UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

RUPTURAS EN EL TRATAMIENTO DE LAS DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

Tesis que presenta:

Silvia Bernardis

Para optar el grado académico de:

Magíster en Didáctica Específica
Orientación Matemática

Directora: Dra. Liliana Nitti
Codirectora: Dra. Sara Scaglia

Santa Fe, 2014

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a Hugo, mi esposo, y a mis tres hijos, Romina, Bruno y Ramiro por estar a mi lado y acompañarme siempre. A Nancy, mi mamá, por su ayuda y apoyo incondicional.

Un reconocimiento y gratitud especial para mis directoras, Liliana Nitti y Sara Scaglia, quienes con generosidad, dedicación y esfuerzo me guiaron en cada etapa de esta tesis.

A los investigadores, profesores y estudiantes que, desinteresadamente, colaboraron en este trabajo.

Índice general

Capítulo 1
Problema de Investigación

> La desigualdad es la fuerza y la esencia de toda selección. No hay dos lirios iguales, ni dos águilas, ni dos orugas, ni dos hombres: todo lo que vive es incesantemente desigual.
>
> JOSÉ INGENIEROS

1.1. Delimitación e interés del tema

En nuestras prácticas como docentes de las asignaturas del Primer Ciclo del Profesorado de Matemática, observamos recurrentemente las dificultades que se les presentan a los estudiantes en la comprensión de algunas definiciones y procedimientos que devienen del uso incorrecto de las desigualdades. Algunos de estos problemas se observan en el tratamiento de la definición de límite de una función, los procedimientos de acotación, la comparación de expresiones algebraicas y otras nociones relacionadas al cálculo.

Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del mismo, sin estudiar todo el proceso que le antecede. Esta autora propone desarrollar una investigación que se ubique en la transición álgebra-cálculo, postulando que no existe un paso natural entre estos dominios, sino que se da un desarrollo caótico, provocando una ruptura que impacta en la comprensión de los contenidos del análisis.

Las investigaciones en torno a las dificultades que presentan los estudiantes al utilizar las desigualdades en diferentes contextos, ocuparon desde hace tiempo a numerosos investigadores de la educación matemática, tales como: Diez (1995), Alvarenga (2006), Boero (1997, 1998), citado por Borello (2010), Garuti (2003), Bazzini y Tsamir (2002a, 2002b, 2003), Borello (2007, 2010). En Nitti y Bernardis (2006) estudiamos algunas dificultades en el tratamiento de las desigualdades y sugerimos algunas ideas para remediar el problema en la enseñanza del precálculo y las funciones.

También son numerosos los investigadores que se dedican a estudiar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las nociones del cálculo infinitesimal. Artigue (1995), Tall (1981, 1991, 1994, 1995), Azcárate y Camacho (2003), Calvo (2001) entre otros, resumen las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse al campo conceptual del análisis matemático, detectadas a través de investigaciones empíricas.

Por su parte, Michèle Artigue (1995), al dar una visión sobre los procesos de aprendizaje en ese campo conceptual, muestra que las dificultades se pueden organizar según tres categorías ligadas a:

- la complejidad de los objetos;
- la conceptualización de la noción de límite;
- la ruptura con modos de pensamiento característicos del funcionamiento algebraico.

En la construcción del concepto de desigualdad es fundamental plantear el juego de marcos que propone Regine Douady ya que en cada uno de ellos las situaciones toman dimensiones distintas que se conjugan en una mejor comprensión de los fenómenos que organiza la desigualdad.

En la etapa elemental se inicia la construcción del objeto mental desigualdad, pero como sostiene Freudenthal (1983), es una construcción que no culmina en esta etapa sino que está en una continua reformulación a medida que transcurren los demás temas del currículo. Es en el cálculo donde encuentran las desigualdades su mayor expresión.

Además Tall, en los artículos ya citados, describe las dificultades y construye junto a Dreyfus una teoría psicológica del aprendizaje de la matemática, específicamente de la matemática avanzada (PMA: pensamiento matemático avanzado). Matemática donde los objetos matemáticos básicos no son nuevos para el estudiante (función, número real) pero que no se pueden considerar estabilizados en su mente, y es el Análisis quien va a jugar un papel esencial en su maduración y conceptualización.

Calvo (2001) establece las diferencias que existen entre la enseñanza de la matemática elemental y la avanzada, encontrando ciertas características que las diferencian tales como:

- los conceptos que tratan;
- los procesos de pensamiento que intervienen;
- los estudiantes;
- las estrategias de enseñanza utilizadas.

Siguiendo a Calvo (2001) la *"etapa elemental"* es la que tiene lugar en las clases de matemática, donde se incluye la escuela secundaria obligatoria; y la *"etapa avanzada"* es la que tiene lugar en la enseñanza de la matemática universitaria.

Según esta autora, las diferencias esenciales residen en que los conceptos tratados en matemática avanzada son, en su mayoría, producto de la evolución de conceptos elementales que no son nuevos para el estudiante (función, número real) pero que no se pueden considerar estabilizados en su mente.

En cuanto a las características de los estudiantes en la etapa elemental, Calvo indica que la responsabilidad del aprendizaje, generalmente, recae en el profesor; mientras que en la etapa avanzada los estudiantes toman parte de esta responsabilidad. Por último, señala la autora, en relación con las estrategias de enseñanza utilizadas, que en la etapa elemental se hace énfasis en actividades algorítmicas y que las definiciones son descripciones de los conceptos, tomando como base a la experiencia; en cambio en la etapa avanzada se tiende a construir definiciones formales y a hacer demostraciones.

En este trabajo tenemos como objetivo plasmar nuestra inquietud de investigar el tratamiento de las desigualdades en relación con las cuestiones que necesita construir el estudiante en la matemática elemental para comprender mejor la matemática avanzada.

La presente tesis tiene como foco de estudio a la desigualdad, el cual es un tema básico de cualquier curso de precálculo. Consta de dos etapas: un estudio fenomenológico del concepto y un análisis del proceso didáctico de enseñanza de las desigualdades. Realizamos la investigación en el contexto de enseñanza de precálculo en Santa Fe, específicamente, en el primer año del Profesorado de Matemática (cohorte 2012) de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Por lo tanto, las conclusiones reflejan las características de las experiencias educativas sobre el tema mencionado y su influencia en este grupo de estudiantes.

Este trabajo pretende proporcionar un aporte teórico mediante un estudio fenomenológico de la *desigualdad* matemática, y un estudio de campo, con el propósito de contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje del tema. El objetivo de estos aportes es reflexionar en torno a las condiciones para que los estudiantes construyan buenos objetos mentales (en un sentido que explicamos más adelante siguiendo a Freudenthal) del concepto *desigualdad*, para una mejor comprensión de nociones de matemática avanzada.

Los fundamentos teóricos en los que basaremos esta tesis provienen principalmente de la perspectiva de Freudenthal (1983) que desarrollamos en el capítulo 3.

En esta investigación nos proponemos, en una primera etapa, encontrar fenómenos a los cuales el concepto de *desigualdad* sirve como medio de organización, que son útiles para comprender nociones de la matemática avanzada. Indagamos en los textos que desarrollan la matemática avanzada, en la evolución histórica del concepto y en los usos que hacen del mismo investigadores en matemática. Dicha indagación está orientada a detectar fenómenos que pueden iniciarse en la matemática elemental y se desarrolla en los capítulos 4, 5 y 6 de la presente tesis.

Por otro lado, en una segunda etapa, con el objetivo de estudiar el objeto mental construido por los estudiantes sobre la desigualdad, analizamos el abordaje del tema en la escuela secundaria a través de opiniones de docentes (capítulo 7), propuestas didácticas presentadas en libros escolares (capítulo 8) y tareas resueltas por los estudiantes (capítulo 9).

Las dos etapas mencionadas discurren a través de distintas fases, como explicamos con detalle en la sección 1.5.

Garrote, Hidalgo y Blanco (2004), al analizar las dificultades de los estudiantes para hacer frente a las desigualdades consideran que la ausencia de significado es la causa que condiciona la capacidad para comprenderlas y el proceso algebraico. Esta ausencia de significado tiene como consecuencia el problema del fracaso generalizado de los estudiantes en las asignaturas iniciales de la universidad. Encontramos aquí un conflicto entre el abordaje de la desigualdad en la enseñanza en niveles previos y lo que la matemática avanzada necesita. Esta problemática abona el hecho de que uno de las nociones básicas que es necesario retomar en las asignaturas de precálculo es la de desigualdad.

Como resaltamos en Nitti y Bernardis (2006):

> Estamos inmersos en un mundo donde representar lo cotidiano y la necesidad de contextualizar la enseñanza nos obliga a enseñar matemática de modo que el alumno esté preparado para reconocer, evaluar hechos y tomar decisiones. En este quehacer aparecen las desigualdades. Paradójicamente, con respecto a lo expresado, pareciera que el reino de "lo igual" es más fuerte en cuanto a la enseñanza y a los resultados que se obtienen en el aprendizaje; pues se evidencia por parte de los alumnos un mejor uso de las cuestiones que involucran a las igualdades que a las desigualdades. El mundo que nos rodea no es armónico ni exacto, por lo tanto he aquí el gran desafío. ¿Cómo expresar lo desigual? ¿Cómo interpretarlo? ¿Cómo se preparan nuestros estudiantes para ello? (p. 37)

Esto nos sugiere la presencia de otro conflicto entre el mundo real y el *"diseño del mundo"* en la escolaridad obligatoria. ¿Cuál es el rol que le damos a la desigualdad en la escuela?

Creemos relevante el trabajo planteado en la medida en que sus resultados contribuirán a favorecer las condiciones para lograr una transición menos traumática de la matemática elemental a la matemática avanzada, en lo que refiere a este tema.

1.2. Problema de investigación

1.2.1. Planteamiento del problema

La enseñanza de las desigualdades se inicia en la escuela primaria con la idea de orden y comparación de cantidades, con un tratamiento aritmético, para luego en la escuela secundaria retomarse desde una perspectiva algebraica centrada en la resolución de inecuaciones de distinto tipo. En las asignaturas iniciales de las carreras universitarias o terciarias que tienen matemática en sus planes de estudio, generalmente se vuelve a abordar el tema antes de introducir las primeras nociones del cálculo en una variable.

La revisión bibliográfica realizada muestra que algunos investigadores, tales como Diez (1995), Garuti (2003), Kieran (2004), Tsamir y Almog (2001) entre otros, centran su trabajo en la detección de obstáculos y errores en las producciones de los estudiantes de los distintos niveles en relación al tema. Algunos de ellos plantean consideraciones teóricas que deberían tomarse en cuenta para la implementación de nuevas propuestas didácticas.

Retomando la idea de Artigue (1995) de investigar durante la transición álgebra-cálculo, y con el objetivo de construir un puente que permita facilitar el tránsito de la escuela secundaria a la matemática avanzada, nos ubicamos en medio de estas dos cuestiones: por un lado, las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas que involucran desigualdades y, por el otro, las dificultades en la comprensión de otros contenidos en la matemática avanzada que devienen del uso incorrecto de las desigualdades.

A continuación presentamos el enunciado del problema y los objetivos de la investigación a partir del uso del enfoque de la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas de Freudenthal (1983), cuyo estudio se desarrolla en el capítulo 3.

1.2.2. Enunciado del problema

Existen rupturas entre el objeto mental "desigualdad" construido por los estudiantes en la escuela secundaria y el concepto de desigualdad necesario para el estudio de la matemática avanzada.

El término "ruptura" se utiliza en el sentido de una desvinculación entre las ideas que construye el estudiante y las nociones requeridas en una etapa posterior.

1.2.3. Objetivo general

> *Estudiar distintos fenómenos que organiza el concepto de desigualdad y describir el modo en que se tratan los mismos en la escuela secundaria.*

A los efectos de encontrar evidencias de la ruptura planteada en el problema nos proponemos identificar fenómenos matemáticos que organiza la desigualdad en el tratamiento del tema en libros de textos de matemática avanzada, en datos históricos y en opiniones de investigadores en matemática. A partir de lo hallado indagaremos en las tareas presentadas por los textos escolares que mencionan los docentes. Finalmente, estudiaremos las producciones en el trabajo con desigualdades de estudiantes de primer año del Profesorado de Matemática.

Este estudio se abordará a partir de los objetivos específicos que enunciamos a continuación.

1.2.4. Objetivos específicos

- Identificar y caracterizar fenómenos matemáticos que organiza la desigualdad en textos de matemática avanzada.
- Analizar en reseñas históricas los usos de las *desigualdades*.
- Indagar sobre el concepto de *desigualdad* y los usos que hacen del mismo investigadores en matemática.
- Indagar sobre los usos de las *desigualdades* que priorizan los docentes de las escuelas secundarias y los materiales que utilizan para la enseñanza del tema.
- Analizar el tratamiento del tema en los libros de textos más utilizados por los docentes encuestados para detectar los tipos de tareas matemáticas que abordan.
- Estudiar las producciones de estudiantes del primer año del Profesorado de Matemática en el trabajo con desigualdades con el fin de encontrar evidencias sobre el objeto mental construido.

1.2.5. Hipótesis

Los objetivos propuestos se acompañan de las siguientes hipótesis de trabajo para orientar las acciones de investigación:

- *Hipótesis 1*: existe una ruptura entre el concepto de desigualdad explicitado por los investigadores y el que describen los ingresantes al Profesorado en Matemática.
- *Hipótesis 2*: los fenómenos que organiza la desigualdad necesarios para la matemática avanzada no son priorizados en su totalidad en las tareas propuestas por los libros escolares.
- *Hipótesis 3*: en las producciones de los estudiantes que ingresan a primer año del Profesorado de Matemática predomina una mecanización del proceso de resolución algebraica de una inecuación.

1.3. Etapas de la investigación

Las etapas de este trabajo de investigación están basadas en los tipos de fenomenologías propuestas por Freudenthal (1983). Esos tipos son:

- Fenomenología pura
- Fenomenología histórica
- Fenomenología didáctica
- Fenomenología genética

En el primer caso se trata de fenómenos que están organizados en la matemática tomada en su estado y uso en la actualidad.

En el caso histórico se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó y cómo se extendió a otros fenómenos.

En el caso didáctico intervienen los fenómenos presentes en el entorno de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza.

En el caso genético, los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Según el autor, el orden en que hay que desplegar los distintos tipos de análisis fenomenológico comienza por la pura fenomenología (para la que basta conocer la matemática y sus aplicaciones), se completa con una fenomenología histórica, sigue por una fenomenología didáctica (para la que hay que conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje) y termina, en todo caso, con una fenomenología genética.

Comenta Puig (1997) que aunque Freudenthal establece este orden, asume que las fronteras de cada una de ellas no están definidas, por el contrario, son difusas y en este tipo de análisis se solapan entre ellas.

La fenomenología didáctica como metodología de investigación requiere de la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente.

En primer lugar, con el objetivo de identificar los fenómenos que organiza el concepto de desigualdad indagamos en libros de matemática avanzada, realizamos encuestas a matemáticos investigadores con el fin de abordar la fenomenología pura.

Además, reconstruimos a partir de investigaciones en educación matemática y de bibliografía específica los aspectos históricos, con el propósito de encontrar aquellos fenómenos para los que fue gestado y a los que se extendió posteriormente el concepto de desigualdad. Se trata entonces de abordar la fenomenología histórica.

En tercer lugar, recabamos datos respecto de la fenomenología didáctica, para lo cual realizamos el análisis de encuestas a docentes y de textos escolares. El objetivo es establecer relaciones con los dos primeros estudios para constatar cuáles fenómenos de los encontrados han sido abordados por este grupo de estudiantes. Es por ello que en una instancia final administramos un cuestionario a los alumnos del primer año del Profesorado de Matemática, a los efectos de describir algunas características del objeto mental *desigualdad* que han construido.

Los estudios realizados en estas etapas pretenden analizar las relaciones entre los fenómenos que la matemática avanzada necesita y el objeto mental *desigualdad* que poseen los estudiantes.

1.4. Metodología de investigación

En este trabajo utilizamos una metodología de investigación cualitativa (McMillan y Schumacher, 2005) que persigue describir sucesos complejos en su medio natural, con información preferentemente cualitativa. Una característica de este tipo de estudios es que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que datos numéricos. No obstante, un empleo cuidadoso proporcionará resultados replicables e información válida de los fenómenos estudiados (McKnight, Magid, Murphy y Mcknigt, 2000). En el marco de la modalidad cualitativa, llevamos a cabo dos tipos de indagaciones (McMillan y Schumacher, 2005). Por un lado, una investigación no interactiva, consistente en el análisis de libros de texto con el fin de identificar los aspectos enfatizados en el desarrollo del tema. Por otro lado, una investigación interactiva, caracterizada por el empleo de técnicas para recoger datos en escenarios naturales (McMillan y Schumacher, 2005), como es el caso de las producciones de los estudiantes, las opiniones de investigadores y docentes de secundaria.

Según las fuentes la investigación interactiva es empírica o de campo, ya que el origen de los datos se encuentra en información de primera mano, proveniente de las encuestas. Los instrumentos de recolección de datos utilizados son tres cuestionarios diferentes, administrados a distintos grupos de sujetos.

Según el número de individuos, se trata de un estudio de casos. El caso considerado es el de los estudiantes de la asignatura Matemática Básica del primer año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral que ingresaron en el año 2012.

Según la temporalización, utilizamos métodos transversales, es decir se trata de una investigación sincrónica (McMillan y Schumacher, 2005), debido a que la información es recogida una única vez en un período de tiempo limitado (comienzos del curso académico 2012) y de una población definida (estudiantes del profesorado de matemática, docentes de la escuela secundaria e investigadores de matemática).

Entre los métodos de análisis de datos mencionamos la codificación (revisión de las respuestas a los cuestionarios con la finalidad de determinar patrones que describan características particulares del fenómeno estudiado) y la categorización de datos (McKnight y col, 2000). El proceso de análisis interpretativo lo desarrollamos simultáneamente con la exploración y análisis de la literatura que informa sobre la problemática en estudio.

1.4.1. Sujetos y documentos de estudio

Los sujetos y documentos de estudio de la investigación interactiva son:

- *Investigadores*: que pertenecen a la comunidad matemática del Litoral, que se encuentran actualmente en actividad.
- *Estudiantes*: de primer año del Profesorado de Matemática que cursaron en el primer cuatrimestre del año 2012 la asignatura Matemática Básica. Se trata de un muestreo no probabilístico por conveniencia, ya que es un grupo de sujetos seleccionados sobre la base de ser accesible.
- *Profesores*: de matemática que se desempeñaron en el año 2012 en las escuelas a la que asistieron los estudiantes mencionados en el punto anterior. Se trata de un muestreo no probabilístico intencionado, ya que no incluye muestreo aleatorio y además es un grupo seleccionado de la población de docentes secundarios. El criterio de selección consiste en tomar aquellos que influyeron en la formación de dicho grupo de estudiantes.

Los documentos seleccionados para analizar en la investigación no interactiva están directamente vinculados con los sujetos de estudio de la investigación interactiva, y son los siguientes:

- *Textos de matemática avanzada*: del primer año del Profesorado de Matemática, utilizados por los estudiantes de la muestra.
- *Libros de texto escolares* en los que se aborda el tema, mencionados por los profesores de matemática encuestados.

1.4.2. Instrumentos de recolección de datos

Recolectamos datos a través de cuestionarios con el objetivo de conocer:

- el concepto y el uso de desigualdad que se infiere de las respuestas de investigadores en matemática y docentes de secundaria;
- las características de las producciones en el tema de los estudiantes de primer año del Profesorado de Matemática del año 2012.

Analizamos textos (escolares de matemática secundaria y de matemática avanzada) para conocer:

- la definición de desigualdad que presentan;
- el marco (en el sentido de Douady, 1986) en el que describen las tareas;
- los fenómenos que priorizan en sus propuestas.

1.5. Etapas de la investigación

La agenda para la presente investigación es la siguiente:

1.5.1. Primera etapa: *Búsqueda de fenómenos*

Indagamos en:

- textos de matemática avanzada (capítulo 4);
- reseñas históricas de tesis dedicadas al tema, libros de historia de la matemática y artículos específicos (capítulo 5);
- opiniones de los investigadores en matemática (capítulo 6);

con el objetivo de conocer los sentidos que priorizan al explicitar el concepto de desigualdad, su uso y la importancia que le otorgan. De esta manera esperamos describir los fenómenos matemáticos a los que el concepto de desigualdad sirve de medio de organización.

1.5.2. Segunda etapa: *Análisis de la enseñanza*

Abordamos el estudio de una parte significativa de las múltiples facetas que se mantienen en torno al concepto de desigualdad en la enseñanza secundaria:

- *opiniones de sus docentes*: indagamos en los usos que hacen de las desigualdades, en la importancia que le otorgan y en los materiales que utilizan en el tratamiento del tema (capítulo 7);

- *textos escolares*: analizamos la presentación que realizan del tema y las tareas propuestas para abordarlo (capítulo 8);

- *producciones de estudiantes*: caracterizamos las producciones de los estudiantes, en tareas que requieren el reconocimiento de desigualdades y el empleo de las mismas en la resolución de problemas en diferentes marcos (capítulo 9);

Este análisis nos posibilitará conocer diferentes condiciones y restricciones del tratamiento del tema en la escuela secundaria, así como su influencia en la configuración de los objetos construidos por los estudiantes. Con el propósito de comprobar las hipótesis planteadas, exploraremos en cada una de las facetas analizadas en la segunda etapa si surgen aquellos fenómenos encontrados en la primera.

En el esquema de la figura 1.1 resumimos el proceso que seguimos en esta investigación:

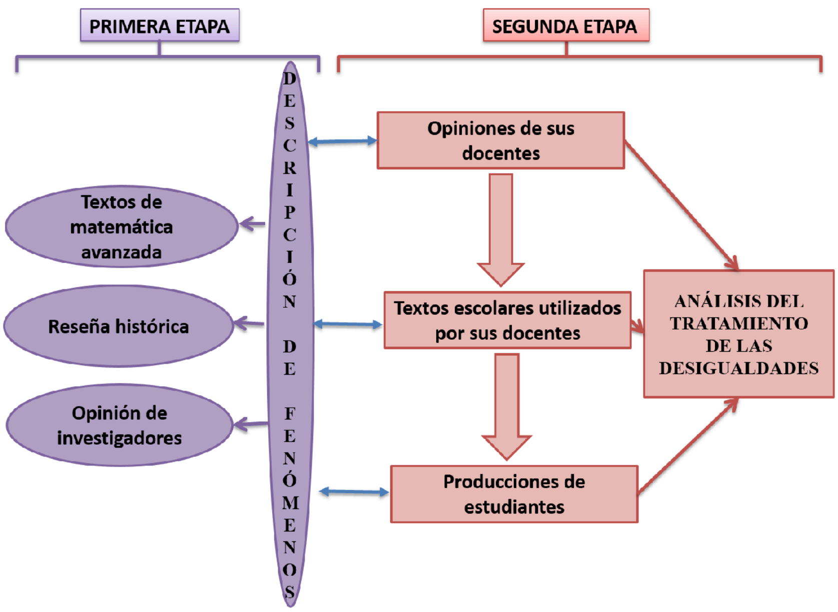


Figura 1.1: Fases de investigación

Capítulo 2

Estado del arte

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas
de razonamientos, todos sencillos y fáciles.
RENÉ DESCARTES

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos una breve descripción de las investigaciones realizadas en el campo de la educación matemática en torno a las desigualdades. En una investigación reciente, Alvarenga y Machado (2012) analizan trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades con el objetivo de delinear un estudio y trazar un mapa de las publicaciones entre 1991 y 2010. A partir de la recopilación realizada, las autoras afirman que las investigaciones sobre el tema desigualdades se originan en Israel. En 1994, dos investigadoras de este país (Sfard y Linchevski) se vinculan con un grupo de especialistas italianos, a partir de la publicación de un artículo sobre desigualdades y ecuaciones en las actas de un evento realizado en Italia, en el Instituto Politécnico de Turín.

Otros congresos que reunieron a investigadores italianos y franceses centrados en estos temas se realizaron en los años 1997, 1998 (2 eventos) y 1999 (*Séminaires Franco—Italien de Didactique de LAlgèbre*—SFIDA). Además, las autoras cuentan con registros de una concentración de publicaciones en el acta de *Psychology of Mathematics Education* (PME). Sostienen que a través de este último evento, puede haber habido una migración del tema a otros países.

En el cuadro 2.1 mencionamos nacionalidades y autores que se dedican a investigar el tema:

Nacionalidad	Investigadores
Israelí	P. Tsamir; A. Sfard; L. Linchevski; N. Almog; D. Tirosh
Italiana	R. Garutti;P. Boero; L. Bazzini; R. Bagni
Singapurense	L. Kin; Alwyn Pang; Dindyal
Francesa	C. Sackur; M. Maurel
Brasilera	K. Alvarenga; Vera de Souza
Griega	Virikos; Farmaki
Portuguesa	Teresa Assude
Mejicana	M. Borello
Tailandesa	Vaiyavutjamai
Canadiense	Halmaghi

Cuadro 2.1: Nacionalidad y autores de investigaciones (tomado de Alvarenga y Machado, 2012, p. 167)

En la figura 2.1 se incluye un mapa de la distribución geográfica de los investigadores en el tema, según las autoras, en el período antes mencionado:

Figura 2.1: Países donde se investiga (tomado de: Alvarenga y Machado, 2012, p. 168)

Las autoras, a partir de los títulos de las investigaciones, detectan que el foco principal de estudio sobre las desigualdades fue el diagnóstico de cómo los estudiantes de todos los niveles, desde la escuela primaria, enfrentan actividades sobre el tema, especialmente inecuaciones lineales y cuadráticas. Sostienen que se han incrementado los investigadores que se comprometen en este sentido, sobre todo en Brasil, no sólo con el fin de examinar la forma de abordar la temática por parte de los estudiantes, sino también para investigar otros aspectos como el enfoque en el currículo y en su enseñanza.

Para describir las investigaciones analizadas distinguimos dos grupos. En un primer grupo detallamos algunas investigaciones referidas a las dificultades de los estudiantes al abordar el trabajo con desigualdades, dentro de éste tomamos las que realizan un análisis de producciones de estudiantes y las que formulan propuestas para mejorar su tratamiento en el aula. Por otro lado, en un segundo grupo, destacamos aquellas investigaciones que indagan concepciones de estudiantes y de docentes respecto del tema.

2.2. Primer grupo

Diez (1995), en un estudio sobre las dificultades de los estudiantes (de 13 y 14 años) en las resoluciones de inecuaciones observa que existe una adquisición de conocimientos inadecuada. Considera que los modos de introducción al tema favorecen el hecho de que los alumnos las interpreten como "ecuaciones deformadas" arrastrando de esta manera, para su comprensión, todos las nociones adquiridas en el aprendizaje de las ecuaciones adaptándolos de una manera forzada. Esto, afirma la autora, crea muchos problemas de comprensión y para remediarlo propone "lecciones" para la superación de estos obstáculos, y utiliza como marco teórico la teoría de las Situaciones Didácticas.

Malara, Brandoli y Fiori (1999), citado por Alvarenga(2006), presentan los resultados de las pruebas aplicadas a los estudiantes en el acceso a la universidad, en relación con el estudio de las desigualdades. Investigaron, más allá de las habilidades técnicas, su capacidad para controlar e interpretar el significado de las desigualdades propuestas. Del análisis de los protocolos de los alumnos surgieron deficiencias conceptuales generalizadas. Entre ellas destacamos: actitudes estereotipadas y de procedimiento, falta de control de los significados de las escrituras algebraicas, falta de coordinación entre los diferentes registros de representación y el lenguaje gráfico (representación y comparación de los datos paramétricos en la recta, la interpretación y la representación verbal en términos algebraicos).

Tsamir y Almog (2001), en el análisis del trabajo de estudiantes de secundaria israelíes sobre la resolución de inecuaciones encuentran que las manipulaciones algebraicas fueron el método más frecuente utilizado, aunque este método produjo la mayor tasa de soluciones incorrectas. Sólo las desigualdades racionales y cuadráticas se resuelven utilizando la gráfica de la función correspondiente para alcanzar la solución. Los que utilizan este enfoque analizaron el signo de la expresión cuadrática y, por lo general, produjeron soluciones correctas. Los autores destacan que muchos estudiantes establecen analogías inapropiadas entre los procesos de solución de las desigualdades y las de las ecuaciones.

Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) describen y analizan errores y dificultades de los estudiantes del primer curso de Bachillerato de las modalidades Tecnológico y Ciencias de la Naturaleza y la Salud en el aprendizaje de las inecuaciones. Los autores concluyen que la comprensión de la inecuación es deficiente en una parte importante de los alumnos. Muchos no establecen diferencias significativas con la ecuación, la diferencia es el signo, que carece de valor semántico. Con relación a los diferentes sistemas de representación los alumnos no usan más que el lenguaje algebraico para abordar las diferentes cuestiones planteadas. Finalmente, resaltan la ausencia de significado como uno de los principales problemas que plantean en el trabajo con inecuaciones y consideran importante que el alumno tenga una idea clara de inecuación equivalente, ya que ésta es el que da significado a las técnicas de resolución.

Garuti (2003) realizó un experimento de enseñanza en dos clases en tercero media (14 años) con dos objetivos: por un lado, poner a prueba la viabilidad de un enfoque funcional de las desigualdades; y por otro, detectar su potencial y las dificultades de los estudiantes. La autora sostiene que en muchos países las desigualdades se enseñan en las escuelas secundarias como un contenido sujeto a las ecuaciones y por lo general mediante un tratamiento puramente algorítmico evitando las dificultades asociadas a la función. Como resultado de este enfoque, los estudiantes son incapaces de tratar las desigualdades que no coinciden con el patrón aprendido. Destaca la autora que los primeros resultados obtenidos confirman la hipótesis de que un enfoque funcional de las desigualdades, junto con una mediación cuidadosa por parte del profesor pone de relieve algunas de las condiciones de enseñanza de la que parece dependerá el éxito de los estudiantes.

Kieran (2004) presenta un breve análisis de una secuencia de aula destinada a introducir las desigualdades. La lección, que fue la primera de una serie de siete, implicó una clase donde el maestro utiliza una situación problemática específica para proporcionar significado a las desigualdades matemáticas y su forma algebraica.Los datos son elaborados a partir del estudio de video TIMSS-R 1999 de las matemáticas de 8$^{\underline{o}}$ grado que enseñan en clases de álgebra. La autora considera que el desafío didáctico es encontrar maneras de ayudar a los estudiantes a tener cuidado con la asimilación de las desigualdades a las igualdades. Destaca que la actividad con problemas contextualizados ha sido utilizada con éxito para proporcionar significado a las desigualdades.

Sackur (2004) realiza observaciones en las aulas con alumnos de 15 y 17 años. Respecto del trabajo de los estudiantes en la resolución de desigualdades matemáticas sostiene que el uso de las gráficas induce nuevas dificultades para los estudiantes, algunas de ellas específicas de las funciones. Destaca la autora que no debe darse por sentado que resolviendo gráficamente los estudiantes aprenden la misma matemática que cuando realizan la resolución algebraica.

Alvarenga (2006) propone un conjunto de construcciones mentales que pueden desarrollar los universitarios a fin de que entiendan el concepto de inecuación. La autora entiende que la enseñanza y el aprendizaje de la inecuación debe de abarcar actividades que involucren: resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación con las funciones, aplicaciones prácticas, empleo de las propiedades de los reales, análisis de equivalencias e implicaciones, uso de calculadoras gráficas y computadora. La diferencia entre los niveles de su enseñanza, según la autora, ocurre en cuanto a la complejidad del estudio.

Borello (2010) describe las reflexiones de Paolo Boero en las Actes de Seminaires (SFIDA—1997, 1998, 1999—) cuando afirma que el alcance de las técnicas que se enseñan resulta ser muy limitado y que las mismas no representan salidas directas y evidentes ni para la aplicación en otras ciencias o materias escolares, ni para las profesiones, ni para la matemática de los matemáticos. Sin embargo, aclara, tienen una persistencia muy fuerte en la enseñanza. Boero reconoce, según la autora, la importancia de un acercamiento epistemológico y cognitivo al objeto *inecuación*. Por ejemplo, reconoce que la historia de la matemática y la historia de la enseñanza de la matemática tendrían elementos para entender la constitución histórica de algún saber concerniente a las inecuaciones en el sentido de la matemática de los matemáticos. Considera por lo tanto necesario salir de las inecuaciones escolares y tomar en cuenta un determinado conjunto de problemas de desigualdades en la matemática pura y aplicada.

2.3. Segundo grupo

Borello, Farfan y Lezama (2008) realizan un estudio acerca de las convicciones y prejuicios de los docentes con respecto al tema de 1as desigualdades. La finalidad inicial de dicho estudio consiste en describir cómo influyen en sus elecciones didácticas y, en consecuencia, afectan lo que los alumnos aprenden o no aprenden. La investigación se coloca bajo el marco teórico de la socioepistemología. Además examinan los resultados de un cuestionario aplicado a un grupo de maestros mexicanos e italianos.

Según los autores, lo analizado ha permitido poner en evidencia cómo el docente, con sus propias convicciones y elecciones, juega un papel fundamental en la construcción de conocimientos significativos por parte de los alumnos. Los profesores consideran las ecuaciones y desigualdades como "objetos" similares que obedecen a reglas diferentes. Destacan que algunos docentes definen la desigualdad describiendo las técnicas usadas para resolverlas, y señalan que como las definiciones no son comprendidas por los estudiantes, utilizan expresiones menos rigurosas con el fin de transmitirlas. Esta observación, comentan los autores, es muy interesante porque es una señal evidente de distanciamiento de la matemática de la escuela y la matemática "pura".

Borello (2010) se propone en su tesis un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor con un enfoque socioepistemológico. En las entrevistas realizadas a docentes (involucrados en la fase de selección en una maestría en Matemática Educativa provenientes de México y de otros países de Latinoamérica), la autora observa que la mayoría de los profesores entrevistados tiene un enfoque procedimental, la inecuación se relaciona inapropiadamente con la ecuación; es decir, se maneja la inecuación como una ecuación “especial” que sigue “más o menos” las mismas reglas. Además detecta una ausencia de prácticas intencionales, como las prácticas de comparar y de acotar, que podrían aportar significado a los objetos matemáticos que se manipulan. Finalmente observa una focalización de lo algebraico en técnicas para resolver adecuadamente.

Halmaghi (2011) realiza un estudio en el que investiga las concepciones de estudiantes universitarios respecto de las desigualdades. La autora describe una tarea que ha sido estudiada en el proceso de derivación de las concepciones de las desigualdades de los estudiantes. La tarea consistía en solicitar a los estudiantes que crearan un ejemplo práctico para mostrar a alguien cómo resolver desigualdades lineales. Además se les preguntaba si el ejemplo era suficiente para alguien que aprende a resolver desigualdades o si era necesario crear más ejemplos para mostrar con amplitud las desigualdades lineales, y si era así, ¿cuántos ejemplos más se necesitaban? Como resultado la autora destaca que identifica cinco concepciones de desigualdad de los estudiantes y las relaciona con el nivel de comprensión del tema por parte de los estudiantes:

Concepción 0: lo asocian a un concepto diferente, las desigualdades tienen representaciones, imágenes de otros conceptos. Por ejemplo, algunos tienen una ecuación lineal con dos variables incorporada en la imagen del concepto de las desigualdades. Entiende la autora que los estudiantes que se encuentran en esta concepción tienen una comprensión que califica como *mal entendida*.

Concepción 1: el estudiante comprende a través de las huellas del conocimiento procedimental de ecuaciones, la desigualdad es percibida como una especie de ecuación, por lo tanto el signo $<$ se sustituye por el $=$ al resolver el ejemplo.

Concepción 2: comprensión contextual de las desigualdades. Sus ejemplos se centran más en el contexto (describen situaciones de la vida real) que en el concepto de desigualdad.

Concepción 3: conocimiento procesual, rastros de comprensión relacional de las desigualdades. Reconocen que las mismas tienen un comportamiento especial cuando multiplican o dividen por una cantidad negativa. Hacen foco en diferentes representaciones de las desigualdades, así como en los aspectos particulares que separa las ecuaciones de las desigualdades. Los axiomas de transformar las desigualdades equivalentes se utilizan correctamente.

Concepción 4: comprensión relacional de las desigualdades. La desigualdad es un concepto matemático que se debe aprender en relación con el reconocimiento de los símbolos, la comprensión de los intervalos y un poco de preparación axiomática. Se centran en ejemplos pilotos en los que incorporan una variación máxima y los aspectos relacionados con las desigualdades.

2.4. Conclusiones

En la descripción de investigaciones realizadas observamos que el tema planteado en esta tesis es de interés en varios países. A pesar de las distintas propuestas de superación, las dificultades de los estudiantes persisten. Además, es importante destacar que las deficiencias conceptuales en una parte importante de los estudiantes es una constante. Así como la ausencia de significado de la desigualdad que se reduce a manipulaciones algorítmicas de la resolución algebraica en muchos casos.

La subordinación de la inecuación a la ecuación es mencionada como una problemática del tema. Esta cuestión aoarece tanto en las concepciones de los estudiantes como en las de los docentes. También la falta de coordinación de registros de representación surge como falencia en las producciones de los estudiantes.

Algunos autores sugieren implementar secuencias que incluyan combinaciones de métodos de resolución, gráfico, funcional y algebraico. Además resaltan la importancia de utilizar el análisis de "transformaciones y equivalencia" en la resolución algebraica.

Otra cuestión importante para destacar es el interés que manifiestan algunos investigadores respecto de indagar en la historia de la matemática y en la de su enseñanza. Así como en el distanciamiento de la matemática escolar y la matemática de los investigadores.

También es interesante el hecho que observan en cuanto a que los docentes, con el afán de hacer más accesible el conocimiento en el abordaje que proponen, podrían provocar dificultades en su comprensión (como lo destacan por ejemplo Borello, Farfán y Lezama, 2008).

Capítulo 3
Marco Teórico

La peor forma de desigualdad es tratar de hacer desiguales cosas iguales.
ARISTÓTELES

3.1. Fundamentos didácticos

3.1.1. Análisis Fenomenológico

Esta investigación se fundamenta en las ideas del matemático y educador alemán Hans Freudenthal (1905-1990). Quien, según Rico (1991), se doctoró en la Universidad de Berlín en 1931, realizó luego su carrera académica y desarrolló sus teorías pedagógicas en Holanda. En 1947 fue miembro fundador de la Comisión Internacional para el Estudio y el Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM) y en 1976 fundó el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME). Desde 1955 fue miembro del ICMI (International Comissión of Mathematical Instruction), siendo su presidente de 1966 a 1970. Entre 1970 y 1976 fue director del Instituto para el desarrollo de la Educación Matemática (IOWO), fundado por él en 1970 en la Universidad de Utrech (en la actualidad Instituto Freudenthal). Es aquí donde comienzan los primeros pasos de la Educación Matemática Realista (EMR).

Según Bressan (2005), esta corriente didáctica nace en los años 60 como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética que se sustentaba en Holanda y a la aplicación en las aulas de la matemática moderna o "conjuntista". Una idea central, sino la más importante de la EMR, es que la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano. La EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como lo es, por ejemplo, el constructivismo), sino que más bien se trata de una teoría global que se basa en las siguientes ideas centrales:

- *Pensar la matemática como una actividad humana*, a la que Freudenthal denomina "matematización" y que, siendo así, debe existir una matemática para todos. La autora cita a Freudenthal (1973, 1991), quién expresa: dado que en gran parte la matemática surge históricamente como herramienta para matematizar situaciones del entorno natural y social, su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones. Esto no significa restringirse a fenómenos del mundo real (perceptual), dado que limitaría las oportunidades para que los alumnos aprendan a operar dentro de la matemática misma. Se trata de que los alumnos, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas suficientes, las reinventen a partir de abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas.

Según Bressan, Zolkower, Gallego (2004) desde este punto de vista el contexto debe ser considerado como un aspecto intrínseco al problema y no como un mero ropaje a eliminar: "Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo es el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo" (Freudenthal, 1991, p. 75).

