UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de **Análisis Matemático**

Título

Análisis armónico asociado a problemas espectrales para operadores de tipo diferenciación fraccionaria en espacios métricos con medida

Autor

Juan Comesatti

Institución donde se realizó la investigación:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral

CONICET – UNL

Director de Tesis: **Hugo Aimar**

Codirectora de Tesis: **Ivana Gómez**

Jurado titular compuesto por

Dra. Irene Drelichman, PhD. Diego Maldonado, Dr. Oscar Salinas

Jurado suplente compuesto por

Dr. Fernando Mazzone, Dra. Marta Urciuolo

Año de presentación: 2022

Resumen

En esta tesis abordamos el estudio del análisis espectral del laplaciano fraccionario definido sobre espacios de tipo homogéneo. En primer lugar estudiamos en detalle las propiedades de cierta clase de espacios de Sobolev, los cuales nos permiten entender cómo interactúan los operadores de extensión y las inmersiones compactas entre los mismos y sobre qué clase de dominios específicos es posible definirlos.

En segundo lugar utilizamos la compacidad de dichas inmersiones para obtener el espectro del laplaciano fraccionario sobre espacios de Ahlfors.

En tercer lugar nos focalizamos en estudiar un contexto diádico particular, el cual nos permite entender cómo se interrelaciona la geometría del espacio con el análisis espectral del laplaciano fraccionario. De esto derivamos, por una parte, un análisis cuantitativo que descifra, si no determina, el comportamiento asintótico del espectro; y por otra parte, un análisis cualitativo que propicia la introducción de una nueva noción de derivación parcial fraccionaria en estos contextos, la cual, a su vez, permite caracterizar los espacios de Sobolev a través de la teoría de integrales singulares a valores vectoriales en espacios abstractos, tema que ocupa la última parte de este trabajo.

Índice general

Introducción

El presente trabajo aborda el estudio del análisis espectral del laplaciano fraccionario

$$D^s f(x) = \int_X \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)^{2s}\, \mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(y) \tag{0.1}$$

en el contexto de espacios de tipo homogéneo. Este operador es una generalización natural del operador no local

$$(-\Delta)^s f(x) = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \tag{0.2}$$

definido sobre lo que conocemos como contexto euclídeo: el espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual y la medida n-dimensional de Lebesgue.

Asociado al operador D^s podemos definir una forma bilineal

$$B(f,g) = \frac{1}{2} \int_X \int_X \frac{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))}{d(x,y)^{2s}\, \mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(y)\, d\mu(x)$$

la cual no sólo recupera dicho operador a través de la identidad

$$B(f,g) = \langle D^s f, g \rangle_{L^2_{(\Omega)}}$$

sino que también permite formular una versión débil del problema de autovalores asociado a D^s. Ésta consiste en hallar los valores λ y las funciones asociadas u que satisfagan

$$\begin{cases} \forall v \in H_0(\Omega) \ : \ B(u,v) = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ u \in H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

donde $H_0^s(\Omega) = \{ v \in H^s(X) \ / \ v \equiv 0 \text{ sobre } X \setminus \Omega \}$.

Recordemos que en el contexto euclídeo para un operador elíptico en forma de divergencia $Lu = -\operatorname{div}(A \nabla u)$, donde $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ es una matriz simétrica de funciones que satisface una condición de elipticidad, el problema de autovalores respectivo

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

también posee una formulación débil dada por

$$B(u,v) = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{0.3}$$

para alguna función $u \in H_0^1(\Omega)$ y algún $\lambda > 0$, donde $H_0^1(\Omega)$ denota aquí el espacio clásico de Sobolev, y donde la forma bilineal B está dada en este caso por

$$B(u,v) = \int \langle \nabla u, A\nabla v \rangle$$

Es sabido de la literatura matemática específica (en trabajos tanto clásicos como recientes; [BA72], [Bab71], [BO91a], [SZ17], [CH53], por citar algunos) que dadas dos formas bilineales $B : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : W \times W \to \mathbb{R}$, tales que B es simétrica continua y coerciva, y b es simétrica y tal que $b[u,u] > 0$ para todo $u \neq 0$, si existe inmersión compacta $H \subset\subset W$ entonces es posible determinar un operador compacto $T : H \to H$ de modo tal que $1/\lambda$ es autovalor de T con autofunción asociada u si y sólo si

$$B(u,v) = \lambda b(u,v), \text{ para toda } v \in H.$$

Se ve aquí la importancia de la formulación débil o variacional dada por (0.3), la cual permite estudiar los autovalores del problema a través del estudio de la compacidad de este operador. Compacidad que, como sabemos del contexto euclídeo, estará determinada por la inmersión $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, la cual no está establecida para dominios Ω arbitrarios, si bien es sabido que, a priori, se satisface sobre dominios acotados con frontera $\mathcal{C}^1$.

Por otra parte, en trabajos recientes como [SV13c], [SV14b], [SV12], [SV13a], [SV13b], [SV14a], [Ser13], [MBRS16], Raffaella Servadei y Enrico Valdinoci, entre otros, establecen un marco funcional preciso y adecuado al estudio de la formulación variacional del problema de autovalores para operadores de tipo no local que incluyen al laplaciano fraccionario (0.2). Las técnicas desarrolladas no sólo les permiten analizar la existencia de soluciones de diversas clases de ecuaciones diferenciales que involucran operadores no locales, así como la estimación de acotaciones y de resultados de regularidad de las mismas, sino que también llevar a cabo un estudio comparativo y cualitativo del espectro de distintos tipo de laplacianos fraccionarios.

El objetivo seminal de este trabajo radica entonces en extender estos análisis a contextos más generales que los euclídeos, esto es, a contextos de espacios cuasimétricos con medida. Para ello aunaremos las técnicas funcionales detalladas: la comprensión del comportamiento funcional de los espacios de Sobolev respectivos y de los operadores de extensión y de inmersión compacta pertinentes, así como el estudio de las condiciones geométricas de los dominios que influyen sobre la determinación y el comportamiento del espectro del problema de autovalores descrito.

Una vez determinado y estudiado el contexto general, nos dedicaremos a analizar en detalle lo que denominamos el contexto diádico, ya que éste mismo nos permitirá llevar a cabo ciertas descripciones del comportamiento de los autovalores y, por otra parte, fundamentar una nueva noción de derivación fraccionaria.

Dividimos el trabajo en cuatro partes: La primera trata sobre conceptos básicos que atañen a los espacios cuasimétricos, los espacios de tipo homogéneo y las estructuras diádicas sobre éstos; los aspectos del análisis funcional relacionados a las formas bilineales no acotadas; y por último, lo que respecta a los operadores de Calderón-Zygmund valuados en espacios de Banach. La segunda parte introduce los espacios de Sobolev y los primeros resultados que contribuimos: determinación de operadores de extensión y de inmersiones compactas sobre dominios regulares. La tercera parte está dividida en dos capítulos. El primero de ellos fundamenta el teorema de existencia y caracterización de los autovalores del laplaciano fraccionario definido sobre espacios de tipo homogéneo. El segundo capítulo inaugura el análisis particular del laplaciano fraccionario diádico, determinando el espectro en los casos posibles y estudiando su comportamiento asintótico en los casos generales. Finalmente en la cuarta y última parte introducimos un operador de derivación fraccionaria, el cual permitirá no sólo recaracterizar los espacios de Sobolev mediante una forma de energía que articule un gradiente, sino que también permitirá extender un resultado de regularidad de soluciones ya formulado y expuesto por Alberto Calderón respecto de los operadores elípticos.

A fin de agilizar la lectura y de no entorpecer el seguimiento del trabajo, seremos austeros en las menciones bibliografícas durante el desarrollo central de cada capítulo. Para esto introducimos al final de éstos una sección titulada *Referencias bibliográficas y comentarios adicionales* en las cuales no sólo detallaremos aspectos bibliográficos del capítulo pertinente, sino también breves semblanzas que detallan aspectos históricos y técnicos, a guisa de pequeñas genealogías. Cabe mencionar que dichas secciones finales son soslayables, al menos, en una primera lectura.

Parte 1

Conceptos básicos

CAPíTULO 1

Espacios métricos y cuasimétricos con medida

Describiremos en este capítulo el contexto geométrico subyacente e inmanente de este trabajo: los espacios de tipo homogéneo. En primer lugar repasaremos las nociones de espacios cuasimétricos para analizar luego la propiedad de homogeneidad métrica que da sentido a la dimensión de Assouad. La inclusión de una estructura medible adecuada sobre éstos permitirá dar fundamentos a los espacios de tipo homogéneo. Dentro de esta categoría analizaremos los espacios de Ahlfors, espacios que contienen como instancias particulares a muchos casos paradigmáticos que trascienden largamente el contexto euclídeo, como lo son las métricas parabólicas y los fractales autosimilares; así como también analizaremos las estructuras diádicas que en ellos pueden construirse.

1. Espacios cuasimétricos

El objetivo de esta sección no sólo será introducir los espacios cuasimétricos, sino también establecer de qué forma pueden las cuasimétricas comportarse como potencias positivas de métricas, así como entender qué regularidad Hölder de funciones es posible definir sobre los espacios.

DEFINICIÓN 1.1. *Entendemos por cuasimétrica (o cuasidistancia) en el conjunto* X *a una función* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *, que satisface las siguientes propiedades:*

C1) para todo $x, y \in X$ *se tiene que* $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$*;*

C2) para todo $x, y \in X$ *se tiene que* $d(x, y) = d(y, x)$*;*

C3) existe una constante $C_d^* \geq 1$ *tal que, para todo* $x, y, z \in X$*, se tiene que,*

$$d(x, z) \leq C_d^* \left(d(x, y) + d(y, z) \right).$$

Si bien existe una semirrecta de constantes que satisfacen la condición C3), se tendrá en cuenta la óptima, esto es,

$$C_d^* := \sup_{\substack{x,y,z \in X \\ \textit{no todos iguales}}} \frac{d(x, z)}{d(x, y) + d(y, z)}.$$

Además, para el caso $C_d^* = 1$, diremos, como es de uso corriente, que d es una métrica.

OBSERVACIÓN 1.2. *Suele utilizarse, en lugar de la condición C3), la condición de cuasiultrametricidad, dada de la siguiente forma:*

C3') Existe una constante $C_d \geq 1$ tal que para toda elección x, y, z en X se tiene que

$$d(x,z) \leq C_d \max\{d(x,y), d(y,z)\}.$$

En tal caso, definimos

$$C_d := \sup_{\substack{x,y,z \in X \\ no\ todos\ iguales}} \frac{d(x,z)}{\max\{d(x,y), d(y,z)\}}$$

DEFINICIÓN 1.3. *Diremos que una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que satisface C1), C2) y C3') es una cuasiultramétrica, y si satisface C3') con constante $C_d = 1$ diremos que es ultramétrica.*

Si bien no toda métrica satisface la condición de ultrametricidad, sí es sencillo demostrar que la clase de cuasiultramétricas y cuasimétricas definidas sobre un conjunto dado coinciden. Más aún $C_d \leq 2C_d^* \leq 2C_d$. Debido a esta propiedad, de aquí en adelante usaremos de modo indistinto dichos vocablos, teniendo en cuenta la propiedad C3´) y la constante óptima C_d en las demostraciones.

La siguiente noción de equivalencia permite en algunos problemas utilizar cuasimétricas distintas dentro de un mismo espacio manteniendo invariante no sólo la topología, sino también las clases de funciones Lipschitz/Hölder que serán importantes en nuestro desarrollo posterior.

DEFINICIÓN 1.4. *Decimos que dos cuasimétricas d_1, d_2, definidas en un mismo conjunto X, son equivalentes, y lo denotaremos como $d_1 \approx d_2$, si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que, para todo $x, y \in X$*

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y).$$

Para enunciar la equivalencia entre cuasimétricas podemos también utilizar funciones bi-Lipschitz. Dados dos espacios cuasimétricos, (X_1, d_1) y (X_2, d_2), diremos que una aplicación $\psi : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ es bi-Lipschitz si existen constantes $C, C' > 0$ tales que

$$C d_1(x,y) \leq d_2(\psi(x), \psi(y)) \leq C' d_1(x,y),$$

para todo $x, y \in X$. Esto es, una aplicación $\psi : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ es bi-Lipschitz si $d_\psi(x,y) := d_2(\psi(x), \psi(y))$ es cuasimétrica equivalente a d_1. De esto se sigue que dos cuasimétricas d_1, d_2 definidas sobre un mismo espacio son equivalentes si y sólo si la identidad $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es bi-Lipschitz.

Observemos también que si (X, d) es espacio cuasimétrico entonces $\left(X, d^\beta\right)$ también es espacio cuasimétrico, para cada $\beta > 0$. En caso que (X, d) sea espacio métrico, tendremos que $\left(X, d^\beta\right)$ es espacio métrico para cada $\beta \in (0, 1]$.

Cabe recordar que en todo espacio cuasimétrico (X, d) arbitrario, la cuasimétrica d en cuestión define una topología canónica mediante el uso de las llamadas d-bolas. Dado un x en X y un $r > 0$ definimos como la d-bola centrada en x y de radio r, y la denotamos por $B_d(x, r)$, al conjunto

$$B_d(x, r) := \{y \in X \ / \ d(x, y) < r\} .$$

A su vez, denotamos por τ_d a la topología dada por

$$\tau_d := \{V \subseteq X \ / \ \text{ para cada } x \in X \text{ existe } r > 0 \ \text{ tal que } B_d(x, r) \subseteq V\} .$$

Puede verse que para cualquier cuasimétrica $d' \approx d$ y cualquier $\beta > 0$ se tiene que $\tau_{d'} = \tau_d = \tau_{d^\beta}$. Si bien la topología τ_d resulta semejante a las topologías canónicas definidas a partir de una métrica, cabe destacar que τ_d presenta ciertas peculiaridades, ya que las bolas pueden no ser conjuntos abiertos, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.5. *Sea φ la función positiva dada por*

$$\varphi(t) = |t| \, \mathbf{1}_V(t) + 2\,|t| \, \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus V}(t) ,$$

donde $V \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no medible de Vitali extendido a todo $\mathbb{R}$ y donde $\mathbf{1}_V$ denota la función característica del conjunto V. Es claro que

$$|t| \leq \varphi(t) \leq 2\,|t| ,$$

por lo cual la función $d(x, y) := \varphi(x - y)$ define una cuasimétrica en $\mathbb{R}$. Más aún, dado $r > 0$, la bola $B_d(0, r) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ d(0, y) < r\}$ es unión disjunta de la forma

$$B_d(0, r) = \left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right) \cup V',$$

donde $V' = V \cap (-r, r)$. Esto es, $B_d(0, r)$ no es un conjunto boreliano ni Lebesgue medible. Esto muestra que no necesariamente las bolas generadas por una cuasimétrica d, que en este caso coincide con la topología usual de $\mathbb{R}$, deben ser conjuntos abiertos respecto de la topología generada por la base $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$. Más aún, pueden resultar conjuntos no borelianos o, aún, no medibles.

El ejemplo anterior muestra una problemática característica de los espacios cuasimétricos: la eventual no medibilidad de las bolas, la cual genera dificultades inmanentes al momento de definir objetos matemáticos, como operadores o funciones, mediante el uso de cuasimétricas específicas. Es por esto que es menester estudiar bajo qué circunstancias y de qué forma es posible construir sobre el espacio alguna cuasimétrica equivalente a la original (de modo que se preserve la topología) que se comporte de modo vérsatil y bondadoso: esto es, de modo que sus bolas seas conjuntos abiertos, siquiera conjuntos medibles. El siguiente teorema introduce lo que llamaremos *regularización γ-subaditiva* de una función positiva definida en $X \times X$, la cual permitirá solventar la problemática aludida. En la Sección 6, al final de este capítulo, haremos comentarios acerca de la bibliografía correspondiente que trata con mayor minuciosidad estos conceptos.

TEOREMA 1.6. *Sea X un conjunto no vacío. Dada una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ y un exponente arbitrario $\gamma > 0$, se define la función $d_\gamma : X \times X \to [0, +\infty)$, y se dice que d_γ es la regularización γ-subaditiva de d, como*

$$d_\gamma(x, y) := \text{ínf} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})^\gamma \right)^{1/\gamma} : n \in \mathbb{N},\ x_1, ..., x_n \in X,\ x_1 = x,\ x_n = y \right\},$$

si $\gamma < +\infty$, y como

$$d_\infty(x, y) := \text{ínf} \left\{ \max_{1 \le i \le n-1} d(x_i, x_{i+1}) : n \in \mathbb{N},\ x_1, ..., x_n \in X,\ x_1 = x,\ x_n = y \right\},$$

para el caso $\gamma = +\infty$. Esta función d_γ satisface las propiedades siguientes.

i) Para cada $0 < \gamma < \infty$ y todo $\beta \in (0, \gamma]$, d_γ es β-subaditiva, esto es,

$$d_\gamma(x, y) \le \left[d_\gamma(x, z)^\beta + d_\gamma(z, y)^\beta \right]^{1/\beta},$$

para toda elección de x, y, z en X. Más aún, la familia $(d_\gamma)_{\gamma > 0}$ caracteriza las funciones β-subaditivas: dado $\beta \in (0, +\infty]$, d es β-subaditiva si y sólo si $d \equiv d_\beta$.

ii) Si d es cuasimétrica con constante C_d y definimos

$$\gamma := \frac{1}{\log_2 C_d},$$

(considerando $\gamma = +\infty$ para el caso $C_d = 1$), entonces, d_β es cuasimétrica equivalente a d, para cada $0 < \beta \le \gamma$. Más aún , si d es una métrica entonces $d_\gamma = d$.

iii) Si d es cuasimétrica con constante C_d y $\gamma := \frac{1}{\log_2 C_d}$, (considerando $\gamma = +\infty$ para el caso $C_d = 1$), la función $\rho_{d,\beta} : X \times X \to [0, +\infty]$ definida como

$$\rho_{d,\beta}(x, y) := [d_\gamma(x, y)]^\beta,$$

es una métrica para cada $\beta \in (0, \gamma]$. Más aún, $\rho_{d,\beta}$ induce la misma topología en X que d, y se tiene que

$$\frac{1}{C_d^{2\beta}} d(x, y)^\beta \le \rho_{d,\beta}(x, y) \le d(x, y)^\beta,$$

para todo $x, y \in X$.

iv) Si d es cuasimétrica con constante C_d y $\gamma := \frac{1}{\log_2 C_d}$, (considerando $\gamma = +\infty$ para el caso $C_d = 1$), entonces para cada $\beta \in (0, \gamma]$, d_γ satisface la siguiente condición de regularidad

Hölder

$$|d_\gamma(x,y) - d_\gamma(w,z)| \leq \frac{1}{\beta} \max\left\{ d_\gamma(x,y)^{1-\beta}, d_\gamma(w,z)^{1-\beta} \right\} \left(d_\gamma(x,w)^\beta + d_\gamma(y,z)^\beta \right),$$

para todo $x, y, z, w \in X$*, suponiendo* $x \neq y$ *y* $z \neq w$ *si* $\beta \geq 1$*. En particular*

$$|d_\gamma(x,y) - d_\gamma(x,z)| \leq \frac{1}{\beta} \max\left\{ d_\gamma(x,y)^{1-\beta}, d_\gamma(x,z)^{1-\beta} \right\} d_\gamma(y,z)^\beta, \tag{1.1}$$

para todo $x, y, z \in X$*.*

v) La regularidad Hölder del inciso anterior es óptima en el siguiente sentido. Dado un número $C > 1$ *existe un conjunto no vacío* X *y una cuasimétrica* d *con constante* $C_d = C$ *que tiene la siguiente propiedad: si* d' *es una cuasimétrica equivalente a* d *y existen* $\beta \in (0, +\infty)$ *y* $K \in [0, +\infty)$ *tales que*

$$|d'(x,y) - d'(x,z)| \leq K \max\left\{ d'(x,y)^{1-\beta}, d'(x,z)^{1-\beta} \right\} d'(y,z)^\beta,$$

para todo $x, y, z \in X$*, entonces, necesariamente,* $\beta \leq \frac{1}{\log_2 C}$*.*

Observación 1.7. *Denotaremos en lo que sigue por* $d_\#$ *a la cuasimétrica* d_γ*, para* $\gamma = \frac{1}{\log_2 C_d}$*, como se indica en iii).*

El apartado v) puede ilustrarse con el siguiente ejemplo. Dado $C > 1$, sea $s = \log_2 C$ y considérese en $\mathbb{R}$ la cuasimétrica dada por

$$d(x,y) = |x-y|^s.$$

Teniendo en cuenta que, para cualquier $s > 0$ y $a, b > 0$, se tiene que $(a+b)^s \leq 2^s \max\{a^s, b^s\}$ y $|a^s - b^s| \leq s \max\{a^{s-1}, b^{s-1}\} |a-b|$, es claro que d es cuasi-ultra-métrica con $C_d = 2^s = C$ y que satisface la condición de regularidad Hölder (1.1) de orden s. Supóngase que existe otra cuasimétrica d' equivalente a d, la cual satisface la condición (1.1) para algún orden $\beta > 0$. Esto implicará que

$$\begin{aligned} |d'(x,y) - d'(x,z)| &\leq K \max\left\{ d'(x,y)^{1-\beta}, d'(x,z)^{1-\beta} \right\} d'(y,z)^\beta \\ &\leq K \max\left\{ |x-y|^{s(1-\beta)}, |x-z|^{s(1-\beta)} \right\} |x-y|^{s\beta}, \end{aligned}$$

por lo cual, si $s\beta > 1$, esto fuerza a que d' sea función constante nula, lo que contradice el hecho que $d' \approx d$. Por lo tanto, necesariamente $\beta \leq \frac{1}{s} = \frac{1}{\log_2 C}$. Este ejemplo muestra que dentro de la clase de todos los pares (X, d) con X conjunto no vacío, $C > 1$ constante fija, y d cuasimétrica sobre X con constante $C_d > C$, el valor $\gamma = \frac{1}{\log_2 C}$ es una cota superior de regularidad. Por otra parte, el inciso iv) del teorema anterior muestra que en un espacio cuasimétrico específico siempre podemos encontrar funciones continuas de regularidad $\gamma \leq \frac{1}{\log_2 C_d}$ pero de momento nada indica que dicho valor no pueda superarse.

Como veremos más adelante, la existencia de funciones Hölder de cierta regularidad es de suma importancia al momento de establecer la buena definición de cierta clase de operadores, así como de ciertos espacios; poder determinar, verbigracia, si acaso el espacio de funciones Hölder es o no trivial (esto es, formado puramente por funciones constantes), pone en evidencia la vacuidad del análisis. Para poder analizar esta problemática con mayor profundidad, definimos a continuación algunos índices de regularidad. Recordemos que dado un espacio cuasimétrico (X, d), se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase Hölder de orden $\gamma > 0$, clase que notaremos como $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X, d)$, si

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} := \sup_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\gamma}} < \infty.$$

En lo que sigue, la notación $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X, d) = \mathbb{C}$ indica que $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X, d)$ está compuesta exclusivamente por funciones constantes a valores complejos.

DEFINICIÓN 1.8. *Se define el **índice de un espacio cuasimétrico,** y se denota* $ind\,(X, d)$, *como*

$$ind\,(X, d) := \sup\left\{\frac{1}{\log_2 C_{d'}} : d' \approx d\right\},$$

donde el supremo se considera sobre la clase de todas las cuasimétricas d' *equivalentes a* d *,y donde recordemos que*

$$C_{d'} := \sup_{\substack{x,y,z\in X \\ no\ todos\ iguales}} \frac{d'(x,y)}{\max\{d'(x,z), d'(z,y)\}}.$$

Cabe notar que en la bibliografía básica se define a este índice como *índice inferior de suavidad*. Para más detalles véase la sección final de este capítulo.

DEFINICIÓN 1.9. *Se define el **índice de Hölder** de un espacio cuasimétrico* (X, d) *como*

$$ind_H(X, d) := \sup\left\{\gamma \in (0, \infty) : \mathcal{C}^{0,\gamma}(X, d) \neq \mathbb{C}\right\},$$

esto es, el supremo de los valores $\gamma > 0$ *tales que la clase de funciones Hölder de orden* γ *posee funciones no constantes.*

Cabe señalar que, por definición, $ind\,(X, d)$ es invariante por cuasimétricas equivalentes. Del mismo modo, esto ocurre con $ind_H(X, d)$, debido a que las clases $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X)$ son invariantes por cuasimétricas equivalentes.

DEFINICIÓN 1.10. *Definimos el **índice de convexidad de Assouad** de un espacio cuasimétrico* (X, d) *como*

$$Cv\,(X, d) := \sup\{\alpha > 0 \ / \ \textit{existe métrica } \rho \textit{ sobre } X \textit{ tal que } \rho \approx d^{\alpha}\}.$$

La siguiente proposición contiene propiedades elementales de los índices $ind\,(X,d)$ y $ind_H\,(X,d)$.

PROPOSICIÓN 1.11. *Sea (X,d) espacio cuasimétrico;*

i) Si d es ultramétrica entonces $ind\,(X,d) = +\infty$.

ii) Si d es métrica entonces $ind\,(X,d) \geq 1$.

iii) Para toda cuasimétrica d y todo $\alpha > 0$ se tiene que $ind\,(X,d^\alpha) = \frac{1}{\alpha} ind\,(X,d)$ y $ind_H\,(X,d^\alpha) = \frac{1}{\alpha} ind_H\,(X,d)$.

iv) Si X es finito y d cuasimétrica entonces $ind\,(X,d) = +\infty$.

vi) Si $\psi : (X_1,d_1) \to (X_2,d_2)$ es aplicación bi-Lipschitz entre espacios cuasimétricos entonces $ind\,(X_1,d_1) \geq ind\,(X_2,d_2)$. En particular el índice inferior de suavidad es invariante bajo homeomorfismos bi-Lispchitz.

vii) Si $Y \subseteq X$ con cardinal mayor a 2 entonces $ind\,(Y,d) \geq ind\,(X,d)$.

Ilustremos estos conceptos en varios ejemplos. En primer lugar, veremos que si bien es claro que $ind\,(X,d) \geq \frac{1}{\log_2 C_d}$, no necesariamente debe darse la igualdad.

EJEMPLO 1.12. *Sea $X := \{x_1,x_2,x_3\}$ y $d_\lambda : X \times X \to [0,+\infty)$ la función simétrica definida como*

$$d_\lambda\,(x_1,x_2) := \lambda,$$

$$d_\lambda\,(x_2,x_3) = d_\lambda\,(x_1,x_3) = 1,$$

y $d_\lambda\,(x,y) = 0$ para $x = y$. Obsérvese que d_1 coincide con la métrica discreta y, más aún, $d_\lambda \approx d_1$. No es difícil demostrar que la métrica discreta es ultramétrica, por lo cual d_λ también es ultramétrica y en consecuencia $ind\,(X,d_\lambda) = +\infty$. Por otra parte, un cálculo sencillo muestra que, si $\lambda > 1$, entonces $C_{d_\lambda} = \lambda$; por lo cual para λ suficientemente grande $\frac{1}{\log_2 C_{d_\lambda}}$ tiende a 0. En particular, se tiene que $ind\,(X,d_\lambda) > \frac{1}{\log_2 C_{d_\lambda}}$.

EJEMPLO 1.13. *En general $ind\,(X,d) = +\infty$ para espacios cuasimétricos finitos. En efecto, si $\#X < \infty$, considerando $m := \min_{x,y \in X\ x \neq y} d\,(x,y)$ y $M := \max_{x,y \in X\ x \neq y} d\,(x,y)$ se tiene que*

$$\frac{1}{M} d\,(x,y) \leq d_1\,(x,y) \leq \frac{1}{m} d\,(x,y)\,,$$

donde d_1 denota la métrica discreta. Esto es, cualquier cuasimétrica definida sobre un conjunto finito es equivalente a una ultra-métrica.

EJEMPLO 1.14. *Sea $\mathcal{C}_3$ el conjunto ternario de Cantor. Veamos que, utilizando la restricción de la distancia usual de $\mathbb{R}$ se tiene que $ind\,(\mathcal{C}_3,|\cdot|) = \infty$. Recordemos que todo elemento x del* *conjunto* $\mathcal{C}_3$ *puede escribirse de la forma* $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$, $x_j \in \{0,2\}$ *para cada* $j \in \mathbb{N}$. *Defínase* $L(x,y) = \inf\{j \in \mathbb{N} \,/\, x_j \neq y_j\}$ *para* $x \neq y$, *y*

$$d(x,y) := \frac{1}{3^{L(x,y)}},$$

entendiendo $d(x,x) = 0$. *Veamos que* d *es una ultramétrica equivalente a* $|\cdot|$. *La desigualdad de ultrametricidad se sigue de*

$$L(x,y) \geq \min\{L(x,z), L(z,y)\}.$$

Por otra parte, es claro que

$$x - y = \sum_{j=L(x,y)}^{\infty} \frac{x_j - y_j}{3^j} = \pm 2d(x,y) + \sum_{j=L(x,y)+1}^{\infty} \frac{x_j - y_j}{3^j},$$

y

$$\left| \sum_{j=L(x,y)+1}^{\infty} \frac{x_j - y_j}{3^j} \right| \leq \sum_{j=L(x,y)+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = d(x,y),$$

por lo cual

$$d(x,y) \leq |x-y| \leq 3d(x,y).$$

Ya que $|x-y|$ *restringida a* $\mathcal{C}_3$ *es equivalente a una ultramétrica se sigue que* $ind(\mathcal{C}_3, |\cdot|) = \infty$. *Obsérvese que, aunque en* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *las funciones Hölder de orden* $s > 1$ *son constantes, el subespacio* $(\mathcal{C}_3, |\cdot|)$ *admite funciones Hölder no constantes de orden arbitrario.*

Los siguientes enunciados relacionan los índices de regularidad definidos. Damos una demostración de estas propiedades en la Sección 6.

PROPOSICIÓN 1.15. *Sea* (X,d) *espacio cuasimétrico. Son válidas las siguientes afirmaciones.*

i) $ind(X,d) = Cv(X,d)$.

ii) $ind(X,d) = \sup\{\alpha \in (0,+\infty) \,/ d_\alpha \approx d\}$, *donde* d_α *es la regularización* α*-subaditiva de* d *definida en el Teorema 1.6. Más aún,* $\{\alpha \in (0,+\infty) \,/ d_\alpha \approx d\}$ *coincide con el intervalo* $(0, ind(X,d))$, *o bien con el intervalo* $(0, ind(X,d)]$.

iii) $ind_H(X,d) = inf\{\alpha > 0 : d_\alpha \equiv 0\}$. *Más aún,* $\{\alpha \in (0,+\infty) \,/ d_\alpha \equiv 0\}$ *coincide con el intervalo* $(ind_H(X,d), +\infty)$, *o bien con el intervalo* $[ind_H(X,d), +\infty)$.

iv) $ind(X,d) \leq ind_H(X,d)$.

Los siguientes ejemplos ponen de relieve las diferencias entre $ind(X,d)$ y $ind_H(X,d)$.

Ejemplo 1.16. *Sea* $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x-y|^s$ *y* $s > 0$. *Como sabemos, si* $\beta > \frac{1}{s}$ *entonces* $\mathcal{C}^{0,\beta}(X,d) = \mathbb{C}$. *Esto es* $\{\alpha > 0 \,/\, \mathcal{C}^{0,\alpha}(X,d) \neq \mathbb{C}\} \subseteq (0,1/s]$. *Teniendo en cuenta que* $|x-y|^s \leq 2^s \text{máx}(|x-z|^s, |z-y|^s)$, *y tomando* $z := \frac{x+y}{2}$ *en la definición de* C_d, *podemos ver que* $C_d = 2^s$, *esto es, si* $\alpha = \frac{1}{\log_2 C_d} = \frac{1}{s}$, *entonces para cada* $\beta \in (0,\alpha]$ *se tiene que* $d_\beta \approx d$. *Luego* $ind(X,d) = ind_H(X,d) = \frac{1}{s}$.

Ejemplo 1.17. *Para el caso* (X,d) *espacio métrico tenemos que* $C_d \leq 2$ *y* $\frac{1}{\log_2 C_d} \geq 1$. *Luego* $ind(X,d) = Cv(X,d) \geq 1$ *y* $ind_H(X,d) \geq 1$.

Ejemplo 1.18. *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* $d(x,y) := |x-y|^{1/m}$, $m \geq 1$. *Entonces* $ind(X,d) = Cv(X,d) = ind_H(X,d) = m$.

Para los siguientes ejemplos requerimos del siguiente lema que comentamos en la Sección 6.

Lema 1.19. *a) Si un espacio cuasimétrico* (X,d) *posee la siguiente propiedad de punto medio: para cada par* x, y *en* X *existe un* z *en* X *tal que*

$$d(z,x) \leq \frac{1}{2} d(x,y) \text{ y } d(z,y) \leq \frac{1}{2} d(x,y);$$

entonces $ind_H(X,d) \leq 1$.

b) Si $(X, \|\cdot\|)$ *es espacio normado entonces*

$$ind(X, \|\cdot\|) = ind_H(X, \|\cdot\|) = 1.$$

c) Si $(X, \|\cdot\|)$ *es espacio normado y* $Y \subseteq X$ *contiene a su vez un subconjunto convexo* $Z \subseteq Y$ *de cardinal* $\#Z \geq 2$, *entonces*

$$ind(Y, \|\cdot\|) = ind_H(Y, \|\cdot\|) = 1.$$

Ejemplo 1.20. *Como consecuencia inmediata del lema anterior tenemos que, para cada* $n \in \mathbb{N}$,

$$ind(\mathbb{R}^n, |\cdot|) = ind([0,1]^n, |\cdot|) = 1,$$

$$ind_H(\mathbb{R}^n, |\cdot|) = ind_H([0,1]^n, |\cdot|) = 1.$$

Ejemplo 1.21. *Sean* $a < b < c < d$ *números reales ,* $I_1 := [a,b]$, $I_2 := [c,d]$, *y considérese* $X = I_1 \cup I_2$ *dotado de la métrica usual* $|\cdot|$. *Veamos que* $ind(X,|\cdot|) = 1$ *y* $ind_H(X,|\cdot|) = +\infty$. *El hecho que* $ind(X,|\cdot|) = 1$ *se sigue del inciso c) del Lema 1.19. Por otra parte , si* $\alpha \in (1,+\infty)$, *la* α*-regularización de* $\rho(x,y) := |x-y|$ *está dada por*

$$\rho_\alpha(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x,y \in I_1 \text{ o } x,y \in I_2 \\ c-b & \text{si } (x,y) \in I_1 \times I_2 \text{ o } (x,y) \in I_2 \times I_1 \end{cases}.$$

Por lo cual

$$ind_H(X,\rho)=\infty,$$

de acuerdo al inciso iii) de la Proposición 1.15. Obsérvese que en este caso las funciones Hölder de regularidad $s>1$ no son sólo las funciones constantes sobre X. Es por este motivo que $\mathcal{C}^{0,\gamma}_{(X)}\neq\mathbb{C}$ para todo $\gamma>0$. Esto pone de manifiesto la diferencia entre los índices $ind_H(X,|\cdot|)$ y $ind(X,|\cdot|)$: este último ofrece información cualitativa de la regularidad de las funciones Hölder.

EJEMPLO 1.22. *Si d es ultramétrica, esto es, si $C_d=1$ y $\alpha=\frac{1}{\log_2 C_d}=+\infty$; entonces para cada $\alpha\in(0,+\infty]$ se tiene que $d\approx d_\alpha$. Luego $ind(X,d)=ind_H(X,d)=+\infty$. Obsérvese entonces que en los espacios ultramétricos existen funciones de suavidad Hölder no triviales de cualquier orden arbitrario.*

2. Propiedad de homogeneidad débil. Dimensión de Assouad

Analizaremos en esta sección una de las propiedades fundacionales de los espacios de tipo homogéneo: el control métrico de la dispersión de los puntos del espacio.

DEFINICIÓN 1.23. *Dado un espacio cuasimétrico (X,d) un conjunto $A\subseteq X$ es ε-disperso si $d(x,y)\geq\varepsilon$ para todo par $x,y\in A$, con $x\neq y$.*

DEFINICIÓN 1.24. *Se dice que (X,d) satisface la propiedad de homogeneidad débil si existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para cada $x\in X$, cada $r>0$ y cada conjunto $\frac{r}{2}$-disperso $A\subseteq X$ se tiene que $\#[B(x,r)\cap A]\leq N$ (donde $\#$ denota el cardinal del conjunto). En otras palabras, todo conjunto $\frac{r}{2}$-disperso incluido en alguna bola de radio r posee a lo sumo N puntos.*

LEMA 1.25. *Si (X,d) satisface la propiedad de homogeneidad débil con constante $N\in\mathbb{N}$ entonces para todo $x\in X$, $\varepsilon>0$, $m\in\mathbb{N}$ y todo conjunto $A\subseteq X$, $\frac{\varepsilon}{2^m}$-disperso, se tiene que $\#[B(x,\varepsilon)\cap A]\leq N^m$.*

DEMOSTRACIÓN. Razonando inductivamente, supongamos que la propiedad es cierta para todo natural menor que $m-1$. Dado un conjunto A, $\frac{\varepsilon}{2^m}$-disperso, sea A^* un subconjunto de $A\cap B(x,\varepsilon)$ que sea $\frac{\varepsilon}{2^{m-1}}$-disperso maximal. Por hipótesis inductiva $\#A^*\leq N^{m-1}$, y por definición $\#\left[A\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2^{m-1}}\right)\right]\leq N$, para cualquier $y\in A^*$. Como

$$A\cap B(x,\varepsilon)\subseteq\bigcup_{y\in A^*}\left[A\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2^{m-1}}\right)\right],$$

se sigue que

$$\#[A\cap B(x,\varepsilon)]\leq\sum_{y\in A^*}\#\left[A\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2^{m-1}}\right)\right]\leq N^m,$$

lo cual demuestra el lema. □

Puede verse que la propiedad de homogeneidad débil equivale a la denominada s-homogeneidad métrica. Un espacio métrico es s-homogéneo, o (C,s)-homogéneo, si existen constantes $C \geq 1$ y $s \geq 0$ tales que para todos $x \in X$, $r > 0$, $\lambda \geq 1$ y todo conjunto $A \subseteq X$, r-disperso, se tiene que $\#\left[B(x,\lambda r) \cap A\right] \leq C\lambda^s$.

Para ver que la propiedad de homogeneidad débil implica la s-homogeneidad, con constantes $C = N$ y $s = \log_2 N$, basta considerar $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $2^m < \lambda \leq 2^{m+1}$ y aplicar el lema anterior con $\varepsilon = \lambda r$. Es claro, por otra parte, que la (C,s)-homogeneidad implica la propiedad de homogeneidad débil con $N = \lfloor 2^s C \rfloor + 1$.

De modo más simple, en un espacio métrico (X,d) s-homogéneo todo conjunto r-disperso, $Y \subseteq X$, de diámetro finito satisface

$$\#(Y) \leq C\left(\frac{r}{di\acute{a}m\,(Y)}\right)^s .$$

Por otra parte, la propiedad de homogeneidad débil equivale, a su vez, a la propiedad de cubrimiento por bolas, o propiedad de duplicación métrica. Se dice que (X,d) satisface la propiedad de cubrimiento de bolas si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $r > 0$ y cada $x \in X$ existe un conjunto finito $A \subseteq B(x,r)$ con cardinal $\#A \leq M$ tal que $B(x,r) \subseteq \bigcup\limits_{y \in A} B\left(y, \frac{r}{2}\right)$; esto es, si la cantidad de bolas de radio $\frac{r}{2} > 0$ necesarias para cubrir una bola de radio r tiene una cota superior uniforme.

DEFINICIÓN 1.26. *Definimos la dimensión de Assouad de un espacio cuasimétrico* (X,d)*, y la denotamos* $\dim_A(X,d)$*, como el ínfimo de los* $s \geq 0$ *para los cuales existe una constante* $C > 0$ *tal que, para cada* $x \in X$*, cada* $\lambda > 1$*, cada* $r > 0$ *y cada subconjunto* $A \subseteq X$ *r-disperso, se tiene que* $\#\left[B(x,\lambda r) \cap A\right] \leq C\lambda^s$.

$$\#\left[B(x,\lambda r) \cap A\right] \leq C\lambda^s.$$

O bien, de modo equivalente,

$$\dim_A(X,d) := \inf\left\{s \in [0,\infty] : \ (X,d) \ \textit{es } s\textit{-homogéneo}\right\}.$$

El siguiente lema reúne algunas propiedades elementales.

LEMA 1.27. *Sea* (X,d) *espacio cuasimétrico.*

i) Para todo $0 < \alpha < \infty$*,* $\dim_A(X,d^\alpha) = \frac{1}{\alpha}\dim_A(X,d)$.

ii) Si d' *es cuasimétrica en* X *y* $d' \approx d$ *entonces* $\dim_A(X,d') = \dim_A(X,d)$.

iii) Para todo subconjunto $Y \subseteq X$*,* $\dim_A(Y,d) \leq \dim_A(X,d)$*. Si, además* Y *es subconjunto denso,* $\dim_A(Y,d) = \dim_A(X,d)$.

iv) Para todo $n \in \mathbb{N}$*,* $\dim_A(\mathbb{R}^n, |\cdot|) = n$.

v) La dimensión de Assouad es invariante bajo homeomorfismos bi-Lipschitz.

Esta noción de dimensión caracteriza los espacios cuasimétricos que poseen la propiedad de homogeneidad débil.

PROPOSICIÓN 1.28. *Sea* (X,d) *un espacio cuasimétrico. Su dimensión Assouad es finita si y sólo si satisface la propiedad de homogeneidad débil. Más aún si* $N>0$ *es la constante de la definición 1.24 entonces* $\dim_A X \leq \log_2 N$.

Es importante resaltar las propiedades topológicas de los espacios cuasimétricos de dimensión Assouad finita. El control uniforme sobre la dispersión de los puntos del espacio que la definición impone permite establecer una equivalencia entre conjuntos acotados y totalmente acotados como veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 1.29. *Sea* (X,d) *un espacio cuasimétrico con* $\dim_A X < \infty$. *Son válidas las siguientes afirmaciones.*

i) Todo conjunto acotado es totalmente acotado.

ii) Si, además, (X,d) *es espacio cuasimétrico completo se cumple la propiedad de Heine Borel: un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

iii) (X,d) *es separable.*

Concluimos esta sección demostrando el Lema de cubrimiento de Whitney y la partición de la unidad asociada a éste, los cuales, con algunas modificaciones, nos serán de utilidad en el Capítulo 5 para definir operadores de extensión.

LEMA 1.30 (Wiener). *Sea* (X,d) *un espacio cuasimétrico en el cual todo conjunto acotado es totalmente acotado. Dado* $E \subseteq X$ *un conjunto acotado y una función* $R : E \to \mathbb{R}^+$, *existe un subconjunto* $F \subseteq E$, *a lo sumo numerable,* $F = \{x_i\}_{i\in\Lambda}$ *tal que:*

i) para todo $i,j \in \Lambda, i \neq j : B(x_i, R_{x_i}) \cap B(x_j, R_{x_j}) = \emptyset$;

ii) $E \subseteq \bigcup_{i\in\Lambda} B(x_i, C_d R_{x_i})$, *donde* R_x *denota el valor de la función* R *en el punto* $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar supongamos que $\sup_{x\in E} R_x = +\infty$. Como E es acotado, $E \subseteq B(x_0, M)$ para algún $x_0 \in E$ y $M > 0$. Considerando $x_1 \in E$ tal que $R_{x_1} > M$ se sigue que $B(x_0, M) \subseteq B(x_1, C_d R_{x_1})$, de lo cual se deduce la tesis. En segundo lugar, supongamos $\sup_{x\in E} R_x = S_1 < +\infty$. Elíjase $x_1 \in E$ tal que $R_{x_1} > \frac{1}{2}S_1$, y sea $E_2 := E \setminus B(x_1, C_d R_{x_1})$, $S_2 = \sup_{x\in E_2} R_x$. Podemos suponer $S_2 > 0$ ya que de otro modo $E_2 = \emptyset$ y $E \subseteq B(x_1, C_d R_{x_1})$, lo cual demostraría el lema. Elíjase entonces $x_2 \in E_2$ tal que $R_{x_2} > \frac{1}{2}S_2$. Luego $B(x_1, R_{x_1}) \cap B(x_2, R_{x_2}) = \emptyset$, ya que de otro modo $x_2 \in B(x_1, C_d R_{x_1})$ lo que contradice que $x_2 \in E_2$. Luego, si $E_3 := E \setminus [B(x_1, C_d R_{x_1}) \cup B(x_2, C_d R_{x_2})]$ es vacío, el teorema queda demostrado. Caso contrario, elíjase $x_3 \in E_3$ tal que $R_{x_3} > \frac{1}{2}S_3$. Continuando inductivamente esta idea en el peor de los casos puede suceder que el conjunto $E_n := E \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, C_d R_{x_j}\right)\right]$ no fuese vacío para ningún $n \in \mathbb{N}$. Veamos que, en tal caso, $\lim_{n\to\infty} R_{x_n} = 0$. Supóngase que para una subsucesión $\left(R_{x_{n_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ existe $\eta > 0$ tal que $R_{x_{n_j}} > \eta$. Luego el conjunto $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq E$ es η-disperso e infinito, lo cual contradice el hecho que E sea totalmente acotado. Esto termina la demostración. □

Dado un conjunto abierto acotado $V \subseteq X$, y $\lambda \geq 1$, definamos $R : V \to \mathbb{R}^+$ como

$$R(x) = \frac{1}{2C_d^2\lambda} dist_d(x, X \setminus V),$$

donde $dist_d(x, A) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}$. Haciendo uso de esta función y del lema anterior se sigue el Lema de cubrimiento de Whitney siguiente, el cual permite asociar al conjunto una partición de la unidad respectiva.

LEMA 1.31 (Whitney). *Sea (X, d) un espacio cuasimétrico en el cual todo conjunto acotado es totalmente acotado, y sea $V \subseteq X$ un conjunto abierto acotado. Dado $\lambda \geq 1$, $\gamma \in (0, \frac{1}{\log_2 C_d}]$, existe una familia a lo sumo numerable de bolas $\left\{B\left(x_i, \frac{1}{C_d} r_i\right)\right\}_{i\in I}$, disjuntas dos a dos, y una familia de funciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X, d)$, llamada partición de la unidad, tales que:*

1) $r_i = \frac{1}{2C_d\lambda} dist_d(x_i, X \setminus V)$;

2) $V = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) = \bigcup_{i\in I} B(x_i, \lambda r_i)$;

3) si $z \in B(x_i, \lambda r_i)$ entonces $\lambda \leq \frac{dist_d(z, X\setminus V)}{r_i} \leq 2C_d^2\lambda$;

4) para cada $i \in I$ existe $x_i^* \notin V$ tal que $d(x_i^*, x_i) < 3C_d\lambda r_i$;

5) para cada $i \in I$ se tiene que $\#\{k \in I \ : \ B(x_k, r_k) \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset\} < \infty$;

6) si $\dim_A X < \infty$ entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\#\{k \in I \ : \ B(x_k, r_k) \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset\} \leq M$$

para todo $i \in I$;

7) para cada $i \in I$ se tiene que $\mathbf{1}_{B(x_i, r_i)} \leq \varphi_i \leq \mathbf{1}_{B(x_i, 2r_i)}$;

8) existe una constante $L > 0$ tal que $\forall i \in I \ : \ [\varphi_i]_\gamma \leq L\frac{1}{r_i^\gamma}$;

9) $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = \mathbf{1}_V(x)$.

DEMOSTRACIÓN. La primera conclusión se sigue simplemente de reemplazar $r(x) = C_d R(x)$. El Lema de Wiener aplicado a $E = V$ asegura que $V \subseteq \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} B(x_i, \lambda r_i)$. La inclusión recíproca se sigue de observar que, dado cualquier $z \in B(x_i, \lambda r_i)$, automáticamente $d(z, x_i) \leq \frac{1}{2} dist_d(x_i, X \setminus V)$ y, por tanto, $B(x_i, \lambda r_i) \subseteq V$. La tercera conclusión se sigue de utilizar la desigualdad

$$dist_d(z, X \setminus V) \leq C_d \max\{dist_d(x_i, X \setminus V), d(x_i, z)\}$$

y el hecho que $B(x_i, \lambda r_i) \subseteq V$. El inciso 4) se sigue de inmediato de la definición de $dist_d(x_i, X \setminus V)$. Usando el inciso 3) puede deducirse que si $B(x_k, r_k) \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset$ entonces

$$\frac{1}{2C_d^2} r_i \leq r_k \leq 2C_d^2 r_i. \tag{1.2}$$

Como vimos en la demostración del Lema de Wiener $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ por lo cual, sólo una cantidad finita de r_k's pueden satisfacer (1.2). Por último, supongamos que $\dim_A X < \infty$. Dado $i \in I$, sea

$$\mathcal{A}_i = \{x_k \in E \,/\, B(x_k, r_k) \cap B(x_i, r_i) \neq \varnothing\}.$$

Utilizando (1.2) puede verse que para $D = 2C_d^4$ y para cada $x_k \in \mathcal{A}_i$ se satisface $B(x_k, r_k) \subseteq B(x_i, Dr_i)$. Luego

$$\#\{k \in I \;:\; B(x_k, r_k) \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset\} \leq \#[\, B(x_i, Dr_i) \cap \mathcal{A}_i].$$

Teniendo en cuenta que las bolas $\left\{B\left(x_i, \frac{1}{3C_d} r_i\right)\right\}_{i\in I}$ son disjuntas, se tiene que $\mathcal{A}_i$ es $\frac{1}{3C_d} r_i$-disperso. Por lo tanto, aplicando adecuadamente la Definición 1.26 podemos deducir

$$\#(B(x_i, Dr_i) \cap \mathcal{A}_i) \leq C(D^*)^s,$$

donde D^*sólo depende de C_d, y C y s sólo dependen de $\dim_A X$. □

Los detalles de la construcción de la partición de la unidad los desarrollamos en la Sección 1 del Capítulo 5.

3. Espacios de tipo homogéneo

La existencia de una medida duplicante sobre un espacio cuasimétrico es una condición suficiente que permite controlar la dispersión métrica de los puntos del espacio, esto es, permite asegurar la propiedad de homogeneidad débil, como veremos a continuación.

Recordemos que sobre un espacio dotado de una topología se define la familia de conjuntos borelianos como la menor σ-álgebra que contiene a dicha topología. A su vez, se dice que una medida es boreliana si su σ-álgebra de definición contiene a los conjuntos de Borel.

DEFINICIÓN 1.32. *Una medida μ definida sobre la familia de conjuntos de Borel de un espacio métrico (X, d) se dice duplicante si es no degenerada, en el sentido de que existen bolas B_1, B_2 tales que $\mu(B_1) > 0$ y $\mu(B_2) < \infty$, y satisface la condición de duplicación de medida*

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_\mu \mu(B(x, r)), \tag{1.3}$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$, y alguna constante $C_\mu > 0$, independiente de x, r.

No es difícil ver que toda medida no degenerada que satisface la condición de duplicación es localmente finita, esto es, $0 < \mu(B(x,r)) < \infty$ para todo $x \in X$ y todo $r > 0$.

Del mismo modo que hicimos en la sección anterior puede demostrarse que la condición de duplicación de una medida es equivalente a la condición de homogeneidad siguiente: existen constantes $c_\mu \geq 1$ y $s \geq 0$ tales que la desigualdad

$$\mu(B(x,\lambda r)) \leq c_\mu \lambda^s \mu(B(x,r)), \tag{1.4}$$

vale para todo $x \in X$, todo $\lambda \geq 1$ y todo $r > 0$. En efecto, las constantes $c_\mu := C_\mu$ y $s := \log_2 C_\mu$ verifican (1.4). Suele denominarse a esta clase de medidas que satisfacen la condición (1.4) medidas s-homogéneas, o (c_μ, s)-homogéneas.

Como anticipamos, veamos que la existencia de esta clase de medidas sobre un espacio cuasimétrico asegura la propiedad de homogeneidad débil.

LEMA 1.33. *Sea (X,d) espacio cuasimétrico y μ medida duplicante boreliana en X. Entonces (X,d) satisface la propiedad de homogeneidad débil.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una bola $B(x,t)$, sea $A := \{x_1, ..., x_N\}$ un conjunto $\frac{t}{2}$-disperso en $B(x,t)$. Mediante una reducción al absurdo puede mostrarse que $\left\{B\left(x_i, \frac{t}{4C_d}\right)\right\}_{1\leq i\leq N}$ es una familia disjunta de bolas, contenidas todas ellas en la bola $B(x,R)$ de radio $R := t\left(C_d + \frac{1}{4}\right)$. Luego

$$\sum_{i=1}^{N} \mu\left(B\left(x_i, \frac{t}{4C_d}\right)\right) \leq \mu(B(x,R)). \tag{1.5}$$

Por otra parte, dado cualquier $x_i \in A$ se tiene que

$$B\left(x_i, \frac{t}{4C_d}\right) \subseteq B(x,R) \subseteq B(x_i, R'),$$

donde $R' := C_d\left(C_d + \frac{5}{4}\right)t$. Luego, utilizando la propiedad de homogeneidad (1.4) con $r = \frac{t}{4C_d}$ y $\lambda = 4C_d^2\left(C_d + \frac{5}{4}\right)$ se deduce que

$$\mu(B(x,R)) \leq \mu(B(x_i,R')) \leq c_\mu \lambda^s \mu\left(B\left(x_i, \frac{t}{4C_d}\right)\right),$$

sumando miembro a miembro y utilizando (1.5) se obtiene finalmente que

$$\#(A \cap B(x,t)) = \#A = N \leq c_\mu \lambda^s,$$

lo cual demuestra el lema. □

Teniendo en cuenta este lema introducimos a continuación la definición de espacio de tipo homogéneo. Recordemos que $\mathcal{V}_d$ designa a la familia de bolas determinada por una cuasimétrica d, esto es,

$$\mathcal{V}_d := \{B_d(x,r) : x \in X, r > 0\}.$$

DEFINICIÓN 1.34. *Una terna* (X,d,μ) *es un espacio de tipo homogéneo si* (X,d) *es un espacio cuasimétrico y* μ *una medida definida en una* σ*-álgebra* $\mathcal{M} \subseteq 2^X$ *de partes de* X*, tal que para alguna cuasimétrica* $\varrho \approx d$ *se tiene que* $\mathcal{V}_\varrho \subseteq \mathcal{M}$*, existen* B_1*,* $B_2 \in \mathcal{V}_\varrho$ *tales que* $\mu(B_1) > 0$ *y* $\mu(B_2) < \infty$*, y* μ *satisface* $\mu(B_\varrho(x,2r)) \leq C_\mu \mu(B_\varrho(x,r))$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $r > 0$*.*

Como se ha visto en el Ejemplo 1.5, existen cuasimétricas cuyas bolas no necesariamente son borelianas. No obstante, la eventual no medibilidad de las bolas no es obstáculo para asegurar la borelianeidad de la medida.

LEMA 1.35. *Si* (X,d,μ) *es un espacio de tipo homogéneo entonces* μ *es medida Boreliana y localmente finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ϱ una cuasimétrica equivalente a d que satisface las condiciones de la Definición 1.34. Como las topologías generadas por d y ϱ son las mismas, la familia de conjuntos de Borel es la misma tanto para d, como para ϱ. Y teniendo en cuenta que $\mathcal{V}_\varrho \subseteq \mathcal{M}$, para demostrar la borelianeidad de μ bastará ver que todo abierto de dicha topología es unión numerable de bolas de $\mathcal{V}_\varrho$. Dado, entonces, un conjunto W abierto en (X,ϱ), definamos

$$L_n := \left\{ x \in W \ / \ \frac{1}{2^{n+1}} \leq dist_\varrho(x, X \setminus W) < \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Obsérvese que $W = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} L_n$. Sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{2C_\varrho^3}$ y escojamos, para cada $n \in \mathbb{Z}$, un subconjunto $A_n \subseteq L_n$ que sea $\frac{\varepsilon C_\varrho}{2^{n+1}}$-disperso maximal. Gracias al Corolario 1.36 y a la Proposición 1.29, tenemos que cada A_n es a lo sumo numerable. Para terminar la demostración bastará ver que

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \bigcup_{x\in A_n} B_\varrho\left(x, \frac{\varepsilon C_\varrho}{2^n}\right). \tag{1.6}$$

Para mostrar (1.6), obsérvese en primer lugar que

$$L_n \subseteq \bigcup_{x\in A_n} B_\varrho\left(x, \frac{\varepsilon C_\varrho}{2^n}\right), \tag{1.7}$$

y, por otra parte, que

$$\begin{aligned} \bigcup_{x\in A_n} B_\varrho\left(x, \frac{\varepsilon C_\varrho^2}{2^n}\right) &\subseteq \left\{ x \in X : dist_\varrho(x, L_n) < \frac{\varepsilon C_\varrho^2}{2^n} \right\} \\ &\subseteq \left\{ x \in X : \frac{1}{2^{n+1} C_\varrho} \leq dist_\varrho(x, X\setminus W) < \frac{C_\varrho}{2^n} \right\}, \end{aligned}$$

por lo cual, tenemos que

$$\bigcup_{x\in A_n} B_\varrho\left(x, \frac{\varepsilon C_\varrho}{2^n}\right) \subseteq W, \tag{1.8}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Las inclusiones (1.7) y (1.8) muestran (1.6) y la tesis del lema. $\square$

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del Lema 1.33.

COROLARIO 1.36. *Sea (X, d, μ) espacio de tipo homogéneo. Entonces (X, d) satisface la propiedad de homogeneidad débil.*

Una propiedad importante para comprender la naturaleza de las medidas duplicantes muestra que los únicos puntos que pueden medir positivo son aquellos que son aislados, como muestra la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.37. *Si (X, d, μ) es espacio de tipo homogéneo, entonces:*
1) $\mu(X) < \infty$ si y sólo si $diám\,(X) < \infty$;
2) dado $x \in X$ se tiene que $\mu(\{x\}) > 0$ si y sólo si x es punto aislado;
3) el conjunto $\{x \in X \ / \ \mu(\{x\}) > 0\}$ es numerable.

DEMOSTRACIÓN. Supondremos en primer lugar el caso (X, d) espacio métrico.

1) Si $diám\,(X) = \infty$ entonces dado $x_0 \in X$ es posible encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que, $x_n \notin B(x_0, 2n)$, y tales que

$$B(x_0, n) \cap B\left(x_n, \frac{1}{2}d(x_n, x_0)\right) = \emptyset \text{ y } B(x_0, n) \subseteq B(x_n, 2d(x_n, x_0)).$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &< \mu(X) = \lim_{n\to\infty} \mu(B(x_0, n)) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(B(x_n, 2d(x_n, x_0))) \\ &\leq C_\mu^2 \limsup_{n\to\infty} \mu\left(B\left(x_n, \frac{1}{2}d(x_n, x_0)\right)\right) \leq C_\mu^2 \limsup_{n\to\infty} \mu(X \setminus B(x_0, n)) = 0, \end{aligned}$$

puesto que $\mu(X) < \infty$. Esta contradicción muestra necesariamente que (X, d) debe posee diámetro finito.

2) Veamos que si μ es medida boreliana duplicante, no trivial, sobre un espacio métrico (X, d), entonces $\mu(\{x\}) = 0$ si y sólo si x es punto de acumulación de X. Obsérvese que si $x \in X$ es aislado entonces, $B(x, R) = \{x\}$, para algún $R > 0$. Luego, si $\mu(\{x\}) = 0$, entonces $\mu(X) = 0$ haciendo $\lambda \nearrow \infty$ en la condición (1.4). Por otra parte, si $x \in X$ es punto de acumulación, uno puede escoger una sucesión de bolas $\left\{B\left(x_n, \frac{2}{3}d(x, x_n)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, disjuntas dos a dos, y tales que $x \in B\left(x_n, \frac{4}{3}d(x, x_n)\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La finitud de la suma de sus medidas y la acotación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(B\left(x_n, \frac{2}{3}d(x, x_n)\right)\right) \geq \frac{1}{C_\mu}\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(B\left(x_n, \frac{4}{3}d(x, x_n)\right)\right) \geq \frac{1}{C_\mu}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x\}),$$

muestran que, necesariamente, $\mu(\{x\}) = 0$.

3) La numerabilidad se sigue de la no degeneración de la medida. Teniendo en cuenta que, si $A = \{x \in X \ / \ \mu(\{x\}) > 0\}$, entonces, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu(B(x,N)) \geq \mu(A \cap B(x,N)) \geq \sum_{x \in A \cap B(x,N)} \mu(\{x\}) > 0.$$

Para tratar el caso que d sea cuasimétrica aplicamos las mismas ideas, utilizando en primer lugar que $d \approx d_{\#}$, para la cuasimétrica $d_{\#}$ dada por la Observación 1.7, y el hecho que, si ρ es la métrica dada por $\rho = d_{\#}^{\gamma}$, $\gamma = \frac{1}{\log_2 C_d}$, entonces $B_{\rho}(x,r) = B_{\#}\left(x, r^{1/\gamma}\right)$. □

Señalemos que los puntos $x \in X$ tales que $\mu(\{x\}) > 0$ se denominan átomos.

Los siguientes ejemplos reúnen alguno ejemplos notables de espacios de tipo homogéneo. En la sección siguiente desarrollaremos otros casos paradigmáticos.

EJEMPLO 1.38. *El conjunto $\mathbb{R}^n$ con cualquier norma y la medida de Lebesgue n-dimensional.*

EJEMPLO 1.39. *Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función Lipschitz . Sea $X := \{(x, F(x)) \ : x \in \mathbb{R}^n\}$, d la métrica inducida por la distancia usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $\mu(E \times F(E)) := |E|$ la medida de Lebesgue n-dimensional de $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces (X, d, μ) es espacio de tipo homogéneo.*

EJEMPLO 1.40. *El espacio diádico $(\mathbb{R}^n, \delta, |\cdot|)$, donde aquí $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue n-dimensional y δ la métrica dada por la medida del cubo diádico más pequeño que contenga a dos puntos. Describiremos con mayor precisión este ejemplo en el Capítulo 9.*

EJEMPLO 1.41. *Sea $X := [0, +\infty)$, d la distancia usual y $\mu(E) := \int_E r^{n-1} dr$, con $n \geq 1$.*

EJEMPLO 1.42. *El espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de la Lebesgue n-dimensional y d la distancia dada por $d(x,y) := \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^{\alpha_j}$, donde $x := (x_1, ..., x_n)$, $y := (y_1, ..., y_n)$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$; es espacio de tipo homogéneo.*

EJEMPLO 1.43. *Otro caso de notable interés, que extiende el ejemplo anterior, lo constituyen las métricas parabólicas. Sea A una matriz $n \times n$ a valores reales. Dado $\lambda > 0$ definimos la transformación $T_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como $T_\lambda(x) := e^{A \ln \lambda} x$. Teniendo en mente el caso $A = I$, la matriz identidad, uno puede ver a T_λ como una dilatación generalizada. Puede demostrarse que para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existe un único número $\rho(x) \in (0, +\infty)$ tal que $\left\|T_{1/\rho(x)} x\right\| = 1$. Si definimos $\rho(0) := 0$, esta función $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ satisface:*

1) para todo $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho(T_\lambda x) = \lambda \rho(x)$;

2) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\rho(-x) = \rho(x)$;

3) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\rho(x) = 1$ si y sólo si $\|x\| = 1$; $\rho(x) < 1$ si y sólo si $\|x\| < 1$; y $\rho(x) > 1$ si y sólo si $\|x\| > 1$;

4) para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Además, si consideramos $d(x,y) := \rho(x-y)$, entonces d es una métrica en $\mathbb{R}^n$ invariante por traslaciones. Como caso particular, si consideramos $A := diag(a_1,...,a_n)$, tendremos que $T_\lambda(x) = (\lambda^{a_1}x_1,...,\lambda^{a_n}x_n)$. Utilizando la norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n}|x_j|$ se obtiene que $\rho(x) = \max\limits_{1\le j\le n}|x_j|^{1/a_j}$.

4. Espacios Ahlfors regulares. Espacios normales

Una subvariedad rica de espacios de tipo homogéneo que será un contexto natural de este trabajo está conformada por la clase de espacios de tipo homogéneo de Ahlfors, espacios en los cuales las medidas de las bolas se comportan como potencias del radio. Dado un espacio cuasimétrico (X,d), sobre el cual está definida una medida positiva μ, y dado $x\in X$ definimos las funciones $R_d(x)$ y $r_d(x)$ del siguiente modo

$$R_d(x) := \begin{cases} \sup\{r>0 \;/\; B_d(x,r)\neq X\} & \text{si } \mu(X)<\infty \\ \infty & \text{si } \mu(X)=\infty \end{cases},$$

$$r_d(x) := \inf\{r\in(0,\infty) \;/\; B_d(x,r)\neq\{x\}\}.$$

DEFINICIÓN 1.44. *Dada una terna (X,d,μ), donde (X,d) es un espacio cuasimétrico y μ una medida positiva definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X, diremos que (X,d,μ) es un espacio α-Ahlfors regular, para algún $\alpha>0$, si existe una cuasimétrica $\rho\approx d$ y constantes $C_A, c_A\ge 1$ tales que:*

i) $\mathcal{V}_\rho\subseteq\mathcal{M}$;

ii) para todo $x\in X$ y todo $r>0$ tal que $(c_A)^{-1}r_\rho(x)\le r\le c_A R_\rho(x)$ se satisface

$$\frac{1}{C_A}r^\alpha\le\mu(B_\rho(x,r))\le C_A r^\alpha.$$

Más aún, si para todo $x\in X$, se tiene que $r_\rho(x)=0$, entonces diremos que (X,d,μ) es un espacio α-Ahlfors regular estándar.

Cabe observar que la definición anterior articula perfectamente en espacios cuasimétricos con medida, acotados, que poseen átomos. En este trabajo consideraremos solamente los espacios Ahlfors estándar, esto es, aquellos que no poseen átomos.

El siguiente lema describe algunas de las propiedades inmediatas que surgen de la definición.

LEMA 1.45. *Sea (X,d,μ) un espacio α-Ahlfors regular, para algún $\alpha\in(0,\infty)$ y sea ρ una cuasimétrica tal que $\rho\approx d$ y que satisface las condiciones de la definición anterior. Entonces, existe una constante $C>0$ tal que:*

i) para todo $x\in X$ y todo $r>0$ tal que $r\in[\frac{1}{c_A}r_\rho(x),\infty)$, se tiene que

$$\mu(B_\rho(x,r))\le Cr^\alpha;$$

ii) para todo $x \in X$ y todo r finito tal que $r \in (0, c_A R_\rho(x)]$, se tiene que

$$\frac{1}{C} r^\alpha \leq \mu\left(B_\rho(x,r)\right);$$

iii) para todo $x \in X$

$$\frac{1}{C} r_\rho(x)^\alpha \leq \mu(\{x\}) \leq C r_\rho(x)^\alpha$$

y

$$\frac{1}{C} R_\rho(x)^\alpha \leq \mu(X) \leq C R_\rho(x)^\alpha;$$

iv) para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, se tiene que $B_\rho(x,r) = \{x\}$ si y sólo si $r \in (0, r_\rho(x)]$;

v) para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, se tiene que $B_\rho(x,r) = X$ si y sólo si $r \in (R_\rho(x), \infty)$;

vi) (X, d, μ) es espacio de tipo homogéneo;

vii) la medida μ es boreliana respecto de cualquier topología τ_ρ para ρ cuasimétrica tal que $\rho \approx d$;

viii) para cualquier $\beta \in (0,\infty)$, fijo, la terna $\left(X, \rho^\beta, \mu\right)$ es un espacio $\frac{\alpha}{\beta}$-Ahlfors regular.

Dado (X, d) espacio cuasimétrico, $\alpha \in [0, \infty)$, $E \subseteq X$ y $\varepsilon \in (0, \infty)$, definimos

$$H^\alpha_{d,\varepsilon}(E) := \inf\left\{\sum_{j\geq 1} r_j^\alpha \ : \ E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} B_d(x_j, r_j) \ , \ r_j \leq \varepsilon \text{ para cada } j \geq 1\right\},$$

y definimos la medida exterior de Hausdorff de dimensión α en (X, d) del conjunto E como

$$H^\alpha_d(E) := \sup_{\varepsilon > 0} H^\alpha_{d,\varepsilon}(E).$$

Obsérvese que $H^\alpha_d(E)$ toma valores en $[0, +\infty]$. Por su parte, se define la dimensión de Hausdorff en (X, d) del conjunto E como

$$\dim_H(E) := \inf\left\{\alpha \geq 0 : H^\alpha_d(E) = 0\right\}.$$

Recordemos, por otra parte, que una medida μ definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de (X, d) es medida Borel-regular, si $\mathcal{M}$ contiene a los conjuntos de Borel y si para cada $A \in \mathcal{M}$ existe un boreliano B tal que $A \subseteq B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.

Los siguientes resultados establecen, por una parte, las propiedades de la medida de Hausdorff definida sobre un espacio cuásimetrico, y por otra parte, que dentro de la clase de medidas Borel-regulares que satisfacen una condición de regularidad Ahlfors y que son comparables entre sí, podemos siempre escoger una medida de Hausdorff del mismo orden que la regularidad Ahlfors del espacio.

PROPOSICIÓN 1.46. *i) Sea (X, d) un espacio cuasimétrico y $\beta \in (0, \infty)$ fijo. Sea $d_\#$ distancia que surge de la regularización de d, dada en la Observación 1.7. Dado cualquier conjunto $E \subseteq X$, la medida de Hausdorff restringida $H^\beta_{d_\#}|_E$ es una medida exterior Borel-regular sobre* *la familia de los conjuntos borelianos del espacio topológico* $\left(E, \tau_{d|_E}\right)$*, donde* $d|_E$ *denota la cuasimétrica* d *restringida a* E*. A su vez, la medida* $H^{\beta}_{d_{\#}}|_E$ *restringida a la* σ*-álgebra de conjuntos medibles en sentido de Carathéodory también es Borel-regular en la misma* σ*-álgebra de Borel.*

ii) Supóngase que (X, d, μ) *es un espacio de Ahlfors* α*-regular estándar para algún* $\alpha \in (0, \infty)$*, y sea* ρ *cuasimétrica equivalente a* d *y que satisface las condiciones de la Definición 1.44, esto es, existe una constante* $C_A \geq 1$ *tal que, para todo* $x \in X$ *y todo* $r \in (0, diám\,(X)]$ *se tiene que*

$$\frac{1}{C_A} r^{\alpha} \leq \mu\left(B_{\rho}(x, r)\right) \leq C_A r^{\alpha},$$

entonces, la medida de Hausdoff de orden α *definida a partir de la regularización* $d_{\#}$ *satisface*

$$H^{\alpha}_{d_{\#}}\left(B\left(x, r\right)\right) \approx r^{\alpha},$$

uniformemente para todo $x \in X$ *y todo* $r \in (0, diám\,(X)]$*. A su vez, las medidas* μ *y* $H^{\alpha}_{d_{\#}}$ *resultan comparables si se las restringe a los borelianos de* (X, τ_d)*. Más áun, si además* μ *es Borel-regular entonces*

$$H^{\alpha}_{d_{\#}}\left(E\right) \approx \mu\left(E\right),$$

uniformemente para todo conjunto $E \subseteq X$*,* μ*-medible.*

Obsérvese que de esta proposición se desprende, a grandes rasgos, que en los espacios α-Ahlfors, dados por medidas Borel-regulares, siempre podemos utilizar $H^{\alpha}_{d_{\#}}$ como medida del espacio.

Los siguientes son ejemplos de espacios Ahlfors regulares estándar. En la sección final de este capítulo detallamos la bibliografía utilizada para describirlos.

EJEMPLO 1.47. *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\beta \in (0, \infty)$ *entonces*

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\|\cdot\right\|^{\beta}, \lambda\right)$$

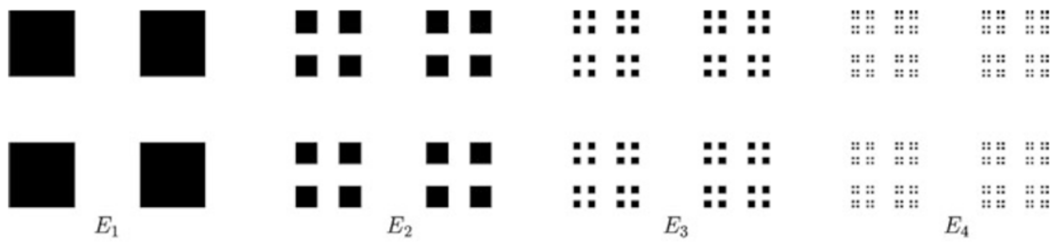
donde $\|\cdot\|$ *denota una norma en* $\mathbb{R}^n$ *y* λ *la medida de Lebesgue* n*-dimensional, es un espacio* $\frac{n}{\beta}$*-Ahlfors regular.*

EJEMPLO 1.48. *Sea* (X_i, d_i, μ_i) *un espacio* α_i*-Ahlfors regular para cada* $i = 1, 2, ..., N$*. Sea* $X := \prod_{i=1}^{N} X_i$ *y defínase la cuasimétrica* ρ *sobre* X *como*

$$\rho\left(x, y\right) := \max_{1 \leq i \leq N} d_i\left(x_i, y_i\right)$$

para cada par de N*-uplas* $x = (x_1, ..., x_N)$*,* $y = (y_1, ..., y_N)$ *en* X*. Sea* μ *la medida producto* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_N$ *definida sobre* X*. Entonces la terna* (X, ρ, μ) *es un espacio* γ*-Ahlfors regular, para* $\gamma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$*.*

EJEMPLO 1.49. *Sea $E_0 = [0,1]^2$, el cuadrado unidad de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto que consiste en cuatro cuadrados $\left\{Q_j^1\right\}_{1\leq j\leq 4}$ de longitud de lado $\frac{1}{4}$ y localizados en cada esquina de E_0. Defínase $E_1 := \bigcup\limits_{j=1}^{4} Q_j^1$. De modo inductivo, sea $\mathcal{C}_n$ la n-ésima generación formada por 4^n cuadrados $\left\{Q_j^n\right\}_{1\leq j\leq 4^n}$ de longitud de lado $\frac{1}{4^n}$ y localizados en las esquinas de los cuadrados de E_{n-1}, como muestra la siguiente imagen.*



Defínase entonces $E = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. Denotemos por d a la cuasimétrica $\|\cdot\|^\beta$ restringida a E, esto es, $d(x,y) = \|x-y\|^\beta$, para todo $x, y \in E$. Denotemos por μ a la medida de Hausdorff H_d^1 restringida a E. Entonces la terna (E, d, μ), es un espacio $\frac{1}{\beta}$-Ahlfors regular.

Más aún puede demostrarse que si bien (E, d) no es espacio ultramétrico, es posible definir una ultramétrica d_* equivalente a d, la cual está dada por

$$\begin{aligned} d_*(x,y) := \inf\{r > 0 \ / \ &\textit{existen } z_1, ..., z_{N+1} \in E,\ N \in \mathbb{N},\ \textit{tales que} \\ &x = z_1, y = z_{N+1} \textit{ y } \|z_i - z_{i+1}\| < r \textit{ para cada } i = 1, ..., N\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.50. *Sea $\Psi := \{\psi_1, ..., \psi_N\}$ una familia de contracciones de la forma*

$$|\psi_i(x) - \psi_i(y)| = \frac{1}{a_i}\|x-y\|$$

para cada $i = 1, ..., N$ y todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, y algunos $a_1 \geq ... \geq a_N > 1$. Entonces, existe un único compacto no vacío K que es invariante por Ψ, esto es,

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(K) := \Psi(K).$$

Más aún, existe una única medida μ_K Borel-regular, con soporte en K, tal que, para toda $\varphi : K \to \mathbb{R}$ integrable

$$\int_K \varphi d\mu_K = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{a_i}\right)^D \int_K \varphi \circ \psi_i d\mu_K$$

donde $D > 0$ es tal que $\sum\limits_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{a_i}\right)^D = 1$. Si además se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(V) \subseteq V \ \textit{ y } \ \psi_i(V) \cap \psi_j(V) = \emptyset,\ i \neq j,$$

para algún subconjunto no vacío $V \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y acotado; entonces diremos que K es un fractal autosimilar. Puede probarse que para todo fractal autosimilar $D = \dim_H(K)$, y más aún, si consideramos $d_{\eta,K}(x,y) := \|x-y\|^\eta$, para $\eta > 0$, y todo $x, y \in K$, entonces

$(K, d_{\eta,K}, \mu_K)$ *es espacio de Ahlfors* α*-regular para* $\alpha = D/\eta$*. Como caso particular, en el ejemplo anterior* $K = E$*,* $D = \dim_H E = 1$ *y* $\eta = \beta$*.*

Por último, para culminar la sección, puede verse que cualquier espacio de tipo homogéneo es 1-Ahlfors regularizable.

PROPOSICIÓN 1.51. *Sea* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéno cuya familia de* d*-bolas son abiertas. Entonces*

$$\delta(x,y) := \begin{cases} \inf\{\mu(B) : B \text{ es } d\text{-bola que contiene } x, y\} \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

es una cuasi-métrica sobre X*. Más aún* d *y* δ *inducen la misma topología en* X *y el espacio* (X, δ, μ) *es* 1*-Ahlfors regular.*

5. Estructuras diádicas en espacios de tipo homogéneo

En esta sección introducimos lo que conocemos como estructura diádica en espacios de tipo homogéneo. A grandes rasgos, estas familias axiomatizan y generalizan el comportamiento en $\mathbb{R}$ de la familia de intervalos diádicos $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$, donde $k, j \in \mathbb{Z}$.

Damos a continuación la definición formal, para dar paso a un par de ejemplos y culminar la sección con un teorema que demuestra la existencia de esta clase de estructuras en cualquier espacio de tipo homogéneo arbitrario.

DEFINICIÓN 1.52. *Dado* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo, decimos que* $\mathbb{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}^j$ *es una familia diádica sobre* X *con parámetro* $\delta \in (0,1)$*, si cada* $\mathbb{D}^j$ *es una familia de subconjuntos abiertos* Q *de* X*, a los que denominaremos cubos diádicos de* $\mathbb{D}$*, tal que:*

1) para todo $j \in \mathbb{Z}$ *los cubos en* $\mathbb{D}^j$ *son disjuntos dos a dos;*

2) para todo $j \in \mathbb{Z}$ *la familia* $\mathbb{D}^j$ *cubre casi todo* X*, esto es,* $\mu\left(X \setminus \bigcup_{Q\in\mathbb{D}^j} Q\right) = 0$*;*

3) si $Q \in \mathbb{D}^j$ *y* $i < j$*, entonces existe un único* $Q' \in \mathbb{D}^i$ *tal que* $Q \subseteq Q'$*;*

4) si $Q \in \mathbb{D}^j$ *y* $Q' \in \mathbb{D}^i$*, con* $i \leq j$*, entonces, o bien* $Q \subseteq Q'$*, o bien* $Q \cap Q' = \emptyset$*;*

5) existen dos constantes finitas $a_1, a_2 > 0$*, tales que para cada* $j \in \mathbb{Z}$ *y cada* $Q \in \mathbb{D}^j$ *se tiene que*

$$a_1\delta^j \leq r_i(Q) \;\; y \;\; r_e(Q) \leq a_2\delta^j,$$

donde r_i *y* r_e *designan, respectivamente, los radios interior y exterior del cubo* Q*, dados por*

$$r_i(Q) = \sup\{r > 0 \;/\; B_d(x,r) \subseteq Q \text{ para algún } x \in Q\},$$

y

$$r_e(Q) = \inf\{r > 0 \;/\; Q \subseteq B_d(x,r) \text{ para algún } x \in X\}.$$

EJEMPLO 1.53. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, dotado de la métrica usual $\|x - y\|$ y la medida de Lebesgue n-dimensional . Para cada $j \in \mathbb{Z}$ y $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ definimos*

$$Q_{j,k} := \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i + 1}{2^j} \right)$$

y $\mathbb{D}^j := \{Q_{j,k} \ : \ k \in \mathbb{Z}^n\}$. Claramente cada familia $\mathbb{D}^j$ satisface las condiciones $1)$, $2)$, $3)$ y $4)$ de la definición anterior. Por otra parte si consideramos

$$x_{j,k} = \frac{1}{2^j} \left(k_1 + \frac{1}{2}, ..., k_n + \frac{1}{2} \right),$$

tenemos que

$$B_2 \left(x_{j,k}, \frac{1}{2^{j+1}} \right) \subseteq Q_{j,k} \subseteq B_2 \left(x_{j,k}, \frac{\sqrt{n}}{2^{j+1}} \right),$$

por lo cual, con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = \frac{\sqrt{n}}{2}$ se satisface la condición $5)$ con $\delta = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 1.54. *Como ejemplo particular del caso anterior podemos considerar una familia diádica en un espacio acotado. Sea $X = [0, 1]^n$, el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^n$ equipado con la métrica usual y la medida de Lebesgue n-dimensional restringidas a X. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ con $j \leq 0$ definimos $\mathbb{D}^j := \{X\}$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$ con $j > 0$, $C_{j,k} := X \cap Q_{j,k}$, donde $Q_{j,k}$ son los cubos definidos en el ejemplo anterior y $\mathbb{D}^j := \{C_{j,k} \ : \ k \in \mathbb{Z}^n\}$. Al igual que el caso anterior esta familia diádica satisface la condición $5)$ con $\delta = \frac{1}{2}$.*

EJEMPLO 1.55. *Sea $X = \mathbb{Z}$, dotado de la distancia usual en $\mathbb{R}$ y la medida de contar puntos. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 0$ definimos $\mathbb{D}^j := \{\{k\} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$,con $j < 0$, y $k \in \mathbb{Z}$ definimos*

$$S_{j,k} := \left\{ z \in \mathbb{Z} : \frac{k}{2^j} \leq z < \frac{k + 1}{2^j} \right\},$$

y consideramos $\mathbb{D}^j := \{S_{j,k} \ : k \in \mathbb{Z}\}$. Esta familia diádica satisface la condición $5)$ para $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$ y $\delta = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 1.56. *Sea $X = \mathbb{Z} \cup [0, \frac{1}{2})$ equipado con la distancia usual en $\mathbb{R}$ y la medida*

$$\mu(E) := \#(E \cap \mathbb{Z}^*) + 2|E \cap [0, 1/2)|,$$

donde $\#$ designa el cardinal del conjunto, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue 1-dimensional. Sea $I_{j,k} = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)$, cubos diádicos dados por el Ejemplo (1.53) para el caso $n = 1$ y defínase

$$D_{j,k} := I_{j,k} \cap X$$

y $\mathbb{D}^j := \{D_{j,k} \ : k \in \mathbb{Z}\}$. Esta familia diádica también satisface $5)$ con $\delta = \frac{1}{2}$. En particular $\mathbb{D}^0 = \mathbb{D}^1$ y $\mathbb{D}^j \neq \mathbb{D}^{j+1}$ para todo $j \neq 0$. Además algunas regiones del espacio poseen resolución *ilimitada mientras que otras regiones se reducen a puntos para valores de j suficientemente grandes.*

EJEMPLO 1.57. *Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y la medida de Lebesgue 2-dimensional. Sea $V = (0,1)^2$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}^2$ definimos*

$$V_{j,k} := \left(A^{-1}\right)^j (V + k)$$

y consideramos

$$\mathbb{D}^j := \left\{V_{j,k} \ : \ k \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Notemos que para $j = 0$, cada conjunto $V_{0,k}$ coincide con los cubos $Q_{0,k}$ del Ejemplo (1.53) para $n = 2$.

Puede demostrarse que esta familia $\mathbb{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}^j$ no satisface la condición 5) para ningún $\delta > 0$ utilizando la métrica euclídea. Para resolver este problema debemos utilizar la métrica parabólica dada por el Ejemplo (1.43). Efectivamente, puede verse que cada $V_{j,k}$ es una bola de radio $\frac{1}{2^{j+1}}$ respecto de la métrica

$$\rho(x,y) = \max_{j=1,2} |x_j - y_j|^{1/\alpha_j},$$

con $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$. Por lo tanto $\mathbb{D}$ forma una familia diádica para $\delta = \frac{1}{2}$ sobre el espacio $(\mathbb{R}^2, \rho, |\cdot|)$, donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue 2-dimensional.

