

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



DOCTORADO EN INGENIERÍA

**APORTES AL SEGUIMIENTO DE  
REFERENCIAS GENÉRICAS CON  
CONTROL PREDICTIVO BASADO EN  
MODELOS**

Ignacio Julián Rodolfo Sánchez

FICH

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

INTEC

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

CIMEC

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

*sinc(i)*

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

Tesis de Doctorado **2022**





**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL**

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

**APORTES AL SEGUIMIENTO DE REFERENCIAS  
GENÉRICAS CON CONTROL PREDICTIVO BASADO EN  
MODELOS**

**Ignacio Julián Rodolfo Sánchez**

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado como parte  
de los requisitos para la obtención del grado de

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas

de la

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL**

**2022**

Comisión de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria, Paraje El Pozo,  
S3000, Santa Fe, Argentina





UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

## **APORTES AL SEGUIMIENTO DE REFERENCIAS GENÉRICAS CON CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELOS**

**Ignacio Julián Rodolfo Sánchez**

### **Lugar de Trabajo:**

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)  
UNL - CONICET

### **Director:**

Dr. Alejandro Limache IMAL/ CONICET

### **Co-director:**

Dr. Alejandro González INTEC/UNL/CONICET

### **Jurado Evaluador**

Dr. Ernesto Kofman CIFASIS/CONICET

Dr. Diego Feroldi CIFASIS/CONICET

Dr. Guido Sánchez Sinc(i)/UNL/CONICET





**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL**  
**Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas**

Santa Fe, 29 de Julio de 2022.

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada **“Aportes al seguimiento de referencias genéricas con control predictivo basado en modelos”**, desarrollada por el Ing. Ignacio Julián Rodolfo SÁNCHEZ, en el marco de la Mención “Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas”, certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de dos copias encuadernadas de la versión final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

-----  
Dr. Diego Feroldi

-----  
Dr. Ernesto Kofman

-----  
Dr. Guido Sánchez

Santa Fe, 29 de Julio de 2022.

Certifico haber leído la Tesis, preparada bajo mi dirección en el marco de la Mención “Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas” y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

.....  
Dr. Alejandro González  
Codirector de Tesis

.....  
Dr. Alejandro Limache  
Director de Tesis



*MACOR*  
Dr. JOSÉ LUIS MACOR  
SECRETARIO DE POSGRADO  
Facultad de Ingeniería y Cs. Hídricas

Universidad Nacional del Litoral  
Facultad de Ingeniería y  
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria  
C.C. 217  
Ruta Nacional N° 168 - Km. 472,4  
(3000) Santa Fe  
Tel: (54) (0342) 4575 229  
Fax: (54) (0342) 4575 224  
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar





## **DECLARACION DEL AUTOR**

Esta tesis ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería - Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté a disposición de sus lectores bajo las condiciones estipuladas por el Reglamento de la mencionada Biblioteca.

Citaciones breves de esta tesis son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para la citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concebidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Trabajos Relacionados . . . . .	3
1.3. Problemas de Control . . . . .	4
1.3.1. Regulación . . . . .	5
1.3.2. Seguimiento de un punto de trabajo . . . . .	5
1.3.3. Seguimiento de Trayectorias ( <i>trajectory tracking</i> ) . . . . .	6
1.3.4. Seguimiento de Curvas ( <i>path-following</i> ) . . . . .	7
1.3.5. Seguimiento de Zonas . . . . .	7
1.3.6. Problemas de Planeamiento y Seguimiento . . . . .	8
1.4. Control Predictivo Basado en Modelos . . . . .	8
1.5. Trabajos relacionados a las tareas de investigación . . . . .	11
1.6. Contribuciones . . . . .	12
1.7. Preliminares matemáticos . . . . .	13
1.7.1. Conjuntos controlables e Invariancia . . . . .	13
1.7.2. Estabilidad . . . . .	14
<b>2. MPC para Tracking: Seguimiento de Puntos de Trabajo</b>	<b>16</b>
2.1. Introducción . . . . .	16
2.2. MPC para Regulación . . . . .	17
2.2.1. Formulación de controlador estable . . . . .	17
2.3. MPC para Seguimiento de Puntos de Trabajo . . . . .	19
2.3.1. Diseño de condiciones terminales estabilizantes . . . . .	20
2.4. La necesidad del planeamiento en línea . . . . .	21
2.4.1. El problema de la pérdida de factibilidad del MPC frente a cambios de referencias . . . . .	21
2.4.2. Problema de Planeamiento . . . . .	22
2.5. Formulación del MPC para seguimiento de puntos de trabajo en dos capas . . . . .	23
2.6. Formulación del MPC para Tracking: Planeamiento en Línea . . . . .	24
2.6.1. Variables Artificiales como equilibrios del sistema . . . . .	25
2.6.2. Costo de Offset . . . . .	26
2.6.3. Restricción y costo terminales . . . . .	26
2.7. Caracterización de los conjuntos terminales . . . . .	26
2.7.1. Caracterización del conjunto de equilibrio de un sistema lineal . . . . .	27

2.7.2. Cómputo del conjunto invariante para tracking . . . . .	27
2.8. Propiedades del MPC para Tracking . . . . .	29
2.8.1. Estabilidad Asintótica del Controlador MPCT . . . . .	29
<b>3. MPC para Seguimiento de Trayectorias</b>	<b>34</b>
3.1. Introducción . . . . .	34
3.2. Formulación MPC para Seguimiento de Trayectorias . . . . .	35
3.3. MPC para seguimiento de trayectorias periódicas - Sistema LTI . . . . .	37
3.4. Controlador para seguimiento de trayectorias periódicas con planeamiento en línea. Formulación en dos capas. . . . .	37
3.5. MPC para Tracking de Trayectorias Periódicas: Sistemas LTI . . . . .	39
3.5.1. Caracterización del Dominio de atracción . . . . .	41
3.5.2. Ejemplo: Seguimiento de Trayectoria con sistema LTI . . . . .	43
3.6. MPC para Tracking de Trayectorias Periódicas: Sistema LTV periódico . . . . .	45
3.6.1. Caracterización del Dominio de atracción . . . . .	48
3.6.2. Ejemplo: Seguimiento de trayectoria con sistema LTV . . . . .	49
<b>4. MPC para tracking de sistemas periódicos</b>	<b>52</b>
4.1. Introducción . . . . .	52
4.2. Planteo del problema . . . . .	53
4.3. Preliminares . . . . .	54
4.3.1. Cálculo del Invariante para Tracking Periódico . . . . .	60
4.4. MPC para tracking de sistemas periódico con conjunto terminal . . . . .	62
4.4.1. Ejemplo ilustrativo . . . . .	64
<b>5. MPC para Seguimiento de Curvas</b>	<b>69</b>
5.1. Introducción . . . . .	69
5.1.1. Parametrización temporal . . . . .	71
5.2. MPC <i>Clásico</i> aplicado al Seguimiento de Curvas Paramétricas . . . . .	72
5.2.1. Planteo <i>Clásico</i> del Problema . . . . .	73
5.2.2. Formulación Clásica del Controlador . . . . .	73
5.3. MPC para Tracking aplicado al seguimiento de curvas paramétricas . . . . .	75
5.3.1. Formulación <i>flexibilizada</i> del Problema de Seguimiento . . . . .	76
5.3.2. Formulación del Controlador . . . . .	77
5.3.3. Análisis del sistema de lazo cerrado . . . . .	80
5.3.4. Ejemplo . . . . .	85
5.4. Extensión para Evasión de Obstáculos . . . . .	87
5.4.1. Planteo del Problema . . . . .	87
5.4.2. Modelado de los obstáculos . . . . .	87
5.4.3. Formulación del controlador . . . . .	89
5.5. Seguimiento de Curvas Periódicas: MPC para Tracking . . . . .	91
5.5.1. Planteo del problema . . . . .	91
5.5.2. Formulación del controlador . . . . .	92

5.5.3.	Análisis del sistema de lazo cerrado . . . . .	97
5.5.4.	Ejemplo: Sistema de bandeja y bola . . . . .	101
5.5.5.	Ejemplo: Seguimiento de curvas periódicas con un unicycle . . . . .	103
<b>6.</b>	<b>MPC para Seguimiento de Zonas: Sistemas impulsionales</b>	<b>106</b>
6.1.	Introducción . . . . .	106
6.2.	Sistema controlado por impulsos . . . . .	107
6.2.1.	Sistema de tiempo discreto asociado . . . . .	109
6.3.	Equilibrios e Invariantes de control impulsivo . . . . .	110
6.4.	Problema de Control . . . . .	111
6.5.	Caracterización del Invariante de Control . . . . .	112
6.5.1.	Caracterización de los conjuntos admisibles . . . . .	113
6.5.2.	Cómputo del Conjunto de Equilibrio de Control por Impulsos (ICES) . . . . .	115
6.5.3.	Cálculo del Conjunto Invariante de Control por Impulsos (ICIS) . . . . .	115
6.6.	MPC por zonas para sistemas controlados por impulsos . . . . .	116
6.6.1.	MPC por zonas . . . . .	116
6.6.2.	Ejemplo 1 . . . . .	117
6.6.3.	Ejemplo 2: Control de dosificación de iones de litio . . . . .	118
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>123</b>

# Índice de figuras

1.1.	Esquema de control por horizonte deslizante . . . . .	2
1.2.	Esquema de MPC con modo dual . . . . .	11
2.1.	Ejemplo de pérdida de factibilidad por cambio de referencia. . . . .	22
2.2.	Dominio de atracción con restricción terminal de igualdad. . . . .	30
2.3.	Ilustración del conjunto de estados admisible $\mathcal{X}$ , el conjunto invariante $O_\infty$ y el conjunto de estados de equilibrio $\mathcal{X}_a$ para el sistema doble integrador. . . . .	31
2.4.	Trayectoria resultante con un cambio de referencia. . . . .	32
2.5.	Evolución temporal de los estados y entradas. . . . .	33
3.1.	Esquema del sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	44
3.2.	Conjuntos de estados recurrentes y trayectorias para el sistema masa-resorte-amortiguador. 46	
a.	Conjunto de estados $T$ -recurrentes, $\mathcal{P}_T$ , para el sistema LTI masa-resorte-amortiguador (sombreado en rojo), para $T=15$ y conjunto controlable en $N$ pasos a $\mathcal{P}_T$ , $\mathcal{R}_N(\mathcal{P}_T)$ . . . . .	46
b.	Conjunto de estados $T$ -recurrentes, $\mathcal{P}_T$ (sombreado en rojo) y una trayectoria $T$ -periódica. . . . .	46
3.3.	Trayectorias de estado óptimas (predicha y artificial) para el estado inicial $x$ . . . . .	47
3.4.	Referencia y estados resultantes con el sistema de lazo cerrado. . . . .	47
3.5.	Trayectorias resultantes de $x_1$ y $x_2$ . . . . .	50
3.6.	Funcional de costo. . . . .	50
3.7.	Conjunto de estados $T$ -recurrentes para el sistema LTV masa-resorte-amortiguador para los tiempos $k \in [0, T - 1]$ , $T = 15$ . . . . .	51
4.1.	Ilustración de una función periódica de Lyapunov con $T=3$ (línea sólida) y una función de Lyapunov estándar (línea de trazos). . . . .	56
4.2.	Conjuntos de estados recurrentes y trayectorias periódicas para distintos puntos e instantes iniciales. . . . .	65
4.3.	Dominio de atracción (línea discontinua) y regiones terminales (línea de puntos) . . . . .	66
4.4.	Trayectoria de estados, variables artificiales y de referencia, sobre los conjuntos recurrentes e invariantes. . . . .	67
4.5.	Evolución temporal de los estados, variables artificiales y referencia. . . . .	67
4.6.	Entradas (arriba) y evolución del costo (abajo) . . . . .	68

5.1. Ilustración de trayectorias resultantes de diferentes parametrizaciones temporales de una curva. . . . .	72
5.2. Ilustración esquemática del modelo de unicycle. . . . .	85
5.3. Trayectoria resultante para el ejemplo de seguimiento de curvas con un unicycle frente al cambio abrupto de referencias. . . . .	87
5.4. Evolución temporal de los parámetros del sistema (azul) para el ejemplo de seguimiento de curvas con un unicycle cuya referencia cambia abruptamente. . . . .	88
5.5. Trayectorias resultantes de la evasión de obstáculos con el controlador una capa para seguimiento de curvas con planificación en línea. . . . .	92
5.6. Evolución temporal de las salidas y entradas correspondientes al ejemplo de seguimiento con evasión de obstáculos. . . . .	93
5.7. Trayectoria resultante del seguimiento de curvas con el controlador propuesto. . . . .	104
5.8. Evolución temporal de las trayectorias de salidas y las referencias. . . . .	104
5.9. Evolución temporal de la velocidad del parámetro y función de costo. . . . .	105
5.10. Trayectorias de salida resultantes para el seguimiento de curvas con un vehículo de tipo unicycle. . . . .	105
6.1. Ilustración de una solución para un sistema impulsivo. . . . .	108
6.2. Ilustración de los conjuntos de interés para el problema de seguimiento de zonas con control impulsivo. . . . .	111
6.3. Ilustración de distintos tipos de trayectorias relativas al conjunto objetivo. . . . .	111
6.4. Ejemplo de una trayectoria que cumple con el objetivo de control por zonas para un sistema controlado por impulsos. . . . .	112
6.5. Ilustración de los conjuntos factible $\mathcal{X}$ , admisible $\mathcal{X}_A$ , equilibrio admisible $\mathcal{X}_s$ , objetivo $\mathbb{T}$ , admisible objetivo $\mathbb{T}_A$ y el invariante admisible objetivo $\mathbb{T}_{inv}$ correspondiente al problema presentado en la Sección 6.6.2. . . . .	118
6.6. Ilustración del dominio de atracción $\mathcal{D}_A^d(\mathbb{T}_{inv})$ (naranja), con respecto del conjunto admisible $\mathcal{X}_A$ (amarillo), el conjunto objetivo $\mathbb{T}$ (rojo) y el invariante objetivo $\mathbb{T}_{inv}$ (verde). . . . .	119
6.7. Trayectorias correspondientes a dos estados iniciales (4.75,0.5) y (4.75,2.25). Se observa la convergencia del sistema al conjunto objetivo, así como la permanencia durante la evolución libre. . . . .	119
6.8. Evolución de los estados y la entrada para el ejemplo de control MPC por zonas, aplicado al manejo de la concentración de Li+ en el cuerpo humano. . . . .	121
6.9. Ilustración del conjunto de restricciones de estado $\mathcal{X}$ (verde), el conjunto admisible con respecto a las restricciones $\mathcal{X}_A$ (rojo) y el conjunto admisible con respecto al objetivo $\widehat{\mathbb{T}}_A$ (azul). . . . .	122
6.10. Ilustración del conjunto objetivo (verde) y los conjuntos, contenidos en el objetivo, de equilibrio (negro), admisible $\widehat{\mathbb{T}}_A$ (azul) e invariante impulsional de control $\mathbb{T}_{inv}$ (rojo). . . . .	122

# Resumen

En esta tesis se investigan formulaciones de Control Predictivo Basado en Modelos (MPC, del inglés Model Predictive Control) con aplicación al seguimiento de referencias genéricas. La estrategia MPC, que también recibe el nombre de control de horizonte deslizante (RHC, del inglés Receding Horizon Control), consiste en realizar, en sucesivos instantes, la minimización de un costo asociado a una predicción de la evolución del sistema a lo largo de una ventana temporal u horizonte finito. Para obtener dicha predicción se utiliza un modelo del sistema a ser controlado, que permite anticipar la evolución futura de acuerdo a las restricciones impuestas. Claramente, la evolución del sistema estará afectada por la entrada de control, de modo que la minimización del costo proporciona la acción de control óptima.

Por seguimiento de referencias genéricas nos referimos a que el objetivo de control no es solo estabilizar el sistema controlado en un estado estacionario particular asociado a la referencia, sino también a lo largo de trayectorias, curvas paramétricas y regiones. Además, no se buscará exclusivamente estabilizar el sistema en la referencia (o referencia alcanzable más cercana a la requerida), sino que se optimizará también el desempeño general del lazo de control, teniendo en cuenta la operación tanto estacionaria como transitoria.

Para realizar el seguimiento de referencias genéricas suele plantearse, en primer lugar, una etapa de planificación en la que, a partir de una condición de funcionamiento deseada, se determinan una referencia auxiliar que el sistema puede efectivamente alcanzar y las acciones de control requeridas para estabilizar el sistema en el entorno de dicha referencia. Luego, tiene lugar la etapa de seguimiento o *tracking*, en la que se obtiene una acción de control tendiente a llevar el sistema hacia la referencia producida en la etapa de planificación. En contraposición a esto, hay algunas formulaciones en las que ambas etapas se resuelven en línea (en un tiempo de ejecución se resuelven los problemas de planificación y seguimiento), constituyendo una alternativa que resulta especialmente útil en casos que las referencias, además de ser genéricas, son *dinámicas*, o sea, que pueden cambiarse arbitrariamente durante la ejecución. Las principales contribuciones de esta tesis están vinculadas a este tipo de situaciones, por lo que estudiaremos formulaciones que incluyen la planificación en el problema de optimización.

Los controladores que investigamos en esta tesis permiten obtener soluciones a problemas en los que las referencias no estén correctamente planteadas (sean infactibles, o no alcanzables, por ejemplo), de modo que se mantenga la factibilidad del control y la estabilidad del sistema, incluso en situaciones en las que las referencias sean cambiadas en forma arbitraria durante la ejecución del programa. Para lograr esto resultará fundamental la inclusión de variables auxiliares (denominadas también artificiales) en los problemas de optimización subyacentes. Entre los resultados novedosos que se expondrán se incluye la caracterización de dominios de atracción para controladores para sistemas lineales y referencias periódicas, la extensión de dichos controladores para sistemas periódicos con secuencias de conjuntos invariantes como restricción terminal y su cómputo, el diseño de controladores para el seguimiento de



curvas utilizando “variables artificiales” y el diseño de controles estabilizantes con respecto a regiones objetivo para sistemas lineales con control impulsional utilizando MPC.

# Abstract

In this thesis, Model Predictive Control (MPC) based formulations with application on generic reference tracking are investigated. We will focus on the design of controllers based on the MPC strategy, which is also known as Receding Horizon Control (RHC), that consists in, at successive time instants, solving an optimization problem associated to a prediction of the system state evolution along a finite time window or horizon. Such prediction is obtained using a mathematical model of the system to be controlled, which enables foreseeing its evolution according to the imposed restrictions. Clearly, the hypothetical evolution of the system state will be affected by the choice of the future inputs to be applied to the system and, therefore, the solution of the minimization problem provides the optimizing control action to be applied to the system. By generic reference tracking we refer to the control objective not being the stabilization of the controlled system on a particular steady state associated to the reference, instead, we will treat the tracking of time-varying references which may consist of trajectories, parametric curves and regions in state-space. Also, the design of a stabilizing controller is not be the only objective, but the design of controllers such that the performance is optimized, taking into account, in addition to the terminal state, the transient evolution of the system as it converges to the stationary operation.

The problem of tracking generic references is often approached in a two-stage strategy. First, a planning stage takes place in which, given a reference or desired operation for the system, an auxiliary reference—which the system is able to reach and follow—is computed, along the control actions required for stabilizing the system on such reference. Next, the tracking stage takes place, in which the control actions that steer the system towards the planned reference are produced.

Opposed to that, there are some formulations in which the planning and tracking stages are solved online (during execution time, both planning and tracking problem are solved); with this strategy being particularly useful in cases where the references, besides being generic—comprising in general steady states, trajectories, curves and regions—are *dynamic*, meaning that they be can changed arbitrarily during the execution of the tracking task.

The main contributions of this thesis are related to such situations, and the proposed controllers integrate the planning and tracking stages in a single optimization problem. This will enable solving problems where the references are not correctly stated—*infeasible references*, for instance—while maintaining the feasibility of the control action and providing guarantees of stability, regardless of the feasibility of the reference or the changes that it may be subject to. The novel results that will be presented comprise the characterization of the domains of attraction of tracking controllers for periodic linear systems with periodic references, the extension of existing controllers for periodic systems by using terminal periodic invariant sets sequences and their computation, the design of path-following controllers using “artificial variables” and the design of stabilizing controls for linear impulsive systems with respect to target zones, within the MPC framework.

# Notación

$\mathbf{x}$	Secuencias de longitud arbitraria, $\{x(0), x(1), \dots\}$
$x(i)$	El elemento en la posición $i$ -ésima de la secuencia $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}(k)$	Secuencias de elementos que dependen de un parámetro $k$ , $\{x(0 k), x(1 k), \dots\}$
$x(i k)$	El elemento en la posición $i$ -ésima de la secuencia $\mathbf{x}(k)$ dependiente del parámetro $k$
$\ x\ _P$	Norma euclídea ponderada de $x$ , i.e., $\ x\ _P = \sqrt{x^T P x}$ , con $P > 0$ una matriz simétrica
$ x _{\mathcal{A}}$	Distancia de un estado $x$ a un conjunto $\mathcal{A}$ , dada por $\min_{x^* \in \mathcal{A}}  x - x^* $
$(a, b)$	Dados dos vectores $a, b$ , $(a, b)$ indica el vector resultante de la concatenación de los mismos, $[a^T, b^T]^T$
$\mathbf{0}_{n,m}$	Una matriz de ceros de dimensión $n \times m$
$\mathbf{0}_n$	Una matriz de ceros de dimensión $n \times n$
$\mathbf{1}_{n,m}$	Una matriz con unos en la diagonal de dimensión $n \times m$
$\mathbf{I}_n$	Una matriz identidad de dimensión $n \times n$
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de números enteros positivos
$\mathbb{N}_0^+$	Conjunto de números enteros no negativos
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de números reales positivos
$\mathbb{R}_0^+$	Conjunto de números reales no negativos
$A \oplus B$	Suma de Minkowsky de dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ definida como $A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$

# Capítulo 1

## Introducción

El presente capítulo presenta la motivación y los objetivos de la tesis, junto a una breve descripción de las contribuciones de los trabajos de investigación realizados en este marco. En primer lugar, se presenta el problema de seguimiento de referencias genéricas y el esquema de control MPC como motivación para la tesis. Luego tiene lugar una revisión de problemas de control relacionados a la estabilización de distintos tipos de referencias factibles. Esto es seguido por el problema del planeamiento, requisito necesario tanto para el seguimiento de referencias infactibles como para cambios de referencias. Luego, se profundiza el estudio sobre las características fundamentales de la estrategia de control MPC y su relación con algunas formulaciones de control óptimo (de horizonte infinito). Finalmente, se comentan los trabajos científicos presentados a lo largo del doctorado y se remarcan las principales contribuciones que se describirán a lo largo de esta tesis. Cerramos el capítulo introduciendo algunos conceptos y definiciones que serán de utilidad para la comprensión de los capítulos posteriores.

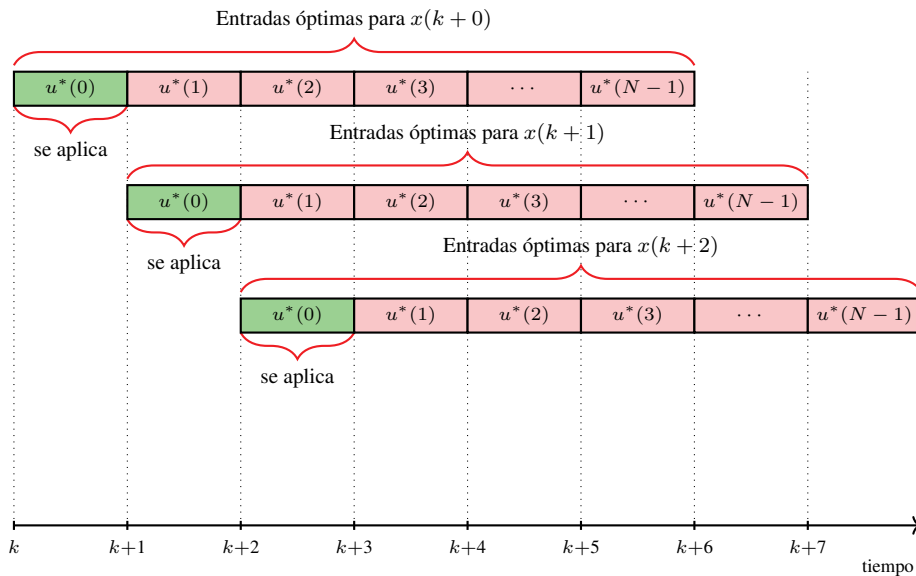
### 1.1. Motivación

Las técnicas de control predictivo basado en modelos (MPC, del inglés Model Predictive Control) son muy utilizadas debido a que constituyen verdaderos controles optimizantes, es decir, se obtienen las acciones de control de acuerdo a la optimización del desempeño predicho, a través de realimentación, bajo criterios elegidos por el usuario, teniendo en cuenta explícitamente las limitaciones de las entradas y restricciones en los estados del sistema (Rawlings et al., 2017; Camacho and Bordons, 2004). Más aún, el MPC es una de las pocas estrategias de control avanzado que ha logrado un impacto significativo tanto en la industria como en la academia (Maciejowski, 2002).

La estrategia del MPC consiste en, a cada instante, calcular una secuencia de acciones de control (entradas) que optimizan algún criterio, a partir de una predicción del comportamiento futuro del sistema a controlar. Esta predicción se realiza según un modelo del sistema, tomando en cuenta las medidas o estimaciones del estado actual y de las entradas hipotéticas, presentes y futuras. En cada instante de muestreo, se resuelve nuevamente el problema de optimización teniendo en cuenta una nueva medida o estimación del estado del sistema y se aplica la primera entrada correspondiente a la secuencia óptima calculada.

Esta estrategia tiene las siguientes particularidades:

- se requiere un modelo de la planta a ser controlada que será utilizado para realizar una predicción



**Figura 1.1:** Esquema de control por horizonte deslizante

de la evolución futura de la misma.

- La optimización en sucesivos instantes se realiza prediciendo y calculando las entradas y trayectorias óptimas a lo largo de una ventana temporal que se denomina horizonte, produciendo de este modo la acción de control. En formulaciones estándar se utilizan ventanas de duración fija.
- Dado que el instante inicial de la predicción se actualiza a medida que avanza el tiempo de ejecución, la estrategia también recibe el nombre de control de horizonte deslizante (RHC, del inglés Receding Horizon Control). Un esquema de la evolución del horizonte a lo largo del tiempo se presenta en la Figura 1.1.
- El estado del sistema se mide o estima en cada instante y se proporciona como parámetro al problema de optimización. Esto configura un controlador por realimentación y, por lo tanto, apto para dar cuenta de diferencias entre planta y modelo como también presentar cierta robustez intrínseca frente a perturbaciones.
- Se contemplan explícitamente las restricciones, brindando garantías de factibilidad del problema de optimización en todo instante futuro. Cabe destacar que las restricciones pueden producir inestabilidad en controladores que son estables en su formulación irrestricta.

Las formulaciones iniciales de este tipo de controladores carecían de garantías de estabilidad. Entre los primeros avances en ese sentido, se lograron controladores estables a través de la imposición de una restricción terminal, que forzaba al último estado predicho a alcanzar el estado estacionario deseado Kwon et al. (1983). Más tarde se propuso un esquema de modo dual Michalska and Mayne (1993), en el que se utiliza una ley de realimentación estabilizante a ser aplicada los instantes posteriores a los abarcados por el horizonte de predicción, llamada ley de control terminal. Se incluyó además una restricción de pertenencia a un conjunto en el espacio de estados, llamado conjunto terminal, que es donde la ley de realimentación opera en forma factible: esto es, los estados incluidos en este conjunto tienen garantías de estabilidad bajo la ley de control terminal. Esta metodología tenía la ventaja de que se optimizaba una secuencia finita

de entradas, luego de las cuales se considera que el sistema operaría según el funcionamiento autónomo correspondiente a la ley terminal. Esto produce un beneficio dado que la condición terminal así planteada es menos exigente que alcanzar el punto de trabajo deseado. Este tipo de controladores configura lo que se suele denominar MPC clásico o estándar.

Frecuentemente, los objetivos de control exceden la estabilización o el seguimiento de un punto de trabajo predeterminado. En esta tesis, nos abocaremos a los problemas asociados al seguimiento de *referencias dinámicas*, que abarcan los casos en que

1. No se desea una operación estacionaria:

Muchas aplicaciones no consisten en operar en un estado estacionario, sino en el seguimiento de una trayectoria o camino, o bien, la operación periódica del sistema sobre una trayectoria que no está determinada a-priori. Esto es frecuente por ejemplo en robótica o control autónomo de vehículos, donde el sistema tiene que avanzar a lo largo de un camino sin una especificación temporal estricta. Otro caso es el de la operación periódica del sistema, que se suele presentar debido a ciertas condiciones que son variantes en el tiempo (periódicas o pseudo-periódicas) y afectan la dinámica, restricciones y/o costos del sistema. Algunos ejemplos pueden encontrarse en el problema de la climatización de edificaciones o sistemas de servicios públicos como la provisión de agua potable o la generación de energía.

2. El modo de operación deseado cambia durante la ejecución:

Es habitual que cambios de modo de operación sucedan durante la ejecución del programa. Por ejemplo, en robótica o control de vehículo autónomos, suele darse que la referencia sea generada por un sistema externo, bien por un operador o por algún sistema computacional por lo que puede estar sujeta a cambios imprevisibles. Otro escenario similar es el de control jerárquico, donde se cuenta con un optimizador de tiempo real que computa el punto de trabajo correspondiente a un régimen óptimo de operación para el sistema, que se actualiza cada ciertos intervalos de tiempo y siendo la tarea correspondiente al control de bajo nivel la de llevar el sistema a dicho punto.

3. La operación deseada no corresponde a un punto de trabajo específico:

Ciertos problemas cuentan con una especificación en un rango de funcionamiento, donde todos los modos, estacionarios o variantes en el tiempo, que están contenidos en dicho rango son válidos y no existe una preferencia entre ellos. Esto constituye un problema habitual en aplicaciones biomédicas, donde se desea mantener las variables en ciertos rangos saludables, pero sujetas a cierta variabilidad debida a los ciclos circadianos u otros fenómenos periódicos, minimizando la intervención externa para garantizar el funcionamiento normal.

El objetivo de esta tesis será proponer y estudiar formulaciones de controladores basados en MPC en los que las referencias sean genéricas, dinámicas y que provean propiedades deseables para del lazo cerrado. Comentaremos a continuación algunos trabajos relacionados.

## 1.2. Trabajos Relacionados

En esta sección haremos un breve repaso de ciertas líneas de investigación relacionadas al MPC, principalmente relacionadas a la estabilidad y a los dominios de atracción de las formulaciones, sobre todo

enfocadas a la operación dinámica y seguimiento de referencias genéricas. Una discusión más detallada podrá encontrarse en las secciones respectivas.

Recientes mejoras han sido desarrolladas en el contexto general de MPC, principalmente tendientes a incrementar su aplicabilidad (Rawlings et al., 2017), esto es, se fueron teniendo en cuenta factores como la maximización del dominio de atracción del lazo cerrado (conjunto de estados que pueden ser estabilizados por el control) (De Doná et al., 2002; Cannon et al., 2003; Limon et al., 2005), el incremento de la robustez frente a perturbaciones o incertidumbres de magnitud significativa (Anderson et al., 2018a), la garantía de la factibilidad recursiva de los problemas de optimización subyacentes ante cambios severos de objetivos (Limon et al., 2008, 2018), o la incorporación explícita de objetivos adicionales a los del seguimiento de referencias, en lo que se denomina MPC económico (Angeli et al., 2012; D' Jorge et al., 2018), o MPC basado en conjuntos (González et al., 2011; Ferramosca et al., 2012). Parte de estas propuestas retoman ideas relativas al seguimiento de referencias constantes por tramos (Limon et al., 2008), y sus posteriores extensiones para el seguimiento de trayectorias periódicas (Limon et al., 2014), y para sistemas no lineales (Limon et al., 2018; Köhler et al., 2018). Esta rama de desarrollo de controladores con garantías de estabilidad y de factibilidad recursiva sujetas a cambios arbitrarios de referencias con frecuencia se basan en la adecuada inclusión de ciertos “ingredientes” en el problema de optimización asociado al controlador. Estos consisten en la introducción de *variables artificiales*, un *costo de offset* y un conjunto terminal *invariante para tracking*.

En los últimos años ha habido un creciente interés en aplicar la estrategia de control predictivo a sistemas híbridos (Sanfelice, 2019), entre los que destacamos los sistemas impulsivos (Yang, 2001), que presentan una dinámica continua en tiempo continuo exceptuando ciertos instantes, donde tienen lugar discontinuidades del primer tipo (saltos) en el estado, debidas a los impulsos.

### 1.3. Problemas de Control

En esta sección daremos definiciones formales de los problemas de control mencionados en la Sección 1.1. Luego iremos atendiendo el diseño de controladores para cada uno de ellos y analizando sus propiedades, intentando lograr la estabilización en entornos de las referencias. Plantearemos los problemas de seguimiento de referencias siguiendo un orden de complejidad creciente, de acuerdo al tipo de referencia que se considere.

Sea el sistema dinámico en tiempo discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k), u(k))\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  el vector de entradas manipulables del sistema y  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  el vector de salidas. Se asume que la dinámica del sistema  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, que los conjuntos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{U}$  son compactos y convexos, y que el origen está contenido en el interior estricto de las restricciones, i.e.,  $(0, 0) \in \mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ . Denotaremos la solución de este sistema como  $\phi(j; x, \mathbf{u})$ ,  $j \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ , donde  $x = \phi(0; x, \mathbf{u})$ , para una secuencia de entradas  $\mathbf{u}$  y estado inicial  $x$  dados.

El problema más básico de control es la *regulación*, es decir llevar el sistema al origen. Un grado adicional de complejidad tiene lugar cuando se plantea el *problema de seguimiento de puntos de trabajo*

(también llamado *set-point tracking*), que consiste en guiar el sistema hacia un estado estacionario diferente al origen. En una primera generalización de este problema se considerará también que el punto de trabajo puede cambiar a lo largo del tiempo, quedando abarcadas las referencias constantes a tramos, como también aquellas que son variantes en el tiempo pero en forma relativamente lenta, es decir, en las que existe una separación significativa entre las escalas temporales de la dinámica del sistema (rápida) respecto de la dinámica de la referencia (lenta).

Un problema más complejo es el seguimiento de una trayectoria, también conocido como *trajectory tracking*, que consiste en el seguimiento de una secuencia predefinida de estados o salidas. Nos referimos a trayectorias cuando se especifica una secuencia de estados, de modo que hay un mapeo directo entre cada instante temporal y un estado o una salida respectiva.

Una generalización del problema anterior es el seguimiento de una curva en el espacio, sin disponer de una temporización estricta de la misma, donde las velocidades asociadas al avance a lo largo de la referencia se toman como variables de decisión del mismo controlador. Este problema es conocido como seguimiento de curvas, también denominado seguimiento de caminos (*path-following*), problemas de maniobra (*maneuvering problem*), seguimiento de contornos (*contour-following*), estabilización de variedades (*manifold stabilization*), entre otras denominaciones, de acuerdo al contexto.

Otro tipo de referencias están constituidas por regiones o conjuntos, cuyo seguimiento constituye el problema de seguimiento de zonas o *zone-tracking*. En este caso, se desea conducir al sistema hacia (y mantenerlo en) esas regiones, siendo indistintos los estados contenidos en esas zonas en términos de optimalidad.

A continuación vamos a presentar formalmente estos problemas.

### 1.3.1. Regulación

El problema de regulación consiste en diseñar una ley de control capaz de llevar y mantener la salida del sistema en una vecindad del origen. Por simplicidad en la explicación, consideraremos un caso más estricto, en el que lo que se busca es que la salida  $y(k)$  converja asintóticamente a cero. Para un conjunto de restricciones dadas, se plantea el siguiente problema:

**Problema: Regulación** Dado el sistema (1.1), diseñar un controlador tal que

1. la salida converja al origen, esto es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|h(x(k), u(k))\| = 0.$$

2. las restricciones sean respetadas en todo instante  $k \geq 0$ , i.e.,  $(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}$  para  $k \geq 0$ .

### 1.3.2. Seguimiento de un punto de trabajo

Este problema consiste en diseñar una ley de control capaz de llevar y mantener la salida del sistema en un punto de operación estacionario  $y_{\text{ref}}$  factible. En este caso, lo que se busca es que el error  $e_{ss}$ ,

$$e_{ss}(k) = y(k) - y_{\text{ref}},$$



converja asintóticamente a cero y considerando que, para un conjunto de restricciones dado, el estado estacionario de salida es factible, es decir, existe  $(x_{ss}, u_{ss}) \in \mathcal{Z} : h(x_{ss}, u_{ss}) = y_{\text{ref}}$ . Para formalizar, se plantea el siguiente problema:

**Problema: Seguimiento de puntos de trabajo (*set-point stabilization*)** Dados el sistema (1.1) y una referencia factible  $y_{\text{ref}}$ , diseñar un controlador tal que

1. la salida converja a la referencia, i.e.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|h(x(k), u(k)) - y_{\text{ref}}\| = 0.$$

2. las restricciones sean respetadas en todo instante  $k \geq 0$ , i.e.,  $(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}$  para  $k \geq 0$ .

Cabe destacar que el requisito para que este problema esté bien puesto es la condición de equilibrio de  $(x_{ss}, u_{ss})$ , es decir,  $x_{ss} = f(x_{ss}, u_{ss})$ . Claramente, el problema de regulación es un caso particular del problema de seguimiento con  $y_{\text{ref}} = 0$ .

### 1.3.3. Seguimiento de Trayectorias (*trajectory tracking*)

Cuando la referencia a seguir ya no es una salida fija asociada a un estado estacionario del sistema, sino una señal variante en el tiempo, se trata del problema de seguimiento de trayectorias. Es importante remarcar que en una trayectoria se asocia rígidamente un estado o una salida correspondiente a cada instante del tiempo. Esta noción se contrapondrá a la noción de curva o camino, en las que no hay una relación directa entre el tiempo y un punto sobre la curva.

La trayectoria de referencia se asume conocida a priori, factible y seguible (es decir, que respeta la dinámica del sistema y las restricciones), y lo que ahora se busca es anular el error

$$e_{tt}(k) = |y(k) - y_{\text{ref}}(k)|.$$

Además, la hipótesis de factibilidad y seguibilidad de la referencia implica la existencia una señal de entrada  $u_{tt}(k)$  que permite el seguimiento perfecto de la referencia, si se aplica a partir de un estado  $x_{tt}(k)$  tal que,  $y_{\text{ref}}(j) = h(x_{tt}(j), u_{tt}(j))$  para todo  $j \geq k$ . Cabe destacar que en este caso se trata de un problema de control variante en el tiempo y esto conlleva ciertas precauciones adicionales en el diseño del controlador.

Formalmente se propone el siguiente planteo:

**Problema: Seguimiento de Trayectorias** Dados el sistema (1.1) y la referencia factible  $y_{\text{ref}}(k)$ , diseñar un controlador tal que

1. la salida converja a la referencia, i.e.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|h(x(k), u(k)) - y_{\text{ref}}(k)\| = 0.$$

2. las restricciones sean respetadas en todo instante  $k \geq 0$ , i.e.,  $(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}$  para  $k \geq 0$ .

### 1.3.4. Seguimiento de Curvas (*path-following*)

Existen muchas aplicaciones en las que la prioridad es el seguimiento de una curva en el espacio de salidas, pero no hay una especificación rígida de la temporización ni de la velocidad a la cual debe ser recorrida. Esto introduce un grado de libertad adicional en el problema, comparado con la estabilización de trayectorias, que se evidencia en la flexibilidad de la elección de la velocidad en la que se avanza a lo largo de la curva. En este problema, la referencia será dicha curva geométrica, la que se desea seguir en la forma más fiel posible. Habitualmente, la curva, que denotaremos como  $p(s)$ , se presenta parametrizada por un parámetro adimensional  $s$  cuya evolución temporal es una variable de decisión del controlador. Dicha curva de referencia se asume conocida a-priori, factible y seguible, y el error que ahora se desea anular es

$$e_{\text{pf}}(k) = |y(k) - y_{\text{ref}}(s(k))|.$$

Nuevamente, la hipótesis de que la curva sea factible y seguible permite asumir la existencia (aunque, en el desarrollo de pruebas de estabilidad formales, a veces también se requiere el conocimiento) de una velocidad del parámetro  $w(s(k))$  y una señal de entrada  $u_{\text{pf}}(k)$  que permiten el seguimiento perfecto de la referencia, es decir,  $y_{\text{ref}}(s(k)) = h(x_{\text{pf}}(k), u_{\text{pf}}(k))$ , con  $s(k+1) = s(k) + w(k)$  para todo  $k$ .

**Problema: Seguimiento de Curvas** Dado el sistema (1.1) y la referencia factible  $y_{\text{ref}}(s)$ , diseñar un controlador tal que

1. la salida converja a la referencia, esto es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|h(x(k), u(k)) - y_{\text{ref}}(s(k))\| = 0.$$

2. las restricciones sean respetadas en todo instante  $k \geq 0$ , i.e.,  $(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}$  para  $k \geq 0$ .
3. el parámetro presente una evolución monótonamente creciente, i.e.,  $s(k+1) \geq s(k)$ .

### 1.3.5. Seguimiento de Zonas

En ciertos casos, el objetivo es llevar el sistema a una región o zona de trabajo y mantenerlo en ella, siendo indistintos los puntos de operación que recorra dentro de la zona, en términos de desempeño o costo. En este caso, la referencia será un conjunto  $\mathbb{T}$  que representa la zona y se buscará minimizar la distancia del estado al conjunto,  $e_{zt} = \text{dist}_{\mathbb{T}}(x(k))$ , donde proponemos la definición de la función  $\text{dist}(\cdot)$  como

$$\text{dist}_{\mathbb{T}}(x) = \min_{x^* \in \mathbb{T}} \|x - x^*\|_Q^2.$$

**Problema Seguimiento de Zonas** Dado un conjunto compacto y convexo  $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{X}$ , que llamaremos conjunto objetivo, diseñar un controlador tal que

1. el estado converja a la referencia, esto es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_{\mathbb{T}}(x(k)) = 0.$$

2. las restricciones sean respetadas en todo instante  $k \geq 0$ , i.e.,  $(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}$  para  $k \geq 0$ .

### 1.3.6. Problemas de Planeamiento y Seguimiento

Como dijimos anteriormente, los problemas de seguimiento requieren que las referencias  $y_{\text{ref}}(\cdot)$  sean factibles y seguíbles. Al momento de la aplicación, esto presenta ciertas complicaciones dado que las referencias suelen ser provistas por un sistema externo, lo que se denomina una referencia exógena, que típicamente se establece por el propio objetivo del problema de control.

Para resolver las posibles incompatibilidades entre la referencia exógena y el problema de seguimiento, se plantea el problema de planeamiento de referencias que consiste en obtener, a partir de la referencia exógena  $y_{\text{ref}}$ , una nueva referencia  $y_a$  que se le asemeje lo más posible, pero sea factible y seguíble según el sistema y las restricciones.

Consideraremos una clasificación de los problemas de control según si el problema de planeamiento de la referencia se realiza fuera de línea (la referencia es provista con garantías de factibilidad y seguíbilidad, o bien, se realiza una planificación o replanificación independiente del problema de seguimiento), de modo que el problema de control de bajo nivel consiste exclusivamente en el seguimiento de una referencia factible, o si se realiza el planeamiento en línea, es decir, el propio controlador de bajo nivel produce una referencia interna  $y_a(\cdot)$ , posiblemente calculada a partir de una referencia exógena  $y_{\text{ref}}(\cdot)$ .

Una descripción y revisión breve de estos problemas, así como una clasificación similar a la presentada, puede encontrarse en Matschek et al. (2019).

## 1.4. Control Predictivo Basado en Modelos

Aquí revisaremos las formulaciones clásicas de controladores MPC, dado que estas son las formulaciones básicas que extenderemos a lo largo de la tesis. Como se comentó anteriormente, el MPC constituye un esquema de control optimizante, basado en una estrategia de control por horizonte deslizante, en la que en cada tiempo de muestreo se resuelve un problema de optimización de horizonte finito que consta de los siguientes ingredientes fundamentales:

1. **Modelo de Predicción:** para realizar la predicción se utiliza un modelo matemático, representando un sistema dinámico de la planta a controlar, que nos permitirá generar posibles trayectorias de estados futuros, correspondiente a hipotéticas secuencias de entradas. El problema entonces consistirá en determinar una de las trayectorias posibles que corresponda al mejor desempeño, en términos de los objetivos de control. Se debe destacar que, en la práctica, hay un compromiso: el modelo deberá ser lo suficientemente completo como para describir la dinámica del sistema con una precisión adecuada, aunque manteniendo cierta simplicidad como para permitir el análisis teórico y la inteligibilidad a la hora de la sintonía del controlador. Habitualmente, cuando se trabaja en este tipo de controladores se utilizan modelos dinámicos en el espacio de estados. En esta instancia, podemos considerar un sistema dinámico de tiempo discreto como modelo de predicción (1.1), sobre el que habitualmente se supondrá que  $f(\cdot)$  es una función continua,  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema y  $u \in \mathbb{R}^m$  representa la entrada de control.
2. **Restricciones del sistema:** los estados y entradas están restringidos a pertenecer a los llamados conjuntos factibles que representan los límites operacionales del sistema, i.e.,  $x(k) \in \mathcal{X}$  y  $u(k) \in \mathcal{U}$  para todo  $k \in \mathbb{N}_0^+$ .

3. Función Objetivo: Un elemento fundamental en la formulación de los controladores MPC es una función  $V$ , habitualmente escalar, de la trayectoria predicha de estado y la entrada, llamada función objetivo o función de costo.
4. Horizonte: el intervalo temporal a lo largo del cual se predice la evolución del sistema y se evalúa el funcional de costo.

Considerando la duración del horizonte, surgen dos escenarios posibles

#### a) Problema de Horizonte Infinito:

El problema de control óptimo que nos interesa resolver se conoce como un problema de horizonte infinito y consiste en, dado el sistema restringido (1.1), para un estado inicial  $x$ , encontrar la secuencia de entradas óptimas  $\mathbf{u}^*$  tal que se minimice un funcional de costo de horizonte infinito. Más formalmente, se plantea el funcional de costo como

$$V(x; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{\infty} \ell(x(j), u(j)),$$

con  $\ell(x, u)$  una función positiva definida de  $x$  y  $u$ , obtener la solución al problema

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{\infty}(x)} V(x; \mathbf{u}),$$

donde  $\mathcal{U}_{\infty}(x)$  son las secuencias infinitas de control factibles, i.e.,  $(\phi(j; x, \mathbf{u}), u(k+j)) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{U})$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ .

El estado inicial  $x$  se considera un parámetro del problema de optimización, mientras que la secuencia de entradas  $\mathbf{u}$  constituye la variable de optimización.

Cabe destacar que la aplicación de la secuencia de entradas óptimas, es decir, establecer  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ , resulta en un sistema de control a lazo abierto que produce la solución óptima. No obstante, este problema no puede ser resuelto en general cuando se consideran restricciones y/o sistemas no lineales.

**Observación 1.** Entre los problemas de horizonte infinito se destaca el control LQR (del inglés, Linear Quadratic Regulator) cuya forma más simple considera sistemas lineales invariantes en el tiempo, irrestrictos ( $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ ) y costos cuadráticos, dados por  $V(x, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{\infty} \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2$ , con  $Q$  y  $R$  matrices positivas definida y semidefinida respectivamente. Dicho controlador resulta en una realimentación lineal del estado como ley de control estabilizante. La incorporación explícita de las restricciones al problema es una de las fortalezas del MPC frente a este enfoque clásico.

#### b) Problema de Horizonte Finito:

Para reducir la complejidad del problema de optimización se puede plantear un problema de control horizonte finito, cuyo funcional de costo está dado por

$$V_N(x, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j), u(j)) + V_f(x(N)),$$

donde  $N < \infty$  es lo que se denomina horizonte de control predicción y  $V_f(\cdot)$  es una función positiva definida que se denomina costo o penalización terminal y el problema a resolver toma la forma

$$\mathbf{u}_N^* = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x)} V_N(x; \mathbf{u}),$$

donde  $\mathcal{U}_N(x)$  son las secuencias finitas de control factibles, i.e.,  $(\phi(j; x, \mathbf{u}), u(k+j)) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{U})$  para todo  $j \in 0, \dots, N-1$ . Este es propiamente el problema que se resuelve en la estrategia MPC.

La solución de este problema de optimización provee una secuencia de  $N$  acciones de control, de las cuales se aplica al sistema únicamente la primera. Para cada instante sucesivo se repite el procedimiento completo, como se indica en el Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Método MPC
 

---

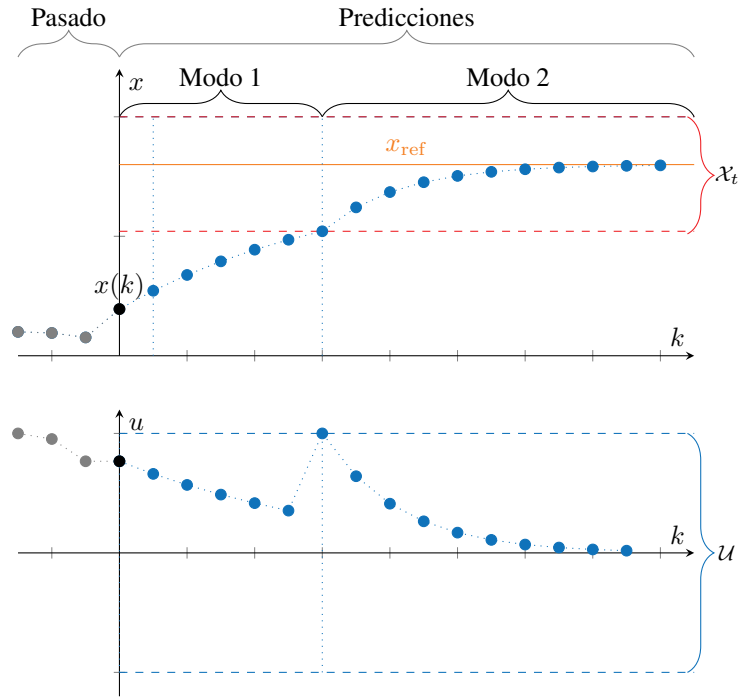
- 1: Medir  $x$ ,
  - 2: Obtener la entrada óptima  $^*u$  del problema de optimización,
  - 3: Aplicar la primera acción de control  $u = u^*(0)$ ,
  - 4: Repetir desde 1.
- 

**Observación 2.** *Puede resultar poco opuesto a la intuición el hecho de que, en cada instante, se descarta la secuencia de acciones de control desde el segundo elemento en adelante. Sin embargo, esto sucede porque la aplicación de secuencia de acciones calculada en un instante, es subóptima en instante sucesivos en el caso del horizonte deslizante. Una explicación detallada de esta situación puede encontrarse en Rawlings et al. (2017).*

Las garantías de estabilidad para las formulaciones de control MPC se logran habitualmente a través de la imposición de condiciones sobre el costo terminal  $V_f(x(N))$  y la adición de una restricción terminal  $x(N) \in \mathcal{X}_f$ , donde el conjunto  $\mathcal{X}_f$  es un conjunto invariante de control para el sistema. Existen formulaciones particulares que se diferencian, en mayor medida, por cómo se implementan estas condiciones, por ejemplo, imponiendo una restricción terminal de igualdad  $x(N) = x_{\text{ref}}$ , donde  $x_{\text{ref}}$  es un equilibrio de control del sistema (y por lo tanto invariante), o bien, se proponen diseños de los costos de etapa y terminal que garantizan la estabilidad del sistema, sin restricción terminal (de modo que  $\mathcal{X}_f := \mathcal{X}$ ).

Entre las formulaciones más estudiadas y difundidas se encuentra el llamado paradigma de predicción de modo dual, que consiste en partir el horizonte infinito en dos intervalos Chen and Allgöwer (1998). El primero corresponde a las predicciones desde 0 hasta  $N-1$ , mientras que el segundo abarca los instantes posteriores a  $N$ , inclusive. Las entradas de control predichas en el primer intervalo son las que provee el problema de optimización como solución, mientras que las del segundo intervalo corresponden a una ley terminal fija. En definitiva, el diseño del controlador requiere producir, de antemano, una penalización y un conjunto terminal estabilizantes, es decir, que corresponde a la existencia de una ley de control realimentado  $\kappa_t(x)$  ficticia que se aplicaría indefinidamente a partir del final del horizonte  $N$ , o sea,  $u(j) = \kappa_t(x(j))$ , asegurando que  $\kappa_t(x(j)) \in \mathcal{U}$  y, más aún, que  $x(j) \in \mathcal{X}_f$  para todo  $j > N$ .

Un ejemplo de una predicción para un control MPC de modo dual se puede ver en la Figura 1.2. Allí se puede observar el conjunto terminal  $\mathcal{X}_t$ , que debe ser (y es) alcanzado antes a lo sumo en  $N+1$  pasos. También se puede observar que hay un cambio en la *política* de control entre los modos, el Modo 1 es más conservador en lo que respecta a las entradas, mientras que el Modo 2 produce una entrada saturante



**Figura 1.2:** Esquema de MPC con modo dual

para su primera acción. Se observa también que la predicción converge a la referencia  $x_{\text{ref}}$  y que en todo tiempo se cumplen las restricciones de entrada.