Según estas autoras, los contextos en la EMR significativos para el estudiante, se constituyen en puntos abiertos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y sus estrategias informales. Sin embargo, para no generalizar y banalizar el concepto de contexto realista es importante tener en cuenta el carácter relativo del mismo. El contexto será realista en función de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

- *Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles*, donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante que se lleva a cabo por un proceso didáctico denominado "reinvención guiada", en un ambiente de heterogeneidad cognitiva. Es decir, un proceso en el que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente. La negociación explícita, intervención, discusión, cooperación y evaluación son elementos esenciales en un proceso constructivo de aprendizaje en el cual los métodos informales son usados como base para el logro de los formales. En esta enseñanza interactiva los estudiantes son convocados a explicar, justificar, acordar o disentir, cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas.

- *Requiere de la fenomenología didáctica como metodología de investigación*, esto es, desde el punto de vista curricular, la reinvención guiada de la matemática como actividad de matematización, requiere de la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente. Las fuentes principales de esta búsqueda son la historia de la matemática, las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes.

Las etapas de nuestra investigación están basadas en estas ideas de Freudenthal de utilizar dichas fuentes principales en la búsqueda de los fenómenos a los cuales las desigualdades sirven como medio de organización.

Para el análisis fenomenológico que nos proponemos abordar, conviene precisar el sentido y el propósito con el que emplearemos "fenomenológico" y "análisis fenomenológico" del conocimiento matemático a tratar. Para ello, tomaremos como referencia las ideas de Freudenthal (1983) sobre estas nociones.

El sentido que Freudenthal (1983) le da al término fenomenología, como método de análisis de los contenidos matemáticos queda descripto en el siguiente párrafo:

> Fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlos en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica. (p. IX)

Para Freudenthal los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos, tanto del mundo real como el de la matemática. En nuestra investigación nos centraremos en los fenómenos matemáticos. La propuesta de Freudenthal (1983) consiste en comenzar por los fenómenos que solicitan ser organizados y desde aquí enseñar a manipular los correspondientes medios de organización. El enfoque adoptado por dicho autor se fundamenta en su concepción sobre la naturaleza de la matemática: "nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas han sido inventados como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental"(p. IX).

La matemática es entendida como una creación del hombre y no como un descubrimiento de algo que existe en un mundo separado independiente del sujeto.

Respecto del término análisis fenomenológico, Puig (1997), siguiendo a Freudenthal señala que:

> El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también

> es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. (p. 63)

Para Puig el medio de organización es entendido como "la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos" (p. 64).

En nuestra investigación adoptaremos esta idea de Puig respecto de análisis fenomenológico en cuanto a descripción de los fenómenos (matemáticos en nuestro caso) para los que el concepto de *desigualdad* es medio de organización.

Armendaris, Azcárate y Deulofeu (1993) mencionan a Freudenthal como uno de los detractores del movimiento que aboga por la aproximación estructuralista en Matemática. Dicho movimiento asume el problema del cómo enseñar y sostiene que los alumnos cuyas estructuras cognitivas no alcancen los grados de complejidad adecuados para asimilar "las estructuras matemáticas" (no necesariamente las algebraicas), pueden acceder a ellas de forma intuitiva e incluso emprender generalizaciones y abstracciones aun cuando sólo perciban parte de lo relacionado y lo generalizado. La combinación de actividad-descubrimiento y el desarrollo del curriculum en espiral se convierten en recursos metodológicos que permiten al alumno comportarse en cierta medida como un científico que va "rellenando" tales estructuras; además comentan los autores que Bruner asegura que el progreso tendrá lugar secuencialmente desde los niveles más bajos a los más altos y de lo menos a lo más complejo. Por tanto, para que cualquier idea o problema se puede encontrar una forma lo suficientemente sencilla de presentación a los alumnos, de forma que fuera reconocible y/o comprensible por ellos, en función del nivel de desarrollo cognitivo o del nivel del desarrollo conceptual.

Mencionan además, que la teoría de las representaciones de Bruner y los principios estructuralistas de Bruner y Piaget han tenido repercusiones importantes en el desarrollo de la didáctica de la matemática y concretamente en la aparición de distintos tipos de materiales entre los que se encuentran los desarrollos de Dienes. Afirman que Dienes era conocido por sus materiales manipulativos y por su obra escrita que recoge entre otras ideas su teoría del proceso cíclico del aprendizaje de la Matemática, con una sucesión de estadios: juego libre, detección de regularidades, representación, descripción verbal y definición (citan a Dienes, 1970). Mencionan que Dienes creía que los niños son constructivistas por naturaleza, más que analíticos y que se construyen una imagen de la realidad a partir de sus experiencias con los objetos del mundo y, de esta manera, dado que las relaciones y pautas matemáticas no son evidentes, Dienes propone que se "materialicen" estas estructuras en forma de materiales para la enseñanza. Los autores aclaran que la idea de materializar tiene que ver con que se concretarán o que tomarán cuerpo, características y propiedades tanto cuantitativas como cualitativas, permitiendo aproximaciones "concretas" a cuestiones que tradicionalmente sólo eran manipuladas simbólicamente.

Los autores señalan que a estos planteamientos se le opone la postura de Freudenthal, citan a Freudenthal (1984) alegando que hay abstracciones que no pueden ser captadas por los alumnos pese a ser materializadas.

Freudenthal advierte que se intentan materializar los objetos desnudos (Freudenthal ejemplifica esta cuestión haciendo referencia a Dienes y sus materiales, que pretenden ser conceptos abstractos materializados, a los que se ha dado cuerpo) y que estas concreciones son habitualmente falsas, pues de esta manera no pueden reflejar los rasgos esenciales de los conceptos a los que remiten, ni siquiera a determinados aspectos de dichos conceptos. Didácticamente esto significa que "el carro va delante del caballo": enseñar abstracciones haciéndolas concretas. Frente a esto propone lo que él llama la fenomenología didáctica. Lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización.

Aclara Freudenthal que para este enfoque contrario ha evitado el término "adquisición de conceptos" intencionadamente. En su lugar habla de la constitución de los objetos mentales.

En el proceso de construcción del conocimiento matemático Freudenthal (1983) distingue entre *phainómenon* y *noúmeno*. *Phainómenon* es el fenómeno que queremos comprender y estructurar, mientras que *noúmeno* corresponde a las entidades de pensamiento con las que organizamos tal fenómeno. *Noúmeno* procede de *noos* o *nous*, forma arcaica, cuyo significado es mente, inteligencia, pensamiento, memoria, razón, intelecto, incluso, alma, intención y deseo. De ahí el sustantivo *to nooumenon*, lo que sólo es capaz de concebirse con la mente, la idea. Mientras que *phainómenon* procede de *phanomai*, verbo antiguo que significa aparecer, mostrarse, manifestarse, hacerse visible, de ahí *to phainomeno*, lo comprensible o inteligible sólo a través de la experiencia. Los conceptos, ideas y estructuras matemáticas sirven para organizar los *phenomena* tanto del mundo real como el del imaginario. Para enseñar la teoría de grupos, en vez de empezar por los axiomas que constituyen un grupo y buscar materiales que concreticen ese concepto, se debería indagar primero sobre los fenómenos que pudieran ayudar al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto de grupo.

Para Freudenthal, los objetos matemáticos son *noúmeno* y una parte de la matemática puede ser experimentada como un *phainómenon*. Con respecto al tema de investigación que nos compete podemos interpretar que la desigualdad matemática es un *noúmeno* pero trabajar con desigualdades es un *phainómenon*. Para una mejor interpretación de estos términos reflejamos sus relaciones mediante el esquema de la figura 3.1:

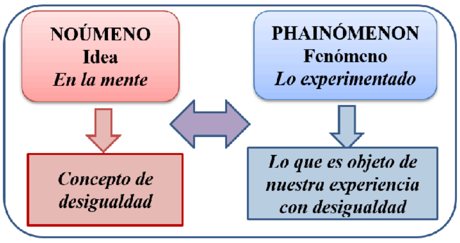


Figura 3.1: Proceso de construcción del conocimiento matemático

En el planteo de la contraposición objeto mental/concepto, el autor expresa que es una contraposición entre lo que está en las cabezas de las personas y lo que está en la matemática como disciplina. Es más común que encontremos la expresión "concepción" como el concepto que tiene una persona, pero siguiendo las ideas del autor es más adecuada la expresión "concepto", ya que con el término "concepción" se quiere subrayar que lo que hay en la mente de esa persona es una parte o una forma de ver el concepto.

En nuestra investigación, como se muestra en la figura 3.2, utilizamos los términos *concepto de desigualdad* para *noúmeno*, es decir, cada vez que los mencionamos estamos pensando en lo que está en la mente del estudiante referido a la desigualdad y con respecto a fenómeno, optamos por describir los del tipo matemático (aquello de lo que tenemos experiencia matemática).

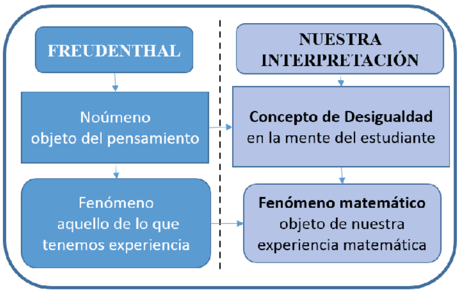


Figura 3.2: Términos de nuestra investigación

Dado que el tema de esta investigación está relacionado con la *desigualdad*, nos interesa focalizar en el "objeto mental desigualdad", con la idea de que éste se va cimentando y extendiendo a lo largo de la historia escolar del estudiante, mediante una reelaboración y complejización en el tiempo. Según Freudenthal, lo que importa en la escuela secundaria es que este proceso de constitución de objetos mentales no culmina en un determinado momento con la constitución de un objeto mental inmutable y estático, tras el cual se tratarán de constituir otros objetos mentales. Por ejemplo: si comenzamos con la noción de orden en los números naturales, mediante el uso de la comparación de elementos de este conjunto, cuando retomemos esta idea en el conjunto de los números racionales esta comparación tiene otras características que irán modificando el objeto mental construido para los naturales.

Por otro lado, los objetos matemáticos no tienen existencia independiente del proceso de la actividad matemática en la que surgen. Es decir, están en un proceso continuo de construcción que puede ir transformando el concepto según el uso que se hace de él en una demostración o en la resolución de un problema. Por lo que la interrelación objeto mental/concepto es un ida y vuelta, ambos se van enriqueciendo.

Siguiendo a Freudenthal en cuanto a su postura didáctica: el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos (tanto temporalmente como en orden de complejidad). En el tema que nos interesa, es necesario que los estudiantes tengan experiencias con los distintos fenómenos a los que sirve la *desigualdad* como medio de organización. Primero es necesario que descubran las relaciones que se establecen trabajando con ellos, que se logren ubicar en distintos contextos en los que se utilizan para construir un objeto mental *desigualdad* lo suficientemente rico que permita lograr la adquisición del concepto.

Luis Puig (1997) retoma una idea de sistema matemático de signos que tiene origen en trabajos realizados por Filloy (1993) para explicar en términos semióticos la diferencia entre objeto mental y concepto que hace Freudenthal. Filloy (1993), citado en Puig (1997), introdujo la necesidad de usar una noción de sistemas matemáticos de signos lo suficientemente amplia como para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos tanto los que producen los alumnos como los textos matemáticos históricos.

Adaptaremos la explicación realizada en Puig (2001) para el objeto mental "número" al tema que nos ocupa, la *desigualdad*.

Las desigualdades se usan en contextos muy diversos. Una lista de esos contextos puede incluir los de comparación, acotación, estimación, optimización.

Es importante explorar los significados que la desigualdad adopta en cada uno de ellos. La importancia radica en la necesidad de exponer al estudiante a ese cambio de un contexto a otro, de manera de enriquecer su objeto mental. Aquí la idea de significado, siguiendo a Wittgenstein (1980) tomado de Puig (2001), está constituida por el uso que se hace de un término. Los usos de las desigualdades en cada uno de esos contextos siguen reglas distintas, por ejemplo, cuando se utiliza para comparar números naturales, se trata de encontrar una relación entre las posiciones que ocupan los dos objetos en un conjunto ordenado; cuando se realiza una acotación de una expresión algebraica con variables reales, se busca un valor o una expresión que supere (o sea menor) que todos los elementos del conjunto de valores que puede tomar una expresión, etcétera.

La totalidad de los usos de las desigualdades en todos los contextos constituye el campo semántico de “desigualdad”, el significado enciclopédico de “desigual”. La identificación del contexto desigualdad permite a quien lee el texto, o recibe el mensaje, atenerse a la restricción semántica que establece el mismo e interpretarlo en forma correcta. Por ejemplo, si tomamos el marco funcional para resolver una inecuación, estamos ubicados en una restricción semántica de este concepto: las desigualdades en el conjunto de las funciones.

Según Puig (2001) el sujeto que lee un texto no opera con la totalidad de los usos producidos en una cultura o una episteme, sino en su campo semántico personal. El estudiante expuesto a experiencias diversas con estos fenómenos que organiza el concepto de desigualdad, manipula con nuevos usos su campo semántico personal para interpretarlo y si lo logra hacer correctamente el sentido se convierte en un nuevo significado que amplía su campo semántico personal. El objeto mental “desigualdad” se corresponde en esta descripción semiótica con el campo semántico personal.

En estos términos, la intención del currículo tendría que ser que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico (abarque suficiente enciclopedia) como para permitirle interpretar de forma correcta todas las situaciones en las que haya de usar “desigualdades”.

Puig (2001) menciona que una fenomenología didáctica muestra, por otra parte, que en el camino hacia la constitución de un objeto mental, como por ejemplo el de razón y proporción, desempeñan un papel importante objetos mentales precursores de dicho objeto. Señala el autor que un buen número de ellos tienen carácter cualitativo y que involucran comparaciones de razones como el contexto en el que se le puede dar sentido a la igualdad de razones, es decir, a la proporción. Entre ellos considera particularmente importante lo que Freudenthal llama el objeto mental “relativamente”. Destaca que este objeto mental es el que permite decir con sentido, por ejemplo, que un chocolate es más dulce que otro porque contiene relativamente más azúcar, y ese “relativamente” se refiere a un criterio de comparación que puede estar implícito o explícito, como por ejemplo el peso.

> El objeto mental relativamente se constituye en la enseñanza gracias a:
>
> - Entender que las ordenaciones entre objetos pueden relativizarse (relativamente mayor, menor, más, menos).
> - Entender “relativamente” en el sentido de “en relación con ... ”, con el criterio de comparación en el lugar de los puntos suspensivos.
> - Usar con sentido “relativamente” y “en relación con”.
> - Completar “relativamente” y “en relación con” en un contexto.
> - Conocer operativamente lo que “relativamente” y “en relación con” significan.

- Explicar lo que “relativamente” y “en relación con” significan. (Puig, 2001, pp. 22-23)

Freudenthal supone que el objeto mental “relativamente” ocurre al final de la educación infantil. Constituir un objeto mental conlleva poder dar cuenta con él de todos los usos en todos los contextos o poder organizar todos los fenómenos correspondientes, de ese modo el objeto mental está bien constituido. El objetivo de la escuela que marca Freudenthal es esta elaboración de buenos objetos mentales.

Según Arnau (2011), desde un punto de vista escolar, podemos partir de dos accesos para dar cuenta de los distintos usos del número: el acceso ordinal y el acceso cardinal. El primero de estos dos accesos se apoya en la actividad de contar y tendría su soporte formal en la construcción del número según Peano. El acceso cardinal, por su parte, se basa en la operación de coordinar conjuntos y respondería a la construcción del número natural según Cantor. Según el autor podríamos considerar una supuesta tercera vía que combina el acceso cardinal y los resultados obtenidos por Piaget y sus colaboradores sobre la construcción psicológica del número. Como la construcción del número exige la participación simultánea de estructuras de clasificación y seriación, los defensores de este acceso concluyen que el número supone la construcción simultánea del número cardinal y ordinal.

Para Freudenthal, la actividad de contar es la base sobre la que se construye la aritmética. Afirma que los autores que proponen un acceso cardinal malinterpretan la matemática y destaca que: “incluso los niños están mejor informados que ellos” (1973, p. 172).

Piaget (1971) describe las nociones lógico-matemáticas referentes a la seriación, como proceso previo para establecer orden entre los objetos, comprender las diferencias de tamaño, establecer relaciones “más grande que” y “menor que”. Estos procesos los considera fundamentales para que el niño establezca las reglas de la transitividad, fundamentales para introducir la noción de número. El autor señala que hacia los seis años y medio o los siete un niño descubre un método operatorio que consiste en buscar, en primer lugar, el elemento más pequeño de todos y, después, el más pequeño de los que quedan, logrando de esta forma construir su serie total sin titubeos ni errores. Es entonces cuando es capaz, por este mismo hecho, del razonamiento: $A < B$; $B < C$, por tanto $A < C$. Pero se ve inmediatamente que esta construcción supone la operación inversa (la reversibilidad operatoria implica volver al punto inicial): cada término de una serie es concebido simultáneamente como más pequeño que los siguientes (relación $<$) y como más grande que todos los precedentes (relación de $>$) y esto es lo que le permite al sujeto encontrar su método de construcción. Estas operaciones están estrechamente relacionadas con la construcción misma de las nociones de peso y de volumen y, principalmente, con la elaboración de los principios de conservación que les son relativos. Menciona el autor que debe esperarse hasta los once o doce años para obtener por ejemplo la seriación (coordinación de relaciones asimétricas) de los volúmenes.

A pesar de las diferencias de posturas respecto de la construcción del número, desde un punto de vista escolar observamos que tanto la consolidación de este objeto mental "relativamente", para Freudenthal, como las nociones lógico-matemáticas referentes a la seriación, para Piaget, ocurren al final de la educación infantil. Es razonable pensar entonces que el mismo se construye en la escuela primaria, cuestión con la que acordamos. Efectivamente, en las cuestiones aritméticas los estudiantes pueden hacer uso del mismo, pero ¿qué sucede en el camino de la aritmética al álgebra? Claramente las cuestiones más abstractas relacionadas a la desigualdad no son bien construidas tampoco en la escuela secundaria. Como afirma Alvarenga (2006), la resolución de las inecuaciones es emprendida por alumnos de enseñanza media y superior con innumerables errores de concepción, de entendimiento y de empleo de las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales. Tales errores son bastante comunes en los diferentes niveles. En los cursos de cálculo, como hemos manifestado, los estudiantes tienen serias dificultades, entre otras, en la comprensión de la definición de límite de una función y en la utilización de la acotación para probar la convergencia de sucesiones o la existencia de un límite funcional.

Es visible entonces que existe una ruptura entre la escuela primaria, con su abordaje desde el punto de vista aritmético, del objeto mental "desigual" y lo que el precálculo y el cálculo necesitan para que pueda ser comprendido el juego en que las desigualdades están implicadas y los fenómenos que son propios de esta área de la matemática.

En el camino desde la aritmética a la matemática avanzada pareciera que hay algo que no hacemos bien. Esta suposición está basada en el hecho de que con el objeto mental *desigualdad*, que los estudiantes construyen en ese trayecto tienen dificultades para comprender las nociones del cálculo, por ejemplo. En el esquema de la figura 3.3 mostramos esta relación, aprovechando la imagen de una obra del pintor cubano Pedro García Espinosa llamada Ruptura.

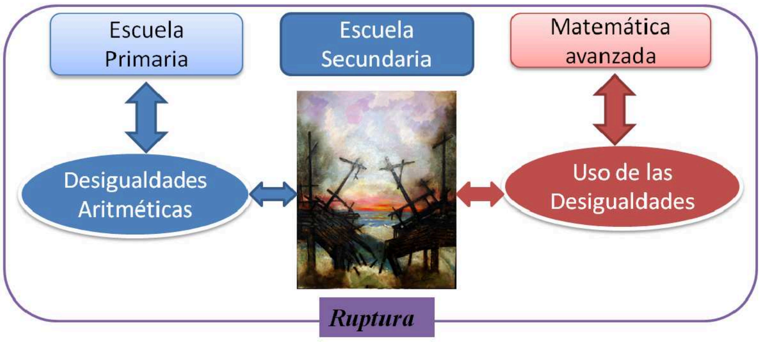


Figura 3.3: Desigualdades de la escuela primaria al cálculo

Una clara interpretación de este esquema relacional es que la escuela secundaria no ha sido un puente efectivo para la conexión entre la aritmética y el álgebra. También es importante destacar que cuando el estudiante ha transitado el camino de la aritmética al álgebra, en la escuela secundaria o en la universidad cuando utiliza la modelización de situaciones a través de una desigualdad, no hace uso de la intuición que manejaba con la aritmética. Por ejemplo, en problemas donde las cuentas algebraicas se complican no se observa el uso de una estrategia aritmética para estimar la solución, o al menos conjeturar la relación que deberán probar en general. Es decir, existe una ruptura también en la vuelta a la intuición. "Según Freudenthal, es más probable que las fuentes originales de intuición hayan sido esbozadas y el camino de vuelta a la intuición esté bloqueado por los procesos de algoritmización y automatización" (Puig, 2001, p. 39).

3.1.2. Conexiones entre las ideas de Freudenthal y Perkins

Las dificultades de los estudiantes para abordar situaciones en distintos contextos que utilizan el concepto desigualdad matemática han sido analizadas por varios investigadores en educación matemática como Diez (1995), Malara, Brandoli y Fiori (1999), citado por Alvarenga (2006), Garrote, Hidalgo y Blanco (2004).

En términos del enfoque de Freudenthal interpretamos que los estudiantes no logran construir "buenos objetos mentales" de *desigualdad* matemática. A continuación nos proponemos relacionar estas ideas de Freudenthal con el síndrome del "conocimiento frágil" que postula Perkins (1995).

En el análisis que realiza Perkins (1995) de la situación educativa norteamericana, diagnostica dos grandes deficiencias: el síndrome del "conocimiento frágil" y la presencia del "pensamiento pobre". El síndrome del "conocimiento frágil" se manifiesta en una combinación de cuatro síntomas:

- *el conocimiento olvidado*: es un conocimiento que no ha sido retenido por los alumnos, sólo lo han recordado por períodos cortos.

Por ejemplo: Halmaghi (2011) encuentra que estudiantes universitarios asocian la desigualdad a un concepto diferente, tienen representaciones, imágenes de otros conceptos.

- *el conocimiento inerte*: en este tipo de conocimiento los alumnos son incapaces de recordarlo o de usarlo en situaciones sin la ayuda de alguien que se los sugiera.

  En este sentido observamos por ejemplo que cuando necesitamos hallar el dominio de una función y aparecen inecuaciones, es necesario retomar el procedimiento de resolución de las mismas pues no recuerdan de qué se trata. Al guiarlos con los primeros pasos algebraicos, ellos pueden continuar hasta hallar el conjunto solución. Garuti (2003) sostiene que en muchos países, las desigualdades se enseñan en las escuelas secundarias como un contenido sujeto a las ecuaciones y por lo general mediante un tratamiento puramente algorítmico evitando las dificultades asociadas con la función.

- *el conocimiento ingenuo*: este conocimiento se caracteriza por teorías ingenuas o estereotipos.

  Malara, Brandoli y Fiori (1999), citados por Alvarenga (2006) presentan los resultados de pruebas aplicadas a estudiantes recién ingresados en la universidad relativos al estudio de desigualdades y describen actitudes estereotipadas en los procesos resolutivos.

- *el conocimiento ritual*: los alumnos aprenden a seguirle el juego a la escuela, no entienden lo que se les enseña, o al menos no por completo, y compensan esa insuficiencia con rituales.

  Tsamir y Almog (2001) en el análisis del trabajo de estudiantes israelíes sobre la resolución de inecuaciones encuentran que las manipulaciones algebraicas fue el método más frecuente utilizado. Destacan que muchos estudiantes establecen analogías inapropiadas entre los procesos de solución de las desigualdades y las de las ecuaciones.

  Diez (1995) considera que los modos de introducción al tema favorecen el hecho que los alumnos las interpreten como "ecuaciones deformadas", arrastrando de esta manera, para su comprensión, todo lo adquirido en el aprendizaje de las ecuaciones adaptándolo de una manera forzada.

En este sentido, consideramos que si los estudiantes construyen a lo largo de su historia escolar, objetos mentales pobres de la *desigualdad* matemática, utilizamos "pobre" en oposición a "suficientemente rico" expresado por Puig (2001), tienen un conocimiento frágil del mismo. En el esquema de la figura 3.4 presentamos visualmente esta situación:

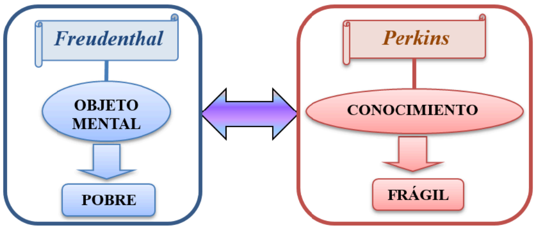


Figura 3.4: Relación entre Freudenthal y Perkins

3.1.3. Conexiones entre las ideas de Freudenthal y Douady

Para contribuir a formar “buenos objetos mentales” de *desigualdad* matemática, será necesario en primer lugar: identificar aquellos fenómenos a los cuales sirve de medio de organización, para luego elaborar situaciones de enseñanza en distintos contextos.

En el presente trabajo, tenemos en cuenta que la presentación de un contenido matemático bajo distintos marcos promoverá en el estudiante la constitución de un objeto mental del mismo que le permita comprender distintos sentidos y aplicaciones. Por esa razón consideramos de interés reflexionar sobre los aportes de Regine Douady en torno a esta problemática. La autora considera que “un marco está formado por los objetos de un dominio de las matemáticas, las relaciones entre objetos, sus formulaciones eventualmente diversas y las imágenes mentales asociadas a estos objetos y sus relaciones” (1986, p. 11).

La autora destaca que las traducciones de un marco a otro conducen a resultados no conocidos, a técnicas nuevas, a la creación de objetos matemáticos nuevos, en suma, al enriquecimiento del marco origen y de los marcos auxiliares de trabajo. Aclara que dos marcos diferentes pueden tener los mismos objetos matemáticos pero diferentes imágenes mentales asociadas a ellos, como también las cuestiones conceptuales que generan.

Sostiene que una pregunta interesante es ¿cuándo se realiza un cambio de marco? Considera que el cambio de marco se realiza ante la necesidad de presentar diferentes formulaciones de un mismo problema, por las dificultades que presenta o por la posibilidad de acceder a otras herramientas. Además menciona que estas herramientas no sólo pueden favorecer la solución del mismo sino también la adquisición de conceptos.

Explica que los cambios de marcos pueden ser espontáneos, es decir, por la iniciativa de un alumno o provocados por otro alumno o docente para hacer avanzar en los conceptos, desbloquear una situación o hacer evolucionar o complejizar una concepción. En este sentido, menciona que podemos ayudar al alumno a comprender un problema dentro de un marco u otro, mediante distintos procedimientos acordes a cada uno de ellos. Piensa que estos procedimientos permitirán entender la matemática como un todo integrado, favoreciendo la integración de los diferentes dominios de esta ciencia.

En el caso de las desigualdades, existen diferencias en el tratamiento de las mismas en distintos marcos. Cada uno de estos marcos aporta al objeto *desigualdad* de un modo determinado e inherente al mismo. Es por ello, que consideramos importante que los estudiantes aborden situaciones que les permitan poner en juego, según sea el caso, cualquiera de ellos. Por ejemplo, en los problemas siguientes:

> Problema 1: *Para $x \in \mathbb{R}$, si $x < 1$ ¿cómo es x^2?*
>
> Problema 2: *Si el lado de un cuadrado es menor que 1, ¿cómo es su área?*

Podemos observar que ambos involucran las mismas desigualdades, sin embargo toman de los marcos sus características propias. El primero, claramente se trata de un marco algebraico y el segundo de un marco geométrico. Estos dos marcos diferentes tienen los mismos objetos matemáticos pero distintas imágenes mentales asociadas y generan cuestiones conceptuales diversas.

Estimamos que el objeto mental *desigualdad* que construyen los estudiantes será rico en la medida en que se brinden experiencias para lograr imágenes construidas de distintos marcos.

3.1.4. Ruptura álgebra/cálculo

Expondremos a continuación las ideas de Artigue (1995) respecto de las dificultades evidentes en el aprendizaje del cálculo ya que sus consideraciones abonarán nuestro trabajo de investigación.

La autora clasifica las dificultades de acceso al cálculo. Afirma que son de diversa índole y las agrupa en grandes categorías:

- *Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo* (números reales, sucesiones, funciones) y al hecho de que estos objetos se construyen plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que contribuya a tal conceptualización.

- *Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite*, central en el campo del cálculo.

- *Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos.* En álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la igualdad $a(x) = b(x)$ en una sucesión finita de igualdades $a_i(x) = b_i(x)$ hasta obtener dos expresiones idénticas. Mientras que en el cálculo, para x perteneciente a un entorno o vecindad de un punto a, $f(x) < g(x)$, siendo f y g funciones, es necesario comprender que no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo abierto

> con centro en a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante estimaciones. Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes. Destaca la autora que, si la ruptura numérico/algebraico se identificó de forma clara en las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra, la ruptura álgebra/cálculo, por el contrario, se ha trabajado muy poco sobre el aprendizaje del cálculo.

La autora describe estas dificultades detalladamente, en primer lugar las asociadas con los objetos básicos del cálculo. Explica que cuando se inicia la enseñanza del cálculo, los números reales y las funciones no son objetos que los estudiantes desconocen del todo. Pero menciona que se trata de objetos "en construcción" que no se pueden considerar "inertes" a medida que se efectúa el aprendizaje del cálculo.

La *desigualdad* es una de las nociones básicas necesarias para los temas del cálculo, de allí la necesidad de su tratamiento en la escuela secundaria. En la etapa elemental se inicia la construcción de este objeto pero, como sostiene Freudenthal (1983), es una construcción que no culmina en esta etapa sino que está en una continua reformulación a medida que transcurren los demás temas del currículo. Es en el cálculo donde encuentran las desigualdades su mayor potencialidad.

Es fundamental que como docentes comprendamos esta situación para presentar a los estudiantes tareas para que puedan construir buenos objetos mentales de la *desigualdad* matemática.

Otro de los conceptos básicos citados por la autora es el de función. En particular cuando se refiere a las articulaciones de los registros simbólicos, menciona las dificultades que ocasionan los hábitos de la enseñanza tradicional. El gran predominio que se le otorga al registro algebraico y el status infra-matemático que se da al registro gráfico impiden manejar adecuadamente este tipo de dificultades y ayudar al estudiante a construir las flexibilidades necesarias en este nivel. Artigue (1995) aborda la ruptura álgebra/cálculo a partir de los aportes de la teoría de marcos de Douady (1986). Menciona la dificultad del status de herramienta y los cambios de marcos (numérico, geométrico, o externos a las matemáticas) que necesitan de tal traducción para ser resueltos. En la construcción del concepto de *desigualdad* es fundamental plantear el juego de marcos que propone Regine Douady, ya que en cada uno de ellos las situaciones toman dimensiones distintas que se conjugan en una mejor comprensión de los fenómenos que organiza el concepto de *desigualdad*. Es en el marco funcional donde se encuentran los fundamentos del uso de las desigualdades, de acuerdo a la transformación aplicada a la relación de desigualdad podremos determinar la relación entre los transformados. La equivalencia de las inecuaciones luego de efectuada la transformación puede comprenderse cabalmente en términos funcionales.

Uno de los planteos de esta tesis es que en el caso de las desigualdades existe una tendencia escolar cuyo tratamiento se limita sólo al marco algebraico y no se evidencia su uso en los marcos funcional y geométrico. Sabemos que estos últimos aportan otra mirada que permite una visualización de situaciones que quizás algebraicamente son complejas de resolver. Además, en el marco funcional, algunas cuestiones toman su verdadero sentido. Por ejemplo, en los problemas:

Problema 1: *Para* $x \in \mathbb{R}$, *si* $x < 2$ *hallar una cota para* $2x + 3$.

Problema 2: *Para* $x \in \mathbb{R}$, *resolver la inecuación* $2x + 3 < 7$.

en el marco algebraico, el procedimiento que se utiliza en los dos casos consiste en la transformación de la inecuación propuesta en otra equivalente. En cambio en el marco funcional la situación cambia, en el primer caso: dada una cota para la variable independiente buscamos una cota para la función $f(x) = 2x+3$; y en el segundo: dada una cota para la función buscamos una cota para la variable independiente.

Respecto del último ítem que presenta Artigue (1995) de las dificultades asociadas a la ruptura álgebra/cálculo, la autora menciona que la misma se ha trabajado muy poco en las investigaciones sobre el aprendizaje del cálculo.

Al indagar en los fenómenos que organiza la *desigualdad*, podremos encontrar los procedimientos en los cuales se involucran las mismas que son necesarios abordar en la matemática elemental para una mejor comprensión de los contenidos de la matemática avanzada.

Si bien la autora plantea en forma global estas dificultades en el área del cálculo, nos proponemos encontrar indicios de esta ruptura álgebra/cálculo en particular en el precálculo y en el tema *desigualdades*.

La autora expresa en cierta manera una ruptura entre los procedimientos algebraicos que se trabajan en la escuela secundaria y los que necesita la matemática avanzada. Nuestro objetivo es encontrar cuáles son los fenómenos que organiza la *desigualdad* en la matemática avanzada y que pueden ser iniciados en la matemática elemental.

3.2. Fundamentos matemáticos

3.2.1. Introducción

Antes de abordar algunos fundamentos matemáticos sobre los que se sustentan las desigualdades, reflexionamos sobre el papel de las comparaciones en el lenguaje cotidiano. Siguiendo a Conde (2004) la comparación se configura como un dispositivo del lenguaje que permite allanar el camino de la transformación de lo "cualitativo" en "cuantitativo". Interpretamos esto como la posibilidad de desarrollar una herramienta matemática (la relación de orden) que permite matematizar (en el sentido de Freudenthal, 1973) situaciones correspondientes a distintos entornos (natural, social, matemáticco, entre otros).

En el Diccionario de la Real Academia Española, comparar es "fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar sus diferencias o semejanzas".

Tratemos de delimitar esta definición. Cuando comparamos dos objetos, centramos la atención en algún aspecto o cualidad determinado. ¿En qué sentido es posible comparar, por ejemplo, una mesa y una silla? Los dos son muebles (caen los dos bajo la categoría de "mueble"), si estamos comparando dos muebles particulares, se podría comparar el material del que están fabricados (los dos son de madera, o uno es de madera y el otro de caña, uno es de madera de pino y el otro de algarrobo, etc.), el color, la fábrica que los construyó (o el carpintero), el negocio en donde fueron comprados, el lugar de la casa en la que se ubica cada uno, el espacio que ocupa cada uno, la "edad" de cada uno, y podríamos seguir.

Algunas de estas características son cuantificables y otras no. Por ejemplo, a primera vista el material del que están construidos no es una cualidad cuantificable, en tanto que el espacio que ocupa cada mueble lo es. Sin embargo, es posible encontrar rápidamente una cualidad cuantificable a partir de un aspecto que inicialmente no lo es. Por ejemplo, para el caso del material en que fue construida, si los dos muebles son de madera, podemos calcular la cantidad de madera que requiere cada uno (se los puede pesar, o incluso se puede estimar cuántos árboles se necesitan talar para extraer la madera para fabricarlos en cada caso). El color, a primera vista no es cuantificable: la silla es roja y la mesa es blanca. Pero si ambas son rojas, es posible que estemos de acuerdo en que el rojo de la mesa es más oscuro (o intenso, o claro) que el de la silla.

Las colecciones de elementos abundan en matemática y están presentes en cada estructura o modelo que la matemática describe.

Hablando en términos generales, en todo estudio científico se establecen relaciones entre distintos entes u objetos, lo cual permite descubrir lo que tienen de común o diferente.

¿Cuál es el significado intuitivo de que un elemento es diferente a otro?

¿Qué cuestiones rigen lo que es desigual entre objetos? Simplemente la respuesta está en el hecho de que las desigualdades conllevan o implican procesos de comparación entre objetos, y este proceso nos guía a tener en cuenta relaciones entre los pares ordenados obtenidos de los elementos de un conjunto.

En definitiva, antes o después, la comparación inicial nos conduce a la posibilidad de cuantificar. Conde (2004) sostiene que:

> (. . .) en el marco de las complejas relaciones entre lo cualitativo y lo cuantitativo, en el uso de las formas comparativas se encuentra uno de

> los dispositivos del lenguaje que permite pasar de forma natural y, por tanto, sin conciencia de hacerlo, de las dimensiones cualitativas de los objetos o fenómenos sociales a las más cuantitativas (pp. 100-101).

Como sostiene este autor, las comparaciones son formalizadas en el lenguaje matemático mediante las relaciones de orden.

A modo de ejemplo, usualmente en el caso de puntos diferentes de una recta horizontal, éstos pueden ser comparados por la relación de "precede a", que significa a la "izquierda de", en el caso de los números naturales decimos "menor que", en el caso de calles de una ciudad que corren de norte a sur, esa misma relación puede significar "al este de", etcétera. Es decir que la comparación entre los elementos de un conjunto está ligada de alguna manera a establecer una relación, la que seguro estará conectada a una relación de orden. Esta relación será un subconjunto del producto cartesiano de un conjunto consigo mismo, si es que los pares ordenados de elementos pertenecen a un único conjunto.

3.2.2. Conjuntos ordenados

De acuerdo a lo expresado en la sección anterior, es usual en matemática y en la vida cotidiana ordenar los elementos de un conjunto de acuerdo con algún criterio. El *orden* queda especificado a través del término *"precede"*. Es decir, si representamos a dicha relación con R tenemos que *"x precede a y"* significa $(x, y) \in R$, o bien xRy. Rudin (1980) en la sección de conjuntos ordenados del capítulo 1, define orden como sigue:

> Si S es un conjunto, un orden en S es una relación representada por el símbolo $<$ y tiene las dos siguientes propiedades:
>
> **(i)** Si $x \in S$ e $y \in S$, una y sólo una de las proposiciones siguientes es cierta: $x < y$, $x = y$, $y < x$.
>
> **(ii)** Si x, y, $z \in S$ y si $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$.
>
> (Rudin, 1980, p. 3)

Además el autor define que un *conjunto ordenado* es aquél en el que se ha definido un orden.

Bajo estos aspectos serán esenciales las definiciones de cota y contuntos acotados, y las propiedades y teoremas que involucran a operaciones y orden que desarrollamos a continuación, tomados de Rudin (1980).

Para el caso de que S es un conjunto ordenado y $E \subset S$, se dice que E es un conjunto acotado superiormente si existe un $\beta \in S$ tal que $x \leq \beta$ para cada $x \in E$ y a β se lo denomina la cota superior de E. De la misma manera, el autor define las cotas inferiores (con $\geq$ en lugar de $\leq$).

Un cuerpo conmutativo ordenado es un cuerpo F que a su vez es un conjunto ordenado, y que tiene las siguientes propiedades:

(i) $x + y < x + z$ si $x, y, z \in F \wedge y < z$

(ii) $xy > 0$ si $x \in F$, $y \in F$, $x > 0 \wedge y > 0$.

Si $x > 0$, se dice que x es *positivo*; si $x < 0$ entonces es *negativo*.

Advierte el autor que en cada cuerpo conmutativo ordenado se aplican todas las reglas conocidas de las desigualdades: la multiplicación por cantidades positivas (negativas) preserva (invierte) las desigualdades, ningún cuadrado es negativo, etcétera.

También enuncia las siguientes proposiciones que son verdaderas en todo cuerpo conmutativo ordenado:

(a) Si $x > 0$ entonces $-x < 0$ y viceversa.

(b) Si $x > 0$ y $y < z$, entonces $xy < xz$.

(c) Si $x < 0$ y $y < z$, entonces $xy > xz$.

(d) Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.

(e) Si $0 < x < y$, entonces $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

A continuación seguiremos el tratamiento del orden en el conjunto de los números reales que realiza Lehman (1992).

