tilde{Q}_n}$ satisfacen (6.4.3) para $R = \tilde{Q}_n$ y ϕ tal que $\bar{\phi} \in \mathcal{E}_p$. Para ello tomamos un cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$ con centro $x_Q \in \tilde{Q}_n$ y consideramos dos casos.

Si $r_Q \geq 2\gamma\rho(x_n)$ se sigue que $Q \supset \tilde{Q}_n$ ya que $x_Q \in \tilde{Q}_n$ implica que $|y - x_Q| \leq \gamma d^{-1/2}\rho(x_n) \leq d^{-1/2} r_Q$. Luego, en este caso,

$$\|w_n^{1/p}\|_{p,Q\cap\tilde{Q}_n} \|v_n^{1/p}\|_{\phi,Q\cap\tilde{Q}_n} \leq \|w_n^{1/p}\|_{p,\tilde{Q}_n} \|v_n^{1/p}\|_{\phi,\tilde{Q}_n} \leq \tilde{A}\left(1 + \frac{\gamma\rho(x_n)}{\rho(x_n)}\right)^\theta = C_{d,\rho,\theta}\tilde{A},$$

con $\tilde{A}$ la constante de la Observación 6.4.4.

Por otro lado, si $r_Q \leq 2\gamma\rho(x_n)$, un argumento geométrico simple muestra que $|Q \cap \tilde{Q}_n| \geq |Q|/2^d$. Entonces

$$\|w_n^{1/p}\|_{p,Q\cap\tilde{Q}_n} \|v_n^{1/p}\|_{\phi,Q\cap\tilde{Q}_n} \leq C_{d,\phi} \|w_n^{1/p}\|_{p,Q} \|v_n^{1/p}\|_{\phi,Q} \leq C_{d,\phi}\tilde{A}\left(1 + \frac{\gamma\rho(x_n)}{\rho(x_n)}\right)^\theta = C_{d,\phi,\rho,\theta}\tilde{A},$$

Ahora, usando la desigualdad (6.4.14) y el Teorema 6.4.3,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{M}_{\mathrm{loc}} f|^p w \leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\tilde{Q}_n} |f|^p v_n \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p v, \tag{6.4.15}$$

ya que la constante del Teorema 6.4.3 resulta independiente de n.

Veamos ahora el término conrrespondiente a $\tilde{M}^\sigma_{\mathrm{glob}}$. Aquí volvemos a considerar el cubrimiento $\{B_n\}$ por bolas críticas. Sea $B = B(x, r)$ con $r > \rho(x)$ y n tal que $x \in B_n$. Elijamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k_0-1}\rho(x) \leq r \leq 2^{k_0}\rho(x)$. Como $x \in B_n$, $C_0^{-1}2^{-N_0}\rho(x_n) \leq \rho(x) \leq 2C_0\rho(x_n)$. Llamando $\tilde{B}_n = B(x_n, 2C_0\rho(x_n))$ tenemos que $B \subset 2^{k_0}\tilde{B}_n$ y $|B| \geq c_0^{-d}2^{-N_0 d}|2^{k_0}\tilde{B}_n|$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{M}^\sigma_{\mathrm{glob}} f(x) &= \sup_{r>\rho(x)} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\sigma} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| \\ &\leq C \sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k\sigma} \frac{1}{|2^k\tilde{B}_n|} \int_{2^k\tilde{B}_n} |f|, \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

con constante C dependiendo sólo de ρ, d y σ pero no de n. Luego, de la desigualdad anterior, Hölder y la hipótesis para el par w, v,

$$
\begin{aligned}
\int |\tilde{M}^{\sigma}_{\text{glob}} f|^p w &\le C \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} |\tilde{M}^{\sigma}_{\text{glob}} f|^p w \\
&\le C \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kp\sigma} \left(\frac{1}{|2^k \tilde{B}_n|} \int_{2^k\tilde{B}_n} |f| \right)^p w(B_n) \\
&\le C \sum_{n\in\mathbb{N}} w(B_n) \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kp\sigma} \left(\frac{1}{|2^k \tilde{B}_n|} \int_{2^k\tilde{B}_n} |f|^p v \right) v^{-1/p}(2^k\tilde{B}_n)^{p/p'} \\
&\le C \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kp\sigma} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{w(2^k\tilde{B}_n) v^{-1/p}(2^k\tilde{B}_n)^{p/p'}}{|2^k\tilde{B}_n|} \int_{2^k\tilde{B}_n} |f|^p v \qquad (6.4.17) \\
&\le C\tilde{A} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kp\sigma} \sum_{n\in\mathbb{N}} (1 + C_0 2^{k+1})^{p\theta} \int_{2^k\tilde{B}_n} |f|^p v \\
&\le C\tilde{A} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kp(\sigma-\theta)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{2^k\tilde{B}_n} |f|^p v \\
&\le C\tilde{A} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-kp(\sigma-\theta-N_1)} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p v,
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad usamos el solapamiento acotado de $\{B_n\}$. Tomando $\sigma > \theta + N_1$, resulta la acotación buscada para $\tilde{M}^{\sigma}_{\text{glob}}$ y el teorema queda demostrado.

□

A continuación, vamos a aplicar el resultado anterior para obtener desigualdades para M^{σ}_s.

Corolario 6.4.6. *Sean $1 < s < p < \infty$, $\theta \ge 0$ y (w, v) un par de pesos que satisfacen una condición $(p/s, \rho, \theta)$-bump. Entonces, existe σ_0 tal que si $\sigma \ge \sigma_0$, M^{σ}_s está acotado de $L^p(v)$ en $L^p(w)$.*

Demostración. Sean $1 < s < p$ y (w, v) un par de pesos que satisface una condición $(p/s, \rho, \theta)$-bump, podemos aplicar el resultado para $s = 1$ de la siguiente manera,

$$\int |M^{\sigma}_s f|^p w = \int |M^{\sigma}(f^s)|^{p/s} w \le C \int |f|^p v. \qquad (6.4.18)$$

□

Para finalizar esta sección presentamos ejemplos de pares de pesos que satisfacen una condición (r, ρ, θ)-bump.