Cabe destacar que el problema de optimización está parametrizado por el estado del sistema en el instante de evaluación y se produce una ley de control  $u(k) = \kappa_N(x(k))$  que es implícita. Se puede notar que la acción de control a ser aplicada en el instante  $k$ , es decir  $u(k) = u_N^*(0)$ , corresponde a la secuencia óptima  $u_N^*(k)$  calculada en el instante  $k$ , para el parámetro actual  $x(k)$ . El hecho de que la acción de control se calcule en cada instante considerando el estado del sistema en el tiempo actual  $x(k)$  resulta en un controlador a lazo cerrado, o sea, existe *feedback* y la evolución temporal del estado estará descrita por

$$x(k+1) = f(x(k), \kappa_N(x(k))).$$

El planteo del control de horizonte deslizante evidencia rápidamente su potencial en la presencia de restricciones, dado que esta formulación hace que el problema siga siendo resoluble. Una de las ventajas de este esquema frente a otras formulaciones de control realimentado es la posibilidad de contemplar las restricciones de estado y entrada en la propia formulación del problema de optimización. Por otra parte, este tipo de controladores posee cierta robustez intrínseca (Rawlings et al., 2017), que es valiosa al surgir diferencias entre el modelo y la planta y/o perturbaciones al sistema.

## 1.5. Trabajos relacionados a las tareas de investigación

Los trabajos derivados de los aportes de la presente tesis se listan a continuación.

### Artículos en Revista

Sánchez, I., D’Jorge, A., Raffo, G. V., González, A. H., Ferramosca, A. Non-linear model predictive path following controller with obstacle avoidance. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2021.

Sánchez, I., Actis, M., Louembet, C., González, A. H., Characterization and computation of control invariant sets for linear impulsive control systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2023

### Congresos Nacionales

Sánchez, I., D’Jorge, A., Ferramosca, A., Raffo, G. V., González, A. H. Path Following and Trajectory Tracking Model Predictive Control using Artificial Variables for Constrained Vehicles *XVIII Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, 2019

Sánchez, I., D’Jorge, A., Limache, A., González, A. H., Ferramosca, A. Model Predictive Periodic Output Path Following. *XXVIIº Congreso Argentino de Control Automático*, 2020.

### Congresos Internacionales

Sánchez, I., D’Jorge, A., Raffo, G. V., González, A. H., Ferramosca, A. Obstacle Avoiding Path Following based on Nonlinear Model Predictive Control using Artificial Variables *19th International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*, 2019.

Louembet, C., González, A. H., Sánchez, I. Computing impulsive equilibrium sets with respect to target zone for linear impulsive systems, *21st IFAC World Congress*, 2020

### Artículos en Revisión

Sánchez, I., D’Jorge, A., Limache, A., González, A. H., Ferramosca, A., Single-Layer Periodic Path-Following Model Predictive Control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*

### Artículos en preparación

Sánchez, I., D’Jorge, A., Limache, A., González, A. H., Ferramosca, A., MPC periodic trajectory tracking with enlarged attraction domain

Abuin, P., Sanchez, I., Ferramosca, A., Toffanin, C., Magni, L., Gonzalez, A., A basal trajectory-based framework for handling circadian variations of insulin sensitivity

## 1.6. Contribuciones

Esta tesis se propone avanzar en el desarrollo de estas líneas, extendiendo las propuestas para abarcar referencias y sistemas no contemplados hasta ahora, así como describir algunas de sus particularidades que hasta el momento no fueron estudiadas.

Detallamos a continuación los principales aportes de la presente tesis:

1. Caracterización del dominio de atracción de controladores predictivos con planificación en línea para sistemas periódicos que se presentaron en Limon et al. (2014). (Capítulo 3).

2. Se desarrolla una extensión al control mencionado en el punto anterior, incluyendo conjuntos invariantes como restricciones terminales y se generaliza dicho controlador permitiendo su aplicación a sistemas lineales variantes en el tiempo periódicos, con una generalización de las restricciones terminales, implementadas como secuencias de conjuntos invariantes, proveyendo un dominio de atracción ampliado (Capítulo 4).
3. Formulación y análisis de un controlador predictivo para seguimiento de curvas con garantías de factibilidad recursiva y convergencia a la curva planificada en línea, en forma independiente a la referencia provista en forma externa y sujeta a cambios arbitrarios, con una extensión de dicho controlador para la evasión de obstáculos y zonas de exclusión (Capítulo 5).
4. Finalmente, se extiende el estudio a la estabilización por zonas de las trayectorias periódicas (órbitas) resultantes para sistemas lineales con entradas impulsivas, dentro de la estrategia de control predictivo. Se presentará el control a través de la aplicación de acciones de impulsivas a intervalos fijos, teniendo en cuenta restricciones de estado y de entradas. Esto implica la estabilización en trayectorias periódicas en un esquema híbrido. (Capítulo 6).

## 1.7. Preliminares matemáticos

Vamos a introducir algunas definiciones y conceptos que serán de utilidad referidas al análisis de sistemas dinámicos desde la teoría de control basado en conjuntos.

### 1.7.1. Conjuntos controlables e Invariancia

Sea un sistema  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$  con  $u(k) \in \mathcal{U}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_0^+$ . Las definiciones clásicas de conjuntos alcanzables y controlables son las siguientes:

**Definición 1** (Conjunto alcanzable). *Dado un conjunto  $\mathcal{P}$ , el conjunto alcanzable desde  $\mathcal{P}$  en  $T < \infty$  pasos,  $\mathcal{R}_T(\mathcal{P})$ , es el conjunto de estados  $x$  para los que existen  $x(0) = \phi(0, x(0), \mathbf{u}) \in \mathcal{P}$  y  $\mathbf{u}$ , con  $u(k) \in \mathcal{U}$ , tales que  $x(T) = x$ , o sea,  $x(T) = \phi(T, x(0), \mathbf{u})$ .*

**Definición 2** (Conjunto controlable). *Dado un conjunto  $\mathcal{S}$ , el conjunto controlable a  $\mathcal{S}$  en  $T < \infty$  pasos  $\mathcal{C}_T(\mathcal{S})$  es el conjunto de estados  $x$  para los que existe una secuencia  $\mathbf{u}$ , con  $u(k) \in \mathcal{U}$ , tales que  $x(T) = \phi(T, x, \mathbf{u}) \in \mathcal{S}$ .*

Una propiedad destacable del conjunto alcanzable desde  $\mathcal{P}$  en 1 paso, que denotaremos como  $f(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ , es que será compacto si  $f$  es continua y  $\mathcal{U}$  es compacto. Entonces el conjunto alcanzable en  $T$  pasos puede ser calculado recursivamente a partir de  $\mathcal{R}_{k+1}(\mathcal{P}) = f(\mathcal{R}_k(\mathcal{P}), \mathcal{U})$  y será compacto.

Vale la pena destacar que,  $\mathcal{C}_T(\mathcal{X}_f)$ , el conjunto controlable en  $T$  pasos a  $\mathcal{X}_f$ , no será necesariamente contenido por el conjunto controlable en  $T+1$  pasos a  $\mathcal{X}_f$ .

Dado un sistema dinámico autónomo  $x(k+1) = f(x(k))$ , un subconjunto del espacio de estados se llama *invariante positivo* si todo estado inicial dentro del conjunto permanecerá dentro del conjunto en todo tiempo posterior.

Formalmente,

**Definición 3** (Invariante Positivo). *El conjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  es un invariante positivo para el sistema  $x(k+1) = f(x(k))$  si para todo  $x(0) \in \mathcal{S}$ ,  $\phi(k, x(0)) \in \mathcal{S}$  para todo  $k > 0$ .*



Cabe destacar que la dinámica del sistema sujeto a restricciones define un conjunto admisible. No todas las trayectorias que inician en un estado admisible serán admisibles en todo tiempo. Por el contrario, en el caso de los conjuntos invariantes positivos, todas las trayectorias se mantendrán admisibles para todo  $k \geq 0$ .

El concepto de invariancia se extiende a sistemas controlados en lo que se llama un conjunto *invariante de control* o *viable*, si para todo estado dentro del conjunto existe una entrada de control que lo mantiene dentro del mismo.

**Definición 4** (Invariante de Control). *El conjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  es un invariante de control para el sistema  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$  si para todo  $x(0) \in \mathcal{S}$ , existe  $\mathbf{u}$  admisible tal que  $\phi(k, x(0), \mathbf{u}) \in \mathcal{S}$  para todo  $k > 0$ .*

La existencia de invariantes de control es fundamental en la solución de importantes problemas de control, particularmente en sistemas sujetos a restricciones, dado que permite garantizar que las trayectorias futuras cumplirán con especificaciones de diseño y convergencia a las referencias.

Ahora, dado un conjunto  $\mathcal{X}_f$  invariante de control, el conjunto controlable en  $T$  pasos a  $\mathcal{X}_f$  será contenido por el conjunto controlable en  $T + 1$  pasos a  $\mathcal{X}_f$ .

Los conjuntos controlables en este caso están anidados, es decir,

$$\mathcal{C}_T(\mathcal{X}_f) \subseteq \mathcal{C}_{T+1}(\mathcal{X}_f) \subseteq \mathcal{C}_{T+2}(\mathcal{X}_f) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_f).$$

### 1.7.2. Estabilidad

En primer lugar, daremos algunas definiciones:

**Definición 5** (Función radialmente no acotada). *Una función localmente Lipschitz  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es radialmente no acotada si  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty$ .*

**Definición 6** (Función  $\mathcal{K}$ ). *Una función  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función  $\mathcal{K}$  si es continua, estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ .*

**Definición 7** (Función  $\mathcal{K}_\infty$ ). *Una función  $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  es una función  $\mathcal{K}_\infty$  si es de tipo  $\mathcal{K}$  y no acotada ( $\alpha(s) \rightarrow \infty$  mientras  $s \rightarrow \infty$ ).*

**Definición 8.** *Una función  $\beta(s, t) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  es una función  $\mathcal{KL}$  si  $\beta(\cdot, t)$  es una función  $\mathcal{K}_\infty$  y si  $\beta(s, \cdot)$  es estrictamente decreciente convergiendo a cero para todo  $s > 0$ .*

### Criterio de Estabilidad de Lyapunov

Si se puede encontrar una función positiva y decreciente en el tiempo para todo el estado que no esté contenido en cierto conjunto  $\mathcal{A}$ , entonces el estado converge a ese conjunto.

**Definición 9** (Función de Lyapunov). *Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una función de Lyapunov para el sistema  $x(i+1) = f(x(i))$  respecto del conjunto  $\mathcal{A}$  si existen funciones  $\alpha_1, \alpha_2$  de tipo  $\mathcal{K}_\infty$  y  $\alpha_3$  positiva definida tal que para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$V(x) \geq \alpha_1(|x|_{\mathcal{A}}), \quad (1.2a)$$

$$V(x) \leq \alpha_2(|x|_{\mathcal{A}}), \quad (1.2b)$$

$$V(f(x)) - V(x) \leq -\alpha_3(|x|_{\mathcal{A}}). \quad (1.2c)$$

Si  $V(\cdot)$  satisface las ecuaciones (1.2a)-(1.2c) para todo  $x \in \mathcal{X}$ , donde  $\mathcal{X}$  es un invariante positivo para el sistema  $x(i+1) = f(x(i))$ , con  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ , entonces  $V(\cdot)$  es una función de Lyapunov en  $\mathcal{X}$  para el sistema  $x(i+1) = f(x(i))$  respecto del conjunto  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 1** (Función de Lyapunov y Estabilidad Global Asintótica). *Sea  $V(\cdot)$  una función de Lyapunov para el sistema  $x(i+1) = f(x(i))$  respecto de  $\mathcal{A}$  con  $\alpha_3(\cdot)$  una función  $\mathcal{K}_\infty$ . Entonces  $\mathcal{A}$  es globalmente estable.*

Para el caso de sistemas restringidos, se puede demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 2** (Función de Lyapunov y Estabilidad Asintótica (caso restringido)). *Sean  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  invariante positivo para  $x(i+1) = f(x(i))$ , y sea  $\mathcal{A}$  cerrado e invariante positivo para  $x(i+1) = f(x(i))$ , con  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ . Si existe una función de Lyapunov en  $\mathcal{X}$  para el sistema  $x(i+1) = f(x(i))$  respecto de  $\mathcal{A}$  con  $\alpha_3(\cdot)$  una función de tipo  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces  $\mathcal{A}$  es asintóticamente estable para  $x(i+1) = f(x(i))$  con una región de atracción  $\mathcal{X}$ .*

## Capítulo 2

# MPC para Tracking: Seguimiento de Puntos de Trabajo

El objetivo de este capítulo es presentar el controlador MPC para seguimiento de puntos de trabajo, también llamado MPC para Tracking, sus conceptos fundamentales, así como sus principales propiedades y ventajas, en especial, de la estrategia del MPC con planeamiento en línea. Este capítulo provee las ideas de base que serán extendidas a lo largo de la tesis para abarcar los casos de seguimiento de trayectorias y curvas.

### 2.1. Introducción

La mayoría de los resultados referidos a la estabilidad y factibilidad de los controladores MPC se refieren al problema de estabilización de un punto de trabajo estacionario correspondiente a un punto de equilibrio del sistema dinámico. Es habitual plantear este tipo de problemas como un problema de regulación mediante un cambio de variables que desplaza el punto de trabajo de equilibrio al origen del nuevo sistema (Muske and Rawlings, 1993), aunque esta forma de resolver el problema tiene ciertos inconvenientes dado que los ingredientes terminales estabilizantes son dependientes del punto de trabajo y, por lo tanto, cuando este cambia, la factibilidad del controlador puede perderse y, en consecuencia, fallar el seguimiento de referencias (Rossiter et al., 1996; Bemporad et al., 1997; Pannocchia and Kerrigan, 2005). Para evitar estos inconvenientes se debe replantear el problema previo a cada cambio de referencia.

Algunas soluciones a la pérdida de factibilidad fueron propuestas, por ejemplo, en Bemporad et al. (1997) donde se utiliza un controlador de comando predictivos que provee una secuencia de referencias virtuales para garantizar la satisfacción de las restricciones del lazo cerrado con el controlador de bajo nivel. En Chisci and Zappa (2003) se propone un modo alternativo para mantener la factibilidad, en el que se ajusta la referencia, similar al *reference governor* (Garone et al., 2017).

El problema del seguimiento de puntos de trabajo cambiantes en el tiempo encuentra una solución muy interesante en el llamado MPC para Tracking (MPCT) (Limon et al., 2008; Ferramosca et al., 2009, 2011), que permite guiar el sistema a cualquier punto de trabajo admisible en forma factible. Además, esta formulación es efectiva frente al problema de referencias que no cumplen con la dinámica del sistema o sus restricciones, y elimina el riesgo de la pérdida de factibilidad frente a cambios en la referencia. Este controlador, además, cuenta con un dominio de atracción ampliado respecto del MPC para tracking estándar, inclusive considerando conjuntos invariantes terminales. El controlador MPCT introduce un par

de variables de estado y entrada de equilibrio  $(x_a, u_a)$ , i.e.,  $x_a = f(x_a, u_a)$ , como variables de decisión adicionales en el problema de optimización, junto a un término adicional en el funcional de costo que se denomina *costo de offset* y se encarga justamente de penalizar la distancia entre ese equilibrio admisible y el correspondiente a la referencia deseada. Cabe destacar que la incorporación de estos ingredientes no van en detrimento del desempeño estacionario del controlador, mantiene propiedades de optimalidad local y garantía de convergencia al equilibrio óptimo admisible.

A continuación comentaremos su formulación y características principales, pero en primer lugar presentaremos el problema de regulación y también incluiremos una formulación en dos etapas, de planeamiento y de seguimiento, a fines de brindar mayor claridad en la explicación.

## 2.2. MPC para Regulación

Iniciamos esta sección con una revisión breve de la estabilidad del MPC, en primer lugar estudiando el problema de regulación, es decir, controlar al sistema de modo que su estado sea llevado al origen.

Sea el sistema dinámico en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k), u(k)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  el vector de entradas manipulables del sistema y  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  el vector de salidas. Se asume que la dinámica del sistema  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, que los conjuntos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{U}$  son compactos y convexos, y que el origen está contenido en el interior estricto de las restricciones, i.e.,  $(0, 0) \in \mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ . Denotaremos la solución de este sistema como  $\phi(j; x, \mathbf{u})$ ,  $j \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ , donde  $x = \phi(0; x, \mathbf{u})$ , para una secuencia de entradas  $\mathbf{u}$  y estado inicial  $x$  dados.

### 2.2.1. Formulación de controlador estable

Entre las formulaciones más difundidas del MPC para regulación, la estabilidad está garantizada gracias al uso de un costo terminal y una adecuada restricción terminal, en las que sus principales ingredientes (funcional de costo y restricciones incluidas en el problema de optimización) toman las siguientes formas

#### Funcional de costo

El funcional de costo está dado por

$$V_N(x; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j), u(j)) + V_f(x(N)),$$

donde  $x(j)$  y  $u(j)$  denotan el estado y la acción de control predichos. La función  $\ell(x(j), u(j))$  se la suele denominar costo de etapa y  $V_f(x)$  es el costo terminal.

### Problema de Optimización

El problema de optimización  $\mathcal{P}_N$  se plantea de la siguiente forma:

$$V_N^O(x) = \min_{\mathbf{u}} V_N(x; \mathbf{u})$$

$$s.a. x(0) = x, \tag{2.2a}$$

$$x(j+1) = f(x(j), u(j)), \tag{2.2b}$$

$$(x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}, \tag{2.2c}$$

$$x(N) \in \mathcal{X}_f, \tag{2.2d}$$

$$j = 0, \dots, N-1,$$

donde (2.2a) establece la condición inicial de la predicción, (2.2b) impone la dinámica del sistema para las predicciones, (2.2c) introduce las restricciones sobre los estados y las entradas en el problema, y (2.2d) constituye la restricción terminal con  $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$ .

Un aspecto importante a tener en cuenta es la garantía de factibilidad recursiva, es decir, que el problema no pueda perder factibilidad en las sucesivas iteraciones. El problema de la pérdida de factibilidad puede mostrarse suponiendo una solución factible en el tiempo  $k$ ,  $x(k) \in \mathcal{C}_N(\mathcal{X}_f)$ . El estado siguiente  $x(k+1)$ , alcanzado tras la aplicación de la entrada  $u(k) = \kappa_N(x(k))$ , pertenecerá al conjunto controlable en  $(N-1)$  pasos  $\mathcal{C}_{N-1}(\mathcal{X}_f)$  pero no necesariamente al conjunto  $\mathcal{C}_N(\mathcal{X}_f)$ . Si en alguna iteración  $x \notin \mathcal{C}_N(\mathcal{X}_f)$ , el problema se torna infactible. Esta complicación se sortea, a través del requerimiento de invariancia sobre el conjunto terminal  $\mathcal{X}_f$ , como se discutirá más adelante.

### Análisis de Estabilidad

Los supuestos básicos para garantizar la estabilidad del sistema controlado con el MPC son los siguientes:

#### Condiciones de existencia de soluciones del problema de optimización

**Supuesto 1** (Continuidad del sistema y del costo). *Las funciones  $f(\cdot)$ ,  $\ell(\cdot)$  y  $V_f(\cdot)$  son continuas y  $f(0,0) = 0$ ,  $\ell(0,0) = 0$  y  $V_f(0) = 0$ .*

**Supuesto 2** (Compacidad del conjunto y factibilidad del origen). *Los conjuntos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_f$  son cerrados,  $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$  y  $\mathcal{U}$  es compacto. Además, cada uno de estos conjuntos contiene al origen en su interior.*

**Proposición 1.** *Supongamos que se cumplen los supuestos 1 y 2. Entonces*

1. *La función  $V_N(\cdot)$  es continua*
2. *Para cada  $x \in \mathcal{X}_N$  el conjunto de restricciones de control  $\mathcal{U}_N(x)$  es compacto.*
3. *Para cada  $x \in \mathcal{X}_N$  existe una solución para  $\mathcal{P}_N$ .*

**Supuesto 3** (Invariancia del conjunto terminal y decrecimiento del costo). *Sean  $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$ ,  $V_f(x)$  una función positiva definida, continua en el origen y  $\kappa_N(x)$  una ley de control tal que para todo  $x \in \mathcal{X}_f$*

- *$f(x, \kappa_N(x)) \in \mathcal{X}_f$  con  $\kappa_N(x) \in \mathcal{U}$ ,*

$$\blacksquare V_f(f(x, \kappa_N(x))) - V_f(x) \leq -\ell(x, \kappa_N(x)).$$

La primera condición implica la propiedad de invariancia de  $\mathcal{X}_f$  para la evolución del sistema a lazo cerrado  $f(x, \kappa_N(x))$  y la segunda condición, de decrecimiento sobre la evolución del costo terminal  $V_f(x)$  garantiza la convergencia.

**Proposición 2** (Factibilidad Recursiva y Atractividad del origen). *Supongamos que se cumplen supuestos 1, 2 y 3. Entonces el problema es recursivamente factible y el estado converge al origen.*

La prueba de estabilidad se basa en los conceptos de la teoría de estabilidad de Lyapunov. La función valor óptimo  $V_N^O$  surge como candidata a función de Lyapunov para el problema de regulación. Para un desarrollo de la demostración de esta proposición, referimos a Rawlings et al. (2017), Sección 2.4.

## 2.3. MPC para Seguimiento de Puntos de Trabajo

El objetivo de control en esta instancia será estabilizar el sistema en un punto de trabajo  $y_{\text{ref}}$ , que será provisto como referencia por un sistema externo, e.g., un optimizador de tiempo real. Resolver el problema de seguimiento de puntos de trabajo usando el controlador MPC consiste en diseñar los ingredientes de la formulación, el funcional de costo y conjunto terminal, de manera que se garantice la estabilidad del lazo cerrado. Ese punto de trabajo se considerará constante de a tramos, y en particular nos enfocaremos en la formulación denominada MPC para Tracking.

El objetivo es guiar el sistema (2.1) hasta un punto de trabajo (también denominado punto de equilibrio, setpoint o referencia de salida constante en la literatura) dado por  $y = y_{\text{ref}}$ . Como antes, suponemos existente un equilibrio factible dado por  $(x_s, u_s) \in \mathcal{Z}$  asociado a la referencia tal que

$$x_s = f(x_s, u_s), y_{\text{ref}} = h(x_s, u_s).$$

Los ingredientes de la formulación básica de este controlador MPC incluyen el funcional de costo

$$V_N(x, y_{\text{ref}}; \mathbf{u}, x_s, u_s) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x(k) - x_s(y_{\text{ref}}), u(k) - u_s(y_{\text{ref}})) + V_f(x(N), y_{\text{ref}}),$$

y el conjunto terminal  $\mathcal{X}_f$  invariante de control.

El problema de optimización que se resuelve es

$$V_N^O(x, y_{\text{ref}}) = \min_{\mathbf{u}, x_s, u_s} V_N(x, y_{\text{ref}}; \mathbf{u}, x_s, u_s)$$

$$s.a. x(0) = x, \tag{2.3a}$$

$$x(j+1) = f(x(j), u(j)), \tag{2.3b}$$

$$(x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}, \tag{2.3c}$$

$$x(N) \in \mathcal{X}_f(y_{\text{ref}}), \tag{2.3d}$$

$$j = 0, \dots, N-1. \tag{2.3e}$$

Las condiciones para garantías de estabilidad son las siguientes

**Supuesto 4.** Las funciones  $f(\cdot)$ ,  $\ell(\cdot)$  y  $V_f(\cdot)$  son continuas,  $x_s(y_{\text{ref}}) = f(x_s(y_{\text{ref}}), u_s(y_{\text{ref}}))$ ,  $\ell(0, 0) = 0$  y  $V_f(x(N), y_{\text{ref}}) = 0$ .

**Supuesto 5.** Los conjuntos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_f(y_{\text{ref}}) \subseteq \mathcal{X}$  son cerrados, y  $\mathcal{U}$  es compacto. Además,  $x_s \in \mathcal{X}_f(y_{\text{ref}})$ ,  $u_s \in \mathcal{U}$ .

En el siguiente supuesto, consideraremos que se realiza un cambio de variables de modo que el estado de equilibrio  $x_s$  es el origen en la nueva variable  $x$ .

**Supuesto 6** (Supuesto básico de estabilidad). *Se asume que:*

1. Existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que,  $V_f(f(x, u) + \ell(x, u)) \leq V_f(x), \forall x \in \mathcal{X}_f$ .
2. Existen funciones  $\alpha_1(\cdot)$  y  $\alpha_f(\cdot)$  de tipo  $\mathcal{K}$ , satisfaciendo

$$\ell(x, u) \leq \alpha(|x|), \forall x \in \mathcal{C}_N(\mathcal{X}_f), \forall u \text{ tal que } (x, u) \in \mathcal{Z}. \quad (2.4a)$$

$$V_f(x) \leq \alpha_f(|x|), \forall x \in \mathcal{X}_f.$$

Del Supuesto 6 se sigue que el conjunto  $\mathcal{X}_f(y_{\text{ref}})$  es un invariante de control.

### 2.3.1. Diseño de condiciones terminales estabilizantes

El diseño de las condiciones terminales estabilizantes básicamente consiste en establecer condiciones sobre el estado terminal  $x(N)$  y el costo terminal  $V_f(x(N))$  de modo tal que se garantice la convergencia asintótica de la salida a la referencia. Para lograr esto se suele plantear el requerimiento de que el conjunto terminal  $\mathcal{X}_f$  sea invariante positivo bajo la ley de control terminal y que la función  $V_f$  sea una Función de Control de Lyapunov (CLF, del inglés Control Lyapunov Function). Una condición relativamente simple que lo garantiza es la restricción terminal del igualdad, como se explica a continuación.

#### Restricción terminal de igualdad

Seleccionando el conjunto terminal como  $\mathcal{X}_f(y_{\text{ref}}) = \{x_s(y_{\text{ref}})\}$ , tenemos que las soluciones del problema de optimización cumplirán  $x(N) = x_s(y_{\text{ref}})$ . Claramente, el conjunto definido como un equilibrio del sistema dinámico es un conjunto invariante. Y, por el Supuesto 4, el costo terminal queda definido como  $V_f(x_s(y_{\text{ref}}), y_{\text{ref}}) = 0$ , cuyo dominio es exclusivamente  $y_{\text{ref}}$ , por lo que es una CLF. Así definido, el dominio de atracción de este controlador será  $\mathcal{C}_N(x_s(y_{\text{ref}}))$ , es decir, por el conjunto de estados que pueden ser llevados en forma factible hasta  $x_s$  en  $N$  pasos. En la práctica, esto resulta notablemente restrictivo.

#### Restricción terminal de pertenencia al invariante para regulación

Una opción menos exigente es definir el conjunto terminal como el invariante para regulación  $\hat{\mathcal{X}}_f$  desplazado por la referencia,  $\mathcal{X}_f(y_{\text{ref}}) = x_s(y_{\text{ref}}) \oplus \hat{\mathcal{X}}_f$ , y el costo como  $V_f(x, y_{\text{ref}}) = \hat{V}_f(x - x_s(y_{\text{ref}}))$ , donde  $\hat{\mathcal{X}}_f(\cdot)$  y  $\hat{V}_f(\cdot)$  son el invariante y el costo terminal del problema de regulación. El dominio de atracción ahora será  $\mathcal{C}_N(x_s(y_{\text{ref}}) \oplus \hat{\mathcal{X}}_f)$ , que claramente incluye a  $\mathcal{C}_N(x_s(y_{\text{ref}}))$  en su interior. Así se logra una ampliación del dominio de atracción respecto del caso anterior, pero aún sigue siendo

relativamente restrictivo, porque para mantener las condiciones de estabilidad, el invariante desplazado debe estar íntegramente contenido en el conjunto factible. Esto se debe a que un subconjunto de un invariante no es necesariamente invariante.

## 2.4. La necesidad del planeamiento en línea

En diversas aplicaciones es habitual encontrarse con estructuras jerárquicas de control: capas superiores determinan las referencias que deben ser alcanzadas o seguidas por el sistema y capas de nivel inferior se encargan de producir las acciones tendientes a alcanzar esas referencias (Tatjewski (2008); Becerra et al. (1998)). Estas referencias pueden tener diversos orígenes, en algunos casos son resultado de la optimización de ciertos criterios y pueden tener en cuenta algún modelo dinámico. Este tipo de referencias las llamaremos exógenas, dado que estaremos tomando el punto de vista del controlador de bajo nivel. Cabe aclarar que las referencias provistas no cumplen necesariamente con las restricciones o la dinámica del sistema ni del modelo que utilizará el controlador de bajo nivel, dado que como se dijo, suelen estar determinadas por objetivos particulares del problema de control, que desconocen estas cuestiones.

### 2.4.1. El problema de la pérdida de factibilidad del MPC frente a cambios de referencias

En situaciones en las que el punto de operación deseado es provisto en forma exógena, la solución clásica consiste en replantear el problema sobre el sistema trasladado  $x_t = x - x_s$ .

El controlador de bajo nivel (en este caso el MPC) se encarga de estabilizar al sistema en el nuevo punto de trabajo. Ahora, debido al cambio de referencia, pueden darse las situaciones de que el conjunto terminal correspondiente al nuevo equilibrio desplazado i) no sea factible íntegramente, por lo que no se puede garantizar la factibilidad para todos los tiempos de muestreo y ii) el conjunto terminal puede no ser alcanzable en  $N$  pasos, con lo que el problema de optimización se torna infactible. A continuación presentamos un ejemplo ilustrativo de dicha situación.

#### Ejemplo: Doble integrador (restricción terminal de igualdad)

Consideramos un sistema doble integrador dado por

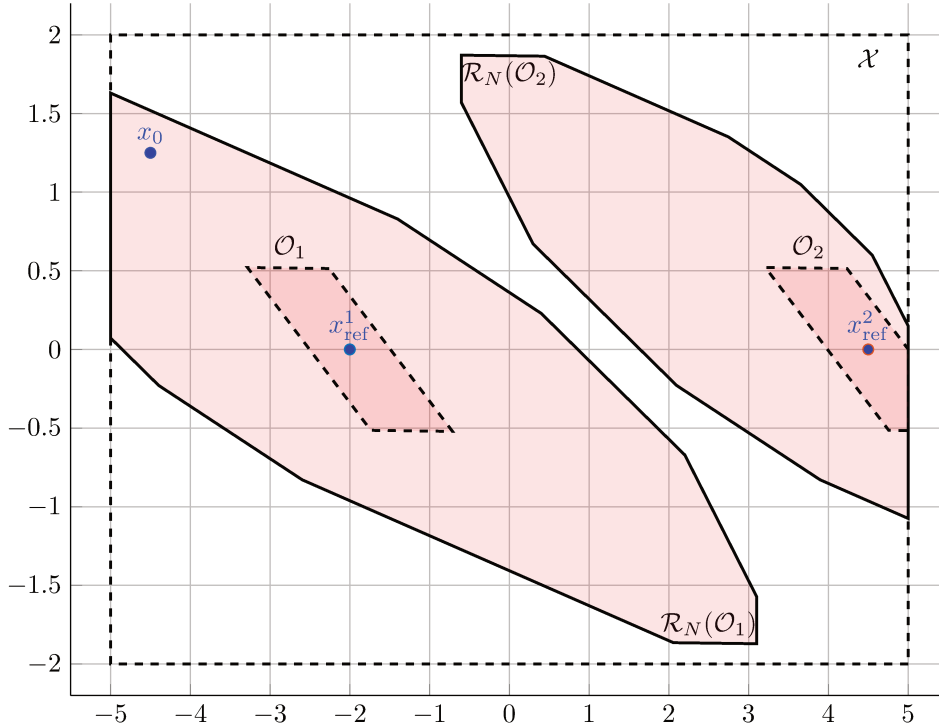
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

con restricciones dadas por

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} \leq x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -0,3 \\ -0,3 \end{bmatrix} \leq u \leq \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}.$$

Los conjuntos y estados de interés se ilustran en la Figura 2.1. Se considera un estado inicial del sistema  $x_0$  y una referencia indicada como  $x_{\text{ref}}^1$  y se muestran el conjunto invariante  $\mathcal{O}_1$  para una realimentación terminal lineal  $K$  obtenida del controlador LQR irrestricto con  $Q = I_{nx}$  y  $R = I_{nu}$ , que queda embebido en el dominio de atracción del controlador  $\mathcal{R}_N(\mathcal{O}_1)$ , para un costo terminal adecuado y  $\mathcal{X}_f = \mathcal{O}_1$ . Se puede notar que el problema de optimización (2.3) para un estado  $x_0 = (-4,5, 1,25)$  (como cualquier estado en  $\mathcal{R}_N(\mathcal{O}_1)$ ) es factible para la referencia  $x_{\text{ref}}^1$ . Por otra parte, vemos que el conjunto  $\mathcal{R}_N(\mathcal{O}_2)$ , es





**Figura 2.1:** Ejemplo de pérdida de factibilidad por cambio de referencia.

decir, el conjunto controlable en  $N$  pasos al invariante  $\mathcal{O}_2$ , no está contenido en ni interseca a  $\mathcal{R}_N(\mathcal{O}_1)$ . Por lo tanto, si consideramos un estado inicial en  $\mathcal{R}_N(\mathcal{O}_1)$ , no hay posibilidad de mantener la factibilidad si se cambia la referencia de  $x_{\text{ref}}^1$  a  $x_{\text{ref}}^2$ , sin importar el momento que sea. Se pueden observar además, para la referencia  $x_{\text{ref}}^2$ , que el conjunto invariante  $\mathcal{O}_2$  trasladado no es completamente factible y un subconjunto de un invariante no es necesariamente invariante. Ahí radica otra posible causa de la pérdida de factibilidad del problema del MPC frente a cambios de referencia, quedando demostrada una limitación de esta propuesta básica.

### 2.4.2. Problema de Planeamiento

Denominaremos como *problema de planeamiento* al problema de la generación de referencias factibles y seguibles (a partir del estado del sistema), para una referencia dada. Este problema consiste en la generación de trayectorias ad-hoc que sirvan para, sucesivamente, llevar el sistema desde una condición inicial (habitualmente el estado o salida actuales) a una condición terminal que favorezca el cumplimiento del objetivo de control. De acuerdo al contexto, este problema puede tomar distintos nombres en la literatura, como son, en lo que concierne a robótica, *trajectory planning* cuando se generan trayectorias para las variables relevantes a partir de una descripción concisa de la evolución deseada o *motion planning* cuando se establecen condiciones iniciales y terminales, permitiendo mayor libertad en los estadios intermedios.

Los problemas planteados en la Sección 1.3 imponen un requisito fundamental a la referencia: su factibilidad. En el caso del seguimiento de un punto de trabajo estacionario, se debe cumplir la condición  $(x_{ss}, u_{ss}) \in \mathcal{Z}$ ; análogamente, también tendrán que ser completamente factibles las trayectorias de referencia (de estados y entradas) para el seguimiento de trayectorias o curvas. Eso representa (desde la

## 2.5. FORMULACIÓN DEL MPC PARA SEGUIMIENTO DE PUNTOS DE TRABAJO EN DOS CAPAS<sup>23</sup>

propia formulación) una limitación a la aplicabilidad de las estrategias de MPC, dado que se requiere garantizar a priori la adecuación de las referencias provistas.

Por otra parte, en las formulaciones básicas no se consideran posibles cambios de referencia una vez que el controlador ya fue inicializado. Esto es una situación habitual en los esquemas de control jerárquicos, en los que una capa superior establece las condiciones de trabajo del sistema y el MPC se encarga de estabilizar el sistema en dicha referencia.

A grandes rasgos, hay estrategias que garantizan la factibilidad recursiva y la estabilidad de los sistemas controlados. A modo de ejemplo, es posible que el controlador produzca una nueva referencia, ya sea a través de filtrado, introducción de referencias auxiliares, cambio transitorio de controlador y/o sus objetivos hasta recuperar la factibilidad del controlador original, entre otros.

Entre las distintas estrategias para afrontar el problema de la pérdida de factibilidad, algunas son un poco más drásticas, como ser cambiar de controlador provisoriamente para mantener la factibilidad del problema, plantear el cambio de referencia como una perturbación, entre otras.

El grupo de soluciones que incluyen algún tipo de planificación de una nueva referencia, están más directamente relacionadas al concepto de tracking. Entre ellos se destacan las estrategias basadas en la utilización de los llamados *reference governors* o *command governors*, que consiste en la inclusión de un filtrado de señal de referencia para asegurar la satisfacción de las restricciones en todo momento Gilbert et al. (1994, 1999). Estos últimos garantizan la factibilidad, a costa de un deterioro del desempeño y una cierta reducción del dominio de atracción, con el único objetivo de impedir la violación de restricciones. Este punto se analiza en Bemporad et al. (1997). Esta estructura es además utilizada exitosamente sobre sistemas no lineales Bemporad (1998); Angeli et al. (1999); Gilbert and Kolmanovsky (2002). Entre estas estrategias, nos enfocamos en las que proveen una nueva referencia que mantiene la factibilidad durante el estado transitorio del cambio de referencia. Esta producción de una referencia auxiliar es lo que llamamos el problema del planeamiento. Cuando el problema de planeamiento se resuelve en tiempo de ejecución, considerando el estado actual del sistema, se trata del caso de planeamiento en línea.

A modo ilustrativo, consideremos el caso en el que la referencia exógena  $y_{ex}(\cdot)$  provista al MPC sea infactible, de modo que el problema de seguimiento con la formulación clásica sería irresoluble. A través de la planificación en línea, se salvaría ese problema logrando la estabilización de una referencia alternativa  $y_{ref}(\cdot)$ , que optimiza cierto desempeño asociado a la referencia exógena, aunque siendo factible y alcanzable.

Una formulación superadora con planificación en línea es la llamada “MPC para Tracking” Limon et al. (2008), que permite realizar el seguimiento de cualquier punto de referencia, sujeto a cambios arbitrarios, con garantía de factibilidad recursiva, con un dominio de atracción ampliado y con un desempeño optimizado, convergiendo a la referencia si ésta es admisible o, caso contrario, al “mejor” equilibrio admisible. Esta estrategia consiste en incluir variables auxiliares en la optimización que el MPC resuelve en cada tiempo, y será el punto de partida de muchas de las propuestas presentadas en esta tesis.

## 2.5. Formulación del MPC para seguimiento de puntos de trabajo en dos capas

En esta sección se presentará un controlador en dos niveles: un nivel superior que realiza el planeamiento de una referencia adecuada, y un segundo nivel que consiste en un controlador MPC

que estabiliza de puntos de trabajo. Esta formulación se incluye a los fines de facilitar la comprensión y la explicación de la formulación en una única capa que se presentará en secciones posteriores. Por simplicidad en la exposición, en este punto consideraremos una restricción terminal de igualdad.

Este esquema consiste en dos problemas de optimización que se deben resolver sucesivamente en cada tiempo de muestreo; primero el planeamiento y luego el seguimiento, y se detallan a continuación:

1. Problema de planeamiento (o *steady state calculation*): dados el estado actual del sistema  $x$  y la referencia exógena  $y_{\text{ref}}$ , calcular la referencia estacionaria  $(x_a, u_a)$  alcanzable que minimice un costo de planeamiento  $V_O$  (habitualmente llamado *costo de offset* en el MPCT).

$$\min_{x_a, u_a} V_O(y_{\text{ref}}; x_a, u_a),$$

con  $x_a \in \mathcal{X}_s \cap \mathcal{R}_N(x)$ ,  $u_a \in \mathcal{U}_s$  y  $x_a = f(x_a, u_a)$ . Nótese que la referencia auxiliar no solo debe pertenecer a los conjuntos de equilibrio de estado y entrada,  $\mathcal{X}_s$  y  $\mathcal{U}_s$ , respectivamente, sino que además debe pertenecer al conjunto alcanzable en  $N$  pasos desde el estado del sistema actual  $x$ ,  $\mathcal{R}_N(x)$ .

2. Problema de tracking (o seguimiento): dados el estado actual del sistema  $x$  y la referencia alcanzable  $x_a$  (solución del problema de planeamiento), calcular la secuencia de entradas que minimiza el costo de seguimiento  $V_t$  que lleva el estado hasta la referencia en  $N$  pasos.

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} V_t(x_a, u_a, x; x, \mathbf{u}),$$

donde  $u(i) \in \mathcal{U}, i \in 0, \dots, N-1$ . Habitualmente, el costo de seguimiento tiene la forma

$$V_t(x_a, u_a, x; x, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x_a - x(j), u_a - u(j)) + V_t(x_a, x(N)),$$

donde el costo de etapa  $\ell(\cdot, \cdot)$  y el costo terminal  $V_t$  son funciones positivas definidas.

De esta manera, la solución al problema de planeamiento provee una referencia auxiliar alcanzable y el problema de seguimiento produce una secuencia de entradas óptima  $\mathbf{u}^*$  que conduce el estado hasta la referencia auxiliar. En el esquema de MPC, se aplica la primera acción  $u(0)^*$ , y se iteran los problemas en el estado alcanzado tras un intervalo de muestreo. Esta iteración va produciendo una nueva referencia auxiliar (un nuevo par de equilibrio) a ser seguido en cada instante, y se puede demostrar que el par de equilibrio converge al óptimo local (o global, bajo ciertas hipótesis), en forma simultánea a la convergencia del estado al equilibrio auxiliar. La estructura del MPCT integra estos dos problemas en un único problema de optimización, como se explica a continuación.

## 2.6. Formulación del MPC para Tracking: Planeamiento en Línea

La formulación de MPC para Tracking incluye variables de decisión adicionales  $(x_a, u_a)$  en el problema de optimización, llamadas “variables artificiales”, que determinan un equilibrio del sistema, i.e.,  $(x_a, u_a) \in \mathcal{Z}_a$ . Por otra parte, se incluye un término adicional al costo que penaliza el error de la trayectoria predicha respecto del equilibrio artificial y un término adicional que penaliza la distancia entre

el estado de equilibrio artificial y el estado de equilibrio de referencia. Otro ingrediente que se incluye en la formulación es un conjunto invariante para seguimiento, que determinará una restricción terminal extendida.

La función de costo se define como

$$V_N(x, y_{\text{ref}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}, x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x_a - x(j), u_a - u(j)) + V_t(x(N) - x_a) + V_O(y_a - y_{\text{ref}}),$$

donde  $x(j)$  denota la predicción del estado  $j$  tiempos de muestreo hacia adelante, el par  $(x_a, u_a)$  es el par de equilibrio artificial,  $y_a = h(x_a, u_a)$  es la variables de salida artificial,  $y_{\text{ref}}$  indica la referencia o salida deseada. Las funciones  $V_t(\cdot)$  y  $V_O(\cdot)$  son respectivamente el costo terminal y costo de offset, funciones convexas definidas positivas. La ley de control  $\kappa_N(x, y_{\text{ref}})$  es implícita y está dada por la solución al siguiente problema de optimización

$$V_N^O(x, y_{\text{ref}}) = \min_{\mathbf{u}, x_a, u_a} V_N(x, y_{\text{ref}}; \mathbf{u}, x_a, u_a) \quad (2.5a)$$

$$s.t. \ x(0) = x, \quad (2.5b)$$

$$x(j+1) = f(x(j), u(j)), \quad (2.5c)$$

$$(x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}, \quad (2.5d)$$

$$x_a = f(x_a, u_a), \quad (2.5e)$$

$$(x_a, u_a) \in \mathcal{Z}_a, \quad (2.5f)$$

$$x(N) \in \Omega_t, \quad (2.5g)$$

$$j = 0, \dots, N-1, \quad (2.5h)$$

donde  $\mathcal{Z}_a$  es el conjunto de equilibrios admisibles y  $\Omega_t$  un conjunto invariante especialmente definido para este problema.

A continuación daremos más detalles respecto de los ingredientes fundamentales de esta formulación.

### 2.6.1. Variables Artificiales como equilibrios del sistema

Las variables artificiales  $(x_a, u_a)$  están condicionadas a ser un par de equilibrio de control factible del sistema, es decir, debe cumplirse

$$x_a = f(x_a, u_a),$$

que además son factibles, o sea,  $x_a \in \mathcal{X}$ ,  $u_a \in \mathcal{U}$ . La incorporación de las variables auxiliares  $(x_a, u_a)$  es a los fines de contar con variables de decisión que hagan las veces de referencias "intermedias", útiles para llevar el estado actual hasta la referencia deseada como resultado de alcanzar dos objetivos concurrentes: El primero, trata de llevar las predicciones del sistema hacia las variables auxiliares - que solo son equilibrios admisibles libres, mientras que el segundo trata de llevar las variables auxiliares a la referencia deseada. Estas etapas no son consecutivas, sino simultáneas, lo que se demuestra probando que si las variables auxiliares convergen a la referencia, entonces previamente el sistema debe converger a las variables auxiliares y viceversa. En la sección 2.5.1 se muestra un boceto de dicha prueba.

### 2.6.2. Costo de Offset

El costo de offset  $V_O : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  suele plantearse como una función convexa, positiva definida y subdiferenciable<sup>1</sup> del error entre la referencia y la salida correspondiente al equilibrio artificial, i.e.,  $V_O(y_a - y_{\text{ref}})$ , con  $V_O(0) = 0$ . En la práctica, suele tomar la forma de un término de penalización cuadrática ponderada,  $V_O := \|y_a - y_{\text{ref}}\|_T^2$ , y su efecto es el de guiar las variables artificiales a la referencia, mientras que los términos restantes del costo promueven un acercamiento las predicciones a dichas variables artificiales.

### 2.6.3. Restricción y costo terminales

#### Restricción terminal de Igualdad

Una condición simple para cumplir el requisito de invariancia consiste en imponer una restricción terminal de equilibrio, que se implementa como una restricción de igualdad  $x(N) = x_a$ , dado que las variables artificiales conforman un equilibrio para la dinámica del sistema. Así, el término de penalización terminal  $V_t$  se anula. La región de factibilidad de esta formulación está dada por el conjunto de estados para los que el problema de optimización tiene solución.

En este caso, visto que  $x_a$  es una variable de decisión, la región factible será el conjunto de estados que pueden ser dirigidos a  $\mathcal{X}_a$ , es decir, a cualquier punto de equilibrio  $x_a$  en  $N$  pasos en forma factible.

El conjunto de estados que pueden ser dirigidos hasta  $\mathcal{X}_s$  en  $N$  pasos, satisfaciendo las restricciones en el estado y entrada a lo largo de su evolución, constituirá el dominio de atracción de este controlador (considerando condición terminal de igualdad) y se denota  $\mathcal{C}_N(\mathcal{X}_s)$ .

#### Restricción de pertenencia al conjunto Invariante para Tracking

Dado el conjunto de equilibrio del sistema  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  y una ley de control estabilizante  $\kappa_t(x, y_{\text{ref}})$ , se puede determinar un conjunto  $\Omega_t$  tal que una vecindad de dicho conjunto de equilibrio sea estable (la evolución del estado converja a y permanezca en dicha vecindad).

Consideremos la ley de realimentación lineal

$$u(k) = K(x(k) - x_a) + u_a \quad (2.6)$$

donde  $(x_a, u_a)$  indican un par de equilibrio auxiliar. Es conocido que esa ley estabilizará al sistema irrestricto si  $A + BK$  tiene sus autovalores en el interior del círculo unitario. Para el caso restringido, se deberá determinar una vecindad del equilibrio deseado de manera que se garantice una evolución admisible para todos los puntos en dicho conjunto.

## 2.7. Caracterización de los conjuntos terminales

Ahora nos abocaremos a la caracterización de conjuntos terminales, considerando sistemas lineales y restricciones políticas sobre el estado y la entrada. Como ley de control terminal, se considerará una

<sup>1</sup>Una función es subdiferenciable si admite subgradientes. Dada una función  $f$ ,  $g$  es un subgradiente de  $f$  en  $x$  si

$$f(y) \geq f(x) + g'(y - x) \forall y.$$

realimentación lineal  $K$  obtenida a partir de la solución del controlador LQR irrestricto.

### 2.7.1. Caracterización del conjunto de equilibrio de un sistema lineal

A continuación revisaremos la caracterización del par de equilibrio  $(x_s, u_s)$  que corresponde a una salida estacionaria deseada  $y_t = h(x_s, u_s)$ . Sea un sistema lineal,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k). \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Supuesto 7.** *El par  $(A, B)$  es estabilizable y el estado medido en cada instante.*

Bajo el supuesto 7, cualquier par de equilibrio  $(x_s, u_s)$  debe cumplir que  $x_s = Ax_s + Bu_s$  y la salida  $y_s = Cx_s + Du_s$ , o lo que es lo mismo,

$$\begin{bmatrix} A - I & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_s \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

siendo  $I$  y  $0$  la matriz identidad y el vector de ceros de dimensiones adecuadas, respectivamente. Para incorporar las restricciones a esta condición, definiremos el conjunto de pares  $z := (x, u)$  admisibles como

$$\mathcal{Z}_a = \{z = (x, u) : z \in \lambda\mathcal{Z}, (A - I)x + Bu = 0\},$$

con  $\lambda \in [0, 1)$ , arbitrariamente cercano a 1. Se incluye  $\lambda$  para prevenir problemas de pérdida de factibilidad en aquellos casos en que la referencia active las restricciones y, sin pérdida de generalidad, se asume que el origen está en el interior de  $\mathcal{Z}$ . Así, los conjuntos de estados y entradas de equilibrio pueden ser expresados como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_a &= \text{proj}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}_a), \\ \mathcal{U}_a &= \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathcal{Z}_a). \end{aligned}$$

Análogamente, el conjunto de salidas admisibles estará dado por

$$\mathcal{Y}_a = \{y \in \mathbb{R}^p : (x_s, u_s) \in \mathcal{Z}_a, y = Cx_s + Du_s\}.$$

Cabe destacar que para un  $y_s$  dado, existirá  $(x_s, u_s)$  si (Rawlings et al., 2017, Lema 1.14)

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = n + p, \quad (2.9)$$

lo que solo puede cumplirse si el número de entradas es mayor o igual al número de salidas, i.e.  $m \geq p$ .

### 2.7.2. Cómputo del conjunto invariante para tracking

El ingrediente del problema 2.5 en el que nos enfocaremos ahora es el conjunto invariante terminal  $\Omega_t$ . Este conjunto representa los estados que pueden ser guiados a algún equilibrio  $x_a$  a través de una ley

de control terminal  $\kappa_t(x, x_a, u_a)$ . Simbólicamente,

$$\begin{aligned}\Omega_t &:= \{x \in \mathcal{X} \mid \exists(\mathbf{u}, x_a, u_a), \\ &\quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x_a\| = 0, \\ &\quad x_a = f(x_a, u_a), (x_a, u_a) \in \mathcal{Z}_a \\ &\quad x(k+1) = f(x(k), u(k)), x(0) = x, \\ &\quad x(k) \in \mathcal{X}, u(k) \in \mathcal{U}, k \in 0, \dots, \infty\}.\end{aligned}$$

En particular, vamos a considerar los estados que puedan ser estabilizados a través de una realimentación lineal (2.6), obtenida como la solución al problema de regulación LQR.

A los fines de describir del conjunto invariante terminal correspondiente a la realimentación lineal y teniendo en cuenta las restricciones de estado y entrada, definiremos el estado aumentado  $\tilde{x} = (x, x_a, u_a)$ , es decir, el estado aumentado con un par de equilibrio. Considerando que el lazo se cierra con la realimentación (2.6), la dinámica de este nuevo sistema puede representarse como

$$\begin{bmatrix} x \\ x_a \\ u_a \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} A + BK & -BK & B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \\ u_a \end{bmatrix} (k), \quad (2.10)$$

de modo que  $\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k)$ . Se puede notar que el equilibrio auxiliar  $(x_a, u_a)$  es constante en la propagación de dicho sistema.

Para un estado inicial dado  $\tilde{x}(0) = (x(0), x_a, u_a)$ , la trayectoria estará dada por  $\tilde{x}(k) = (x(k), x_a, u_a)$ , mientras que la evolución del sistema deberá satisfacer las restricciones,  $(x(k), K(x(k) - x_a) + u_a) \in \mathcal{Z}$  para todo  $k > 0$ . Entonces, podemos describir el conjunto controlable en un paso a  $\mathcal{Z}$  como

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{x} = (x, x_a, u_a) \mid (x, K(x - x_a) + u_a) \in \mathcal{Z}, (x_a, u_a) \in \lambda\mathcal{Z}\}. \quad (2.11)$$

El conjunto de estados aumentados iniciales admisibles, es decir, los estados tales que la trayectoria del sistema de lazo cerrado con realimentación  $K$  cumplirá con las restricciones durante los primeros  $j$  instantes, queda definido por

$$\mathcal{O}_j = \{\tilde{x} \mid \tilde{A}^i \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall i \in [0, j]\}.$$

Puede notarse que este conjunto satisface la recursión

$$\mathcal{O}_{j+1} = \mathcal{O}_j \cap \{\tilde{x} \mid \tilde{A}^{j+1} \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}\}.$$

El conjunto invariante para este sistema aumentado se puede calcular iniciando la recursión con  $\mathcal{O}_0 = \tilde{\mathcal{X}}$  y la condición de parada será  $\mathcal{O}_{j+1} \subseteq \mathcal{O}_j$ . Así, el conjunto  $\mathcal{O}_\infty$  será la salida de este algoritmo y será el denominado invariante para tracking. A través de una proyección al espacio de estados obtendremos el conjunto terminal de estados,

$$\Omega_t = \text{proj}_{\mathcal{X}}(\mathcal{O}_\infty).$$

Otra forma de interpretar el conjunto  $\Omega_t$  como la unión de los conjuntos invariantes calculados para cada equilibrio auxiliar. En otras palabras, para cada par  $(x_a, u_a) \in \mathcal{Z}_a$ , se calcula el conjunto invariante

admisibles  $\Omega_t(x_a, u_a)$  para su correspondiente sistema de lazo cerrado con  $\kappa_t(x, x_a, u_a)$ . El conjunto invariante sería la unión de todos estos conjuntos, i.e.,

$$\Omega_t := \bigcup_{(x_a, u_a) \in \mathcal{Z}_a} \Omega_t(x_a, u_a).$$

Claramente, esta última expresión corresponde a una unión infinita de conjuntos para  $\mathcal{Z}_a$  de interior relativo no nulo.