> El número real x se dice que es *mayor* que el número y siempre que $x - y$ sea un número positivo. Entonces escribimos $x > y$ que se lee "x es mayor que y". Así, $2 > -3$, pues el número real $2 - (-3)$ es un número positivo.
>
> Se sigue de esta definición que el número real y es menor que el número real x siempre que $y - x$ sea un número negativo. Entonces escribimos $y < x$ que se lee "y es menor que x". Así, $5 < 7$, pues $5 - 7 = -2$ es un número negativo.
>
> También introducimos otros dos símbolos útiles: $a \geq b$, si "a es mayor o igual que b", y $c \leq d$ si "c es menor o igual que d". En particular, la desigualdad $a \geq 0$ es un modo conveniente de afirmar que a representa a todo número no negativo.
>
> Se dice que dos desigualdades tienen el *mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario tienen *sentidos opuestos*. Por ejemplo las desigualdades $a > b$ y $c > d$ tienen el mismo sentido, pero las desigualdades $a > b$ y $c < d$ tienen sentidos opuestos. (p.136)

El conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo conmutativo con las operaciones adición y multiplicación y como es un campo ordenado, cumple con las propiedades que se detallan a continuación, tomadas de Lehman (1992).

Teorema 1. *El sentido de una desigualdad no se altera si se suma o se resta a ambos miembros la misma cantidad, es decir, si* $a > b$*, entonces* $a \pm c > b \pm c$.

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de $a > b$, tenemos $a - b = p$, un número positivo. De donde $a + c - (b + c) = p$, de lo cual, por la definición de "mayor que": $a + c > b + c$.

Análogamente se puede demostrar que : $a - c > b - c$.

Corolario 1. *Cualquier término puede transponerse de un miembro a otro de una desigualdad con tal que se le cambie su signo.*

Por el Corolario 1 podemos transponer todos los términos de una desigualdad a un sólo miembro. Como consecuencia tenemos:

Corolario 2. *Toda desigualdad puede reducirse a una de las formas* $A > 0$ *o* $A < 0$*, en donde* A *es una expresión algebraica.*

La importancia de este Corolario 2 está en que, *la resolución de una inecuación siempre puede reducirse a la determinación del signo (y no la magnitud) de una expresión.*

Teorema 2. *El sentido de una desigualdad no se altera si ambos miembros se multiplican por, o se dividen entre, la misma cantidad positiva. Es decir, si* $a > b$ *y* $c > 0$*, entonces* $ac > bc$ *y* $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

DEMOSTRACIÓN. De $a > b$, tenemos $a - b = p$, un número positivo.

Multiplicando ambos miembros por c, tenemos:

$ac - bc = pc$, un número positivo

de donde: $ac > bc$.

Análogamente, puede demostrarse que: $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Con una demostración similar a la del Teorema 2, se establece es siguiente teorema:

Teorema 3. *El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican por, o se dividen entre, la misma cantidad negativa. Esto es, si* $a > b$ *y* $c < 0$*, entonces* $ac < bc$ *y* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Teorema 4. *Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, las sumas serán desigualdades del mismo sentido, esto es si* $a > b$ *y* $c > d$*, entonces* $a + c > b + d$.

DEMOSTRACIÓN. De $a > b$, $a - b = p$, un número positivo.

De $c > d$, $c - d = q$, un número positivo.

Sumando, $a + c - (b + d) = p + q$, un número positivo.

Luego, $a + c > b + d$.

Corolario. *Si* $a_1 > b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$*, entonces* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$

Teorema 5. *Si de tres cantidades, la primera es mayor que la segunda y la segunda mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera, es decir, si* $a > b$ *y* $b > c$*, entonces* $a > c$.

La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 4.

Teorema 6. *Si dos desigualdades entre números positivos tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos serán desigualdades en el mismo sentido. Es decir, si a, b, c y d son todos positivos y $a > b$ y $c > d$, entonces $ac > bd$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $c > 0$ y $a > b$, del Teorema 2 resulta:

$$ac > bc \tag{3.1}$$

Análogamente, ya que $b > 0$ y $c > d$,

$$bc > bd \tag{3.2}$$

De (3.1), (3.2) y el Teorema 5, tenemos:

$$ac > bd$$

.

Corolario 1. *Si $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ son cantidades positivas y $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \ldots a_n > b_n$, entonces:*

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n > b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$$

Corolario 2. *Si a y b son ambos positivos, $a > b$ y n es un número entero y positivo, entonces $a^n > b^n$.*

Corolario 3. *Si a y b son ambos positivos, $a > b$ y n es un número entero y positivo, entonces $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ (raíces principales).*

Corolario 4. *Si a y b son ambos positivos, $a > b$ y n es un número entero y positivo, entonces $a^{-n} < b^{-n}$.* (Lehman, 1992, pp. 136-138)

Las desigualdades aritméticas (cuyo uso y estudio es habitual desde el nivel primario) se basan en la distinción de elementos de los conjuntos numéricos, a partir de la relación de orden. Así, entre las tareas habituales de la escolaridad obligatoria figuran las siguientes:

Completar en los puntos suspensivos con $>$, $<$ o $=$ según corresponda:

$$6 \ldots 9$$

$$-5 \ldots -10$$

$$5 \ldots -6$$

$$\frac{1}{3} \ldots \frac{2}{5}$$

$$0{,}899 \ldots 0{,}9$$

$$0{,}25 \ldots \frac{1}{4}$$

Las proposiciones resultantes (cuando se completan los signos suspensivos con $<$, $>$ o $=$) son verdaderas o falsas, y la justificación de la verdad se basa, fundamentalmente, en la definición de que en el conjunto numérico A, para a, b elementos de A, $a < b$ sí y sólo sí existe $c \in A$ tal que $a + c = b$.

Podemos adelantar que las desigualdades en tanto relación de orden en un conjunto numérico organizan el fenómeno de *ordenación*, que describiremos en detalle en la sección 4.4.

3.2.3. Expresiones con variables

Hasta aquí consideramos el orden en relación con la comparación entre los elementos de un conjunto, y destacamos sus propiedades de acuerdo al tipo de orden que se trate, y claramente existe un símbolo que los relaciona. Pero dicho símbolo puede aparecer no sólo cuando se comparan dos elementos, sino cuando se desean analizar expresiones cuyas variables están conectadas con los símbolos de menor, menor o igual, o mayor igual, etc. Como por ejemplo: $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x - 5 > 2\}$ o más simplemente $x - 5 > 2$ u otras en las que aparecen propiedades como lo es, por ejemplo, la desigualdad triangular para las medidas de los lados de un triángulo, que la verifican todos los elementos de un referencial.

Según Tarski (1977), entre las expresiones y símbolos que intervienen en los teoremas y demostraciones matemáticas, distinguiremos *constantes* y *variables*. En aritmética, por ejemplo, intervienen constantes tales como números, cero, uno, suma y muchas otras. Cada uno de estos términos tiene un significado fijo que permanece inalterado en el curso de las consideraciones. En oposición a las constantes, las variables no tienen significado propio. Así, a la pregunta: ¿Tiene cero tal o cual propiedad?, por ejemplo ¿Es cero un número entero? se puede contestar afirmativa o negativamente; la respuesta puede ser verdadera o falsa, pero en todo caso tendrá sentido. En cambio, una pregunta que afecta a x, como por ejemplo ¿Es x un número entero? no puede contestarse significativamente.

El autor destaca que de la expresión *x es un número entero* se obtiene una proposición cuando se reemplaza en ella x por una constante que designe un número determinado.

En esta investigación nos centraremos en el análisis de las *desigualdades de expresiones*, es decir aquellas desigualdades en las que aparecen variables y que se relacionan con subconjuntos de números reales.

Figura 3.5: Organización matemática

El esquema de la figura 3.5 ilustra la idea de un marco estructural general con un conjunto S en el que se establece una relación de orden. En todo cuerpo conmutativo S con dos operaciones, $*$ y $\bullet$, son verdaderas determinadas propiedades. Si ese conjunto $S = \mathbb{R}$ tenemos desigualdades numéricas, y si S es el conjunto de las expresiones con variables tenemos desigualdades que incluyen variables. En torno a estas últimas, trabajaremos en este estudio.

El trabajo matemático que involucran las desigualdades de expresiones con variables está atravesado por el reconocimiento y uso de aquellas transformaciones que permiten que una desigualdad se constituya en otra equivalente.

Para comprender cabalmente el procedimiento que se realiza, es necesario asumir que cada transformación aplicada mantiene equivalente el conjunto solución, ya que una *desigualdad equivalente* a una dada es aquella que tiene el mismo conjunto solución. Ahora bien, ¿cuáles son las transformaciones que mantienen sin cambios el conjunto solución de una desigualdad?

Esta interpretación del trabajo con desigualdades como el de la transformación de desigualdades en otras equivalentes con ellas, otorgan el verdadero sentido de la manipulación realizada. Creemos que si despojamos de este significado al procedimiento, el mismo se reduce a la algoritmización de los "pasajes de términos" de un miembro a otro desconociendo el fundamento y las relaciones que se establecen en el camino y, sobre todo, el objetivo final que se persigue en cada uno de estos procedimientos.

En el juego con desigualdades deben hacerse transformaciones que pueden conducir a la pérdida o adquisición de soluciones. Por eso, al resolver desigualdades el concepto de equivalencia juega el papel principal. Debemos observar meticulosamente la equivalencia de las desigualdades derivadas e iniciales.

En la transformación de *eliminación del denominador*, vemos por ejemplo que en la desigualdad: $\frac{1}{x} < 1$, si eliminamos el denominador sin tener en cuenta los valores que son admisibles para la variable, llegamos a $1 < x$, y todas estas x son las soluciones de la desigualdad inicial, ya que ninguna de ellas convierte en cero el denominador de la misma. Sin embargo, es sencillo comprobar que la desigualdad inicial es válida también para todas las x negativas. Todas estas soluciones se perdieron porque la eliminación del denominador de una desigualdad no es análoga a la eliminación del denominador de una ecuación. Siempre que queremos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por una expresión dependiente de x, y que toma valores tanto positivos como negativos, debemos considerar los dos casos.

Además de esto, al resolver desigualdades es necesario recurrir a otras transformaciones: como elevación a potencia, logaritmación, potenciación, etc. Algunas transformaciones cambian el dominio de la variable. Por lo tanto, no podemos hacer transformaciones donde el dominio de la variable sea un subconjunto del inicial porque puede ocurrir una pérdida de soluciones; y cuando se hagan transformaciones donde el dominio se amplía, hay que hacer primeramente estas transformaciones, eligiendo luego de las soluciones de la desigualdad definitiva aquellos valores que forman parte del dominio de la desigualdad inicial, y estos valores serán las soluciones.

Parte I

Búsqueda de fenómenos

Capítulo 4

Exploración en textos

El movimiento de la Tierra sola basta, pues, para explicar tantas desigualdades aparentes en los cielos.
NICOLÁS COPÉRNICO

4.1. Introducción

En los textos indagaremos sobre la definición de desigualdad que presentan y los fenómenos que organiza. Destacamos que el análisis está enfocado a fenómenos específicamente matemáticos.

La muestra de libros consultada fue seleccionada sobre los que utilizaron los estudiantes. Recordamos que nuestra investigación es del tipo "estudio de casos". Se trata de los estudiantes de la cohorte 2012 de la asignatura Matemática Básica del primer año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL).

Freudenthal (1983) menciona cuatro tipos de fenomenología: fenomenología pura, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica. Unas fenomenologías se diferencian de otras en función de los fenómenos que se tienen en cuenta con respecto al concepto matemático del que se ocupan. En el primer caso, hablamos de fenómenos que están organizados por la matemática en el momento actual y en su uso actual. El segundo caso se ocupa de fenómenos que están presentes en el mundo de la enseñanza. En el tercer caso hablamos de los fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los aprendices. En último lugar hablamos de los fenómenos que son organizados por el concepto de desigualdad y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

El primer sentido del término "fenomenología" tiene una diferencia notable con respecto a los otros, ya que en él tenemos en cuenta las relaciones ya establecidas. En este capítulo, nos preocupan las relaciones matemáticas entre los fenómenos que organiza el concepto de desigualdad.

Los objetos matemáticos, una vez definidos, organizan los fenómenos del mundo real, donde hay productos de la cognición humana y productos propiamente matemáticos. Además van a organizar las propiedades de esos objetos y las acciones que hacemos sobre ellos, produciéndose la incorporación de los conceptos matemáticos al mundo de nuestra experiencia en el que están como fenómenos, en una nueva relación fenómenos/medios de organización, en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y el proceso se reitera una y otra vez. Esta progresión escalonada del par fenómeno/medio de organización da lugar a una creación de objetos matemáticos cada vez más abstractos.

Los objetos matemáticos suelen presentarse mediante una definición; generalmente unido a la definición puede ir el procedimiento en el que entran en juego las relaciones y propiedades que los involucran. Indagamos en la definición que presentan estos textos con el objetivo de analizar los fenómenos matemáticos que organizan. Siguiendo el esquema adoptado por Claros Mellado (2010) y Sánchez Compaña (2012) buscamos los fenómenos que surgen directamente de las definiciones formales de desigualdad, por lo tanto son fenómenos organizados por dichas definiciones.

Freudenthal afirma que el objetivo de la acción educativa debe ser en primer lugar la constitución de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. Esta posición es pertinente para el análisis fenomenológico del concepto de desigualdad, sobre todo se trata de realizar aportes para una fenomenología didáctica sobre la cual se apoye una organización de los contenidos en la enseñanza.

4.2. Descripción de la muestra

Con el objetivo de indagar sobre la definición y los usos de las desigualdades en la matemática avanzada, realizamos una búsqueda en los libros de textos utilizados en las asignaturas correspondientes al primer año del Profesorado de Matemática. Los libros corresponden a la bibliografía básica que contiene el tema desigualdades en los planes de cátedra de las asignaturas: Matemática Básica y Cálculo I. Por esta razón la muestra es de tipo intencional.

En los libros seleccionados estamos interesados en la definición de desigualdad que presentan, ya que nos abocamos a la búsqueda de los fenómenos que organiza el concepto según lo explicitado en el marco teórico. Recordemos que dicha búsqueda la restringimos específicamente a aquellos fenómenos del tipo matemático.

En el cuadro 4.1 mostramos los datos de los dos libros de matemática avanzada consultados.

Libro	Asignatura	Autores	Editorial	Título	Año
L1	Matemática Básica	Lehman	Limusa	Álgebra	1992
L2	Cálculo I	Salas, Hille y Edgen	Reverté	Cálculus. Una y varias variables	2002

Cuadro 4.1: Textos consultados

4.3. Definición de desigualdad

En la asignatura Matemática Básica se trata por primera vez en la carrera el tema desigualdades. El abordaje del mismo está centrado en la resolución de inecuaciones con el fin de proyectar esta técnica a posteriores aplicaciones a lo largo de toda la currícula. El propósito de la asignatura es ayudar al estudiante a pasar por una transición cómoda de la matemática elemental al cálculo. Para ello, se estudian los temas y métodos esenciales del álgebra y el precálculo que se necesitarán en los estudios posteriores de matemática.

En el material de la cátedra se utiliza el libro **L1** del cuadro 4.1 como bibliografía de base para este tema.

El capítulo 6 titulado "Desigualdades e inecuaciones", comienza con la sección 6.1 denominada "Introducción", donde el autor menciona: "Al concepto de mayor y menor entre dos números corresponde el de ordenación. La relación de orden queda restringida a los números reales y se puede interpretar geométricamente en un sistema coordenado unidimensional" (Lehman, 1992, p. 135).

Observemos que el autor destaca primero la existencia de una relación de orden definida en los números reales.

En la sección 6.2 denominada "Definiciones y Teoremas Fundamentales" el autor retoma la definición de ecuación para introducir por oposición las desigualdades: "Hemos definido una ecuación como una igualdad entre dos expresiones. Si dos expresiones son desiguales, tenemos una *desigualdad*, diciéndose que una de las expresiones es mayor o menor que la otra" (p. 135).

A continuación el autor como lo mencionamos en la sección 3.2.2 define *mayor* y *menor*. Además, destaca que dos desigualdades tienen el *mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario tienen *sentidos opuestos*.

El autor habla de la desigualdad entre *expresiones en las que aparecen variables*. Considera que las mismas toman valores en subconjuntos de números reales. A estos subconjuntos nosotros lo llamaremos dominio de valores admisibles de la variable. Esto es, el conjunto de valores de la incógnita para los cuales tienen sentido (son definidas) sus primero y segundo miembros. Es importante aclarar que el autor con el término *expresiones* se refiere a las *expresiones algebraicas* que define en los capítulos previos.

Según Copi (1999) la definición no debe ser negativa, cuando puede ser afirmativa. Señala el autor que la razón para dar esta regla es que una definición debe explicar lo que un término significa, y no lo que no significa. Además afirma que para la gran mayoría de los términos hay demasiadas cosas que *no* significan para que una definición negativa pueda abarcarlas a todas. Sin embargo, la definición que presenta el libro **L1** de desigualdad de expresiones como *"expresiones no iguales"* está basada en la ley de tricotomía y por lo tanto no es posible otra caracterización.

Así como el autor con la primer cita relaciona *mayor* y *menor* con la *ordenación*, extendemos esta idea y consideramos que también en relación con el concepto de desigualdad entre expresiones surge el fenómeno *ordenación*. Este fenómeno nos remite al desarrollo teórico realizado en la sección 3.2.2.

A continuación el autor define dos tipos particulares de desigualdades, las "desigualdades absolutas" y las "desigualdades condicionales o inecuaciones".

Esta clasificación permite diferenciar claramente a las desigualdades de acuerdo a su dominio de validez. Este hecho es relevante a nuestro entender para identificar cada uno de estos conceptos en relación a los fenómenos que organizan.

Notemos además que establece una coherencia con el caso de las igualdades en lo que se refiere a la definición de identidad y ecuación.

> Una *desigualdad absoluta o incondicional* es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas $5 > -7$ y $x^2 + 1 > 0$. (Lehman, 1992, p. 136)

Observamos que la expresión "tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables" supone la existencia de una función proposicional cuantificada universalmente que será necesario validar. Esta validación se concreta para todos los elementos del dominio de valores admisibles de la variable. Interpretamos que refiere a un fenómeno: el de *generalización*. Esta afirmación la fundamentamos en la lógica proposicional y en particular en el principio de generalización universal, que establece que: "del ejemplo de sustitución de una función proposicional respecto del nombre de un individuo cualquiera arbitrariamente elegido, se puede inferir válidamente la cuantificación universal de la función proposicional" (Copi, 1999, p. 375).

Por otro lado, observamos que el autor incluye la desigualdad $5 > -7$ como ejemplo de desigualdad absoluta, aun cuando no contiene variables. Este caso en nuestro estudio se trata de una desigualdad numérica que se rige por las nociones de orden en R que describimos en la sección 3.2.2 y que naturalmente nos remite al fenómeno de *ordenación*.

> Una *desigualdad condicional o inecuación* es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los

> valores para los que sus miembros están definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inecuaciones: $x - 2 < 3$, válida solo si $x < 5$; $x^2 > 4$, válida solo si $x > 2$ o $x < -2$. (Lehman, 1992, p. 136)

La definición de desigualdad condicional expresa que es aquella que tiene el "mismo sentido para ciertos valores de las variables". Esta expresión es relevante ya que pone de manifiesto que existirán o no valores, que se toman de un dominio admisible, que harán cierta la desigualdad. Esta idea nos remite a la acción de particularizar las variables con valores del dominio. Desde el punto de vista matemático, se trata de una cuestión fundamental de la teoría de conjuntos, relacionada a la definición de estos objetos. En la teoría axiomática de conjuntos, uno de los axiomas que fundamenta la existencia o no de un conjunto, es el de *especificación* (Halmos, 1967, p. 15), el cual es utilizado para justificar la existencia de un subconjunto especificado por la cláusula o condición dada de un conjunto A. Este hecho se refiere también a la constatación de la verdad o falsedad de una proposición a partir de la verificación de la existencia o no de individuos que la satisfacen, tomados de un dominio admisible.

Resumiendo, en el libro **L1** identificamos tres fenómenos: *ordenación*, *especificación* y *generalización*. En el esquema de la figura 4.1 observamos los fenómenos matemáticos encontrados que organizan las definiciones de desigualdad analizadas. La disposición de los fenómenos en el esquema obedece a que el de ordenación atraviesa el trabajo matemático que involucra una desigualdad y está presente en una primera instancia, es decir, subyace naturalmente en cualquier conjunto o espacio de elemento debido al paralelo que se establece con el orden definido en el conjunto de los números reales.

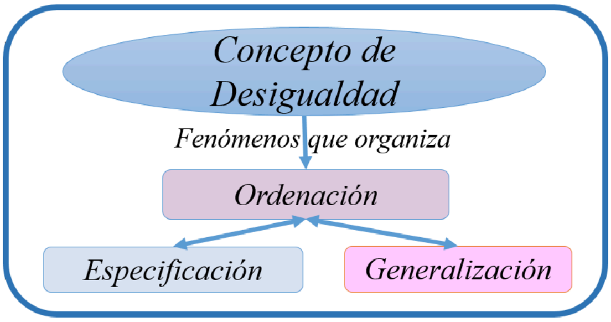


Figura 4.1: Fenómenos encontrados

A continuación analizamos el libro **L2** del cuadro 4.1 el cual presenta la sección 1.3 (página 13) denominada "Desigualdades". Observamos que en este texto los autores no presentan una definición formal de desigualdad.

Al comenzar la sección mencionada, los autores remiten a la sección 1.2 (página 6) denominada "Nociones y formulas de la matemática elemental", (con el subtítulo "Propiedades del orden"), y definen para números reales las nociones de: *mayor*, *menor*, *menor o igual* y *mayor o igual*. Además mencionan la propiedad de tricotomía y enuncian las propiedades del orden en $\mathbb{R}$, como se muestra a continuación:

Propiedades de orden

Si a y b son números reales, entonces *a es menor que b* ($a < b$) si $b - a$ es un número positivo. Esto es equivalente a decir que *b es mayor que a* ($b > a$). Desde el punto de vista geométrico, $a < b$ si el punto a está a la izquierda del punto b sobre la recta real. La notación $a \leq b$ significa tanto $a < b$ como $a = b$ (equivalentemente, $b \geq a$).

Los números reales están ordenados de manera que si a y b son números reales, entonces se verifica solamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b. \qquad \text{(tricotomía)}$$

Los símbolos $<, >, \leq, \geq$ se llaman *desigualdades*. Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (propiedad transitiva)
(ii) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todos los números reales c.
(iii) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
(iv) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
(v) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Estas propiedades también se verifican para $>, \leq$ y $\geq$. La propiedad (v) es muy importante: si se multiplica una desigualdad por una cantidad negativa, entonces la "dirección" de la desigualdad se invierte. Las técnicas para resolver desigualdades utilizan estas propiedades, por lo que se volverán a ver en la sección 1.3.

Figura 4.2: Extracto de la Sección 1.2 del libro **L2** subtitulada: "Propiedades del orden" (p. 6)

Después de la referencia, los autores continúan en la sección 1.3 con la siguiente aclaración: "En esta sección nos ocuparemos de una clase de desigualdades que abundan en el cálculo: aquellas que incluyen una variable".

Observamos que no definen formalmente la expresión *desigualdades que incluyen una variable*. En la explicación que realizan, la interpretación de ésta queda subordinada a la establecida para la desigualdad de números reales. Es decir, hacen referencia a la definición de mayor, menor, menor o igual y mayor o igual, la ley de tricotomía y las propiedades del orden.

Según nuestra interpretación, el fenómeno que organiza esta definición de desigualdad como la relación entre expresiones que no son iguales, mencionando las propiedades que cumple esta relación, es el de *ordenación*, en este caso de expresiones que incluyen variables.

A continuación los autores realizan una explicación referida a la resolución de una desigualdad como se muestra:

> Resolver una ecuación en x es hallar el conjunto de los números x para los cuales se verifica la ecuación. Resolver una desigualdad en x es hallar el conjunto de los números x para los cuales la desigualdad se verifica.
>
> La manera de resolver una desigualdad es muy parecida a la que usamos para resolver una ecuación, pero existe una diferencia importante.

> Podemos conservar una desigualdad sumándole el mismo número a ambos miembros, o restándole el mismo número a ambos miembros, o multiplicando o dividiendo ambos miembros por un número positivo. Pero si multiplicamos o dividimos por un número negativo, entonces la desigualdad se invierte. (Salas et al., p. 13)

En la expresión *"resolver una desigualdad en x es hallar el conjunto de los números para los cuáles la desigualdad se verifica"* aparece nuevamente el fenómeno de *especificación* que consiste en definir el dominio de validez de dicha desigualdad. Otra cuestión importante, a diferencia del texto anterior, es que no se realiza distinción entre desigualdades condicionales y absolutas. Es decir, bajo el nombre *desigualdades* se incluye tanto las inecuaciones como las desigualdades absolutas. Cuando se describe la resolución de una desigualdad se hace en referencia a una desigualdad condicional.

Al final de la sección 1.3 "Desigualdades" los autores presentan la desigualdad triangular para números reales, exhibiendo en este caso la demostración de una desigualdad absoluta, en la que está presente el fenómeno de *generalización*.

En síntesis en el libro **L2** no se presenta una definición formal de desigualdad sino que expone una descripción detallada de ejemplos de algunas tareas. En las mismas aparecen los mismos fenómenos que encontramos en el texto anterior, a saber: el de *ordenación*, el de *especificación* y el de *generalización*.

En el esquema de la figura 4.3 ilustramos los objetos matemáticos que se estudian en esta tesis. Destacamos que para el caso de las desigualdades condicionales nos limitaremos a las de una variable, y señalamos, además, que el dominio de valores admisibles de la misma es un subconjunto del conjunto de los números reales. Realizamos este recorte debido a que este tipo de desigualdades es el que se incluye en los planes de cátedra de las asignaturas mencionadas.

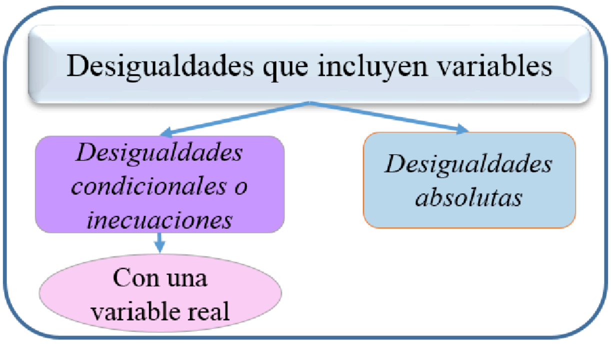


Figura 4.3: Objetos matemáticos estudiados

A continuación realizamos una descripción minuciosa de los fenómenos encontrados.

4.4. Descripción de los fenómenos encontrados

Recordemos que para Freudenthal los objetos matemáticos son lo que el llama "noúmeno" y una parte de la matemática puede ser experimentada como un "phainómenon". Para Freudenthal algo es considerado como un fenómeno cuando tenemos experiencia de ello, e incluye como fenómenos los mismos medios de organización de matemática (estrategias, conceptos, notaciones) cuando se los torna objetos de experiencia. (Puig, 1997; p. 63-64).

Queremos destacar que esta selección realizada de fenómenos matemáticos para los cuáles las desigualdades se constituyen en un medio de organización es un avance y no pretende ser una lista acabada de los mismos.

Nos interesa ahora describir más profundamente los tres fenómenos encontrados:

[1] *Ordenación* (O): Como su nombre indica, la relación de orden, o simplemente orden, es la herramienta matemática diseñada para ordenar los elementos de un conjunto. Los elementos de un conjunto no están ordenados, y $\{1, 2, 3\}$ es el mismo conjunto que el $\{3, 2, 1\}$.

Según Tarski (1977) la teoría de las relaciones es una de las ramas más desarrolladas de la lógica matemática. Agrega que en el cálculo de relaciones tenemos dos relaciones especiales, la *identidad* y la *diversidad* entre individuos. En el cálculo de relaciones se las denota por medio de los símbolos I y D, y no por los símbolos $=$ y $\neq$ empleados en otras partes de la lógica.

El orden supone una estructura añadida al conjunto, y se adquiere mediante la definición en él de una relación apropiada. Para establecer un orden debemos señalar qué elementos preceden a cuáles, lo cual se indica mediante la relación: si a precede a b, entonces $(a, b) \in R$. Claramente la pareja inversa no puede ser parte de la relación, por lo cual pediremos que ésta sea asimétrica. Además, si un elemento precede a otro y éste a un tercero, entonces el primero debe preceder al tercero, por lo cual exigiremos transitividad.

Los tipos de órdenes tienen una propiedad especial: cada elemento se puede comparar con cualquier otro elemento, es decir, es mayor, o menor, o igual. Sin embargo, esto no siempre es un requisito deseable. Un ejemplo bien conocido es la relación de orden definida entre los subconjuntos de un conjunto con respecto a la inclusión. Si un conjunto contiene los elementos de cierto otro conjunto, entonces se puede decir que es mayor o igual. Con todo, hay conjuntos que pueden no ser comparables de este modo, puesto que cada uno puede contener algún elemento que no esté presente en el otro. Por lo tanto, inclusión de subconjuntos es un orden parcial, en comparación con los órdenes totales dados antes.

La definición de desigualdad como una relación que cumple con estas propiedades en un conjunto nos conduce a plantear la existencia del fenómeno de *ordenación*. Como resultado de la condición de orden en el conjunto de los números reales surgen en paralelo las desigualdades de expresiones. Es fácil entender que este fenómeno está presente en la necesidad de compararlas.

[2] *Especificación* (E): este fenómeno refiere al dominio de validez de la desigualdad entre dos expresiones. Se basa en el llamado axioma (esquema) de especificación destinado a la formación de nuevos conjuntos a partir de un referencial, según Halmos (1967).

> *Axioma de especificación*: A todo conjunto A y a toda condición $S(x)$ corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos x de A para los cuales se cumple $S(x)$.(...) Para indicar la forma en que B es obtenidad de A y de $S(x)$, se escribe: $B = \{x \in A : S(x)\}$ (Halmos, 1967, p. 15)

Aclara el autor que intuitivamente, el Esquema de Especificación significa que dada una propiedad S, podemos formar un conjunto con los elementos de un conjunto A que satisfacen la propiedad. Esta restricción de la propiedad S a los elementos de un conjunto A previamente dado es coherente a la descripción intuitiva del universo U: todos los elementos de A deben haberse definido en etapas anteriores, por lo tanto están disponibles para ser elementos de un conjunto.

Esta restricción es la idea fundamental de Zermelo para evitar paradojas del tipo de la de Russell, cuando se daba por supuesta la existencia de un universo. Para especificar un conjunto no es suficiente dar la propiedad sino que también hay que disponer de un conjunto a cuyos elementos pueda aplicarse esa propiedad.

En otros términos, podemos pensar que una inecuación es la propiedad que define por comprensión los elementos de un conjunto, es decir hay una variable y una propiedad expresada en una relación de desigualdad que cumplen los elementos de dicho conjunto, por ejemplo $B = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 3x + 1 < 4\}$. La especificación de x, en cierta forma, refiere a condicionar la extensionalidad de un conjunto. Es preciso encontrar los elementos que forman este conjunto, es decir mostrar, en una especie de extensión, cuáles son los elementos de este conjunto. En el ejemplo propuesto, si x es un elemento del conjunto $B = (-\infty, 1)$, la desigualdad es verdadera.

Otra interpretación es considerar a una desigualdad con variable como una función proposicional o proposición abierta. Según Negrete (2002), una función proposicional o proposición abierta es aquella expresión de la que no puede decirse si es verdadera o falsa. . Por ejemplo, $3x+1 < 4$ es una función proposicional. La característica de la función proposicional es que puede dar origen a una proposición si se sustituyen las variables o si se la cuantifica. Al conjunto de valores que hacen verdadera una proposición el autor lo llama "campo de variabilidad", lo que coincidiría con lo que llamamos previamente *especificación*. En el ejemplo anterior el campo de variabilidad es $B = (-\infty, 1)$. Es decir que al sustituir cualquier $x \in B$ en la función proposicional, la proposición resultante es verdadera.

Es importante destacar que en las desigualdades condicionales se habla de "solución" de la desigualdad y para abreviar razonamientos se dice a veces que la solución es un conjunto de valores de x, por ejemplo el intervalo $a < x < b$, pero en realidad se está sobrentendiendo de esta manera que cualquier valor x de este conjunto es una "solución".

[3] *Generalización* (G): basado en el "*Principio de generalización Universal*, según Copi (1999). Mediante este principio, según el autor, del ejemplo de sustitución de un individuo cualquiera arbitrariamente elegido de un conjunto se puede inferir válidamente la cuantificación universal de esa función proposicional"(p. 375).

Este principio nos permite generalizar, esto es, ir de un ejemplo particular de sustitución a una expresión generalizada o cuantificada universalmente. Por ejemplo, aclara el autor, si se trata de demostrar que todos los triángulos tienen una cierta propiedad, se puede comenzar: *"Sea ABC un triángulo cualquiera"*. Luego se comienza a razonar acerca del triángulo ABC y se establece que tiene la propiedad en cuestión. De esto se concluye que todos los triángulos tienen la propiedad en cuestión. Como la suposición que se hace acerca de ABC es que se trata de un triángulo, lo que se demuestra de ABC se demuestra también para cualquier triángulo.

Este fenómeno aparece en la demostración de la validez de una propiedad, expresada en una relación de desigualdad. En el caso de las desigualdades absolutas es necesario justificar la validez de dicha desigualdad para todos los elementos dentro del dominio de definición de las variables, para ello se toman representantes de los ejemplos de sustitución (a, b, c, x, etc.) y utilizando herramientas del razonamiento deductivo se concluye la validez para todos los elementos del recinto de valores admisibles de las variables.

En síntesis los fenómenos matemáticos encontrados (a partir de las definiciones propuestas en los textos analizados) son: la ordenación, la especificación y la generalización, como aclaramos en la sección anterior, estos dos últimos están atravesados por el de ordenación, es por ello que se coloca por encima en el esquema de la figura 4.1.

En el marco de la teoría de Freudenthal adaptada a nuestra investigación interpretamos que el *concepto de desigualdad* (noúmeno) es la idea que tiene en la mente el estudiante de la desigualdad condicional (absoluta) en matemática y le permite analizar, entender y organizar el fenómeno de *especificación* (*generalización*), en el marco de un orden preexistente.

4.5. Tipos de tareas

Los textos del cuadro 4.1 presentan distintas tareas que se vinculan con los fenómenos analizados. No existe una correspondencia lineal entre los fenómenos encontrados y las tareas, dado que en los procedimientos de resolución de estas últimas aparecen integrados los fenómenos descriptos. Es decir, una misma tarea puede comprender distintos fenómenos y viceversa. La presentación siguiente de las tareas es pertinente para nuestra investigación ya que nos proponemos encontrar las necesidades conceptuales que requiere el estudio la matemática avanzada, con el objetivo de analizar si es que existen rupturas con respecto al tratamiento del tema en la escuela secundaria.

Según Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008) el análisis fenomenológico de estructuras y conceptos matemáticos, desde una perspectiva funcional de la matemática escolar, aporta una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras. Esta perspectiva pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos.

Los autores mencionan que el análisis fenomenológico se propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico. Y esto con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras.

Sostienen los autores que cuando se quiere presentar una estructura matemática en toda su plenitud de significados, se considera la conexión de sus diferentes subestructuras con distintas familias de fenómenos y se vincula con aquellos campos del conocimiento donde tiene una utilidad establecida.

Los tipos de tareas más relevantes que encontramos en los textos analizados son las siguientes:

- *Tarea 1*: Comparar expresiones (CE).
- *Tarea 2*: Resolver inecuaciones (RI).
- *Tarea 3*: Demostrar desigualdades absolutas (DDA).

En el esquema de la figura 4.4 mostramos en forma resumida la interpretación de los términos que utilizamos en esta investigación en relación con los que menciona Freudenthal:

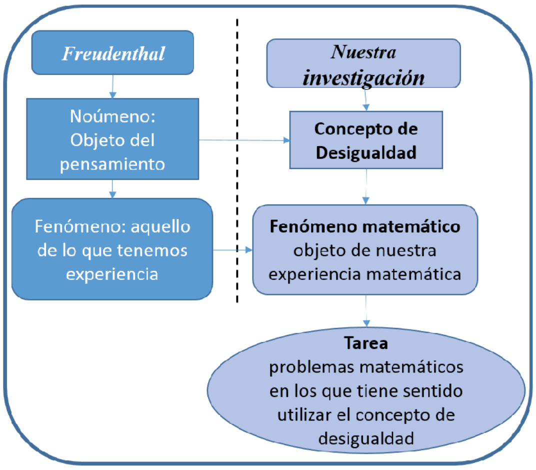


Figura 4.4: Términos utilizados en nuestra investigación

A continuación presentamos ejemplos para cada tipo de tarea incluidos en los libros analizados.

4.5.1. Tarea 1: CE

En el libro **L1** encontramos enunciados como la siguiente tarea en la que, para resolverla, será necesario encontrar primero la relación de orden que se establece para luego respaldar con una demostración lo que se afirma.

18. Si a y b son números positivos, determinar cuál de las dos siguientes expresiones es la mayor $\dfrac{a+2b}{a+3b}$ o $\dfrac{a+b}{a+2b}$.

Figura 4.5: Ejemplo de tarea CE del libro **L1** (p. 142)

En el libro **L2**, en los ejercicios propuestos, encontramos varios enunciados de tareas del tipo CE, como se muestra a continuación:

54. Ordenar los siguientes términos: $1,\ x,\ \sqrt{x},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt{x}}$ cuando $1 < x$.

55. Mismo ejercicio que el anterior con $0 < x < 1$.

56. Comparar

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} \text{ y } \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

cuando $x > 0$.

Figura 4.6: Ejemplo de tarea CE del libro **L2** (p. 19)

En estas tareas el autor propone ordenar o comparar las expresiones para determinados valores de la variable x. En el ejercicio siguiente los estudiantes necesitarán buscar el o los valores de A que hacen verdadera la implicación.

En los ejercicios 50-53, determinar todos los valores de $A > 0$ para los cuales el enunciado es cierto.

50. Si $|x-2| < 1$, entonces $|2x-4| < A$.

51. Si $|x-2| < A$, entonces $|2x-4| < 3$.

52. Si $|x+1| < A$, entonces $|3x+3| < 4$.

Figura 4.7: Ejemplo de tarea CE del libro **L2** (p. 19)

En este caso, si bien para resolverla necesitamos una *especificación* de los valores que corresponden al antecedente de la implicación, aparece con más fuerza el fenómeno ordenación, ya que el texto presenta el problema de comparar una expresión del consecuente de la implicación y un número A que será la cota para la expresión.

También podemos interpretar que en realidad lo que necesita obtenerse en este procedimiento es el dominio de validez de la variable A con lo cual aparece nuevamente el fenómeno de *especificación.* Esta tarea consideramos que abre camino a la definición de límite que establece el juego entre entornos de la variable independiente alrededor de un valor c y entornos de las imágenes alrededor del límite (si es que existe).

Como observamos en esta tarea, los fenómenos que organiza el concepto de desigualdad no son excluyentes. En efecto, en el siguiente ejemplo, durante la *generalización* es necesario utilizar *ordenación.*

Sabiendo que $0 < a < x < b$ *demostrar que se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Solución: Como observamos de las hipótesis no parece en principio fácil deducir la desigualdad pedida. En este caso convertimos la desigualdad en otras equivalentes más sencillas, hasta llegar a una que seamos capaces de deducir de la hipótesis. Así, resolvemos las operaciones indicadas, escribimos la desigualdad como sigue:

$$\frac{a+b}{x(a+b-x)} < \frac{a+b}{ab}$$

y, como los denominadores son positivos, esta expresión es equivalente a:

$$(a+b)ab < (a+b)x(a+b-x)$$

Como $a+b>0$ esta desigualdad equivale a $ab < x(a+b-x)$, es decir:

$$0 < ax + bx - x^2 - ab = (x-a)(b-x)$$

Esta última desigualdad es consecuencia de la hipótesis hecha, $0 < a < x < b$, la cual implica que $0 < x-a$ y $0 < b-x$. Por tanto $(x-a)(b-x) > 0$.

Ahora es necesario deshacer el camino recorrido para obtener una demostración directa.

4.5.2. Tarea 2: RI

En la sección "Inecuaciones de primer grado o lineales" el libro **L1** describe el problema que consiste en determinar el dominio de valores de la variable para los cuales es válida la desigualdad, en este caso el autor lo presenta también en el marco funcional.