Ejemplo 6.4.7. Sean w_1 y w_2 dos pesos, $\theta \ge 0$ y ψ una función de Young tal que $\xi(t) = \psi(t^{r'})$ es tal que $\bar{xi} \in \mathcal{E}_r$. El par $(\tilde{w}, \tilde{v}) = (w_1 (M^{\theta}_{\psi} w_2)^{1-r}, (M^{\theta} w_1) w_2^{1-r})$ satisface una condición (r,ρ,θ)-bump. En efecto, para una bola $B\subset\mathbb{R}^d$, reescalando y usando la definición del operador maximal,

$$\begin{aligned}\|\tilde{w}^{1/r}\|_{r,B} &= \|w_1(M_\psi^\theta w_2)^{1-r}\|_{1,B}^{1/r} \\ &\le \|w_1\|_{1,B}^{1/r}\|w_2\|_{\psi,B}^{-1/r'}\left(1+\frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{\theta/r'}.\end{aligned} \tag{6.4.19}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}^{-1/r}\|_{\xi,B} &= \|(M^\theta w_1)^{1-r'}w_2\|_{\psi,B}^{1/r'} \\ &\le \|w_1\|_{1,B}^{-1/r}\|w_2\|_{\psi,B}^{1/r'}\left(1+\frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{\theta/r}.\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

Las dos estimaciones juntas nos dan la condición (p,ρ,θ) bump para el par $(\tilde{w},\tilde{v})$.

Observación 6.4.8. Si ψ es una función de Young duplicante es fácil ver que ξ y $\bar{\xi}$ resultan ser ambas duplicantes. Usando la Observación 6.4.2 resulta que $\bar{\xi}\in\mathcal{E}_r$ si y sólo si

$$\int_c^\infty\left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{r-1}\frac{dt}{t}<\infty. \tag{6.4.21}$$

6.5. Prueba del Teorema 6.1.1

Antes de dar una prueba del teorema central de este capítulo vamos a establecer algunos resultados que involucran composiciones de operadores maximales. Estos resultados y algunas de sus consecuencias serán herramientas necesarias para la prueba del Teorema 6.1.1.

Para comenzar necesitamos establecer el siguiente resultado auxiliar cuya demostración puede verse en [11] Proposición 5.6.

Lema 6.5.1. *[Ver Lema 4.1 en [29]] Sean ϕ una función de Young, f una función tal que $\|f\|_{\phi,B}\to 0$ cuando $|B|\to\infty$ y $\lambda>0$. Entonces*

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^d : M_\phi f(x)>\lambda\right\}\right|\le 3^d\int_{\{x\in\mathbb{R}^d:|f(x)|>\lambda/2\}}\phi\left(\frac{2\cdot 4^d|f(x)|}{\lambda}\right)dx. \tag{6.5.1}$$

En particular, si f tiene soporte compacto la desigualdad anterior vale.

Lema 6.5.2. *Sean B una bola en $\mathbb{R}^d$ y $0\le f\in L^1_{\text{loc}}$. Sean ϕ y ψ dos funciones de Young. Si definimos, para $t>1$,*

$$G(t)=\int_1^t\phi(t/\lambda)\psi'(\lambda)d\lambda$$

y F es una función de Young tal que $G(t)\preceq F(t)$, existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$\int_B\psi\left(M_\phi(f\chi_{3B})(y)\right)dy\le c_1|B|+c_1\int_{3B\cap\{f(y)>1/2\}}F(c_2f(y))dy.$$

Demostración. Aplicando el teorema de Fubini y el Lema 6.5.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_B \psi\left(M_\phi(f\chi_{3B})(y)\right)dy &= \int_0^\infty \psi'(\lambda)\left|\{x\in B : M_\phi(f\chi_{3B})(x)>\lambda\}\right| d\lambda \\
&\leq c_1|B| + \int_1^\infty \psi'(\lambda)\left|\{x\in B : M_\phi(f\chi_{3B})(x)>\lambda\}\right| d\lambda \\
&\leq c_1|B| + c_1\int_1^\infty \psi'(\lambda)\int_{\{x\in 3B: f(x)>\lambda/2\}} \phi\left(\frac{cf(x)}{\lambda}\right)dxd\lambda \\
&\leq c_1|B| + c_1\int_{\{x\in 3B: f(x)>1/2\}}\int_1^{2f(x)} \phi\left(\frac{cf(x)}{\lambda}\right)\psi'(\lambda)d\lambda dx \\
&= c_1|B| + c_1\int_{\{x\in 3B: f(x)>1/2\}} G(cf(x))dx \\
&\leq c_1|B| + c_1\int_{3B} F\left(c_2 f(x)\right)dx.
\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

□

Proposición 6.5.3. *Sean $\theta\geq 0$, f una función medible y ρ una función de radio crítico.*

1. *$M^{\rho,\mathrm{loc}}(M_\phi^\theta f)(x)\leq CM_\phi^\theta f(x)$, para toda función de Young ϕ tal que $\phi(t)/t^r$ es casi creciente, para algún $r>1$.*
2. *$M^\theta(M_\psi^{\rho,\mathrm{loc}})f)(x)\leq CM_\phi^\theta f(x)$, para funciones ψ y ϕ de Young tales que para $G(t)=\int_1^t\psi(t/\lambda)d\lambda$ se tiene que $G\preceq\phi$.*