El siguiente resultado demuestra la existencia de familias diádicas sobre cualquier espacio de tipo homogéneo. En la sección siguiente detallamos la bibliografía utilizada.

TEOREMA 1.58. *Dado (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, existe una colección de conjuntos abiertos en X, $\left\{Q_k^j \,;\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathcal{K}_j\right\}$, donde $\mathcal{K}_j \subseteq \mathbb{N}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y existen constantes $0 < \delta < 1$, $A_0, A_1, \eta > 0$, tales que:*

1) para cada $j \in \mathbb{Z}$: $\mu\left(X \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{K}_j} Q_\alpha^j\right) = 0$;

2) si $l \geq j$ entonces, o bien $Q_k^j \cap Q_m^l = \varnothing$ o bien $Q_k^j \subseteq Q_m^l$, cualesquiera sean $k \in \mathcal{K}_j$, $m \in \mathcal{K}_l$;

3) para cada $j \in \mathbb{Z}$,$k \in \mathcal{K}_j$, y cada $l < j$ existe un único m tal que $Q_k^j \subseteq Q_m^l$;

4) para todo $j \in \mathbb{Z}$,$k \in \mathcal{K}_j$ existe $x_k^j \in Q_k^j$ tal que $B\left(x_k^j, A_0\delta^j\right) \subseteq Q_k^j \subseteq B\left(x_k^j, A_1\delta^j\right)$;

5) para todo $j \in \mathbb{Z}$,$k \in \mathcal{K}_j$ y todo $t > 0$: $\mu\left(\left\{x \in Q_k^j : dist_d\left(x, X \setminus Q_k^j\right) \leq t\delta^j\right\}\right) \lesssim t^\eta \mu\left(Q_k^j\right)$.

6. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Sección 1. El Teorema 1.6 se debe a Dorina Mitrea, Irina Mitrea, Marius Mitrea y Sylvie Monniaux, y puede encontrarse en [MMMM13] (Teorema 3.46). Este resultado es el corolario de una gran cantidad de trabajos publicados a lo largo de ochenta años que han desarrollado técnicas que, por una parte, permitieron encontrar métricas que definan topologías equivalentes a la dada por una cuasimétrica en particular, y por otra parte, también permitieron optimizar el valor de potencia que posibilita articular la equivalencia entre la métrica y la cuasimétrica. Esto, como se ha visto en la primera sección, es de fundamental importancia para entender qué grado de regularidad Hölder puede hallarse entre las funciones continuas definidas sobre un espacio cuasimétrico. En [MS79b] (Teorema 2) Roberto Macías y Carlos Segovia demostraron una primera versión de este resultado: esto es, que siempre es posible encontrar una métrica que sea equivalente, salvo una potencia, a la cuasimétrica dada. Más aún, con este resultado logran construir funciones de suavidad Hölder sobre espacios de tipo homogéneo. En concreto, demostraron que, dada una cuasimétrica sobre un conjunto X, existe una métrica ρ, una constante finita C y un número $0<\gamma<1$, tales que la cuasimétrica dada por $d':=\rho^{1/\gamma}$ satisface, en primer lugar, que $d'\approx d$; y en segundo lugar, que para todo $x,y,z\in X$ y todo $r>0$, $|d'(x,z)-d'(z,y)|\leq Cr^{1-\gamma}[d'(x,y)]^{\gamma}$, siempre que $d'(x,z),d'(y,z)<r$. Además, las bolas correspondientes a la cuasi-distancia d' son conjuntos abiertos en la topología inducida por d. En la demostración de este resultado, se puede obtener

$$\gamma=\frac{1}{\log_2\left[C_d\left(2C_d+1\right)\right]}, \tag{1.9}$$

que es algo mejor que la utilizada por Macías y Segovia: $\gamma=\frac{1}{\log_2\left[3C_d^2\right]}$, constante más pequeña. Recordemos que este valor de constante γ representa, de alguna manera, una cota superior de regularidad de funciones. Por ejemplo, si consideramos $f(x):=d'(x,z)$, para algún punto fijo $z\in X$, el resultado de Macías y Segovia permite demostrar la existencia de funciones Hölder de regularidad β para cada $0<\beta\leq\gamma$ con $\gamma=\frac{1}{\log_2[C_d(2C_d+1)]}$. Por otra parte, si consideramos el caso euclídeo $X=\mathbb{R}^n$ y d la métrica usual, sabemos que existen funciones de clase Hölder de orden β, para todo $\beta\in(0,1]$; pero si tenemos en cuenta (1.9) y que, en este caso, la constante C_d toma el valor $C_d=2$, obtenemos como cota superior de regularidad el valor $\gamma=\frac{1}{1+\log_2 5}$, el cual es evidente que no es un valor óptimo. Cabe mencionar, por otra parte, que en la construcción de la métrica ρ, Macías y Segovia utilizan teorías de metrización de uniformidades (o de espacios uniformes), introducidos por André Weil en 1937. Y es por esa misma época que A.H. Frink introduce una técnica explícita de construcción de una métrica que evita el uso de estas teorías. Dicha técnica es reutilizada en [AIN98] para refinar su construcción y mejorar los valores de regularidad. A pesar de ello el valor de la constante γ detallado es el mismo que el encontrado por Macías y Segovia. Huelga decir, y cabe hacer la salvedad en el terreno de la suposición, que la optimización de esta constante nunca fuera considerada por dichos autores como problemática fundamental, y que de esto se derive la ausencia de propuestas de técnicas más complejas que permitan refinarla. De aquí la importancia de los resultados de [MMMM13] y

[PS09]: no sólo por el simple hecho de resaltar dicha problemática de optimización del valor γ, por diferenciar, axiomatizar, definir y analizar las distintas clases de índices que surgen y que permiten entender la clase de regularidad de funciones que un espacio puede determinar; sino también por introducirla en un contexto teórico puramente algebraico, como lo es la teoría de grupoides.

En lo que respecta a la Proposición 1.15 presentamos a continuación una demostración simplificada utilizando los razonamientos expuestos en [MMMM13]. Demostración Proposición 1.15:

i) Si ρ es una métrica tal que $\rho \approx d^{\alpha}$ entonces se tiene que

$$C_d = \left(C_{\rho^{1/\alpha}}\right) = \sup_{\substack{x,y,z\in X \\ no\ todos\ iguales}} \frac{\rho^{1/\alpha}(x,y)}{máx\left\{\rho^{1/\alpha}(x,z), \rho^{1/\alpha}(z,y)\right\}} = \left(C_\rho\right)^{1/\alpha} \leq 2^{1/\alpha},$$

por lo cual $\alpha \leq \frac{1}{\log_2 C_d} \leq ind\,(X,\rho)$ y $Cv\,(X,\rho) \leq ind\,(X,\rho)$. Por otra parte, si $\gamma = \frac{1}{\log_2 C_d}$ entonces $\rho := (d_\gamma)^{\gamma}$ es métrica y $\rho \approx d^{\gamma}$. Esto es, $\frac{1}{\log_2 C_d} \in \{\alpha > 0 \,/\, \exists \rho, métrica,\ d^{\alpha} \approx \rho\}$ y $\frac{1}{\log_2 C_d} \leq Cv\,(X,\rho)$, por lo cual $ind\,(X,\rho) \leq Cv\,(X,\rho)$.

ii) Recordar que si $\gamma = \frac{1}{\log_2 C_\rho}$ entonces $\frac{1}{C_\rho^2}\rho \leq \rho_\gamma$. Luego, para probar la igualdad demostraremos las inclusiones

$$\{\alpha > 0 : \exists \text{ métrica} \rho \,/ \rho \approx d^{\alpha}\} \subseteq \left\{\alpha > 0 \,/\, \inf_{x,y\in X} \left(\frac{d_\alpha(x,y)}{d(x,y)}\right) > 0\right\}, \tag{1.10}$$

$$\left\{\alpha > 0 \,/\, \inf_{x,y\in X} \left(\frac{d_\alpha(x,y)}{d(x,y)}\right) > 0\right\} \subseteq \{\alpha > 0 \,/ d_\alpha \approx d\}, \tag{1.11}$$

y

$$\{\alpha > 0 \,/ d_\alpha \approx d\} \subseteq \{\alpha > 0 : \exists \text{ métrica} \rho \,/\, \rho \approx d^{\alpha}\}. \tag{1.12}$$

Sea ρ métrica tal que $\rho \approx d^{\alpha}$, para algún $\alpha > 0$. Sea $D \geq 1$ una constante tal que $\frac{1}{D}d^{\alpha} \leq \rho \leq Dd^{\alpha}$. Luego, dado un conjunto de puntos $z_1, \ldots, z_{n+1} \in X$ tal que $z_1 = x$ y $z_{n+1} = y$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum d\left(z_i, z_{i+1}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} &\geq \frac{1}{D^{1/\alpha}}\left(\sum \rho\left(z_i, z_{i+1}\right)\right)^{1/\alpha} \\ &\geq \frac{1}{D^{1/\alpha}}\rho(x,y)^{1/\alpha} \geq \frac{1}{D^{2/\alpha}} d(x,y). \end{aligned}$$

Luego $d_\alpha(x,y) \geq \frac{1}{C^{2/\alpha}} d(x,y)$, y $\inf_{x,y\in X}\left(\frac{d_\alpha(x,y)}{d(x,y)}\right) > 0$, lo cual demuestra (1.10). Para la segunda inclusión, sea $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{d_\alpha(x,y)}{d(x,y)} \geq C > 0,$$

entonces $d_\alpha(x,y) \geq Cd(x,y)$, y teniendo en mente que $d \geq d_\alpha$ para cualquier $\alpha > 0$, se deduce que $d \approx d_\alpha$, lo cual demuestra (1.11). Por último, si $d \approx d_\alpha$ para algún $\alpha > 0$, entonces como d_α es α-subaditiva se tiene que $\rho := (d_\alpha)^{\alpha}$ es métrica equivalente a d^{α}. Esto prueba (1.12). Para culminar la demostración de ii), considérese $\beta \in \{\alpha > 0 \,/ d_\alpha \approx d\}$ fijo. Sea $\gamma \leq \beta$ arbitrario. Entonces $d \leq d_\beta \leq d_\gamma$ y $d_\gamma \approx d$. Esto es $(0,\beta) \subseteq \{\alpha > 0 \,/ d_\alpha \approx d\}$.

iii) Veamos en primer lugar que

$$\{\alpha > 0/d_{\alpha} \equiv 0\} \subseteq \left\{\alpha > 0 \,/\, \mathcal{C}^{0,\alpha}(X,d) = \mathbb{R}\right\}.$$

Sea $I := \acute{\imath}nf\,\{\alpha > 0 : d_{\alpha} \equiv 0\}$. Como $\beta \leq \alpha$ implica que $d_{\alpha} \leq d_{\beta}$, se sigue que $(I,\infty) \subseteq \{\alpha > 0/d_{\alpha} \equiv 0\}$. Sea, entonces, $\alpha > 0$ arbitrario tal que $I < \alpha$; esto es, tal que $d_{\alpha} \equiv 0$. Por reducción al absurdo supóngase que existe $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(X,d)$, y un par $x, y \in X$ con $f(x) \neq f(y)$. Consideremos $C := [f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(X,d)}$ y $\varepsilon := \left[\frac{|f(x)-f(y)|}{C}\right]^{1/\alpha}$. Sean $x_1, \ldots, x_{N+1} \in X$, con $x_1 = x$, $x_{N+1} = y$, entonces

$$C\varepsilon^{\alpha} = |f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq \sum_{i=1}^{N-1} Cd\left(x_i, x_{i+1}\right)^{\alpha},$$

esto es,

$$\varepsilon \leq \left(\sum_{i=1}^{N-1} d\left(x_i, x_{i+1}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha},$$

por lo cual existen $x, y \in X$ tales que $d_{\alpha}(x,y) > 0$. Esto contradice el hecho que $d_{\alpha} \equiv 0$. Por lo tanto, $ind_H(X,d) \leq I$. Finalmente, veamos que

$$(0, ind_0(X,d)) \subseteq \left\{\alpha > 0 \,/\, \mathcal{C}^{0,\alpha}(X,d) \neq \mathbb{R}\right\}. \tag{1.13}$$

Sea $0 < \alpha < ind_0(X,d)$. Para algún par $x, y \in X$ tenemos que $d_{\alpha}(x,y) > 0$. Definamos

$$f(z) := (d_{\alpha}(z,y))^{\alpha}.$$

Es claro que f no es constante. Como d_{α} es α-subaditiva (o, equivalentemente, como $(d_{\alpha})^{\alpha}$ es 1-subaditiva) y $0 \leq d_{\alpha} \leq d$ entonces

$$|f(z) - f(w)| \leq |(d_{\alpha}(z,y))^{\alpha} - (d_{\alpha}(w,y))^{\alpha}| \leq (d_{\alpha}(z,w))^{\alpha} \leq (d(z,w))^{\alpha},$$

esto es, $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{(X,d)}$. Gracias a (1.13) podemos deducir que

$$ind_0(X,d) \leq \sup\left\{\gamma \in (0,\infty) : \mathcal{C}^{0,\gamma}_{(X)} \neq \mathbb{C}\right\} = ind_H(X,d).$$

iv) Finalmente, veamos que

$$ind\,(X,d) \leq \acute{\imath}nf\,\{\alpha > 0 : d_{\alpha} \equiv 0\}.$$

Obsérvese que si d no es la cuasimétrica trivial nula, entonces

$$\{\alpha > 0 : d_{\alpha} \approx d\} \subseteq \{\alpha > 0 : d_{\alpha} \not\equiv 0\},$$

donde dicha inclusión es invariante por cuasimétricas equivalentes. Esto es, si q, q' son cuasimétricas tales que $q \approx q' \approx d$ entonces tenemos que

$$\{\alpha > 0 : q_{\alpha} \approx q\} \subseteq \left\{\alpha > 0 : \left(q'\right)_{\alpha} \not\equiv 0\right\}.$$

Luego, como

$$(0, ind\,(X,d)) \subseteq \{\alpha > 0 : d_\alpha \approx d\}\,,$$

se deduce que

$$ind\,(X,d) \leq \sup\{\alpha > 0 : d_\alpha \not\equiv 0\} \leq \acute{\imath}nf\,\{\alpha > 0 : d_\alpha \equiv 0\} = ind_H\,(X,d)\,.$$

Esto culmina la demostración. Estos índices, introducidos en la Definición 1.8, se deben a Dorina Mitrea, Irina Mitrea, Marius Mitrea y Sylvie Monniaux; entre otros. Para más detalles respecto de sus propiedades remitimos a los libros [MMMM13] y [AM15]. La demostración del Lema 1.19 puede verse en [MMMM13], Corolario 4.36, página 205.

Sección 2. De los resultados más importantes que aprecian la génesis del concepto de dimensión de Assouad se encuentra el de la existencia de homeomorfismos bi-Lipschitz con subcojuntos de $\mathbb{R}^n$como ilustra el teorema de inmersión debido, efectivamente, a Patrice Assouad y desarrollado en [Ass83]. Éste resultado asegura que, dado un espacio cuasimétrico (X,d) , la finitud $\dim_A(X,d) < \infty$ es equivalente a la siguiente propiedad: para todo $\beta \in (0, ind\,(X,d))$ existe $n \in \mathbb{N}$, una cuasimétrica $d' \approx d$ y una aplicación bi-Lipschitz, $\psi : (X,d') \to (\mathbb{R}^n, \rho)$, donde $\rho(x,y) = |x-y|^{1/\beta}$ y $|\cdot|$ denota la distancia usual de $\mathbb{R}^n$. En particular (X,d') es bi-Lipschitz homeomorfo a (Y,ρ) con $Y = \psi(X) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Por otra parte, el hecho que la existencia de una medida duplicante sobre un espacio métrico garantice la propiedad de homogeneidad débil fue demostrado por Ronald Coifman y Guido Weiss en [CW71]. En dicho trabajo también expusieron el problema de vital importancia de determinar bajo qué condiciones un espacio métrico puede dotarse de una medida boreliana duplicante. Recordemos que, por lo observado en la sección 4, sobre el espacio métrico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ con la métrica heredada de $\mathbb{R}$, por ser numerable y estar formado exclusivamente por puntos de acumulación, no puede definirse ninguna medida duplicante sobre el mismo, a excepción de la medida trivial nula. Se atisba entonces en este ejemplo el papel que juega la completitud del espacio para la definición de medidas duplicantes no triviales. En [VK87] A.L. Vol'berg y S.V. Konyagin demuestran que, en el caso de espacios métricos compactos, la condición de finitud de dimensión de Assouad (lo que ellos denominan uniform metric dimension) es condición no sólo necesaria sino también suficiente para la existencia de medida duplicante. Más aún, utilizando medidas s-homogéneas introducen una noción de dimensión de un espacio métrico equivalente a la dimensión de Assouad. En efecto, definen la dimensión de Vol'berg-Konyagin (siguiendo la nomenclatura y notación de Luukkainen y Saksman en [LS98]) como

$$\dim_{VK}(X,d) := \acute{\imath}nf\,\{s \geq 0 : (X,d) \text{ posee medida } s\text{-homogénea}\}\,.$$

Obsérvese que inmediatamente surge que la existencia de medida duplicante sobre un espacio métrico equivale a la finitud de su dimensión de Vol'berg-Konyagin. También, por lo visto en el Lema (1.33) se tiene que $\dim_A(X,d) \leq \dim_{VK}(X,d)$. En [VK87] demuestran, como primer resultado de interés, que si (X,ρ) es espacio métrico compacto y s-homogéneo (en sentido métrico) entonces para cada $t > s$ existe una medida

t-homogenea sobre X. Más aún $\dim_A(X,d) = \dim_{VK}(X,d)$ y la desigualdad $t > s$ es estricta: existe un espacio métrico compacto s-homogéneo en sentido métrico que no posee ninguna medida s-homogénea. También demuestran que todo subespacio compacto de $\mathbb{R}^n$ con la métrica inducida es n-homogéneo. Posteriormente, en [**Wu98**], Jang-Mei Wu simplifica y mejora la construcción realizada por Vol´berg y Konyagin. Demuestra además que dado un espacio métrico compacto y un $\alpha > 0$ existe una medida duplicante completamente soportada en un conjunto con medida de Hausdorff, de orden α, nula. Por último, en [**LS98**] , Jouni Lukkainen y Eero Saksman, extienden el resultado de Vol'berg y Konyagin a espacios métricos completos. En concreto, muestran que en los resultados de [**VK87**] citados puede reemplazarse la hipótesis de compacidad por la de completitud.

Sección 3. Los espacios de tipo homogéneo (*espaces de nature homogènes*) fueron introducidos por Ronald Coifman, Guido Weiss y Miguel de Guzmán ([**CW71**], [**CdG71**]), a fin de extender estimaciones (acotaciones) de integrales singulares de $\mathbb{R}^n$, estudiadas por Antoni Zygmund y Alberto Calderón en [**CZ52**], a estructuras métricas más generales. En dicho artículo inauguran una de las técnicas más influyentes del análisis armónico: la descomposición de Calderón-Zygmund. Haciendo uso de la estructura de cubos diádicos sobre $\mathbb{R}^n$, descomponen una función arbitraria integrable en una parte no localizada aunque acotada, y en otra parte localizada, de media nula, posiblemente oscilante y no necesariamente acotada. Dicha técnica, unida a los lemas de cubrimiento de solapamiento controlado, estilo Vitali, les permiten demostrar desigualdades de tipo débil y tipo fuerte tanto para los operadores de truncado de los núcleos singulares, como para el operador de maximal de Hardy-Littewood. De la influencia e importancia de este artículo no será sorprendente que en las iniciativas posteriores de generalización se encuentren dos grandes estrategias tanto contrapuestas como complementarias: por un lado la construcción y uso de estructuras diádicas (reflejado en los trabajos de Guy y Christ en [**Chr90**] y [**Dav91**]); y por otra parte el perfeccionamiento de lemas de cubrimiento que permitan controlar los solapamientos (Lemas de tipo Vitali, Wiener y Whitney). Dicho control sobre el solapamiento de entornos deriva en una petición de control de la dispersión que la métrica (o cuasi-métrica) imprime sobre el conjunto; petición de importancia para la axiomatización de la homogeneidad, como lo demostraron Coifman, Weiss y de Guzmán. Éstos axiomatizan, reformulan y visibilizan varias de las ideas y técnicas de los trabajos de Calderón (entre otros autores), y lograr así darle un contexto general adecuado para extender la teoría de Calderón y Zygmund. Lo más interesante es que dicho contexto se ha propiciado de una riqueza tal que con el tiempo ha permitido prescindir de la estructura algebraica subyacente que lo soportaba. Prescindiendo de estructuras diádicas, basan su extensión en la propiedad de homogeneidad sobre estructuras métricas, las cuales restrinjan (esto es, que mantengan acotada) la dispersión de los puntos del conjunto (lo que en este trabajo denominamos *propiedad de homogeneidad débil*). Junto a esta propiedad y al uso de medidas duplicantes, logran extender los lemas de cubrimiento de Wiener y Whitney, y con estos dos lemas, extender la tecnica de descomposición de Calderón y Zygmund, así como las acotaciones de la maximal de Hardy Littlewood.

Cabe, por último, hacer un par de salvedades en lo que respecta a la definición de espacio de tipo homogéneo. En la primer definición de esta clase de espacios dada por Coifman y Weiss, en [CW71], se requiere que la medida duplicante sobre el espacio sea boreliana, ya que sólo trabajaron sobre espacios métricos. Hipótesis suficiente para evitar problemas de definición ya que la familia de bolas abiertas de una métrica son, efectivamente, miembros de la topología; algo que, como vimos, no es necesariamente cierta para el caso cuasimétrico. En [Aim] se propone la definición siguiente: Una terna (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo si (X, d) es un espacio cuasimétrico y μ una medida definida sobre una σ-álgebra M que satisface: o bien $\mathcal{V}_d \subseteq M$ y μ satisface la condición de duplicación (1.3) sobre $\mathcal{V}_d$; o bien μ es boreliana y existe una cuasimétrica $\varrho \approx d$ tal que las bolas de $\mathcal{V}_\varrho$ son abiertas y μ satisface la condición de duplicación (1.3) sobre $\mathcal{V}_\varrho$. En dicho trabajo se demuestra, a su vez, que si sobre un espacio cuasimétrico (X, d) existe una métrica ρ tal que $\rho^\beta \approx d$, para algún $\beta > 0$, entonces toda medida μ, duplicante sobre $\mathcal{V}_\rho$, debe ser boreliana. Cabe entonces notar la ventaja de la definición utilizada en este trabajo (debida a [MMMM13] y [AM15]) en la cual no sólo no se requiere la hipótesis de borelianeidad, sino que también simplifica la definición anterior. Por otra parte, ya que la importancia de una medida duplicante sobre el espacio radica en asegurar la propiedad de homogeneidad débil, en [Aim] Hugo Aimar establece los requisitos mínimos que una función $2^X \to [0, \infty]$ debe satisfacer para asegurar la propiedad de homogeneidad débil. En efecto, demuestra que dado un espacio cuasimétrico (X, d), si existe una una función $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$, no negativa, definida sobre el conjunto de partes de X, tal que $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$, para cada $A, B \in 2^X$; tal que $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ para todo $A, B \subseteq X$ con $d(A, B) > 0$; y tal que si $A \subseteq B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, entonces, si μ^*es duplicante sobre la familia de bolas de la cuasimétrica d, el espacio (X, d) satisface la propiedad de homogeneidad débil.

En lo que respecta a las métricas parabólicas, cabe mencionar que esta clase de métricas surgen como una tentativa de extensión de los métodos de análisis de Calderón y Zygmund asociados a operadores integrales singulares. Sea A una matriz $n \times n$ a valores reales. Dado $\lambda > 0$ definimos la transformación $T_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como $T_\lambda(x) := e^{A \ln \lambda} x$. Teniendo en mente el caso $A = I$, la matriz identidad, uno puede ver a T_λ como una dilatación generalizada. A partir de estas transformaciones uno puede definir una noción de homogeneidad sobre funciones k de $\mathbb{R}^n$ del siguiente modo

$$k(T_\lambda x) = \frac{1}{\lambda^{trA}} k(x)$$

que recupera la noción de homogeneidad usual cuando A es una matriz diagonal. Para estudiar la clase de operadores integrales singulares asociados a esta clase de núcleos se procede a truncarlos de un modo adecuado. Para ello se utiliza la métrica parabolica, métrica invariante por traslaciones ρ que se comporta respecto de T_λ del mismo modo que la métrica euclídea se comporta con las dilataciones; esto es, $\rho(T_\lambda x) = \lambda \rho(x)$. Para ver un análisis detallado de la introducción y el uso de estas métricas véase a Miguel de Guzmán en [dG81].

Sección 4. La demostración de lo enunciado en el Ejemplo 1.50 puede verse en [**Mos97**]. La Proposición 1.51 se debe a Roberto Macías y Carlos Segovia y puede encontrarse en [**MS79b**] (Teorema 3).

Sección 5. El Teorema 1.58 se debe a Michael Christ y puede encontrarse su demostración en [**Chr90**] (Teorema 11 página 7). Una construcción alternativa se debe a Guy David y puede encontrase en el Apéndice de su libro [**Dav91**]. Los ejemplos descritos se deben a Hugo Aimar, Ana Bernardis y Luis Nowak y están desarrollados en [**ABN11**].

CAPíTULO 2

Aspectos de análisis funcional

Detallaremos este capítulo en dos secciones que refieren a aspectos clásicos del análisis funcional. Por una parte haremos un repaso del análisis espectral de operadores compactos que nos será de ayuda más adelante; y por otra parte, daremos una breve introducción al estudio de formas bilineales no acotadas y al modo de representarlas vía operadores lineales.

1. Análisis espectral de operadores compactos

Dado $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ espacio de Hilbert, decimos que un operador lineal $T : H \to H$, con dominio $Dom\,(T) = H$, es compacto si la clausura de la imagen de bola unitaria $\overline{T\,(B\,[0,1])}$ es un conjunto compacto, donde $B\,[0,1] = \{x \in H : \|x\|_H \leq 1\}$. De modo equivalente, T es compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la sucesión imagen $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee alguna subsucesión convergente.

Recordemos que los operadores compactos aplican sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes. Y en lo que a este trabajo importa, lo más relevante de los operadores compactos se debe a la caracterización de su espectro. Recordemos que un operador lineal $T : H \to H$, con dominio $Dom\,(T) = H$, es autoadjunto si es simétrico, esto es, si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, para todo $x, y \in H$. Los operadores compactos autoadjuntos presentan un espectro real y discreto, el cual posee, exceptuando el caso finito-dimensional, un único punto de acumulación; y a su vez, salvo el 0, dicho espectro está conformado estrictamente por autovalores. Por otra parte, es de suma importancia la caracterización de sus autovectores, los cuales pueden escogerse de modo tal que minimicen lo que se denomina Cociente de Rayleigh asociado a T,

$$\mathcal{R}_T\,(x) := \frac{\langle Tx, x\rangle_H}{\|x\|_H^2}.$$

Recuérdese brevemente que se define como espectro $\sigma\,(T)$ de un operador T al complemento en $\mathbb{C}$ del conjunto resolvente $\rho\,(T)$ el cual está dado por

$$\rho\,(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\ /\ (T - \lambda I) \text{ es biyección de } H \text{ en } H\}.$$

Lo que caracteriza a los operadores compactos autoadjuntos es que, salvo el valor 0, el espectro $\sigma(T)$ está formado exclusivamente por autovalores. Repasamos esta caracterización en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Sea $T : H \to H$ operador compacto autoadjunto. Entonces, el espectro $\sigma(T)$ de T está dado por $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, donde $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ forma el conjunto de autovalores, se satisface*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n| \geq ...$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

y cada autovalor posee multiplicidad finita. Además existe una base ortonormal $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H formada por los autovectores correspondientes, $Tz_n = \lambda_n z_n$, los cuales se caracterizan por maximizar los cocientes de Rayleigh

$$\mathcal{R}_T(z_1) = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|_H=1}} \langle Tx, x\rangle_H = \sup_{x\in H} \mathcal{R}_T(x),$$

y

$$\mathcal{R}_T(z_{n+1}) = \sup_{\substack{x\in M_n\\ \|x\|_H=1}} \langle Tx, x\rangle_H = \sup_{x\in M_n} \mathcal{R}_T(x),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, donde

$$M_n = \{w \in H \ / \ \forall i = 1, ..., n \ : \langle w, z_i\rangle_H = 0\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la continuidad y autoadjunción de T tenemos que $\langle Tx, x\rangle_H \in \mathbb{R}$ y

$$\sup_{\|x\|_H=1} |\langle Tx, x\rangle_H| = \|T\|.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\sup\limits_{\|x\|_H=1} \langle Tx, x\rangle_H = \|T\|$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en H tal que $\|x_n\|_H = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = \|T\|$. Como la bola unitaria cerrada en un espacio de Hilbert es compacta respecto de la topología débil, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a $z \in H$. Reindexando la sucesión en caso necesario podemos suponer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a z. Por ser T compacto, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a Tz, de lo cual se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = \langle Tz, z\rangle = \|T\|.$$

Veamos que z maximiza el cociente de Rayleigh

$$\mathcal{R}_T(z) = \max_{x\in H} \frac{\langle Tx, x\rangle_H}{\|x\|_H^2}.$$

Para esto, basta ver que $\|z\|_H = 1$. En efecto, por ser límite débil de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\|z\|_H \leq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|_H \leq 1.$$

Por otra parte, como $z \neq 0$, si suponemos que $\|z\|_H < 1$ y denotamos $z' = \frac{z}{\|z\|_H}$, tenemos que

$$\langle Tz', z' \rangle_H = \frac{\langle Tz, z \rangle_H}{\|z\|_H^2} > \langle Tz, z \rangle_H = \sup_{\|x\|_H = 1} \langle Tx, x \rangle .$$

Esta contradicción muestra que $\|z\|_H = 1$ y, por lo tanto

$$\mathcal{R}_T(z) = \langle Tz, z \rangle_H = \max_{\|x\|_H=1} \langle Tx, x \rangle = \max_{x\in H} \frac{\langle Tx, x \rangle_H}{\|x\|_H^2}.$$

Veamos que efectivamente z es un autovector de T. Para eso consideremos la función

$$\varphi(t) := \mathcal{R}_T(z+tw) = \frac{\langle Tz, z \rangle_H + 2t\left(\operatorname{Re}\langle Tz, w \rangle_H\right) + t^2 \langle Tw, w \rangle_H}{1 + 2t\left(\operatorname{Re}\langle z, w \rangle_H\right) + t^2 \|w\|_H^2},$$

para $t \in \mathbb{R}$ y $w \in H$. Como φ alcanza un máximo en $t = 0$ tenemos que $\varphi'(0) = 0$ esto es

$$\begin{aligned}
0 &= \mathit{lím}_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \\
&= \mathit{lím}_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{2t\left(\operatorname{Re}\langle Tz, w \rangle_H\right) + t^2 \langle Tw, w \rangle_H - 2t \langle Tz, z \rangle_H \left(\operatorname{Re}\langle z, w \rangle_H\right) - t^2 \|w\|_H^2 \langle Tz, z \rangle_H}{\|z+tw\|_H^2} \right) \\
&= 2\left(\operatorname{Re}\langle Tz, w \rangle_H\right) - 2\langle Tz, z \rangle_H \left(\operatorname{Re}\langle z, w \rangle_H\right),
\end{aligned}$$

por lo cual, $\operatorname{Re}\langle Tz - \langle Tz, z \rangle_H z, w \rangle_H = 0$ para $w \in H$ arbitrario. Luego $Tz - \langle Tz, z \rangle_H z = 0$. Esto nos indica que z es autovector de T con autovalor $\langle Tz, z \rangle_H = \|T\|$. Para encontrar el resto del espectro de T, denotemos por z_1 al autovector de T asociado al autovalor λ_1, donde $|\lambda_1| = \|T\|$. Si $M_1 := \{w \in H \ / \ \langle w, z_1 \rangle_H = 0\}$ entonces, por autoadjunción de T, tenemos que

$$T(M_1) \subseteq M_1,$$

por lo cual, la restricción $T_1 = T|_{M_1}$ es un operador compacto de M_1 en M_1 y autoadjunto. Aplicando el mismo razonamiento anterior a esta restricción podemos encontrar $z_2 \in M_1$ tal que

$$\|z_2\|_H = 1 \ ; \quad |\langle T_1 z_2, z_2 \rangle_H| = \sup_{\substack{x\in M_1 \\ \|x\|_H=1}} \langle T_1 x, x \rangle = \|T_1\|$$

y

$$T_1 z_2 = \lambda_2 z_2,$$

donde $|\lambda_2| = \|T_1\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$. Inductivamente, una vez obtenidos n autovectores $z_1, ..., z_n$ con autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, consideramos

$$M_n := \{w \in H \ / \ \forall i = 1, ..., n \ : \langle w, z_i \rangle_H = 0\} \ \text{ y } \ T_n = T|_{M_n}$$

y encontramos $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ y $z_{n+1} \in M_n$ tales que$\|z_{n+1}\|_H = 1$,

$$|\langle T_n z_{n+1}, z_{n+1} \rangle_H| = \sup_{\substack{x \in M_n \\ \|x\|_H = 1}} \langle T_n x, x \rangle = \|T_n\|,$$

y $T_n z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_{n+1}$, de lo cual se sigue que $|\lambda_{n+1}| = \|T_n\| \leq \|T_{n-1}\| = |\lambda_n|$. Como H posee dimensión infinita, este proceso determina un sistema ortonormal de autovectores $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con autovalores asociados $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots$. Además $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. De otro modo, la sucesión $\left(\frac{1}{\lambda_n} z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ resultaría acotada y $\left(T\left(\frac{1}{\lambda_n} z_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poseería subsucesión convergente, lo cual es imposible, ya que, debido a la ortonormalidad $\|z_n - z_m\|_H^2 = 2$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. De modo similar puede demostrarse la multiplicidad finita de cada autovalor. En efecto, si suponemos que para algún λ_m, la dimensión del núcleo $N(\lambda_m I - T)$ es infinita, podemos encontrar una sucesión de autovectores $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{1}{\lambda} z_{n_k}\right\|_H = \frac{1}{\lambda} \; ; \; T\left(\frac{1}{\lambda} z_{n_k}\right) = z_{n_k},$$

con lo cual se llega a una contradicción similar a la señalada en el párrafo anterior. Veamos finalmente que la lista es exhaustiva. Dado $x \in H$, sea

$$x_n := x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, z_j \rangle_H z_j.$$

Entonces $x_n \in M_n$ y $Tx_n \in M_n$. Luego

$$\|Tx_n\|_H = \|T_n x_n\|_H \leq \|T_n\| \|x_n\|_H = |\lambda_{n+1}| \|x_n\|_H .$$

A su vez,

$$\|x_n\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{j=1}^{n} \left|\langle x, z_j \rangle_H\right|^2 \leq \|x\|_H^2 ,$$

por lo cual,

$$\left\|Tx - \sum_{j=1}^{n} \langle x, z_j \rangle_H Tz_j\right\| = \|Tx_n\|_H \leq |\lambda_{n+1}| \|x\|_H \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, por lo tanto

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, z_j \rangle_H Tz_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, z_j \rangle_H z_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Tx, z_j \rangle_H z_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, Tz_j \rangle_H z_j$$

para cada $x \in H$. Finalmente si existiera $\lambda \notin \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ y una correspondiente autofunción z no nula ortogonal a todas las autofunciones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la completitud del sistema obligaría a que $z = 0$ lo cual es imposible. Esto culmina la demostración del teorema $\square$

OBSERVACIÓN 2.2. *Cabe señalar que si ψ es autovector asociado a un autovalor λ_N, con multiplicidad $m+1$, esto es $\lambda_N = \lambda_{N+1} = ... = \lambda_{N+m}$, entonces*

$$\psi \in gen \langle z_N, ..., z_{N+m} \rangle .$$

Para ver esto basta con descomponer

$$H = gen \langle z_N, ..., z_{N+m} \rangle \oplus (gen \langle z_N, ..., z_{N+m} \rangle)^{\perp} = V_1 \oplus V_2.$$

Sea entonces $\psi = \psi_1 + \psi_2$, con $\psi_i \in V_i$, $i = 1, 2$. Como $T\psi = \lambda_N \psi$, y $\psi_1 \perp \psi_2$ tenemos que

$$\langle T\psi, \psi \rangle_H = \lambda_N \langle \psi, \psi \rangle_H = \lambda_N \langle \psi_1, \psi_1 \rangle_H + \lambda_N \langle \psi_2, \psi_2 \rangle_H .$$

A su vez, obsérvese que $\psi_2 = \psi - \psi_1$ y que ψ_1 es combinación lineal finita de autofunciones de λ_N. Luego, ψ_2 debe ser también autofunción de λ_N, y

$$\langle T\psi, \psi \rangle_H = \lambda_N \langle \psi_1, \psi_1 \rangle_H + \langle T\psi_2, \psi_2 \rangle_H \tag{2.1}$$

Como vemos, ψ_2 es autofunción de λ_N, por lo cual es ortogonal a todos los autovectores $z_1, ..., z_{N-1}$; y ya que $\psi_2 \in (V_1)^{\perp}$ tenemos que

$$\psi_2 \in M_{N+m} = \{ w \in H \ / \ \forall i = 1, ..., N+m \ : \langle w, z_i \rangle_H = 0 \} .$$

Pero esto implica que $\psi_2 \equiv 0$. En efecto, si así no sucediera

$$\lambda_N = \lambda_{N+m} > \lambda_{N+m+1} = \sup_{\substack{x \in M_{N+m} \\ \|x\|_H = 1}} \frac{\langle Tx, x \rangle_H}{\|x\|_H^2} \geq \frac{\langle T\psi_2, \psi_2 \rangle_H}{\|\psi_2\|_H^2},$$

esto es,

$$\lambda_N \|\psi_2\|_H^2 > \langle T\psi_2, \psi_2 \rangle_H ,$$

y utilizando esto en (2.1)

$$\begin{aligned} \lambda_N \langle \psi, \psi \rangle_H &= \lambda_N \langle \psi_1, \psi_1 \rangle_H + \langle T\psi_2, \psi_2 \rangle_H \\ &< \lambda_N \|\psi_1\|_H^2 + \lambda_N \|\psi_2\|_H^2 = \lambda_N \langle \psi, \psi \rangle_H , \end{aligned}$$

ya que $\langle \psi_2, \psi_1 \rangle_H = 0$. Esta contradicción prueba que $\psi_2 \equiv 0$ y, por lo tanto, que $\psi \in gen \langle z_N, ..., z_{N+m} \rangle$.

2. Operadores y formas bilineales

En esta sección introduciremos nociones generales de formas bilineales sobre espacios de Hilbert. Si bien aplicaremos esta teoría a formas valuadas en $\mathbb{R}$, la describiremos del modo más amplio posible, y con el mínimo de extensión que creemos permisible, al trabajar con formas valuadas en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los número complejos.

Cuando nos referimos a operadores conviene pensar en un par de objetos: una aplicación lineal T y un subespacio $Dom\,(T)$, su dominio de definición, de un espacio de Hilbert H. Dados dos espacios vectoriales V_1, V_2, una forma bilineal $B : V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ es un función tal que $B\,(\cdot, v)$ es una aplicación lineal para cada $v \in V_2$ fijo y $B\,(u, \cdot)$ es una aplicación semilineal para cada $u \in V_1$ fijo; esto es $B\,(u, av + bw) = \overline{a}B\,(u, v) + \overline{b}B\,(u, w)$ y $B\,(au + bv, w) = aB\,(u, w) + bB\,(v, w)$, para cada $v, w \in V_2$ y $a, b \in \mathbb{C}$. Para el caso $V_1 = V_2$ denotaremos por $\mathcal{E}\,(u) := B\,(u, u)$ a la forma cuadrática asociada con $B\,(\cdot, \cdot)$,también denominada forma de energía. Recuérdese que una forma cuadratica $\mathcal{E}$ recupera una forma bilineal, para el caso complejo, vía las identidades,

$$\text{o bien } B\,(u, v) := \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \mathcal{E}\left(u + i^k v\right); \quad \text{o bien } \; B\,(u, v) := \frac{1}{2}\left(\mathcal{E}\,(u + v) - \mathcal{E}\,(u - v)\right),$$

según el caso complejo o real, respectivamente.

Dado un espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot, \cdot\rangle)$, estamos interesados en estudiar las formas bilineales que se definen a partir de operadores T no necesariamente acotados, de la forma

$$B\,(u, v) := \langle Tu, v\rangle \tag{2.2}$$

A su vez, también estamos interesados en entender el problema inverso: dada una forma bilineal B, bajo qué condiciones podemos definir un operador T que satisfaga la relación (2.2).

Un operador $T : H \to H$ con dominio $Dom\,(T) \subseteq H$ es cerrado si para toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Dom\,(T)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = \lim_{n\to\infty} \|Tu_n - v\| = 0$ para algún par $u, v \in H$, se satisface que $u \in Dom\,(T)$ y $Tu = v$. Aquí $\|\cdot\|$ designa la norma canónica heredada del producto interno $\langle\cdot, \cdot\rangle$.

Por otra parte se dice que T es un operador cerrable, si existe una extensión cerrada de T. Esto es, si existe un operador $\overline{T}$ cerrado tal que $Dom\,(T) \subseteq Dom\,(\overline{T})$ y $\overline{T}u = Tu$ para todo $u \in Dom\,(T)$. Denotaremos por $\overline{T}$ a la menor de todas las extensiones cerradas posibles. Podemos reformular la condición de cerrabilidad utilizando el gráfico de un operador. Se define el gráfico de un operador como

$$\Gamma_T := \{(x, Tx) \in H \times H : x \in Dom\,(T)\}.$$

Puede demostrarse que un operador T es cerrable si la clausura del gráfico de T coincide con el gráfico de un operador cerrado, esto es, si existe un operador $\overline{T}$ cerrado tal que $\overline{\Gamma_T} = \Gamma_{\overline{T}}$. A su vez puede deducirse de esta condición, gracias a la linealidad de $\overline{T}$, que un operador T es cerrable si y sólo si para cada sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Dom\,(T)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|Tu_n - v\| = 0$ implica que $v = 0$, esto es, T es cerrable si y sólo si ningún elemento de la forma $(0, v)$, con $v \neq 0$ es límite de elementos de la forma (u, Tu).

Dado un operador cerrado T y un operador S cerrable tal que $\overline{S} = T$ se dice que $Dom\,(S)$ es un *centro* (*core*) de T. En otras palabras, un subespacio V de $Dom\,(T)$ es un centro de T si el conjunto $\{(u, Tu) : u \in V\}$ es denso en Γ_T. De esto se deduce que es necesario, aunque no suficiente, que V sea denso en $Dom\,(T)$. Para definir la noción de operador adjunto, sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, y $T : H_1 \to H_2$ un operador no acotado densamente definido. Definimos $Dom\,(T^*)$ considerando aquellos $g \in H_2$ tales que existe $f \in H_1$ con la propiedad $\langle g, Tu\rangle_{H_2} = \langle f, u\rangle_{H_1}$, para todo $u \in Dom\,(T)$. Gracias a la densidad de $Dom\,(T)$ en H_1 puede demostrarse la unicidad de la función f, y así definir un operador $T^* : H_2 \to H_1$, denominado operador adjunto de T, tal que $T^*g = f$. Puede verse que T^*es un operador cerrado y que si S es un operador que satisface $\langle g, Tu\rangle_{H_2} = \langle Sg, u\rangle_{H_1}$para todo $u \in Dom\,(T)$ y todo $g \in Dom\,(S)$, entonces T^* es extensión de S. Más aún, si T es cerrable entonces T^*es cerrado , densamente definido y $T^{**} = \overline{T}$.

Por su parte, diremos que un operador $T : H \to H$ es simétrico si satisface $\langle Tu, v\rangle_H = \langle u, Tv\rangle_H$ para todo $u, v \in Dom\,(T)$.

Denotamos por $\Theta\,(T)$ al rango númerico del operador T el cual se define como

$$\Theta\,(T) := \{\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{C} : u \in Dom\,(T)\,,\ \|u\| = 1\}\,.$$

Se dice que un operador T es sectorial si existen $\zeta \in \mathbb{R}$ y $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tales que su rango numérico se encuentra en el semicono

$$\Theta\,(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |\arg\,(z - \zeta)| \leq \theta,\ \mathrm{Re}\,(z) \geq \zeta\}\,;$$

y diremos que T es m-sectorial, o maximal sectorial, si no posee extensión sectorial propia, es decir si ninguna extensión de T posee a $\Theta\,(T)$ como subconjunto propio. Obsérvese que si T es simétrico entonces $\Theta\,(T) \subseteq \mathbb{R}$, y si T es simétrico y sectorial entonces $\langle Tu, u\rangle \geq \zeta\,\|u\|^2$, para todo $u \in Dom\,(T)$. También, diremos que T es definido positivo si $\Theta\,(T) \subseteq [0, +\infty)$.

Todas estas consideraciones pueden trasladarse inmediatamente al contexto de formas bilineales. A fin de simplificar la exposición supondremos al dominio de B de la forma $Dom\,(B) = D_B \times D_B$, con $D_B \subseteq H$ subespacio vectorial. Diremos que B está densamente definida si D_B es denso en H. Por su parte, diremos que una forma B es simétrica si $B(u,v) = \overline{B(v,u)}$ para todo $u, v \in D_B$. Una forma bilineal B' es extensión de B si $Dom(B) \subseteq Dom(B')$ y $B(u,v) = B'(u,v)$ para todo par u, v en $Dom(B)$. Asimismo denotamos por $\Theta(B)$ al rango numérico, el cual se define como

$$\Theta(B) := \{\mathcal{E}(u) \in \mathbb{C} : u \in D_B,\ \|u\| = 1\}$$

y definimos como forma bilineal sectorial y m-sectorial de modo análogo al caso de operadores. Nuevamente, obsérvese que si B es forma bilineal sectorial entonces

$$\operatorname{Re} B(u,u) \geq \zeta \|u\|^2 \tag{2.3}$$

para todo $u \in D_B$, y que, si B es simétrica entonces $\Theta(B) \subseteq \mathbb{R}$. Decimos también que una forma bilineal B es cerrada si para toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D_B tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$ para algún $u \in H$ y tal que $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mathcal{E}(u_n - u_m) = 0$ se tiene que $u \in D_B$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n - u) = 0$. Diremos que una forma bilineal es cerrable, si posee extensión cerrada. Para el caso de formas bilineales sectoriales, puede demostrarse que una forma bilineal es cerrada si el espacio D_B dotado del producto interno

$$\langle u, v\rangle_B := \operatorname{Re} B(u,v) - \zeta \langle u, v\rangle$$

es un espacio de Hilbert, donde aquí ζ está dada por (2.3). Por último, dada una forma bilineal cerrada B decimos que un subespacio $V \subseteq D_B$ es un centro (core) de B si V es denso en el espacio de Hilbert $(D_B, \langle\cdot,\cdot\rangle_B)$.

Con las definiciones dadas estamos en condiciones de enunciar dos resultados de representación de formas bilineales mediante operadores.

TEOREMA 2.3. *(Primer teorema de representación).*

Sea B una forma bilineal, sectorial, cerrada y densamente definida. Entonces existe un operador m-sectorial T tal que:

i) $Dom(T) \subseteq D_B$ y

$$B(u,v) = \langle Tu, v\rangle,$$

para cada $u \in Dom(T)$ y cada $v \in D_B$;

ii) $Dom(T)$ es centro de B;

iii) si existe $u \in D_B$, $w \in H$ tales que

$$B(u,v) = \langle w, v\rangle$$

se cumple para toda v perteneciente a un centro de B, entonces $u \in Dom(T)$ y $Tu = w$;

iv) el operador m-sectorial T está biunivocamente determinado por la condición i); además T es autoadjunto si y sólo si B es simétrica.

Lo insatisfactorio, generalmente, del teorema anterior es que la representación $B(u,v) = \langle Tu, v\rangle$ no es válida para todo par $u, v \in D_B$. El siguiente teorema utiliza la raiz del operador T y la simetría de una forma bilineal para mejorar esta condición. Recuérdese que para todo operador m-sectorial existe un único operador $T^{1/2}$ m-sectorial, tal que $\left(T^{1/2}\right)^2 = T$, con $Dom\,(T)$ centro de $T^{1/2}$.

TEOREMA 2.4. *(Segundo teorema de representación).*

Sea B una forma bilineal, cerrada, simétrica, positiva y densamente definida. Existe un operador autoadjunto T tal que $Dom\left(T^{1/2}\right) = D_B$ y

$$B(u,v) = \left\langle T^{1/2}u, T^{1/2}v\right\rangle$$

para todo $u, v \in D_B$. Además un subconjunto $V \subseteq D_B$ es centro de B si y sólo si es centro de $T^{1/2}$.

3. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Sección 1. Si bien existe una gran variedad de bibliografía en lo que concierne al estudio de operadores compactos (variedad bibliográfica de una dimensión tal que la torna inasible al conocimiento) caben destacar los libros de Kosaku Yosida [Yos95], Haim Brezis [Bre11], Michael Reed y Barry Simon [RS78]; libros cuya lectura ha inspirado la construcción de este capítulo. Para un estudio detallado e histórico acerca de la génesis del análisis espectral de los operadores compactos, análisis histórico que, creemos, escapa a lo tratado en este trabajo, recomendamos las lecturas del artículo [Ste76] de Lynn Steen, y de los libros [Die81] y [Mon73], de Jean Dieudonné y Antonie Frans Monna, respectivamente.

Sección 2. Para profundizar los conceptos vertidos en esta sección recomendamos el libro [Kat95] de Tosio Kato. Cabe mencionar que el hecho de considerar operadores como un par función-dominio nace de la naturaleza misma del laplaciano euclídeo Δ: si bien este operador está definido de un modo preciso en el espacio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, para algún subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, posee diferentes realizaciones como operador de $L^2(\Omega)$. En efecto, notemos que $-\Delta$ es operador cerrado si consideramos $Dom\,(-\Delta) := H^2(\mathbb{R}^n)$, donde aquí $H^2(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Sobolev clásico (véase Sección 1 del Capítulo 4), pero no es cerrado con $Dom\,(-\Delta) := \left\{f \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right) \;/\; f \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega\right\}$. En la sección final del Capítulo 8 detallaremos estas peculiaridades en lo que respecta al laplaciano fraccionario. Por otra parte, el hecho de trabajar con formas bilineales de la forma $B(u,v) = \langle Tu, v\rangle$, para algún operador T, advierte e insinúa las técnicas que emergen en torno a los problemas de tipo Dirichlet: el teorema de Lax-Milgram y el teorema de representación de Riesz para determinar existencia de soluciones débiles, así como las técnicas de estimación de soluciones que conciernen a los métodos de elementos finitos. En efecto, recordemos que problemas del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u(x)\right) + \left\langle \vec{b}(x), \nabla u(x)\right\rangle + c(x)\,u(x) = f(x), & \text{para } x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad \text{para } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

por indicar un ejemplo, pueden reformularse de modo débil en la forma

(2.4) $$B(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2} \text{ para toda } v \in H$$

para una forma bilineal B adecuada y un espacio de Hilbert H específico. Bajo condiciones de coercitividad y continuidad de la forma bilineal, uno puede aproximar las soluciones de (2.4) haciendo uso de una sucesión $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subespacios $V_k \subseteq H$ tales que $\dim V_k = k$, $V_k \subseteq V_{k+1}$ y $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k} = H$. En efecto, se sabe que si u es solución de (2.4) y u_k solución de

(2.5) $$B(u_k,v) = \langle f, v\rangle_{L^2} \text{ para toda } v \in V_k$$

entonces

$$\|u - u_k\| \leq C \inf_{v\in V_k} \|u - v\|$$

donde la constante C depende únicamente de las constantes de coercitividad y continuidad de B. Más aún, haciendo uso de bases de Hamel sobre cada V_k, el problema (2.5) se puede reducir a un problema matricial del tipo $Ax = b$, con A la matriz de Gram de la base respectiva y el producto interno B, y b el vector de los coeficientes de f en el desarrollo de dicha base. Por otra parte, el uso de formas bilineales del tipo $B(u,v) = \langle Tu, v\rangle$ también permite dar una formulación débil a los problemas de autovalores. Por ejemplo, el problema de determinar los pares λ, u tales que

$$\begin{cases} Tu := -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = \lambda u \text{ para } x \in \Omega \\ u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

puede reformularse de la siguiente manera

(2.6) $$B(u,v) = \lambda\langle u, v\rangle_{L^2} \text{ para toda } v \in H$$

para alguna forma bilineal B y algún espacio de Hilbert H, específicos. Esta formulación débil permite realizar estimaciones del espectro gracias al uso de los cocientes de Rayleigh. Como veremos en el Capítulo 8, es posible deducir dos principios (denominamos principios de Courant y Fisher, o Principios Min-Max) que caracterizan dicho espectro optimizando dichos cocientes sobre subespacios de dimensión finita. Uno de dichos principios establece que, bajo ciertas hipótesis sobre la forma bilineal B, el espectro de (2.6) es discreto y está caracterizado por

$$\lambda_k = \min_{\substack{V\prec H\\ \dim V = k}} \max_{u\in V} \frac{B(u,u)}{\langle u, u\rangle_{L^2}}$$

donde el mínimo se considera sobre todos los subespacios V de H de dimensión k. Esta caracterización permite realizar estimaciones interesantes del espectro, de modo semejante a los utilizados en los métodos de elementos finitos para estimar soluciones. En efecto, si consideramos un subespacio $W \subseteq H$ con $\dim W := m$, y definimos

$$\beta_k := \min_{\substack{V\prec W\\ \dim V = k}} \max_{u\in V} \frac{B(u,u)}{\langle u, u\rangle_{L^2}}$$

entonces, es claro que $\lambda_k \leq \beta_k$ para cada $k = 1, ..., m$. Más aún, para calcular los β_k podemos hacer uso de una base de Hamel $\{\phi_j\}_{1\leq j\leq m}$de W y considerar las matrices de Gram

$$E := \left[B\left(\phi_i, \phi_j\right)\right]_{1\leq i,j\leq m}, F := \left[\left\langle\phi_i, \phi_j\right\rangle_{L^2}\right]_{1\leq i,j\leq m}.$$

No es muy difícil probar que, efectivamente, los valores de β_k coinciden con los autovalores de la matriz $F^{-1}E$. Este método de estimación es conocido como el método Rayleigh-Ritz y funciona tanto mejor cuanto más pequeño sea el valor de k en comparación con el valor de dimensión m. Aunque no ahondaremos en este trabajo en los métodos de elementos finitos, gran parte de las ideas que los fundamentan confluirán o se harán visibles en el desarrollo de nuestro análisis. Para más detalles acerca de la aplicación de estos métodos para el estudio del espectro del laplaciano fraccionario en contexto euclídeo recomendamos los trabajos [AB17], [ABH19], de Gabriel Acosta y Juan Pablo Borthagaray, entre otros.

CAPíTULO 3

Operadores de Hardy-Littlewood y de Calderón-Zygmund sobre espacios de tipo homogéneo

Este capítulo consta de tres secciones en las cuales tratamos, a grandes rasgos, dos clases de operadores: por un lado el operador maximal de Hardy-Littlewood y, por otro lado, los operadores de Calderón-Zygmund. En la primera sección introducimos el primero de estos operadores, así como también describimos su rol fundamental en el análisis: el teorema de diferenciación de Lebesgue, el cual exponemos en el contexto de espacios de tipo homogéneo. La segunda sección repasa el concepto de integral de Bochner, un concepto de integral que se aplica a funciones valuadas en espacios de Banach arbitrarios, y que hemos introducido en este capítulo a fin de articular mejor la lectura. En este sentido, la tercera y última sección introduce los operadores de Calderón-Zygmund en contexto euclídeo y su generalización a espacios de tipo homogéneo y a contextos de funciones valuadas en espacios de Banach a través de la integral de Bochner.

1. Maximal de Hardy-Littlewood y teorema de diferenciación

Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, para cada $p \in (0, \infty]$ definimos

$$L^p(X,\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \;/\; f \text{ es } \mathcal{M}\text{-medible y } \|f\|_{L^p(X,\mu)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu_x \right)^{1/p},$$

para $0 < p < \infty$, y

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} := \sup_{x\in X} es \, |f(x)| = \text{ínf} \left\{ \alpha > 0 \;/\; \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\}\right) = 0 \right\}.$$

Recordemos que $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$ define una norma para el caso $p \in [1, \infty]$ y que $d(f, g) := \|f - g\|^p_{L^p(X,\mu)}$ define una métrica para el caso $p \in (0, 1]$.

También definimos los espacios débiles L^p como

$$L^{p,\infty}(X,\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \;/\; f \text{ es } \mathcal{M}\text{-medible y } \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right)^{1/p},$$

para $0 < p < \infty$ y

$$L^{\infty,\infty}(X,\mu) := L^{\infty}(X,\mu).$$

A su vez, si existe sobre X una cuasi-métrica d cuyas bolas son $\mathcal{M}$-medibles definimos los L^p locales, denotados $L^p_{loc}(X,\mu)$, como el espacio de funciones f $\mathcal{M}$-medibles tales que cada restricción $\mathbf{1}_{B_d(x,r)}f$ pertenece a $L^p(X,\mu)$ para cada $x \in X$ y cada $r > 0$. Por último sobre un espacio métrico con medida (X,d,μ), el espacio $L^p_c(X,\mu)$ designa a las funciones de $L^p(X,\mu)$ con soporte acotado. Entendemos el soporte de una función de $f \in L^p(X,\mu)$ como el complemento de la unión de todos los abiertos $V_i \subseteq X$, $i \in I$, para algún conjunto de índices arbitrario, tales que $f \equiv 0$ en μ-casi todo punto de V_i. Esto es $sop(f) = X \setminus \left(\underset{i\in I}{\cup} V_i\right)$.

Dado (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo en el cual las bolas de la familia $\mathcal{V}_d$ son medibles y dada $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood centrado como

$$M_d f(x) := \sup_{0<r<\infty} ⨍_{B_d(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y) \tag{3.1}$$

donde $⨍_A$ denota el promedio

$$⨍_A |f(y)|\, d\mu(y) := \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(y)|\, d\mu(y)$$

OBSERVACIÓN 3.1. *Si ϱ es cuasimétrica equivalente a d y las ϱ bolas son μ-medibles entonces $M_d f(x) \approx M_\varrho f(x)$ uniformemente para toda $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ y todo $x \in X$.*

Para la siguiente proposición haremos uso de la regularización $d_\#$ de la cuasimétrica d, la cual fue indicada en la Observación 1.7. La ventaja de esta cuasimétrica es que permite asegurar la medibilidad del operador maximal.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea (X,d,μ) espacio de tipo homogéneo.*

1) Para toda $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ la función $M_{d_\#} f$ está bien definida y es μ-medible.

2) El operador maximal

$$M_{d_\#} : L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu) \ , \quad 1 < p \leq \infty$$

$$M_{d_\#} : L^1(X,\mu) \to L^{1,\infty}(X,\mu)$$

está bien definido, es sublineal y acotado; cuyas normas de operador

$$\left\| M_{d_\#} \right\|_{L^p \to L^p} := \sup_{\|f\|_{L^p(X,\mu)}=1} \left\| M_{d_\#} f \right\|_{L^p(X,\mu)},$$

$$\left\| M_{d_\#} \right\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} := \sup_{\|f\|_{L^1(X,\mu)}=1} \left\| M_{d_\#} f \right\|_{L^{1,\infty}(X,\mu)},$$

sólo dependen de p y de constantes geométricas (dadas por μ y d).

3) Para cada $1 \leq p \leq \infty$ y cada $f \in L^p(X,\mu)$ la función $M_{d_\#}f$ es finita en μ-casi todo punto.

En lo siguiente queremos caracterizar para qué clases de medidas μ borelianas es posible extender el teorema de diferenciación de Lebesgue, esto es, si para toda función $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ se tiene que

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{B_{d_\#}(x,r)} f(y)\, d\mu(y) = f(x)$$

para μ-casi todo $x \in X$. Esta caracterización también nos será de utilidad para establecer resultados de densidad de las funciones de Hölder en los espacios de funciones integrables. Recordemos que una medida μ definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ se dice Borel-regular sobre (X,d), si es boreliana y para cada $E \in \mathcal{M}$ existe un boreliano $B \supseteq E$ tal que $\mu(B) = \mu(E)$. La siguiente condición más débil será de utilidad para la caracterización del Teorema 3.4.

DEFINICIÓN 3.3. *Sea (X,d) un espacio cuasimétrico. Una medida μ definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ se dice Borel-semiregular sobre (X,d), si es boreliana y para cada $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$ existe un boreliano B tal que $\mu(E \triangle B) = 0$, donde $E \triangle B := (E \setminus B) \cup (B \setminus E)$.*

Es claro que toda medida Borel-regular es Borel-semiregular. Más aún, puede probarse que una medida es Borel-semiregular si para cada medible $E \in \mathcal{M}$ la característica $\mathbf{1}_E$ es limite puntual de una sucesión de funciones borelianas.

Antes de enunciar el siguiente teorema, cabe mencionar que la notación $\beta \precsim ind(X,d)$ indica que $\beta < ind(X,d)$ y que en caso de que exista una cuasimétrica $\rho \approx d$ tal que $\frac{1}{\log_2 C_\rho} = ind(X,d)$, esto es, se alcanza el supremo de $ind(X,d)$, entonces $\beta = ind(X,d)$. En la sección final se detallan las referencias de las cuales se extrae esta notación. Por otra parte, el espacio $\mathcal{C}^{0,\gamma}_c(X,d)$ denota al espacios de funciones $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)$ con soporte acotado, y análogamente $\mathcal{C}_c(X,d)$ denota el espacio de funciones continuas con soporte acotado.

TEOREMA 3.4. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y $d_\#$ la cuasimétrica indicada en la Observación 1.7. Sea ρ cuasimétrica equivalente a d y sea $\tau_d = \tau_\rho$ la topología generada por éstas. Son equivalentes:*

1) la medida μ es Borel-semiregular en (X,τ_d);

2) para toda $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ se tiene que

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{B_{d_\#}(x,r)} |f(x) - f(y)|\, d\mu(y) = 0$$

para μ-casi todo $x \in X$;

3) para toda $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ se tiene que

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{B_{d_\#}(x,r)} f(y)\, d\mu(y) = f(x)$$

para μ-casi todo $x \in X$;

4) para algún (o para todo) $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \beta \precsim ind(X,d)$ se tiene que la inmersión

$$\mathcal{C}^{0,\beta}_c(X,d) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$$

es continua y densa para algún (o para todo) $p \in (0,\infty)$;

5) para algún (o para todo) $p \in (0,\infty)$ se tiene que la inmersión

$$\mathcal{C}_c(X,d) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$$

es continua y densa.

2. Integral de Bochner

En esta sección introducimos brevemente una noción de integración para funciones valuadas en un espacio de Banach.

En lo siguiente, $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ denota un espacio de Banach y $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida. La idea es definir una noción de integración de funciones $F : E \to \mathbb{B}$, integral que denotaremos $\int_E F(x)\, d\mu(x)$, que satisfaga las siguientes propiedades

$$\phi\left[\int_E F(x)\, d\mu(x)\right] = \int_E \phi[F(x)]\, d\mu(x), \tag{3.2}$$

para todo $\phi \in \mathbb{B}^*$, donde $\mathbb{B}^*$denota el espacio de funcionales lineales continuos de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{C}$; y

$$\left\|\int_E F(x)\, d\mu(x)\right\| \leq \int_E \|F(x)\|\, d\mu(x). \tag{3.3}$$

Para ello se procede de modo similar a lo que ocurre con la integral de Lebesgue para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. En primer lugar, se define la integral para funciones simples. En este contexto una función $F : E \to \mathbb{B}$ se dice $\mathbb{B}$-simple si es de la forma

$$F = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbf{1}_{B_j},$$

para $c_1, ..., c_N \in \mathbb{B}$, donde $\mathbf{1}_{B_j}$ es la función característica del conjunto $B_j \subseteq E$, y $\{B_j\}_{1\leq j\leq N}$ una familia disjunta de conjuntos $\mathcal{M}$-medibles y de medida finita. En este caso se define

$$\int_E F(x)\, d\mu(x) := \sum_{j=1}^{N} c_j \mu(B_j).$$

Obsérvese que para toda función F, $\mathbb{B}$-simple, se satisface (3.3) y (3.2). En segundo lugar se define la integral para funciones arbitrarias que sean límite, en algún sentido, de funciones $\mathbb{B}$-simples. Para esto se requiere una noción de medibilidad de funciones $\mathbb{B}$-valuadas afín a la buena definición de la integral.

DEFINICIÓN 3.5. *Se dice que una función $F : E \to \mathbb{B}$ es fuertemente $\mathcal{M}$-medible si existe una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $\mathbb{B}$-simples que satisface $\lim_{n\to\infty} \|F(x) - F_n(x)\| = 0$, para μ-casi todo $x \in E$.*

Por otra parte, el siguiente teorema de Pettis caracteriza esta clase de funciones.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea $F : (E, \mathcal{M}, \mu) \to (\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, entonces F es fuertemente $\mathcal{M}$-medible si y sólo si:*

i) para toda $\phi \in \mathbb{B}^*$ la aplicación $x \mapsto \phi[F(x)]$ es $\mathcal{M}$-medible;

ii) existe $E_0 \subseteq E$ tal que $\mu(E \setminus E_0) = 0$ y $F(E_0)$ es separable en $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$.

De esta Proposición se desprende que, si $F : E \to \mathbb{B}$ es fuertemente $\mathcal{M}$-medible, la aplicación $x \mapsto \|F(x)\|$ es $\mathcal{M}$-medible.

DEFINICIÓN 3.7. *Se dice que una función $F : E \to \mathbb{B}$ fuertemente $\mathcal{M}$-medible es Bochner μ-integrable si existe una sucesión de funciones $\mathbb{B}$-simples $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \|F(x) - F_n(x)\| \, d\mu(x) = 0.$$

Teniendo en cuenta la definición anterior, podemos demostrar que la sucesión

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\int_E F_n(x) \, d\mu(x) \right)_{n\in\mathbb{N}},$$

es sucesión de Cauchy en $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$. En efecto

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\| &= \left\| \int_E (F_n(x) - F_m(x)) \, d\mu(x) \right\| \\
&\leq \int_E \|F_n(x) - F_m(x)\| \, d\mu(x) \\
&\leq \int_E \|F_n(x) - F(x)\| \, d\mu(x) + \int_E \|F(x) - F_m(x)\| \, d\mu(x)
\end{aligned}$$

por lo cual $\lim_{n,m\to\infty} \left\| \int_E F_n(x) \, d\mu(x) - \int_E F_m(x) \, d\mu(x) \right\| = 0$. Esto nos permite dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.8. *Se define la integral de Bochner de una función $F : E \to \mathbb{B}$ Bochner μ-integrable, como el valor límite de $\left(\int_E F_n(x) \, d\mu(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, y se denota dicha integral como*

$$\int_E F(x) \, d\mu(x) \stackrel{\mathbb{B}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E F_n(x) \, d\mu(x).$$

PROPOSICIÓN 3.9. *(Criterio de integrabilidad).*

Una función $F : E \to \mathbb{B}$ fuertemente $\mathcal{M}$-medible es Bochner μ-integrable si y sólo si $x \mapsto \|F(x)\|$ es μ-integrable. Además, se satisface

$$\left\| \int_E F(x)\, d\mu(x) \right\| \leq \int_E \|F(x)\|\, d\mu(x),$$

y para toda $\phi \in \mathbb{B}^*$

$$\phi\left[\int_E F(x)\, d\mu(x)\right] = \int_E \phi[F(x)]\, d\mu(x).$$

Por último, gracias a estas nociones de integración podemos introducir los espacios L^p de funciones valuadas en un espacio de Banach. La estrategia es tener en cuenta la medibilidad de $x \mapsto \|F(x)\|$ para toda función fuertemente $\mathcal{M}$-medible. Definimos

$$\|F\|_{L^p(E,\mathbb{B})} := \left(\int_E \|F(x)\|^p\, d\mu_x\right)^{1/p}$$

para $0 < p < \infty$, y

$$\|F\|_{L^\infty(E,\mathbb{B})} := \sup_{x\in E} es \|F(x)\| = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \mu(\{x : \|F(x)\| > \alpha\}) = 0\}$$

Cabe notar que, al igual que en el caso de los espacios L^p clásicos, $\|\cdot\|_{L^p(E,\mathbb{B})}$ constituye una norma para $1 \leq p \leq \infty$.

Definimos, para $0 < p \leq \infty$, los espacios L^p de funciones valuadas en un espacio de Banach, como

$$L^p(E,\mathbb{B}) := \left\{F : E \to \mathbb{B} \;/\; F : \text{fuertemente } \mathcal{M}\text{-medible, y } \|F\|_{L^p(E,\mathbb{B})} < \infty\right\}$$

y en caso que exista una cuasimétrica d definida sobre el conjunto E, definimos los espacios L^p locales como

$$L^p_{loc}(E,\mathbb{B}) := \left\{ \begin{array}{c} F : E \to \mathbb{B} \;/\; F : \text{fuertemente } \mathcal{M}\text{-medible, y } \|\mathbf{1}_{B_d} F\|_{L^p(E,\mathbb{B})} < \infty \\ \text{para cada bola } B_d \end{array} \right\}$$

El siguiente resultado de densidad nos será de utilidad en lo siguiente

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $(E, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida σ-finito.*

i) El conjunto de funciones $\mathbb{B}$-simples es subespacio denso en $L^p(E,\mathbb{B})$ para $0 < p < \infty$.

ii) El conjunto

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathbf{1}_{B_j} : \{B_j\}_j \text{ medibles disjuntos, } E = \bigcup_j B_j\,,\ c_j \in \mathbb{B}\right\},$$

es denso en $L^\infty(E,\mathbb{B})$.

iii) Si μ es la medida de Lebesgue n-dimensional, entonces el conjunto

$$\left\{\sum_{j=1}^{N} c_j f_j : f \in \mathcal{C}_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right),\, c_j \in \mathbb{B}\right\},$$

es denso en $L^p\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}\right)$ para $1 \leq p < \infty$.

3. Operadores de Calderón-Zygmund

En lo que sigue $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ denota la clase de funciones de Schwartz y $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ la clase de distribuciones temperadas. Decimos que un operador lineal $T : \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ es un operador de Calderón-Zygmund si está asociado a un núcleo estándar $K \in SK\left(\delta, A\right)$ y posee extensión acotada de $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ en $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$. Al decir que el operador está asociado al nucleo $K \in SK\left(\delta, A\right)$ nos referimos a que existe una función $K \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \triangle\right)$, donde

$$\triangle := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;/\; x = y\right\},$$

y que existen dos constantes $A, \delta > 0$ tales que K satisface las siguientes condiciones.

1) Condición de tamaño:

$$\left|K\left(x, y\right)\right| \leq \frac{A}{\left|x - y\right|^n},$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \triangle$.

2) Condiciones de regularidad:

$$\left|K\left(x', y\right) - K\left(x, y\right)\right| \leq A\frac{\left|x - x'\right|^{\delta}}{\left|x - y\right|^{n+\delta}} \quad \text{si } \left|x - x'\right| \leq \frac{1}{2} máx\left\{\left|x - y\right|, \left|x' - y\right|\right\},$$

y

$$\left|K\left(x, y\right) - K\left(x, y'\right)\right| \leq A\frac{\left|y - y'\right|^{\delta}}{\left|x - y\right|^{n+\delta}} \quad \text{si } \left|y - y'\right| \leq \frac{1}{2} máx\left\{\left|x - y\right|, \left|x' - y\right|\right\},$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \triangle$.

3) Condición de representación: para toda $f \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y para todo $x \notin sop\left(f\right)$ se tiene que

$$\left(Tf\right)\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}^n} K\left(x, y\right) f\left(y\right) dy.$$

El teorema del Núcleo de Schwartz permite establecer la siguiente condición de representación más débil.

3*) Para todo par $f, g \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ tales que $sop\left(f\right) \cap sop\left(g\right) = \emptyset$ se tiene que

$$\left\langle Tf, g\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K\left(x, y\right) f\left(x\right) g\left(y\right) dx dy.$$

Como resultado fundamental de la teoría de operadores de Calderón-Zygmund tenemos la acotación débil $(1,1)$ y la acotación fuerte (p,p), para $1 < p < \infty$.

PROPOSICIÓN 3.11. *Si T es operador de Calderón-Zygmund entonces posee extensiones acotadas $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.*

La definición de esta clase de operadores puede generalizarse no sólo a contextos de espacios de tipo homogéneo, sino también a contextos de funciones valuadas en espacios de Banach, utilizando la integral de Bochner. Una de esta clase de generalizaciones consiste en utilizar núcleos K valuados en un espacio de operadores. Para ser más precisos, sean $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ dos espacios de Banach y sea $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ el espacio de los operadores lineales acotados de $\mathbb{B}_1$ en $\mathbb{B}_2$, normado con

$$\|L\|_{\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{B}_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_{\mathbb{B}_2}}{\|x\|_{\mathbb{B}_1}}.$$

Denotemos $\mathbb{B} = \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que $\mathcal{V}_d \subseteq \mathcal{M}$, donde $\mathcal{V}_d$ es la familia de d-bolas y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de definición de μ. Denotemos $\triangle := \{(x, y) \in X \times X \,/\, x = y\}$ y $E := X \times X \setminus \triangle$. Decimos que un núcleo $K : E \to \mathbb{B}$ tal que $K \in L^1_{loc}(E, \mathbb{B})$ satisface las *condiciones de Hörmander* si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{d(x,y) > 2d(y,z)} \|K(x, y) - K(x, z)\|_{\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2} \, d\mu(x) \leq C, \tag{3.4}$$

para todo $z, y \in X$, y

$$\int_{d(x,y) > 2d(x,w)} \|K(x, y) - K(w, y)\|_{\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2} \, d\mu(y) \leq C, \tag{3.5}$$

para todo $x, w \in X$. Para el caso de un espacio de tipo homogéneo Ahlfors regular de dimensión α existen dos condiciones denominadas *condiciones de regularidad* que implican las condiciones de Hörmander. En efecto decimos que un núcleo $K \in L^1_{loc}(E, \mathbb{B})$ satisface las condiciones de regularidad si existen constantes $C' > 0$, $\varepsilon > 0$ tales que

$$\|K(x, y) - K(w, y)\|_{\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2} \leq C' \frac{d(w, x)}{d(x, y)^{\alpha+\varepsilon}}$$

para $x, y, w \in \mathbb{B}$ con $2d(w, x) \leq d(x, y)$, y

$$\|K(x, y) - K(x, z)\|_{\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2} \leq C' \frac{d(y, z)}{d(x, y)^{\alpha+\varepsilon}}$$

para $x, y, w \in \mathbb{B}$ con $2d(y, z) \leq d(x, y)$. A su vez, decimos que dicho núcleo satisface la *condición de tamaño* si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|K(x, y)\|_{\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2} \leq \frac{C_0}{d(x, y)} \tag{3.6}$$

para todo $x, y \in X$.

El resultado que extiende la Proposición (3.11) a núcleos de $L^1_{loc}(E, \mathbb{B})$ es el siguiente.

PROPOSICIÓN 3.12. *Sea K un núcleo en $L^1_{loc}(E,\mathbb{B})$, donde $E = X \times X \setminus \triangle$ y $\mathbb{B} = \mathcal{L}(\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)$. Sea $T : L^r(X,\mathbb{B}_1) \to L^r(X,\mathbb{B}_2)$ un operador lineal acotado para algún $r \in (1,\infty]$, tal que para toda $F \in L^\infty(X,\mathbb{B}_1)$ con soporte compacto y todo $x \notin sop(F)$ se tiene que*

$$TF(x) = \int_X K(x,y)\, F(y)\, dy$$

como elemento de $\mathbb{B}_2$ y entendiendo la integral en el sentido de Bochner. Si K satisface la condición de tamaño (3.6) y las condiciones de Hörmander (3.4) y (3.5), entonces T posee extensiones acotadas $L^1(E,\mathbb{B}) \to L^{1,\infty}(E,\mathbb{B})$ y $L^p(E,\mathbb{B}) \to L^p(E,\mathbb{B})$ para cada $1 < p < \infty$.

Como último comentario cabe mencionar en qué contexto trabajaremos. Estaremos interesados en trabajar en el espacio de tipo homogéneo diádico $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$, espacio 1-Ahlfors regular, el cual analizaremos en el Capítulo 9. Trabajeremos a su vez en el espacio de sucesiones ℓ^2, esto es, el espacio de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$. Teniendo en cuenta la notación de la proposición anterior nos interesará trabajar con $\mathbb{B}_1 = \mathbb{R}$ y $\mathbb{B}_2 = \ell^2$. El uso de estos espacios permite identificar $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)$ con ℓ^2. En efecto, dado un operador lineal $\phi : \mathbb{R} \to \ell^2$ existe un operador traspuesto $\phi^* : \ell^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\langle \phi(x), \mathbf{x}\rangle_{\ell^2} = x\phi^*(\mathbf{x})$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \ell^2$. Haciendo uso del teorema de representación de Riesz sabemos que existe un único $\boldsymbol{\beta}_\phi \in \ell^2$ tal que $\phi^*(\mathbf{x}) = \left\langle \boldsymbol{\beta}_\phi, \mathbf{x}\right\rangle_{\ell^2}$. Esto permite deducir que $\langle \phi(x), \mathbf{x}\rangle_{\ell^2} = \left\langle x\boldsymbol{\beta}_\phi, \mathbf{x}\right\rangle_{\ell^2}$ para todo $\mathbf{x} \in \ell^2$; por lo cual todo operador lineal $\phi : \mathbb{R} \to \ell^2$ es de la forma $\phi(x) = x\boldsymbol{\beta}_\phi$ para un único $\boldsymbol{\beta}_\phi \in \ell^2$, lo cual permite identificar $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)$ con ℓ^2 vía $\phi \mapsto \boldsymbol{\beta}_\phi$. Por otra parte, haremos uso de las condiciones de regularidad en lugar de las condiciones de Hörmander asociadas al núcleo K, para el cual también consideraremos una condición de tamaño.

En vistas de estas consideraciones damos la siguiente definición la cual nos será de utilidad en el Capítulo 10.

DEFINICIÓN 3.13. *Decimos que un operador $T : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+,\ell^2)$ lineal acotado es un operador de Calderón-Zygmund ℓ^2-valuado si existe un núcleo $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \triangle, \ell^2)$, y existen constantes $C_0, C_1, \varepsilon > 0$, tales que satisfacen las siguientes condiciones:*

i) para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se satisface

$$\|\mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2} \leq \frac{C_0}{\delta(x,y)};$$

ii) para todo $x, x', y \in \mathbb{R}^+$ con $2\delta(x',x) \leq \delta(x,y)$ se satisface

$$\|\mathbf{K}(x',y) - \mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2} \leq C_1 \frac{\delta(x',x)}{\delta(x,y)^{1+\gamma}},$$

y para todo $x, y, y' \in \mathbb{R}^+$*con* $2\delta(y, y') \leq \delta(x, y)$ *se satisface*

$$\|\mathbf{K}(x, y') - \mathbf{K}(x, y)\|_{\ell^2} \leq C_1 \frac{\delta(y, y')}{\delta(x, y)^{1+\gamma}};$$

iii) existen subespacios densos $S \subseteq L^2(\mathbb{R}^+)$ *y* $\mathbb{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}^+, \ell^2)$*,*

$$\langle \mathbf{T}\varphi, \boldsymbol{\psi} \rangle_{L^2(\ell^2)} = \int\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \langle \mathbf{K}(x, y)\, \varphi(y), \boldsymbol{\psi}(x) \rangle_{\ell^2}\, dxdy,$$

para toda $\varphi \in S$ *y toda* $\psi \in \mathbb{S}$ *con* $\delta(sop(\varphi), sop(\boldsymbol{\psi})) > 0.$

4. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Sección 1. El desarrollo de la Proposición 3.2 como del Teorema 3.4 pueden encontrarse en [MMMM13] y en [AM15].

Sección 2. El desarrollo de la integral de Bochner que hemos presentado está basado en [Yos95]. Cabe menionar, siguiendo a Loukas Grafakos en [Gra14a], la importancia de dicha noción de integración asociada al estudio de operadores $(X, d, \mu) \to (\mathbb{B}, \|\cdot\|_B)$. A modo de motivación, dado un operador lineal T que satisfaga una desigualdad no lineal del siguiente tipo

$$\left\| \left(\sum_j |Tf_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p} \leq C \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p}, \tag{3.7}$$

si notamos $\mathbf{f} := (f_j)_j$, consideramos su norma en $L^p(\ell^q)$, esto es

$$\|\mathbf{f}\|_{L^p(\ell^q)} = \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p},$$

y definimos como $\mathbf{T}$ al operador $\mathbf{T}(\mathbf{f}) := (Tf_j)_j$, entonces, la desigualdad (3.7) puede reescribirse como

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{f})\|_{L^p(\ell^q)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^p(\ell^q)},$$

esto es, una desigualdad que asemeja no lineal para operadores $\mathbb{R}$-valuados, puede reescribirse como una desigualdad que asemeja lineal para operadores ℓ^q-valuados. Existe una gran cantidad de esta clase de operadores en la literatura del análisis armónico. Quizás los más importantes derivan de la maximal de Hardy-Littlewood, los operadores de Calderón-Zygmund y los operadores de Littlewood-Paley. A saber, si consideramos $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ a la sucesión de operadores de truncación dados por

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)\, dy,$$

entonces, el operador maximal $T^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)|$ puede ser reescrito utilizando un operador $\overline{T}$ que aplique a una función f,su sucesión de operadores truncados respectivos, esto es $\overline{T}(f) := (T_\varepsilon f)_{\varepsilon>0}$ lo que permite ver que

$$\left\|\overline{T} f(x)\right\|_{\ell^\infty} = T^* f(x) \quad \text{y} \quad \left\|\overline{T} f\right\|_{L^p(\ell^\infty)} = \|T^* f\|_{L^p}.$$

Por otra parte si consideramos ϕ una función suave radial decreciente, y definimos $\phi_t(x) := \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$ entonces el operador de Hardy-Littewood puede ser introducido de este modo

$$M_\phi f(x) := \sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \quad ; \quad M_\phi : f \mapsto (\phi_t * f)_{t>0}$$

Para más referencias acerca de este tema, y de sus aplicaciones, véase el capítulo 5, secciones 5 y 6, del libro [**Gra14a**] de Loukas Grafakos, y el capítulo 5 del libro [**GCRdF85**] de José García-Cuerva y José Luis Rubio de Francia.

Sección 3. Si bien hemos delineado un esbozo humilde de la teoría de operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund en la sección final del Capítulo 10, recomendamos la genealogía desarrollada por Yves Meyer y Ronald Coifman en el Capítulo 7 de [**YM97**]. Por otra parte, de los trabajos pioneros en lo que respecta al uso y acotación de operadores integrales singulares valuados en espacios de Banach, cabe destacar el artículo de Agnes Benedek, Alberto Calderón y Rafael Panzone, [**BCP62**] del año 1962. Sumados a los citados [**Gra14a**], [**Gra14b**] y [**GCRdF85**], cabe citar el artículo [**RdFRT86**] debido a José Luis Rubio de Francia, Francisco Ruiz y José Luis Torrea, en el cual no sólo establecen una teorema de acotación L^p para operadores integrales singulares (convolutivos o de núcleo variable) valuados en espacios de Banach, sino también para operadores maximales de tipo Hardy-Littlewood así como operadores de Littlewood-Paley. En el artículo [**Bla10**] de Oscar Blasco, también se demuestra la acotación de los conmutadores. En lo que respecta al estudio de estos operadores definidos sobre espacios de tipo homogéneo, la Proposición 3.12 es debida a Loukas Grafakos, Liguang Liu y Dachun Yang y puede encontrase en [**GLY09**].

Parte 2

Espacios de Sobolev en espacios métricos. Extensión, inmersión y compacidad

CAPÍTULO 4

Espacios de Sobolev

Introducimos en este capítulo los espacios de Sobolev de tipo fraccionario que serán centrales en toda la teoría espectral de los capítulos venideros. La primera sección contiene un repaso del caso euclídeo desde la perspectiva métrica de $\mathbb{R}^n$, en particular sus propiedades elementales y su relación con los espacios de Besov. La segunda sección aborda su extensión a contextos de espacios de tipo homogéneo, en particular en espacios de Ahlfors.