## 2.8. Propiedades del MPC para Tracking

Algunas características destacables de esta formulación son las siguientes:

1. Las restricciones no involucran la salida deseada  $y_{\text{ref}}$ , por lo tanto la factibilidad y la región de atracción no dependen de ella.
2. El Dominio de Atracción (DoA) de este sistema está dado por  $\mathcal{R}_N(\Omega_t)$ , el conjunto de estados controlables a  $\Omega_t$  en  $N$  pasos, i.e.,

$$\text{DoA} = \mathcal{R}_N(\Omega_t) := \{x \in \mathcal{X} \mid \exists \mathbf{u}, \phi(N; x, \mathbf{u}) \in \Omega_t, (x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}, j = 0, \dots, N\},$$

siendo que  $\Omega_t$  contiene al conjunto de equilibrio factible.

3. Para el caso de penalizaciones cuadráticas, con referencias factibles, el controlador se puede diseñar para lograr un desempeño equivalente al del controlador LQR restringido en una vecindad de la referencia.

### 2.8.1. Estabilidad Asintótica del Controlador MPCT

**Supuesto 8.** 1. Sea  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matriz positiva definida y sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz positiva semidefinida, tal que  $(Q^{1/2}, A)$  sea observable.

2. Sea  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una ganancia de control estabilizante, tal que los autovalores de  $(A + BK)$  están contenidos en el interior del círculo unitario.

3. Sea  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz positiva definida tal que

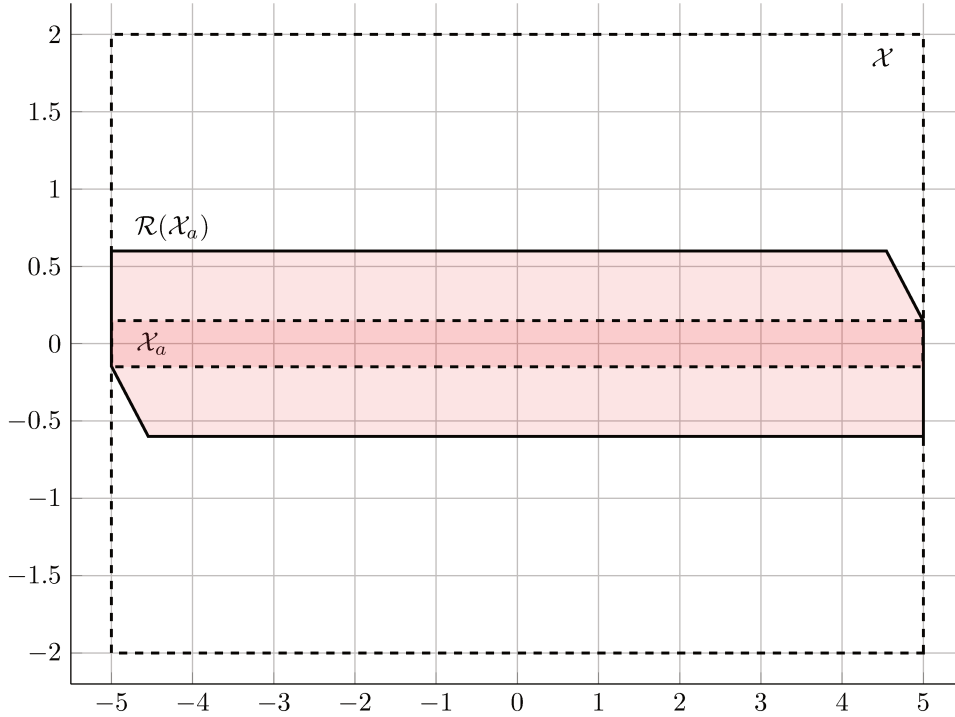
$$(A + BK)^T P (A + BK) - P = -(Q + K^T R K).$$

4. Sea  $\Omega_t^a \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$  un conjunto invariante poliédrico para el sistema (2.10), con  $\mathcal{X}$  definido en (2.11).

**Teorema 3** (Estabilidad Asintótica del MPCT). *Para cualquier estado inicial factible  $x_0 \in \mathcal{C}_N(\mathcal{X}_s)$  y dada una referencia  $y_{\text{ref}}$ , el sistema controlador por el MPC con  $u = \kappa_N(x, y_{\text{ref}})$  es estable, satisface las restricciones para todo instante futuro y además*

1. si la referencia es alcanzable, entonces el sistema converge al mismo
2. si la referencia no es alcanzable, el sistema converge a un equilibrio donde el costo de offset es mínimo.





**Figura 2.2:** Dominio de atracción con restricción terminal de igualdad.

**Boceto de la prueba de estabilidad asintótica del MPC para tracking** Esquemáticamente, la prueba consiste en probar la segunda condición, dado que si la referencia es alcanzable, el costo de offset es mínimo (cero) en ella. La prueba se desarrolla en dos partes, primero se demuestra la factibilidad recursiva y luego se construye una función de Lyapunov basada en el funcional de costo óptimo. La factibilidad recursiva se obtiene con el método estándar (Rawlings et al., 2017, Capítulo 2) a partir de una solución factible en el tiempo sucesor y la invariancia del conjunto terminal. La prueba habitual consta de un lema que indica que el costo óptimo es equivalente al costo de offset óptimo y demuestra por contradicción que el sistema no alcanza un estado estacionario si este último no es el estado que optimiza el costo de offset. Podríamos decir que que las convergencias a) del estado a la referencia artificial y b) de ésta al estado de equilibrio óptimo, son “simultáneas”. La función de Lyapunov se construye como  $J(x) = V_N^O(x, y_{\text{ref}}) - V_O(y_s, y_{\text{ref}})$ .

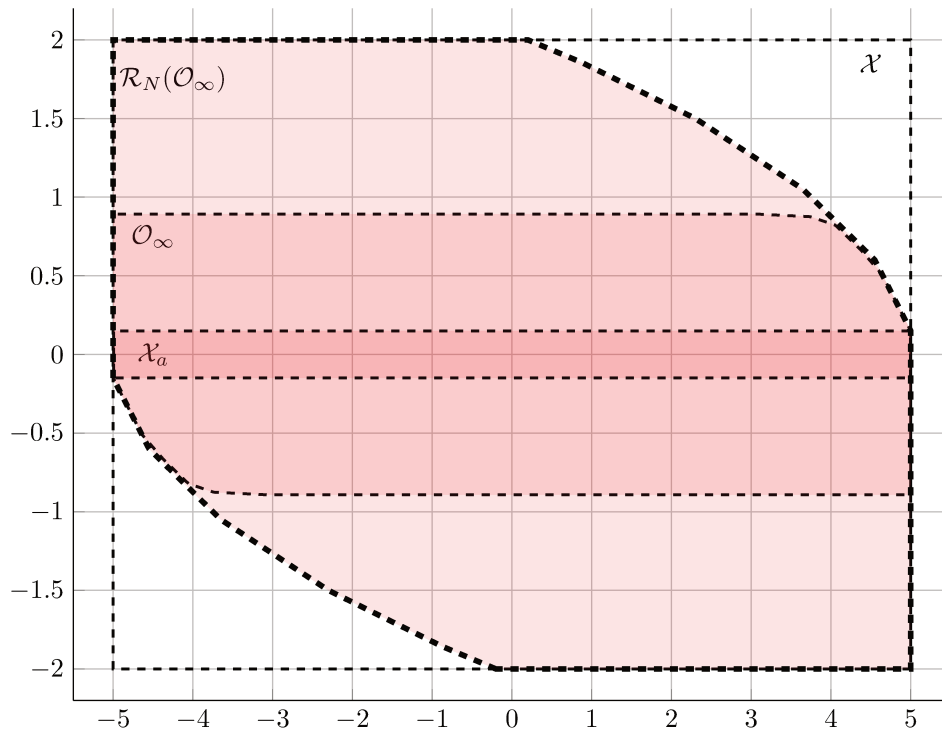
**Ejemplo: Doble integrador** Retomando el ejemplo del sistema doble integrador, en la Figura 2.2 se puede observar el conjunto de equilibrio que oficia de conjunto terminal y el dominio de atracción del controlador con la formulación del MPC para Tracking con restricción terminal de igualdad.

Consideramos el mismo sistema doble integrador dado por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & ,5 \\ 1 & ,5 \end{bmatrix}.$$

Cerramos el lazo con

$$K = \begin{bmatrix} -0,0226 & -0,0610 \\ -0,0768 & -0,4387 \end{bmatrix}.$$



**Figura 2.3:** Ilustración del conjunto de estados admisible  $\mathcal{X}$ , el conjunto invariante  $\mathcal{O}_\infty$  y el conjunto de estados de equilibrio  $\mathcal{X}_a$  para el sistema doble integrador.

En la Figura 2.3 se muestran los conjuntos de interés para el problema: el conjunto de estados admisible  $\mathcal{X}$ , el conjunto invariante  $\mathcal{O}_\infty$ , el conjunto controlable en  $N = 3$  pasos a  $\mathcal{O}_\infty$  y el conjunto de estados de equilibrio  $\mathcal{X}_a$ . En la Figura 2.4 se pueden observar las trayectorias resultantes de una simulación del sistema masa-resorte controlado con el MPC para tracking, con condición inicial  $x(0) = [-4,5, 1,75]$  y donde la referencia inicialmente está dada por  $y_{\text{ref}} = -4,75$  y luego de 15 intervalos de muestreo cambia a  $y_{\text{ref}} = 4,75$ . Las correspondientes gráficas de las variables de interés respecto del tiempo se pueden observar en la Figura 2.5.

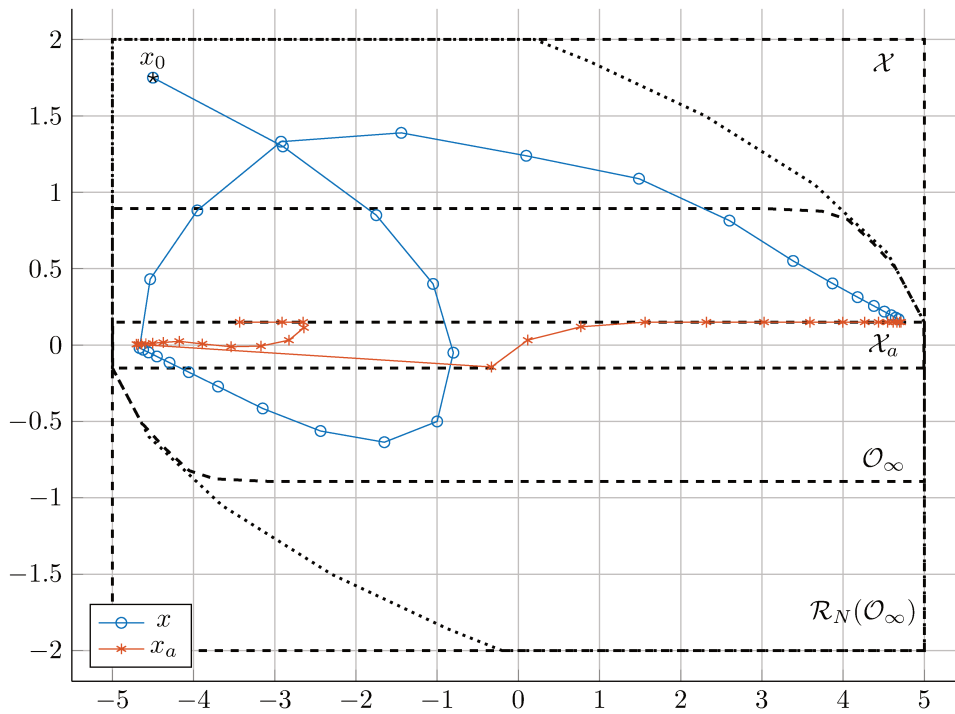


Figura 2.4: Trayectoria resultante con un cambio de referencia.

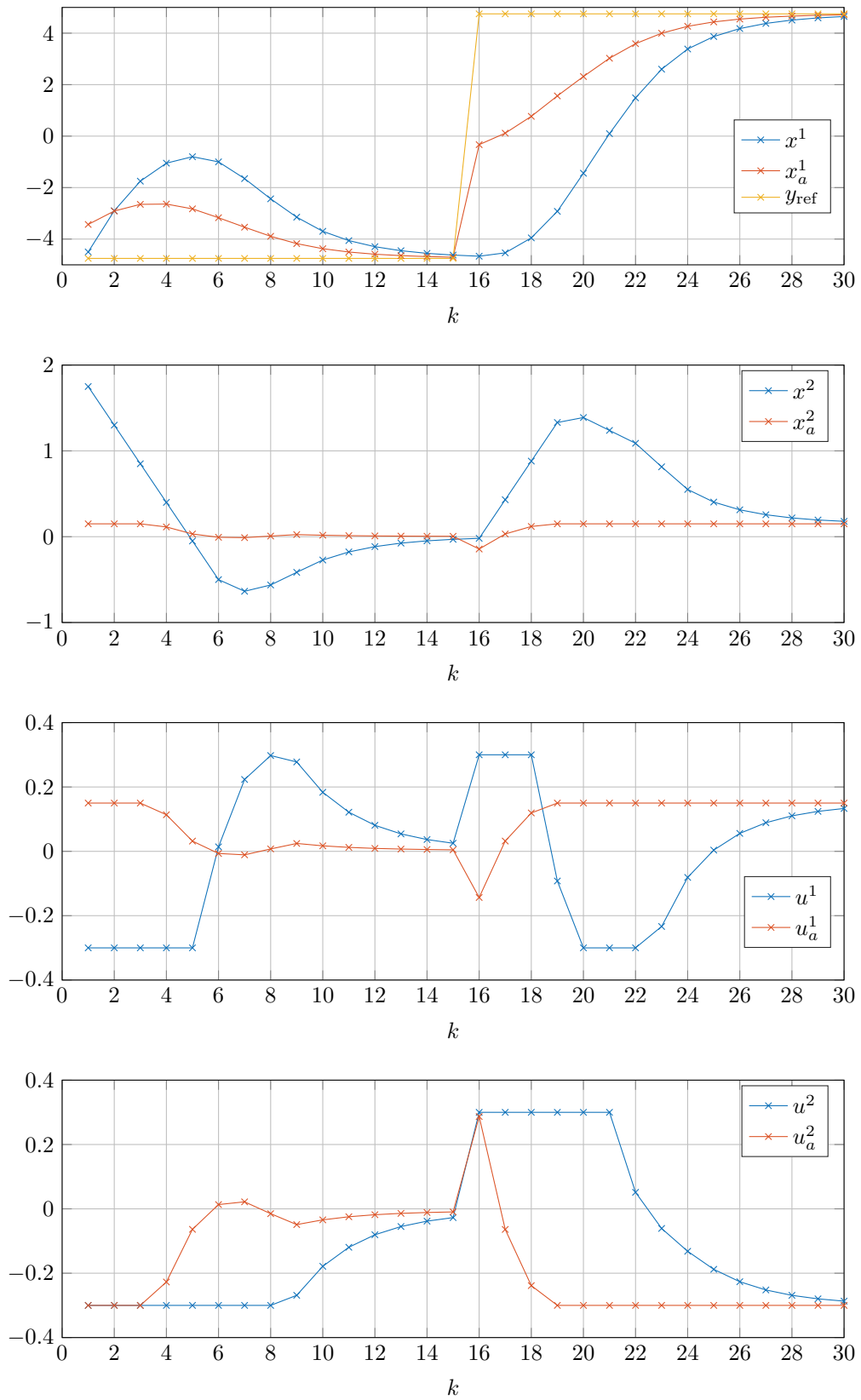


Figura 2.5: Evolución temporal de los estados y entradas.

## Capítulo 3

# MPC para Seguimiento de Trayectorias

En este capítulo estudiaremos formulaciones de MPC para el seguimiento de trayectorias periódicas. Inicialmente, presentaremos el problema general del seguimiento de trayectorias con sistemas variantes en el tiempo y analizaremos una formulación clásica de MPC a tal fin. Una vez observada la dificultad de garantizar la aplicabilidad de dicha formulación para referencias arbitrarias, estudiaremos estrategias orientadas al seguimiento referencias periódicas: en primer lugar, consideraremos una formulación para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI, del inglés, linear time-invariant) y, luego, extenderemos dicha propuesta a sistemas variantes en el tiempo, (LTV, del inglés, linear time-varying). El principal aporte de este capítulo será la caracterización de los dominios de atracción de estas formulaciones.

### 3.1. Introducción

Existen muchas aplicaciones relevantes en las que la operación del sistema no consiste en estabilizar un punto de operación, sino en seguir una trayectoria. Por ejemplo, en aplicaciones de robótica o vehículos autónomos, el sistema tiene que avanzar a lo largo de una trayectoria, de modo que la referencia es intrínsecamente variante en el tiempo. También hay ciertos casos en los que la operación variante en el tiempo es conveniente, en términos de rendimiento, frente a la estabilización del sistema en estados estacionarios.

Por otra parte, en diversas aplicaciones, es frecuente que la operación se de en condiciones variantes en el tiempo, pudiendo deberse a que el sistema tiene variaciones temporales y/o que haya ciertos parámetros que evolucionan durante la operación. Dichas variaciones temporales pueden deberse a causas endógenas como, por ejemplo, la variación circadiana de algunos parámetros o algún otro tipo de estacionalidad, o bien, tener origen en fuentes exógenas. Se pueden nombrar, a modo de ejemplo, algunos procesos industriales cuya operación presenta características periódicas como son: la liberación de drogas (Varigonda et al., 2008), la producción de metano a partir de microalgas (Bayen et al., 2015), las redes de agua potable (Grosso et al., 2014; Limon et al., 2014) o la generación y distribución de energía eléctrica (Pereira et al., 2015b), en los que las variaciones en la demanda o perturbaciones que suelen presentar cierta periodicidad.

Hay otros problemas que, por conveniencia en la descripción, suelen ser modelados como sistemas periódicos, destacándose algunos ejemplos como los sistemas *multirate*, que son sistemas cuyas entradas o salidas son actualizadas con distintos intervalos de muestreo o sistemas con salidas multiplexadas, es decir, sistemas en los que cada salida puede ser manipuladas exclusivamente en instantes de tiempo

predeterminados, respetando una secuencia habitualmente fija.

Al considerar sistemas variantes en el tiempo se torna conveniente incorporar al problema de estabilización de referencias en la forma de trayectorias, dado que para ese tipo de sistemas no existen en general soluciones de equilibrio exceptuando el origen. En este contexto, se puede considerar a las trayectorias periódicas como generalización del concepto de equilibrio de un sistema dinámico.

La formulación de MPC para seguimiento de puntos de trabajo no alcanza en general para estabilizar el sistema sobre trayectorias, por lo que nos abocaremos a la extensión de dicha formulación a tal fin. Las nociones presentadas previamente en el estudio de controladores para seguimiento de puntos de operación constantes o constantes por tramos (costo terminal, conjunto terminal y ley terminal) se extenderán en este capítulo para el seguimiento de trayectorias, garantizando las propiedades de lazo cerrado deseadas para los esquemas de MPC (factibilidad recursiva, estabilidad, satisfacción de restricciones).

En la literatura se pueden encontrar aplicaciones de MPC periódico en el control repetitivo de procesos continuos con operaciones periódicas (Lee et al., 2001) o en la estabilización de sistemas sujetos a perturbaciones periódicas (Broomhead et al., 2015), por ejemplo. Destacamos las propuestas que tienen en cuenta la característica *dinámica* de las referencias, es decir, que pueden ser cambiadas arbitrariamente en tiempo de ejecución Limon et al. (2014, 2015). Estas buscan mantener las propiedades de lazo cerrado aún en aquellos casos las trayectorias de referencia provistas en forma externa sean inalcanzables o infactibles. Los desarrollos presentados en estos trabajos son la base para los análisis que presentaremos a continuación.

### 3.2. Formulación MPC para Seguimiento de Trayectorias

Sea un sistema dado por

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)) \quad (3.1)$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  la entrada y  $f(x, u)$  describe la dinámica del sistema. Definiremos el conjunto factible aumentado  $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ .

**Definición 10** (Trayectoria seguible). *Si existe una secuencia  $(\mathbf{x}_{\text{ref}}, \mathbf{u}_{\text{ref}})$  tal que  $y_{\text{ref}}(j) = h(x_{\text{ref}}(j), u_{\text{ref}}(j))$ ,  $(x_{\text{ref}}(j), u_{\text{ref}}(j)) \in \mathcal{Z}$  y  $x_{\text{ref}}(j+1) = f(j, x_{\text{ref}}(j), u_{\text{ref}}(j))$  para  $j \in \mathbb{N}^+$ , decimos que la trayectoria es seguible.*

Dados el tiempo y estado actuales,  $k$  y  $x$  respectivamente, la trayectoria de referencia  $\mathbf{y}_{\text{ref}}(j)$ ,  $j \in \mathbb{N}^+$  que asumimos seguible y  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ , las secuencias de estados y entradas predichas a lo largo de un horizonte, definimos una función de costo como

$$V_N(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell(k+j, x(j), u(j), \mathbf{y}_{\text{ref}}) + V_f(k+N, x(N), y_{\text{ref}}(k+N)),$$

donde la función  $\ell(\cdot)$  se denomina costo de etapa, mientras que  $V_f(\cdot)$  es el costo terminal y habitualmente se incluye para garantizar la estabilidad del controlador. Ambas son funciones positivas definidas y se anulan en el origen.

El siguiente problema de optimización (dependiente del tiempo), nos permitirá definir un controlador

predictivo para sistemas variantes en el tiempo,

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} V_N(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}(\cdot); \mathbf{u}) \\ & \text{s.a. } x(0) = x, \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$x(j+1) = f(j, x(j), u(j)), \quad (3.2b)$$

$$(x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}, \quad (3.2c)$$

$$x(N) \in \Omega_t(k+N), \quad (3.2d)$$

$$j = 0, \dots, N-1,$$

donde (3.2a) establece la condición inicial del sistema, (3.2b) y (3.2c) imponen la dinámica del sistema y la factibilidad a las predicciones respectivamente. La restricción (3.2d) impone la pertenencia del estado terminal al conjunto terminal (invariante de control)  $\Omega_t(k+N)$ , que es el elemento  $k+N$ -ésimo de una secuencia de conjuntos, es decir, el conjunto terminal es dependiente del tiempo actual  $k$ . La secuencia de entradas optimizada según este problema, será denotada como  $\mathbf{u}^*(k)$ , y la ley control estará dada por la primera componente de la secuencia obtenida para cada instante  $k$ , i.e.,

$$\kappa_{\text{MPC}}(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}) = u^*(0|k).$$

La invariancia del conjunto terminal implica la existencia de una ley de control terminal (posiblemente variante en el tiempo) que garantice la permanencia del estado en la secuencia de conjuntos  $\{\Omega_t\}$  para todo instante posterior. Esta condición se puede expresar más formalmente como invariancia secuencial de control (Rawlings et al., 2017, Definición 2.27).

**Definición 11** (Invariancia secuencial). *Una secuencia de conjuntos  $(\mathcal{X}(i))_{i \geq 0}$  es invariante secuencial para un sistema  $x(k+1) = f(i, x)$  si para todo  $i \geq 0$ , para todo  $x \in \mathcal{X}(i)$  implica que  $f(i, x) \in \mathcal{X}(i+1)$ .*

**Definición 12** (Invariancia secuencial de control). *Una secuencia de conjuntos  $(\mathcal{X}(i))_{i \geq 0}$  es invariante secuencial de control para un sistema  $x(k+1) = f(i, x, u)$  si para todo  $i \geq 0$ , para todo  $x \in \mathcal{X}(i)$ , existe una  $u \in \mathcal{U}(i)$  tal que  $f(i, x, u) \in \mathcal{X}(i+1)$ .*

Bajo supuestos de continuidad del sistema y del costo, compacidad de los conjuntos secuenciales y unos supuestos básicos de estabilidad y controlabilidad, se puede demostrar que el sistema de lazo cerrado con el MPC propuesto, i.e.,

$$u(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}(\cdot)) = \kappa_{\text{MPC}}(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}(\cdot)), \quad (3.3)$$

es asintóticamente estable (Rawlings et al., 2017, Sección 2.4.5). Sin embargo, a pesar de su generalidad, esta formulación no es aplicable en muchos casos relativamente simples, como ser trayectorias de referencia que incluyan intervalos infactibles.

Estudiaremos a continuación una formulación de MPC para seguimiento de trayectorias periódicas, contemplando los casos de sistemas LTI y LTV, que soporte la provisión referencias infactibles y cambios de referencia en tiempo de ejecución. Este controlador se puede considerar una extensión del MPC para Tracking, utilizando en este caso una generalización del equilibrio, realizado como una trayectoria periódica.

### 3.3. MPC para seguimiento de trayectorias periódicas - Sistema LTI

En esta sección estudiaremos el problema de seguimiento de trayectorias periódicas, con sistemas LTI. Sea un sistema LTI dado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k),\end{aligned}\tag{3.4}$$

que asumimos controlable.

Una trayectoria de estados  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  es seguible para el sistema (3.4) si satisface las restricciones de estado  $x_{\text{ref}}(j) \in \mathcal{X}$  y puede ser seguida contemplando la dinámica del sistema, i.e., existe una secuencia de entradas  $\mathbf{u}_{\text{ref}}$  factible ( $u_{\text{ref}}(j) \in \mathcal{U} \forall j \geq 0$ ) tal que  $x_{\text{ref}}(j+1) = Ax_{\text{ref}}(j) + Bu_{\text{ref}}(j)$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ .

Dada una referencia  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$   $T$ -periódica seguible, es decir,  $y_{\text{ref}}(j+T) = y_{\text{ref}}(j)$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ , se asume que existen un par de secuencias  $(\mathbf{x}_{\text{ref}}, \mathbf{u}_{\text{ref}})$  que son solución del sistema y que producen la trayectoria de salida  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$ , es decir  $y_{\text{ref}}(j) = Cx_{\text{ref}}(j)$ .

La formulación del MPC con restricción terminal de igualdad está dada por

$$\min_{\mathbf{u}} V_N(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{u})$$

$$s.a. x(k) = x, \tag{3.5a}$$

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \tag{3.5b}$$

$$(x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}, \tag{3.5c}$$

$$x(N) = x_{\text{ref}}(k+N), \tag{3.5d}$$

$$j = 0, \dots, N-1.$$

Las restricciones son las mismas que en el Problema (3.2), con la excepción de la restricción terminal, que aquí se impone como restricción terminal de igualdad.

**Observación 3.** Aunque el sistema es invariante en el tiempo, el problema no lo es, dada la dependencia de la referencia  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$  que es variante en el tiempo.

Podemos notar que la condición de invariancia terminal está garantizada gracias a la factibilidad de la trayectoria periódica de referencia y a que se impone la condición terminal de igualdad. En consecuencia se verifican los supuestos clásicos para la estabilidad del sistema de lazo cerrado (Rawlings et al., 2017, Sección 2.4.5). Sin embargo, esta formulación presenta debilidades análogas al MPC para estabilización estándar, presentado en la sección anterior: se puede perder factibilidad debido a un cambio de referencia, y la restricción terminal de igualdad es una condición muy exigente, en lo relativo al dominio de atracción.

Generalizando esta formulación, a continuación extenderemos la noción del MPC para tracking para abarcar al seguimiento de trayectorias de referencia.

### 3.4. Controlador para seguimiento de trayectorias periódicas con planeamiento en línea. Formulación en dos capas.

En forma análoga al análisis realizado sobre el MPCT, vamos a considerar ahora el problema del seguimiento de trayectorias incluyendo el problema del planeamiento en línea. Inicialmente plantearemos



el problema de seguimiento en dos capas: el problema de planeamiento proveerá una trayectoria auxiliar  $T$ -periódica alcanzable en  $N$  pasos mientras que el problema de seguimiento conduce el estado hasta la trayectoria auxiliar. En cada iteración, se recalcula la trayectoria periódica auxiliar para el nuevo estado y su respectivo conjunto alcanzable.

1. Problema de planeamiento: dados el estado actual del sistema  $x$  y una trayectoria  $T$ -periódica de referencia  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$ , producir una trayectoria  $T$ -periódica  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$ , cuyo estado  $N$ -ésimo  $x_a(N)$  sea alcanzable desde el estado actual del sistema en  $N$  pasos y que su salida correspondiente  $\mathbf{y}_a$  aproxime *lo mejor posible* la curva de referencia.

Se propone la siguiente formulación del problema de optimización asociado

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a} V_O(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a) \\ \text{s.a. } x_a(N) \in \mathcal{R}_N(x) \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$(x_a(j), u_a(j)) \in \mathcal{Z}, \quad (3.6b)$$

$$x_a(j+1) = Ax_a(j) + Bu_a(j), \quad (3.6c)$$

$$x_a(T) = x_a(0), \quad (3.6d)$$

$$j = 0, \dots, T-1,$$

donde  $\mathbf{u}_a = \{u_a(0), \dots, u_a(T-1)\}$ ,  $\mathbf{x}_a = \{x_a(0), \dots, x_a(T-1)\}$ , y  $\mathcal{R}_N(x)$  es el conjunto alcanzable en  $N$  pasos desde el estado actual  $x$ . Al  $N$ -ésimo estado artificial se le impone la alcanzabilidad desde el estado actual (3.6a), mientras que a la trayectoria auxiliar se le impone factibilidad (3.6b), la dinámica del sistema (3.6c) y periodicidad (3.6d). Notamos que esto produce una trayectoria alcanzable que aproxima la referencia "lo mejor posible", según el funcional de costo que se utilice. Se impone la condición de alcanzabilidad, con miras a garantizar la compatibilidad con el problema de seguimiento, a ser resuelto usando la trayectoria auxiliar como parámetro. El costo  $V_O$  tiene una función análoga al costo de *offset* del caso de MPC para Tracking con planeamiento en línea y puede consistir, por ejemplo, en la penalización de la distancia entre la salida deseada y la salida planificada  $\mathbf{y}_a(\cdot)$  a lo largo de un período, en cuyo caso tomaría la forma  $V_O(\cdot) = \sum_{i=0}^{T-1} |y_{\text{ref}}(k+i) - y_a(i)|^2$ .

2. Problema de seguimiento: dados el estado actual del sistema  $x$ , el tiempo  $k$  y una trayectoria periódica  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$  alcanzable en  $N$  pasos desde  $x$ , producir la secuencia de entradas que minimiza el costo de seguimiento  $V_t$  que lleva el estado hasta  $x_a(N)$  en  $N$  pasos. El costo de seguimiento puede proponerse como una penalización del error entre los estados y las entradas predichas respecto de los planeados, a lo largo del horizonte de predicción, i.e.,

$$V_t(\cdot) = \sum_{i=0}^{N-1} |x(i) - x_a(i)|_Q^2 + |u(i) - u_a(i)|_R^2.$$

El problema de seguimiento se podría plantear de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{u}) \\ \text{s.a. } & x(0) = x, \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$(x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}(j), \quad (3.7b)$$

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j) \quad (3.7c)$$

$$x(N) = x_a(N), \quad (3.7d)$$

$$j \in 1, \dots, N-1,$$

donde las restricciones respectivamente imponen la condición inicial, la factibilidad de estados y entradas, la dinámica del sistema y la condición terminal de igualdad, constituyendo el seguimiento básico de la referencia seguible dada por  $\mathbf{x}_a$ .

En lugar de proponer la solución sucesiva de estos dos problemas, lo que implica el cómputo de dos optimizaciones en cada instante, a continuación presentamos una formulación que los combina en un único problema. En general, esto resulta en un mejor desempeño.

### 3.5. MPC para Tracking de Trayectorias Periódicas: Sistemas LTI

Los ingredientes de un controlador MPC de una sola etapa para el seguimiento de trayectorias periódicas Limon et al. (2014) resultan de la combinación en un único problema de optimización de los objetivos y restricciones mencionadas anteriormente: una formulación de un controlador MPC (con garantías de estabilidad) utilizando restricción terminal de igualdad, una variable artificial alcanzable por el sistema en  $N$  pasos y un costo de offset convexo entre la referencia y la variable artificial.

Planteando una función de costo que consiste en la suma de dos términos:

#### 1. Costo de planeamiento

$$V_p(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a) = \sum_{j=0}^T \ell_p(y_a(j) - y_{\text{ref}}(k+j), \mathbf{u}_a). \quad (3.8)$$

#### 2. Costo de seguimiento

$$V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^N \ell_t(x(j) - x_a(j), u(j) - u_a(j)). \quad (3.9)$$

Consideraremos la minimización del costo combinado de planificación y seguimiento, dado por

$$V_{\text{tt}}(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}) = V_p(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a) + V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{u}),$$

según la siguiente formulación

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a} V_{tt}(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{u})$$

$$s.a. \quad x_a(j+1) = Ax_a(j) + Bu_a(j), \quad (3.10a)$$

$$(x_a(j), u_a(j)) \in \mathcal{Z}, \quad (3.10b)$$

$$x_a(T) = x_a(0), \quad (3.10c)$$

$$j = 0, \dots, T,$$

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \quad (3.10d)$$

$$(x(i), u(i)) \in \mathcal{Z}, \quad (3.10e)$$

$$x(0) = x, \quad (3.10f)$$

$$x(N) = x_a(N), \quad (3.10g)$$

$$i = 0, \dots, N-1,$$

donde (3.10a-3.10c) definen la dinámica, factibilidad y periodicidad de la trayectoria artificial, mientras que (3.10d-3.10g) definen la dinámica, factibilidad, condición inicial y restricción terminal de igualdad para la trayectoria de estado predicha, respectivamente. Dichas restricciones son heredadas de las formulaciones de planeamiento y seguimiento de trayectorias presentadas anteriormente.

Cabe destacar que esta formulación resuelve simultáneamente la planificación y el seguimiento, lo cual es, en general, más conveniente que resolverlos en forma secuencial. La solución secuencial consistiría en resolver primero la planificación y luego el seguimiento. Esto consistiría en obtener la mejor trayectoria planificada alcanzable con respecto a la referencia y luego el problema de seguimiento optimice las entradas que llevan el sistema hasta dicha trayectoria. En ese planteo, el problema de seguimiento estaría muy restringido, dado que debería llegar a la trayectoria planificada que ya fue fijada en la etapa anterior. En cambio, si se plantea en una sola capa, tanto la trayectoria planificada como las entradas de control para el seguimiento son variables de decisión. Al tenerse en cuenta el costo combinado en el problema, el control de una capa es teóricamente ventajoso. En la formulación de una única etapa aprovechamos las variables artificiales  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$ , que son variables de decisión y vinculan ambos problemas entre sí. Vale la pena destacar que al incorporarse la restricción de alcanzabilidad  $x(N) = x_a(N)$ , ya no es necesario incluir en forma explícita el conjunto alcanzable en el problema del planeamiento. Remarcamos finalmente que la dependencia temporal de esta formulación está exclusivamente relacionada a la referencia y no tiene impacto sobre el dominio de atracción del controlador.

En este caso, la continuidad del sistema implica la continuidad de la trayectoria artificial y de la solución del sistema, que junto con la convexidad del conjunto de trayectorias artificiales resultan en la continuidad del costo. De este modo, se cumplen las condiciones para la estabilidad del lazo cerrado resultante, y asegura que la solución converge a la trayectoria periódica factible óptima.

### Análisis de Estabilidad del Controlador

En esta sección se mostrará que los sistemas de lazo cerrado propuestos en las secciones precedentes convergen a la trayectoria óptima y mantienen la factibilidad del problema de optimización bajo cambios de la trayectoria de referencia. Antes de pasar a los resultados propiamente dichos, presentamos el siguiente Teorema, que es una modificación del Teorema de Lyapunov clásico

**Teorema 4** (Lyapunov Modificado). *Consideremos un sistema autónomo  $z(k+1) = f(z(k))$  con  $z(k) \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $\Gamma$  un invariante positivo y sea  $\Omega \subseteq \Gamma$  un conjunto compacto, ambos incluyendo el origen en su interior. Si existe una función  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  y funciones  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  de tipo  $\mathcal{K}_\infty$  tales que*

1.  $W(z(k)) \geq \alpha_1(\|z(k)\|), \forall z(k) \in \Gamma$
2.  $W(z(k)) \leq \alpha_2(\|z(k)\|), \forall z(k) \in \Omega$
3.  $W(z(k+1)) - W(z(k)) \leq -\alpha_3(\|z(k)\|), \forall z(k) \in \Gamma$

entonces  $W(\cdot)$  es una función de Lyapunov en  $\Gamma$  y el origen es asintóticamente estable para todos los estados iniciales en  $\Gamma$ .

El siguiente teorema establece condiciones que garantizan la existencia de una función de Lyapunov y, por ende, la estabilidad asintótica de la trayectoria óptima.

**Teorema 5.** *Supongamos que el sistema es controlable y observable, así como que el problema de planificación es estrictamente convexo, la matriz de penalización es definida positiva y el horizonte de predicción es lo suficientemente grande. Entonces, con el sistema a lazo cerrado, el problema de optimización es recursivamente factible y la trayectoria óptima es asintóticamente estable y el estado converge asintóticamente a la trayectoria periódica óptima.*

La prueba de este teorema se desarrolla en Limon et al. (2014) y consiste en demostrar que el funcional de costo *rotado* es una función de Lyapunov para el sistema de lazo cerrado. El costo rotado se define como la diferencia entre el costo óptimo del problema de optimización del MPC en el tiempo  $k$ ,  $V_{tt}^*(\cdot)$  y el costo correspondiente a la trayectoria óptima,  $V_p^O(\mathbf{y}_{\text{ref}})$

$$W(x(k) - x_{\text{ref}}^O(k)) := V_{tt}^*(k, x(k), \mathbf{y}_{\text{ref}}) - V_p^O(\mathbf{y}_{\text{ref}}).$$

La demostración sigue los pasos habituales para la prueba de estabilidad del MPC para Tracking, con las adecuaciones necesarias para contemplar trayectorias artificiales.

### 3.5.1. Caracterización del Dominio de atracción

En esta sección se presenta una contribución de esta tesis, que consiste en la caracterización del dominio de atracción del controlador MPC para tracking periódico (de una capa) propuesto en Limon et al. (2014). El dominio o región de atracción es una característica crítica a la hora de diseñar los controladores para las distintas aplicaciones de interés. Para poder computar explícitamente el dominio de atracción del lazo cerrado resultante de (3.10) utilizaremos el concepto de estado  $T$ -recurrente.

**Definición 13** (Estado  $T$ -recurrente). *Un estado será  $T$ -recurrente si existe una trayectoria  $T$ -periódica factible que lo contiene.*

Más precisamente, la  $T$ -recurrencia de un estado  $x_p$  está dada por la existencia de una secuencia de entradas admisible  $\mathbf{u}_p = \left( u_p(0) \quad u_p(1) \quad \dots \quad u_p(T-1) \right)$  que produce una trayectoria de estados admisibles y  $x_p = \phi(T; x_p, \mathbf{u}_p)$ , i.e.,  $x_p(T) = x_p(0)$ .

Puede notarse que el concepto de estado recurrente no hace referencia a estados de una única trayectoria, sino a estados arbitrarios para los cuales, estableciendo el sistema en alguno de ellos,

hay garantía de existencia de una secuencia de acciones de control que pueden hacerlo regresar a ese mismo estado tras un intervalo  $T$ . Este nuevo concepto, a priori algo difuso, nos permitirá caracterizar apropiadamente el dominio de atracción del MPC de una etapa propuesto en Limon et al. (2014).

Denotando como  $\mathcal{P}_T$  el conjunto de estados recurrentes del sistema, se puede expresar el dominio de atracción del controlador como

$$ROA = \{x \in \mathcal{X}, x \in \mathcal{R}_N(\mathcal{P}_T)\},$$

es decir, el dominio de atracción del controlador es el conjunto de estados controlables en  $N$  pasos a cualquier estado  $T$ -recurrente.

A continuación se presentará una caracterización de los conjuntos de estados  $T$ -recurrentes para sistemas LTI, con restricciones politópicas. Para el caso de sistemas dinámicos lineales y restricciones politópicas, los conjuntos invariantes son politópicos y están definidos por un número finito de restricciones (Gilbert and Tan, 1991).

### Caracterización de estados recurrentes

En esta sección, la noción de equilibrio para un sistema LTI se generaliza a los estados recurrentes en  $T$  pasos o  $T$ -recurrentes.

Considérese el sistema (3.4) que suponemos controlable, y las restricciones  $x(k) \in \mathcal{X}(k)$ ,  $u(k) \in \mathcal{U}$ , para todo  $k \geq 0$ , donde además  $\mathcal{X}(k+T) = \mathcal{X}(k)$ , para todo  $k \geq 0$ . A través de la aplicación recursiva de la dinámica del sistema podemos formar predicciones de la evolución del sistema y producir el vector de predicción  $T$  pasos (Rossiter, 2003, Sección 3.2). Las matrices del sistema ampliado a  $T$  pasos serían

$$\mathbf{A} = A^T, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A^{T-1}B & A^{T-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Luego, los estados  $T$ -recurrentes pueden caracterizarse como

$$\mathbf{x}_p(T) = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}_p$$

o, bien,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Las expresiones anteriores no toman en cuenta las restricciones de estado a lo largo de la trayectoria  $\mathbf{x}_p$  resultante de la aplicación de  $\mathbf{u}_p$  al sistema en  $\mathbf{x}_p$ . Para considerar la restricción en el estado  $\mathbf{x}_p(j)$  para todo  $j \in [1, \dots, T]$ , podemos desarrollar la trayectoria resultante  $\mathbf{x}_p$  como

$$\mathbf{x}_p = \left( x_p^T(0) \quad x_p^T(1) \quad \dots \quad x_p^T(T-1) \right)^T,$$

cuya dinámica está dada por

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_p(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_p(k).$$

donde las matrices  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  se obtienen de la siguiente representación expandida

$$\begin{bmatrix} x_p(1) \\ x_p(2) \\ \dots \\ x_p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \dots \\ A^T \end{bmatrix} x_p(0) + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ A^{T-1}B & A^{T-2}B & A^{T-3}B & \dots & B & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(0) \\ u_p(1) \\ u_p(2) \\ \dots \\ u_p(T-1) \end{bmatrix}.$$

Más aún, podemos considerar el estado aumentado  $(x_p, \mathbf{u}_p)$ , de modo que podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x_p(1) \\ x_p(2) \\ \dots \\ x_p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A^2 & AB & B & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^T & A^{T-1}B & A^{T-2}B & A^{T-3}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(0) \\ u_p(0) \\ u_p(1) \\ u_p(2) \\ \dots \\ u_p(T-1) \end{bmatrix}.$$

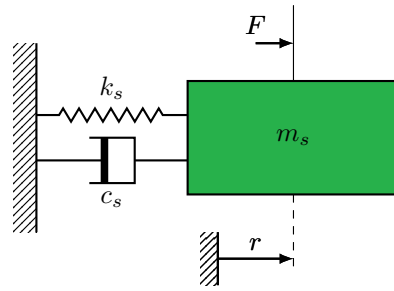
Se considerarán restricciones politópicas periódicas en el estado  $x \in \mathcal{X}(j)$  y en las entradas  $u \in \mathcal{U}(j)$ , que se pueden expresar en forma resumida como

$$H \begin{bmatrix} x_p(1) \\ x_p(2) \\ \dots \\ x_p(T) \\ u_p(0) \\ u_p(1) \\ u_p(2) \\ \dots \\ u_p(T-1) \end{bmatrix} \leq b, \quad (3.13)$$

donde  $b$  es un vector de dimensión  $\ell$  y  $H$  es una matriz de dimensión  $\ell \times T(n+m)$ . Ahora, el cumplimiento simultáneo de (3.13) y (3.12) define un conjunto, cuya proyección en el espacio  $x_p$  indica el conjunto de estados  $T$ -recurrentes para los que existe una trayectoria factible  $\mathcal{P}_T$ .

### 3.5.2. Ejemplo: Seguimiento de Trayectoria con sistema LTI

Presentaremos un ejemplo ilustrativo de aplicación del controlador del seguimiento de trayectorias periódicas (3.10) con un sistema lineal invariante en el tiempo. Consideremos un modelo de sistema masa-resorte-amortiguador lineal dado por  $\ddot{r} = -\frac{k_s}{m_s}r - \frac{c_s}{m_s}\dot{r} + \frac{1}{m_s}F$ , donde  $r$  indica la posición,  $F$  la fuerza externa aplicada,  $m_s$  la masa,  $k_s$  la constante de elasticidad del resorte y  $c_s$  el coeficiente de amortiguamiento, como se muestra en la Figura 3.1. Se puede representar en el espacio de estados como  $\dot{x} = Ax + Bu$ , con  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}$ , donde  $x := \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}$  y  $u := F$ . En el ejemplo, se toman valores de  $m_s = 1$ ,  $k_s = 1$ ,  $c_s = 2$ , se discretiza el sistema con un tiempo de muestreo de  $T_s = 0,4[s]$  y definimos el período  $T = 15$ , lo que corresponde a una recurrencia de  $6[s]$ . Consideraremos



**Figura 3.1:** Esquema del sistema masa-resorte-amortiguador.

restricciones invariantes en tiempo, tanto en el estado como en las entradas, dadas por  $|x_1| \leq 5$ ,  $|x_2| \leq 2$  y  $|u| \leq 0,5$ . Se toma el desplazamiento  $r(t)$  como salida y se desea realizar el seguimiento de referencias de salida periódicas con  $y(t) = r(t)$ , sujeta a cambios arbitrarios.

Los costos de etapa de seguimiento y planeamiento se definen como penalizaciones cuadráticas dadas por

$$\ell_t(\cdot) := \|x - x_a\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u - u_a\|_{\mathcal{R}}^2, \quad (3.14)$$

$$\ell_p(\cdot) := \|h(x_a) - y_{\text{ref}}\|_{\mathcal{K}}^2. \quad (3.15)$$

El controlador se sintoniza con los siguientes parámetros  $\mathcal{Q} = \text{diag}(1, 1)$ ,  $\mathcal{R} = 1$ ,  $\mathcal{K} = 1$ .

La referencia seleccionada es inicialmente una señal rectangular, que resulta infactible por la incompatibilidad con la dinámica del sistema y sus restricciones. Notamos que si no hubiera restricciones de entrada (si pudieran aplicarse entradas infinitas), la salida podría aproximar arbitrariamente dicha referencia. Tras 15 intervalos, se cambia la referencia por una señal senoidal de amplitud 0,25, que resulta perfectamente seguible para el sistema.

En la Figura 3.2a se muestran los conjuntos de interés: el conjunto factible  $\mathcal{X}$ , el conjunto de estados  $T$ -recurrentes para el sistema discretizado  $\mathcal{P}_T$  y el conjunto controlable en  $N$  pasos a  $\mathcal{P}_T$ . En la Figura 3.2b se muestra una trayectoria  $T$ -periódica, en la que se puede notar que todos los estados están contenidos en  $\mathcal{P}_T$ . Además, se hace notar que, de acuerdo con su definición, ningún estado fuera de  $\mathcal{P}_T$  es  $T$ -recurrente, según el sistema y sus restricciones, lo que implica que todo estado correspondiente a cualquier referencia periódica seguible (en tanto que equilibrio generalizado en el contexto de seguimiento de trayectorias) deberá estar necesariamente dentro de  $\mathcal{P}_T$ .

La trayectoria predicha  $x$  y la trayectoria artificial  $x_a$  correspondientes a la solución del problema de optimización del controlador MPC para un estado inicial del sistema  $x = (-1,75, 1,95)$  se muestran en la Figura 3.3 (indicadas en azul y rojo, respectivamente). Allí se puede visualizar la idea de la propuesta: se plantea una predicción que debe alcanzar una trayectoria periódica seguible (o, mejor dicho, un estado recurrente) en  $N$  pasos. Dicha trayectoria periódica será la trayectoria alcanzable desde  $x$  “que mejor aproxime o siga” la referencia. Las trayectorias resultantes del lazo cerrado se muestran en la Figura 3.4. Se pueden notar dos comportamientos diferentes en el seguimiento de las trayectorias periódicas: en una primera instancia, dado que la referencia no es seguible, el sistema y las variables artificiales convergen a una trayectoria periódica diferente a la referencia, pero que resulta óptima (es decir, minimiza punto a punto la distancia respecto a la referencia). En la segunda instancia, luego del cambio de referencia, se observa un seguimiento exacto de la referencia, dado que en este caso, como se dijo, la referencia es

seguible sin error.

### 3.6. MPC para Tracking de Trayectorias Periódicas: Sistema LTV periódico

Ahora estudiaremos un caso más general, donde el sistema es variante en el tiempo, además de la referencia. En esta sección plantaremos un MPC basado en los mismos conceptos presentados en la sección anterior pero teniendo en cuenta la variación temporal de los escenarios a optimizar, lo que redundará en un problema de optimización variante en el tiempo.

Sea el sistema LTV periódico

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (3.16)$$

con  $A(k+T) = A(k)$  y  $B(k+T) = B(k)$ , y restricciones  $(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}(k)$ ,  $\mathcal{Z}(k+T) = \mathcal{Z}(k)$ , para todo  $k$ . El objetivo de control es realizar el seguimiento de una referencia de salida  $T$ -periódica  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$ . Para ello modificaremos el MPC para seguimiento de trayectorias presentado en la sección anterior, considerando que ya no se tiene un problema de optimización invariante en el tiempo (que solo depende del estado actual, como ocurría antes), sino que en cada instante  $k$ , no solo el sistema cambia, sino también el costo a minimizar y el espacio factible.

Cabe destacar que para el caso de sistemas LTV, en general, ya no existen pares de equilibrio  $(x_s, u_s)$  fuera del origen. El funcional de costo, ahora dependiente del tiempo, es la combinación de dos partes:

$$V_{\text{tt}}(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}) = V_p(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a) + V_t(k, x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{u}).$$

La formulación del problema de optimización es la siguiente,

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a} V_{\text{tt}}(k, x, \mathbf{y}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{u})$$

$$\text{s.a.} \quad x_a(j+1) = A(k+j)x_a(j) + B(k+j)u_a(j), \quad (3.17a)$$

$$(x_a(j), u_a(j)) \in \mathcal{Z}(k+j), \quad (3.17b)$$

$$j = 0, \dots, T-1,$$

$$x_a(T) = x_a(0), \quad (3.17c)$$

$$x(k) = x, \quad (3.17d)$$

$$x(i+1) = A(k+i)x(i) + B(k+i)u(i), \quad (3.17e)$$

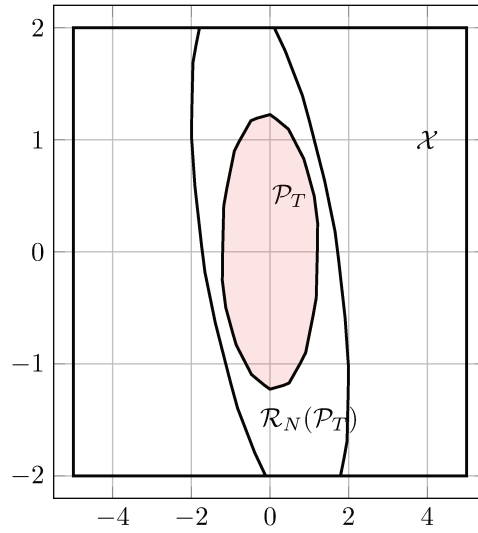
$$(x(i), u(i)) \in \mathcal{Z}(k+i), \quad (3.17f)$$

$$i = 0, \dots, N-1,$$

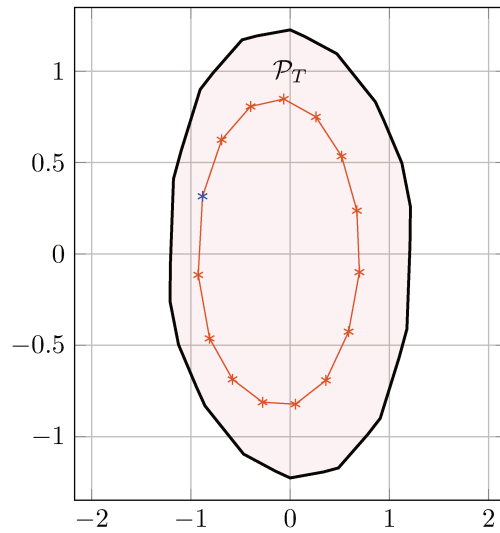
$$x(N) = x_a(N). \quad (3.17g)$$

Las restricciones (3.17a) y (3.17e) imponen la dinámica del sistema a las trayectorias artificiales y predichas, respectivamente, mientras que las restricciones (3.17b) y (3.17f) les imponen la factibilidad, incluyendo la posibilidad de utilizar restricciones variantes en el tiempo. Las matrices  $A(k)$  y  $B(k)$  están



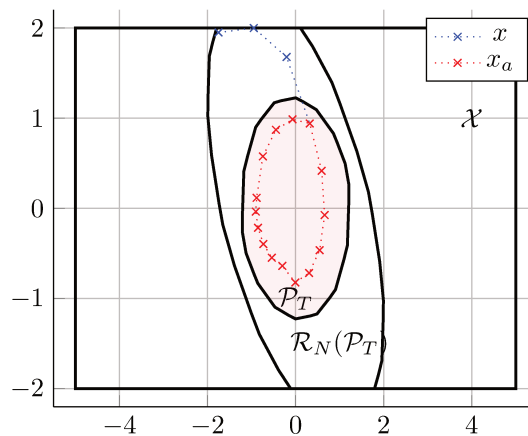


(a) Conjunto de estados  $T$ -recurrentes,  $\mathcal{P}_T$ , para el sistema LTI masa-resorte-amortiguador (sombreado en rojo), para  $T=15$  y conjunto controlable en  $N$  pasos a  $\mathcal{P}_T$ ,  $\mathcal{R}_N(\mathcal{P}_T)$ .