Ejemplo. Resolver la inecuación lineal $x + 1 > 3x + 5$, y comprobar el resultado gráficamente.

SOLUCION. Debemos encontrar los valores de x para los cuales

(1) $$x + 1 > 3x + 5.$$

Como en las ecuaciones lineales, transponemos todos los términos en x a uno de los miembros y todos los términos conocidos al otro miembro. Así obtenemos

$$-2x > 4.$$

Dividiendo entre -2 resulta $x < -2$. (Teorema 3, Art. 6.2).

Esta es la solución buscada, la cual afirma que la desigualdad (1) es válida para todos los valores de x menores que -2.

Para establecer la representación gráfica de este resultado, transponemos todos los términos de (1) al primer miembro, obteniéndose la desigualdad equivalente

(2) $$-2x - 4 > 0.$$

Aquí tenemos el primer ejemplo del significado del Corolario 2 del Teorema 1 (Art. 6.2). La desigualdad (2) nos dice que para todo valor de x menor que -2 la función lineal $-2x - 4$ es positiva. La gráfica de esta función lineal es la recta (Art. 3.9) representada en la figura 20. Allí vemos que el cero de la función es -2 y que para todo valor de x menor que -2 le corresponden puntos de la recta situados encima del eje X.

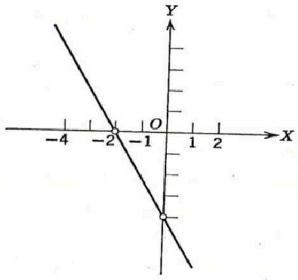


FIG. 20

Figura 4.8: Ejemplo de tarea **RI** del libro **L1** (p. 143)

En los ejemplos propuestos el libro **L2** describe el procedimiento para obtener el dominio de validez de una desigualdad condicional, como se muestra a continuación.

Ejemplo 1 Resolver la desigualdad

$$-3(4 - x) \leq 12.$$

Solución Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $-\frac{1}{3}$, obtenemos

$$4 - x \geq -4. \quad \text{(la desigualdad ha sido invertida)}$$

Restando 4, obtenemos

$$-x \geq -8.$$

Para despejar x, multiplicamos por -1. Esto da

$$x \leq 8. \quad \text{(la desigualdad ha sido invertida de nuevo)}$$

La solución es el intervalo $(-\infty, 8]$.

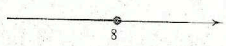


Figura 4.9: Ejemplo de tarea **RI** del libro **L2** (p. 13)

4.5.3. Tarea 3: DDA

En el libro **L1** en la sección de desigualdades absolutas el autor describe mediante un ejemplo lo que denomina "procedimiento de análisis".

Ejemplo 1. Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que

$$a^3 + b^3 > a^2b + ab^2.$$

SOLUCION. Ya que no resulta fácil averiguar de que desigualdad podemos partir, transformaremos la desigualdad dada.

ANALISIS. Primeramente factorizaremos el segundo miembro y escribiremos

$$a^3 + b^3 > ab(a + b).$$

Ya que a y b son ambos positivos, $a + b$ será positivo y, por el Teorema 2 (Art. 6.2), podremos dividir ambos miembros entre $a + b$ sin alterar el sentido de la desigualdad. Esto es

$$a^2 - ab + b^2 > ab.$$

Transponiendo ab al primer miembro (Corolario 1, Teorema 1, Artículo 6.2), tenemos

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$

o sea, $$(a - b)^2 > 0.$$

Sabemos que esta última relación es siempre verdadera, pues $a \neq b$, de donde $a - b \neq 0$ y $(a - b)^2 > 0$. Por tanto, para la demostración que buscamos partiremos de esta última desigualdad.

DEMOSTRACION. $$(a - b)^2 > 0,$$

de donde $$a^2 - 2ab + b^2 > 0.$$

Trasponiendo $-ab$ al segundo miembro (Corolario 1, Teorema 1, Artículo 6.2), tenemos

$$a^2 - ab + b^2 > ab.$$

Multiplicando ambos lados por $a + b$ (Teorema 2, Art. 6.2), obtenemos el resultado deseado

$$a^3 + b^3 > a^2b + ab^2.$$

Figura 4.10: Ejemplo de tarea DDA del libro **L1** (p. 140)

Antes de finalizar la sección 1.3 "Desigualdades" el libro **L2** presenta la demostración de la desigualdad triangular para números reales, como se muestra en la figura 4.11.

Demostración de la desigualdad triangular La demostración es fácil si se piensa en $|x|$ como $\sqrt{x^2}$. Obsérvese, en primer lugar, que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Comparando los extremos de la desigualdad y tomando raíces cuadradas, obtenemos

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq |a| + |b|. \qquad \text{(ejercicio 59)}$$

El resultado se obtiene observando que

$$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|.$$

La variante de la desigualdad triangular que aparece a continuación también se presenta en el cálculo: para a y b números reales cualesquiera,

(1.3.8) $$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Figura 4.11: Ejemplo de tarea DDA del libro **L2** (p. 18)

4.6. Interrelación entre tareas y marcos

En la exploración realizada en las secciones anteriores de este capítulo encontramos tres fenómenos matemáticos para los cuáles la desigualdad es un medio de organización y consideramos que pueden ser abordados en la escuela secundaria. Estos fenómenos aparecen claramente en las tareas propuestas por los autores de los libros analizados.

Las tareas identificadas generalmente pueden ser expresadas en distintos marcos, en el sentido de Douady (1986): algebraico, funcional y geométrico. Sostenemos que en cada uno de ellos, las tareas toman dimensiones distintas que aportan al objeto mental que necesitamos sea construído por nuestros estudiantes para abordar situaciones de desigualdad.

A continuación caracterizamos algunos rasgos más destacados del abordaje de las desigualdades en cada marco considerado. En cada uno de ellos, se resalta la característica más saliente que lo identifica, no significa que se excluyan otras que también se utilizan.

- *Marco algebraico*: las resoluciones de las tareas se realizan a través de procesos algebraicos basados en procedimientos, operaciones y uso de la estructura según el conjunto numérico en el que se trabaja. Por ejemplo, el concepto de inecuación equivalente a otra dada, obliga a un conocimiento sobre las operaciones y la estructura subyacente en el conjunto de números que se esté trabajando.

  Cuando se trabaja en este marco se realizan procedimientos que involucran a distintas operaciones válidas, según la estructura con que se cuente.

  El concepto de inecuación equivalente y las transformaciones son el fundamento de estos procedimientos.

- *Marco funcional*: las desigualdades se enriquecen con nuevas estructuras a través de las funciones. La resolución de la tarea se basa en interpretar cada miembro de la desigualdad como una función. Por ejemplo, para resolver una inecuación del tipo $f(x) < g(x)$, las gráficas de las funciones involucradas otorgan un elemento de visualización de la situación que permite analizar si la gráfica de $y = f(x)$ se encuentra por encima o por debajo de la gráfica de $y = g(x)$ sobre un dominio de valores admisibles para la variable x. Se utilizan propiedades de las funciones y sus gráficas.

- *Marco geométrico*: las resoluciones se basan en la representación de los números positivos como longitudes de segmentos. Las construcciones y las propiedades de los objetos geométricos, las equivalencias de áreas o volúmenes respaldan las comparaciones. En este marco es fundamental el apoyo en la visualización de la situación que permite la interpretación de las propiedades geométricas de los objetos y de la propiedad que se quiera probar. Este proceso puede verse como una conjugación entre lo geométrico y lo analítico.

En el libro **L1** la tarea 2 (RI) es presentada en el marco algebraico y en el funcional (como mostramos en la figura 4.8) . Las tareas 1 (CE) y 3 (DDA) en el marco algebraico (ver figura 4.6 y 4.10).

En el libro **L2** todas las tareas se presentan en el marco algebraico como observamos en las figuras 4.5, 4.9 y 4.11.

En las siguientes subsecciones incluimos algunos ejemplos de las tareas presentadas (sección 4.5), organizadas según el marco en el que se insertan.

4.6.1. Tarea 1: CE bajo el marco algebraico

En el texto **L2**, el procedimiento de comparar expresiones se utiliza en una demostración $\epsilon - \delta$ de un límite.

Dada la condición para la variable, esta tarea consiste en hallar o justificar la relación entre expresiones en las que interviene dicha variable.

En el contexto algebraico el procedimiento es el recíproco del realizado en la tarea de resolver inecuaciones, por ejemplo:

Ejemplo 1. *Sabiendo que* $x < -1$ *comparar las siguientes expresiones:* $-3x + 1$ *y* 4.

Partimos de la hipótesis:

$$x < -1 \tag{4.1}$$

Multiplicando a ambos miembros por -3, tenemos la inecuación equivalente:

$$-3x > 3$$

Luego sumamos a ambos miembros 1 y obtenemos la relación buscada:

$$-3x + 1 > 4$$

Observemos que las acciones realizadas en ambas tareas 1 y 2 (CE y RI), en el marco algebraico no difieren, seguimos transformando inecuaciones en inecuaciones equivalentes, el objetivo que perseguimos en ambos casos es distinto, en el primer caso buscamos el dominio de validez de la variable, en el segundo, partiendo de una desigualdad condicional buscamos otra para una expresión transformada de la dada.

4.6.2. Tarea 1: CE bajo el marco funcional

En el marco funcional, esta tarea se impregna de su verdadero sentido, en efecto, la tarea 2 (RI) consiste en, dada la condición para las imágenes, encontrar la condición para la variable independiente. Es decir, en el Ejemplo 1: sea $f(x) = -3x+1$ y $g(x) = 4$ hallar para que valores de x es $f(x) > g(x)$.

Mientras que la tarea *CE* aparece cuando, dada la condición para la variable independiente, es necesario hallar la relación entre las imágenes. Es decir, si $x < -1$, qué relación existe entre $f(x)$ y $g(x)$. Observamos la figura 4.13) y podemos concluir que para dichos valores de x la gráfica de la función f se mantiene siempre por encima de la de la función g, es decir, las imágenes por la función f son mayores que las de la función g para cada $x < -1$, es decir, $-3x + 1 > 4$.

4.6.3. Tarea 1: CE bajo el marco geométrico

Veamos un ejemplo de la tarea *CE* en este marco:

Ejemplo 2. *Sabiendo que $a < 1$, ¿qué cota tiene a^2?*

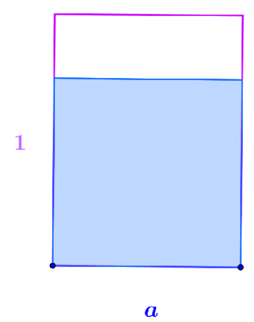


Figura 4.12: Representación del rectángulo de lados a y 1 y el cuadrado de lado a

El dominio de la variable a en este caso es el conjunto de los reales positivos por ser la longitud de un segmento. Pensamos en un rectángulo de lados a y 1, su área es a. El área de un cuadrado de lado a es a^2.

Como sabemos que $a < 1$, entonces el área del cuadrado es menor que el área del rectángulo, es decir que $a^2 < a \cdot 1 < 1$. Es decir, establecemos una ordenación entre la expresión a^2 y el número 1, $a^2 < 1$.

4.6.4. Tarea 2: RI bajo el marco algebraico

Esta tarea bajo el marco algebraico, consiste en encontrar el conjunto solución de la misma, utilizando sólo las propiedades de las operaciones entre números. Se trata de hallar la condición que cumple la variable para hacer verdadera la inecuación dada (recordar que según lo expresado en la sección 4.4 en la descripción del fenómeno *especificación*, la inecuación puede ser interpretada también como una función proposicional).

Si pensamos esta tarea en el contexto algebraico, tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. *Resolver la inecuación lineal* $-3x + 1 > 4$.

El recinto de valores admisibles de la variable es el conjunto de los números reales: R

Debemos encontrar los valores de x para los cuales

$$-3x + 1 > 4 \tag{4.2}$$

es verdadera.

Sumando -1 a ambos miembros y operando, obtenemos la inecuación equivalente:

$$-3x > 3$$

Dividiendo miembro a miembros por -3, tenemos la inecuación equivalente:

$$x < -1$$

Por Teorema 3 de la sección 3.2.2 esta es la solución buscada, la cual afirma que la desigualdad (4.2) es válida para todos los valores de x menores que -1.

La solución de la inecuación es cualquier elemento x del conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}/x < -1\}$, o bien en notación de intervalo del conjunto $S = (-\infty, -1)$

4.6.5. Tarea 2: RI bajo el marco funcional

En el marco funcional, resolver una inecuación supone considerar cada miembro como una función en la variable indicada. Si el gráfico de $y = f(x)$ se encuentra por encima de la gráfica de $y = g(x)$ sobre el intervalo de valores de x, entonces para cada x en el intervalo, es $f(x) \geq g(x)$.

Retomando el Ejemplo 1, utilizado en el marco algebraico:

Ejemplo 4. *Resolver la inecuación lineal* $-3x + 1 > 4$.

Analicemos para qué valores de x la gráfica de $f(x) = -3x + 1$ está por encima de la gráfica de $g(x) = 4$

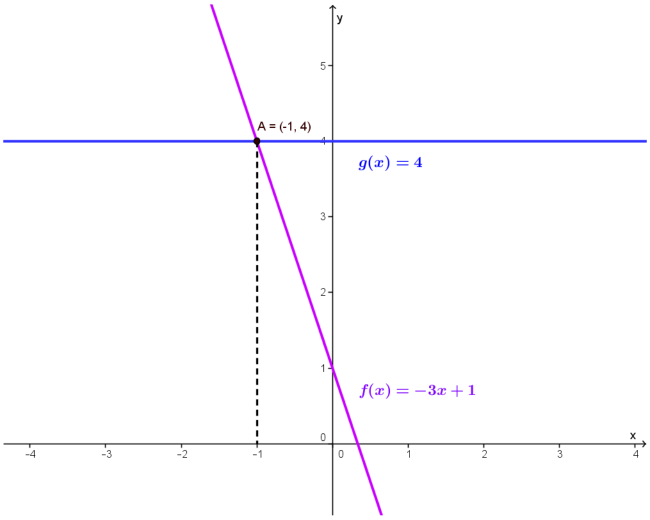


Figura 4.13: Gráfica de $f(x) = -3x + 1$ y de $g(x) = 4$

Observamos en la figura 4.13 que la desigualdad es válida para todos los valores de x menores que -1.

La solución es cualquier elemento x del conjunto $S = (-\infty, -1)$

Otra forma de justificación funcional es trabajar con la función resta, es decir $f(x) - g(x)$ y analizar el signo de la misma.

$$-3x + 1 - 4 > 0$$

Es decir:

$$-3x - 3 > 0$$

Para completar la resolución, analizamos para qué valores de x, la función $-3x - 3$ es positiva.

4.6.6. Tarea 2: RI bajo el marco geométrico

Utilizando propiedades geométricas es posible hallar el dominio de validez de la variable. Veamos un ejemplo de su uso.

Ejemplo 5. *¿Para qué valores de a es $a > a^2$?*

Notemos que el dominio de la variable a en este caso es el conjunto de los reales positivos, pueden interpretarse como la longitud de un segmento.

Pensamos en un rectángulo de lados a y 1, su área es a. El área de un cuadrado de lado a es a^2

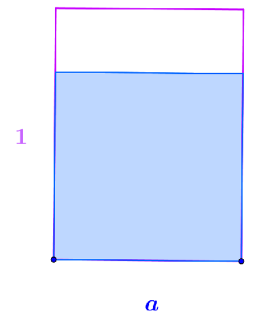


Figura 4.14: Representación del rectángulo de lados a y 1 y el cuadrado de lado a

Observemos en la figura 4.14 que se cumplirá la desigualdad cuando $0 < a < 1$.

4.6.7. Tarea 3: DDA bajo el marco algebraico

La demostración de desigualdades absolutas es un procedimiento que admite cualquiera de los tres marcos para su fundamentación.

Transcribimos a continuación del libro **L1** del cuadro 4.1 el tratamiento que realizan del tema. Nos interesa la descripción que realizan los autores del procedimiento que implica el trabajo en esta tarea y en este marco.

> La validez de una desigualdad absoluta se establece por medio de una demostración analítica, centrada en la manipulación algebraica usando propiedades de los objetos y sus relaciones dentro de la estructura algebraica.
>
> Para la demostración directa de una desigualdad absoluta se parte de alguna desigualdad conocida y luego se procede por pasos lógicos hasta llegar a la desigualdad deseada. Sin embargo, a veces no resulta fácil averiguar la desigualdad que debe tomarse como punto de partida. Entonces, generalmente, es posible hacer un análisis de la desigualdad que se quiere demostrar transformándola hasta obtener una relación más sencilla. En este caso la demostración directa equivale a tomar en orden inverso los pasos del ANÁLISIS. (p. 139)

Este procedimiento que describe el autor lo ejemplifica como mostramos a continuación:

Ejemplo 6. *Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que:*

$$a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$$

Ya que no resulta fácil averiguar de que desigualdad podemos partir, transformaremos la desigualdad dada.

Primeramente factorizaremos el segundo miembro y escribiremos:

$$a^3 + b^3 > ab(a + b) \tag{4.3}$$

Ya que a y b son ambos positivos, $a+b$ será positivo y, por el Teorema 2, podremos dividir ambos miembros entre $a + b$ sin alterar el sentido de la desigualdad. Esto es:

$$a^2 - ab + b^2 > ab \tag{4.4}$$

Sumamos miembro a miembro $-ab$, tenemos:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \tag{4.5}$$

o sea,

$$(a - b)^2 > 0 \tag{4.6}$$

Sabemos que esta última relación es siempre verdadera, pues $a \neq b$, de donde $a - b \neq 0$ y $(a - b)^2 > 0$. Por tanto, para la demostración que buscamos partiremos de esta última desigualdad.

Demostración.

$$(a - b)^2 > 0 \tag{4.7}$$

de donde

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \tag{4.8}$$

Sumando miembro a miembro $-ab$, tenemos:

$$a^2 - ab + b^2 > ab \tag{4.9}$$

Multiplicando ambos miembros por $a + b$ (Teorema 2), obtenemos el resultado deseado

$$a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$$

(Lehman, 1992, p. 140)

4.6.8. Tarea 3: DDA bajo el marco funcional

A continuación describimos un ejemplo que tomamos de Alsina y Nelsen (2009).

Ejemplo 7. *La idea de la relación entre la convexidad y la ubicación de las líneas tangentes y secantes fue empleada por Camile Jordan (1832-1922) para establecer la desigualdad de Jordan, para cada x en* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\frac{2x}{\pi} \leq \operatorname{sen} x \leq x$$

En la Figura 4.15 (Fenge, 1996) citado por Alsina y Nelsen (2009) tenemos una porcion de la gráfica de la función seno, junto con la gráfica de la recta tangente al seno en el origen, $y = x$ y la secante que une el origen con $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $y = \frac{2x}{\pi}$.

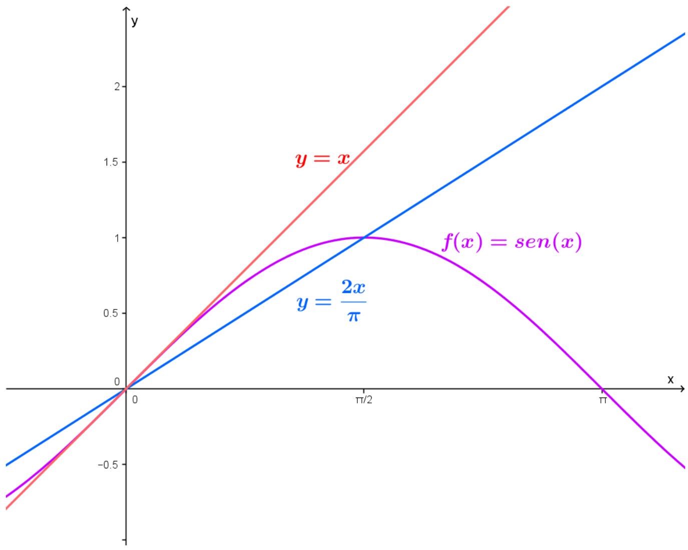


Figura 4.15: Representación gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$

Dado que la gráfica del seno es cóncava en $[0, \frac{\pi}{2}]$, debe unirse por encima de la recta secante y por debajo de la recta tangente, produciendo la desigualdad deseada.

$$\frac{2x}{\pi} \leq \operatorname{sen} x \leq x$$

Notar que para el autor presenta una visualización de la situación. Para demostrar la validez de la desigualdad desde el punto de vista funcional es aquí necesario probar que la función es cóncava hacia abajo, luego hallar la cuerda de ecuación $y = \frac{2x}{\pi}$ que determinan los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{\pi}{2}, 1)$ y la recta tangente de ecuación $y = x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

4.6.9. Tarea 3: DDA en el marco geométrico

En cuanto al marco geométrico, en Alsina y Nelsen (2009), encontramos la siguiente orientación para la resolución de este tipo de tarea. Comentan los autores que las demostraciones de las desigualdades absolutas surgen de propiedades geométricas, equivalencias de áreas o volúmenes. Es decir, representando los números positivos como longitudes de segmentos.

Ejemplo 8. *Para números positivos a y b,*

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

En la figura 4.16 usamos la desigualdad triangular dos veces para mostrar que, para números positivos a y b:

$$\sqrt{2}(a+b) \leq 2\sqrt{a^2+b^2} \leq 2(a+b)$$

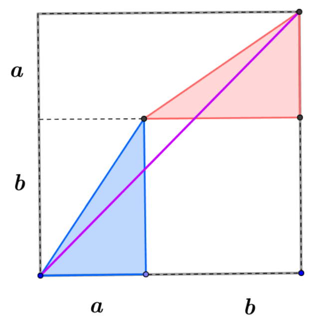


Figura 4.16: Representación geométrica del problema

De donde se obtiene:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

Esto puede extenderse a n variables para obtener la siguiente desigualdad de Mikowski (Hermann Minkowski, 1864-1909) para numeros a_i y b_i positivos. (Shklarsky,1962) citado por Alsina y Nelsen (2009)

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + a_i^2}$$

4.7. Resultados de la exploración

Los fenómenos caracterizados tienen su origen en procedimientos importantes en matemática: la ordenación, la especificación y la generalización.

En el esquema de la figura 4.17 representamos gráficamente los fenómenos matemáticos encontrados. Según la indagación realizada consideramos que la matemática avanzada necesita éstos como insumo. Además incluimos la idea del abordaje de la desigualdad a través de los distintos marcos y las tareas más relevantes identificadas.

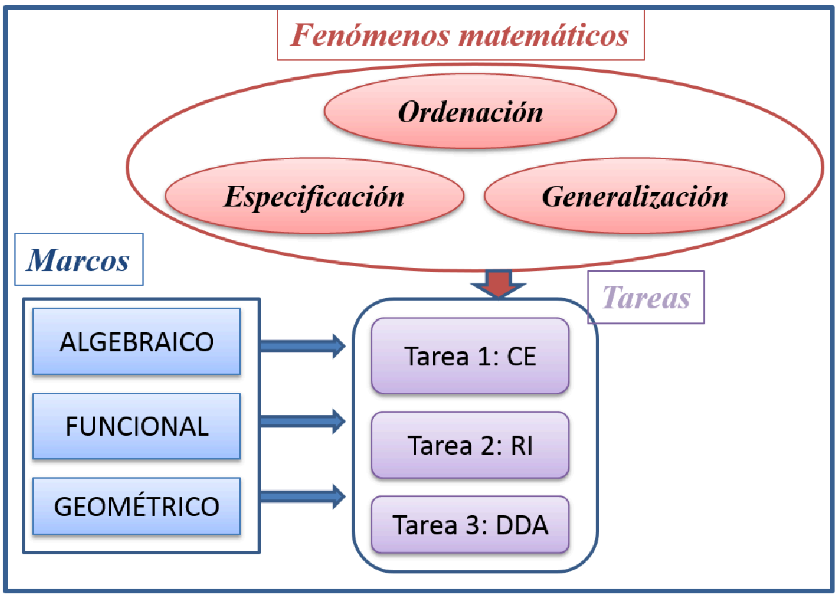


Figura 4.17: Fenómenos matemáticos, tareas y marcos

En esta búsqueda nos orienta la necesidad de encontrar aquellos fenómenos que pueden iniciarse en la matemática elemental, que surgen en las tareas que se abordan con los estudiantes, es por ello que nos preguntamos: ¿es posible iniciar a los estudiantes de la escuela secundaria en estos fenómenos?

Además, las dificultades de los estudiantes al trabajar con desigualdades, ¿pueden provenir de la falta de articulación entre estos marcos que planteamos?

Cuando surgen dificultades en el manejo algebraico de las desigualdades: ¿tienen que ver con alguna cuestión funcional que se desconoce?

Estos marcos que surgen en la investigación, ¿qué aportan a la comprensión de la desigualdad?, ¿es posible siempre interpretar una desigualdad en los distintos marcos?

Algunos de estos cuestionamientos que surgen a partir del análisis de los textos matemáticos serán considerados para el diseño de los instrumentos de recolección de datos utilizados en el contexto del estudio de caso que nos proponemos realizar.

Capítulo 5

Indagación en la historia

Debemos intentar comprender el comienzo del Universo a partir de bases científicas. Puede que sea una tarea más allá de nuestras capacidades, pero al menos deberíamos intentarlo.
STEPHEN HAWKING

5.1. Introducción

En la presente investigación nuestro interés es hallar elementos que nos ayuden a identificar fenómenos que han requerido a través de la historia la introducción o el uso de las desigualdades, según el enfoque de Freudenthal. Mencionamos en el capítulo 2 el interés de algunos investigadores como Boero (1997, 1998, 1999), citado por Borello (2010), quien reconoce que la historia de la matemática y la historia de la enseñanza de la matemática tendrían elementos para entender la constitución histórica de algún saber concerniente a las inecuaciones.

Bagni (2005) menciona "distintas perspectivas teóricas" en torno a la relación entre historia y didáctica. En el marco de una investigación sobre la historia del álgebra, se dedica particularmente a la historia de las ecuaciones e inecuaciones. Una primera perspectiva, el autor considera que se relaciona con la presentación de anécdotas y aclara que la selección de los datos históricos que se presentará en la práctica del aula es epistemológicamente relevante ya que refleja algunas opciones epistemológicas adoptadas por el docente. Otra postura que se asume es un paralelismo entre el desarrollo histórico y el desarrollo cognitivo. De hecho, las reacciones de los alumnos son a veces bastante similares a las reacciones que tuvieron los matemáticos en la historia en la conformación de una teoría matemática. Dicha similitud sería una herramienta importante para los profesores de matemática. De acuerdo con la perspectiva de "obstáculos epistemológicos" de Brousseau, la mayoría de los objetivos importantes de los estudios históricos es encontrar problemas y sistemas de restricciones (situaciones fundamentales) que deben ser analizados con el fin de entender conocimiento existente, cuyo descubrimiento está conectado a la solución de tales problemas (el autor cita a Brousseau, 1983; Radford, Boero y Vasco de 2000, p 163.). Los obstáculos se subdividen en epistemológicos, ontogenéticos, didácticos y culturales (Brousseau, 1989) y esta subdivisión señala que la esfera del conocimiento es considerada aislada de otras esferas.

Sessa (2005) reflexiona sobre la historia del álgebra y alerta sobre el uso "ingenuo" de la historia de la matemática en la enseñanza y el aprendizaje. Considera que el conocimiento de los "caminos" de la historia representa una vía de acceso a mayores niveles de complejidad acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos. Menciona que las condiciones de la historia que hicieron posible el planteo de problemas y de preguntas, no son adecuadas en general para reproducir en la escuela.

Azcárate y Deulofeu (1990) destacan en este sentido que no se trata de enseñar la historia de un concepto en un período o períodos, sino que constituye un instrumento básico para el enseñante y supone un conocimiento imprescindible para la elaboración de una didáctica determinada. Este conocimiento le permitirá adquirir una visión más amplia que la que se obtiene de las definiciones de una teoría acabada, a las que se llega después de un largo camino. Si esta visión se reproduce en la enseñanza como formalmente son presentadas en una teoría acabada puede conducir a graves errores epistemológicos y didácticos.

Según Halmaghi (2012) en los primeros registros matemáticos que brinda la historia, las desigualdades tenían sólo un carácter instrumental, y cuando las circunstancias se convirtieron en favorables, evolucionaron en una disciplina, tanto es así que en la actualidad existen revistas específicas de matemática dedicadas a las desigualdades y sus aplicaciones (Journal of Inequalities and Applications, con su primer volumen en 1997 y Mathematical Inequalities and Applications, con su primer volumen en 1998). Estima la autora que comenzaron siendo planteos que se constituyeron en una herramienta para problemas geométricos vinculados con longitudes, áreas, volúmenes. También fueron útiles para pensar problemas algebraicos y finalmente se instalaron en la teoría de funciones, aplicándose a los más variados modelos. Esto posibilitó la interacción con áreas de la matemática: el cálculo, la estadística, el análisis numérico, la teoría de juegos, etcétera.

A partir de las consideraciones de esta autora organizamos la información relacionada a las cuestiones históricas de las desigualdades en tres secciones, sin que esta disposición signifique una evolución lineal y cronológica de los acontecimientos o descubrimientos.

5.2. Origen en la Geometría

Rey Pastor y Babini (1997) describen en el capítulo correspondiente a la matemática helénica (siglos VI a IV a.C.) la obra matemática de Eudoxo, quien utiliza para llegar a la definición de la razón entre dos cantidades (sean éstas conmensurables o no) un “principio lógico”. Este principio se refiere a la condición para que dos cantidades “tengan razón mutua”. El mismo expresa que *dos cantidades tienen razón mutua cuando un múltiplo de la menor supera a la mayor*; en términos actuales: dadas dos cantidades $A > B$, existe siempre un entero positivo n tal que $\frac{1}{n}A < B$. Afirman los autores que Euclides en sus *Elementos* otorgó a este enunciado el carácter de “principio lógico”, pero Arquímedes lo considera en sus escritos un postulado. Este postulado se conoce actualmente como el “postulado de la continuidad”, de Arquímedes y a veces, de Eudoxo o Arquímedes.

Consideran los autores que Eudoxo logró conceder carácter geométrico a las cantidades inconmensurables, con lo que acentuó el proceso iniciado por los pitagóricos de sacrificar la aritmética y el álgebra, privilegiando lo geométrico. Estas nociones seguirán presentándose en la matemática griega, por mucho tiempo bajo ropaje geométrico.

En el libro citado, los autores describen en el capítulo correspondiente a la matemática helenística los trabajos de Euclides, Arquímedes y Apolonio, conciben esta época como la “edad de oro de la matemática griega”. Afirman que Euclides establece con sus postulados las condiciones de desigualdad de ciertas líneas y de ciertas porciones de superficies, así como fija un principio de mínimo, para casos particulares.

Fink (2000), en relación con la historia de las desigualdades, menciona que los antiguos sabían de la desigualdad del triángulo como un hecho geométrico. Aclara que se trata de una desigualdad general puesto que se aplica a todos los triángulos. Además destaca que una desigualdad general en el contexto geométrico es la desigualdad de la media aritmética y la geométrica para dos números, incluida en el texto de Euclides.

Según Boyer (1986), las tres medias: aritmética, geométrica y subcontraria (más tarde llamada harmónica), ya eran conocidas por los babilonios. Cuenta que Pitágoras de Samos, matemático griego que vivió alrededor del año 550 antes del nacimiento de Euclides, sabía de las tres medias antes mencionadas en la Mesopotamia. Los pitagóricos poseían una manera alternativa de definir las tres medias, utilizando la noción de proporcionalidad. Es decir, dados dos números positivos a y b, las medias aritmética, geométrica y harmónica entre a y b es el número c satisfaciendo respectivamente las siguientes relaciones:

$$\frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{a} \tag{5.1}$$

$$\frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{c} \tag{5.2}$$

$$\frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{b} \tag{5.3}$$

De donde:

Despejando c de la ecuación (5.1), obtenemos $c = \frac{a+b}{2}$, c es la media aritmética de a y b.

Despejando c de la ecuación (5.2), obtenemos $c = \sqrt{ab}$, c es la media geométrica de a y b.

Despejando c de la ecuación (5.3), obtenemos $c = \frac{2ab}{a+b}$, c es la media harmónica de a y b.

Una construcción geométrica como se muestra en la figura 5.1 demuestra esta desigualdad.

Papus de Alejandría, geómetra griego que vivió alrededor del año 300 antes del nacimiento de Euclides, describe en su libro III de su colección una interesante construcción de las medias: aritmética, geométrica y harmónica desde un punto de vista geométrico en un semicírculo:

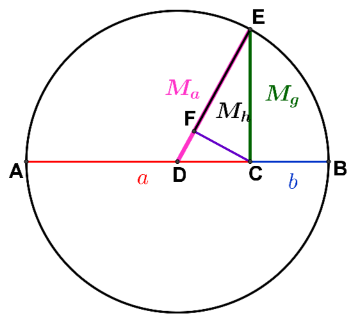


Figura 5.1: Desigualdades entre la media aritmética, geométrica y harmónica

Donde $|AC| = a$, $|CB| = b$, $|AD| = \frac{a+b}{2}$, $|CE| = \sqrt{ab}$ y $|FE| = \frac{2ab}{a+b}$

Fink (2000) menciona que una tercera desigualdad, es la que ahora llamamos la “desigualdad isoperimétrica” en el plano. Ésta era conocida por Arquímedes y por matemáticos griegos anteriores.

Además, el autor menciona que en la antigua Grecia, durante el segundo milenio a.C., consideraban como ecuaciones a las relaciones entre números, buscando aquellos que satisfacieran las mismas (interpretadas como longitudes, áreas y volúmenes) con tanta precisión como fuera posible o deseable.

Boyer (1996) menciona que Aristarco de Samos (310-230 a.C.) propuso un sistema astronómico heliocéntrico (más de un milenio antes de Copérnico) pero todo lo que escribió al respecto se ha perdido. En cambio nos ha llegado su tratado, escrito posiblemente antes de elaborar su teoría heliocéntrica, titulado *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, en el que supone un universo geocéntrico. En esta obra hace la suposición de que cuando la Luna está exactamente medio llena, el ángulo entre la visual dirigida al centro del Sol y la visual dirigida al centro de la Luna es menor que un ángulo recto en un treintavo de cuadrante. En el lenguaje actual esto significa que la razón entre la distancia de la Luna a la Tierra y la distancia del Sol a la Tierra es igual a $sen(3°)$. Como aún no se conocían las tablas trigonométricas recurre a un teorema geométrico conocido en su época y que hoy lo expresaríamos por medio de la cadena de desigualdades trigonométricas:

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

para $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$

De estas condiciones, indica el autor, Aristarco afirmó que el Sol está más alejado de la Tierra que la Luna, si bien los valores está lejos de aproximarse a los verdaderos mejoró los que Arquimedes atribuye a Eudoxo y Fidias.

En los *Elementos* de Euclides (300 A.C.) en el libro X se incluye la siguiente proposición:

> Proposición 1: Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

A continuación de la Proposición 13 se menciona el *Lema*:

> *Lema:* Dadas dos rectas desiguales hallar cuánto el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor

Se acompaña con la figura 5.2

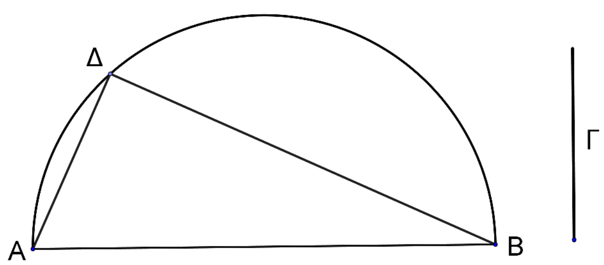


Figura 5.2: El cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de $A\Delta$, es decir Γ.

Y la explicación:

> Descríbase sobre AB el semicírculo $A\Delta B$ y adáptese a él la (recta) $A\Delta$ igual a Γ y trácese Δ. Entonces está claro que el ángulo $A\Delta B$ es recto y que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de $A\Delta$, es decir de Γ, en el cuadrado de ΔB.

Según Boyer (1986), Herón estaba interesado en las medidas numéricas bajo todas sus formas que derivan de las mediciones geométricas a distintas aplicaciones, como óptica, mecánica y geodesia. La ley de reflexión de la luz ya la conocían Euclides y Aristóteles pero Herón parece haber sido el primero que la demostró a través de un razonamiento geométrico. Si un haz de luz de rayos luminosos parte de un foco S, se refleja en un espejo MM' y se dirige después hacia el ojo E de un observador (ver figura 5.3) entonces la luz deberá recorrer el camino más corto posible SPE, que es exactamente aquel en que los ángulos SPM y EPM' sean iguales. Ningún otro camino posible $SP'E$ es más corto. En efecto, trazando la perpendicular SQS' a MM' tomando $S'Q = SQ$ y comparando el camino SPE con el $SP'E$, dado que $S'PE$ es una linea recta por ser iguales los ángulos $M'PE$ y MPS, se llega a la conclusión de que $S'PE$ es el camino más corto. Es decir a través de una comparación de las longitudes de los segmentos utilizando la desigualdad del triángulo.

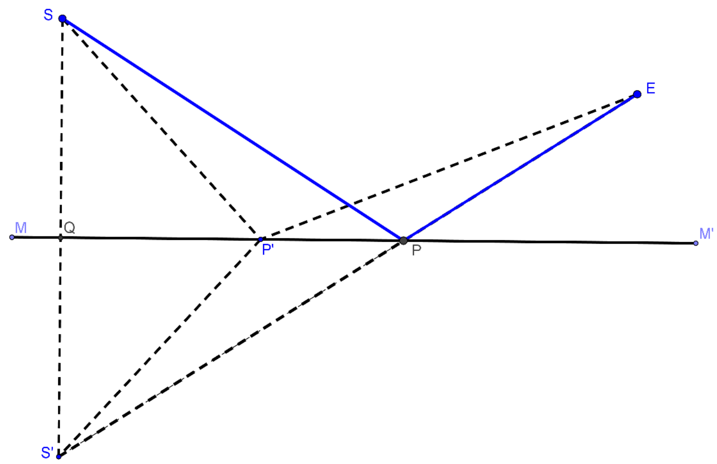


Figura 5.3: Ley de la reflexión de la luz

Sessa (2005) considera que el tratamiento geométrico babilónico supone la existencia de una solución, y piensa la figura como una figura de análisis, donde la resolución numérica se apoya en la misma para guiarse en el cálculo, pero no se realizan sobre ella transformaciones a partir de los datos. En cambio Euclides, obtiene los resultados mediante construcciones a partir de los datos, avanza hacia lo que quiere hallar, es decir avanza por “síntesis” (desde los datos a las incógnitas). Es decir que el tratamiento que hace Euclides está lejos del trabajo que realizamos con las ecuaciones actualmente. Resalta la autora que las ecuaciones (o la inecuación) se caracterizan por juntar en una expresión datos e incógnitas, y a partir de una relación que se conoce entre ellos se transforma sin cambiar su conjunto solución, hasta obtener el o los valores de las incógnitas. A este tipo de tratamiento se le da el nombre de "análisis".

5.3. Emigración al Álgebra

Según Rey Pastor y Babini (1997) las ideas de Diofanto, matemático destacado del período grecorromano de los primeros siglos cristianos, estuvieron vinculadas preferentemente con la matemática babilónica. Diofanto, para resolver ecuaciones de segundo grado, toma incógnitas auxiliares que lo llevan a reducirlas a ecuaciones lineales (sistemas) y a desigualdades, considerando las resolventes de las ecuaciones cuadráticas correspondientes (transformando las desigualdades en igualdades). Los autores describen el "problema de los vinos", el cual trata de determinar las cantidades de dos clases de vino de precios proporcionales a 8 y 5, de manera que el costo sea un cuadrado, que sumado al número 60, reproduzca el cuadrado de la suma de las dos cantidades. Para resolver el sistema (con los símbolos actuales): $8x + 5y = z^2$; $z^2 + 60 = (x + y)^2$ introduce la incógnita auxiliar $u = x + y$ que lo lleva al sistema $u^2 - 60 = 3x + 5u = 8u - 3y$, y a las desigualdades $8u > u^2 - 60 > 5u$. Teniendo en cuenta las resolventes de las ecuaciones cuadráticas (transformando las desigualdades en igualdades), encuentra que u está entre 11 y 12. Como $u^2 - 60$ debe ser un cuadrado, introduce otra variable v tal que $u^2 - 60 = (u - v)^2$ llegando a un nuevo par de inecuaciones: $22v < 60 + v^2 < 24v$, llega así a $19 < v < 21$, toma $v = 20$ y de allí obtiene los demás valores.

