



Encuentro  
de Jóvenes  
Investigadores

## INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE RADON Y SUS APLICACIONES EN TOMOGRAFÍA COMPUTADA

Joerin, María Emilia

*Instituto de Matemática Aplicada del Litoral IMAL-CONICET-UNL*

Director: Spies, Rubén

Área: Ciencias Exactas

Palabras claves: Problemas Inversos, Transformada de Radon, Estadística.

### INTRODUCCIÓN

Los problemas inversos aparecen en una muy amplia variedad de aplicaciones en física, problemas de fluorescencia, reología, medicina, problemas de conducción de calor, etc. El “mal condicionamiento”, propio de la mayoría de los problemas inversos, se origina en la violación de alguno de los tres postulados de Hadamard. En particular, el no cumplimiento del tercero de tales postulados tiene como consecuencia la falta de dependencia continua de los datos. En tales casos, se hace necesario el uso de herramientas matemáticas especiales llamadas “Métodos de regularización”, destinadas a lidiar con las complicaciones e inestabilidades que origina esa indeseable propiedad en el proceso de inversión.

Un ejemplo particular de problema inverso es la reconstrucción de una función a partir de sus proyecciones. Nuestra investigación está sustentada por los fundamentos matemáticos desarrollados en los trabajos de Johann Radon quien, en 1917, publicó la solución a este problema.

Dada una función real  $f$  definida en una región  $D$  del plano,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\omega$  un vector unitario, su transformada de Radon está definida por  $R\{f\}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\omega + s\underline{\omega}) ds$ , donde  $\underline{\omega}$  representa el vector ortogonal a  $\omega$ .

Título del proyecto: MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA PROBLEMAS INVERSOS Y APLICACIONES

Instrumento: CAI+D

Año convocatoria: 2020

Organismo financiador: UNL

Director: Spies, Rubén





## Encuentro de Jóvenes Investigadores

Por lo tanto, la inversión de la transformada de Radon consiste, precisamente, en reconstruir una función (de dos variables) a partir de la información de sus integrales a lo largo de trayectorias sobre su dominio de definición.

Desde el punto de vista teórico los problemas relacionados con la transformada de Radon y sus generalizaciones presentan varios retos en cuestiones tales como la obtención de soluciones explícitas en casos generales, cantidad suficiente de datos que permitan construcciones razonables, etc. Por otro lado, la implementación numérica de la fórmula de inversión en problemas prácticos, de aplicaciones concretas, resulta sumamente compleja. Destacando en este sentido que en todas las aplicaciones de Tomografía Computada los datos de la transformada de Radon se obtienen de manera discreta en ambos parámetros  $(t, \omega)$ . Adicionalmente, estos datos están altamente contaminados con ruidos provenientes de distintas fuentes, tales como: la precisión limitada del detector, el ruido electrónico proveniente de diversos componentes del tomógrafo, movimientos del objeto irradiado, etc. Por esta razón es altamente deseable diseñar herramientas matemáticas que, teniendo en cuenta la inversibilidad de la transformada de Radon, permitan obtener aproximaciones de  $f$  a partir de datos discretizados y contaminados con ruido de  $R\{f\}$ .

### OBJETIVOS

- Estudiar la transformada de Radon: definición, caracterización, propiedades, inversión teórica.
- Incorporar el uso de herramientas y métodos estadísticos bayesianos para problemas inversos.
- Implementar un algoritmo de inversión estadística bayesiana secuencial de la transformada de Radon.

### METODOLOGÍA

La primera etapa se basó en la lectura y estudio de la transformada de Radon. Principalmente su buena definición, sus propiedades y su importante relación con la transformada de Fourier que nos condujo a su inversión teórica. En esta instancia, además, analizamos los supuestos físicos que nos permiten asociar la transformada de Radon con la Tomografía Computada.

La segunda etapa se concentró en la búsqueda de herramientas que permitan obtener la inversa de la transformada de Radon de manera robusta a fin de lograr implementarla en problemas prácticos. Es así que la investigación continuó con el estudio de Estadística Bayesiana, incorporando nuevas técnicas sofisticadas que nos permitieron arribar a su "inversión secuencial bayesiana". Este método consiste en la incorporación de datos de manera secuencial a fin de obtener una sucesión de reconstrucciones de calidad creciente.

Finalmente, en una tercera etapa, con algoritmos basados en la concepción bayesiana del problema inverso en cuestión, se logró la implementación de un método factible





Encuentro  
de Jóvenes  
Investigadores

computacionalmente para la inversión de la transformada de Radon.

### CONCLUSIONES

A lo largo de la investigación hemos logrado implementar un método computacionalmente factible para la inversión de la transformada de Radon utilizando estadística bayesiana. Dicho método nos permitió obtener reconstrucciones satisfactorias no sólo para objetos rígidos sino también para objetos móviles. El objetivo se alcanzó basándonos en aportes de grandes matemáticos y en herramientas de otras disciplinas tales como la física y la medicina. Debido a esto, deseamos destacar la importancia de la interdisciplina en la investigación.

### BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- Calvetti, D. y Somersalo, E., 2007.** Introduction to Bayesian Scientific Computing: ten lectures on subjective computing. Springer. New York.
- Epstein, C., 2008.** Introduction to the mathematics of medical imaging. 2<sup>a</sup> ed. SIAM. Philadelphia.
- Natterer, F., 1986.** The mathematics of computerized tomography. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Radon, J., 1917.** Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse, 69, 262-277.