1. Espacios de Sobolev en contexto euclídeo

Entre las características y propiedades más importantes que poseen las funciones, y que atañen a los problemas de ecuaciones diferenciales, se encuentran la regularidad y la oscilación. Del universo innumerable de espacios que se introducen para medir dichas características destacamos los espacios de Hölder, ya mencionados en el primer capítulo, los espacios de Sobolev y los espacios de Besov.

Los espacios de Sobolev pueden introducirse de un modo abstracto utilizando la siguiente estrategia de construcción. Supongamos que tenemos dos espacios de Hilbert, H, V; donde el espacio V está inmerso con continuidad en el espacio de las distribuciones de $\mathbb{R}^n$, esto es, $V \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, y que poseemos también un operador lineal acotado $L : H \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces, si definimos el espacio

$$W := \{f \in H : Lf \in V\},$$

y el producto interno

$$\langle f, g \rangle_W := \langle f, g \rangle_H + \langle Lf, Lg \rangle_V,$$

entonces puede demostrarse que $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ es un espacio de Hilbert, con inmersión continua $W \hookrightarrow H$ y tal que el operador restricción $L|_W$ es continuo de W en V.

El operador L a utilizar, por antonomasia, es el operador de derivación parcial ∂^α, para cierta clase de multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Por ejemplo, si consideramos $L = \nabla$ el operador gradiente, $H = L^2(\Omega)$, para algún subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y $V = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, obtenemos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, esto es, el espacio de funciones de $L^2(\Omega)$ cuya primeras derivadas son funciones de $L^2(\Omega)$. Esto es

$$H^1(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \ / \ \nabla f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\},$$

dotado del producto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} := \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} .$$

Obsérvese que $\langle \nabla f, \nabla f \rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega |\nabla f(x)|^2 \, dx$, es el funcional de Energía o seminorma de Dirichlet. Recordemos la importancia de este funcional y del principio homónimo. A grandes rasgos, una función resuelve $-\Delta u = f$ sobre Ω, con dato de borde $u = g$ en $\partial\Omega$ si y sólo si minimiza $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx - \langle u, f \rangle_{L^2(\Omega)}$ sobre un espacio de funciones suaves con el mismo dato de borde. Como veremos más adelante, gran parte de estas ideas serán utilizadas en este trabajo para introducir una nueva clase de espacios de Sobolev, en un espacio métrico con medida, mediante una nueva noción de gradiente.

Claramente no es necesario ceñirse a los espacios de Hilbert y pueden introducirse espacios de Sobolev más generales. Para $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ y un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se define el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como el conjunto de las funciones $f \in L^p(\Omega)$ que admiten derivadas débiles $\partial^\alpha f$ en $L^p(\Omega)$ para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, con $1 \leq |\alpha| \leq m$, dotado de la norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} , \tag{4.1}$$

donde aquí $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Si denotamos $\nabla^k f$ al vector cuyas componentes son las derivadas $\partial^\alpha f$, para $|\alpha| = k$, entonces, una norma equivalente a (4.1) está dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k=1}^{m} \left\| \nabla^k f \right\|_{L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^{M_k}\right)} ,$$

donde $M_k = \#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \ / \ |\alpha| = k\}$. Por su parte, para el caso $m = 2$, el espacio $W^{m,2}(\Omega)$, denotado también $H^m(\Omega)$ resulta espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Como consecuencia inmediata de la definición de estas normas, es claro que $u \in W^{m,p}(\Omega)$, si el gradiente ∇u pertenece a $W^{m-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Esto es, no sólo $W^{m,p}(\Omega)$ es una clase de espacios cerrada respecto de los operadores de derivación, sino que también lo es de un modo continuo.

Por otra parte, sabemos que es posible extender las definiciones anteriores para valores m no necesariamente enteros. Esta clase de espacios de Sobolev fraccionarios surgen de modo natural al analizar los operadores de traza de funciones de $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ sobre el semi-hiperespacio $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_n > 0\}$.

Dado $0 < s < 1$, y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, se definen los espacios de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, de la siguiente manera

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{n/p+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Equipado con la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p_{(\Omega)}} + \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{1/p},$$

resulta espacio de Banach. El segundo término

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{1/p}$$

es conocido como seminorma de *Aronszajn, Gagliardo* o *Slobodeckij.*

Cabe observar que, en el caso que $\Omega = \mathbb{R}^n$, así como ocurre con los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, para $m \in \mathbb{N}$, el espacio $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ también es denso en $\left(W^{s,p}_{(\mathbb{R}^n)}, \|\cdot\|_{W^{s,p}_{(\mathbb{R}^n)}}\right)$. Por otra parte, la restricción $0 < s < 1$ evita la inclusión de clases triviales. Por mencionar un ejemplo si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto acotado de frontera suave y $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es tal que $[u]_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty$, para $s \geq 1$, entonces u es función constante. Aún con todo, puede demostrarse que en los casos límites se satisface

$$\lim_{s \to 1^-} (1-s)\,[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = C\,\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}, \tag{4.2}$$

para $1 < p < \infty$ y para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, y que, por otra parte, para cada $p \geq 1$,

$$\lim_{s \to 0^+} s\,[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = C'\,\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda u que pertenezca a alguna clase $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ para algún $0 < s < 1$. En la sección final de este capítulo detallamos las referencias que atañen a estos resultados.

Cabe destacar que los espacios de Sobolev forman una clase especial de espacios de Triebel-Lizorkin y de espacios de Besov. Una característica primordial en estos espacios consiste en eliminar el uso de derivadas débiles, reemplazándolas por otros módulos de medición de regularidad. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$; denotamos

$$\Omega_{k,h} := \{x \in \Omega \ / \ x+h, ..., x+kh \in \Omega\},$$

y por Δ^k_h al operador $\Delta_h f(x) = \Delta^1_h f(x) := f(x+h) - f(x)$ para cada $x \in \Omega_{1,h}$, e inductivamente denotamos

$$\Delta^k_h f(x) := \Delta_h\left(\Delta^{k-1}_h f\right)(x),$$

para cada $x \in \Omega_{k,h}$. Dada $f \in L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$, definimos el módulo de suavidad en L^p de amplitud $t > 0$, como

$$\omega_k(f,t)_p := \sup_{|h|\leq t} \left\| \Delta_h^k f \right\|_{L^p\left(\Omega_{k,h}\right)},$$

donde consideramos $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ para el caso $p = \infty$. Luego, para $s, q > 0$ y $k := \lfloor s \rfloor + 1$, definimos

$$[f]_{B_s^{p,q}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[\frac{\omega_k(f,t)_p}{t^s} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & ; \quad q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \frac{\omega_k(f,t)_p}{t^s} \ ; & \quad q = \infty \end{cases},$$

donde $\lfloor s \rfloor$ designa la parte entera de $s > 0$. Esta seminorma nos permite introducir los espacios de Besov $B_s^{p,q}$ del siguiente modo

$$B_s^{p,q}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) \ / \ [f]_{B_s^{p,q}(\Omega)} < \infty \right\},$$

y dotarlo de la norma

$$\|f\|_{B_s^{p,q}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + [f]_{B_s^{p,q}(\Omega)}.$$

Obsérvese que en el caso que $\Omega = \mathbb{R}^n$ esta clase de espacios contiene tanto a los espacios de Sobolev de orden fraccionario como a las clases de Hölder. Específicamente, puede demostrarse que

$$[f]_{B_s^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\left\| \Delta_h^k f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^s} \right]^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q},$$

si $q < \infty$ y que

$$[f]_{B_s^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \approx \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\left\| \Delta_h^k f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^s}.$$

La equivalencia de estas seminormas nos permiten ver que, si $p = q$ y $0 < s < 1$ entonces $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = B_s^{p,p}(\mathbb{R}^n)$, y si $p = q = \infty$ entonces

$$[f]_{B_s^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)} \approx \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_h f\|_{L^\infty}}{|h|^s},$$

por lo cual una función $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertenece a $B_s^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si existe $f^* \in \mathcal{C}^{0,s}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f^* = f$ en casi todo punto. Caracterizaciones similares se dan para cierta clase de dominios $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. También cabe recordar la importancia de esta clase de espacios al momento de caracterizar la imagen de un operador de traza sobre espacios de Sobolev. En efecto, se puede demostrar que $Tr\left(W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)\right) = B_{1-\frac{1}{p}}^{p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Las referencias y los detalles de estos resultados se encontrarán en la última sección de este capítulo.

2. Espacios de Sobolev en espacios de tipo homogéneo

Un primer intento de generalización de los espacios de Sobolev vistos en la sección anterior consiste en adecuar la métrica y la dimensión del espacio a la seminorma de *Aronszajn, Gagliardo* o *Slobodeckij* . Notemos en primer lugar que dicha seminorma puede reescribirse, salvo constante multiplicativa, de la forma

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^s} \right)^p \frac{dxdy}{|B(x, |x-y|)|} \right)^{1/p}$$

Dado (X, d, μ) un espacio métrico con medida, $s > 0$ y $1 \leq p < \infty$, definimos

$$[f]_{W^{s,p}(X)} := \left(\int\limits_X \int\limits_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{sp} \mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(x) \, d\mu(y) \right)^{1/p} \tag{4.3}$$

y al espacio de Sobolev $W^{s,p}(X)$ como

$$W^{s,p}(X) := \left\{ f \in L^p(X, \mu) \; / \; [f]_{W^{s,p}(X)} < \infty \right\},$$

al cual dotamos de la norma

$$\|f\|_{W^{s,p}(X)} := \|f\|_{L^p(X,\mu)} + [f]_{W^{s,p}(X)} .$$

Las mismas definiciones se aplican para el caso (X, d, μ) un espacio cuasimétrico con medida, suponiendo que la familia de bolas $\mathcal{V}_d$ de la cuasimétrica d sean medibles. Por otra parte, si consideramos

$$\rho(x, y) := \mu(B(x, d(x,y))) + \mu(B(y, d(x,y)))$$

no es muy difícil demostrar que ρ define una cuasimétrica cuya topología es la misma que la generada por la cuasimétrica d. Más aún, si μ es duplicante respecto de $\mathcal{V}_d$ tenemos que

$$\mu(B(x, d(x,y))) \leq A\mu(B(y, d(x,y))) \leq A^2 \mu(B(x, d(x,y))),$$

con $A := C_\mu C_d^{(\log_2 C_\mu)}$. Esto es,

$$\rho(x, y) \approx \mu(B(x, d(x,y))) \approx \mu(B(y, d(x,y)))$$

por lo cual uno puede sustituir esta cuasimétrica ρ por $\mu(B(x, d(x,y)))$ en la definición de la seminorma $[\cdot]_{W^{s,p}(X)}$ dada en (4.3), obteniendo de este modo una expresión con dos estructuras métricas: una que mide la regularidad del espacio, el factor $d(x,y)^{sp}$, y otra que mide la singularidad dimensional del espacio, el factor $\rho(x,y)$. Téngase en cuenta que (X, ρ, μ) es un espacio normal, esto es, un espacio Ahlfors 1-dimensional. Y, por otra parte, una situación particular se da cuando el espacio (X, d, μ) es α-Ahlfors, debido a la equivalencia $\rho(x, y) \approx \mu(B(x, d(x, y))) \approx d(x, y)^{\alpha}$. Esto permite sintonizar ambas estructuras cuasimétricas y considerar en este caso como seminorma $[\cdot]_{W^{s,p}(X)}$ a la dada por

$$[f]_{W^{s,p}(X)} := \left(\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x, y)^{\alpha+sp}} d\mu(x) \, d\mu(y) \right)^{1/p}$$

la cual claramente resulta equivalente a la dada por (4.3). Huelga mencionar que para el caso $d(x, y) = |x - y|$ y $X = \mathbb{R}^n$ recuperamos el caso euclídeo considerado en la sección anterior.

Volviendo al caso general, como hemos observado para el caso euclídeo, la clase $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ puede ser trivial para valores de $s > 1$, y por lo visto en el capítulo1, dicha cota inferior de valores $s > 0$ dependerá de la riqueza de la clase de funciones Hölder que puedan definirse sobre un espacio cuasimétrico (X, d). Eso será parte de lo que demostraremos en la Proposición 4.2, la cual explora bajo qué condiciones el espacio $W^{s,p}(X)$ es no trivial. Para tal fin denotaremos por $\Lambda^{\gamma}(X, d)$ al espacio de las funciones γ-Hölder, acotadas, dotado de la norma

$$\|f\|_{\Lambda^{\gamma}} := \|f\|_{\infty} + [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}}$$

donde $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|$. A su vez, denotaremos por $\Lambda_c^{\gamma}(X, d)$ al subespacio de funciones de $\Lambda^{\gamma}(X, d)$ con soporte acotado.

El siguiente lema técnico el cual muestra que el comportamiento integral de las potencias de $d(x, y)$ con respecto a la medida $\frac{d\mu(y)}{\mu(B(x,d(x,y)))}$ es análogo al de las potencias de la distancia euclídea respecto de la medida $\frac{dy}{\|x-y\|^n}$.

LEMA 4.1. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$\int_{B_d(x,R)} \frac{d(x, y)^{\varepsilon}}{\mu(B_d(x, d(x, y)))} d\mu(y) \leq \frac{2^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon} - 1} C_{\mu} R^{\varepsilon},$$

y

$$\int_{X \setminus B_d(x,R)} \frac{d(x, y)^{-\varepsilon}}{\mu(B_d(x, d(x, y)))} d\mu(y) \leq \frac{2^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon} - 1} \frac{C_{\mu}}{R^{\varepsilon}},$$

para cada $x \in X$ y $R > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Descomponiendo diádicamente $B_d(x,R)$ tendremos que

$$\begin{aligned}\int_{B_d(x,R)} \frac{d(x,y)^{\varepsilon}}{\mu(B_d(x,d(x,y)))} d\mu(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}R \le d(y,x) < 2^{-j}R} \frac{d(x,y)^{\varepsilon}}{\mu(B_d(x,d(x,y)))} d\mu(y) \\ &\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-j}R\right)^{\varepsilon} \frac{\mu(B_d(x,2^{-j}R))}{\mu(B_d(x,2^{-j-1}R))} \\ &\le C_\mu \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-j}R\right)^{\varepsilon} = \frac{2^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon}-1} C_\mu R^{\varepsilon}.\end{aligned}$$

De modo análogo tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{X \setminus B_d(x,R)} \frac{d(x,y)^{-\varepsilon}}{\mu(B_d(x,d(x,y)))} d\mu(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{j}R \le d(y,x) < 2^{j+1}R} \frac{d(x,y)^{-\varepsilon}}{\mu(B_d(x,d(x,y)))} d\mu(y) \\ &\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{j}R)^{\varepsilon}} \frac{\mu(B_d(x,2^{j+1}R))}{\mu(B_d(x,2^{j}R))} \\ &\le C_\mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{j}R)^{\varepsilon}} = \frac{2^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon}-1} \frac{C_\mu}{R^{\varepsilon}},\end{aligned}$$

como queríamos demostrar □

Recordemos que la notación $\gamma \precsim ind(X,d)$ indica que $\gamma < ind(X,d)$ y $\gamma = ind(X,d)$ siempre que el supremo de la definición de dicho índice se alcance.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea (X,d,μ) espacio de tipo homogéneo. El espacio $\Lambda_c^{\gamma}(X,d)$ está incluído en $W^{s,p}(X,d,\mu)$, para cada $\gamma > s$ con $\gamma \precsim ind(X,d)$.*

DEMOSTRACIÓN. La inclusión $\Lambda_c^{\gamma}(X,d) \subseteq L^p(X,\mu)$ es evidente, ya que para cada $\varphi \in \Lambda_c^{\gamma}(X,d)$ se tiene que

$$\|\varphi\|_{L^p(X,\mu)} \le \|\varphi\|_{\infty} \mu(K)^{1/p},$$

donde $K := sop(\varphi)$. Para probar la finitud de la seminorma $W^{s,p}$, denotemos $\rho(x,y) := \mu(B(x,d(x,y)))$. Sea $\varphi \in \Lambda_c^{\gamma}$ y $B := B(x_0,R)$ una bola tal que $B \supsetneq K = sop(\varphi)$. Teniendo en cuenta que la función $\varphi(x) - \varphi(y)$ es nula para todo $(x,y) \notin (B \times X) \cup (X \times B)$ tendremos que

$$\int_X \int_X \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) = \int_{B\times X} \int_{X\times B} \Psi(x,y)\, d\mu(y)\, d\mu(x)$$

$$\le \int_B \int_B \Psi(x,y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) + 2\int_B \int_{X\setminus B} \Psi(x,y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) = I + II$$

donde aquí $\Psi(x,y) := \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)}$. Por una parte, teniendo en cuenta que $B(x_0,R) \subseteq B(x,C_dR)$ para cada $x \in B(x_0,R)$, la condición Hölder de φ y el Lema 4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} I &\leq [\varphi]^p_{\mathcal{C}^{0,\gamma}} \int_B \int_B \frac{d(x,y)^{\gamma p}}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\leq [\varphi]^p_{\mathcal{C}^{0,\gamma}} \int_{x\in B} \int_{y\in B(x,C_dR)} \frac{d(x,y)^{p(\gamma-s)}}{\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\leq [\varphi]^p_{\mathcal{C}^{0,\gamma}} C_\mu (C_dR)^{p(\gamma-s)} \frac{2^{p(\gamma-s)}}{2^{p(\gamma-s)}-1}\mu(B) = C_{(\mu,d,\gamma,s,p,sop(\varphi))} [\varphi]^p_{\mathcal{C}^{0,\gamma}} \end{aligned}$$

Por otra parte, sabiendo que, a su vez, $B(x,R) \subseteq B(x_0,C_dR)$ para cada $x \in B(x_0,R)$, que $\Psi(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \in (B \setminus K) \times (X \setminus B)$, y que $dist(K, X \setminus B) := \lambda > 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} II &\leq 2\|\varphi\|^p_\infty \int_K \int_{X\setminus B} \frac{1}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\leq 2\|\varphi\|^p_\infty \int_K \left(\int_{X\setminus B(x_0,C_dR)} \frac{d(x,y)^{-sp}}{\rho(x,y)} d\mu(y) + \int_{B(x_0,C_dR)\setminus B} \frac{d(x,y)^{-sp}}{\rho(x,y)} d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &\leq 2\|\varphi\|^p_\infty \int_K \left(\int_{X\setminus B(x,R)} \frac{d(x,y)^{-sp}}{\rho(x,y)} d\mu(y) + \frac{1}{\lambda^{sp}} \int_{B(x_0,C_dR)\setminus B} \frac{1}{\rho(x,y)} d\mu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

A su vez, puede verse que para cada $x \in B(x_0,R)$ se tiene que $B(x_0,R) \subseteq B(x,\theta\lambda)$, donde $\theta = máx\left(\frac{C_dR}{\lambda}, 1\right)$, por lo cual

$$\mu(B(x_0,R)) \leq \mu(B(x,\theta\lambda)) \leq C_\mu\theta^s\mu(B(x,\lambda)) \leq C_\mu\theta^s\rho(x,y)$$

para todo $x \in K$ e $y \in X \setminus B(x,R)$, con $s = \log_2 C_\mu$, lo que nos permite deducir, usando el Lema 4.1, que

$$\begin{aligned} II &\leq 2\|\varphi\|^p_\infty \int_K \left(\int_{X\setminus B(x,R)} \frac{d(x,y)^{-sp}}{\rho(x,y)} d\mu(y) + \frac{C_\mu\theta^s\mu(B(x_0,C_dR))}{\lambda^{sp}\mu(B(x_0,R))} \right) d\mu(x) \\ &\leq 2\|\varphi\|^p_\infty \left(C_\mu \frac{2^{sp}}{2^{sp}-1}\frac{1}{R^{sp}} + \frac{C_\mu^2(\theta C_d)^s}{\lambda^{sp}} \right)\mu(K) \\ &= C^*_{(\mu,d,s,p,sop(\varphi))} \|\varphi\|^p_\infty \end{aligned}$$

En conclusión tenemos que

$$[\varphi]_{W^{s,p}(X)} \leq C_{(\mu,d,\gamma,s,p,sop(\varphi))} \|\varphi\|_{\Lambda^\gamma}$$

□

De la demostración del lema anterior se desprende un Corolario inmediato. Si consideramos el espacio $\Lambda^\gamma_K(X,d)$ de las funciones γ-Hölder soportadas en un acotado $K \subseteq X$, fijo, entonces $\Lambda^\gamma_K(X,d)$ está inmerso con continuidad en $W^{s,p}(X)$, para cada $s < \gamma \precsim ind(X,d)$.

OBSERVACIÓN 4.3. *La cota $\gamma \precsim ind\,(X,d)$ es necesaria a fin de asegurar la no trivialidad de las clases de Hölder. Esto a su vez implica que para todo $0 < s < ind\,(X,d)$ el espacio $W^{s,p}\,(X)$ es no trivial. Y teniendo en cuenta lo desarrollado en la primera sección del Capítulo 1 podemos asegurar que si (X,d) es espacio ultramétrico entonces $W^{s,p}\,(X)$ es no trivial para todo $s \in (0,\infty)$. En la sección final de este capítulo se detallan referencias bibliográficas al respecto.*

Esta clase de espacios posee, a su vez, una caracterización de tipo Besov semejante a la euclídea utilizando modulos de suavidad. A modo de motivación, considérese el módulo de suavidad L^p modificado, dado por

$$\mathbf{w}\,(f,t)_p := \left(\fint_{B(0,t)} \|\Delta_h f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dh \right)^{1/p}$$

Utilizando la subaditividad de $\|\Delta_h f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ respecto de f, puede demostrarse que $\mathbf{w}\,(f,t)_p$ y $\omega\,(f,t)_p$ son equivalentes , esto es

$$C_1 \mathbf{w}\,(f,t)_p \leq \omega\,(f,t)_p \leq C_2 \mathbf{w}\,(f,t)_p\,,$$

donde $\omega\,(f,t)_p := \sup\limits_{|h|\leq t} \|\Delta_h f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. La importancia de introducir el módulo $w\,(f,t)_p$ radica en la siguiente identidad

$$\mathbf{w}\,(f,t)_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \fint_{B(x,t)} |f\,(x) - f\,(y)|^p\, dydx \right)^{1/p},$$

la cual puede adecuarse a contextos más generales. En efecto, dado (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo con d-bolas medibles, sea

$$E_p\,(f,t) := \left(\int_X \frac{1}{\mu\,(B_d\,(x,t))} \int_{B_d(x,t)} |f\,(x) - f\,(y)|^p\, d\mu\,(y)\, d\mu\,(x) \right)^{1/p},$$

y, para $0 \leq s < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, definamos la seminorma

$$[f]_{B_p^{s,q}(X,d,\mu)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[\frac{E_p(f,t)}{t^s} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & ; \quad q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \frac{E_p(f,t)}{t^s} \;; & \quad q = \infty \end{cases}, \tag{4.4}$$

y el espacio de Besov $B_p^{s,q}\,(X,d,\mu)$ como

$$B_p^{s,q}\,(X,d,\mu) := \left\{ f \in L^p\,(X) \ / \ [f]_{B_p^{s,q}(X,d,\mu)} < \infty \right\}.$$

Puede demostrarse el siguiente resultado que relaciona los espacios de Sobolev y Besov en contexto de espacios de tipo homogéneo.

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea (X,d,μ) espacio de tipo homogéneo. Sea $1 \leq p < \infty$ y $s > 0$. Entonces $B_p^{s,p}\,(X,d,\mu) = W^{s,p}\,(X,d,\mu)$ con normas equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar demostremos que

$$\int_0^\infty \fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \frac{dt}{t^{1+sp}} \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-ksp} \fint_{B\left(x,2^k\right)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) . \tag{4.5}$$

En efecto, esto surge de partir la primera integral teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2^k, 2^{k+1})$, y observando que

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}} \left(\fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \right) \frac{dt}{t^{1+sp}}$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k(1+sp)}} \left(\frac{1}{\mu\left(B\left(x,2^k\right)\right)} \int_{B\left(x,2^{k+1}\right)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \right) dt \\
&\le \frac{2^k C_\mu}{2^{k(1+sp)}} \fint_{B\left(x,2^{k+1}\right)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \\
&= 2^{sp} C_\mu \frac{1}{2^{(k+1)sp}} \fint_{B\left(x,2^{k+1}\right)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) .
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}} \fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \frac{dt}{t^{1+sp}}$$

$$\begin{aligned}
&\ge \frac{2^k}{2^{(k+1)(1+sp)}} \frac{1}{\mu\left(B\left(x,2^{k+1}\right)\right)} \int_{B\left(x,2^k\right)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \\
&\ge \frac{1}{2^{(1+sp)} C_\mu} \frac{1}{2^{ksp}} \fint_{B\left(x,2^k\right)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) .
\end{aligned}$$

Realizando la sumatoria en $k \in \mathbb{Z}$ de cada una de estas desigualdades se sigue (4.5). Luego, si denotamos $B_i = B\left(x, 2^i\right)$, tenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
[f]^p_{B_p^{s,p}(X)} &= \int_0^\infty \left[\frac{E_p(f,t)}{t^s} \right]^p \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \int_X \fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) \frac{dt}{t^{1+sp}} \\
&= \int_X \int_0^\infty \fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \frac{dt}{t^{1+sp}} d\mu(x) \\
&\approx \int_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-ksp} \fint_{B_k} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&\approx \int_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i=-\infty}^{k} 2^{-ksp} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_i \setminus B_{i+1}} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&\approx \int_X \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=i}^{\infty} 2^{-ksp} \frac{1}{\mu(B_k)} \right) \int_{B_i \setminus B_{i+1}} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) .
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\sum_{k=i}^{\infty} 2^{-ksp} \frac{1}{\mu(B_k)} &\geq \frac{C_\mu^i}{\mu(B_i)} \sum_{k=i}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{sp} C_\mu}\right)^k \\ &= \frac{C_\mu^i}{\mu(B_i)} \frac{2^{sp} C_\mu}{2^{sp} C_\mu - 1} \frac{1}{(2^{sp} C_\mu)^i} \geq C_{(s,p,\mu)} \frac{2^{-isp}}{\mu(B_i)},\end{aligned}$$

que

$$\sum_{k=i}^{\infty} 2^{-ksp} \frac{1}{\mu(B_k)} \leq \frac{1}{\mu(B_i)} \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-ksp} = \frac{2^{sp}}{2^{sp}-1} \frac{2^{-isp}}{\mu(B_i)},$$

y las equivalencias $d(x,y) \approx 2^{-i}$ y $\mu(B_i) \approx \rho(x,y)$, podemos deducir que

$$\begin{aligned}[f]^p_{B_p^{s,p}(X)} &\approx \int_X \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{2^{-isp}}{\mu(B_i)} \int_{B_i \setminus B_{i+1}} |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\approx \int_X \sum_{i\in\mathbb{Z}} \int_{B_i \setminus B_{i+1}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\, \mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\approx \int_X \int_X \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\, \mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(y)\, d\mu(x) \approx [f]^p_{W^{s,p}(X)}\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

3. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Sección 1. Dentro de la vasta e inabarcable literatura aceca de espacios de Sobolev, tanto en contexto euclídeo como de espacios métricos con medidas, señalamos los trabajos [Eva10], [Sal16], [Leo17], [Ste70], [JW84] y [DNPV12]. La denominación de $[\cdot]_{W^{s,p}(\Omega)}$como seminorma de Aronszajn, Gagliardo o Slobodeckij, se menciona en [DNPV12]. En [GT01] se introduce una teoría axiomática de espacios de Sobolev que incluye a cada uno de los espacios mencionados en este trabajo.

Sección 2. Caben hacer un par de comentarios acerca de la trivialidad de los espacios de Sobolev en contexto métrico. Para el caso euclídeo Haïm Brezis en [Bre02] (y en conjunto con Jean Bourgain y Petru Mironescu en [BBM01]) demuestra una fórmula límite de seminormas $W^{s,p}$ que involucran el gradiente de la función. En concreto, demuestra que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$, es tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p} \rho_\varepsilon(|x-y|)\, dxdy \leq C,$$

para $\varepsilon > 0$ pequeños, entonces $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p} \rho_\varepsilon(|x-y|)\, dxdy = C_{p,n} \|\nabla f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.6}$$

donde aquí puede considerarse, por ejemplo, $\rho_\varepsilon(r) := \frac{\varepsilon}{r^{n-\varepsilon}}\mathbf{1}_{(0,1)}(r)$, para $r > 0$, o bien $\rho_\varepsilon(r) := \frac{n}{\varepsilon^n}1_{(0,\varepsilon)}(r)$. Esta fórmula de representación permite deducir que, para cualquier $p \geq 1$, si

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+p}} dxdy < \infty,$$

entonces f es función constante, mismas consideraciones son válidas sobre $W^{s,p}(\Omega)$, para un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y de frontera suave. Más aún de la representación (4.6) se puede deducir la fórmula (4.2). Se observa entonces el por qué de la restricción necesaria del orden de regularidad, $0 < s < 1$, para el caso euclideo. En lo que respecta a espacios de Sobolev definidos en espacios métricos con medida, en [**DMS19**], Simone Di Marino y Marco Squassina extienden esta representación utilizando lo que se denomina Energía de Cheeger, $Ch_p(u) = \|\nabla_w u\|^p_{L^p(X,\mu)}$, el cual involucra gradientes superiores p-débiles ∇_w. A grandes rasgos, obtienen que si (X, d, μ) es espacio de tipo homogéneo, con (X, d) espacio métrico completo y separable, que soporta una desigualdad de Poincaré $(1, p)$, con $1 \leq p$, entonces

$$Ch_p(u) \lesssim \liminf_{s\to 1^-} (1-s)[u]^p_{W^{s,p}(X,d,\mu)} \leq \limsup_{s\to 1^-} (1-s)[u]^p_{W^{s,p}(X,d,\mu)} \lesssim Ch_p(u),$$

donde

$$[u]^p_{W^{s,p}(X,d,\mu)} := \int_X\int_X \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Con esto uno podría deducir trivialidad de los Sobolev $W^{s,p}(X, d, \mu)$ para esta clase de espacios y $s \geq 1$. Esto guarda relación con lo desarrollado en la sección ya que recordemos que para espacios métricos $ind(X, d) \geq 1$. Otra estrategia consiste en utilizar los espacios de Hajłasz-Sobolev. Dado un espacio métrico (X, d) equipado con una medida boreliana μ, se define al espacio de Hajłasz-Sobolev $M^{s,p}(X, d, \mu)$ como el conjunto de todas las funciones $f \in L^p(X, \mu)$ para las cuales existe alguna función no negativa $g \in L^p(X, \mu)$ tal que, para μ-casi todo $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)^s (g(x) + g(y)). \tag{4.7}$$

Dicha clase de funciones no negativas g que satisfacen (4.7) se las denomina clase de gradientes generalizados de f, denotadas $D[f]$, y se normaliza el espacio vía

$$\|f\|_{M^{1,p}(X)} := \|f\|_{L^p(X)} + [f]_{M^{1,p}(X)},$$

donde $[f]_{M^{1,p}(X)} = \inf_{g\in D[f]} \|g\|_{L^p(X)}$. En [**GKS10**], por citar un ejemplo, Amiran Gogatishvili, Pekka Koskela y Nageswari Shanmugalingam, demuestran la continuidad de las inmersiones

$$W^{s,p}(X, d, \mu) \hookrightarrow M^{s,p}(X, d, \mu) \;\; \text{y} \;\; M^{s,p}(X, d, \mu) \hookrightarrow W^{s-\varepsilon,p}(X, d, \mu),$$

para cada $0 < \varepsilon < s$, y para espacios de diámetro finito. Al margen de la no equivalencia entre esta clase de espacios, se sigue de aquí que la trivialidad de los espacios $M^{s,p}(X, d, \mu)$ implica la de $W^{s,p}(X, d, \mu)$. Pero, aún con todo, no es muy sencilla la cuestión de la trivialidad de los espacios $M^{s,p}(X, d, \mu)$, ya que, como se menciona, por ejemplo, en [Hu03], este hecho está intrínsecamente relacionado a lo que se denomina dimensión de camino (walk dimension) del espacio. Por lo que tenemos entendido, queda abierto el problema de analizar la trivialidad de las clases $W^{s,p}(X,d,\mu)$ para $s > ind(X,d)$ .En lo que respecta a la Proposición (4.4), ésta se debe a [GKS10] (Teorema 5.2). Además de las inmersiones mencionadas, los autores de este trabajo también introducen los espacios de Sobolev de tipo Korevaar-Shoen y muestran su utilidad para caracterizar a los espacios de Besov como espacios de interpolación (véase Teorema 4.2 y Corolario 4.3 en [GKS10]). Cabe mencionar también el Trabajo Final de Tesis de Miguel Marcos, [Mar15], en el cual se desarrollan esta clase de espacios y se introducen espacios de Newton-Sobolev generalizados.

Por último cabe dedicar algunas líneas al asunto de la densidad de funciones de Hölder en espacios de Sobolev. Para el caso $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con métrica euclídea y medida de Lebesgue n-dimensional, en [FSV15] se demuestra que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto con frontera continua, entonces el espacio $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ de funciones infinitamente diferenciables y soporte compacto contenido en Ω, es denso en

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \left\{ f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \;/\; f = 0 \text{ sobre } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \right\},$$

respecto de la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ posee frontera continua si, a grandes rasgos, está formado por una unión finita de gráficas de funciones continuas. Más específicamente, si $\partial\Omega$ es compacto y existe una cantidad finita de abiertos $W_1, ..., W_M \subseteq \mathbb{R}^n$, de conjuntos $\Omega_1, ..., \Omega_M \subseteq \mathbb{R}^n$, de funciones continuas $\xi_1, ..., \xi_M : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ y de movimientos rígidos $T_1, ..., T_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tales que $T_j(\Omega_j) = \left\{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \;/\; x_n < \xi_j(x') \right\}$ y $W_j \cap \Omega = W_j \cap \Omega_j$ para cada $j = 1, ..., M$.

Recientemente, en [DK21a] y [DK21b], Bartłomiej Dyda y Michał Kijaczko analizan con mayor profundidad el problema bajo qué condiciones sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $C_c^{\infty}(\Omega)$ es denso en $W^{s,p}(\Omega)$ respecto de la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Detallemos un par de definiciones técnicas a fin de apreciar sus resultados. De modo semejante a lo expuesto en el Capítulo 1 se define como dimensión inferior de Assouad de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada $\underline{\dim}_A(E)$, al supremo de los $t \geq 0$ para los cuales existe una constante $c = c(t) > 0$ tal que para todo $x \in E$ y $0 < r < R < diám(E)$ la bola $B(x,R) \cap E$ puede cubrirse con $c\left(\frac{R}{r}\right)^t$ bolas de radio r, como mínimo. Análogamente se define como dimensión superior de Assouad de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada $\overline{\dim}_A(E)$, al ínfimo de los $s \geq 0$ para los cuales existe una constante $C = C(s) \geq 1$ tal que la bola $B(x,R) \cap E$ puede cubrirse con $C\left(\frac{R}{r}\right)^s$ bolas de radio r, como máximo. Por otra parte, si definimos los entornos

$$V(E,x,\lambda,r) := \{ z \in \mathbb{R}^n : dist(z,E) \leq r, |x - z| \leq \lambda r \},$$

se dice que E es σ-homogéneo si existe una constante L tal que $|V(E,x,\lambda,r)| \leq L r^d \lambda^{\sigma}$, para todo $x \in E$, $\lambda \geq 1$ y $r > 0$. Puede verse que, si $\sigma = \overline{\dim}_A(E)$, entonces, los conjuntos σ-homogéneos son aquellos para los cuales el infimo de la definición de $\overline{\dim}_A(E)$ se alcanza. En [DK21a], B. Dyda y M. Kijaczko, demuestran que, para $0 < s < 1$ y $1 \leq p < \infty$ si $sp < n - \overline{\dim}_A(\partial\Omega)$ entonces $\overline{\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)} = W^{s,p}(\Omega)$, con clausura respecto de $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. También, para el caso $p > 1$, si Ω es $(n - sp)$-homogéneo y $\overline{\dim}_A(\partial\Omega) = n - sp$, entonces $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)} = W^{s,p}(\Omega)$. Para el caso $sp > n - \overline{\dim}_A(\partial\Omega)$ se tiene que este resultado es falso sobre dominios Ω que satisfacen la condición k-plump, dominios que se analizarán la Sección 3 del Capítulo 5. Para demostrar este resultado, además de ciertos lemas técnicos, utilizan el hecho de que coinciden las clausuras de $C_c^\infty(\Omega)$ y de $W_c^{s,p}(\Omega) := \{f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \ / \ sop(f) \subseteq \Omega, \text{ compacto}\}$, lo cual desarrollan en [DK21b]. En lo que respecta al caso cuasimétrico, al día de la fecha suponemos que es un problema que permanece sin solución adecuada. Si bien elaboramos técnicas inspiradas en los trabajos [DV14], [DLV21], [HaK98], y en los mencionados, no hemos arribado a un resultado concluyente. Cabe destacar la discrepancia con el caso de los espacios de Hajłasz-Sobolev, ya que la gentileza de su definición permite usar los conjuntos de nivel de cualquier gradiente generalizado para demostrar que las funciones Hölder de orden $s < ind(X,d)$ son densas en $M^{s,p}(X,d,\mu)$. Véase a este respecto el Teorema 5.3 en [HaK98], el cual, si bien está demostrado sobre espacio métricos, puede extenderse de manera sencilla al caso cuasimétrico.

CAPíTULO 5

Teoremas de extensión de funciones de Sobolev en espacios normales

En este capítulo desarrollamos en detalle la teoría de la existencia de operadores de extensión en espacios de Sobolev sobre dominios específicos que satisfacen una condición de densidad de medida.

En la primera sección extendemos el Lema de descomposición de Whitney a dominios no acotados. Si bien la demostración aquí presentada es una adaptación de la encontrada en la bibliografía señalada, nos será de utilidad comprender el juego de acotaciones y constantes involucrado. En segundo lugar enunciamos y demostraciones nuestro teorema de extensión de funciones de Sobolev definidos sobre espacios de tipo homogéneo, resultado que nos será de utilidad para demostrar un teorema de inmersión compacta en los capítulos siguientes. Finalmente, en el addendum final de este capítulo desarrollamos una breve genealogía sobre esta materia.

1. Lema de descomposición de Whitney para dominios no acotados

LEMA 5.1 (Whitney). *Sea (X, d) un espacio cuasimétrico con $\dim_A X < \infty$. Para cada $\lambda > 1$, existe $\Lambda \in (\lambda, +\infty)$ y existe $M \in \mathbb{N}$, dependientes de λ y de las constantes geométricas del espacio, tales que para cada subconjunto propio $V \subseteq X$, abierto en la topología τ_d, existe una familia a lo sumo numerable de bolas $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i\in I}$, con $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq V$ tales que:*

1) $V = \bigcup_{i\in I} B_d(x_i, r_i) = \bigcup_{i\in I} B_d(x_i, \lambda r_i)$;

2) para todo $i \in I$ se tiene que $r_i \approx dist_d(x_i, X \setminus V)$;

3) para todo $i \in I$, $B_d(x_i, \lambda r_i) \subseteq V$ y $B_d(x_i, \Lambda r_i) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$;

4) para cada $i \in I$, si $z \in B(x_i, \lambda r_i)$ entonces $dist_d(z, X \setminus V) \approx \lambda r_i$;

5) para todo $i \in I$ se satisface que $\# \{k \in I \ : \ B(x_k, \lambda r_k) \cap B(x_i, \lambda r_i) \neq \emptyset\} \leq M$.

DEMOSTRACIÓN. Repasaremos la idea de demostración esbozada en el Lema 1.35. Dado un abierto $V \subseteq X$, sea

$$L_n := \left\{ x \in V \ / \ \frac{1}{2^{n+1}} \leq dist_d(x, X \setminus V) < \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Considerando $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\lambda C_d^3}$ escogemos para cada $n \in \mathbb{Z}$ un subconjunto $A_n \subseteq L_n$ que sea $\frac{\varepsilon C_d}{2^{n+1}}$-disperso maximal. Denotemos $A_n = \{x_j^n\}_{j\in I_n}$. Dado que $\dim_A X$ es finita, gracias a la Proposición 1.28 tenemos que cada conjunto A_n resulta numerable y, además, la bolas de la familia $\left\{B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)\right\}_{j\in I_n}$ resultan mutuamente disjuntas. A su vez, por maximalidad de cada conjunto $\frac{\varepsilon C_d}{2^{n+1}}$-disperso se tiene que

$$L_n \subseteq \bigcup_{j \in I_n} B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon C_d}{2^n}\right)$$

y

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in I_n} B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon \lambda C_d^2}{2^n}\right) &\subseteq \left\{x \in X : dist_d\left(x, L_n\right) < \frac{\varepsilon \lambda C_d^2}{2^n}\right\} \\ &\subseteq \left\{x \in X : \frac{1}{2^{n+1} C_d} \leq dist_d\left(x, X \setminus V\right) < \frac{C_d}{2^n}\right\} \subseteq V. \end{aligned}$$

Estas desigualdades nos muestran que

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in I_n} B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon C_d}{2^n}\right).$$

Considérese, por otra parte, la familia de intervalos $J_n := \left[\frac{1}{2^{n+1} C_d}, \frac{C_d}{2^n}\right]$, con $n \in \mathbb{Z}$. Es claro que para cualquier par $n, m \in \mathbb{Z}$ con $J_n \cap J_m \neq \emptyset$ se tiene que $|n - m| \leq 1 + 2\log_2 C_d$. Esto nos permite deducir que, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\#\left\{m \in \mathbb{Z} : J_n \cap J_m \neq \emptyset\right\} \leq 4\left(1 + \log_2 C_d\right).$$

Si denotamos, para cada $x \in V$,

$$N(x) := \left\{n \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2^{n+1} C_d} \leq dist_d\left(x, X \setminus V\right) < \frac{C_d}{2^n}\right\} = \left\{n \in \mathbb{Z} : dist_d\left(x, X \setminus V\right) \in J_n\right\},$$

$$n(x) := \operatorname{ínf} N(x),$$

entonces,

$$\#N(x) \leq 4\left(1 + \log_2 C_d\right), \tag{5.1}$$

y para todo $x \in V$ y todo $n \in N(x)$ se tiene que

$$0 \leq n - n(x) \leq 1 + 2\log_2 C_d.$$

Por otra parte, para cada $x_0 \in V$ fijo , $n \in \mathbb{Z}$ y $j \in I_n$, teniendo en cuenta la dispersión de los conjuntos A_n, podemos ver que

$$B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon \lambda C_d}{2^n}\right) \cap B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon \lambda C_d}{2^n}\right) \neq \emptyset \text{ implica que } B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \subseteq B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon \lambda C_d^3}{2^{n(x_0)}}\right)$$

Obsérvese que, si $R_n := \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ y $\rho_{(x_0)} := \frac{\varepsilon \lambda C_d^3}{2^{n(x_0)}}$ tenemos que $\frac{R_n}{\rho_{(x_0)}} = \frac{1}{2\lambda C_d^3} 2^{n(x_0) - n}$, esto es

$$\frac{1}{4\lambda C_d^5} \leq \frac{R_n}{\rho_{(x_0)}} \leq \frac{1}{2\lambda C_d^3}.$$

Como el espacio (X, d) posee dimensión de Assouad finita, la bola $B_d\left(x_0, \rho_{(x_0)}\right)$ puede cubrirse con no más de N bolas de radio $\theta \rho_{(x_0)} = R_n$. Teniendo en cuenta que $\frac{R_n}{\rho_{(x_0)}} \in$

$\left[\frac{1}{4\lambda C_d^5}, \frac{1}{2\lambda C_d^3}\right]$, que $n \in N(x_0)$, y la desigualdad (5.1), podemos ver que existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x_0 \in V$

$$\#\left\{(n,j) : n \in \mathbb{Z},\ j \in I_n \text{ tal que } B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon\lambda C_d}{2^n}\right) \cap B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon\lambda C_d}{2^n}\right) \neq \emptyset\right\} \leq M$$

En conclusión

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in I_n} \mathbf{1}_{B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon\lambda C_d}{2^n}\right)} \leq M$$

Por otra parte, ya que $dist_d\left(x_j^n, X \setminus V\right) \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada $j \in I_n$, entonces, podemos hallar $\Lambda > \lambda$, que dependerá de C_d, λ y $\dim_A X$; tal que $B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon\Lambda C_d}{2^n}\right) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Finalmente podemos tomar como descomposición $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ a la familia de bolas $\left\{B_d\left(x_j^n, \frac{\varepsilon C_d}{2^n}\right) : n \in \mathbb{Z},\ j \in I_n\right\}$ reindexada. Esto demuestra el lema. □

OBSERVACIÓN 5.2. *A fin de simplificar la cantidad de constantes involucradas en las acotaciones, conveniremos en este trabajo en escoger* $\varepsilon = \frac{1}{4\lambda C_d^3}$, $\Lambda = 5\lambda C_d^2$.

A fin de demostrar la existencia de una partición de la unidad asociada a una descomposición de Whitney es necesario extender la propiedad de separación de Urysohn mediante funciones de regularidad Hölder. Esta tarea resulta sencilla si se tiene algún lema de extensión de funciones de clase Lipschitz sobre espacios métricos. En efecto, téngase presente que toda cuasimétrica ρ es equivalente a otra cuasimétrica $\rho_\#$ tal que $\rho_\#^\gamma$ es una métrica para cierto rango de valores $\gamma > 0$. De esto se sigue que la clase de funciones Lipschitz respecto de la métrica $\rho_\#^\gamma$ coincide con la clase de funciones γ-Hölder respecto de las cuasimétricas ρ y $\rho_\#$. Una construcción sencilla, aunque el operador que la define no sea lineal, de una extensión Lipschitz está dada por

$$F(x) := \inf_{w\in E}\Big(f(w) + [f]_{\mathcal{C}^{0,1}(E,d)}\, d(x,w)\Big)$$

donde E es un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d). Más aún puede probarse que se preserva el tamaño de la seminorma. Este operador de extensión no lineal de funciones Lipschitz para el caso métrico implica un operador de extensión no lineal de funciones Hölder para el caso cuasimétrico y, a su vez, nos permite demostrar la siguiente versión Hölder del lema de Urysohn.

LEMA 5.3 (Urysohn). *Sea* (X, d) *un espacio cuasimétrico y sea* $\gamma \in (0, \frac{1}{\log_2 C_d}]$. *Sean* $F_0, F_1 \subseteq X$, *no vacíos y tales que* $dist_d(F_0, F_1) > 0$. *Existe una función* $\psi \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(X, d)$ *tal que* $\mathbf{1}_{F_1} \leq \psi \leq \mathbf{1}_{X\setminus F_0}$ *sobre* X. *Además, existe una constante* C, *dependiente de* ρ, *tal que*

$$[\psi]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} \leq C\frac{1}{dist_d(F_0, F_1)^\gamma}$$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar $\varphi : F_0 \cup F_1 \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi \equiv 0$ sobre F_0 y $\varphi \equiv 1$ sobre F_1, y extenderla a todo X a una función $\psi \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)$. La última desigualdad surge de la mayorización $[\psi]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} \le C\,[\varphi]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(F_0\cup F_1,d)}$. □

Este Lema de Urysohn mediante funciones Hölder nos servirá para demostrar la existencia de una partición de la unidad.

LEMA 5.4 (Partición Hölder de la unidad). *Sea (X,d) un espacio cuasimétrico con $\dim_A X < \infty$, y $V \subseteq X$ subconjunto propio abierto en la topología τ_d. Asociada a un cubrimiento de Whitney $\{B_d(x_i,r_i)\}_{i\in I}$, con parámetro $\lambda > 0$, dado por el Lema 5.1, para cada $\gamma \in (0, \frac{1}{\log_2 C_d}]$ existe una familia de funciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X)$, denominada partición de la unidad, tal que:*

1) para todo $i \in I$ se satisface $\mathbf{1}_{B(x_i,r_i)} \le \varphi_i \le \mathbf{1}_{B(x_i,\lambda r_i)}$;

2) existe una constante $L > 0$ tal que para todo $i \in I$ se tiene $[\varphi_i]_\gamma \le L\frac{1}{r_i^\gamma}$;

3) $\sum\limits_{i\in I}\varphi_i = \mathbf{1}_V$.

DEMOSTRACIÓN. Escogemos $\lambda > C_d$, de modo tal que, de acuerdo al Lema 5.1, tendremos que

$$\frac{\lambda}{C_d} r_i \le dist_d\left(B(x_i,r_i), X\setminus B(x_i,\lambda r_i)\right). \tag{5.2}$$

Luego, para cada par de conjuntos $B(x_i,r_i)$, $X\setminus B(x_i,\lambda r_i)$, $i\in I$, aplicamos el Lema de Urysohn anterior. Podemos construir entonces una familia de funciones $(\psi_i)_{i\in I}$ en $\mathcal{C}^{0,\gamma}(X)$ tal que $\mathbf{1}_{B(x_i,r_i)} \le \psi_i \le \mathbf{1}_{B(x_i,\lambda r_i)}$. Las desigualdades (5.2) nos permiten mostrar que

$$[\psi_i]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} \le C_{(d,\lambda)}\frac{1}{r_i^\gamma}$$

Finalmente, considerando $\Psi : V \to \mathbb{R}$, dada por $\Psi = \sum\limits_{j\in I}\psi_i$, tendremos que

$$1 \le \Psi \le M$$

sobre V, gracias al inciso 5) del Lema 5.1. Definiendo para cada $i\in I$,

$$\varphi_i := \begin{cases} \frac{\psi_i(x)}{\Psi(x)} & \text{si } x\in V \\ 0 & \text{si } x\notin V \end{cases}$$

obtenemos la sucesión de funciones deseada. □

2. Teoremas de extensión para dominios regulares en espacios de tipo homogéneo

En primer lugar introducimos el tipo de dominios sobre los cuales estarán definidas las funciones de Sobolev que extenderemos. Dejamos para la sección final de referencias bibliográficas y comentarios adicionales un repaso de las distintas ideas asociadas a los dominios de extensión en espacios de Sobolev.

DEFINICIÓN 5.5. *Dado un espacio cuasimétrico (X, d) dotado de una medida de Borel μ, tal que sus bolas $B_d(x, r)$ son borelianas para todo $x \in X$ y $r > 0$, diremos que un subconjunto abierto $\Omega \subseteq X$ es regular si existe una constante $C_R > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$ y todo $r \in (0, 1]$ vale la desigualdad*

$$\mu(B_d(x,r) \cap \Omega) \geq C_R \mu(B_d(x,r)). \tag{5.3}$$

Esta desigualdad puede verse como una condición de densidad de medida uniformemente acotada por abajo para bolas chicas. La restricción $0 < r \leq 1$ puede flexibilizarse si μ es duplicante. En efecto, en tal caso, el conjunto satisfará la condición de regularidad (5.3) para cada $r \in (0, R_0]$, y $R_0 > 0$ fijo arbitrario. En caso que Ω sea acotado suele elegirse $R_0 := di\acute{a}m(\Omega)$.

Como propiedades de interés tenemos el siguiente lema.

LEMA 5.6. *Sea (X, d, μ) un espacio cuasimétrico con medida boreliana μ y $\Omega \subseteq X$ un subconjunto abierto regular. Entonces:*

1) $\mu(\partial\Omega) = 0$, donde $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$;

2) si (X, d, μ) es espacio de tipo homogéneo entonces $(\Omega, d_\Omega, \mu_\Omega)$ es subespacio de tipo homogéneo, donde d_Ω y μ_Ω designan las restricciones a Ω de d y μ, respectivamente;

3) si (X, d, μ) es espacio α-Ahlfors regular, también lo es $(\Omega, d_\Omega, \mu_\Omega)$;

4) si ρ es cuasimétrica con ρ-bolas medibles, tal que $\rho(x, y) \lesssim d(x, y)$ para todo $x, y \in \Omega$, y tal que $\mu(B_\rho(x, r)) \lesssim \mu(B_d(x, r))$ para todo $x \in \Omega$ y todo $r \in (0, 1]$, entonces Ω es regular en (X, ρ, μ).

DEMOSTRACIÓN. 1) Dado $x \in \partial\Omega$, consideremos una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en Ω tal que $d(x_j, x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Consideremos $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $d(x_j, x) < \frac{r}{C_d}$. Entonces, tendremos que $B\left(x_j, \frac{r}{C_d}\right) \subseteq B(x, r)$ y que $B\left(x, \frac{r}{C_d}\right) \subseteq B(x_j, r)$, por lo cual

$$\begin{aligned}
\mu\left(B\left(x_j, \frac{r}{C_d}\right) \cap \Omega\right) &\geq \frac{C_R}{C_\mu C_d^s} \mu(B(x_j, r)) \geq \frac{C_R}{C_\mu C_d^s} \mu\left(B\left(x, \frac{r}{C_d}\right)\right) \\
&\geq \frac{C_R}{C_\mu^2 C_d^{2s}} \mu(B(x, r)),
\end{aligned}$$

para j suficientemente grande, donde $s = \log_2 C_\mu$. Esto nos permite ver que

$$\mu(B(x,r) \cap \Omega) \geq \overline{\lim_{j\to\infty}} \mu\left(B\left(x_j, \frac{r}{C_d}\right) \cap \Omega\right) \geq \frac{C_R}{C_\mu^2 C_d^{2s}} \mu(B(x, r)),$$

esto es, la condición (5.3) puede extenderse a todo $x \in \partial\Omega$. Luego

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to 0^+} \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap\partial\Omega\right)}{\mu\left(B\left(x,r\right)\right)} &= \limsup_{r\to 0^+} \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap\overline{\Omega}\right)-\mu\left(B\left(x,r\right)\cap\Omega\right)}{\mu\left(B\left(x,r\right)\right)} \\ &\leq 1-\frac{C_R}{C_\mu^2 C_d^{2s}} < 1. \end{aligned}$$

Pero de acuerdo al inciso 3) del Teorema 3.4 aplicado a la función $f = \mathbf{1}_{\partial\Omega}$ se tiene que $\limsup_{r\to 0^+}\frac{\mu(B(x,r)\cap\partial\Omega)}{\mu(B(x,r))} = 1$ para μ-casi todo punto de X. Esto muestra el conjunto $\partial\Omega$ debe poseer medida nula.

2) Es claro que la no degeneración de la medida μ y la regularidad del dominio implican la no degeneración de la medida. Para demostrar la duplicación de μ_Ω sobre las bolas de la métrica d_Ω, observemos que dichas bolas son de la forma $B_{d_\Omega}(x,r) = \Omega\cap B_d(x,r)$, por lo cual

$$\begin{aligned} \mu\left(B_{d_\Omega}\left(x,2r\right)\right) &\leq \mu\left(B_d\left(x,2r\right)\right) \leq C_\mu \mu\left(B_d\left(x,r\right)\right) \\ &\leq \frac{C_\mu}{C_R}\mu\left(B_d\left(x,r\right)\cap\Omega\right) = \frac{C_\mu}{C_R}\mu\left(B_{d_\Omega}\left(x,r\right)\right). \end{aligned}$$

3) Obsérvese que la condición de regularidad nos permite ver que $\mu\left(B_d\left(x,r\right)\right) \approx \mu\left(B_{d_\Omega}\left(x,r\right)\right)$. Luego, si $\mu\left(B_d\left(x,r\right)\right) \approx r^\alpha$, entonces $\mu_\Omega\left(B_{d_\Omega}\left(x,r\right)\right) \approx \mu\left(B_{d_\Omega}\left(x,r\right)\right) \approx r^\alpha$, esto es, $(\Omega, d_\Omega, \mu_\Omega)$ es α-Ahlfors regular.

4) Teniendo en cuenta la comparabilidad $\mu\left(B_\rho\left(x,r\right)\right) \lesssim \mu\left(B_d\left(x,r\right)\right)$, la regularidad de Ω, el hecho que $B_d\left(x,r\right) \leq B_\rho\left(x,Ar\right)$ para alguna constante $A > 0$, y la duplicación de μ, se sigue que

$$\begin{aligned} \mu\left(B_\rho\left(x,r\right)\right) &\lesssim \mu\left(B_d\left(x,r\right)\right) \lesssim \mu\left(B_d\left(x,\frac{1}{A}r\right)\right) \\ &\lesssim \mu\left(B_d\left(x,\frac{1}{A}r\right)\cap\Omega\right) \\ &\lesssim \mu\left(B_\rho\left(x,r\right)\cap\Omega\right), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y todo $r \in (0, AR_0]$. Esto muestra la regularidad de Ω respecto de ρ, como queríamos demostrar $\square$

A fin de demostrar el resultado central de este capítulo con la mayor generalidad posible prescindiremos de la hipótesis de regularidad α-Ahlfors del espacio. Dado un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ), $s > 0$ y $1 \leq p < \infty$, consideramos el espacio de Sobolev $W^{s,p}(X) := \left\{ f \in L^p(X,\mu) \ / \ [f]_{W^{s,p}(X)} < \infty \right\}$ dotado de la seminorma

$$[f]_{W^{s,p}(X)} := \left(\int_X \int_X \frac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|^p}{d\left(x,y\right)^{sp}\mu\left(B\left(x,d\left(x,y\right)\right)\right)} d\mu\left(x\right)d\mu\left(y\right)\right)^{1/p},$$

el cual forma un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{W^{s,p}(X)} := \|f\|_{L^p(X,\mu)} + [f]_{W^{s,p}(X)}\,.$$

Para el siguiente teorema supondremos, sin pérdida de generalidad, que en el espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) que las d-bolas de la familia $\mathcal{V}_d$ son medibles, y que μ es duplicante y no degenerada sobre dicha familia.

TEOREMA 5.7. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, $\Omega \subseteq X$ un conjunto abierto regular, $1 < p < \infty$ y $0 < s < \frac{1}{\log_2 C_d}$. Entonces, existe un operador de extensión lineal $T : W^{s,p}(\Omega) \to W^{s,p}(X)$, tal que, para toda $f \in W^{s,p}(\Omega)$, la desigualdad*

$$\|Tf\|_{W^{s,p}(X)} \leq C\,\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

vale para alguna constante C independiente de f.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo al Lema 5.1 sean $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ y $(\varphi_i)_{i\in I}$ la descomposición de Whitney y una partición de la unidad de orden γ a determinar, respectivamente, asociadas a $V := X\backslash\overline{\Omega}$. Denotamos por $d(x) := dist\left(x,\overline{\Omega}\right)$. Recordemos de la demostración del Lema 5.1 que, para cada $i \in I$,

$$2C_d < \frac{d(x_i)}{\lambda r_i} \leq 4C_d^3,$$

y para cada $z \in B(x_i,\lambda r_i)$

$$1 \leq \frac{d(z)}{\lambda r_i} \leq 4C_d^4.$$

Considerando $\Lambda := 5\lambda C_d^2$, y teniendo en cuenta la condición 4) de dicho Lema, podemos ver que para cada $i \in I$ se satisface $B(x_i,\Lambda r_i) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Sea entonces $\{x_i^*\}_{i\in I}$ un subconjunto de puntos de $\overline{\Omega}$ tales que $x_i^* \in B(x_i, 5C_d^2\lambda r_i)$. Dada $f \in W^{s,p}(\Omega)$ definimos

$$Tf(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \sum\limits_{i\in I} m_f\left(B(x_i^*,r_i)\cap\Omega\right)\varphi_i(x) & \text{si } x \in X\setminus\overline{\Omega} \end{cases} \tag{5.4}$$

Donde consideraremos, dado que $\mu(\partial\Omega) = 0$, como $Tf(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Obsérvese por otra parte que la linealidad del operador surge de modo evidente a partir de su definición. Demostraremos que T es un operador acotado de $W^{s,p}(\Omega)$ en $W^{s,p}(X)$ en varias etapas.

1) Acotación en norma L^p.

Dado $x \in X\setminus\overline{\Omega}$ denotamos

$$I_x = \{i \in I \;:\; x \in B(x_i,\lambda r_i)\}\,.$$

Es claro que $\#(I_x) \leq M$, de acuerdo a la condición 5) del Lema 5.1. Además $\varphi_i(x) = 0$ para cada $i \notin I_x$. Por otra parte, para cada $i \in I_x$ se tiene que

$$B(x_i^*, r_i) \subseteq B(x, \eta_1 d(x)) \subseteq B(x_i^*, \theta_1 r_i), \tag{5.5}$$

con $\eta_1 := 5C_d^4$ y $\theta_1 := 20C_d^9\lambda$. En efecto, obsérvese que

$$d(x, x_i^*) \leq C_d \max(d(x_i^*, x_i), d(x_i, x)) = C_d \Lambda r_i,$$

y que, para $w \in B(x_i^*, r_i)$,

$$d(w, x) \leq C_d \max(d(w, x_i^*), d(x_i^*, x)) \leq 5\lambda C_d^4 r_i \leq 5C_d^4 d(x).$$

De modo análogo se demuestra la segunda inclusión. En vista de (5.5) y de la propiedad de duplicación de μ tenemos que $\mu(B(x, \eta_1 d(x))) \approx \mu(B(x_i^*, r_i))$, más específicamente,

$$\mu(B(x_i^*, r_i)) \leq \mu(B(x, \eta_1 d(x))) \leq C_\mu^{\xi_1} \mu(B(x_i^*, r_i)),$$

donde $\xi_1 = \inf\{n \in \mathbb{Z} : \theta_1 \leq 2^n\}$. Luego, ya que $\mu(B(x_i^*, r_i) \cap \Omega) \geq C_R \mu(B(x_i^*, r_i))$, por hipótesis de regularidad, y que $\sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq \sum_{i \in I_x} |m_f(B(x_i^*, r_i) \cap \Omega)| \varphi_i(x) \\
&\leq \frac{1}{C_R} \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) \frac{1}{\mu(B(x_i^*, r_i))} \int_{B(x_i^*, r_i) \cap \Omega} |f(z)| \, d\mu(z) \\
&\leq \frac{C_\mu^\xi}{C_R} \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) \frac{1}{\mu(B(x, \eta_1 d(x)))} \int_{B(x, \eta_1 d(x)) \cap \Omega} |f(z)| \, d\mu(z) \\
&\leq \frac{C_\mu^\xi}{C_R} M_d(\mathbf{1}_\Omega f)(x),
\end{aligned}$$

donde M_d es la Maximal de Hardy-Littlewood (3.1), la cual es acotada de $L^p(X, \mu)$ en $L^p(X, \mu)$ para $1 < p < \infty$ de acuerdo a la Proposición 3.2. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p(X)}^p &\leq \int_X |Tf(x)|^p \, d\mu(x) = \int_{X \setminus \Omega} |Tf(x)|^p \, d\mu(x) + \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \\
&\leq \left(\frac{C_\mu^\xi}{C_1}\right)^p \int_{X \setminus \Omega} |M_d(\mathbf{1}_\Omega f)(x)|^p \, d\mu(x) + \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&\leq \left(\frac{C_\mu^\xi}{C_1}\right)^p \int_X |M_d(\mathbf{1}_\Omega f)(x)|^p \, d\mu(x) + \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&\leq \left(\frac{C_\mu^\xi}{C_1} \|M_d\|_{L^p \to L^p}\right)^p \int_X |(\mathbf{1}_\Omega f)(x)|^p \, d\mu(x) + \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&= \left(\frac{C_\mu^\xi}{C_1} \|M_d\|_{L^p \to L^p} + 1\right)^p \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) = \left(C_{(\mu, \Omega, M_d)}\right)^p \|f\|_{L^p(\Omega)}^p
\end{aligned}$$

2) Acotación en la seminorma $W^{s,p}$.

Para llevar a cabo esta acotación tendremos en cuenta la siguiente descomposición

$$\begin{aligned}
[Tf]^p_{W^{s,p}(X)} &= \int_X \int_X \frac{|Tf(x) - Tf(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(x)\,d\mu(y) \\
&= \int_{\overline{\Omega}} \int_{\overline{\Omega}} (\ldots) + \int_{X\setminus\overline{\Omega}} \int_{\overline{\Omega}} (\ldots) + \int_{\overline{\Omega}} \int_{X\setminus\overline{\Omega}} (\ldots) + \int_{X\setminus\overline{\Omega}} \int_{X\setminus\overline{\Omega}} (\ldots) \\
&= A_1 + A_2 + A_2' + A_3
\end{aligned}$$

2.i) Acotación de A_1.

Puesto que para cada $x \in \Omega$ tenemos que $Tf(x) = f(x)$, y que $\mu(\partial\Omega) = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|Tf(x) - Tf(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(x)\,d\mu(y) \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(x)\,d\mu(y) = [f]^p_{W^{s,p}_{(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

2.ii) Acotación de A_2 y A_2'.

Puesto que $\mu(\partial\Omega) = 0$ bastará con considerar $y \in \Omega$. Dado $x \in X \setminus \overline{\Omega}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(y)| &= \left| \sum_{i\in I} m_f(B(x_i^*, r_i) \cap \Omega)\,\varphi_i(x) - f(y) \right| \\
&= \left| \sum_{i\in I_x} m_f(B(x_i^*, r_i) \cap \Omega)\,\varphi_i(x) - \sum_{i\in I_x} f(y)\,\varphi_i(x) \right| \\
&\leq \sum_{i\in I_x} \varphi_i(x) \fint_{B(x_i^*, r_i)\cap\Omega} |f(z) - f(y)|\,d\mu(z).
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder, para algún q con $1 < q < p$, la comparabilidad (5.5) y la regularidad de Ω, tendremos que

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(y)| &\leq \sum_{i\in I_x} \varphi_i(x) \left(\fint_{B(x_i^*, r_i)\cap\Omega} |f(z) - f(y)|\,d\mu(z) \right) \\
&\leq \frac{1}{C_R} \sum_{i\in I_x} \varphi_i(x) \left(\frac{1}{\mu[B(x_i^*, r_i)]} \int_{B(x_i^*, r_i)\cap\Omega} |f(z) - f(y)|\,d\mu(z) \right) \\
&\leq \frac{C_\mu^{\xi_1}}{C_R} \sum_{i\in I_x} \varphi_i(x) \left(\fint_{B(x,\eta_1 d(x))} \mathbf{1}_\Omega(z)\,|f(z) - f(y)|^q\,d\mu(z) \right)^{1/q} \\
&= \frac{C_\mu^{\xi_1}}{C_R} \left(\fint_{B(x,\eta_1 d(x))} \mathbf{1}_\Omega(z)\,|f(z) - f(y)|^q\,d\mu(z) \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

Observemos en esta última integral que $z \in B(x, \eta_1 d(x))$ y que, por otra parte, $y \in \Omega$, por lo cual $d(z,y) \leq C_d \eta_1 d(x,y)$. Esto es,

$$B(y, d(y,z)) \subseteq B(y, C_d \eta_1 d(x,y))$$

y teniendo en cuenta la comparabilidad de $\mu B(y, d(x, y)) \approx \mu(B(x, d(x, y)))$ y la duplicación de μ, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(B(z, d(y, z))) &\leq C_\mu C_d^s \mu(B(y, d(y, z))) \\ &\leq C_\mu C_d^s C_\mu^{\xi_3} \mu(B(y, d(x, y))) \leq C_\mu^{\xi_3+2} C_d^{2\omega} \mu(B(x, d(x, y))) \end{aligned}$$

con $\xi_3 = \text{ínf}\{n \in \mathbb{Z} : C_d \eta_1 \leq 2^n\}$ y $\omega = \log_2 C_\mu$. Esto nos permite deducir que

$$\begin{aligned} \frac{|Tf(x) - Tf(y)|}{d(x, y)^s \mu(B(x, d(x, y)))^{1/p}} &\leq \frac{C_\mu^{\xi_1}}{C_R} \left(\fint_{B(x, \eta_1 d(x))} \frac{\mathbf{1}_\Omega(z) |f(z) - f(y)|^q}{d(x, y)^{qs} \mu(B(x, d(x, y)))^{q/p}} d\mu(z) \right)^{1/q} \\ &\leq C_{(d,\mu,p,s,\Omega)} \left(\fint_{B(x, \eta_1 d(x))} \frac{\mathbf{1}_\Omega(z) |f(z) - f(y)|^q}{d(z, y)^{qs} \mu(B(z, d(y, z)))^{q/p}} d\mu(z) \right)^{1/q} \\ &\leq C_{(d,\mu,p,s,\Omega)} \left(\fint_{B(x, \eta_1 d(x))} H^y(z)^q d\mu(z) \right)^{1/q} \end{aligned}$$

donde $C_{(d,\mu,p,s,\Omega)} = \frac{C_\mu^{\frac{(\xi_3+2)}{p}+1} C_d^{\frac{\omega+s+1}{p}} \eta_1^{1/p}}{C_R}$ y la función H^y designa

$$H^y(z) := \mathbf{1}_\Omega(z) \frac{|f(z) - f(y)|}{d(z, y)^s \mu(B(z, d(z, y)))^{1/p}}.$$

Si definimos por $M_{d,q}$ al operador

$$M_{d,q}(f)(x) := (M_d(|f|^q)(x))^{1/q},$$

donde M_d denota el operador maximal de Hardy-Littewood dado por (3.1) en el Capítulo 3, tendremos que

$$\frac{|Tf(x) - Tf(y)|}{d(x, y)^s \mu(B(x, d(x, y)))^{1/p}} \leq C_{(d,\mu,p,s,\Omega)} M_{d,q}(H^y)(x).$$

Teniendo en cuenta la Proposición 3.2 podemos deducir que el operador M_d es continuo de $L^{p/q}(X, \mu)$, en sí mismo, para $p > q$, lo cual implica que el operador $M_{d,q}$ es acotado en $L^p(X, \mu)$. Además, $H^y \in L^p(X)$ para μ-casi todo $y \in \Omega$, debido a que $[f]_{W^{s,p}_{(\Omega)}} < \infty$. Luego

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{y \in \Omega} \int_{x \in X \setminus \Omega} \frac{|Tf(x) - Tf(y)|^p}{d(x, y)^{sp} \mu(B(x, d(x, y)))} d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq C_{(d,\mu,p,s,\Omega)}^p \int_{y \in \Omega} \int_{x \in X \setminus \Omega} |M_{d,q}(H^y)(x)|^p d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq C_{(d,\mu,p,s,\Omega)}^p \int_\Omega \|M_{d,q}(H^y)\|_{L^p(X)}^p d\mu(y) \\ &= C_{(d,\mu,p,s,\Omega)}^p \|M_{d,q}\|_{L^{p/q} \to L^{p/q}}^{p/q} \int_\Omega \int_X \mathbf{1}_\Omega(x) \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x, y)^{sp} \mu(B(x, d(x, y)))} d\mu_{(x)} d\mu_{(y)} \\ &\leq C_{(d,\mu,p,s,\Omega)}^p \|M_{d,q}\|_{L^{p/q} \to L^{p/q}}^{p/q} [f]_{W^{s,p}_{(\Omega)}}^p. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la comparabilidad $\mu\left(B\left(x,d\left(x,y\right)\right)\right)\approx\mu\left(B\left(y,d\left(x,y\right)\right)\right)$ la acotación de A_2' se sigue del mismo modo.

2.iii) Acotación de A_3.

Dado $x\in X\setminus\overline{\Omega}$ definimos

$$\begin{aligned}C_x^1 &= \left\{y\in X\setminus\overline{\Omega}\ :\ d\left(x,y\right)\geq\frac{1}{2C_d}\max\left\{d\left(x\right),d\left(y\right)\right\}\right\},\\ C_x^2 &= \left\{y\in X\setminus\overline{\Omega}\ :\ d\left(x,y\right)<\frac{1}{2C_d}\max\left\{d\left(x\right),d\left(y\right)\right\}\right\},\end{aligned}$$

y descomponemos

$$\begin{aligned}A_3 &= \int_{X\setminus\Omega}\int_{X\setminus\Omega}\frac{\left|Tf\left(x\right)-Tf\left(y\right)\right|^p}{d\left(x,y\right)^{sp}\mu\left(B\left(x,d\left(x,y\right)\right)\right)}d\mu\left(x\right)d\mu\left(y\right)\\ &= \int_{X\setminus\Omega}\int_{C_x^1}\left(\cdots\right)d\mu\left(y\right)d\mu\left(x\right)+\int_{X\setminus\Omega}\int_{C_x^2}\left(\cdots\right)d\mu\left(y\right)d\mu\left(x\right)\\ &= A_{3,1}+A_{3,2}.\end{aligned}$$

Para acotar $A_{3,1}$ utilizamos un argumento similar al de 2.ii). Teniendo en cuenta que $\sum_{i\in I_x}\varphi_i\left(x\right)=1=\sum_{j\in I_y}\varphi_j\left(y\right)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}Tf\left(x\right)-Tf\left(y\right) &= \sum_{i\in I_x}\sum_{j\in I_y}\varphi_i\left(x\right)\varphi_j\left(y\right)\left[m_f\left(B\left(x_i^*,r_i\right)\cap\Omega\right)-m_f\left(B\left(x_j^*,r_j\right)\cap\Omega\right)\right]\\ &= \sum_{i\in I_x}\sum_{j\in I_y}\varphi_i\left(x\right)\varphi_j\left(y\right)\fint_{B\left(x_i^*,r_i\right)\cap\Omega}\fint_{B\left(x_j^*,r_j\right)\cap\Omega}\left(f\left(z\right)-f\left(w\right)\right)d\mu\left(w\right)d\mu\left(z\right).\end{aligned}$$

Nuevamente la regularidad del dominio Ω nos permite deducir que

$$\left|Tf\left(x\right)-Tf\left(y\right)\right|\leq\left(\frac{C_\mu^{\xi_1}}{C_R}\right)^2\left(\fint_{B_x}\fint_{B_y}\left|f\left(z\right)-f\left(w\right)\right|^q\mathbf{1}_\Omega\left(z\right)\mathbf{1}_\Omega\left(w\right)d\mu\left(w\right)d\mu\left(z\right)\right)^{1/q},$$

con $B_x=B\left(x,\eta_1 d\left(x\right)\right)$ y $B_y=B\left(y,\eta_1 d\left(y\right)\right)$. Por otra parte, ya que $z\in B_x$, $w\in B_y$ y $d\left(x,y\right)\geq\frac{1}{2C_d}\max\left\{d\left(x\right),d\left(y\right)\right\}$, deducimos que

$$d\left(z,w\right)\leq 2\eta_1 C_d^3 d\left(x,y\right)$$

y

$$B\left(z,d\left(w,z\right)\right)\subseteq B\left(x,2\eta_1 C_d^4 d\left(x,y\right)\right),$$

por lo cual

$$\mu\left(B\left(z,d\left(w,z\right)\right)\right)\leq C_\mu^{\xi_4}\mu\left(B\left(x,d\left(x,y\right)\right)\right),$$

con $\xi_4=\inf\left\{n\in\mathbb{Z}:2\eta_1 C_d^4\leq 2^n\right\}$. Luego, si consideramos

$$F\left(z,w\right):=\frac{\left|f\left(z\right)-f\left(w\right)\right|}{d\left(z,w\right)^s\mu\left(B\left(z,d\left(z,w\right)\right)\right)^{1/p}}\mathbf{1}_\Omega\left(z\right)\mathbf{1}_\Omega\left(w\right)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{|Tf(x)-Tf(y)|}{d(x,y)^s\,\mu(B(x,d(x,y)))^{1/p}} \leq \\
\leq\ & \left(\frac{C_\mu^{\xi_1}}{C_R}\right)^2\left(\fint_{B_x\cap\Omega}\fint_{B_y\cap\Omega}\frac{|f(z)-f(w)|^q}{d(x,y)^{sq}\,\mu(B(x,d(x,y)))^{q/p}}d\mu(w)\,d\mu(z)\right)^{1/q}\\
\leq\ & C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)}\left(\fint_{B_x}\fint_{B_y}\mathbf{1}_\Omega(z)\,\mathbf{1}_\Omega(w)\,\frac{|f(z)-f(w)|^q}{d(z,w)^{qs}\,\mu(B(z,d(z,w)))^{q/p}}d\mu(w)\,d\mu(z)\right)^{1/q}\\
=\ & C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)}\left(\fint_{B_x}\fint_{B_y}F(z,w)^q\,d\mu(w)\,d\mu(z)\right)^{1/q}\\
\leq\ & C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)}\left(\fint_{B_x}[M_{d,q}(F(z,\cdot))(y)]^q\,d\mu(z)\right)^{1/q}\\
\leq\ & C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)}M_{d,q}(G(\cdot,y))(x)
\end{aligned}$$

donde $G(z,y) := M_{d,q}(F(z,\cdot))(y)$ y $C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)} = \frac{C_\mu^{2\xi_1+\frac{\xi_4}{p}}}{C_R^2}(2\eta_1 C_d^3)^s$. Obsérvese que de la acotación del operador M_q podemos ver que

$$\begin{aligned}
\int_X \|M_{d,q}(G(\cdot,y))\|_{L^p}^p\,d\mu(y) &\leq \|M_d\|_{L^{p/q}\to L^{p/q}}^{p/q}\int_X\|G(\cdot,y)\|_{L^p}^p\,d\mu(y)\\
&= \|M_d\|_{L^{p/q}\to L^{p/q}}^{p/q}\int_X\int_X|G(x,y)|^p\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&= \|M_d\|_{L^{p/q}\to L^{p/q}}^{p/q}\int_X\|M_{d,q}(F(x,\cdot))\|_{L^p}^p\,d\mu(x)\\
&\leq \|M_d\|_{L^{p/q}\to L^{p/q}}^{2p/q}\int_X\|F(x,\cdot)\|_{L^p}^p\,d\mu(x)\\
&= \|M_d\|_{L^{p/q}\to L^{p/q}}^{2p/q}\int_X\int_X|F(x,y)|^p\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&= \|M_d\|_{L^{p/q}\to L^{p/q}}^{2p/q}[f]_{W^{s,p}_{(\Omega)}}^p
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
A_{3,1} &= \int_{X\setminus\Omega}\int_{C_y^1}\frac{|Tf(x)-Tf(y)|}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x,d(x,y)))}^p d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\leq \left(C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)}\right)^p\int_{\Omega^*\setminus\Omega}\int_{C_y^1}|M_{d,q}(G(\cdot,y))(x)|^p\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\leq \left(C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)}\right)^p\int_X\int_X|M_{d,q}(G(\cdot,y))(x)|^p\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\leq \left(C'_{(d,\mu,\alpha,p,s,\Omega)}\right)^p\|M_d\|_{L^{p/q}\to L^{p/q}}^{2p/q}[f]_{W^{s,p}_{(\Omega)}}^p
\end{aligned}$$

Por último, acotemos $A_{3,2}$. Sea $x \in X \setminus \overline{\Omega}$ e $y \in C_x^2$. Teniendo en mente que $(\varphi_i)_{i\in I}$ es partición de la unidad, tendremos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_x\cup I_y} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y)) &= \sum_{i\in I_x\setminus I_y} (\cdots) + \sum_{i\in I_x\setminus I_y} (\cdots) + \sum_{i\in I_x\cap I_y} (\cdots) \\
&= \sum_{i\in I_x\setminus I_y} \varphi_i(x) - \sum_{i\in I_x\setminus I_y} \varphi_i(y) + \sum_{i\in I_x\cap I_y} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y)) \\
&= \sum_{i\in I_x} \varphi_i(x) - \sum_{i\in I_y} \varphi_i(y) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto, si denotamos $B_i^* = B(x_i^*, r_i)$ y $B_x' = B(x, \eta_2 d(x))$, con $\eta_2 := 15C_d^6$, podemos ver que

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(y)| &= \left|\sum_{i\in I_x} m_f(B_i^* \cap \Omega)\varphi_i(x) - \sum_{i\in I_y} m_f(B_i^* \cap \Omega)\varphi_i(y)\right| \\
&= \left|\sum_{i\in I_x\cup I_y} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))\, m_f(B_i^* \cap \Omega)\right| \\
&= \left|\sum_{i\in I_x\cup I_y} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))\left(m_f(B_i^* \cap \Omega) - m_f(B_x' \cap \Omega)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la condición 2) del Lema 5.4 obtenemos que

$$|Tf(x) - Tf(y)| \le L \sum_{i\in I_x\cup I_y} \frac{d(x,y)^\gamma}{r_i^\gamma} |m_f(B_i^* \cap \Omega) - m_f(B_x' \cap \Omega)|$$

esto es,

$$|Tf(x) - Tf(y)| \le \frac{L}{C_R} \sum_{i\in I_x\cup I_y} \frac{d(x,y)^\gamma}{r_i^\gamma} \left[\frac{1}{\mu(B_i^*)} \int_{B_i^*\cap\Omega} |I(x,z)|^q \, d\mu(z)\right]^{1/q} \tag{5.6}$$

donde $I(x,z) = \left(\frac{1}{\mu(B_x'\cap\Omega)} \int_{B_x'\cap\Omega} |f(z) - f(w)|^p \, d\mu(w)\right)^{1/p}$. Recordemos que dado $i \in I_x$, con $x \in X \setminus \overline{\Omega}$, se tiene que $d(x) \approx r_i$ y que existe comparabilidad entre B_i^* y la bola $B(x, Cd(x))$, para alguna constante $C > 0$. Veamos que esto puede extenderse a todo $i \in I_x \cup I_y$ con $y \in C_x^2$. En efecto, dado $w \in \Omega$ arbitrario se tiene que $d(x) \le d(x,w) \le C_d(d(x,y) + d(y,w))$, por lo cual

$$d(x) \le C_d\left(\frac{1}{2C_d}(d(x) + d(y)) + d(y)\right) = \frac{1}{2}d(x) + \left(\frac{1}{2} + C_d\right)d(y),$$

esto es $d(x) \le 3C_d d(y)$. Del mismo modo surge que $d(y) \le 3C_d d(x)$. Estas desigualdades permiten ver que $d(x) \approx d(y) \approx r_i$ y que $B(y, \eta_1 d(y)) \subseteq B(x, \eta_2 d(x))$, donde recordemos que $\eta_1 := 5C_d^4$. Luego, si $i \in I_y$ tenemos que

$$B_i^* = B\left(x_i^*, r_i\right) \subseteq B\left(y, \eta_1 d\left(y\right)\right) \subseteq B\left(x, \eta_2 d\left(x\right)\right) = B_x' \tag{5.7}$$

Por otra parte, la comparabilidad $d\left(x\right) \approx d\left(y\right)$ y el hecho que $y \in B\left(x_i, \lambda r_i\right) \cap C_x^2$ también nos permite deducir que

$$B_x' = B\left(x, \eta_2 d\left(x\right)\right) \subseteq B\left(x_i^*, \theta_2 r_i\right) \tag{5.8}$$

con $\theta_2 := 180C_d^{12}\lambda$. En conclusión, cualquiera sea $i \in I_x \cup I_y$, tenemos que $d\left(x\right) \leq 12C_d^5 r_i$, y que, gracias a (5.7) y (5.7),

$$\mu\left(B_i^*\right) \approx \mu\left(B_x'\right),$$

donde $B_x' := B\left(x, \eta_2 d\left(x\right)\right)$. Más aún, estas mismas inclusiones y la hipótesis de regularidad del dominio nos permiten deducir que

$$\mu\left(B_x'\right) \lesssim \mu\left(B_i^*\right) \lesssim \mu\left(B_i^* \cap \Omega\right) \lesssim \mu\left(B_x' \cap \Omega\right).$$

Por lo tanto, haciendo uso de estas acotaciones en 5.6 tendremos que

$$\begin{aligned} \left|Tf\left(x\right) - Tf\left(y\right)\right| &\leq \frac{L}{C_R} \sum_{i \in I_x \cup I_y} \frac{d\left(x,y\right)^\gamma}{r_i^\gamma} \left[\frac{1}{\mu\left(B_i^*\right)} \int_{B_i^* \cap \Omega} \left|I\left(x,z\right)\right|^q d\mu\left(z\right)\right]^{1/q} \\ &\leq C_{(d,\mu,\Omega,L,M,\gamma)} \frac{d\left(x,y\right)^\gamma}{d\left(x\right)^\gamma} \left[\frac{1}{\mu\left(B_x'\right)} \int_{B_x'} \left|J\left(x,z\right)\right|^q d\mu\left(z\right)\right]^{1/q} \end{aligned}$$

donde $J\left(x,z\right) := \left(\frac{1}{\mu\left(B_x'\right)} \int_{B_x'} \mathbf{1}_\Omega\left(z\right) \mathbf{1}_\Omega\left(w\right) \left|f\left(z\right) - f\left(w\right)\right|^p d\mu\left(w\right)\right)^{1/p}$. Por otra parte, si tenemos en cuenta las variables z, w de los integrandos, es claro que

$$d\left(z,w\right) \leq C_d \eta_2 d\left(x\right) \quad \text{y} \quad B\left(z, d\left(z,w\right)\right) \subseteq B\left(x, C_d \eta_2 d\left(x\right)\right)$$

por lo cual

$$\mu\left(B\left(z, d\left(w,z\right)\right)\right) \leq C_\mu^{\xi_5} \mu\left(B\left(x, d\left(x\right)\right)\right)$$

con $\xi_5 = \text{ínf}\{n \in \mathbb{Z} : C_d \eta_2 \le 2^n\}$. Teniendo en cuenta que $\mu(B(x, d(x))) \approx \mu(B'_x)$ tendremos que

$$\begin{aligned}
J(x,z) &\le d(x)^s \mu(B(x,d(x)))^{1/p} \left(\frac{1}{\mu(B'_x)} \int_{B'_x} \frac{\mathbf{1}_\Omega(z)\,\mathbf{1}_\Omega(w)\,|f(z)-f(w)|^p}{d(x)^{sp}\,\mu(B(x,d(x)))} d\mu(w) \right)^{1/p} \\
&\le C_{(d,\mu)} d(x)^s \mu(B(x,d(x)))^{1/p} \frac{1}{\mu(B'_x)^{1/p}} \left(\int_{B'_x} \frac{\mathbf{1}_\Omega(z)\,\mathbf{1}_\Omega(w)\,|f(z)-f(w)|^p}{d(z,w)^{sp}\,\mu(B(z,d(w,z)))} d\mu(w) \right)^{1/p} \\
&\le C_{(d,\mu)} d(x)^s \left(\int_{B'_x} F(z,w)^p \, d\mu(w) \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

donde

$$F(z,w) := \frac{|f(z)-f(w)|}{d(z,w)^s \mu(B(z,d(z,w)))^{1/p}} \mathbf{1}_\Omega(z)\,\mathbf{1}_\Omega(w).$$

Luego

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(y)| &\lesssim \frac{d(x,y)^\gamma}{d(x)^\gamma} \left[\frac{1}{\mu(B'_x)} \int_{B'_x} |J(x,z)|^q \, d\mu(z) \right]^{1/q} \\
&\lesssim \frac{d(x,y)^\gamma}{d(x)^{\gamma-s}} \left[\frac{1}{\mu(B'_x)} \int_{B'_x} \left(\int_{B_x} F(z,w)^p \, d\mu(w) \right)^{q/p} d\mu(z) \right]^{1/q} \\
&\lesssim \frac{d(x,y)^\gamma}{d(x)^{\gamma-s}} M_{d,q}(H)(x)
\end{aligned}$$

por lo cual, si denotamos

$$H(z) := \left(\int_{B_x} F(z,w)^p \, d\mu(w) \right)^{1/p}$$

podemos ver que

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(y)| &\le C_{(d,\mu,\Omega,L,M,\gamma)} \frac{d(x,y)^\gamma}{d(x)^{\gamma-s}} \left[\frac{1}{\mu(B'_x)} \int_{B'_x} H^q(z) \, d\mu(z) \right]^{1/q} \\
&= C_{(d,\mu,\Omega,L,M,\gamma)} \frac{d(x,y)^\gamma}{d(x)^{\gamma-s}} M_{d,q}(H)(x)
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_{X\setminus\Omega} \int_{C_x^2} \frac{|Tf(x) - Tf(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu_{(y)} d\mu_{(x)}$$

$$\lesssim \int_{X\setminus\Omega} \int_{C_x^2} \frac{d(x,y)^{\gamma p - sp}}{d(x)^{(\gamma-s)p}\,\mu(B(x,d(x,y)))} |M_{d,q}(H)|^p(x) \, d\mu(y) \, d\mu(x)$$

Teniendo en cuenta que $C_x^2 \subseteq B(x, 2d(x))$ obsérvese que

$$\begin{aligned} \int_{C_x^2} \frac{d(x,y)^{\gamma p - sp}}{d(x)^{(\gamma - s)p}\, \mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(y) &\leq \frac{1}{d(x)^{(\gamma-s)p}} \int\limits_{B(x,2d(x))} \frac{d(x,y)^{(\gamma-s)p}}{\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu_{(y)} \\ &\leq \frac{2^{2(\gamma-s)p}}{2^{(\gamma-s)p}-1} C_\mu, \end{aligned}$$

gracias al Lema 4.1. Esto muestra que debemos escoger un orden de regularidad $\gamma \in (s, \frac{1}{\log_2 C_d}]$ para la partición de la unidad $(\varphi_i)_{i\in I}$ haciendo uso del Lema 5.4. En conclusión

$$\int\limits_{X\setminus\Omega} \int\limits_{C_x^2} \frac{|Tf(x) - Tf(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\, \mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(y)\, d\mu(x) \leq C \int\limits_{X\setminus\Omega} |M_{d,q}(H)|^p(x)\, d\mu(x)$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left\| M_{d,q}(H) \right\|_{L^p(X)}^p \leq C \left\| M_d \right\|_{L^{p/q} \to L^{p/q}}^{p/q} \int\limits_X |H(x)|^p\, d\mu(x) \\ &= C_{(d,\mu,M,L,\gamma,\alpha,M_d)} \int\limits_\Omega \int\limits_{B_x \cap \Omega} \frac{|f(x) - f(w)|^p}{d(x,y)^{sp}\, \mu(B(x,d(x,y)))} d\mu_{(w)} d\mu_{(x)} \leq C_{(d,\mu,M,L,\gamma,\alpha,M_d)} [f]_{W^{s,p}_{(\Omega)}}^p \end{aligned}$$

Esta desigualdad culmina la demostración. □

Teniendo en cuenta lo analizado en la primera sección del Capítulo 1, puede observarse que el Teorema es válido para cada $s \in (0, ind(X,d))$ siempre y cuando pueda determinarse una cuasimétrica $\rho \approx d$ con $s < \frac{1}{\log_2 C_\rho} \leq ind(X,d)$, tal que las ρ-bolas sean medibles, y tal que μ sea no degenerada y duplicante sobre $\mathcal{V}_\rho$.