Notemos que en las estrategias utilizadas para resolver estos tipos de problemas se usan (como herramientas) las igualdades y las desigualdades. No se trata de resolver un problema de desigualdades, sino que éstas surgen como una estrategia de resolución.

Halmaghi (2012) afirma que en la historia del álgebra, Nesselmann (1842) identifica tres etapas de desarrollo: álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica. Además continúa su descripción mencionando que el álgebra retórica es el álgebra de las palabras y el álgebra sincopada utiliza una mezcla de palabras y símbolos para expresar generalidades.

Boyer (1986) piensa que tal división del desarrollo del álgebra supone una simplificación quizás excesiva pero que puede servir para una primera aproximación de lo ocurrido, y dentro de este esquema ubica a la obra *Arithmetica* de Diofanto en la segunda categoría.

Sessa (2005) advierte respecto de esta clasificación tan rígida del álgebra que atiende sólo a sus formas de escrituras. Considera que las relaciones entre abstracción, escritura simbólica y generalización son complejas y no es posible pensar la historia como una evolución lineal en esos tres aspectos hasta alcanzar las formas actuales. Respecto de la producción de Viète, resalta la autora que a pesar del tratamiento algebraico de las expresiones, la interpretación geométrica seguía vigente. Es decir, la geometría seguía dando interpretación a las expresiones y validando procedimientos de cálculo.

Según Bagni (2005), François Viète introdujo la distinción entre una cantidad determinada, una constante y las variables en una ecuación. Comenta que Viète fue el primero en resolver con éxito las ecuaciones paramétricas. Después de los descubrimientos de Viète, las ecuaciones se convirtieron en objetos de procesos de orden superior.

Según comenta Sfard (1995), desde Viète en adelante, el álgebra estructural hace su aparición. Las obras de Descartes y Fermat, sobre los hombros de Viète, ayudaron a la geometría a capturar generalidad y expresar ideas operativas. En los primeros años, el álgebra necesita de la geometría para la materialización y verificación, luego, la geometría utiliza el álgebra para nuevas materializaciones y desarrollo.

Halmaghi (2012) estima que antes de la invención de los símbolos, el álgebra fue la interpretación verbal de los procesos algorítmicos. Es importante reflexionar sobre si las desigualdades emergieron de la retórica o el álgebra sincopada, o si la naturaleza de las desigualdades es en realidad diferente de la esencia del álgebra. Es posible que la invención de los símbolos de las desigualdades ayudaran a la manipulación de las desigualdades conocidas.

5.3.1. Los símbolos

Sostiene Eves (1983), citado por Halmaghi (2011), que los símbolos $<$ y $>$ se introdujeron por primera vez por el matemático inglés Thomas Harriot (1560-1621) en su obra *Artis Analyticae Praxis* publicada en Londres en 1631. Halmaghi (2011) también cita a Johnson (1994) quién comenta que Harriot fue inspirado por un símbolo que había visto en el brazo de un nativo americano (ver figura 5.4) para “inventar” los símbolos de las desigualdades.

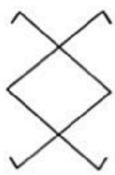


Figura 5.4: Origen de los símbolos

En 1734, el francés Pierre Bouguer inventó los símbolos $\leq$ y $\geq$.

Mucho antes de la aparición del álgebra simbólica no había símbolos para representar las incógnitas y no había símbolos para representar la relación entre incógnitas antes de Diofanto. No hay nada malo en escribir enunciados matemáticos en un lenguaje sencillo, pero puede tomar varias páginas, mientras que con símbolos matemáticos el mismo trabajo se podría hacer, posiblemente, en una sola línea.

Sessa (2005) menciona el proyecto de Descartes como esencialmente nuevo que consistía en resolver problemas geométricos a través de herramientas algebraicas.

Rey Pastor y Babini (1997) describen en la resolución gráfica de las ecuaciones cúbicas y cuárticas el método de Descartes de la "parábola fija", que consiste en considerar la ecuación de cuarto grado reducida. Se construye gráficamente una parábola fija de lado recto unitario y una circunferencia de centro y radio dados, y es de esta manera que se pone en juego la geometría sintética y la analítica.

Según Boyer (1986), el álgebra simbólica formal, que había seguido desde el Renacimiento un proceso más o menos continuo de avance, encuentra su culminación en *La géometrie* de Descartes. Ya que fue mucho más sistemático que sus predecesores en su álgebra simbólica y en la interpretación geométrica del álgebra.

5.4. Inserción en la teoría de funciones

Rey Pastor y Babini (1997) sostienen que en el método de máximos y mínimos de Fermat, se logra traducir algebraicamente la anulación de la variación de la función en las proximidades de los valores considerados. Aplican este método al problema de encontrar entre todos los rectángulos isoperimétricos el de área máxima. Si $2a$ es el perímetro y x el lado del rectángulo buscado, deberá hacerse máximo el producto $x(a-x)$. La diferencia entre ese producto y su valor en las proximidades del máximo tendrá que anularse. Según Fink (2000), la desigualdad general siguiente no apareció durante muchos años y aclara que tal vez sea un resultado de Newton. Sea p_r el promedio de la función simétrica elemental de las cantidades positivas $a_1 \ldots a_n$ de orden r, es decir, el promedio de las sumas de todos los productos de los a_i tomados r a la vez. Entonces Newton demostró que $p_{r-1} \cdot p_{r+1} < p_r^2$ para $1 \leq r < n$, a menos que todos los a_i sean iguales. Maclaurin luego observó que $p_1 > p_2^{\frac{1}{2}} > \ldots > p_n^{\frac{1}{n}}$. Como observan Hardy, Littlewood y Polya (1934), este último resultado es un corolario del teorema de Newton. Los extremos de esta sucesión son la media aritmética y la media geométrica, lo que permite establecer una desigualdad ya famosa.

En la teoría de las "razones últimas" de Newton expuesta en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) aparece el primer indicio del concepto de límite funcional en estrecha relación con el cálculo de fluxiones (velocidades instantáneas). Estas ideas de Newton fueron desarrolladas por el matemático escocés Colin Maclaurin (1698- 1746) que, en su gran obra *A Treatise of Fluxions* (1742), establece el cálculo sobre la base de una teoría geométrico cinemática de límites. Maclaurin rechazaba los infinitésimos, afirmaba que los antiguos nunca reemplazaron curvas por polígonos y que la base de la geometría de Arquímedes era el concepto de límite. Lo sorprendente es que Maclaurin usa el concepto de límite como algo evidente que no precisa ser explícitamente presentado ni analizado. Esto se debe a que el cálculo de Maclaurin se sustenta sobre las ideas de espacio, tiempo y movimiento lo que le lleva a aceptar como evidentes la continuidad y la diferenciabilidad.

Fink (2000) considera que Maclaurin desempeña un papel prominente en el campo de las desigualdades, pero que no originó las desigualdades generales con nombres. Además comenta que este matemático realizó lo que equivale a las pruebas de épsilon-delta para varios límites, y hay serios indicios de que estos resultados tuvieron una influencia en los matemáticos continentales que estaban empezando a utilizar las pruebas basadas en la desigualdad para el análisis. Curiosamente, el siglo transcurrido más o menos entre Maclaurin y Cauchy no dio lugar a desigualdades. Cauchy es reconocido como el autor de la prueba formal de la desigualdad entre la media aritmética y geométrica.

Como afirma Sinaceur (1992) fue Weierstrass quién eliminó del lenguaje del análisis toda relación con el movimiento. Considera que frases como "una variable se acerca a un límite", que recuerdan las ideas temporales de Newton, fueron transformadas en desigualdades, intentando aritmetizar todo lo posible. Además agrega el autor que se debe al mismo matemático la definición de continuidad que hoy se llama épsilon-delta. Destaca que en su obra de 1968 Jean Diudonné define explícitamente el cálculo infinitesimal como "un aprendizaje en el manejo de las desigualdades", un aprendizaje que puede resumirse en tres palabras: "minorización, mayorización, aproximación".

Según Rey Pastor y Babini (1997), Schwartz, discípulo de Weierstrass, fue quien continuó su obra y se ocupó del cálculo de variaciones, en especial de superficies de área mínima. Además de sus aportes en teoría de grupos y en teorías de funciones le debemos la *desigualdad de Schwartz* que establece, en 1885, que el producto escalar de dos vectores no puede superar el producto de sus módulos. Aunque la desigualdad de Schwartz para $\mathbb{R}^3$ puede ya ser atribuida a Lagrange para sumas finitas arbitrarias de números reales había sido establecida por Cauchy en 1821 y para integrales por Buniacowsky en 1859. Bourbaki (1976) expresa que la teoría de conjuntos, en el sentido que le damos actualmente, se la debemos a Cantor. Weierstrass fue el único en seguir los trabajos de su alumno Cantor. Quién había demostrado en 1890 la desigualdad $m < 2^m$, pero no pudo establecer una relación de buena ordenación entre cardinales cualesquiera. Este inconveniente fue resuelto por Bernstein (1897) demostrando que las relaciones $a \leq b$ y $b \leq a$ implican $a = b$, y sobre todo por el teorema de Zermelo que demuestra la existencia en todo conjunto de una buena ordenación (conjeturado por Cantor en 1883).

Fink (2000) reconoció que la historia de las desigualdades se había escrito cuando Hardy completó las 300 páginas de su libro con desigualdades con sus pruebas. Por otra parte, menciona que hay dos revistas en la actualidad dedicadas a desigualdades (*Journal of Inequalities and Applications y Mathematical Inequalities*), así como muchas publicaciones matemáticas, cuyo único propósito es demostrar una desigualdad.

Pellicer (2007) indica que la teoría de optimización se desarrolló en la primera mitad del siglo XX debido al avance del capitalismo hacia las grandes empresas en Estados Unidos y a la ejecución de grandes planes estatales en la Unión Soviética. Durante la Segunda Guerra Mundial se resolvieron diversos problemas con criterio de optimización. Esto exigió la construcción de ordenadores y el desarrollo de la técnica de programación lineal, donde las restricciones vienen dadas por desigualdades lineales y el criterio de optimización se expresa mediante una función lineal.

5.5. Análisis de la indagación

La geometría, la aritmética y la teoría de números son disciplinas que están bien establecidas desde la antigüedad. Con la etapa del álgebra simbólica, nuevas disciplinas matemáticas se desarrollaron, como la geometría analítica. Sfard (1995) sostiene que la geometría ayudó a la materialización de pesados cálculos de álgebra, el álgebra y la geometría ayudaron a evolucionar y a responder muchos de los problemas que habían quedado pendientes desde la antigüedad. Inicialmente, las desigualdades no tienen un estatus especial en matemática, sino que se consideraron peculiaridades o herramientas matemáticas para el desarrollo de otras teorías. Dos milenios y acciones personales cambiaron el estado de las desigualdades. Desde considerarse una herramienta para la matemática hasta afianzarse como una disciplina real de estudio.

A partir de lo analizado en la evolución histórica pensamos que las desigualdades no son intrínsecamente geométricas, aunque muchas de ellas puedan ser visualizadas a través de la representación de objetos geométricos, por la relación de comparaciones entre las relaciones métricas (longitudes, áreas, volúmenes); ni puramente algebraicas, a pesar de que puedan ser traducidas al lenguaje algebraico, ni aun del análisis, aunque están presentes en las nociones de límite y convergencia. Es una noción que se presta a diversos "trajes", a una variedad de expresiones. Comprender estas relaciones significa poder ser presentadas en distintos marcos (algebraico, geométrico y funcional) y mostrar que estas expresiones se corresponden en cada uno de ellos. Así, reconocemos que la desigualdad es un tema transversal que está presente en muchos otros que conectan distintos dominios de la matemática.

Como consecuencia de este análisis surgen relaciones entre la evolución histórica de la desigualdad y los marcos (según Douady) adoptados para su tratamiento, como aparecen en el esquema de la figura 5.5 y ejemplificados en tareas en la sección 4.6.

- *Marco geométrico*: se relaciona fundamentalmente con la primera etapa histórica cuando las desigualdades surgen como un instrumento para expresar problemas de comparación de magnitudes (longitudes, áreas, volúmenes), para resolver problemas geométricos. Se basa en lo visual, las construcciones y las propiedades de los objetos geométricos respaldan las comparaciones.

- *Marco algebraico*: se pone en evidencia durante la etapa en que las desigualdades emigran de la geometría para impregnarse del simbolismo del álgebra. Las resoluciones basadas en procedimientos algebraicos son priorizadas. Se subordina al trabajo con la ecuación, incluso en cierto momento se limita a la sustitución en los extremos. También es tomada como una herramienta, en este caso para resolver problemas.

- *Marco funcional*: se considera en la etapa en que las desigualdades se instalan definitivamente en la teoría de funciones, donde se enriquecen con nuevas estructuras y sustentan la reversibilidad de los procesos de acotación. En este marco se resuelven problemas de modelización de situaciones que podrán ser geométricas, algebraicas, cotidianas, relacionadas con otras ciencias, etcétera.

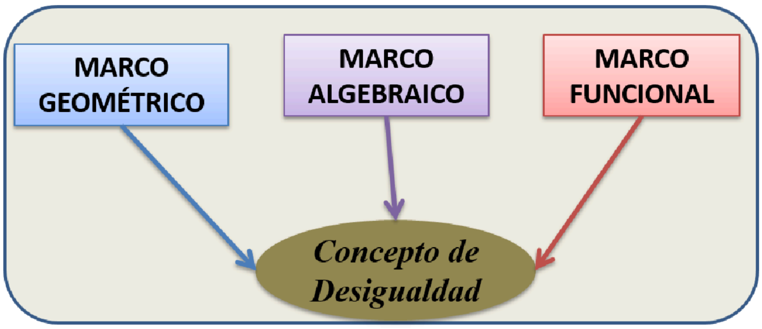


Figura 5.5: Marcos y desigualdad matemática

5.6. Conclusiones

En esta indagación histórica surgen estos tres marcos a través de los cuales las miradas del objeto desigualdad toma tintes especiales.

En relación con los tres fenómenos matemáticos organizados por el concepto de desigualdad presentados en el capítulo 4, que describimos en detalle en la sección 4.4, los documentos analizados permiten constatar algunas evidencias de su manifestación, a saber:

- *Ordenación*: se establecen relaciones de desigualdad entre cantidades distintas de la misma magnitud. Este fenómeno aparece, por ejemplo:

- en las relaciones de desigualdad establecidas entre números, interpretadas como longitudes, áreas y volúmenes;
- en el postulado de Arquímedes.

- *Especificación*: del conjunto solución de una inecuación. A modo de ejemplo mencionamos algunos:
  - en la antigua Grecia, durante la exploración de relaciones entre números, se trata de buscar aquellos que satisficieran las relaciones con tanta precisión como fuera posible o deseable. Estas relaciones eran interpretadas como longitudes, áreas y volúmenes;
  - Diofanto al resolver ecuaciones de segundo grado comienza a tomar incógnitas auxiliares que lo llevan a reducirlas a ecuaciones lineales (sistemas) y a desigualdades. Dichas desigualdades son inecuaciones que resuelve especificando los números que pueden verificar las condiciones.

- *Generalización*: aparece claramente la idea de la generalización de una propiedad expresada en una desigualdad que se menciona para un representante que se toma de una clase de objetos. Encontramos por ejemplo:
  - la desigualdad del triángulo se trata de una desigualdad general puesto que se aplica a todos los triángulos;
  - Hardy recopila en su libro las desigualdades generales con sus pruebas. Dichas pruebas consisten en justificaciones formales de la generalización de la propiedad para todos los elementos para los cuáles está definida.

Coincidimos con Sessa (2005) respecto de que el análisis histórico cuestiona el modo distanciado en que usualmente el álgebra y la geometría conviven en la escuela.

Nos permitimos añadir que la incorporación de la mirada funcional amplía las posibilidades de favorecer la construcción de sentido en la escuela. Además, como dice la autora, el juego de marcos de Douady constituye una herramienta didáctica útil para dicha construcción.

Consideramos que esta indagación histórica nos ayuda a reflexionar respecto de cuáles de los fenómenos matemáticos encontrados que son incluidos en la escuela fueron importantes a lo largo de la historia del concepto y continúan vigentes. Así como también a pensar en los aspectos del objeto mental desigualdad que aporta el trabajo con cada uno de ellos.

Capítulo 6

Exploración en la opinión de investigadores

Las abejas, en virtud de una cierta intuición geométrica, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material.
PAPUS DE ALEJANDRÍA

6.1. Introducción

Puig (1997) en su *Análisis Fenomenológico* respecto de los conceptos matemáticos, considera que los mismos se crean en los procesos fenómenos/medios de organización, pero esto no significa que una vez creados permanezcan inmutables. Por el contrario, menciona que los conceptos matemáticos se modifican en la historia como consecuencia de su uso y de los nuevos sistemas matemáticos de signos en los que se describen.

Según el autor, uno de los procesos para crear nuevos conceptos en la matemática es realizar el análisis de los objetos mentales que los matemáticos usan como medios de organización de los fenómenos. Este proceso permite definir a los mismos conceptualmente, lo que implica incorporarlos al sistema de la matemática. Claramente podemos decir que la actividad matemática produce conceptos a partir de objetos mentales.

Lakatos (1976), citado por Puig (1997), señala algo parecido en el relato que narra en *Pruebas y refutaciones*, considera que los conceptos matemáticos sufren transformaciones como consecuencia de la actividad matemática de probar teoremas, resolver problemas, organizar un sistema deductivo y del proceso de definir. Es decir, los objetos matemáticos no tienen existencia independiente del proceso de la actividad matemática en la que surgen. A menudo, entre el objeto mental y el concepto creado a partir de él se producen desajustes. Señala Puig que Freudenthal ejemplifica este desajuste con el concepto de continuidad. Afirma que luego de la primera definición explícita de continuidad, el objeto mental continuidad se nutrió de ejemplos que ahora eran ejemplos de funciones continuas que cumplían con la definición y que no habían sido pensados con anterioridad. Debido al surgimiento del concepto revisan el objeto mental primitivo de continuidad y a su vez este último fue necesario para el surgimiento del concepto.

Atendiendo a estas consideraciones realizamos una indagación para conocer la caracterización que realizan matemáticos profesionales de las desigualdades, así como el rol que le atribuyen dentro de la disciplina. Para realizar esta indagación en el objeto mental de desigualdad que poseen, administramos un cuestionario con el objetivo de obtener información del mismo. Las preguntas realizadas son del tipo abiertas y flexibles, no hay limitaciones sobre el contenido o el modo de respuesta y esperamos encontrar respuestas de las que pueden surgir relaciones que nos den indicios sobre la presencia de los fenómenos planteados. Kerlinger (citado por Cohen y Manion, 1990) define los ítems abiertos como aquellos que suministran un marco de referencia para las contestaciones de los informantes y ponen un mínimo de restricción sobre las mismas y su expresión.

6.2. Muestra

Para conocer el concepto de desigualdad y los fenómenos para los cuales el mismo es medio de organización que señalan los investigadores, en esta primera etapa, consultamos a 6 (seis) investigadores en matemática, pura o aplicada, que actualmente están trabajando en el institutos de investigación de nuestra región. La muestra es por lo tanto accidental por proximidad.

6.2.1. Cuestionario

El cuestionario implementado se trata de una consulta de opinión en torno a los conceptos de desigualdad e inecuación y es el siguiente:

1. En un texto breve enuncie una definición de desigualdad.
2. En un texto breve enuncie una definición de inecuación.
3. Desde el punto de vista de su experiencia en el ámbito de la matemática, ¿qué tan importantes son las desigualdades? ¿Y las inecuaciones? ¿A qué necesidad responden?

6.3. Respuestas de los investigadores

La consulta a los investigadores fue realizada mediante correo electrónico. A continuación transcribimos textualmente las mismas y realizamos un análisis de lo obtenido en la indagación.

Investigador 1: *Investigador de una institución de dependencia pública, en matemática pura, con 20 años de antigüedad.*

PREGUNTA 1

> Una desigualdad es una relación entre dos objetos matemáticos que no son iguales. En general, se le da el nombre de desigualdad cuando esa relación se verifica para todos los elementos, tales que están bien definidos ambos miembros de la desigualdad, aunque a veces también se utiliza el nombre de desigualdad cuando la misma se verifica para un subconjunto de elementos, en este caso al presentar la desigualdad también se da el conjunto de elementos para el cual la desigualdad es válida.

PREGUNTA 2

> Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, la parte literal de las expresiones algebraicas constituyen la o las incógnitas y el conjunto de los valores de la o las incógnitas que hacen que la desigualdad se cumpla se denomina conjunto solución.

PREGUNTA 3

> En mi trabajo me encuentro más frecuentemente con las desigualdades que con las inecuaciones. La mayoría de los resultados teóricos en los que trabajamos son desigualdades. El trabajo a veces consiste en encontrar el conjunto más grande de objetos (funciones, vectores, etc.) para los cuales una determinada desigualdad es cierta; otras veces se trabaja en probar que una desigualdad es «óptima» en algún sentido; por ejemplo, probando que para un subconjunto más pequeño de valores en realidad tenemos una igualdad; otras veces es necesario probar nuevas desigualdades para llegar a un resultado concreto.
>
> Las inecuaciones se han presentado en mi trabajo como una herramienta más elemental; por ejemplo, para determinar el dominio de alguna función de una o más variables.
>
> Un matemático no puede ignorar cómo se resuelven las inecuaciones elementales, es decir, conocer las propiedades de las desigualdades que son el fundamento de los métodos para resolver inecuaciones. Tampoco puede ignorar las desigualdades clásicas que son necesarias a la hora de resolver un problema o usarlas en una demostración.
>
> Ambas cosas, inecuaciones y desigualdades clásicas son herramientas necesarias para poder trabajar en matemática pura.

Investigador 2: *Investigador de una institución de dependencia pública, en matemática pura, con 46 años de antigüedad.*

PREGUNTA 1

Dado un conjunto X, la desigualdad es una relación R definida en un X que satisface las propiedades de Tricotomía (Se cumple exactamente una de: aRb, bRa, $a = b$) y transitividad (si aRb y bRc entonces aRc).

PREGUNTA 2

Es una expresión algebraica entre dos términos conteniendo incógnitas y separados por un signo de desigualdad.

PREGUNTA 3

Las desigualdades e inecuaciones son fundamentales ya que en la vida real la igualdad NO EXISTE. Son la forma natural en que se presentan los problemas desde los cotidianos a los más sofisticados. Por ejemplo, cuando digo que una pelota de fútbol es número 5, en realidad digo que su peso y tamaño están entre ciertos valores, es decir cumplen dos inecuaciones; asimismo nunca se trabaja con un valor exactamente igual a los números π o $\sqrt{2}$, sino con aproximaciones con un cierto error que significa igualmente cumplen dos desigualdades.

Las razones de la importancia del tema de fondo están expuestas arriba. Hay también razones técnicas como que a partir de la noción de desigualdad se derivan las de orden, valor absoluto y medida, bases de toda la geometría. El hecho de ser "completo" en el sentido de orden es lo que diferencia al conjunto de los reales del de los racionales.

Además otra de las razones es que para presentar esos conceptos generó profundas reflexiones a las mejores mentes matemáticas como Hilbert, Cantor y Poincaré.

Investigador 3: *Investigador de una institución de dependencia pública, en matemática pura, con 40 años de antigüedad.*

PREGUNTA 1

Esto es complicado. Uno empieza con ejemplos en la primaria (grande o chico, $1 < 2$), y con el tiempo, cuando se llega a la universidad, se da a una definición formal como relación binaria con ciertas propiedades (de acuerdo al contexto).

PREGUNTA 2

La palabra inecuación no existe en castellano (diccionario de la RAE). Me parece que es una traducción (barbarismo) del inglés "inequality", que debería traducirse como "desigualdad".

PREGUNTA 3

Son centrales a casi todos los temas de matemáticas, desde ecuaciones diferenciales a matemáticas discretas. Imposible de hacer una lista completa, mucho menos en orden de importancia.

Entre las que ya mencioné: en cálculo para definir el límite (¿qué significa que dos cantidades "se parecen"?). En ecuaciones diferenciales para demostrar cuestiones de existencia, unicidad, regularidad (suavidad), y otras propiedades.

Investigador 4: *Investigador de una institución de dependencia pública, en matemática aplicada, con 12 años de antigüedad.*

PREGUNTA 1

Una desigualdad es una relación que expresa que dos valores no son iguales, e indica cuál de ellos es el menor y cuál el mayor.

PREGUNTA 2

Una inecuación es una desigualdad que compara dos expresiones indicando que una es mayor o menor que la otra, y donde en uno o ambos miembros de la desigualdad involucra al menos una incógnita.

PREGUNTA 3

El concepto de desigualdad es tan crucial en el campo de las matemáticas, que es imposible pensar una rama de las matemáticas que no las utilice y aplique asiduamente. Es tan elemental como para expresar el orden en el conjunto de los números reales, o enteros, y a partir de allí, se emplea en todo tipo de conceptos, demostraciones, problemas particulares, de cualquier campo teórico o aplicado de la matemática.

Por su parte, las inecuaciones responden a la necesidad de relacionar expresiones que involucran variables. Son necesarias para plantear relaciones y sirven para representar matemáticamente estas relaciones y poder manipularlas, tratarlas en conjunto con otras relaciones, hallar condiciones para las variables involucradas, o incluso, eventualmente, determinar la incompatibilidad de dos o más condiciones. Las desigualdades son ampliamente usadas en las distintas ramas de las matemáticas, especialmente las aplicadas, donde se necesitan expresar matemáticamente situaciones/relaciones que envuelven distintos elementos.

Es la forma de expresar orden en conjuntos:

- Desigualdades e inecuaciones permiten expresar la relación entre dos cantidades.
- Las inecuaciones permiten representar matemáticamente relaciones entre distintos elementos de un problema (variables, constantes, parámetros, etc.)

Investigador 5: *Investigador de una institución de dependencia pública, en matemática pura, con 25 años de antigüedad.*

PREGUNTA 1

Una desigualdad es una relación que se da entre dos valores cuando estos son distintos (en caso de ser iguales, lo que se tiene es una igualdad).

PREGUNTA 2

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas en los miembros de la desigualdad.

PREGUNTA 3

Determinar regiones en la recta, plano, espacio o en R^n. Resolver problemas de convexidad. Estudiar análisis matemático. Decidir hasta dónde se puede gastar.

Investigador 6: *Investigador de una institución de dependencia pública, en matemática pura, con 32 años de antigüedad.*

PREGUNTA 1

Una desigualdad $a \leq b$ es una relación de orden entre elementos y significa que a está relacionado con b mediante la relación de orden. Usualmente, a y b son números y $\leq$ es el orden natural. También se hablan de desigualdades $a < b$ que significa $a \leq b$ y a distinto de b.

PREGUNTA 2

Una inecuación es una expresión de la forma $f(x) \leq g(x)$ donde f y g son funciones (aplicaciones) definidas sobre ciertos conjuntos. Lo importante es resolver la inecuación, es decir, determinar los valores x para los que la desigualdad $f(x) \leq g(x)$ es cierta. Igualmente se puede hablar de inecuaciones $f(x) < g(x)$.

PREGUNTA 3

Son muy importantes, frecuentemente más que las igualdades. Una parte fundamental de mi trabajo consiste en probar desigualdades que proporcionan un determinado control de distintas magnitudes, operadores, funciones, etc. que guían a resultados de convergencia (por ejemplo).

6.4. Análisis de las respuestas

6.4.1. Pregunta 1

En el cuadro 6.1 transcribimos frases textuales de los matemáticos que consideramos relevantes en las que se detectan elementos significativos para nuestro estudio de las definiciones de desigualdad presentadas.

I	**Definición de desigualdad**
1	Es una *relación* entre dos objetos matemáticos que no son iguales.
2	Es una *relación* R definida en un X que satisface las propiedades de Tricotomía y transitividad.
3	*Relación* binaria con ciertas propiedades (de acuerdo al contexto).
4	Es una *relación* que expresa que dos valores no son iguales e indica cuál de ellos es el menor y cuál el mayor.
5	Es una *relación* que se da entre dos valores cuando estos son distintos.
6	Es una *relación* de orden entre elementos y significa que a está relacionado con b mediante la relación de orden.

Cuadro 6.1: Concepto de desigualdad expresado por los investigadores

Los investigadores consultados definen a las desigualdades como una *relación* entre objetos pertenecientes a un mismo dominio o espacio. Algunos utilizan los términos "no iguales" o "distintos" en la definición y otros enuncian la propiedad de tricotomía y de transitividad que cumplen los elementos que se relacionan. Podríamos inferir desde aquí que hacen referencia de alguna manera al fenómeno de *ordenación* entre objetos.

Es importante destacar que algunos investigadores presentan el concepto en el marco funcional mientras que otros refieren sólo a expresiones algebraicas, descartando en este caso las desigualdades en las que están involucradas funciones trascendentes.

El investigador 1 deja entrever la existencia del fenómeno de *especificación*, cuando habla del conjunto solución de una desigualdad en la que aparecen variables, diciendo: *"se verifica para un subconjunto de elementos"*, surge de sus dichos también el fenómeno de *generalización* cuando habla de la relación para todos los elementos del dominio de definición de las variables aclarando que *"se verifica para todos los elementos tales que están bien definidos ambos miembros"*.

6.4.2. Pregunta 2

En el cuadro 6.2 transcribimos frases textuales de los matemáticos de las definiciones de inecuación presentadas por los matemáticos profesionales encuestados.

I	Definición de inecuación
1	Es una *desigualdad* entre dos expresiones algebraicas.
2	Es una *expresión* algebraica entre dos términos conteniendo incógnitas y separados por un signo desigual.
3	La palabra inecuación no existe en castellano.
4	Es una *desigualdad* que compara dos expresiones indicando que una es mayor o menor que la otra.
5	Es una *desigualdad* algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.
6	Es una *expresión* de la forma $f(x) \leq g(x)$ donde f y g son funciones definidas en ciertos conjuntos.

Cuadro 6.2: Concepto de inecuación expresado por los investigadores

La mayoría define la inecuación como una *desigualdad algebraica* (la mitad alude específicamente a las algebraicas). Destacamos que un investigador plantea la desigualdad utilizando relaciones funcionales.

También es importante destacar que un investigador considera que desigualdades e inecuaciones son el mismo objeto matemático, que se trata de una mala traducción del inglés del término *"inequality"* y sugiere traducirlo como *desigualdad*. Es decir considera a la desigualdad como relación binaria con ciertas propiedades (de acuerdo al contexto) y no realiza distinción respecto del conjunto de validez de dicha relación.

6.4.3. Pregunta 3

En cuanto a la importancia de las desigualdades y las ineccuaciones, resumimos en el cuadro 6.3 mediante frases textuales de los matemáticos profesionales encuestados las cuestiones más relevantes.

I	Importancia
1	La mayoría de los resultados teóricos en los que trabajamos son desigualdades. Son herramientas necesarias para poder trabajar en matemática pura.
2	Son fundamentales ya que en la vida real la igualdad NO EXISTE.
3	Son centrales a casi todos los temas de matemáticas. En cálculo para definir el límite.
4	Es tan crucial en el campo de las matemáticas, que es imposible pensar una rama de las matemáticas que no la utilice y aplique asiduamente.
5	Determinar regiones, resolver problemas de convexidad, estudiar análisis, decidir hasta dónde se puede gastar.
6	Son muy importantes, frecuentemente más que las igualdades. Una parte fundamental de mi trabajo consiste en probar desigualdades.

Cuadro 6.3: Importancia del tema expresada por los investigadores

Existe una coincidencia absoluta en considerar a las desigualdades como fundamentales, cruciales, centrales para su trabajo. En cuanto a los usos los investigadores hacen referencia a la necesidad de utilizarlas para estimar, aproximar, toma de decisiones, acotar, analizar rangos de validez para estas relaciones.

Resulta de interés analizar en mayor detalle la respuesta del investigador 3. A partir de la definición de límite de una función en un punto:

> Sea $x_0 \in R$ y sea una función f definida en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Decimos que $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a x_0, si f tiene la siguiente propiedad: cualquiera sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si es $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces es: $|f(x) - l| < \epsilon$.

Podemos interpretar que si x está suficientemente cerca de x_0 su imagen $f(x)$ está muy próximo a L. Es decir, si pensamos en cantidades de una cierta magnitud, podemos decir en este sentido que las cantidades *se parecen*.

6.5. Conclusiones

Finalmente queremos destacar que como resultado de esta indagación concluimos que encontramos los tres fenómenos que describimos en la sección 4.4 del capítulo 4, a continuación transcribimos algunas opiniones de los investigadores que dan evidencia de la manifestación de los mismos.

[1] *Ordenación*: observamos en las siguientes respuestas cómo lo mencionan los investigadores:

- Investigador 4: Una desigualdad es una relación que expresa que dos valores no son iguales, e indica cuál de ellos es el menor y cuál el mayor.
- Investigador 2: Dado un conjunto X, la desigualdad es una relación R definida en un X que satisface las propiedades de Tricotomía (Se cumple exactamente una de: aRb, bRa, $a = b$) y transitividad (si aRb y bRc entonces aRc).
- Investigador 6: Una desigualdad $a \leq b$ es una relación de orden entre elementos y significa que a está relacionado con b mediante la relación de orden. Usualmente, a y b son números y $\leq$ es el orden natural. También se hablan de desigualdades $a < b$ que significa $a \leq b$ y a distinto de b.

[2] *Especificación*: este fenómeno refiere a la búsqueda del dominio de validez de una desigualdad. Transcribimos a continuación a modo de ejemplo cómo lo mencionan algunos investigadores:

- Investigador 6: Lo importante es resolver la inecuación, es decir, determinar los valores x para los que la desigualdad $f(x) \leq g(x)$ es cierta.

- Investigador 1: El trabajo a veces consiste en encontrar el conjunto más grande de objetos (funciones, vectores, etc.) para los cuales una determinada desigualdad es cierta.
- Investigador 1: (...) a veces también se utiliza el nombre de desigualdad cuando la misma se verifica para un subconjunto de elementos, en este caso al presentar la desigualdad también se da el conjunto de elementos para el cual la desigualdad es válida.

[3] *Generalización*: transcribimos a continuación la expresión de este fenómeno en algunas respuestas de los investigadores.

- Investigador 1: En general se le da el nombre de desigualdad cuando esa relación se verifica para todos los elementos tales que están bien definidos ambos miembros de la desigualdad.
- Investigador 1: Probar que una desigualdad es "óptima" en algún sentido.
- Investigador 6: Probar desigualdades que proporcionan un determinado control de distintas magnitudes, operadores, funciones, etcétera.

En síntesis, las respuestas de los matemáticos remiten a los fenómenos identificados en el análisis de los textos de matemática avanzada que describimos en la sección 4.4. Este hecho refuerza nuestra idea de que estos fenómenos son los que demandan ser experimentados por los estudiantes, para la construcción de un objeto mental desigualdad que les permita transitar mejor el camino de la matemática elemental a la avanzada.

En la segunda parte de esta tesis analizaremos el tratamiento del tema en la escuela secundaria. En particular, trataremos de caracterizar mediante diversas aproximaciones el realizado por los estudiantes del caso bajo estudio. Esperamos detectar si existen rupturas entre dicho tratamiento y los resultados obtenidos en esta primera parte.

Parte II

Análisis del tratamiento en la escuela secundaria

Capítulo 7

Opiniones de docentes

Los resultados fundamentales en matemática son a menudo
desigualdades en lugar de igualdades.
EDWIN BECKNBACH y RICHARD BELLMAN

7.1. Introducción

Para comenzar con el análisis del tratamiento de la desigualdad en la escuela secundaria, indagamos en las opiniones de quienes fueron los docentes en el nivel secundario de los estudiantes del Profesorado de Matemática de la cohorte 2012. Para acceder a los mismos, se solicitó la colaboración de los estudiantes, quienes se contactaron con sus antiguos docentes y les acercaron el cuestionario. Si por alguna razón no lograban encontrarlo, se les pidió que acudan al docente de la misma escuela que estuviera trabajando en su lugar. Por esa razón la muestra es intencional (Cohen y Manion, 1990).

Las preguntas realizadas son del tipo abiertas, porque son flexibles, no hay limitaciones sobre el contenido o el modo de respuesta. Esperamos encontrar respuestas de las que pueden surgir relaciones con los resultados obtenidos en la primera etapa de esta tesis.

7.2. Diseño curricular

El diseño curricular vigente en la Provincia de Santa Fe en el momento en que los estudiantes se encontraban cursando el nivel secundario, presentaba los contenidos organizados por ejes: geometría, números y operaciones, medidas, funciones; y estadísticas y probabilidades. En los mismos se distinguen tres grupos de contenidos: actitudinales, conceptuales y procedimentales.

En el tercer ciclo de la EGB (Enseñanza General Básica) de Matemática, en el eje funciones aparece como contenido conceptual el título Ecuaciones-Inecuaciones, luego de presentar los siguientes contenidos conceptuales previos:

- Lenguaje coloquial, gráfico y simbólico.

- Expresiones algebraicas.

Para séptimo año (12 años) propone los siguientes contenidos procedimentales:

- Traducción de las condiciones de un fenómeno o problemas en términos de igualdad, ecuaciones o inecuaciones de primer grado (casos simples).
- Reconocimiento y utilización de las propiedades aritméticas y de las ecuaciones equivalentes.
- Resolución gráfica y analítica de ecuaciones e inecuaciones sencillas.

Para octavo año (13 años) presenta los siguientes contenidos procedimentales:

- Traducción de las condiciones de un fenómeno o problemas en términos de igualdad, ecuaciones o inecuaciones de primer grado.
- Reconocimiento y utilización de las propiedades aritméticas y de las ecuaciones equivalentes.
- Utilización en la resolución de ecuaciones e inecuaciones, las propiedades de valor absoluto.
- Resolución gráfica y analítica de ecuaciones e inecuaciones.

Para octavo año (14 años) menciona los siguientes contenidos procedimentales:

- Traducción de las condiciones de un fenómeno o problemas en términos de igualdad, ecuaciones o inecuaciones de primer grado.
- Reconocimiento y utilización de las propiedades aritméticas y de las ecuaciones equivalentes.
- Utilización en la resolución de ecuaciones e inecuaciones, las propiedades de valor absoluto.
- Resolución gráfica y analítica de ecuaciones e inecuaciones.

Observamos que el tema que se propone para trabajar en esta etapa es el de inecuación. El término “desigualdad” está involucrado en el eje “Números y Operaciones” donde se alude explícitamente: *Ordenamiento de fracciones, comparación de fracciones y decimales y al establecimiento de la relación de orden en Q* (p. 31). No aparece la relación de orden entre expresiones algebraicas.

Con el fin de sostener una coherencia con esta propuesta curricular, decidimos centrar la consulta a los docentes en torno al concepto de inecuación, que se propone explícitamente como contenido procedimental; a saber: “Resolución gráfica y analítica de ecuaciones e inecuaciones sencillas” (p. 38), dentro del contenido conceptual “Ecuaciones-Inecuaciones”.

7.3. Muestra

La muestra se conformó con catorce docentes que estuvieron a cargo de la formación de los estudiantes. Cabe aclarar que de un total de 21 estudiantes activos respondieron 14 (catorce) docentes (66 %). Se observó a través de las respuestas que se manifestaron con soltura y actitud colaborativa.

7.4. Análisis de la encuesta

7.4.1. Pregunta 1

¿Qué conceptos matemáticos previos considera necesarios para desarrollar el tema Inecuaciones?

Esta pregunta nos permitió obtener indicios acerca de la selección y secuenciación de contenidos que realiza el docente, y el marco que prioriza en su trabajo con las desigualdades.

En el cuadro 7.1 presentamos las frecuencias y porcentajes de cada concepto previo indicado por los docentes de la muestra. Cabe aclarar que los docentes mencionan varios contenidos previos por lo tanto el total de la tercera columna de la tabla no se corresponde con el 100 %.