Demostración. Sea $x\in\mathbb{R}^d$ y $B(x_B,r_B)\ni x$ una bola en $\mathbb{R}^d$ con $r_B<\rho(x_B)$, queremos ver que,

$$\frac{1}{|B|}\int_B M_\phi^\theta f\leq CM_\phi^\theta f(x). \tag{6.5.3}$$

En primer lugar descomponemos $f=f\chi_{3B}+f\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 3B}=f_1+f_2$. Para ver (6.5.3) para f_1 debemos hacer previamente la siguiente observación. Usando el Lema 6.5.2 para $\phi(t)=t$ y para f/λ se tiene

$$\frac{1}{\lambda|B|}\int_B M_\phi(f_1)\leq C_1\left(\frac{1}{\lambda}+\int_{3B\cap\{f(x)>1/2\}}F\left(c_2\frac{f(x)}{\lambda}dx\right)\right).$$

Como $\phi(s)/s^r$ es casi creciente

$$G(t)=\int_1^t\phi\left(\frac{t}{\lambda}\right)d\lambda\leq\phi(t)\int_1^t\frac{d\lambda}{\lambda^r}\leq C\phi(t).$$

Luego, podemos tomar $F(t)=C\phi(t)$. Además, como integramos en $\{f(x)>1/2\}$ y F es convexa

$$F\left(\frac{c_2 f(x)}{\lambda}\right)\geq\frac{C}{\lambda}.$$

Así
$$\frac{1}{\lambda|B|}\int_B M_\phi f_1 \leq \frac{C}{|3B|}\int_{3B}\phi\left(\frac{Cf}{\lambda}\right)$$
y
$$\text{ínf}\{\lambda : \frac{1}{\lambda|B|}\int_B M_\phi f_1 \leq C\} \leq \text{ínf}\{\lambda : \frac{1}{|3B|}\int_{3B}\phi\left(\frac{Cf}{\lambda}\right) \leq 1\}.$$
Luego
$$\frac{1}{|B|}\int_B M_\phi f_1 \leq \tilde{C}\|f\|_{\phi,3B}$$
y como $M_\phi^\theta \leq M_\phi$, tomando el supremo sobre B queda demostrada la desigualdad (6.5.3) para f_1.

Para f_2, vamos a mostrar que para todo x, $z \in B$, se tiene que que $M_\phi^\theta(f_2)(z) \leq CM_\phi^\theta(f_2)(x)$. Tomemos $\tilde{B} = B(x_{\tilde{B}}, r_{\tilde{B}}) \ni z$ tal que $\tilde{B} \cap 3B \neq \emptyset$. Entonces, $r_B \leq r_{\tilde{B}}$ y $B \subset 3\tilde{B}$. Luego

$$\begin{aligned}
\|f_2\|_{\phi,\tilde{B}}\left(1+\frac{r_{\tilde{B}}}{\rho(x_{\tilde{B}})}\right)^{-\theta} &\leq C\|f_2\|_{\phi,3\tilde{B}}\left(1+\frac{r_{\tilde{B}}}{\rho(x_{\tilde{B}})}\right)^{-\theta} \\
&\leq C\|f_2\|_{\phi,3\tilde{B}}\left(1+\frac{3r_{\tilde{B}}}{\rho(x_{\tilde{B}})}\right)^{-\theta} \\
&\leq CM_\phi^\theta(f_2)(x).
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Promediando sobre B obtenemos la estimación buscada.

Veamos ahora 2. Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y $B = B(x_B, r_B) \ni x$. Queremos ver que
$$\frac{1}{|B|\left(1+\frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^\theta}\int_B M_\psi^{\rho,\text{loc}} f \;\leq\; CM_\phi^\theta f(x). \tag{6.5.5}$$

Como antes, descomponemos $f = f_1 + f_2$, como $M_\phi^{\rho,\text{loc}} \leq M_\phi$ podemos usar el Lema 6.5.2 como arriba para obtener que
$$\frac{1}{|Q|}\int_Q M_\psi^{\rho,\text{loc}} f_1 \leq c_1\|f\|_{3Q,\phi},$$
dado que hemos supesto que $G(t) \preceq C\phi(t)$ Multiplicando a ambos lados por $\left(1+\frac{r_B}{\rho(x_B)}\right)^{-\theta}$ que es equivalente a $\left(1+\frac{3r_B}{\rho(x_B)}\right)^{-\theta}$ obtenemos (6.5.5) para f_1.

Para f_2, como $M_\psi^{\rho,\text{loc}} \leq M_\psi^\theta$, podemos usar (6.5.4), que es válido para cualquier función de Young y cualquier bola. Además, $M_\psi^\theta \leq M_\phi^\theta$ puesto que $\psi \preceq \phi$. En efecto, si $t > 1$,
$$\int_1^t \psi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \leq \phi(t)$$

y

$$\int_1^{2t} \psi\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda \geq \int_1^{2} \psi\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda \geq \psi\left(\frac{t}{2}\right).$$

Entonces, tomando promedios sobre $z \in B$ obtenemos (6.5.5) para f_2.

□

Como una aplicación del anterior resultado podemos obtener los siguientes corolarios.

Corolario 6.5.4. *Sean $0 < \delta < 1$, $\theta > 0$ y ϕ una función de Young. Entonces, para cualquier función medible f tenemos que $(M_\phi^\theta f)^\delta \in A_1^{\text{loc}}$, siempre que $M_\phi^\theta f < \infty$.*

Demostración. Dada ϕ, consideramos $\psi(t) = \phi(t^{1/\delta})$. Como

$$(M_\phi^\theta f(x))^\delta = \sup_{\substack{Q \ni x \\ r_Q \leq \rho(x_Q)}} \frac{\|f\|_{\phi,Q}^\delta}{\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\theta\delta}}$$

y

$$\begin{aligned} \|f\|_{\phi,Q}^\delta &= \text{ínf}\left\{\lambda^\delta : \frac{1}{|Q|}\int_Q \phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\lambda^\delta : \frac{1}{|Q|}\int_Q \psi\left(\frac{|f|^\delta}{\lambda^\delta}\right) \leq 1\right\}, \\ &= \left\||f|^\delta\right\|_{\psi,Q}. \end{aligned}$$

tenemos que

$$(M_\phi^\theta f)^\delta = M_\psi^{\theta\delta}(|f|^\delta).$$

Además, $\psi(t)/t^{1/\delta}$ es casi creciente debido a la convexidad de ϕ. Entonces, podemos aplicar el item 1) de la Proposición 6.5.3, para ver que $M_\psi^{\theta\delta}(|f|^\delta) \in A_1^{\text{loc}}$.