Por otra parte, como caso particular a destacar tenemos el siguiente corolario, el cual hace uso de la seminorma de Sobolev

$$[f]_{W^{s,p}(X)} := \left(\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{sp+\alpha}} d\mu(x)\, d\mu(y) \right)^{1/p}$$

COROLARIO 5.8. *Sea (X, d, μ) un espacio α-Ahlfors regular estándar, $\Omega \subseteq X$ un conjunto abierto regular, $1 < p < \infty$ y $0 < s < \frac{1}{\log_2 C_d}$. Entonces, existe un operador de extensión lineal $T : W^{s,p}(\Omega) \to W^{s,p}(X)$, tal que, para toda $f \in W^{s,p}(\Omega)$, la desigualdad*

$$\|Tf\|_{W^{s,p}(X)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

vale para alguna constante C independiente de f.

DEMOSTRACIÓN. Basta recordar que, si (X, d, μ) es espacio α-Ahlfors regular estándar, entonces

$$\mu(B(x, d(x,y))) \approx d(x,y)^\alpha$$

por lo cual se tiene la siguiente equivalencia de seminormas

$$\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\, \mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(x)\, d\mu(y) \approx \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{sp+\alpha}} d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Aplicando el teorema anterior y teniendo en cuenta esta equivalencia se sigue el corolario. $\square$

Como última observación de interés destacamos la siguiente propiedad de las seminormas de Sobolev utilizadas: no es necesario definir la extensión sobre todo el espacio, sino que es necesario hacerlo sobre una corona de puntos cercanos (un abierto inflado del dominio) a la frontera.

LEMA 5.9. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, sea $\Omega \subseteq X$ un subconjunto abierto regular, $1 \leq p < \infty$, y $s > 0$. Sea $\Omega_\eta = \{x \in X \ / \ dist\,(x, \Omega) \leq \eta\}$ para algún $\eta > 0$, y sea $\psi \in \mathcal{C}^{0,r}(X, d)$, con $s < r \leq \frac{1}{\log_2 C_d}$, tal que $\mathbf{1}_\Omega \leq \psi \leq \mathbf{1}_{\Omega_\eta}$. Entonces el operador, $M_\psi f := \psi f$, esto es,*

$$S_\psi f(x) := \begin{cases} \psi(x) f(x) \ \textit{si } x \in \Omega_\eta \\ 0 \ \textit{si } x \in X \setminus \Omega_\eta \end{cases}$$

es lineal y continuo de $W^{s,p}(\Omega_\eta)$ en $W^{s,p}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos $\rho(x, y) = \mu(B(x, d(x, y)))$. Como $0 \leq \psi \leq 1$ es claro que

$$\|S_\psi f\|_{L^p(X)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega_\eta)} \tag{5.9}$$

Para acotar la seminorma $[S_\psi f]^p_{W^{s,p}(X)}$ tenemos en cuenta que está soportada en $(X \times \Omega_\eta) \cup (\Omega_\eta \times X)$, por lo cual

$$\begin{aligned} [S_\psi f]^p_{W^{s,p}(X)} &= \int_X \int_X \frac{|S_\psi f(x) - S_\psi f(y)|^p}{d(x, y)^{sp} \rho(x, y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega_\eta} \int_{\Omega_\eta} (\ldots) + \int_{\Omega_\eta} \int_{X \setminus \Omega_\eta} (\ldots) + \int_{X \setminus \Omega_\eta} \int_{\Omega_\eta} (\ldots) \\ &= I + II + III \end{aligned}$$

En primer lugar, descomponemos la integral I teniendo en cuenta que

$$\Omega_\eta \times \Omega_\eta = \{(x, y) : d(x, y) \geq 1\} \cup \{(x, y) : d(x, y) < 1\}.$$

Sea

$$\begin{aligned} A_I &= \int\int_{\substack{d(x,y) \geq 1 \\ (x,y) \in \Omega_\eta \times \Omega_\eta}} \frac{|S_\psi f(x) - S_\psi f(y)|^p}{d(x, y)^{sp} \rho(x, y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ B_I &= \int\int_{\substack{d(x,y) < 1 \\ (x,y) \in \Omega_\eta \times \Omega_\eta}} \frac{|S_\psi f(x) - S_\psi f(y)|^p}{d(x, y)^{sp} \rho(x, y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \end{aligned}$$

Para acotar el primer término tenemos en cuenta la acotación de ψ, y hacemos uso del teorema de Fubini

$$\begin{aligned} A_I &\leq 2^{p-1} \int\int_{d(x,y)\geq 1} \frac{|f(x)|^p + |f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\Omega_\eta} |f(x)|^p \int_{\Omega_\eta \setminus B(x,1)} \frac{d(x,y)^{-sp}}{\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\quad + 2^{p-1} \int_{\Omega_\eta} |f(y)|^p \int_{\Omega_\eta \setminus B(y,1)} \frac{d(x,y)^{-sp}}{\rho(x,y)} d\mu(x)\, d\mu(y), \end{aligned}$$

lo que nos permite deducir, gracias al Lema 4.1, que

$$A_I \leq 2^p C_\mu \frac{2^{sp}}{2^{sp}-1} \|f\|^p_{L^p(\Omega_\eta)}. \tag{5.10}$$

Por otra parte, para acotar B_I agregamos los términos $\pm\psi(y) f(x)$ y hacemos uso de la regularidad y la acotación de ψ:

$$\begin{aligned} B_I &= \int_{\Omega_\eta}\int_{\Omega_\eta \cap B(x,1)} \frac{|\psi(x) f(x) - \psi(y) f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\leq \int_{\Omega_\eta}\int_{\Omega_\eta \cap B(x,1)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\quad + \int_{\Omega_\eta}\int_{\Omega_\eta \cap B(x,1)} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|^p |f(x)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\leq [f]^p_{W^{s,p}(\Omega_\eta)} + \int_{\Omega_\eta} |f(x)|^p \int_{\Omega_\eta \cap B(x,1)} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\ &\leq [f]^p_{W^{s,p}(\Omega_\eta)} + [\psi]^p_{\mathcal{C}^{0,r}(X,d)} \int_{\Omega_\eta} |f(x)|^p \int_{B(x,1)} \frac{d(x,y)^{(r-s)p}}{\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Luego

$$B_I \leq [f]^p_{W^{s,p}(\Omega_\eta)} + \frac{2^{(r-s)p}}{2^{(r-s)p}-1} C_\mu [\psi]^p_{\mathcal{C}^{0,r}(X,d)} \|f\|^p_{L^p(\Omega_\eta)}. \tag{5.11}$$

Para acotar II, tenemos en cuenta la regularidad de ψ, que $sop\,(\psi) \subseteq \Omega_\eta$, $0 \leq \psi \leq 1$, y el Lema 4.1, lo cual nos permite deducir que

$$\begin{aligned}
II &= \int\limits_{\Omega_\eta} \int\limits_{X\setminus\Omega_\eta} \frac{|\psi(x) f(x)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&= \int\limits_{\Omega_\eta} \int\limits_{X\setminus\Omega_\eta} \frac{|(\psi(x)-\psi(y)) f(x)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&\leq \int\limits_{\Omega_\eta} |f(x)|^p \int\limits_{X\setminus\Omega_\eta} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&\leq \int\limits_{x\in\Omega_\eta} |f(x)|^p \int\limits_{(X\setminus\Omega_\eta)\cap B(x,1)} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&\quad + \int\limits_{x\in\Omega_\eta} |f(x)|^p \int\limits_{(X\setminus\Omega_\eta)\setminus B(x,1)} \frac{|\psi(x)|^p}{d(x,y)^{sp}\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&\leq [\psi]^p_{\mathcal{C}^{0,r}(X,d)} \int\limits_{x\in\Omega_\eta} |f(x)|^p \int\limits_{y\in B(x,1)} \frac{d(x,y)^{(r-s)p}}{\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&\quad + \int\limits_{x\in\Omega_\eta} |f(x)|^p \int\limits_{X\setminus B(x,1)} \frac{d(x,y)^{-sp}}{\rho(x,y)} d\mu(y)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

esto es

$$II \leq [\psi]^p_{\mathcal{C}^{0,r}(X,d)}\, C_\mu \frac{2^{(r-s)p}}{2^{(r-s)p}-1} \|f\|^p_{L^p(\Omega_\eta)} + C_\mu \frac{2^{sp}}{2^{sp}-1} \|f\|^p_{L^p(\Omega_\eta)} \tag{5.12}$$

De modo análogo se sigue la acotación de III, teniendo en cuenta que $\rho(x,y) \approx \rho(y,x)$. En vista de (5.10), (5.11), (5.12) y (5.9) podemos concluir que

$$\|S_\psi f\|^p_{W^{s,p}(X)} \leq C_{(\mu,\alpha,s,p,\eta,\psi)} \|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega_\eta)}$$

por lo cual $S_\psi : W^{s,p}(\Omega_\eta) \to W^{s,p}(X)$ es acotado. □

3. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Sección 1. Las ideas expuestas en el Lema 5.1 y en el Lema 5.4 se deben a Dorina Mitrea, Irina Mitrea, Marius Mitrea y Sylvie Monniaux, y pueden encontrarse en [MMMM13] (Capítulo 4).

Sección 2. Cabe hacer aquí una breve genealogía del análisis de los dominios de extensión en espacios de Sobolev para entender el por qué de la afluencia del concepto de dominio regular. Recordemos que de los resultados de extensión más antiguos en los espacios $W^{k,p}(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dotado de la métrica usual y la medida de Lebesgue n-dimensional, se tiene que si Ω es un dominio con frontera C^1, esto es, un dominio cuya frontera, a grandes rasgos, está formada por una cantidad finita de gráficas de funciones suaves, entonces existe un operador de extensión lineal acotado $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, para cada

$p \in [1, \infty]$. Este resultado puede encontrarse en casi toda la literatura elemental acerca de espacios de Sobolev, por ejemplo [Eva10]. En un articulo de 1961, [Cal61], Alberto Calderón, introduciendo nuevas técnicas, extiende este resultado a espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, donde Ω es un dominio Lipschitz, y para el rango $1 < p < \infty$. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice dominio especial de Lipschitz si es de la forma

$$\Omega = \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n > \varphi(x')\right\}$$

para alguna función φ en la clase de Lipschitz $\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. A su vez, se dice que Ω es un dominio Lipschitz si cada punto de $\partial\Omega$ posee un entorno V tal que $T(V \cap \Omega)$ es un dominio especial Lipschitz para alguna transformación ortogonal T. Elías Stein en [Ste70], extiende este resultado de Calderón al rango $1 \leq p \leq \infty$ y a dominios que da en llamar "dominios con frontera mínimamente suave". Más aún, logra definir un operador de extensión que es independiente del orden de suavidad $k \in \mathbb{N}$. Los dominios con frontera mínimamente suave son aquellos para los cuales existen $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ y $M > 0$, junto a una familia a lo sumo numerable, $(V_j)_{j \in I}$, de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que, por una parte, para cada $x \in \partial\Omega$ existe un correspondiente $j \in I$ para el cual $B(x, \varepsilon) \subseteq V_j$; y, a su vez, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\sum_{j \in I} 1_{V_j}(x) \leq N$ (esto es, el solapamiento de los V_j está acotado uniformemente) y, por último, para cada $j \in I$ existe un dominio de Lipschitz Ω_j, con función de Lipschitz asociada φ_j , tal que $V_j \cap \Omega_j = \Omega \cap \Omega_j$, y $\left[\varphi_j\right]_{Lip} \leq M$. Esta clase de dominios incluye a la familia de dominios de frontera C^1, los dominios Lipschitz, y clases especiales como los abiertos acotados convexos, y todos los abiertos para el caso $n = 1$.

En 1981 Peter Jones, [Jon81] utiliza una clase de dominios denominados (ε, δ)-dominios para caracterizar los dominios de extensión Sobolev en $\mathbb{R}^2$. Dados $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta \leq \infty$, un subconjunto abierto y conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice (ε, δ)-dominio si para todo par $x, y \in \Omega$ tal que $|x - y| < \delta$, existe un arco rectificable γ que une x con y tal que

$$l(\gamma) \leq \frac{1}{\varepsilon}|x - y| \tag{5.13}$$

y para todo $z \in \gamma$ se tiene que

$$dist(z, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq \varepsilon \frac{|x - z||y - z|}{|x - y|} \tag{5.14}$$

donde aquí $l(\gamma)$ denota la longitud del arco γ. Recordemos que un arco rectificable es una aplicación continua y de variación acotada de un intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}^n$. En dicho artículo, [Jon81], Jones demuestra que, dado $k \in \mathbb{N}$, y dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, un (ε, δ)-dominio, existe un operador lineal acotado de extensión de $W^{k,p}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ para cada $p \in [1, \infty]$. Cabe observar que, en realidad, define una familia de operadores de extensión que dependen cada uno del orden de suavidad k. A su vez, Jones demuestra que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es finitamente conexo, entonces Ω es un dominio de extensión sobre $W^{k,p}(\mathbb{R}^2)$ si y sólo es un (ε, δ)-dominio para algún par de valores $\varepsilon, \delta > 0$. Esta clase de (ε, δ)-dominios ya había sido introducida por Olli Martio y Jukka Sarvas en [MS79c] como una subclase de dominios que ellos denominaron Dominios de John (en alusión a Fritz John quien fue el primero en definirlos). Jussi Väisälä en [V8̈8] diferencia los

(ε, δ)-dominios y los dominios de John (de Martio y Sarvas) en un marco más genérico en términos de cigar r-entornos y carrot r-entornos, y analiza sus propiedades. Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ considera $F(a,b)$ una familia de conjuntos cerrados conexos que contengan a a, b y tal que para cada $\gamma \in F(a,b)$ existe una aplicación continua $\lambda : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $\lambda^{-1}_{(\{0\})} = \{a, b\}$. Dado $r > 0$ define el cigar r-entorno de $\gamma \in F(a,b)$ de tipo (F, λ) como

$$C := cig\,(\gamma, r, F, \lambda) = \underset{z\in\gamma}{\cup} B\,(z, r\lambda\,(z))\,.$$

Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice c-uniforme de tipo (F, λ, φ) si para cada par de puntos $a, b \in \Omega$ existe $\gamma \in F(a,b)$ tal que $\varphi(\gamma) \leq c\,|a-b|$, y

$$cig\left(\gamma, \frac{1}{c}, F, \lambda\right) \subseteq \Omega.$$

Väisälä discrimina entre tres clases de dominios según la elección de la terna (F, λ, φ). En primer lugar, los de tipo longitudinal: utilizando como $F_1(a,b)$ a la familia de todos los arcos rectificables que unen a con b; como φ_1 a la longitud del arco; y a $\lambda_1(z)$ como el mínimo entre las longitudes del sub-arco que une a con z y del sub-arco que une b con a. En segundo lugar, discrimina los de tipo diametral: en éstos $F_2(a,b)$ es familia de todos los arcos (rectificables o no) que unen a con b; φ_2 el diámetro del arco; y $\lambda_2(z)$ el mínimo entre los diámetros del arco que une a con z y del arco que une b con a. En tercer y último lugar, discrimina los dominios de tipo métrico: utilizando $F_3(a,b)$ como la familia de todos los conjuntos cerrados conexos que contengan a,b; φ_3 como el diámetro del conjunto; y $\lambda_3(z) := \text{mín}\,(|x-b|, |x-a|)$. Haciendo uso de ciertos resultados de [MS79c] y [Mar80] puede probarse que es indistinto el uso de cualquiera de estas clases de cigarros en la definición de la c-uniformidad: todo dominio c-uniforme respecto de la primera clase será c'-uniforme respecto de las otras dos clases y viceversa. Obsérvese que, a primera vista, es claro que $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$ y que, para todo arco rectificable γ que una dos puntos a y b se satisface $|a-b| \leq diám\,(\gamma) \leq long\,(\gamma)$. Por otra parte, la clase de dominios c-uniformes de tipo (F, λ, φ) longitudinales coincide con la clase de $\left(\frac{1}{c}, \infty\right)$-dominios en el sentido de Jones. La condición (5.14) equivale a $\underset{z\in\gamma}{\cup} B\,(z, \varepsilon\lambda_2(z)) \subseteq \Omega$, para $\lambda_2(z) \doteq \frac{|x-z||y-z|}{|x-y|}$, y a su vez, la condición (5.13) permite mostrar que $\lambda \approx \lambda_2$. En resumen, un dominio es c-uniforme si todo par de puntos puede unirse por un entorno en forma de cigarro que no es ni muy fino ni muy sinuoso. Por otra parte, la diferencia fundamental de los dominios de John es que se definen prescindiendo de la condición (5.13) (denominada por Väisäla "Turning condition"). Pero también, cabe notar que suelen reemplazarse los cigar entornos por carrots entornos. Lo que los diferencia es que estos últimos utilizan una aplicación continua $\lambda^* : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que sólo satisface $(\lambda^*)^{-1}_{(\{0\})} = \{a\}$. Esto es, un carrot r-entorno de $\gamma \in F(a,b)$ de tipo (F, λ^*) es de la forma

$$car\,(\gamma, r, F, \lambda^*) = \underset{z\in\gamma}{\cup} B\,(z, r\lambda^*(z))\,.$$

Análogamente a los cigar entornos, aquí también se pueden discriminar entre entornos de tipo longitudinal, diametral y métrico. Se dice entonces que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un c-dominio de John de tipo (F, λ^*), para $c \geq 1$, si existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que para todo punto $x \in \Omega$ existe $\gamma \in F(x_0, x)$ tal que

$$car\left(\gamma, \frac{1}{c}, F, \lambda^*\right) \subseteq \Omega.$$

Puede demostrarse que aquí también es indistinto el uso de cualquiera de las clases de carrots entornos (longitudinales, diametrales o métricos) para definir estos dominios. Más aún, para el caso de dominios acotados es indistinto el uso de carrots entornos o de cigar entornos (véase Teorema 2.21. en [V̈88]). Reiteremos que la diferencia esencial entre los dominios de John y los dominios Uniformes está dada por la petición de condición de giro (5.13). Ésta determina la comparabilidad

$$long(\gamma) \approx |a - b|$$

entre la curva que une los extremos a, b, y la distancia entre ellos. Es por esto que, por ejemplo, la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$ excepto su radio, o más general el conjunto $B(0,1) \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 > 0, \ x_n = 0\}$, es dominio de John pero no es uniforme. Sin embargo, ambas clase de dominios en contexto euclídeo, si son acotados, satisfacen una condición denominada condición c-plump (también denominada *corckscrew condition* o *porosity condition*), la cual cumplirá un rol fundamental en esta genealogía, como veremos. Se dice que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la condición c-plump, $c \geq 1$, si para cada $x \in \Omega$ y cada $0 < r < diam(\Omega)$ existe $z \in B[x, r]$ tal que $B(z, r/c) \subseteq \Omega$. Veamos entonces que tanto los dominios de John, como los dominios uniformes, satisfacen esta condición. Consideremos un dominio Ω acotado tal que para todo $x, y \in \Omega$ existe un cigar r-entorno $cig(\gamma, r, F, \lambda) \subseteq \Omega$. Dado $x \in \Omega$ y $0 < r < diam(\Omega)$, elíjase $y \in \Omega$ tal que $|x - y| \geq r/2$. Sea $\gamma : [0, l] \to \Omega$ un arco rectificable que une x con y, tal que

$$\bigcup_{w \in \gamma} B\left(w, \frac{1}{c}\lambda(w)\right) \subseteq \Omega.$$

Si se elige $z \in \gamma$ tal que $|z - x| = \frac{r}{4}$, obtenemos que $|z - y| \geq \frac{r}{4}$, esto es

$$\lambda(z) \geq \text{mín}(|x - z|, |y - z|) \geq \frac{r}{4}$$

y

$$B\left(z, \frac{r}{4c}\right) \subseteq \bigcup_{w \in \gamma} B\left(w, \frac{1}{c}\lambda(w)\right) \subseteq \Omega.$$

Por lo tanto, Ω satisface una condición $4c$-plump. Destaquemos lo profundamente geodésico de esta idea que la vuelve muy dificil de extender a contextos métricos generales (en los cuales, las familias de curvas rectificables no sean triviales, al menos). Es por esto, que al intentar despojar al espacio de estructura euclídea, los dominios que satisfacen la *plumpness condition* se alejan de los dominios de tipo John. Más aún, éstos últimos están estrechamente relacionados a la existencia de desigualdades de tipo Poincaré sobre el espacio (en ciertos contextos incluso las caracterizan) algo que no siempre guarda connotación con las propiedades de extensión Sobolev del dominio.

En los años ochenta Alf Jonsson y Hans Wallin, [JW84], estudian el problema de extensión a partir de la descripción del operador de Traza $\mathcal{T}$ sobre espacios de Besov. Veamos cómo se relaciona esta estrategia funcional con la determinación de operadores de extensión. Consideramos un espacio métrico con medida (X,d,μ), $\Omega \subseteq X$ subconjunto abierto, y $B_1(X)$, $B_2(\Omega)$ espacios de Banach de funciones definidas sobre X y Ω, respectivamente, decimos que Ω es un dominio de extensión si existe un operador acotado, en lo posible lineal, $E : B_2(\Omega) \to B_1(X)$ de modo tal que para toda funcion $f \in B_2(\Omega)$ se tiene que $(\mathcal{E}f)|_\Omega = f$. Por otra parte se define como operador de traza al operador $\mathcal{T} : B_1(X) \to B_2(\Omega)$ tal que $\mathcal{T}f := f|_\Omega$, esto es

$$\mathcal{T}f(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}.$$

A su vez, dado un espacio de Banach $B_1(X)$ y un subconjunto $\Omega \subseteq X$, se define como espacio restricción $B_1(X)|_\Omega$ a

$$B_1(X)|_\Omega = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ \exists g \in B_1(X) \ / \ \mathcal{T}g = f \ \text{ en casi todo punto}\},$$

normado con

$$\|f\|_{B_1(X)|_\Omega} = \text{ínf}\left\{\|g\|_{B_1(X)} : g \in B_1(X) \ , \ \mathcal{T}g = f \ \text{ en casi todo punto}\right\}.$$

Puede demostrarse que si (X,d,μ) es un espacio métrico con medida, $\Omega \subseteq X$ un subconjunto abierto, y $B_1(X)$, $B_2(\Omega)$ espacios de Banach de funciones definidas sobre X y Ω, entonces Ω es un dominio de extensión si y sólo si el operador de Traza $\mathcal{T}$ es sobreyectivo y su Núcleo posee complemento en $B_1(X)$. Si además resulta que el operador de Traza es acotado de $B_1(X)$ en $B_2(\Omega)$ se dice que $B_2(\Omega)$ es el espacio de traza de Ω sobre $B_1(X)$, y tenemos que $B_1(X)|_\Omega = B_2(\Omega)$. Para llevar a cabo el estudio del operador de Traza $\mathcal{T}$ en espacios de Besov en [JW84], Alf Jonsson y Hans Wallin introducen los denominados d-conjuntos (o d-sets), donde $d \leq n$, que son aquellos conjuntos cerrados $F \subseteq \mathbb{R}^n$ que soportan una medida μ boreliana, esto es $sop(\mu) = F$, y para todo $x \in F$ y $0 < r \leq 1$ verifican

$$\mu(B(x,r)) \approx r^d. \tag{5.15}$$

Como ejemplos de interés de d-sets se destacan los siguientes:

1) Sea $d \in \mathbb{N}$, $d \leq n$, y sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ la clausura de un producto de intervalos (acotados o no), y sea φ es una función bi-Lipschitz de A en su imagen. Si consideramos la medida $\mu = m_d \circ \varphi^{-1}$, donde m_d denota la medida de Lebegue m-dimensional, resulta que $\varphi(A)$ es un d-set.

2) Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto de Cantor $F = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_j$, donde $F_0 = [0,1]$ y F_j es la unión de 2^j intervalos obtenidos al remover los tercios intermedios de F_{j-1}. Si μ_j es la medida de masa unitaria distribuida sobre F_j, la sucesión $(\mu_j)_j$ converge a una medida μ (determinada por la función de Cantor), la cual está soportada en F y satisface (5.15) para $d = \log 2/\log 3$.

3) Si Ω es (ε,δ)-dominio (por ejemplo un dominio de frontera mínimamente suave) entonces $\partial\Omega$ es un $(n-1)$-set y $\overline{\Omega}$ es un n-set .

La introducción de esta clase de conjuntos posee una doble finalidad: por un lado permite definir espacios de Sobolev-Besov sobre dominios cerrados de $\mathbb{R}^n$, y por otro lado, como veremos más adelante, permite entender cómo caracterizar los dominios de extensión en $\mathbb{R}^n$ y en otra clase de espacios métricos. Para definir los espacios de Besov $B_s^{p,q}(F)$, para el caso $p = q$, $1 \leq p \leq \infty$ y $0 < s < 1$, restringidos a un d-set F , con $d \leq n$, se utiliza la medida μ soportada sobre el mismo. Esto es

$$B_s^{p,p}(F) = \left\{ f \in L^p(F,\mu) : [f]^p_{B_s^{p,p}(F)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}} d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty \right\} \tag{5.16}$$

normado con $\|f\|_{B_s^{p,p}(F)} := \|f\|_{L^p} + [f]_{B_s^{p,p}(F)}$. Uno de los resultado más importantes de [JW84] es el siguiente: Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es un d-set, con $0 < d \leq n$, y $0 < \beta = \alpha - \frac{n-d}{p} < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $B_\alpha^{p,p}(\mathbb{R}^n)|_F = B_\beta^{p,p}(F)$. Más aún, como mostraron Jonsson y Wallin, esta caracterización no tiene por qué restringirse a conjuntos cerrados: la condición de d-set puede definirse en conjuntos borelianos arbitrarios. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto boreliano, y H_d la medida d-dimensional de Hausdorff, decimos que E es un d-set si para toda bola cerrada $B[x,r]$, con $x \in E$ y $0 < r \leq 1$ se satisface

$$\mathcal{H}_d(E \cap B[x,r]) \approx r^d.$$

Esto es, los d-sets son subespacios de tipo homogéneo d-Ahlfors regulares. Como propiedades inmediatas se tiene que, si E es d-set entonces $\overline{E}$ es d-set y $\mathcal{H}_d\left(\overline{E} \setminus E\right) = 0$. Observemos por su parte que, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio que satisface

$$r^n \lesssim \mathcal{H}_n(\Omega \cap B[x,r]), \tag{5.17}$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $0 < r \leq 1$, entonces $B_\alpha^{p,p}(\mathbb{R}^n)|\Omega = B_\alpha^{p,p}(\Omega)$, para $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. Esto es, existe un operador de extensión de $B_\alpha^{p,p}(\Omega)$ en $B_\alpha^{p,p}(\mathbb{R}^n)$, donde aquí, teniendo en cuenta la definición (5.16) tenemos que

$$B_\alpha^{p,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : [f]^p_{B_\alpha^{p,p}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{d+\alpha p}} dxdy < \infty \right\}$$

Cabe destacar que la caracterización de los dominios de extensión Sobolev es un problema sumamente complejo, aún en el contexto euclídeo, para el caso de los espacios clásicos $W^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$, problema que según todas las fuentes posibles consultadas aún sigue abierto en su generalidad. Una primera peculiaridad que cabe destacar es la existencia de dominios Ω que son dominios de extensión en $W^{1,p}$ para algunos valores $p \in [1,\infty]$. En [Maz81], Vladimir Maz'ya construye un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con frontera Jordan (esto es, su frontera es imagen homeomórfica de un círculo) que es dominio de extensión $W^{1,p}$ si y sólo si $p \in (1,2)$. Más aún, en [Rom93], Aleksandr Sergeevich Romanov muestra que para cada $q \in (1,2)$ puede construirse un dominio Ω_q el cual es de extensión para $W^{1,p}$ si y sólo si $p \in [1,q)$. En [Ryc00] Vyacheslav Slava Rychkov reutiliza la condicion (5.17) para mostrar la existencia de un operador de extensión para los espacios potenciales de Bessel $J^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{G_s * f \;/\; f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$, donde aquí

$\widehat{G_s}(\xi) = \left(1 + 4\pi^2 |\xi|^2\right)^{-s/2}$, para el rango $1 < p < \infty$ y $s > 0$. Introduce los conjuntos d-thick, con $d \leq n$, que son aquellos conjuntos abiertos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que para todo $x \in \Omega$ y todo $0 < r \leq 1$, se verifica $H_d(\Omega \cap B(x,r)) \gtrsim r^d$. Esto es, la clase de conjuntos d-thick coincide con la clase de d-sets ya definidos por Jonsson y Wallin. Como resultado principal de su artículo, Rychkov logra probar que, en los espacios potenciales de Bessel, para todo conjunto d-thick existe un operador de extensión $J^{s,p}(\mathbb{R}^n)|_\Omega \to J^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ si, o bien $d > n-1$ y $s > \frac{n-d}{m\acute{\imath}n(p,2)}$; o bien $d \leq n-1$ y $s - \lfloor s \rfloor > \frac{n-d}{m\acute{\imath}n(p,2)}$.

Posteriormente, los trabajos más importantes encontrados en la literatura matemática que analizan el caso de los Sobolev euclídeos $W^{k,p}$, $k \in \mathbb{N}$, son los de Pavel Schvarstman [Shv06], [Shv10]. Como estrategia principal reintroduce la función maximal sharp fraccionaria definida por Calderón en [Cal72] (véase también [DS84] al respecto) para dar un criterio de extensión de funciones Sobolev definidas sobre dominios regulares. Si denotamos por P_k, $k \geq 0$, la familia de polinomios en $\mathbb{R}^n$ de grado menor igual que k, conveniendo que $P_{-1} := \{0\}$, dada $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (0,\infty]$ y Q un cubo, se denota por $E_k(f;Q)_{L^p}$ la mejor aproximación local normalizada de f sobre Q en norma L^p por polinomios de grado a lo sumo $k-1$, definida como

$$\mathcal{E}_k(f;Q)_{L^p} = \inf_{h \in \mathcal{P}_{k-1}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f-h|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A su vez, dado $\alpha > 0$, y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se define la funcion maximal sharp fraccionaria $f^{\#}_\alpha$ como

$$f^{\#}_\alpha(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^\alpha} \mathcal{E}_k(f;Q)_{L^1},$$

donde $k = -\lfloor -\alpha \rfloor$, esto es, el mayor entero menor estricto que $\alpha + 1$. Se denota por $CW^{k,p}$ al espacio de Calderón-Sobolev definido como $CW^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : f^{\#}_k \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}$ y normado mediante $\|f\|_{CW^{k,p}} := \|f\|_{L^p} + \left\| f^{\#}_k \right\|_{L^p}$. La razón de esta definición se debe a un resultado de Alberto Calderón: en [Cal72] demuestra que, efectivamente, $CW^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ con normas equivalentes. Inspirado en estos resultados, Pavel Shvartsman introduce en [Shv06] como aproximación local

$$\mathcal{E}_k(f;Q)_{L^p(\Omega)} = \inf_{h \in \mathcal{P}_{k-1}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q \cap \Omega} |f-h|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

y como función maximal sharp fraccionaria, para $x \in \Omega$,

$$f^{\#}_{\alpha,\Omega}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^\alpha} \mathcal{E}_k(f;Q)_{L^p(\Omega)}.$$

Además, introduce la noción de dominio regular, esto es aquellos conjuntos abiertos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ para los cuales existen constantes $C_\Omega \geq 1$ y $\delta_\Omega > 0$ tales que $C_\Omega |Q \cap \Omega| \geq |Q|$, para todo cubo Q con centro en Ω y diámetro $diam(Q) \leq \delta_\Omega$. Obsérvese la similitud con los d-sets de Jonsson y Wallin, y los conjuntos d-thick de Rychkov. Con estas herramientas Schvartsman demuestra que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio regular entonces una función $f \in L^p(\Omega)$, $p \in (1,\infty]$, puede ser extendida a una función $F \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$f^{\#}_{k,\Omega} \in L^p(\Omega)$. Más aún,

$$\|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)|\Omega} \approx \|f\|_{L^p(\Omega)} + \left\| f^{\#}_{k,\Omega} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Esto es, el espacio restricción $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)|_\Omega$ coincide con

$$CW^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) : f^{\#}_{k,\Omega} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Estos resultados inspiraron el estudio de la caracterización de los dominios de extensión Sobolev. En primer lugar Petteri Harjulehto obtiene en [Har06] una caracterización relacionada a la existencia de un operador de Traza sobre la frontera del dominio. Siguiendo a Jonsson y Wallin, define los conjuntos m-regulares, con $0 < m < n$, como aquellos conjuntos $F \subseteq \mathbb{R}^n$ que verifican

$$\mathcal{H}_d(F \cap B(x,r)) \approx r^m,$$

para todo $x \in F$ y todo $0 < r \le diam(F)$; y demuestra el siguiente resultado: si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es subconjunto abierto con frontera $\partial\Omega$ m-regular, con $n-1 \le m < n$, entonces, para todo $p \in (n-1,\infty)$ y $\alpha = 1 - \frac{n-m}{p}$, Ω es un dominio de extensión Sobolev $W^{1,p}$ si y sólo si existe un operador de traza lineal y acotado $\mathcal{T} : W^{1,p}(\Omega) \to B^{p,p}_\alpha(\partial\Omega)$ tal que

$$\mathcal{T}f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{H}_m(\Omega \cap B(x,r))} \int\limits_{\Omega\cap B(x,r)} f(z)\, d\mathcal{H}_m(z)$$

para $\mathcal{H}_m$-casi todo $x \in \partial\Omega$, y la clase $\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ es densa en $W^{1,p}(\Omega)$. Por otro lado, en [HaKT08b], Piotr Hajlasz, Pekka Koskela y Heli Tuominen reintroducen la condición de regularidad de n-sets, conjuntos n-regulares, o conjuntos n-thick, como *measure density condition*. Esto es, la condición por la cual existe una constante $C_\Omega > 0$ tal que

$$|B(x,r) \cap \Omega| \ge Cr^n \tag{5.18}$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $0 < r \le 1$, y recuperan los resultados de Schvartsman bajo la luz del operador de traza o restricción. Efectivamente lograr probar, en primer lugar, que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio, $1 \le p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$ son tales que el operador $\mathcal{T} : W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{m.p}(\Omega)$, $\mathcal{T}f = f|_\Omega$, es sobreyectivo, entonces Ω satisface la condición de densidad de medida. En particular, la satisfacen todos los $W^{m.p}$-dominios de extensión. En segundo lugar, demuestran que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio arbitrario, $1 < p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces son equivalentes: a) el operador de traza $T : W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{m.p}(\Omega)$, $Tf = f|_\Omega$, es sobreyectivo; b) existe un operador de extensión lineal acotado $\mathcal{E} : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, tal que $(\mathcal{E}f)|_\Omega = f$ en casi todo punto y para toda $f \in W^{m,p}(\Omega)$; c) Ω satisface la condición de densidad de medida y $W^{m,p}(\Omega) = CW^{m,p}(\Omega)$, con normas equivalentes. Tanto en [HaKT08b] como en el trabajo de P. Koskela [Kos98] se pone de manifiesto la relación que existe entre la posibilidad de extensión de una función Sobolev sobre un dominio y la existencia de una inmersión del espacio sobre alguna clase regular Hölder. En [BK96], Buckley y Koskela demuestran que para el caso de un dominio Ω acotado simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$, y $2 < p < \infty$, la inmersión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{2}{p}}\left(\overline{\Omega}\right)$ es continua si y sólo si existe $\delta > 0$ y $C > 0$ tal que para todo $x, y \in \Omega$ con $|x-y| \leq \delta$, existe un arco rectificable $\gamma \subseteq \Omega$ que une x con y tal que

$$\int_\gamma \eta(z)^{-\frac{1}{p-1}}\, ds(z) \leq C\,|x-y|^{\frac{p-2}{p-1}} \tag{5.19}$$

donde $\eta(z) = dist(z, \partial\Omega)$ y ds denota la medida de longitud de arco. En [Kos98] Koskela demuestra que la existencia de una inmersión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{p}}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algún $p > n$, implica que para todo $q > p$, el conjunto Ω es dominio de extensión en $W^{1,q}$. Además para $p > 2$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio simplemente conexo demuestra que si Ω es un dominio de extensión en $W^{1,p}$ entonces Ω satisface la condición (5.19). Combinando estos resultados se deduce el reciproco: la condición (5.19) garantiza que, para cada $q > p$, Ω es un dominio de extensión en $W^{1,q}$. Pavel Schvarstman en [Shv10] extiende estos resultados. En primer lugar, demuestra que para el caso $n < p < \infty$, si pueden encontrarse constantes $C, \delta > 0$, tales que para todo $x, y \in \Omega$, con $|x-y| < \delta$, existe un arco rectificable $\gamma \subseteq \Omega$ que une x con y tal que

$$\int_\gamma \eta(z)^{\frac{1-n}{p-1}}\, ds_{(z)} \leq C\,|x-y|^{\frac{p-n}{p-1}}$$

entonces Ω es un dominio de extensión Sobolev en $W^{k,q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $q > r$, donde $r \in (n,p)$ es una constante que depende de n, p, C. En segundo lugar demuestra que en $\mathbb{R}^2$, para $2 < p < \infty$ y Ω acotado y finitamente conexo, entonces Ω es un dominio de $W^{1,p}(\Omega)$-extensión si y sólo si existe inmersión continua $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-2/p}\left(\overline{\Omega}\right)$. En un pre-print reciente [KRZ15], P.Koskela, T. Rajala y Yi Ru-Ya Zhang, estudian el caso $1 < p < 2$ de dominios en $\mathbb{R}^2$ y caracterizan dominios de extensión con frontera Jordan en términos del comportamiento del complemento del mismo.

Como contrapartida es interesante observar que a diferencia de las dificultades encontradas para caracterizar los dominios de extensión de los espacios $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, la no localidad que presenta el caso fraccionario ha permitido determinar con precisión a aquellos dominios que son de extensión. En un trabajo de 2014, Yuan Zhou [Zho15] demuestra que la condición de densidad de medida (5.18) caracteriza los dominios de extensión Sobolev $W^{s,p} = B_s^{p,p}$ en el caso euclídeo para $0 < s < 1$ y todo $p > 0$. En dicho trabajo prueba que, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, subconjunto abierto, con $n \geq 2$,son equivalentes: i) Ω es n-regular; ii) Ω es un dominio de extensión Sobolev $W^{s,p}$ para todo [para algún] $0 < s < 1$ y todo [algún] $0 < p < \infty$; y iii) Ω es un dominio de inmersión Sobolev $W^{s,p}$ para todo [para algún] $0 < s < 1$ y todo [algún] $0 < p < \infty$. Hacemos notar que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice dominio de inmersión Sobolev $W^{s,p}$ si: 1) para el caso $sp < n$, se verifica $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$; 2) para el caso $sp = n$ existen constantes $C, D > 0$ tales que para toda $f \in W^{s,p}(\Omega)$ y toda bola B

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{B \cap \Omega} \exp\left(\frac{C}{\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}}\,|f(x) - c|\right)^{\frac{p}{p-1}} dx \leq D\,|B|\,;$$

y 3) para el caso $sp > n$, se verifica la continuidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\beta}$, donde $\beta = s - \frac{n}{p}$.

En lo que respecta a los teoremas de extensión Sobolev en espacios métricos con medida, destaquemos en primer lugar el trabajo de Olli Martio y Piotr Hajłasz de fines de los años noventa. En [HaM97] retoman el estudio del problema de descripción del operador de Traza $\mathcal{T}$ sobre una clase de espacios de Sobolev denominados espacios de Hajłasz-Sobolev (introducidos por Piotr Hajłasz en [Ha96]) los cuales son una posible generalización de los Sobolev usuales a espacios métricos con medida más generales. Recordemos que dado un espacio métrico (X, d) equipado con una medida boreliana μ tal que $diam(X) < \infty$ y $\mu(X) < \infty$, se define al espacio de Hajłasz-Sobolev $M^{1,p}(X, d, \mu)$ como el conjunto de todas las funciones $f \in L^p(X, \mu)$ para las cuales existe alguna función no negativa $g \in L^p(X, \mu)$ tal que, para μ-casi todo $x, y \in X$, se verifica $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y))$. Recordemos, a su vez, que dicha clase de funciones no negativas g que satisfacen esta desigualdad se las denomina clase de gradientes generalizados de f, denotada $D[f]$, y se normaliza el espacio mediante $\|f\|_{M^{1,p}(X)} := \|f\|_{L^p(X)} + [f]_{M^{1,p}(X)}$ donde $[f]_{M^{1,p}(X)} = \inf_{g \in D[f]} \|g\|_{L^p(X)}$. Este espacio coincide con el Sobolev usual $W^{1,p}$ para el caso $(X, d, \mu) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|, \mathcal{H}_n)$ y el caso $(X, d, \mu) = (\Omega, |\cdot|, \mathcal{H}_n)$, donde Ω es un dominio Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ (véase [Ha96]). Lo interesante del trabajo de Martio y Hajłasz es que vuelven a considerar la condición c-plumpness (nombrada por los autores *A(c)-condition*) en estos contextos métricos. Recordemos que un conjunto abierto $\Omega \subseteq X$ satisface la condición c-plump, con $c \geq 1$, si para cada $x \in \Omega$ y cada $0 < r < diam(\Omega)$ existe $z \in B[x, r]$ tal que $B(z, r/c) \subseteq \Omega$. Utilizando dicha condición demuestran, entre otros resultados: 1) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado que satisface la condición $A(c)$ y $1 < p \leq \infty$, entonces $\mathcal{T}(W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) = M^{1,p}(\Omega, |\cdot|, m_n)$, donde $\mathcal{T}$ es el operador traza sobre Ω. Además, $\mathcal{T}$ es un operador continuo $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to M^{1,p}(\Omega, |\cdot|, m_n)$ y existe un operador de extensión continuo $M^{1,p}(\Omega, |\cdot|, m_n) \to M^{1,p}(\mathbb{R}^n, |\cdot|, m_n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$; 2) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado que satisface la condición $A(c)$ y $1 < p \leq \infty$, entonces $W^{1,p}(\Omega) = M^{1,p}(\Omega, |\cdot|, m_n)$ si y sólo sí $\mathcal{T} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\Omega)$ es sobreyectivo; 3) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado que satisface la condición $A(c)$ y $1 < p \leq \infty$, entonces $W^{1,p}(\Omega) = M^{1,p}(\Omega, |\cdot|, m_n)$ si y sólo sí Ω es un dominio $W^{1,p}$-extensión. En su trabajo de 2001 [Har02] Petteri Harjulehto introduce los dominios de condición $A^*(\varepsilon, \delta)$, una clase más amplia que los dominios c-plumpness, para extender parcialmente los resultados de Martio y Hajłasz. Si (X, d) es un espacio métrico y μ una medida regular boreliana, finita y duplicante, entonces, dado $0 < \varepsilon < 1$ y $0 < \delta \leq 1$, se dice que un conjunto abierto $\Omega \subseteq X$ satisface la condición $A^*(\varepsilon, \delta)$ si

$$\mu(B(x, r) \cap \Omega(\varepsilon r)) \geq \delta \mu(B(x, r))$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $0 < r < diam(\Omega)$; donde $\Omega(\varepsilon r) = \left\{z \in \Omega \ / \ dist\left(z, X \setminus \overline{\Omega}\right) > \varepsilon r\right\}$. Cabe destacarse que en el contexto euclídeo todo dominio acotado que satisface la condición $A(c)$ satisface también la condición $A^*(\varepsilon, \delta)$, para algún par ε, δ. Como resultado principal, en [Har02] Harjulehto muestra que, bajo las condiciones mencionadas, si Ω es un dominio acotado, $\Omega \neq X$, que satisface la condición $A^*(\varepsilon,\delta)$ y tal que $\mu(\partial\Omega)=0$, entonces, para $1<p\leq\infty$, Ω es un dominio de $M^{1,p}$-extensión. Esto es, existe un operador lineal acotado de extensión $\mathcal{E}:M^{1,p}(\Omega,d,\mu)\to M^{1,p}(X,d,\mu)$. En [Shv07], Schvartsman reintroduce el concepto de regularidad en espacios métricos con medida motivado por las herramientas desarrolladas en [Shv06] en contexto euclídeo. Trabaja sobre un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) cuya medida satisface además una condición de duplicación reversa. Esto es, una medida para la cual existe una constante $C_r>1$ tal que, para todo $x\in X$ y todo $r>0$, se satisface $C_r\mu(B(x,r))\leq\mu(B(x,2r))$. Generaliza la noción de dominio regular de la siguiente manera. Dado $\Omega\subseteq X$ un subconjunto medible, se dice regular si existen constantes $\theta_\Omega\geq 1$ y $\delta_\Omega>0$ tal que

$$\theta_\Omega\mu(B(x,r)\cap\Omega)\geq\mu(B(x,r)),$$

para todo $x\in\Omega$ y todo $0<r\leq\delta_\Omega$. Define, a su vez, la función maximal sharp fraccionaria adecuada al contexto, de la siguiente forma: dada $f\in L^1_{loc}(X,\mu)$, $\alpha>0$, y $\Omega\subseteq X$ un subconjunto Boreliano,

$$f^{\#}_{s,\Omega}(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^s}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)\cap\Omega}\left|f(y)-f_{B(x,r)\cap\Omega}\right|d\mu(y),$$

para cada $x\in\Omega$. Con esta maximal se define el espacio de Calderón Sobolev $CW^{1,p}(\Omega,d,\mu)$ como el de aquellas funciones $f\in L^p(\Omega,\mu)$ tales que $f^{\#}_{1,\Omega}(x)\in L^p(\Omega,\mu)$, y normado de manera análoga al caso euclideo. Cabe observar que en [HaK98], P. Hajlasz y J. Kinnunen, demuestran que si (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo y $1<p\leq\infty$, entonces los espacios de Calderón-Sobolev y Hajlasz-Sobolev coinciden, esto es, $M^{1,p}(X,d,\mu)=CW^{1,p}(X,d,\mu)$, con normas equivalentes. Utilizando los espacios de Calderon-Sobolev, P. Schvartsman demuestra, en primer lugar, que si (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo que satisface una condición de duplicación reversa, $\Omega\subseteq X$ es un subconjunto regular y $1<p\leq\infty$, entonces una función $f\in L^p(\Omega)$ puede extenderse a una función de $CW^{1,p}(X,d,\mu)$ si y sólo si $f^{\#}_{1,\Omega}\in L^p(\Omega)$. Esto es, $CW^{1,p}(\Omega,d,\mu)$ determina el espacio de traza de $CW^{1,p}(X,d,\mu)$ sobre Ω, y existe un operador lineal continuo de extensión $\mathcal{E}:CW^{1,p}(\Omega,d,\mu)\to CW^{1,p}(X,d,\mu)$, cuya norma depende estrictamente de p, de las constantes geométricas de la medida, y de las constantes del dominio. En segundo lugar, demuestra que si (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo que satisface una condición de duplicación reversa, entonces, para todo dominio Ω regular, $M^{1,p}(X,d,\mu)=M^{1,p}(\Omega,d,\mu)$, y al igual que el caso anterior existe un operador lineal continuo de extensión $\mathcal{E}:M^{1,p}(\Omega,d,\mu)\to M^{1,p}(X,d,\mu)$. Además, el primer resultado puede generalizarse al espacio de orden fraccionario $CW^{s,p}(\Omega,d,\mu):=\left\{f\in L^p(\Omega,\mu)\ /\ f^{\#}_{s,\Omega}(x)\in L^p(\Omega,\mu)\right\}$, normado de manera análoga al caso $CW^{1,p}$. Por otra parte, la condición de regularidad (5.17), o (5.18), reaparece en contextos métricos en [HaKT08a] de Piotr Hajlasz, Pekka Koskela y Heli Tuominen. En este trabajo analizan y caracterizan dominios de extensión en los espacios de Hajłasz-Sobolev $M^{1,p}$ y los espacios $N^{1,p}$ de Newton-Sobolev. Estos ultimos se caracterizan por utilizar otra clase de gradientes generalizados, denominados gradientes superiores p-débiles. Análogamente a lo utilizado por Schvartsman, definen la condición de regularidad (o condición de densidad de medida) del

modo siguiente. Dado un espacio métrico (X, d) equipado con medida boreliana μ regular y duplicante, tal que $0 < \mu(B(x, r)) < \infty$ para todo $x \in X$ y todo $r > 0$, decimos que un subconjunto abierto $\Omega \subseteq X$ satisface la condición de regularidad si, para todo $x \in \overline{\Omega}$ y todo $0 < r \leq 1$ se satisface

$$\mu(B(x, r) \cap \Omega) \gtrsim \mu(B(x, r)). \tag{5.20}$$

Como resultados principales, demuestran: 1) Si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo y $F \subseteq X$, cerrado, es regular entonces para todo $p \in [1, \infty)$ existe un operador de extensión $M^{1,p}(F) \to M^{1,p}(X)$; 2) Si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo Ahlfors regular, completo y geodésico, y $1 \leq p < \infty$, entonces un subconjunto abierto $\Omega \subseteq X$ es $M^{1,p}$-dominio de extensión si y sólo si Ω es regular.

Por último, respecto a la relación entre los espacios de Hajslaz y los espacios de Sobolev fraccionarios utilizados en este trabajo cabe mencionar dos articulos. En primer lugar, recordemos que en [GKS10] A. Gogatishvili, P. Koskela y N. Shanmugalingam, demuestran, entre otros resultados, que para $p \in [1, \infty)$ y $s > 0$, las seminormas $[f]_{B^s_{p,p}(X)}$ y $[f]_{W^{s,p}(X)}$ son equivalentes si están definidas sobre un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), como vimos en la Proposición 4.4. Para el caso fraccionario, se definen los espacios de Hajlasz-Sobolev del mismo modo que para el caso $M^{1,p}$ utilizando otra clase de gradientes generalizados. Dada una función f boreliana definida sobre un espacio métrico con medida, una función g boreliana no negativa es un s-gradiente de Hajlasz de f si

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)^s (g(x) + g(y)),$$

para casi todo x, y. Se denota la clase de s-gradientes de Hajlasz de f como $D_s[f]$. Para $p \in [1, \infty]$, $s > 0$, se define el espacio de Hajlasz-Sobolev $M^{s,p}$ como

$$M^{s,p}(X) = \{f \in L^p(X, \mu) \ / \ D_s[f] \cap L^p(X, \mu) \neq \emptyset\}$$

normado con

$$\|f\|_{M^{s,p}(X)} = \|f\|_{L^p(X,\mu)} + \inf_{g \in D_s[f]} \|g\|_{L^p(X,\mu)}$$

En segundo lugar, en [GKS10] se demuestra también que si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo con diámetro finito, y $p \in [1, \infty)$ entonces, $W^{s,p}(X) \hookrightarrow M^{s,p}(X)$ y $M^{s,p}(X) \hookrightarrow W^{s-\varepsilon,p}(X)$, para cada $0 < \varepsilon < s$, son inmersiones continuas. Suponemos que debido a la no equivalencia de estos espacios, en [GKZ13], A. Gogatishvili, P. Koskela y Y. Zhou, introducen los espacios de Hajlasz-Besov, a fin de lograr una equivalencia precisa. La diferencia básica consiste en utilizar una sucesión de gradientes generalizados que mayoricen por anillos los cocientes incrementales. Dado $s > 0$ y una función boreliana f definida sobre X, una sucesión de funciones borelianas no negativas $\vec{g} = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es un s-gradiente fraccionario de Hajlasz si para cada $k \in \mathbb{Z}$, y casi todo $x, y \in X$ tales que $\frac{1}{2^{k+1}} \leq d(x, y) < \frac{1}{2^k}$, se satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)^s (g_k(x) + g_k(y)).$$

Denotando por $DF_s[f]$ a la clase de s-gradientes fraccionarios de Hajlasz de f, se define sobre esta clase de sucesiones la norma

$$\|\vec{g}\|_{l_q(L^p(X))} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|g_k\|^q_{L^p(X)}\right)^{1/q}.$$

Finalmente, dados $s > 0$, $0 < p, q \leq \infty$, el espacio homogeneo de Hajlasz-Besov $\dot{N}^s_{p,q}(X)$ se define como aquellas funciones borelianas $f : X \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|f\|_{\dot{N}^s_{p,q}(X)} \doteq \inf_{\vec{g}\in DF_s[f]} \|\vec{g}\|_{l_q(L^p(X))} < \infty$$

Con estas herramientas, Gogatishvili, Koskela y Zhou, demuestran que, si $s > 0$, $0 < p, q \leq \infty$, $\dot{N}^s_{p,q}(X) = \dot{B}^s_{p,q}(X)$, con normas equivalentes, donde aquí

$$\dot{B}^s_{p,q}(X) := \left\{ f \in L^p_{loc}(X) \ / \ [f]_{B^{s,q}_p(X,d,\mu)} < \infty \right\}$$

y $[f]_{B^{s,q}_p(X,d,\mu)}$ es la seminorma (4.4) vista en el Capítulo 4. Por último, destaquemos que en un trabajo de 2014, [HIT16], T. Heikkinen, L. Ihnatsyeva, y H. Tuominen, extienden los resultados de extensión detallados a esta clase de espacios de Hajlasz-Besov. En éstos también se observa la importancia de la condición de densidad de medida, la duplicación de la medida y la condición Ahlfors del espacio. En efecto, logran demostrar que: 1) Si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo, y $\Omega \subseteq X$ satisface la condición de densidad de medida (5.20) entonces, para cada $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ y cada $s \in (0, 1)$ existe un operador de extensión $\mathcal{E} : N^s_{p,q}(\Omega) \to N^s_{p,q}(X)$, cuya norma de operador depende de p, q, s y de las constantes de duplicación y condición de densidad; 2) Si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo, geodésico (esto es, todo par de puntos $x, y \in X$ pueden unirse con una curva de longitud $d(x, y)$), Ahlfors regular, y $\Omega \subseteq X$ es un subconjunto abierto, entonces, son equivalentes: a) Ω satisface la condición de densidad de medida; b) Ω es un dominio de $N^s_{p,q}$-extensión para alguna terna de valores $0 < s < 1$, $0 < p < \infty$ y $0 < q \leq \infty$; c) Ω es un dominio de $N^s_{p,q}$-extensión para todo $0 < s < 1$, todo $0 < p < \infty$ y todo $0 < q \leq \infty$. Estos resultados extienden a este contexto los dados en [HaKT08b], [Zho15] en contexto euclídeo.

CAPíTULO 6

Teoremas de inmersión de $W^{s,p}$ sobre espacios α-regulares

Una vez demostrada la existencia de un operador de extensión en dominios regulares sobre espacios de Sobolev fraccionarios definidos sobre espacios de tipo homogéneo, demostraremos en este capítulo distintos tipos de teoremas de inmersión continua de los espacios de Sobolev entre sí, en las clases de funciones Hölder y en las clases L^p.

Hemos separado este capítulo en tres secciones teniendo en cuenta la relación entre la regularidad del espacio y la dimensión del mismo, esto es, entre las constantes s, p, α: la constante s de la regularidad de la función, la constante p de integrabilidad y la constante α de la regularidad Ahlfors del espacio.

Antes de ello, presentamos el siguiente caso de inmersión entre espacios de Sobolev definidos sobre espacios de tipo homogéneo que no necesariamente satisfacen la condición de Ahlfors.

PROPOSICIÓN 6.1. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $p \in [1, +\infty)$ y $0 < s \leq s'$. Sea $\Omega \subseteq X$ subconjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ función medible. Entonces, existe una constante $C = C_{(\alpha,s,p)} \geq 1$ tal que*

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{s',p}(\Omega)}.$$

En particular $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ con continuidad.

DEMOSTRACIÓN. Acotamos la seminorma $[f]_{W^{s,p}(\Omega)}$ separando la integral de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
[f]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&= \int_\Omega \int_{\Omega \setminus B(x,1)} (\cdots)\, d\mu(y)\, d\mu(x) + \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(x,1)} (\cdots)\, d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

En primer lugar, obsérvese que, de acuerdo al Lema 4.1

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega \setminus B(x,1)} \frac{|f(x)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x, d(x,y)))} d\mu(y)\, d\mu(x) &\leq C_\mu \frac{2^{sp}}{2^{sp} - 1} \int_\Omega |f(x)|^p\, d\mu(x) \\
&\leq C_{(\mu,s,p)} \|f\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo cual, separando la integral, intercambiando el orden de integración y volviendo a aplicar el Lema 4.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 2^{p-1}\int_\Omega\int_{\Omega\setminus B(x,1)}\frac{|f(x)|^p+|f(y)|^p}{d(x,y)^{sp}\,\mu(B(x,d(x,y)))}d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&\leq 2^{p-1}\int_\Omega\int_{\Omega\setminus B(x,1)}\frac{d(x,y)^{-sp}\,|f(x)|^p}{\mu(B(x,d(x,y)))}d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&\quad +2^{p-1}\int_\Omega\int_{\Omega\setminus B(x,1)}\frac{d(x,y)^{-sp}\,|f(y)|^p}{\mu(B(x,d(x,y)))}d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&\leq 2^{p-1}\int_\Omega|f(x)|^p\int_{\Omega\setminus B(x,1)}\frac{d(x,y)^{-sp}}{\mu(B(x,d(x,y)))}d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&\quad +2^{p-1}\int_\Omega\int_{\Omega\setminus B(y,1)}\frac{d(x,y)^{-sp}\,|f(y)|^p}{\mu(B(x,d(x,y)))}d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\leq C_\mu\frac{2^{sp+p}}{2^{sp}-1}\|f\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $d(x,y)<1$ implica que $d(x,y)^{s'}\leq d(x,y)^s$ tenemos que

$$I_2\leq\int_\Omega\int_{B(x,1)}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{s'p}\,\mu(B(x,d(x,y)))}d\mu(y)\,d\mu(x)\leq[f]^p_{W^{s',p}_{(\Omega)}}.$$

De estas acotaciones se deduce que

$$[f]^p_{W^{s,p}_{(\Omega)}}=I_1+I_2\leq C_{(\mu,s,p)}\|f\|^p_{L^p(\Omega)}+[f]^p_{W^{s',p}_{(\Omega)}},$$

esto es

$$\|f\|^p_{W^{s,p}_{(\Omega)}}=\|f\|^p_{L^p(\Omega)}+[f]^p_{W^{s,p}_{(\Omega)}}\leq C_{(\mu,s,p)}\|f\|^p_{L^p(\Omega)}+[f]^p_{W^{s',p}_{(\Omega)}}\leq C_{(\mu,s,p)}\|f\|^p_{W^{s',p}_{(\Omega)}},$$

como queríamos demostrar. □

1. Caso $sp<\alpha$

TEOREMA 6.2. *Sea (X,d,μ) espacio de tipo homogéneo α-Ahlfors regular, $1<p<\infty$, y $s\in\left(0,\frac{\alpha}{p}\right)$. Entonces, existe una constante $C=C_{(\mu,\alpha,p,s)}$ tal que para toda función f, medible de soporte acotado, se satisface*

$$\|f\|_{L^{p^*}(X)}\leq C\,[f]_{W^{s,p}(X)} \tag{6.1}$$

donde $p^*=\frac{\alpha p}{\alpha-sp}>p$.

DEMOSTRACIÓN. Dada una función f medible y de soporte acotado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[f]_{W^{s,p}(X)}<\infty$ ya que, de otro modo, la desigualdad (6.1) resulta evidente. Supongamos, además, como primer caso, que $f \in L^{\infty}(X)$. Dados $r > 0$ y $\theta > 0$, tenemos que, para todo $x \in X$ e $y \in B(x,r)$

$$\begin{aligned} \mu(B(x,r))\,|f(x)| &\leq \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|\, d\mu(y) + \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq r^{\theta} \int_{B(x,r)} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\theta}} d\mu(y) + \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y). \end{aligned}$$

Elegimos $\theta = \frac{\alpha + sp}{p}$ y aplicamos la desigualdad de Hölder con los pares de exponentes conjugados p, $\frac{p}{p-1}$, y $\frac{\alpha p}{\alpha - sp}$, $\frac{\alpha p}{\alpha(p-1)+sp}$,

$$\begin{aligned} \mu(B(x,r))\,|f(x)| &\leq r^{\frac{\alpha+sp}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y) \right)^{1/p} \mu(B(x,r))^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^{\frac{\alpha p}{\alpha - sp}}\, d\mu(y) \right)^{\frac{\alpha - sp}{\alpha p}} \mu(B(x,r))^{\frac{\alpha(p-1)+sp}{\alpha p}}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la condición Ahlfors tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(B(x,r))\,|f(x)| &\leq (C_A)^{\frac{p-1}{p}} r^{\alpha+s} \left(\int_{B(x,r)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y) \right)^{1/p} \\ &\quad + (C_A)^{\frac{\alpha(p-1)+sp}{\alpha p}} r^{\alpha+s-\alpha/p} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^{\frac{\alpha p}{\alpha - sp}}\, d\mu(y) \right)^{\frac{\alpha - sp}{\alpha p}}. \end{aligned}$$

Si denotamos

$$A := \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y),$$

y

$$B := \int_X |f(y)|^{\frac{\alpha p}{\alpha - sp}}\, d\mu(y),$$

tendremos que gracias a la hipótesis de finitud de $[f]_{W^{s,p}(X)}$ y de $\|f\|_{L^{\infty}(X)}$,y al hecho que $sop(f)$ es acotado, ambos valores de A, B son también finitos. Más aún, podemos ver que

$$\mu(B(x,r))\,|f(x)| \leq r^{\alpha+s} \left[(C_A)^{\frac{p-1}{p}} A^{1/p} + (C_A)^{\frac{\alpha(p-1)+sp}{\alpha p}} r^{-\frac{\alpha}{p}} B^{\frac{\alpha - sp}{\alpha p}} \right].$$

Esto es

$$|f(x)| \leq c r^{s} \left[A^{1/p} + r^{-\frac{\alpha}{p}} B^{\frac{\alpha - sp}{\alpha p}} \right],$$

donde $c = (C_A)^{\frac{\alpha(2p-1)+sp}{\alpha p}}$. Si elegimos

$$r = \frac{B^{\frac{\alpha - sp}{\alpha^2}}}{A^{\frac{1}{\alpha}}},$$

observamos que

$$r^{-\frac{\alpha}{p}} B^{\frac{\alpha - sp}{\alpha p}} = A^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad r^{sp^*} = B^{\frac{sp}{\alpha}} A^{-\frac{sp}{\alpha - sp}},$$

donde $p^* = \frac{\alpha p}{\alpha - sp}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(x)|^{p^*} &\leq cr^s \left[A^{1/p} + r^{-\frac{\alpha}{p}} B^{\frac{\alpha - sp}{\alpha p}}\right] = C^{p^*} r^{sp^*} \left[2A^{1/p}\right]^{p^*} \\ &= (2c)^{p^*} B^{\frac{sp}{\alpha}} A^{-\frac{sp}{\alpha - sp}} A^{\frac{\alpha}{\alpha - sp}} \\ &= c' B^{\frac{sp}{\alpha}} A \\ &= c' \left(\int_X |f(y)|^{p^*} d\mu(y)\right)^{\frac{sp}{\alpha}} \left(\int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha + sp}} d\mu(y)\right). \end{aligned}$$

Finalmente, integrando respecto de la variable x, obtenemos

$$\int_X |f(x)|^{p^*} d\mu(x) \leq c' \left(\int_X |f(y)|^{p^*} d\mu(y)\right)^{\frac{sp}{\alpha}} \left(\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha + sp}} d\mu(y)\, d\mu(x)\right).$$

Esto implica que

$$\left(\int_X |f(x)|^{p^*} d\mu(x)\right)^{\frac{\alpha - sp}{\alpha p}} \leq C \left(\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha + sp}} d\mu(y)\, d\mu(x)\right)^{1/p},$$

con

$$C = \left(2 (C_A)^{\frac{2p-1}{p} + \frac{s}{\alpha}}\right)^{p^*/p}$$

lo cual demuestra el teorema para el caso $f \in L^\infty(X)$. Para el caso general, considérese la sucesión

$$f_N(x) := \text{máx}\left\{\text{mín}\left\{f(x), N\right\}, -N\right\},$$

para cada $x \in X$ y cada $N \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $f_N \in L^\infty(X)$ para cada $N \in \mathbb{N}$ y que además, gracias a la acotación $|f|_N \leq |f|$, válida en casi todo punto, y al Lema de Fatou, podemos deducir que

$$\lim_{N \to \infty} \|f_N\|_{L^q(X)} = \|f\|_{L^q(X)},$$

para cada $q \in [1, \infty)$. Por otra parte, como $[f]_{W^{s,p}(X)} < \infty$ podemos utilizar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para deducir que

$$\lim_{N \to \infty} \int_X \int_X \frac{|f_N(x) - f_N(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha + sp}} d\mu(y)\, d\mu(x) = \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha + sp}} d\mu(y)\, d\mu(x).$$

Finalmente, considerando (6.1) para cada $N \in \mathbb{N}$, y tomando límite para $N \to \infty$, se sigue el teorema. $\square$

COROLARIO 6.3. *Sea (X, d, μ) espacio de tipo homogéneo α-Ahlfors regular, $1 < p < \infty$ y $s \in \left(0, \frac{\alpha}{p}\right)$. Entonces, para todo $q \in [p, p^*]$, con $p^* = \frac{\alpha p}{\alpha - sp}$, el espacio $W^{s,p}(X)$ está inmerso continuamente en $L^q(X)$.*

Teniendo en cuenta nuestro resultado de extensión del Capítulo 5 también se sigue el siguiente corolario.

Corolario 6.4. *Sea* (X, d, μ) *espacio de tipo homogéneo* α*-Ahlfors ,* $1 < p < \infty$ *y* $s \in \left(0, \frac{\alpha}{p}\right)$. *Sea* Ω *un dominio regular de* X. *Entonces para todo* $q \in (p, p^*)$ *el espacio* $W^{s,p}(\Omega)$ *está inmerso continuamente en* $L^q(\Omega)$. *Más aún, si* Ω *está acotado, el resultado se extiende a todo* $q \in (1, p^*)$.

2. Caso $sp = \alpha$

Para este caso sólo consideramos inmersiones en el espacio L^p y no abordaremos el caso de integrabilidad exponencial, debido a que, a los efectos del análisis que desarrollaremos en los capítulos siguientes, estaremos interesados en valores de regularidad de s pequeños.

Teorema 6.5. *Sea* (X, d, μ) *Espacio de Tipo Homogéneo* α*-Ahlfors ,* $1 \leq p < \infty$, $s = \frac{\alpha}{p}$. *Entonces, existe una constante* $C = C_{(\alpha,p,s)}$ *tal que, para toda función* f *medible de soporte acotado, se tiene que*

$$\|f\|_{L^q(X)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(X)},$$

para todo $q \in [p, +\infty)$. *En particular* $W^{s,p}(X)$ *está inmerso continuamente en* $L^q(X)$ *para cada* $q \in [p, +\infty)$.

Demostración. Dada f como en la hipótesis del teorema, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|f\|_{W^{s,p}(X)} < \infty$. En primer lugar, la continuidad de la inmersión $W^{s,p}(X) \hookrightarrow L^p(X)$ se sigue de inmediato a partir de la definición de la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(X)}$. Dado, entonces, $q \in (p, +\infty)$ consideramos $s' = s - \frac{\alpha}{2q}$. Claramente $0 < s' < s < 1$ y por el Teorema 6.1 tenemos que

$$W^{s,p}(X) \subseteq W^{s',p}(X),$$

con continuidad. Ya que $s'p = \alpha\left(1 - \frac{p}{2q}\right) < \alpha$, el Teorema 6.2 nos permite deducir que

$$W^{s',p}(X) \subseteq L^{p^*}(X),$$

para $p^* = \frac{\alpha p}{\alpha - s'p} = 2q$. Por lo tanto,

$$W^{s,p}(X) \subseteq L^{2q}(X),$$

con continuidad. Teniendo en cuenta el argumento de interpolación de Marcinkiewicz recordemos que, si $f \in L^{2q}(X) \cap L^p(X)$ entonces

$$\|f\|_{L^q(X)} \leq \left(\frac{2q-p}{q-p}\right) \|f\|_{L^p(X)}^{\frac{p}{2q-p}} \|f\|_{L^{2q}(X)}^{\frac{2(q-p)}{2q-p}}.$$

Finalmente, gracias a $W^{s,p}(X) \hookrightarrow L^p(X)$ y $W^{s,p}(X) \hookrightarrow L^{2q}(X)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(X)} &\leq C_{(\mu,\alpha,p,s)} \|f\|_{W^{s,p}(X)}^{\frac{p}{2q-p}} \|f\|_{W^{s,p}(X)}^{\frac{2(q-p)}{2q-p}} \\
&\leq C_{(\mu,\alpha,p,s)} \|f\|_{W^{s,p}(X)},
\end{aligned}$$

lo cual muestra la continuidad de la inmersión $W^{s,p}(X) \hookrightarrow L^q(X)$, como queríamos probar. $\square$

COROLARIO 6.6. *Sea (X,d,μ) espacio de tipo homogéneo α-Ahlfors, $1 \le p < \infty$, $s = \frac{\alpha}{p}$ y sea $\Omega \subseteq X$ un dominio regular. Entonces, existe una constante $C = C_{(\alpha,p,s)}$ tal que, para toda función f medible de soporte acotado, se tiene que*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \le C\,\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \tag{6.2}$$

para todo $q \in [p,+\infty)$. Si además Ω es acotado, la inmersión continua $W^{s,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ es válida para cada $q \in [1,+\infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta el inciso 3) del Lema 5.6 el subespacio $(\Omega, d_\Omega, \mu_\Omega)$ es subespacio de tipo homogéneo, α-Ahlfors regular. Luego, el corolario se sigue aplicando el Teorema 6.5 a este espacio. Por último, si Ω es acotado téngase presente que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ con continuidad, para cada $q \in [1,\infty]$, lo cual permite extender la inmersión (6.2) a todo $q \in [1,\infty]$. $\square$

3. Caso $sp > \alpha$

Comencemos por introducir los espacios Lipschitz integrales. Sea (X,d,μ) espacio de tipo homogéneo, y sea $Lip(\beta,p)$, con $0 < \beta$ y $1 \le p \le \infty$, el espacio de las funciones $\phi \in L^1_{loc}(X,\mu)$ tales que

$$\|\phi\|_{\beta,p} := \sup_{B \in \mathcal{V}_d} \frac{1}{\mu(B)^\beta}\left(⨍_B |\phi(x) - m_\phi(B)|^p\, d\mu_{(x)}\right)^{1/p} < \infty,$$

si $p < \infty$ y

$$\|\phi\|_{\beta,p} := \sup_{B \in \mathcal{V}_d} \frac{1}{\mu(B)^\beta} \|\phi - m_\phi(B)\|_{L^\infty(B)} < \infty,$$

si $p = \infty$, donde recordemos que $\mathcal{V}_d = \{B_d(x,r) : x \in X,\ r > 0\}$ y que

$$m_\phi(B) = ⨍_B \phi(x)\, d\mu(x)\,.$$

El siguiente Teorema establece la equivalencia entre las condiciones Lipschitz integrales y la condición Lipschitz puntual. En la sección final de este capítulo referenciamos los artículos consultados al respecto.

TEOREMA 6.7. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Si $\phi \in Lip(\beta,p)$ entonces existe una función ψ tal que:*

i) $\psi(x) = \phi(x)$ para μ-casi todo $x \in X$;

ii) para toda bola $B \in \mathcal{V}_d$ que contiene a x, y se tiene que

$$|\psi(x) - \psi(y)| \le C\,\|\phi\|_{\beta,p}\,(\mu(B))^\beta\,,$$

donde la constante $C > 0$ *sólo depende de* β *y* p.

Como consecuencia inmediata de este teorema surge el siguiente resultado.

TEOREMA 6.8. *Sea* (X, d, μ) *espacio de tipo homogéneo* α*-Ahlfors regular,* $1 \leq p < \infty$ *y* $s > \frac{\alpha}{p}$. *Entonces, existe una constante* $C = C_{(\alpha,p,s,\mu,d)}$ *tal que, para toda función* $f \in L^p(X)$ *se satisface*

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X)} \leq C\,[f]_{W^{s,p}(X)}\,,$$

para $\gamma = s - \frac{\alpha}{p}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar veamos que $W^{s,p}(X) \subseteq Lip(\beta, p)$, con continuidad, para $\beta := \frac{s}{\alpha} - \frac{1}{p} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Denotemos

$$I := \frac{1}{\mu(B)^{\beta}} \left(\fint_B |f(x) - m_f(B)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

Dada $f \in W^{s,p}(X)$ y $B \in \mathcal{V}_d$, bola de radio $r > 0$, hacemos uso de la desigualdad de Hölder y de la condición de Ahlfors del espacio para deducir que

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{\mu(B)^{\beta}} \left(\fint_B \fint_B |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leq C_{(\alpha,p,s,\mu)} \frac{r^{\frac{\alpha}{p}+s}}{r^{\frac{2\alpha}{p}+\alpha\beta}} \left(\int_B \int_B \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leq C_{(\alpha,p,s,\mu)} r^{\alpha\left(\frac{s}{\alpha} - \frac{1}{p} - \beta\right)} [f]_{W^{s,p}(X)} \leq C_{(\alpha,p,s,\mu)} [f]_{W^{s,p}(X)}\,. \end{aligned}$$

Luego, considerando el supremo del miembro izquierdo sobre la familia $\mathcal{V}_d$ tenemos que

$$\|f\|_{\beta,p} \leq C\,[f]_{W^{s,p}(X)}\,,$$

donde C sólo depende de constantes geométricas. Luego, aplicando el Teorema 6.7 podemos deducir que, salvo en un conjunto de medida μ-nula, la función f satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,[f]_{W^{s,p}(X)} \left(\mu(B)\right)^{\beta}\,,$$

para toda bola B que contenga a x, y. Utilizando $B = B(x, 2d(x,y))$, la condición Alhfors y el hecho que $\alpha\beta = \gamma = s - \frac{\alpha}{p}$, podemos deducir que, para todo $x, y \in X$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\gamma}} \leq C_{(\alpha,p,s,\mu,d)}\,[f]_{W^{s,p}(X)}\,.$$

Tomando supremo para todo par $x \neq y$ se obtiene el resultado. □

PROPOSICIÓN 6.9. *Sea (X, d, μ) espacio de tipo homogéneo α-Ahlfors, $\Omega \subseteq X$ dominio regular, $1 \leq p < \infty$ y $s > \frac{\alpha}{p}$. Entonces, existe una constante $C = C_{(\alpha,p,s,\mu,d,\Omega)}$ tal que, para toda función $f \in L^p(\Omega)$ se satisface*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para $\gamma = s - \frac{\alpha}{p}$.

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente hacemos uso del inciso 3) del Lema 5.6 el cual nos permite deducir que $(\Omega, d_\Omega, \mu_\Omega)$ es un subespacio de tipo homogéneo, α-Ahlfors regular. Luego, aplicamos el Teorema 6.8 a dicho espacio. □

4. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Los resultados de este capítulo han sido inspirados en los trabajos [BV16], [DNPV12]. En [DNPV12] Eleonora Di Nezza, Giampero Palatucci y Enrico Valdinoci introducen el espacio de Sobolev $W^{s,p}$, de orden fraccionario $0 < s < 1$, en el contexto euclídeo. Considerando $p \in [1, +\infty)$ y $s \in (0, 1)$, establecen teoremas de inmersión continua $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para $q \in [p, p^*]$, con $p^* = \frac{np}{n-sp}$ y $sp < n$; $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para $q \in [p, \infty)$ y $sp = n$; ambos casos contenidos en los Teoremas 6.2 y 6.2. Para el caso $sp > n$, demuestran la continuidad de la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,s-\frac{n}{p}}(\Omega)$ para Ω dominio de extensión Sobolev sin puntas externas. Siguiendo a Enrico Giusti en [Giu03], se dice que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no posee puntas externas (*external cusps*) si existe una constante $A > 0$ tal que para todo $x_0 \in \overline{\Omega}$ y para todo $r \in (0, \textit{diám}(\Omega)]$ se tiene que $|\Omega \cap B(x_0, r)| \geq |B(x_0, r)|$ .Es claro, entonces, que los dominios sin puntas externas coinciden con los dominios que en este trabajo denominamos regulares. Luego, el Teorema 6.8 de inmersión de espacios de Sobolev en espacios de Hölder contiene como caso particular al ya mencionado en [DNPV12] teniendo en mente que todo dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ determina un subespacio de tipo homogéneo $(\Omega, d_\Omega, \mu_\Omega)$ al restringir la métrica usual y la medida n-dimensional de Lebesgue, respectivamente, a dicho dominio.

El Teorema 6.7 se debe a Roberto Macías y Carlos Segovia y se encuentra en [MS79b] (Teorema 4). La clave de su demostración está en las acotaciones

$$|m_\phi(B(x_0, r)) - m_\phi(B(x_0, R))| \lesssim \|\phi\|_{\beta,q} \mu(B(x_0, R))^\beta,$$

y

$$|m_\phi(B(x, r)) - m_\phi(B(y, r))| \lesssim \|\phi\|_{\beta,q} \mu(B(x_0, R))^\beta,$$

las cuales son válidas para toda $\phi \in Lip(\beta, q)$, $\beta > 0$, $q \in [1, \infty]$, $r \in (0, R)$ y $x, y \in B(x_0, R)$, para x_0 y $R > 0$ arbitrarios. Estas acotaciones permiten mostrar la convergencia de $(m_\phi(B(x, r_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ para alguna sucesión de radios $r_n \searrow 0$ y definir $\psi(x)$ como el límite. Finalmente, haciendo uso de la holderianeidad de ψ y de la condición Lipschitz (β, q) de ϕ, demuestran que para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $r_x \in (0, 1]$ tal que

$$\fint_{B(x,r_x)} |\phi(y) - \psi(y)|^q \, d\mu(y) \leq \varepsilon$$

Haciendo uso del lema de cubrimiento de Wiener sobre esta familia de bolas $B(x, r_x)$, $x \in X$, se sigue que $\int_B |\phi(y) - \psi(y)|^q \, d\mu(y) = 0$ sobre toda bola B, de lo cual se sigue la condición i) de dicho Teorema.

CAPíTULO 7

Compacidad de las inmersiones de espacios de Sobolev en espacios de Lebesgue

En este último capítulo de la segunda parte demostraremos dos teoremas de inmersión compacta de espacios de Sobolev. Cabe notar y recordar aquí la importancia de la compacidad de inmersiones al momento de establecer el análisis espectral del laplaciano en contexto euclídeo.