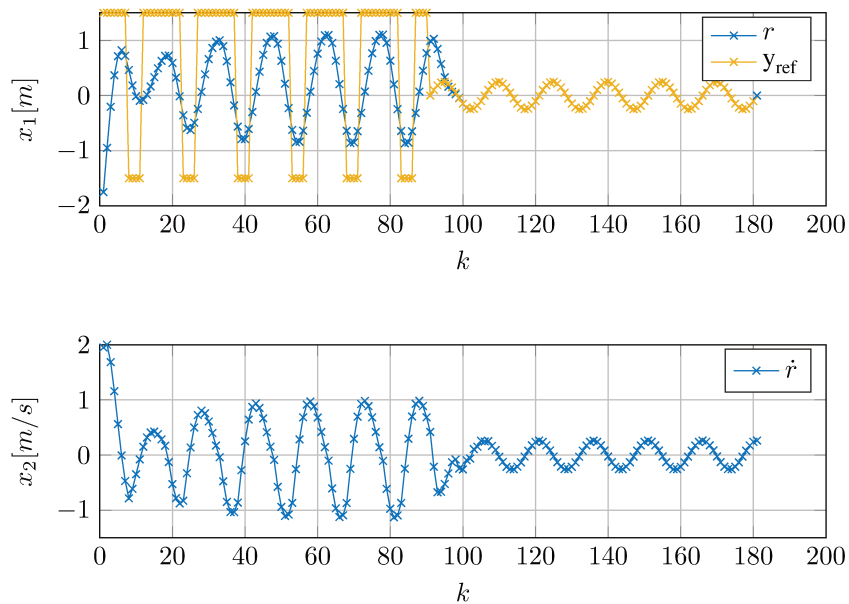


(b) Conjunto de estados  $T$ -recurrentes,  $\mathcal{P}_T$  (sombreado en rojo) y una trayectoria  $T$ -periódica.

**Figura 3.2:** Conjuntos de estados recurrentes y trayectorias para el sistema masa-resorte-amortiguador.



**Figura 3.3:** Trayectorias de estado óptimas (predicha y artificial) para el estado inicial  $x$ .



**Figura 3.4:** Referencia y estados resultantes con el sistema de lazo cerrado.

parametrizadas por el tiempo, dado que la dinámica del sistema es variante en el tiempo tanto para la planificación (3.17a) como para el seguimiento (3.17e). La periodicidad a la trayectoria artificial se la impone en (3.17c) mientras que (3.17g) es la restricción terminal de igualdad.

### 3.6.1. Caracterización del Dominio de atracción

Los conjuntos de estados  $T$ -recurrentes,  $\mathcal{P}_T$ , para un sistema LTV son variantes en el tiempo, incluso si se consideran restricciones invariantes con el tiempo. Esto se debe a la variación de la dinámica del sistema a lo largo del tiempo. En consecuencia, también serán variantes en el tiempo los respectivos conjuntos controlables en  $N$ -pasos a cada conjunto  $T$ -recurrente y, por lo tanto, tendremos un dominio de atracción variante en el tiempo. Para poder determinar el dominio de atracción, inicialmente deberemos calcular los conjuntos recurrentes a  $T$ -pasos. Luego, para cada tiempo inicial, obtener el conjunto controlable a dicho conjunto recurrente a través de  $N$  iteraciones de los controlables a un paso, según el sistema variante en el tiempo. Finalmente, la secuencia de conjuntos controlables conformará el dominio de atracción del controlador presentado en la sección anterior.

#### Caracterización del conjunto de estados recurrentes

Para caracterizar el dominio de atracción describiremos los conjuntos de estados recurrentes para sistemas LTV periódicos. En este caso, los estados  $T$ -recurrentes pueden caracterizarse como

$$x_p(k+T) = x_p(k) = \mathbf{A}(k)x_p(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}_p(k),$$

donde la secuencia de entradas está dada por el vector columna

$$\mathbf{u}_p(k) = \left( u_p^T(k) \quad u_p^T(k+1) \quad \cdots \quad u_p^T(k+T-1) \right)^T,$$

y las matrices del sistema  $(\mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k))$ , que corresponden a los sistemas LTI aumentados

$$\mathbf{A}(k) = \left[ \prod_{j=0}^{T-1} \mathbf{A}(k+T-j) \right], \quad \mathbf{B}(k) = \left[ B_0(k), B_1(k), \dots, B_{T-1}(k) \right]. \quad (3.18)$$

La matriz  $\mathbf{B}(k)$  es una matriz por bloques, cuyo bloque  $i$ -ésimo está dado por

$$\mathbf{B}_i(k) = \prod_{j=0}^{T-i} \mathbf{A}_i(k+T-1-j) \mathbf{B}_i(k+T-j).$$

Es importante notar que las matrices  $\mathbf{A}(k)$  y  $\mathbf{B}(k)$  son matrices variantes en el tiempo y  $T$ -periódicas, por lo que habrá a lo sumo  $T$  conjuntos de estados recurrentes, parametrizados por el tiempo  $k$ , que denotaremos como  $\mathcal{P}_T(k)$ . Esto quiere decir que estados recurrentes en un instante  $j$  serán recurrentes  $j+nT$ ,  $n \in 1, 2, \dots$ , pero pueden no serlo en otros instantes.

Otra forma de representar los estados recurrentes en el tiempo  $k$  está dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) - \mathbf{I} & \mathbf{B}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(k) \\ \mathbf{u}_p(k) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Como caso particular, tenemos los estados  $T$ -recurrentes, los que para todo instante están contenidos en la intersección  $\mathcal{P}_T := \bigcap_{i=0}^{T-1} \mathcal{P}_T(i)$ . Es decir, para todo  $k$ , si  $x(k) \in \mathcal{P}_T$ , entonces existe una trayectoria

$T$ -periódica que pasa por  $x(k)$ , aunque las trayectorias respectivas a cada  $x(k)$  producidas a partir de diferentes tiempos iniciales no serán necesariamente iguales.

Nuevamente, estas caracterizaciones no permiten explicitar las restricciones a los estados, por lo que desarrollamos la trayectoria resultante  $x_p(k)$  como

$$\mathbf{x}_p = \left( x_p(k+1) \quad x_p(k+2) \quad \cdots \quad x_p(k+T) \right),$$

que se obtiene de la siguiente representación expandida

$$\begin{bmatrix} x_p(1) \\ x_p(2) \\ \cdots \\ x_p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) \\ A(k+1)A(k) \\ \cdots \\ A(k+T-1)A(k+T-2) \cdots A(k) \end{bmatrix} x_p(k) + \begin{bmatrix} B(k) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A(k+1)B(k) & B(k+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ B_0(k) & B_1(k) & B_2(k) & \cdots & B(k+T-1) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(0) \\ u_p(1) \\ u_p(2) \\ \cdots \\ u_p(T-1) \end{bmatrix}.$$

Para expresar este sistema en forma resumida, se propone la siguiente notación

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \bar{\mathbf{A}}(k)\mathbf{x}_p(k) + \bar{\mathbf{B}}(k)\mathbf{u}_p(k).$$

Nuevamente, consideramos restricciones politópicas periódicas dadas por

$$\begin{bmatrix} H_p(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_p(2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & H_p(3) & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & H_p(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(1) \\ x_p(2) \\ x_p(3) \\ \cdots \\ x_p(T) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_p(1) \\ b_p(2) \\ b_p(3) \\ \cdots \\ b_p(0) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

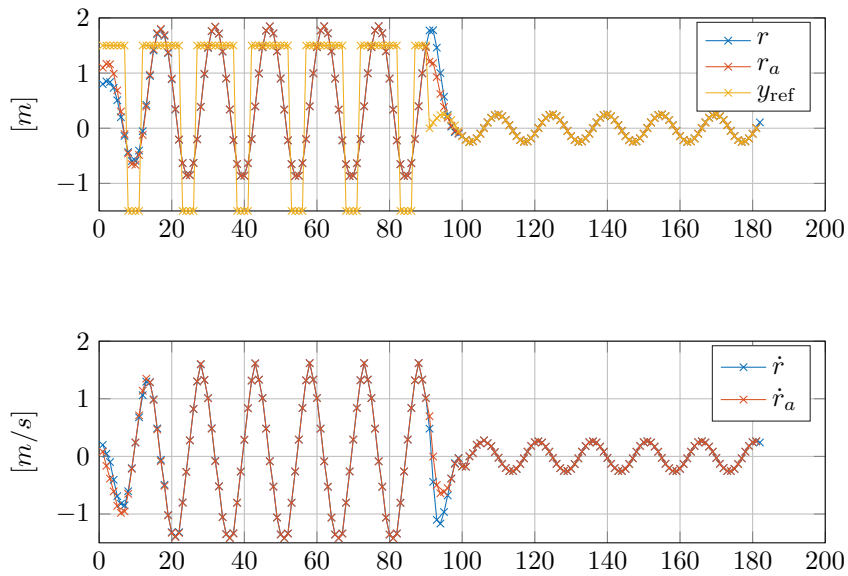
### 3.6.2. Ejemplo: Seguimiento de trayectoria con sistema LTV

Ejemplificamos el seguimiento de trayectorias para un sistema lineal variante en el tiempo periódico usando un sistema de tipo masa-resorte-amortiguador modificado. Tomamos el modelo del ejemplo anterior y modificamos el parámetro  $b_s$ , haciéndolo variante en el tiempo, y periódico, con período  $P$ ,

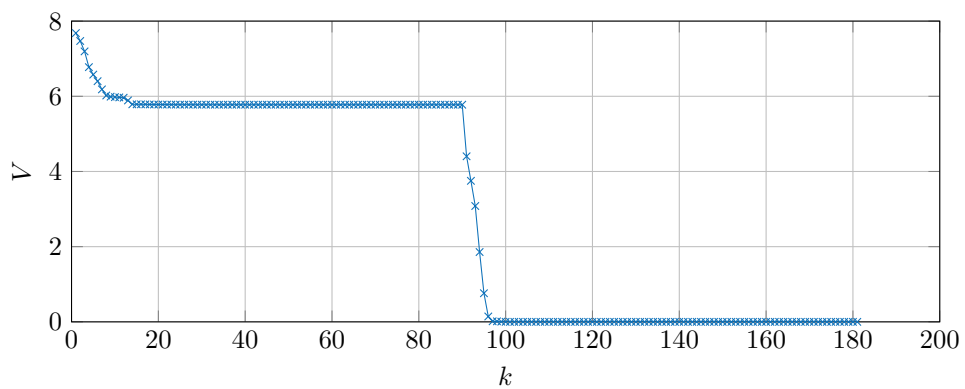
$$\tilde{b}_s(t) = b_s(0,5 + \sin(2\pi k/P)).$$

De igual manera que en ejemplo anterior, discretizamos el sistema con un tiempo de muestreo de  $T_s = 0,4[s]$  y consideraremos  $T = 15$ , lo que corresponde a una recurrencia en  $P = 6[s]$  y consideraremos restricciones dada por  $|x_1| \leq 5$ ,  $|x_2| \leq 2$  y  $|u| \leq 0,3$ . La función de costo se define tal como en el ejemplo para el sistema LTI y se usan las mismas penalizaciones.

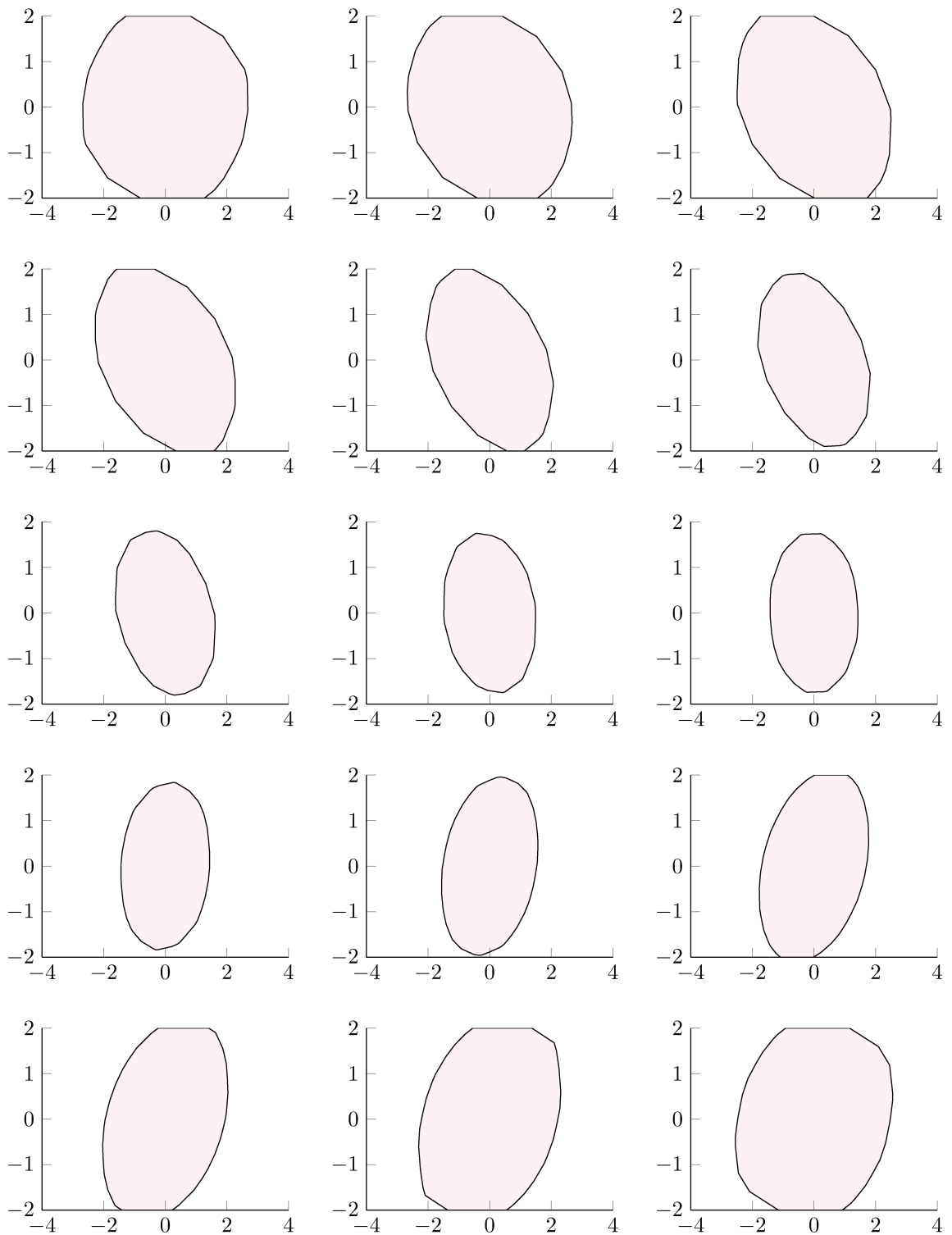
En la Figura 3.7 se muestran los conjuntos  $T$ -recurrentes para el sistema discretizado para cada tiempo inicial en  $[0, T-1]$ . Notar que consideramos el tiempo inicial  $k = 0$ .



**Figura 3.5:** Trayectorias resultantes de  $x_1$  y  $x_2$ .



**Figura 3.6:** Funcional de costo.



**Figura 3.7:** Conjunto de estados  $T$ -recurrentes para el sistema LTV masa-resorte-amortiguador para los tiempos  $k \in [0, T - 1]$ ,  $T = 15$ .

## Capítulo 4

# MPC para tracking de sistemas periódicos

En este capítulo estudiaremos el problema del seguimiento de trayectorias periódicas con sistemas lineales periódicos y propondremos un controlador optimizante cuyo dominio de atracción es más amplio respecto aquellos provistos por las formulaciones con planeamiento en línea disponibles en la literatura.

### 4.1. Introducción

Una característica primordial del control MPC es la posibilidad de conducir el sistema a sus regímenes óptimos, especialmente permitiendo el trabajo cerca de sus límites operativos. Sin embargo, muchas formulaciones de dichos controladores garantizan la estabilidad a expensas del tamaño de los dominios de atracción. Como es sabido, la operación óptima frecuentemente tiene lugar en los límites de los conjuntos admisibles. Por ello, la ampliación de los dominios de atracción para abarcar una mayor fracción del conjunto admisible manteniendo garantías de estabilidad es un tema de interés tanto en términos teóricos como prácticos.

Propuestas tempranas enfocadas a la ampliación de los dominios de atracción consistieron en relajar las restricciones terminales que se implementaban como condiciones de equilibrio, reemplazándolas por la pertenencia a conjuntos invariantes terminales Mayne et al. (2000). Por ejemplo, una formulación de MPC para Tracking con un dominio de atracción maximizado se presentó en Gonzalez and Odloak (2009), donde la propuesta consiste en relajar las restricciones terminales utilizando variables de holgura y resolver secuencialmente dos problemas de optimización, de los cuales el primero tiene el objetivo de estabilizar los componentes inestables del sistema, llevando el estado a un conjunto controlable hasta el invariante terminal, mientras que el segundo produce las entradas para los modos restantes que optimizan la respuesta transitoria. Estas estrategias convergen en la propuesta del MPC para Tracking (Limon et al., 2008), donde se asientan las nociones de variables artificiales y de conjuntos invariantes para tracking.

Por otra parte, se investigaron formulaciones de controladores con garantías de estabilidad para seguimiento de referencias y/o sistemas variantes en el tiempo. Encontramos referencias a la invariancia periódica de control en el trabajo (Blanchini and Ukovich, 1993, Definición 2.1), en el que se propone un algoritmo para la computación de conjuntos invariantes periódicos poliédricos. Luego, ya entrados los años 2000, aparecieron controladores predictivos para estabilizar sistemas periódicos, como se puede ver en Lee et al. (2005), donde se presenta la noción de invariancia extendida, que se refiere a la invariancia para una realimentación lineal variante en el tiempo, mientras que el trabajo se enfoca principalmente al cálculo de secuencias de conjuntos invariantes periódicos elipsoidales. También es destacable la extensión

al caso robusto (Lee and Kouvaritakis, 2006), en donde claramente se establece la conveniencia de utilizar condiciones terminales y leyes de control terminales que también sean variantes en el tiempo, dado que el sistema también lo es, y se presenta el concepto de *invariancia periódica*.

El estudio del problema de estabilización de sistemas periódicos es de gran interés, dado que dichos modelos surgen en una amplia variedad de situaciones, como ser procesos repetitivos (Lee et al., 2001), sistemas biológicos, servicios con demanda periódica y/o estacional, entre otros. Hay diversos estudios relacionados al tema; por ejemplo, en Gondhalekar et al. (2013), se propone una estrategia para ampliar el dominio de atracción de sistemas periódicos sujetos a perturbaciones, a costa de la optimalidad de la solución. Una formulación más orientada a la eficiencia computacional se propone en Manrique-Espindola et al. (2015), que considera restricciones politópicas variantes en el tiempo tanto en la entrada como en el estado utilizando conjuntos invariantes terminales que se contraen o dilatan para mantener la factibilidad. En Nguyen et al. (2017), los autores proponen una estrategia de MPC para sistemas lineales periódicos basada en la interpolación de controladores irrestrictos de realimentación lineal, con lo que obtienen cierta ampliación del dominio de atracción a costa de la optimalidad de la solución.

Las ideas relacionadas al seguimiento de trayectorias periódicas con planificación en línea, se generalizan con la noción de trayectorias artificiales que son útiles para obtener, en forma análoga al MPC para Tracking de puntos de trabajo, garantías de factibilidad recursiva frente a cambios de referencia y ampliación de dominio de atracción. Estas encuentran aplicación en problemas que incluyen sistemas periódicos, como los presentados en Limon et al. (2014); Grosso et al. (2014); Pereira et al. (2015b), de los cuales un caso particular lo constituyen los sistemas invariantes en el tiempo siguiendo trayectorias de referencia periódicas, como se estudia en los trabajos Limon et al. (2012, 2015).

La formulación que proponemos relaja el requerimiento terminal de igualdad  $x(N) = x_a(N)$  impuesto en los controladores para seguimiento de trayectorias con planeamiento en línea presentados en el capítulo previo, mediante la inclusión de un invariante para tracking periódico como restricción terminal. Esta decisión de diseño resulta en un dominio de atracción más amplio relativo al de los controladores mencionados previamente. Para lograr dicha ampliación será necesario establecer una ley terminal estabilizante respecto de las trayectorias periódicas y un conjunto terminal variante en el tiempo donde esa ley terminal sea válida, así como un costo terminal adecuado. Estos ingredientes se realizarán a través de la implementación de un controlador terminal de tipo LQR-periódico (Bittanti and Colaneri, 2009) y completaremos la exposición explicando un método sencillo para el cómputo de conjuntos invariantes periódicos para sistemas lineales periódicos con restricciones politópicas y mostrando la aplicabilidad de la propuesta a través de un ejemplo numérico. El material de este capítulo forma parte de un artículo que será enviado próximamente a la revista especializada Transactions on Automatic Control.

## 4.2. Planteo del problema

Consideraremos el sistema LTV  $T$ -periódico

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad (4.1)$$

con el estado  $x \in \mathcal{X}(k) \subseteq \mathbb{R}^n$ , la entrada  $u \in \mathcal{U}(k) \subseteq \mathbb{R}^m$ , y son  $T$ -periódicos tanto las matrices de sistema y de entrada, es decir,  $A(k+T) = A(k)$  y  $B(k+T) = B(k)$  para todo  $k \geq 0$  y un  $T > 0$  dado, como también los conjuntos de restricciones  $\mathcal{X}(k) = \mathcal{X}(k+T)$  y  $\mathcal{U}(k) = \mathcal{U}(k+T)$ . Las restricciones



se asumen poliédricas, dadas por  $(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}(k) = \mathcal{X}(k) \times \mathcal{U}(k)$ , para todo  $k$ , de modo que  $\mathcal{Z}(k)$  puede describirse como

$$\mathcal{Z}(k) := \{(x(k), u(k)) \mid H_{x,u}(k) \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \leq b(k)\}. \quad (4.2)$$

Claramente, por la  $T$ -periodicidad de  $\mathcal{X}(k)$  y  $\mathcal{U}(k)$ ,  $\mathcal{Z}(k+T) = \mathcal{Z}(k)$ .

El objetivo de control *tradicional* es el seguimiento de una trayectoria  $T$ -periódica  $x_{\text{ref}}(\cdot)$ , según el cual se define el siguiente problema.

**Problema 1.** *Dada como referencia una trayectoria  $T$ -periódica  $x_{\text{ref}}$ , i.e.,  $x_{\text{ref}}(k) = x_{\text{ref}}(k+T)$ , para todo  $k \geq 0$  y un dado  $T > 0$ , el objetivo del seguimiento de trayectorias periódicas consiste en llevar el estado del sistema  $x(k)$  hasta la trayectoria de referencia y mantenerlo sobre ella, i.e.,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(k) - x_{\text{ref}}(k)| = 0.$$

Este problema puede resultar muy estricto dado que se debe garantizar la compatibilidad de la referencia con la dinámica del sistema y sus restricciones.

Buscando cierta versatilidad, replantearemos el problema de control de modo tal que se incluya cierta flexibilidad y así permita abordar casos en los que la referencia no sea perfectamente seguible.

La definición del problema que estudiaremos será la siguiente

**Problema 2.** *Dada como referencia una trayectoria  $T$ -periódica  $x_{\text{ref}}$ , el objetivo del seguimiento de trayectorias periódicas consiste en llevar el estado del sistema (4.1) hasta una trayectoria periódica factible  $x_a^O$  para el sistema,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(k) - x_a^O(k)| = 0.$$

donde  $x_a^O$  es una trayectoria factible que minimice el error respecto de la referencia, y está dada por

$$x_a^O = \arg \min_{x_a} \sum_{j=0}^{T-1} |x_a(j) - x_{\text{ref}}(j)|_Q^2.$$

En definitiva, se buscará estabilizar la trayectoria de referencia si ésta es factible o, caso contrario, una trayectoria que minimice el error de seguimiento, o sea, lograr que el sistema siga lo *más fielmente posible* la referencia infactible.

Algunas propiedades deseables del controlador que también se buscarán con esta formulación son, como se mencionó anteriormente, mantener la factibilidad recursiva del problema de optimización frente a cambios de la referencia y lograr un dominio de atracción ampliado.

### 4.3. Preliminares

Para comenzar, daremos las definiciones de los conjuntos invariantes positivos e invariantes de control para el sistema (4.1) sujeto a (4.2), que serán necesarias para la formulación del controlador.

**Definición 14** (Conjunto invariante  $T$ -periódico positivo). *Un conjunto  $\Omega(k) \subseteq \mathcal{X}(k) \subset \mathbb{R}^n$  es invariante  $T$ -periódico positivo en  $k$  para un sistema autónomo  $x(k+1) = A(k)x(k)$  si, para todo  $x(k) \in \Omega(k)$ ,  $x(k+j) \in \mathcal{X}(k+j)$  para todo  $j \in 0, \dots, T-1$  (restricciones de estado) y  $x(k+T) \in \Omega(k)$ .*

Nótese que, según esta definición y la periodicidad del sistema, si  $x(k) \in \Omega(k)$ , entonces  $x(k+jT) \in \Omega(k)$ , para todo  $j \geq 0$ .<sup>1</sup>

**Definición 15** (Conjunto invariante  $T$ -periódico de control). *Un conjunto  $\Omega(k) \subset \mathcal{X}(k) \subset \mathbb{R}^n$  es  $T$ -invariante de control en  $k$  para el sistema (4.1) si para todo  $x(k) \in \Omega(k)$  existe una secuencia de entradas admisible con  $\mathbf{u}(k) := \{u(k), u(k+1), \dots, u(k+T-1)\}$  tal que  $x(k+T) \in \Omega(k)$ ,  $u(k+j) \in \mathcal{U}(k+j) \subset \mathbb{R}^m$ , y  $x(k+j) \in \mathcal{X}(k+j)$  para todo  $j \in 0, \dots, T-1$ .*

Esta definición se puede extender a secuencias de conjuntos (Blanchini and Ukovich, 1993, Definición 3.2):

**Definición 16** (Secuencia invariante  $T$ -periódica). *Una secuencia de conjuntos  $\Omega(k)$  es invariante  $T$ -periódica si  $\Omega(k+T) = \Omega(k)$  y  $\Omega(k+1) \subset \mathcal{R}_1(\Omega(k))$ , para todo  $k \in \mathbb{N}^+$ .*

Antes de continuar, presentamos la noción de estabilidad de una trayectoria periódica, que consiste en que el estado  $x(k)$  converge a la trayectoria  $x_{\text{ref}}(k)$  y que cerca de la misma, pequeños cambios en el estado inicial  $x(0)$  producen pequeños cambios en la trayectoria subsecuente.

**Definición 17** (Estabilidad asintótica de trayectorias). *La trayectoria  $x_{\text{ref}}(k)$  es una trayectoria asintóticamente estable para el sistema si existe un conjunto de estados iniciales  $\Gamma(k)$  y una función  $\mathcal{KL}$   $\beta(\cdot, \cdot)$  tal que para todo  $x \in \Gamma(k)$ , se sigue que*

$$|x(k+j) - x_{\text{ref}}(k+j)| \leq \beta(|x(k) - x_{\text{ref}}(k)|, k),$$

y  $x(k+j) \in \mathcal{X}(k+j)$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ .

**Supuesto 9.** *Se asume que existen funciones  $\mathcal{K}_\infty$   $\alpha_j$ , con  $j \in 1, \dots, T-1$  tal que  $\|x\| \leq \alpha_j(\|x(j-1)\|)$  para todo  $x(0) \in \mathcal{X}(0)$ ,*

**Teorema 6.** *Sean  $\alpha_\ell$  y  $\alpha_u$  funciones  $\mathcal{K}_\infty$ , sea  $\eta \in [0, 1)$ , se asume que el Supuesto 9 se cumple y sea una función  $V : \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que para todo  $k \in \mathbb{N}^+$  se da que*

$$\alpha_\ell(|x|) \leq V(k, x) \leq \alpha_u(|x|), \text{ para todo } x \in \mathcal{X}(k),$$

$$V(k+T, x(k+T)) \leq \eta V(k, x(k)), \text{ para todo } x(0) \in \mathcal{X}(0),$$

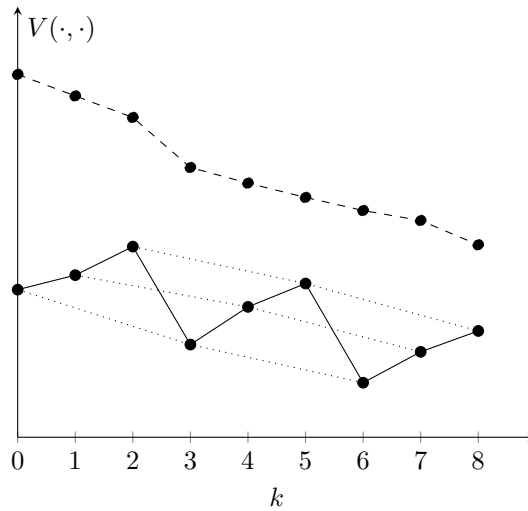
entonces, el origen es asintóticamente estable.

*Demostración.* La prueba se puede encontrar en (Böhm et al., 2012, Teorema 9). □

Para demostrar la estabilidad de una trayectoria para un sistema periódico autónomo (o controlado con una ley de control periódica dada), será suficiente con mostrar que existe una función  $V(k, x)$  que es una función periódica de Lyapunov, según la siguiente definición:

**Definición 18** (Función periódica de Lyapunov). *Una función  $V$  que cumple con los supuestos del Teorema 6 se denomina función periódica de Lyapunov.*

<sup>1</sup>Denotaremos las secuencias periódicas expresando los elementos correspondientes a un período con sus correspondientes índices entre 0 y  $T-1$ , ordenándolos a partir de un índice  $k$  arbitrario. Se omitirá indicar la relación de los índices  $j$  fuera de dicho rango, dejando implícita esa relación en la notación para facilitar la lectura.



**Figura 4.1:** Ilustración de una función periódica de Lyapunov con  $T=3$  (línea sólida) y una función de Lyapunov estándar (línea de trazos).

La particularidad que distingue a las funciones periódicas de Lyapunov de las funciones de Lyapunov estándar, es que las últimas deben ser decrecientes entre instantes sucesivos, mientras que las primeras deben ser decrecientes entre períodos sucesivos, es decir, entre instantes separados por un período, lo que resulta una condición menos exigente, como se ilustra en la Figura 4.1.

Partiendo de la Definición 18 y el Teorema 6 planteamos:

**Teorema 7.** *Si un sistema periódico admite una función periódica de Lyapunov asociada, entonces el origen es asintóticamente estable.*

### Conjunto de trayectorias periódicas seguíbles

Un requisito para el controlador de seguimiento de trayectorias será que establezca asintóticamente una trayectoria periódica tal que su régimen permanente coincida con la referencia o, si eso es imposible, que minimice el error respecto de ella. Para que el sistema se establezca sobre una trayectoria periódica, ésta deberá ser una trayectoria  $T$ -periódica perfectamente seguíble; esto quiere decir que cumple con las restricciones del sistema para todo instante en el período como con la dinámica del sistema, por lo que es importante disponer de una descripción del conjunto de trayectorias  $T$ -periódicas seguíbles. Esto está directamente relacionado con la caracterización de los conjuntos  $T$ -recurrentes presentados en el capítulo anterior.

Para caracterizar este conjunto utilizaremos un sistema aumentado, a partir de la propagación de la dinámica del sistema a lo largo de un período completo, basado en el método de aumento presentado en Yang (2018). Iniciaremos estableciendo las condiciones de periodicidad aplicadas a las trayectorias expresadas según dicho sistema aumentado. Para describir la dinámica del sistema a lo largo del período,

definiremos un par de trayectorias de estado y entrada  $\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a$ , como

$$\mathbf{x}_a(k) = \begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ x_a(k+2) \\ \dots \\ x_a(k+T) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_a(k) = \begin{bmatrix} u_a(k) \\ u_a(k+1) \\ \dots \\ u_a(k+T-1) \end{bmatrix},$$

y se plantea el sistema dinámico aumentado como

$$\mathbf{x}(k+T) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k),$$

donde

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A(k+1)A(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A(k+T-1)\dots A(k+1)A(k) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

y

$$\mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} B(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A(k+1)B(k) & B(k+1) & 0 & \dots & 0 \\ A(k+2)A(k+1)B(k) & A(k+2)B(k+1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0(k) & B_1(k) & B_2(k) & \dots & B(k+T-1) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

con  $B_i(k)$  dados por

$$B_i(k) = \prod_{j=0}^{T-i} A_i(k+T-1-j)B_i(k+T-j).$$

**Observación 4.** El estado aumentado inicial,  $\mathbf{x}(k)$ , se define como  $\mathbf{x}(k) = [0, 0, \dots, x(k)]$ .

Una trayectoria  $(\mathbf{x}_a(k), \mathbf{u}_a(k))$  será  $T$ -periódica en el instante  $k$ , i.e.  $\mathbf{x}_a(k) = \mathbf{x}_a(k+T)$  (o equivalentemente,  $x_a(k+T) = x_a(k)$ , para todo  $k$ ), si se cumple que

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}(k) - \mathbf{I}) & \mathbf{B}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{u}_a(k) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

donde  $(\mathbf{A}(k)$  y  $\mathbf{B}(k)$  están definidas como (4.3) y (4.4), respectivamente, mientras que  $\mathbf{I}$  indica una matriz identidad de dimensiones adecuadas. Además, si se cumple la factibilidad de las trayectorias, de modo que  $(x_a(k+j), u_a(k+j)) \in \mathcal{X}(k+j) \times \mathcal{U}(k+j)$  para  $j \in 1, \dots, T$ , tenemos que las trayectorias son también admisibles.

En lo siguiente, el conjunto  $\mathcal{Z}(k) := \mathcal{X}(k) \times \mathcal{U}(k)$  y denotaremos el par  $(x_a(k), u_a(k))$  como  $z_a(k)$ . Para evitar posibles pérdidas de factibilidad en el caso que las trayectorias periódicas activen restricciones,

consideraremos un subconjunto estrictamente contenido en el interior de  $\mathcal{Z}(k)$  y definimos el conjunto de trayectorias periódicas seguibles como:

$$\mathcal{Z}_p(k) = \{z_a | [A(k) - I]z_a = 0, z_a(j) \in \mathcal{Z}(k+j), j = 1, \dots, T\}.$$

### Ejemplo de sistema aumentado

A los fines de facilitar la comprensión del desarrollo anterior, incluimos un ejemplo para un sistema con un período reducido. Dado un sistema  $T$ -periódico lo convertiremos a un sistema ampliado LTI. Denotaremos con  $k$  y  $J$  al tiempo discreto del sistema LTV y el LTI (ampliado), respectivamente

Entonces, la propagación del sistema LTI está dada por

$$\begin{aligned} x(1) &= A(0)x(0) + B(0)u(0) \\ x(2) &= A(1)x(1) + B(1)u(1) \\ x(3) &= A(2)x(2) + B(2)u(2) \\ x(4) &= A(0)x(3) + B(0)u(3) \\ x(5) &= A(1)x(4) + B(1)u(4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Entonces se puede reagrupar el sistema periódico y reescribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A(0) \\ 0 & 0 & A(1)A(0) \\ 0 & 0 & A(2)A(1)A(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x(0) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B(0) & 0 & 0 \\ A(1)B(0) & B(1) & 0 \\ A(2)A(1)B(0) & A(2)B(1) & B(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{x}(2) &= \begin{bmatrix} x(4) \\ x(5) \\ x(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A(0) \\ 0 & 0 & A(1)A(0) \\ 0 & 0 & A(2)A(1)A(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B(0) & 0 & 0 \\ A(1)B(0) & B(1) & 0 \\ A(2)A(1)B(0) & A(2)B(1) & B(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(3) \\ u(4) \\ u(5) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En general, para  $J \in \mathbb{N}$  y  $k$  el instante de muestreo inicial, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(J+1) &= \begin{bmatrix} x(k+JT+1) \\ x(k+JT+2) \\ x(k+JT+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A(k) \\ 0 & 0 & A(k+1)A(k) \\ 0 & 0 & A(k+2)A(k+1)A(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+(J-1)T+1) \\ x(k+(J-1)T+2) \\ x(k+(J-1)T+3) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B(0) & 0 & 0 \\ A(1)B(0) & B(1) & 0 \\ A(2)A(1)B(0) & A(2)B(1) & B(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k+(J-1)T) \\ u(k+(J-1)T+1) \\ u(k+(J-1)T+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta expresión se puede reescribir en la forma (4.5) y extender para  $T$  arbitrario en forma muy sencilla.

### LQR Periódico Irrestricto

A continuación analizaremos el problema de regulación utilizando un control de tipo LQR para sistemas periódicos.

Puede notarse que si se desea estabilizar una trayectoria de referencia factible  $(x_a, u_a)$ , con  $(x_a(k), u_a(k)) \in \mathcal{Z}_p(k)$ , podemos expresar el sistema en coordenadas del error  $e(k) = (x(k) - x_a(k), u(k) - u_a(k))$  y, además, las restricciones pueden desplazarse respecto de la referencia, i.e.,  $\mathcal{Z}_e(k) := \mathcal{Z}(k) \oplus -e(k)$ , de modo que el origen del sistema error está incluido en cada conjunto  $\mathcal{Z}_e(k)$ . Por lo tanto, el problema de seguimiento de la trayectoria se puede plantear como un problema de estabilización del origen, con un cambio de variables adecuado.

La solución del problema de regulación del sistema lineal con costo cuadrático (LQR, del inglés, linear quadratic regulator) para sistemas periódicos consiste en, dado el sistema (4.1), encontrar la realimentación lineal  $u(k) = K(k)x(k)$  tal que se minimice el costo cuadrático

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \min \frac{1}{2} x^T(j) Q(j) x(j) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (x^T(k) Q(k) x(k) + u^T(k) R(k) u(k)) \right)$$

con  $Q(k) = Q(k+T)$  y  $R(k) = R(k+T)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , positiva semidefinida y positiva definida, respectivamente.

Bajo hipótesis de estabilizabilidad de  $(A(k), B(k))$  para todo  $k$ , el problema de diseño del controlador LQR puede ser resuelto usando la solución periódica de la ecuación algebraica periódica de Riccati. Existen algoritmos que calculan la realimentación para sistemas periódicos, que producen  $T$  matrices de realimentación de dimensión  $n \times n$ , las que permiten calcular las entradas según la siguiente ecuación

$$u(k) = -(R(k) + B^T(k)K(k)B(k))^{-1}B^T(k)K(k)A(k)x(k).$$

Otra estrategia de solución de dicho problema consiste en aumentar el sistema variante en el tiempo periódico, desarrollando su dinámica a lo largo de un período, de modo de obtener un sistema invariante, obviamente de mayor dimensión. De este modo, para el sistema aumentado, el problema LQR tiene la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \min \frac{1}{2} x^T(n) \mathbf{Q}_k x(n) + \frac{1}{2} \sum_{J=0}^{n-1} (x^T(J) \mathbf{Q}_k x(J) + u^T(J) \mathbf{R}_k u(J)) \right)$$

con  $\mathbf{Q}_k = \text{diag}(Q(k), Q(k+1), \dots, Q(k+T-1))$  y  $\mathbf{R}_k = \text{diag}(R(k), R(k+1), \dots, R(k+T-1))$ .

Para mejorar la legibilidad, en este análisis simplificaremos la notación indicando como subíndice la dependencia del tiempo inicial  $k$  de las matrices aumentadas. Para este nuevo sistema, se asume la estabilizabilidad de  $(A, B)$ . La realimentación óptima está dada por

$$u(J) = -\underbrace{(R + B^T P B)^{-1} B^T P A}_{K} x(J), \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

donde  $P$  es la solución de la ecuación de Riccati

$$A^T P A - P - (A^T P B + S)(R + B^T P B)^{-1}(B^T P A + S^T) + Q = 0.$$

Cabe destacar que la ecuación de Riccati para este sistema ampliado es invariante en el tiempo. La solución de dicha ecuación nos permite calcular la realimentación óptima para el problema LQR periódico, produciendo la matriz de realimentación  $\mathbf{K} := -(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ , en cada instante de evaluación  $k = 0, \dots, T - 1$ , que tiene la forma

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & K_k(0) \\ 0 & 0 & \cdots & K_k(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_k(T-1) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Puede interpretarse que la realimentación obtenida a través de la matriz  $\mathbf{K}_k$  es una secuencia de matrices de realimentación que se van aplicando sucesivamente al estado terminal del período inmediato anterior.

Utilizando dicha realimentación para el sistema aumentado de lazo cerrado con (4.6), tenemos que el origen es estable, podemos asegurar que el costo cuadrático  $V(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  es una función de Lyapunov, y más aún,  $V_f(k, x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_k \mathbf{x}$  es una función periódica de Lyapunov.

Análogamente, evaluando (4.7) para  $k \in 0, \dots, T - 1$ , tenemos la secuencia de matrices por bloques  $\{\mathbf{K}\}$ , y a partir de ella podemos obtener una realimentación variante en el tiempo dada por  $K_k(0)$  para el sistema variante en el tiempo periódico (4.1) que hace que el origen sea asintóticamente estable.

### 4.3.1. Cálculo del Invariante para Tracking Periódico

En esta sección desarrollaremos el cálculo de una secuencia de conjuntos invariante periódica  $\{\Omega(k)\}$ , utilizando una realimentación lineal variante en el tiempo  $\mathbf{K}_k$ . Esta propuesta estará basada en el método propuesto en Limon et al. (2008), adaptándola para incorporar un controlador LQR periódico (Bittanti and Colaneri, 2009) como controlador terminal y calcularemos sus conjuntos invariantes. Este será un ingrediente fundamental para la formulación del MPC para Tracking periódico, la principal novedad presentada en este capítulo.

La estrategia se basa en desarrollar una expansión del sistema variante en el tiempo a lo largo de un período completo y, de este modo, convertirlo en un sistema invariante en el tiempo, que realizaremos siguiendo el desarrollo presentado en Yang (2018).

El sistema evoluciona en tiempo discreto según

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ x(k+2) &= A(k+1)x(k+1) + B(k+1)u(k+1), \\ x(k+3) &= A(k+2)x(k+2) + B(k+2)u(k+2), \\ &\dots, \end{aligned}$$

que reagrupando cada  $T$  elementos a partir del instante  $k+1$ , tenemos  $\mathbf{x}_k = [x(k+1), x(k+1), \dots, x(k+T)]$  y  $\mathbf{u}_k = [u(k+1), u(k+2), \dots, u(k+T)]$ , y podemos describir la evolución como

$$\mathbf{x}_k(J+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}_k(J) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}_k(J), \text{ para } J \geq 0,$$

donde las matrices  $\mathbf{A}(k)$  y  $\mathbf{B}(k)$  están definidas en (4.3) y (4.4), y  $J$  indica el tiempo discreto en el sistema aumentado.

Podemos notar que el sistema aumentado o *lifted*, desarrolla su evolución en cada paso del tiempo  $J$  abarcando un período completo del sistema original (con una evolución en bloques de  $T$  pasos), y constituye un sistema LTI cuya evolución es equivalente a la de un período del sistema LTV para cada instante inicial  $k$ . Dicho sistema invariante en el tiempo evoluciona en ese tiempo *submuestreado*  $J$ , mientras que el tiempo inicial  $k$  determina la construcción de las matrices de sistema y entrada aumentadas, que son constantes en esta representación debido a la periodicidad del sistema LTV.

En particular, resolveremos las condiciones de invariancia asociadas a una ley de realimentación lineal variante en el tiempo  $T$ -periódica, representada por la secuencia de matrices  $\{\mathbf{K}_k\}$  con  $k \in 0, \dots, T-1$ , donde cada matriz de la secuencia corresponde a un instante a partir del cual se aumenta el sistema entre 0 y  $T-1$ . El cálculo de dichas matrices de realimentación se realizará aplicando el Algoritmo 1 presentado en Yang (2018), y la solución a la ecuación algebraica de Riccati se resuelve utilizando el método *dare* de *Matlab*.

Para un par artificial  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$  genérico, impondremos que cumpla con el Supuesto 10, para un tiempo  $k$ , y plantaremos el sistema obtenido cerrando el lazo con la matriz de realimentación  $\mathbf{K}$  correspondiente. Tenemos entonces que la trayectoria de entrada estabilizante está dada por

$$\mathbf{u} := \mathbf{K}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) + \mathbf{u}_a, \quad (4.8)$$

y podemos plantear el sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(J+1) \\ \mathbf{x}_a(J+1) \\ \mathbf{u}_a(J+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(J) + \mathbf{B}(J)\mathbf{K}(J) & -\mathbf{B}(J)\mathbf{K}(J) & \mathbf{B}(J) \\ 0 & \mathbf{I}_{nT} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{mT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(J) \\ \mathbf{x}_a(J) \\ \mathbf{u}_a(J) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Sobre el par  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$  se impone la condición de equilibrio siguiente (que es equivalente a imponer  $T$ -periodicidad componente a componente):

$$\mathbf{x}_a(J) = \mathbf{A}\mathbf{x}_a(J) + \mathbf{B}\mathbf{u}_a(J). \quad (4.10)$$

Además, impondremos las condiciones de factibilidad de las predicciones de estados y entradas a lo largo del período como

$$(x(j), u(j)) \in \mathcal{Z}(j), \quad (4.11)$$

$$(x_a(j), u_a(j)) \in \mathcal{Z}(j). \quad (4.12)$$

para  $j \in 0, \dots, T-1$ .

Con el sistema ampliado y las restricciones definidos de esa forma, podemos determinar el conjunto de estados ampliados  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$ , que será  $T$ -invariante bajo el feedback correspondiente  $\mathbf{K}(k)$ , de la forma habitual, es decir, a través de la recursión sobre los conjuntos alcanzables a partir del conjunto admisible, a partir de un instante inicial  $k$ . La secuencia de dichos conjuntos invariantes se obtendrá realizando dicha operación para cada tiempo inicial  $k \in 0, \dots, T-1$ . Proyectando cada conjunto sobre el espacio de estados  $\mathcal{X}$  obtendremos el dominio de atracción del controlador, que se puede definir como el conjunto de estados que a partir del instante  $k$  respectivo puede ser estabilizado asintóticamente sobre una trayectoria periódica.



#### 4.4. MPC para tracking de sistemas periódico con conjunto terminal

A continuación se plantea un MPC con planeamiento en línea, adecuado para sistemas periódicos con restricción terminal de pertenencia a un invariante. Incluiremos en la formulación trayectorias artificiales  $T$ -periódicas de estado  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$  que abarcan un período completo de la referencia.

**Supuesto 10.** *Existe un par de secuencias de estado y de entrada factible,  $\mathbf{x}_a := \{x_a(0), x_a(1), \dots, x_a(T-1)\}$  y  $\mathbf{u}_a := \{u_a(0), u_a(1), \dots, u_a(T-1)\}$ , contenido en el interior estricto de las restricciones, i.e.,  $\exists(x_a(j), u_a(j)) \in \lambda \mathcal{Z}(k+j), \lambda \in [0, 1], j \in 0, \dots, T-1$ , tal que el estado sea  $T$ -periódico, i.e.  $x_a(0) = x_a(T)$ , según la dinámica del sistema (4.1).*

Esta suposición nos asegura que el conjunto invariante es no vacío, dado que una trayectoria periódica factible es, en sí misma, un conjunto invariante de control. La pertenencia al interior estricto del conjunto factible es habitual para evitar posibles pérdidas de controlabilidad cuando se activan las restricciones. Nótese que  $\lambda$  puede aproximarse arbitrariamente a la unidad, de modo que esta condición no tiene consecuencias prácticas de consideración.

Asumimos dada una secuencia de conjuntos invariante periódica  $\{\Omega(k)\}$ , con  $k \in 0, \dots, T-1$ , correspondiente a una ley de control por realimentación  $\kappa(k, x)$ .

Formulando el problema de optimización, proponemos un funcional de costo de seguimiento de trayectorias periódicas  $V_{tt}(\cdot)$  que consta de dos términos,

$$V_{tt}(k, x, \mathbf{x}_{\text{ref}}(k); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = V_p(k, \mathbf{x}_{\text{ref}}(k); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a) + V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

donde  $V_p(\cdot)$  es el costo de planificación, que penaliza el error entre la trayectoria artificial y la referencia a lo largo de un período completo, y está dado por la suma de los costos de etapa  $\ell_p(\cdot)$ , es decir,

$$V_p(k, x, \mathbf{x}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a) = \sum_{j=0}^{T-1} \ell_p(|x_{\text{ref}}(j) - x_a(j)|),$$

y  $V_t(\cdot)$  es el costo de seguimiento, definido como la acumulación de penalizaciones del error de seguimiento de cada etapa  $\ell_t(\cdot)$  a lo largo de un horizonte de control de  $N$  pasos (con  $N \leq T$ ), sumada a una penalización terminal  $V_f(\cdot)$  destinada a penalizar la distancia entre la última predicción del estado y el  $N$ -ésimo elemento de la trayectoria de estados auxiliar. Simbólicamente, el costo de seguimiento  $V_t(\cdot)$  está dado por

$$V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_t(|x(j) - x_a(j)|, |u(j) - u_a(j)|) + V_f(k, |x(N) - x_a(N)|).$$

Como es habitual, se impone que las funciones  $\ell_p(\cdot)$  y  $\ell_t(\cdot)$  sean positivas definidas y valen cero en el origen.

**Observación 5.** *El costo terminal variante en el tiempo  $V_f(k, |x(N) - x_a(N)|) = (x(N) - x_a(N))^T P_{k+N} (x(N) - x_a(N))$  es una función de Lyapunov y el sistema de lazo cerrado bajo una ley terminal de realimentación lineal  $\mathbf{u}(J) = \mathbf{K}_{k+N} (\mathbf{x}(J) - \mathbf{x}_a(N)) + \mathbf{u}_a(N)$  es estable.*

El problema de control asociado al MPC está formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a} V_{\text{tt}}(k, x, \mathbf{x}_{\text{ref}}(k); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \text{s.t.} \quad & x_a(j+1) = A(k+j)x_a(j) + B(k+j)u_a(j), \end{aligned} \quad (4.13a)$$

$$(x_a(j), u_a(j)) \in \mathcal{Z}(k+j), \quad (4.13b)$$

$$x_a(T) = x_a(0), \quad (4.13c)$$

$$j = 0, \dots, T-1,$$

$$x(k) = x, \quad (4.13d)$$

$$x(i+1) = A(k+i)x(i) + B(k+i)u(i), \quad (4.13e)$$

$$(x(i), u(i)) \in \mathcal{Z}(k+i), \quad (4.13f)$$

$$x(N) \in \Omega(k+N), \quad (4.13g)$$

$$i = 0, \dots, N-1.$$

Las restricciones imponen a las variables artificiales una evolución acorde a la dinámica del sistema (4.13a), la factibilidad con respecto a las restricciones de estado y de entrada (4.13b) y su periodicidad (4.13c). Imponer estas últimas dos restricciones es equivalente a requerir que  $z_a \in \mathcal{Z}_p$ . Notamos que la factibilidad se impone a lo largo de un período completo pero, a través de una extensión periódica, existe una solución factible para todo  $k \geq 0$ . Por otra parte, para los estados predichos se establece la condición inicial del sistema (4.13d), la dinámica del sistema (4.13e), la factibilidad respecto de las restricciones (4.13f) a lo largo de un horizonte de control  $N$ . La restricción terminal (4.13g) en este caso impone que el estado terminal  $x(k+N)$  pertenezca al invariante periódico  $\Omega(k+N)$ .

La ley implícita de control del MPC consiste, como es habitual, en aplicar la primera acción de control obtenida por la solución del problema de optimización (4.13) indicada como  $\mathbf{u}^*(k)$ , y está dada por

$$\kappa_{\text{tt}}(k, x, \mathbf{x}_{\text{ref}}(k)) = \mathbf{u}^*(0|k). \quad (4.14)$$

**Observación 6.** *La principal ventaja de esta propuesta respecto de la presentada en Limon et al. (2014) consiste en el mayor dominio de atracción logrado, que está dado por el conjunto alcanzable a al invariante  $\Omega(k+N)$  y dicha ampliación es consecuencia la relajación de la restricción terminal. Este dominio incluye al conjunto alcanzable a estados recurrentes en  $k+N$ , que definía el dominio de atracción de la formulación con restricción la terminal de igualdad  $x(N) = x_a(N)$ . Destacamos también que el cálculo de los conjuntos invariantes se realiza fuera de línea, por lo que la demanda computacional requerida para la solución del problema de optimización no se ve sensiblemente afectada.*

El sistema de lazo cerrado con la realimentación  $\kappa_{\text{tt}}(\cdot)$  garantiza la factibilidad recursiva del problema de optimización y produce una realimentación estabilizante como se muestra en los siguientes teoremas.