□

Observación 6.5.5. Notar que para cualquier f medible se tiene que $M_\phi^\theta f(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, o bien $M_\phi^\theta f \equiv \infty$.

Recordemos que un peso u pertenece a la clase RH_∞^{loc} si existe una constante C tal que

$$\sup_B u \leq \frac{C}{|B|}\int_B u,$$

Para toda bola $B = B(x_B, r_B)$ con $r_B \leq \rho(x_B)$.

El siguiente lema nos da una manera de construir pesos en RH_∞^{loc}.

Lema 6.5.6. *Si $w \in A_1^{\text{loc}}$, entonces $w^{-\gamma} \in RH_\infty^{\text{loc}}$ para todo $\gamma > 0$.*

Demostración. Sea $B = B(x_B, r_B)$ un cubo con $r_B \leq \rho(x_B)$. En primer lugar debemos observar que aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes $\gamma{+}1$ y $(\gamma{+}1)' = (\gamma{+}1)/\gamma$,

$$1 = \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} w^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\gamma+1} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{\gamma} \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-\gamma}\right). \tag{6.5.6}$$

Entonces, para $x \in B$, usando que $w \in A_1^{\text{loc}}$

$$w^{-\gamma}(x) \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{-\gamma} \leq \frac{C}{|B|}\int_B w^{-\gamma}.$$

□

Corolario 6.5.7. *Dados un peso w, una función de Young ψ, $\theta \geq 0$ y $r > 1$, se tiene que $(M_\psi^\theta w)^{1-r} \in RH_\infty^{\text{loc}} \cap A_s^{\text{loc}}$, para todo $s > r$.*

Demostración. Aplicando el Corolario 6.5.4 con $\delta = \frac{r-1}{s-1}$ se tiene que $(M_\psi^\theta w)^{\frac{r-1}{s-1}} \in A_1^{\text{loc}}$. Entonces, aplicando el lema anterior con $\gamma = s-1$ obtenemos $(M_\psi^\theta w)^{1-r} \in RH_\infty^{\text{loc}}$. Además, como $A_1^{\text{loc}} \subset A_{s'}^{\text{loc}}$ tenemos que $(M_\psi^\theta w)^{\frac{r-1}{s-1}} \in A_{s'}^{\text{loc}}$. Entonces $(M_\psi^\theta w)^{1-r} \in A_s^{\text{loc}}$. □

Finalizamos esta sección con la prueba del teorema central de este capítulo.

Demostración del Teorema 6.1.1. Sea $0 < \eta < 1$ a elegir y $p > s'$,

$$\begin{aligned}\left(\int |Tf|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'}\right)^{\eta/p} &= \| |Tf|^\eta w_1^{\eta/p} (M_\psi^\theta w_2)^{(1-p/s')\eta/p} \|_{L^{p/\eta}} \\ &= \int |Tf|^\eta w_1^{\eta/p} (M_\psi^\theta w_2)^{(1-p/s')\eta/p} h,\end{aligned}$$

para cierta función $h \in L^{(p/\eta)'}$ tal que $\|h\|_{L^{(p/\eta)'}} = 1$.

Usando el Teorema 6.3.4 y el Corolario 6.5.7 tenemos

$$\left(\int |Tf|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'}\right)^{\eta/p} \leq \int M_\rho^\sharp(|Tf|^\eta) M^{\rho,\text{loc}}(w_1^{\eta/p} h)(M_\psi^\theta w_2)^{(1-p/s')\eta/p}.$$

Ahora, es posible fijar la función $F(t) =^{p/\eta} \log^{p/\eta-1+\tilde{\delta}}(1{+}t)$ y elegir $\eta < 1$ y $\tilde{\delta} > 0$ tales que $p/\eta{-}1{+}\tilde{\delta} = p{-}1{+}\delta$. De esta manera, es fácil comprobar que $\bar{F}(t) \in \mathcal{E}_{(p/\eta)'}$. Usando la desigualdad de Hölder para funciones de Young (ver Proposición 1.1.1) podemos escribir

$$\begin{aligned}M^{\rho,\text{loc}}(w_1^{\eta/p} h) &\leq c M_F^{\rho,\text{loc}}(w_1^{\eta/p}) M_{\bar{F}}^{\rho,\text{loc}}(h) \\ &= c(M_{\Phi_0}^{\rho,\text{loc}}(w_1))^{\eta/p} M_{\bar{F}}^{\rho,\text{loc}}(h),\end{aligned}$$

donde $\Phi_0(t) = t\log^{p-1+\delta}(1+t)$. Usando esto, la desigualdad (6.0.2) para la maximal sharp del operador T y la desigualdad de Hölder tenemos que, para todo $\sigma \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left(\int |Tf|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'}\right)^{\eta/p} &\leq C_\sigma \int (M_{s'}^\sigma f)^\eta (M_{\Phi_0}^{\rho,\mathrm{loc}} w_1)^{\eta/p} (M_\psi^\theta w_2)^{(1-p/s')\eta/p} M_{\bar{F}}^{\rho,\mathrm{loc}} h \\ &\leq C_\sigma \left(\int (M_{s'}^\sigma f)^p M_{\Phi_0}^{\rho,\mathrm{loc}} w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'}\right)^{\eta/p} \left(\int (M_{\bar{F}} h)^{(p/\eta)'}\right)^{1/(p/\eta)'}.\end{aligned}$$