1. El método de las particiones diádicas de Christ: reducción a dimensión finita

En esta sección utilizaremos una descomposición de tipo Christ de (X, d, μ) en cubos diádicos, dada por el Teorema 1.58 de la Sección 5 del primer capítulo. Recordemos que para un juego de constantes $A_0, A_1 > 0$, $0 < \delta < 1$, está determinado un conjunto de índices $\mathcal{A} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\{j\} \times \mathcal{K}_j)$, donde cada $\mathcal{K}_j$ es un conjunto a lo sumo numerable, y una familia numerable de conjuntos abiertos $\left\{Q_k^j : (j, k) \in \mathcal{A}\right\}$ tales que

$$B\left(x_k^j, A_0\delta^j\right) \subseteq Q_k^j \subseteq B\left(x_k^j, A_1\delta^j\right) \tag{7.1}$$

para todo $(j, k) \in \mathcal{A}$, y tales que $\mu\left(X \setminus \bigcup_{k\in\mathcal{K}_j} Q_k^j\right) = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Combinando estas propiedades con la condición de Ahlfors del espacio podemos deducir que

$$\frac{1}{C_A} A_0^\alpha \leq \frac{\mu\left(Q_k^j\right)}{\delta^{j\alpha}} \leq C_A A_1^\alpha \tag{7.2}$$

para todo $(j, k) \in \mathcal{A}$. En otras palabras, en espacios de Ahlfors las escalas de Christ y la medida de los cubos está uniformemente relacionada.

El siguiente teorema establece un primer resultado de inmersión compacta de espacios de Sobolev.

TEOREMA 7.1. *Sea $s > 0$, $1 \leq p < \infty$. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo α-Ahlfors, y sea $\Omega \subseteq X$ un dominio regular acotado para $W^{s,p}(X)$, y sea $\Upsilon \subseteq L^p(\Omega)$ un subconjunto acotado. Si*

$$\sup_{f\in\Upsilon} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x, y)^{\alpha+sp}} d\mu(x)\, d\mu(y) = \sup_{f\in\Upsilon} \; [f]^p_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty,$$

entonces, Υ es pre-compacto en $L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1, p]$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $q \in [1,p]$, demostraremos que, dado $\varepsilon > 0$, es posible determinar un conjunto finito de funciones $h_1, ..., h_M$ en $L^q(\Omega)$ tales que

$$\Upsilon \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} B(h_j, \varepsilon), \tag{7.3}$$

donde $B(h_j, \varepsilon)$ designa la bola abierta en el espacio $\left(L^q(\Omega), \|\cdot\|_{L^q(\Omega)}\right)$. Sea $f \in \Upsilon$, arbitraria. Al ser Ω dominio regular, gracias al Teorema 5.7 existe una función $f^* \in W^{s,p}(X)$ tal que

$$\|f^*\|_{W^{s,p}(X)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de f. Por otra parte, dado $\Omega \subseteq X$ abierto y acotado, es posible construir una familia de cubos diádicos de Christ de modo tal que Ω pertenezca a único cuadrante, esto es, es posible encontrar un cubo de Christ minimal, que simplemente denotaremos por Q, de modo tal que $Q \supseteq \Omega$. Obsérvese entonces que

$$\|f^*\|_{W^{s,p}(Q)} \leq \|f^*\|_{W^{s,p}(X)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{7.4}$$

Teniendo en mente que $L^p(Q) \subseteq L^q(Q)$, ya que $q \leq p$, podemos deducir que

$$\|f^*\|_{L^q(Q)} + [f^*]_{W^{s,p}(Q)} \leq \|f^*\|_{W^{s,p}(Q)}. \tag{7.5}$$

Si denotamos

$$C_0 := 1 + \sup_{f \in \mathcal{I}} \|f^*\|_{L^q(Q)} + \sup_{f \in \mathcal{I}} [f^*]_{W^{s,p}(Q)},$$

esta constante resultará finita debido a (7.4), (7.5) y a las hipótesis del teorema. Sea $\{Q_k\}_{1 \leq k \leq N}$ un subconjunto finito de cubos de un mismo nivel $j \in \mathbb{N}$, a determinar, el cual descompone a Q en unión de cubos no solapados; esto es,

$$\Omega \subseteq Q = \bigcup_{k=1}^{N} Q_k.$$

Considerando que $\mu(Q_k) \approx \delta^{j\alpha}$, denotamos $\theta := \delta^{j\alpha}$ y definimos dos operadores lineales $P : L^1_{loc}(X) \to L^\infty_c(X)$ y $T : L^1_{loc}(X) \to \mathbb{R}^N$ de la siguiente manera

$$Pf(x) := \sum_{k=1}^{N} m_{f^*}(Q_k) \mathbf{1}_{Q_k}(x),$$

$$T(f) := \theta^{1/q} (m_{f^*}(Q_1), ..., m_{f^*}(Q_N)),$$

donde recordemos que $m_{f^*}(Q_k)$ denota el promedio $m_{f^*}(Q_k) = \fint_{Q_k} f^*(x)\, d\mu(x)$. En primer lugar, obsérvese que

$$\|Pf\|^q_{L^q(Q)} = \sum_{k=1}^{N} |m_{f^*}(Q_k)|^q \|\mathbf{1}_{Q_k}\|^q_{L^q(Q)} \leq C_{(\mu,\alpha)} \sum_{k=1}^{N} |m_{f^*}(Q_k)|^q \theta = C_{(\mu,\alpha)} \|T(f)\|^q_q,$$

donde $C_{(\mu,\alpha)} := C_A A_1^{\alpha}$, A_1 dada por (7.2) y $\|\cdot\|_q$ denota la norma en $\mathbb{R}^N$ dada por $\|x\|_q := \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q\right)^{1/q}$. Luego, si consideramos $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo tal que $0 < \theta < 1$, tendremos que

$$\|Pf\|_{L^q(Q)}^q \leq C_{(\mu,\alpha)} \frac{1}{\theta} \|T(f)\|_q^q , \tag{7.6}$$

Haciendo uso de la desigualdad de Jensen y la comparabilidad $\mu(Q_k) \approx \delta^{j\alpha}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_q^q &= \sum_{k=1}^{N} \theta |m_{f^*}(Q_k)|^q = \sum_{k=1}^{N} \delta^{j\alpha} |m_{f^*}(Q_k)|^q \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \delta^{j\alpha} \left(\fint_{Q_k} |f^*(x)|^q \, d\mu(x) \right) \\
&\leq \frac{C_A}{A_0^{\alpha}} \sum_{k=1}^{N} \int_{Q_k} |f^*(x)|^q \, d\mu(x) \\
&\leq D_{\mu,\alpha} \int_{Q} |f^*(x)|^q \, d\mu(x) = D_{\mu,\alpha} \|f^*\|_{L^q(Q)}^q ,
\end{aligned}$$

donde $D_{\mu,\alpha} := \frac{1}{C_A A_0^{\alpha}}$. Como $\|f^*\|_{L^q(Q)}^q \leq C_0$ cualquiera sea $f \in \Upsilon$, el conjunto $\{T(f) : f \in \Upsilon\}$ está acotado en $\left(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_q\right)$ y, por lo tanto, está totalmente acotado. Luego, dado un $\eta > 0$ arbitrario es posible encontrar un subconjunto finito de vectores $\{b_1, ..., b_M\}$ en $\mathbb{R}^N$ tales que

$$\{T(f) : f \in \Upsilon\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} B_q(b_j, \eta) , \tag{7.7}$$

donde $B_q(b_j, \eta)$ denota la bola en $\left(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_q\right)$ centrada en b_j y de radio $\eta > 0$. Definamos entonces

$$h_i(x) := \frac{1}{\theta^{1/q}} \sum_{k=1}^{N} b_i^k \mathbf{1}_{Q_k}(x) , \; i = 1, ..., M,$$

donde b_i^k denotan las coordenadas del vector $b_i = \left(b_i^1, ..., b_i^N\right)$. Nótese que

$$m_{h_i}(Q_k) = \frac{1}{\theta^{1/q}} b_i^k \;\text{ y }\; T(h_i) = b_i.$$

Para finalizar la demostración probemos que, efectivamente, el conjunto de funciones $\{h_i\}_{1 \leq i \leq M}$ satisface la condición (7.3). Para ello, dado $\varepsilon > 0$, sea $f_0 \in \Upsilon$ cualesquiera y sea $b_i \in \mathbb{R}^N$ tal que $T(f_0) \in B_q(b_i, \eta)$. Consideremos la respectiva h_i definida a partir de b_i, y acotemos la diferencia $\|h_i - f_0\|_{L^q(\Omega)}$ de la siguiente manera

$$\|h_i - f_0\|_{L^q(\Omega)} \leq \|h_i - Ph_i\|_{L^q(\Omega)} + \|Ph_i - Pf_0\|_{L^q(\Omega)} + \|Pf_0 - f_0\|_{L^q(\Omega)}$$

En primer lugar, teniendo en cuenta que $P(h_i)(x) = h_i(x)$, para cada $i = 1, ..., M$, tenemos que $\|h_i - Ph_i\|_{L^q(\Omega)} = 0$. En segundo lugar, debido a (7.6) y (7.7) podemos deducir que

$$\begin{aligned} \|Ph_i - Pf_0\|_{L^q(\Omega)} &= \|P(h_i - f_0)\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{C_{(\mu,\alpha)}}{\theta}\right)^{1/q} \|T(h_i - f_0)\|_q \\ &= \left(\frac{C_{(\mu,\alpha)}}{\theta}\right)^{1/q} \|b_i - T(f_0)\|_q, \end{aligned} \tag{7.8}$$

esto es, ya que $T(f_0) \in B_q(b_i, \eta)$ tenemos que

$$\|Ph_i - Pf_0\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{C_{(\mu,\alpha)}}{\theta}\right)^{1/q} \eta,$$

Si elegimos $\eta > 0$ de modo tal que

$$\eta < \left(\frac{\theta}{C_{(\mu,\alpha)}}\right)^{1/q} \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.9}$$

tendremos que

$$\|Ph_i - Pf_0\|_{L^q(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.10}$$

Por último, acotemos $I := \|Pf_0 - f_0\|^q_{L^q(\Omega)}$,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega\cap Q_k} |Pf_0(x) - f_0(x)|^q \, d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega\cap Q_k} \left|m_{f_0^*}(Q_k) - f_0(x)\right|^q d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega\cap Q_k} \left|\frac{1}{\mu(Q_k)^q} \int_{Q_k} f_0^*(y)\, d\mu(y) - f_0(x)\right|^q d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega\cap Q_k} \frac{1}{\mu(Q_k)^q} \left|\int_{Q_k} (f_0^*(y) - f_0(x))\, d\mu(y)\right|^q d\mu(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega\cap Q_k} \frac{1}{\mu(Q_k)^q} \mu(Q_k)^{q-q/p} \left(\int_{Q_k} |f_0^*(y) - f_0(x)|^p \, d\mu(y)\right)^{q/p} d\mu(x) \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta la comparabilidad $\mu(Q_k) \approx \delta^{j\alpha}$, y observando que para cada par $x, y \in Q_k$ se tiene que $d(x,y) \leq 2C_d A_1 \delta^j = 2C_d A_1 \theta^{1/\alpha}$, podemos deducir que

$$\begin{aligned}
I &\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega\cap Q_k} \frac{1}{\mu(Q_k)^{q/p}} \left(\left(2C_d A_1 \theta^{1/\alpha}\right)^{\alpha+sp} \int_{Q_k} \frac{|f_0^*(y) - f_0(x)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y) \right)^{q/p} d\mu(x) \\
&\leq C'_{(\mu,\alpha,d)} \theta^{\frac{sq}{\alpha}} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega\cap Q_k} \left(\int_{Q_k} \frac{|f_0^*(y) - f_0(x)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y) \right)^{q/p} d\mu(x) \\
&\leq C'_{(\mu,\alpha,d)} \theta^{\frac{sq}{\alpha}} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega\cap Q_k} \left(\int_{Q} \frac{|f_0^*(y) - f_0(x)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y) \right)^{q/p} d\mu(x) \\
&\leq C'_{(\mu,\alpha,d)} \theta^{\frac{sq}{\alpha}} \int_{\Omega} \left(\int_{Q} \frac{|f_0^*(y) - f_0(x)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y) \right)^{q/p} d\mu(x) \\
&\leq C'_{(\mu,\alpha,d)} \theta^{\frac{sq}{\alpha}} \mu(\Omega)^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_{\Omega} \int_{Q} \frac{|f_0^*(y) - f_0(x)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{q/p} \\
&\leq C'_{(\mu,\alpha,d)} \mu(\Omega)^{1-\frac{q}{p}} \theta^{\frac{sq}{\alpha}} \left(\int_{Q} \int_{Q} \frac{|f_0^*(y) - f_0(x)|^p}{d(x,y)^{\alpha+sp}} d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{q/p} \\
&= C'_{(\mu,\alpha,d)} \mu(\Omega)^{1-\frac{q}{p}} \theta^{\frac{sq}{\alpha}} [f_0^*]^q_{W^{s,p}(Q)} \leq C^* \theta^{\frac{sq}{\alpha}} = C^* \delta^{jsq}
\end{aligned}$$

donde

$$C'_{(\mu,\alpha,d)} := \left(\frac{(2C_d A_1)^{(\alpha+sp)}}{C_A A_0^\alpha} \right)^{\frac{q}{p}} \text{ y } C^* := E_{(\mu,\alpha,d)} \mu(\Omega)^{1-q/p} C_0$$

Eligiendo una familia de cubos $\{Q_k\}_{1\leq k\leq N}$ de nivel $j \in \mathbb{N}$, que particionen Q y tales que

$$\delta^j < \left(\frac{\varepsilon}{2(C^*)^{1/q}} \right)^{1/s}$$

tendremos que

$$\|Pf_0 - f_0\|_{L^q(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Combinando esta última desigualdad con (7.10) obtenemos la condición de acotación total (7.3). Esto culmina la demostración del teorema. □

COROLARIO 7.2. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo α-Ahlfors regular, $1 \leq p < \infty$ y $s \in \left(0, \frac{\alpha}{p}\right)$. Sea $\Omega \subseteq X$ un dominio regular acotado e $\Upsilon \subseteq L^p(\Omega)$ un subconjunto acotado. Si*

$$\sup_{f\in\Upsilon} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+ps}} d\mu_x d\mu_y = \sup_{f\in\Upsilon} [f]^p_{W^{s,p}_{(\Omega)}} < \infty,$$

entonces, Υ es pre-compacto en $L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1, p^*)$, donde $p^* = \frac{\alpha p}{\alpha - sp}$

DEMOSTRACIÓN. Como el Teorema anterior contempla el caso $q \in [1,p]$, consideremos $q \in (p,p^*)$. Sea $\theta \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + 1 - \frac{\theta}{p^*}$. Sea $f \in \Upsilon$ y h_i, $i \in \{1,2,...,M\}$ como en la demostración del teorema anterior. Usando desigualdad de Hölder con $\frac{p}{\theta q}$ y $\frac{p^*}{(1-\theta)q}$ podemos ver

$$\begin{aligned} \|h_i - f\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int\limits_\Omega |f-h_i|^{q\theta} |f-h_i|^{q(1-\theta)} \, d\mu \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int\limits_\Omega |f-h_i|^{p} \, d\mu \right)^{\theta/p} \left(\int\limits_\Omega |f-h_i|^{p^*} \, d\mu \right)^{(1-\theta)/p^*} \\ &= \|h_i - f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|h_i - f\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{(1-\theta)}, \end{aligned}$$

y utilizando el Corolario 6.4 y el Teorema anterior tenemos que

$$\|h_i - f\|_{L^q(\Omega)} \lesssim \|h_i - f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|h_i - f\|_{W^{s,p}(\Omega)}^{(1-\theta)} \lesssim \varepsilon^\theta$$

con lo cual $I \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{M} B(\beta_j, \varepsilon)$ en $\left(L^q_{(\Omega)}, \|...\|_{L^q_{(\Omega)}}\right)$. □

2. El método de la maximal sharp fraccionaria

En esta sección introduciremos otra idea para demostrar un teorema de inmersión compacta de $W^{s,p}_{(X)}$ en $L^p(X)$. Para eso haremos uso de la maximal sharp fraccionaria.

Dado $s > 0$ y $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ definimos su maximal sharp fraccionaria $f_s^{\#}$ como

$$f_s^{\#}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^s} \fint_{B(x,r)} |f(x) - f(y)| \, d\mu(y)$$

LEMA 7.3. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, $1 \leq p < \infty$ y $s > 0$. Si $f \in W^{s,p}(X)$ entonces $f_s^{\#} \in L^p(X,\mu)$ y*

$$\|f_s^{\#}\|_{L^p} \lesssim [f]_{W^{s,p}}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar veamos que, si $x \in X$, $r > 0$, y elegimos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{k-1} < r \leq 2^k$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^s} \fint_{B(x,r)} |f(x) - f(y)| \, d\mu(y) &\leq 2C_\mu \frac{1}{2^{sk}} \fint_{B(x,2^k)} |f(x) - f(y)| \, d\mu(y) \\ &\leq 2C_\mu \left(\frac{1}{2^{skp}} \fint_{B(x,2^k)} |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Luego

$$f_s^{\#}(x)^p \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{skp}} \fint_{B(x,2^k)} |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(y).$$

Por último, teniendo en mente la equivalencia (4.5) de la demostración de la Proposición 4.4 podemos deducir que

$$\left\|f_s^{\#}\right\|_{L^p}^p \lesssim \int_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{skp}} \fint_{B\left(x,2^k\right)} |f(x)-f(y)|^p \, d\mu(y) \lesssim [f]_{W^{s,p}(X)}^p ,$$

como queríamos probar. $\square$

Utilizando esta maximal demostramos de un modo más general la compacidad de la inmersión $W^{s,p}(X) \hookrightarrow L^p(X)$ sobre espacios de tipo homogéneo acotados.

TEOREMA 7.4. *Sea* $1<p<\infty$ *y* $s>0$*,* (X,d,μ) *espacio de tipo homogéneo con* $\mu(X)<\infty$*. Entonces la identidad* $id: W^{s,p}(X) \to L^p(X)$ *es compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión $(f_k)_k$ en $W^{s,p}(X)$ acotada, esto es, tal que $\|f_k\|_{L^p} + [f_k]_{W^{s,p}} \le C$ para todo $k\in\mathbb{N}$. De la acotación en norma L^p, podemos encontrar una subsucesión, la cual converge débilmente en L^p a una función $f\in L^p$. Sin pérdida de generalidad debido a la reindexación, denotemos dicha subsucesión de igual modo que la original. Veamos que esta convergencia también es fuerte en L^p. Denotemos por $(f_k)_r$ a la función promedio

$$(f_k)_r(x) = \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f_k(y)\, d\mu_y .$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\|f_k-(f_k)_r\|_{L^p}^p &\le \int_X \left| f_k(x) - \fint_{B(x,r)} f(y)\,d\mu_y \right|^p d\mu_x \\
&\le \int_X \left(\fint_{B(x,r)} |f_k(x)-f(y)|\,d\mu_y \right)^p d\mu_x \\
&\le r^{sp} \int_X \left(f_s^{\#}(x)\right)^p d\mu_x ,
\end{aligned}$$

esto es

$$\|f_k-(f_k)_r\|_{L^p} \le r^s \left\|f_s^{\#}\right\|_{L^p} \lesssim r^s [f]_{W^{s,p}} \lesssim r^s .$$

Por otra parte, si consideramos

$$h(y) = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \mathbf{1}_{B(x,r)}(y)$$

es claro que $h\in L^{p'}(X)$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Luego

$$(f_k)_r(x) - (f)_r(x) = \int_X h(y)\left(f_k(y)-f(y)\right) d\mu(y) = \langle h, f_k - f\rangle ,$$

y esto tiende a cero cuando $k\to\infty$ para todo $x\in X$, debido a la convergencia débil en $L^p(X,\mu)$ de $(f_k)_k$ a f. Además

$$\left|(f_k)_r(x) - (f)_r(x)\right| \le \frac{C+\|f\|_{L^p(X)}}{\mu(B(x,r))^{1/p}} .$$

Obsérvese que la finitud de $diám\,(X) := D$ permite ver que, cualquiera sea $x_0 \in X$, fijo, se tiene que $B\,(x_0, D) \subseteq B\,(x, \theta r)$, para algún $\theta \geq \frac{C_d D}{r} \geq 1$, por lo cual

$$\int_X \frac{\left(C + \|f\|_{L^p(X)}\right)^p}{\mu\,(B\,(x,r))} d\mu\,(x) \leq C_\mu \theta^{\log_2 C_\mu} \left(C + \|f\|_{L^p(X)}\right)^p \frac{\mu\,(X)}{\mu\,(B\,(x_0, D))} < \infty$$

Luego, haciendo uso del teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p} &\leq \lim_{k\to\infty} \left(\|f_k - (f_k)_r\|_{L^p} + \|(f_k)_r - (f)_r\|_{L^p} + \|(f)_r - f\|_{L^p}\right) \\ &\leq Cr^s + \|(f)_r - f\|_{L^p} \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue, para $r \to 0^+$, podemos ver que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f en norma $L^p\,(X, \mu)$, como queríamos demostrar. $\square$

3. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Los resultados de este capítulo han estado inspirados en los trabajos ya citados [**DNPV12**], [**Hu03**], y en el artículo [**GKS10**] debido a Jiaxin Hu. En dicho trabajo se establecen teoremas de inmersión entre el espacio de Hajłasz-Sobolev $M^{s,p}\,(X, d, \mu)$ y el espacio de Besov $B^{s,p}_\infty\,(X, d, \mu)$, visto en el Capítulo 4, para $X \subseteq \mathbb{R}^n$, d la distancia euclídea y μ medida boreliana duplicante. También establece distintos teoremas de inmersión continua del espacio $M^{s,p}\,(X, d, \mu)$ sobre espacios L^p y espacios de Hölder, así como un teorema de inmersión compacta $M^{s,p}\,(X, d, \mu) \hookrightarrow L^p\,(X, \mu)$, para el caso $1 < p < \infty$, $s > 0$, y μ boreliana, duplicante y finita.

Por otra parte, de la gran cantidad de artículos dedicados al estudio de las inmersiones compactas de los espacios de Sobolev en los espacios L^p, destacamos tres trabajos importantes. Por una parte el de Agnieszka Kałamajska en [**Ka99**]. En este trabajo se estudia el espacio de Hajłasz-Sobolev $M^{1,p}\,(X, d, \mu)$ para el caso de espacios métricos con medida μ no degenerada. Prueban en primer lugar un criterio de compacidad en $L^p\,(X, \mu)$, el cual establece que toda sucesión $(f_n)_n$ acotada en $L^p\,(X, \mu)$ tal que

$$\limsup_{r\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - m_{f_n}\,(B\,(\cdot, r))\|_{L^p(X,\mu)} = 0,$$

posee subsucesión convergente en $L^p\,(X, \mu)$. Este resultado les permite demostrar que para medidas que satisfacen una condición generalizada de duplicación, dada por

$$\mu\,(B\,(x, 2r)) \leq N\,(r)\,\mu\,(B\,(x, r))\,,$$

para alguna función N tal que $\lim_{r\to 0} r^p N\,(r) = 0$, el espacio $M^{1,p}\,(X, d, \mu)$ posee inmersión compacta en $L^p\,(X, \mu)$ para $1 \leq p < \infty$.

Por otra parte, I.A. Ivanishko y V.G. Krotov, en [**IK09**] , introducen espacios de Sobolev mediante funciones maximales sharp generalizadas. Siguiendo la notación de los autores, definen la clase $\Omega_{(a)}$ de funciones no negativas y crecientes $\eta : (0, 1] \to (0, +\infty)$ tales que $\eta\,(0+) = 0$ y $\frac{\eta(r)}{r^a}$ es función decreciente;

y $\Omega := \bigcup_{a>0} \Omega_{(a)}$. Luego, para $\eta \in \Omega$, define el maximal

$$\mathcal{N}_\eta f(x) := \sup_{B_r \ni x} \frac{1}{\eta(r)} \fint_{B_r} |f(y) - f(x)|\, d\mu(y)$$

donde el supremo se considera sobre todas las bolas B_r de radio $r \in (0,1]$ que contengan a $x \in X$. Obsérvese que $\eta(r) = r^s$, perteneciente a la clase $\Omega_{(s+\varepsilon)}$ para cada $\varepsilon > 0$, involucra el caso de la maximal sharp fraccionaria introducida en la sección anterior. Utilizando esta generalización de maximal sharp Ivanishko y Krotov introducen los espacios de Sobolev C_η^p dados por

$$C_\eta^p(X,d,\mu) := \left\{ f \in L^p(X,\mu) \ / \ \|f\|_{C_\eta^p} := \|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|\mathcal{N}_\eta f\|_{L^p(X,\mu)} < \infty \right\}$$

normado mediante $\|\cdot\|_{C_\eta^p}$, donde (X,d,μ) es un espacio métrico dotado de una medida μ Borel regular. Logran caracterizar las inmersiones compactas de estos espacios, demostrando que, si $1 < p < q < \infty$, $\eta \in \Omega(1)$ y (X,d,μ) es espacio γ-Ahlfors regular, entonces la inmersión $C_\eta^p(X,d,\mu) \hookrightarrow L^q(X,\mu)$ es compacta si y sólo si $\lim_{r\to 0^+} \eta(r)\, r^{\gamma\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} = 0$. Esta última condición de límite es suficiente para la compacidad, y se satisface para funciones $\eta \in \Omega$ y espacios métricos con medida no necesariamente Ahlfors regulares. Cabe destacar que esta clase de resultados no son aplicables en los espacios de Sobolev $W^{s,p}(X)$ ya que no existe equivalencia entre éstos y los espacios $C_\eta^p(X,d,\mu)$ para $\eta(r) = r^s$.

Por último, N.N. Romanovskiĭ en [Rom13] introduce una nueva clase de espacios de Sobolev, más rústicos y versátiles quizás, modificando el módulo de continuidad involucrado en la seminorma. A fin de simplificar la explicación nos restringiremos al caso $p \geq 1$. Considera (X,d,μ) un espacio métrico separable con medida μ Boreliana no degenerada, esto es, $\mu(B) > 0$ para toda bola B, y tal que para cada $x \in X$ la aplicación $r \mapsto \mu(B(x,r))$ es continua. Dado un subconjunto abierto $\Omega \subseteq X$, y $\delta > 0$, denota por $\sum_\delta$ a la familia de todas las particiones de Ω por subconjuntos de diámetro menor o igual que δ, y dada una partición $\sigma \in \sum_\delta$ denota por G_σ al generado lineal finito de las características $\mathbf{1}_A$ con $A \in \sigma$. Introduce luego la función

$$\theta_p(f,\delta) := \sup_{\sigma \in \sum_\delta} \inf_{g \in G_\sigma} \|f - g\|_{L^p(X,\mu)}$$

esto es, $\inf_{g \in G_\sigma} \|f - g\|_{L^p(X,\mu)}$ mide el error más pequeño del mejor aproximante a f por funciones simples respecto de una partición fija $\sum_\delta$ y $\theta_p(f,\delta)$ mide el error más grosero de los mejores aproximantes de cada partición. Introduce así los espacios de Sobolev $S^{s,p}(\Omega)$, para $0 < s \leq 1$, mediante la seminorma

$$[f]_{S^{s,p}(\Omega)} := \sup_{\delta>0} \frac{\theta_p(f,\delta)}{\delta^s},$$

del modo clásico como

$$S^{s,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega,\mu) : \|f\|_{S^{s,p}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} + [f]_{S^{s,p}(\Omega)} < \infty \right\};$$

y normalizado mediante $\|\cdot\|_{S^{s,p}(\Omega)}$. Como resultados de interés demuestra que en el caso euclídeo, si Ω es un $W^{1,p}$-dominio de extensión en $\mathbb{R}^n$ entonces $S^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ con normas equivalentes. Para establecer su resultado de inmersión compacta, introduce las clases de dominios A_ψ, las cuales están dadas para funciones $\psi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, continuas, no decrecientes y tales que $\psi(0) = 0$. Dada una función ψ así descrita, se dice que un subconjunto abierto $\Omega \subseteq X$ es de clase A_ψ si es posible encontrar una sucesión de particiones de Ω, dada por $\{\Gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, de modo tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, Γ_{k+1} refina Γ_k, y para cada conjunto $E \in \Gamma_k$ se tiene que $diám(E) \leq C_1 2^{-k}$ y $\mu(E) \leq C_2\psi\left(2^{-k}\right)$. Obsérvese que en espacios de tipo homogéneo, las familias de cubos de Christ son ideales para encontrar conjuntos Ω en clases A_ψ, para funciones ψ de la forma $\psi(t) = t^a$. En efecto, es para este tipo de dominios para los que establece un criterio de compacidad: si $\Omega \subseteq X$ es totalmente acotado, $\psi(t) = t^a$, para algún $a \in [1, +\infty)$, $1 \leq p < \infty, 0 < s \leq 1, a > sp$ y $q \in [p, \frac{ap}{a-sp})$ entonces la inmersión $S^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacta. Cabe mencionar que hasta donde los autores de este trabajo han consultado no hay trabajos que establezcan relación entre los espacios $S^{s,p}$ y los espacios de Sobolev $W^{s,p}$ para el caso fraccionario, sea en contexto de espacios de tipo homogéneo, sea en contexto euclídeo.

Parte 3

Análisis espectral del operador laplaciano fraccionario en espacios de tipo homogéneo

CAPÍTULO 8

Análisis espectral del laplaciano fraccionario en espacios de Ahlfors

En este capítulo desarrollamos los resultados que refieren al análisis del problema de autovalores del laplaciano fraccionario en su formulación variacional. En concreto, deseamos entender y resolver el siguiente problema. Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ y las funciones $u \in B$, para algún espacio de funciones B adecuado, tales que $D^s u = \lambda u$, donde D^s designa el operador laplaciano fraccionario. Resolveremos este problema recurriendo a su formulación variacional, gracias a la riqueza de las técnicas y a la versatilidad que presenta dicha formulación. Esto es, utilizaremos una forma bilineal B^s, relacionada al laplaciano fraccionario de modo tal que dicho problema de autovalores esté dado por hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in B$, tales que

$$B^s (u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2}$$

para toda función $v \in B$. Es importante destacar en este punto que los espacios de Sobolev considerados y estudiados en los capítulos anteriores proveerán los espacios B adecuados a esta teoría general.

La primera sección, entonces, introduce el operador laplaciano fraccionario así como la forma bilineal asociada, la cual nos será de utilidad no sólo para plantear el problema de autovalores de un modo débil, sino también para demostrar un teorema de existencia y de caracterización de autovalores. Para ello repasamos, en la segunda sección, resultados que atañen al espectro de formas bilineales en un contexto abstracto. La tercera sección contiene los resultados espectrales del laplaciano fraccionario. En la sección cuarta y final se presentan las referencias bibliográficas y se detallan brevemente las ideas básicas de los operadores de tipo laplaciano fraccionario.

1. El laplaciano fraccionario en espacios de Ahlfors

Sea (X, d, μ) un espacio α-Ahlfors regular estándar y $s > 0$. Definimos como laplaciano fraccionario al operador

$$D^s f (x) := \int_X \frac{f (x) - f (y)}{d (x, y)^{\alpha+2s}} d\mu (y) ,$$

el cual está bien definido a priori, como muestra la Proposición 8.1, sobre las clases de funciones Hölder-acotadas, Λ^γ, de orden de regularidad $\gamma > 2s$, esto es,

$$\Lambda^\gamma (X,d) := \mathcal{C}_b (X,d) \cap \mathcal{C}^{0,\gamma} (X,d),$$

donde $\mathcal{C}_b (X,d)$ denota la clase de funciones continuas y acotadas sobre X, y recordemos que $\mathcal{C}^{0,\gamma} (X,d)$ designa la clase de funciones γ-Hölder dada por

$$\mathcal{C}^{0,\gamma} (X,d) = \left\{ f \in \mathcal{C} (X,d) \ : \ \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\gamma} < \infty \right\}.$$

El espacio $\Lambda^\gamma (X,d)$ resulta espacio de Banach si se lo dota de la norma

$$\|f\|_{\Lambda^\gamma(X,d)} := \|f\|_\infty + [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}} = \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\gamma}.$$

Como veremos más adelante, el operador D^s es un operador de derivación de orden $2s$. Cabe observar que, aunque pueda parecer discordante la notación utilizada, está en sintonía con el caso euclídeo. También es de destacarse la naturaleza no local de este operador. Si consideramos $f \in \Lambda^\gamma (X,d)$, y $x_0 \in X$, fijo, tal que $0 \leq -f \leq 1$, $sop(f) \subseteq B(x_0, 2)$ y $-f \equiv 1$ sobre la bola $B(x_0,1)$ puede verse que , para todo $x \in X \setminus B(x_0,2)$

$$\begin{aligned} D^s f(x) &= \int_X \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) = \int_{B(x_0,2)} \frac{-f(y)}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) \geq \int_{B(x_0,1)} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) \\ &\geq \int_{B(x_0,1)} \frac{1}{(C_d d(x,x_0) + C_d)^{\alpha+2s}} d\mu(y) \geq \frac{\mu(B(x_0,1))}{(2C_d)^{\alpha+2s}} \frac{1}{(d(x,x_0))^{\alpha+2s}}, \end{aligned}$$

esto es, si bien $f(x) \equiv 0$ en un entorno del punto, no ocurre lo mismo con $D^s f(x)$, el cual no es nulo sobre $X \setminus B(x_0, 2)$.

Por otra parte, como desarrollamos en el Ejemplo 1.5, téngase en cuenta que el uso de cuasimétricas arbitrarias puede producir consecuencias no deseadas. Efectivamente, y a este respecto, puede suceder que el integrando de la definición del laplaciano no resulte medible necesariamente. Consideremos la cuasimétrica $d(x,y) := \varphi(x-y)$ dada por el Ejemplo 1.5, y sea f una función suave tal que $0 \leq -f \leq 1$, $f(0) = 0$, y $f \equiv -1$ sobre el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} - \varepsilon \leq |x| \leq 1 + \varepsilon\right\}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Si $H(x) := \frac{f(0)-f(x)}{d(0,x)^{1+2s}}$ tendremos entonces que

$$H^{-1}((1,+\infty)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup [V \cap (-1,1)],$$

esto es, H no es una función medible Lebesgue. Una primera estrategia para solventar esta problemática, como ya hemos hecho, consiste en considerar cuasimétricas cuya familia de bolas sea medible respecto de la medida original. En la siguiente proposición hacemos uso de esta estrategia a fin de mostrar la buena definición puntual

PROPOSICIÓN 8.1. *Sea* (X,d,μ) *espacio* α*-Ahlfors regular estándar con* d*-bolas medibles. Si* $f \in \Lambda^{\gamma}(X,d)$*, con* $\gamma > 2s$*, entonces la integral que define* $D^{s}f(x)$ *es absolutamente convergente para cada* $x \in X$*.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, observemos que

$$\begin{aligned} |D^{s}f(x)| &\leq \int_{X} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) \\ &= \int_{B(x,1)} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) + \int_{X\setminus B(x,1)} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Para acotar I hacemos uso de la condición Hölder de f y de la primera acotación del Lema 4.1,

$$I \leq [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}} \int_{B(x,1)} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha-(\gamma-2s)}} d\mu(y) \leq C_{A} [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}} \frac{2^{\alpha}}{2^{\gamma-2s}-1}.$$

Para acotar II hacemos uso de la acotación de f y de la segunda acotación del Lema 4.1,

$$II \leq \|f\|_{\infty} \int_{X\setminus B(x,1)} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) \leq C_{A} \|f\|_{\infty} \frac{2^{\alpha+2s}}{2^{2s}-1}.$$

Esto es , para todo $x \in X$ tenemos que

$$|D^{s}f(x)| \leq \int_{X} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y) \leq C_{(\mu,\alpha,\gamma,s)} \|f\|_{\Lambda^{\gamma}} < \infty.$$

□

Cabe observar que en la Proposición 8.1 el valor de γ podría restringirse a fin de evitar la trivialidad de las clases $\Lambda^{\gamma}(X,d)$. Claramente esto no impide la buena definición del operador D^{s} aunque en dichos casos coincidiera con el operador nulo.

Por otra parte es importante destacar que la medibilidad de las bolas generadas por la cuasimétrica del espacio no es una propiedad suficiente que asegure la continuidad del laplaciano fraccionario D^{s} sobre las clases de Hölder y de Sobolev. Más aún, debido a que dicho operador no es positivo, tal como ocurre con los operadores integrales singulares y los operadores de diferenciación fraccionaria, no es un operador invariante por cuasimétricas equivalentes, gentileza que las seminormas de los espacios de Hölder, Sobolev y Besov sí presentan y que permite utilizar la cuasimétrica regularizada $d_{\#}$, dada por la Observación 1.7, en caso que requiera trabajarse con alguna hipótesis extra de regularidad. Si bien definir el laplaciano D^{s} utilizando esta cuasimétrica $d_{\#}$ en su integrando es una alternativa posible, restringiría y haría perder de generalidad nuestro análisis de un modo innecesario. En vista de esta coyuntura, será importante especificar el contexto de cuasimetricidad que utilizaremos para los resultados de este capítulo. Teniendo en mente la propiedad iv) del Teorema 1.6 diremos que un espacio cuasimétrico (X, d) es de orden β, con $\beta > 0$, si existe una constante $C_H > 0$ tal que

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq C_H d(x,y)^{\beta} \operatorname{máx}\left(d(x,z)^{1-\beta}, d(y,z)^{1-\beta}\right) \tag{8.1}$$

para toda elección $x, y, z \in X$. Téngase presente que pueden existir cuasimétricas que no satisfagan esta condición de hölderianeidad. Un contraejemplo evidente es el dado por el Ejemplo 1.5. En efecto, no es difícil demostrar que en un espacio (X, d) de orden β las d-bolas son conjuntos abiertos, propiedad que no verifica la cuasimétrica dada en dicho ejemplo.

Los siguientes teoremas, por tanto, hacen uso de esta condición (8.1) de hölderianeidad de la cuasimétrica a fin de probar la continuidad de acción del laplaciano sobre espacios de Hölder y de Besov.

TEOREMA 8.2. *Sea (X, d, μ) un espacio α-Ahlfors regular estándar de orden β. Entonces, para todo $\gamma > 0$, tal que $\gamma \in (2s, \beta]$, el operador $D^s : \Lambda^{\gamma}(X, d) \to \Lambda^{\gamma-2s}(X, d)$ es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \Lambda^{\gamma}(X, d)$. Utilizando el mismo razonamiento aplicado en la demostración de la Proposición 8.1 anterior obtenemos que

$$\|D^s f\|_{\infty} \leq C_{(\mu,\alpha,\gamma,s)} \|f\|_{\Lambda^{\gamma}} \tag{8.2}$$

Para demostrar que $D^s f$ satisface la condición Hölder descomponemos $X = B \cup (X \setminus B)$ donde $B := B_d(x, 2C_d d(x, y))$. Esto es,

$$\begin{aligned}
|D^s f(x) - D^s f(y)| &\leq \int_B \frac{|f(x) - f(z)|}{d(x,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z) + \int_B \frac{|f(y) - f(z)|}{d(y,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z) \\
&\quad + \int_{X \setminus B} \left| \frac{f(x) - f(z)}{d(x,z)^{\alpha+2s}} - \frac{f(y) - f(z)}{d(y,z)^{\alpha+2s}} \right| d\mu(z) \\
&= I + II + III
\end{aligned}$$

Para acotar I y II procedemos como antes,

$$I, II \leq C_A C_d^{\gamma-2} \frac{2^{\alpha+\gamma-2s}}{2^{\gamma-2s} - 1} [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} d(x,y)^{\gamma-2s}.$$

Para acotar III obsérvese que

$$\begin{aligned} III &= \int\limits_{X\backslash B} \left| \frac{f(x)-f(y)}{d(x,z)^{\alpha+2s}} + \frac{f(y)-f(z)}{d(x,z)^{\alpha+2s}} - \frac{f(y)-f(z)}{d(y,z)^{\alpha+2s}} \right| d\mu(z) \\ &\leq \int\limits_{X\backslash B} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z) + \int\limits_{X\backslash B} \frac{|f(y)-f(z)| \left| d(x,z)^{\alpha+2s} - d(y,z)^{\alpha+2s} \right|}{d(x,z)^{\alpha+2s} d(y,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z) \\ &= III_1 + III_2 \end{aligned}$$

En primer lugar, III_1 se acota de modo similar a I y II, obteniendo

$$III_1 \leq \frac{2^{\alpha}}{2^{2s}-1} C_d^{2s} C_A [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} d(x,y)^{\gamma-2s}$$

Para acotar III_2 obsérvese que, para todo $z \in X$ con $d(z,x) \geq 2C_d d(x,y)$, tenemos que

$$d(y,z) \leq C_d d(x,z) \leq C_d^2 d(y,z)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \left| d(x,z)^{\alpha+2s} - d(y,z)^{\alpha+2s} \right| &\leq C_{(\alpha,s,d)} d(y,z)^{\alpha+2s-1} |d(x,z) - d(y,z)| \\ &\leq C_{(\alpha,s,d)} d(y,z)^{\alpha+2s-1} d(x,y)^{\beta} \operatorname{máx}\left(d(x,z)^{1-\beta}, d(y,z)^{1-\beta} \right) \\ &= C_{(\alpha,s,d,\beta)} d(y,z)^{\alpha+2s} \frac{d(x,y)^{\beta}}{d(y,z)^{\beta}} \end{aligned}$$

para $C_{(\alpha,s,d,\beta)} = (\alpha+2s) C_d^{|1-\beta|} C_H$. Haciendo uso de estas desigualdades y utilizando $\beta \geq \gamma > (\gamma - 2s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} III_2 &= C_{(\alpha,s,d,\beta)} [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} \int\limits_{X\backslash B} \frac{d(y,z)^{\gamma}}{d(x,z)^{\alpha+2s} d(y,z)^{\alpha+2s}} \frac{d(x,y)^{\beta} d(y,z)^{\alpha+2s}}{d(y,z)^{\beta}} d\mu(z) \\ &\leq C'_{(\alpha,s,d,\beta)} [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} d(x,y)^{\beta} \int\limits_{X\backslash B} \frac{1}{d(x,z)^{\alpha+\beta-(\gamma-2s)}} d\mu(z) \\ &\leq C'_{(\alpha,s,d,\beta)} C_d^{2(\gamma-s)} C_A \frac{2^{\alpha}}{2^{\beta-(\gamma-2s)}-1} [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} d(x,y)^{(\gamma-2s)} \\ &= C_{(\alpha,s,d,\beta,\mu,\gamma)} [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} d(x,y)^{(\gamma-2s)} \end{aligned}$$

En conclusión

$$|D^s f(x) - D^s f(y)| \leq C_{(\alpha,s,d,\beta,\mu,\gamma)} [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} d(x,y)^{(\gamma-2s)}$$

para todo par $x, y \in X$. Esto es

$$[D^s f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma-2s}(X,d)} \lesssim [f]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(X,d)} .$$

Teniendo en mente (8.2) obtenemos finalmente

$$\|D^s f\|_{\Lambda_{\gamma-2s}(X,d)} \leq C_{(\alpha,s,d,\beta,\mu,\gamma)} \|f\|_{\Lambda^{\gamma}(X,d)}$$

como queríamos demostrar. □

Procedemos ahora a analizar la acción de D^s sobre los espacios de Sobolev.

TEOREMA 8.3. *Sea (X, d, μ) un espacio α-Ahlfors regular estándar de orden β. Entonces, para todo $\gamma > 0$ tal que $\gamma \in (2s, \beta]$, y para todo $1 < p < \infty$, el operador $D^s : W^{\gamma,p}(X, d, \mu) \to W^{\gamma-2s,p}(X, d, \mu)$ es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, para demostrar la acotación en $L^p(X, \mu)$ observemos que

$$\begin{aligned} |D^s f(x)|^p &\leq 2^{p-1}\left(\int\limits_{X\setminus B} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right)^p + 2^{p-1}\left(\int\limits_{B} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right)^p \\ &= I(x) + II(x), \end{aligned}$$

donde $B := B_d(x, 1)$. Por otra parte, aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados p, p', y el Lema 4.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\int\limits_{X\setminus B} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right)^p &= \left(\int\limits_{X\setminus B} \frac{1}{d(x,y)^{\frac{\alpha+2s}{p'}}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\frac{\alpha+2s}{p}}} d\mu(y)\right)^p \\ &\leq \left(\int\limits_{X\setminus B} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right)^{p/p'} \left(\int\limits_{X\setminus B} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right) \\ &\leq \left(C_A \frac{2^{\alpha+2s}}{2^{2s}-1}\right)^{p/p'} \left(\int\limits_{X\setminus B} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right) \\ &\leq C_{(\alpha,s,\mu)} \left(|f(x)|^p + \int\limits_{X\setminus B} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right), \end{aligned}$$

por lo cual, aplicando nuevamente el Lema 4.1, deducimos que

$$\begin{aligned} \int\limits_X I(x)\, d\mu(x) &= \int\limits_X 2^{p-1} \left(\int\limits_{X\setminus B} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\right)^p d\mu(x) \\ &\leq C_{(\alpha,s,\mu)} \left(\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} + \iint\limits_{d(x,y)>1} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\, d\mu(x)\right) \\ &\leq C_{(\alpha,s,\mu)} \left(\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} + \int_X |f(y)|^p \int_{X\setminus B} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(x)\, d\mu(y)\right) \\ &\leq C'_{(\alpha,s,\mu)} \|f\|^p_{L^p(X,\mu)}. \end{aligned}$$

Para acotar $II(x)$ aplicamos nuevamente la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\left(\int_B \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu(y)\right)^p &= \left(\int_B \frac{1}{d(x,y)^{(1-\theta)(\alpha+2s)}}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\theta(\alpha+2s)}}d\mu(y)\right)^p\\ &\leq \left(\int_B \frac{1}{d(x,y)^{(1-\theta)(\alpha+2s)p'}}d\mu(y)\right)^{p/p'}\left(\int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\theta(\alpha+2s)p}}d\mu(y)\right)\end{aligned}$$

Si consideramos θ tal que $\theta p(\alpha+2s)=\alpha+\gamma p$ tendremos que $(1-\theta)p'(\alpha+2s)=\alpha-p'(\gamma-2s)$ por lo cual, nuevamente el Lema 4.1 nos permite deducir que

$$\int_B \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu(y)\leq C_{(\alpha,s,p,\mu)}\left(\int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+\gamma p}}d\mu(y)\right)^{1/p}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_X II(x)\,d\mu(x) &\leq C_{(\alpha,s,p,\mu)}\int_X\int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+\gamma p}}d\mu(y)\,d\mu(x)\\ &\leq C_{(\alpha,s,p,\mu)}\,[f]^p_{W^{\gamma,p}(X,d,\mu)}\end{aligned}$$

Esto es

$$\begin{aligned}\|D^s f\|_{L^p(X,\mu)} &\leq \int_X I(x)\,d\mu(x)+\int_X II(x)\,d\mu(x)\\ &\leq C'_{(\alpha,s,\mu)}\,\|f\|^p_{L^p(X,\mu)}+C_{(\alpha,s,p,\mu)}\,[f]^p_{W^{\gamma,p}(X,d,\mu)}\\ &\leq C''_{(\alpha,s,p,\mu)}\,\|f\|_{W^{\gamma,p}(X,d,\mu)}\end{aligned}$$

Para la acotación en seminorma $W^{\gamma,p}$, denotemos

$$B:=B(x,2C_d d(x,y))\,,\,B^*:=B\left(y,2C_d^2 d(x,y)\right),B':=B(y,d(x,y))\,.$$

Obsérvese que $B'\subseteq B\subseteq B^*$. Separemos la diferencia $|D^s f(x)-D^s f(y)|$ de igual modo que en la demostración del Teorema 8.2 anterior y aplicamos algunas de las técnicas utilizadas,

$$\begin{aligned}|D^s f(x)-D^s f(y)| &\leq \int_B \frac{|f(x)-f(z)|}{d(x,z)^{\alpha+2s}}d\mu(z)+\int_B \frac{|f(y)-f(z)|}{d(y,z)^{\alpha+2s}}d\mu(z)\\ &+\int_{X\setminus B}\frac{|f(x)-f(z)|\left|d(x,z)^{\alpha+2s}-d(y,z)^{\alpha+2s}\right|}{d(x,z)^{\alpha+2s}\,d(y,z)^{\alpha+2s}}d\mu(z)+\int_{X\setminus B}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,z)^{\alpha+2s}}d\mu(z)\,,\end{aligned}$$

y hagamos uso de la comparabilidad $d(x,z)\approx d(y,z)$ y de la condición de orden β del espacio, esto es,

$$\left|d(x,z)^{\alpha+2s}-d(y,z)^{\alpha+2s}\right|\leq C_{(\alpha,s,d,\beta)}d(y,z)^{\alpha+2s}\frac{d(x,y)^\beta}{d(y,z)^\beta},$$

para deducir que

$$|D^s f(x) - D^s f(y)| \leq \int_B \frac{|f(x) - f(z)|}{d(x,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z) + \int_{B^*} \frac{|f(y) - f(z)|}{d(y,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z)$$
$$+C_{(\alpha,\beta,s,d)} d(x,y)^\beta \int_{X\setminus B} \frac{|f(x) - f(z)|}{d(x,z)^{\alpha+2s+\beta}} d\mu(z) + C_{(\alpha,s,d)} \int_{X\setminus B'} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(y,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z)$$

Luego, aplicando el Lema 4.1 en la cuarta integral tendremos que

$$\begin{aligned} |D^s f(x) - D^s f(y)|^p &\lesssim \left(\int_B \frac{|f(x) - f(z)|}{d(x,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z)\right)^p + \left(\int_{B^*} \frac{|f(y) - f(z)|}{d(y,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z)\right)^p \\ &\quad + d(x,y)^{\beta p} \left(\int_{X\setminus B} \frac{|f(x) - f(z)|}{d(x,z)^{\alpha+2s+\beta}} d\mu(z)\right)^p + \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{2sp}} \\ &= I(x) + II(y) + III(x,y) + IV(x,y) \end{aligned}$$

donde aquí la constante de desigualdad depende sólo de α, β, p, s, C_A y C_d. Para llevar a cabo las acotaciones de I, II y III aplicaremos la desigualdad de Hölder. En primer lugar si elegimos $\theta \in (0,1)$ tal que

$$M := (1-\theta)\, p'(\alpha + 2s) < \alpha \tag{8.3}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} I(x) &= \left(\int_B \frac{|f(x) - f(z)|}{d(x,z)^{\alpha+2s}} d\mu(z)\right)^p \\ &\leq \left(\int_B \frac{1}{d(x,z)^{M'}} d\mu(z)\right)^{p/p'} \int_B \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} d\mu(z) \\ &\leq C_{(\alpha,s,p,\mu,d)} d(x,y)^{(p-1)(\alpha-M)} \int_B \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} d\mu(z) \end{aligned}$$

De igual modo acotamos $II(y)$, obteniendo

$$II(y) \leq C_{(\alpha,s,p,\mu,d)} d_\#(x,y)^{(p-1)(\alpha-M)} \int_{B^*} \frac{|f(y) - f(z)|^p}{d(y,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} d\mu(z)$$

Por otra parte, si elegimos $\eta \in (0,1)$ tal que

$$N := (1-\eta)\, p'(\alpha + 2s + \beta) > \alpha \tag{8.4}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} III(x,y) &\leq d(x,y)^{\beta p} \left(\int_{X\setminus B} \frac{1}{d(x,z)^N} d\mu(z)\right)^{p/p'} \left(\int_{X\setminus B} \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\eta p(\alpha+2s+\beta)}} d\mu(z)\right) \\ &\leq C_{(\alpha,s,p,\mu,d)} d(x,y)^{\beta p-(p-1)(N-\alpha)} \int_{X\setminus B} \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\eta p(\alpha+2s+\beta)}} d\mu(z) \end{aligned}$$

Luego, denotemos $\gamma^* := \gamma - 2s$ y dividamos la seminorma $[D^s f]^p_{W^{\gamma^*,p}}$ en cuatro partes, de acuerdo a I, II, III, IV. Tendremos que

$$\begin{aligned} [D^s f]^p_{W^{\gamma^*,p}} &= \int_X \int_X \frac{|D^s f(x) - D^s f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*}} d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &\leq C_{(\alpha,s,p,\mu,d)} \int_X \int_X \frac{(I(x) + II(y) + III(x,y) + IV(x,y))}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*}} d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &\leq C_{(\alpha,s,p,\mu,d)} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4), \end{aligned}$$

donde, en primer lugar

$$A_1 := \int_X \int_X \frac{I(x)}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*}} d\mu(x)\, d\mu(y)$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \int_X \int_X \int_B \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} d(x,y)^{(p-1)(\alpha-M)-\alpha-p\gamma^*} d\mu(z)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &\lesssim \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} \int_{y:d(y,x)>\frac{d(x,z)}{2C_d}} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*-(p-1)(\alpha-M)}} d\mu(y)\, d\mu(z)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

En segundo lugar, y de modo similar,

$$A_2 := \int_X \int_X \frac{II(y)}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*}} d\mu(x)\, d\mu(y)$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \int_X \int_X \int_{B^*} \frac{|f(y) - f(z)|^p}{d(y,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} d(x,y)^{(p-1)(\alpha-M)-\alpha-p\gamma^*} d\mu(z)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &\lesssim \int_X \int_X \frac{|f(y) - f(z)|^p}{d(y,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} \int_{x:d(y,x)>\frac{d(y,z)}{2C_d^2}} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*-(p-1)(\alpha-M)}} d\mu(x)\, d\mu(y)\, d\mu(z) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$A_3 := \int_X \int_X \frac{III(x,y)}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*}} d\mu(x)\, d\mu(y)$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \int_X \int_X \int_{X\setminus B} \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\eta p(\alpha+2s+\beta)}} d(x,y)^{\beta p-(p-1)(N-\alpha)-\alpha-p\gamma^*} d\mu(z)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &\lesssim \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\eta p(\alpha+2s+\beta)}} \int_{y:d(x,y)<\frac{d(x,z)}{2C_d}} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha-(\beta p-(p-1)(N-\alpha)-p\gamma^*)}} d\mu(y)\, d\mu(x)\, d\mu(z) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_4 \quad : \quad &= \int_X \int_X \frac{IV(x,y)}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*}} d\mu(x)\, d\mu(y) \lesssim \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+p\gamma^*+2sp}} d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &\lesssim \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha+\gamma p}} d\mu(x)\, d\mu(y) \lesssim [f]^p_{W^{\gamma,p}(X,d,\mu)} \end{aligned}$$

Observemos entonces que la finitud de A_1, A_2 y A_3 depende de la elección de $\theta, \eta \in (0,1)$ tales que

$$p\gamma^* - (p-1)(\alpha - M) > 0 \text{ y } \beta p - (p-1)(N-\alpha) - p\gamma^* > 0 \tag{8.5}$$

Teniendo en mente que

$$p\gamma^* - (p-1)(\alpha - M) = \alpha + \gamma p - \theta p(\alpha + 2s)$$

y

$$\beta p - (p-1)(N-\alpha) - p\gamma^* = -\alpha - \gamma p + \eta p(\alpha + 2s + \beta),$$

las condiciones (8.3), (8.4) y (8.5) se traducen en

$$\frac{\alpha + 2sp}{p(\alpha + 2s)} < \theta < \frac{\alpha + \gamma p}{p(\alpha + 2s)}$$

y

$$\frac{\alpha + \gamma p}{\alpha p + p(2s + \beta)} < \eta < \frac{\alpha + p(2s + \beta)}{\alpha p + p(2s + \beta)}$$

lo cual es siempre posible, ya que $\gamma < 2s + \beta$. Teniendo en cuenta estas desigualdades, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} A_1 &\lesssim \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} \int_{y:d(y,x) > \frac{d(x,z)}{2C_d}} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+\alpha+\gamma p - \theta p(\alpha+2s)}} d\mu(y)\, d\mu(z)\, d\mu(x) \\ &\lesssim \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\theta(\alpha+2s)p}} \frac{1}{d(x,z)^{\alpha+\gamma p - \theta p(\alpha+2s)}} d\mu(y)\, d\mu(z)\, d\mu(x) \\ &\lesssim \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{\alpha+\gamma p}} d\mu(z)\, d\mu(x) \lesssim [f]^p_{W^{\gamma,p}(X,d,\mu)}, \end{aligned}$$

análogamente

$$A_2, A_3 \lesssim [f]^p_{W^{\gamma,p}(X,d,\mu)}$$

En conclusión

$$[D^s f]^p_{W^{\gamma^*,p}} \leq C_{(\alpha,s,p,\mu,d)} [f]^p_{W^{\gamma,p}(X,d,\mu)}$$

como queríamos demostrar. □

El operador D^s puede verse como el operador de Euler-Lagrange asociado a una forma cuadrática definida por una forma bilineal. Es decir, como un problema de minimización de energía no local. En efecto, si consideramos $f,g\in\Lambda^{\beta+2s}(X)$, con $\beta>0$, tenemos que, gracias al Lema

$$\begin{aligned}
\langle D^s f,g\rangle_{L^2(X,\mu)} &= \int_X\left(\int_X \frac{(f(x)-f(y))}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu(y)\right)g(x)\,d\mu(x)\\
&= \int_X\int_X \frac{(f(x)-f(y))}{d(x,y)^{\alpha+2s}}g(x)\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&= \frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{(f(x)-f(y))}{d(x,y)^{\alpha+2s}}g(x)\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{(f(y)-f(x))}{d(x,y)^{\alpha+2s}}g(y)\,d\mu_{(y)}d\mu_{(x)}\\
&= \frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu_{(y)}d\mu_{(x)}
\end{aligned}$$

lo cual formalmente define una forma bilineal, que designaremos

$$B^s(f,g):=\frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu(y)\,d\mu(x)$$

LEMA 8.4. *Si $f,g\in\Lambda^{\beta+2s}(X,d)$, tienen soporte acotado, entonces $B^s(f,g)<\infty$, y*

$$B^s(f,g)=\langle D^s f,g\rangle_{L^2} \tag{8.6}$$

Utilizando esta forma B^s podemos extender el dominio de definición del laplaciano al espacio L^2 del siguiente modo. Si definimos el dominio del operador D^s en $L^2(X,\mu)$ como

$$Dom(D^s):=\left\{f\in L^2(X)\ :\ \exists\varphi\in L^2(X)\ /\ \forall g\in H^s(X)\ :B^s(f,g)=\langle\varphi,g\rangle_{L^2}\right\}, \tag{8.7}$$

y, dada $f\in Dom(D^s)$, definimos $D^s f:=\varphi$, esto extiende la representación (8.6) a toda $f\in Dom(D^s)$ y toda $g\in H^s(X)$. En la sección cuarta, y final, de este capítulo justificamos el por qué de esta definición (8.7). Por otra parte, la fórmula de representación (8.6) también nos será de utilidad para plantear y resolver el problema espectral mediante el uso de la forma B^s. Es por esto que en la sección siguiente introducimos el estudio funcional del espectro de formas bilineales.

2. Espectro de formas bilineales

Para el siguiente resultado consideraremos de un modo genérico formas bilineales $B(\cdot,\cdot)$ definidas en $H_1\times H_2$, con H_1,H_2 espacios de Hilbert no necesariamente iguales, las cuales satisfacen la condición de continuidad

$$|B(u,v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2} \tag{8.8}$$

para todo $u \in H_1, v \in H_2$, y las condiciones inf-sup siguientes,

$$\inf_{\substack{u \in H_1 \\ \|u\|_{H_1}=1}} \sup_{\substack{v \in H_2 \\ \|v\|_{H_2}=1}} |B(u,v)| \geq C_2 > 0, \tag{8.9}$$

$$\text{para todo } v \in H_2 \setminus \{0\} : \sup_{u \in H_1} |B(u,v)| > 0. \tag{8.10}$$

A fin de simplificar la notación, escribiremos $B \in \mathcal{I}_{(C_1,C_2)}$, si B es forma bilineal sobre $H_1 \times H_2$ y satisface (8.8), (8.9) y (8.10), con constantes C_1 y C_2. El uso de esta notación se sigue de la dada por la bibliografía consultada al respecto, la cual se detalla en la sección final de este capítulo.

Proposición 8.5. *Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1})$, $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$, espacios de Hilbert y $B(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal sobre $H_1 \times H_2$ tal que $B \in I_{(C_1,C_2)}$. Entonces, existen operadores acotados $R : H_1 \to H_2$ y $R' : H_2 \to H_1$ tales que , para todo $v \in H_2$ y todo $u \in H_1$*

$$B(u,v) = \langle Ru, v\rangle_{H_2} = \langle u, R'v\rangle_{H_1}.$$

Más aún, ambos operadores son isomorfismos con

$$\left\|R^{-1}\right\|_{H_2 \to H_1} \leq \frac{1}{C_2} \text{ y } \left\|R'^{-1}\right\|_{H_1 \to H_2} \leq \frac{1}{C_2}.$$

Demostración. Dado $u \in H_1$ definimos el funcional $\phi_u : H_2 \to \mathbb{C}$ dado por $\phi_u(v) := B(u,v)$. Por (8.8) $|\phi_u(v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2}$, por lo cual $\phi_u \in H_2^*$. Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $z_u \in H_2$ tal que, para todo $v \in H_2$, se satisface $\langle z_u, v\rangle_{H_2} = \phi_u(v) = B(u,v)$. Definimos entonces un operador lineal $R : H_1 \to H_2$ como $R(u) := z_u$. Ya que $\|z_u\|_{H_2} = \|\phi_u\|_{H_2^*} \leq C_1 \|u\|_{H_1}$, tenemos que $\|Ru\|_{H_2} \leq C_1 \|u\|_{H_1}$ y, por otra parte, para todo $v \in H_2 : \langle Ru, v\rangle_{H_2} = B(u,v)$. Veamos que R es biyección. En primer lugar, de la condición (8.9) de B, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Ru\|_{H_2} &= \sup_{\substack{v \in H_2 \\ \|v\|_{H_2} \leq 1}} \left|\langle Ru, v\rangle_{H_2}\right| = \sup_{\substack{v \in H_2 \\ \|v\|_{H_2} \leq 1}} |B(u,v)| \\
&\geq \|u\|_{H_1} \inf_{\substack{w \in H_1 \\ \|w\|_{H_1}=1}} \sup_{\substack{v \in H_2 \\ \|v\|_{H_2}=1}} |B(w,v)| \geq \|u\|_{H_1} C_2,
\end{aligned}$$

por lo cual,

$$\|Ru\|_{H_2} \geq C_2 \|u\|_{H_1}, \tag{8.11}$$

y de esta desigualdad se sigue que $R(H_1)$ es cerrado en H_2. En segundo lugar, veamos que $R(H_1) = H_2$. En efecto, si no fuera el caso, como $R(H_1)$ es cerrado debería existir $v_0 \in H_2 \setminus \{0\}$ tal que, para todo $u \in H$, $\langle Ru, v_0 \rangle_{H_2} = 0$, pero esto contradice la condición (8.10) de B ya que

$$0 = \sup_{u \in H_1} \left| \langle Ru, v_0 \rangle_{H_2} \right| = \sup_{u \in H_1} |B(u,v)| > 0.$$

En conclusión tenemos que $R(H_1) = H_2$ y por (8.11), que R es una biyección continua entre espacios de Hilbert. Luego, R^{-1} está bien definido y es continuo $R^{-1} : H_2 \to H_1$, más aún

$$\left\| R^{-1} \right\|_{H_2 \to H_1} \leq \frac{1}{C_2}.$$

De modo análogo definimos R': dado $v \in H_2$ consideramos el funcional $\psi_v : H_1 \to \mathbb{C}$ dado por $\psi_v(u) := B(u,v)$ y definimos $R' : H_2 \to H_1$ como $R(v) = \psi_v$. Gracias al teorema de representación de Riesz tendremos entonces que, para todo $v \in H_2$ y todo $u \in H_1$, $B(u,v) = \langle u, R'v \rangle_{H_1}$. El hecho de que R' sea isomorfismo (posee inversa continua) se sigue del hecho de ser el adjunto de R, el cual es isomorfismo. A su vez, también tendremos que $\|R'^{-1}\|_{H_1 \to H_2} \leq \frac{1}{C_2}$. □

Obsérvese que de la relación $B(u,v) = \langle u, R'v \rangle_{H_1} = \langle Ru, v \rangle_{H_2}$ y del hecho que R, R' sean isomorfismos se sigue que toda forma bilineal $B \in I_{(C_1,C_2)}$ satisface las condiciones simétricas a (8.9) y (8.10), esto es

$$\inf_{\substack{v \in H_2 \\ \|v\|_{H_2}=1}} \sup_{\substack{u \in H_1 \\ \|u\|_{H_1}=1}} |B(u,v)| \geq C_2 > 0,$$

y

$$\text{para todo } u \in H_1 \setminus \{0\} : \sup_{v \in H_2} |B(u,v)| > 0.$$

La Proposición 8.5 anterior posee un corolario inmediato de interés que permite demostrar existencia de soluciones débiles.

Corolario 8.6. *Sean $\left(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}\right)$, $\left(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2}\right)$, espacios de Hilbert y $B(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal sobre $H_1 \times H_2$ tal que $B \in I_{(C_1,C_2)}$. Entonces, dada $f \in H_2^*$ existe un único $u_0 \in H_1$ tal que, para toda $v \in H_2$ se satisface $B(u_0,v) = f(v)$ y $\|u_0\|_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} \|f\|_{H_2^*}$.*

Demostración. Dada $f \in H_2^*$, sea $v_0 \in H_2$ dada por el Teorema de representación de Riesz tal que, para toda $v \in H_2$ se tiene que $f(v) = \langle v_0, v \rangle_{H_2}$. Considerando $u_0 := R^{-1}(v_0)$, con R dado por la Proposición anterior, tenemos, por una parte, que $f(v) = \langle Ru_0, v \rangle_{H_2}$, y, por otra, que para toda $v \in H_2$: $B(u_0,v) = \langle Ru_0, v \rangle_{H_2}$, que, en combinación, resuelven $B(u_0,v) = f(v)$. La acotación de u_0 se sigue de la de R^{-1}. □

Nos interesa ahora comprender cómo definir una noción de espectro (más específicamente, nociones de autovalores y autofunciones) asociado a una forma bilineal o sesquilineal. Como vimos al final de la sección anterior respecto del laplaciano fraccionario D^s y la forma B^s, uno puede definir una forma bilineal $B\left(\cdot,\cdot\right): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ a partir de un operador lineal $T: H \rightarrow H$ de la siguiente forma

$$B\left(x,y\right) = \left\langle Tx, y\right\rangle_{H} \tag{8.12}$$

Obsérvese, por otra parte, que todo par autovalor-autovector (λ, z) de T satisface la condición

$$B\left(z,y\right) = \lambda \left\langle z, y\right\rangle_{H} \tag{8.13}$$

para todo $y \in H$. Esta identidad (8.13) permite dar una definición precisa de lo que entendemos por espectro relativo de una forma bilineal.

DEFINICIÓN 8.7. *Dado $\left(H, \left\langle \cdot,\cdot\right\rangle_H\right)$ espacio de Hilbert, y dadas B, b formas bilineales definidas en $H \times H$, un número $\lambda \in \mathbb{C}$ se denomina autovalor de la forma B relativo a la forma b si existe un elemento no nulo $u \in H \setminus \{0\}$, denominado autovector asociado, el cual satisface $B\left(u,v\right) = \lambda b\left(u,v\right)$, para todo $v \in H$.*

Teniendo en cuenta la definición anterior, se observa que todo par autovalor-autovector (λ, u) de un operador T, con $\lambda \neq 0$, determina el par autovalor-autovector $(1/\lambda, u)$ asociado a la forma $B\left(x,y\right) = \left\langle Tx, y\right\rangle_H$ y relativo a $b\left(x,y\right) = \left\langle x, y\right\rangle_H$, o bien, determina el mismo par (λ, u) asociado a $b\left(x,y\right) = \left\langle Tx, y\right\rangle_H$ y relativo a $B\left(x,y\right) = \left\langle x, y\right\rangle_H$.

Esta idea clave permite determinar el espectro de formas bilineales dadas por (8.12), a partir del espectro de un operador lineal. Más aún, el siguiente resultado establece bajo qué condiciones una forma bilineal permite recuperar dicha identidad (8.12) para algún operador T compacto.

PROPOSICIÓN 8.8. *Sean $\left(H_1, \left\langle \cdot,\cdot\right\rangle_{H_1}\right)$, $\left(H_2, \left\langle \cdot,\cdot\right\rangle_{H_2}\right)$, espacios de Hilbert y $B\left(\cdot,\cdot\right)$ una forma bilineal sobre $H_1 \times H_2$ tal que $B \in I_{(C_1,C_2)}$. A su vez, sean $\left(W_1, \left\langle \cdot,\cdot\right\rangle_{W_1}\right)$, $\left(W_2, \left\langle \cdot,\cdot\right\rangle_{W_2}\right)$, espacios de Hilbert con inmersiones compactas $H_1 \hookrightarrow W_1$, $H_2 \hookrightarrow W_2$. Sea $b\left(\cdot,\cdot\right)$ una forma bilineal definida en $W_1 \times W_2$ tal que*

$$\left|b\left(u,v\right)\right| \leq C_3 \left\|u\right\|_{W_1} \left\|v\right\|_{W_2},$$

para todo $u \in W_1, v \in W_2$. Entonces existen únicos operadores compactos $T_1: H_1 \rightarrow H_1$, $T_2: H_2 \rightarrow H_2$, tales que, para todo $u \in H_1$ y todo $v \in H_2$,

$$B\left(T_1 u, v\right) = b\left(u,v\right) = B\left(u, T_2 v\right).$$

Demostración. La idea es utilizar un argumento similar al utilizado en la Proposición 8.5. Dado $u \in W_1$, consideramos el funcional $\psi_u : W_2 \to \mathbb{k}$, donde $\mathbb{k}$ designa a $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, dado por $\psi_u(v) = b(u,v)$. Por la condición de continuidad de la forma b tenemos que $\psi_u \in W_2^*$. Más aún, por continuidad de la inmersión $H_2 \hookrightarrow W_2$ tenemos que $\psi_u \in H_2^*$. Luego, existe un único $\omega_u \in H_2$ tal que $b(u,v) = \psi_u(v) = \langle \omega_u, v\rangle_{H_2}$, para toda $v \in H_2$, y tal que $\|\omega_u\|_{H_2} = \|\psi_u\|_{H_2^*} \leq C_3' \|u\|_{W_1}$. Definimos entonces un operador continuo $S : W_1 \to H_2$, como $S(u) := \omega_u$, el cual satisface que

$$b(u,v) = \langle Su, v\rangle_{H_2},$$

para todo $v \in H_2$, y

$$\|Su\|_{H_2} \leq C_3' \|u\|_{W_1},$$

lo cual asegura su continuidad. De modo análogo, puede definirse un operador continuo $S' : W_2 \to H_1$ tal que

$$b(u,v) = \langle u, S'v\rangle_{H_1},$$

para todo $u \in H_1$, y

$$\|Su\|_{H_1} \leq C_3' \|u\|_{W_2}.$$

Sean R, R', los operadores dados por la proposición (8.5), esto es, $R : H_1 \to H_2$, $R' : H_2 \to H_1$ tales que

$$B(u,v) = \langle Ru, v\rangle_{H_2} = \langle u, R'v\rangle_{H_1},$$

para todo $v \in H_2$ y todo $u \in H_1$, y

$$\left\|R^{-1}\right\|_{H_2 \to H_1} \leq \frac{1}{C_2}, \ \left\|R'^{-1}\right\|_{H_1 \to H_2} \leq \frac{1}{C_2}.$$

Consideremos el operador $\widetilde{T}_1 : W_1 \to H_1$ dado por $\widetilde{T}_1 := R^{-1} \circ S$. Por una parte, de la continuidad de R^{-1} y S tenemos que

$$\left\|\widetilde{T}_1 u\right\|_{H_1} = \left\|R^{-1}(Su)\right\|_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} \|Su\|_{H_2} \leq \frac{C_3'}{C_2} \|u\|_{W_1}.$$

Por otra parte, debido a la compacidad de la inmersión $H_1 \hookrightarrow W_1$, el operador $T_1 := \widetilde{T}_1|_{H_1}$, esto es, la restricción de $\widetilde{T}_1$ a H_1, resulta un operador compacto de $\left(H_1, \|...\|_{H_1}\right)$ en sí mismo. Las mismas consideraciones aplican al operador $\widetilde{T}_2 := R'^{-1} \circ S'$, cuya restricción a H_2 genera un operador compacto de H_2 en sí mismo. Finalmente, si consideramos $u \in H_1$ tenemos que, para cada $v \in H_2$

$$B(T_2 u, v) = \langle R(T_2 u), v\rangle_{H_2} = \langle Su, v\rangle_{H_2} = b(u,v),$$

y, del mismo modo

$$B(u, T_2 v) = \langle u, R'(T_2 v)\rangle_{H_1} = \langle u, S'v\rangle_{H_1} = b(u,v).$$

Esto culmina la demostración. □

El resultado anterior resulta clave a la luz de la Proposición 2.1, lo cual muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 8.9. *Sean* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *espacios de Hilbert de dimensión infinita, con inmersión compacta* $H \hookrightarrow W$. *Sea* $B(\cdot,\cdot)$ *una forma bilineal simétrica definida sobre* $H \times H$ *tal que*

$$|B(u,v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H ,$$

para todos $u, v \in H$, *y tal que*

$$B(u,u) \geq C_2 \|u\|_H^2 , \tag{8.14}$$

para todo $u \in H \setminus \{0\}$. *A su vez, sea* $b(\cdot,\cdot)$ *forma bilineal simétrica definida sobre* $W \times W$ *tal que*

$$b(u,u) > 0,$$

para todo $u \in H$. *Entonces existe una sucesión de autovalores* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *y una sucesión de autovectores asociados* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tales que*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \nearrow +\infty,$$

$$\delta_{kj} = B(e_k, e_j) = \lambda_k b(e_k, e_j) ,$$

y tales que

$$B(e_k, v) = \lambda_k b(e_k, v) ,$$

para toda $v \in H$. *Más aún,* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *forma una base ortonormal en* $(H, B(\cdot,\cdot))$.

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese en primer lugar que la condición de continuidad y la condición (8.14) implican que $B \in \mathcal{I}_{(C_1,C_2)}$. Por consiguiente, puede verse que B define un producto interno en H y, más aún, si definimos $\|u\|_{\mathcal{E}} := (B(u,u))^{1/2}$, tenemos que $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ define una norma equivalente a $\|\cdot\|_H$. Consideremos el espacio H dotado del producto interno $B(\cdot,\cdot)$. En vista de la Proposición 8.8 existen únicos $T_1, T_2 : H \to H$, tales que, para todo $u, v \in H$, $B(T_1 u, v) = b(u,v) = B(u, T_2 v)$. Veamos que $T_1 = T_2$. En efecto si tomamos $H_1 = H_2$, $W_1 = W_2$ y consideramos la simetría de B en la Proposición 8.5 y en la Proposición 8.8 deducimos que los operadores R, R', S, S' allí definidos satisfacen $R = R' = R^*$ y $S = S'$. Esto implica que en el espacio $(H, B(\cdot,\cdot))$ se tiene que $(T_1)^* = T_2 = T_1$. Por lo tanto, T resulta operador compacto autoadjunto de $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ en sí mismo y satisface

$$B(Tu, v) = b(u,v) = B(u, Tv) , \tag{8.15}$$

para todo $u, v \in H$. Más aún por equivalencia de normas, T también resulta compacto del espacio $(H, B(\cdot,\cdot))$ en sí mismo, y debido a que, por hipótesis,

$$B(Tu, u) = b(u, u) > 0,$$

para todo $u \in H$, T es definido positivo. Haciendo uso de la Proposición 2.1 podemos determinar una base ortonormal en $(H, B(\cdot,\cdot))$ conformada por la sucesión $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de autovectores de T, con autovalores respectivos $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tales que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_k \geq \cdots \geq 0$, cada μ_k posee multiplicidad finita y ebl conjunto $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ posee, quizás, a 0 como único punto de acumulación. Definiendo $\lambda_k := \frac{1}{\mu_k}$ podemos ver que, de acuerdo a (8.15), para cada $v \in H$, se tiene que $B(e_k, v) = \lambda_k B(Te_k, v) = \lambda_k b(e_k, v)$. Más aún, debido a la ortonormalidad de $(e_k)_{k\in H}$ tenemos que $\delta_{kj} = B(e_k, e_j) = \lambda_k b(e_k, e_j)$, como queríamos demostrar. □

Por otra parte la Proposición 2.1 también nos permite caracterizar el espectro de formas bilineales mediante los cocientes de Rayleigh.

TEOREMA 8.10. *Considérense las mismas hipótesis del Teorema 8.9. Sea*

$$\mathcal{R}(u) := \frac{B(u,u)}{b(u,u)}.$$

Entonces, la sucesión de autovalores $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y autofunciones $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por el Teorema 8.9 está caracterizada por

$$\lambda_1 = \min_{u\in H} \mathcal{R}(u) = \mathcal{R}(e_1) \tag{8.16}$$

$$\lambda_k = \min_{u\in \mathbb{P}_{k-1}} \mathcal{R}(u) = \mathcal{R}(e_k) \tag{8.17}$$

donde $\mathbb{P}_{k-1} := \{u \in H \;/\; B(e_j, u) = 0$ *para cada* $j = 1, \ldots, k-1\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, veamos que efectivamente el conjunto de autovalores y autofunciones de la forma bilineal B relativo a b satisface (8.16) y (8.17). Recordemos de la demostración del teorema anterior que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de $(H, B(\cdot,\cdot))$ y es sucesión de autovectores del operador compacto T asociados a los autovalores $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, por lo cual, de acuerdo a la Proposición 2.1 tenemos que

$$\mu_1 = \frac{B(Te_1, e_1)}{B(e_1, e_1)} = \max_{u\in H} \frac{B(Tu, u)}{B(u,u)}, \tag{8.18}$$

y

$$\mu_k = \frac{B(Te_k, e_k)}{B(e_k, e_k)} = \max_{\substack{u\in H \\ B(u,e_j)=0;\; j=1,\ldots,k-1}} \frac{B(Tu, u)}{B(u,u)}, \tag{8.19}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Teniendo en cuenta que $B(Tu, u) = b(u, u)$, las relaciones (8.18) y (8.19) equivalen a

$$\frac{1}{\mu_1} = \lambda_1 = \underset{u \in H}{\text{mín}} \frac{B(u, u)}{b(u, u)} = \frac{B(e_1, e_1)}{b(e_1, e_1)},$$

y

$$\frac{1}{\mu_k} = \lambda_k = \underset{u \in \mathbb{P}_{k-1}}{\text{mín}} \frac{B(Tu, u)}{B(u, u)} = \frac{B(e_k, e_k)}{b(e_k, e_k)}, \; k \geq 2,$$

lo cual demuestra (8.16) y (8.17). Veamos ahora el recíproco del teorema, esto es, si $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son sucesiones que satisfacen (8.16) y (8.17) entonces forman los autovalores de B relativos a b. De modo similar al utilizado en la demostración de la Proposición 2.1, consideramos la función

$$\varphi_1(t) := \mathcal{R}(e_1 + tw) = \frac{B(e_1, e_1) + 2tB(e_1, w) + t^2 B(w, w)}{b(e_1, e_1) + 2tb(e_1, w) + t^2 b(w, w)}$$

para $t \in \mathbb{R}$, y $w \in H$ arbitrarios. Como esta función alcanza un mínimo en $t = 0$, tendremos que $\varphi_1'(0) = 0$, esto es

$$0 = \frac{2B(e_1, w)\, b(e_1, e_1) - 2b(e_1, w)\, B(e_1, e_1)}{(b(e_1, e_1))^2},$$

de lo cual se sigue que

$$B(e_1, w) = \frac{B(e_1, e_1)}{b(e_1, e_1)} b(e_1, w) = \lambda_1 b(e_1, w),$$

para todo $w \in H$, por lo cual λ_1 es el autovalor más pequeño de B relativo a b, con autovector e_1. Con $\varphi_k(t) := R(e_k + tw)$, para $t \in \mathbb{R}$ y $w \in P_{k-1}$ podemos deducir que $B(e_k, w) = \lambda_k b(e_k, w)$ para todo $w \in P_{k-1}$. Ya que $b(e_k, w) = B(Te_k, w)$ tendremos que

$$B\left(Te_k - \frac{1}{\lambda_k} e_k, w\right) = 0, \tag{8.20}$$

para todo $w \in \mathbb{P}_{k-1}$, esto es, $Te_k - \frac{1}{\lambda_k} e_k$ es ortogonal a P_{k-1} en $(H, B(\cdot, \cdot))$. A partir de la descomposición $H = gen\langle e_1, ..., e_{k-1}\rangle \oplus P_{k-1}$, se deduce que

$$Te_k - \frac{1}{\lambda_k} e_k = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{k-1} e_{k-1},$$

para ciertos escalares $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$. Debido a la ortogonalidad del sistema $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, respecto de $B(\cdot, \cdot)$, tendremos que

$$\alpha_j = B\left(Te_k - \frac{1}{\lambda_k} e_k, e_j\right),$$

los cuales son nulos para cada $j = 1, ..., k-1$, de acuerdo a (8.20). En conclusión $Te_k = \frac{1}{\lambda_k} e_k$, por lo cual $\frac{1}{\lambda_k}$ es autovalor de T con autovector asociado e_k, y por lo visto en el teorema anterior λ_k es autovalor de B asociado a b. Esto termina la demostración del teorema. □

Como corolario inmediato surge la caracterización del espectro relativo a dos formas bilineales que definen sendos productos internos completos con inmersión compacta.

COROLARIO 8.11. *Sean* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *espacios de Hilbert, con inmersión compacta* $H \hookrightarrow W$*, y sea* $R(u) := \frac{\|u\|_H^2}{\|u\|_W^2}$*. Una sucesión* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *en* H *y una sucesión* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}$ *forman el conjunto de autovectores y autovalores de* $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ *asociado a* $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ *, esto es, para todo* $\varphi \in H$ *se satiface* $\langle u_0, \varphi\rangle_H = \lambda \langle u_0, \varphi\rangle_W$*, si y sólo si satisfacen*

$$\mathcal{R}(e_1) = \min_{u\in H} \mathcal{R}(u), \tag{8.21}$$

$$\mathcal{R}(e_{k+1}) = \min_{u\in \mathbb{P}_k} \mathcal{R}(u),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$*, donde* $P_k = \left\{u \in H \ / \ \forall j = 1, ..., k \ : \ \langle u, e_j\rangle_H = 0\right\}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar $B(\cdot,\cdot) := \langle\cdot,\cdot\rangle_H$ y $b(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle_W$ en el Teorema 8.10 y en el Teorema 8.9. □

Como es sabido, la fórmula de Rayleigh para el cálculo de autovalores posee como corolarios dos principios importantes.

En el siguiente teorema $V \prec H$ denota que el espacio vectorial V es subespacio de H.