Conceptos previos	**Total**	**Porcentaje N=14**
Conjuntos Numéricos	7	50 %
Operaciones aritméticas	4	29 %
Relación de orden	4	29 %
Propiedades del orden	3	21 %
Desigualdades numéricas	6	43 %
Ecuación	9	64 %
Lenguaje algebraico	7	50 %
Recta numérica	6	43 %
Propiedades de las desigualdades	5	36 %
Valor absoluto	1	7 %
Intervalos	5	36 %

Cuadro 7.1: Conceptos previos

De los docentes que hacen referencia a los conjuntos numéricos es necesario aclarar que algunos mencionan sólo los enteros, otros los reales y otros usan la expresión “distintos conjuntos numéricos”.

Los docentes describen como *concepto previo* al lenguaje algebraico, sin ninguna aclaración adicional acerca de lo que refieren con ello; algunos utilizan la expresión “lenguaje simbólico”.

En cuanto a la recta numérica, mencionan *representación en la recta real*, *graficar intervalos en la recta numérica*, o bien, *ubicar los números en la recta real*.

Las propiedades nombradas por los docentes son *ley cancelativa y uniforme* y *propiedades del orden*.

Sólo un docente menciona el *valor absoluto* y se refiere al valor absoluto de un número real.

A continuación, en la figura 7.1 se visualiza mediante un diagrama de barras la tabla anterior:

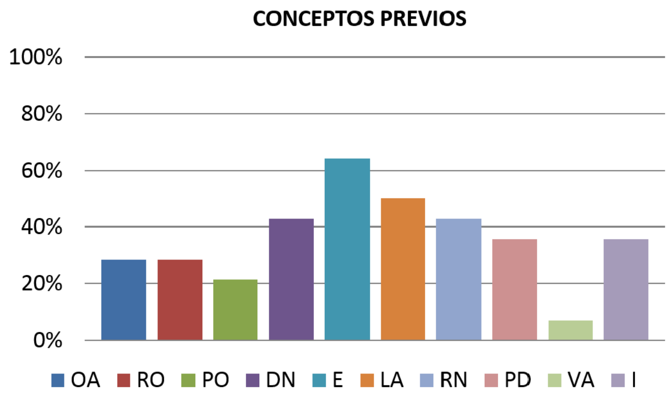


Figura 7.1: Conceptos previos: OA: Operaciones aritméticas; RO: Relaciones de orden; PO: Propiedades del orden; DN: Desigualdades numéricas; E: Ecuación; LA: Lenguaje algebraico; RN: Recta numérica; PD: Propiedades de las desigualdades; VA: Valor absoluto; I: Intervalos

En relación con los conceptos previos, observamos respecto de las frecuencias con la que aparecen los temas dos grandes grupos, según superen o no el 40 %:

- Un primer grupo, en el cual las respuestas dan prioridad a las cuestiones algebraicas y numéricas. En este grupo se concentra la mayor frecuencia, encontramos que un 64 % de los docentes encuestados menciona *ecuación* y un 50 % considera que necesita previamente trabajar *lenguaje algebraico* con sus estudiantes para abordar el tema, un 50 % *recta numérica*, un 43 % *desigualdades numéricas* y un 50 % *conjuntos numéricos*. Estimamos que este dato abona la hipótesis de que el marco más usualmente utilizado por los docentes encuestados para presentar el tema desigualdades es el algebraico.

- Un segundo grupo en el que observamos que sólo el 29 % de los encuestados considera las *operaciones aritméticas* y el tratamiento de las *relaciones de orden*; *propiedades del orden* un 21 %, como temas previos al de las inecuaciones. Es de destacar que un sólo docente de los encuestados incluye el *valor absoluto* como tema previo. Consideramos que este hecho denota una escasa relación del tema con el marco funcional.

Además de todo lo analizado, se puede decir que es nula la mención del marco geométrico, es decir ningún docente destaca relaciones métrico-geométricas como necesarias para el desarrollo en cuestión (por ejemplo, nadie menciona como contenido previo la desigualdad triangular).

El gráfico pone de manifiesto la secuencia seguida en el tratamiento del tema, los porcentajes mayores se encuentran en: *ecuaciones, lenguaje algebraico, conjuntos numéricos, desigualdades numéricas y recta numérica.* Además, algunos docentes lo hacen explícito estableciendo un orden temático previo al tema, transcribimos a continuación algunas respuestas:

> Docente 10: "Operaciones en R, intervalos, lenguaje algebraico, ecuaciones".
>
> Docente 12: "Concepto de desigualdad, representación en la recta numérica, ecuaciones, lenguaje coloquial y simbólico".
>
> Docente 14: "Operatoria, ecuaciones, representación en la recta numérica (tanto de puntos como de intervalos)".

La secuencia presentada por la mayoría de los docentes establece el siguiente esquema:
1ro.) Ecuación;
2do.) Inecuación.
Consideramos que pone en evidencia un desarrollo de contenidos en forma lineal en el marco algebraico exclusivamente, dejando de lado otros contenidos que permiten integrarlo con otros marcos.

7.4.2. Pregunta 2

Cuando explica a sus alumnos qué es una inecuación, ¿qué les dice?; ¿Qué ejemplos les presenta?

En esta pregunta el propósito es:

- analizar cómo definen el objeto matemático inecuación, su presentación y los ejemplos que utilizan;
- observar en los ejemplos y ejercicios que propongan, el tipo de marco que utilizan.

Según Azcárate y Camacho (2003), una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas es tener en cuenta que, en las primeras, los objetos *se describen*, mientras que en las segundas, *se definen*. Comentan los autores al referirse al lenguaje, que en ambos casos se utiliza el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, sea matemático, sea del mundo externo, y para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con procesos operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Coincidiendo con la observación de estos autores es que decidimos el formato de esta pregunta, ya que apuntamos a una *descripción del concepto* que realizan los docentes, más que a una definición formal tomada de los textos.

Nos interesa describir en los docentes cuál es el tratamiento del tema inecuaciones que realizan con sus estudiantes y las tareas que les presentan para aproximarnos a los fenómenos que se ponen en juego.

De acuerdo a McMillan y Schumacher (2005) realizamos un análisis inductivo de la información ya que las categorías y patrones emergen de los datos, más que ser impuestos previo a la recogida de éstos. Para agrupar la información obtenida en categorías que concentran las ideas, conceptos o temas similares establecimos códigos como etiquetas que permiten asignar unidades de significado a la información. Para analizar las respuestas de los docentes a esta pregunta realizamos una categorización utilizando como criterio de clasificación los términos utilizados por los docentes en las definiciones presentadas. Al respecto identificamos dos grupos: los profesores que utilizan el término "ecuación" y los que utilizan el término "desigualdad". En el Anexo 1 se incluyen todas las respuestas. En el siguiente párrafo aclaramos y describimos las categorías encontradas, según lo antes expresado:

CATEGORÍA I

<u>Ecuacionistas</u>: incluimos aquí los docentes que describen la inecuación diferenciándola de la ecuación en algún aspecto que luego se mencionará. Dividimos esta categoría en subcategorías para facilitar el análisis posterior. En este grupo hay tres subgrupos, de acuerdo al aspecto que priorizan para la distinción realizada entre los conceptos de ecuación e inecuación. Vale aclarar que algunos docentes utilizan más de un aspecto al describir el concepto. Esto nos guía al planteo de las siguientes subcategorías:

Ia) *Simbólicos*: remarcan la diferencia en el signo (menor, mayor en lugar de igual) para diferenciar entre una ecuación y una inecuación. Al respecto se observaron expresiones como la del siguiente docente:

> <u>Docente 8</u>: "Cuando explico a los alumnos parto de una situación concreta que se traduce en el lenguaje matemático y allí se hace notar la

> existencia de una desigualdad, remarcando la diferencia fundamental con una ecuación en el signo".

Ib) *Mecanicistas*: se centran en algún procedimiento algebraico de resolución para diferenciar ambos conceptos: ecuación e inecuación, mencionan la propiedad de multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo para diferenciar las resoluciones de ecuaciones e inecuaciones. A modo de ejemplo incluimos la siguiente respuesta:

> Docente 14: "A la hora de comenzar la resolución de una inecuación, les explico que la manera es prácticamente la misma que con ecuaciones, pero les hago la salvedad para los casos en que hay que multiplicar o dividir a ambos términos por un número negativo".

Según esta declaración, el docente manifiesta a sus alumnos que una inecuación tiene el mismo tratamiento de resolución que una ecuación salvo en los casos en que hay que multiplicar ambos miembros de la desigualdad por un número negativo.

Ic) *Resultadistas*: hacen hincapié en las características del conjunto solución para distinguir la ecuación de la inecuación.

Para ejemplificar transcribimos algunas respuestas:

> Docente 4: "Que es similar a una ecuación, pero cuya solución sería un conjunto de valores en lugar de valores determinados".

> Docente 14: "Comienzo haciendo una comparación con ecuaciones, después les comento que en lugar de obtener un único resultado, la solución será un intervalo. Tendremos infinitas soluciones".

CATEGORÍA II

Relacionistas: incluimos aquí a los profesores que hacen referencia a una relación de desigualdad entre dos expresiones. Encontramos las mismas subcategorías que en la anterior.

IIa) *Simbólicos*: relatan en palabras lo que observan simbólicamente en una inecuación. Para ejemplificar transcribimos algunas respuestas:

> Docente 12: "Respecto a la definición de inecuación, la defino en clases como una desigualdad en la que aparecen vinculados números y letras y que solo se satisfacen para ciertos valores asignados a esas letras".

> Docente 5: "Para explicar el tema inecuación, lo planteo como expresiones en las que aparece una desigualdad con una incógnita".

Ambos docentes quieren significar que una inecuación es una desigualdad en la que aparecen incógnitas.

IIb) *Mecanicistas*: se centran en algún procedimiento algebraico de resolución. A modo de ejemplo incluimos la siguiente respuesta:

Docente 13: "Es una desigualdad, aclaro entonces su resolución teniendo en cuenta lo que ocurrió cuando multiplicamos por un negativo, es decir que la desigualdad se invierte".

IIc) *Resultadistas*: mencionan características del conjunto solución. Para ejemplificar transcribimos algunas respuestas:

Docente 5: "Para explicar el tema inecuación, lo planteo como expresiones en las que aparece una desigualdad con una incógnita. En donde se establecen relaciones de menor, menor o igual, mayor o igual, en donde la solución se presenta como un conjunto de números que satisfacen la relación planteada".

Docente 10: "Una desigualdad en la que aparecen vinculados números y letras y que sólo se satisfacen para ciertos valores asignados a esas letras".

Observemos en el esquema de la figura 7.2 la categorización realizada:

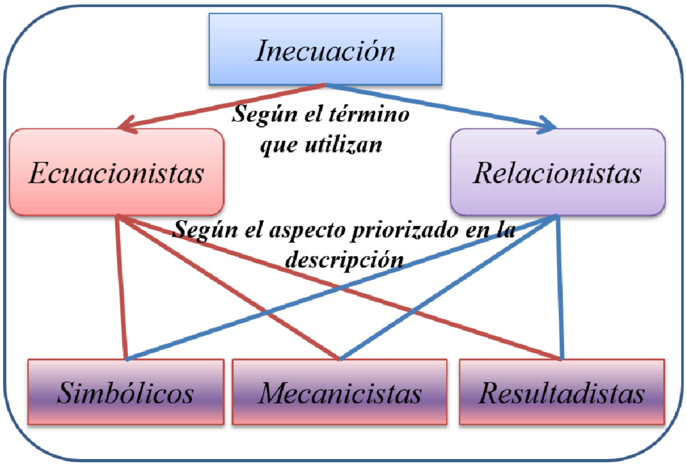


Figura 7.2: Categorización de la opinión de docentes

En el cuadro 7.2 mostramos las frecuencias y porcentajes que obtuvimos en esta pregunta, según el término utilizado para definir el concepto de inecuación:

Concepto de inecuación	**Total**	**Porcentaje N=14**
Ecuacionistas	9	64 %
Relacionistas	5	36 %

Cuadro 7.2: Concepto de inecuación: según el término utilizado

En el cuadro 7.3 aparecen las frecuencias y porcentajes que obtuvimos en esta pregunta, según las características que describen del concepto. Los porcentajes refieren al total de cada categoría. Por ejemplo, el primer renglón del cuadro indica que de los docentes ecuacionistas el 33 % son simbólicos. Además, el porcentaje total de cada categoría supera el 100 % debido a que un mismo docente puede estar en más de una subcategoría.

Según términos	**Según el aspecto**	**Total**	**Porcentaje**
Ecuacionistas N=9	Simbólicos	3	33 %
	Mecanicistas	2	22 %
	Resultadistas	7	78 %
Relacionistas N=5	Simbólicos	5	100 %
	Mecanicistas	1	20 %
	Resultadistas	4	80 %

Cuadro 7.3: Concepto de inecuación según el aspecto mencionado

Observemos a través del gráfico comparativo en la figuras 7.3 y 7.4 estos valores:

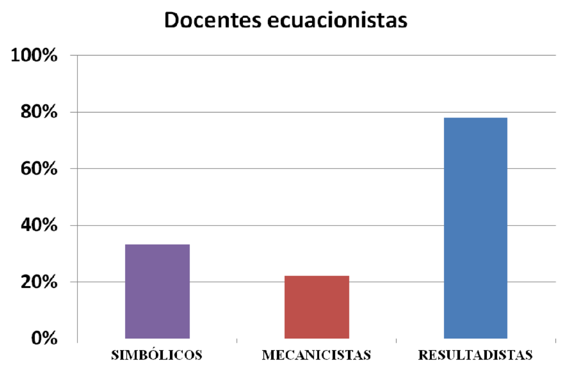


Figura 7.3: Subcategorías de docentes ecuacionistas

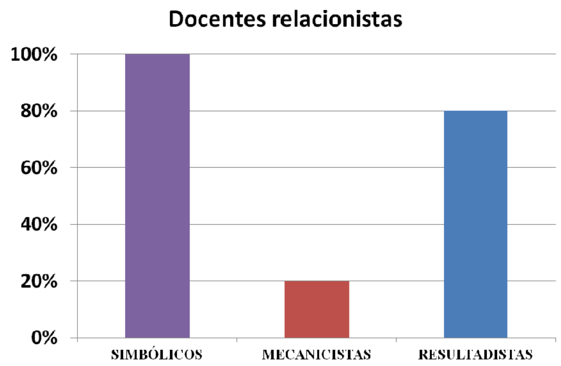


Figura 7.4: Subcategorías de docentes relacionistas

En la explicación del concepto de inecuación, los docentes mencionan la necesidad de utilizar la ecuación como soporte para definirla y diferenciarla de ella en algún aspecto (los símbolos, su proceso de resolución o el conjunto solución), son 9 docentes (un 64 %) los que se incluyen en esta categoría. Una cuestión importante que surge de las respuestas es que diferencian la ecuación de la inecuación por el conjunto solución obtenido (78 % de los ecuacionistas). Dejan expresado por ejemplo, *una inecuación tiene más de una solución.* Notemos que da lugar a pensar que siempre hay más de un elemento en el conjunto solución. Esto constituye un error conceptual, debido a que no siempre es verdadera esa afirmación, por ejemplo si tomamos la inecuación $x^2 \leq 0$ el conjunto solución es un único valor $x = 0$, así como el conjunto solución de la inecuación $x^2 < 0$ es el conjunto vacío.

Los docentes que apelan a la desigualdad para definir la inecuación representan un 36 %. Destacamos que al cruzar esta información con la pregunta anterior del cuestionario en la que solicitamos los conceptos previos necesarios, tres de estos cinco docentes incluyen a la ecuación como concepto previo. De este modo consideramos que se reafirma la secuencia con que se abordan estos temas: 1ro) Ecuación, 2do) Inecuación.

Observemos que los docentes que utilizan la ecuación para describir la inecuación realizan un paralelismo entre ambos conceptos pero no aluden al caso de la identidad y la desigualdad absoluta. En el caso de los que refieren a la desigualdad para describir la inecuación, tampoco establecen el paralelismo entre la desigualdad absoluta y las identidades para las igualdades, ya que bajo esta definición (desigualdad con incógnitas o desigualdad algebraica) no es posible distinguir entre desigualdades absolutas (como por ejemplo $x^2 \geq 0$ que es válida para todo número real) y condicionales (como puede ser $x+3 > 0$ que es válida para los $x > -3$), puesto que ambas quedan bajo el concepto de inecuación.

En cuanto a los ejemplos que presentan los docentes, a continuación se muestran en el cuadro 7.4 los resultados obtenidos en esta pregunta:

Ejemplos		**Total**	**Porcentaje N=14**
Matemáticos	Numéricos	0	0 %
	Algebraicos	6	43 %
Extramatemáticos		10	71 %
No menciona		1	7 %

Cuadro 7.4: Ejemplos que presentan

En lo que se refiere a los ejemplos, la mayoría (un 71 %) utiliza situaciones extra-matemáticas, más específicamente situaciones de la vida cotidiana, tanto para la presentación del tema como para ejemplificarlo. A continuación transcribimos algunos a modo de ejemplo:

> Docente 2: "(...) con ejemplos concretos: Si una persona tiene 7 años, ¿qué edad puede tener una persona mayor?; ¿y una menor?; etcétera".
>
> Docente 3: "(...)intenté que trajeran de tarea información que pudieran recoger de cualquier medio donde ellos percibieran que había situaciones donde se planteaban inecuaciones o desigualdades, por ejemplo en diarios, en textos de otras materias, pero no tuve éxito".
>
> Docente 11: "Si una camioneta puede llevar hasta 700 kg de carga y tiene que trasladar cajas que pesan 30 kg cada una: a) ¿cuál es el mayor número de cajas que puede llevar por viaje; b) si tiene que llevar 10 bolsas de 20 kg cada una, ¿cuál es el número de cajas que puede llevar en ese viaje? Traducir en símbolos cada situación".

Notemos que tanto el docente 2 como el docente 11 no mencionan en el enunciado el dominio de valores admisibles para la variable, cuestión que puede traer confusiones en las respuestas. Además creemos innecesario agregar esta dificultad al momento de presentar el tema. Es importante destacar que el docente 2 en la categorización realizada en la pregunta referida al concepto de inecuación se ubica en la categoría *Resultadistas*.

En cuanto a las tareas que describimos en la sección 4.5, podemos concluir que todos los docentes de la muestra refieren a la Tarea 2 (RI), ya que aluden al conjunto solución de la inecuación en su descripción del concepto o bien al proceso de resolución de la misma con el objetivo de encontrar dicho conjunto.

7.4.3. Preguntа 3

Desde el punto de vista de su experiencia en el ámbito de la matemática, ¿qué tan importantes son las desigualdades? ¿A qué necesidad responden?

El objetivo de esta pregunta es recabar información respecto de la importancia y los usos que le atribuyen a la desigualdad. Ampliamos la consulta al concepto de *desigualdad* con el propósito de detectar las necesidades responde el concepto de desigualdad. Indagamos en los fenómenos que organiza el concepto de "desigualdad matemática".

En el cuadro 7.5 se muestran las frecuencias y porcentajes que obtuvimos como respuesta a esta pregunta:

Importancia y usos	**Total**	**Porcentaje N=14**
Modelización de situaciones Extramatemáticas	8	57 %
Herramienta en distintas ramas de la matemática	3	21 %
Desarrollar el pensamiento no exacto	2	14 %
Optimización de variables y estimación de resultados	1	7 %
Relación entre los números en cuanto al orden	1	7 %
No se considera tema prioritario en la escuela	1	7 %

Cuadro 7.5: Importancia y usos de las desigualdades

Con respecto a la importancia del tema, la mayoría (57 %) considera la modelización de situaciones reales, entendiendo ésta como la resolución de problemas en contextos cotidianos. Otros mencionan la necesidad de su aplicación en las ramas de la matemática (cálculo, álgebra, geometría, programación lineal). A continuación transcribimos algunas respuestas a modo de ejemplo:

> Docente 1: "Responden a muchos problemas de aplicación, ya que modelan variadas situaciones de distintos ámbitos (comercial, administrativo, específico matemático, de mezcla, etc.)".
>
> Docente 3: "Nos permite interpretar, modelar, analizar comportamientos de diferentes funciones (modelos matemáticos) que están intentando responder a cuestiones de la vida cotidiana, así como son una herramienta necesaria para otras ciencias. Por ejemplo: en programación lineal, donde se intenta modelar y responder a los más variados problemas".

Un docente menciona la importancia del concepto en el fortalecimiento de un *"pensamiento desigual"*.

> Docente 7: Pienso que responden a la necesidad de desarrollar un pensamiento lógico no estructurado a exactitudes matemáticas. La interpretación de la solución de una inecuación no siempre resulta fácil a los alumnos, el intervalo solución no siempre se interpreta correctamente".

Otro docente esboza la idea de que permite desarrollar estrategias para la resolución de problemas.

> Docente 3:"Me parecen de mucha importancia, pues es un tipo de conocimiento que también nos ayuda a estructurar el pensamiento para pensar con cierto orden y criterio las posibles soluciones a los problemas planteados".

En las respuestas los docentes se refieren a la tarea 2 (RI) ya que la mayoría vincula las necesidades a las de resolver problemas en distintos contextos que, según interpretamos, modelizan con inecuaciones. En general la mayoría no menciona la tarea 1 (CE) ni la tarea 3 (DDA).

7.4.4. Pregunta 4

En su trabajo como profesor de matemática, ¿en qué otros temas (y en qué años de la escuela secundaria) incluye el uso de desigualdades?, ¿y las inecuaciones? En lo posible cite ejemplos.

En vinculación con la pregunta anterior (la importancia de las desigualdades), se espera indagar en torno a la percepción que tienen los docentes acerca del rol de las desigualdades en el trabajo matemático. Ampliamos la consulta a las *desigualdades* con el propósito de indagar en otros temas en los que se ponen en juego en la escuela.

En el cuadro 7.6 podemos observar las respuestas:

Usos en otros temas	**Total**	**Porcentaje N=14**
Inecuaciones	13	93 %
Programación Lineal	5	36 %
Funciones	3	21 %
Geometría	1	7 %

Cuadro 7.6: Temas en los que se utilizan

En las respuestas de los docentes observamos claramente una interpretación diferente a la pretendida de la pregunta. Los datos obtenidos responden a la pregunta *¿En qué años enseña inecuaciones?* Describen los tipos de inecuaciones que trabajan y en qué años de la escuela secundaria lo hacen. Es decir, ligan la *desigualdad* directamente a la *inecuación*. A continuación transcribimos algunas respuestas a modo de ejemplo:

> Docente 1: "En general trabajo en todos los años: primero y segundo, con inecuaciones con una incógnita de primer grado o segundo grado; tercero, inecuaciones en el plano (dos incógnitas) y sistemas de inecuaciones; y en cuarto y quinto año, en el conjunto de números reales aplicados también a la resolución de problemas (ganancia, máximos o mínimos, etcétera)".

> Docente 5: "En primer año se trabaja la desigualdad para comparar números enteros y la inecuación con el conjunto de números enteros. En segundo, inecuación con racionales. En cuarto, cuando se trabaja con expresiones algebraicas más complejas: $\frac{3x+2}{x} > 3x$; o en funciones cuadráticas: $4x^2 - 5 < 6$".

El 93 % de los docentes menciona que trabaja con desigualdades en todos o casi todos los años de la escuela secundaria. En resoluciones de inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto, en cada conjunto numérico.

Los docentes que citan además otros temas en los que utilizan el concepto son muy pocos: un 36 % menciona programación lineal, un 21 % funciones, sólo un docente menciona que lo utiliza en las propiedades del valor absoluto. Además es importante destacar que sólo un docente menciona que lo utiliza en cuestiones métricas relacionada a la geometría.

> Docente 1: "En segundo año lo aplico a problemas de áreas y perímetro de cuadriláteros".

A partir del análisis de las respuestas a esta pregunta consideramos que se ponen de manifiesto los marcos que utilizan los docentes para la presentación del tema. La mayoría menciona un trabajo de resolución de inecuaciones desde un marco algebraico, sólo tres docentes expresan retomar el tema desde el marco funcional y uno solo hace referencia al marco geométrico.

La mayoría de los docentes manifiesta proponer tareas del tipo 1 (RI) a sus estudiantes. También encontramos docentes que mencionan la tarea de *comparar* pero la refieren a desigualdades numéricas y un docente alude a cuestiones geométricas.

7.4.5. Pregunta 5

¿Sigue algún texto en el desarrollo del tema? ¿Cuál?

El objetivo de esta pregunta es conocer los textos que utiliza la mayoría de los docentes, para analizar aquellos que sean citados por ellos.

En el cuadro 7.7 presentamos las respuestas obtenidas:

Material de trabajo			**Total**	**Porcentaje N=14**
Textos	Sí	Escolares	10	71 %
		Universitarios	2	14 %
	No		2	14 %
Internet			1	7 %

Cuadro 7.7: Material de trabajo utilizado

La mayoría de los docentes (71 %) indica libros escolares comerciales dentro de los textos utilizados. Transcribimos a continuación en forma textual la bibliografía citada:

Longseller, (2008). *Funciones* 1.

Santillana (2008). *Matemática II.*

Santillana (2006). *Matemática II.*

Mc Graw Hill. *Matemática 8 y 9* y *Matemática EGB.*

Santillana. *Matemática II.* Aique. *Nueva carpeta de Matemática II.*

Santillana. *Actividades de Matemática 8.*

Otros docentes citan editoriales: Puerto de palos, Santillana, Mandioca, Comunicarte, Aique, Logikamente.

En los textos que mencionan la mayoría de los docentes aparece el tema inecuaciones. Se puede destacar como dato de interés que los docentes no identifican a los libros de texto a través de sus autores, sino a partir de las editoriales. Esto pone de manifiesto hasta qué punto son las propuestas de las mismas las que definen tendencias respecto del tratamiento de un tema. De todas las editoriales citadas por los docentes de la muestra, resultó Santillana la que representa el valor modal.

Sólo dos docentes mencionan bibliografía universitaria: el libro Fernandez, Moretto, Oviedo, Mamut, Contini, Vaira, et al. (2007) del ingreso a la UNL y el libro Sobel y Lerner (1998). Este último fue utilizado en años anteriores en el ingreso a la universidad y en las cátedras iniciales de algunas carreras de la UNL.

Otros utilizan materiales propios de distintas fuentes. Además algunos docentes mencionan autores que realizan propuestas dentro de la educación matemática pero no tratan específicamente el tema en sus obras, transcribimos esta respuesta:

> Docente 12: "Suelo buscar libros de los siguientes autores: Graciela Chemello, Horacio Itzcovich, Patricia Sadovsky, Carmen Sessa. Las dos últimas autoras han escrito una gran variedad de libros para docentes sobre didáctica de la matemática y el abordaje de distintos conceptos matemáticos tales como el pasaje de la aritmética al álgebra, iniciación al estudio de la geometría, entre otros".

Suponemos que el docente trata de evidenciar su conocimiento de autores de textos de educación matemática pero no nos da información respecto del material que utiliza para desarrollar con sus estudiantes el tema en cuestión.

7.5. Discusión de resultados y conclusiones

La mayoría de los docentes menciona que trabaja con *desigualdades* en todos o casi todos los años de la escuela secundaria, y lo hace en resoluciones de inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto, en cada conjunto numérico. Un 57 % vincula las necesidades a las que responden las *desigualdades* a la modelización de situaciones reales, entendiendo ésta como la resolución de problemas en contextos cotidianos que modelizan a través de inecuaciones. Interpretamos que la mayoría de los docentes asocia la *desigualdad* a la *inecuación*.

Los docentes de secundaria que han sido encuestados apelan, en su mayoría, al concepto de ecuación para describir la inecuación. Enfatizan la idea de diferenciar ambos conceptos según el número de elementos del conjunto solución que se obtiene al resolverla. Como ya mencionamos, esto puede llevar a la idea errónea de suponer que una inecuación siempre tiene solución y que además dicha solución es un conjunto no unitario. En este sentido se observa una coincidencia con los estudios de Borello, Farfán y Lezama (2008) y Borello (2010).

Consideramos que el vínculo de la inecuación con la ecuación a través del proceso algebraico de resolución podría constituirse en una dificultad para los estudiantes, debido a que generalizar los procesos de especificar las inecuaciones probablemente conduzca directamente a cometer errores. Por ejemplo, podría un estudiante pensar que puede resolver de la misma manera la ecuación $\frac{1}{x} = 1$ que la inecuación $\frac{1}{x} < 1$.

Como afirman Garrote, Hidalgo y Blanco (2004), al analizar las dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones, muchos alumnos entienden los signos mayor y menor como nexos entre dos expresiones algebraicas que arrastran en los diferentes pasos de la resolución de una inecuación y que no aportan significado a la misma, hasta el punto que no les supone ningún problema sustituirlo por un signo igual. Los autores asumen que la ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantea en el trabajo con inecuaciones, y si lo que pretendemos es que el alumno no reduzca su aprendizaje de inecuaciones a meras tareas mecánicas, es importante que tenga una idea clara del concepto de inecuación equivalente, pues es éste el que da contenido semántico a las técnicas de resolución.

Según Piaget (1971), hacia los seis años y medio o siete un niño descubre un método operatorio que consiste en buscar, en primer lugar, el elemento más pequeño de todos y, después, el más pequeño de los que quedan, logrando de esta forma construir su serie total sin titubeos ni errores. Es entonces cuando es capaz, por este mismo hecho, del razonamiento: $A < B$; $B < C$, por tanto $A < C$. Pero se ve inmediatamente que esta construcción supone la operación inversa (la reversibilidad operatoria implica volver al punto inicial): cada término de una serie es concebido simultáneamente como más pequeño que los siguientes (relación $<$) y como más grande que todos los precedentes (relación de $>$), y esto es lo que le permite al sujeto encontrar su método de construcción. Es interesante constatar que estas operaciones están estrechamente relacionadas con la construcción misma de las nociones de peso y de volumen y, principalmente, con la elaboración de los principios de conservación que les son relativos. Menciona el autor que debe esperarse hasta los once o doce años para obtener por ejemplo, la seriación (coordinación de relaciones asimétricas) de los volúmenes.

Observemos que la reversibilidad de las relaciones de desigualdad (por ejemplo relación de $<$), para volver al punto inicial requiere de un cambio a la operación inversa (por ejemplo, a la relación de $>$), esto no sucede en el caso de las relaciones de igualdad debido a su simetría.

Si bien la igualdad y la desigualdad son relaciones, existe una característica que las distingue. La relación de igualdad es simétrica, en cambio la de desigualdad es asimétrica (para el caso de $>$ o $<$) o antisimétrica (en el caso de $\leq$ o $\geq$). Describir la inecuación a través de su vínculo con la ecuación en el proceso algebraico de resolución o bien centrándose en una cuestión simbólica (sólo un cambio de signo), oculta esta característica que diferencia sustancialmente ambas relaciones.

Booth, citado por Radford (2004), afirmó que las dificultades de sintaxis fueron el resultado de una mala comprensión de las estructuras matemáticas que sustentan las representaciones algebraicas: "nuestra capacidad de manipular símbolos algebraicos con éxito requiere primero comprender las propiedades estructurales de las operaciones y relaciones matemáticas" (p.

162), las propiedades estructurales constituyen los aspectos semánticos del álgebra.

Boero (citado por Borello, 2010) destaca que es necesario acercarse a la matemática de los matemáticos y salirse de la matemática escolar para realizar un acercamiento epistemológico y cognitivo al objeto inecuación.

En el cuadro 7.8 detallamos las frecuencias y porcentajes que obtuvimos en esta pregunta en las respuestas de los investigadores analizadas en el capítulo 6, utilizando la categorización descripta para los docentes con el fin de comparar los resultados. En el caso de los matemáticos, como observamos en la tabla obtuvimos que la totalidad de los encuestados refiere a la desigualdad para definir la inecuación.

Concepto de inecuación	**Docentes N=14**	**Investigadores N=6**
Ecuacionistas	64 %	0 %
Relacionistas	36 %	100 %

Cuadro 7.8: Concepto de Inecuación

En cuanto a los aspectos que priorizan en la definición podemos observar los resultados en el cuadro 7.9.

Según el término	**Según el aspecto**	**Docentes N=14**	**Investigadores N=6**
Ecuacionistas	Simbólicos	14 %	0 %
	Mecanicistas	14 %	0 %
	Resultadistas	50 %	0 %
Relacionistas	Simbólicos	36 %	100 %
	Mecanicistas	7 %	0 %
	Resultadistas	29 %	0 %

Cuadro 7.9: Aspectos priorizados

Los investigadores encuestados caracterizan a las inecuaciones a través de su vínculo con la desigualdad, definiendo a esta última como una relación entre objetos distintos; mientras que la mayoría de los docentes encuestados asocian la *desigualdad* directamente a la *inecuación* y utilizan la *ecuación* para caracterizarla.

Acordamos con las ideas de Puig (1997) respecto de que la selección de los aspectos a priorizar en la definición de un concepto matemático no constituye una operación inocente y neutral. En lo que concierne al tratamiento del concepto de inecuación, los docentes priorizamos ciertas características al describirlo y ello determina una mirada particular sobre el mismo.

Capítulo 8
Libros escolares

Así como los objetos más fáciles de ver no son los demasiado grandes
ni los demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en
matemáticas no son las demasiado complejas ni las demasiado simples.
BERTRAND ARHUR WILLIAM RUSSELL

8.1. Introducción

En lo que sigue exploramos en los libros escolares la presentación y el desarrollo del tema que nos compete en esta investigación: el estudio y tratamiento de las inecuaciones. Al mismo lo analizamos en torno a dos etapas.

En la primera etapa, que identificamos como de *indagación y análisis*, examinamos los conceptos y propiedades previas que aparecen en el texto antes de abordar el tema inecuación, la presentación del concepto y la definición adoptada.

En la segunda, que denominamos de *detección*, realizamos una búsqueda de los tres tipos de tareas identificadas en el capítulo 4 (ver sección 4.5):

- *Tarea 1*: Comparar expresiones (CE).
- *Tarea 2*: Resolver inecuaciones (RI).
- *Tarea 3*: Demostrar desigualdades absolutas (DDA).

Las tareas son exploradas a partir de los diferentes marcos en el que se presentan en los textos (algebraico, funcional o geométrico).

8.2. Estudio del libro de texto

Según Sierra, Gonzalez y López (1999), el interés de analizar los libros de textos parte de la hipótesis de que en general la práctica de la enseñanza no está determinada por los currículos oficiales sino más bien por los libros utilizados en el aula.

Según Villella (2001), “los docentes suelen sustentar gran parte de sus prácticas en los libros escolares de Matemática que recomiendan usar a sus alumnos y que, algunas veces, ellos mismo usan, convirtiéndose así el texto en el vehículo que legitima los contenidos prescriptos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas". Por otra parte, Vargas (2003), citado por Vidal (2010), señala:

> "el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el instrumento mayoritariamente usado por los profesores. Especialmente el TIMSS, (Tercer Estudio Internacional de Ciencias y Matemáticas) muestra que el texto es utilizado para decidir qué temas enseñar y cómo enseñarlos así como para determinar cuáles ejercicios y problemas solucionar. Esta posición privilegiada del texto, condice indudablemente al reconocimiento de la necesidad de convertirlo en objeto de estudio didáctico, y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico" (p.2).

En este estudio de los libros escolares seguimos las orientaciones de la investigación de Claros Mellado (2010), que da una guía de trabajo para realizar un análisis sistemático y eficiente. Además en su trabajo el autor explica detalladamente el estudio con el objetivo de que pueda replicarse.

8.3. Muestra

Para seleccionar la muestra de libros utilizamos la información recogida en las encuestas a los docentes de los estudiantes de primer año de la carrera Profesorado de Matemática cohorte 2012. Los títulos, autores y editoriales nombrados en la misma fueron los que elegimos para este análisis.

La muestra se amplió con la incorporación de tres textos obtenidos a partir de una búsqueda utilizando la palabra clave "inecuación" en la Biblioteca Pedagógica y Popular "Domingo Faustino Sarmiento" de la ciudad de Santa Fe. Esta biblioteca depende de la Jefatura Provincial de Educación Superior, Perfeccionamiento y Proyectos Educativos y actualmente integra la red de Bibliotecas Pedagógicas surgida a partir del convenio establecido con la Biblioteca Nacional de Maestros (Ministerio de Educación de la Nación) y constituye un centro de referencia para la comunidad educativa de la ciudad de Santa Fe. Es el caso de los libros de las editoriales: Tintafresca, Kapeluz y Stella.

Estudiamos un total de 11 libros, publicados entre los años 2000 y 2012 editados en nuestro país y de fácil acceso en las librerías de nuestra ciudad.

Para realizar el análisis asignamos a cada libro un código según detallamos en el Cuadro 8.1

Libro	**Número de orden**	**Año de edición**	**Capítulo**
L	01	03	3

Cuadro 8.1: Detalle del código

En el cuadro 8.2 describimos la muestra analizada.

Código	**1er. Autor**	**Editorial**	**Título**	**Año**
L01003	Kaczor	Santillana	Matemática 1	2000
L02003	Etchegoyen	Kapeluz	Matemática I	2000
L03032	Ferrraris	Comunicarte	Aprend.Mat.9	2003
L04032	Itzcovich	Tintafresca	Matemática 9	2003
L05041	Bindstein	Aique	Matemática 8º	2004
L06041	Martinez	Mc Graw Hill	Matemática	2004
L07053	Altman	Longseller	Funciones 1	2005
L08073	Itzcovich	Tintafresca	M1 Matemática	2007
L09072	Zapico	Santillana	Matemática Persp	2007
L10082	Berio	Puerto de Palos	Matemática 2	2008
L11091	Cortés	Stella	Matemática I	2009

Cuadro 8.2: Muestra de textos escolares analizados

8.3.1. Ficha del libro

La ficha contiene, a nuestro entender, una información objetiva y exhaustiva. Para confeccionarla usamos los criterios que aparecen en el cuadro 8.3.

Denominación	**Descripción**	**Observaciones**
Código	Identificador único del objeto	Se ha usado una secuencia cronológica (según el año de edición).
Autor o autores	Nombres	Recogido(s) literalmente de la portada o de la primera página.
Título	Título del libro	Recogido literalmente de la portada. o de la primera página. Si se trata de una colección, ésta no se indica, pero si se trata de varios volúmenes, sí.
Editorial	Nombre	Recogido literalmente de la portada o de la primera página.
Año Información sobre Desigualdades	Cuatro dígitos Capítulo / Apartado y páginas	Fecha de publicación del libro. Se ha indicado si el libro tiene un capítulo dedicado a desigualdades o si éstos se tratan en un capítulo dedicado a otro asunto.

Cuadro 8.3: Ficha del libro

8.3.2. Elementos analizados

En una *primera etapa* efectuamos un análisis de la presentación del concepto de inecuación que realiza el libro. Para ello consignamos:

- *Contenidos previos*: los mismos se indagan para conocer los conceptos y temas que desarrollan los textos en los capítulos previos y dentro del capítulo donde se desarrolla el tema inecuaciones.
- *Definición*: deseamos saber:
  - si está presente o no
  - de estar presente la definición, la clasificamos.
- *Ejemplos presentados*: los clasificamos según sean:
  - Matemáticos
  - Extra-matemáticos
- *Marcos*: indagamos bajo qué marcos se presenta el concepto, según lo desarrollado en el capítulo 4:
  - Algebraico
  - Funcional
  - Geométrico

En una *segunda etapa* realizamos la búsqueda de los tipos de tareas presentadas en el capítulo 4:

- *Tarea 1*: Comparar expresiones (CE).
- *Tarea 2*: Resolver inecuaciones (RI).
- *Tarea 3*: Demostrar desigualdades absolutas (DDA).

Para la búsqueda de los tipos de tareas exploramos tanto en los ejemplos resueltos en la presentación del tema como en los ejercicios propuestos. Además clasificamos el tipo de problema: matemático o extra-matemático. También estudiamos bajo qué marco (algebraico, funcional o geométrico) se proponen las tareas.