El segundo factor está acotado por una constante ya que $\bar{F} \in \mathcal{E}_{(p/\eta)'}$ y $\|h\|_{L^{(p/\eta)'}} = 1$. En el primer factor podemos elegir $\sigma > \sigma_0$ y usar el resultado con dos pesos para la maximal $M_{s'}^\sigma$ dada en el Corolario 6.4.6 ya que, en vistas de la hipótesis sobre psi, el par de pesos $(M_{\Phi_0}^{\rho,\mathrm{loc}} w_1, (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'}, (M^\theta M_{\Phi_0}^{\rho,\mathrm{loc}} w_1) w_2^{1-p/s'})$ es un par admisible para $r = p/s'$ de acuerdo al Ejemplo 6.4.7, obteniendo

$$\int (M_{s'}^\sigma f)^p M_{\Phi_0}^{\rho,\mathrm{loc}} w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'} \leq C \int |f|^p (M^\theta M_{\Phi_0}^{\rho,\mathrm{loc}} w_1) w_2^{1-p/s'}.$$

Finalmente, usando la segunda parte de la Proposición 6.5.3 tenemos que $M^\theta M_{\Phi_0}^{\rho,\mathrm{loc}} w_1 \leq C M_\phi^\theta w_1$ con $\phi(t) = t\log^{p+\delta}(1+t)$ para obtener el resultado deseado

$$\int |Tf|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/s'} \leq C \int |f|^p M_\phi^\theta w_1 w_2^{1-p/s'}$$

□

6.6. Aplicación a integrales singulares asociadas al operador de Schrödinger

Esta sección tiene dos objetivos. En primer lugar vamos a enunciar los resultados de acotación con dos pesos que se siguen de aplicar el Teorema 6.1.1 a los ejemplos de Operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ) introducidos en el Capítulo 2, esto es, los operadores $\mathcal{R}_1^\star = L^{-1/2}\nabla$, $\mathcal{R}_2^\star = L^{-1}\nabla^2$ y las familias de operadores $L^{-\gamma}V^\gamma$ con $0 < \gamma < d/2$ y $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ con $1/2 \leq \gamma < 1$.

Observemos que las desigualdades del Teorema 6.1.1 dependen de T sólo a través del parámetro s, el cual fija tanto los valores permitidos de p como los pares de pesos. De esta manera, las aplicaciones consistirán en escribir la conclusión del teorema para el valor particular de s. Vale destacar aquí que podemos dualizar las desigualdades obtenidas para estos operadores, obteniendo así desigualdades para $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. En segundo lugar vamos a comparar este tipo de desigualdades con las obtenidas en el Capítulo 5 para los mismos ejemplos de operadores aunque usando diferetes técnicas.

6.6.1. Aplicaciones

Comencemos analizando las transformadas de Riesz-Schrödinger $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Para $\mathcal{R}_1$ debemos diferenciar dos casos. Si $V \in RH_q$ con $q > d$, vimos en la Sección 2.3 que tanto $\mathcal{R}_1$ como su adjunto $\mathcal{R}_1^\star$ son operadores de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (∞, δ) con $\delta = 1 - d/q$ y $\delta = 1$ respectivamente. En consecuencia, aplicando la Proposición 6.0.8 tenemos que para todo $0 < \eta < 1$ y $\sigma \geq 0$ existe una constante C tal que

$$[M_\rho^\sharp(|\mathcal{R}_1^{(\star)} f|^\eta)(x)]^{1/\eta} \leq C M^\sigma f(x). \tag{6.6.1}$$

Luego, podemos aplicar el Teorema 6.1.1 para obtener el siguiente resultado

Teorema 6.6.1. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d$.Sean $1 < p < \infty$, w_1 y w_2 dos pesos y ψ y ϕ un par de funciones de Young tales que ψ duplica,*

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{p-1} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{6.6.2}$$

y $\phi(t) = t \log^{p+\delta}(1+t)$, para algún $\delta > 0$. Entonces, para cada $\theta \geq 0$, existe $C = C(p, \theta)$ tal que

$$\int |\mathcal{R}_1 f|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p} \leq C \int |f|^p (M_\phi^\theta w_1) w_2^{1-p}. \tag{6.6.3}$$

Además, la misma desigualdad vale para el operador $\mathcal{R}_1^\star$.

En el caso $d/2 < q < d$ tenemos que $\mathcal{R}_1^\star$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (p_0, δ) para p_0 tal que $1/p_0 = 1/q - 1/d$ y $\delta = 2 - d/q$. Por la Proposición 6.0.8, para $0 < \eta \leq 1$ y $\sigma \geq 0$ existe una constante C tal que

$$[M_\rho^\sharp(|\mathcal{R}_1^\star f|^\eta)(x)]^{1/\eta} \leq C M_{p_0'}^\sigma f(x). \tag{6.6.4}$$

Nuevamente, podemos aplicar el Teorema 6.1.1 para obtener el siguiente resultado.