COROLARIO 8.12. *Sea* $R(u) := \frac{B(u,u)}{b(u,u)}$*. Bajo las hipótesis del Teorema 8.9 se satisface lo siguiente.*

a) Principio de Fischer:

$$\lambda_k = \min_{\substack{V\prec H \\ \dim V = k}} \max_{u\in V} \mathcal{R}(u),$$

donde el mínimo se considera sobre todos los subespacios V *de* H *de dimensión finita* $k \in \mathbb{N}$.

b) Principio de Courant:

$$\lambda_k = \max_{\substack{V\prec H \\ \dim V = k-1}} \min_{u\perp V} \mathcal{R}(u),$$

donde el máximo se considera sobre todos los subespacios V *de* H *de dimensión finita* $k-1 \in \mathbb{N}$

DEMOSTRACIÓN. a) Sea $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autofunciones determinada por el Teorema 8.9. Dado cualquier subespacio V de H de dimensión k, podemos encontrar un $w \in V$ tal que $B(w, e_j) = 0$ para cada $j = 1, ..., k-1$. En efecto, dada una base $(v_i)_{i=1}^k$ de V, basta encontrar k escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k$, no todos nulos, que resuelvan las $k-1$ ecuaciones $\sum_{i=1}^k \alpha_i B(v_i, e_j) = 0$, para $j = 1, ..., k-1$. Luego, por la fórmula (8.17) tenemos que $\mathcal{R}(w) \geq \lambda_k$,y como $w \in V$, se sigue que $\max_{u\in V} \mathcal{R}(u) \geq \mathcal{R}(w) \geq \lambda_k$. Como V es un subespacio k-dimensional arbitrario, nos queda, en primer lugar,

$$\min_{\substack{V\prec H \\ \dim V = k}} \max_{u\in V} \mathcal{R}(u) \geq \lambda_k.$$

Para ver la desigualdad contraria basta con tomar $W_k := gen\langle e_1, ..., e_k\rangle$, subespacio k-dimensional. Teniendo en cuenta que $\delta_{kj} = B(e_k, e_j) = \lambda_k b(e_k, e_j)$, se deduce que, para cada $w \in W_k$,

$$\mathcal{R}(w) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j B(w, e_j)\, b(w, e_j)}{\sum_{j=1}^{k} B(w, e_j)\, b(w, e_j)}.$$

Luego, como $B(w, e_j)\, b(w, e_j) = \lambda_j b(w, e_j)^2 \geq 0$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión creciente y para todo $w \in W_k$ se tiene que $\sum_{j=1}^{k} B(w, e_j)\, b(w, e_j) > 0$, podemos deducir que

$$\lambda_k \geq \mathcal{R}(w) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j B(w, e_j)\, b(w, e_j)}{\sum_{j=1}^{k} B(w, e_j)\, b(w, e_j)} \geq \lambda_1, \tag{8.22}$$

para todo $w \in W_k$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{R}(e_k) = \lambda_k$, esto es, el máximo de $\mathcal{R}$ sobre W se alcanza, se deduce finalmente que

$$\lambda_k \geq \max_{u\in W_k} \mathcal{R}(u) \geq \min_{\substack{V\prec H \\ \dim V=k}} \max_{u\in V} \mathcal{R}(u),$$

lo cual demuestra el principio de Fischer.

b) Sea V un subespacio de H de dimensión $k-1$, y sea W_k como antes. Razonando como en el caso anterior podemos encontrar $w \in W_k \cap V^{\perp}$ de modo tal que, al aplicar la desigualdad (8.22), podemos deducir que $\lambda_k \geq \mathcal{R}(w) \geq \min_{u\perp V} \mathcal{R}(u)$. Como V es arbitrario, se sigue que

$$\lambda_k \geq \max_{\substack{V\prec H \\ \dim V=k-1}} \min_{u\perp V} \mathcal{R}(u).$$

Por otra parte, si consideramos $U_{k-1} := gen\langle e_1, ..., e_{k-1}\rangle$, la fórmula (8.17) nos dice que $\min_{u\perp U_{k-1}} \mathcal{R}(u) = \lambda_k$. Luego

$$\max_{\substack{V\prec H \\ \dim V=k-1}} \min_{u\perp V} \mathcal{R}(u) \geq \lambda_k,$$

que nos la desigualdad recíproca y demuestra el principio de Courant. $\square$

3. Espectro débil del laplaciano fraccionario

En esta sección volveremos al estudio del laplaciano fraccionario y aplicaremos lo desarrollado en la sección anterior. A fin de analizar el espectro del mismo haremos uso de la forma bilineal B^s dada por (8.6). Dado un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), α-Ahlfors regular, y un subconjunto $\Omega \subseteq X$, abierto y regular en el sentido de la Definición 5.5, nos proponemos resolver, al menos débilmente, el problema

$$\text{(8.23)} \qquad \begin{cases} D^s f(x) = \lambda f(x) & si\ x \in \Omega\,, \\ f(x) = 0 & si\ \ x \in X \setminus \Omega. \end{cases}$$

Cabe mencionar que el uso de la restricción $X \setminus \Omega$, en lugar de la frontera $\partial\Omega$ que suele utilizarse en el problema clásico del laplaciano usual Δ, se debe, por una parte, a la naturaleza integral del operador D^s, y al hecho que, como vimos en el Lema 5.6, el conjunto $\partial\Omega$ posee medida nula, y por otra parte al carácter no local del operador.

A fin de obtener una formulación variacional de (8.23), introducimos el espacio

$$H_0^s(\Omega) := \{v \in H^s(X)\ \ /\ v = 0 \text{ en } X \setminus \Omega\}$$

y teniendo en cuenta la identidad (8.6), tendremos que

$$\text{(P. A.)} \qquad \begin{cases} B^s(f,g) = \lambda \langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)}\,, \text{ para toda } g \in H_0^s(\Omega)\,, \\ f \in H_0^s(\Omega)\,. \end{cases}$$

donde recordemos que la forma bilineal B^sestá dada por

$$B^s(f,g) := \frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\, d\mu(x)\,,$$

y define una forma de energía $\mathcal{E}^s$ del siguiente modo

$$\mathcal{E}^s(f) := B^s(f,f)\,.$$

Es claro entonces que todo par espectral (f,λ), de autofunción y autovalor, respectivamente, del problema (8.23), determinará el mismo par espectral (f,λ) asociado al problema débil de autovalores (P. A.). Para analizar el espectro de $B^s(\cdot,\cdot)$ asociado a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ veamos, en primer lugar, que efectivamente, la forma bilineal B^s satisface condiciones de coercividad y continuidad.

PROPOSICIÓN 8.13. *Sea (X,d,μ) espacio α-Ahlfors regular estándar. Sea $\Omega \subseteq X$ un subconjunto abierto, regular y acotado. Para $s < \frac{\alpha}{2}$, la forma bilineal B^s define un producto interno en $H_0^s(\Omega)$, cuya norma es equivalente a $\|\cdot\|_{H^s}$.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que $B^s(f,g)$ satisface los axiomas de producto interno, excepto quizás el de no degeneración. Obsérvese entonces que la condición $B^s(f,f) = 0$ implica que f es constante en μ-casi todo punto de X, y la única función en $H_0^s(\Omega)$ que satisface tal condición es la función nula, esto es, $f \equiv 0$, y B^s es no degenerada. Veamos ahora que la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^s} := (\mathcal{E}^s(\cdot))^{1/2}$ y $\|\cdot\|_{H^s_{(X)}}$ son normas equivalentes en $H_0^s(\Omega)$. Dada

$f \in H_0^s(\Omega)$, es claro que $\|f\|_{\mathcal{E}^s} = \frac{1}{2}[f]_{H^s(X)} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{H^s(X)}$. Para mostrar la desigualdad recíproca, utilizamos el Teorema 6.2. En efecto, tendremos que

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^s(X)} &= \|f\|_{L^2(X)} + [f]_{H^s(X)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + 2\|f\|_{\mathcal{E}} \leq C_\Omega \|f\|_{L^{2^*}(\Omega)} + 2\|f\|_{\mathcal{E}} \\ &= C_\Omega \|f\|_{L^{2^*}(X)} + 2\|f\|_{\mathcal{E}} \leq C_{(\Omega,\mu,\alpha,s)} [f]_{H^s(X)} + 2\|f\|_{\mathcal{E}} \leq C'_{(\Omega,\mu,\alpha,s)} \|f\|_{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

donde $C_\Omega = \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}} = \mu(\Omega)^{s/\alpha}$. □

Haciendo uso de los resultados de inmersiones compactas desarrollados en el Capítulo 7 veremos que, bajo condición de regularidad del dominio, la inmersión $(H_0^s(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ en $L^2(\Omega)$ es compacta. A continuación mostramos como esta propiedad clave nos permite aplicar los resultados vistos en la sección anterior.

TEOREMA 8.14. *Sea (X, d, μ) un espacio α-Ahlfors regular estándar, $\Omega \subseteq X$ un dominio acotado regular y sea $0 < s < \frac{\alpha}{2}$. Existen sucesiones $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^+$y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^s(\Omega)$ tales que, para toda $g \in H_0^s(\Omega)$,*

$$B^s(e_n, g) = \lambda_n \langle e_n, g\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Esto es, el problema (P. A.) determina una sucesión de autovalores $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cual satisface

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$$

y determina una sucesión autovectores asociados, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, los cuales satisfacen

$$0 < \lambda_1 = \mathcal{E}^s(e_1) = \min_{\substack{f\in H_0^s(\Omega)\\ f\neq 0}} \frac{\mathcal{E}^s(f)}{\|f\|^2_{L^2(\Omega)}} \;;\; \|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

$$\lambda_{k+1} = \mathcal{E}^s(e_{k+1}) = \min_{\substack{f\in\mathbb{P}_k\\ f\neq 0}} \frac{\mathcal{E}^s(f)}{\|f\|^2_{L^2(\Omega)}}; \quad \|e_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} = 1 \tag{8.24}$$

donde

$$\mathbb{P}_k = \{f \in H_0^s(\Omega) \;\; / \; \forall j = 1, ..., k \; : B^s(f, e_j) = 0\}$$

Por otra parte, cada autovalor λ_k posee multiplicidad finita. Más aún, si λ_k es tal que

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+m} < \lambda_{k+m+1}$$

para algún $m \in \mathbb{N}_0$ entonces, el conjunto de todas las autofunciones de λ_k coincide con

$$span\,\langle e_k, ..., e_{k+m}\rangle$$

Finalmente, la sucesión de autofunciones $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forma una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H_0^s(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Basta con verificar las hipótesis de el Teorema 8.9 y del Teorema 8.10 respecto de las formas bilineales $B(\cdot,\cdot) := B^s(\cdot,\cdot)$ y $b(\cdot,\cdot) := \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$, y a los espacios $(W,\langle\cdot,\cdot\rangle_W) := \left(L^2(\Omega),\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}\right)$, $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_H) := (H_0^s(\Omega), B^s(\cdot,\cdot))$.Veamos, en primer lugar, la compacidad de la inmersión $H \hookrightarrow W$. Sea $\Upsilon \subseteq H_0^s(\Omega)$ conjunto acotado respecto de $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^s}$. De la equivalencia dada por la Proposición 8.13 tenemos que Υ resulta acotado en norma $L^2(\Omega)$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in\Upsilon}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^2}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu(x)\,d\mu(y) &\leq \sup_{f\in\Upsilon}\int_X\int_X \frac{|f(x)-f(y)|^2}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&= 2\sup_{f\in\Upsilon}\|f\|_{\mathcal{E}^s} \leq C < \infty,
\end{aligned}$$

por lo cual, el Teorema 7.1 nos permite ver que Υ es pre-compacto en $\left(L^2(\Omega),\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}\right)$, esto es, que la identidad $i : H_0^s(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es un operador compacto. Para ver la continuidad de $B^s(\cdot,\cdot)$ en $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ basta con aplicar la desigualdad de Hölder respecto de la medida $\frac{d\mu(x)d\mu(y)}{d(x,y)^\alpha}$. En efecto

$$\begin{aligned}
|B^s(f,g)| &\leq \frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{|f(x)-f(y)|\,|g(x)-g(y)|}{d(x,y)^{\alpha+2s}}d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&= \frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^s}\frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)^s}\frac{d\mu(x)\,d\mu(y)}{d(x,y)^\alpha}\\
&\leq (B^s(f,f))^{1/2}(B^s(g,g))^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por último el Teorema 6.2 y la acotación de Ω nos permite mostrar que $B^s(f,f) \geq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ para cada $f \in H_0^s(\Omega)$. Esto muestra que $B(\cdot,\cdot) := B^s(\cdot,\cdot)$ y $b(\cdot,\cdot) := \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ verifican las hipótesis de los Teoremas 8.9 y 8.10, como queríamos demostrar. □

OBSERVACIÓN 8.15. *Otra forma de demostrar la compacidad de esta inmersión consiste aplicar el inciso 2) del Lema 5.6 y el Teorema 7.4 al subespacio* $(\Omega, d_\Omega, \mu_\Omega)$. *La hipótesis de acotación de* Ω *implica la de dicho espacio, la continuidad de la inmersión* $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega)$, *y la compacidad de la inmersión* $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, *de acuerdo al Teorema 7.4, nos permiten deducir la compacidad* $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

La siguiente Proposición muestra propiedades del espectro de la forma bilineal B_{dy}^s del problema (P. A.) las cuales son propias del contexto.

PROPOSICIÓN 8.16. *Bajo las hipótesis que el Teorema 8.14:*

i) existe una autofunción positiva e_1 *asociada a* λ_1.

ii) λ_1 *es autovalor simple, esto es, si* $u \in H_0^s(\Omega)$ *es otra solución de (P. A.) asociada a* λ_1 *entonces* $u = ce_1$ *para algún* $c \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. i) Sea e_1 autofunción asociada a λ_1 respecto del problema (P. A.). Por su parte, denotemos

$$A := \{x \in X \ / \ e_1(x) > 0\}, \ B := \{x \in X \ / \ e_1(x) < 0\}.$$

Para cada $x \in A$ e $y \in B$ se tiene que

$$||e_1(x)| - |e_1(y)|| = |e_1(x) + e_1(y)| < e_1(x) - e_1(y) = |e_1(x) - e_1(y)|,$$

por lo cual, suponiendo $\mu(A) > 0$ y $\mu(B) > 0$, tendremos que

$$\int_A \int_B \frac{||e_1(x)| - |e_1(y)||^2}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\, d\mu(x) < \int_A \int_B \frac{|e_1(x) - e_1(y)|^2}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(y)\, d\mu(x).$$

Teniendo en cuenta que $X = A \cup (X \setminus A)$ y $\mu(X \setminus A) = \mu(B)$

$$\mathcal{E}^s(|e_1|) = \int_X \int_X \frac{||e_1(x)| - |e_1(y)||^2}{d(x,y)^{\alpha+2s}} d\mu(x)\, d\mu(y) = \int_A \int_A \cdots + \int_B \int_B \cdots + 2 \int_A \int_B \cdots,$$

se sigue necesariamente que

$$\mathcal{E}^s(|e_1|) < \mathcal{E}^s(e_1).$$

Además es claro que $\||e_1|\|_{L^2(\Omega)} = \|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Luego

$$\frac{\mathcal{E}^s(|e_1|)}{\||e_1|\|^2_{L^2(\Omega)}} < \frac{\mathcal{E}^s(e_1)}{\|e_1\|^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_1 = \min_{\substack{f \in H_0^s(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{\mathcal{E}^s(f)}{\|f\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{8.25}$$

Obsérvese que para todo $x, y \in X$ se satisface $||e_1(x)| - |e_1(y)|| \leq |e_1(x) - e_1(y)|$, por lo cual $|e_1| \in H_0^s(\Omega)$ y esto contradice 8.25. Esta contradicción muestra que, o bien $\mu(A) = 0$, o bien $\mu(B) = 0$; esto es, o bien $e_1(x) > 0$ en casi todo punto de Ω, o bien $e_1(x) < 0$ en casi todo punto de Ω.

ii) Sean e_1, f_1 autofunciones distintas correspondientes al autovalor λ_1. Siguiendo el inciso anterior, supongamos que $f_1 \geq 0$ sobre μ-casi todo punto de Ω. Sean

$$f_1^* := \frac{f_1}{\|f_1\|_{L^2_{(\Omega)}}} \quad \text{y} \quad g_1 := e_1 - f_1^*.$$

Obsérvese que, dada $v \in H_0^s(\Omega)$

$$B^s(g_1, v) = B^s(e_1, v) - B^s(f_1^*, v) = \lambda_1 \langle e_1, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \lambda_1 \langle f_1^*, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_1 \langle g_1, v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

por lo cual g_1 también es autofunción de λ_1. Luego, si $g_1(x) \neq 0$ para μ-casi todo $x \in X$, el inciso anterior obliga a que g conserve el signo dentro de Ω. Por otra parte

$$\int_\Omega \left(e_1^2(x) - f_1^{*2}(x)\right) d\mu_{(x)} = \|e_1\|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \|f_1^*\|^2_{L^2_{(\Omega)}} = 0 \tag{8.26}$$

Teniendo en cuenta que, o bien $e_1^2 \geq f_1^{*2}$, o bien $e_1^2 \leq f_1^{*2}$ sobre μ-casi todo Ω, debido a la conservación del signo de g, podemos deducir de (8.26) que

$$e_1^2\left(x\right) = f_1^{*2}\left(x\right)$$

para μ-casi todo punto de Ω. Esto es, $e_1\left(x\right) = f_1^*\left(x\right) = \gamma f_1\left(x\right)$ para μ-casi todo $x \in \Omega$ como queríamos probar. □

Contextualizamos en el siguiente resultado lo demostrado en el Corolario 8.12.

COROLARIO 8.17. *Bajo las hipótesis del Teorema 8.14 se satisfacen los siguientes principios.*

a) Principio de Fisher

$$\lambda_k = \min_{\substack{V \prec H_0^s(\Omega) \\ \dim V = k}} \max_{u \in V} \frac{\mathcal{E}^s\left(u\right)}{\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

donde el mínimo se considera sobre todos los subespacios V de $H_0^s\left(\Omega\right)$ de dimensión finita $k \in \mathbb{N}$.

b) Principio de Courant

$$\lambda_k = \max_{\substack{V \prec H_0^s(\Omega) \\ \dim V = k-1}} \min_{u \perp V} \frac{\mathcal{E}^s\left(u\right)}{\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Como corolario inmediato de los principios anteriores se obtiene un resultado de comparabilidad de autovalores para distintos dominios.

COROLARIO 8.18. *Sea $\left(X, d, \mu\right)$ espacio α-Ahlfors regular estándar, $0 < s < \frac{\alpha}{2}$ y Ω', Ω dominios acotados regulares de X tales que $\Omega' \subseteq \Omega$. Sean $\left(\lambda_k\left(\Omega'\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ y $\left(\lambda_k\left(\Omega\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ las sucesiones de autovalores de la forma bilineal B^s sobre $H_0^s\left(\Omega\right)$ y $H_0^s\left(\Omega'\right)$ respectivamente. Entonces,*

$$\lambda_k\left(\Omega\right) \leq \lambda_k\left(\Omega'\right),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, obsérvese que, por definición, es claro que $H_0^s\left(\Omega'\right) \subseteq H_0^s\left(\Omega\right)$. Luego, dado $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\left\{V \prec H_0^s\left(\Omega'\right) \ / \ \dim V = k\right\} \subseteq \left\{V \prec H_0^s\left(\Omega\right) \ / \ \dim V = k\right\}$$

El principio de Fisher del corolario anterior permite deducir que

$$\begin{aligned} \lambda_k\left(\Omega\right) &= \min_{\substack{V \prec H_0^s(\Omega) \\ \dim V = k}} \max_{u \in V} \frac{\mathcal{E}^s\left(u\right)}{\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2} \\ &\leq \min_{\substack{V \prec H_0^s(\Omega') \\ \dim V = k}} \max_{u \in V} \frac{\mathcal{E}^s\left(u\right)}{\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2} = \lambda_k\left(\Omega'\right), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

4. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Sección 1. Para comprender cómo surge el operador laplaciano fraccionario, y qué relación tiene con el laplaciano usual definido en $\mathbb{R}^n$, esto es, con el operador $\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$, partimos del núcleo del calor o núcleo de Weierstrass W_t dado por $W_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$, con $x \in \mathbb{R}^n$y $t > 0$. Este núcleo satisface la ecuación del calor

$$\Delta W_t = \frac{\partial}{\partial t} W_t, \tag{8.27}$$

y constituye una identidad aproximada, es decir, $\lim_{t\to 0+} \langle W_t, \varphi\rangle = \varphi(0)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o, equivalentemete, $\lim_{t\to 0+} W_t = \delta$ en $\mathcal{D}'$. Haciendo uso de la ecuación de difusión (8.27) se puede deducir también que $\lim_{t\to 0+} \frac{\partial}{\partial t} W_t = \Delta\delta$ en $\mathcal{D}'$ y, de un modo inductivo, que

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\partial^N}{\partial t^N} W_t = \Delta^N \delta \text{ en } \mathcal{D}', \tag{8.28}$$

para cada $N \in \mathbb{N}$, donde $\Delta^N\delta$ representa la distribución dada por $\left\langle \Delta^N\delta\, , \varphi\right\rangle := \Delta^N\varphi(0)$, donde $\Delta^N\varphi := \Delta\left(\Delta^{N-1}\varphi\right)$. Si denotamos $F(t) := \langle W_t, \varphi\rangle$ para alguna función $\varphi \in \mathcal{D}$, tendremos que $F \in \mathcal{C}^\infty(0, +\infty)$, y las fórmulas anteriores nos permiten deducir que $F(0+) = \varphi(0)$ y $F^{(N)}(0+) = \Delta^N\varphi(0)$, para cada $N \in \mathbb{N}$. A su vez, haciendo uso de la fórmula de Taylor para F en torno a 0, tendremos que

$$\lim_{t\to 0+} \frac{N!}{t^N}\left(F(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta^k\varphi(0)}{k!} t^k\right) = \lim_{t\to 0+} N! \int_0^1 \frac{(1-w)^{N-1}}{(N-1)!} F^{(N)}(tw)\, dw,$$

esto es

$$\lim_{t\to 0+} \frac{N!}{t^N}\left(F(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta^k\varphi(0)}{k!} t^k\right) = F^{(N)}(0+) = \Delta^N\varphi(0), \tag{8.29}$$

lo cual equivale a

$$\lim_{t\to 0+} \frac{N!}{t^N}\left(W_t - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta^k\delta}{k} t^k\right) = \Delta^N\delta,$$

en sentido de distribuciones. Esta última identidad suele denotarse de la forma $W_t = e^{t\Delta}\delta$. Por otra parte, denotemos por $\mathcal{A}_r$ al operador de promedio sobre la esfera $\partial B(x,r)$ dado por

$$\mathcal{A}_r\varphi(x) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \varphi(z)\, d\sigma_z,$$

donde aquí ω_n denota la medida de Lebesgue $(n-1)$-dimensional de la esfera unitaria $\partial B(0,1)$; y denotemos por H a la función

$$H(r) := \mathcal{A}_r\varphi(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \varphi(ry)\, d\sigma_y$$

Utilizando coordenadas polares generalizadas podemos escribir la función F del siguiente modo

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) r^{n-1} \int\limits_{\partial B(0,1)} \varphi(rz)\, d\sigma_z dr \\ &= \frac{\omega_n}{(4\pi t)^{n/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) r^{n-1} H(r)\, dr \end{aligned}$$

Haciendo uso de la expansión de Taylor de H en torno a 0, y teniendo en mente que

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) r^{n-1+k} dr = \frac{(4t)^{\frac{n+k}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)$$

tendremos que

$$H(r) := \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H^{(k)}(0)}{k!} r^k + r^N \int_0^1 \frac{(1-w)^{N-1}}{(N-1)!} H^{(N)}(rw)\, dw$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\omega_n}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H^{(k)}(0)}{k!} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) r^{n-1+k} dr + O\left(t^N\right) \\ &= \frac{\omega_n}{(\pi)^{n/2}} \sum_{k=0}^{N-1} 2^{k-1} \frac{t^{k/2}}{k!} H^{(k)}(0)\, \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right) + O\left(t^N\right) \end{aligned}$$

para $t \searrow 0$. Teniendo en cuenta que, según (8.29), F también posee expansión

$$F(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta^k \varphi(0)}{k!} t^k + O\left(t^N\right)$$

para $t \searrow 0$, de la comparación de los coeficientes de ambos desarrollos de F obtenemos que $H^{(k)}(0) = 0$ si k es impar y que

$$H(r) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\Delta^k \varphi(0)}{2^k k! \prod\limits_{j=0}^{k-1} (n+2j)} r^{2k} + O\left(r^{2N+2}\right)$$

identidad conocida como fórmula de Pizzetti. Gracias a esta fórmula podemos deducir que

$$\mathcal{A}_r \varphi(x) = \varphi(x) + \frac{r^2}{2n} \Delta\varphi(x) + O\left(r^4\right),$$

Multiplicando por $\omega_n r^{n-1}$ e integrando respecto de r obtenemos que

$$m_\varphi(B(x,r)) = \varphi(x) + \frac{r^2}{2(n+2)} \Delta\varphi(x) + O\left(r^4\right),$$

donde recordemos que $m_\varphi(B(x,r))$ denota el promedio de φ sobre $B(x,r)$. Surge así una fórmula del laplaciano en función de este promedio,

$$-\Delta\varphi(x) = 2(n+2) \lim_{r\to 0} \frac{\varphi(x) - m_\varphi(B(x,r))}{r^2},$$

fórmula que también permite entender la relación entre la armonicidad y la propiedad de valor medio. Manipulando la integral de $m_\varphi(B(x,r))$ también puede verse que

$$-\Delta\varphi(x)=\frac{(n+2)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2}}\lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(2\varphi(x)-\varphi(x-y)-\varphi(x+y)\right)\frac{1}{r^{n+2}}\mathbf{1}_{B(0,r)}(y)\;dy.$$

Por otra parte, nótese que al integrar W_t respecto de la variable t puede definirse la función

$$E(x):=-\int_0^\infty W_t(x)\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2n\pi^{n/2}}\frac{1}{|x|^{n-2}}$$

la cual es la solución fundamental del laplaciano para $n\geq 3$, esto es, $-\Delta E=\delta$ en sentido distribucional. Por lo cual, denotando $k_2(x):=E(x)$, reencontramos el potencial newtoniano

$$I_2(f)(x)=(k_2*f)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy$$

definido, al menos, para funciones $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la clase de Schwartz. Puede verse, a su vez, que en $\mathcal{D}'$ los operadores I_2 y Δ son inversos

(8.30) $$I_2\circ(-\Delta)=(-\Delta)\circ I_2=\delta$$

Marcel Riesz utiliza esta relación (8.30) para definir al laplaciano fraccionario como el inverso del operador

$$I_\alpha(f)(x)=\pi^{\alpha-n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy=(k_\alpha*f)(x)$$

operador I_α denominado Potencial de Riesz de orden α, definido para $0<\alpha<n$, y toda $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Obsérvese que esta definiciónb recupera el potencial newtoniano I_2 y da sentido a la notación. Por otra parte, de esta definición, utilizada por ejemplo en [Lan72], se observa que el núcleo

$$k_\alpha(x)=\pi^{\alpha-n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$$

definido, a priori, para valores $0<\alpha<n$, es un funcional de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cuya transformada generalizada de Fourier es

(8.31) $$\widehat{k_\alpha}(\xi)=\frac{1}{|\xi|^\alpha}$$

Gracias a esto, dados $0<\alpha,\beta<\frac{n}{2}$, se satisface, en $S'(\mathbb{R}^n)$, la propiedad de semigrupo

(8.32) $$k_\alpha*k_\beta=k_{\alpha+\beta}$$

dado que los $\widehat{k_\alpha}$ son multiplicadores de S' en sí mismo. Para extender esta fórmula a un rango de valores de α fuera del intervalo $(0,n)$, obsérvese que la función

$$G(\alpha):=k_\alpha(\varphi(x+\cdot))=\pi^{\alpha-n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x+y)}{|y|^{n-\alpha}}dy$$

es holomorfa en $\{\alpha \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re}\alpha > 0\}$ con puntos singulares en $n+2\mathbb{N}_0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Si separamos la integral y utilizamos la fórmula de Pizzetti ya mencionada, podemos arribar a la siguiente expresión

$$(k_\alpha * \varphi)(x) = \gamma(\alpha, n) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi(x+y) - \varphi(y) - \sum_{k=0}^{M} b_k \Delta^k \varphi(x) |y|^{2k} \right) \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \, dy$$

donde $-2(M+1) < \operatorname{Re}\alpha \leq -2M$, con $M \in \mathbb{N}_0$;

$$\gamma(\alpha, n) := \pi^{\alpha - n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \ , \ b_k := \frac{|\partial B(0,1)|}{2^k k! \prod\limits_{j=0}^{k-1}(n+2j)},$$

si $k \in \mathbb{N}$, y $b_0 = 0$. Obsérvese que para que esta última expresión esté bien definida basta que φ sea una función $\varphi \in C^{2m}(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^M}\right)$, para $|x| \to \infty$ y algún $M > \operatorname{Re}\alpha$. Además, para el caso $-2 < \operatorname{Re}\alpha \leq 0$ se tiene que

$$(k_\alpha * \varphi)(x) = \gamma(\alpha, n) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(y)}{|y|^{n-\alpha}} \, dy \tag{8.33}$$

lo que equivale a

$$(k_\alpha * \varphi)(x) = \gamma_{(\alpha,n)} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{\varphi(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} \, dy + \gamma_{(\alpha,n)} \int\limits_{B_1} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(y)}{|y|^{n-\alpha}} \, dy + \sigma_{n-1} \frac{\gamma_{(\alpha,n)}}{\alpha} \varphi(x)$$

donde $\sigma_{n-1} := |\partial B(0,1)|$. Se observa entonces, en la fórmula (8.33) la génesis del laplaciano fraccionario en $\mathbb{R}^n$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma(\alpha, n)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \to 0} \pi^{\alpha - n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = -\lim_{\alpha \to 0} \pi^{\alpha - n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) sen\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\alpha\pi} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}} = |\partial B(0,1)| \end{aligned}$$

se concluye que $\lim\limits_{\alpha \to 0^-} (k_\alpha * \varphi)(x) = \varphi(x)$, esto es, $\lim\limits_{\alpha \to 0^-} k_\alpha = \delta$ en $\mathcal{D}'$. De modo similar se puede demostrar que $\lim\limits_{\alpha \to -2^+} k_\alpha = k_{-2} = -\frac{1}{4\pi^2}\Delta\delta$. Por otra parte es interesante notar que , si consideramos $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces $k_\alpha * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, y, además,

$$(k_\alpha * \varphi)(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n - \operatorname{Re}\alpha}}\right) \quad \text{si } |x| \to \infty$$

por lo cual, tomando como función de prueba $h(x) := k_\alpha(\varphi(x + \cdot))$, la convolución $\langle k_\alpha * k_\beta, \varphi\rangle = \langle k_\beta, h\rangle$, está bien definida siempre y cuando $n - \operatorname{Re}\alpha > \operatorname{Re}\beta$ y $\alpha, \beta \notin n + 2\mathbb{N}_0$. La unicidad de la continuación analítica extiende entonces la propiedad de semigrupo (8.32) a estos rangos de valores. Finalmente, aquí puede verse una vez más la relación de inversibilidad $k_{-\alpha} * k_\alpha = k_0 = \delta$, que recupera y extiende la relación (8.30) dada para $\alpha = 2$, y $n \geq 3$. El esbozo de estas ideas nos permiten comprender la naturaleza del laplaciano fraccionario como operador inverso de la integración fraccionaria (el operador I_α) , y viceversa. A su vez, podemos recuperar las expresiones (8.31) y (8.33) para entender este operador (que denotaremos momentáneamente L) o bien como un operador pseudodiferencial con símbolo $|\xi|^{\alpha}$, esto es

$$L_F f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\alpha}\, \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,$$

si $\alpha > 0$, o bien como un operador Integral Singular

$$L_I f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+y) - f(y)}{|y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

si $\alpha < 0$. Esto muestra que existe una gran variedad de formas para introducir el laplaciano fraccionario, al menos en contexto euclídeo: como operador inverso de las transformadas de Riesz, como operador integral, o a través de formas bilineales. En [Kwa17] se exponen diez definiciones posibles, así como las relaciones y/o equivalencias que se dan entre sí. Se destaca el trabajo de [CS07], el cual generaliza a ordenes arbitrarios una técnica que permite introducir el laplaciano fraccionario como un operador que asigna al dato de un problema de tipo Dirichlet, la condición de tipo Neuman de la solución del problema.

En lo que respecta al estudio del laplaciano fraccionario sobre espacios métricos con medida es menester mencionar los trabajos de Eduardo Gatto, Carlos Segovia y Stephen Vági. En [GSV96] estudian la acción del operador laplaciano fraccionario y del operador de integración fraccionaria (llamada por los autores derivada fraccionaria de orden α e integral fraccionaria de orden α) definidos mediante una cuasimétrica especial dada a partir de una identidad aproximada. A grandes rasgos, demuestran que sobre un espacio de tipo homogéneo normal y de orden γ (esto es, sobre cuasimétricas que satisfagan alguna condición Hölder) estos operadores actúan de modo continuo sobre los espacios de funciones Hölder. Más aún, para órdenes de regularidad bajos, la composición de estos operadores es un operador de Calderón-Zygmund que posee inversa acotada en L^2. En [Gat06] Eduardo Gatto extiende estos resultados a espacios cuasimétricos con medida no necesariamente duplicante. Cabe notar también que la condición (8.1) de orden β asociada a cuasimétricas es introducida por Roberto Macías y Carlos Segovia en [MS79a], condición que utilizan para definir y analizar espacios H^p definidos sobre espacios de tipo homogéneo. Asimismo es importante mencionar el reciente trabajo [MW22], en el cual Diego Maldonado y Colin Williams desarrollan una caracterización geométrica de las cuasimétricas localmente de orden β en función del comportamiento del tamaño de las bolas (esto es, de sus dilataciones). Por citar unos de los resultados, demuestran que, si (X,d) es espacio cuasimétrico, entonces, para cada $x_0 \in X$, la función $d(x_0,\cdot)$ es Hölder de orden $\beta > 0$ si y sólo si existen constantes $c_0 \in (0,1)$, $p \geq 1$, tales que para todo $\varrho \in (0,1)$, $T > 0$, y todo $x_1 \in B_d(x_0, \varrho T)$ se tiene que

$$B_d(x_1, c_0(1-\varrho)^p T) \subseteq B_d(x_0, T).$$

En [Act14] se introduce una definición variacional del laplaciano fraccionario sobre espacios de tipo homogéneo, la cual es importante analizar. Dado un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ), α-Ahlfors regular, con d-bolas medibles, es posible definir dos espacios de funciones test semejantes a los utilizados en contexto euclídeo. Por una parte

$$\mathcal{D}(X,d) := \left\{ \varphi \in \bigcap_{0<r<\gamma} \mathcal{C}^{0,r} \ / \ sop(\varphi) : \text{acotado} \right\}$$

donde aquí $\gamma := ind(X,d)$, y por otra parte, introduciendo las seminormas

$$[\varphi]_\beta := \sup_{x\in X} \left[(1 + d(x,x_0))^\beta |\varphi(x)| \right]$$

y

$$[\varphi]_{\beta,r} := \sup_{x\in X} \left[(1 + d(x,x_0))^\beta \left(\sup_{d(x,y)<1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x,y)^r} \right) \right]$$

se definen los espacios

$$\mathcal{S}(X,d) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(X,d) \ / \ \forall \beta > 0, \ \forall r \in (0,\gamma) : [\varphi]_\beta, [\varphi]_{\beta,r} < \infty \right\}$$

y

$$\mathcal{S}^\beta(X,d) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(X,d) \ / \ [\varphi]_\beta < \infty \right\}$$

Puede verse que para todo $\beta \in (0, \alpha + 2s]$ el laplaciano fraccionario D^s es continuo de $\mathcal{S}(X,d)$ en $\mathcal{S}^\beta(X,d)$. Más aún, si introducimos el espacio

$$L_\beta(X,d,\mu) := \left\{ f \in L^1_{loc}(X,\mu) \ / \ \int_X \frac{|f(x)|}{(1 + d(x,x_0))^\beta} d\mu(x) < \infty \right\}$$

entonces, por una parte tendremos que

$$\bigcup_{1\le p\le\infty} L^p(X,\mu) \subseteq L_{\alpha+2s}(X,d,\mu) \tag{8.34}$$

para todo $s > 0$, y además, para todo $\beta > 0$, toda $f \in L_{\beta+\alpha}(X,d,\mu)$ y toda $g \in \mathcal{S}^{\beta+\alpha}(X,d)$ se tiene que $fg \in L^1(X,\mu)$. Esto permite mostrar que $\langle f, D^s g\rangle$ es finito para toda $g \in \mathcal{S}(X,d)$ y toda $f \in L_{\alpha+2s}(X,d,\mu)$, lo cual permite definir el laplaciano $D^s f$ para funciones $f \in L_{\alpha+2s}(X,d,\mu)$ de modo distribucional, como

$$\langle D^s f \ , g\rangle_{L^2} := \langle f, D^s g\rangle_{L^2}$$

para toda $g \in \mathcal{S}(X,d)$; y puede demostrarse que, efectivamente, $D^s f \in \mathcal{S}'(X,d)$. Luego, la propiedad (8.34) nos permite introducir, a su vez, espacios de Sobolev $\widetilde{H^s}(X,d,\mu)$ de modo semejante a los usuales, mediante

$$\widetilde{H^s}(X,d,\mu) := \left\{ f \in L^2(X,\mu) \ / \ D^s f \in L^2(X,\mu) \right\}.$$

Obsérvese que esta definición guarda íntima relación con la dada en (8.7). En efecto, del hecho que $D^s f \in L^2(X,\mu)$ se desprende que debe existir $\varphi \in L^2(X,\mu)$ tal que

$$\langle \varphi, g\rangle_{L^2} = \langle f, D^s g\rangle_{L^2},$$

para toda $g \in \mathcal{S}(X,d)$, en particular, para toda g en las clases de Hölder. Se observa aquí un paradigma semejante al que acontece con el laplaciano $-\Delta$ euclídeo cuando intenta definírselo en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Uno puede considerar dos posibles dominios para dicho operador, $Dom_1(-\Delta) := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, y $Dom_2(-\Delta) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ / \ -\Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ en sentido distribucional}\}$. Si denotamos por T_m al laplaciano actuando en Dom_1 y por T_M al laplaciano actuando sobre Dom_2, puede demostrarse que $Dom_2(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$, que T_M es operador autoadjunto, y que T_m es cerrable y posee como única extensión cerrada a T_M, esto es, $\overline{T_m} = T_M$. Cabe destacarse que en la demostración de estas propiedades, no sólo se utiliza con manifiesta fruición la caracterización de los espacios de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^n)$ mediante la transformada de Fourier, sino que también es de suma importancia y necesidad algún teorema de densidad de funciones suaves en dichos espacios.

Finalmente, en vista de la fórmula de representación del Teorema 2.3 visto en el Capítulo 2, se devela el por qué de la utilidad de la definición (8.7). Sabemos que, por lo desarrollado en [FSV15], si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto con frontera continua, esto es, un conjunto cuya frontera es unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^s(\Omega)$ respecto de la norma $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Esto muestra que la formula de representación de la forma bilineal euclídea, dada por $B^s(u,v) := \langle(-\Delta)^s u, v\rangle$ se verifica para todo u, v de un subespacio denso de $Dom(B^s) := H^s(\mathbb{R}^n)$ (esto es, de un core de B^s). Más aún, como la clase $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es también densa en $\left(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\right)$, B^ssatisface las hipótesis del Teorema 2.3 con $H := L^2(\Omega)$. Por otra parte, si una función u pertenece a la clase $Dom(D^s)$ dada por la definición (8.7), entonces, el inciso iii) del Teorema 2.3, obliga a que $u \in Dom(T)$ y que $Tu = D^s u$, donde T es el operador dado por dicho teorema. Se ve entonces que la definición (8.7) recupera el operador laplaciano fraccionario a partir de la forma bilineal. Cabe observar, aún con todo, que al no poseer un buen teorema de densidad de funciones Hölder en espacios de Sobolev definidos sobre espacios de tipo homogéneo generales, no podemos asegurar que dicha representación funcione.

Sección 2. Esta sección está inspirada en los trabajos de I. Babuška, J. E. Osborn y A. K. Aziz: [BA72],[BO91b], [Bab71], [BO91a]; y más recientemente, el libro de Jiguang Sun y Aihu Zhou, [SZ17].

Sección 3. En lo que respecta al estudio del problema de autovalores para el laplaciano fraccionario en contexto euclídeo caben destacarse los trabajos de Enrico Valdinoci y Rafaela Servadei, entre otros. Los fundamentos del contexto funcional que permite analizar dichos problema se encuentra en [MBRS16], [SV13b], [SV13a]. En este trabajo no sólo hemos extendido estos resultados a espacios de Ahlfors, sino que también hemos separado y vislumbrado lo que estrictamente atañe al fundamento funcional que aporta la teoría de formas bilineales, por un lado, y lo que puede deducirse de la forma bilineal asociada al laplaciano fraccionario, por otro lado. En [SV14b] y [ROS14] se analiza la regularidad de las autofunciones. Cabe destacarse también [SV14b], en el cual estudian existencia y regularidad de soluciones débiles y viscosas del problema con dato Dirichlet asociado al laplaciano fraccionario. En [SV14a] realizan un estudio comparativo del espectro del laplaciano fraccionario definido como operador integral y el laplaciano fraccionario definido de un modo espectral utilizando los autovalores y las autofunciones del laplaciano usual en $\mathbb{R}^n$.

CAPíTULO 9

Teoría espectral del laplaciano fraccionario diádico

En este capítulo analizaremos en detalle el espectro del laplaciano fraccionario en un cuadrante del espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de la distancia diádica. La primera sección introduce en detalle una estructura diádica en $\mathbb{R}^n$ la cual nos permite definir una métrica que denominaremos métrica diádica. Así también introducimos el sistema de funciones de Haar. La segunda sección trata las relaciones existentes entre la forma bilineal B^s adecuada a este contexto, y las funciones de Haar. Veremos que efectivamente dicho sistema es un subconjunto de autofunciones asociadas a dicha forma. En la segunda sección analizaremos la naturaleza hölderiana que presentan las funciones de Haar en este contexto, así como la acción puntual del laplaciano fraccionario diádico sobre ellas. En la tercera sección utilizamos esta información para detallar el especto del laplaciano fraccionario diádico sobre ciertos dominios, así como para realizar estimaciones del mismo. En la cuarta sección hacemos uso de dicho espectro para caracterizar los espacios de Sobolev adecuados a este contextos. La quinta y última sección detalla la bibliografía consultada.

1. El espacio de tipo homogéneo diádico en $(\mathbb{R}^+)^n$

A fin de volver más sencilla la comprensión de la métrica diádica, introduciremos y analizaremos, en primer lugar, el caso unidimensional. Denotaremos por $\mathbb{D}$ a la familia de intervalos diádicos de la forma $\mathbb{D} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}^j$ donde $\mathbb{D}^j = \left\{I_k^j : k \in \mathbb{Z}\right\}$ denota el j-ésimo nivel de los intervalos diádicos I_k^j, los cuales se definen de la forma $I_k^j := [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$. En el caso que trabajemos sobre la semirecta positiva $\mathbb{R}^+$ denotaremos por $\mathbb{D}^+$ a las subfamilia de intervalos diádicos de dicho intervalo, esto es, $\mathbb{D}^+ = \left\{I_k^j : \ j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\right\}$. En la Figura 1 siguiente se ilustran sobre $\mathbb{R}^+$estos conjuntos.

Dos propiedades importantes se destacan. En primer lugar cada nivel $\mathbb{D}^j$ es una familia disjunta de intervalos, y en segundo lugar, el conjunto $\mathbb{D}$ satisface una propiedad de tricotomía: dados dos intervalos cualesquiera $I, J \in \mathbb{D}$, entonces, o bien son disjuntos, o bien $I \subseteq J$, o bien $J \subseteq I$. Esto se debe al inmediato hecho que cada intervalo de un nivel $\mathbb{D}^j$ está formado por la unión (disjunta) de dos intervalos del nivel $\mathbb{D}^{j+1}$ y, a su vez, está contenido en un único intervalo del nivel $\mathbb{D}^{j-1}$.

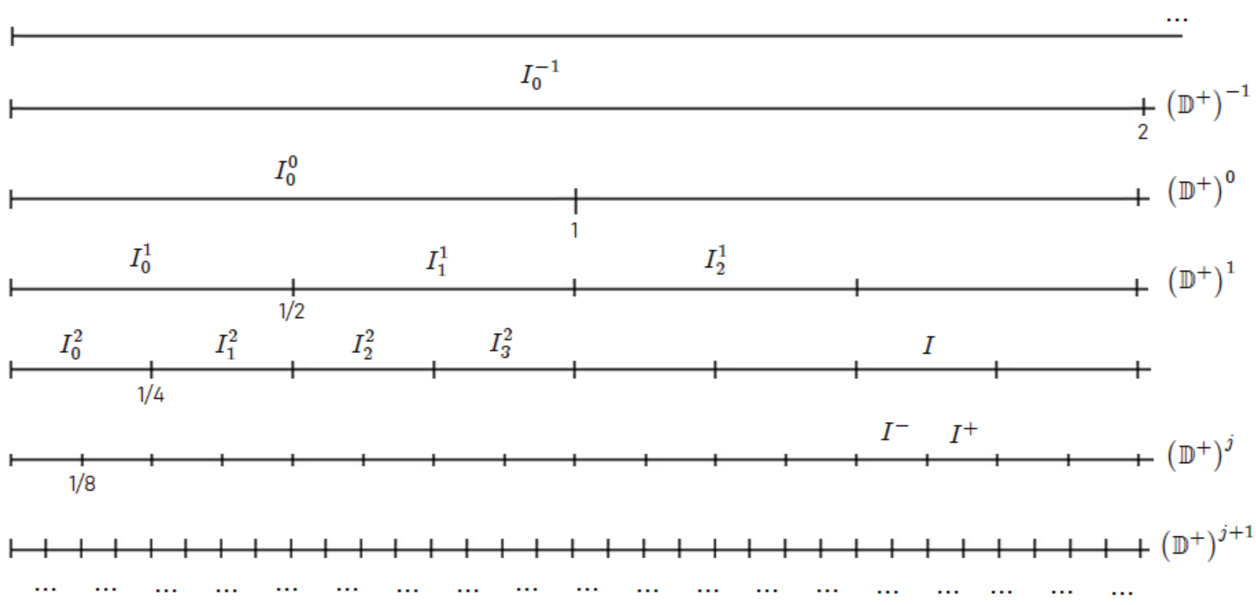


FIGURA 1.

Dado un intervalo $I \in \mathbb{D}^k$ al único intervalo $J \in \mathbb{D}^{k-j}$, con $j \in \mathbb{N}$, tal que $I \subseteq J$ lo llamaremos j-ésimo ancestro de I. También haremos uso de la sinonimia establecida en el lenguaje matemático, sin distinción utilizaremos los términos ancestro, antecesor, antepasado, ascendiente, precursor, etcétera. Incluso, en el caso $j = 1$ hablaremos de J como el intervalo (o cubo) padre (también intervalo madre, o antecesor inmediato) de I, y de I como un intervalo hijo (o sucesor inmediato) de J. A su vez, cada intervalo $\widetilde{I} \in \mathbb{D}^{k+j}$ tal que $I \supseteq \widetilde{I}$ lo llamaremos j-ésimo descendiente de I, utilizando sin distinción los términos descendiente, sucesor, etcétera.

La ventaja de trabajar en $\mathbb{R}^+$, o $(\mathbb{R}^+)^n$ como haremos más adelante, consiste en que dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, cualesquiera, siempre es posible encontrar un único intervalo $I \in \mathbb{D}$ de medida mínima, el cual denotaremos por $I_{(x,y)}$, que contenga ambos elementos. Utilizando este intervalo, definimos la distancia diádica, denotada δ, como la medida de dicho intervalo, esto es

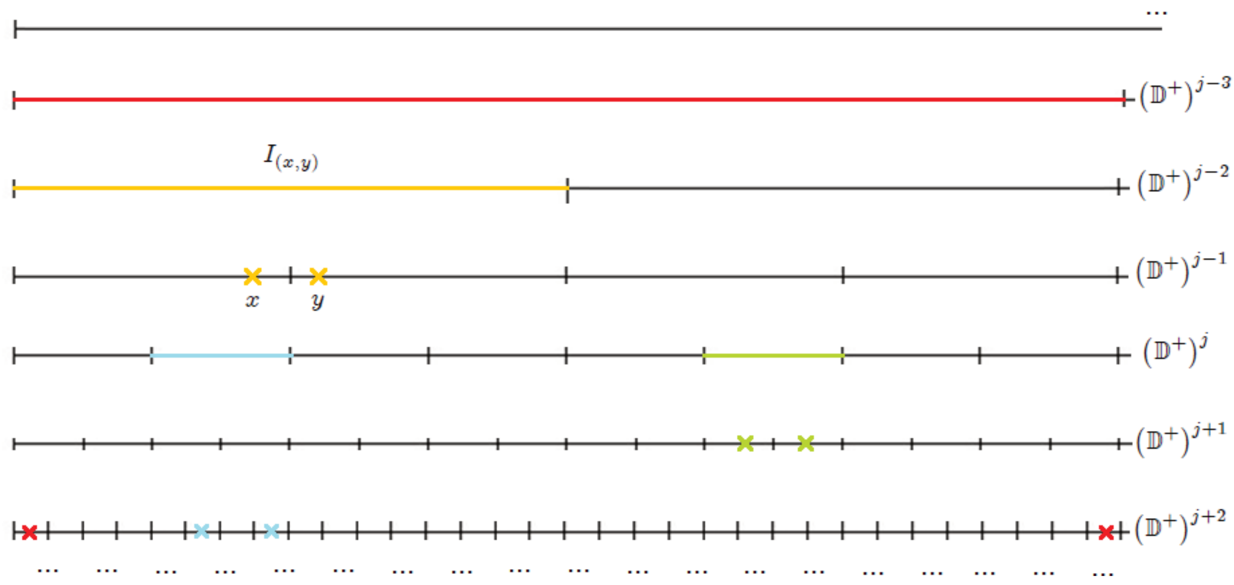
$$\delta(x, y) := \left|I_{(x,y)}\right|,$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue unidimensional. Cabe destacar que δ satisface la condición de ultrametricidad, esto es,

$$\delta(x, z) \leq \max\left(\delta(x, y), \delta(y, z)\right),$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. La Figura 2 muestra en distintos colores los correspondiente $I_{(x,y)}$ asociados a los x, y marcados con cruces.

Cabe notar la discrepancia entre la métrica diádica y la euclídea: todo elemento $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y todo $y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tendrán distancia diádica $\delta(x, y) = 1$, por más que su distancia



euclídea $|x-y|$ puede ser tan pequeña como se desee. Sin embargo, ya que el intervalo $[x,y]$, no necesariamente diádico, siempre esá incluído en el diádico minimal $I_{(x,y)}$ correspondiente a x,y, entonces $|x-y| \leq \delta(x,y)$.

Estas nociones pueden extenderse de un modo evidente a dimensiones mayores considerando productos cartesianos. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y sea $k \in \mathbb{Z}^n$, $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$, los productos cartesianos entre n-intervalos diádicos de $\mathbb{R}$, del mismo nivel, son de la forma

$$Q_{j,k} := 2^{-j}\left([0,1)^n + k\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{k_i}{2^j} \leq x_i < \frac{k_i}{2^j} \ ; \ i = 1, ..., n\right\}$$

Aquí también denotaremos por $\mathbb{D}$ a la familia de cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$, esto es

$$\mathbb{D} := \{Q_{j,k} : \ j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Y en el caso que trabajemos sobre el cuadrante positivo $(\mathbb{R}^+)^n$, y al igual que el caso unidimensional, denotaremos por $\mathbb{D}^+$ a las subfamilia de cubos diádicos de dicho cuadrante, esto es, $\mathbb{D}^+ = \{Q_{j,k} : \ j \in \mathbb{Z}, k \in (\mathbb{N}_0)^n\}$, entendiendo aquí $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. A su vez, fijo $Q \in \mathbb{D}$, denotaremos por $\mathbb{D}_Q$ al conjunto de cubos diádicos incluídos en Q esto es

$$\mathbb{D}_Q = \{C \in \mathbb{D} : C \subseteq Q\}.$$

Cabe mencionar que la misma relación de tricotomía que se da en el caso unidimensional se da en este contexto, así como la unicidad de ancestro inmediato.

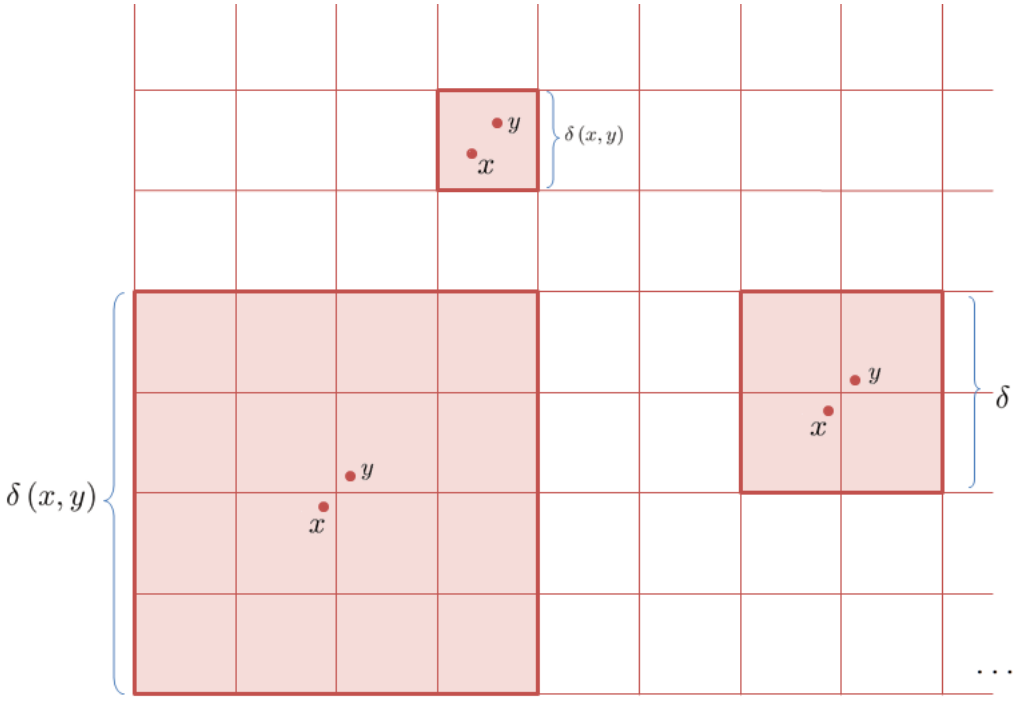
La distancia diádica en $(\mathbb{R}^+)^n$ se define de modo análogo al caso unidimensional. Dados $x, y \in (\mathbb{R}^+)^n$ denótese por $Q_{(x,y)}$ al cubo diádico de menor medida que contiene ambos elementos. Se define la distancia diádica n-dimensional δ, entre x e y como

$$\delta(x,y) := \left|Q_{(x,y)}\right|,$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue n-dimensional. En este caso también se tiene que δ es ultramétrica. A partir de esta definición se sigue inmediatamente que todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ verifica la desigualdad

$$|x-y|^n \leq \delta(x,y)\,. \tag{9.1}$$

La Figura 3 ilustra, que al igual que en el caso unidimensional, estas dos cuasimétricas no son comparables.



Puede demostrarse, sin embargo, que existe comparabilidad entre las medidas de las bolas diádicas y las euclídeas. En efecto, dado $r > 0$ tal que $2^{-jn} < r \leq 2^{-(j-1)n}$, para algún $j \in \mathbb{Z}$, entonces, gracias a (9.1) y estas desigualdades, se tiene que

$$|B_\delta(x,r)| \leq \frac{1}{\omega_n}\left|B\left(x, r^{1/n}\right)\right| \leq 2^n\,|B_\delta(x,r)| \tag{9.2}$$

donde $\omega_n := |B(0,1)|$ y $B(x,R)$ denota la bola euclídea $\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < R\}$.

Observemos que aquí también los cubos diádicos de la clase $\mathbb{D}$ satisfacen la propiedad de tricotomía, y que dicha clase puede descomponerse en niveles $\mathbb{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}^j$ donde $\mathbb{D}^j = \{Q_{j,k} : k \in \mathbb{Z}^n\}$ es una subfamilia disjunta de cubos de medida 2^{-nj}. Las mismas consideraciones respecto de los conceptos de antecesor y sucesor entre intervalos diádicos se mantienen en el contexto n-dimensional.

Introducimos a continuación el sistema de funciones de Haar asociado a este sistema diádico $\mathbb{D}$, el cual determina una base ortonormal de funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Más aún, también determina sistema ortonormales en espacios de Sobolev, como veremos, y, lo más importante, forman el espectro del laplaciano fraccionario pertinente a este contexto. En el caso unidimensional, introducimos la función

$$h^{1}(x) := \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1)}(x),$$

y, dado un intervalo diádico I de la forma $I = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$, definimos

$$h_{j,k}(x) = h_I(x) := 2^{j/2} h^{1}\left(2^{j}x - k\right),$$

Obsérvese, por una parte, que $h_{0,0} \equiv h^1$ y, por otra parte, que para cada $I \in \mathbb{D}$, la función h_I posee a I como soporte y además está normalizada en $L^2(\mathbb{R})$, esto es $\|h_I\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

A cada una de estas funciones las denominaremos función de Haar y a la familia de dichas funciones h_I indexadas por $I \in \mathbb{D}$ la llamaremos sistema de Haar y lo denotaremos por $\mathcal{H}$, esto es $\mathcal{H} = \{h_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ o bien $\mathcal{H} = \{h_I : I \in \mathbb{D}\}$. Este sistema forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y también permite introducir una base ortonormal de L^2 en dimensiones mayores utilizando productos tensoriales. Para ello, considerando $n \geq 2$, denotemos por Γ al conjunto $\Gamma = \{0,1\}^n \setminus \{(0,0,...,0)\}$, esto es, al conjunto de n-uplas de ceros y unos del cual excluimos la n-upla nula, y sea

$$h^{0}(x) := \mathbf{1}_{[0,1)}(x),$$

y, como antes,

$$h^{1}(x) := \mathbf{1}_{[0,1/2)}(x) - \mathbf{1}_{[1/2,1)}(x).$$

Dado $l = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \Gamma$, y un cubo diádico $Q = Q_{j,k}$, designamos por h_Q^l a la función

$$h_Q^{l}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}}} h^{l_1}\left(2^{j}x_1 - k_1\right) h^{l_2}\left(2^{j}x_2 - k_2\right) ... h^{l_n}\left(2^{j}x_n - k_n\right)$$

donde $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$. Obsérvese que también podemos denotar dicha función como

$$h_Q^{l}(x_1, x_2, ..., x_n) = h_{C_1}^{l_1}(x_1)\, h_{C_2}^{l_2}(x_2) ... h_{C_n}^{l_n}(x_n)$$

donde $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ es el conjunto de intervalos diádicos unidimensionales tales que $Q = C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$, y donde, si C_i es de la forma $[\frac{k_i}{2^j}, \frac{k_i+1}{2^j})$, entonces $h_{C_i}^{l_i}(x_i) := 2^{j/2} h^{l_i}(2^j x_i - k_i)$, esto es,

$$h_{C_i}^{0}(x_i) := \frac{1}{|C_i|^{1/2}} \mathbf{1}_{C_i}(x_i); \qquad h_{C_i}^{1}(x_i) = \begin{cases} |C_i|^{-1/2} & \text{si } x_i \in [\frac{k_i}{2^j}, \frac{2k_i+1}{2^{j+2}}), \\ -|C_i|^{-1/2} & \text{si } x_i \in [\frac{2k_i+1}{2^{j+2}}, \frac{k_i+1}{2^j}). \end{cases}$$

A su vez, siendo $Q = C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$, denotaremos por $h_Q^0(x)$ a la función

$$h_Q^{0}(x) = h_{C_1}^{0}(x_1)\, h_{C_2}^{0}(x_2) ... h_{C_n}^{0}(x_n) = \frac{1}{|Q|^{1/2}} \mathbf{1}_Q(x).$$

Análogamente al caso unidimensional, a las funciones h_Q^l, $Q \in \mathbb{D}$, $l \in \Gamma$, las denominaremos funciones de Haar n-dimensionales, o simplemente funciones de Haar, y a la familia $\mathcal{H} := \left\{h_Q^l : Q \in \mathbb{D}, l \in \Gamma\right\}$ sistema de Haar. La demostración de la siguiente proposición está referenciada en la sección final de este capítulo.

PROPOSICIÓN 9.1. *El sistema de funciones de Haar $\mathcal{H} := \left\{h_Q^l : Q \in \mathbb{D}, l \in \Gamma\right\}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Para subdominios que son simples en términos de cubos diádicos tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 9.2. *Dado $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, $N \in \mathbb{N}$, unión finita y disjunta de cubos diádicos, el sistema de funciones*

$$\mathcal{B} := \left\{h_{Q_i}^0 : 1 \leq i \leq N\right\} \cup \left\{h_C^l : l \in \Gamma, C \in \mathbb{D}_\Omega\right\},$$

es base ortonormal de $L^2(\Omega)$, donde $\mathbb{D}_\Omega$ designa la familia de los cubos de $\mathbb{D}$ que están contenidos en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Notar que $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{B}_i$, donde $\mathcal{B}_i = \left\{h_{Q_i}^0\right\} \cup \left\{h_C^l : l \in \Gamma, C \in \mathbb{D}_{Q_i}\right\}$. Como toda función $f \in L^2(\Omega)$ se puede descomponer de la forma $f = \sum 1_{Q_i} f$, para probar este resultado bastará con demostrar que B_i es base ortonormal de $L^2(Q_i)$. A fin de simplificar la notación denotemos simplemente por f a $1_{Q_i} f$ y por Q a Q_i. Por la Proposición 9.1 tenemos que, dada $f \in L^2(Q)$

$$f = \sum_{C \in \mathbb{D}, l \in \Gamma} \left\langle f, h_C^l \right\rangle h_C^l,$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $sop(f) \subseteq Q$ resulta que

$$f = \sum_{C \in \mathbb{D}_Q, l \in \Gamma} \left\langle f, h_C^l \right\rangle h_C^l + \sum_{\substack{C \in \mathbb{D}, C \supsetneq Q \\ l \in \Gamma}} \left\langle f, h_C^l \right\rangle h_C^l.$$

Luego, si $C \in D, C \supsetneq Q$, h_C^l es constante sobre Q con valor $h_C^l(Q)$, y

$$\left\langle f, h_C^l \right\rangle = h_C^l(Q) \int_Q f(x)\, dx = h_C^l(Q) \left\langle f, \mathbf{1}_Q \right\rangle.$$

Por lo tanto

$$f = \sum_{C \in \mathbb{D}_Q, l \in \Gamma} \left\langle f, h_C^l \right\rangle h_C^l + \left\langle f, \mathbf{1}_Q \right\rangle \sum_{\substack{C \in \mathbb{D}, C \supsetneq Q \\ l \in \Gamma}} h_C^l(Q)\, h_C^l. \tag{9.3}$$

En particular, si $f = \mathbf{1}_Q$,

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_Q &= \sum_{C\in\mathbb{D}_Q, l\in\Gamma} \left\langle \mathbf{1}_Q, h_C^l\right\rangle h_C^l + \left\langle \mathbf{1}_Q, \mathbf{1}_Q\right\rangle \sum_{\substack{C\in\mathbb{D}, C\supsetneq Q\\ l\in\Gamma}} h_C^l(Q)\, h_C^l \\ &= 0 + |Q| \sum_{\substack{C\in\mathbb{D}, C\supsetneq Q\\ l\in\Gamma}} h_C^l(Q)\, h_C^l.\end{aligned}$$

Utilizando esta relación en (9.3) se sigue que

$$\begin{aligned}f &= \sum_{C\in\mathbb{D}_Q, l\in\Gamma} \left\langle f, h_C^l\right\rangle h_C^l + \left\langle f, \frac{1}{|Q|^{1/2}}\mathbf{1}_Q\right\rangle \frac{1}{|Q|^{1/2}}\mathbf{1}_Q \\ &= \sum_{C\in\mathbb{D}_Q, l\in\Gamma} \left\langle f, h_C^l\right\rangle h_C^l + \left\langle f, h_Q^0\right\rangle h_Q^0,\end{aligned}$$

esto es, $\left\{h_Q^0\right\} \cup \left\{h_C^l : l\in\Gamma, C\in\mathbb{D}_Q\right\}$ es base de $L^2(Q)$. □

2. El sistema de Haar y el análisis espectral del operador de diferenciación fraccionaria

Aprovecharemos esta breve sección para analizar la relación fundamental entre el sistema de Haar y el operador de diferenciación fraccionaria diádica definido en el espacio n-Ahlfors regular $(X, \delta, |\cdot|)$, donde $X = \left(\mathbb{R}_0^+\right)^n$, δ designa la métrica diádica relativa a los cubos diádicos $D^+ := \{Q\in\mathbb{D} : Q\subseteq X\}$, y $|\cdot|$ designa la medida de Lebesgue n-dimensional.

En este contexto, el laplaciano fraccionario diádico, el cual denotaremos D_{dy}^s, está dado por

$$D_{dy}^s f(x) = \int_X \frac{f(x) - f(y)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dy.$$

Teniendo en cuenta que la métrica δ satisface la condición de ultrametricidad, los resultados vistos en la primera sección del Capítulo1 nos aseguran que el índice de regularidad $ind(X, d)$ del espacio es infinito, al igual que el índice Hölder, por lo cual, clases $\mathcal{C}^{0,\beta}(X,\delta)$ son no triviales para todo $\beta > 0$. Teniendo en mente la Proposición 8.1, el laplaciano D_{dy}^s está bien definido sobre los espacios $\mathcal{C}^{0,\beta}(X,\delta)$ para $\beta > 2s$. A fin de estudiar el comportamiento de dicho operador sobre las funciones de Haar, el siguiente lema muestra que dichas funciones pertenecen a toda clase Hölder, si bien no uniformemente.

LEMA 9.3. *Para cada $Q\in\mathbb{D}$ y $l\in\Gamma$ tenemos que $h_Q^l\in\mathcal{C}^{0,\beta}(X,\delta)$ para todo $\beta > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Dados $Q\in D$ y $l\in\Gamma$, analizamos la diferencia $\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right|$ en distintos casos de acuerdo a la ubicación del par $x, y\in X$ respecto de Q. En primer lugar, si $x\in Q$ e $y\notin Q$ entonces $\delta(x,y)\geq |Q|$ y

$$\frac{\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right|}{\delta(x,y)^\beta} = \frac{\left|h_Q^l(x)\right|}{\delta(x,y)^\beta} \leq \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}+\beta}}$$

Por otra parte, si $x, y \in Q$, entonces, o bien$\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right| = 0$ y trivialmente se satisface

$$\frac{\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right|}{\delta(x,y)^\beta} \leq \frac{2}{|Q|^{1/2+\beta}},$$

o bien $\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right| = \frac{2}{|Q|^{1/2}}$ y $\delta(x,y) = |Q|$, por lo cual $\frac{\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right|}{\delta(x,y)^\beta} = \frac{2}{|Q|^{1/2+\beta}}$.

$$\frac{\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right|}{\delta(x,y)^\beta} = \frac{2}{|Q|^{1/2+\beta}}.$$

Finalmente tenemos que

$$\frac{\left|h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right|}{\delta(x,y)^\beta} \leq \frac{2}{|Q|^{1/2+\beta}},$$

para todo $x, y \in X$. Esto es $h_Q^l \in \mathcal{C}^{0,\beta}(X,\delta)$ para todo $\beta > 0$ con

$$\left[h_Q^l\right]_{\mathcal{C}^{0,\beta}(X,\delta)} \leq \frac{2}{|Q|^{1/2+\beta}}.$$

□

Cabe observar que, de modo análogo, se puede demostrar que las funciones h_Q^0, $Q \in \mathbb{D}$, también satisfacen estas condiciones Hölder. Sin embargo, esto no es cierto para cualquier combinación de características, ya que, por ejemplo $\mathbf{1}_{[a,b]}$ no es continua si a, b son irracionales.

Gracias al Lema 9.3 y a la Proposición 8.1 el operador D_{dy}^s está bien definido sobre el generado lineal $S(\mathcal{H}) := gen\left\{h_Q^l : Q \in \mathbb{D}, l \in \Gamma\right\}$. La Proposición 9.5 analiza puntualmente esta acción. Para demostrarla haremos uso del siguiente resultado, el cual está relacionado con el Lema 4.1, aunque calculado aquí de un modo preciso, gracias a las gentilezas que ofrece la estructura diádica.

LEMA 9.4. *Sea $Q \in \mathbb{D}$. Entonces para cada $x \in Q$ se tiene*

$$\int_{X\setminus Q} \frac{1}{\delta(x,y)^{1+\varepsilon}} dy = \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{n\varepsilon} - 1}\right)\frac{1}{|Q|^\varepsilon} \tag{9.4}$$

$$\int_{Q} \frac{1}{\delta(x,y)^{1-\varepsilon}} dy = \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)\left(\frac{2^{n\varepsilon}}{2^{n\varepsilon} - 1}\right)|Q|^\varepsilon \tag{9.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar (9.4) obsérvese, en primer lugar, que la distancia diádica es constante sobre cubos disjuntos. Para ser más precisos, dados $Q', Q'' \in \mathbb{D}$ disjuntos, entonces $\delta(x,y)$ es invariante para cada $x \in Q'$ y cada $y \in Q''$, esto es

$$\delta(x,y) = \delta(w,z),$$

para todo $x, w \in Q'$ y todo $z, y \in Q''$. Denotaremos por $\delta(Q', Q'')$ a dicho valor. Consideremos la sucesión creciente de cubos diádicos

$$Q = Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq Q_3 \subsetneq \ldots,$$

donde cada cubo Q_n es el antecesor inmediato de Q_{n-1}, y utilicémosla para particionar el dominio de integración. Esto es,

$$\int_{X \setminus Q} \frac{1}{\delta(x,y)^{1+\varepsilon}} dy = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j \setminus Q_{j-1}} \frac{1}{\delta(x,y)^{1+\varepsilon}} dy.$$

Teniendo en cuenta que para todo $y \in Q_j \setminus Q_{j-1}$ y todo $x \in Q_0$ la distancia $\delta(x,y)$ es constante, con valor $|Q_j|$, tenemos que

$$\int_{X \setminus Q} \frac{1}{\delta(x,y)^{1+\varepsilon}} dy = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j \setminus Q_{j-1}} \frac{1}{|Q_j|^{1+\varepsilon}} dy = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|Q_j| - |Q_{j-1}|}{|Q_j|^{1+\varepsilon}},$$

y teniendo en cuenta que $|Q_j| = 2^{jn}|Q_0| = 2^{jn}|Q|$ obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\int_{X \setminus Q} \frac{1}{\delta(x,y)^{1+\varepsilon}} dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{jn}|Q| - 2^{n(j-1)}|Q|}{|Q|^{1+\varepsilon}\left(2^{nj}\right)^{(1+\varepsilon)}} = \\ \frac{1}{|Q|^{\varepsilon}}\left(1 - 2^{-n}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nj\varepsilon}} &= \frac{1}{|Q|^{\varepsilon}}\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{n\varepsilon} - 1}\right).\end{aligned}$$

Para (9.5) se aplica la misma idea utilizando la cadena de cubos diádicos $Q = Q_0 \supsetneq Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq Q_3 \ldots$,donde cada cubo Q_n es el ancestro inmediato de Q_{n-1}, y satisface que $x \in Q_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. □

El siguiente resultado describe la acción puntual del laplaciano D^s_{dy} sobre la base de Haar y muestra que, efectivamente, esta clase de funciones forman un conjunto de autofunciones.

PROPOSICIÓN 9.5. *Para cada $Q \in \mathbb{D}$ y $l \in \Gamma$ tenemos que*

$$D^s_{dy}\left(h^l_Q\right)(x) = \beta_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}} h^l_Q(x)$$

donde $\beta_{n,s} = \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{2ns} - 1}\right) + 1$. *En particular, para cada $f \in S(\mathcal{H})$,*

$$D^s_{dy} f(x) = \beta_{n,s} \sum_{C \in \mathbb{D}, l \in \Gamma} \frac{1}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h^l_Q \right\rangle h^l_Q(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Dados $Q \in \mathbb{D}$ y $l \in \Gamma$, tenemos que

$$\begin{aligned} D^s_{dy}\left(h^l_Q\right)(x) &= \int_X \frac{h^l_Q(x) - h^l_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dy \\ &= \int_{X \setminus Q} \frac{h^l_Q(x)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dy + \int_Q \frac{h^l_Q(x) - h^l_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dy = I + II \end{aligned}$$

De acuerdo al Lema 9.4

$$\begin{aligned} I &= h_Q^l(x)\int_{X\setminus Q}\frac{1}{\delta(x,y)^{1+2s}}dy = \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{2sn}-1}\right)\frac{h_Q^l(x)}{|Q|^{2s}} \\ &= (\beta_{n,s}-1)\frac{h_Q^l(x)}{|Q|^{2s}} \end{aligned}$$

Por otra parte, para calcular II, analizamos tres casos de pertenencias. En primer lugar, si $x\notin Q$ entonces, para todo $y\in Q$ tendremos que $\delta(x,y)=2^{nM}|Q|$, para algún $M\in\mathbb{N}$, por lo cual,

$$II=-\int_Q\frac{h_Q^l(y)}{\delta(x,y)^{1+2s}}dy=-\frac{1}{(2^{nM}|Q|)^{1+2s}}\int_Q h_Q^l(y)\,dy=0.$$

En segundo lugar, si $x\in Q$, denotemos por $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{D}$ a la subfamilia de cubos diádicos que son hijos inmediatos de Q, esto es, $Q=\bigcup_{C\in\mathcal{I}}C$, unión disjunta, $\#\mathcal{I}=2^n$ y $|C|=2^{-n}|Q|$, para cada $C\in\mathcal{I}$. Denotemos, a su vez, por C_x al único cubo en $\mathcal{I}$ tal que $x\in C_x$, y teniendo en cuenta que

$$h_Q^l(w)=h_Q^l(z),$$

para todo $w,z\in C$, y cada $C\in\mathcal{I}$, denotemos por $h_Q^l(C)$ a dicho valor. Descomponemos $\mathcal{I}$ de modo disjunto $\mathcal{I}=\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2$ donde

$$\mathcal{I}_1:=\left\{C\in\mathcal{I}:h_Q^l(C_x)=h_Q^l(C)\right\},$$

y

$$\mathcal{I}_2:=\mathcal{I}\setminus\mathcal{I}_1=\left\{C\in\mathcal{I}:h_Q^l(C_x)=-h_Q^l(C)\right\}.$$

Obsérvese que $\#\mathcal{I}_1=\#\mathcal{I}_2=2^{n-1}$. Luego , teniendo en cuenta que para todo $y\in C$ con $C\in\mathcal{I}_2$ se tiene que $\delta(x,y)=|Q|$ tenemos que

$$\begin{aligned} II &= \int_Q\frac{h_Q^l(x)-h_Q^l(y)}{\delta(x,y)^{1+2s}}dy=\sum_{C\in\mathcal{I}}\int_C\frac{h_Q^l(C_x)-h_Q^l(C)}{\delta(x,y)^{1+2s}}dy \\ &= \sum_{C\in\mathcal{I}_2}\int_C\frac{h_Q^l(C_x)-h_Q^l(C)}{\delta(x,y)^{1+2s}}dy \\ &= 2h_Q^l(C_x)\sum_{C\in\mathcal{I}_2}\int_C\frac{1}{\delta(x,y)^{1+2s}}dy \\ &= 2h_Q^l(x)\sum_{C\in\mathcal{I}_2}\int_C\frac{1}{|Q|^{1+2s}}dy=\frac{2h_Q^l(x)}{|Q|^{1+2s}}\sum_{C\in\mathcal{I}_2}|C| \\ &= \frac{2h_Q^l(x)}{|Q|^{1+2s}}(\#\mathcal{I}_2)\,2^{-n}|Q|=\frac{h_Q^l(x)}{|Q|^{2s}} \end{aligned}$$

Finalmente

$$D_{dy}^s\left(h_Q^l\right)(x)=I+II=(\beta_{n,s}-1)\frac{h_Q^l(x)}{|Q|^{2s}}+\frac{h_Q^l(x)}{|Q|^{2s}}=\beta_{n,s}\frac{h_Q^l(x)}{|Q|^{2s}}$$

como queríamos demostrar. El caso particular se sigue utilizando la linealidad del operador D^s_{dy}. □

3. Forma bilineal diádica y sistema de Haar

Consideremos el espacio $(X, \delta, |\cdot|)$ donde $X = (\mathbb{R}^+)^n$ el subconjunto de n-uplas de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas no negativas, δ representa la distancia diádica y $|\cdot|$ la medida de Lebesgue n-dimensional. Definamos sobre éste la forma bilineal fraccionaria diádica dada por

$$B^s_{dy}(u, v) := \frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{\delta(x, y)^{1+2s}} dydx \tag{9.6}$$

El principal resultado de esta sección analiza cuantitativamente cómo actúa B^s_{dy} sobre las funciones de Haar y las funciones características sobre cubos diádicos. La Proposición 9.6 muestra, en particular, cómo las funciones de Haar con soporte en Ω son autofunciones de B^s_{dy}, cuando Ω es unión finita de cubos diádicos.

Proposición 9.6. *Sea* $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, *con* $Q_i \in \mathbb{D}^+$ *y* $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$. *Sea* $\mathcal{B}$ *la base ortonormal de* $L^2(\Omega)$ *provista por el Corolario 9.2. Entonces, son válidas las siguientes afirmaciones:*

i) para cada $h, \widetilde{h} \in \mathcal{B}$, *con* $h \neq \widetilde{h}$ *tenemos que*

$$B^s_{dy}\left(h, \widetilde{h}\right) = 0;$$

ii) dado $Q \in \mathbb{D}^+$ *y* $f \in L^2(X)$ *tal que* $B^s_{dy}(f, f) < \infty$ *se tiene que*

$$B^s_{dy}\left(f, h^0_Q\right) = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}}\left\langle f, h^0_Q\right\rangle - |Q|^{\frac{1}{2}}\int_{X\setminus Q}\frac{f(y)}{\delta(Q, y)^{1+2s}}dy,$$

donde

$$\alpha_{n,s} := \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{2ns} - 1}\right);$$

iii) en particular, si $sop(f) \subseteq Q$, *entonces*

$$B^s_{dy}\left(f, h^0_Q\right) = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}}\left\langle f, h^0_Q\right\rangle_{L^2};\tag{9.7}$$

iv) dada una familia finita $\{Q_i\}_{1\leq i\leq M}$ *de cubos diádicos disjuntos, si* $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i h^0_{Q_i}(x)$ *y* $f \in L^2(\Omega)$ *con* $B^s_{dy}(f, f) < \infty$ *entonces*

$$B^s_{dy}(f, \Psi) = \sum_{i=1}^{N}\left(a_i\frac{\alpha_{n,s}}{|Q_i|^{2s}} - 2|Q_i|^{\frac{1}{2}}\sum_{j\neq i}\frac{a_j|Q_j|^{\frac{1}{2}}}{\delta(Q_i, Q_j)^{1+2s}}\right)\left\langle f, h^0_{Q_i}\right\rangle_{L^2};$$

$$B^s_{dy}(\Psi, \Psi) = \alpha_{n,s}\sum_{i=1}^{M}\frac{a_i^2}{|Q_i|^{2s}} - 4\sum_{1\leq i<j\leq M} a_i a_j\frac{|Q_j|^{\frac{1}{2}}|Q_i|^{\frac{1}{2}}}{\delta(Q_j, Q_i)^{1+2s}};$$

v) dada $f \in L^2(X)$ tal que $B^s_{dy}(f,f) < \infty$ y $h^l_Q \in \mathcal{B}$, con $l \neq 0$, se tiene que

$$B^s_{dy}\left(f, h^l_Q\right) = \frac{\beta_{n,s}}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h^l_Q \right\rangle, \tag{9.8}$$

donde

$$\beta_{n,s} = \alpha_{n,s} + 1 = \frac{2^{n(2s+1)} - 1}{2^n\left(2^{2ns} - 1\right)};$$

vi) para toda $f \in L^2(X)$ con $B^s_{dy}(f,f) < \infty$ y toda $g \in S(\mathcal{H}) = gen \left\langle h^l_Q \right\rangle^{l\in\Gamma}_{Q\in\mathbb{D}}$ se tiene que

$$B^s_{dy}(f,g) = \beta_{n,s} \sum_{l\in\Gamma, Q\in\mathbb{D}} \frac{1}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h^l_Q \right\rangle \left\langle g, h^l_Q \right\rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. i) Dados, $Q, J \in \mathbb{D}^+$, $l, m \in \Gamma$, denotemos por H^l_Q y H^m_J a las funciones

$$H^l_Q(x,y) := h^l_Q(x) - h^l_Q(y), \qquad H^m_J(x,y) := h^m_J(x) - h^m_J(y).$$

Obsérvese que $sop\left(H^l_Q\right) \subseteq (Q \times X) \cup (X \times Q)$. Analicemos los dos casos posibles que pueden darse entre Q y J, esto es, que bien sean disjuntos o bien uno esté contenido en el otro. Supongamos en primer lugar que $Q \cap J = \emptyset$. Debido a la forma de los soportes de H^l_Q y H^m_J, el producto $H_Q(x,y)\, H_J(x,y)$ es no nulo si y sólo si, o bien $(x,y) \in Q \times J$, o bien $(x,y) \in J \times Q$. Si consideramos el caso $(x,y) \in Q \times J$ tenemos que

$$\begin{aligned}
B^s_{dy}\left(h^l_Q, h^m_J\right) &= \frac{1}{2}\int_X\int_X \frac{H^l_Q(x,y)\, H^m_J(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dydx \\
&= \int_{x\in Q}\int_{y\in J} \frac{\left(h^l_Q(x) - h^l_Q(y)\right)\left(h^m_J(x) - h^m_J(y)\right)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dydx \\
&= -\int_Q\int_J \frac{h^l_Q(x)\, h^m_J(y)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dydx \\
&= -\frac{1}{\delta(Q,J)^{1+2s}} \int_Q h^l_Q(x)\, dx \int_J h^m_J(y)\, dy = 0,
\end{aligned}$$

donde aquí $\delta(Q,J)$ denota el valor constante que alcanza la distancia δ para cada $x \in Q$ y cada $y \in J$. Análogamente, para el caso $(x,y) \in J \times Q$ se tiene que

$$\int_J\int_Q \frac{\left(h^l_Q(x) - h^l_Q(y)\right)\left(h^m_J(x) - h^m_J(y)\right)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dydx = 0,$$

por lo cual $B^s_{dy}\left(h^l_Q, h^m_J\right) = 0$ para todo $l, m \in \Gamma$ si Q y J son disjuntos.