**Teorema 8.** *Si el problema admite una solución para la condición inicial  $(k, x(k))$ , entonces el problema es recursivamente factible.*

*Demostración.* La prueba sigue del desarrollo habitual de las estrategias de MPC para tracking. La solución óptima en el tiempo  $k$ ,  $\mathbf{x}^*(k)$ , servirá de base para construir una solución factible en el instante sucesor  $k+1$ . La trayectoria periódica factible auxiliar  $\{\tilde{\mathbf{x}}_a\}$  puede ser construida a partir de una

rotación cíclica de una posición de  $x_a^*$  gracias a la periodicidad de la trayectoria artificial y la condición de invariancia periódica del conjunto terminal. Esto quiere decir que  $x_a(j|k+1) := x_a(j+1|k)$  y  $u_a(j|k+1) := u_a(j+1|k)$  para  $j \in 0, \dots, T-2$  y  $x_a(T-1|k+1) = x_a(0|k)$ .

Los primeros  $N-1$  estados de la trayectoria predicha en el instante  $k+1$  son generados a partir de la solución óptima,  $\tilde{x}(j) = x^*(j+1)$ , para  $j \in 0, \dots, N-1$ . El estado terminal factible puede ser calculado a través de la aplicación de la entrada factible,  $u(N|k+1) := \kappa(N, x(N|k))$  obtenida por realimentación correspondiente a la ley terminal, que resultará en  $x(N|k+1) = A(k+N)x(N|k) + B(k+N)\kappa(N, x(N|k))$ , y pertenecerá al invariante  $\Omega(k+N+1)$ . Debido a la periodicidad del sistema y de la trayectoria auxiliar esto se puede repetir indefinidamente, quedando demostrada la factibilidad recursiva del problema de optimización.  $\square$

**Teorema 9.** *Si el problema admite una solución para la condición inicial  $(k, x(k))$ , entonces el MPC produce una ley estabilizante.*

*Demostración.* El costo óptimo en el tiempo  $k$ ,  $V_{tt}^*(k, \cdot)$ , es una cota superior para el costo en el tiempo  $k+T$ , i.e.  $V_{tt}^*(k+T, \cdot) \leq V_{tt}^*(k, \cdot)$ , para el sistema de lazo cerrado, a partir de los resultados del LQR periódico. Luego, el costo es una función periódica de Lyapunov para el sistema de lazo cerrado. La extensión de la trayectoria predicha a través del feedback  $K(j+N)$  es óptima debido a que, por construcción, la restricción terminal no se activa y entonces el costo terminal representa el costo exacto de la predicción de horizonte infinito correspondiente al problema LQR periódico. Por optimalidad del problema, el costo óptimo de la solución construida por feedback en  $V_{tt}(k+T, x(k+T))$  es menor o igual a  $V_{tt}(k, x(k))$  para todo  $k$ . Nótese que la variación del costo no necesariamente será decreciente entre intervalos sucesivos, pero podemos extender la predicción factible durante  $T-N$  pasos aplicando la ley de realimentación  $K(k)$  completando un período y comparar intervalos de longitud  $T$ , entre la solución del problema de optimización y la correspondiente a la realimentación. El hecho de que el costo  $V_{tt}(\cdot)$  es no creciente para todo  $k$  y que está acotado por cero implica la convergencia al origen.  $\square$

#### 4.4.1. Ejemplo ilustrativo

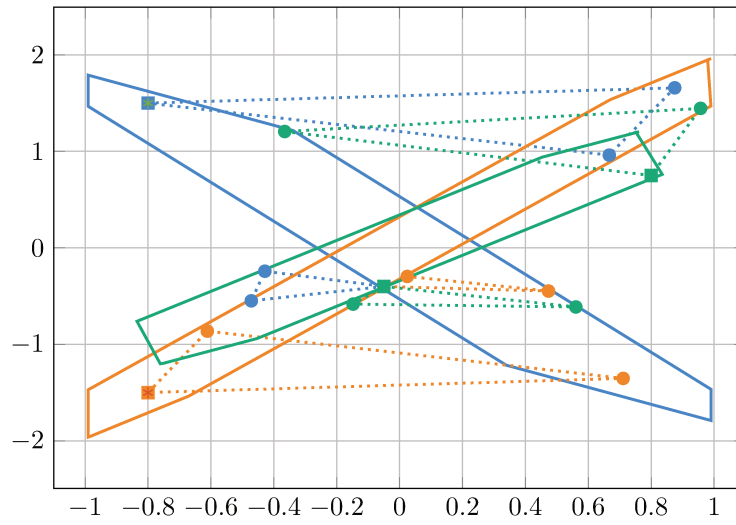
Presentamos un ejemplo para ilustrar la aplicabilidad de los procedimientos para el cálculo del conjunto invariante por realimentación lineal variante en el tiempo y el control MPC para sistemas periódicos con restricción terminal de pertenencia al conjunto. A los fines de facilitar la exposición y reproducción, utilizaremos un sistema sencillo, de dimensión  $2 \times 2$  y una entrada escalar, con un período  $T=3$ , definido por las siguientes matrices

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1,35 & 1,35 \\ 0,45 & 0,45 \end{bmatrix}, B(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,05 \end{bmatrix},$$

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,4 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 0,125 \\ 0,25 \end{bmatrix},$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0,75 & -1,35 \\ 0,3 & 1,35 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 0,125 \\ -0,125 \end{bmatrix}.$$

El conjunto admisible se define invariante en el tiempo, como  $|x(k)| \leq (1, 3)$ ,  $|u(k)| \leq ,5$ , mientras que para las variables artificiales escalaremos dichos conjuntos con  $\lambda = 0,99$ , i.e.,  $|x_a(j)| \leq \lambda(1, 3)$  y



**Figura 4.2:** Conjuntos de estados recurrentes y trayectorias periódicas para distintos puntos e instantes iniciales.

$|u_a(j)| \leq \lambda, 5$ , para todo  $k$ .

Las variables artificiales constituyen, en cada instante, una trayectoria periódica. Esto implica que cada uno de sus estados  $x(k+j)$ ,  $j \in [0, T-1]$  será  $T$ -recurrente. En la Figura 4.2 se ilustran los conjuntos de estados recurrentes y se muestran trayectorias periódicas para distintos instantes iniciales. El color de la traza indica el instante inicial (azul, rojo y verde para  $k = 0, 1$  y  $2$ , respectivamente) y dichas trayectorias se calcularon de manera que se minimice la entrada requerida que logra la recurrencia, para estados iniciales dados. Se puede notar que el punto inicial  $(-0,05, -0,4)$  pertenece a la intersección de los tres conjuntos recurrentes, por lo tanto, existen trayectorias recurrentes para todos los tiempos iniciales. Por el contrario, el punto  $(-0,8, 1,5)$  pertenece en forma exclusiva al conjunto de estados recurrentes para  $k = 0$ , de modo que sólo habrá trayectorias recurrentes iniciando en ese instante. A lo largo de su período, los estados de la trayectoria pertenecen a los conjuntos recurrentes correspondientes a cada instante respectivo. Una situación análoga se da en  $k = 1$  y  $k = 2$ , para los puntos  $(0,8, 0,75)$  y  $(-0,8, -1,5)$ , respectivamente. Dichas trayectorias constituyen ejemplos de trayectorias artificiales para los distintos instantes iniciales.

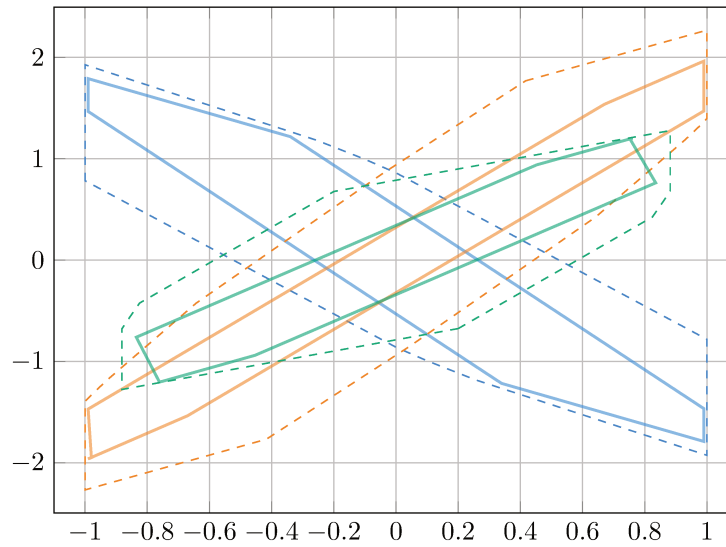
Utilizando la realimentación LQR periódica  $K_k$  para cada tiempo inicial  $k$ , calculamos los conjuntos invariantes y los conjuntos controlables en  $T$  pasos a cada uno, que conforman el dominio de atracción variante en el tiempo para el controlador presentado.

Implementaremos los costos como funciones cuadráticas ponderadas de la siguiente forma:

$$V_p(k, x, \mathbf{x}_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a) = \sum_{j=0}^{T-1} \|x_{\text{ref}}(k+j) - x_a(j)\|_{Q(j)}^2,$$

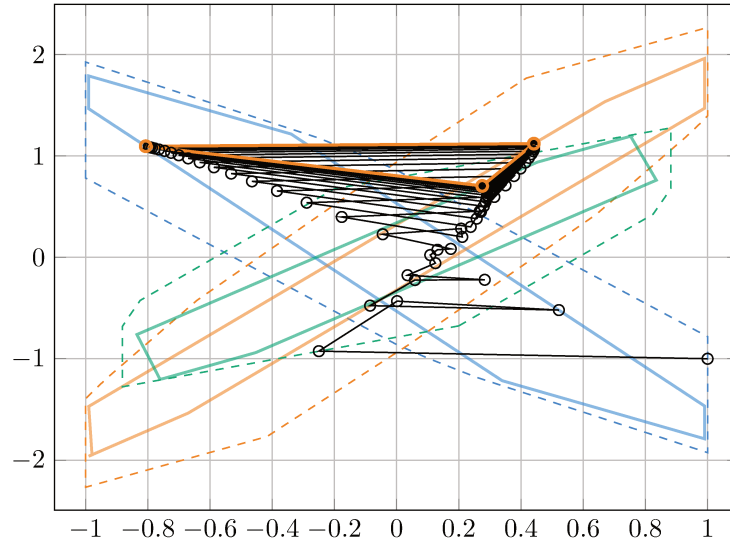
$$V_t(k, x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} (\|x(j) - x_a(j)\|_{Q(j)}^2 + \|u(j) - u_a(j)\|_{R(j)}^2) + \|x(N) - x_a(N)\|_{P(k+N)}^2.$$

Una referencia factible  $y_{\text{ref}}$  está dada por la secuencia periódica  $\{-0,8068, 0,4413, 0,2753\}$  a partir del tiempo 0, y considerando un estado inicial  $x_0 = [-1, 1]$ , se aplica el controlador para estabilizar la

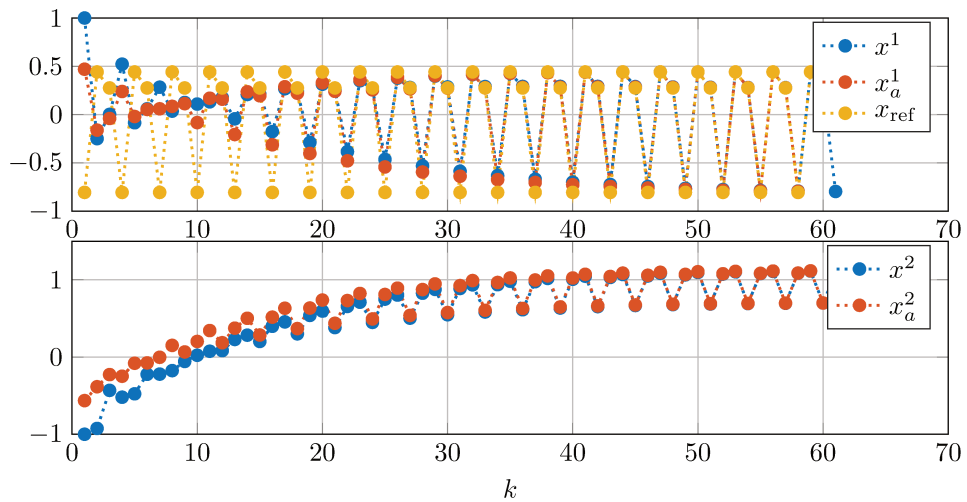


**Figura 4.3:** Dominio de atracción (línea discontinua) y regiones terminales (línea de puntos)

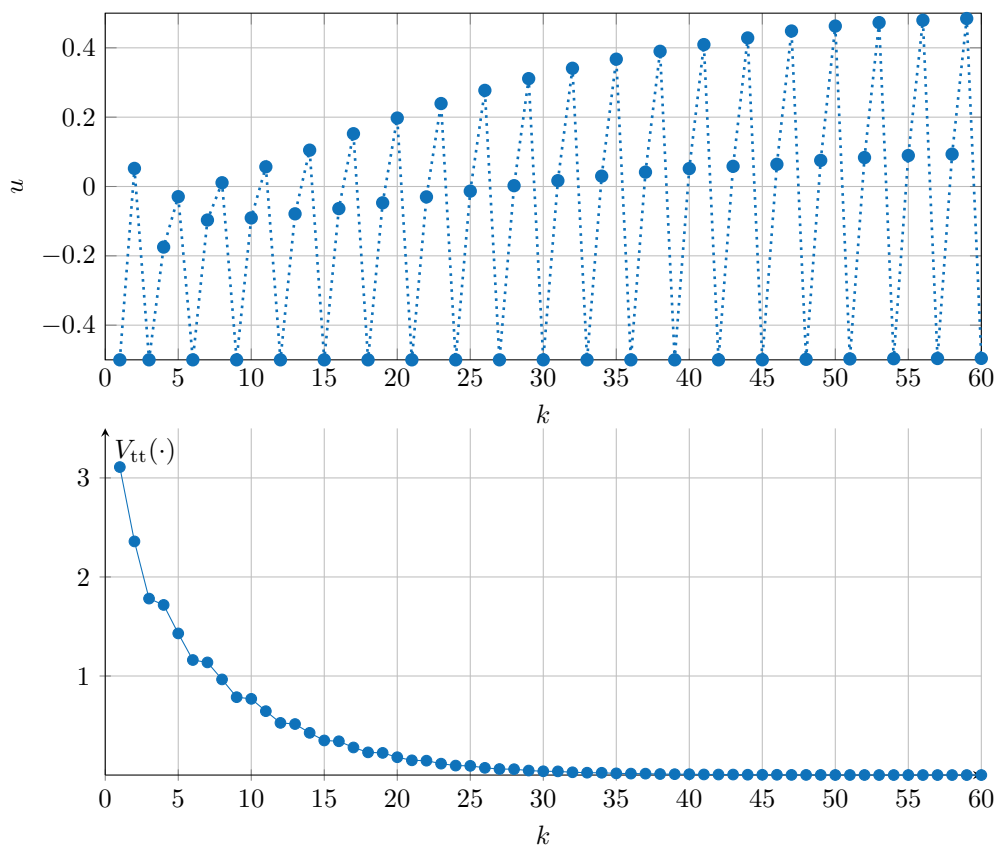
referencia. En la Figura 4.4 se muestran las trayectorias resultante (azul) y de referencia (amarillo). Se puede observar que a lo largo de la simulación, el estado se mantiene en el conjunto del dominio de atracción correspondiente a ese instante dentro del período. También se puede notar que la trayectoria converge a los estados correspondientes a la referencia periódica y que éstos están contenidos en los conjuntos de estados recurrentes o, lo que es lo mismo, se verifica la estabilidad asintótica de la referencia periódica. La evolución temporal de los estados, variables artificiales y referencia se muestran en la Figura 4.5, en las gráficas correspondientes a  $x^1$  (arriba) y  $x^2$  (abajo). La Figura 4.6 presenta las entradas que se aplican y la evolución de la función de costo, que converge a cero como es esperable dado que la referencia es factible.



**Figura 4.4:** Trayectoria de estados, variables artificiales y de referencia, sobre los conjuntos recurrentes e invariantes.



**Figura 4.5:** Evolución temporal de los estados, variables artificiales y referencia.



**Figura 4.6:** Entradas (arriba) y evolución del costo (abajo)

## Capítulo 5

# MPC para Seguimiento de Curvas

En este capítulo nos enfocamos en la aplicación del control predictivo al problema de seguimiento de curvas, también llamado *path-following*. En este problema, la referencia no es una trayectoria, sino una curva geométrica sin una temporización asociada a ella. Los resultados que se presentan aquí fueron expuestos en Sanchez et al. (2019); Sánchez et al. (2021), en lo que se refiere a seguimiento de curvas y evasión de obstáculos, mientras que el seguimiento de curvas periódicas se presentó en Sánchez et al. (2020).

### 5.1. Introducción

En muchas ocasiones, el problema de control no consiste en llevar el sistema de un punto a otro, sino en seguir o mantenerlo cerca de una curva en el espacio, sea esta de estados o de salida. Cuando la referencia es una curva espacial sin un condicionamiento temporal sobre la misma, se trata de un problema de seguimiento de curvas, o *path-following*, en inglés. Entre algunas de sus aplicaciones se incluyen los sistemas de Control Numérico Computado (CNC) utilizados en fabricación y soldadura robotizada, así como la aplicación en vehículos, tanto terrestres como aéreos o acuáticos. La resolución de este problema implica la generación de trayectorias factibles para dichos sistemas y el seguimiento de las mismas, lo que constituye un problema complejo que aún hoy, tras innumerables estudios, continúa siendo de interés en términos académicos y prácticos.

Las nociones principales que se involucran en este problema son las de *trayectoria* y *curva*. Una trayectoria es una secuencia de puntos, asociada a una temporización específica, en otras palabras, es una función cuyo dominio es el tiempo con imagen en el conjunto de estado o, si corresponde, de salida. Una curva indica, en cambio, el lugar geométrico que forma un conjunto de puntos, frecuentemente descrita a través de una función de un parámetro. Cada valor de este parámetro está asociado a un punto respectivo de la curva.

El proceso de producir una trayectoria a partir de una curva se denomina *parametrización temporal*, lo que en el caso de curvas paramétricas consiste en asignar una ley que gobierne la dinámica temporal del parámetro. Es digno de destacar el hecho de que los problemas de estabilización de puntos de trabajo y seguimiento de trayectoria son casos particulares del problema más general de seguimiento de curvas.

Una de las características sobresalientes del problema del seguimiento de curvas es la posibilidad de obtener una mejora en términos de desempeño respecto del problema de seguimiento de trayectorias, gracias al grado de libertad adicional que otorga la parametrización temporal (Aguilar et al., 2004, 2008).



Una aproximación frecuente a este problema es a través del análisis geométrico. Esto fundamentalmente se basa en tomar la referencia como una variedad (manifold) sobre la que el error (la distancia entre la salida deseada y la curva) se anula, y el problema de control consiste en estabilizar el sistema sobre esa variedad a través de una realimentación adecuada (Böck and Kugi, 2016; Nielsen et al., 2010). Para ello se debe transformar el sistema según nuevas coordenadas, que describen la dinámica del sistema en componentes, unas transversales y otras a lo largo de la curva. En este nuevo espacio se desacoplan las componentes transversales a través de una linealización por realimentación.

Las estrategias de control para este tipo de problemas se dividen principalmente entre *feedforward* y *feedback*. Algunas estrategias del primer grupo, principalmente para aplicaciones en robótica, corresponden mayormente a sistemas completamente actuados (el número de entradas linealmente independientes coincide con el número de estados del sistema) y cuyos modelos dinámicos son invertibles. También existen estrategias de replanificación iterativa de trayectorias que reducen el error de seguimiento de curvas. Una formulación interesante, dado que convexifica el problema, se puede encontrar en Verscheure et al. (2009). Entre las estrategias por *feedback*, podemos destacar los trabajos en los que se plantea una ley de control para el parámetro que estabiliza los modos inestables del sistema, llamada *ley de temporización* (Aguiar et al., 2004; Skjetne and Fossen, 2001). Una solución diferente consiste en una discretización del sistema, realizada considerando cotas sobre el máximo error admitido (Dačić et al., 2011). Otra estrategia basada en funciones de Lyapunov se utiliza para el control de vehículos de remolque (Astolfi et al., 2004). Hay otras estrategias interesantes, que incorporan conmutación de controladores (Aguiar and Hespanha, 2007), controladores híbridos (Balluchi et al., 2005), estrategias por pasividad (El-Hawwary and Maggiore, 2008), entre otras.

En el contexto de MPC, el problema del seguimiento de curvas ha sido estudiado extensivamente, con aportes para casos bastante generales, bien utilizando linealización por realimentación (Lam et al., 2010), o con resultados más rigurosos para el caso no lineal (Faulwasser and Findeisen, 2016), encontrando diversas aplicaciones en contextos de robótica industrial (Faulwasser et al., 2016), vehículos aéreos (Alessandretti et al., 2013), vehículos submarinos (Shen et al., 2017), generadores eólicos (Diwale et al., 2016), entre otros.

Por otra parte, suele plantearse la situación en la que la referencia a estabilizar se provee desde una fuente externa en tiempo de ejecución, en cuyo caso, la tarea de planificación consiste en producir una trayectoria de referencia teniendo en cuenta la dinámica y restricciones del sistema, posiblemente optimizando algún criterio de desempeño. En este capítulo se atacará este último problema, y para ellos se propone en primer lugar un controlador MPC para Tracking con aplicación al seguimiento de curvas utilizando trayectorias artificiales para el planteo de restricciones terminales, presentado en Sanchez et al. (2019); Sánchez et al. (2021).

Inicialmente, consideraremos trayectorias generales y las variables artificiales deberán ser tales que el error de planificación no crezca en ningún instante posterior al horizonte de predicción. Luego, se planteará el controlador para el seguimiento de curvas periódicas (Sánchez et al., 2020), recuperando ciertos beneficios de la formulación con variables artificiales clásica, tales como la independencia del dominio de atracción del controlador respecto de las referencias, la garantía de factibilidad frente a cambios arbitrarios de referencias y el decrecimiento a lo largo del tiempo del funcional de costo. Sobre el final del capítulo se encuentra el desarrollo teórico y las demostraciones de las propiedades de esta formulación.

### 5.1.1. Parametrización temporal

Para comenzar, definiremos con un poco más de formalidad los conceptos de trayectoria y curva.

**Definición 19** (Trayectoria). *Una trayectoria es una curva definida en un espacio (puede ser de estado, de salida o de configuración en el caso de sistemas robóticos) en los que cada instante específico del tiempo está asociado a un punto de la curva.*

**Definición 20** (Curva paramétrica). *Una curva paramétrica es un conjunto de puntos en un espacio (puede ser de estado, de salida o de configuración en el caso de sistemas robóticos) tal que para cada punto existe un valor del parámetro asociado.*

Una trayectoria así definida es un mapeo rígido del tiempo al espacio de salida, mientras que una curva paramétrica es un mapeo que va del parámetro al espacio de salida. La principal diferencia radica en que, en el caso de la trayectoria, el parámetro es autónomo, mientras que en la curva el avance del parámetro es manipulable.

Dada una curva paramétrica  $y_{\text{ref}}(s)$ , donde  $s$  es el parámetro, la parametrización temporal consiste en establecer la evolución temporal del parámetro  $s(k)$ , donde  $k \in \mathbb{N}$  es el tiempo (discreto en este caso). Este proceso se puede entender como la generación de una trayectoria  $y_{\text{ref}}(k)$  a partir de una curva paramétrica  $y_{\text{ref}}(s)$ . Habitualmente, se impondrá a  $s(k)$  que sea creciente en el tiempo (de modo que la curva se recorra en un sentido especificado) y que su crecimiento máximo entre dos tiempos sucesivos respete alguna cota superior, i.e.,  $0 < s(k+1) - s(k) < \Delta s_{\text{max}} < \infty$ .

Plantaremos a tal fin un sistema dinámico que genere la parametrización temporal (i.e., la relación funcional  $s(k)$ ), donde el comportamiento del parámetro se describe como

$$s(k+1) = f(s(k), w(k)), \quad (5.1)$$

y  $w(k)$  es una entrada exógena.

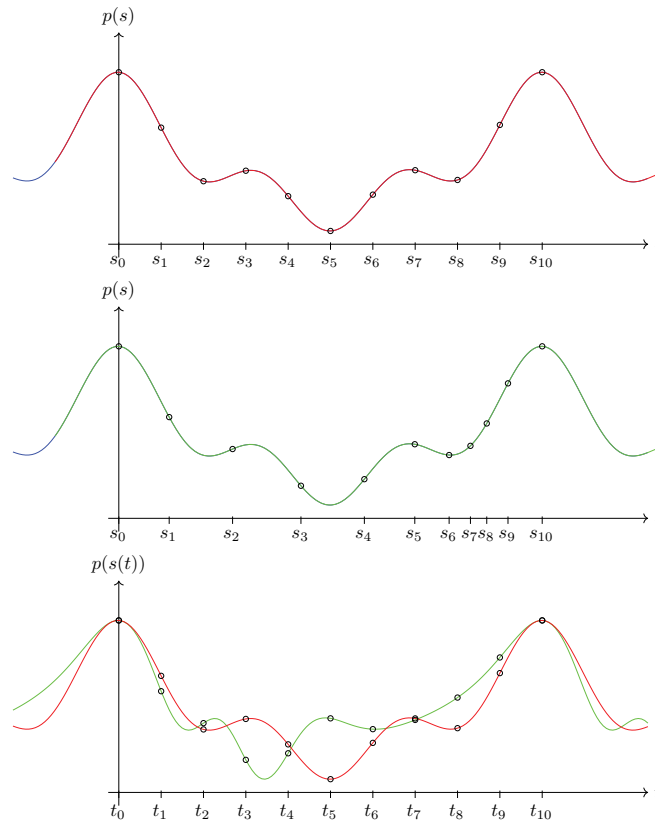
En la literatura se suele encontrar este sistema implementado como un sistema lineal, realizado en una cadena de integradores. En el caso más básico, se utiliza un integrador simple donde  $w(k)$  representa la velocidad (primera derivada respecto al tiempo) del parámetro, de modo que

$$s(k+1) = s(k) + T_s w(k),$$

donde  $T_s$  es el intervalo de muestreo y  $w_{\text{min}} \leq w(k) \leq w_{\text{max}} < \infty$ . Por simplicidad en el desarrollo, vamos a utilizar esta implementación en las secciones subsiguientes.

**Observación 7.** *Se debe notar que al realizar la función  $s(k)$ , se asigna un punto en la curva  $y_{\text{ref}}$  para cada instante  $k$  y, por lo tanto, se obtiene una trayectoria  $y_{\text{ref}}(s(k))$ .*

En la Figura 5.1 se muestra un ejemplo ilustrativo de una parametrización temporal en tiempo continuo de una curva unidimensional. Dos parametrizaciones temporales son realizadas sobre la misma curva  $p(\cdot)$  a lo largo de un intervalo  $t \in [0, 1]$ : están dadas por  $s_a(t) = t$  y  $s_b(t) = t + 0,75(1 - \cos(2\pi t))$  y se muestran en las Figuras 5.1-a) y 5.1-b), respectivamente. Se evalúan valores sucesivos del parámetro  $s_i$  a intervalos regulares del tiempo y se indican en el eje de abscisas, mientras que el valor que toma la curva en esos puntos se indica con círculos. En la figura a), se presenta el muestreo a intervalos regulares, mientras que en b) los intervalos son de duración variable. En c) se muestran las trayectorias (funciones



**Figura 5.1:** Ilustración de trayectorias resultantes de diferentes parametrizaciones temporales de una curva.

del tiempo) resultantes para los muestreos indicados en a) y b) (los colores de las trayectorias coinciden con los muestreos respectivos), donde el efecto de las distintas parametrizaciones es evidente. La variación de las trayectorias puede interpretarse como una compresión o expansión temporal del parámetro. Parte del problema de planificación incluye la determinación de una parametrización óptima, de acuerdo a los criterios seleccionados.

## 5.2. MPC Clásico aplicado al Seguimiento de Curvas Paramétricas

En esta sección describiremos un controlador MPC para el seguimiento de curvas paramétricas. Esto consistirá en obtener en cada instante, en forma simultánea, una trayectoria de referencia producida a través de la parametrización temporal de la curva y una secuencia de controles que hagan que la trayectoria predicha para el sistema converja a la referencia. En la formulación del controlador MPC, el parámetro de la curva  $s$  es una variable controlada, sobre la que opera la dinámica (5.1) cuya entrada  $w(k)$ , que es una variable manipulada, se incorporan como variables de decisión en el problema de optimización. Extendemos la formulación de seguimiento de trayectorias incorporando la parametrización temporal de la curva de referencia, de manera de obtener la secuencia de entradas que soluciona el problema de seguimiento de curvas a través de la optimización que el controlador MPC realiza en cada tiempo de muestreo.

### 5.2.1. Planteo Clásico del Problema

Consideraremos un sistema controlado del tipo

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k)), \\y(k) &= h(x(k)),\end{aligned}\tag{5.2}$$

con  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ .

**Problema 3** (Seguimiento de curvas). *Dada como referencia una curva paramétrica  $y_{\text{ref}}(s)$  con  $s \in [s_0, s_1)$ , el objetivo del seguimiento de curvas consiste en calcular la entrada del sistema y la parametrización temporal de la curva de modo que la salida del sistema converja asintóticamente a la curva de referencia, i.e.,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y(k) - y_{\text{ref}}(s(k))| = 0,$$

mientras que la evolución del parámetro sea creciente en el tiempo, es decir,  $s(k+1) > s(k)$ , satisfaciendo las restricciones de estado y entrada en todo tiempo.

Adicionalmente, a la velocidad de crecimiento del parámetro  $w(k)$  se le suele imponer la convergencia asintótica a una velocidad de referencia  $w_{\text{ref}}$  resultando en el problema denominado *seguimiento de curvas con asignación de velocidad*, que definimos a continuación.

**Problema 4** (Seguimiento de curvas con asignación de velocidad). *Dada como referencia una curva paramétrica  $y_{\text{ref}}(s)$  con  $s \in [s_0, s_1)$  y una velocidad de referencia  $w_{\text{ref}}$ , resolver el Problema de seguimiento de curvas 3, mientras que la velocidad del parámetro  $w(k)$  converge a  $w_{\text{ref}}$ , i.e.,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w(k) = w_{\text{ref}},$$

**Observación 8.** *Llamamos clásicos a los problemas 3 y 4 dado que son habitualmente estudiados en la literatura, véase, por ejemplo, las referencias Aguiar et al. (2004); Alessandretti et al. (2013); Faulwasser and Findeisen (2016).*

### 5.2.2. Formulación Clásica del Controlador

Para comenzar con el estudio del controlador clásico, introduciremos el concepto de curva perfectamente seguible.

**Definición 21** (Curva perfectamente seguible). *Una curva es perfectamente seguible si existen secuencias de estado y entrada  $\mathbf{x}_{\text{ref}} := \{x_{\text{ref}}(k), x_{\text{ref}}(k+1), \dots\}$ ,  $\mathbf{u}_{\text{ref}} := \{u_{\text{ref}}(k), u_{\text{ref}}(k+1), \dots\}$ , con  $x_{\text{ref}}(k+1) = f(x_{\text{ref}}(k), u_{\text{ref}}(k))$ , y  $(x_{\text{ref}}(k), u_{\text{ref}}(k)) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{U})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y sus correspondientes secuencias del parámetro y entrada del parámetro  $\mathbf{s} := \{s(k), s(k+1), \dots\}$  y  $\mathbf{w} := \{w(k), w(k+1), \dots\}$ , tales que  $h(x_{\text{ref}}(k)) = y_{\text{ref}}(s(k))$  para todo  $k \geq 0$ .*

El objetivo de control es la minimización del error entre la salida del sistema y la curva. Dados el estado actual del sistema  $x$ , un valor inicial del parámetro  $s$  y la curva de referencia  $y_{\text{ref}}(\cdot)$ , la que se

asume perfectamente seguible, se propone el funcional de costo

$$V_{\text{pf}}^{\text{classic}}(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot); \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell(h(x(i)) - y_{\text{ref}}(s(i))) + V_t(h(x(N)) - y_{\text{ref}}(s(N))),$$

donde  $\ell(\cdot)$  es el costo de etapa de seguimiento de curvas y  $V_t(\cdot)$  es un costo terminal. Si se trata de un problema con asignación de velocidad, para incorporar la velocidad de avance del parámetro deseada  $w_{\text{ref}}$  al problema, se agrega un término adicional en el funcional de costo que es la penalización del error de velocidad del parámetro. Esto resulta en el costo alternativo siguiente,

$$V_{\text{pf}}^{\text{classic+vel}}(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell(h(x(i)) - y_{\text{ref}}(s(i))), \ell_w(w(i) - w_{\text{ref}}) + V_t(h(x(N)), y_{\text{ref}}(s(N)))$$

Claramente, haciendo  $\ell_w(\cdot) = 0$  recuperamos la formulación clásica sin asignación de velocidad, por lo que continuaremos en el resto de esta sección con esta formulación más general.

Se plantea el siguiente problema de optimización para la formulación del MPC,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}} V_{\text{pf}}^{\text{classic+vel}}(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{w}) \\ \text{s.a.} \quad & x(0) = x, & (5.3a) \\ & x(i+1) = f(x(i), u(i)), & (5.3b) \\ & x(i) \in \mathcal{X}, u(i) \in \mathcal{U} & (5.3c) \\ & x(N) \in \mathcal{X}_f(y_{\text{ref}}(\cdot), s(N)) & (5.3d) \\ & s(0) = s, & (5.3e) \\ & s(i+1) = s(i) + T_s w(i), & (5.3f) \\ & w(i) \in \mathcal{W}, & (5.3g) \\ & i = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Las restricciones de la dinámica, el estado y las entradas ((5.3a)-(5.3d)) son las típicas del MPC, a las que se agregan las restricciones de la dinámica del parámetro ((5.3f)-(5.3g)). En forma similar a esquemas MPC clásicos, la restricción terminal (5.3d) impone que el último estado predicho pertenezca a una región terminal que, aunque las penalizaciones están exclusivamente vinculadas a las salidas, expresamos en el espacio de estados. Esto es un uso habitual en este tipo de problemas dado que, bajo ciertos supuestos, el problema se puede interpretar como un problema de estabilización en el espacio de estados (Faulwasser and Findeisen, 2016).

### Condiciones suficientes para la convergencia

Los siguientes supuestos constituyen condiciones suficientes para este esquema que garantizan la convergencia de la salida a la curva de referencia en el marco de control por horizonte deslizante.

**Supuesto 11.** *La dinámica del sistema es continua y localmente Lipschitz para todo par  $(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ .*

**Supuesto 12.** Las trayectorias del sistema para cualquier  $x_0 \in \mathcal{X}$  y cualquier secuencia de entradas  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \times \cdots \mathcal{U}$  tiene una solución absolutamente continua.

**Supuesto 13.** La curva de referencia está contenida en el interior de la imagen de las restricciones  $\mathcal{X}$  bajo el mapa  $h(\cdot)$ , i.e.,  $y_{\text{ref}}(\cdot) \subset \text{int}(h(\mathcal{X}))$ .

**Supuesto 14.** La función de costo  $\ell_w(\cdot)$  es continua y está acotada por debajo por una función  $\mathcal{K}$ ,  $\alpha(|e_y, e_w|)$ , donde  $e_y$  y  $e_w$  indican el error de salida y de velocidad del parámetro.

Los Supuestos 11-12 son muy similares a los habituales de MPC para regulación. El Supuesto 13 garantiza la factibilidad de la referencia respecto de las restricciones, mientras que el Supuesto 14 tiene la utilidad al momento de garantizar la convergencia hacia la curva.

**Supuesto 15.** El conjunto terminal  $\mathcal{X}_f(\cdot)$  es compacto, para todo estado y parámetro iniciales en  $\mathcal{X}_f(\cdot)$ , para todo  $k \geq 0$ , existe una secuencia de entradas admisibles tales que  $V_{\text{pf}}^{\text{classic+vel}}(k) \geq V_{\text{pf}}^{\text{classic+vel}}(k+1)$  y las soluciones correspondientes permanecen en el conjunto terminal.

El Supuesto 15 representa la imposición de una forma de invariancia de control al conjunto paramétrico  $\mathcal{X}_f(\cdot)$  y servirá para obtener garantías de decrecimiento del costo. Referimos al lector interesado al artículo Faulwasser and Findeisen (2016) en lo que refiere a la demostración de las propiedades de esta formulación.

Remarcamos que las garantías de estabilidad para el seguimiento de curvas requieren la factibilidad de la referencia y se hace muy complicado el cómputo de las penalizaciones y conjuntos terminales que cumplan con los supuestos presentados, que hacen virtualmente imposible poder garantizar, en general, la existencia de una solución al problema clásico para referencias genéricas.

### 5.3. MPC para Tracking aplicado al seguimiento de curvas paramétricas

En esta sección presentaremos una formulación del MPC para Tracking con aplicación al problema de seguimiento de curvas. Como se comentó en la Sección 5.2.2, las formulaciones de seguimiento para curvas genéricas requieren la verificación de condiciones estrictas sobre los conjuntos terminales y/o los funcionales de costos de manera de establecer las garantías de estabilidad del controlador.

Asumiendo que la referencia es perfectamente seguible, podemos plantear una región terminal muy sencilla como una restricción terminal de igualdad, es decir  $X_f := \{x_{\text{ref}}(s(N))\}$ . Esta condición, aunque es muy simple, puede resultar muy restrictiva, por lo que se propone el uso de trayectorias auxiliares, en la forma de variables artificiales, para relajar esta restricción terminal. La incorporación de variables artificiales nos proveerá de mecanismos que permiten resolver el problema con un dominio de atracción ampliado y sin necesidad de caracterizar explícitamente los conjuntos terminales.

Sobre estas variables, se impondrán ciertas condiciones, como por ejemplo ser trayectorias de equilibrio respecto de una curva, según la siguiente definición.

**Definición 22** (Trayectoria de Equilibrio respecto de una curva). Dada una curva de referencia perfectamente seguible  $y_{\text{ref}}(\cdot)$ , y una condición inicial  $s$ , se dice que una trayectoria de estado factible  $\mathbf{x}_s := \{x_s(0), x_s(1), \dots\}$ ,  $x_s(j) \in \mathcal{X}$ , para todo  $j \geq 0$ , es una trayectoria de equilibrio respecto de una curva, si se cumple que  $x_s(j) - x_{\text{ref}}(s_s(j))$  es constante para todo  $j \geq 0$ .

Estas trayectorias son llamadas trayectorias de equilibrio respecto de una curva porque si expresáramos el error de seguimiento, es decir, el estado del sistema en variables de desviación con respecto de la trayectoria resultante de la parametrización temporal de la curva,  $x_s(j) - x_{\text{ref}}(s_s(j))$ , este permanecería en un valor constante y, por ende, constituye un equilibrio en esas variables.

Se puede notar que para una curva de referencia  $y_{\text{ref}}(\cdot)$  y valor inicial del parámetro  $s$  dados, una trayectoria de equilibrio implica la existencia de secuencias de entrada  $\mathbf{u}_s := \{u_s(0), u_s(1), \dots\}$ , tal que  $u_s(j) \in \mathcal{U}$  y de entrada del parámetro  $\mathbf{w}_s$  con  $\mathbf{w}_s := \{w_s(0), w_s(1), \dots\}$  y  $w_s(j) \in \mathcal{W}$ , que respectivamente cumpla con las dinámicas del sistema  $x_s(j+1) = f(x_s(j), u_s(j))$  y del parámetro  $s_s(j+1) = A_s s_s(j) + B_s w_s(j)$ , con condición inicial  $s_s(0)$ , para todo  $j \geq 0$ . Estas secuencias junto a la evolución de dicho parámetro  $s_s$  hacen posible el mencionado equilibrio.

**Definición 23** (Conjunto de equilibrio respecto de una curva). *Se denomina Conjunto de equilibrio respecto de una curva al conjunto de estados para los que existe una trayectoria de equilibrio correspondiente que los incluye y, para una curva dada  $y_{\text{ref}}(\cdot)$  y valor del parámetro  $s$ , se denotará como  $\mathcal{X}_s(y_{\text{ref}}(\cdot), s)$ .*

### 5.3.1. Formulación flexibilizada del Problema de Seguimiento

Visto que la aplicabilidad del problema planteado anteriormente (Problema 3) se ve muy reducida debido a que la referencia debe ser continua, derivable, factible con respecto a la dinámica y restricciones, etc., se desea realizar una formulación más flexible del seguimiento de curvas. En adelante intentaremos resolver el siguiente problema:

**Problema 5** (Problema de seguimiento de curvas flexibilizado). *Dada como referencia una curva paramétrica  $y_{\text{ref}}(s)$  con  $s \in [s_0, s_1]$ , el objetivo del seguimiento de curvas consiste en calcular la entrada del sistema y la parametrización temporal de la curva de modo que la salida del sistema  $y(k)$  converja a una curva factible que minimice localmente el error respecto de la referencia, mientras que la evolución del parámetro sea no decreciente en el tiempo, es decir,  $s(k+1) \geq s(k)$ , satisfaciendo las restricciones de estado y entrada en todo tiempo.*

En estos casos no se requiere la convergencia a la curva de referencia, sino a una curva factible que sea óptima en términos de algún funcional de costo. Se puede notar que parte del relajamiento del problema radica en no requerir el incremento del parámetro para todo instante, de modo que un equilibrio del sistema para un parámetro constante constituye una trayectoria candidata que posee error constante. Esto nos brindará la opción de estabilizar el sistema en puntos de equilibrio factibles, lo que resulta particularmente útil al momento de enfrentar un cambio de referencias, como también incluir todo el conjunto de equilibrio del sistema en el conjunto trayectorias de equilibrio.

También podemos considerar una velocidad de referencia para el parámetro  $w_{\text{ref}}$  y definir el siguiente problema, que es una flexibilización del Problema 4.

**Problema 6** (Seguimiento de curvas flexibilizado con asignación de velocidad). *Dada como referencia una curva paramétrica  $y_{\text{ref}}(s)$  con  $s \in [s_0, s_1]$  y una velocidad de referencia  $w_{\text{ref}}$ , resolver el problema de seguimiento de curvas flexibilizado 5, buscando a la vez que la velocidad del parámetro  $w$  sea lo más cercana posible a  $w_{\text{ref}}$ .*

### 5.3.2. Formulación del Controlador

Para resolver el problema flexibilizado propondremos un controlador MPC al que incorporaremos variables de decisión adicionales  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$ , donde  $\mathbf{x}_a := \{x_a(0), \dots, x_a(N)\}$  y  $\mathbf{u}_a := \{u_a(0), \dots, u_a(N-1)\}$  y que llamaremos *trayectorias artificiales*, las que deberán ser factibles según la dinámica del sistema y sus restricciones.

Retomando ideas que resultaron útiles en las formulaciones discutidas en capítulos anteriores, se requerirá que los estados artificiales finales conformen equilibrios en el error  $x_a(k) - x_{\text{ref}}(s(k))$ . Esto quiere decir que estas trayectorias pueden estar dadas, por ejemplo, por un equilibrio del sistema o, bien, ser parte de una trayectoria con error constante respecto de la referencia (trayectoria de equilibrio, según Definición 22).

La solución de este problema consiste en resolver en forma simultánea la planificación de la referencia—incluyendo la determinación de una referencia de estados y entradas factibles junto a la parametrización temporal de la curva— y el cálculo de la entrada óptima para el seguimiento de dicha referencia que se planifica en cada iteración. La planificación en este punto consiste en, simultáneamente, i) determinar la evolución del parámetro  $s$ , que resulta en una trayectoria conformada por  $N$  puntos pertenecientes a la referencia, y ii) determinar una trayectoria artificial factible que minimice el error respecto de los estados correspondientes a la trayectoria de referencia planificada. Es decir, se obtiene la parametrización temporal del parámetro adimensional de la curva y una trayectoria  $\mathbf{x}_a$ —una secuencia espacio-temporal— factible de estados y sus correspondientes entradas  $\mathbf{u}_a$ . La secuencia de salidas  $y_{\text{ref}}(s)$  resultante de la parametrización temporal será posiblemente infactible, pero se impone la factibilidad a las trayectorias artificiales, por lo que estas últimas constituyen una trayectoria de referencia válida.

#### Planificación de la referencia

Las trayectorias artificiales están asociadas a la planificación de la referencia y, para obtenerlas, se propone el siguiente término a ser incorporado al costo que se minimizará

$$V_p(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^N \ell_p(h(x_a(i)) - y_{\text{ref}}(s(i)), w(i) - w_{\text{ref}}),$$

donde  $\ell_p(\cdot) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  denota la función de costo de etapa de planificación.

Este costo penaliza el error entre la salida correspondiente a la trayectoria artificial  $y_a(i) = h(x_a(i))$  y la referencia parametrizada en el tiempo correspondiente  $y_{\text{ref}}(s(i))$ , lo que apunta a producir una trayectoria factible que se aproxima tanto como es posible a la curva de referencia. Además, se incorpora una penalización para el error de la velocidad del parámetro, para el problema con asignación de velocidad.



La planificación se puede plantear como un problema de optimización dado por

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{w}} V_p(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}) \\ \text{s.a.} \quad & s(0) = s, \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$s(i+1) = s(i) + T_s w(i), \quad (5.4b)$$

$$w(i) \in \mathcal{W}, \quad (5.4c)$$

$$x_a(i+1) = f(x_a(i), u_a(i)), \quad (5.4d)$$

$$x_a(i) \in \mathcal{X}, u_a(i) \in \mathcal{U}, \quad (5.4e)$$

$$x_a(N) \in \mathcal{X}_s(y_{\text{ref}}(\cdot), s(N)), \quad (5.4f)$$

$$x_a(N) \in \mathcal{R}(x), \quad (5.4g)$$

$$i \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

El problema consiste en hallar tanto la trayectoria artificial  $(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a)$  como la parametrización temporal de la referencia  $(\mathbf{s}, \mathbf{w})$ , en este caso asociada directamente al valor inicial de  $s$  por (5.4a). Las restricciones (5.4b-5.4c) son referidas a la dinámica del parámetro y son análogas a la formulación clásica, mientras que (5.4d-5.4f) corresponden a la dinámica, factibilidad y pertenencia al conjunto de equilibrio impuestas a las variables artificiales. La restricción (5.4g) fuerza la elección de trayectorias cuyo  $N$ -ésimo estado sea alcanzable desde  $x$ , o equivalentemente, que  $x_a(N)$  pertenezca a  $\mathcal{R}(x)$ , el conjunto de estados alcanzables en  $N$  pasos desde  $x$ , el estado actual del sistema, lo cual no es demasiado restrictivo dado que  $x_a(0)$  es una variable de optimización del problema, diferente en general a  $x$ .

### Seguimiento de la referencia planificada

Las trayectorias artificiales calculadas según el problema anterior se van a utilizar como referencia para el problema de seguimiento de trayectorias basado en MPC, que presentamos a continuación. Para ello, definimos un funcional de costo de seguimiento  $V_t(\cdot)$  que penaliza el error entre la predicción y dicha referencia auxiliar, definido como

$$V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell_t(x(i) - x_a(i), u(i) - u_a(i)),$$

donde  $\ell_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  es la función de costo de etapa de seguimiento.

El problema de optimización se propone como

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \text{s.a.} \quad & x(i+1) = f(x(i), u(i)), \end{aligned} \quad (5.5a)$$

$$x(0) = x, \quad (5.5b)$$

$$x(i) \in \mathcal{X}, u(i) \in \mathcal{U}, \quad (5.5c)$$

$$x(N) = x_a(N), \quad (5.5d)$$

$$i = 0, \dots, N-1.$$

Las restricciones de este problema imponen la factibilidad de la trayectoria predicha  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  con respecto a la dinámica del sistema (5.5a) con condición inicial (5.5b) y las restricciones (5.5c) de admisibilidad de estados y entradas, implementando además una restricción terminal de igualdad (5.5d). Esto produce una secuencia óptima de entradas a ser aplicadas al sistema,  $\mathbf{u}$ , que lo conducirán en  $N$  pasos hasta la trayectoria artificial, sobre la que, por ser de equilibrio en el error, el sistema puede permanecer indefinidamente. También se sabe que se puede alcanzar el  $N$ -ésimo estado de la trayectoria de referencia en a lo sumo  $N$  pasos, dado que esta pertenece a  $\mathcal{R}_N(x)$  por el planteo del problema de planificación.

### Planteo Unificado

A continuación se presentará una formulación que unifica los problemas de planificación y seguimiento de trayectoria en un único problema de optimización. El costo de etapa combinado  $\ell_{\text{pf}}(\cdot)$ , que incluye los objetivos de planificación y seguimiento, está dado por:

$$\ell_{\text{pf}}(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; x_a, u_a, u, w) = \ell_p(h(x_a) - y_{\text{ref}}(s), w - w_{\text{ref}}) + \ell_t(x - x_a, u - u_a).$$

Entonces el costo de seguimiento de curvas para el controlador flexibilizado queda

$$V_{\text{pf}}(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^N \ell_{\text{pf}}(x(i), s(i), y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; x_a(i), u_a(i), u(i), w(i)). \quad (5.6)$$

El problema de optimización se propone como

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{w}} V_{\text{pf}}(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{w}) \\ \text{s.a.} \quad & x(0) = x, & (5.7a) \\ & x(i+1) = f(x(i), u(i)), & (5.7b) \\ & x(i) \in \mathcal{X}, u(i) \in \mathcal{U}, & (5.7c) \\ & s(0) = s, & (5.7d) \\ & s(i+1) = A_s s(i) + B_s w(i), & (5.7e) \\ & w(i) \in \mathcal{W}, & (5.7f) \\ & x_a(i+1) = f(x_a(i), u_a(i)), & (5.7g) \\ & x_a(i) \in \mathcal{X}, u_a(i) \in \mathcal{U}, & (5.7h) \\ & x_a(N) \in \mathcal{X}_s(y_{\text{ref}}(\cdot), s(N)), & (5.7i) \\ & x(N) = x_a(N), & (5.7j) \\ & \Delta \ell_{\text{pf}}(i) \leq 0, & (5.7k) \\ & i = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

donde (5.7i) impone la condición de equilibrio del error para el  $N$ -ésimo estado de la trayectoria planificada,  $\Delta \ell_{\text{pf}}(i) := \ell_{\text{pf}}(\cdot)|_{i+1} - \ell_{\text{pf}}(\cdot)|_i \leq 0$  representa la variación del costo de etapa predicho entre el instante  $i$  y su sucesor  $i+1$ , y las demás restricciones son análogas a las planteadas en las secciones

precedentes.

Como es habitual, definiremos la ley de control a partir de los argumentos que constituyen la solución de este problema como

$$\kappa(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot)) = (u^*(0), w^*(0)), \quad (5.8)$$

donde  $(u^*(0), w^*(0))$ , son los primeros elementos de las respectivas secuencias óptimas  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{w}^*$ .

La inclusión de la restricción del decrecimiento del costo de etapa (5.7k) será un elemento fundamental en la prueba de estabilidad.

### 5.3.3. Análisis del sistema de lazo cerrado

La prueba de estabilidad asintótica requiere la controlabilidad del sistema. Para sistemas no lineales, además se suelen incluir algunas condiciones adicionales (Limon et al., 2018). En nuestro caso, planteamos el supuesto siguiente

**Supuesto 16.** *La función  $f(x, u)$  es diferenciable en todo punto de cualquier trayectoria factible, y el sistema linealizado a lo largo de la trayectoria de referencia*

$$\left( A(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}}) := \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}})}, B(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}}) := \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}})} \right)$$

es controlable.

**Observación 9.** *La diferenciabilidad de cada trayectoria factible sigue directamente de la continuidad del sistema dinámico. Esto solo se impone a las trayectorias predichas y las trayectorias artificiales (ambas cumplen con la dinámica del sistema) y, por lo tanto, su diferencia también resulta diferenciable.*

Por otra parte, se introduce el siguiente supuesto respecto del costo

**Supuesto 17.** 1. *Existe una función  $\alpha_\ell$  de tipo  $\mathcal{K}_\infty$  tal que  $\ell_p(z, v) \geq \alpha_\ell(\|z\|)$  para todo  $(z, v) \in \mathbb{R}^{n+m}$ .*

2. *Existe un mínimo único para el costo de planificación,  $(\mathbf{y}_a^O(s), \mathbf{w}^O)$ , para  $y_{\text{ref}}(\cdot)$  y  $s$  dados.*

3. *Existe una función  $\alpha$  de tipo  $\mathcal{K}_\infty$  tal que  $\ell_t(z, v) \geq \alpha(\|z\|)$ .*

4. *Existe una cota inferior para  $V_t(\cdot) \geq \alpha_t$ , con  $\alpha_t$  una función de tipo  $\mathcal{K}$ .*

Supuestos similares son frecuentes en formulaciones de MPC para seguimiento de referencias.