Teorema 6.6.2. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Sean $p_0' < p < \infty$, w_1 y w_2 dos pesos y ψ y ϕ un par de funciones de Young tales que ψ duplica,*

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{p/p_0'-1} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{6.6.5}$$

y $\phi(t) = t \log^{p+\delta}(1+t)$, para algún $\delta > 0$. Entonces, para cada $\theta \geq 0$, existe $C = C(p, \theta)$ tal que

$$\int |\mathcal{R}_1^\star f|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/p_0'} \leq C \int |f|^p (M_\phi^\theta w_1) w_2^{1-p/p_0'}, \tag{6.6.6}$$

y en consecuencia, por dualidad,

$$\int |\mathcal{R}_1 f|^{p'} (M_\phi^\theta w_1)^{1-p'} w_2^{1-p'/p_0} \leq C \int |f|^{p'} w_1^{1-p'} (M_\psi^\theta w_2)^{1-p'/p_0}. \tag{6.6.7}$$

Para la transformada de Riesz-Schrödinger de segundo orden vimos que, si $V \in RH_q$ con $q > d/2$, $\mathcal{R}_2^\star$ es un Operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (q, δ) con $\delta = \text{mín}\{1, 2 - d/q\}$. En consecuencia, para $0 < \eta \leq 1$ y $\sigma \geq 0$ existe una constante C tal que

$$[M_\rho^\sharp(|\mathcal{R}_2^\star f|^\eta)(x)]^{1/\eta} \leq C M_{q'}^\sigma f(x). \tag{6.6.8}$$

Aplicando el Teorema 6.1.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.6.3. *Supongamos que $V \in RH_q$ con $q > d/2$. Sean $q' < p < \infty$, w_1 y w_2 dos pesos y ψ y ϕ un par de funciones de Young tales que ψ duplica,*

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{p/q'-1} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{6.6.9}$$

y $\phi(t) = t\log^{p+\delta}(1+t)$, para algún $\delta > 0$. Entonces, para cada $\theta \geq 0$, existe $C = C(p, \theta)$ tal que

$$\int |\mathcal{R}_1^\star|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/q'} \leq C \int |f|^p (M_\phi^\theta w_1) w_2^{1-p/q'}, \tag{6.6.10}$$

y en consecuencia, por dualidad,

$$\int |\mathcal{R}_2 f|^{p'} (M_\phi^\theta w_1)^{1-p'} w_2^{1-p'/q} \leq C \int |f|^{p'} w_1^{1-p'} (M_\psi^\theta w_2)^{1-p'/q}. \tag{6.6.11}$$

De nuevo, podemos dualizar este resultado para obtener

Un análisis similar puede hacerse para los operadores de tipo $L^{-\gamma}V^\gamma$ con $0 < \gamma < d/2$ y $L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}$ para $1/2 < \gamma \leq 1$. Enunciamos a continuación los resultados obtenidos.

Teorema 6.6.4. *Sean $0 < \gamma < d/2$, $V \in RH_q$ con $q > d/2$, $p > (q/\gamma)'$, w_1 y w_2 dos pesos y ψ y ϕ un par de funciones de Young tales que ψ duplica,*

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{p/q'-1} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{6.6.12}$$

y $\phi(t) = t\log^{p+\delta}(1+t)$, para algún $\delta > 0$. Entonces, para cada $\theta \geq 0$, existe $C = C(p, \theta)$ tal que

$$\int |L^{-\gamma}V^\gamma f|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/(q/\gamma)'} \leq C \int |f|^p (M_\phi^\theta w_1) w_2^{1-p/(q/\gamma)'}, \tag{6.6.13}$$

y en consecuencia

$$\int |V^\gamma L^{-\gamma} f|^{p'} (M_\phi^\theta w_1)^{1-p'} w_2^{1-p'/(q/\gamma)} \leq C \int |f|^{p'} w_1^{1-p'} (M_\psi^\theta w_2)^{1-p'/(q/\gamma)}. \tag{6.6.14}$$

Teorema 6.6.5. *Sean $1/2 < \gamma \leq 1$, $V \in RH_q$ con $q > d/2$, $p > (q/\gamma')$, con p_γ tal que $\dfrac{1}{p_\gamma} = \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{d}\right)^+ + \dfrac{2\gamma - 1}{2q}$. Sean w_1 y w_2 dos pesos y ψ y ϕ un par de funciones de Young tales que ψ duplica,*

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{p/p'_\gamma-1} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{6.6.15}$$

y $\phi(t) = t\log^{p+\delta}(1+t)$, para algún $\delta > 0$. Entonces, para cada $\theta \geq 0$, existe $C = C(p,\theta)$ tal que

$$\int |L^{-\gamma}\nabla V^{\gamma-1/2}f|^p w_1 (M_\psi^\theta w_2)^{1-p/p'_\gamma} \leq C \int |f|^p (M_\phi^\theta w_1) w_2^{1-p/p'_\gamma}, \tag{6.6.16}$$

y en consecuencia

$$\int |V^{\gamma-1/2}\nabla L^{-\gamma}f|^{p'} (M_\phi^\theta w_1)^{1-p'} w_2^{1-p'/p_\gamma} \leq C \int |f|^{p'} w_1^{1-p'} (M_\psi^\theta w_2)^{1-p'/p_\gamma}. \tag{6.6.17}$$

6.6.2. Relación con las desigualdades del Capítulo 5

En este capítulo obtuvimos ciertas desigualdades que involucran espacios L^p con pesos diferentes para operadores asociados a L como las transformadas de Riesz-Scrhödinger $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Una pregunta natural en este punto es qué relación tienen estas desigualdades con las que mostramos en el Capítulo 5 para los mismos operadores. Veremos a continuación que, aunque las desigualdades de este capítulo parecen ser más generales, no podemos recuperar a partir de ellas todas las desigualdades de tipo Fefferman-Stein que obtuvimos en el Capítulo 5 vía comparación.