8.4. Resultados obtenidos

8.4.1. Contenidos previos

La búsqueda de los contenidos previos desarrollados antes de la presentación de una inecuación se efectuó en el índice del libro e indicamos los títulos de los capítulos anteriores al tratamiento del tema. También se consignan las secciones previas a la unidad correspondiente en la cual se desarrolla el mismo. En el cuadro 8.4 incluimos el detalle:

Contenidos previos	**Total**	**Porcentaje N=11**
Conjuntos Numéricos	8	73 %
Función	7	64 %
Lenguaje algebraico	4	36 %
Ecuación	11	100 %

Cuadro 8.4: Contenidos previos

Todos los textos desarrollan el tema inecuaciones a continuación del tema ecuaciones.

Es de destacar que en relación con los contenidos previos, en general, los textos sólo los abordan desde una perspectiva algebraico-numérica. Esto interpretamos que favorece una desconexión entre los distintos contenidos desarrollados y desalienta a nivel de aprendizaje la integración y la complejización conceptual.

Para ilustrar el comentario anterior, observamos que todos los textos desarrollan antes el tema funciones, pero no se utiliza este marco para presentar las inecuaciones.

Otro detalle es que sólo un texto menciona la relación de desigualdad entre los elementos de un conjunto, y en ninguno aparecen ejemplos de desigualdades que no sean inecuaciones. En cuanto a la ley de tricotomía y a las leyes de las desigualdades, las encontramos sólo en uno de los libros.

8.4.2. Definición de inecuación

En esta subsección nos proponemos analizar la presentación del tema *inecuación* que realiza cada libro. Para ello utilizamos la misma categorización surgida en el análisis de la descripción del concepto por parte de los docentes (Sección 7.4.2) con el objetivo de analizar posibles correlaciones. Es decir, se analiza si se hace referencia a la ecuación o a la desigualdad para describir la inecuación. Retomamos a continuación dicha categorización.

Recordemos que las categorías surgen a partir del término utilizado en la descripción del concepto:

CATEGORÍA I

<u>Ecuacionistas</u>: incluimos en esta categoría los textos que describen la inecuación utilizando para ello la ecuación. En este grupo hay tres subgrupos, de acuerdo al aspecto que priorizan para la distinción realizada entre ambas:

Ia) *Simbólicos*: remarcan la diferencia en el signo entre una ecuación y una inecuación.

Ib) *Mecanicistas*: se centran en algún procedimiento algebraico de resolución, mencionan la propiedad de multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo para distinguir la ecuación de la inecuación.

Ic) *Resultadistas*: hacen hincapié en las características del conjunto solución para distinguir la ecuación de la inecuación.

CATEGORÍA II

Relacionistas: incluimos aquí los que hacen referencia a una relación entre expresiones y describen a las inecuaciones como desigualdades. En esta categoría retomamos los mismos subgrupos de la categoría anterior.

IIa) *Simbólicos*: hacen hincapié en las expresiones simbólicas para describirlas.

IIb) *Mecanicistas*: como en la categoría anterior, se centran en algún procedimiento algebraico de resolución.

IIc) *Resultadistas*: mencionan características del conjunto solución.

Se agregará a esta categorización la siguiente categoría:

CATEGORÍA III

Ausentes: para el caso de los libros que no presenta una definición.

En el cuadro 8.5 mostramos las frecuencias y porcentajes obtenidos según el término utilizado en el texto para definir la inecuación:

Definición de inecuación	**Total**	**Porcentaje**
Ecuacionistas	0	0 %
Relacionistas	9	82 %
Ausentes	2	18 %

Cuadro 8.5: Definición de inecuación según el término utilizado

En el cuadro 8.6 aparecen las frecuencias y porcentajes observados, según el aspecto que describen del concepto. Los porcentajes refieren al total de cada categoría. Es decir, el 100 % significa que la totalidad de los relacionistas son simbólicos.

Según los términos	**Según el aspecto**	**Total**	**Porcentaje N=11**
Ecuacionistas	Simbólicos	0	0 %
	Mecanicistas	0	0 %
	Resultadistas	0	0 %
Relacionistas	Simbólicos	9	100 %
	Mecanicistas	0	0 %
	Resultadistas	0	0 %

Cuadro 8.6: Definición de inecuación según el aspecto priorizado

A continuación transcribimos algunos ejemplos de definiciones clasificadas como relacionistas simbólicos:

> L01003: Una desigualdad es toda expresión en la que hay dos miembros relacionados mediante cualquiera de estos signos: $<, >, \leq, \geq$. Si esos miembros son expresiones algebraicas, estamos en presencia de una inecuación, en la cual figuran números e incógnitas.
>
> L04032: Las desigualdades del tipo $AX + B > C$; $AX + B \leq C$; $AX + B < C$; $AX + B \geq C$ siendo A, B y C tres números reales y A distinto de 0, se llaman inecuaciones lineales con una incógnita.
>
> L09072: Las inecuaciones son desigualdades que contienen incógnitas.

Si bien la mayoría de los libros define a la inecuación como una desigualdad, existe una diversidad de criterios respecto de la definición que proponen. Algunos de ellos definen a la inecuación como una *desigualdad de expresiones algebraicas*.

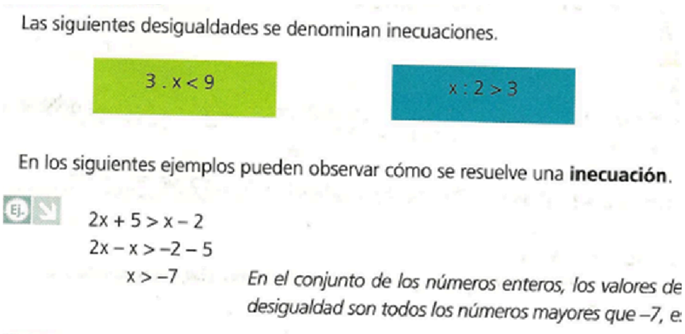
Otros definen a la inecuación como una *desigualdad en la que aparecen incógnitas*. Esto supone interpretar que toda inecuación tiene una incógnita por calcular, es decir, relaciona el concepto con la resolución de una inecuación. Confunden el hecho de que aparezcan "letras" con la aparición de "incógnitas". Según esta definición la desigualdad $x^2 \geq 0$ es una inecuación, sin embargo también es una desigualdad absoluta que es válida para todos los elementos del conjunto donde está definida la variable, los números reales. Por lo tanto esta descripción no diferencia una desigualdad absoluta de una condicional. En la sección 4.3 del capítulo 4 observamos que en el texto **L2** analizado se adopta este enfoque, en tanto que en el libro **L1** se realiza la distinción entre inecuación (o desigualdad condicional) y desigualdad absoluta (o incondicional). Como mencionamos en esa sección, este último enfoque nos parece más pertinente para identificar cada uno de estos conceptos en relación con los fenómenos que organizan.

Con respecto a los ejemplos, describimos en el cuadro 8.7 los resultados obtenidos:

Ejemplos	**Frecuencia**	**Porcentaje N=11**
Matemáticos	10	91 %
Extramatemáticos	4	36 %
No menciona	0	0 %

Cuadro 8.7: Tipos de ejemplos

Como se observa en la tabla la mayoría de los libros (91 %) utiliza ejemplos matemáticos. Mostramos a continuación un ejemplo de ello en la figura 8.1:



Las siguientes desigualdades se denominan inecuaciones.

3 . x < 9

x : 2 > 3

En los siguientes ejemplos pueden observar cómo se resuelve una **inecuación**.

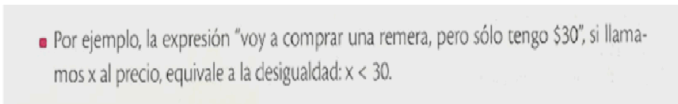
Ej.

2x + 5 > x − 2
2x − x > −2 − 5
x > −7

En el conjunto de los números enteros, los valores de desigualdad son todos los números mayores que −7, e

Figura 8.1: Ejemplos matemáticos en el libro L10082

Un 36 % presenta situaciones extramatemáticas. A modo de ejemplo presentamos la figura 8.2:

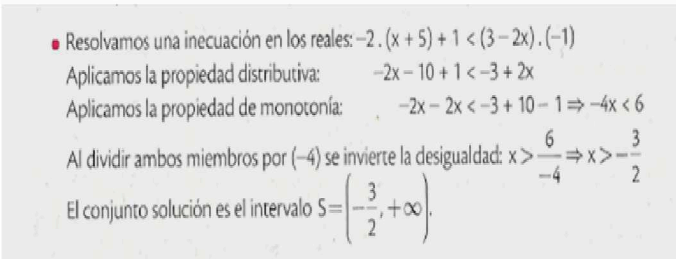


- Por ejemplo, la expresión "voy a comprar una remera, pero sólo tengo $30", si llamamos x al precio, equivale a la desigualdad: x < 30.

Figura 8.2: Situaciones extramatemáticas en el libro L09072

El ejemplo parte del supuesto de que será posible encontrar una remera a un valor menor que el monto de dinero que lleva en el bolsillo. Si se cambia el verbo en el enunciado, es decir si se afirma: "compró" la remera en lugar de la expresión de deseo "voy a comprar", ¿por qué no puede costar $30? Por lo tanto la expresión adecuada para modelizar la situación es: $0 < x \leq 30$

En cuanto al marco elegido por el autor para la presentación del tema inecuaciones, la mayoría (89 %) utiliza el marco algebraico (en la figura 8.3 se muestra un ejemplo), un 22 % el funcional (en la figura 8.4 tomamos un ejemplo) y ningún libro utiliza el marco geométrico.



- Resolvamos una inecuación en los reales: $-2.(x+5)+1<(3-2x).(-1)$

Aplicamos la propiedad distributiva: $-2x-10+1<-3+2x$

Aplicamos la propiedad de monotonía: $-2x-2x<-3+10-1 \Rightarrow -4x<6$

Al dividir ambos miembros por (-4) se invierte la desigualdad: $x>\frac{6}{-4} \Rightarrow x>-\frac{3}{2}$

El conjunto solución es el intervalo $S=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

Figura 8.3: Resolución algebraica en el libro L09072

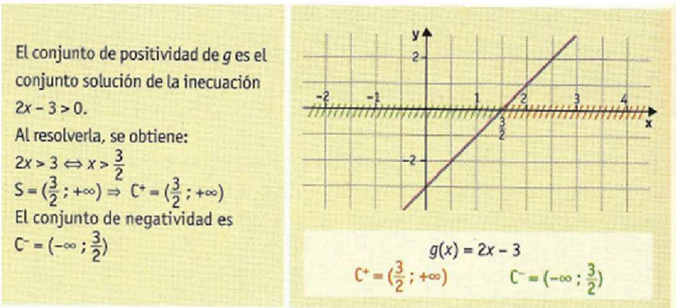


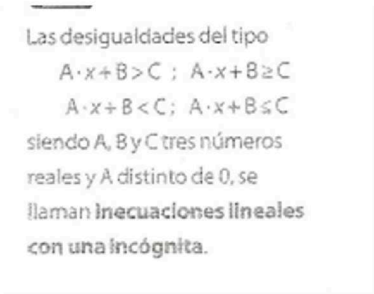
Figura 8.4: Resolución funcional en el libro L08073

8.4.3. Análisis detallado de algunas definiciones

Las definiciones presentadas por los docentes que utilizaron la desigualdad para definir la inecuación están en sintonía con las que se proponen en la mayoría de los libros. Dichas definiciones han sido analizadas en la pregunta 2 del cuestionario realizado a los docentes. Recordemos que los que refieren a la desigualdad (desigualdad con incógnitas o desigualdad algebraica) no establecen el paralelismo entre la desigualdad absoluta y las identidades para las igualdades, ya que bajo esta definición no es posible distinguir entre desigualdades absolutas y condicionales, puesto que ambas quedan bajo el concepto de inecuación.

A continuación analizaremos en detalle tres de los libros de la muestra debido a que las definiciones que adoptan son distintas a las presentadas por los docentes en la encuesta. Se trata de los libros: L04032 y L08073 (ambos de editorial Tinta Fresca pero correspondiente a distintos años) y L11091 de la editorial Stella.

El libro L04032 presenta la siguiente definición (figura 8.5) referida a las inecuaciones lineales con una incógnita:



Las desigualdades del tipo

$A \cdot x + B > C$; $A \cdot x + B \geq C$

$A \cdot x + B < C$; $A \cdot x + B \leq C$

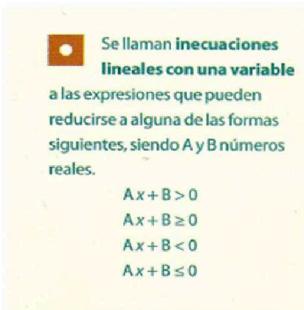
siendo A, B y C tres números reales y A distinto de 0, se llaman **inecuaciones lineales con una incógnita**.

Figura 8.5: Definición de inecuación en L04032

Observamos que es una definición que se limita a las inecuaciones lineales y no presenta casos más generales.

El hecho de restringir a las expresiones del "tipo" puede provocar confusiones en los estudiantes, dado que son ignorados los ejemplos de inecuaciones en las que el segundo miembro no sea una constante, por ejemplo las expresiones: $3x + 2 > 9x - 3$ ó $3x + 2x > 9$.

En el libro L08073, de la misma editorial pero del año 2007, los autores presentan la siguiente definición (figura 8.6):



Se llaman **inecuaciones lineales con una variable** a las expresiones que pueden reducirse a alguna de las formas siguientes, siendo A y B números reales.

$Ax + B > 0$

$Ax + B \geq 0$

$Ax + B < 0$

$Ax + B \leq 0$

Figura 8.6: Definición en L08073

Se observa nuevamente que se limita la definición al caso lineal, pero esta vez agrega la idea: "puede reducirse a" una del "tipo", no aparece claro el modo de realizar la transformación algebraica. De esta manera se elude el uso de las propiedades del orden en los procedimientos de resolución.

Es importante destacar que no aclaran los autores en esta edición que el coeficiente del término lineal sea distinto de cero (cuestión que en la edición anterior se había contemplado).

En ambos casos presentan el tema desde el punto de vista funcional y algebraico, aunque el sentido con el que justifican los procedimientos en la primera edición es el funcional exclusivamente, como mostramos en la figura 8.7 (incluso para el algebraico sugiere resolver la ecuación y luego justificar a través del crecimiento o decrecimiento de la función la elección del conjunto solución).

Dada la función lineal $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$, encuentren todos los valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 5$.

En este caso hay que averiguar cuándo $f(x) \leq 5$. Como $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$, queda planteada la inecuación $-\frac{2}{3}x + 4 \leq 5$. Para resolverla, buscamos en qué punto $-\frac{2}{3}x + 4 = 5$

$$-\frac{2}{3}x + 4 = 5 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = 5 - 4 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = 1 : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Como la pendiente es negativa, la recta es decreciente y por lo tanto si $f(-\frac{3}{2}) = 5$, para valores de x mayores que $-\frac{3}{2}$, la imagen será menor que 5. El conjunto solución de la inecuación $-\frac{2}{3}x + 4 \leq 5$ es:

$$S = [-\frac{3}{2}; +\infty)$$

Figura 8.7: Marco funcional en L08073

En cambio en la segunda edición, se realiza un tratamiento en el marco algebraico y otro en el marco funcional que se complementan, como mostramos en la figura 8.4.

Analizaremos ahora la siguiente definición (figura 8.8) presentada en L11091.

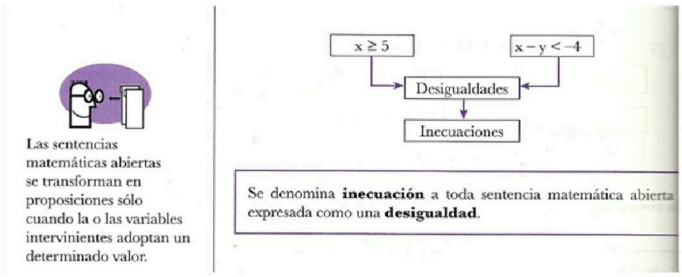


Figura 8.8: Definición presentada en L11091

En la definición de inecuación que presenta la autora refiere a sentencias abiertas, aclarando que "Las sentencias matemáticas abiertas se transforman en proposiciones sólo cuando la o las variables intervinientes adoptan un determinado valor", esta cuestión consideramos que es incompleta. Dado que la definición de sentencia abierta se corresponde con la idea de función proposicional, esta aclaración supone que una función proposicional sólo se transforma en proposición a través de la ejemplificación. Es decir no incluye la posibilidad de utilizar cuantificadores (universal o existencial) que puedan transformar la sentencia abierta en proposición. Claramente en esta definición aparece el fenómeno de especificación en el contexto de campo de variabilidad como menciona Negrete (2002).

Destacamos que según la clasificación que presenta, toda sentencia abierta puede ser agrupada en dos tipos: de igualdad o de desigualdad, esta cuestión no es siempre cierta, ya que por ejemplo $3|x$ que significa 3 es divisor de x es también una sentencia abierta según la definición que presenta este libro (figura 8.9), y no es una igualdad ni una desigualdad:

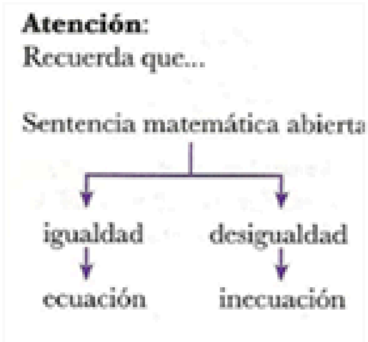


Figura 8.9: Definición presentada en L11091

8.4.4. Tipos de tareas

Recordemos que las tareas consideradas (ver descripción detallada en la sección 4.5) son las siguientes:

- *Tarea 1*: Comparar expresiones (CE).
- *Tarea 2*: Resolver inecuaciones (RI).
- *Tarea 3*: Demostrar desigualdades absolutas (DDA).

Las frecuencias y porcentajes con que aparecen en los textos analizados estas tareas, en cada uno de los marcos (algebraico, funcional y geométrico) se detallan en el cuadro 8.8:

Tarea	**Marco**	**Frecuencia**	**Porcentaje N=11**
CE	Algebraico	2	18 %
	Funcional	1	9 %
	Geométrico	0	0 %
RI	Algebraico	11	100 %
	Funcional	3	27 %
	Geométrico	0	0 %
DDA	Algebraico	1	9 %
	Funcional	0	0 %
	Geométrico	0	0 %

Cuadro 8.8: Tareas encontradas. CE: Comparar expresiones, RI: Resolver inecuaciones, DDA: Demostrar desigualdades absolutas

Observamos que la tarea 2 (RI) se observa en la totalidad de los libros de la muestra y se presenta en el marco algebraico. A modo de ejemplo presentamos en la figura 8.10 uno de los ejercicios encontrados:

26. Hallen el conjunto solución de cada inecuación.

a) $5-x<-\frac{7}{4}x+3$

b) $-2(1-x)>(x+4)(-3)$

c) $5-\left(3x-\frac{5}{3}\right)(-2)<\frac{7}{3}$

Figura 8.10: Tarea 2 (RI) en el marco algebraico en el libro L09072

El 27 % de los libros analizados presenta la tarea 2 (RI) en el marco funcional. A continuación presentamos en la figura 8.11 un enunciado de este tipo encontrado:

40. Consideren las funciones de las actividades 30 y 31 e indiquen:
a) para qué valores de x se cumple que $f(x) < g(x)$
b) para qué valores de x se cumple que $h(x) > j(x)$

41. a) En un mismo sistema de ejes, grafiquen las funciones $m(x) = 0{,}5x + 4$ y $n(x) = -x^2 + 3$
b) Indiquen para qué valores de x se cumple que $m(x) < n(x)$.
c) Indiquen para qué valores de x se cumple que $m(x) > n(x)$.

Figura 8.11: Tarea 2 (RI) en el marco funcional en el libro L01003

.

La tarea 1 (CE) la encontramos en el 23 % de los libros analizados y se presenta en el marco algebraico.

En el siguiente ejemplo, teniendo como dato una cota para el perímetro del cuadrado, los estudiantes deberán encontrar una cota para la superficie del mismo, como mostramos en la figura 8.12:

27. El perímetro de un cuadrado de lado x no supera el perímetro del rectángulo de la figura.

¿Qué pueden asegurar acerca de la superficie S del cuadrado? Exprésenlo mediante una inecuación.

Figura 8.12: Tarea (CE) en el marco algebraico en el libro L01003

Cabe señalar que si bien la tarea se presenta en el marco geométrico, sólo constituye un pretexto para el planteo de una comparación en el marco algebraico.

La tarea 1 (CE) aparece como se observa en la figura 8.13 en el marco funcional en un solo libro:

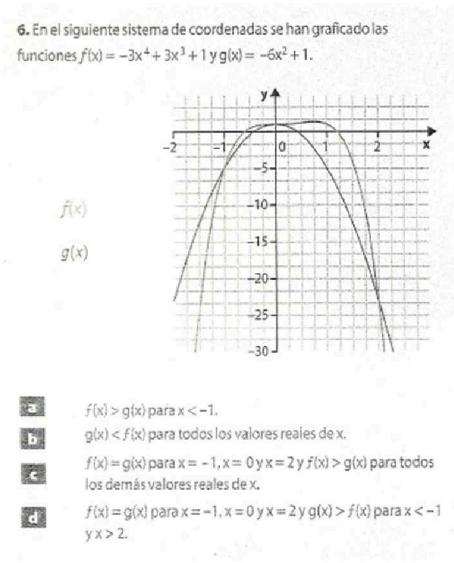


Figura 8.13: Tarea 1 (CE) en el marco funcional en el libro L04032

En cuanto a la tarea 3 (DDA), la encontramos en un solo libro y se observa en la figura 8.14. Si bien no requiere una justificación de la elección del símbolo, se trata de una generalización para los números enteros que cumplen esas condiciones tomando a y b como dos representantes de ellos. El marco en el cual el libro plantea estos ejercicios es el algebraico.

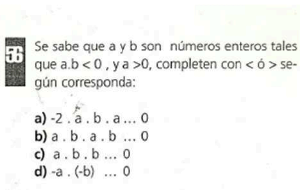


Figura 8.14: Tarea 3 (DDA) en el marco algebraico en el libro L05041

8.5. Discusión de resultados y conclusiones

El análisis de los conceptos previos al de *inecuación* que presentan los libros pone de manifiesto una coincidencia con los resultados obtenidos en la encuesta realizada a los docentes, cuyos resultados se incluyen en el capítulo

7. Nos referimos al hecho de "pegar" la ecuación a la inecuación, con todas las dificultades que esto conlleva, ya que en general no se delimitan los fenómenos que son relevantes al mismo.

En la mayoría de los textos se apela a la *desigualdad* para describir a una *inecuación*. En este aspecto encontramos coincidencia entre los textos escolares y lo expresado por los investigadores, que en su totalidad utilizan este término para definirla. Prácticamente ninguno de los textos define claramente el concepto "desigualdad" ni ejemplifican numéricamente o mencionan sus propiedades previamente a la definición de inecuación. Tampoco hay una definición de *inecuación* que contemple las condiciones necesarias y suficientes para que la definición sea correcta y ponga en juego la fenomenología pertinente.

En el gráfico siguiente (figura 8.15) comparamos mediante un diagrama de barras la utilización de los distintos tipos de tareas en los textos analizados:

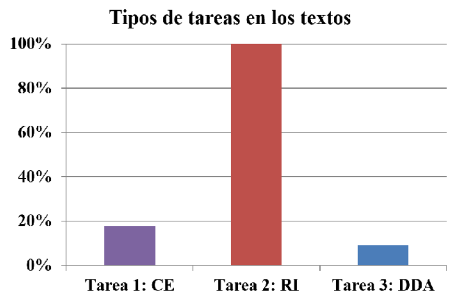


Figura 8.15: Tipos de tareas en los textos escolares. CE: Comparación de expresiones, RI: Resolución de inecuación, DDA: Demostración de desigualdad absoluta.

En la figura 8.16 comparamos las distintas tareas según los marcos utilizados en los libros estudiados:

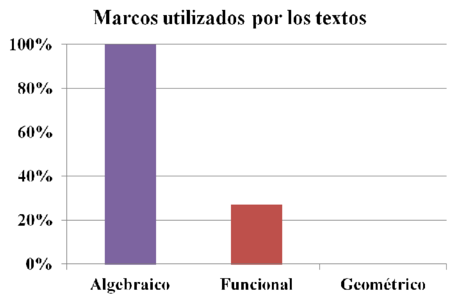


Figura 8.16: Marcos utilizados en los textos escolares

Aparece con fuerza la idea de que resolver una inecuación es la búsqueda siempre de un conjunto solución. En algunos libros se encontraron expresiones como “suelen tener muchas soluciones”, esta cuestión también se condice con lo analizado en las encuestas a los docentes.

Tanto en la presentación del concepto como en las tareas encontradas en los textos se observa que la mayoría trabaja sólo en el marco algebraico.

La tarea que aparece más arraigada en los textos escolares analizados es la resolución de inecuación, con un proceso algorítmico de resolución. En este aspecto encontramos total coincidencia con lo analizado en la encuesta a los docentes.

En la mayoría de los textos, las otras tareas están ausentes o bien encontramos un solo problema de la lista completa de ejercitación propuesta para el tema que exige estos procedimientos para su resolución. En ninguno de los libros analizados se realiza en la presentación del tema la descripción de alguna tarea que no sea la resolución de una inecuación, que consiste en los procedimientos de transformación de la desigualdad condicional en otra equivalente con el objetivo de encontrar el conjunto solución.

En cuanto a las hipótesis que nos planteamos en esta investigación, estos resultados proporcionan evidencias para afirmar la comprobación de la *Hipótesis 2*: los fenómenos que organiza la desigualdad necesarios para la matemática avanzada no son priorizados en su totalidad en las tareas propuestas por los libros escolares.

Capítulo 9

Producciones de estudiantes

Se piensa que lo justo es lo igual, y así es: pero no para todos, sino para los iguales. Se piensa por el contrario que lo justo es lo desigual y así es, pero no para todos sino para los desiguales.
ARISTÓTELES

9.1. Introducción

Analizamos en este capítulo las producciones de los estudiantes de primer año del Profesorado de Matemática, cohorte 2012, en un cuestionario que tiene como objetivo explorar las características del objeto mental *desigualdad* que poseen. Indagamos en torno a sus ideas respecto del concepto y las herramientas que utilizan para el abordaje de problemas en los que se ponen en juego las distintas tareas en los marcos: algebraico, funcional y geométrico.

El cuestionario fue aplicado en las clases de Matemática Básica en el primer cuatrimestre del año 2012. Está organizado en dos partes desarrolladas en cuatro clases de 2 horas reloj. Los estudiantes trabajaron en forma individual.

Abordamos el análisis de las respuestas de los estudiantes según tres aproximaciones distintas: en una primera parte, describimos las respuestas a cada tarea del cuestionario implementado. En la segunda parte realizamos comparaciones de los desempeños de la muestra estudiada según el tipo de tarea y según el marco. Finalmente, en una tercera parte, caracterizamos la producción de cada estudiante según su desempeño en cada una de las tareas propuestas.

9.2. Instrumento y sujetos de estudio

Como indicamos en la sección 1.4, el caso considerado se conforma por 21 estudiantes de primer año del Profesorado de Matemática, cohorte 2012, que cursaron la asignatura Matemática Básica. El número de estudiantes varía (entre 20 y 21) según la asistencia a las clases en las que se instrumentó.

El cuestionario está organizado en dos partes, con un total de 30 consignas. En su diseño optamos por cuestiones abiertas. Queremos estudiar las resoluciones y argumentaciones que los alumnos son capaces de expresar en las respuestas. Estas argumentaciones nos permitirán inferir las características del objeto mental del concepto de desigualdad que han logrado construir.

El cuestionario consta de dos partes:

- *Parte 1*: el propósito que perseguimos es indagar acerca del objeto mental *desigualdad* que poseen los estudiantes. Esta parte se conforma por 7 preguntas, cuyas respuestas exigen una descripción personal del concepto de desigualdad.

- *Parte 2*: el objetivo que nos proponemos es estudiar las interpretaciones de los estudiantes de las desigualdades que se presentan en los problemas planteados. Está organizada en tres secciones:

  - Sección 1: contiene 10 problemas relacionados con el marco *algebraico* para la resolución de distintos tipos de tareas.
  - Sección 2: incluye 4 problemas relacionadas con el marco *funcional* para la resolución de distintos tipos de tareas.
  - Sección 3: contiene 8 problemas relacionados con el marco *geométrico* para la resolución de distintos tipos de tareas.

Las respuestas de los estudiantes se encuentran en el Anexo 2 de la tesis.

9.3. Parte 1: El concepto de desigualdad

En esta sección nos proponemos indagar en el concepto de desigualdad que los estudiantes pueden recuperar de su paso por la escuela secundaria.

Incluimos estas preguntas con el propósito de que los estudiantes realicen una explicación valiéndose de todas las ideas y herramientas de las que disponen.

La finalidad que se persigue en esta sección es aproximarnos al objeto mental "desigualdad" de los alumnos a partir de los términos que utilizan en la definición, de los ejemplos que presentan y de las diferencias y similitudes que establecen.

Asimismo, esperamos identificar los aspectos que describen del concepto, con respecto a los símbolos (letras, signo, incógnita, números entre otros), los mecanismos de resolución, el conjunto solución, etcétera.

Además tendremos en cuenta si los términos y procedimientos que incluyen en sus definiciones pertenecen a los marcos: algebraico, funcional o geométrico.

En esta primera parte solicitamos que incluyan ejemplos y ejercicios sobre el tema. Estamos interesados en conocer las consignas que proponen como ejercicios, así como los tipos de desigualdades que presentan. Esto nos permitirá inferir algunas características de las elecciones del docente respecto de las tareas que han sido abordadas en la enseñanza del tema. Cabe recordar aquí que las tareas han sido vinculadas en la sección 4.5 con los fenómenos matemáticos (ver sección 4.4) que organiza el concepto de desigualdad.

También nos interesa indagar en las diferencias y similitudes que pueden establecer entre las desigualdades numéricas y condicionales, por un lado, y las ecuaciones e inecuaciones, por el otro.

Resumiendo las ideas anteriores, los objetivos que perseguimos mediante las consignas de esta primera parte del cuestionario son los siguientes:

- Caracterizar los elementos que explicitan en la descripción de desigualdad.
- Identificar los ejemplos, ejercicios o problemas que consideran fueron útiles para comprenderlas.
- Indagar si los alumnos recuperan algunos usos de las desigualdades durante su paso por la escuela primaria, secundaria y el ingreso a la universidad.
- Caracterizar las diferencias que establecen entre ecuaciones e inecuaciones.

9.3.1. Preguntas

1. Si un amigo de la escuela secundaria te pregunta qué es una desigualdad matemática. ¿Qué le dirías?
2. ¿Qué ejemplos le darías?
3. ¿Qué ejercicios o problemas para que resuelva le darías? Indica alguno.
4. En tu historia escolar, ¿en qué otros temas (y en qué años de la escuela secundaria) utilizaste desigualdades? En lo posible cita ejemplos.
5. Detalla las similitudes y diferencias entre las desigualdades siguientes, siendo x un número real: $1 \leq 5$ y $x \leq 5$.
6. Explica diferencias y similitudes entre una ecuación y una inecuación.
7. Responde V o F y ejemplifica:

   [a] Algunas ecuaciones tienen infinitas soluciones.

[b] Algunas inecuaciones tienen una única solución.

[c] La ecuación siempre tiene solución única.

[d] Algunas inecuaciones no tienen solución.

[e] Las ecuaciones tienen siempre un número finito de soluciones.

[f] El conjunto solución de una inecuación es siempre un conjunto de valores.

9.3.2. Análisis de Resultados

Pregunta 1

Si un amigo de la escuela secundaria te pregunta qué es una desigualdad matemática. ¿Qué le dirías?

Decidimos realizar la consulta respecto del término *desigualdad matemática* con el objetivo de indagar en el objeto mental *desigualdad* de los estudiantes y explorar en las nociones que pueden recuperar del mismo. Después de que transitaron la escuela primaria, la secundaria y el ingreso a la universidad nos interesa aproximarnos a dicho objeto mental e identificar, a partir de sus respuestas, los fenómenos (*ordenación*, *especificación* o *generalización* ver sección 4.4) a los que refieren en la descripción del concepto. Para ello a continuación nombramos los grupos de acuerdo al fenómeno que registran en sus respuestas.

Consideramos la siguiente categorización para las descripciones de los estudiantes del concepto de *desigualdad matemática*:

- *Grupo 1: Ordenación.* Describen la desigualdad matemática con la idea de una *relación* entre objetos distintos. Consideramos que este grupo hace referencia al fenómeno de *ordenación*. Hacen hincapié en la comparación entre valores, miembros, funciones o resultados (algunos estudiantes hablan de términos en lugar de miembros). Transcribimos a continuación las respuestas de los Estudiantes 5, 12 y 13.

  Estudiante 5: "Cuando se encuentran dos números que no son iguales".

  Estudiante 12: "(...) Le explico los signos que se utiliza en la desigualdad ($x < y$ "x menor que y", $x > y$ "x mayor que y", $x \leq y$ "x menor o igual que y", $x \geq y$ "x mayor o igual que y" y así justifico que 2 valores ó 2 funciones pueden tener diferentes o iguales valores o resultados".

  Estudiante 13: "Desigualdad es una diferencia entre dos términos".

- *Grupo 2: Especificación.* Piensan que toda desigualdad matemática es una *inecuación*. Interpretamos que este grupo de estudiantes hace referencia al fenómeno de *especificación*. Analizamos este grupo a continuación con más detalle e incluimos en lo que sigue varios ejemplos.

- *Grupo 3: Generalización.* Describen procedimientos de demostración de desigualdades absolutas.

- *Grupo 4: Inactivos.*: no responden o no recuerdan.

Mostramos los resultados en el cuadro 9.1:

Fenómeno	**Frecuencia**	**Porcentaje N=21**
Grupo 1: Ordenación	3	14 %
Grupo 2: Especificación	13	62 %
Grupo 3: Generalización	0	0 %
Grupo 4: Inactivos	5	24 %
Total	21	100 %

Cuadro 9.1: Concepto de *desigualdad matemática*

Análisis detallado del *Grupo 2*

Hay 13 estudiantes que estiman que toda desigualdad matemática es una inecuación. Uno de ellos sólo responde *"es una inecuación"* y los 12 restantes describen directamente dicho concepto. A continuación clasificamos las respuestas de estos 12 estudiantes según la categorización utilizada para las opiniones de los docentes en torno al concepto de inecuación.

CATEGORÍA I

Ecuacionistas: incluimos aquí los estudiantes que describen la inecuación diferenciándola de la ecuación. En este grupo hay tres subgrupos, de acuerdo al aspecto que utilizan para la distinción realizada entre los dos conceptos. Vale aclarar que algunos estudiantes utilizan más de un aspecto.

Ia) *Simbólicos*: remarcan la diferencia en el signo entre una ecuación y una inecuación. A modo de ejemplo mostramos en la figuras 9.1 y 9.2 las respuestas de dos estudiantes.

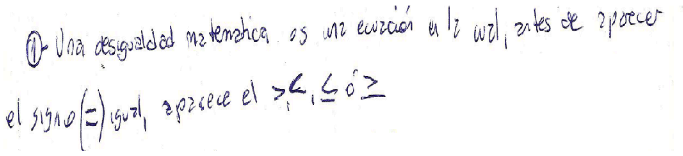


Figura 9.1: Respuesta del Estudiante 4 a la pregunta 1

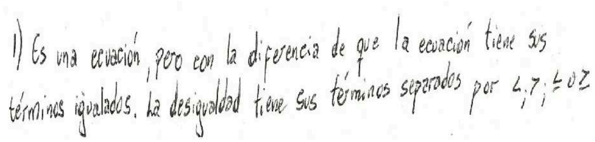


Figura 9.2: Respuesta del Estudiante 11 a la pregunta 1

Transcribimos a continuación las respuestas anteriores extraídas de las producciones de los estudiantes.

> Estudiante 4: "Una desigualdad matemática es una ecuación en la cual, antes de aparecer el signo igual (=), aparece el $>, <, \leq, \geq$".
>
> Estudiante 11: "Es una ecuación, pero con la diferencia de que la ecuación tiene sus términos igualados. La desigualdad tiene sus términos separados por $<, >, \leq, \geq$".
>
> Observación: este último estudiante utiliza la palabra "términos" para referirse a "miembros".

Ib) *Mecanicistas*: se centran en algún procedimiento algebraico de resolución, mencionan la propiedad de multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo para distinguir la ecuación de la inecuación. A modo de ejemplo incluimos la siguiente respuesta.

> Estudiante 2: "Es donde tenés que despejar una determinada letra a través de distintos pasos".

Ic) *Resultadistas*: hacen hincapié en las características del conjunto solución para distinguir la ecuación de la inecuación.

Para ejemplificar transcribimos a continuación una respuesta.

> Estudiante 8: "Una ecuación es la solución de una incógnita, y una inecuación es el conjunto solución de infinitos valores".

CATEGORÍA II

Relacionistas: incluimos aquí los estudiantes que hacen referencia a una relación entre expresiones y mencionan características del conjunto solución. Para ejemplificar transcribimos en la figura 9.3 una respuesta.

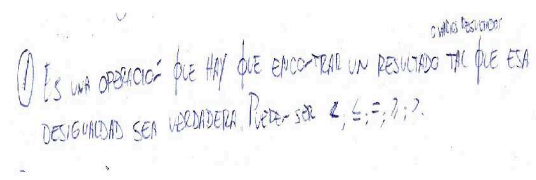


Figura 9.3: Respuesta del Estudiante 21 a la pregunta 1

Estudiante 21: “Es una operación que hay que encontrar un resultado o varios resultados tal que esa desigualdad sea verdadera. Puede ser $<, >, \leq, \geq$”.

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje N=12
Ecuacionistas	7	58 %
Relacionistas	5	42 %
Total	12	100 %

Cuadro 9.2: Concepto de desigualdad

Más de la mitad de los estudiantes del grupo 2 utiliza cuestiones relacionadas a la ecuación para describir el concepto. Esto se manifiesta expresamente utilizando este término en la definición que enuncian.

En el cuadro 9.3 presentamos las frecuencias y porcentajes obtenidos, según el aspecto que describen del concepto. Los porcentajes refieren al total de cada categoría. Por ejemplo, el primer renglón del cuadro indica que de los estudiantes ecuacionistas el 43 % son simbólicos. Además, el porcentaje total de cada categoría supera el 100 % debido a que un mismo estudiante puede estar en más de una subcategoría, ya que algunos de ellos mencionan más de un aspecto.

Término	Aspecto	Total	Porcentaje
Ecuacionistas N=7	Simbólicos	3	43 %
	Mecanicistas	1	24 %
	Resultadistas	3	43 %
Relacionistas N=5	Simbólicos	1	20 %
	Mecanicistas	1	20 %
	Resultadistas	3	60 %

Cuadro 9.3: Concepto de desigualdad según el aspecto mencionado

Podemos observar en el cuadro 9.3 que para el caso de los ecuacionistas, la frecuencia mayor (43 %) corresponde a los que explican el concepto haciendo énfasis en los símbolos o a los que refieren al conjunto solución. También se puede ver que los relacionistas el aspecto que resaltan con mayor frecuencia (60 %) es el conjunto solución. Esta tendencia nos adelanta el tipo de tareas que los estudiantes abordan en la escuela secundaria, dado que el trabajo con la inecuación está asociado a la búsqueda del conjunto solución. Es decir aparece claramente una vinculación con la tarea 2 (RI).

Preguntas 2 y 3

¿Qué ejemplos le darías?

¿Qué ejercicios o problemas para que resuelva le darías? Indica alguno.

Con estas preguntas esperamos ampliar la descripción de la noción de desigualdad de los estudiantes.

Agrupamos para el análisis estas preguntas y las clasificamos según el tipo de ejemplos de desigualdades que presentan: numéricas, lineales, cuadráticas, racionales, etcétera.