**Teorema 10** (Estabilidad Asintótica). *Sea que los supuestos 16 y 17 se cumplen. Dada una curva de referencia  $y_{\text{ref}}$  y un valor inicial del parámetro, para cada estado inicial  $x$  tal que el problema de optimización (5.7) es factible, el sistema de lazo cerrado con la ley de realimentación  $(u, w) = \kappa(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot))$ , dada por (5.8), es estable, cumple con las restricciones a lo largo del tiempo y converge*

1. *a la curva de referencia, si la referencia es exactamente seguible, o*

2. *a una trayectoria localmente óptima si la referencia no es exactamente seguible.*

*Demostración.* La prueba se realiza en dos partes. En primer lugar, se demuestra que el problema de optimización es recursivamente factible. La segunda parte está dedicada al decrecimiento del costo.

**Factibilidad Recursiva.**

Supongamos que existe una solución al problema de optimización en el instante  $k$ , dada por

$$(\mathbf{x}^*(k), \mathbf{u}^*(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k), \mathbf{s}^*(k), \mathbf{w}^*(k)),$$

donde los asteriscos denotan optimalidad. En el siguiente tiempo de muestreo  $k + 1$ , el estado coincide con el predicho y será factible, indicado con la virgulilla, i.e.,  $\tilde{x}(0|k + 1) = x^*(1|k)$ , con  $x^*(1|k) = f(x(0|k), u^*(0|k))$  considerando propagación nominal del sistema y el lazo cerrado con la ley de retroalimentación del MPC. El parámetro evoluciona según  $s(0|k + 1) = s^*(0|k) + T_s w^*(0|k)$ . Por claridad de la exposición, indicaremos explícitamente las siguientes secuencias correspondientes a la solución óptima en el instante  $k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k) &= \{x^*(0|k), \dots, x^*(N|k)\}, \\ \mathbf{u}^*(k) &= \{u^*(0|k), \dots, u^*(N - 1|k)\}, \\ \mathbf{x}_a^*(k) &= \{x_a^*(0|k), \dots, x_a^*(N|k)\}, \\ \mathbf{u}_a^*(k) &= \{u_a^*(0|k), \dots, u_a^*(N - 1|k)\}, \\ \mathbf{s}^*(k) &= \{s^*(0|k), \dots, s^*(N|k)\}, \\ \mathbf{w}^*(k) &= \{w^*(0|k), \dots, w_s^*(N - 1|k)\}. \end{aligned}$$

A partir de la trayectoria óptima calculada en  $k$  se puede construir una trayectoria factible para el instante  $k + 1$ , considerando la restricción terminal de equilibrio respecto de la curva, que corresponde a las siguientes secuencias

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k + 1) &= \{x^*(1|k), \dots, x^*(N|k), x_s^*(1|k)\}, \\ \tilde{\mathbf{u}}(k + 1) &= \{u^*(1|k), \dots, u^*(N - 1|k), u_s^*(0|k)\}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_a(k + 1) &= \{x_a^*(1|k), \dots, x_a^*(N - 1|k), x_s^*(1|k)\}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_a(k + 1) &= \{u_a^*(1|k), \dots, u_a^*(N - 1|k), u_s^*(0|k)\}, \\ \tilde{\mathbf{s}}(k + 1) &= \{s^*(1|k), \dots, s^*(N - 1|k), s_s^*(0|k)\}, \\ \tilde{\mathbf{w}}(k + 1) &= \{w^*(1|k), \dots, w^*(N - 1|k), w_s^*(0|k)\}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Estas trayectorias factibles para el instante  $k + 1$  comienzan con los valores calculados como óptimos para el problema resuelto en  $k$  a partir del instante sucesor. Teniendo en cuenta la condición de equilibrio en el error de la trayectoria artificial y dado que desde  $N$  en adelante el estado artificial coincide con el estado artificial en  $k$ , esto se puede repetir indefinidamente, quedando así demostrada la factibilidad recursiva.

**Decrecimiento del costo**

Nótese que el costo (5.6) puede escribirse como  $V_{\text{pf}}(\cdot) = V_p(\cdot) + V_t(\cdot)$ , donde  $V_p(\cdot) = \sum_{i=0}^N \ell_p(\cdot)$  y  $V_t := \sum_{i=0}^N \ell_t(\cdot)$ , de modo que para simplificar la lectura, utilizaremos la siguiente nomenclatura

$$V_t^*(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)) = V_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k); \mathbf{x}^*(k), \mathbf{u}^*(k)),$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a^*(k+1)) &= V_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a^*(k+1); \tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{u}}^*(k+1)), \\ V_p^*(x(k), s(k)) &= V_p(x(k), s(k), y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k), \mathbf{s}^*(k), \mathbf{w}^*(k)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_p(x^*(k+1), s^*(k+1)) &= \\ V_p(x^*(k+1), s^*(k+1), y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1), \tilde{\mathbf{w}}(k+1)).\end{aligned}$$

Estudiaremos ahora la evolución del costo óptimo en instantes sucesivos para el sistema de lazo cerrado, i.e.,

$$\Delta V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)) = V_{\text{pf}}^*(x^*(k+1), s^*(k+1)) - V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)).$$

En primer lugar consideraremos una evolución factible del costo

$$\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) = \tilde{V}_{\text{pf}}(\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1)) - V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)),$$

donde el costo de seguimiento en el instante  $k+1$  está dado por

$$\tilde{V}_{\text{pf}}(\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1)) = V_{\text{pf}}(\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1); \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1), \tilde{\mathbf{w}}(k+1)),$$

con las secuencias factibles definidas en (5.9), resultantes de la aplicación de la entrada óptima durante un intervalo en el instante  $k$ . La evolución factible del costo se puede escribir también como

$$\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) = \Delta \tilde{V}_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)) + \Delta \tilde{V}_p(s(k)) \quad (5.10)$$

donde los términos están dados por

$$\Delta \tilde{V}_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)) = \tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1)) - V_t^*(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k))$$

y

$$\Delta \tilde{V}_p(x(k), s(k)) = \tilde{V}_p(s^*(k+1)) - V_p^*(s(k)).$$

Estas definiciones nos permitirán analizar el decrecimiento del costo inspeccionando los costos de seguimiento y planificación de la ecuación (5.10) en forma separada.

### Diferencia de Costo: Planificación

En primer lugar analizaremos la diferencia en el costo para instantes sucesivos relacionada a la planificación de la trayectoria. Con la intención de facilitar la legibilidad y economía en la notación, utilizaremos la siguiente tupla

$$z(k) := (x(k), s(k), y_{\text{ref}}(\cdot), w_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a(k), \mathbf{u}_a(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{w}(k)),$$

y sus respectivos elementos  $i$ -ésimos están indicados por

$$z(i|k) := (x(k), s(k), y_{\text{ref}}(s(i|k)), w_{\text{ref}}; x_a(i|k), u_a(i|k), s(i|k), w(i|k)).$$

El costo óptimo de planificación en el instante  $k$  está dado por

$$V_p^*(x(k), s(k)) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell_p(z^*(i|k)), \quad (5.11)$$

y en  $k + 1$ , tenemos un costo factible dado por

$$\tilde{V}_p(x^*(k+1), s^*(k+1)) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell_p(\tilde{z}(i|k+1)).$$

Como los primeros  $N - 1$  elementos en las secuencias factibles  $\tilde{z}(i|k+1)$  coinciden con los elementos respectivos de las secuencias dadas por  $z^*(i+1|k)$ , obtenemos que el costo de planificación tiene la siguiente forma

$$\tilde{V}_p(x^*(k+1), s^*(k+1)) = \sum_{i=1}^{N-1} \ell_p(z^*(i|k)) + \ell_p(\tilde{z}(N-1|k+1))$$

Ahora, notando que en el instante final de la trayectoria planeada tenemos  $\ell_p(\tilde{z}(N-1|k+1)) = \ell_p(z_s(0|k+1))$ , de modo que

$$\tilde{V}_p(x^*(k+1), s^*(k+1)) = \sum_{i=1}^{N-1} \ell_p(z^*(i|k)) + \ell_p(z_s(0|k+1)) \quad (5.12)$$

Comparando las ecuaciones (5.11) y (5.12), podemos notar que las soluciones de la planificación óptima y factible están compuestas por los mismos términos que se cancelan, excepto por el primer término de la solución óptima (5.11) que se elimina y el último de la solución factible (5.12) que se incorpora, dando

$$\Delta \tilde{V}_p(x(k), s(k)) = -\ell_p(z(0|k)) + \ell_p(z(N|k)).$$

### Decrecimiento del Costo: Seguimiento

Ahora analizamos la diferencia de costo correspondiente al seguimiento, dada por

$$\Delta \tilde{V}_t(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k)) = \tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1)) - V_t^*(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k)). \quad (5.13)$$

El costo óptimo de seguimiento en el instante  $k$  está dado por

$$V_t^*(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k); x^*(k), u^*(k)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_t(x^*(j|k) - x_a^*(j|k), u^*(j|k) - u_a^*(j|k)),$$

y el costo factible en el instante  $k + 1$ , obtenido a partir de (5.9), es

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1); \tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1)) = \\ \sum_{j=0}^{N-1} \ell_t(\tilde{\mathbf{x}}(j|k+1) - \tilde{\mathbf{x}}_a(j|k+1), \tilde{\mathbf{u}}(j|k+1) - \tilde{\mathbf{u}}_a(j|k+1)). \end{aligned} \quad (5.14)$$

La evolución nominal del sistema avanza exactamente sobre la trayectoria óptima computada en el tiempo de muestreo previo, por lo que  $\tilde{\mathbf{x}}(j|k+1) := \mathbf{x}^*(j+1|k)$  para  $j \in [0, \dots, N-1]$ , mientras que  $\tilde{\mathbf{x}}(N-1|k+1) = \mathbf{x}_a^*(N|k)$  para  $\tilde{\mathbf{u}}(N-1|k+1) = \mathbf{u}_a^*(N|k)$ . En forma similar al caso de la planificación, los primeros  $N-1$  elementos de las secuencias factibles coinciden con los correspondientes elementos de las secuencias óptimas a partir de la primera predicción, es decir  $\tilde{\mathbf{x}}(j|k+1) = \mathbf{x}^*(j+1|k)$  y  $\tilde{\mathbf{u}}(j|k+1) = \mathbf{u}^*(j+1|k)$  para  $j \in [0, N-1]$ . Entonces, el costo factible en el estado siguiente (5.14) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1); \tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1)) \\ = \sum_{j=1}^{N-1} \ell_t(x^*(j|k) - \mathbf{x}_a^*(j|k), \mathbf{u}^*(j|k) - \mathbf{u}_a^*(j|k)) + \\ \underbrace{\ell_t(\|\tilde{\mathbf{x}}(N-1|k+1) - \mathbf{x}_a^*(N|k), \tilde{\mathbf{u}}(N-1|k+1) - \mathbf{u}_a^*(N|k))}_{=0}. \end{aligned}$$

Evaluando (5.13), para  $j \in [1, \dots, N-1]$ , los términos correspondientes se cancelan entre sí y el costo factible se reduce entonces a

$$\Delta \tilde{V}_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)) = -\ell_t(x(0|k) - \mathbf{x}_a^*(0|k), \mathbf{u}^*(0|k) - \mathbf{u}_a^*(0|k)),$$

que es claramente menor o igual a cero.

### Evolución del costo

Analizando ahora la evolución del costo de seguimiento de curvas como una combinación de los resultados previos, y considerando que la solución factible contempla la anulación de los términos correspondientes a la planificación, tenemos

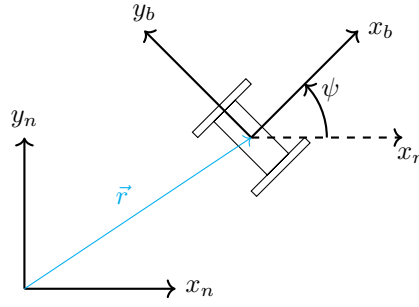
$$\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) = \Delta \tilde{V}_p(x(k), s(k)) + \Delta \tilde{V}_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)).$$

Reemplazando por sus expresiones y notando que  $\ell_t(\cdot)|_{k+N} = 0$ , nos queda

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) &= -\ell_p(\cdot)|_k + \ell_p(\cdot)|_{k+N} - \ell_t(\cdot)|_k + \ell_t(\cdot)|_{k+N} \\ &= -\ell_{\text{pf}}(\cdot)|_k + \ell_{\text{pf}}(\cdot)|_{k+N}. \end{aligned}$$

Luego, debido a la restricción de decrecimiento, tenemos que  $\ell_{\text{pf}}(\cdot)|_k \geq \ell_{\text{pf}}(\cdot)|_{k+N}$ , y, por lo tanto,

$$\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) \leq 0.$$



**Figura 5.2:** Ilustración esquemática del modelo de unicycle.

Recordando que  $\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k))$  es la diferencia de costo para las soluciones óptimas sucesivas, podemos decir que, por optimalidad, tiene que haber una solución cuyo costo sea menor o igual a la solución factible, por lo tanto

$$\Delta V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)) \leq \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) = \Delta \tilde{V}_{\text{p}}(x(k), s(k)) + \Delta \tilde{V}_{\text{t}}(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k)) \leq 0.$$

Dado que  $V_{\text{pf}}^*(\cdot)$  es positivo definido, entonces está acotado por debajo por cero y, como la variación del costo  $\Delta V_{\text{pf}}^*(\cdot)$  es negativa semi-definida,  $V_{\text{pf}}^*(\cdot)$  converge (a un valor no negativo).

Siguiendo con los pasos habituales de MPC para Tracking, se puede concluir que el sistema alcanza la referencia artificial, mientras que ésta simultáneamente converge a la trayectoria óptima local.  $\square$

### 5.3.4. Ejemplo

Para ilustrar algunas de las virtudes de la formulación propuesta, proponemos el seguimiento de curvas con un modelo de vehículo robótico simple conocido como unicycle, que es utilizado frecuentemente como banco de pruebas de distintos controles.

#### Modelo Cinemático de Vehículo 2D

Varios sistemas móviles, sean vehículos terrestres, acuáticos o aéreos, pueden ser modelados con suficiente precisión para ciertas aplicaciones a través del modelo de dos dimensiones conocido como *Dubin's car*. Este modelo cinemático ha sido utilizado, por ejemplo, para el diseño de sistemas de control de botes no tripulados (Zheng et al., 2016), vehículos de tipo unicycle (Matveev et al., 2011), y aún, con ligeras modificaciones relativas a la entrada de velocidad angular, vehículos aéreos no tripulados (Manathara et al., 2011), en particular vehículos de ala fija desplazándose a altitud constante. El modelo del sistema está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

donde  $r_x$  y  $r_y$  indican la posición relativa del vehículo respecto del origen del marco de referencia  $(x_n, y_n)$  y  $\psi$  su orientación relativa, como se indica en la Figura 5.2. Las entradas del sistema son su velocidad de desplazamiento  $v$  en la dirección  $x_b$  y la velocidad angular  $\omega$ .



### Escenario con cambio abrupto de curvas de referencia

Este ejemplo ilustrativo muestra uno de los beneficios más significativos de la formulación que incluye trayectorias artificiales, que es mantener la factibilidad del problema frente a cambios abruptos de la referencia. Para ello, se considerará un escenario de seguimiento de curvas en el que se comienza siguiendo curva

$$y_{\text{ref}}^1(s) = \begin{cases} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \end{cases} = \begin{bmatrix} -2 + 4 \frac{s}{(T_t/2)} \\ 2 + \frac{1}{2} \sin(\frac{6\pi}{T_t} s) \end{bmatrix},$$

y, en un momento dado, se cambia por

$$y_{\text{ref}}^2(s) = \begin{cases} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \end{cases} = \begin{bmatrix} -2 + 4 \frac{s-(T_t/2)}{(T_t/2)} \\ -2 + \frac{1}{2} \sin(\frac{6\pi}{T_t} s) \end{bmatrix},$$

con  $T_t = 60$ , y el cambio de referencia de  $y_{\text{ref}}^1(s)$  a  $y_{\text{ref}}^2(s)$  tiene lugar cuando  $s$  alcanza  $T_t/2$ .

Vale la pena remarcar que, dado que el cambio de referencias produce una discontinuidad en la curva, el seguimiento perfecto se torna imposible para el sistema continuo. Más aún, formulaciones simples, por ejemplo con restricciones terminales de igualdad, perderían la factibilidad debido al cambio de referencia con discontinuidades suficientemente grandes.

### Implementación del controlador

La función de costo se implementará con los siguientes términos:

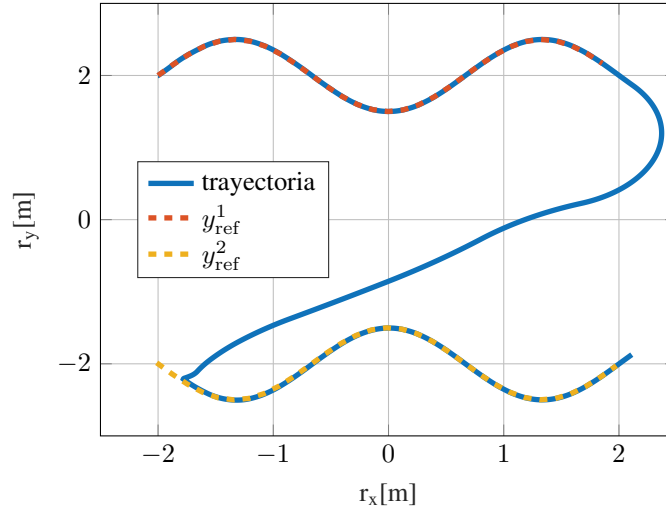
$$\begin{aligned} \ell_t(x_a, u_a, x, u) &= \|x - x_a\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u - u_a\|_{\mathcal{R}}^2, \\ \ell_p(x_a, x_{\text{ref}}, s) &= \|h(x_a) - y_{\text{ref}}(s)\|_{\mathcal{K}}^2, \end{aligned}$$

donde las matrices  $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{K}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$  son positivas definidas. A los fines de regularización de las soluciones, incorporamos los siguientes términos a la función de costo:

$$\begin{aligned} \ell_s(u_a, u_{\text{ref}}, s, w) &= \|u_a - u_{\text{ref}}(s, w)\|_{\mathcal{S}}^2, \\ \ell_w(w, w_{\text{ref}}) &= \|w - w_{\text{ref}}\|_{\mathcal{T}}^2. \end{aligned}$$

### Resultados de la simulación

La configuración inicial del vehículo se elige como  $x_0 = [-2 \ 2 \ 0]^T$ . En la Figura 5.3 se muestra la referencia en líneas punteadas y la trayectoria resultante que recorre el vehículo. Se puede observar que el vehículo sigue fielmente la primera curva de referencia. En ese trayecto, las trayectorias artificiales producen una referencia perfectamente seguible, aún considerando la restricción terminal de igualdad. Una vez que cambia la referencia, las trayectorias artificiales van produciendo trayectorias factibles que convergen a la nueva referencia dada por  $y_{\text{ref}}^2$ . Esto permite que el sistema controlado vaya paulatinamente acercándose a la nueva referencia y retomar el seguimiento de la misma. En la Figura 5.4, se muestra la evolución temporal de cada variable de interés. La referencia se indica con línea verde, discontinua. Se puede observar el seguimiento virtualmente perfecto, previo al cambio, de la primera curva de referencia, seguido por el incremento notable (aunque transitorio) de las entradas, que resultan en una compensación rápida del error introducido por el cambio de referencia. Se destaca también el hecho de que la entrada del



**Figura 5.3:** Trayectoria resultante para el ejemplo de seguimiento de curvas con un unicycle frente al cambio abrupto de referencias.

parámetro  $w$  toma un valor muy bajo justo luego del cambio de referencias, lo que permite realizar el seguimiento en forma más ajustada.

## 5.4. Extensión para Evasión de Obstáculos

El objetivo de esta sección es extender la formulación del controlador (5.7) incorporando la elusión de zonas específicas u evasión de obstáculos.

### 5.4.1. Planteo del Problema

Consideremos un sistema descrito por (5.2), sea  $y_{\text{ref}}(s)$  una curva paramétrica de referencia y sea dado un conjunto  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_{N_{\text{obs}}}\}$ , constituido por  $N_{\text{obs}}$  obstáculos. Se desea diseñar un controlador tal que a cada instante planifique y siga una trayectoria factible para el sistema que aproxime lo mejor posible la curva de referencia, manteniéndose libre de colisiones y que, para  $t \rightarrow \infty$ , el parámetro avance  $s \rightarrow s1$ .

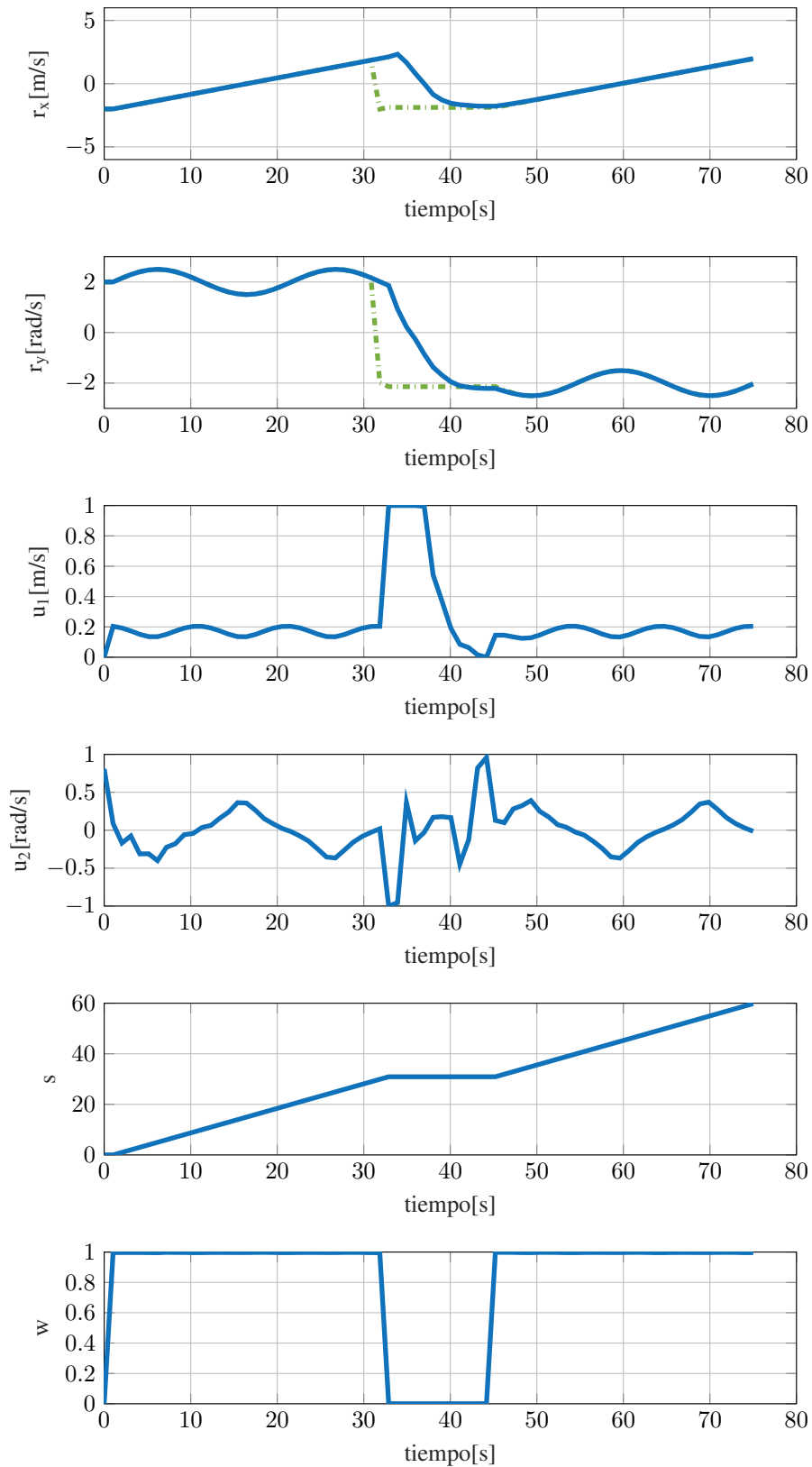
### 5.4.2. Modelado de los obstáculos

Una forma conveniente de representar cada obstáculo  $\mathcal{O}_o$  es a través de restricciones (Hermans et al., 2018). Estas restricciones se pueden describir como el conjunto intersección de  $n_{\text{ineq}}$  desigualdades

$$\mathcal{O}_o = \{y \in \mathbb{R}^p : h_o^i(y) > 0, \quad i = 1, \dots, n_{\text{ineq}}\},$$

donde  $h_o^i(y) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuamente diferenciables con gradientes Lipschitz continuos. La restricción de evasión, i.e.  $y \notin \mathcal{O}_o$  podría escribirse entonces como

$$\exists i \in 1, \dots, n_i : h_o^i(y) \leq 0.$$



**Figura 5.4:** Evolución temporal de los parámetros del sistema (azul) para el ejemplo de seguimiento de curvas con un uniciclo cuya referencia cambia abruptamente.

Esta condición se puede interpretar como que, para que el sistema evada los obstáculos, al menos una de las desigualdades que los definen debe ser violada. Una clase muy general de obstáculos pueden ser descritos en forma aproximada usando esa formulación. Por ejemplo, cualquier conjunto poliédrico puede ser expresado como un conjunto de restricciones afines

$$\mathcal{O}_o = \{y \in \mathbb{R}^p : b_o^i - (A_o^i)^T y > 0, i = 1, \dots, n_i\}, \quad (5.16)$$

lo que es un caso particular del más general, para  $h_o^i(y) = b_o^i - (A_o^i)^T y$ . Más aún, cualquier obstáculo puede ser aproximado por el poliedro más pequeño que lo contenga. La condición de evasión puede ser rescrita como la siguiente restricción de igualdad

$$\Psi_o(y) := \prod_{i=1}^{n_{\text{ineq}}} [h_o^i(y)]_+ = 0, \quad (5.17)$$

donde definimos el operador  $[h_o^i(y)]_+$  como

$$[h_o^i(y)]_+ = \text{máx}(h_o^i(y), 0).$$

### 5.4.3. Formulación del controlador

Esta última expresión permite implementar las restricciones de evasión de obstáculos como restricciones blandas, a través de la inclusión de un término de penalización en el funcional de costo del MPC. De hecho, una forma simple de realizarlo es a través de una penalización cuadrática de la forma

$$\nu(y) = \frac{1}{2} \mu \Psi(y)^2, \quad (5.18)$$

con un factor de penalización  $\mu > 0$ , de tal forma que la satisfacción de la restricción (5.17) corresponde al mínimo del costo  $\Psi(y) = 0$ . Una ventaja adicional de incluir esta penalización para la evasión de obstáculos es que la función  $\Psi$  es continuamente diferenciable.

El funcional de costo relativo a la evasión de obstáculos va a penalizar las violaciones de las restricciones blandas tanto las que ocurran por parte del sistema como por la trayectoria artificial, y se propone la siguiente definición

$$V^{obs}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_a, \mathcal{O}) = \sum_{o=1}^{N_{obs}} \sum_{k=0}^N \nu_o(h(x_a(k))) + \nu_o(h(x)(k)), \quad (5.19)$$

donde  $\mathcal{O}$  indica una colección de  $N_{obs}$  obstáculos, y  $\nu_o$  es la penalización correspondiente al  $o$ -ésimo obstáculo. Incorporando el costo de evasión al funcional de costo (5.6), tenemos

$$V_{oa}(\cdot) = V_{pf}(x, s; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + V^{obs}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_a, \mathcal{O}) \quad (5.20)$$

Con este funcional de costo, las trayectorias artificiales que atraviesen obstáculos tendrán incrementos en sus términos  $\nu(h(x_a))$ , de manera que la optimalidad del costo tenderá a estar dada por trayectorias que los eviten y, más aún, las trayectorias artificiales conformarán una trayectoria factible en relación a la dinámica del sistema. Un requisito a cumplir por las variables artificiales es que pertenezcan a

un invariante del error para el seguimiento de curvas, en particular, pudiendo elegirse trayectorias de equilibrio del error.

Cabe destacar que esta forma de introducir los obstáculos en la formulación no provee garantías estrictas de evasión de obstáculos. Para ello podrían utilizarse formulaciones con restricciones duras o funciones de barrera que, sin embargo, podrían causar problemas de factibilidad recursiva. A pesar de ello, la propuesta es una estrategia efectiva a los fines prácticos, como se mostrará en ejemplos de simulación numérica. La clave para su uso está, como se puede intuir, en la selección de las penalizaciones de cada término del costo. Una regla general para dicha selección es la de evitar, en lo posible, que los diferentes términos se perturben (o compitan) entre sí, la mayor cantidad de tiempo. Esto es, lograr que - por ejemplo - el término de evasión sea despreciable en ausencia de obstáculos y, recíprocamente, el costo de seguimiento sea despreciable en relación al de evasión, cuando se está cerca de un obstáculo.

### Simulación Numérica

Incluimos un ejemplo por simulación numérica para ilustrar sobre la utilidad y los conceptos fundamentales de la formulación presentada.

El escenario consiste en seguimiento de una curva plana con un unicycle (5.15), que se diseña infactible tanto debido a la violación de las restricciones como a la presencia de obstáculos sobre la curva de referencia.

### Implementación

La función de costo con evasión de obstáculos se compondrá de los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\ell_t(x_a, u_a, x, u) &= \|x - x_a\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u - u_a\|_{\mathcal{R}}^2, \\ \ell_p(x_a, y_{\text{ref}}(\cdot), s) &= \|h(x_a) - y_{\text{ref}}(s)\|_{\mathcal{K}}^2,\end{aligned}$$

correspondientes al seguimiento de caminos,

$$V_{\text{obs}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_a, \mathcal{O}) = \sum_{o=1}^{N_{\text{obs}}} \sum_{j=0}^N (\nu_o(h(x_a(j))) + \nu_o(h(x(j)))) ,$$

correspondiente a la evasión de obstáculos y, a los fines de regularización de las soluciones, incorporamos los siguientes términos a la función de costo,

$$\begin{aligned}\ell_s(s, y_{\text{ref}}(\cdot), u_a) &= \|u_a - u_{\text{ref}}(s)\|_{\mathcal{S}}^2, \\ \ell_w(w, w_{\text{ref}}) &= \|w - w_{\text{ref}}\|_{\mathcal{T}}^2,\end{aligned}$$

donde las matrices  $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{K}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$  son positivas definidas.

La función de costo efectiva utilizada en la simulación es

$$V_{\text{sim}}(\cdot) = V_{\text{oa}}(\cdot) + \sum_{i=0}^N \ell_s(s, u_{\text{ref}}, u_a(i)) + \ell_w(w(i), w_{\text{ref}}),$$

y los pesos seleccionados para la simulación son  $\mu = 5 \cdot 10^5$ ,  $\mathcal{Q} = \text{diag}(10, 10, 10)$ ,  $\mathcal{R} = \text{diag}(10, 10)$ ,  $\mathcal{K} = \text{diag}(0,5, 0,5)$ ,  $\mathcal{S} = \text{diag}(0,01, 0,01)$  y  $\mathcal{T} = 10$ , con  $u_{\text{ref}}(s) = \mathbf{0}$  y  $w_{\text{ref}} = 1$

### Escenario

Se eligió una referencia dada por una curva de Lissajous, con forma de símbolo  $\infty$ , dada por  $y_{\text{ref}}(s) = [6 \cos(\frac{2\pi}{T_t} s) \ 3 \sin(\frac{4\pi}{T_t} s)]$ , con  $T_t = 90$  e incluye secciones infactibles por violación del conjunto factible  $\mathcal{X}$ . Además se incluirán obstáculos localizados sobre la referencia, que consisten en dos obstáculos (o zonas de exclusión) circulares de radio  $1[m]$  centradas en  $(0, 0)$  y  $(4, 3)$ , que podrían estar representando obstáculos de una geometría más compleja, que quedan contenidos en ellas. En la Figura 5.5 se puede ver la curva de referencia en línea discontinua verde y los obstáculos en línea discontinua negra.

Notamos que la trayectoria óptima resultante en cada iteración puede solaparse con las zonas de exclusión, debido a que las fronteras de estas últimas no están representadas como funciones de barrera (funciones que se hacen arbitrariamente grandes en la frontera de un conjunto). Esto puede suceder sobre todo, en aquellos instantes en que los valores del parámetro producen puntos de la curva de referencia que atraviesan las zonas de exclusión. Por ello, ampliamos las zonas de exclusión y/o obstáculos con un margen de seguridad alrededor de los obstáculos.

### Resultados de la simulación

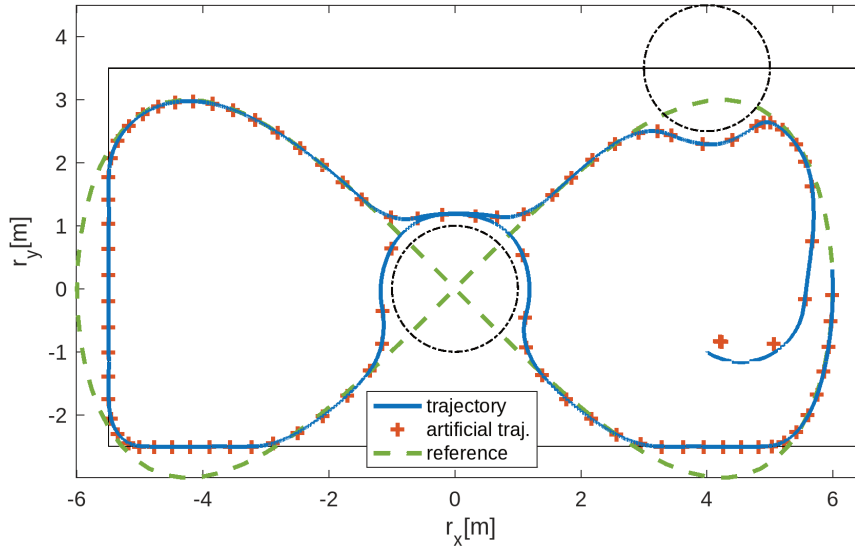
En la Figura 5.5, se puede observar que la trayectoria del vehículo (azul, continua), cuyo estado inicial es  $(4, -1)$ , converge a la referencia (verde, discontinua), manteniendo la factibilidad en todo instante. Las salidas (azul, continuas) prácticamente se superponen a las respectivas referencias en las zonas factibles. Se puede notar también que el vehículo evade ambos obstáculos, mientras que se cumplen las restricciones de estado y entrada para todo tiempo. Esto nos permite conjeturar que las variables artificiales son efectivas para producir referencias que, simultáneamente, son alcanzables y proveen un camino que no atraviesa los obstáculos. La evolución temporal de los estados y las entradas pueden verse en la Figura 5.6. Allí se puede notar que las entradas son suaves en las secciones seguibles de la referencia. Contrastando con ello, acciones de mayor magnitud son necesarias para acercar el sistema a la curva deseada, así como para evadir los obstáculos y luego retornar a la curva. Las variaciones en el parámetro  $w$  indican el efecto de la planificación, variando la velocidad de avance del parámetro para mejorar el seguimiento espacial de la curva.

## 5.5. Seguimiento de Curvas Periódicas: MPC para Tracking

A los fines de establecer una formulación con garantías teóricas más simples y fácilmente verificables en la aplicación, así como disponer de herramientas computacionales para caracterizar los conjuntos donde el problema de optimización sea factible, proponemos enfocarnos en una clase de problemas, que es el seguimiento de curvas periódicas con control predictivo. Esto es de interés práctico dado que, por ejemplo, puede interpretarse como una relajación de la temporización del problema de seguimiento de trayectorias periódicas, presentado en el capítulo precedente. En esta sección desarrollaremos un MPC para Tracking, modificado para realizar el seguimiento de curvas periódicas con planificación en línea.

### 5.5.1. Planteo del problema

Consideraremos una curva de referencia a una función paramétrica periódica  $y_{\text{ref}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ . La periodicidad de la curva implica la existencia de un período  $P$  tal que  $y_{\text{ref}}(s + P) = y_{\text{ref}}(s)$ , para todo



**Figura 5.5:** Trayectorias resultantes de la evasión de obstáculos con el controlador una capa para seguimiento de curvas con planificación en línea.

s. Nuevamente, con la intención de mantener cierta amplitud en el espectro de aplicación, plantearemos condiciones similares al planteo relajado de seguimiento.

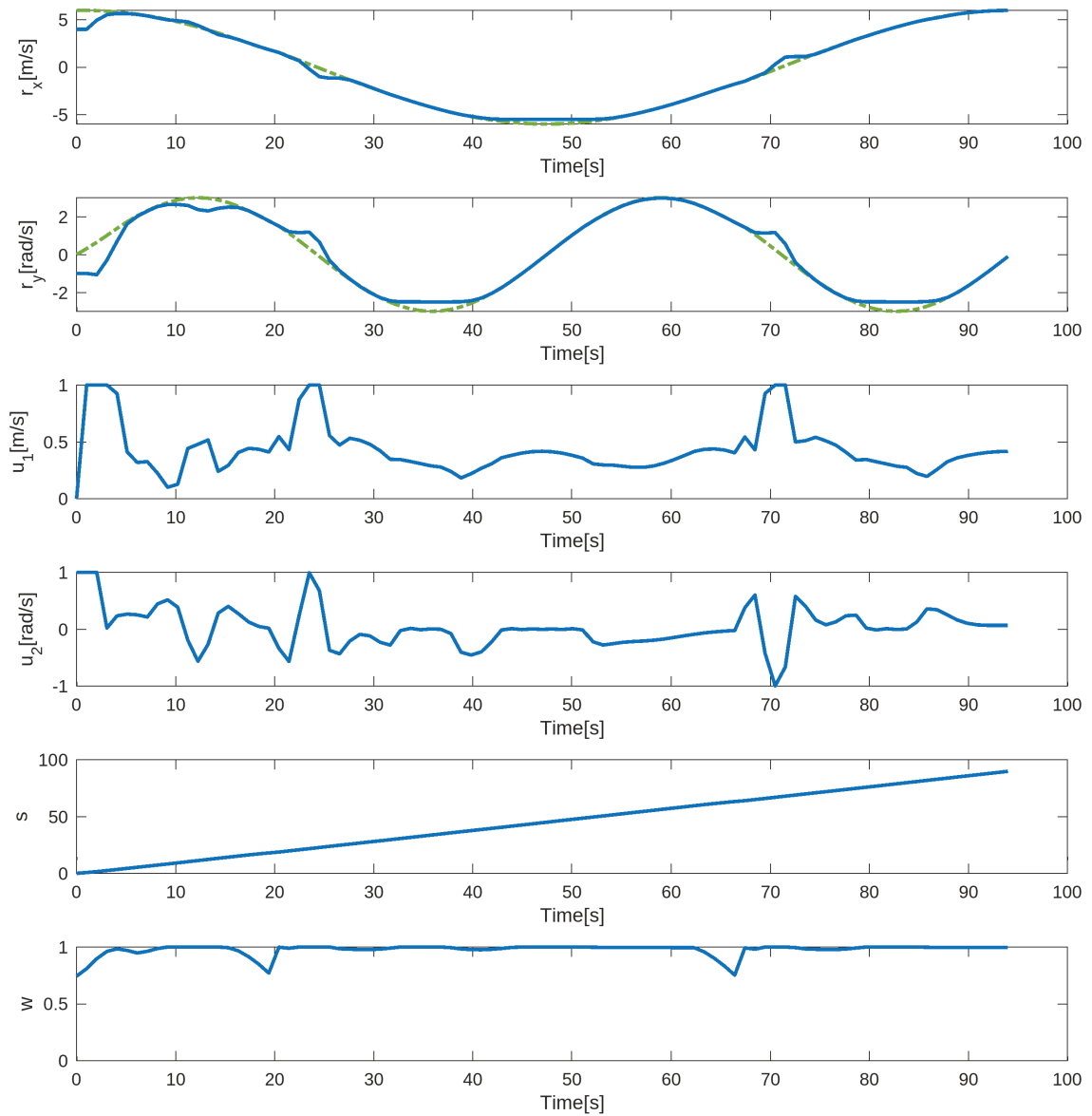
**Problema 7.** Dada como referencia una curva paramétrica periódica  $y_{\text{ref}}(s)$  con período  $P \in \mathbb{R}^+ < \infty$ , el objetivo del seguimiento de curvas consiste en llevar la salida del sistema  $y(k)$  hasta una curva periódica factible para el sistema que localmente minimice el error respecto de la referencia, a la vez que el parámetro sea no decreciente en el tiempo.

Lo que se busca con este planteo es que la salida del sistema converja a una curva que *aproxime lo mejor posible* a la curva de referencia y la recorra indefinidamente. A pesar de cierta ambigüedad que se introduce en el planteo, esto es ventajoso en cuanto habilita la aplicación a curvas de referencia infactibles, por ejemplo, discontinuas, definidas por partes, etc.

### 5.5.2. Formulación del controlador

La estrategia consiste en, por un lado, utilizar una *trayectoria artificial periódica* que facilitará la resolución en línea del problema de planificación de un período completo y, por otra parte, lograr que la salida del sistema converja a la salida correspondiente a la trayectoria artificial. En la formulación se introduce una trayectoria de estados y entradas auxiliares  $(x_a, u_a)$  como variable de decisión. Sobre ella se impondrá una condición de periodicidad, i.e.,  $x_a(T) = x_a(0)$ , cuya salida  $h(x_a, u_a)$  determinará una referencia auxiliar  $y_a$ , consecuentemente, también  $T$ -periódica.

Para el diseño del controlador, se fijará un número de pasos  $T \in \mathbb{N}^+$  que llamaremos horizonte de planificación, que se impone como período a la trayectoria artificial y se espera que el parámetro avance un período completo  $P$  en  $T$  intervalos. Por otra parte, se considerará un horizonte de control  $N$ , más corto que el horizonte de planificación, i.e.,  $T \geq N$ .



**Figura 5.6:** Evolución temporal de las salidas y entradas correspondientes al ejemplo de seguimiento con evasión de obstáculos.



### Planificación de la Referencia

Comenzaremos el desarrollo planteando un problema de optimización esquemático, que luego utilizaremos para resolver el problema de planificación en línea. Este problema deberá producir una parametrización temporal a lo largo de un período de la referencia, así como proveer la trayectoria artificial periódica, factible y alcanzable. Se deseará minimizar el error entre la trayectoria artificial y la curva de referencia, a través de la siguiente función de costo

$$V_p(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^T \ell_p(h(x_a(j)) - y_{\text{ref}}(s(j))),$$

donde  $\ell_p(\cdot)$  es una función positiva definida. Introducimos una formulación esquemática del problema de planificación, a fines puramente expositivos, dada por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}} \quad & V_p(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}) \\ \text{s.a.} \quad & x_a(j+1) = f(x_a(j), u_a(j)), \end{aligned} \quad (5.21a)$$

$$x_a(j) \in \mathcal{X}, u_a(j) \in \mathcal{U}, \quad (5.21b)$$

$$x_a(T) = x_a(0), \quad (5.21c)$$

$$x_a(N) \in \mathcal{R}_N(x), \quad (5.21d)$$

$$s(j+1) = A_s s(j) + B_s w(j), \quad (5.21e)$$

$$w(j) \in \mathcal{W}, \quad (5.21f)$$

$$s(T) = s(0) + P, \quad (5.21g)$$

$$j = 0, \dots, T.$$

Tal como en las formulaciones anteriores, las trayectorias artificiales deberán ser compatibles con el sistema (5.21a) y las restricciones impuestas (5.21b), así como ser periódicas de período  $T$  (5.21c). Para compatibilizar con el problema de seguimiento, en el que por simplicidad se impondrá una restricción terminal de igualdad, se requiere que la variable artificial sea alcanzable en  $N$  pasos desde el estado actual del sistema (5.21d). Se espera además que el parámetro evolucione según un sistema dinámico lineal (5.21e) con entrada  $w$  admisible (5.21f) y que tras  $T$  pasos se repita el ciclo completo de duración  $P$  (5.21g). Este problema, si lo analizáramos por sí solo, proveería trayectorias factibles que minimizan el error entre las salidas para un ciclo completo de la referencia. Esto podría interpretarse como la minimización del error medio entre la trayectoria artificial y una trayectoria obtenida a través de la parametrización temporal de la referencia.

Podemos modificar ligeramente el problema para obtener el costo óptimo de planificación de la curva periódica en  $T$ -pasos. Para ello, resolvemos el mismo problema, pero tomando, ahora, a  $x$  y  $s$  como variables de decisión adicionales

$$V_p^O = \min_{x, s, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}} V_p(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}). \quad (5.22)$$

Cualquier selección de argumentos que minimice este costo contendrá una trayectoria periódica factible  $(\mathbf{x}_a^O, \mathbf{u}_a^O)$  y la correspondiente parametrización temporal de la curva  $(s^O, \mathbf{w}^O)$ .

### Seguimiento

Complementariamente, se deberá realizar el seguimiento de la trayectoria artificial obtenida a través del problema anterior. A ese fin, se plantea un problema de optimización en el cual se penaliza el error entre la predicción y dicha referencia auxiliar. Para ello, definimos el costo de seguimiento  $V_t(\cdot)$  como

$$V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell_t(x(i) - x_a(i), u(i) - u_a(i)),$$

y la formulación del problema está dada por

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$s.a. \quad x(0) = x, \quad (5.23a)$$

$$x(i+1) = f(x(i), u(i)), \quad (5.23b)$$

$$x(i) \in \mathcal{X}, u(i) \in \mathcal{U}, \quad (5.23c)$$

$$x(N) = x_a(N), \quad (5.23d)$$

$$i = 0, \dots, N-1. \quad (5.23e)$$

Este problema no es más que la determinación, para un estado inicial dado (5.23a), de las entradas y su correspondiente trayectoria de estados resultante según la dinámica del sistema (5.23b) que, siendo factible en todo instante (5.23c), siga lo más fehacientemente posible una trayectoria referencia, alcanzándola tras  $N$  intervalos (5.23d).

Para que este problema sea factible, una condición necesaria es que  $x_a(N)$ , el  $N$ -ésimo estado de la trayectoria artificial  $\mathbf{x}_a$ , sea alcanzable desde el estado inicial del sistema  $x$  en  $N$  pasos. Por esto es que debe imponerse la restricción (5.21d) al problema de planificación, para tener un planteo consistente y compatibilizar ambos problemas.

### Formulación Unificada

En lugar de resolver sucesivamente los problemas anteriores, se puede plantear una formulación unificada que, a través de un solo problema de optimización, provea a cada instante la parametrización temporal de la curva de referencia, la planificación de una trayectoria artificial alcanzable y, en simultáneo, las acciones de control óptimas a ser aplicadas al sistema. Proponemos la minimización del costo combinado de planificación y seguimiento definido como

$$V_{\text{pf}}(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = V_p(x, s, y_{\text{ref}}(\cdot); \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}) + V_t(x, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a; \mathbf{u}).$$

y el problema de optimización para el seguimiento de curvas periódicas está dado por

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{s}, \mathbf{w}} V_{\text{pf}}(x, s, y_{\text{ref}}; \mathbf{x}_a, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}, \mathbf{w})$$

$$s.a. \quad x(0) = x, \quad (5.24a)$$

$$x(i+1) = f(x(i), u(i)), \quad (5.24b)$$

$$x(i) \in \mathcal{X}, u(i) \in \mathcal{U}, \quad (5.24c)$$

$$x_a(j+1) = f(x_a(j), u_a(j)), \quad (5.24d)$$

$$x_a(j) \in \mathcal{X}, u_a(j) \in \mathcal{U}, \quad (5.24e)$$

$$x_a(T) = x_a(0), \quad (5.24f)$$

$$x(N) = x_a(N), \quad (5.24g)$$

$$s(j+1) = A_s s(j) + B_s w(j), \quad (5.24h)$$

$$w(j) \in \mathcal{W}, \quad (5.24i)$$

$$s(T) = s(0) + P, \quad (5.24j)$$

$$i = 0, \dots, N-1, \quad (5.24k)$$

$$j = 0, \dots, T. \quad (5.24l)$$

Puede notarse que las restricciones planteadas en los problemas de planificación y seguimiento se replican aquí, relacionadas a las dinámicas y restricciones del sistema aplicadas a las trayectorias predichas y al parámetro de la curva de referencia. En particular, es importante destacar que la formulación unificada no requiere la restricción que involucra al conjunto alcanzable (5.21d), el cual no es simple de caracterizar con generalidad, y queda implícito al utilizar la restricción (5.24g). Esta restricción garantiza la compatibilidad entre los dos subproblemas, lo que constituye una ventaja notable al momento de la aplicación.

Denotaremos con  $u^*(0)$  y  $w^*(0)$  los primeros elementos en las secuencias óptimas y definiremos la ley de realimentación  $\kappa_{\text{pf}}(x, s, y_{\text{ref}})$  que consiste en la aplicación de dichas entradas a los respectivos sistemas, i.e.,

$$\kappa_{\text{pf}}(x(k), s(k), y_{\text{ref}}) := (u^*(k), w^*(k)), \quad (5.25)$$

de modo que, en definitiva, la acción de control de MPC será obtenida como una retroalimentación, a través de la función implícita  $\kappa_{\text{pf}}$ .

**Observación 10.** *El controlador propuesto tiene las siguientes propiedades:*

1. *La región factible no depende de la curva de referencia. De hecho, dicha región se puede definir como el conjunto de estados que son controlables en  $N$  pasos a cualquier trayectoria  $T$ -periódica. Esto constituye una ventaja clave, en contraste con las estrategias de seguimiento de curvas basadas en MPC disponibles en la literatura.*
2. *El problema de optimización tiene garantías de factibilidad recursiva, incluso bajo cambios arbitrarios de la curva de referencia. Esto se deriva también de la propiedad precedente, dado que las restricciones no dependen de la curva de referencia.*
3. *El controlador soporta la provisión de curvas de referencia infactibles. Dicha infactibilidad no produce mayores inconvenientes gracias al uso de las trayectorias artificiales, que constituyen una*

referencia alternativa factible y se incluyen como vínculo entre los problemas de planificación y seguimiento.

4. El costo transitorio se tiene en cuenta tanto en el cálculo del planeamiento como en el costo de seguimiento, a través la referencia artificial, lo que es en general más conveniente que la optimización en múltiples niveles.

### 5.5.3. Análisis del sistema de lazo cerrado

El problema (5.3) combina dos tareas en un único problema de optimización, de modo que el análisis de estabilidad no es directo. El principal resultado teórico de esta sección, relacionado a la factibilidad recursiva y decrecimiento del costo, se resume en el siguiente teorema:

**Teorema 11.** *Si existe una solución al problema de optimización (5.3) para el estado inicial  $x(k)$  y el valor de parámetro inicial  $s(k)$ , entonces*

1. *el problema de optimización es recursivamente factible, converge a un costo mínimo y*
2. *si existe una trayectoria factible  $T$ -periódica  $x_{\text{ref}}$  con cada salida  $y_{\text{ref}}(j)$  sobre la curva de referencia, satisfaciendo las restricciones de avance del parámetro y periodicidad, entonces el sistema converge a dicha trayectoria,*
3. *o, caso contrario, el sistema converge a una trayectoria tal que su costo promedio en el tiempo, definido como*

$$\bar{V}_{\text{pf}} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau} \ell_{\text{pf}}(x(k), s(k), y_{\text{ref}}(\cdot)),$$

*es más bajo que el costo promedio óptimo  $\bar{V}_{\text{pf}}^O$  correspondiente al seguimiento de curvas periódicas con trayectorias  $T$ -periódicas óptimas.*

*Demostración.* La demostración de este teorema sigue pasos típicos de las pruebas de convergencia del MPC: la demostración de la factibilidad recursiva y del decrecimiento del costo en instantes sucesivos. La construcción de una solución factible a partir de la extensión periódica de la trayectoria planificada y de un desplazamiento temporal de la solución óptima (del instante anterior) son pasos estándar en pruebas existentes. Sin embargo, los pasos para lograr esta demostración en este caso no son triviales. A los fines de completitud y claridad en la exposición, los detalles se incluyen a continuación.