Sean $V \in RH_q$ con $q > d/2$, T alguno de los operadores de Riesz-Schrödinger $\mathcal{R}_1$ o $\mathcal{R}_2$ y $T^\star$ su operador adjunto ($\mathcal{R}_1^\star$ o $\mathcal{R}_2^\star$ respectivamente). Como vimos en el Capítulo 2, $T^\star$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund de tipo (s,δ) para ciertos $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$ que dependan de q. Supongamos que $s < \infty$, tomemos $p' > s'$ y $\theta \geq 0$. Podemos aplicar el Teorema 6.1.1 para obtener la siguiente desigualdad:

$$\int |T^\star f|^{p'} w_1 (M_{\psi_{p'}}^\theta w_2)^{1-p'/s'} \leq C \int |f|^{p'} (M_{\phi_{p'}}^\theta w_1) w_2^{1-p'/s'}, \tag{6.6.18}$$

para cualquier par de pesos w_1, w_2, siempre que ψ y ϕ sean funciones de Young tales que

$$\int_c^\infty \left(\frac{t}{\psi_{p'}(t)}\right)^{p'/s'-1} \frac{dt}{t} < \infty \tag{6.6.19}$$

y $\phi(t) = t\log^{p'+\varepsilon}(1+t)$ para algún $\varepsilon > 0$. Mediante un argumento de dualidad podemos obtener,

$$\int |Tf|^p (M_{\phi_{p'}}^\theta w_1)^{1-p} w_2^{(1-p'/s')(1-p)} \leq C \int |f|^p w_1^{1-p} (M_{\psi_{p'}}^\theta w_2)^{(1-p'/s')(1-p)}, \tag{6.6.20}$$

que puede reescribirse como

$$\int |Tf|^p (M_{\phi_{p'}}^\theta w_1)^{1-p} w_2^{1-p/s} \leq C \int |f|^p w_1^{1-p} (M_{\psi_{p'}}^\theta w_2)^{1-p/s}. \tag{6.6.21}$$

Por otro lado, para p y s como arriba podemos aplicar el Teorema 5.1.1 para obtener las siguientes desigualdades:

$$\int |Tf|^p u \leq C \int |f|^p M_r^\theta u, \tag{6.6.22}$$

para cualquier peso u, donde $r=(s/p)'$ y

$$\int |T^\star f|^{p'} v \leq C \int |f|^{p'} M^\theta_{A_{p'}} v, \tag{6.6.23}$$

para cualquier peso v siempre que la función de Young $A_{p'} \in \mathcal{D}_{p'}$. Ahora, podemos dualizar las desigualdades (6.6.22) y (6.6.23) para obtener

$$\int |T^\star f|^{p'} (M^\theta_r u)^{1-p'} \leq C \int |f|^{p'} u^{1-p'}, \tag{6.6.24}$$

$$\int |Tf|^{p} (M^\theta_{A_{p'}} v)^{1-p} \leq C \int |f|^{p} v^{1-p}. \tag{6.6.25}$$

Intentemos en primer lugar recuperar las desigualdades (6.6.22) y (6.6.25) para T de (6.6.21). Si ponemos $w_2=1$ en (6.6.21) tenemos que

$$\int |Tf|^{p} (M^\theta_{\phi_{p'}} w_1)^{1-p} \leq C \int |f|^{p} w_1^{1-p}, \tag{6.6.26}$$

De esta manera obtenemos una desigualdad más débil que (6.6.25) puesto que $\phi_{p'}$ debe ser de la forma $\phi_{p'}(t)=t\log^{p'+\varepsilon}(1+t)$ para $\varepsilon>0$, mientras que puede elegirse $A_{p'}(t)=t\log^{p'-1+\varepsilon}$.

Ahora, si ponemos $w_1=1$ y $w_2=u^{s/(s-p)}=u^{(s/p)'}$ en (6.6.21) obtenemos

$$\int |Tf|^{p} u \leq C \int |f|^{p} (M^\theta_{\psi_{p'}} u^{(s/p)'})^{1-p/s} = \int |f|^p M^\theta_G(u), \tag{6.6.27}$$

donde $G(t)=\psi_{p'}(t^{(s/p)'})$. De la condición (6.6.19) para $\psi_{p'}$ se sigue que G debe satisfacer

$$\int_c^\infty \left(\frac{t^{(s/p)'}}{G(t)}\right)^{p'/s'-1} \frac{dt}{t} < \infty. \tag{6.6.28}$$

Luego, no podemos elegir $G(t)=t^{(s/p)'}=t^r$ (pero sí cualquier potencia mayor que r). Esto es, no podemos recuperar (6.6.22).

A continuación, intentaremos recuperar las desigualdades (6.6.23) y (6.6.24) para $T^\star$ a partir de (6.6.18). Si hacemos $w_2=1$ en (6.6.18) obtenemos

$$\int |T^\star f|^{p'} w_1 \leq C \int |f|^{p'} M^\theta_{\phi_{p'}} w_1, \tag{6.6.29}$$

con $\phi_{p'}(t)=t\log^{p'+\varepsilon}(1+t)$, lo cual no nos permite recuperar (6.6.23). Del mismo modo, poniendo $w_1=1$ y $w_2=u^{(1-p')(s'/(s'-p'))}=u^{(s/p)'}$ en (6.6.18) tenemos

$$\int |T^\star f|^{p'} (M^\theta_{\psi_{p'}} u^{(s/p)'})^{1-p'/s'} \leq C \int |f|^{p'} u^{1-p'}, \tag{6.6.30}$$

esto es,

$$\int |T^\star f|^{p'} (M^\theta_G u)^{1-p'} \leq C \int |f|^{p'} u^{1-p'}, \tag{6.6.31}$$

con G como arriba. Luego, tampoco aquí podemos elegir $G(t)=t^r$ para recuperar (6.6.24).

Conclusiones

- Es posible dar una expresión puntual local para el núcleo de la Transformada de Riesz-Schrödinger de segundo orden $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 L^{-1}$.

- Las transformadas de Riesz-Schrödinger de primero y segundo orden, incluyendo aquéllas que involucran potencias del potencial V o sus adjuntas, en muchos casos se pueden tratar simultáneamente, definiendo familias que engloben sus propiedades básicas necesarias para probar las estimaciones deseadas. Una propiedad que comparten todas y que las hace mejores que las Riesz clásicas es su fuerte decaimiento en el infinito, medido ya sea en media o puntualmente.