Analicemos ahora el caso $Q \subsetneq J$, inclusión estricta. En este caso tenemos que

$$sop\left(H^l_Q(x,y)\, H^m_J(x,y)\right) \subseteq (Q \times (X \setminus Q)) \cup ((X \setminus Q) \times Q).$$

En efecto, téngase en cuenta que h_J^m es constante sobre Q, por lo cual $H_J^m(x,y) = 0$ si $(x,y) \in Q \times Q$. Consideremos entonces $(x,y) \in Q \times (X \setminus Q)$ y denotemos por $h_J^m(Q)$ al valor constante que toma $h_J^m(x)$ sobre Q. Entonces

$$\begin{aligned} B_{dy}^s\left(h_Q^l, h_J^m\right) &= \frac{1}{2}\int_{y\in X\setminus Q}\int_{x\in Q} \frac{\left(h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right)\left(h_J^m(x) - h_J^m(y)\right)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy \\ &= \int\limits_{X\setminus Q}\int\limits_{Q} \frac{h_Q^l(x)\left(h_J^m(Q) - h_J^m(y)\right)}{\delta(Q,y)^{1+2s}} dxdy = \\ &= \int\limits_{J\setminus Q} \frac{\left(h_J^m(Q) - h_J^m(y)\right)}{\delta(Q,y)^{1+2s}} dy \int\limits_{Q} h_Q^l(x)\,dx = 0. \end{aligned}$$

La simetría y la finitud de la forma bilineal nos permite deducir lo mismo para el caso $(x,y) \in (X \setminus Q) \times Q$. Para el caso $J \subsetneq Q$ se aplica el mismo razonamiento anterior. Analicemos por último el caso $Q = J$ y $l \neq m$. Teniendo en mente que $sop\left(H_Q^l H_Q^m\right) \subseteq (Q \times X) \cup (X \times Q)$, descompongamos la integral doble de $B_{dy}^s(\cdot,\cdot)$ sobre $Q \times (X \setminus Q)$, $(X \setminus Q) \times Q$ y $Q \times Q$. Por una parte,

$$\begin{aligned} &\int\limits_{y\in X\setminus Q}\int\limits_{x\in Q} \frac{\left(h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right)\left(h_Q^m(x) - h_Q^m(y)\right)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy \\ &= \int_{X\setminus Q}\int_{Q} \frac{h_Q^l(x)\,h_Q^m(x)}{\delta(Q,y)^{1+2s}} dxdy \\ &= \int_{X\setminus Q} \frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2s}} \left(\int_Q h_Q^l(x)\,h_Q^m(x)\,dx\right) dy = 0, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la ortonormalidad de las funciones de Haar. El mismo razonamiento prueba que

$$\int\limits_{y\in Q}\int\limits_{x\in X\setminus Q} \frac{\left(h_Q^l(x) - h_Q^l(y)\right)\left(h_Q^m(x) - h_Q^m(y)\right)}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = 0$$

Para analizar la integral sobre $Q \times Q$ descompongamos Q como unión disjunta de cubos diádicos hijos, esto es $Q = \bigcup_{i=1}^{2^n} C_i$, con $|C_i| = 2^{-n}|Q|$, para cada $i = 1, ..., 2^n$. Recordemos que para cada $x \in C_i$ se tiene que $h_Q^l(x) = \pm |Q|^{-1/2}$, y denotamos por $h_Q^l(C_i)$ a dicho valor constante. Sea $\Lambda = \{1, 2, ..., 2^n\}$ y, para cada $i \in \Lambda$ sea F_i el conjunto de índices

$$F_i = \left\{ j \in \Lambda \ : \ h_Q^l(C_i) = -h_Q^l(C_j) \ y \ h_Q^m(C_i) = -h_Q^m(C_j) \ \right\},$$

entonces, para $(x,y) \in C_i \times C_j$ con $j \notin F_i$ se tiene que $H_Q^l(x,y)\,H_Q^m(x,y) = 0$. Luego, teniendo en cuenta que $\delta(x,y) = |Q|$ para cada $(x,y) \in C_i \times C_j$ con $i \neq j$, tenemos que

$$\begin{aligned}
B_{dy}^s\left(h_Q^l, h_Q^m\right) &= \int_Q \int_Q \frac{H_Q^l(x,y)\,H_Q^m(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2s}}dydx \\
&= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda}\int_{C_i}\int_{C_j}\frac{\left(h_Q^l(x)-h_Q^l(y)\right)\left(h_Q^m(x)-h_Q^m(y)\right)}{\delta(x,y)^{1+2s}}dydx \\
&= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in F_i}\int_{C_j}\int_{C_i}\frac{\left(2h_Q^l(C_i)\right)\left(-2h_Q^m(C_j)\right)}{|Q|^{1+2s}}dxdy \\
&= \frac{1}{|Q|^{1+2s}}\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in F_i}\left(2h_Q^l(C_i)\right)\left(-2h_Q^m(C_j)\right)|C_i|\,|C_j| \\
&= \frac{4}{|Q|^{1+2s}}\left(\frac{|Q|}{2^n}\right)^2\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in F_i}\left(-h_Q^l(C_i)\,h_Q^m(C_j)\right).
\end{aligned}$$

Ya que los valores $+1$ y -1 son equiprobables para cada función de Haar, esto es

$$\left|\left\{x \in Q : sgn\left(h_Q^m(x)\right) = 1\right\}\right| = \left|\left\{x \in Q : sgn\left(h_Q^m(x)\right) = -1\right\}\right| = \frac{|Q|}{2},$$

para cada $m \in \Gamma$, se tiene que $\#F_i = \frac{1}{2}\#\Lambda$, para cada i. Finalmente

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in F_i}\left(-h_Q^l(C_i)\,h_Q^m(C_j)\right) &= \frac{1}{2}\#(\Lambda)\sum_{i\in\Lambda}h_Q^l(C_i)\,h_Q^m(C_i) \\
&= \frac{1}{2}\#(\Lambda)\sum_{i\in\Lambda}\int_{C_i}h_Q^l(x)\,h_Q^m(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\#(\Lambda)\int_Q h_Q^l(x)\,h_Q^m(x)\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ii) Teniendo en cuenta que $1_Q(x) - 1_Q(y) = 0$ sobre $Q \times Q$ y sobre $(X \setminus Q) \times (X \setminus Q)$, el Lema 9.4 y la simetría del integrando, tenemos que

$$\begin{aligned}
B_{dy}^s\left(f, \mathbf{1}_Q\right) &= \frac{1}{2}\int_X\int_X\frac{\left(f(x)-f(y)\right)\left(1_Q(x)-1_Q(y)\right)}{\delta(x,y)^{1+2s}}dydx \\
&= \int_{X\setminus Q}\int_Q\frac{\left(f(x)-f(y)\right)}{\delta(Q,y)^{1+2s}}dxdy \\
&= \int_{X\setminus Q}\frac{\langle f,\mathbf{1}_Q\rangle - |Q|\,f(y)}{\delta(Q,y)^{1+2s}}dy \\
&= \langle f,\mathbf{1}_Q\rangle\int_{X\setminus Q}\frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2s}}dy - |Q|\int_{X\setminus Q}\frac{f(y)}{\delta(Q,y)^{1+2s}}dy \\
&= \frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}}\langle f,\mathbf{1}_Q\rangle - |Q|\int_{X\setminus Q}\frac{f(y)}{\delta(Q,y)^{1+2s}}dy.
\end{aligned}$$

Luego, multiplicando por $\frac{1}{|Q|^{1/2}}$ se sigue el resultado.

iii) Se sigue del caso anterior.

iv) Del inciso anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
B_{dy}^{s}(f,\Psi) &= \sum_{i=1}^{N} a_i B_{dy}^{s}(f,\mathbf{1}_{Q_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(a_i \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_i|^{2s}}\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle - 2|Q_i|\,a_i\int_{\Omega\setminus Q_i}\frac{f(y)}{\delta(Q_i,y)^{1+2s}}dy\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(a_i \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_i|^{2s}}\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle - 2|Q_i|\,a_i\sum_{j\neq i}\frac{\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle}{\delta(Q_i,Q_j)^{1+2s}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_i|^{2s}}\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}2|Q_i|\,a_i\frac{\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle}{\delta(Q_i,Q_j)^{1+2s}} \\
&= \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_i|^{2s}}\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle - \sum_{j=1}^{N}\sum_{i\neq j}2|Q_i|\,a_i\frac{\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle}{\delta(Q_i,Q_j)^{1+2s}} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(a_i\frac{\alpha_{n,s}}{|Q_i|^{2s}} - \sum_{j\neq i}\frac{2|Q_j|\,a_j}{\delta(Q_i,Q_j)^{1+2s}}\right)\langle f,\mathbf{1}_{Q_i}\rangle .
\end{aligned}$$

Por otra parte teniendo en cuenta esta última identidad

$$\begin{aligned}
B_{dy}^{s}(\Psi,\Psi) &= \sum_{i\in\mathcal{N}_N}\sum_{j\in\mathcal{N}_N} a_i a_j B_{dy}^{s}\left(\mathbf{1}_{Q_i},\mathbf{1}_{Q_j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} a_i a_j \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_j|^{2s}}\left\langle \mathbf{1}_{Q_i},\mathbf{1}_{Q_j}\right\rangle - \sum_{i,j\in\mathcal{N}_N\ ;\ i\neq j} 2a_i a_j |Q_j| \int_{X\setminus Q_j}\frac{\mathbf{1}_{Q_i}(y)}{\delta(Q_j,y)^{1+2s}}dy \\
&= \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_i|^{2s}}|Q_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} 2a_i a_j |Q_j| \int_{Q_i}\frac{1}{\delta(Q_j,y)^{1+2s}}dy \\
&= \alpha_{n,s}\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^2}{|Q_i|^{2s}}|Q_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} 2a_i a_j \frac{|Q_j|\,|Q_i|}{\delta(Q_j,Q_i)^{1+2s}} \\
&= \alpha_{n,s}\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^2}{|Q_i|^{2s}}|Q_i| - 4\sum_{1\leq i<j\leq N} a_i a_j \frac{|Q_j|\,|Q_i|}{\delta(Q_j,Q_i)^{1+2s}}.
\end{aligned}$$

v) Observemos que

$$B_{dy}^{s}\left(f,h_Q^l\right) = 2\int_{X\setminus Q}\int_{Q}(\ldots) + \int_{Q}\int_{Q}(\ldots) = I + II.$$

Por una parte

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_{y\in X\setminus Q}\int_{x\in Q}\frac{\left(h_Q^l(x)-h_Q^l(y)\right)(f(x)-f(y))}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy\\
&= 2\int_{y\in X\setminus Q}\int_{x\in Q}\frac{h_Q^l(x)(f(x)-f(y))}{\delta(Q,y)^{1+2s}}dxdy\\
&= 2\int_{X\setminus Q}\left[\frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2s}}\int_Q h_Q^l(x)f(x)\,dx-\frac{f(y)}{\delta(Q,y)^{1+2s}}\int_Q h_Q^l(x)\,dx\right]dy\\
&= 2\int_{X\setminus Q}\frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2s}}\left\langle h_Q^l,f\right\rangle dy = 2\left\langle h_Q^l,f\right\rangle\int_{X\setminus Q}\frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2s}}dy\\
&= \alpha_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}}\left\langle h_Q^l,f\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por otra parte, para el cálculo de

$$II=\int_Q\int_Q\frac{\left(h_Q^l(x)-h_Q^l(y)\right)(f(x)-f(y))}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy$$

descomponemos a Q como unión disjunta de cubos diádicos hijos, $Q=\bigcup_{i=1}^{2^n}C_i$, tal como hicimos en ii), denotando por $h_Q^l(C_i)$ al valor constante de h_Q^l sobre C_i . Recuérdese que, $H_Q^l(x,y)=h_Q^l(x)-h_Q^l(y)$ es nulo para cada $(x,y)\in C_i\times C_j$ con (i,j) tales que $h_Q^l(C_i)=h_Q^l(C_j)$, y que para cada par $(x,y)\in C_i\times C_j$, con $i\neq j$ se tiene que $\delta(x,y)=|Q|$. Luego, si introducimos los conjuntos de índices

$$E_1=\left\{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda\ /\ \text{para todo }\ (x,y)\in C_i\times C_j\ :H_Q^l(x,y)=-\frac{2}{|Q|^{1/2}}\right\}$$

y

$$E_2=\left\{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda\ /\ \text{para todo }\ (x,y)\in C_i\times C_j\ :H_Q^l(x,y)=\frac{2}{|Q|^{1/2}}\right\}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
II &= \sum_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}\int_{C_i}\int_{C_j}\frac{\left(h_Q^l(x)-h_Q^l(y)\right)(f(x)-f(y))}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy\\
&= \sum_{(i,j)\in E_1}2\int_{C_i}\int_{C_j}\frac{(f(x)-f(y))}{|Q|^{1/2}|Q|^{1+2s}}dxdy-\sum_{(i,j)\in E_2}2\int_{C_i}\int_{C_j}\frac{(f(x)-f(y))}{|Q|^{1/2}|Q|^{1+2s}}dxdy
\end{aligned}$$

Obsérvese que E_1 puede escribirse de la forma $E_1=A\times B$, donde A,B son conjuntos disjuntos de índices y tales que $\Lambda=A\cup B$. En efecto, esto se debe a que $(i,j)\in E_1$ si y sólo si

$$sgn\left(h_Q^l(C_i)\right)=-1\ \ \text{y}\ \ sgn\left(h_Q^l(C_j)\right)=1$$

Por su parte, $E_2 = B \times A$. Por otra parte, ya que existen 2^{n-1} cubos C_i tales que $sgn\left(h_Q^l\left(C_i\right)\right) = 1$ es claro que $\#A = \#B = 2^{n-1}$. Por lo tanto

$$II = \frac{2}{|Q|^{3/2+2s}} \left[\sum_{(i,j)\in A\times B} \int_{C_i}\int_{C_j} \left(f\left(x\right) - f\left(y\right)\right) dxdy - \sum_{(i,j)\in B\times A} \int_{C_i}\int_{C_j} \left(f\left(x\right) - f\left(y\right)\right) dxdy \right]$$

$$= \frac{2}{|Q|^{3/2+2s}} \left[\sum_{(i,j)\in A\times B} \left(|C_i| \left\langle f, \mathbf{1}_{C_j}\right\rangle - |C_j| \left\langle f, \chi_{C_i}\right\rangle\right) - \sum_{(i,j)\in B\times A} \left(|C_i| \left\langle f, \mathbf{1}_{C_j}\right\rangle - |C_j| \left\langle f, \mathbf{1}_{C_i}\right\rangle\right) \right]$$

$$= \frac{22^{-n}|Q|}{|Q|^{3/2+2s}} \left(2^{n-1}\sum_{j\in B} \left\langle f, \mathbf{1}_{C_j}\right\rangle - 2^{n-1}\sum_{i\in A} \left\langle f, \mathbf{1}_{C_i}\right\rangle - 2^{n-1}\sum_{j\in A} \left\langle f, \mathbf{1}_{C_j}\right\rangle + 2^{n-1}\sum_{i\in B} \left\langle f, \mathbf{1}_{C_i}\right\rangle \right)$$

$$= \frac{2}{|Q|^{2s}|Q|^{1/2}} \left(\sum_{j\in B} \left\langle f, \mathbf{1}_{C_j}\right\rangle - \sum_{i\in A} \left\langle f, \mathbf{1}_{C_i}\right\rangle \right)$$

$$= \frac{2}{|Q|^{2s}|Q|^{1/2}} \left(\sum_{j\in B} sgn\left(h_Q^l\left(C_j\right)\right) \left\langle f, \mathbf{1}_{C_j}\right\rangle + \sum_{i\in A} sgn\left(h_Q^l\left(C_i\right)\right) \left\langle f, \mathbf{1}_{C_i}\right\rangle \right)$$

$$= \frac{2}{|Q|^{2s}} \left(\sum_{j=1}^{2^n} \frac{sgn\left(h_Q^l\left(C_i\right)\right)}{|Q|^{1/2}} \left\langle f, \mathbf{1}_{C_i}\right\rangle \right) = \frac{2}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h_Q^l\right\rangle_{L^2}.$$

En conclusión

$$B_{dy}^s\left(f, h_Q\right) = I + II = \alpha_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h_Q^l\right\rangle_{L^2} + \frac{2}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h_Q^l\right\rangle_{L^2} = \beta_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h_Q^l\right\rangle_{L^2}$$

vi) Basta aplicar los incisos i), ii) y la linealidad de $B_{dy}^s\left(\cdot,\cdot\right)$. □

4. Análisis espectral de la forma bilineal fraccionaria diádica

En esta sección analizaremos con cierto detalle cómo se comporta el espectro del laplaciano fraccionario diádico. En primer lugar veamos cómo caracterizar el conjunto de autovalores y autofunciones de B_{dy}^s cuando el dominio Ω es simplemente un cubo diádico.

PROPOSICIÓN 9.7. *Sea $Q \in \mathbb{D}^+$ y $0 < s < \frac{1}{2}$. Entonces, el conjunto de autovalores del problema*

$$\begin{cases} B_{dy}^s\left(u, v\right) = \lambda \left\langle u, v\right\rangle_{L^2(Q)}, & \text{para toda } v \in H_0^s\left(Q\right), \\ u \in H_0^s\left(Q\right), & \end{cases}$$

está dado por

$$\mathcal{A} := \left\{\alpha_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}}\right\} \cup \left\{\beta_{n,s}\left(\frac{2^{nk}}{|Q|}\right)^{2s} : k \in \mathbb{N}_0\right\},$$

donde

$$\alpha_{n,s} = \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{2ns} - 1}\right) \text{ y } \beta_{n,s} = \alpha_{n,s} + 1;$$

cuyo conjunto de autofunciones respectivas asociadas está dado por

$$\mathcal{B} := \left\{ h_Q^0 \right\} \cup \left\{ h_C^l : l \in \Gamma, C \in \mathbb{D}_Q \right\},$$

donde $h_Q^0(x) := \frac{1}{|Q|^{1/2}} \mathbf{1}_Q(x)$ *y* $\mathbb{D}_Q = \{C \in \mathbb{D} \,/\, C \subseteq Q\}$. *Además el autoespacio asociado al autovalor* $\alpha_{n,s} \frac{1}{|Q|^{2s}}$ *posee dimensión* 1, *y el autoespacio asociado al autovalor* $\beta_{n,s} \left(\frac{2^{nk}}{|Q|} \right)^{2s}$ *posee dimensión* $2^{nk}(2^n - 1)$.

Demostración. De acuerdo a las formulas (9.7) y (9.8) de la Proposición 9.6 se observa que $\mathcal{A}$ forma parte del espectro de B_{dy}^s. Veamos que no existen más autovalores que los dados por el conjunto $\mathcal{A}$. De acuerdo al Teorema 8.14 existe una base ortonormal $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$de $\left(H_0^s(Q), B_{dy}^s(\cdot, \cdot) \right)$ y una sucesión $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tales que

$$B_{dy}^s(e_k, v) = \lambda_k \langle e_k, v \rangle_{L^2(Q)} \tag{9.9}$$

para toda $v \in H_0^s(Q)$. Recordemos, por el Corolario 9.2, que $\mathcal{B} \subseteq H_0^s(Q)$ es base de $L^2(Q)$,por lo cual para la autofunción e_1 debe existir $h \in \mathcal{B}$, tal que $\langle e_1, h \rangle_{L^2(Q)} \neq 0$. En vista de (9.9) y de las formulas (9.7) y (9.8) tenemos que

$$\lambda_1 \langle e_1, h \rangle_{L^2(Q)} = B_{dy}^s(e_1, h) = \frac{\gamma_{n,s}}{|C|^{2s}} \langle e_1, h \rangle_{L^2(Q)}$$

donde, o bien $\gamma_{n,s} = \alpha_{n,s}$, o bien $\gamma_{n,s} = \beta_{n,s}$, y C designa el soporte de la función h. Luego, como $\langle e_1, h \rangle_{L^2(Q)} \neq 0$, se sigue necesariamente que

$$\lambda_1 = \frac{\gamma_{n,s}}{|C|^{2s}}.$$

Como λ_1 es autovalor mínimo, y hemos visto que $\mathcal{A}$ forma parte del espectro necesariamente se tiene que

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}}$$

Aplicando el mismo razonamiento a los restantes miembros de la sucesión $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ el teorema queda demostrado. □

Un primer corolario de la proposición anterior atañe a lo que, en contexto clásico, se denomina ley de Weyl, la cual determina el comportamiento asintótico de los autovalores del laplaciano. Como detallaremos en breve, a partir del caso analizado por la Proposición 9.7 se observa que la ley de Weyl se verifica sobre un cubo diádico de un modo discreto (logarítmico), pero que, aún con todo, podemos utilizar esta descripción del espectro, que registra la distribución de los autovalores para estimar el comportamiento de la función de conteo de autovalores para dominios generales. Dicha función de conteo la definimos como

$$N(t) := \# \{ n \in \mathbb{N} \,/\, \lambda_n(\Omega) \leq t \}.$$

Esta clase de estimaciones, si bien están dadas para dominios Ω regulares generales, dependerá de dos parámetros bien definidos: por una parte del tamaño del cubo diádico minimal que contiene a Ω y, por otra, dependerá del tamaño maximal de cubo diádico contenido en Ω. Recordemos que la hipótesis de regularidad del dominio Ω indica que, para todo $x \in \Omega$ y todo $r \in (0, R_0]$ se tiene que

$$|\Omega \cap B_\delta(x,r)| \geq \gamma\, |B_\delta(x,r)| \tag{9.10}$$

para alguna constante $\gamma \in (0,1]$, llamada *constante de regularidad de dominio*, independiente de x y r. Sin pérdida de generalidad, de acuerdo a lo observado en la Definición 5.5, podemos suponer que $R_0 = 2$. Obsérvese que $B_\delta(x,r) = \{y \in X : |Q_{x,y}| < r\}$, donde $Q_{x,y}$ denota el cubo diádico minimal que contiene a x, y. Luego, para todo $r \in (1,2]$, $B_\delta(x,r)$ coincide con el único diádico $Q \in (\mathbb{D}^+)^0$ tal que $Q \ni x$. Si consideramos radios cada vez más pequeños, veremos que verificar la condición (9.10) equivale a que

$$\textit{para todo } Q \in \bigcup_{j=0}^{\infty} (\mathbb{D}^+)^j \textit{ tal que } \Omega \cap Q \neq \emptyset \textit{ y } (X \setminus \Omega) \cap Q \neq \emptyset \textit{ se verifica } |\Omega \cap Q| \geq \gamma\, |Q|$$

Cabe destacar que gracias a la comparabilidad (9.2) y a la mayorización $|\cdot|^n \lesssim \delta(\cdot,\cdot)$, de acuerdo al inciso 4) del Lema 5.6 se deduce que todo dominio regular respecto de la métrica diádica debe ser regular respecto de la métrica euclídea.

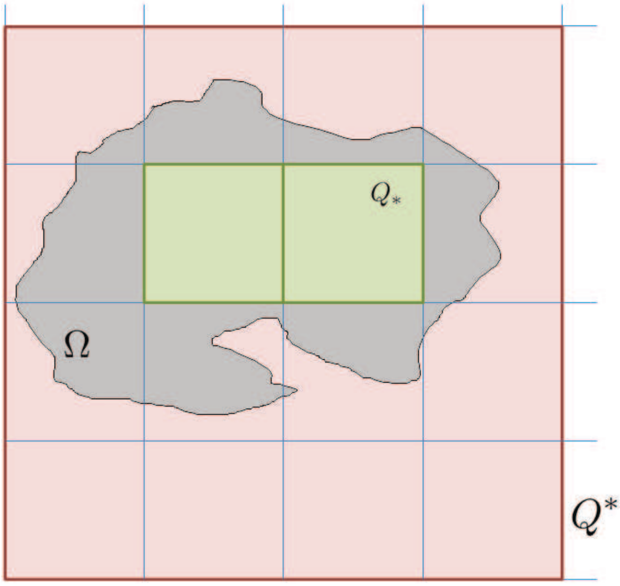
Denotaremos en lo que sigue por Q^* al cubo diádico minimal tal que $\Omega \subseteq Q^*$. La regularidad del dominio Ω nos permite dar una estimación a priori del tamaño de Q^*. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Q^* = B_\delta(x,r)$ para algún $x \in \Omega$ y algún $r \in (0,2]$. Luego

$$\gamma \leq \frac{|\Omega|}{|Q^*|} \leq 1. \tag{9.11}$$

A su vez denotaremos por Q_* a cualquier cubo de medida maximal tal que $Q_* \subseteq \Omega$. Si bien no siempre es único un cubo diádico que satisface dicha condición, claramente sí se verifica que existe una medida mínima, esto es un único $j_0 \in \mathbb{Z}$, tal que, para algún $Q \in \mathbb{D}^+$, $|Q| = (2^{-j_0})^n$ y $Q \subseteq \Omega$. Gracias a estas observaciones podemos introducir una constante de excentricidad de dominio, la cual denotaremos como ϵ, y definimos como

$$\epsilon := \frac{|Q^*|}{|Q_*|}.$$

La siguiente imagen ilustra estos conceptos.



En lo siguiente, entonces, utilizaremos estas dos constantes, la constante de excentricidad ϵ y la constante de regularidad γ, para analizar el comportamiento asintótico de los autovalores de un dominio regular Ω.

PROPOSICIÓN 9.8. *Sea $\Omega \subseteq X$ un dominio acotado regular. Sea $(\lambda_n(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autovalores del problema*

$$\begin{cases} B^s_{dy}(u,v) = \lambda \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}; \quad \forall v \in H^s_0(\Omega), \\ u \in H^s_0(\Omega). \end{cases}$$

Denotemos por $N_\Omega(t)$ a la función de conteo dada por

$$N_\Omega(t) := \#\{n \in \mathbb{N} \ / \ \lambda_n(\Omega) \le t\}.$$

Entonces, existen constantes c_1 y $c_2 > 0$, que dependen de ϵ y γ, tales que

$$c_1 \le \frac{N_\Omega(t)}{t^{1/2s}} \le c_2$$

para todo $t > \lambda_1$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que $\Omega = Q$, con $Q \in \mathbb{D}^+$. Obsérvese que la sucesión de autovalores $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por la Proposición 9.7, puede enumerarse de la siguiente forma:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}}; \quad \lambda_j = \beta_{n,s}\left(\frac{2^{kn}}{|Q|}\right)^{2s}, \quad j = 2^{kn}+1, ..., 2^{(k+1)n}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{9.12}$$

Dado $t > \lambda_1$, sea $k \in \mathbb{N}$ el único natural tal que

$$\zeta_{n,s}\theta^k \le t < \zeta_{n,s}\theta^{k+1}, \tag{9.13}$$

donde denotamos

$$\zeta_{n,s} := \frac{\beta_{n,s}}{|Q|^{2s}} \ ; \quad \theta := 2^{2ns}.$$

Un cálculo sencillo permite ver que

$$N_Q(t) = N_Q\left(\zeta_{n,s}\theta^k\right) = 1 + (2^n - 1)\sum_{j=0}^{k} 2^{nj} = 2^{n(k+1)} = \theta^{\frac{k+1}{2s}}.$$

y comparando con (9.13) tenemos que

$$\left(\frac{t}{\zeta_{n,s}}\right)^{\frac{1}{2s}} < N_Q(t) \leq 2^n \left(\frac{t}{\zeta_{n,s}}\right)^{\frac{1}{2s}};$$

esto es

$$\frac{|Q|}{\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}} < \frac{N_Q(t)}{t^{1/2s}} \leq 2^n \frac{|Q|}{\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}}.$$

Esto demuestra la proposición para el caso $\Omega = Q$, un cubo diádico. Para el caso genérico, observemos que, si $\Omega \subseteq \Omega'$ entonces, de acuerdo al Corolario 8.18,

$$N_{\Omega'}(t) \leq N_{\Omega}(t).$$

Sean Q_*, Q^* cubos diádicos de medida maximal y minimal, respectivamente, tales que $Q_* \subseteq \Omega \subseteq Q^*$. Considerando la desigualdad anterior se obtiene

$$\frac{|Q_*|}{\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}} < \frac{N_{Q_*}(t)}{t^{1/2s}} \leq \frac{N_{\Omega}(t)}{t^{1/2s}} \leq \frac{N_{Q^*}(t)}{t^{1/2s}} \leq 2^n \frac{|Q^*|}{\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}}.$$

Teniendo en cuenta (9.11) tenemos que

$$2^n \frac{|Q^*|}{\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}} \leq 2^n \frac{|\Omega|}{\gamma\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}}.$$

Y haciendo uso de la excentricidad tenemos que

$$\frac{|Q_*|}{\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}} = \frac{|Q^*|}{\epsilon\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}} \geq \frac{|\Omega|}{\epsilon\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}}.$$

Finalmente

$$C_{n,s,\epsilon}|\Omega| \leq \frac{N_{\Omega}(t)}{t^{1/2s}} \leq C_{n,s,\gamma}|\Omega|,$$

donde $C_{n,s,\epsilon} = \frac{1}{\epsilon\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}}$ y $C_{n,s,\gamma} = \frac{2^n}{\gamma\left(\beta_{n,s}\right)^{1/2s}}$. □

La descripción del espectro del problema (P. A.) dado por la Proposición 9.7 también nos es de utilidad para realizar estimaciones puntuales del espectro en dominios regulares arbitrarios.

PROPOSICIÓN 9.9. *Sea* $\Omega \subseteq X$ *un dominio acotado y regular ,* $0 < s < \frac{1}{2}$*. Sean* $Q_*, Q^* \in D$ *cubos diádicos maximal y minimal, respectivamente, tales que* $Q_* \subseteq \Omega \subseteq Q^*$*. Sea* $(\lambda_k(\Omega))_{k\in\mathbb{N}}$ *la sucesión de Autovalores del problema*

$$\begin{cases} B^s_{dy}(e_k, v) = \lambda_k(\Omega)\langle e_k, v\rangle_{L^2(\Omega)}, & \forall v \in H^s_0(\Omega); \\ e_k \in H^s_0(\Omega), \end{cases}.$$

entonces

$$\frac{\alpha_{n,s}}{|Q^*|^{2s}} \leq \lambda_1(\Omega) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_*|^{2s}}$$

y

$$2^{2nsk}\frac{\beta_{n,s}}{|Q^*|^{2s}} \leq \lambda_j(\Omega) \leq 2^{2nsk}\frac{\beta_{n,s}}{|Q_*|^{2s}},$$

para cada $2^{kn}+1 \leq j \leq 2^{(k+1)n}$*,* $k \in \mathbb{N}_0$*.*

DEMOSTRACIÓN. Esto surge inmediatamente del Corolario 8.18 y la Proposición 9.7. En efecto, por una parte

$$\frac{\alpha_{n,s}}{|Q^*|^{2s}} = \lambda_1(Q^*) \leq \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(Q_*) = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_*|^{2s}}$$

y, por otra parte, si $2^{kn}+1 \leq j \leq 2^{(k+1)n}$,

$$2^{2nsk}\frac{\beta_{n,s}}{|Q^*|^{2s}} = \lambda_j(Q^*) \leq \lambda_j(\Omega) \leq \lambda_j(Q_*) = 2^{2nsk}\frac{\beta_{n,s}}{|Q_*|^{2s}}$$

Esto termina la demostración. □

OBSERVACIÓN 9.10. *En lo que respecta al dominio* Ω*, el resultado anterior puede mejorarse teniendo conocimiento adicional acerca de la estructura de dicho dominio. Como veremos más adelante, si, por ejemplo,* Ω *es unión disjunta y finita de* N *cubos diádicos de una misma medida, la cota* $\lambda_j(\Omega) \leq 2^{2nsk}\frac{\beta_{n,s}}{|Q_*|^{2s}}$ *, válida a priori para* $1 \leq j \leq 2^n$*, puede extender a todo* $1 \leq j \leq 2^{Nn}$*, lo cual mejora considerablemente los valores de acotación.*

Por otra parte, es claro que el caso $Q^* = Q_*$ *recupera las cotas dadas por la Proposición 9.9.*

En la siguiente proposición demostramos una desigualdad de tipo Berezin-Li-Yau sobre dominios acotados regulares arbitrarios, utilizando la caracterización de autovalores dada por los cocientes de Rayleigh y haciendo uso de la información del dominio, esto es, de las constantes γ y ϵ. Haremos uso de la Proposición anterior, la cual nos da la información del espectro sobre un cubo y el Corolario 8.18 que establece la monotonía del espectro respecto a la inclusión de dominios.

PROPOSICIÓN 9.11. *Sea $\Omega \subseteq X$ un dominio acotado y regular, con constante de regularidad $\gamma \in (0,1]$ y excentricidad $\epsilon > 0$. Sea $(\lambda_k(\Omega))_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autovalores del problema*

$$\begin{cases} B_{dy}^s(e_k, v) = \lambda_k(\Omega)\langle e_k, v\rangle_{L^2(\Omega)}, & \forall v \in H_0^s(\Omega), \\ e_k \in H_0^s(\Omega). \end{cases}.$$

Entonces existen constantes C_1, C_2 tales que las desigualdades

$$C_1\frac{M^{2s+1}}{|\Omega|^{2s}} \leq \sum_{j=1}^{M}\lambda_j(\Omega) \leq C_2\frac{M^{2s+1}}{|\Omega|^{2s}},$$

valen para todo M,donde C_1 depende de γ, n, s, y C_2 depende de n, s y ϵ.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar demostremos este tipo de desigualdad para $\Omega = Q$ un cubo diádico. A partir de (9.12) podemos ver que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{n,s}\left(\frac{j}{|Q|}\right)^{2s} \leq \lambda_j(Q) \leq \beta_{n,s}\left(\frac{j}{|Q|}\right)^{2s}. \tag{9.14}$$

Haciendo uso de sumas parciales de Riemann puede verse que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{k-1} j^{2s} \leq \int_0^k t^{2s}dt = \frac{k^{2s+1}}{2s+1} \leq \sum_{j=1}^{k} j^{2s}. \tag{9.15}$$

Luego, combinando (9.14) y (9.15) obtenemos

$$c_{n,s}\frac{k^{2s+1}}{|Q|^{2s}} \leq \sum_{j=1}^{k}\lambda_j(Q) \leq C_{n,s}\frac{k^{2s+1}}{|Q|^{2s}}$$

donde

$$c_{n,s} := \frac{\alpha_{n,s}}{2s+1}; \quad C_{n,s} := \frac{2^{2s+1}\beta_{n,s}}{2s+1}$$

Sea ahora $\Omega \subseteq (\mathbb{R}^+)^n$ un dominio regular y sean $Q_*, Q^* \in D$ cubos diádicos maximal y minimal, respectivamente, tales que $Q_* \subseteq \Omega \subseteq Q^*$. Teniendo en cuenta la Proposición (9.9), la regularidad y la excentricidad de Ω, tenemos que

$$\frac{\gamma^{2s}\alpha_{n,s}}{|\Omega|^{2s}} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{|Q^*|^{2s}} \leq \lambda_1(\Omega) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_*|^{2s}} = \epsilon^{2s}\frac{\alpha_{n,s}}{|Q^*|^{2s}} \leq \epsilon^{2s}\frac{\alpha_{n,s}}{|\Omega|^{2s}}$$

y, del mismo modo,

$$\gamma^{2s}\beta_{n,s}\frac{2^{2nsk}}{|\Omega|^{2s}} \leq \lambda_j(\Omega) \leq \epsilon^{2s}\beta_{n,s}\frac{2^{2nsk}}{|\Omega|^{2s}}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^{nk}+1 \leq j \leq 2^{n(k+1)}$. Esto es

$$\gamma^{2s}\alpha_{n,s}\left(\frac{j}{|\Omega|}\right)^{2s} \leq \lambda_j(\Omega) \leq \epsilon^{2s}\beta_{n,s}\left(\frac{j}{|\Omega|}\right)^{2s}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Finalmente, haciendo uso de la desigualdad (9.15) se deduce que

$$C_1\frac{k^{2s+1}}{|\Omega|^{2s}} \leq \sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Omega) \leq C_2\frac{k^{2s+1}}{|\Omega|^{2s}}$$

para

$$C_1 := \frac{\gamma^{2s}\alpha_{n,s}}{2s+1};$$

$$C_2 := \epsilon^{2s}\frac{2^{2s+1}\beta_{n,s}}{2s+1}$$

Esto termina la demostración. □

En las siguientes proposiciones describimos de modo preciso el espectro de la forma bilineal B^s sobre uniones finitas de cubos diádicos. Ya que en un principio no poseemos una caraterización de los dominios regulares diádicos, analizaremos el caso que Ω sea una unión finita de cubos diádicos. Obsérvese que esta clase de dominios siempre puede escribirse de la forma $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ de modo tal que cada cubo esté elegido de modo maximal. En efecto, basta considerar el nivel $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $Q^* \in (\mathbb{D}^+)^{j_0}$, y luego, comenzamos por indexar los cubos $Q \in (\mathbb{D}^+)^{j_0+1}$ tales que $Q \subseteq \Omega$, si así existieran. Si la unión de estos cubos cubre Ω, el proceso se da por terminado. Si así no fuera, se indexan los cubos del nivel $(\mathbb{D}^+)^{j_0+2}$ tales que $Q \subseteq \Omega$, y así sucesivamente, hasta lograr cubrir todo el dominio.

PROPOSICIÓN 9.12. *Sea $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, unión finita de cubos diádicos disjuntos de $\mathbb{D}^+$, con $|Q_1| \geq |Q_2| \geq ... \geq |Q_N|$, elegidos de modo maximal. Sea $0 < s < \frac{1}{2}$. Entonces, el conjunto de autovalores del problema*

$$\begin{cases} B^s_{dy}(u,v) = \lambda \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}, & \forall v \in H^s_0(\Omega), \\ u \in H^s_0(\Omega), \end{cases}$$

está dado por

$$\mathcal{A}_v := \sigma(A_N) \cup \left\{ 2^{2nks}\frac{\beta_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} : k \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

donde $\sigma(A_N)$ denota el conjunto de autovalores de la matriz de Gram A_N dada por

$$A_N = \left[B^s_{dy}\left(h^0_{Q_i}, h^0_{Q_j}\right)\right]_{1\leq i,j\leq N}.$$

Por su parte el conjunto de autofunciones está dado por

$$\mathcal{A}_f := \left\{e^0_{Q_i}\right\}_{1\leq i\leq N} \cup \left\{h^l_C : l \in \Gamma, C \in \mathbb{D}_\Omega\right\},$$

donde $\mathbb{D}_\Omega := \{Q \in \mathbb{D} \,/\, Q \subseteq \Omega\}$,

$$e^0_{Q_i} := \sum_{j=1}^{N} x^{(i)}_j h^0_{Q_j} \tag{9.16}$$

y $\{z_1, ..., z_N\}$, con $z_i = \left(x^{(i)}_1, ..., x^{(i)}_N\right)$, $i = 1, ..., N$; denota un sistema de autovectores de la matriz de Gram A_N.

DEMOSTRACIÓN. Observemos en primer lugar que A_N es la matriz de Gram de un sistema de N funciones linealmente independientes. Por lo tanto

$$\langle A_N x, x\rangle > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Como A_N es simétrica y positiva tenemos entonces que $\sigma(A_N) \subseteq (0, +\infty)$. Denotemos por $\{\lambda_j(A_N)\}_{1\leq j\leq N}$ el conjunto de autovalores indexado de forma creciente y por $\{z_1, ..., z_N\}$ un conjunto ortonormal de autovectores de A_N del modo descrito en la hipótesis del Teorema. Obsérvese que, de acuerdo al inciso iv) de la Proposición 9.6 es claro que $e^0_{Q_i} \in H^s_0(\Omega)$ para cada $i = 1, ..., N$. Veamos entonces que las funciones $e^0_{Q_i}$ dadas por (9.16) son autofunciones asociadas a B^s_{dy}. Denotemos con S al espacio

$$S := gen\left\langle h^0_{Q_i}\right\rangle_{1\leq i\leq N}.$$

Observemos, en primer lugar, que si $\psi, \varphi \in S$ son tales que

$$\psi = \sum_{j=1}^N x_j h^0_{Q_j};\ \varphi = \sum_{j=1}^N y_j h^0_{Q_j},$$

entonces

$$B^s_{dy}(\psi, \varphi) = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N x_i B^s_{dy}\left(h^0_{Q_i}, h^0_{Q_j}\right) y_j = \langle x, A_N y\rangle = \langle y, A_N x\rangle. \tag{9.17}$$

Por otra parte, recordemos que de acuerdo al Corolario (9.2) el conjunto $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i$, donde

$$\mathcal{B}_i := \left\{h^0_{Q_i}\right\} \cup \left\{h^l_C : l \in \Gamma, C \in \mathbb{D}_{Q_i}\right\}$$

forma una base ortonormal en $(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$. Más aún, teniendo en cuenta la Proposición 9.7 $\mathcal{B}$ forma una base ortogonal de autofunciones en $\left(H^s_0(Q_i), B^s_{dy}(\cdot,\cdot)\right)$. Sea $v \in H^s_0(\Omega)$ arbitraria. Descompogamos $H^s_0(\Omega) = S \oplus S^\perp$, $v = v_S + v_{S^\perp}$, donde

$$v_S = \sum_{j=1}^N y_j h^0_{Q_j}.$$

Como $e^0_{Q_i} \in S$ tendremos que

$$\begin{aligned} B^s_{dy}\left(e^0_{Q_i}, v\right) &= B^s_{dy}\left(e^0_{Q_i}, v_S\right) = \langle z_i, A_N y\rangle = \langle A_N z_i, y\rangle \\ &= \lambda_i(A_N)\langle z_i, y\rangle = \lambda_i(A_N)\left\langle e^0_{Q_i}, v_S\right\rangle_{L^2} = \lambda_i(A_N)\left\langle e^0_{Q_i}, v\right\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

esto es, $e^0_{Q_i}$ es autofunción de B^s_{dy} asociada al autovalor $\lambda_i(A_N)$. En segundo lugar, de acuerdo al inciso v) de la Proposición (9.6) tenemos que cada función de Haar h^l_C, con $l \in \Gamma$ y $C \in D_\Omega$, es autofunción de B^s_{dy} asociada al autovalor $\frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}}$. Veamos finalmente que la lista es exhaustiva. De acuerdo al Teorema (8.14), existe una base ortogonal $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\left(H^s_0(\Omega), B^s_{dy}(\cdot,\cdot)\right)$ formada por autofunciones de la forma bilineal B^s_{dy}. Veamos que la primera autofunción pertenece al generado lineal S. Aplicando un razonamiento similar, como $\mathcal{B}$ es base de $\left(H_0^s(\Omega), B_{dy}^s(\cdot,\cdot)\right)$, tenemos que para alguna función $h \in \mathcal{B}$, $\langle e_1, h\rangle \neq 0$. Es claro que dicha función h no puede ser de la forma $h = h_C^l$, para alguna función de Haar, con $l \in \Gamma$ y $C \in \mathbb{D}_\Omega$. Si así fuera tendríamos que

$$\lambda_1 \left\langle e_1, h_C^l\right\rangle_{L^2} = B_{dy}^s\left(e_1, h_C^l\right) = \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} \left\langle e_1, h_C^l\right\rangle_{L^2}, \tag{9.18}$$

debido a que e_1 es autofunción y, por otra parte, a la fórmula (9.8). Luego la igualdad (9.18) implica que

$$\lambda_1 = \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}},$$

pero esto contradice la cota de la Proposición (9.9) ya que, si $Q_* = Q_1$ denota uno de los cubos de Ω de mayor medida, tenemos que

$$\lambda_1 \leq \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} < \frac{\beta_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} \leq \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} = \lambda_1.$$

Esta contradicción muestra que para todo $C \in D_\Omega$ y para todo $l \in \Gamma$, $\left\langle e_1, h_C^l\right\rangle = 0$, esto es, $e_1 \in S$. Sea $w = (w_1, w_2, ..., w_N)$ el vector de $\mathbb{R}^N$ cuyas coordenadas son los coeficientes del desarrollo de e_1 en la base$\left\{h_{Q_i}^0\right\}_{1\leq i\leq N}$, esto es

$$e_1 = \sum_{j=1}^{N} w_j h_{Q_j}^0.$$

Obsérvese que la ortonormalidad de $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\Omega)$ implica que $\langle w, w\rangle = \langle e_1, e_1\rangle_{L^2} = 1$. Como vimos

$$B_{dy}^s(e_1, e_1) = \langle w, A_N w\rangle \tag{9.19}$$

Veamos que este vector w coincide con un autovector de la matriz A_N. De acuerdo a la caraterización de λ_1 del Teorema (8.14) sabemos que

$$\lambda_1 = B_{dy}^s(e_1, e_1) = \underset{\substack{u\in H_0^s(\Omega)\\ u\neq 0}}{mín} \frac{B_{dy}^s(u,u)}{\langle u, u\rangle_{L^2}}$$

Dado $y = (y_1, ..., y_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, definamos

$$\psi := \sum_{j=1}^{N} y_j h_{Q_j}^0$$

Como $\psi \in S \subseteq H_0^s(\Omega)$ tendremos que

$$\lambda_1 \leq \frac{B_{dy}^s(\psi,\psi)}{\langle \psi, \psi\rangle_{L^2}} = \frac{\langle y, A_N y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

Pero de acuerdo a (9.19)

$$\lambda_1 = B_{dy}^s(e_1, e_1) = \langle w, A_N w\rangle = \frac{\langle w, A_N w\rangle}{\langle w, w\rangle} \leq \frac{\langle y, A_N y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

Como y es arbitrario, tenemos que

$$\frac{\langle w, A_N w\rangle}{\langle w, w\rangle} = \underset{y\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}}{mín} \frac{\langle y, A_N y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

Y de acuerdo al Teorema 8.10 se sigue que w es autovector de A_N asociado al autovalor mínimo, esto es $w = z_1$, donde

$$A_N z_1 = \lambda_1 (A_N) z_1 = \lambda_1 z_1$$

Esto demuestra que el primer autovalor del espectro de la forma bilineal siempre coincide con el autovalor más pequeño de la matriz de Gram A_N. Apliquemos de modo inductivo este razonamiento. Para cada una de las autofunciones e_k, $k \geq 2$, pueden ocurrir las siguientes alternativas: o bien $\left\langle e_k, h_C^l\right\rangle \neq 0$ para algún $C \in D_\Omega$ y algún $l \in \Gamma$, o bien $\left\langle e_k, h_C^l\right\rangle = 0$ para todo $C \in D_\Omega$ y todo $l \in \Gamma$. Si se da la primera alternativa para la segunda autofunción e_2 entonces

$$\lambda_2 = \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}}$$

y podemos considerar h_C^l como segunda autofunción. Supongamos que esto se da para $e_2, e_3, ..., e_{k-1}$y que para la autofunción e_k se da el segundo caso, esto es $e_k \in S$. Entonces

$$e_k = \sum_{j=1}^{N} x_j h_{Q_j}^0$$

con $\langle x, x\rangle = \langle e_k, e_k\rangle_{L^2} = 1$. Más aún, como $\langle e_1, e_k\rangle_{L^2} = 0$ tenemos que $\langle x, z_1\rangle = 0$. Por otra parte

$$\lambda_k = B_{dy}^s (e_k, e_k) = \underset{\substack{u\in M_{k-1}\\ u\neq 0}}{mín} \frac{B_{dy}^s (u, u)}{\langle u, u\rangle_{L^2_{(\Omega)}}}$$

donde $M_{k-1} = \left\{u \in H_0^s (\Omega) \ / \ B_{dy}^s (u, e_j) = 0,\ j = 1, ..., k-1\right\}$. Es claro que $e_k \in M_{k-1}$. Más aún, si definimos

$$\varphi := \sum_{j=1}^{N} y_j h_{Q_j}^0$$

con $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, tal que $\langle z_1, y\rangle = 0$ entonces, como las funciones $e_2, e_3, ..., e_{k-1}$ son de la forma $h_{C_2}^{l_2}, h_{C_3}^{l_3}, ..., h_{C_{k-1}}^{l_{k-1}}$, con $l_j \in \Gamma$ y $C_j \in D_\Omega$, se tiene que $\varphi \in M_{n-1}$ ya que

$$B_{dy}^s (\varphi, e_1) = \langle y, z_1\rangle = 0$$

y $B_{dy}^s (\varphi, e_j) = 0$ para $j = 2, ..., k-1$, por ser dichas e_j funciones de Haar. Por lo tanto

$$\lambda_k = B_{dy}^s (e_k, e_k) \leq \frac{B_{dy}^s (\varphi, \varphi)}{\langle \varphi, \varphi\rangle_{L^2_{(\Omega)}}}.$$

Esta desigualdad implica que

$$\lambda_k = \frac{\langle x, A_N x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \frac{\langle y, A_N y\rangle}{\langle y, y\rangle},$$

por lo cual el vector x minimiza los cocientes de Rayleigh $\frac{\langle y, A_N y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ sobre todos los $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ con $\langle z_1, y\rangle = 0$. En vista del Teorema 8.10 x es autovector de A_N asociado a $\lambda_2(A_N)$, esto es

$$\lambda_k = \lambda_2(A_N).$$

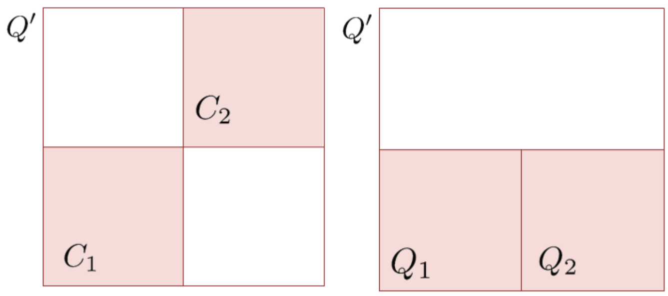
Del modo inductivo en el cual se eligen las autofunciones se tiene que deben existir N autofunciones $e_{k_1}, ..., e_{k_N} \in S$, mutuamente ortogonales, de la forma

$$e_{k_i} = \sum_{j=1}^{N} x_j^{(i)} h_{Q_j}^0$$

donde $z_i = \left(x_1^{(i)}, ..., x_N^{(i)}\right)$ es autovector de A_N asociado al autovalor $\lambda_i(A_N)$. Esto termina la demostración del Teorema $\square$

OBSERVACIÓN 9.13. *La multiplicidad de los autovalores de la forma $\beta_{n,s}\left(\frac{2^{nk}}{|Q_1|}\right)^{2s}$ depende de la cantidad de cubos $C \in D_\Omega$ con medida $|C| = 2^{-nk}|Q_1|$. Si existen M cubos de tal medida se tendrán $(2^n - 1) M$ autofunciones linealmente independientes asociadas a dicho autovalor.*

OBSERVACIÓN 9.14. *Sean $\{Q_1, ..., Q_N\}, \{C_1, ..., C_N\};\ 1 < N < 2^n$, hijos inmediatos de un cubo $Q' \in \mathbb{D}$ entonces los dominios $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ y $\Omega' = \bigcup_{i=1}^{N} C_i$ son isoespectrales. Esto es, el espectro del laplaciano fraccionario diádico no distingue entre dos dominios distintos que estén formados por una misma cantidad de hijos inmediatos de un cubo dado. La siguiente imagen ilustra un ejemplo de esta clase de dominios isospectrales.*



Cabe destacar a su vez que en la descripción del conjunto $\mathcal{A}_v$ de Autovalores, los subconjuntos $\sigma(A_N)$ y $\left\{\frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} : C \in \mathbb{D}_\Omega\right\}$ no necesariamente se dan de un modo ordenado, como indicaremos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 9.15. *Analicemos el caso $\Omega = Q_1 \cup Q_2$, unión disjunta, donde $|Q_1| \geq |Q_2|$. Obsérvese que*

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} & -\frac{|Q_1|^{1/2}|Q_2|^{1/2}}{\delta(Q_1,Q_2)^{1+2s}} \\ -\frac{|Q_1|^{1/2}|Q_2|^{1/2}}{\delta(Q_1,Q_2)^{1+2s}} & \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_2|^{2s}} \end{bmatrix}$$

donde recordemos que $\delta(Q_1, Q_2) = \inf\{\delta(x, y) \ / \ x \in Q_1, y \in Q_2\}$*; por lo cual se tiene que los autovalores* $\lambda_1(A_2), \lambda_2(A_2)$ *de dicha matriz son*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} + \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_2|^{2s}}\right) \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} - \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_2|^{2s}}\right)^2 + 8\frac{|Q_1||Q_2|}{\delta(Q_1, Q_2)^{2+4s}}} \tag{9.20}$$

Se observa que para el caso $|Q_1| = |Q_2|$*, se tiene*

$$\lambda_j(A_2) = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_j|^{2s}} \mp \frac{|Q_j|}{\delta(Q_1, Q_2)^{1+2s}},$$

para $j = 1, 2$*; y como* $|Q_2| < \delta(Q_1, Q_2)$

$$\lambda_2(A_2) < \frac{\beta_{n,s}}{|Q_2|^{2s}} = \frac{\beta_{n,s}}{|Q_1|^{2s}}$$

esto es, el autovalor $\lambda_2(A_2)$ *coincide en este caso con* λ_2 *el segundo autovalor de la forma bilineal* B^s_{dy}*. En resumen, el espectro de* B^s_{dy} *sobre* $\Omega = Q_1 \cup Q_2$ *y* $|Q_1| = |Q_2|$ *está dado por*

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} - \frac{|Q_1|}{\delta(Q_1, Q_2)^{1+2s}}; \ \lambda_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_2|^{2s}} + \frac{|Q_2|}{\delta(Q_1, Q_2)^{1+2s}}; \ \lambda_j = 2^{2kns}\frac{\beta_{n,s}}{|Q_1|^{2s}},$$

con multiplicidad $2^{kn+1}(2^n - 1)$ *para cada* $k \in \mathbb{N}_0$ *y* $2^{kn} + 1 \leq j \leq 2^{(k+1)n}$*.*

Cabe observar que si elegimos $\tau \in \mathbb{N}$ *tal que* $\tau s \geq 1$ *y consideramos en el ejemplo precedente con la relación de medida* $|Q_1| = 2^{n\tau}|Q_2|$*, se puede ver que*

$$\frac{1}{2^{2ns\tau}} < \frac{2^n - 1}{2^{n(2s+1)} - 1}$$

por lo cual, de acuerdo a la Proposición 9.9 y a la descripción de los autovalores (9.20) de A_2*,*

$$\lambda_2 \leq \frac{\beta_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_1|^{2s}}\left(\frac{2^{n(2s+1)} - 1}{2^n - 1}\right) < \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_1|^{2s}}2^{2ns\tau} < \lambda_2(A_2)$$

Aquí se nota que los autovalores de la matriz A_N *no necesariamente son más pequeños que los autovalores de la forma* $\left\{2^{2nks}\frac{\beta_{n,s}}{|Q_1|^{2s}} : k \in \mathbb{N}_0\right\}$*.*

Ejemplos más complejos pueden analizarse haciendo uso del siguiente lema el cual nos permitirá calcular los autovalores de la matriz A_N.

LEMA 9.16. *Sea* $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ *la matriz* $N \times N$ *dada por*

$$a_{ij} := \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{9.21}$$

de modo tal que $a \neq b$*. Entonces el conjunto de autovalores de* A *está dado por*

$$\sigma(A) := \{a - b, a + b(N-1)\}$$

con $a + b(N-1)$ *autovalor simple si* $b \neq 0$*.*

Como siguiente ejemplo consideramos Ω como una cantidad finita de N cubos hijos de uno dado.

EJEMPLO 9.17. *Sea $Q^* \in \mathbb{D}$ y considérese $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, donde $1 \leq N \leq 2^n$, $|Q_i| = 2^{-n}|Q^*|$ y $\Omega \subseteq Q^*$, esto es, cada Q_i es hijo inmediato de Q^*. Obsérvese que para cada par $i \neq j$ la distancia entre los cubos Q_i, Q_j es constante y está dada por*

$$\delta(Q_i, Q_j) = |Q^*|.$$

Denotemos $\theta := 2^{-n}|Q^*|$. La matriz de Gram A_N es de la forma (9.21) con valores

$$a = \frac{\alpha_{n,s}}{\theta^{2s}};\ b = -2\frac{1}{2^{n(1+2s)}}\frac{1}{\theta^{2s}}.$$

De acuerdo al lema anterior tendremos entonces que el espectro de B^s_{dy} está ado por

$$\mathcal{A}_v^{(N)} := \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}\frac{1}{2^{2sn}}\left(1 - \frac{N\left(2^{2sn}-1\right)}{2^{(2s+1)n}-1}\right), \frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}\frac{1}{2^{2sn}}\right\} \cup \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}2^{2snk} : k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Cabe realizar una observación de interés. Los casos $N = 1$ y $N = 2^n$ recuperan lo desarrollado en la Proposición (9.7). En efecto

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_v^{(1)} &= \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}\left(\frac{2^n-1}{2^{(2s+1)n}-1}\right)\right\} \cup \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}2^{2snk} : k \in \mathbb{N}_0\right\} \\
&= \left\{\frac{\alpha_{n,s}}{\theta^{2s}}\right\} \cup \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}2^{2snk} : k \in \mathbb{N}_0\right\},
\end{aligned}$$

y, por otra parte, para el caso $N = 2^n$, tendremos que $\Omega = Q^*$, por lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_v^{(2^n)} &= \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}\frac{1}{2^{2sn}}\left(\frac{2^n-1}{2^{(2s+1)n}-1}\right), \frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}\frac{1}{2^{2sn}}\right\} \cup \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}2^{2snk} : k \in \mathbb{N}_0\right\} \\
&= \left\{\frac{\alpha_{n,s}}{\theta^{2s}}\frac{1}{2^{2sn}}, \frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}\frac{1}{2^{2sn}}\right\} \cup \left\{\frac{\beta_{n,s}}{\theta^{2s}}2^{2snk} : k \in \mathbb{N}_0\right\} \\
&= \left\{\frac{\alpha_{n,s}}{|Q^*|^{2s}}, \frac{\beta_{n,s}}{|Q^*|^{2s}}\right\} \cup \left\{\frac{\beta_{n,s}}{|Q^*|^{2s}}2^{2snk} : k \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \left\{\frac{\alpha_{n,s}}{|Q^*|^{2s}}\right\} \cup \left\{\frac{\beta_{n,s}}{|Q^*|^{2s}}2^{2snk} : k \in \mathbb{N}_0\right\}.
\end{aligned}$$

5. Espacios de Sobolev en contexto diádico

En esta sección mostraremos cómo utilizar el espectro del laplaciano fraccionario diádico estudiado para caracterizar los espacios de Sobolev. Recordemos que, en este contexto el espacio de Sobolev $H^s(X)$, para $X = (\mathbb{R}^+)^n$ y $s > 0$, el cual definimos en el Capítulo 4, está dado por

$$H^s(X) := \left\{f \in L^2(X) \ / \ [f]_{H^s(X)} < \infty\right\},$$

donde

$$[f]_{H^s(X)} := \left(\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{2s+1}} dxdy \right)^{1/2},$$

y está dotado de la norma

$$\|f\|_{H^s(X)} := \|f\|_{L^2(X)} + [f]_{H^s(X)}.$$

Recordemos que en este caso la forma de energía que define la forma bilineal B^s_{dy} coincide con la seminorma $[f]^2_{H^s(X)}$. Esto es,

$$\mathcal{E}^s_{dy}(f) := B^s_{dy}(f,f) = \int_X \int_X \frac{(f(x) - f(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = [f]^2_{H^s(X)}.$$

En primer lugar, veamos una consecuencia trivial del Teorema 8.14 aplicado a este contexto.

LEMA 9.18. *Sea $Q \in \mathbb{D}^+$ y $f \in H^s_0(Q)$, entonces*

$$\mathcal{E}^s_{dy}(f) = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}} \left| \langle f, h^0_Q \rangle_{L^2} \right|^2 + \sum_{C \in \mathbb{D}_Q, l \in \Gamma} \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} \left| \langle f, h^l_C \rangle_{L^2} \right|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo al Teorema 8.14 del Capítulo 8 tenemos que $\|f\|_{\mathcal{E}} := \mathcal{E}^s_{dy}(f)$ define una norma completa sobre espacio

$$H^s_0(Q) := \left\{ f \in L^2(X) : \mathcal{E}^s_{dy}(f) < \infty \text{ y } f = 0 \text{ en } X \setminus Q \right\},$$

la cual es equivalente a la norma

$$\|f\|_{H^s(X)} = \|f\|_{L^2(X)} + \mathcal{E}^s_{dy}(f).$$

Más aún, el sistema de funciones $\mathcal{B}_Q := \left\{h^0_Q\right\} \cup \left\{h^l_C : l \in \Gamma,\ C \in \mathbb{D}, C \subseteq Q\right\}$, donde $h^0_Q(x) = \frac{1}{|Q|^{1/2}} 1_Q(x)$ y h^l_C representa una de las $2^n - 1$ funciones de Haar con soporte C, es base ortogonal de $H^s_0(Q)$. Por lo tanto, debido a la identidad de Parseval, dada cualquier $\varphi \in H^s_0(Q)$

$$\mathcal{E}^s_{dy}(\varphi) = \int_X \int_X \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = B[\varphi,\varphi] = \sum_{h \in \mathcal{B}_Q} \frac{1}{\|h\|^2_{\mathcal{E}}} (B[\varphi,h])^2 \tag{9.22}$$

donde aquí, el factor $\frac{1}{\|h\|^2_{\mathcal{E}}}$ se debe a la normalización de h respecto de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. Teniendo en cuenta la propiedad v) de la Proposición 9.6 se sigue que

$$\|h\|^2_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^s_{dy}(h) = \lambda_h, \tag{9.23}$$

donde λ_h es el autovalor asociado a $h \in \mathcal{B}_Q$ respecto de B^s_{dy}, que, como vimos, deben ser de la forma

$$\frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}},\ \beta_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}},\ \beta_{n,s}\left(\frac{2^n}{|Q|}\right)^{2s},\ \beta_{n,s}\left(\frac{2^{2n}}{|Q|}\right)^{2s},\ \ldots,\ \beta_{n,s}\left(\frac{2^{kn}}{|Q|}\right)^{2s},\ \ldots,$$

esto es, $\frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}}$ es el autovalor asociado a h_Q^0 y $\frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}}$ el autovalor asociado a h_C^l para cada $l \in \Gamma$ y cada diádico $C \subseteq Q$. Por otra parte

$$B_{dy}^s(\varphi, h) = \lambda_h \langle \varphi, h \rangle_{L^2}, \tag{9.24}$$

por lo que, reemplazando (9.23) y (9.24) en (9.22) obtenemos

$$\mathcal{E}_{dy}^s(\varphi) = \sum_{h \in \mathcal{B}_Q} \lambda_h |\langle \varphi, h \rangle_{L^2}|^2, \tag{9.25}$$

o bien

$$\mathcal{E}_{dy}^s(\varphi) = \frac{\alpha_{n,s}}{|Q|^{2s}} \left|\left\langle \varphi, h_Q^0 \right\rangle_{L^2}\right|^2 + \sum_{C \in \mathbb{D}_Q, l \in \Gamma} \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} \left|\left\langle \varphi, h_C^l \right\rangle_{L^2}\right|^2,$$

como queríamos demostrar. □

El siguiente teorema establece una caracterización de H^s vía el espectro asociado a B_{dy}^s.

TEOREMA 9.19. *Sea $0 < s < \frac{1}{2}$. Entonces, son válidas las siguientes afirmaciones:*

i) para cada $f \in H^s(X)$ se tiene que

$$\mathcal{E}_{dy}^s(f) = \beta_{n,s} \sum_{Q \in \mathbb{D}^+, l \in \Gamma} \frac{\left|\left\langle f, h_Q^l \right\rangle\right|^2}{|Q|^{2s}};$$

ii) si $D = \{(x,y) \in X \times X \,/\, \delta(x,y) < 2\} = \{(x,y) \in X \times X \,/\, \delta(x,y) \leq 1\}$. Para cada $f \in H^s(X)$ se tiene que

$$\int\int_D \frac{(f(x) - f(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = \beta_{n,s} \sum_{\substack{C \in \mathbb{D}^+, l \in \Gamma \\ |C| \leq 1}} \frac{\left|\left\langle f, h_C^l \right\rangle\right|^2}{|C|^{2s}} + b_{n,s} \sum_{C \in (\mathbb{D}^+)^0} \left|\int_C f(x)\, dx\right|^2 - a_{n,s} \|f\|_{L^2(X)}^2;$$

donde

$$a_{n,s} := \frac{2^n - 1}{2^{n-1}(2^{2ns} - 1)} \text{ y } b_{n,s} := \frac{(2^n - 1)}{2^{2s+1} - 1} \beta_{n,s}$$

iii) en particular, si $\mathbb{D}_1 := \{C \in \mathbb{D}^+ \,/\, |C| \leq 1\}$ y $f \in gen\left\langle h_C^l : C \in \mathbb{D}_1, l \in \Gamma \right\rangle$ entonces

$$\int\int_D \frac{(f(x) - f(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = \sum_{C \in \mathbb{D}_1, l \in \Gamma} \left|\left\langle f, h_C^l \right\rangle\right|^2 \left(\frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} - a_{n,s}\right).$$

DEMOSTRACIÓN. i) Consideremos la familia de intervalos diádicos $Q_N = [0, 2^N)^n$, $N \in \mathbb{N}_0$, y dada $f \in H^s(X)$, definamos las truncaciones $f_N := 1_{Q_N} f$. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{dy}^s(f_N) &= \int\int_{X \times X} \frac{(f_N(x) - f_N(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy \\
&= 2 \int_{Q_N} \int_{X \setminus Q_N} \frac{(f(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy + \int\int_{X \times X} \mathbf{1}_{Q_N \times Q_N}(x,y) \frac{(f(x) - f(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy \\
&= A_N + B_N.
\end{aligned}$$

Por una parte, de acuerdo al Lema 9.4 tenemos que

$$A_N = 2\int_{Q_N} f(y)^2 \int_{X\setminus Q_N} \frac{1}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = \frac{1}{2^{2s}-1}\frac{1}{|Q_N|^{2s}} \|f\|^2_{L^2(Q_N)} \leq C_s \frac{1}{|Q_N|^{2s}} \|f\|^2_{L^2(X)},$$

por lo cual $A_N \to 0$ para $N \to \infty$. Por otra parte, el teorema de convergencia monótona nos permite deducir que

$$\int\int_{X\times X} \frac{(f(x)-f(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = \lim_{N\to\infty} (A_N + B_N) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{E}^s_{dy}(f_N).$$

Luego, haciendo uso de (9.25) en el Lema 9.18 tendremos que

$$\int\int_{X\times X} \frac{(f(x)-f(y))^2}{\delta(x,y)^{1+2s}} dxdy = \lim_{N\to\infty} \sum_{h\in\mathcal{B}_{Q_N}} \lambda_h |\langle f_N, h\rangle_{L^2}|^2.$$

Para finalizar veamos que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{h\in\mathcal{B}_{Q_N}} \lambda_h |\langle f_N, h\rangle_{L^2}|^2 = \sum_{h\in\mathcal{H}} \lambda_h |\langle f, h\rangle_{L^2}|^2.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \sum_{h\in\mathcal{B}_{Q_N}} \lambda_h |\langle f_N, h\rangle_{L^2}|^2 &= \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_N|^{2s}} \left|\left\langle f_N, h^0_{Q_N}\right\rangle_{L^2}\right|^2 + \sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^+\\ C\subseteq Q_N}} \sum_{l\in\Gamma} \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} \left|\left\langle f_N, h^l_C\right\rangle_{L^2}\right|^2 \\ &= a_N + b_N. \end{aligned}$$

Veamos que $\lim_{N\to\infty} a_N = 0$. En efecto, aplicando la desigualdad de Schwarz,

$$a_N \leq \frac{\alpha_{n,s}}{|Q_N|^{2s}} \|f\|^2_{L^2(X)}$$

por lo cual $a_N \searrow 0$ debido a que $|Q_N| \nearrow +\infty$. Por último, teniendo en cuenta que

$$b_N = \sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^+\\ C\subseteq Q_N}} \sum_{l\in\Gamma} \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} \left|\left\langle f_N, h^l_C\right\rangle_{L^2}\right|^2 = \sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^+\\ C\subseteq Q_N}} \sum_{l\in\Gamma} \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} |\langle f, h_C\rangle_{L^2}|^2,$$

se sigue de inmediato que la sucesión $(b_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es creciente. Teniendo en cuenta que cada suma finita $\sum_{h\in\mathcal{F}} \lambda_h |\langle f, h\rangle_{L^2}|^2$ está acotada por b_N para N suficientemente grande, concluimos que

$$\lim_{N\to\infty} b_N = \sum_{C\in\mathbb{D}^+} \sum_{l\in\Gamma} \frac{\beta_{n,s}}{|C|^{2s}} |\langle f, h_C\rangle_{L^2}|^2$$

ii) Dada $f\in H^{s}(X)$ y $Q\in\mathbb{D}^{+}$, obsérvese que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{dy}^{s}(\mathbf{1}_{Q}f) &= 2\int_{Q}|f(x)|^{2}\int_{X\setminus Q}\frac{1}{\delta(x,y)^{1+2s}}dydx+\int\int_{Q\times Q}\frac{(f(x)-f(y))^{2}}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy\\
&= \frac{2^{n}-1}{2^{n-1}(2^{2ns}-1)}\frac{1}{|Q|^{2s}}\int_{Q}|f(x)|^{2}dx+\int\int_{Q\times Q}\frac{(f(x)-f(y))^{2}}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy\\
&= a_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}}\int_{Q}|f(x)|^{2}dx+\int\int_{Q\times Q}\frac{(f(x)-f(y))^{2}}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy
\end{aligned}$$

Por otra parte, haciendo uso del resultado en i) y el hecho que $\left\langle\mathbf{1}_{Q}f,h_{C}^{l}\right\rangle=0$ si $Q\cap C=\emptyset$ tenemos que

$$\mathcal{E}_{dy}^{s}(\mathbf{1}_{Q}f)=\sum_{C\in\mathbb{D}^{+}}\sum_{l\in\Gamma}\beta_{n,s}\frac{\left|\left\langle\mathbf{1}_{Q}f,h_{C}^{l}\right\rangle\right|^{2}}{|C|^{2s}}=\sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^{+}\\ C\subseteq Q_{N}}}\sum_{l\in\Gamma}(\cdots)+\sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^{+}\\ C\supsetneq Q_{N}}}\sum_{l\in\Gamma}(\cdots)=I+II$$

Dado que $C\supsetneq Q$, en II tenemos que

$$\langle\mathbf{1}_{Q}f,h_{C}\rangle=\frac{\pm1}{|C|^{1/2}}\int_{Q}f(x)\,dx,$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
II &= (2^{n}-1)\beta_{n,s}\left|\int_{Q}f(x)\,dx\right|^{2}\sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^{+}\\ C\supsetneq Q}}\frac{1}{|C|^{2s+1}}\\
&= (2^{n}-1)\beta_{n,s}\left|\int_{Q}f(x)\,dx\right|^{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|Q|^{2s+1}(2^{2s+1})^{j}}\\
&= \frac{(2^{n}-1)}{2^{2s+1}-1}\beta_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s+1}}\left|\int_{Q}f(x)\,dx\right|^{2}=b_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s+1}}\left|\int_{Q}f(x)\,dx\right|^{2}.
\end{aligned}$$

En conclusión

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{dy}^{s}(\mathbf{1}_{Q}f) &= a_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s}}\int_{Q}|f(x)|^{2}dx+\int\int_{Q\times Q}\frac{(f(x)-f(y))^{2}}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy\\
&= \beta_{n,s}\sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^{+},l\in\Gamma\\ C\subseteq Q}}\frac{\left|\left\langle\mathbf{1}_{Q}f,h_{C}^{l}\right\rangle\right|^{2}}{|C|^{2s}}+b_{n,s}\frac{1}{|Q|^{2s+1}}\left|\int_{Q}f(x)\,dx\right|^{2}
\end{aligned}$$

Sea

$$III=\int\int_{Q\times Q}\frac{(f(x)-f(y))^{2}}{\delta(x,y)^{1+2s}}dxdy$$

consideramos la familia de cubos diádicos $(\mathbb{D}^{+})^{0}$ y aplicamos estas identidades para cada $Q\in(\mathbb{D}^{+})^{0}$, y tenemos en cuenta que $\left\langle\mathbf{1}_{Q}f,h_{C}^{l}\right\rangle=\left\langle f,h_{C}^{l}\right\rangle$, si $C\subseteq Q$, tendremos que

$$III=\beta_{n,s}\sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^{+},l\in\Gamma\\ C\subseteq Q}}\frac{\left|\left\langle f,h_{C}^{l}\right\rangle\right|^{2}}{|C|^{2s}}+b_{n,s}\left||Q|\,m_{f}(Q)\right|^{2}-a_{n,s}\int_{Q}|f(x)|^{2}dx \tag{9.26}$$

Finalmente, sumando sobre todo los cubos de $(\mathbb{D}^{+})^{0}$ se obtiene la identidad deseada.

iii) Para probar la última parte, utilizamos la basicidad de las funciones de Haar en $L^2(X)$. Si $f \in gen \left\langle h_C^l : C \in \mathbb{D}_1, l \in \Gamma \right\rangle$ es de la forma

$$f = \sum_{(C,l)\in\mathcal{F}} \left\langle f, h_C^l \right\rangle h_C^l,$$

donde $\mathcal{F} \subseteq D_1 \times \Gamma$ es un subconjunto finito, tendremos que

$$\|f\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{(C,l)\in\mathcal{F}} \left|\left\langle f, h_C^l \right\rangle\right|^2 = \sum_{\substack{C\in\mathbb{D}^+, l\in\Gamma \\ |C|\le 1}} \left|\left\langle f, h_C^l \right\rangle\right|^2. \tag{9.27}$$

Por último basta observar que para todo $l \in \Gamma$ y todo $C \in \mathbb{D}_1$, la función de Haar h_C^l posee media nula sobre todo cubo $Q \in (\mathbb{D}^{+})^{0}$. Esto es

$$\sum_{Q\in(\mathbb{D}^+)^0} \left| \int_Q f(x)\, dx \right|^2 = 0 \tag{9.28}$$

Reemplazando (9.27) y (9.28) en (9.26) se obtiene la identidad buscada. □

Como corolarios inmediatos a este Teorema surgen la densidad de las funciones de Haar en norma $H^s(X)$ y la descomposición espectral puntual del laplaciano fraccionario diádico

COROLARIO 9.20. *El generado lineal $S(\mathcal{H})$ es denso en $\left(H^s(X), \|\cdot\|_{H^s(X)}\right)$. En particular, para toda $f \in H^s(X)$ tenemos que*

$$D_{dy}^s f(x) = \beta_{n,s} \sum_{C\in\mathbb{D}, l\in\Gamma} \frac{1}{|Q|^{2s}} \left\langle f, h_Q^l \right\rangle h_Q^l(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea F_N una familia creciente de subconjuntos finitos $F_N \subseteq \mathbb{D}^+ \times \Gamma$ tales que $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} F_N = \mathbb{D}^+ \times \Gamma$. A su vez, dada $f \in H^s(X)$, sea $f_N := \sum_{(C,l)\in F_N} \left\langle f, h_Q^l \right\rangle h_Q^l(x)$. Debido a la basicidad de $H = \left\{h_C^l : C \in \mathbb{D}^+, l \in \Gamma\right\}$ en $L^2(X)$ es claro que $\|f - f_N\| \to 0$ para $N \to \infty$. Por otra parte

$$[f - f_N]_{H^s(X)} = \mathcal{E}_{dy}^s(f - f_N) = \beta_{n,s} \sum_{(Q,l)\in\mathbb{D}^+\times\Gamma} \frac{\left|\left\langle f - f_N, h_Q^l \right\rangle\right|^2}{|Q|^{2s}} = \beta_{n,s} \sum_{(Q,l)\notin F_N} \frac{\left|\left\langle f, h_Q^l \right\rangle\right|^2}{|Q|^{2s}}$$

por lo cual se tiene que $[f - f_N]_{H^s(X)}$ es la cola de una serie convergente, esto es $[f - f_N]_{H^s(X)} \to 0$ cuando $N \to \infty$. □

6. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Sección1. La Proposicion 9.1, el hecho de que el sistema de Haar es una base ortonormal de L^2, puede verse, por ejemplo, en [Woj97] (Proposición 5.2).

Sección 4. Cabe mencionar aquí una técnica de acotación de autovalores del espectro débil del laplaciano fraccionario en contexto euclídeo debida a Mateusz Kwaśnicki, la cual se describe en [Kwa12]. Consideramos el laplaciano euclídeo, dado por

$$D^s f(x) := c_{d,s}\, vp \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{d+2s}} dy,$$

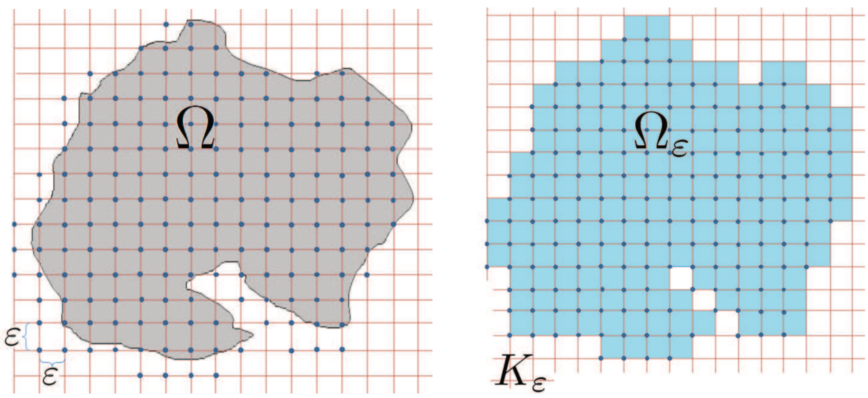
con forma bilineal asociada

$$B^s(f,g) = \frac{c_{d,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{|x-y|^{d+2s}} dxdy.$$

La idea central de la técnica de estimación consiste en observar que, gracias a los principios de Fischer y Courant, la sucesión de autovalores $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ decrece cuando el núcleo $\frac{1}{|x-y|^{d+2s}}$ se reemplaza por uno menor. Para este fin, consideremos una partición $\Gamma = \left\{I_k : k \in \mathbb{Z}^d\right\}$ del espacio $\mathbb{R}^d$ dada por los intervalos $I_k := \prod_{j=1}^{d} [k_j\varepsilon, (k_j+1)\varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$, y donde $k := (k_1, ..., k_d)$. Introducimos la función

$$\rho(k) := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (|k_j|+1)^2},\ k \in \mathbb{Z}^d$$

y dado un dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ definimos $K_\varepsilon := \left\{k \in \mathbb{Z}^d : I_k \cap \Omega \neq \emptyset\right\}$ y $\Omega_\varepsilon := \bigcup_{k\in K_\varepsilon} I_k$, conjuntos ilustrados en las siguientes imágenes.



Definamos por su parte, a la forma bilineal B_ε^s como

$$B_\varepsilon^s(f,g) := \frac{c_{d,s}}{2} \frac{1}{\varepsilon^{d+2s}} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} \int_{I_k}\int_{I_l} \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{\rho(k-l)^{d+2s}} dxdy$$

Obsérvese que si consideramos dos puntos $x \in I_k$, $y \in I_l$ entonces para cada coordenada se tiene que $|x_i - y_i| \le \varepsilon(|k_i - l_i| + 1)$, por lo cual

$$|x-y| \le \varepsilon\rho(k-l).$$

Ahora bien, gracias a esta desigualdad podemos ver que

$$B_\varepsilon^s(f,f) \leq B^s(f,f),$$

para cualquier función $f \in H^s(\Omega)$. Si denotamos por $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de autovalores asociados a B^s y definimos como $(\lambda_{n,\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión

$$\lambda_{n,\varepsilon} := \min_{\substack{V\prec L^2(\Omega)\\ \dim V = n}} \max_{f\in V} \frac{B_\varepsilon^s(f,f)}{\|f\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

tendremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n,\varepsilon} \leq \lambda_n$. Más aún, veamos que, efectivamente, para ciertos $n \in \mathbb{N}$, los valores $\lambda_{n,\varepsilon}$ coinciden con los autovalores de una matriz. En primer lugar, manipulando la expresión de la forma B_ε^s podemos escribir

$$\begin{aligned}
B_\varepsilon^s(f,f) &= \frac{c_{d,s}}{2}\frac{1}{\varepsilon^{d+2s}}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\rho(k-l)^{d+2s}}\int_{I_k}\left[\|f\|^2_{L^2(I_l)} + |I_l|(f(y))^2 - 2f(y)|I_l|\,m_f(I_l)\right]dy\\
&= \frac{c_{d,s}}{2}\frac{1}{\varepsilon^{d+2s}}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\rho(k-l)^{d+2s}}\left[\varepsilon^d\|f\|^2_{L^2(I_l)} + \varepsilon^d\|f\|^2_{L^2(I_k)} - 2\varepsilon^d m_f(I_k)\,\varepsilon^d m_f(I_l)\right]\\
&= \frac{c_{d,s}}{2}\frac{1}{\varepsilon^{2s}}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\rho(k-l)^{d+2s}}\left[\|f\|^2_{L^2(I_l)} + \|f\|^2_{L^2(I_k)}\right] - c_{d,s}\frac{\varepsilon^d}{\varepsilon^{2s}}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d}\frac{m_f(I_k)\,m_f(I_l)}{\rho(k-l)^{d+2s}}\\
&= c_{d,s}\frac{1}{\varepsilon^{2s}}\left(N_\rho\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon^d\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d}\frac{m_f(I_k)\,m_f(I_l)}{\rho(k-l)^{d+2s}}\right),
\end{aligned}$$

donde $N_\rho := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\rho(k)^{d+2s}}$. Por otra parte si denotamos $f^* := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} m_f(I_k)\,1_{I_k}$, tenemos que

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\|f\|^2_{L^2(I_k)} = \|f-f^*\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f^*\|^2_{L^2(\Omega)}$$

y ya que para cada intervalo I_k los promedios de f y f^* coinciden, podemos reemplazar esta identidad en la expresión de $B_\varepsilon^s(f,f)$ para obtener

$$\begin{aligned}
B_\varepsilon^s(f,f) &= c_{d,s}\frac{1}{\varepsilon^{2s}}\left(N_\rho\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon^d\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d}\frac{m_f(I_k)\,m_f(I_l)}{\rho(k-l)^{d+2s}}\right)\\
&= B_\varepsilon^s(f^*,f^*) + c_{d,s}\frac{1}{\varepsilon^{2s}}N_\rho\|f-f^*\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora los espacios proyección y complemento, ortogonales entre sí, dados por

$$W_0 := \left\{f\in L^2(\Omega) : f^* = 0\right\} = \left\{f\in L^2(\Omega)\ /\ \forall k\in\mathbb{Z}^d : m_f(I_k) = 0\right\}$$

$$V_0 := \left\{f\in L^2(\Omega) : f^* = f\right\} = \left\{f\in L^2(\Omega)\ /\ \forall k\in\mathbb{Z}^d : f|_{I_k} \text{ es constante }\right\}$$

Para cada $f\in W_0$ tendremos que

$$B_\varepsilon^s(f,f) = c_{d,s}\frac{1}{\varepsilon^{2s}}N_\rho\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

lo cual puede reescribirse como

$$\frac{B_\varepsilon^s(f,f)}{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2}=\frac{c_{d,s}}{\varepsilon^{2s}}N_\rho$$

esto es, el espacio W_0 es un autoespacio asociado al autovalor $\alpha^*=\frac{c_{d,s}}{\varepsilon^{2s}}N_\rho$. Por otra parte, para cada $g\in V_0$

$$\begin{aligned}B_\varepsilon^s(g,g) &= c_{d,s}\frac{1}{\varepsilon^{2s}}\left(N_\rho\|g\|_{L^2(\Omega)}^2-\varepsilon^d\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d}\frac{m_g(I_k)\,m_g(I_l)}{\rho(k-l)^{d+2s}}\right)\\ &= c_{d,s}\frac{1}{\varepsilon^{2s-d}}\left[N_\rho\sum_{k\in K_\varepsilon}(m_g(I_k))^2-\sum_{k,l\in K_\varepsilon}\frac{m_g(I_k)\,m_g(I_l)}{\rho(k-l)^{d+2s}}\right]\end{aligned}$$

Denotemos para cada $k\in K_\varepsilon$ la función característica normalizada $g_k:=\frac{1}{\varepsilon^{d/2}}1_{I_k}$, y observemos que forman una base del espacio V_0. Además

$$B_\varepsilon^s(g_k,g_k)=\frac{c_{d,s}}{\varepsilon^{2s}}\left(N_\rho-\frac{1}{d^{\frac{d+2s}{2}}}\right)=\frac{c_{d,s}}{\varepsilon^{2s}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\rho(k)^{d+2s}}-\frac{1}{\rho(0)^{d+2s}}\right)$$

y para cada $k\neq l$

$$\begin{aligned}B_\varepsilon^s(g_k,g_l) &= \frac{c_{d,s}}{2}\frac{1}{\varepsilon^{2s+d}}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\rho(m-n)^{d+2s}}\int_{I_m}\int_{I_n}(g_k(x)-g_k(y))(g_l(x)-g_l(y))\,dxdy\\ &= \frac{c_{d,s}}{2}\frac{1}{\varepsilon^{2s+d}}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\rho(k-l)^{d+2s}}\varepsilon^d(-\delta_{nk}\delta_{ml}-\delta_{nl}\delta_{mk})\\ &= -\frac{c_{d,s}}{2}\frac{1}{\varepsilon^{2s}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\frac{\delta_{ml}}{\rho(m-k)^{d+2s}}+\frac{\delta_{mk}}{\rho(m-l)^{d+2s}}\\ &= -\frac{c_{d,s}}{\varepsilon^{2s}}\frac{1}{\rho(k-l)^{d+2s}},\end{aligned}$$

donde aquí δ_{ml} denota la delta de Kronecker. En conclusión

$$B_\varepsilon^s(g_k,g_l)=\frac{c_{d,s}}{\varepsilon^{2s}}\left[\delta_{kl}N_\rho-\frac{1}{\rho(k-l)^{d+2s}}\right].$$

Numeramos de manera adecuada los índices de K_ε. Sea $\sigma:\{1,2,3,...,\#(K_\varepsilon)\}\to K_\varepsilon$ alguna de tales numeraciones. Formamos la matriz $A=(a_{pq})_{1\leq p,q\leq\#(K_\varepsilon)}$, donde

$$a_{pq}:=\frac{c_{d,s}}{\varepsilon^{2s}}\left[\delta_{pq}N_\rho-\frac{1}{\rho(\sigma(p)-\sigma(q))^{d+2s}}\right]$$

Si consideramos $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\leq\#(K_\varepsilon)$ y $\lambda_{n,\varepsilon}$, el n-ésimo autovalor de A, verfica $\lambda_{n,\varepsilon}\leq\alpha^*$ entonces $\lambda_n\geq\lambda_{n,\varepsilon}$. Para el resto de los $n\in\mathbb{N}$, se tiene que $\lambda_n\geq\alpha^*$.