#### Factibilidad Recursiva

Para mostrar la factibilidad recursiva, nos valdremos de la solución óptima obtenida en el tiempo  $k$  y la  $T$ -periodicidad de las trayectorias artificiales para construir una solución factible para el instante

sucesor  $k + 1$ . La solución a (5.3) para  $x(k)$  y  $s(k)$  dados, tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^*(k) &= \{x(0|k), \dots, x^*(N-1|k)\}, \\
\mathbf{u}^*(k) &= \{u(0|k), \dots, u^*(N-1|k)\}, \\
\mathbf{x}_a^*(k) &= \{x_a^*(0|k), \dots, x_a^*(T-1|k)\}, \\
\mathbf{u}_a^*(k) &= \{u_a^*(0|k), \dots, u_a^*(T-1|k)\}, \\
\mathbf{s}^*(k) &= \{s^*(0|k), \dots, s^*(T-1|k)\}, \\
\mathbf{w}^*(k) &= \{w^*(0|k), \dots, w^*(T-1|k)\}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Se asume que el estado se propaga siguiendo el modelo nominal con el lazo cerrado por (5.25), de modo que en el instante sucesor el estado y el parámetro toman los valores predichos, i.e  $x(k+1) = x^*(1|k)$ ,  $s(k+1) = s^*(1|k)$ . En el instante  $k+1$ , aprovechando la periodicidad de la secuencia  $\mathbf{x}_a^*(k)$ , construimos una solución candidata para (5.3) como sigue:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \{x^*(1|k), \dots, x^*(N-1|k), x_a^*(N|k)\}, \\
\tilde{\mathbf{u}}(k+1) &= \{u^*(1|k), \dots, u^*(N-1|k), u_a^*(N|k)\}, \\
\tilde{\mathbf{x}}_a(k+1) &= \{x_a^*(1|k), \dots, x_a^*(T-1|k), x_a^*(T|k)\}, \\
\tilde{\mathbf{u}}_a(k+1) &= \{u_a^*(1|k), \dots, u_a^*(T-1|k), u_a^*(T|k)\}, \\
\tilde{\mathbf{s}}(k+1) &= \{s^*(1|k), \dots, s^*(T-1|k), s^*(0|k) + P\}, \\
\tilde{\mathbf{w}}(k+1) &= \{w^*(1|k), \dots, w^*(T-1|k), w^*(0|k)\}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Estas trayectorias factibles comienzan en la condición predicha para el instante  $k+1$  respectivo, y evolucionan exactamente según la predicción hasta el último valor predicho. El trabajo consiste en asignar el último valor a cada secuencia de la nueva solución. Para las variables artificiales, utilizaremos su periodicidad, de modo que se asignarán  $\tilde{x}_a(T-1|k+1) = x_a^*(0|k)$  y  $\tilde{u}_a(T-1|k+1) = u_a^*(0|k)$ . Así, las respectivas secuencias factibles estarán dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_a(k+1) &= \{x_a^*(1|k), \dots, x_a^*(T-1|k), x_a^*(0|k)\}, \\
\tilde{\mathbf{u}}_a(k+1) &= \{u_a^*(1|k), \dots, u_a^*(T-1|k), u_a^*(0|k)\}.
\end{aligned}$$

Análogamente, la secuencia de entrada del parámetro se extiende con  $\tilde{w}(T-1|k+1) = w^*(0|k)$ , quedando

$$\tilde{\mathbf{w}}(k+1) = \{w^*(1|k), \dots, w^*(T-1|k), w^*(0|k)\}.$$

Se puede notar que gracias a la restricción terminal de igualdad,  $x(N) = x_a(N)$ , la secuencia de estados predichos puede evolucionar exactamente siguiendo la trayectoria artificial, en forma indefinida, o sea,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \{x^*(1|k), \dots, x_a^*(N+1|k)\}, \\
\tilde{\mathbf{u}}(k+1) &= \{u^*(1|k), \dots, u_a^*(N+1|k)\}.
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la factibilidad recursiva del problema de optimización.

**Observación 11.** *La referencia no aparece en el análisis de la factibilidad recursiva, de modo que el problema de optimización mantiene esta propiedad bajo cualquier cambio de referencias.*

### Costo del lazo cerrado

Estudiaremos ahora la diferencia del costo óptimo en tiempos sucesivos para el sistema de lazo cerrado. Vamos a utilizar una notación resumida en las que el costo del seguimiento óptimo se indicará como

$$V_t^*(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)) = V_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k); \mathbf{x}^*(k), \mathbf{u}^*(k)),$$

el costo de seguimiento factible se denotará por

$$\tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1)) = V_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1); \tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1)),$$

el costo de planificación óptimo será

$$V_p^*(s(k)) = V_p(s(k); \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k), \mathbf{s}^*(k), \mathbf{w}^*(k))$$

mientras que el costo de planificación factible tendrá la forma

$$\tilde{V}_p(s^*(k+1)) = V_p(s^*(k+1); \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1), \tilde{\mathbf{w}}(k+1)).$$

Recordamos que el costo de seguimiento de curvas está dado por la suma de los costos de planificación y de seguimiento, por lo que podemos decir que la variación del primero es la suma de las variaciones de los últimos, i.e.,

$$\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) = \Delta \tilde{V}_t(x, \mathbf{x}_a^*, \mathbf{u}_a^*) + \Delta \tilde{V}_p(s) \quad (5.28)$$

donde la diferencia del costo de seguimiento factible está dada por

$$\Delta \tilde{V}_t(k) = \tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1)) - V_t^*(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k))$$

y la diferencia de costo de planificación factible es

$$\Delta \tilde{V}_p(k) = \tilde{V}_p(s^*(k+1), \tilde{\mathbf{w}}(k+1)) - V_p^*(s(k), \mathbf{w}).$$

Denotaremos la diferencia óptima del costo de seguimiento de curvas como

$$\Delta V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)) = V_{\text{pf}}^*(x^*(k+1), s^*(k+1)) - V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)).$$

Considerando una trayectoria factible podemos establecer una cota superior a esa diferencia dada por

$$\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) = \tilde{V}_{\text{pf}}(\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1)) - V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)),$$

con el costo factible en el instante  $k+1$  está dado por

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\text{pf}}(x^*(k+1), s^*(k+1)) = \\ V_{\text{pf}}(\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1); \tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{u}}(k+1), \tilde{\mathbf{x}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{u}}_a(k+1), \tilde{\mathbf{s}}(k+1), \tilde{\mathbf{w}}(k+1)), \end{aligned}$$

con  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}_a, \tilde{\mathbf{u}}_a, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{w}})$  definidas en (5.27).

El planteo de los costos de planificación y seguimiento como componentes independientes del costo

de seguimiento de curvas nos permitirá analizar la evolución de este último analizando en forma separada los costos de seguimiento y planificación de (5.28).

### Diferencia de Costo: término de planificación

En primer lugar estudiaremos la evolución del costo correspondiente a la planificación. Para simplificar la notación, utilizaremos la siguiente tupla

$$z(i|k) := (h(x_a(i|k)) - y_{\text{ref}}(s(i|k)), u_a(i|k), w(i|k))$$

que nos permitirá representar el costo de etapa de la planificación como  $\ell_p(z)$ . La tupla óptima  $z^*(i|k)$  y la factible  $\tilde{z}(i|k)$  corresponden a los elementos  $i$ -ésimos de (5.26) y (5.27), respectivamente. El costo óptimo en el tiempo  $k$  está dado por

$$V_p^*(s(k)) = \sum_{i=0}^{T-1} \ell_p(z^*(i|k)), \quad (5.29)$$

mientras que el término factible en  $k + 1$  será

$$\tilde{V}_p(s^*(k+1)) = \sum_{i=0}^{T-1} \ell_p(\tilde{z}(i|k+1)).$$

Desarrollando la secuencia factible término a término, notamos que los primeros  $T - 1$  elementos  $\tilde{z}(i|k+1)$  correspondientes  $i = 0, 1, \dots, T - 2$  son iguales a aquellos de la secuencia óptima  $z^*(i+1|k)$ . Más aún, por la periodicidad de dichas secuencias, tenemos que  $\ell_p(\tilde{z}(T-1|k+1)) = \ell_p(z^*(0|k+1))$ , de manera que el costo óptimo y el costo factible son iguales. Esto hace que, por la construcción de la solución factible, los términos relativos a la planificación se cancelen en la ecuación de la evolución del costo, o sea,  $\Delta \tilde{V}_p(x(k), s(k)) = 0$ .

### Diferencia de costo: término de seguimiento

El componente del costo relacionado al seguimiento puede escribirse como

$$\Delta \tilde{V}_t(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k)) = \tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1)) - V_t^*(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k)), \quad (5.30)$$

donde el costo óptimo en el instante  $k$ ,  $V_t^*(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k))$ , tiene la forma

$$V_t^*(x(k), x_a^*(k), u_a^*(k); x^*(k), u^*(k)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_t(x^*(j|k) - x_a^*(j|k), u^*(j|k) - u_a^*(j|k)),$$

y el costo factible en el instante siguiente está dado por

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(x^*(k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1); \tilde{x}(k+1), \tilde{u}(k+1)) = \\ \sum_{j=0}^{N-1} \ell_t(\tilde{x}(j|k+1) - \tilde{x}_a(j|k+1), \tilde{u}(j|k+1) - \tilde{u}_a(j|k+1)). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Las trayectorias artificial y factible coinciden exactamente en el instante  $N + 1$ , esto es,  $\tilde{x}(N - 1|k + 1) = x_a^*(N|k)$  y  $\tilde{u}(N - 1|k + 1) = u_a^*(N|k)$ , entonces

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_t(x^*(k + 1), \tilde{x}_a(k + 1), \tilde{u}_a(k + 1); \tilde{x}(k + 1), \tilde{u}(k + 1)) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \ell_t(x^*(j|k) - x_a^*(j|k), u^*(j|k) - u_a^*(j|k)) + \ell_t(\tilde{x}(N-1|k+1) - x_a^*(N|k), \tilde{u}(N-1|k+1) - u_a^*(N|k)). \end{aligned}$$

Por otra parte, notamos que los términos desde 1 hasta  $N$  de la secuencia factible son los mismos que los de la secuencia óptima, entonces evaluando (5.30), se cancelan los términos y el costo factible queda

$$\Delta \tilde{V}_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)) = -\ell_t(x(0|k) - x_a^*(0|k), u^*(0|k) - u_a^*(0|k)),$$

que es siempre menor o igual a cero.

### Diferencia de Costo: Seguimiento de Curvas

Visto el análisis de los costos de seguimiento y planificación precedentes, se establece que la diferencia entre los costos óptimo y factible del seguimiento de curvas se reduce a

$$\Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) = \Delta \tilde{V}_t(x(k), \mathbf{x}_a^*(k), \mathbf{u}_a^*(k)) \leq 0.$$

Dado que esta diferencia de costo fue calculada para una secuencia factible, por optimalidad debe existir una solución alternativa tal que su costo sea menor o igual al factible, por lo que

$$\Delta V_{\text{pf}}^*(x(k), s(k)) \leq \Delta \tilde{V}_{\text{pf}}(x(k), s(k)) \leq 0.$$

Finalmente, considerando que  $V_{\text{pf}}^*(\cdot)$  es definido positivo, que está acotado por debajo por cero y que  $\Delta V_{\text{pf}}^*$  es semi-definido negativa, podemos establecer que  $V_{\text{pf}}^*(\cdot)$  converge a un valor no-negativo constante (mínimo), concluyendo la prueba del inciso 1) del Teorema. La afirmación del inciso 2) puede ser demostrada, dado que se asume controlabilidad del sistema y los supuestos habituales para el MPC no lineal, siguiendo los pasos de la prueba en Limon et al. (2018), haciendo los cambios mínimos necesarios. Con respecto al inciso 3), sabemos que el costo  $\bar{V}_{\text{pf}}(\cdot)$  no diverge, como resultado del inciso 1). Más aún, se muestra en (Angeli et al., 2012, Teorema 4), que el desempeño asintótico promedio no es peor que el promedio óptimo que el de cualquier trayectoria  $T$ -periódica. Este resultado puede ser extendido al caso actual como  $\bar{V}_{\text{pf}}(\cdot) \leq \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \ell_{\text{pf}}(x(k), s(k), y_{\text{ref}}(\cdot))$ , que es lo que se afirma en dicho inciso.  $\square$

#### 5.5.4. Ejemplo: Sistema de bandeja y bola

Para ilustrar las características del problema de seguimiento de curvas, tomaremos un ejemplo de seguimiento de trayectorias (Limon et al., 2014; Köhler et al., 2020) y lo extenderemos para que se adapte al contexto de seguimiento de curvas.



### Modelo del Sistema de Bandeja y bola

El sistema esta compuesto por una bandeja que puede rotar alrededor de dos ejes perpendiculares (a saber, los ejes  $x$ - e  $y$ -) sobre el cual rueda libremente una bola (Spacek et al., 2017). El objetivo es controlar la posición de la bola. Las entradas de control son las aceleraciones angulares de la rotación de la bandeja, que se suelen producir a través de un conjunto de servomotores. La medición de la posición de la bola  $(x, y)$  se asume disponible en todo instante, posiblemente a través de sensores adecuados, y constituirá la salida del sistema. Las ecuaciones no lineales que describen el sistema dinámico están dadas por:

$$\begin{aligned} (m + \frac{I_b}{r^2})\ddot{x} - m(\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + mg \sin \alpha &= 0, \\ (m + \frac{I_b}{r^2})\ddot{y} - m(\dot{\alpha}\dot{\beta}x + \dot{\beta}^2y) + mg \sin \beta &= 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde  $m$ ,  $r$  e  $I_b$  son, respectivamente, la masa, el radio y momento de inercia de la bola,  $g$  indica la aceleración gravitacional,  $\alpha$ ,  $\beta$  son los ángulos de inclinación de la bandeja respecto de los ejes  $x$  y  $y$ .

Se considerará el estado  $x \in \mathbb{R}^8$ , definido como

$$x^T = [z_1, \dot{z}_1, \theta_1, \dot{\theta}_1, z_2, \dot{z}_2, \theta_2, \dot{\theta}_2], \quad (5.33)$$

donde  $(z_1, z_2)$  representa la posición de la bola,  $(\theta_1, \theta_2)$  los ángulos que forma la bandeja respecto de los ejes  $x$  y  $y$ . Las entradas serán  $u_1 = \ddot{\theta}_1$  y  $u_2 = \ddot{\theta}_2$ . La aceleración traslacional estará dada por  $\ddot{z}_1 = K_b\theta_1$  y  $\ddot{z}_2 = K_b\theta_2$ . Se considerarán cotas en la posición dadas por  $|z|_i \leq 0,06cm$ , en los ángulos  $|\theta|_i \leq \frac{\pi}{2}rad$  y en la aceleración angular  $|\ddot{\theta}| \leq 110\frac{rad}{s^2}$ . La constante  $K_b$  se aproxima como  $K_b = \frac{5}{7}g$ .

### Curvas de referencia

En un primer momento, la referencia esta dada por un rectángulo cuyas esquinas están dadas por  $(0,02, 0,02)$ ,  $(0,06, 0,02)$ ,  $(0,06, 0,08)$ ,  $(0,02, 0,08)$ . Se puede notar que partes de la curva violan las restricciones. Despues de completar tres ciclos, la referencia se cambia por una circunferencia centrada en  $(-0,04, -0,04)$ , con radio  $1[cm]$ .

### Implementación numérica

Las simulaciones se realizan con un sistema discretizado con un tiempo de muestreo  $T_s = 0,05s$  y el modelo de predicción es lineal, calculado a través de una linealización alrededor del origen. Se puede notar que el modelo linealizado no depende del equilibrio seleccionado para linealizar el sistema. El software utilizado es Matlab 2016b y el paquete de optimización Casadi.

### Configuración del controlador

Se seleccionaron horizontes de predicción  $N = 5$  y de planificación  $T = 28$ . El cambio abrupto de referencia se incluye para ejemplificar la garantía de factibilidad recursiva en tales casos. El costo se implementa como penalizaciones cuadráticas ponderadas.

## Resultados

Las curvas de referencia así como las trayectorias de la bola resultantes se muestran en la Figura 5.7. En ella se indican la salida (azul), y las referencias correspondientes al rectángulo (amarillo) y el círculo (naranja). En líneas negras se indica el espacio factible  $\mathcal{X}$ .

Por otra parte, la evolución temporal de la salida del sistema de seguimiento de curvas se puede observar en la Figura 5.8. Se grafican las trayectorias de salidas (azul), y las referencias (rectangular, amarillo; círculo, naranja). Se puede observar como se “comprime” temporalmente la sección infactible de la referencia, minimizando el error de seguimiento acumulado en cada período.

Aquí es notable el efecto de la variación de la velocidad del parámetro generando una trayectoria que esta optimizada para el seguimiento de la curva. En particular, se puede notar que las secciones infactibles de la referencia tienen una mayor velocidad del parámetro, que condice con asignar el menor tiempo posible a la sección infactible de la referencia.

Finalmente, en la Figura 5.9 se muestra evaluación de la función de costo. Es notable que la velocidad del parámetro (arriba) varía a lo largo de la simulación, que se hace más alta en las zonas infactibles de la referencia rectangular y que converge a un valor constante luego del cambio a la referencia circular indica el grado de libertad adicional incorporado al problema. El funcional de costo (abajo) converge a un valor no nulo para la referencia infactible. El valor constante será el óptimo del costo para la referencia rectangular que tiene una sección infactible. El costo sube previsiblemente en el instante del cambio de referencia, pero va a converger a cero dado que la referencia es perfectamente factible.

### 5.5.5. Ejemplo: Seguimiento de curvas periódicas con un unicycle

Se ejemplifica el funcionamiento del controlador sobre un sistema de tipo unicycle, siguiendo una curva de referencia y observando su comportamiento para diferentes estados iniciales.

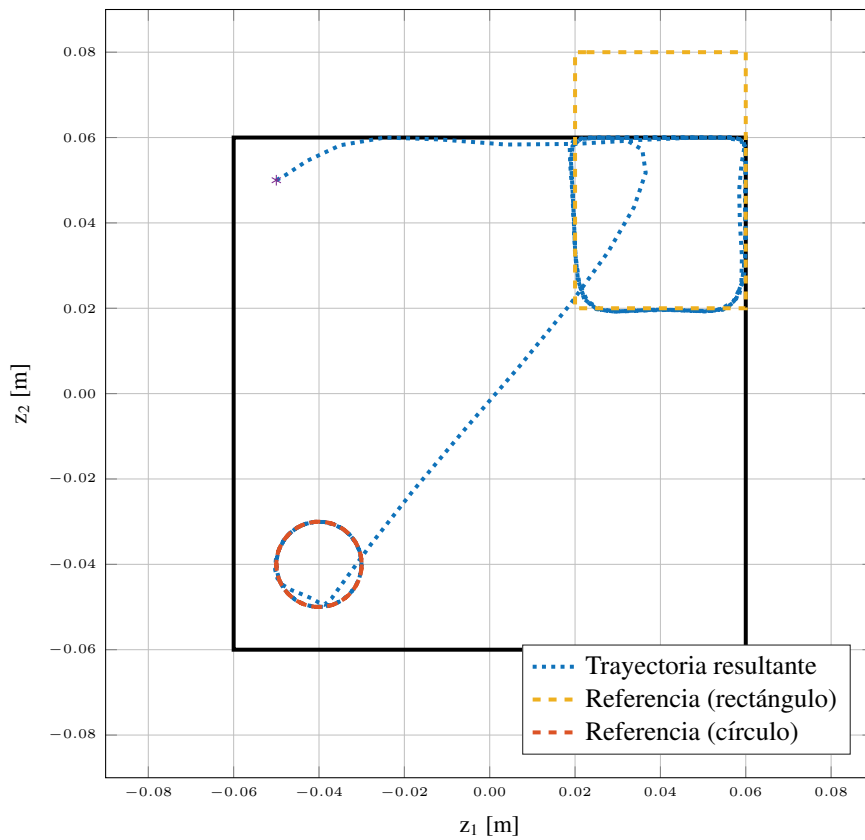
#### Curva de referencia

Se selecciona como referencia una curva con forma de  $\infty$  que es de uso frecuente para la exposición de controladores sobre estos modelos (Yu et al., 2015), dada por

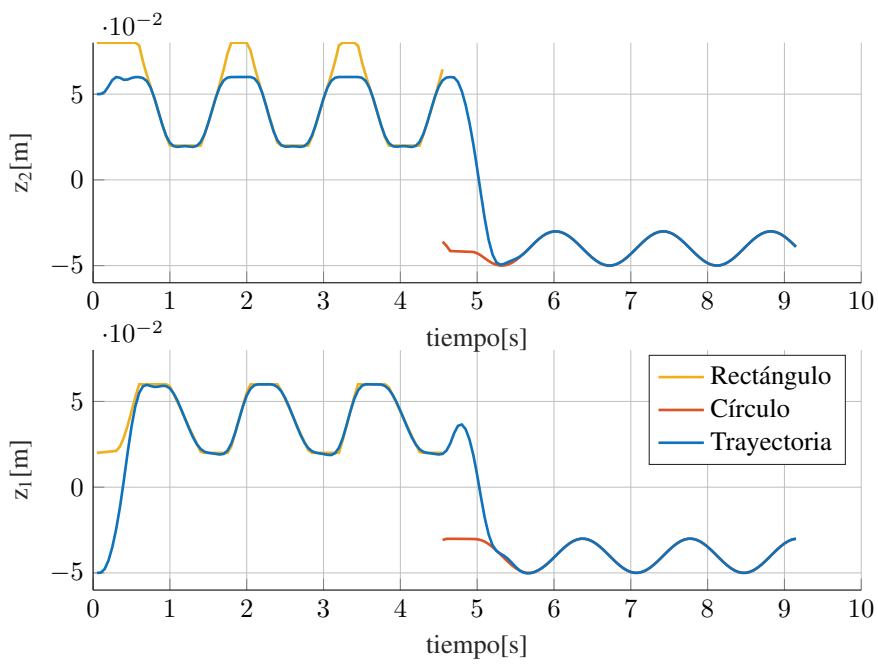
$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,8 \cos(2\pi s) \\ 1,2 \sin(4\pi s) \end{bmatrix}.$$

#### Resultados de la simulación

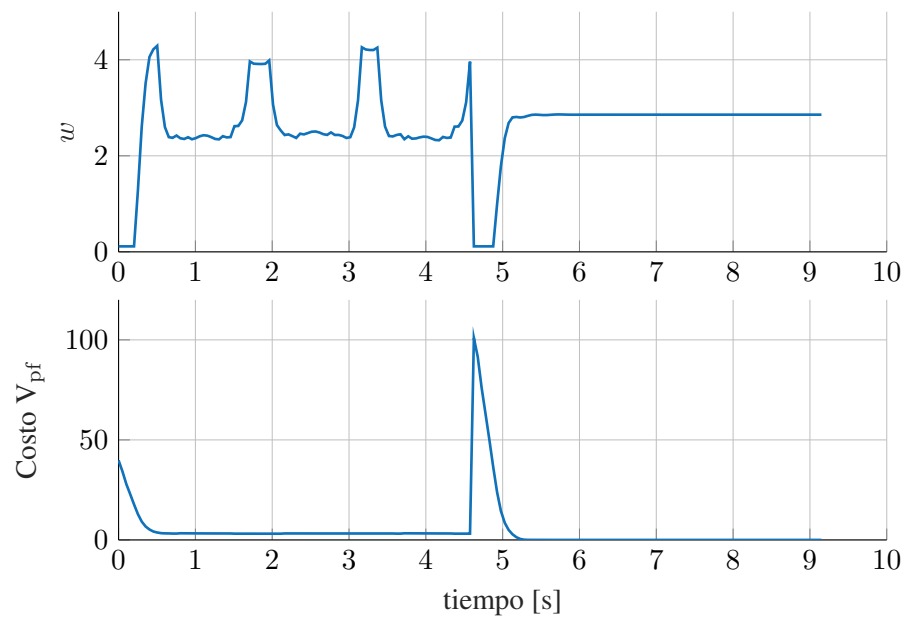
Los resultados de la simulación para tres puntos iniciales diferentes se muestran en la Figura 5.10, donde se puede observar que el sistema converge rápidamente a la curva en todos los casos. Es destacable que se acerca rápidamente a la curva en puntos cercanos al correspondiente al estado inicial del sistema, y luego realiza el seguimiento de la curva sin error evidente. Además, notamos que el controlador obtiene distintos puntos iniciales para la referencia de acuerdo al estado inicial del sistema, produciendo una rápida convergencia a la curva.



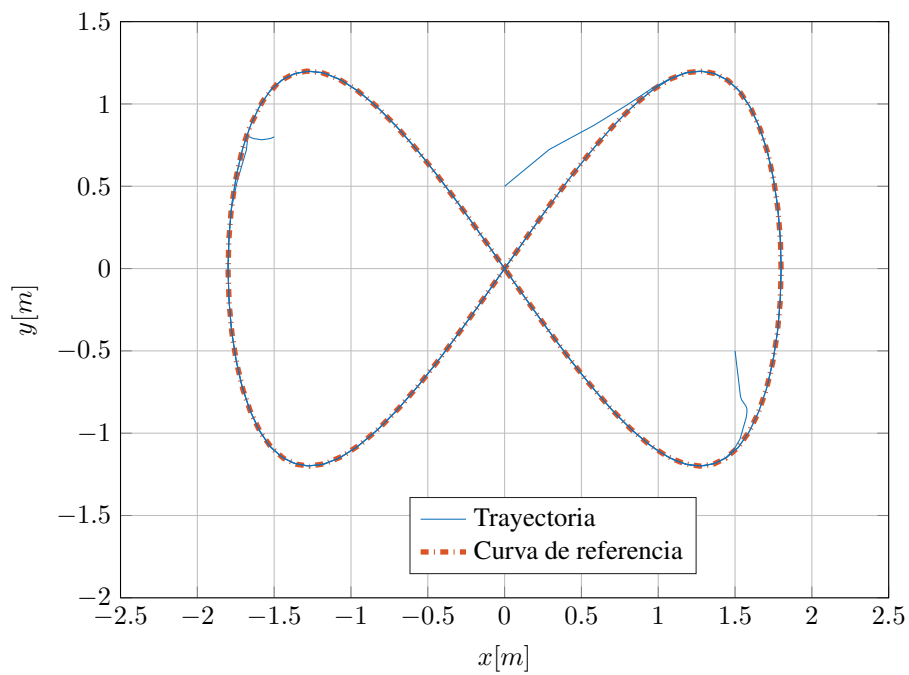
**Figura 5.7:** Trayectoria resultante del seguimiento de curvas con el controlador propuesto.



**Figura 5.8:** Evolución temporal de las trayectorias de salidas y las referencias.



**Figura 5.9:** Evolución temporal de la velocidad del parámetro y función de costo.



**Figura 5.10:** Trayectorias de salida resultantes para el seguimiento de curvas con un vehículo de tipo uniciclo.

## Capítulo 6

# MPC para Seguimiento de Zonas: Sistemas impulsionales

En este capítulo estudiaremos una formulación para seguimiento de zonas o regiones de trabajo con sistemas impulsionales. Para ello se extenderán las formulaciones de MPC para Seguimiento discutidas en los capítulos anteriores utilizando órbitas, i.e., trayectorias periódicas de tiempo continuo generadas por los impulsos (discontinuidades), en el lugar que correspondía a los equilibrios. Propondremos una forma de caracterizar los conjuntos de órbitas con respecto a regiones de trabajo deseadas y utilizaremos esa descripción para proponer la formulación de un controlador MPC.

### 6.1. Introducción

En las últimas décadas, los sistemas de control impulsionales han atraído la atención en la comunidad académica. Estos sistemas no pueden ser descritos adecuadamente por dinámicas puramente continuas o discretas excluyentemente, sino por una combinación de ellas, conformando un caso particular dentro de la clase de sistemas híbridos (Goebel et al., 2012).

La evolución del estado de los sistemas controlados por impulsos se representa como un *flujo*, i.e., una dinámica de tiempo continuo, sobre el que se producen *saltos* en ciertos instantes, es decir, se producen cambios instantáneos (discontinuidades) en el estado, que surgen como consecuencia de la aplicación de entradas de control impulsivas. Innumerables situaciones se pueden describir adecuadamente con estos modelos; para ejemplificar, contextos tan diversos como tratamiento de enfermedades con pastillas (Rivadeneira et al., 2019; Rivadeneira and González, 2018; Rivadeneira et al., 2017) o inyecciones (Abuin et al., 2020; González et al., 2020), o el control de vehículos aeroespaciales (Arantes Gilz et al., 2019; Louembet et al., 2019) se suelen tratar como tales.

En la literatura, los sistemas impulsionales se han estudiado desde la perspectiva de la unicidad y existencia de soluciones, así como desde el punto de vista de la estabilidad, nociones que han sido formalmente descritas, por ejemplo, en Bainov and Simeonov (1995); Haddad et al. (2006).

El caso de sistemas lineales impulsivos resulta atractivo, no solo por su importancia en diversos campos de aplicación, sino también desde el punto de vista teórico. De hecho, los sistemas lineales controlados por impulsos presentan ciertas particularidades respecto del paradigma clásico de control lineal. Esto implica la necesidad de adaptar algunos conceptos fundamentales, tales como equilibrio y estabilidad. El objetivo de control consiste en mantener el sistema a lazo cerrado en una región objetivo (definida por el

propio problema) en la cual la operación es segura y en la que generalmente no se encuentra contenido el origen. Al quedar el origen excluido de los objetivos, y existir oscilaciones producidas por la naturaleza impulsiva del sistema, es imposible estabilizar el sistema en un punto (Sopasakis et al., 2015): el concepto de equilibrio tradicional, ya no tiene sentido. Teniendo esto en cuenta, se propusieron nuevas definiciones de equilibrio, invariancia y estabilidad, útiles a la hora de diseñar el controlador MPC.

En base a la definición de conjuntos de equilibrio periódicos de control, i.e., puntos tales que producen una órbita periódica asociada a una entrada de control, se han propuesto controladores MPC, por ejemplo en Rivadeneira et al. (2015), con el objetivo de resolver el problema de control por zonas (González et al., 2009; Gonzalez and Odloak, 2009) sobre un sistema controlado por impulsos. Posteriormente, dicha estrategia fue extendida al conjunto de equilibrios periódicos cuya órbita queda contenida en la zona objetivo (Rivadeneira and González, 2018), definiéndose claramente el conjunto de equilibrio periódico, además de incluir una demostración de la atractividad de dicho conjunto.

Otras estrategias utilizan una definición de invariancia a partir de dos conjuntos, en la que uno de estos conjuntos es de equilibrio o invariante con respecto al otro, que contiene las trayectorias de respuesta libre entre los impulsos. Sobre esta estrategia se ha propuesto la utilización de conjuntos invariantes politópicos que aproximan el máximo conjunto invariante, aunque permanece abierto el problema de la computación de dicho conjunto para el caso general (Sopasakis et al., 2015). Dichos conjuntos invariantes no son formalmente descritos, sino que se presentan técnicas para su aproximación. Por otra parte, esta definición de dos conjuntos permite establecer nociones de convergencia impulsiva de lazo cerrado y estabilidad (Pereira et al., 2015a).

Una contribución de este estudio será la presentación de una metodología para caracterizar y para calcular el conjunto de equilibrio contenido en una zona dada. Para ello, describiremos el flujo (o evolución libre) del sistema convenientemente como un polinomio univariado a través de un cambio de variable. Luego, plantearemos un sistema de desigualdades lineales matriciales (LMI, del inglés Linear Matrix Inequalities) sobre los estados en cada tiempo de control. Estas condiciones se basan en el teorema de Lucacs-Markov (Nesterov, 2000) y la metodología esta inspirada en el trabajo Henrion et al. (2005). Se muestra la eficacia de dicha representación, planteando un novedoso MPC por zonas, siguiendo la estructura propuesta en Ferramosca et al. (2010); Gonzalez and Odloak (2009), que hace uso explícito de esta caracterización de los conjuntos de equilibrio periódico. Estos resultados se encuentran fueron publicados en Sanchez et al. (2023).

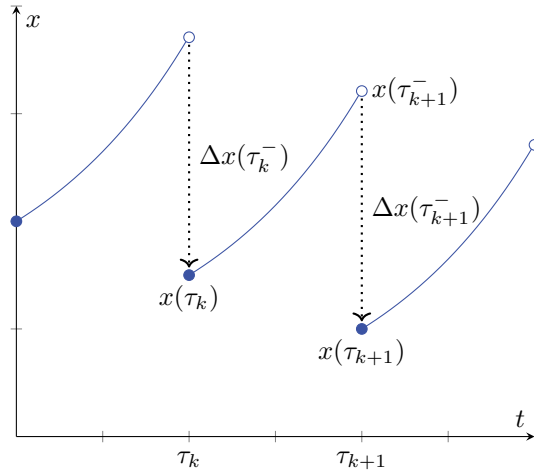
## 6.2. Sistema controlado por impulsos

Sea un sistema lineal controlado por impulsos (ICS, del inglés, Impusively Controlled System) definido por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) = x(\tau_k^-) + Bu(\tau_k), & k \in \mathbb{N}, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  denota el estado,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  las entradas e  $y \in \mathbb{R}^p$  la salida,  $\tau_k = kT_s$  para un intervalo de control  $T_s > 0$  y  $\tau_k^-$  indica el instante inmediatamente anterior a  $\tau_k$ , i.e.,  $x(\tau_k^-) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} x(\tau_k - \delta)$ .

El sistema 6.1 es un sistema híbrido, en cuanto a que su dinámica se describe por una combinación de



**Figura 6.1:** Ilustración de una solución para un sistema impulsivo.

dinámicas de tiempo continuo y discreto. En particular, el estado del sistema se propaga (fluye) siguiendo las dinámicas de tiempo continuo durante el intervalo  $[\tau_k, \tau_{k+1})$  mientras que, en el instante  $\tau_k^-$ , la entrada impulsiva produce una discontinuidad de primer orden en el estado, que denominaremos “salto”. Una ilustración de la solución de sistemas del tipo ICS se puede ver en la Figura 6.1, donde las líneas continuas indican la evolución libre en tiempo continuo o *flujo*, mientras que las flechas punteadas indican las discontinuidades o *saltos*. Los puntos marcados con círculos rellenos indican el estado inmediatamente posterior al salto.

Para todo  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , la solución de 6.1 está dada por  $x(t) = e^{At}x(\tau_k)$ , y  $x(\tau_{k+1}) = x(\tau_{k+1}^-) + Bu(\tau_k)$ . Dado que  $x(\tau_{k+1}^-) = e^{AT}x(\tau_k)$ , el flujo y el salto producido por la entrada quedan descritos por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(\tau_k), & t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \\ x(\tau_{k+1}) &= e^{AT}x(\tau_k) + Bu(\tau_k), \end{aligned} \quad (6.2)$$

respectivamente.

**Observación 12.** *El modelo presentado en (6.1) tiene la particularidad de incluir el efecto de la entrada al final de la respuesta libre, la que se puede expresar como  $e^{At}x$ . Existen otras representaciones de los sistemas impulsionales (Rivadeneira et al., 2018; Sopasakis et al., 2015), que habitualmente consideran el efecto del impulso previo a la respuesta libre, por lo que queda combinada con esta, tomando la forma  $e^{At}(x + Bu)$ . Por ello, los análisis y métodos que desarrollaremos a continuación no se pueden aplicar directamente a sistemas descritos de esa manera.*

Para caracterizar adecuadamente los conjuntos de equilibrio e invariantes, introducimos las siguientes definiciones relativas a la evolución libre del sistema.

**Definición 24** (Conjunto Admisibles). *Dado el sistema (6.1) y un conjunto no vacío  $\mathbb{Y} \subset \mathcal{X}$ , el conjunto admisible de  $\mathbb{Y}$  está dado por*

$$\mathbb{Y}_{\mathcal{A}} := \{x \in \mathbb{Y} : e^{At}x \in \mathbb{Y}, t \in [0, T_s]\}. \quad (6.3)$$

El conjunto  $\mathbb{Y}_{\mathcal{A}}$  es el conjunto de estados iniciales tales que sus respuestas libres, que son

independientes de la entrada, permanecen en el conjunto  $\mathbb{Y}$  durante al menos un intervalo de duración  $T_s$ . Este conjunto puede ser definido como una intersección correspondiente a incontables restricciones de la forma

$$\mathbb{Y}_{\mathcal{A}} := \bigcap_{\tau \in [0, T_s)} e^{-A\tau} \mathbb{Y}. \quad (6.4)$$

Para cada  $\tau \in [0, T_s]$ , dado que  $e^{-A\tau}$  es un mapa lineal y el conjunto  $\mathbb{Y}$  es politópico,  $e^{-A\tau} \mathbb{Y}$  describe un conjunto innumerable de polítopos. Notando que su intersección es cerrada y convexa, ésta constituye lo que se denomina espectraedro (Nesterov, 2000), siendo éste uno de los principales puntos a ser desarrollados en esta sección. Formalmente, un espectraedro es un conjunto descrito por una desigualdad de matriz lineal (LMI). Esta descripción nos permitirá garantizar la admisibilidad de los equilibrios y conjuntos invariantes, como se detalla en la Sección 6.5.1.

### 6.2.1. Sistema de tiempo discreto asociado

A partir de un muestreo en los instantes  $\tau_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , podemos obtener un sistema de tiempo discreto asociado al ICS de la forma

$$x(\tau_{k+1}) = A^d x(\tau_k) + B^d u(\tau_k), \quad (6.5)$$

con  $A^d = e^{AT_s}$  y  $B^d = B$ . Este sistema nos permitirá hacer algunas inferencias respecto de las propiedades del ICS, y, sobre todo, caracterizar los invariantes del ICS de un modo sencillo.

Para una mayor claridad en la exposición, revisaremos algunas definiciones y supuestos habituales, relativos a los conjuntos de equilibrio e invariantes de control para sistemas de tiempo discreto.

**Supuesto 18.** *El par  $(A^d, B^d)$  es controlable y el estado es medido en cada tiempo de muestreo.*

**Supuesto 19.** *Se asume que el conjunto  $\mathcal{X}$  es cerrado y el conjunto  $\mathcal{U}$  es compacto, de interior no vacío. Ambos contienen al origen en su interior.*

**Definición 25** (Conjunto de Equilibrio de Control (CES, Control Equilibrium Set)). *Sea el sistema 6.5 y un conjunto convexo  $\mathbb{Y} \subseteq \mathcal{X}$ . Un conjunto no vacío, convexo,  $\mathbb{Y}_s^d \subset \mathbb{Y}$  es un conjunto de equilibrio de control si para todo  $x_s \in \mathbb{Y}_s^d$  existe  $u_s \in \mathcal{U}$  tal que  $x_s = A^d x_s + B^d u_s$ .*

**Definición 26** (Conjunto invariante de control (CIS, Control Invariant Set)). *Sea el sistema 6.5 y un conjunto convexo  $\mathbb{Y} \subseteq \mathcal{X}$ . Un conjunto no vacío, convexo,  $\mathbb{Y}_{\text{inv}}^d \subset \mathbb{Y}$  es un conjunto invariante de control si para todo  $x \in \mathbb{Y}_{\text{inv}}^d$  existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $A^d x + B^d u \in \mathbb{Y}_{\text{inv}}^d$ . Un CIS con un interior no vacío se denomina CIS propio.*

Puede verse fácilmente que todo CES es un CIS, aunque no necesariamente sea un CIS propio, dado que los CES suelen tener interior vacío. Sin embargo, el hecho de que todo CIS contiene un CES no es trivial. Esto ha sido probado para el caso de tiempo continuo (Feuer and Heymann, 1976, Teorema 3.3), con una demostración basada en el teorema de Kakutani (Kakutani et al., 1941), que es una generalización del teorema de punto fijo de Brower.



### 6.3. Conjuntos de Equilibrio e Invariantes de control para sistemas controlados por impulsos

Como dijimos anteriormente, la evolución de estado de los sistemas controlados por impulsos tienen intervalos de evolución libre, o no controlada. En general, el único par de equilibrio de control formal  $(x_s, u_s)$ , i.e., el sistema queda en un estado constante, es el origen,  $(x_s, u_s) = (0, 0)$  (Yang, 2001). En muchas aplicaciones en las que el origen no es un estado deseable o factible para el sistema, se debe utilizar un esquema de control por regiones o zonas, dado que todo estado es, de alguna manera, transitorio. Para plantear las estrategias de control, redefiniremos entonces los conceptos de equilibrio e invariancia para sistemas controlados por impulsos.

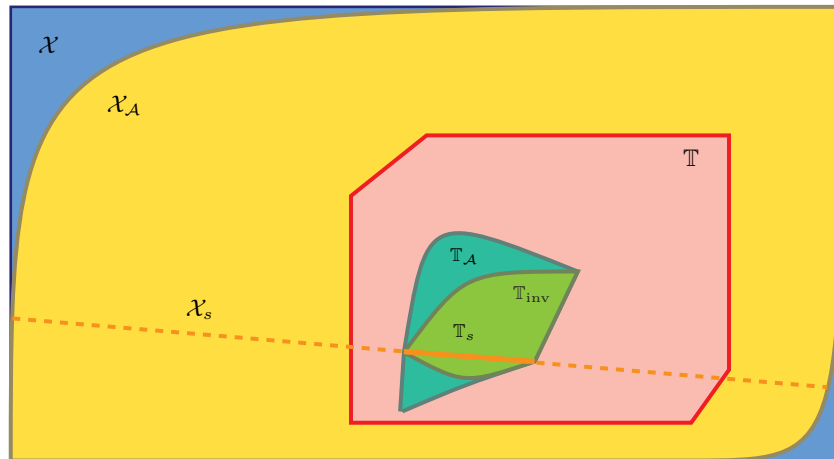
**Definición 27** (Conjunto de Equilibrio de Control Impulsional (ICES, Impulsively Controlled Equilibrium Set) (Rivadeneira et al., 2018)). *Sea el sistema (6.1) y un conjunto convexo  $\mathbb{Y} \subseteq \mathcal{X}$ . Un conjunto convexo, no vacío,  $\mathbb{Y}_s \subseteq \mathbb{Y}$  es un conjunto de equilibrio de control impulsional si para todo  $x_s \in \mathbb{Y}_s$ , sucede que: (i)  $\{e^{At}x_s : t \in [0, T]\} \subset \mathbb{Y}$  y (ii) existe  $u_s \in \mathcal{U}$  tal que  $e^{AT}x_s + Bu_s = x_s$ . Cada estado  $x_s \in \mathbb{Y}_s$  es entonces un estado de equilibrio por impulsos.*

**Definición 28** (Conjunto Invariante de Control Impulsional (ICIS, Impulsively Controlled Invariant Set) (Sopasakis et al., 2015)). *Sea el sistema (6.1) y un conjunto convexo  $\mathbb{Y} \subseteq \mathcal{X}$ . Un conjunto convexo, no vacío,  $\mathbb{Y}_{\text{inv}} \subset \mathbb{Y}$  es un conjunto invariante de control impulsional si para todo  $x \in \mathbb{Y}_{\text{inv}}$  existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que (i)  $\{e^{At}x : t \in [0, T]\} \subset \mathbb{Y}$  y (ii)  $e^{AT}x + Bu \in \mathbb{Y}_{\text{inv}}$ . Si este conjunto es de interior no vacío, se lo denomina propio.*

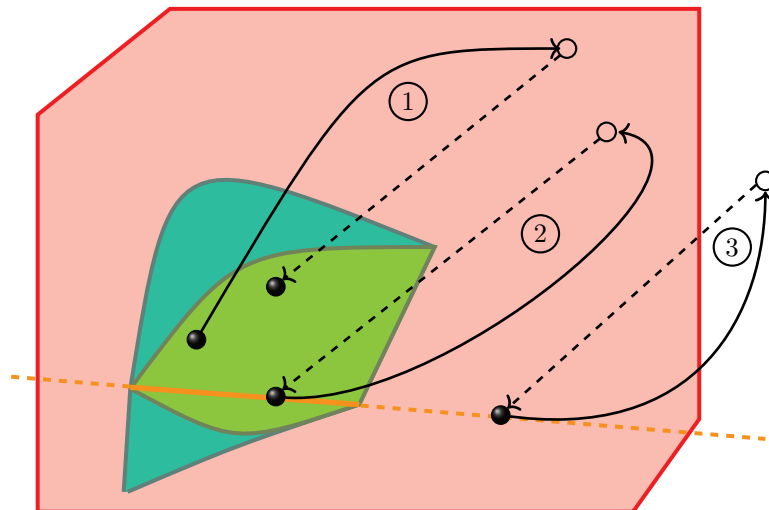
Claramente, no todo CES o CIS son respectivamente ICES o ICIS del sistema impulsional asociado, dado que las respectivas condiciones (i) en las Definiciones 27 and 28 no necesariamente se cumplen. Sin embargo, podemos interpretar un ICIS  $\mathbb{Y}_{\text{inv}}$  como un CIS contenido en  $\mathbb{Y}_A$ , y esto será útil al momento de caracterizar y calcular un ICIS.

Una ilustración esquemática de los conjuntos se puede ver en la Figura 6.2. En ella se indican los conjuntos factible  $\mathcal{X}$  (azul), admisible  $\mathcal{X}_A$  (amarillo), el conjunto objetivo o zona  $\mathbb{T}$  (rojo), el conjunto de equilibrio  $\mathcal{X}_s$  (naranja, punteada), el equilibrio admisible en la zona  $\mathbb{T}_s$  (naranja, continua), el conjunto admisible contenido en la zona  $\mathbb{T}_A$  (celeste) y el conjunto invariante de control por impulsos contenido en la zona  $\mathbb{T}_{\text{inv}}$  (verde). Puede notarse que el conjunto factible y la zona objetivo contienen a sus conjuntos admisibles respectivos,  $\mathcal{X}_A, \mathbb{T}_A$ , mientras que estos últimos contienen a su vez a los conjuntos de equilibrio de control impulsional  $\mathcal{X}_s, \mathbb{T}_s$ . Además, el conjunto invariante de control impulsional  $\mathbb{T}_{\text{inv}}$  está completamente contenido en la ventana objetivo  $\mathbb{T}$  y, en particular, en  $\mathbb{T}_A$ , que es el conjunto admisible contenido en la ventana.

En la Figura 6.3 se ilustran algunas trayectorias de respuesta libre más un salto para estados iniciales contenidos en los distintos conjuntos de interés. La trayectoria ① podría cumplir el supuesto de invariancia, dado que existe una entrada que devuelve el sistema al conjunto invariante. La trayectoria ② es un ejemplo de un equilibrio de control impulsional, donde se conforma una órbita periódica (luego del salto, el sistema vuelve exactamente al punto desde donde inició su respuesta libre inmediata anterior). La trayectoria ③ es de equilibrio pero no cumple con el objetivo de control, dado que transitoriamente abandona el conjunto objetivo.



**Figura 6.2:** Ilustración de los conjuntos de interés para el problema de seguimiento de zonas con control impulsivo.



**Figura 6.3:** Ilustración de distintos tipos de trayectorias relativas al conjunto objetivo.

## 6.4. Problema de Control

Un problema de control que frecuentemente surge en aplicaciones relacionadas a sistemas controlados por impulsos es el conocido como Seguimiento de Zonas (Zone tracking) y puede formularse de la siguiente manera.

**Definición 29** (Problema de Seguimiento de Zonas). *Dado un conjunto compacto y convexo  $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{X}$ , que llamaremos conjunto objetivo, diseñar un control que guíe el estado hacia la zona y lo mantenga en ella indefinidamente.*

Una trayectoria que cumple con el objetivo de control se muestra en la Figura 6.4. Allí los puntos rellenos indican los estados en los tiempo de muestreo (el instante posterior al salto), mientras que los huecos indican el instante inmediatamente anterior al salto. En línea continua se indica la respuesta libre.

Cabe remarcar que el control debe ser tal que se cumplan las restricciones de entrada y estado

en todo instante. Esto vincula fuertemente el problema de control con los conjuntos admisibles  $\mathbb{T}_A$  y  $\mathcal{X}_A$  (asociados a  $\mathbb{T}$  y  $\mathcal{X}$ , respectivamente). De acuerdo a este concepto, podemos establecer la siguiente propiedad:

**Definición 30** (Conjunto objetivo válido). *Para el sistema 6.1, un conjunto objetivo  $\mathbb{T} \subset \mathcal{X}$  será válido si contiene un ICIS o, es decir, si existe un  $\mathbb{T}_{\text{inv}}$  no vacío.*

Claramente, si la condición planteada en la Definición 30 no se cumple, el problema queda mal formulado, dado que no es posible permanecer en  $\mathbb{T}$  indefinidamente. En general, un dado conjunto  $\mathbb{T}$  que no es válido para un sistema impulsional específico, puede volverse válido si se reduce suficientemente el intervalo  $T_s$ , dado que se reduce el tiempo de respuesta libre, la llamada “deriva” del estado (Rivadeneira et al., 2018).

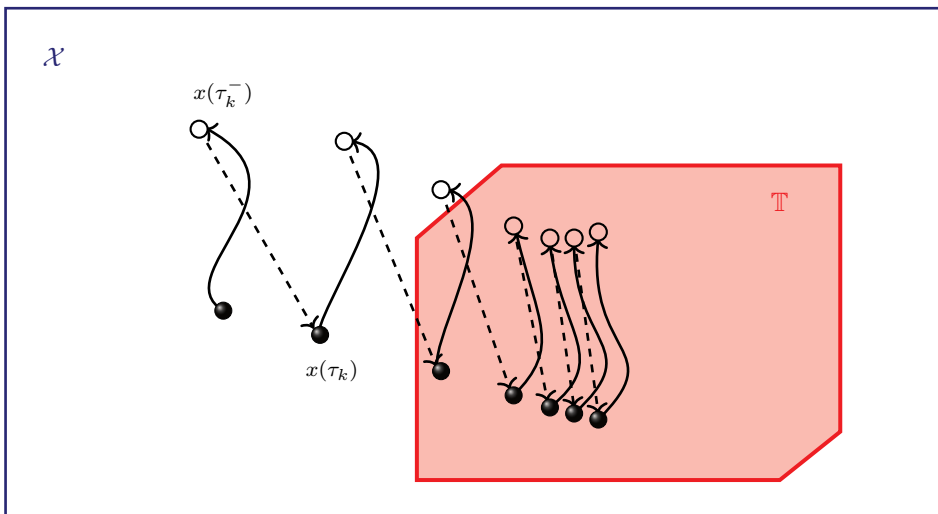
## 6.5. Caracterización del Invariante de Control

En esta sección se muestra una forma de caracterizar conjuntos invariantes de control para sistemas controlados por impulsos (ICIS) a partir del cálculo de invariantes de control del sistema de tiempo discreto asociado (CIS). Inicialmente, establecemos el siguiente teorema:

**Teorema 12.** *Sea el sistema (6.1) y un conjunto objetivo válido  $\mathbb{T} \subset \mathcal{X}$ . Si un CIS  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d$  del sistema asociado (6.5) está contenido en  $\mathbb{T}_A$ , entonces también es un ICIS  $\mathbb{T}_{\text{inv}}$  del sistema controlado por impulsos.*

*Demostración.* Dado que  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d \subset \mathbb{T}_A \subseteq \mathbb{T}$ , entonces  $\{e^{At}x : t \in [0, T_s]\} \in \mathbb{T}$  para todo  $x \in \mathbb{T}_{\text{inv}}^d$ . Particularmente,  $e^{AT_s}x \in \mathbb{T}$ . Más aún, como  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d$  es un CIS del sistema asociado (6.5), entonces existe alguna  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $x^+ := e^{AT}x + Bu \in \mathbb{T}_{\text{inv}}^d$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

**Observación 13.** *Cabe destacar que dado un conjunto invariante de control  $\mathbb{Y}_{\text{inv}}$  que no está contenido en  $\mathbb{T}_A$ ,  $\mathbb{Y}_{\text{inv}} \cap \mathbb{T}_A$  no es necesariamente un invariante de control. Por ello, para cumplir con las hipótesis del Teorema 12, al momento de calcular el invariante, se garantizará su inclusión en  $\mathbb{T}_A$ .*



**Figura 6.4:** Ejemplo de una trayectoria que cumple con el objetivo de control por zonas para un sistema controlado por impulsos.

### 6.5.1. Caracterización de los conjuntos admisibles

En esta sección, como paso previo a la caracterización de los conjuntos invariantes, desarrollaremos la caracterización los conjuntos admisibles, es decir, los conjuntos de estados cuya evolución libre en un intervalo determinado queda contenida en un conjunto politópico. Los conjuntos admisibles respecto de conjuntos politópicos pueden describirse a través de una cantidad no numerable de restricciones lineales, que conforman lo que se conoce como espectraedro.

Sea  $\mathbb{T}$  un conjunto politópico dado por

$$\mathbb{T} = \{x \in \mathcal{X} : Hx \leq b\}, \quad (6.6)$$

con  $H \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$  y  $v \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$ , donde  $\ell$  es el mínimo número de hiperplanos que describen a  $\mathbb{T}$ .

El conjunto  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ , el conjunto admisible asociado a  $\mathbb{T}$ , puede ser exactamente descrito a través de LMIs (Louembet et al., 2020) como se explica a continuación.

Sea el sistema (6.1).

**Supuesto 20.** 1) Los autovalores  $\lambda_i$  de la matriz del sistema  $A$  son números racionales sin parte imaginaria,  $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ , es decir,  $\lambda_i = \frac{\eta_i}{\rho}$ , donde  $\rho \in \mathbb{N}$  es el mínimo común denominador de los autovalores y  $\eta_i \in \mathbb{Z}$ , con  $i = 1, \dots, n$ . 2) Las filas de  $A$  son linealmente independientes.

**Observación 14.** Estos supuestos, que también se incluyeron en Henrion et al. (2005), nos permiten concentrarnos en sistemas lineales que pueden ser descritos por polinomios de orden finito. Además, la implicación semialgebraica de la respuesta libre es posible solamente en aquellos casos donde i) la matriz  $A$  es nilpotente, ii) los autovalores son reales y diferentes, o iii) los autovalores puramente imaginarios tienen ciertas estructuras particulares (Anai and Weispenning, 2001, Corolario 3). Notamos que los autovalores reales pueden ser aproximados con precisión arbitraria por números racionales, el supuesto de matrices con autovalores racionales no se presenta como una limitante tan importante para la aplicación. En la práctica, alguna aproximación a las entradas de las matrices se introduce casi siempre, lo que es análogo a alguna aproximación de sus autovalores. Estos supuestos nos dan la certeza de que el problema de alcanzabilidad para dichos sistemas es decidible (Lafferriere et al., 2001, Corollary 3.10). También, notamos que la representación modal de las matrices con autovalores repetidos incluye términos que no pueden ser formulados como polinomios de un  $\lambda = e^{-t/m}$ . Y, finalmente, recordamos que los autovalores repetidos con alta multiplicidad resultan muy sensibles numéricamente. Así queda justificada la decisión de recortar nuestro análisis a los casos abarcados en el Supuesto 20.