- Bajo la condición reverse-Hölder de orden $q > d/2$ sobre el potencial, es posible obtener obtener estimaciones de suavidad con pesos para las adjuntas de las Transformadas de Riesz-Schrödinger. Si requerimos $q > d$ para $\nabla L^{-1/2}$ o una condición más fuerte para los otros casos, valen también estas estimaciones para las restantes transformadas.

- Mediante el método de comparación local con las correspondientes transformadas de Riesz asociadas a $-\nabla$, es posible demostrar desigualdades de tipo Fefferman-Stein para $\mathcal{R}_1 = \nabla L^{-1/2}$, $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 L^{-1}$ y sus adjuntas. En el caso de estas últimas los operadores maximales que se aplican al peso resultan menores que los que aparecen en el caso clásico, si bien para alguno de los operadores el rango de p es más restringido.

- Las transformadas de Riesz-Schrödinger que involucran el potencial tienen un tamaño cerca de la diagonal que las hace mejores que el resto, de modo que pueden obtenerse estimaciones de tipo Fefferman-Stein que incluyen el caso fuerte para $p = 1$.

- Los operadores en cuestión y sus adjuntos satisfacen desigualdades en L^p para pares de pesos factorizados, cuya forma se expresa en términos de operadores maximales propios del contexto Schrödinger. Estos operadores maximales son menores que sus correspondientes versiones en el contexto clásico del laplaciano.

- La presencia del potencial V con hipótesis muy débiles ocasiona que en general los resultados para los operadores adjuntos sean mejores que los correspondientes a las transformadas de Riesz-Schrödinger. Esto sucede tanto cuando estamos analizando suavidad como en el caso de las desigualdades de Fefferman-Stein.

Bibliografía

[1] B. Bongioanni, A. Cabral, and E. Harboure. Regularity of maximal functions associated to a critical radius function. Preprint. Preprints del IMAL, http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/publicaciones/preprints.

[2] B. Bongioanni, A. Cabral, and E. Harboure. Extrapolation for classes of weights related to a family of operators and applications. *Potential Anal.*, 38(4):1207–1232, 2013.

[3] B. Bongioanni, A. Cabral, and E. Harboure. Lerner's inequality associated to a critical radius function and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 407(1):35–55, 2013.

[4] B. Bongioanni, E. Harboure, and P. Quijano. Weighted inequalities for schrödinger type singular integrals. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Jul 2018.

[5] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Weigthed inequalities for negative powers of Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 348:12–27, 2008.

[6] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Riesz transforms related to Schrödinger operators acting on BMO type spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 357(1):115–131, 2009.

[7] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Classes of weights related to Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 373(2):563–579, 2011.

[8] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Weighted inequalities for commutators of Schrödinger-Riesz transforms. *J. Math. Anal. Appl.*, 392(1):6–22, 2012.

[9] Bruno Bongioanni, Adrián Cabral, and Eleonor Harboure. Schrödinger type singular integrals: weighted estimates for $p = 1$. *Math. Nachr.*, 289(11-12):1341–1369, 2016.

[10] A. Cordoba and C. Fefferman. A weighted norm inequality for singular integrals. *Studia Math.*, 57(1):97–101, 1976.

[11] David V. Cruz-Uribe, José Maria Martell, and Carlos Pérez. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, volume 215 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[12] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[13] J. Dziubański, G. Garrigós, T. Martínez, J. L. Torrea, and J. Zienkiewicz. *BMO* spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. *Math. Z.*, 249(2):329–356, 2005.

[14] J. Dziubański and J. Zienkiewicz. Hardy spaces H^1 associated to Schrödinger operators with potential satisfying reverse Hölder inequality. *Revista Matemática Iberoamericana*, 15(2):279–296, 1999.

[15] J. Dziubański and J. Zienkiewicz. Hardy spaces H^1 associated to Schrödinger operators with potential satisfying reverse Hölder inequality. *Revista Matemática Iberoamericana*, 15(2):279–296, 1999.

[16] C. Fefferman and E. M. Stein. Some maximal inequalities. *Amer. J. Math.*, 93:107–115, 1971.

[17] Loukas Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[18] Z. Guo, P. Li, and L. Peng. L^p boundedness of commutators of Riesz transforms associated to Schrödinger operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 341(1):421–432, 2008.

[19] Eleonor Harboure, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani. Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1):235–255, 1997.

[20] F. John and L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:415–426, 1961.

[21] A. K. Lerner. Weighted norm inequalities for the local sharp maximal function. *J. Fourier Anal. Appl.*, 10(5):465–474, 2004.

[22] Fu Ken Ly. Classes of weights and second order Riesz transforms associated to Schrödinger operators. *J. Math. Soc. Japan*, 68(2):489–533, 2016.

[23] Tao Ma, Pablo Raúl Stinga, José L. Torrea, and Chao Zhang. Regularity estimates in Hölder spaces for Schrödinger operators via a $T1$ theorem. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 193(2):561–589, 2014.

[24] Marcela Morvidone. Weighted BMO_ϕ spaces and the Hilbert transform. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 44(1):1–16, 2003.

[25] Benjamin Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226, 1972.

[26] Benjamin Muckenhoupt and Richard L. Wheeden. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. *Studia Math.*, 54(3):221–237, 1975/76.

[27] Jaak Peetre. On the theory of $\mathcal{L}_{p,\,\lambda}$ spaces. *J. Functional Analysis*, 4:71–87, 1969.

[28] C. Pérez. Weighted norm inequalities for singular integral operators. *J. London Math. Soc. (2)*, 49(2):296–308, 1994.

[29] C. Pérez. On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 71(1):135–157, 1995.

[30] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[31] Z. Shen. L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(2):513–546, 1995.

[32] Lin Tang. Weighted norm inequalities for Schrödinger type operators. *Forum Math.*, 27(4):2491–2532, 2015.

[33] J. Michael Wilson. Weighted norm inequalities for the continuous square function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314(2):661–692, 1989.