Cabe realizar algunas observaciones respecto de la ley de Weyl y las desigualdades de tipo Berezin-Li-Yau. En 1912 Hermann Weyl demostró que para todo conjunto abierto acotado $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$, con frontera suave a trozos y tal que $|\partial\Omega| = 0$, la sucesión de autovalores del problema

$$(9.29) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases},$$

satisface la fórmula

$$(9.30) \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k(\Omega)}{k} = \frac{4\pi}{|\Omega|}.$$

De modo equivalente, si se considera la función de conteo de autovalores $N(t) := \#\{n \in \mathbb{N} \,/\, \lambda_n \leq t\}$ se puede expresar (9.30) del modo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{|\Omega|}{4\pi}.$$

En 1961 Pólya [Pó61] demuestra que para todo dominio Ω cuyas traslaciones teselan $\mathbb{R}^2$ se satisface

$$(9.31) \qquad \lambda_k(\Omega) \geq 4\pi \frac{k}{|\Omega|}.$$

Ambas fórmulas están basadas en las caracterizaciones variacionales de los autovalores y, sobre todo, en el hecho de que las formas bilineales

$$b(u,v) := \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} \ ; \ a(u,v) := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle,$$

mantienen una relación de ortogonalidad entre funciones soportadas por subdominios disjuntos de Ω. Esto permite demostrar que, para dominios de Jordan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t^{n/2}} = \frac{\omega_n |\Omega|}{(2\pi)^n}$$

Por su parte en [Bor20] puede encontrarse una demostración simplificada del trabajo de Lars Gärding [Gr53] el cual extiende la ley de Weyl a dominios acotados de $\mathbb{R}^n$ y a operadores uniformemente elípticos, posiblemente no auto-adjuntos. Sus ideas descansan en la aplicación de teoremas Tauberianos al comportamiento asintótico del nucleo de los operadores $(-h^2\Delta + 1)^{-m}$, con $m \in \mathbb{N}$, para $h \searrow 0$. Estas clases de acotaciones puntuales permiten deducir cómo se comportan de modo asintótico las sumas de los autovalores y están en estrecha relación a los leyes de Weyl y a las estimaciones asintóticas de la función de conteo N_Ω. Efectivamente, y en ese sentido, en 1972 Felix Berezin [Ber72], e independientemente en 1983 Peter Li y Shing-Tung Yau [LY83], extendieron la desigualdad de Pólya (9.31) demostrando que, para el espectro $(\lambda_j(\Omega))_{j\in\mathbb{N}}$ asociado al problema (9.29) se tiene que

$$(9.32) \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\Omega) \geq C_n \frac{k^{\frac{2}{n}+1}}{|\Omega|^{2/n}}; \quad C_n = \frac{n}{n+2}\left(\frac{2\pi}{\alpha_n^{1/n}}\right)^2$$

Posteriormente, Antonio Melas en [Mel03] mejora el valor de esta cota inferior. A esta clase de desigualdades del tipo (9.32) se las denomina Desigualdades de Berezin-Li-Yau (nombre introducido en [Yol10]). En lo que respecta a la extensión de estas acotaciones adecuadas al laplaciano fraccionario euclídeo, los primeros artículos datan de 1959. Los extensos trabajos de Teoría de Semigrupos asociados a operadores de Markov de R.M. Blumenthal y R. K. Getoor ([Get57], [Get59], [BG59]) demuestran que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{N(t)}{t^{d/2s}}=\frac{|\Omega|}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)}$$

donde $N(t)$ es, como antes, la función de conteo asociada a la sucesión de autovalores $(\lambda_{s,n})_{n\in\mathbb{N}}$ del problema

$$\text{(9.33)}\qquad \begin{cases}(-\Delta)^{s/2}u=\lambda_{s,n}u \quad \text{en } \Omega,\\ u=0 \quad \text{en } \mathbb{R}^d\setminus\Omega,\end{cases}$$

para el laplaciano fraccionario en contexto euclídeo,

$$\text{(9.34)}\qquad (-\Delta)^{s/2}u(x):=A_{(n,s)}v.p.\int\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy;\quad 0<s<1$$

Más contemporáneos, los trabajos de Selma Yildrim Yolcu y Türkay Yolcu ([Yol10] para $s=\frac{1}{2}$, [YYY12] para Ω: abierto-conexo-acotado frontera suave) prueban que

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_{s,j}(\Omega)\geq C_{(d,s)}\frac{k^{\frac{s}{d}+1}}{|\Omega|^{s/d}};\qquad C_{(d,s)}=\frac{d\,(4\pi)^s}{d+2s}\left(\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\right)^{2s/d}$$

Con alguna que otra variante, las técnicas utilizadas en estos trabajos descansan en la siguiente idea: En primer lugar, observan que toda función $f\in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ función no negativa tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{2s}f(x)\,dx\leq M$$

satisface la desigualdad

$$\text{(9.35)}\qquad \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\leq C_{d,s}\left(M^d\|f\|^{2s}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{d+2s}}$$

para cierta constante $C_{d,s}$ que sólo depende de d y s. Luego, la estrategia clave es utilizar la transformada de Fourier de $(-\Delta)^s$, esto es,

$$\left((-\Delta)^s u\right)(x)=\left[|\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi)\right]^{\vee}(x)$$

lo cual permite describir a los autovalores del siguiente modo

$$\begin{aligned}\lambda_{s,j}(\Omega)&=\left\langle\psi_j,(-\Delta)^s\psi_j\right\rangle\\ &=\left\langle\psi_j,\left[|\xi|^{2s}\widehat{\psi_j}(\xi)\right]^{\vee}(\cdot)\right\rangle\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}\left(\widehat{\psi_j}(\xi)\right)^2d\xi\end{aligned}$$

donde aquí $\left(\psi_j\right)_j$ es la sucesión de autofunciones del problema. Basta aplicar la acotación (9.35) a la función

$$f(\xi):=\sum_{j=1}^{k}\left|\widehat{\psi_j}(\xi)\right|^2$$

Por una parte, es claro que $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = k$, y, por otra parte, la acotación uniforme de las funciones $e_\xi(x) := e^{-ix\xi}$ permite estimar $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ en función de la medida del dominio, del siguiente modo

$$\begin{aligned} f(\xi) &\leq \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_\Omega \psi_j(x) e^{-ix\xi} dx \right|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^{k} \left| \langle \psi_j, e_\xi \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|e_\xi\|_{L^2(\Omega)} = \frac{|\Omega|}{(2\pi)^n}. \end{aligned}$$

Cabe observar que, si bien la técnica no hace uso de hipótesis adicionales acerca de la excentricidad y/o regularidad del dominio (basta sólo un dominio Ω que permita determinar espectro para el problema (9.33)), pierde versatilidad ante la imposibilidad de utilizar la transformada de Fourier en espacios más generales, y más aún, de determinar una base ortonormal de autofunciones uniformemente acotadas, ya que como hemos visto, el problema (9.33) asociado a B^s_{dy} sobre cualquier dominio regular, posee como autofunciones a las funciones de Haar, las cuales no satisfacen esta propiedad.

Sección 5. Cabe destarcarse que en contexto euclídeo, es sabido que el espacio de Sobolev fraccionario $H^s(\mathbb{R}^n)$ también puede caracterizarse utilizando el laplaciano fraccionario y su equivalencia como operador de multiplicación gracias a la transformada de Fourier. En efecto, en [DNPV12], por ejemplo, se demuestra que la seminorma $[f]_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ satisface la identidad $[f]_{H^s(\mathbb{R}^n)} = C_{(n,s)} \left\| |\cdot|^s \widehat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\| (-\Delta)^{s/2} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, donde $(-\Delta)^{s/2}$ es el laplaciano fraccionario dado por 9.34.

En [ABG13] y [ABG21] se obtiene la relación fundamental entre el sistema de Haar y el operador de diferenciación fraccionaria diádica definido en el espacio 1-Ahlfors regular $(\mathbb{R}^+, \delta, m)$, donde δ designa la métrica diádica relativa a los cubos diádicos $\mathbb{D}$ vistos en la sección anterior, y m designa la medida de Lebesgue 1-dimensional. En [ABG13] se trabaja con una forma bilineal reducida a fin de demostrar un teorema de descomposición espectral (Teorema 4 de [ABG13]). En este trabajo de tesis no sólo extendimos al cuadrante $(\mathbb{R}^+)^n$ sino que también mejoramos las fórmulas de representación de dichos trabajos. Cabe destacarse también que en [AABG16] esos resultados se extienden a sistemas diádicos en cuadrantes sobre espacios de tipo homogéneo.

Parte 4

Derivación parcial, gradiente, integrales singulares y espacios de Sobolev en contexto diádico

CAPíTULO 10

Operador gradiente en contexto diádico

En este capítulo exponemos un modo de definir un gradiente fraccionario en el espacio de tipo homogéneo diádico $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$. El orden expositivo está dado del siguiente modo: en la primera sección esbozamos una motivación para entender cómo surgen esta clase de operadores de derivación, luego, en la segunda sección definimos qué entendemos por homogeneidad de núcleos en el contexto diádico y qué clase de núcleos utilizaremos para definir los operadores integrales singulares. En la tercera sección definimos el operador gradiente fraccionario así como su relación con el laplaciano fraccionario y en la cuarta y última sección daremos una caracterización de los espacios de Sobolev fraccionarios así como un resultado de regularidad de soluciones que involucran el laplaciano fraccionario diádico.

1. Motivación

Dado un polinomio en $\mathbb{R}^n$ de grado k, $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha \xi^\alpha$, podemos definir un operador diferencial mediante la asignación $\xi_j^{\alpha_j} \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}$ entre la j-ésima variable y la j-ésima derivada parcial. Esto es,

$$(P(\partial) f)(x) := \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha \partial^\alpha f(x).$$

Si consideramos f suficientemente suave, podemos hallar la transformada de Fourier de este operador, lo que nos permite ver que

$$(\widehat{P(\partial) f})(\xi) = P(2\pi i \xi)\widehat{f}(\xi).$$

Si el polinomio P es homogéneo de grado k, esto es,

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha \xi^\alpha,$$

entonces $P(\lambda\xi) = \lambda^k P(\xi)$, y tenemos que

$$\begin{aligned} (\widehat{P(\partial) f})(\xi) &= (2\pi i)^k \frac{P(\xi)}{|\xi|^k} |\xi|^k \widehat{f}(\xi) \\ &= i^k \frac{P(\xi)}{|\xi|^k} |2\pi\xi|^k \widehat{f}(\xi). \end{aligned} \tag{10.1}$$

A fin de descomponer esta última expresión introducimos dos operadores. Definimos, formalmente, el operador de multiplicación T_m como

$$\widehat{(T_m f)}(\xi) := m(\xi)\,\widehat{f}(\xi),$$

y por otra parte, denotamos por Λ al laplaciano fraccionario de orden $\frac{1}{2}$, el cual satisface

$$\widehat{(\Lambda f)}(\xi) := 2\pi\,|\xi|\,\widehat{f}(\xi) \;\text{ y }\; \Lambda^2 f = -\Delta f\,.$$

Considerando T_m para $m(\xi) = i^k \frac{P(\xi)}{|\xi|^k}$, podemos reescribir (10.1) utilizando T_m y Λ como

$$(\widehat{P(\partial)\,f})(\xi) = i^k \frac{P(\xi)}{|\xi|^k}\,|2\pi\xi|^k\,\widehat{f}(\xi) = (\widehat{T_m \circ \Lambda^k f})(\xi),$$

esto es, el operador diferencial $P(\partial)$, para polinomios homogéneos, puede verse como la composición

$$P(\partial) = T_m \circ \Lambda^k,$$

de un operador de multiplicación y de k veces el laplaciano fraccionario.

Por otra parte, es sabido de los trabajos de Calderón, [**CZ56a**], [**Cal67**]; que bajo ciertas condiciones la clase de operadores de multiplicación forma un álgebra. Específicamente, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 10.1. *Si $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, es una función homogénea de grado 0, entonces existe $\Omega \in C^\infty(S^{n-1})$, con media nula sobre la esfera unitaria, esto es $\int_{S^{n-1}} \Omega d\sigma = 0$, y existe $b \in \mathbb{R}$ tal que*

$$m^\vee = b\delta_0 + W_\Omega, \tag{10.2}$$

donde W_Ω es la distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\langle W_\Omega, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\varphi(x)\,dx = v.p.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\varphi(x)\,dx \tag{10.3}$$

Cabe observar que Ω está dada por $\Omega := (m-c)^\vee|_{S^{n-1}}$, donde c es la media de m en S^{n-1}.

Como corolario de la proposición anterior se siguen varias propiedades de interés. En primer lugar, los operadores T_m , dados por una función $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, 0-homogénea, son de la forma

$$T_m f = bf + W_\Omega * f.$$

En segundo lugar, teniendo en cuenta que $T_{m_1} \circ T_{m_2} = T_{m_1 m_2}$, la familia de operadores de multiplicación dada por

$$\mathcal{A} := \{T_m \;:\; m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \text{ homogénea de grado } 0\},$$

forma un álgebra. Además un elemento $T_m \in A$ es inversible, con inversa $T_{1/m}$, si y sólo si $m|_{S^{n-1}} \neq 0$. Finalmente, si consideramos un polinomio P, homogéneo de grado k, tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $P\left(\xi/\left|\xi\right|\right) \neq 0$ entonces, la ecuación

$$P\left(\partial\right)u = f,$$

equivale a

$$\Lambda^k u = T_{\widetilde{m}} f,$$

para el multiplicador $\widetilde{m}\left(\xi\right) = \frac{|\xi|^k}{i^k}\frac{1}{P(\xi)}$. Siguiendo (10.1), obsérvese que si consideramos los polinomios $P_j\left(\xi\right) = \xi_j$, para $j = 1, ..., n$, tenemos que

$$\widehat{\left(\partial_j f\right)}\left(\xi\right) = i\frac{\xi_j}{|\xi|}\left|2\pi\xi\right|\widehat{f}\left(\xi\right) = \left(\widehat{R_j \circ \Lambda f}\right)\left(\xi\right),$$

donde R_j representa la j-ésima transformada de Riesz, operador de la forma (10.3) para el núcleo $\Omega\left(x\right) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}x_j$ generado a partir de 10.2 .

Obsérvese, entonces, que esta representación de la derivación parcial como una composición entre un operador integral singular y una potencia fraccionaria del laplaciano surge de pensar en el análisis espectral que la tranformada de Fourier devela en el contexto euclídeo de $(\mathbb{R}^n, \|...\|)$.

Vistas estas consideraciones, la estrategia de este capítulo será utilizar el análisis espectral desarrollado en el Capitulos 8 y el análisis espectral del laplaciano fraccionario diádico desarrollado en el Capítulo 9, de modo tal de extender esta representación a fin de obtener una noción de derivada parcial.

Introduciremos un operador gradiente ∇^s_{dy}, y demostraremos que éste puede descomponerse de la forma $\nabla^s_{dy} = \mathbf{T} \circ (-\Delta)^{s/2}_{dy}$, donde $\mathbf{T}$ es un operador de Calderón-Zygmund valuado en un espacio vectorial y $(-\Delta)^{s/2}_{dy}$, que denotamos D^s_{dy} en el Capítulo 9, es el laplaciano fraccionario adecuado al contexto diádico .

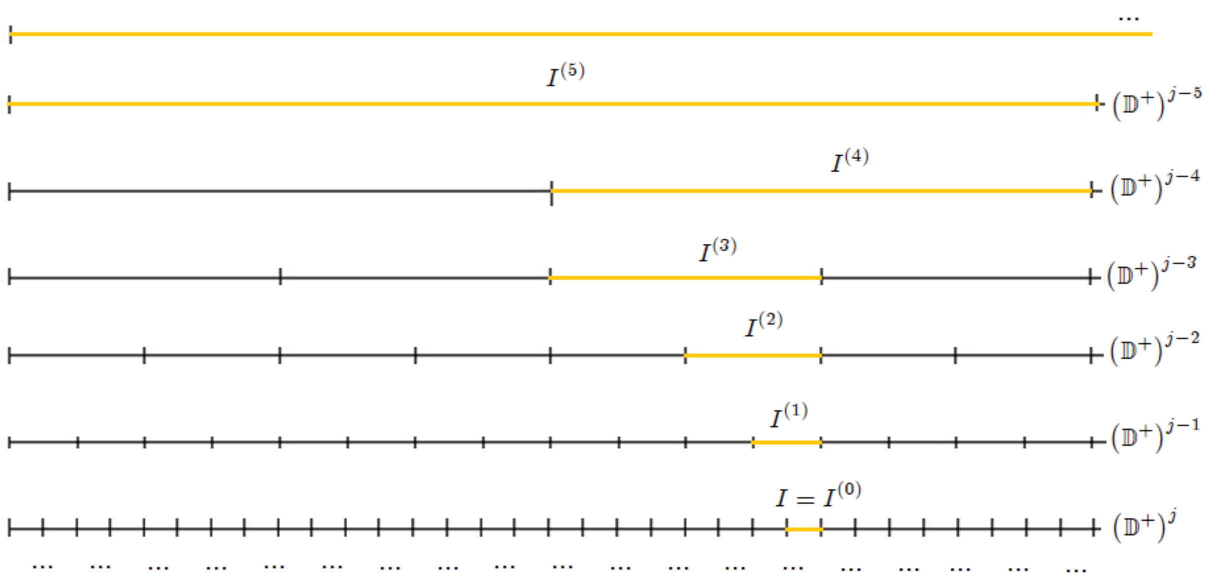
A su vez, este operador de derivación fraccionaria también permitirá entender al laplaciano fraccionario como una divergencia de un gradiente. Se verá que $\left\langle (-\Delta)^{s/2} f, g \right\rangle = \langle \nabla^s f, \nabla^s g\rangle$, lo cual nos permitirá caracterizar los espacios de Sobolev mediante operadores de diferenciación fraccionaria.

2. Multiplicadores y núcleos diádicamente homogéneos

Damos un breve repaso al contexto diádico introducido en el Capítulo 9, incluyendo nuevos conceptos que utilizaremos en la sección siguiente.

Consideramos el espacio de tipo homogeneo $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ con la métrica diádica δ y $|\cdot|$ la medida de Lebesgue 1-dimensional. Denotamos por $\mathbb{D}$ a la familia de intervalos diádicos

$\mathbb{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}^j$ donde $\mathbb{D}^j = \left\{I_k^j : k \in \mathbb{N}_0\right\}$, j-ésimo nivel de intervalos diádicos y $I_k^j = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Si bien estamos utilizando la familia de cubos diádicos de la semirecta real positiva, a fin de simplificar la notación utilizaremos $\mathbb{D}$ en lugar de $\mathbb{D}^+$. Recordemos que, dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, denotamos por $I_{(x,y)}$ al intervalo minimal $I \in \mathbb{D}$ que incluye a x e y. Recuérdese que esta notación nos permite escribir la distancia diádica entre dos puntos x, y como $\delta(x, y) = \left|I_{(x,y)}\right|$ .Dado un intervalo $I \in \mathbb{D}^k$ denotaremos por $I^{(j)}$, para $j \in \mathbb{N}_0$, al j-ésimo ancestro de I, esto es, al único intervalo $I^{(j)} \in \mathbb{D}^{k-j}$ tal que $I \subseteq I^{(j)}$, con la convención $I^{(0)} := I$. Por otra parte, ya que en el contexto unidimensional, todo intervalo diádico $I \in \mathbb{D}$ posee sólo dos sucesores, los denotaremos por I^+ e I^-. El intervalo I^-designa el intervalo hijo a izquierda de I y el intervalo I^+ denota el intervalo hijo a derecha de I. Cabe recordar que para cada $I \in \mathbb{D}$ la sucesión de intervalos $\left\{I^{(j)} : j \in \mathbb{N}_0\right\}$ es una sucesión creciente de intervalos anidados, como muestra la siguiente imagen.

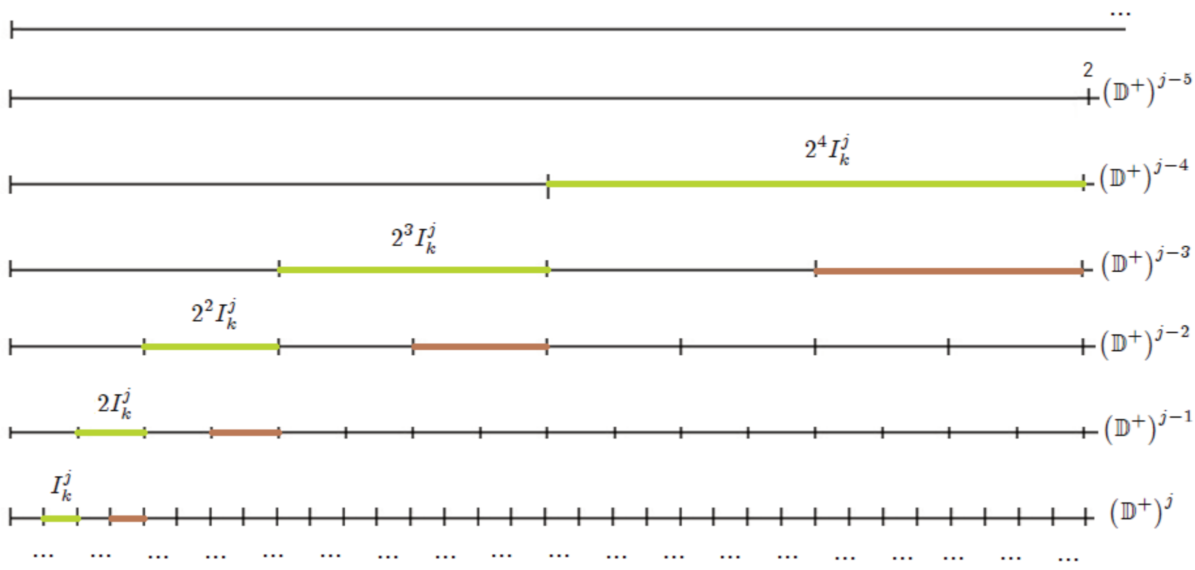


Por otra parte, dado un intervalo diádico I_k^j denotaremos por $2I_k^j$ al intervalo diádico

$$2I_k^j := 2[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}) = [\frac{k}{2^{j-1}}, \frac{k+1}{2^{j-1}}) = I_k^{j-1},$$

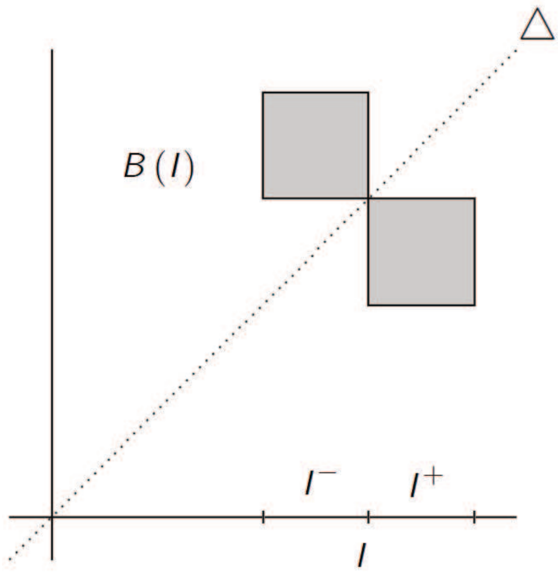
y diremos que $2I_k^j$ es el *duplicado* de I_k^j. Si aplicamos inductivamente la definición, tendremos que $2^n I_k^j = I_k^{j-n}$. Notemos que sólo para el caso $k = 0$ la sucesión de intervalos duplicados $\left\{2^n I_0^j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es sucesión de intervalos anidados, esto es $I_0^j \subseteq 2^n I_0^j$ para cada $j \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Al contrario de la relación de ancestralidad, esto no ocurre si $k \geq 1$, ya que

$\frac{k+1}{2^j} \leq \frac{k}{2^{j-1}} \leq \frac{k}{2^{j-n}}$ por lo cual $I_k^j \cap 2^n I_k^j = \emptyset$. El siguiente gráfico ilustra esta situación.



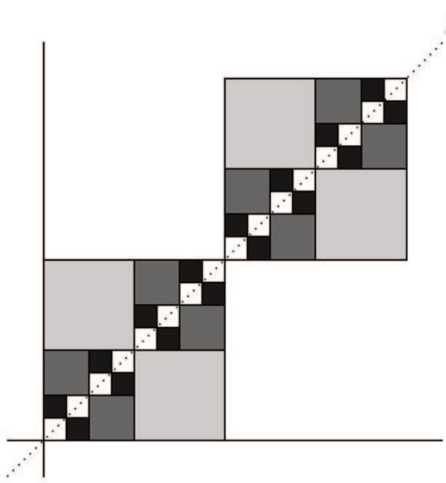
Introducimos a continuación una partición especial del espacio producto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ que nos será de suma utilidad. En primer lugar definimos el conjunto $B(I)$, el cual denominaremos *Butterfly* o *Mariposa generada por* I, de la siguiente forma

$$B(I) := \left(I^+ \times I^-\right) \cup \left(I^- \times I^+\right).$$



Obsérvese que $(x, y) \in B(J)$ si y sólo si $I_{(x,y)} = J$, debido a que los elementos x, y no pueden estar simultáneamente en I^+o en I^-. Esta clase permite descomponer los conjuntos de nivel de la métrica diádica. Específicamente, si denotamos por $A_j = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \delta(x, y) = \frac{1}{2^j}\right\}$, tenemos que $A_j = \cup_{I \in \mathbb{D}^j} B(I)$. Más aún $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \triangle =$

$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A_j$, donde $\triangle := \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x = y\}$.

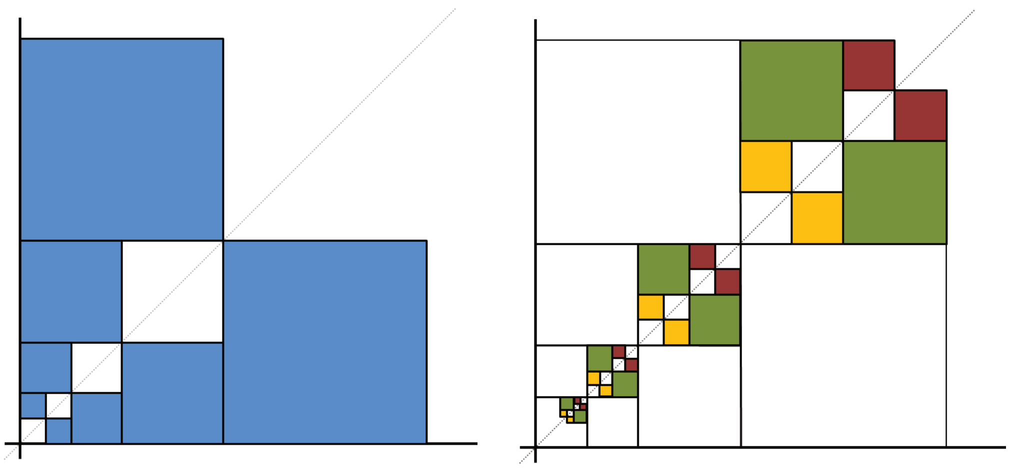


Por otra parte, denotemos por $\mathcal{B}$ a la clase $\mathcal{B} := \{B(I) : I \in \mathbb{D}\}$ de todos los conjuntos $B(I)$ generados por los intervalos diádicos. Sobre esta clase diremos que dos mariposas B_1, B_2 son equivalentes, lo cual denotaremos $B_1 \sim B_2$, si existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $B_1 = B\left(2^l I\right), B_2 = B(I)$, esto es, dos Mariposas son equivalentes si una de ellas está generada por un intervalo duplicado del intervalo generador de la otra.

Escojamos a los intervalos $I \in \mathbb{D}^0$ del nivel diádico cero como intervalos representantes de cada clase de equivalencia y denotemos por Γ_k al conjunto unión de las mariposas de la clase asociada a I_k^0, esto es,

$$\Gamma_k := \cup \left\{B \in \mathcal{B} : B \sim B\left(I_k^0\right)\right\}.$$

Por definición de la relación, cabe notar que $\Gamma_k = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B\left(2^j I_k^0\right)$. En los diagramas siguientes se observa en azul la clase de equivalencia del intervalo I_0^0, y en verde, amarillo y bordó, los conjuntos Γ_1, Γ_2, y Γ_3 respectivamente.



DEFINICIÓN 10.2. *Diremos que una función acotada $m : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es diádicamente homogénea de grado cero, y lo denotaremos $m \in \mathcal{M}_0$, si para cada $I \in \mathbb{D}$ se satisface $m(I) = m(2I)$.*

Obsérvese que así como una función 0-homogenea definida sobre $\mathbb{R}^n$ está dada por los valores que toma sobre la esfera unitaria, en este caso toda función diádicamente homogénea estará determinada por sus valores en $\mathbb{D}^0$. Para ver esto téngase en cuenta todo intervalo diádico I_k^j puede escribirse como $I_k^j = 2^{-j} I_k^0$, por lo cual $m(I_k^0) = m(2^j I_k^0) = m(I_k^j)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

En la siguiente definición, $\sigma(\mathcal{B})$ designa la σ-álgebra de partes de $(\mathbb{R}^+)^2$ generada por la familia $\mathcal{B}$ de mariposas.

DEFINICIÓN 10.3. *Decimos que una función $\sigma(\mathcal{B})$-medible $K : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ es un núcleo diádicamente homogéneo de grado 0, y lo denotaremos $K \in \mathcal{K}_0$, si $K(2x, 2y) = K(x, y)$, $x \neq y$.*

LEMA 10.4. *Una función $\sigma(\mathcal{B})$-medible $K : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ es un núcleo diádicamente homogéneo de grado 0 si y sólo si*

$$K(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} c_k \mathbf{1}_{\Gamma_k}(x, y) \tag{10.4}$$

donde $\mathbf{1}_{\Gamma_k}$ denota la función característica de Γ_k y $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ sucesión de números reales.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, obsérvese que si K es de la forma (10.4) teniendo en cuenta que $\Gamma_k = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B(2^j I_k^0)$ y que $\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} \Gamma_k$, tenemos que

$$K(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \sim B(I_k^0)}} c_k \mathbf{1}_B(x, y) = \sum_{B \in \mathcal{B}} c_B \mathbf{1}_B(x, y)$$

donde definimos $c_B := c_k$ para cada $B \sim B(I_k^0)$. Ya que toda combinación de características en los conjuntos $B(I)$ es $\sigma(\mathcal{B})$-medible, K resulta $\sigma(\mathcal{B})$-medible.

En segundo lugar, obsérvese que, a su vez, toda función $\sigma(\mathcal{B})$-medible debe ser suma de características de los conjuntos $B \in \mathcal{B}$ ya que dicha σ-álgebra está generada por una familia disjunta de conjuntos. Por lo tanto, si K es $\sigma(\mathcal{B})$-medible entonces

$$K(x, y) = \sum_{B \in \mathcal{B}} c_B \mathbf{1}_B(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \sim B(I_k^0)}} c_B \mathbf{1}_B(x, y)$$

Como $\Gamma_k = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B(2^j I_k^0)$, para terminar la demostración basta ver que la homogeneidad de K implica que los c_B son constantes en cada clase $B \sim B(I_k^0)$. Recordemos que la familia $\mathcal{B}$ de mariposas particiona el conjunto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Luego, dados $(x, y), (2x, 2y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

existen únicos $I, J \in \mathbb{D}$ tales que $(x,y) \in B(I)$ y $(2x,2y) \in B(J)$. Como $(x,y) \in B(I)$ si y sólo si $I_{(x,y)} = I$, esto es, el intervalo minimal de x, y coincide con el generador de $B(I)$; y, por otra parte, los intervalos minimales de (x,y) y $(2x,2y)$ están relacionados por $I_{(2x,2y)} = 2I_{(x,y)}$, tenemos que $J = 2I$. Por ser K diádicamente homogénea de grado cero tenemos que

$$c_{B(I)} = K(x,y) = K(2x,2y) = c_{B(J)} = c_{B(2I)}.$$

Inductivamente tenemos que $c_{B(I)} = c_{B(2^n I)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual K es constante sobre cada clase Γ_k esto es, si denotamos $c_k := c_{B\left(I_k^0\right)}$, tendremos que

$$K(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+} \sum_{\substack{B\in\mathcal{B} \\ B\sim B\left(I_k^0\right)}} c_B \mathbf{1}_B(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+} c_k \mathbf{1}_{\Gamma_k}(x,y),$$

como queríamos demostrar. $\square$

Recuérde que el conjunto $\mathcal{H} := \left\{h_k^j : j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$ denota el sistema de wavelets de Haar, donde

$$h_0^0(x) := \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1)}(x),$$

y

$$h_k^j(x) = h_I(x) := 2^{j/2} h_0^0\left(2^j x - k\right),$$

para $I = I_k^j$. Como vimos, dicho sistema es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^+)$, lo cual nos permite desarrollar toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ como $f(x) = \sum_{J\in\mathcal{D}} \langle f, h_J\rangle h_J(x)$, esto es, este desarrollo sugiere que, informalmente, podemos escribir toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ como $f(x) = \int f(y) K(x,y)\, dy$, para $K(x,y) = \sum_{J\in\mathcal{D}} h_J(y) h_J(x)$.

A modo de ejemplo de núcleo diádicamente homogéneo tenemos a los núcleos que surgen de perturbar este núcleo identidad en los problemas de sumabilidad y representación de espacios funcionales a través de wavelets.

EJEMPLO 10.5. *Si $m \in \mathcal{M}_0$ entonces*

$$\Omega_m(x,y) = \delta(x,y) \sum_{J\in\mathcal{D}} m(J) h_J(x) h_J(y),$$

para $x \neq y$, es un núcleo en K_0.

Para probar esto téngase en cuenta que $h_J(x) h_J(y) = 0$ para todo $J \subsetneq I_{(x,y)}$ ó $J \cap I_{(x,y)} \neq \emptyset$. Esto es, la suma anterior se reduce a los ancestros de $I_{(x,y)}$. Por otro lado, es claro que

$h_{I_{(x,y)}}(x)\, h_{I_{(x,y)}}(y) = -\frac{1}{\left|I_{(x,y)}\right|}$ *y* $h_J(x)\, h_J(y) = \frac{1}{|J|}$ *para cada* $J \supseteq I_{(x,y)}$*. A su vez, recordemos que* $\left|I^{(j)}_{(x,y)}\right| = 2^j \left|I^{(0)}_{(x,y)}\right| = 2^j \delta(x,y)$*. Aplicando estas identidades a* Ω_m *obtenemos*

$$\begin{aligned}
\Omega_m(x,y) &= \delta(x,y) \sum_{J\in\mathbb{D}} m(J)\, h_J(x)\, h_J(y) = \\
&= \delta(x,y) \sum_{J\in\mathbb{D}\ /\ J\supseteq I_{(x,y)}} m(J)\, h_J(x)\, h_J(y) \\
&= -m\left(I_{(x,y)}\right) + \delta(x,y) \sum_{j\geq 1} m\left(I^{(j)}_{(x,y)}\right) \frac{1}{\left|I^{(j)}_{(x,y)}\right|} \\
&= -m\left(I_{(x,y)}\right) + \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^j} m\left(I^{(j)}_{(x,y)}\right).
\end{aligned}$$

Luego , teniendo en cuenta que $m(I) = m(2I)$*,*

$$\begin{aligned}
\Omega_m(2x,2y) &= -m\left(I_{(2x,2y)}\right) + \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^j} m\left(I^{(j)}_{(2x,2y)}\right) = \\
&= -m\left(2I_{(x,y)}\right) + \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^j} m\left(2I^{(j)}_{(x,y)}\right) \\
&= -m\left(I_{(x,y)}\right) + \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^j} m\left(I^{(j)}_{(x,y)}\right) = \Omega_m(x,y).
\end{aligned}$$

Con lo cual resulta que Ω_m *es diádicamente homogéneo .*

3. Derivadas parciales e integrales singulares del laplaciano fraccionario

Introducimos a continuación los conceptos de derivada direccional diádica de orden s y junto con ésta, las nociones de derivación parcial fraccionaria y gradiente fraccionario.

Recordemos del capítulo anterior que en este contexto diádico, el laplaciano fraccionario

$$D^\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(y) - f(x)}{\delta(x,y)^{1+\sigma}} dy,$$

posee un espectro explícito, dado por las funciones de Haar, el cual nos permite desarrollarlo en la forma

$$D^\sigma f(x) = \sum_{I\in\mathcal{D}} \frac{1}{|I|^s} \langle f, h_I\rangle\, h_I(x)\,, \tag{10.5}$$

dearrollo válido, por ejemplo, para funciones f en la clase Hölder C^γ, con $\gamma > \sigma$ y con respecto a la métrica δ. Teniendo en mente este desarrollo espectral y lo expuesto en la primera sección relativo a la analogía entre la esfera unitaria y la familia de cubos diádicos $\mathbb{D}^0$ resulta razonable introducir las derivadas direccionales utilizando a dicha familia $\mathbb{D}^0$ como conjunto de direcciones.

Exponemos a continuación estas definiciones

DEFINICIÓN 10.6. *1) Dado $m \in \mathcal{M}_0$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, definimos derivada direccional diádica de f, de orden σ y en la dirección m, por*

$$D_m^\sigma f(x) := \sum_{I \in \mathbb{D}} m(I) \frac{1}{|I|^\sigma} \langle f, h_I \rangle h_I(x).$$

2) Si denotamos por m_i al multiplicador de $\mathcal{M}_0$ tal que

$$m_i\left(I_k^0\right) = \delta_{ik},$$

la derivada parcial diádica i-ésima de orden σ es la derivada direccional de orden σ que tiene como dirección a dicho multiplicador; esto es

$$D_{(i)}^\sigma f(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\sigma j} \left\langle f, h_i^j \right\rangle h_i^j(x).$$

3) El gradiente diádico de orden σ es el vector de derivadas parciales diádicas de orden σ, esto es,

$$\nabla_{dy}^\sigma f := \left(D_{(i)}^\sigma f\right)_{i \in \mathbb{Z}^+}.$$

La relación de estas nociones con el laplaciano fraccionario están contenidas en el siguiente resultado.

TEOREMA 10.7. *Dado $m \in \mathcal{M}_0$, sea T_m el operador de multiplicación dado por*

$$T_m f := \sum_{I \in \mathbb{D}} m(I) \langle f, h_I \rangle h_I,$$

para una función $f \in S(\mathcal{H})$, combinación lineal de funciones de Haar. Entonces

$$D_m^\sigma = T_m \circ D^\sigma.$$

En particular si denotamos

$$T_{(i)} f = \sum_{I \in \mathbb{D}} m_i(I) \langle f, h_I \rangle h_I, \tag{10.6}$$

al operador de multiplicación asociado al multiplicador m_i dado en la Definición (10.6), y denotamos $\mathbf{T} = \left(T_{(i)}\right)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ tenemos que

$$D_{(i)}^\sigma = T_{(i)} \circ D^\sigma \quad y \quad \nabla_{dy}^\sigma = \mathbf{T} \circ D^\sigma. \tag{10.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar esto basta utilizar que el sistema de Haar es una base y el desarrollo (10.5). Dada f combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{H}$, obsérvese que

$$\langle D^\sigma f, h_I \rangle = \left\langle \sum_{J \in \mathbb{D}} \frac{1}{|J|^\sigma} \langle f, h_J \rangle h_J, h_I \right\rangle = \frac{1}{|I|^\sigma} \langle f, h_I \rangle,$$

por lo cual

$$\left(T_m \circ D^{\sigma}\right)(f) = \sum_{I \in \mathbb{D}} m(I) \langle D^{\sigma} f, h_I \rangle h_I = \sum_{I \in \mathbb{D}} m(I) \frac{1}{|I|^{\sigma}} \langle f, h_I \rangle h_I = D_m^{\sigma} f,$$

La segunda parte del Teorema se sigue de observar el inciso 2) de la Definición (10.6).

□

En vista de lo expuesto en la primera sección, para ver que estas identidades generalizan a $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ la identidad $\partial_j f = R_j \circ \Lambda f$ entre las derivadas parciales y las transformadas de Riesz, debemos demostrar que el operador T es efectivamente un operador de Calderón-Zygmund valuado en un espacio vectorial. Esto es lo que establecemos en el Teorema 10.8. Antes de describirlo, repasamos brevemente la Definición 3.13 dada en el Capítulo 3. Decimos que un operador $T : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+, \ell^2)$, lineal acotado, es un operador de Calderón-Zygmund ℓ^2-valuado si existe un núcleo $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \triangle, \ell^2)$, y existen constantes $C_0, C_1, \varepsilon > 0$, que satisfacen las siguientes condiciones:

i) condición de tamaño: para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se satisface

$$\|\mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2} \leq \frac{C_0}{\delta(x,y)};$$

ii) condiciones de regularidad: para todo $x, x', y \in \mathbb{R}^+$ con $2\delta(x',x) \leq \delta(x,y)$ se satisface

$$\|\mathbf{K}(x',y) - \mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2} \leq C_1 \frac{\delta(x',x)}{\delta(x,y)^{1+\gamma}},$$

y para todo $x, y, y' \in \mathbb{R}^+$con $2\delta(y,y') \leq \delta(x,y)$ se satisface

$$\|\mathbf{K}(x,y') - \mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2} \leq C_1 \frac{\delta(y,y')}{\delta(x,y)^{1+\gamma}};$$

iii) condición de representación: existen subespacios densos $S \subseteq L^2(\mathbb{R}^+)$ y $\mathbb{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}^+, \ell^2)$,

$$\langle \mathbf{T}\varphi, \boldsymbol{\psi} \rangle_{L^2(\ell^2)} = \int\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \langle \mathbf{K}(x,y)\varphi(y), \boldsymbol{\psi}(x) \rangle_{\ell^2} \, dxdy,$$

para toda $\varphi \in S$ y toda $\psi \in \mathbb{S}$ con $\delta(sop(\varphi), sop(\boldsymbol{\psi})) > 0$.

Teorema 10.8. *Sea m_i dado la Definición (10.6), y sean*

$$K_i(x,y) := \frac{\Omega_{m_i}(x,y)}{\delta(x,y)}; \quad \mathbf{K}(x,y) := \left(\frac{\Omega_{m_i}(x,y)}{\delta(x,y)} \right)_{i \in \mathbb{Z}^+}.$$

con Ω_m definido en el Ejemplo (10.5). Entonces el operador $\mathbf{T} : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+, \ell^2)$ dado por $\mathbf{T}f(x) = \left(T_{(i)} f(x)\right)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ con $T_{(i)}$ como en (10.6) es un operador de Calderón-Zygmund ℓ^2-valuado en $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ asociado al núcleo K.

DEMOSTRACIÓN. i) En primer lugar probaremos la acotación de $\mathbf{T}$ de $L^2(\mathbb{R}^+)$ en $L^2(\mathbb{R}^+,\ell^2)$. En efecto, por una parte, ya que $m_i\left(I_k^j\right)=m_i\left(2^{-j}I_k^0\right)=m_i\left(I_k^0\right)=\delta_{ik}$, tenemos que

$$\begin{aligned} T_{(i)}f(x) &= \sum_{I\in\mathbb{D}} m_i(I)\langle f,h_I\rangle h_I(x) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^+} m_i\left(I_k^j\right)\left\langle f,h_k^j\right\rangle h_k^j(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\langle f,h_i^j\right\rangle h_i^j(x), \end{aligned}$$

Esto es, cada $T_{(i)}$ es la suma sobre las escalas en el desarrollo de f en la base de Haar $\left\{h_k^j : j\in\mathbb{Z}^+, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Luego

$$\left\|T_{(i)}f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,h_i^j\right\rangle\right|^2,$$

entonces,

$$\|\mathbf{T}f\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\ell^2)}^2=\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\left\|T_{(i)}f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2=\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,h_i^j\right\rangle\right|^2=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2.$$

y $\mathbf{T}$ resulta una isometría, por lo tanto, resulta continuo de $L^2(\mathbb{R}^+)$ en $L^2(\mathbb{R}^+,\ell^2)$.

ii) Veamos que K es localmente integrable en $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)\setminus\triangle$ y que existe $C_0>0$ tal que $\|\mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2}\leq\frac{C_0}{\delta(x,y)}$. Recordemos en primer lugar que, por lo visto en el Ejemplo (10.5),

$$K_i(x,y)=\frac{\Omega_{m_i}(x,y)}{\delta(x,y)}=\sum_{I\in\mathcal{D}} m_i(I)\,h_I(y)\,h_I(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_i^j(x)\,h_i^j(y),$$

sobre $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)\setminus\triangle$, por lo cual cada K_i es localmente integrable en $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)\setminus\triangle$ y, por otra parte,

$$K_i(x,y)=\frac{1}{\delta(x,y)}\left[-m_i\left(I_{(x,y)}\right)+\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^j}m_i\left(I_{(x,y)}^{(j)}\right)\right].$$

Luego, por la desigualdad de Schwarz y teniendo en cuenta que $m_i\left(I_{(x,y)}^{(j)}\right)=1$ para un único $i\in\mathbb{Z}^+$, $j\in\mathbb{Z}^+$, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2} &= \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\left|K_{(i)}(x,y)\right|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\delta(x,y)}\left[\sqrt{\sum_{i\in\mathbb{Z}^+} m_i^2\left(I_{(x,y)}\right)}+\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^j}\sqrt{\sum_{i\in\mathbb{Z}^+} m_i^2\left(I_{(x,y)}^{(j)}\right)}\right]\leq\frac{2}{\delta(x,y)}, \end{aligned}$$

Esto demuestra la estimación de tamaño del núcleo K.

iii) Veamos la condición de regularidad de K. Esto es, para alguna constante $C_1>0$, si $2\delta(x',x)\leq\delta(x,y)$ entonces $\|\mathbf{K}(x',y)-\mathbf{K}(x,y)\|_{\ell^2}\leq C_1\frac{\delta(x',x)}{\delta(x,y)^{1+\gamma}}$. Obsérvese que gracias a la simetría de los K_i basta demostrar esta condición para la primera variable. Consideremos entonces $x,x',y\in\mathbb{R}^+$ con $2\delta(x,x')\leq\delta(x,y)$, esto es,

$$2\left|I_{(x,x')}\right|\leq\left|I_{(x,y)}\right|.$$

Esta desigualdad permite ver que $I_{(x,x')} \subsetneq I_{(x,y)}$. Luego, el minimal $I_{(x,y)}$ también contiene a x', y, por lo cual $I_{(x',y)} \subseteq I_{(x,y)}$. Pero por otra parte, ya que $y \notin I_{(x,x')}$ (de otro modo $I_{(x,y)} \subseteq I_{(x,x')}$) necesariamente debe darse que $I_{(x,x')} \subseteq I_{(x',y)}$. Esto implica que $x, y \in I_{(x',y)}$ y, por minimalidad , que $I_{(x,y)} \subseteq I_{(x',y)}$. En conclusión, vemos que

$$2\delta\left(x,x'\right) \leq \delta\left(x,y\right), \text{ implica } \ I_{(x,y)} = I_{(x',y)}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} K_{(i)}\left(x',y\right) &= \frac{\Omega_{(i)}\left(x',y\right)}{\delta\left(x',y\right)} = \frac{1}{\delta\left(x',y\right)}\left[-m_i\left(I_{(x',y)}\right) + \sum_{j\geq 0}\frac{1}{2^j}m_i\left(I_{(x',y)}^{(j)}\right)\right] \\ &= \frac{\Omega_{(i)}\left(x,y\right)}{\delta\left(x,y\right)} = K_{(i)}\left(x,y\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$2\delta\left(x,x'\right) \leq \delta\left(x,y\right) \text{ implica que } \mathbf{K}\left(x',y\right) = \mathbf{K}\left(x,y\right),$$

por lo cual la condición de regularidad se satisface trivialmente.

iv) Por último veamos que para algún par de subespacios densos, $S \subseteq L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ y $\mathbf{S} \subseteq L^2\left(\mathbb{R}^+,\ell^2\right)$, se tiene la representación

$$\left\langle \mathbf{T}\varphi, \boldsymbol{\psi}\right\rangle_{L^2(\ell^2)} = \int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \left\langle \mathbf{K}\left(x,y\right)\varphi\left(y\right), \boldsymbol{\psi}\left(x\right)\right\rangle_{\ell^2} dxdy,$$

para toda $\varphi \in S$ y toda $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{S}$ con $\delta\left(sop\left(\varphi\right), sop\left(\boldsymbol{\psi}\right)\right) > 0$.

Utilicemos los espacios

$$S = gen\left\{\mathcal{H}\right\} = \left\{\sum_{k\in F}\alpha_k h_k \ : \ h_k \in \mathcal{H},\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ \#F < \infty\right\},$$

y

$$\mathbf{S} = gen\left\{\mathcal{H}\right\} \otimes \ell^2\left(\mathbb{Z}^+\right) = \left\{\sum_{k\in F} h_k \boldsymbol{\alpha}_k \ : \ h_k \in \mathcal{H},\ \boldsymbol{\alpha}_k \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^+\right),\ \#F < \infty\right\},$$

ambos densos en $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ y $L^2\left(\mathbb{R}^+,\ell^2\right)$, respectivamente, ya que $\mathcal{H}$ es una base ortonormal de $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$. Sean $\varphi \in S$ y $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{S}$, $\boldsymbol{\psi} = \left(\psi_i\right)_{i\in\mathbb{Z}^+}$, con $\delta\left(sop\left(\varphi\right), sop\left(\boldsymbol{\psi}\right)\right) > 0$. Denotemos $A = sop\left(\varphi\right)$, $B = sop\left(\boldsymbol{\psi}\right)$. Obsérvese que, dado $i \in \mathbb{Z}^+$, $\left\langle \varphi, h_i^j\right\rangle = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ excepto, quizás, una cantidad finita de $j \in F$, $F \subseteq \mathbb{Z}$. Recordemos a su vez que $T_{(i)}f\left(x\right) =$

$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\langle f, h_i^j \right\rangle h_i^j(x)$. Utilizando este desarrollo en $\langle \mathbf{T}\varphi, \boldsymbol{\psi}\rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{T}\varphi, \boldsymbol{\psi}\rangle &= \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \left\langle T_{(i)}\varphi, \psi_i \right\rangle \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j\in F} \left\langle \varphi, h_i^j \right\rangle h_i^j(x)\, \psi_i(x)\, dx \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \int_B \left[\sum_{j\in F} \left(\int_A \varphi(y)\, h_i^j(y)\, dy \right) h_i^j(x) \right] \psi_i(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Por otra parte si consideramos la integral

$$I = \int_B \int_A \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \left| \sum_{j\in F} h_i^j(x)\, h_i^j(y) \right| |\varphi(y)|\, |\psi_i(x)|\, dydx,$$

y tenemos en cuenta la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_B \int_A \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \left| \sum_{j\in F} h_i^j(x)\, h_i^j(y) \right|^2 |\varphi(y)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^+} |\psi_i(x)|^2 \right)^{1/2} dydx \\
&\leq \int_B \int_A |\varphi(y)| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \left| \sum_{j\in F} h_i^j(x)\, h_i^j(y) \right|^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\psi}(x)\|_{\ell^2}\, dydx \\
&\leq \int_B \int_A |\varphi(y)| \left(\frac{4}{\delta(x,y)^2} \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\psi}(x)\|_{\ell^2}\, dydx \\
&\leq 2 \int_A |\varphi(y)| \left(\int_B \frac{1}{\delta(x,y)^2} dx \right)^{1/2} dy\, \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\ell^2)} < \infty,
\end{aligned}$$

ya que $\delta(x,y)$ está acotada inferiormente. La finitud de I nos permite intercambiar las sumas con las integraciones en $\langle \mathbf{T}\varphi, \boldsymbol{\psi}\rangle$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{T}\varphi, \boldsymbol{\psi}\rangle &= \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \int_B \left[\sum_{j\in F} \left(\int_A \varphi(y)\, h_i^j(y)\, dy \right) h_i^j(x) \right] \psi_i(x)\, dx \\
&= \int_B \int_A \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \left[\sum_{j\in F} h_i^j(y)\, h_i^j(x) \right] \varphi(y)\, \psi_i(x)\, dydx \\
&= \int_B \int_A \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} K_i(x,y)\, \varphi(y)\, \psi_i(x)\, dydx \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{K}(x,y)\, \varphi(y), \boldsymbol{\psi}(x) \rangle_{\ell^2}\, dydx,
\end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración del Teorema. $\square$

Como corolario inmediato de este teorema, gracias a la teoría de acotación de operadores de Calderón-Zygmund valuados en espacios de Banach, se sigue la siguiente acotación de $\mathbf{T}$.

COROLARIO 10.9. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 10.8 el operador* $\mathbf{T}$ *es continuo de* $L^p(\mathbb{R}^+)$ *en* $L^p(\mathbb{R}^+, \ell^2)$ *para* $1 < p < \infty$.

4. Regularidad de soluciones del laplaciano fraccionario diádico en espacios de Sobolev

En esta última parte veremos cómo utilizar la noción de gradiente fraccionario para obtener caracterizaciones de los espacios de Sobolev fraccionarios y, también, estimaciones de regularidad de soluciones.

Recordemos que, como vimos en el capítulo anterior, asociada al laplaciano D^s existe una forma de energía, que denotaremos $\mathcal{E}^s_{dy}$, dada por

$$\mathcal{E}^s_{dy}(f) := \frac{1}{2}\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\left(\frac{f(x)-f(y)}{\delta(x,y)^s}\right)^2\frac{dxdy}{\delta(x,y)} = B^s_{dy}(f,f),$$

donde B^s_{dy} es la forma bilineal (9.6) introducida en el capítulo anterior, la cual satisface

$$\mathcal{E}^s_{dy}(f) = \langle f, D^s f\rangle,$$

para funciones f en la clase $C^\gamma(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\gamma > s$ y, particularmente, para funciones en $S = gen\{\mathcal{H}\}$, el generado lineal del sistema de funciones de Haar. Por otra parte, esta forma bilineal nos permite describir las clases de Sobolev $H^s_{dy}(\mathbb{R}^+)$, asociada a $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$, del siguiente modo

$$H^s_{dy}(\mathbb{R}^+) := \left\{f \in L^2 : \mathcal{E}^s_{dy}(f) < \infty\right\}.$$

En el siguiente Teorema utilizamos el gradiente fraccionario no sólo para recaracterizar los espacios de Sobolev $H^s_{dy}(\mathbb{R}^+)$ sino también para pensar a la forma bilineal $\mathcal{E}^s_{dy}$ como un producto escalar de gradientes fraccionarios.

TEOREMA 10.10. *Sea* $0 < s < \frac{1}{2}$. *Entonces*

$$H^s_{dy}(\mathbb{R}^+) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^+) : \nabla^s_{dy} f \in L^2\left(\mathbb{R}^+, \ell_2\left(\mathbb{Z}^+\right)\right)\right\}.$$

En particular

$$\mathcal{E}^s_{dy}(f) = c\left\|\nabla^s_{dy} f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+,\ell_2)}.$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo al Teorema 9.19 tenemos que $\mathcal{E}^s_{dy}(f) = c\sum_{Q\in\mathbb{D}}\frac{|\langle f,h_Q\rangle|^2}{|Q|^{2s}}$, para alguna constante $c > 0$, esto implica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\mathcal{E}^s_{dy}(f) &= \sum_{Q\in\mathbb{D}}\frac{|\langle f,h_Q\rangle|^2}{|Q|^{2s}} = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2sj}\left|\left\langle f, h^j_i\right\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{i\geq 0}\left\|D^s_{(i)} f\right\|^2_{L^2} = \left\|\nabla^s_{dy} f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+,\ell_2)},\end{aligned}$$

esto es,

$$\left\| \nabla_{dy}^{s} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\ell_2)}^2 = c \sum_{Q \in \mathbb{D}} \frac{\left| \langle f, h_Q \rangle \right|^2}{|Q|^{2s}}.$$

de lo cual se sigue inmediatamente que

$$\mathcal{E}_{dy}^{s}(f) < \infty \text{ si y sólo si } \nabla_{dy}^{s} f \in L^2\left(\mathbb{R}^+, \ell_2\left(\mathbb{Z}^+\right)\right),$$

lo cual demuestra el resultado. □

Finalmente, cabe notar que la introducción de este gradiente fraccionario y esta caracterización de espacios de Sobolev permite un resultado inmediato de regularidad de soluciones.

TEOREMA 10.11. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ y u solución de*

$$D_{dy}^{\sigma} u = f. \tag{10.8}$$

Entonces

$$\left\| \nabla_{dy}^{\sigma} u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\ell^2)} \leq C_p \left\| f \right\|_{L^p}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como hemos demostrado en la sección anterior, podemos utilizar a D^{σ} para descomponer al gradiente en la forma (10.7) esto es

$$\nabla_{dy}^{\sigma} = \mathbf{T} \circ D^{\sigma}.$$

Como vimos, $\mathbf{T}$ es un operador de Calderón-Zygmund ℓ^2-valuado, por lo cual es un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^+)$ en $L^p(\mathbb{R}^+, \ell^2)$, para $1 < p < \infty$. Luego

$$\left\| \nabla_{dy}^{\sigma} u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\ell^2)} = \left\| \mathbf{T} \circ D^{\sigma} u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\ell^2)} \leq C_p \left\| D^{\sigma} u \right\|_{L^p} = C_p \left\| f \right\|_{L^p},$$

lo cual permite deducir que toda solución u de 10.8 automáticamente satisface la condición $\nabla_{dy}^{\sigma} u \in L^p(\mathbb{R}^+, \ell^2)$. □

5. Referencias bibliográficas y comentarios adicionales

Cabe profundizar aquí un poco más acerca de los trabajos pioneros de Alberto Calderón de los años cincuenta ([CZ52], [CZ56b], [CZ56a], [Cal67]), los cuales contienen los resultados clásicos de la teoría de integrales singulares, resultados asociados al caso del análisis de Fourier. En [CZ52] Antoni Zygmund y Alberto Calderón se interesan por operadores del tipo

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy, \tag{10.9}$$

donde la función K no necesariamente es localmente integrable sobre $\mathbb{R}^n$. Esta clase de operadores surgen de un modo natural al estudiar estimaciones a priori de ecuaciones diferenciales. Si consideramos simplemente la ecuación de Laplace $\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$, su solución está dada por el potencial Newtoniano

$$u(x) = C_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

Cabe preguntarse qué clase de propiedades de u pueden deducirse a partir de la información del dato f y haciendo uso de esta fórmula. Manipulando dicha expresión se observa que, salvo constantes,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \delta_{ij} f(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy,$$

para $K(x,y) = \frac{\Omega_{ij}(x-y)}{|x-y|^n}$, con $\Omega_{ij}(x) = \frac{x_i x_j}{|x-y|^2}$, núcleo evidentemente no integrable, el cual requiere de un análisis minucioso a fin de darle sentido a la integración anterior. De modo más general, en lugar del operador laplaciano, uno puede considerar un operador diferencial de orden m de la forma

$$L = \sum_{|\alpha|=m} h_\alpha(x)\, \partial^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} h_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

y mostrar que dicho operador puede escribirse como

$$L = \left(\sum_{|\alpha|=m} h_\alpha(x)\, R_1^{\alpha_1} \dots R_n^{\alpha_n}\right) (-\Delta)^{m/2}$$

donde cada R_j representa la transformada j-ésima de Riesz, operador integral singular con núcleo $K_j(x) = \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, como hemos visto. Por lo tanto, salvo un factor $(-\Delta)^{m/2}$, una potencia fraccionaria del laplaciano, todo operador en derivadas parciales es simplemente un tipo especial de operador integral singular. De aquí la importancia de su estudio. En [**CZ52**], Calderón y Zygmund analizan los núcleos de la forma $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, así como sus truncamientos $K_\varepsilon(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} 1_{[|x|>\varepsilon]}$, definidos en $\mathbb{R}^n$, y establecen condiciones necesarias sobre Ω para poder determinar la existencia puntual del operador del tipo (10.9), propiedades de acotación y propiedades de convergencia en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. Como mencionamos en la sección final del Capítulo 1, es en estos trabajos donde emerge la técnica de descomposición de Calderón-Zygmund y el uso de lemas de cubrimiento de tipo Wiener o Vitali asociados al estudio de desigualdades de tipo débil y de tipo fuerte tanto de los operadores de truncado de las integrales singulares mencionadas, como de los operadores maximales respectivos, maximal de Hardy-Littewood inclusive. Técnicas y análisis que inspiraron la axiomatización de los espacios de tipo homogéneo llevada a cabo por Coifman, Weiss y de Guzmán. Notemos que la idea seminal de sus trabajos descansa sobre el estudio de los operadores (10.9) sobre grupos topológicos más generales que $(\mathbb{R}^n, +)$. El propio Alberto Calderón en [**Cal53**] había mostrado la importancia de este enfoque estudiando la convergencia de promedios ergódicos del tipo

$$\frac{1}{|B(0,t)|} \int\limits_{B(0,t)} F(x+y)\, dy$$

sobre grupos localmente compactos en lugar de $(\mathbb{R}^n, +)$. Coifman, Weiss y de Guzmán axiomatizaron, reformularon y visibilizaron varias de las ideas y técnicas de los trabajos de Calderón (entre otros autores) y lograron así dar con un contexto general adecuado a fin de extenderlas. Y lo más interesante es que dicho contexto se ha propiciado de una riqueza tal que con el tiempo ha permitido renunciar a la estructura algebraica subyacente que lo soportaba. Prescindiendo de estructuras diádicas, basaron su extensión en la propiedad de homogeneidad sobre estructuras métricas, propiedad que, como hemos visto, restringe (esto es, que mantiene acotada) la dispersión de los puntos del conjunto. Junto a esta propiedad y al uso de medidas duplicantes, lograron extender los lemas de cubrimiento de Wiener y Whitney, y con estos dos lemas, extender la tecnica de descomposición de Calderón y Zygmund, así como las acotaciones de la maximal de Hardy Littlewood.

Cabe finalmente hacer notar que algunas preguntas interesantes relacionadas con los espacios de Sobolev del contexto desarrollado surgen de la definición de espacios de Sobolev del tipo

$$W^{s,p}_{dy} = \left\{ f \in L^p\left(\mathbb{R}^+\right) : \nabla^s_{dy} f \in L^p\left(\mathbb{R}^+, \ell_2\left(\mathbb{Z}^+\right)\right)\right\}$$

así como sus propiedades de inmersión en los espacios de Hölder y Lebesgue, y su relación con los espacios de Sobolev estudiados en el Capítulo 4. Asimismo, es interesante el abordaje de la extensión de estos gradientes fraccionarios a estructuras diádicas más arbitrarias, así como el estudio comparativo de los distintos gradientes fraccionarios que surjan de distintas estructuras diádicas.

Los resultados desarrollados en este capítulo pueden verse en ([ACGN20]), artículo en revisión para su publicación.

Conclusiones y Bibliografía

Conclusiones

* Establecimos los parámetros de regularidad de la cuasimetricidad, importante en los resultados centrales de este trabajo.

* Establecimos y determinamos condiciones geométricas que nos permitieron definir un operador de extensión en espacios de Sobolev de tipo Aronszajn-Gagliardo-Slobodeckij.

* Demostramos teoremas de inmersiones compactas de dichos espacios en espacios de Lebesgue.

* Establecimos un teorema de existencia de espectro para el laplaciano fraccionario definido sobre espacios de tipo homogéneo Ahlfors regulares y aplicamos métodos de energía para determinar el espectro débil del laplaciano fraccionario de modo tal que nos permitiera deslindar las características funcionales de las características geométricas.

* Probamos algunas de las propiedades más básicas del espectro.

* Determinamos fehacientemente el espectro del laplaciano fraccionario diádico sobre una subclase de dominios regulares.

* Obtuvimos estimaciones del comportamiento asintótico de los autovalores del laplaciano fraccionario diádico definido sobre dominios regulares.

* Introdujimos una nueva noción de derivación parcial fraccionaria en el contexto diádico, la cual ha permitido una caracterización alternativa de los espacios de Sobolev y un teorema de regularidad de soluciones.

* Como problemas abiertos de importancia han quedado pendientes: la determinación de la trivialidad, para valores grandes de regularidad, de los espacios de Sobolev fraccionarios dotados de la seminorma de Aronszajn-Gagliardo-Slobodeckij; la caracterización de los dominios de extensión Sobolev de dichos espacios; la determinación de condiciones necesarias y suficientes sobre un dominio de un espacio cuasimétrico que permitan asegurar la densidad de las funciones Hölder en la clase de funciones de Sobolev mencionada; la caracterización de los dominios regulares diádicos; la descripción del espectro del laplaciano fraccionario diádico sobre dominios regulares arbitrarios; la conexión entre los espectros del laplaciano fraccionario diádico y del laplaciano fraccionario euclídeo.

Bibliografía

[AABG16] Marcelo Actis, Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez, *Nonlocal Schrödinger equations in metric measure spaces*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), no. 1, 425–439. MR 3423406

[AB17] Gabriel Acosta and Juan Pablo Borthagaray, *A fractional Laplace equation: regularity of solutions and finite element approximations*, SIAM J. Numer. Anal. **55** (2017), no. 2, 472–495. MR 3620141

[ABG13] Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez, *On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data*, J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34. MR 3063102

[ABG21] Hugo Aimar, Pablo Bolcatto, and Ivana Gómez, *On fractional uncertainty: a dyadic approach*, Appl. Anal. **100** (2021), no. 5, 975–991. MR 4227011

[ABH19] Gabriel Acosta, Juan Pablo Borthagaray, and Norbert Heuer, *Finite element approximations of the nonhomogeneous fractional Dirichlet problem*, IMA J. Numer. Anal. **39** (2019), no. 3, 1471–1501. MR 4023752

[ABN11] Hugo Aimar, Ana Bernardis, and Luis Nowak, *Dyadic Fefferman-Stein inequalities and the equivalence of Haar bases on weighted Lebesgue spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **141** (2011), no. 1, 1–21. MR 2773436

[ACGN20] Hugo Aimar, Juan Comesatti, Ivana Gómez, and Luis Nowak, *Partial derivatives, singular integrals and Sobolev spaces in dyadic settings*, arXiv preprint arXiv:2004.10940 (2020).

[Act14] Marcelo Jesús Actis, *Difusiones no locales y operadores de derivación fraccionaria en espacios métricos de medida*, Tesis doctoral, FIQ- Universidad Nacional del Litoral, IMAL, CONICET, 2014.

[Aim] Hugo Aimar, *Distance and Measure in Analysis and PDE*, Preprint.

[AIN98] Hugo Aimar, Bibiana Iaffei, and Liliana Nitti, *On the Macías-Segovia metrization of quasi-metric spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina **41** (1998), no. 2, 67–75. MR 1700292

[AM15] Ryan Alvarado and Marius Mitrea, *Hardy spaces on Ahlfors-regular quasi metric spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2142, Springer, Cham, 2015, A sharp theory. MR 3310009

[Ass83] Patrice Assouad, *Plongements lipschitziens dans* $\mathbf{R}^n$, Bull. Soc. Math. France **111** (1983), no. 4, 429–448. MR 763553

[BA72] Ivo Babuška and A. K. Aziz, *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method*, The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972), 1972, With the collaboration of G. Fix and R. B. Kellogg, pp. 1–359. MR 0421106

[Bab71] Ivo Babuška, *Error-bounds for finite element method*, Numer. Math. **16** (1970/71), 322–333. MR 288971

[BBM01] Jean Bourgain, Haim Brezis, and Petru Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, Optimal control and partial differential equations, IOS, Amsterdam, 2001, pp. 439–455. MR 3586796

[BCP62] A. Benedek, A.-P. Calderón, and R. Panzone, *Convolution operators on Banach space valued functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **48** (1962), 356–365. MR 133653

[Ber72] F. A. Berezin, *Covariant and contravariant symbols of operators*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 1134–1167. MR 0350504

[BG59] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, *The asymptotic distribution of the eigenvalues for a class of Markov operators*, Pacific J. Math. **9** (1959), 399–408. MR 107298

[BK96] Stephen M. Buckley and Pekka Koskela, *Criteria for imbeddings of Sobolev-Poincaré type*, Internat. Math. Res. Notices (1996), no. 18, 881–901. MR 1420554

[Bla10] Oscar Blasco, *Some aspects of vector-valued singular integrals*, Recent developments in real and harmonic analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2010, pp. 37–56. MR 2597762

[BO91a] I Babuska and J Osborn, *Eigenvalue problems, in âĂIJhandbook of numerical analysisâĂİ, vol. ii*, PG Ciarlet and JL Lions Editions, Elsevier science Publishers BV (North-Holland) (1991), 645–785.

[BO91b] I. Babuška and J. Osborn, *Eigenvalue problems*, Handbook of numerical analysis, Vol. II, Handb. Numer. Anal., II, North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 641–787. MR 1115240

[Bor20] David Borthwick, *Spectral theory—basic concepts and applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 284, Springer, Cham, [2020] ©2020. MR 4180682

[Bre02] Kh. Brezis, *How to recognize constant functions. A connection with Sobolev spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 4(346), 59–74. MR 1942116

[Bre11] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829

[BV16] Claudia Bucur and Enrico Valdinoci, *Nonlocal diffusion and applications*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 20, Springer, [Cham]; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016. MR 3469920

[Cal53] A. P. Calderon, *A general ergodic theorem*, Ann. of Math. (2) **58** (1953), 182–191. MR 55415

[Cal61] A.-P. Calderón, *Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961, pp. 33–49. MR 0143037

[Cal67] ———, *Algebras of singular integral operators*, Singular integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966), 1967, pp. 18–55. MR 0394309

[Cal72] A. P. Calderón, *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions*, Studia Math. **44** (1972), 563–582. MR 348555

[CdG71] Ronald R. Coifman and Miguel de Guzmán, *Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina **25** (1970/71), 137–143. MR 320644

[CH53] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. I*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953. MR 0065391

[Chr90] Michael Christ, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloq. Math. **60/61** (1990), no. 2, 601–628. MR 1096400

[CS07] Luis Caffarelli and Luis Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260. MR 2354493

[CW71] Ronald R. Coifman and Guido Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Étude de certaines intégrales singulières. MR 0499948

[CZ52] A. P. Calderon and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139. MR 52553

[CZ56a] A. P. Calderón and A. Zygmund, *Algebras of certain singular operators*, Amer. J. Math. **78** (1956), 310–320. MR 87810

[CZ56b] ———, *On singular integrals*, Amer. J. Math. **78** (1956), 289–309. MR 84633

[Dav91] Guy David, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1465, Springer-Verlag, Berlin, 1991. MR 1123480

[dG81] Miguel de Guzmán, *Real variable methods in Fourier analysis*, Notas de Matemática [Mathematical Notes], vol. 75, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981. MR 596037

[Die81] Jean Dieudonné, *History of functional analysis*, Notas de Matemática [Mathematical Notes], vol. 77, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981. MR 605488

[DK21a] Bartł omiej Dyda and MichałKijaczko, *On density of compactly supported smooth functions in fractional Sobolev spaces*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (2021).

[DK21b] ———, *On density of smooth functions in weighted fractional Sobolev spaces*, Nonlinear Anal. **205** (2021), Paper No. 112231, 10. MR 4190640

[DLV21] Bartłomiej Dyda, Juha Lehrbäck, and Antti V Vähäkangas, *Fractional poincar\'e and localized hardy inequalities on metric spaces*, arXiv preprint arXiv:2108.07209 (2021).

[DMS19] Simone Di Marino and Marco Squassina, *New characterizations of Sobolev metric spaces*, J. Funct. Anal. **276** (2019), no. 6, 1853–1874. MR 3912793

[DNPV12] Eleonora DiÑezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 5, 521–573. MR 2944369

[DS84] Ronald A. DeVore and Robert C. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc. **47** (1984), no. 293, viii+115. MR 727820

[DV14] Bartł omiej Dyda and Antti V. Vähäkangas, *A framework for fractional Hardy inequalities*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **39** (2014), no. 2, 675–689. MR 3237044

[Eva10] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943

[FSV15] Alessio Fiscella, Raffaella Servadei, and Enrico Valdinoci, *Density properties for fractional Sobolev spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **40** (2015), no. 1, 235–253. MR 3310082

[Gat06] A. Eduardo Gatto, *On fractional calculus associated to doubling and non-doubling measures*, Harmonic analysis, Contemp. Math., vol. 411, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 15–37. MR 2246639

[GCRdF85] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. MR 807149

[Get57] R. K. Getoor, *Additive functionals of a Markov process*, Pacific J. Math. **7** (1957), 1577–1591. MR 94850

[Get59] ______, *Markov operators and their associated semi-groups*, Pacific J. Math. **9** (1959), 449–472. MR 107297

[Giu03] Enrico Giusti, *Direct methods in the calculus of variations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003. MR 1962933

[GKS10] Amiran Gogatishvili, Pekka Koskela, and Nageswari Shanmugalingam, *Interpolation properties of Besov spaces defined on metric spaces*, Math. Nachr. **283** (2010), no. 2, 215–231. MR 2604119

[GKZ13] Amiran Gogatishvili, Pekka Koskela, and Yuan Zhou, *Characterizations of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on metric measure spaces*, Forum Math. **25** (2013), no. 4, 787–819. MR 3089750

[GLY09] Loukas Grafakos, Liguang Liu, and Dachun Yang, *Vector-valued singular integrals and maximal functions on spaces of homogeneous type*, Math. Scand. **104** (2009), no. 2, 296–310. MR 2542655

[Gr53] Lars Gå rding, *On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators*, Math. Scand. **1** (1953), 237–255. MR 64980

[Gra14a] Loukas Grafakos, *Classical Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2014. MR 3243734

[Gra14b] ______, *Modern Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 250, Springer, New York, 2014. MR 3243741

[GSV96] A. Eduardo Gatto, Carlos Segovia, and Stephen Vági, *On fractional differentiation and integration on spaces of homogeneous type*, Rev. Mat. Iberoamericana **12** (1996), no. 1, 111–145. MR 1387588

[GT01] Vladimir Gol'dshtein and Marc Troyanov, *Axiomatic theory of Sobolev spaces*, Expo. Math. **19** (2001), no. 4, 289–336. MR 1876253

[Ha96] Piotr Hajł asz, *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, Potential Anal. **5** (1996), no. 4, 403–415. MR 1401074

[HaK98] Piotr Hajł asz and Juha Kinnunen, *Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), no. 3, 601–622. MR 1681586

[HaKT08a] Piotr Hajł asz, Pekka Koskela, and Heli Tuominen, *Measure density and extendability of Sobolev functions*, Rev. Mat. Iberoam. **24** (2008), no. 2, 645–669. MR 2459208

[HaKT08b] ______, *Sobolev embeddings, extensions and measure density condition*, J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 5, 1217–1234. MR 2386936

[HaM97] Piotr Hajł asz and Olli Martio, *Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains*, J. Funct. Anal. **143** (1997), no. 1, 221–246. MR 1428124

[Har02] Petteri Harjulehto, *Sobolev extension domains on metric spaces of homogeneous type*, Real Anal. Exchange **27** (2001/02), no. 2, 583–597. MR 1922670

[Har06] ______, *Traces and Sobolev extension domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 8, 2373–2382. MR 2213711

[HIT16] Toni Heikkinen, Lizaveta Ihnatsyeva, and Heli Tuominen, *Measure density and extension of Besov and Triebel-Lizorkin functions*, J. Fourier Anal. Appl. **22** (2016), no. 2, 334–382. MR 3471303

[Hu03] Jiaxin Hu, *A note on Hajłasz-Sobolev spaces on fractals*, J. Math. Anal. Appl. **280** (2003), no. 1, 91–101. MR 1972194

[IK09] I. A. Ivanishko and V. G. Krotov, *Compactness of embeddings of Sobolev type on metric measure spaces*, Mat. Zametki **86** (2009), no. 6, 829–844. MR 2643451

[Jon81] Peter W. Jones, *Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces*, Acta Math. **147** (1981), no. 1-2, 71–88. MR 631089

[JW84] Alf Jonsson and Hans Wallin, *Function spaces on subsets of* $\mathbf{R}^n$, Math. Rep. **2** (1984), no. 1, xiv+221. MR 820626

[Ka99] Agnieszka Kał amajska, *On compactness of embedding for Sobolev spaces defined on metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24** (1999), no. 1, 123–132. MR 1677969

[Kat95] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition. MR 1335452

[Kos98] P. Koskela, *Extensions and imbeddings*, J. Funct. Anal. **159** (1998), no. 2, 369–383. MR 1658090

[KRZ15] Pekka Koskela, Tapio Rajala, and Yi Ru-Ya Zhang, *A geometric characterization of planar sobolev extension domains*, arXiv preprint arXiv:1502.04139 (2015).

[Kwa12] Mateusz Kwaśnicki, *Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the interval*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 5, 2379–2402. MR 2876409

[Kwa17] ———, *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, Fract. Calc. Appl. Anal. **20** (2017), no. 1, 7–51. MR 3613319

[Lan72] N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 180, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972, Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy. MR 0350027

[Leo17] Giovanni Leoni, *A first course in Sobolev spaces*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 181, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. MR 3726909

[LS98] Jouni Luukkainen and Eero Saksman, *Every complete doubling metric space carries a doubling measure*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 2, 531–534. MR 1443161

[LY83] Peter Li and Shing Tung Yau, *On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem*, Comm. Math. Phys. **88** (1983), no. 3, 309–318. MR 701919

[Mar80] O. Martio, *Definitions for uniform domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **5** (1980), no. 1, 197–205. MR 595191

[Mar15] Miguel Andrés Marcos, *Funciones de Sobolev y Besov en espacios métricos*, Tesis doctoral, FIQ-Universidad Nacional del Litoral, IMAL, CONICET, 2015.

[Maz81] V. G. Maz'ya, *On the extension of functions belonging to s. l. sobolev spaces*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **113** (1981), 231–236, 269, Investigations on linear operators and the theory of functions, XI. MR 629847

[MBRS16] Giovanni Molica Bisci, Vicentiu D. Radulescu, and Raffaella Servadei, *Variational methods for nonlocal fractional problems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 162, Cambridge University Press, Cambridge, 2016, With a foreword by Jean Mawhin. MR 3445279

[Mel03] Antonios D. Melas, *A lower bound for sums of eigenvalues of the Laplacian*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 2, 631–636. MR 1933356

[MMMM13] Dorina Mitrea, Irina Mitrea, Marius Mitrea, and Sylvie Monniaux, *Groupoid metrization theory*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser/Springer, New York, 2013, With applications to analysis on quasi-metric spaces and functional analysis. MR 2987059

[Mon73] A. F. Monna, *Functional analysis in historical perspective*, John Wiley & Sons, New York-Toronto, Ont., 1973. MR 0482022

[Mos97] Umberto Mosco, *Variational fractals*, vol. 25, 1997, Dedicated to Ennio De Giorgi, pp. 683–712 (1998). MR 1655537

[MS79a] Roberto A. Macías and Carlos Segovia, *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), no. 3, 271–309. MR 546296

[MS79b] ______, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979).

[MS79c] O. Martio and J. Sarvas, *Injectivity theorems in plane and space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **4** (1979), no. 2, 383–401. MR 565886

[MW22] Diego Maldonado and Colin Williams, *Geometric characterizations of Hölder-continuous quasi-distances and applications*, J. Geom. Anal. **32** (2022), no. 1, Paper No. 29, 33. MR 4350214

[P6́1] G. Pólya, *On the eigenvalues of vibrating membranes*, Proc. London Math. Soc. (3) **11** (1961), 419–433. MR 129219

[PS09] Maciej Paluszyński and Krzysztof Stempak, *On quasi-metric and metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 12, 4307–4312. MR 2538591

[RdFRT86] José L. Rubio de Francia, Francisco J. Ruiz, and José L. Torrea, *Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels*, Adv. in Math. **62** (1986), no. 1, 7–48. MR 859252

[Rom93] A. S. Romanov, *On the extension of functions that belong to Sobolev spaces*, Sibirsk. Mat. Zh. **34** (1993), no. 4, 149–152, iv, ix. MR 1248799

[Rom13] N.Ñ. Romanovskiĭ, *Sobolev classes on an arbitrary metric measure space: compactness of embedding operators*, Sibirsk. Mat. Zh. **54** (2013), no. 2, 450–467. MR 3088608

[ROS14] Xavier Ros-Oton and Joaquim Serra, *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. (9) **101** (2014), no. 3, 275–302. MR 3168912

[RS78] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978. MR 0493421

[Ryc00] V. S. Rychkov, *Linear extension operators for restrictions of function spaces to irregular open sets*, Studia Math. **140** (2000), no. 2, 141–162. MR 1784629

[Sal16] Sandro Salsa, *Partial differential equations in action*, third ed., Unitext, vol. 99, Springer, [Cham], 2016, From modelling to theory, La Matematica per il 3+2. MR 3497072

[Ser13] Raffaella Servadei, *The Yamabe equation in a non-local setting*, Adv. Nonlinear Anal. **2** (2013), no. 3, 235–270. MR 3089742

[Shv06] Pavel Shvartsman, *Local approximations and intrinsic characterization of spaces of smooth functions on regular subsets of* $\mathbb{R}^n$, Math. Nachr. **279** (2006), no. 11, 1212–1241. MR 2247585

[Shv07] P. Shvartsman, *On extensions of Sobolev functions defined on regular subsets of metric measure spaces*, J. Approx. Theory **144** (2007), no. 2, 139–161. MR 2293385

[Shv10] Pavel Shvartsman, *On Sobolev extension domains in* $\mathbf{R}^n$, J. Funct. Anal. **258** (2010), no. 7, 2205–2245. MR 2584745

[Ste70] Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. MR 0290095

[Ste76] L. A. Steen, *Highlights in the history of spectral theory*, Wiadom. Mat. (2) **19** (1976), no. 2, 141–164. MR 433229

[SV12] Raffaella Servadei and Enrico Valdinoci, *Mountain pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. **389** (2012), no. 2, 887–898. MR 2879266

[SV13a] ———, *A Brezis-Nirenberg result for non-local critical equations in low dimension*, Commun. Pure Appl. Anal. **12** (2013), no. 6, 2445–2464. MR 3060890

[SV13b] ———, *Lewy-Stampacchia type estimates for variational inequalities driven by (non)local operators*, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), no. 3, 1091–1126. MR 3090147

[SV13c] ———, *Variational methods for non-local operators of elliptic type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), no. 5, 2105–2137. MR 3002745

[SV14a] ———, *On the spectrum of two different fractional operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **144** (2014), no. 4, 831–855. MR 3233760

[SV14b] ———, *Weak and viscosity solutions of the fractional Laplace equation*, Publ. Mat. **58** (2014), no. 1, 133–154. MR 3161511

[SZ17] Jiguang Sun and Aihui Zhou, *Finite element methods for eigenvalue problems*, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2017. MR 3617375

[V8̈8] Jussi Väisälä, *Uniform domains*, Tohoku Math. J. (2) **40** (1988), no. 1, 101–118. MR 927080

[VK87] A. L. Volberg and S. V. Konyagin, *On measures with the doubling condition*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), no. 3, 666–675. MR 903629

[Woj97] P. Wojtaszczyk, *A mathematical introduction to wavelets*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR 1436437

[Wu98] Jang-Mei Wu, *Hausdorff dimension and doubling measures on metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 5, 1453–1459. MR 1443418

[YM97] Ronald Coifman Yves Meyer, *Wavelets: Calderon-zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1997.

[Yol10] Selma Yildirim Yolcu, *An improvement to a Berezin-Li-Yau type inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 11, 4059–4066. MR 2679626

[Yos95] Kosaku Yosida, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the sixth (1980) edition. MR 1336382

[YYY12] Selma Yildirim Yolcu and Türkay Yolcu, *Bounds for the eigenvalues of the fractional Laplacian*, Rev. Math. Phys. **24** (2012), no. 3, 1250003, 18. MR 2902846

[Zho15] Yuan Zhou, *Fractional Sobolev extension and imbedding*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 2, 959–979. MR 3280034