Consideraremos además que los autovalores están ordenados en forma ascendente, de manera que  $\eta_1$  es el menor (posiblemente negativo) y  $\eta_n$  el mayor (posiblemente positivo). El conjunto  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$  se puede definir como

$$\mathbb{T}_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{X} : H\Phi(t)x \leq b, \forall t \in [0, T_s]\}, \quad (6.7)$$

donde  $\Phi(t) = e^{At}$  es la matriz de transición que describe la evolución libre (en tiempo continuo) del sistema controlado por impulsos. Estudiando la desigualdad (6.7) por filas, tenemos

$$h_i \Phi_j(t)x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, l \quad (6.8)$$

donde  $h_i$  es la  $i$ -ésima fila de  $H$ ,  $b_i$  el  $i$ -ésimo componente de  $b$  y  $\Phi_j(t)$  es la  $j$ -ésima columna de la matriz de transición. Expresamos la matriz de transición  $\Phi(t)$  en su forma modal (una representación de

la matriz obtenida por la diagonalización basada en los autovectores y autovalores) como

$$\Phi(t) = \sum_{r=1}^n \Phi_r e^{\lambda_r t},$$

donde  $\Phi_r$  es la  $r$ -ésima matriz y  $\lambda_r$  es el  $r$ -ésimo autovalor, obtenidos de la descomposición modal de  $\Phi(t)$ , y podemos reescribir (6.8) como

$$\sum_{r=1}^n h_i \Phi_r e^{\lambda_r t} x \leq b_i, \quad t \in [0, T_s], \quad i = 1, \dots, l. \quad (6.9)$$

Proponiendo el cambio de variables  $w = e^{-\frac{1}{\rho}t}$ , tenemos que  $e^{\lambda_r t} = (e^{-\frac{1}{\rho}t})^{-\eta_r} = w^{-\eta_r}$ ,  $w \in [W, 1]$  con  $W = e^{-\frac{T_s}{\rho}}$ . Las desigualdades (6.9) pueden ser escritas como

$$\sum_{r=1}^n \gamma_r^i(x) w^{-\eta_r} - b_i \leq 0, \quad w \in [W, 1], \quad i = 1, \dots, l, \quad (6.10)$$

donde  $\gamma_r^i(x) := (h_i \Phi_r)x$  son funciones lineales del estado  $x$  y  $\eta_r \in \mathbb{Z}$ , para  $r \in 1, \dots, n$ .

La idea, ahora, es expresar dichas desigualdades en forma polinómica. En el caso que  $\eta_n$  sea positivo, se puede multiplicar (6.10) por  $w^{\eta_n}$ , teniendo en cuenta que  $\eta_n$  es el mayor exponente y por ende,  $\eta_n - \eta_r \geq 0$ ,  $r \in 1, \dots, n$ , y que  $w^{\eta_n} > 0$ . De esta manera todas las potencias resultan positivas. Podemos expresar este corrimiento en el orden del polinomio como  $\bar{\eta} := \max\{0, \eta_n\}$ , de modo que

$$\left[ \sum_{r=1}^n \gamma_r^i(x) w^{-\eta_r + \bar{\eta}} - b_i w^{\bar{\eta}} \right] \leq 0, \quad w \in [W, 1], \quad i = 1, \dots, l.$$

Estas desigualdades pueden expresarse como condiciones de negatividad polinómica, de la forma

$$P_i(w) = \sum_{d=0}^{\eta_n - \eta_1} \pi_{i,d}(x) w^d \geq 0, \quad w \in [W, 1], \quad i = 1, \dots, l, \quad (6.11)$$

donde  $\pi_{i,d}(x) = -\gamma_d^i(x) \delta_{d,i} + b_i \delta_{d,\bar{\eta}}$ , para  $d \in \{0, \dots, \eta_n - \eta_1\}$ ,  $\delta_{i,j}$  indica la función delta de Kronecker<sup>1</sup>.

El teorema de Lukasz-Markov sostiene que un polinomio  $P_i(w)$  es no negativo si y solo si puede ser escrito como una suma ponderada de cuadrados (Nesterov, 2000). Además, puede mostrarse que (6.11) será satisfecha si su vector de coeficientes  $\pi_i(x)$  es la imagen de dos matrices positivas semi-definidas  $Y_{i,1}$  y  $Y_{i,2}$  a través de operadores lineales  $\Lambda_{i,1}^*$  y  $\Lambda_{i,2}^*$  (Henrion et al., 2005, Lema 2), de la siguiente forma

$$P_i(x) = \Lambda_{i,1}^*(Y_{i,1}) + \Lambda_{i,2}^*(Y_{i,2}), \quad Y_{i,1}, Y_{i,2} \succeq 0, \quad (6.12)$$

donde los operadores  $\Lambda_{i,1}^*$  y  $\Lambda_{i,2}^*$  están definidos en Nesterov (2000). Entonces, el conjunto  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$  puede ser descrito por la siguiente condición

$$\mathbb{T}_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{X} : P(x) = \Lambda_1^*(Y_1) + \Lambda_2^*(Y_2), \quad Y_1, Y_2 \succeq 0\}. \quad (6.13)$$

<sup>1</sup>La función  $\delta_{i,j}$  se define como  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{i,j} = 0$ , si  $i \neq j$ .

### 6.5.2. Cómputo del Conjunto de Equilibrio de Control por Impulsos (ICES)

El ICES se puede obtener a través de la intersección del conjunto  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$  y el CES del sistema discreto asociado (6.5). El conjunto ICES puede ser también interpretado como un corte de un espectraedro  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$  definido por las desigualdades (6.13), según a las restricciones de igualdad que determinan el CES.

### 6.5.3. Cálculo del Conjunto Invariante de Control por Impulsos (ICIS)

No se dispone de herramientas para conjuntos invariantes espectraédricos, por lo que utilizaremos un polítopo cuyos puntos extremos estén contenidos en el espectraedro como aproximación interior de éste último. Sobre este polítopo podemos aplicar la típica recursión de conjuntos controlables, considerando en este caso la factibilidad de la trayectoria libre, es decir, garantizando la admisibilidad.

Denotemos con  $\widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{A}}$  una aproximación politópica interior del conjunto  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ . A través de algoritmos muy difundidos (Herceg et al., 2013; Kerrigan, 2000), podemos calcular el máximo invariante contenido en  $\widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{A}}$  para el sistema asociado de tiempo discreto. Esto constituye un invariante que es una aproximación al máximo invariante de control por impulsos contenido en  $\mathbb{T}$ .

Para calcular además el dominio de atracción del controlador utilizaremos la noción de conjuntos controlables admisibles. Dado un conjunto  $S \subset \mathcal{X}$ , el conjunto controlable admisible a  $S$  en un paso,  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(S)$ , contiene los estados que pueden ser conducidos a  $S$  considerando una trayectoria libre admisible y una única aplicación de un impulso de control. Simbólicamente,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(S) := \{x \in \mathcal{X} : \text{existe } u \in \mathcal{U} \text{ sujeto a } A^d x + B^d u \in S, x(t) \in \mathcal{X} \text{ para todo } t \in [0, T_s]\}.$$

A los fines computacionales, se puede utilizar la siguiente definición, en base a los conjuntos admisibles y el sistema de tiempo discreto asociado,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^d(S) := \{x \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}} : \text{existe } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } A^d x + B^d u \in S\}$$

El cálculo de un conjunto invariante admisible contenido en  $\mathbb{T}$  se puede realizar en base a esta definición, iterativamente, según la siguiente regla de recursión

$$S_{k+1} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^d(S_k) := \{x \in \mathbb{T}_{\mathcal{A}} : \text{existe } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } A^d x + B^d u \in S_k\}.$$

Inicializamos la recursión con  $S_0 = \widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{A}}$  y la condición de terminación esta dada por  $S_{k+1} \subseteq S_k$ .

El proceso de cálculo del conjunto invariante  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d$  se resume en el Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Cálculo de  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d$ , una aproximación al máximo invariante admisible contenido en  $\mathbb{T}$ .

---

**Entradas:**  $A, B, T_s, \mathbb{T}, \mathcal{U}$

**Salida**  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d$

- 1:  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}} =$  Obtener una representación espectraédrica del conjunto admisible para el sistema  $\dot{x} = Ax, t \in [0, T_s]$ .
  - 2:  $\widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{A}} =$  Calcular una aproximación politópica del conjunto  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ .
  - 3:  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d =$  Calcular un conjunto invariante de control contenido en  $\widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{A}}$  para el sistema asociado  $x(k+1) = A^d x(k) + B^d u(k)$ .
  - 4: Devolver  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d$
-

**Observación 15.** El paso 2 del Algoritmo 1, consistente en la caracterización del conjunto admisible  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$  puede ser resuelto numéricamente por medio de la obtención de los coeficientes de los polinomios  $P_i(w)$  definidos en (6.11) e imponiendo restricciones de sumas de cuadrado en cada vector de coeficientes, que son dependientes del estado. Eso resulta en un conjunto de restricciones que describen exactamente el conjunto factible que, de hecho, es un espectraedro. El tercer paso consiste en el cómputo de una aproximación politópica del conjunto admisible. Una estrategia simple como el llamado ray-shooting, que consiste en un mallado de la  $n$ -esfera y resolver la maximización para cada punto del mallado de la proyección de un vector. Para la solución numérica, podemos valernos de la función shoot que está disponible en el software Multi-Parametric Toolbox 3.0 (Herceg et al., 2013). Esto nos devolverá un punto sobre la frontera del espectraedro  $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ , cuya aproximación poliédrica puede ser resuelta a través de un casco convexo. El último paso del algoritmo, el cómputo del conjunto invariante de control  $\mathbb{T}_{\text{inv}}^d$ , se puede resolver como la recursión de conjuntos alcanzables para el sistema de tiempo discreto asociado. De nuevo, en el mismo software contamos con el método ReachableSet, que resulta útil a tal fin.

## 6.6. MPC por zonas para sistemas controlados por impulsos

En esta sección desarrollaremos una formulación de MPC por zonas (zMPC) que hace uso explícito del conjunto invariante caracterizado previamente. El objetivo de control consiste en guiar el sistema controlado por impulsos (6.1) a la zona objetivo  $\mathbb{T}$  (que no necesariamente contiene al origen) y mantenerlo en ella indefinidamente. El controlador de base es un MPC basado en conjuntos (Anderson et al., 2018b), que además de la estabilidad asintótica, garantiza convergencia en tiempo finito.

### 6.6.1. MPC por zonas

El objetivo de control se puede modelar como la minimización de la distancia acumulada entre la trayectoria predicha de estados y entradas con respecto a un conjunto aumentado, compuesto por pares estado-entrada de equilibrio. Definimos un conjunto  $\mathcal{Z}$ , cuyos elementos son pares de estados y entradas tales que  $\mathcal{Z} = \{(x, u) : x \in \mathbb{T}_{\text{inv}}, u \in \mathcal{U}(x)\}$ , donde  $\mathcal{U} : \mathbb{T}_{\text{inv}} \rightrightarrows \mathcal{U}$  es una correspondencia tal que  $\mathcal{U}(x) := \{u \in \mathcal{U} : A^d x + B^d u \in \mathbb{T}_{\text{inv}}\}$ .

La función de costo propuesta está dada por

$$L_N = \sum_{j=1}^N \text{dist}_{\mathcal{Z}}((x(\tau_j), u(\tau_j))),$$

donde  $N$  es el horizonte de control y la función distancia al conjunto  $\text{dist}$  está definida como

$$\text{dist}_{\mathcal{Z}}(x, u) = \min_{(x^*, u^*) \in \mathcal{Z}} \|x - x^*\|_Q^2 + \|u - u^*\|_R^2.$$

La formulación del MPC basado en conjuntos toma la forma

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} L_N(x, \mathbf{u}, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \quad (6.14a)$$

$$s.a. x(\tau_0) = x \quad (6.14b)$$

$$x(\tau_{j+1}) = A^d x(\tau_j) + B^d u(\tau_j), \quad j \in 0, \dots, N-1 \quad (6.14c)$$

$$x(\tau_{j+1}) \in \mathcal{X}_A, \quad j \in 0, \dots, N-1 \quad (6.14d)$$

$$u(\tau_j) \in \mathcal{U}, \quad j \in 0, \dots, N-1 \quad (6.14e)$$

$$(x^*(\tau_j), u^*(\tau_j)) \in \mathcal{Z}, \quad j \in 0, \dots, N \quad (6.14f)$$

$$x(\tau_N) \in \mathbb{T}_{\text{inv}}, \quad (6.14g)$$

donde  $\mathbf{u} = \{u(1), \dots, u(N)\}$ ,  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \{(x^*(1), u^*(1)), \dots, (x^*(N), u^*(N))\}$  son respectivamente secuencias de entradas y elementos de  $\mathcal{Z}$  que minimizan la distancia con respecto a la predicción del estado y la entrada correspondiente en cada instante.

**Observación 16.** *Puede demostrarse que el sistema de lazo cerrado bajo la ley de control resultante  $\kappa_{\text{MPC}}(x) := u^O(0)$ ,*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) = x(\tau_k^-) + B\kappa_{\text{MPC}}^*(x(\tau_{k-1})), & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*es asintóticamente estable con respecto a  $\mathbb{T}$  (según las definiciones de estabilidad respecto de un conjunto (Sopasakis et al., 2015; Rivadeneira et al., 2018)), con dominio de atracción dado por  $\mathcal{C}_N(\mathbb{T}_{\text{inv}})$ , i.e., el conjunto controlable en  $N$ -pasos a  $\mathbb{T}_{\text{inv}}$ . Omitimos la prueba respectiva, dado que puede ser obtenida a partir de resultados disponibles (Anderson et al., 2018b, Teorema 1).*

### 6.6.2. Ejemplo 1

Desarrollaremos primero un ejemplo numérico sencillo a modo ilustrativo. Sea el sistema lineal controlado por impulsos (6.1), cuyas matrices de transición y de entradas dadas por

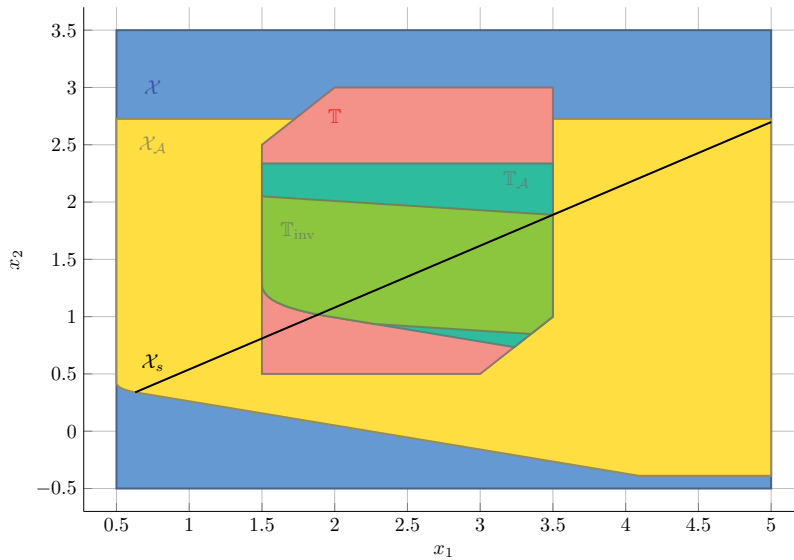
$$A = \begin{bmatrix} -1,5 & 1,75 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,75 \end{bmatrix},$$

con un intervalo de control  $T_s = 1[s]$ . Se puede notar que el sistema tiene una dinámica inestable, dado que sus autovalores son  $-1,5$  y  $0,25$ . Se considerarán restricciones para el estado y las entradas, dadas por  $0,5 \leq x_1 \leq 5$ ,  $-0,5 \leq x_2 \leq 3,5$  y  $u \in [-1, 1]$ . El conjunto objetivo objetivo es politópico y está dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 3,5 \\ -1,5 \\ 0,5 \\ -3 \\ 2,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En la Figura 6.5 se indican los principales conjuntos de interés: el conjunto de restricciones de estado  $\mathcal{X}$  (azul), el conjunto admisible  $\mathcal{X}_A$  (amarillo), el conjunto objetivo  $\mathbb{T}$  (rojo), el conjunto admisible





**Figura 6.5:** Ilustración de los conjuntos factible  $\mathcal{X}$ , admisible  $\mathcal{X}_A$ , equilibrio admisible  $\mathcal{X}_s$ , objetivo  $\mathbb{T}$ , admisible objetivo  $\mathbb{T}_A$  y el invariante admisible objetivo  $\mathbb{T}_{inv}$  correspondiente al problema presentado en la Sección 6.6.2.

respecto del objetivo  $\mathbb{T}_A$  (cian) y  $\mathbb{T}_{inv}$ , el conjunto invariante contenido en  $\mathbb{T}$  (verde). El conjunto de equilibrio admisible  $\mathcal{X}_s$  es indicado en negro.

El controlador se plantea con un horizonte  $N = 5$  y las penalizaciones se eligen como  $Q = 1$  y  $R = 10$ . Las herramientas de software que utilizaremos serán YALMIP (Lofberg, 2004), MPT3 (Herceg et al., 2013) y Mosek (Andersen and Andersen, 2000).

En la Figura 6.6, se muestra el dominio de atracción  $\tilde{\mathcal{D}}_A^d(\mathbb{T})$  (naranja), el cual se encuentra completamente contenido en el conjunto admisible  $\mathcal{X}_A$  y contiene al invariante  $\mathbb{T}_{inv}$ .

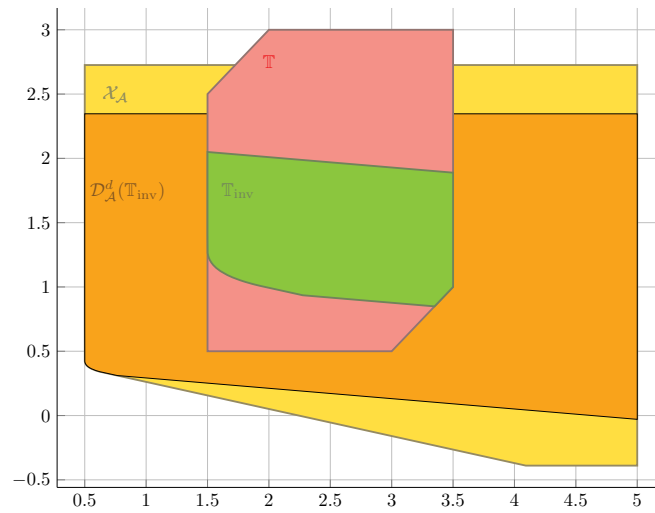
Las trayectorias resultantes para condiciones iniciales  $(4,75, 0,25)$  y  $(4,75, 2,25)$  se muestran en la Figura 6.7. Se puede observar que, en ambos casos, las trayectorias convergen a la zona, aunque alcanzan estados estacionario diferentes. Cabe destacar que ambas soluciones cumplen los objetivos control y son óptimas, aunque sus estados terminales no sean coincidentes.

### 6.6.3. Ejemplo 2: Control de dosificación de iones de litio

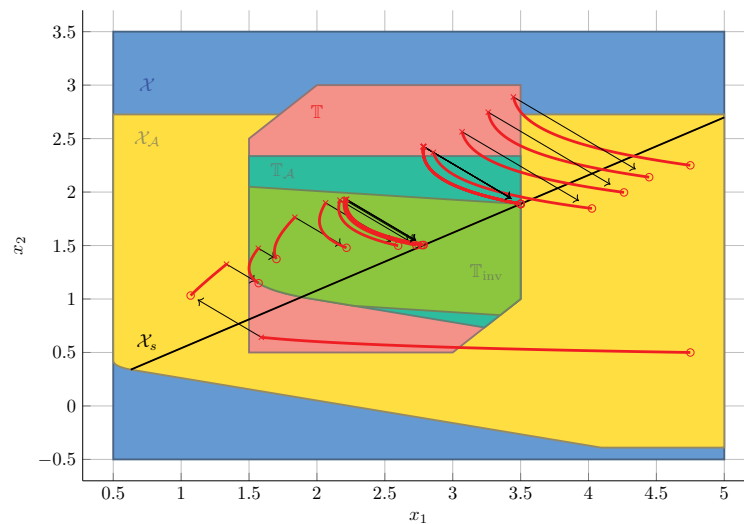
Un ejemplo de aplicación más desafiante consiste en el problema de la administración intravenosa de iones de litio ( $\text{Li}^+$ ), con el objetivo de estabilizar la dosis en una región deseada, establecida por los especialistas para cada paciente en particular.

Un modelo compartimental de la distribución y farmacocinética de los iones de litio considerando la forma de administración oral se desarrolló en Ehrlich et al. (1980). Los compartimentos consisten en las concentraciones de  $\text{Li}^+$  en el plasma, glóbulos rojos y células de tipo muscular, que se indican respectivamente como  $C_P$ ,  $C_{RBC}$  y  $C_M$ , todas con unidades de  $\text{nmol/L}$ .

Dicho modelo fue retomado en Sopasakis et al. (2015), donde se modificó el modelo para contemplar la administración por vía intravenosa. Definiendo el vector de estados como  $x = (C_P, C_{RBC}, C_M)^T$ , la



**Figura 6.6:** Ilustración del dominio de atracción  $\mathcal{D}_A^d(\mathbb{T}_{inv})$  (naranja), con respecto del conjunto admisible  $\mathcal{X}_A$  (amarillo), el conjunto objetivo  $\mathbb{T}$  (rojo) y el invariante objetivo  $\mathbb{T}_{inv}$  (verde).



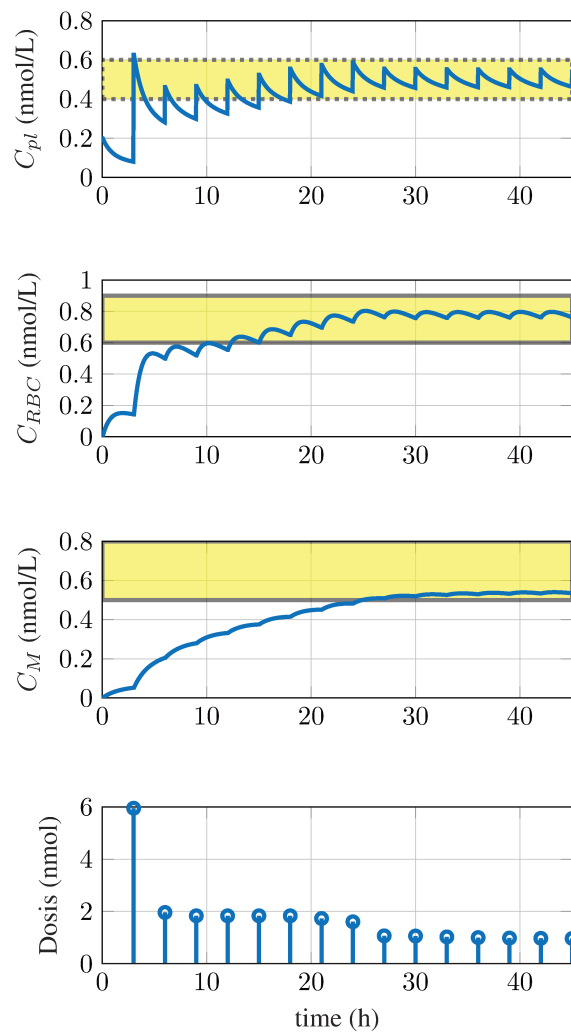
**Figura 6.7:** Trayectorias correspondientes a dos estados iniciales  $(4.75, 0.5)$  y  $(4.75, 2.25)$ . Se observa la convergencia del sistema al conjunto objetivo, así como la permanencia durante la evolución libre.

dinámica de la droga está descripta por un sistema lineal  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , con

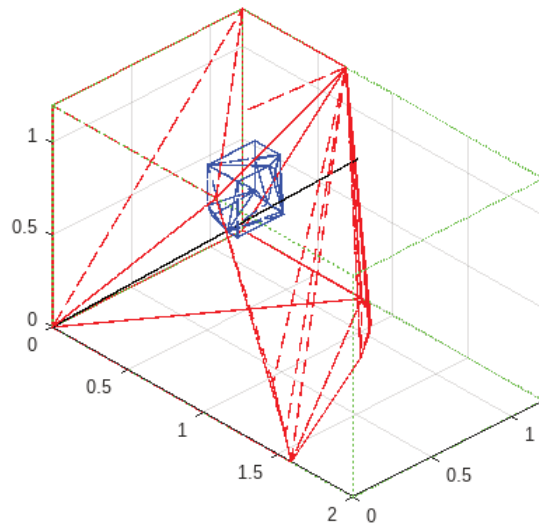
$$A = \begin{bmatrix} -0,6137 & 0,1835 & 0,2406 \\ 1,2644 & -0,8 & 0 \\ 0,2054 & 0 & -0,19 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

y la matriz de entrada  $B = [10,9^{-1}, 0, 0]$ . Las inyecciones tendrán lugar a intervalos regulares de 3 horas. El estado estará restringido según  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ , con  $x_{min} = [0, 0, 0]$  y  $x_{max} = (2, 1, 2, 2)$ . Cada inyección no podrá superar los 5.95 nmol, es decir,  $0 \leq u \leq 5,95$  nmol. El conjunto objetivo estará dado por  $\{x \in \mathbb{R}^3 | x_L \leq x \leq x_H\}$ , con  $x_L = (0,4, 0,6, 0,5)$  y  $x_H = (0,6, 0,9, 0,8)$ . Los conjuntos de interés para estas configuraciones se muestran en las Figuras 6.9 y 6.10, en las que se puede observar que el conjunto objetivo contiene a un conjunto de equilibrio y más aún, el conjunto admisible con respecto al objetivo contiene a un conjunto de equilibrio, por lo que el objetivo es válido. El invariante de control impulsional se muestra en rojo en la Figura 6.10.

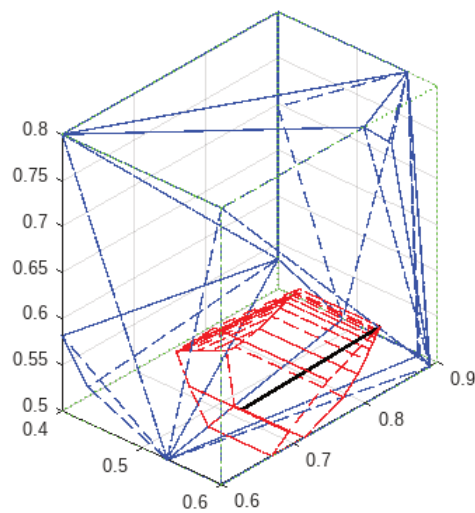
Los resultados de la simulación del sistema de lazo cerrado con el controlador (6.14), para un horizonte  $N = 15$ , y penalizaciones  $Q = 10$  y  $R = 1$ , se muestran en la Figura 6.8, para un estado inicial  $x_0 = (0,2, 0, 0)^T$ . Allí se puede observar que las restricciones de estado y de entrada se satisfacen en todo tiempo, tanto en los instantes de inyección como en los intervalos de evolución libre del sistema. Se puede notar que, a medida que avanza el tiempo, el sistema ingresa al objetivo y que permanece contenido en él, cumpliendo el objetivo de control.



**Figura 6.8:** Evolución de los estados y la entrada para el ejemplo de control MPC por zonas, aplicado al manejo de la concentración de  $\text{Li}^+$  en el cuerpo humano.



**Figura 6.9:** Ilustración del conjunto de restricciones de estado  $\mathcal{X}$  (verde), el conjunto admisible con respecto a las restricciones  $\mathcal{X}_A$  (rojo) y el conjunto admisible con respecto al objetivo  $\mathbb{T}_A$  (azul).



**Figura 6.10:** Ilustración del conjunto objetivo (verde) y los conjuntos, contenidos en el objetivo, de equilibrio (negro), admisible  $\mathbb{T}_A$  (azul) e invariante impulsional de control  $\mathbb{T}_{inv}$  (rojo).

## Capítulo 7

# Conclusiones y Trabajos Futuros

En esta tesis se presentaron algunas técnicas basadas en el control predictivo basado en modelos orientadas a la optimización de tareas que involucran el seguimiento de distintos tipos de referencias. Para el desarrollo conceptual de las propuestas nos hemos basado en resultados inicialmente propuestos para la estabilización de puntos de trabajo y hemos desarrollado extensiones que permiten su aplicación al seguimiento de referencias genéricas, incluyendo trayectorias, curvas y regiones en el espacio, que además pueden ser dinámicas, esto es, que dichas referencias pueden cambiarse arbitrariamente en tiempo de ejecución. Los controladores propuestos se analizaron desde un punto de vista teórico donde se explicitan sus ventajas respecto de formulaciones clásicas. Además se plantean ejemplos numéricos basados en herramientas computacionales de fácil disponibilidad, quedando evidenciada la accesibilidad de las soluciones propuestas. A partir de los ejemplos ilustrativos, se observa que los métodos propuestos podrían aplicarse eventualmente en sistemas reales, mejorando las prestaciones de los controladores actualmente disponibles.

A continuación, plantearé sintéticamente las conclusiones de acuerdo a los temas tratados en cada capítulo.

### **Capítulo 2: MPC para Seguimiento de Puntos de Trabajo**

En este capítulo presentamos conceptos preliminares, que incluyen una revisión de la formulación de MPC para seguimiento de puntos de trabajo. En primer lugar, se estudiaron formulaciones clásicas de MPC para regulación y seguimiento. Luego se presentó el problema de la pérdida de factibilidad por cambios de referencia. Como solución a dicho problema, nos detuvimos en la propuesta general del MPC para Tracking, una formulación de MPC para seguimiento de puntos de trabajo con planeamiento en línea, destacando las propiedades básicas de dicho controlador, como son sus garantías de factibilidad recursiva independiente de la referencia, su dominio de atracción ampliado y las garantías de optimalidad. Esta discusión sirve de base para simplificar la interpretación de las extensiones y novedades presentadas en los capítulos posteriores.

### **Capítulo 3: MPC para Seguimiento de Trayectorias**

En este capítulo se realizó una revisión de las propiedades básicas del controlador para el seguimiento de referencias variantes en el tiempo con planeamiento en línea. En particular, los aportes estuvieron centrados en el problema de seguimiento de trayectorias periódicas con planeamiento en línea, que heredan

las garantías de factibilidad recursiva con independencia de la referencia y su robustez frente a cambios de la formulación presentada en el Capítulo 2. Se presenta la implementación de un controlador de una sola capa a través de la utilización de variables artificiales que componen una trayectoria periódica. La principal novedad de este capítulo es la propuesta de una caracterización del dominio de atracción de formulaciones existentes, tanto para sistemas LTI como LTV periódicos, sujetos a restricciones politópicas.

#### **Capítulo 4: MPC para Tracking Periódico**

En este capítulo se extendieron los resultados disponibles de estabilización de trayectorias para sistemas periódicos, permitiendo la relajación de la restricción terminal que pasa de una restricción de igualdad a una de pertenencia a un conjunto. Esto se logra mediante una propuesta novedosa para la determinación de la ley de control terminal y la caracterización y cómputo de una secuencia de conjuntos invariantes bajo esa ley. La pertenencia del estado terminal a estos conjuntos constituye la restricción terminal de la formulación de MPC propuesta. Tanto los conjuntos como la ley de control terminal son variantes en el tiempo y para su cómputo se utilizaron resultados de controladores de tipo LQR periódicos. Esto resultó en controladores con una ampliación del dominio de atracción respecto de los presentados en el capítulo anterior. Algunas líneas para futuras investigaciones abarcan:

- Considerar la estabilización de sistemas sujetos a perturbaciones periódicas y no periódicas.
- Caracterización de invariantes periódicos para sistemas no lineales
- Extensión del seguimiento con invariantes terminales a sistemas no lineales

#### **Capítulo 5: MPC para Seguimiento de Curvas**

En este capítulo se presentaron formulaciones de controladores MPC con planeamiento en línea para el seguimiento de curvas paramétricas. Se estudiaron las condiciones de factibilidad recursiva y de decrecimiento del costo, en primer lugar, para curvas de referencia arbitrarias, considerando la existencia de curvas de equilibrio. Se presentaron ejemplos de aplicación para seguimiento de curvas con modelos cinemáticos simples, contemplando los problemas de cambio de referencia y de evasión de obstáculos.

Se presentó luego un controlador para el seguimiento de referencias periódicas con sistemas lineales, para el que se lograron establecer cotas para el rendimiento promedio, que dependen de la factibilidad de la referencia. Como trabajos futuros se proponen:

- Demostración de estabilidad basada en la estabilidad de conjuntos.
- Investigar la aplicación experimental a sistemas industriales.
- Propuestas para la convexificación del problema considerando la elusión de obstáculos.

#### **Capítulo 6: MPC para Estabilización de Sistemas Híbridos con planeamiento en línea**

En este capítulo se estudió el problema de estabilizar un sistema lineal controlado a través de acciones impulsivas a intervalos regulares y se presentó una formulación de MPC que estabiliza el sistema en una región de trabajo. Se presentó una caracterización de los conjuntos admisibles, es decir, aquellos que se mantienen factibles durante los intervalos de propagación libre. Estos conjuntos, que son espectralhedros,

se calculan a partir de una descripción como restricciones de positividad, utilizando condiciones de sumas de cuadrados y programación semidefinida. Se establecieron condiciones necesarias para la existencia de soluciones que cumplan los objetivos, se produjo un algoritmo para el cómputo de los conjuntos de interés y se ilustró su aplicabilidad con un ejemplo en el contexto de la biomedicina. Algunos trabajos futuros, relacionados a esta línea, pueden ser

- Caracterización de invariantes para el caso robusto
- Diseño de un MPC por zonas con garantía de estabilidad para el caso robusto.
- Generalización de estas propuestas a otras clases de sistemas híbridos, como ser sistemas conmutados o switching.



# Bibliografía

- Abuin, P., Rivadeneira, P. S., Ferramosca, A., and González, A. H. (2020). Artificial pancreas under stable pulsatile MPC: improving the closed-loop performance. *Journal of Process Control*. Accepted.
- Aguiar, A. P., Dačić, D. B., Hespanha, J. P., and Kokotović, P. (2004). Path-following or reference tracking?: An answer relaxing the limits to performance. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(8):167–172.
- Aguiar, A. P. and Hespanha, J. P. (2007). Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty. *IEEE transactions on automatic control*, 52(8):1362–1379.
- Aguiar, A. P., Hespanha, J. P., and Kokotović, P. V. (2008). Performance limitations in reference tracking and path following for nonlinear systems. *Automatica*, 44(3):598–610.
- Alessandretti, A., Aguiar, A. P., and Jones, C. N. (2013). Trajectory-tracking and path-following controllers for constrained underactuated vehicles using model predictive control. In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 1371–1376. IEEE.
- Anai, H. and Weispfenning, V. (2001). Reach set computations using real quantifier elimination. In *International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, pages 63–76. Springer.
- Andersen, E. D. and Andersen, K. D. (2000). The mosek interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm. In *High performance optimization*, pages 197–232. Springer.
- Anderson, A., D’Jorge, A., González, A. H., Ferramosca, A., and Kofman, E. (2018a). Robust mpc suitable for closed-loop re-identification, based on probabilistic invariant sets. *Systems & Control Letters*, 118:84–93.
- Anderson, A., González, A. H., Ferramosca, A., and Kofman, E. (2018b). Finite-time convergence results in robust model predictive control. *Optimal Control Applications and Methods*, 39:1627–1637.
- Angeli, D., Amrit, R., and Rawlings, J. B. (2012). On average performance and stability of economic model predictive control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 57(7):1615–1626.
- Angeli, D., Casavola, A., and Mosca, E. (1999). Command governors for constrained nonlinear systems: Direct nonlinear vs. linearization-based strategies. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 9:677–699.
- Arantes Gilz, P. R., Joldes, M., Louembet, C., and Camps, F. (2019). Stable model predictive strategy for rendezvous hovering phases allowing for control saturation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 42(8):1658–1675.

- Astolfi, A., Bolzern, P., and Locatelli, A. (2004). Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: A Lyapunov-based approach. *IEEE transactions on robotics and automation*, 20(1):154–160.
- Bainov, D. D. and Simeonov, P. S. (1995). *Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions*. WORLD SCIENTIFIC.
- Balluchi, A., Bicchi, A., and Soueres, P. (2005). Path-following with a bounded-curvature vehicle: a hybrid control approach. *International Journal of Control*, 78(15):1228–1247.
- Bayen, T., Mairet, F., Martinon, P., and Sebbah, M. (2015). Analysis of a periodic optimal control problem connected to microalgae anaerobic digestion. *Optimal Control Applications and Methods*, 36(6):750–773.
- Becerra, V. M., Roberts, P. D., and Griffiths, G. W. (1998). Novel developments in process optimisation using predictive control. *Journal of Process Control*, 8:117–138.
- Bemporad, A. (1998). Reducing conservativeness in predictive control of constrained systems with disturbances. In *Proceedings of the CDC*.
- Bemporad, A., Casavola, A., and Mosca, E. (1997). Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:340–349.
- Bittanti, S. and Colaneri, P. (2009). *Periodic Systems: Filtering and Control*. Springer.
- Blanchini, F. and Ukovich, W. (1993). Linear programming approach to the control of discrete-time periodic systems with uncertain inputs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 78(3):523–539.
- Böck, M. and Kugi, A. (2016). Constrained model predictive manifold stabilization based on transverse normal forms. *Automatica*, 74:315–326.
- Broomhead, T., Manzie, C., Shekhar, R., and Hield, P. (2015). Robust periodic economic mpc for linear systems. *Automatica*, 60:30–37. cited By 28.
- Böhm, C., Lazar, M., and Allgöwer, F. (2012). Stability of periodically time-varying systems: Periodic Lyapunov functions. *Automatica*, 48(10):2663–2669.
- Camacho, E. F. and Bordons, C. (2004). Model predictive control. advanced textbooks in control and signal processing. *Springer-Verlag, London*.
- Cannon, M., Kouvaritakis, B., and Deshmukh, V. (2003). Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance. In *Proceedings of the ACC*.
- Chen, H. and Allgöwer, F. (1998). A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 34(10):1205–1218.
- Chisci, L. and Zappa, G. (2003). Dual mode predictive tracking of piecewise constant references for constrained linear systems. *Int. J. Control*, 76:61–72.

- D' Jorge, A., Anderson, A., González, A. H., and Ferramosca, A. (2018). A robust economic mpc for changing economic criterion. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(15):4404–4423.
- Dačić, D. B., Nešić, D., Teel, A. R., and Wang, W. (2011). Path Following for Nonlinear Systems With Unstable Zero Dynamics: An Averaging Solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(4):880–886.
- De Doná, J. A., Seron, M. M., Mayne, D. Q., and Goodwin, G. C. (2002). Enlarged terminal sets guaranteeing stability of receding horizon control. *Systems & Control Letters*, 47:57–63.
- Diwale, S., Alessandretti, A., Lymperopoulos, I., and Jones, C. N. (2016). A nonlinear adaptive controller for airborne wind energy systems. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 4101–4106. Ieee.
- Ehrlich, B. E., Clausen, C., and Diamond, J. M. (1980). Lithium pharmacokinetics: Single-dose experiments and analysis using a physiological model. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 8(5):439 – 461.
- El-Hawwary, M. I. and Maggiore, M. (2008). Global path following for the unicycle and other results. In *2008 American Control Conference*, pages 3500–3505. IEEE.
- Faulwasser, T. and Findeisen, R. (2016). Nonlinear model predictive control for constrained output path following. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4):1026–1039.
- Faulwasser, T., Weber, T., Zometa, P., and Findeisen, R. (2016). Implementation of nonlinear model predictive path-following control for an industrial robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(4):1505–1511.
- Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2009). MPC for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica*, 45(8):1975–1978.
- Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Castaño, F., and Camacho, E. F. (2011). Optimal MPC for tracking of constrained linear systems. *Int. J. of Systems Science*, 42(8):1265–1276.
- Ferramosca, A., Limon, D., González, A. H., Alvarado, I., and Camacho, E. F. (2012). Robust MPC for tracking zone regions based on nominal predictions. *Journal of Process Control*, 22(10):1966–1974.
- Ferramosca, A., Limon, D., González, A. H., Odloak, D., and Camacho, E. (2010). Mpc for tracking zone regions. *Journal of Process Control*, 20(4):506–516.
- Feuer, A. and Heymann, M. (1976).  $\omega$ -invariance in control systems with bounded controls. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 53(2):266–276.
- Garone, E., Di Cairano, S., and Kolmanovsky, I. (2017). Reference and command governors for systems with constraints: A survey on theory and applications. *Automatica*, 75:306–328.
- Gilbert, E. and Kolmanovsky, I. (2002). Nonlinear tracking control in the presence of state and control constraints: A generalized reference governor. *Automatica*, 38:2063–2073.

- Gilbert, E., Kolmanovsky, I., and Tan, K. T. (1999). Discrete time reference governors and the nonlinear control of systems with state and control constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5:487–504.
- Gilbert, E. G., Kolmanovsky, I., and Tan, K. T. (1994). Nonlinear control of discrete-time linear systems with state and control constraints: A reference governor with global convergence properties. In *Proceedings of the CDC*.
- Gilbert, E. G. and Tan, K. (1991). Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1008–1020.
- Goebel, R., Sanfelice, R. G., and Teel, A. R. (2012). Hybrid dynamical systems: modeling stability, and robustness.
- Gondhalekar, R., Oldewurtel, F., and Jones, C. N. (2013). Least-restrictive robust periodic model predictive control applied to room temperature regulation. *Automatica*, 49(9):2760–2766.
- González, A. H., Adam, E. J., Marcovecchio, M. G., and Odloak, D. (2011). Stable mpc for tracking with maximal domain of attraction. *Journal of Process Control*, 21:573–584.
- González, A. H., Marchetti, J. L., and Odloak, D. (2009). Robust model predictive control with zone control. *IET Control Theory and Application*, 3:121–135.
- Gonzalez, A. H. and Odloak, D. (2009). A stable MPC with zone control. *Journal of Process Control*, 19(1):110–122.
- González, A. H., Rivadeneira, P. S., Ferramosca, A., Magdelaine, N., and Moog, C. H. (2020). Stable impulsive zone MPC for type I diabetic patients based on a long-term model. *Optimal Control Applications and Methods*. Accepted.
- Grosso, J., Ocampo-Martínez, C., Puig, V., Limon, D., and Pereira, M. (2014). Economic mpc for the management of drinking water networks. In *2014 European Control Conference (ECC)*, pages 790–795. IEEE.
- Haddad, W. M., Chellaboina, V., and Nersesov, S. G. (2006). *Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control*. Princeton University Press.
- Henrion, D., Tarbouriech, S., and Kucera, V. (2005). Control of linear systems subject to time-domain constraints with polynomial pole placement and lmis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9):1360–1364.
- Herceg, M., Kvasnica, M., Jones, C., and Morari, M. (2013). Multi-Parametric Toolbox 3.0. In *Proc. of the European Control Conference*, pages 502–510, Zürich, Switzerland. <http://control.ee.ethz.ch/~mpt>.
- Hermans, B., Patrinos, P., and Pipeleers, G. (2018). A penalty method based approach for autonomous navigation using nonlinear model predictive control. *IFAC-PapersOnLine*, 51(20):234–240.
- Kakutani, S. et al. (1941). A generalization of brouwer’s fixed point theorem. *Duke mathematical journal*, 8(3):457–459.

- Kerrigan, E. C. (2000). *Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control*. PhD thesis, University of Cambridge.
- Köhler, J., Müller, M. A., and Allgöwer, F. (2020). A nonlinear tracking model predictive control scheme for dynamic target signals. *Automatica*, 118:109030.
- Kwon, W. H., Bruckstein, A., and Kailath, T. (1983). Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method. *International Journal of Control*, 37(3):631–643.
- Köhler, J., Müller, M. A., and Allgöwer, F. (2018). MPC for nonlinear periodic tracking using reference generic offline computations. *IFAC-PapersOnLine*, 51(20):556–561. 6th IFAC Conference on Nonlinear Model Predictive Control NMPC 2018.
- Lafferriere, G., Pappas, G. J., and Yovine, S. (2001). Symbolic reachability computation for families of linear vector fields. *Journal of Symbolic Computation*, 32(3):231–253.
- Lam, D., Manzie, C., and Good, M. (2010). Model predictive contouring control. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6137–6142. IEEE.
- Lee, J. H., Natarajan, S., and Lee, K. S. (2001). A model-based predictive control approach to repetitive control of continuous processes with periodic operations. *Journal of Process Control*, 11(2):195–207.
- Lee, Y., Cannon, M., and Kouvaritakis, B. (2005). Extended invariance and its use in model predictive control. *Automatica*, 41(12):2163–2169.
- Lee, Y. I. and Kouvaritakis, B. (2006). Constrained robust model predictive control based on periodic invariance. *Automatica*, 42(12):2175–2181.
- Limon, D., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2005). Enlarging the domain of attraction of MPC controllers. *Automatica*, 41:629–645.
- Limon, D., Alamo, T., de la Peña, D. M., Zeilinger, M. N., Jones, C., and Pereira, M. (2012). Mpc for tracking periodic reference signals. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(17):490–495.
- Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2008). MPC for tracking of piece-wise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, 44(9):2382–2387.
- Limon, D., Ferramosca, A., Alvarado, I., and Alamo, T. (2018). Nonlinear MPC for tracking piece-wise constant reference signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(11):3735–3750.
- Limon, D., Pereira, M., De La Peña, D. M., Alamo, T., and Grosso, J. M. (2014). Single-layer economic model predictive control for periodic operation. *Journal of Process Control*, 24(8):1207–1224.
- Limon, D., Pereira, M., de la Pena, D. M., Alamo, T., Jones, C. N., and Zeilinger, M. N. (2015). Mpc for tracking periodic references. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4):1123–1128.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. In *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, pages 284–289.

- Louembet, C., Gonzalez, A. H., and Gilz, P. R. A. (2019). Impulsive zone model predictive control for rendezvous hovering phases. In *Proceedings of 58th IEEE Conference on Decision and Control, CDC*, Nice, France.
- Louembet, C., Gonzalez, A. H., and Sanchez, I. (2020). Computing impulsive equilibrium sets with respect to target zone for linear impulsive systems. In *21st IFAC World Congress*, Berlin, Germany.
- Maciejowski, J. M. (2002). *Predictive Control with Constraints*. New Jersey: Prentice Hall.
- Manathara, J. G., Sujit, P. B., and Beard, R. W. (2011). Multiple UAV coalitions for a search and prosecute mission. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 62(1):125–158.
- Manrique-Espindola, T., Fiacchini, M., Chambrión, T., and Millerioux, G. (2015). Mpc-based tracking for real-time systems subject to time-varying polytopic constraints. *Optimal Control Applications and Methods*, 37.
- Matschek, J., Bähge, T., Faulwasser, T., and Findeisen, R. (2019). Nonlinear predictive control for trajectory tracking and path following: An introduction and perspective. In *Handbook of Model Predictive Control*, pages 169–198. Springer.
- Matveev, A. S., Teimoori, H., and Savkin, A. V. (2011). A method for guidance and control of an autonomous vehicle in problems of border patrolling and obstacle avoidance. *Automatica*, 47(3):515 – 524.
- Mayne, D., Rawlings, J., Rao, C., and Sokaert, P. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36:789–814.
- Michalska, H. and Mayne, D. Q. (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11):1623–1633.
- Muske, K. and Rawlings, J. B. (1993). Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, 39:262–287.
- Nesterov, Y. (2000). Squared functional systems and optimization problems. In *Applied Optimization*, pages 405–440. Springer US.
- Nguyen, H.-N., Bourdais, R., and Gutman, P.-O. (2017). Fast model predictive control for linear periodic systems with state and control constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(17):3703–3726.
- Nielsen, C., Fulford, C., and Maggiore, M. (2010). Path following using transverse feedback linearization: Application to a maglev positioning system. *Automatica*, 46(3):585–590.
- Pannocchia, G. and Kerrigan, E. (2005). Offset-free receding horizon control of constrained linear systems. *AIChE Journal*, 51:3134–3146.
- Pereira, F. L., Fontes, F. A. C. C., Aguiar, A. P., and de Sousa, J. B. (2015a). An optimization-based framework for impulsive control systems. In *Developments in Model-Based Optimization and Control*, pages 277–300. Springer International Publishing.

- Pereira, M., Limon, D., de la Peña, D. M., Valverde, L., and Alamo, T. (2015b). Periodic economic control of a nonisolated microgrid. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 62(8):5247–5255.
- Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., and Diehl, M. (2017). *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*. Nob Hill Publishing.
- Rivadeneira, P. S., Caicedo, M., Ferramosca, A., and González, A. H. (2017). Impulsive zone model predictive control (iZMPC) for therapeutic treatments: application to hiv dynamics. In *Proceedings of the 56th IEEE Conference on Decision and Control*, Melbourn, Australia.
- Rivadeneira, P. S., Ferramosca, A., and González, A. H. (2018). Control strategies for nonzero set-point regulation of linear impulsive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(9):2994–3001.
- Rivadeneira, P. S., Ferramosca, A., and González, A. H. (2015). MPC with State Window Target Control in Linear Impulsive Systems. *IFAC-PapersOnLine*, 48(23):507–512.
- Rivadeneira, P. S., Godoy, J. L., Serenoa, J. E., Abuin, P., Ferramosca, A., and González, A. H. (2019). Impulsive MPC schemes for biomedical processes. application to type 1 diabetes. In Azar, A. T., editor, *Control applications for Biomedical Engineering Systems*. ELSEVIER.
- Rivadeneira, P. S. and González, A. H. (2018). Non-zero set-point affine feedback control of impulsive systems with application to biomedical processes. *International Journal of Systems Science*, pages 3082–3093.
- Rossiter, J. A. (2003). *Model-based predictive control: a practical approach*. CRC press.
- Rossiter, J. A., Kouvaritakis, B., and Gossner, J. R. (1996). Guaranteeing feasibility in constrained stable generalized predictive control. *IEEE Proc. Control theory Appl.*, 143:463–469.
- Sanchez, I., D’Jorge, A., Ferramosca, A., Raffo, G., and Gonzalez, A. H. (2019). Path following and trajectory tracking model predictive control using artificial variables for constrained vehicles. In *2019 XVIII Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, pages 198–203.
- Sánchez, I., D’Jorge, A., Raffo, G. V., González, A. H., and Ferramosca, A. (2021). Nonlinear model predictive path following controller with obstacle avoidance. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 102(1):1–18.
- Sanchez, I., Louembet, C., Actis, M., and Gonzalez, A. H. (2023). Characterization and computation of control invariant sets for linear impulsive control systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 47:101271.
- Sanfelice, R. G. (2019). *Hybrid Model Predictive Control*, pages 199–220. Springer International Publishing, Cham.
- Shen, C., Shi, Y., and Buckham, B. (2017). Integrated path planning and tracking control of an auv: A unified receding horizon optimization approach. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 22(3):1163–1173.

- Skjetne, R. and Fossen, T. I. (2001). Nonlinear maneuvering and control of ships. In *MTS/IEEE Oceans 2001. An Ocean Odyssey. Conference Proceedings (IEEE Cat. No. 01CH37295)*, volume 3, pages 1808–1815. IEEE.
- Sopasakis, P., Patrinos, P., Sarimveis, H., and Bemporad, A. (2015). Model Predictive Control for Linear Impulsive Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(8):2277–2282.
- Spacek, L., Bobal, V., and Vojtesek, J. (2017). Digital control of ball & plate model using lq controller. In *2017 21st International Conference on Process Control (PC)*, pages 36–41. IEEE.
- Sánchez, I. J., D’Jorge, A., Limache, A. C., González, A. H., and Ferramosca, A. (2020). Model predictive periodic output path following. In *2020 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA)*, pages 1–6.
- Tatjewski, P. (2008). Advanced control and on-line process optimization in multilayer structures. *Annual Reviews in Control*, 32(1):71–85.
- Varigonda, S., Georgiou, T. T., Siegel, R. A., and Daoutidis, P. (2008). Optimal periodic control of a drug delivery system. *Computers & Chemical Engineering*, 32(10):2256–2262.
- Verscheure, D., Demeulenaere, B., Swevers, J., De Schutter, J., and Diehl, M. (2009). Time-optimal path tracking for robots: A convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(10):2318–2327.
- Yang, T. (2001). Impulsive control theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 272.
- Yang, Y. (2018). An efficient lqr design for discrete-time linear periodic system based on a novel lifting method. *Automatica*, 87:383–388.
- Yu, S., Li, X., Chen, H., and Allgöwer, F. (2015). Nonlinear model predictive control for path following problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(8):1168–1182.
- Zheng, H., Negenborn, R. R., and Lodewijks, G. (2016). Predictive path following with arrival time awareness for waterborne AGVs. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 70:214–237.





**Doctorado en Ingeniería  
mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas**

Título de la obra:

**Aportes al seguimiento de referencias genéricas con control predictivo basado en modelos**

Autor: Ignacio Julián Rodolfo Sánchez

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

control predictivo basado en modelos, seguimiento, tracking, trayectorias, caminos, referencias dinámicas, sistemas impulsivos, estabilidad, control por zonas.