Para los ejemplos:

Respuesta	**Frecuencia**	**Porcentaje N=21**
No resuelve	3	14 %
Desigualdades numéricas	4	19 %
Inecuaciones lineales	9	43 %
Desigualdades numéricas e inecuaciones lineales	2	10 %
Inecuaciones lineales y cuadráticas	1	5 %
Problema extramatemático	1	5 %
Afirma que buscaría en libros	1	5 %
Total	21	100 %

Cuadro 9.4: Ejemplos

Para los ejercicios:

Respuesta	**Frecuencia**	**Porcentaje N=21**
No resuelve	9	43 %
Desigualdades numéricas	1	5 %
Inecuaciones Lineales	7	33 %
Desigualdades numéricas e inecuaciones lineales	1	5 %
Inecuaciones cuadráticas	1	5 %
Afirma que buscaría en libros	1	5 %
Comparación de expresiones	1	5 %
Total	21	100 %

Cuadro 9.5: Ejercicios o problemas

En el primer caso, en el cuadro 9.4, la mayor frecuencia en los ejemplos se da en los estudiantes (43 %) que presentan inecuaciones lineales. Esto nos hace pensar que asocian directamente el tema desigualdades a la resolución de una inecuación lineal.

Pero lo interesante es que al tener que elaborar un ejercicio, apelando o no a lo que recuerdan, un 43 % no resuelve, como observamos en el cuadro 9.5. Es decir que recuerdan la inecuación lineal pero no logran presentar algún enunciado para resolver estas situaciones. En esta pregunta pensamos que puede incidir el tipo de consigna, ya que no están habituados a elaborar problemas en los que se involucre algún contenido matemático, más bien están acostumbrados a resolver las que les presenta el docente.

Encontramos interesante la respuesta del Estudiante 12 que intenta presentar ejemplos de comparación de expresiones, como mostramos en la figura 9.4:

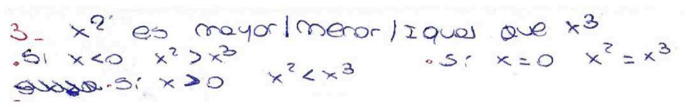


Figura 9.4: Respuesta del Estudiante 12 a la pregunta 3

Pregunta 4

En tu historia escolar, ¿en qué otros temas (y en qué años de la escuela secundaria) utilizaste desigualdades? En lo posible cita ejemplos.

Con esta pregunta esperamos indagar si los alumnos recuerdan haber utilizado la desigualdad en otros temas.

En el cuadro 9.6 observamos que la mayoría de los estudiantes de la muestra menciona las inecuaciones lineales o las inecuaciones lineales con dos incógnitas como los temas de la escuela secundaria donde trabajaron desigualdades.

Respuesta	**Frecuencia**	**Porcentaje N=21**
No responde	4	18 %
No recuerda	7	33 %
No lo di nunca	2	10 %
Inecuaciones lineales	5	24 %
Inecuaciones lineales e Inecuaciones con dos incógnitas	2	10 %
Inecuaciones con valor absoluto y cuadráticas	1	5 %
Total	21	100 %

Cuadro 9.6: En su historia escolar

Nuevamente es importante observar el número de estudiantes que no responde. Si incluimos en este grupo los alumnos que no recuerdan y los que no resuelven el porcentaje asciende al 51 %.

Hay un 10 % de los estudiantes que manifiesta que nunca en su historia escolar trabajó este tema. Observamos que los que recuerdan el tratamiento del tema mencionan: inecuaciones lineales, cuadráticas, con valor absoluto e inecuaciones lineales con dos incógnitas. Nuevamente surge la idea de que las tareas en las que los estudiantes abordan estos contenidos están ligadas a la búsqueda del conjunto solución de inecuaciones de distinto tipo.

Pregunta 5

Detalla las similitudes y diferencias entre las desigualdades siguientes, siendo x un número real: $1 \leq 5$ *y* $x \leq 5$.

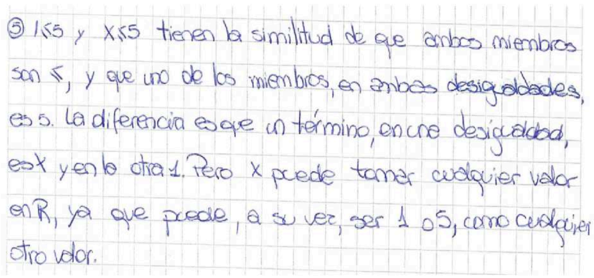
Esta pregunta apunta a indagar si los estudiantes distinguen las desigualdades numéricas y las condicionales o inecuaciones.

En este caso observamos en el cuadro 9.7 que en general no comprenden la diferencia entre una desigualdad condicional y una numérica. Es decir, no responden (inactivos), las diferencian por los símbolos que observan en una y otra o consideran que son similares.

Respuesta	**Frecuencia**	**Porcentaje N=21**
Inactivos	7	33 %
Diferencian por los símbolos	9	43 %
Consideran que son similares	1	5 %
Interpretan correctamente la diferencia	4	19 %
Total	21	100 %

Cuadro 9.7: Desigualdad numérica y desigualdad condicional

Los alumnos que se centran en los símbolos para establecer diferencias y similitudes, como ejemplificamos en la figura 9.5 mediante la respuesta del Estudiante 10, entendemos que no interpretan claramente ambos conceptos sino que describen en palabras lo que se muestra en símbolos.



5 $1 \leq 5$ y $x \leq 5$ tienen la similitud de que ambos miembros son $\leq$, y que uno de los miembros, en ambas desigualdades, es 5. La diferencia es que un término, en una desigualdad, es x y en la otra 1. Pero x puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, ya que puede, a su vez, ser 1 o 5, como cualquier otro valor.

Figura 9.5: Respuesta del Estudiante 10 a la pregunta 5

Pregunta 6

Explica diferencias y similitudes entre una ecuación y una inecuación.

Con esta pregunta nos proponemos explorar en torno a las diferencias y similitudes que establecen los estudiantes en cuanto a los conceptos de ecuación e inecuación.

Observemos en el cuadro 9.8 que la respuesta que aparece con mayor frecuencia (un 48 %) es "no recuerda" o "no resuelve" esta cuestión.

Respuestas		**Frecuencia**	**Porcentaje N=21**
No responde		10	48 %
Similitudes N=11	En ambas se despeja x	1	5 %
	Ambas tienen incógnitas	3	14 %
	Ambas tienen dos miembros	2	10 %
	Ambas son desigualdades	1	5 %
Diferencias N=8	Conjunto solución	5	62 %
	Signo (En la E el signo es = y en I es $>, <, \leq, \geq$)	7	87 %

Cuadro 9.8: Diferencias y similitudes: ecuación (E) e inecuación(I)

En cuanto a las similitudes, los estudiantes mencionan que ambas tienen incógnitas y dos miembros; un estudiante encuentra en común que en los dos casos se despeja x, haciendo hincapié en el proceso de resolución; y otro alumno considera que ambas son desigualdades.

En lo que respecta a las diferencias, hay dos grupos. Por un lado, los que mencionan *"diferencias en el signo"*, es decir, reparan su atención en los símbolos que conectan sus miembros (un 87 % de los que mencionan diferencias). El otro grupo centra su atención en el resultado, manifiesta: "distinto el conjunto solución" o interpretan "la solución de ambas" (un 62 % de los que mencionan diferencias). Como se muestra en la figura 9.6, entienden que la ecuación tiene siempre solución única, en cambio la inecuación tiene siempre infinitas. Esta cuestión también la encontramos en algunas respuestas de los docentes.

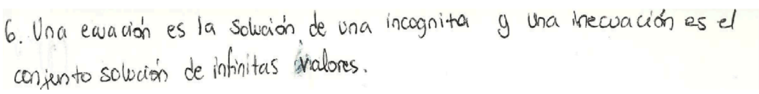

6. Una ecuación es la solución de una incognita y una inecuación es el conjunto solución de infinitas valores.

Figura 9.6: Respuesta del Estudiante 8 a la pregunta 6

Pregunta 7

Responde V o F y ejemplifica:

[a] *Algunas ecuaciones tienen infinitas soluciones.*

[b] *Algunas inecuaciones tienen una única solución.*

[c] *La ecuación siempre tiene solución única.*

[d] *Algunas inecuaciones no tienen solución.*

[e] *Las ecuaciones tienen siempre un número finito de soluciones.*

[f] *El conjunto solución de una inecuación es siempre un conjunto de valores.*

Conjeturamos que las particularidades del conjunto solución constituyen rasgos distintivos de los objetos mentales que han elaborado para cada uno de estos conceptos. El objetivo de esta consigna es indagar en torno a las ideas de los estudiantes relacionadas con el conjunto solución de las ecuaciones y las inecuaciones.

Podemos observar en el cuadro 9.9 que en lo que se refiere a la ecuación la mayoría responde correctamente respecto del conjunto solución, pero claramente existen dificultades en el caso del conjunto solución de la inecuación. Un 67 % considera que el conjunto solución de una inecuación es siempre un conjunto infinito, sin tener en cuenta que dicho conjunto pueda ser vacío, un conjunto unitario o un conjunto finito.

Respuesta	**Ecuación**						**Inecuación**					
	[a]		[c]		[e]		[b]		[d]		[f]	
	F	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**
Correcta	12	57 %	14	67 %	13	62 %	8	38 %	8	38 %	2	10 %
Incorrecta	9	43 %	6	29 %	4	19 %	10	48 %	9	43 %	14	67 %
No resuelve	0	0 %	1	5 %	4	19 %	3	14 %	4	19 %	5	24 %
Total	21	100 %	21	100 %	21	100 %	21	100 %	21	100 %	21	100 %

Cuadro 9.9: Conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones

9.3.3. Conclusiones de la Parte 1

En esta primera parte resaltamos una cuestión muy importante: en general los estudiantes consideran que toda *desigualdad matemática* es una *inecuación*. Además se manifiesta en los estudiantes que conceptualmente subordinan la inecuación a la ecuación, tanto para explicar el concepto como para ejemplificarlo. Encontramos una total correspondencia con el análisis realizado de las respuestas de los docentes en este último aspecto. También en cuanto al aspecto que resaltan del concepto inecuación aparece claramente una coincidencia ya que hacen énfasis en el conjunto solución o en los símbolos con mayor frecuencia.

Halmaghi (2011) presenta cinco concepciones de desigualdad en su estudio (ver Sección 2.3), advertimos que las imágenes de desigualdad que poseen los estudiantes de la muestra corresponden a la Concepción 1 que la autora describe como “la desigualdad como una extraña relación de una ecuación, como una especie de ecuación, por lo tanto el signo $<$ se sustituye por el $=$”.

Observamos una menor tasa de respuesta en los estudiantes cuando deben elaborar ejercicios o problemas que sean propios del tema desigualdades, de plantear situaciones modelizadas por medio de ellas. Finalmente, notamos que son minoría los estudiantes que interpretan a la desigualdad como una relación.

En la figura 9.7 podemos observar que un porcentaje importante de estudiantes, en su explicación del concepto de desigualdad, describen el fenómeno de *especificación*.

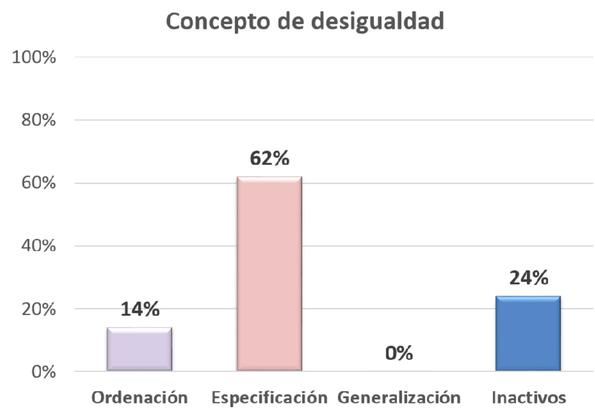


Figura 9.7: Fenómenos que describen los estudiantes

9.4. Parte 2: Problemas en cada marco

Cada una de las tres secciones siguientes del cuestionario responde a uno de los marcos que describimos en la sección 4.6 del capítulo 4.

- Sección 1: Marco algebraico.
- Sección 2: Marco funcional.
- Sección 3: Marco geométrico.

Organizamos el análisis de las respuestas según los tipos de tareas identificadas en la sección 4.5 del capítulo 4, a saber:

- *Tarea 1*: Comparar expresiones (CE).
- *Tarea 2*: Resolver inecuaciones (RI).
- *Tarea 3*: Demostrar desigualdades absolutas (DDA).

En el cuadro 9.10 describimos la organización de los problemas, clasificados según los marcos y el tipo de tarea:

Marcos	Secciones	Tipos de tareas CE	RI	DDA
Algebraico	1	**2.**[a][b][c]	**1.**[a][b][c][d][e]	**3.**[a][b]
Funcional	2	**1.**[a]	**1.**[b] **2.**[b]	**3.**[a]
Geométrico	3	**1.**[a] **2.**[a]	**1.**[b] **2.**[b]	**3.**[a][b]

Cuadro 9.10: Secciones y tipos de tareas

9.5. Sección 1: Marco algebraico

Los objetivos que perseguimos con esta sección son los siguientes:

- Indagar en las estrategias utilizadas en la resolución algebraica de las inecuaciones, en la comparación de expresiones y en la demostración de desigualdades absolutas.

- Indagar en los tipos de problemas que han resuelto alguna vez en su trayecto escolar y preuniversitario.

Los problemas incluidos en el cuestionario en el marco algebraico son los siguientes:

1. Resuelve las siguientes inecuaciones. Siendo x un número real:

   [a] $2x - 3 \leq x - 5$
   [b] $x^2 \geq 0$
   [c] $x^2 \leq 0$
   [d] $2x < 5x$
   [e] $x^2 < x$

2. Responde a las siguientes cuestiones detalladamente:

   [a] Sabiendo que $-1 < x < 1$, ¿entre qué valores está $2x + 4$?
   [b] Sabiendo que $-1 < x < 1$, ¿entre qué valores está x^2?
   [c] Si se tiene que $-3 < x - 1 < 5$ entonces se cumple que existen a y b reales tales que $a \leq x^2 + 1 < b$. Halla el valor de ab.

3. Responde a las siguientes cuestiones, justificando detalladamente en cada caso tus decisiones:

   [a] Sabiendo que $0 < a < b$, compara las expresiones a^2 y $a \cdot b$.
   [b] Sabiendo que $a > 0$ y $b > 0$ compara las expresiones: $(a + b)^2$ y $a^2 + b^2$.

9.5.1. Tarea 1: CE en el marco algebraico

Los problemas matemáticos que incluimos en el cuestionario para la tarea de comparar expresiones en el marco algebraico se encuentran en los ítems **2.** [**a**], [**b**] y [**c**] del cuestionario. Elegimos una expresión lineal y una cuadrática para comparar con valores numéricos, y por último, una expresión cuadrática con valores numéricos, pero en este caso el antecedente de la implicación es también una inecuación que deberán resolver.

Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro 9.11.

Respuesta	**Problema 2**					
	[a]		[b]		[c]	
	F	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**
No Resuelve	13	62 %	15	71 %	16	76 %
Incorrecta	7	33 %	5	24 %	5	24 %
Correcta	1	5 %	1	5 %	0	0 %
Total	21	100 %	21	100 %	21	100 %

Cuadro 9.11: Sección 1: Marco algebraico - Tarea 1(CE)

Observamos que la mayoría de los estudiantes (62 %) no responde las cuestiones planteadas.

Los que resuelven sustituyen los valores extremos de x; en el caso de que la función es creciente, el método funciona y se obtiene una respuesta correcta; pero en el caso de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $(-1, 1)$, este procedimiento no conduce a la respuesta correcta, como observamos en la respuesta del *Estudiante 7* en la figura 9.8:

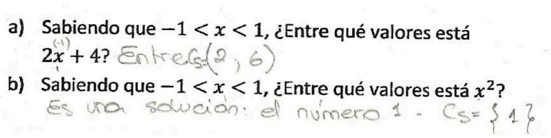


Figura 9.8: Respuesta del Estudiante 7 al problema **2.**[**a**] y [**b**]

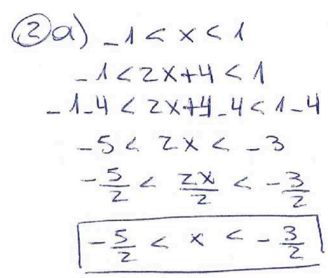


Figura 9.9: Respuesta del Estudiante 3 al problema **2.**[**a**]

Los que resuelven incorrectamente en el caso del problema **2.**[**a**] suponen que la función tiene la misma cota que la variable independiente, como mostramos en la figura 9.9, es el caso del Estudiante 3; o bien consideran que deben sumar 4 a la cota de la variable independiente para obtener la cota para $2x + 4$, como mostramos en la figura 9.10, es el caso del Estudiante 19. En este último ejemplo, interpretamos que resuelve las cuentas $-1+4$ y $1+4$, por lo que responde entre 3 y 5. Otra resolución incorrecta que detectamos es la sustitución de x por un valor intermedio del intervalo, como en la figura 9.11, el Estudiante 15 reemplaza por 0 en la expresión.

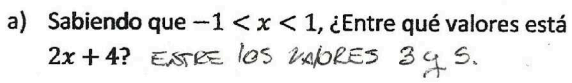
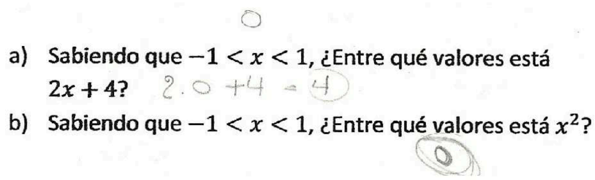

a) Sabiendo que $-1 < x < 1$, ¿Entre qué valores está $2x + 4$? ENTRE los VALORES 3 y 5.

Figura 9.10: Respuesta del Estudiante 19 al problema **2.**[**a**]


a) Sabiendo que $-1 < x < 1$, ¿Entre qué valores está $2x + 4$? $2 . 0 + 4 = 4$

b) Sabiendo que $-1 < x < 1$, ¿Entre qué valores está x^2? 0

Figura 9.11: Respuesta del Estudiante 15 al problema **2.**[**a**] y [**b**]

Cabe mencionar que el uso del singular en la consigna del problema **2.**[**c**] ("el valor") cuando se trata de infinitos valores, haya contribuido en el elevado porcentaje de alumnos que no aborda la tarea.

9.5.2. Tarea 2: RI en el marco algebraico

Los problemas matemáticos incluidos en el cuestionario para la tarea de resolución de inecuación en el marco algebraico se encuentran en los ítems **1.**[**a**], [**b**], [**c**], [**d**] y [**e**] del cuestionario. Elegimos dos inecuaciones lineales, dos cuadráticas muy particulares que necesitan un análisis de la situación más que un procedimiento algorítmico para su resolución y una última inecuación cuadrática más compleja de resolver. Entre las desigualdades condicionales ubicamos la desigualdad absoluta en el problema 1.[b] para analizar si la identifican y si mencionan alguna conclusión respecto de las anteriores.

Presentamos los resultados obtenidos en el cuadro 9.12.

Respuesta	**Problema 1**									
	[a]		[b]		[c]		[d]		[e]	
	F	P	F	P	F	P	F	P	F	P
No Resuelve	3	14 %	14	67 %	14	67 %	8	38 %	16	76 %
Resuelve con error	3	14 %	7	33 %	7	33 %	11	52 %	0	0 %
Resol. incompleta	0	0 %							5	24 %
Resol correcta	15	71 %	0	0 %	0	0 %	2	10 %	0	0 %
Total	21	100 %	21	100 %	21	100 %	21	100 %	21	100 %

Cuadro 9.12: Sección 1: Marco algebraico - Tarea 2 (RI)

Observamos en el cuadro 9.12 que en el primer ítem la mayoría de los estudiantes (71 %) resuelve correctamente la inecuación lineal, y además hay un número muy pequeño de estudiantes que no lo resuelve o manifiesta haberlo olvidado. Es decir, si sólo hubiéramos incluido este problema para la tarea de resolución de inecuación en el marco algebraico diríamos que la mayoría de los estudiantes de la muestra se ubica en el contexto algebraico y utiliza correctamente la desigualdad para organizarlo.

En cambio, en los cuatro ítems posteriores, las dificultades para resolver algebraicamente crecen enormemente. Las variantes de inecuaciones siguientes requieren otro tipo de análisis para su resolución. En el caso de la desigualdad absoluta observamos que los que la resuelven realizan el mismo tratamiento algebraico que en las anteriores, como mostramos en la figura 9.12:

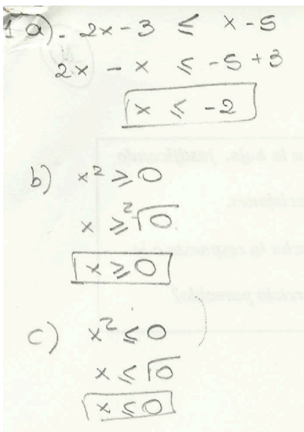


Figura 9.12: Respuesta del Estudiante 7 al problema **1.**[**a**], [**b**] y [**c**]

Observamos que si bien manejan los procedimientos algebraicos, según los resultados del ítem anterior, esta mecanización sin un análisis del sentido de los procedimientos, se constituye en un problema para pensar correctamente las demás cuestiones. La mayoría de los estudiantes en estos ítems no resuelve o intenta forzar mecanismos algorítmicos. Aparecen errores algebraicos y aritméticos en las resoluciones. Como por ejemplo en el Estudiante

20, que resuelve en forma incorrecta $0 : (-3)$ como -3 (error aritmético), y en el Estudiante 5, que resuelve en forma incorrecta $2x - x$ como $2x^2$ (error algebraico).

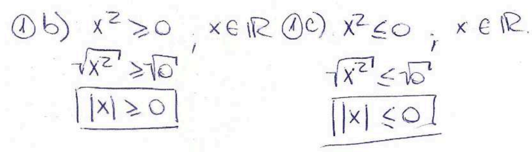


Figura 9.13: Respuesta del Estudiante 3 al problema **1.[b]** y **[c]**

Destacamos que ningún estudiante resuelve correctamente los problemas con inecuaciones cuadráticas, además observamos dificultades en el uso del valor absoluto. Algunos estudiantes reconocen que $\sqrt{x^2} = |x|$ pero no continuan la resolución, como mostramos en la figura 9.13. Interpretamos que al encontrarse con el valor absoluto no recuerdan o desconocen cómo resolver este tipo de inecuaciones.

9.5.3. Tarea 3: DDA en el marco algebraico

Los problemas matemáticos que incluimos en el cuestionario para la tarea de demostración de desigualdades absolutas en el marco algebraico se encuentran en los ítems **3.[a]** y **[b]** del cuestionario. El primer problema podrán abordarlo utilizando las propiedades del orden en los reales, y en el segundo deberán utilizar además el cuadrado de un binomio.

En el cuadro 9.13 mostramos los resultados obtenidos.

Respuesta	Problema 3			
	[a]		[b]	
	F	P	F	P
No Resuelve	18	86 %	19	90 %
Incorrecta	0	0 %	1	5 %
Correcta	3	14 %	1	5 %
Total	21	100 %	21	100 %

Cuadro 9.13: Sección 1: Marco algebraico - Tarea 3: DDA

En este caso el porcentaje de estudiantes que no resuelve es del 86 %. En el problema **3.[a]** son 3 estudiantes los que escriben bien la relación, y en el problema **3.[b]** es un solo estudiante. Destacamos que es este último el único que fundamenta con propiedades la relación que establece, como podemos observar en la figura 9.14.

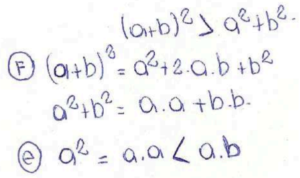


Figura 9.14: Respuesta del Estudiante 5 al problema **3.**[**a**] y [**b**]

9.5.4. Información adicional

En cada uno de los problemas de la sección 1, solicitamos a los estudiantes que indicaran si habían resuelto alguna vez en la escuela secundaria un problema parecido en una tabla que se adjuntaba al final. Los porcentajes resultantes se muestran en el cuadro 9.14.

Respuesta	**Problema 1**				**Problema 2**			**Problema 3**	
Resolví uno parecido	[a]	[b]	[c]	[d]	[a]	[b]	[c]	[a]	[b]
Sí	95	38	29	33	19	10	0	0	0
No	5	57	67	57	67	86	100	100	100
No Responde	0	5	5	10	14	5	0	0	0

Cuadro 9.14: Respuestas a ¿recuerda un problema parecido?

El problema que reconocen como resuelto alguna vez en la escuela es el **1.**[**a**]. Respecto de los restantes, la mayoría reconoce no haberlos resueltos en la escuela. Los porcentajes aumentan hasta los tres últimos, donde aparecen otros símbolos distintos de x que no reconocen haber trabajado en la escuela secundaria.

Nos damos cuenta de que es posible que los alumnos no recuerden con precisión los problemas que resolvieron en la escuela. Nuestra indagación apunta a identificar aquella tarea que les resulta más familiar en comparación con las demás. Claramente aquí reconocen a la resolución de inecuaciones lineales como una tarea habitual en la escuela.

9.5.5. Conclusiones de la Parte 2: Sección 1

En primer lugar, resaltamos que la mayoría de los estudiantes de la muestra resuelve correctamente en el marco algebraico la inecuación lineal.

En los ejercicios donde se requiere algún otro tipo de análisis, destacamos que la mayoría no recuerda o no resuelve situaciones en las que están involucradas las desigualdades en un entorno algebraico. Además, los que intentan resolver lo hacen con procedimientos algorítmicos propios de las ecuaciones, sin cuestionarse la posibilidad de validez de los mismos para el caso de las inecuaciones. Es decir, poseen una idea de la inecuación totalmente subordinada a la ecuación.

Los que interpretan las desigualdades como relaciones son muy pocos, en algunos problemas ninguno.

Respecto de las desigualdades absolutas, observamos que es importante habituar a los estudiantes a que justifiquen sus decisiones, ya que con las herramientas matemáticas que poseen es necesario iniciarlos en el camino hacia la demostración respaldando las afirmaciones con propiedades conocidas.

9.6. Sección 2: Marco funcional

Los objetivos que nos planteamos en esta sección son los siguientes:

- Indagar en las estrategias utilizadas en la resolución de inecuaciones, en la comparación de expresiones y en la demostración de desigualdades absolutas a partir de la información provista por las gráficas de funciones.
- Identificar si la visualización que se logra de esta manera ayuda a resolver las relaciones pedidas.
- Indagar en los tipos de problemas que han resuelto alguna vez en su trayecto escolar y preuniversitario.

Los problemas incluidos en el cuestionario para el marco funcional son los siguientes:

1. A partir de la siguiente gráfica (Figura 9.15) de la función $f(x) = x^2 - 4$, resuelve y explica detalladamente:

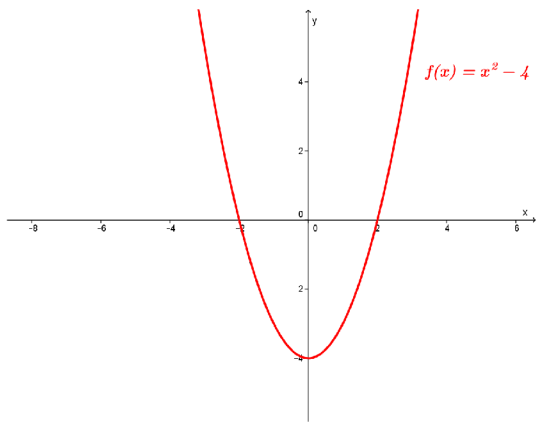


Figura 9.15: Ejercicio 1

[a] Si $-2 < x < 2$, ¿entre qué valores está $x^2 - 4$?

[b] Si $x^2 - 4 \geq 0$, ¿entre qué valores está x?

2. A partir de las gráficas (Figura 9.16) de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$, resuelve y explica detalladamente:

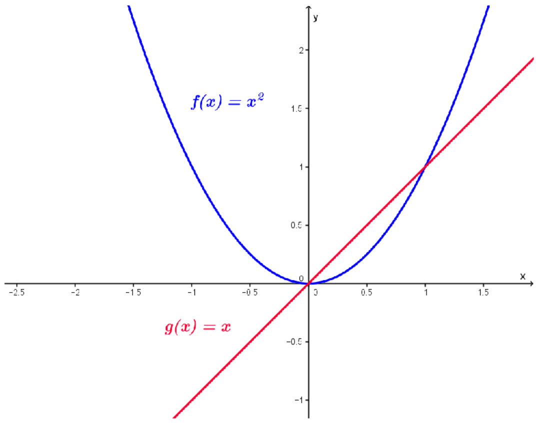


Figura 9.16: Ejercicio 2

[a] Si $x < 0$: compara x con x^2, justifica detalladamente tu decisión.

[b] Si $x \geq x^2$: ¿entre qué valores está x?

9.6.1. Tarea 1: CE en el marco funcional

Para la tarea de comparación de expresiones en el marco funcional incluimos en el cuestionario el problema **1. [a]**. En este primer problema elegimos presentar la gráfica de una sola función. Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 9.15

Respuesta		**1.[a]**	
		F	**P**
No resuelve		8	42 %
Incorrecta	Resolución algebraica	2	10 %
	Resolución funcional	3	17 %
	Sustitución en los extremos	2	10 %
	Tabla de valores	3	17 %
Correcta		1	5 %
Total		19	100 %

Cuadro 9.15: Sección 2: Marco funcional - Tarea 1 (CE)

Un 42 % no resuelve el ejercicio o manifiesta no recordarlo.

De los estudiantes que resuelven en forma incorrecta, algunos lo hacen algebraicamente (el 10 %)—con los mismos inconvenientes que describimos en el caso de las inecuaciones cuadráticas en la Sección 1 en la tarea RI—; otros evalúan en los extremos (10 %); y un grupo de ellos realiza tablas de valores. Consideramos que la construcción de una tabla constituye una estrategia de resolución habitual, que en este caso ha utilizado el 17 % de los estudiantes, como por ejemplo el Estudiante 12, cuya respuesta se observa en la figura 9.17. Si bien podrían utilizar los valores que obtienen de las tablas, en este caso interpretamos que este recurso responde a un estereotipo de procedimiento escolar utilizado para la representación de la gráfica de una función, ya que no es aprovechado para abordar con éxito la resolución de los problemas.

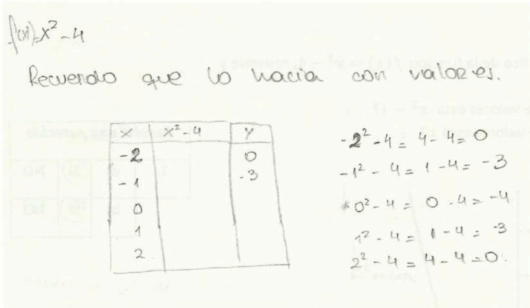


Figura 9.17: Respuesta del Estudiante 12 al problema **1.[a]**

Sólo un estudiante utiliza la gráfica para resolver esta actividad. Si bien la respuesta correcta al problema es $-4 \leq x^2 - 4 < 0$ pensamos que logra ubicarse en el contexto funcional, como mostramos en la figura 9.18:

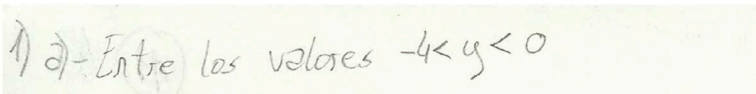


Figura 9.18: Respuesta del *Estudiante 23* al problema **1.[a]**

9.6.2. Tarea 2: RI en el marco funcional

Para la tarea de resolución de inecuación en el marco funcional incluimos en el cuestionario los problemas **1.[b]** y **2.[b]**. En el primer problema se presenta la gráfica de una función, mientras que en el segundo aparecen las gráficas de dos funciones. Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 9.16:

Respuesta		**1.[b]**		**2.[b]**	
		F	P	F	P
No resuelve		4	22 %	13	68 %
Incorrecta	Resolución algebraica	10	53 %	0	0 %
	Resolución funcional	3	17 %	5	26 %
Correcta		2	10 %	1	6 %
Total		19	100 %	19	100 %

Cuadro 9.16: Sección 2: Marco funcional - Tarea 2 (RI)

En el problema **1.[b]**, como observamos en el cuadro 9.16, la mayoría de los estudiantes resuelve algebraicamente, cometiendo errores en el uso del valor absoluto (como hemos mencionado anteriormente), y un 22 % de los jóvenes no los resuelve. En el problema **2.[b]** aumenta notablemente el porcentaje de estudiantes que no resuelve, en tanto que disminuye el porcentaje de estudiantes que resuelve algebraicamente. Interpretamos que esto se debe a que la resolución algebraica en este caso es más compleja, y a la presencia de las gráficas de dos funciones para analizar.

Mostramos en las figuras 9.19 y 9.20 las respuestas de los estudiantes que utilizaron la gráfica para resolver el problema interpretando en forma correcta las desigualdades en el contexto funcional:

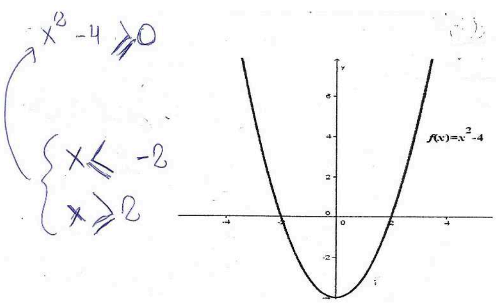


Figura 9.19: Respuesta del Estudiante 5 al problema **1.[b]**

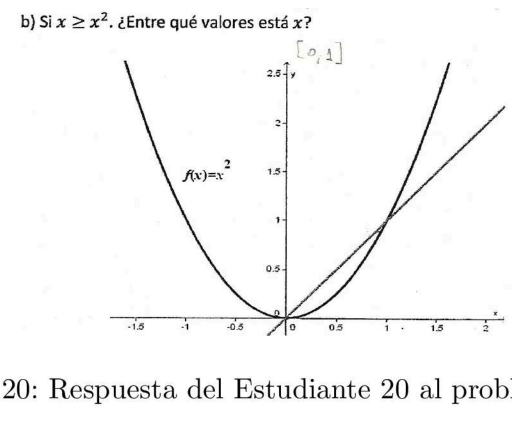


Figura 9.20: Respuesta del Estudiante 20 al problema **2.[b]**

9.6.3. Tarea 3: DDA en el marco funcional

Para la tarea de resolución de inecuación en el marco funcional incluimos en el cuestionario el problema **2.**[**a**]. Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 9.17.

Respuesta	**2.**[**a**]	
	F	P
No resuelve	11	58 %
Incorrecta	3	11 %
Correcta	1	5 %
Compara signos	4	21 %
Total	19	100 %

Cuadro 9.17: Sección 2: Marco funcional - Tarea 3: DDA

La mayoría de los estudiantes (68 %), como se muestra en el cuadro 9.17, no resuelve este problema. Un solo estudiante responde correctamente, mostramos en la figura 9.21 su respuesta:

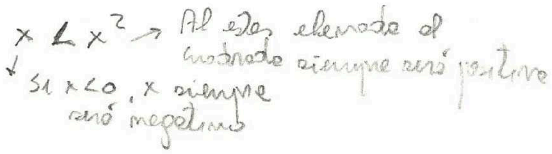


Figura 9.21: Respuesta del Estudiante 20 al problema **2.**[**a**]

Es interesante resaltar que el término “compara” del enunciado fue abordado por algunos estudiantes a partir de la descripción de diferencias en los signos entre x y x^2, ya que mencionan que x es negativo y x^2 es positivo; otros refieren a que la función $f(x) = x$ se encuentra en el tercer cuadrante, mientras que la función $g(x) = x^2$ en el segundo (entendemos que están describiendo aquí las gráficas de las funciones), como mostramos en la figura 9.22. Esto nos da indicios de que la tarea de comparar expresiones no es habitual en el trabajo matemático de los estudiantes.

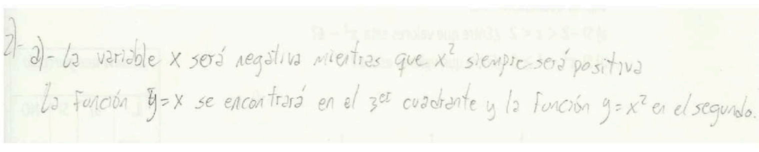


Figura 9.22: Respuesta del Estudiante 23 al problema **2.**[**a**]

9.6.4. Información adicional

En el cuadro 9.18 resumimos la información referida a los porcentajes obtenidos respecto de si habían resuelto alguna vez en la escuela secundaria un problema parecido:

Respuesta	**Problema 1**		**Problema 2**	
Resolví uno parecido	[a]	[b]	[a]	[b]
Sí	95	38	29	33
No	5	57	67	57
No responde	0	5	5	10

Cuadro 9.18: Sección 3: Recuerda un problema parecido

Los estudiantes reconocen mayoritariamente haber resuelto problemas similares al **1.[a]**, en tanto que la mayoría afirma no haber trabajado problemas análogos a los restantes de esta sección.

9.6.5. Conclusiones de la Parte 2: Sección 2

En esta sección podemos destacar que la mayoría de los estudiantes no recuerda o no resuelve situaciones en las que están involucradas las desigualdades en un entorno funcional.

Además, los que intentan resolver lo hacen con procedimientos propios de las ecuaciones, sin cuestionarse la posibilidad de validez de los mismos para el caso de las inecuaciones. No utilizan el entorno funcional, sus procedimientos se restringen nuevamente a lo algebraico.

El estudiante que interpreta las desigualdades en el marco funcional, logra resolver inecuaciones cuadráticas que le resultaron complejas de abordar en el marco algebraico (puesto que no resuelve los problemas **1.[b]**, **[c]** y **[d]** de la Sección 1) es el caso del Estudiante 20.

9.7. Sección 3: Marco geométrico

Los objetivos que perseguimos en esta sección son los siguientes:

- Indagar en las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas incluidos para las distintas tareas a partir de la información provista por representaciones geométricas.
- Identificar si la visualización que se logra de esta manera ayuda a resolver las relaciones pedidas.
- Indagar en los tipos de problemas que han resuelto alguna vez en su trayecto escolar y preuniversitario.

Los problemas incluidos en el cuestionario para el marco geométrico se muestran a continuación:

1. A partir de la figura 9.23, sabiendo que el punto D se mueve de C a B.

   [a] Halla el valor máximo de m para el cual es verdadera la siguiente desigualdad:

$$x - \sqrt{x} \geq m$$

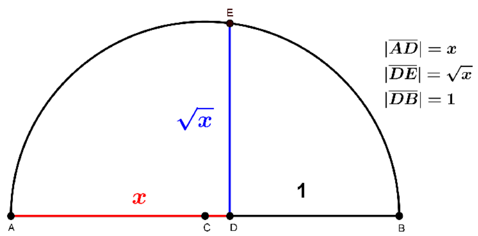


Figura 9.23: Problema 1 **[a]**

   [b] Halla los valores de x para los que se cumple la relación obtenida en **[a]**.

2. A partir de la figura 9.24.

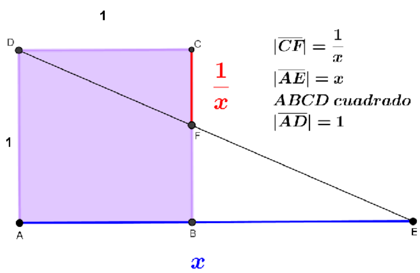


Figura 9.24: Problema 1 **[b]**

a) Halla el valor máximo de m para el cual es verdadera la siguiente desigualdad:

$$x + \frac{1}{x} \geq m$$

b) Halla los valores de x para los que se cumple la relación encontrada en **[a]**.

3. A partir de la siguiente representación geométrica (Figura 9.25), relaciona las expresiones indicadas. Justifica detalladamente en cada caso tus decisiones.

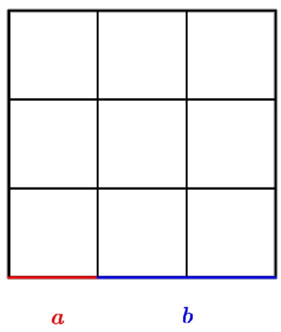


Figura 9.25: Problema 3

[a] Sabiendo que $0 < a < b$ compara las expresiones a^2 y b^2.

[b] Sabiendo que $0 < a < b$ compara las expresiones a^2 y $a \cdot b$.

[c] Sabiendo que $a > 0$ y $b > 0$, compara las expresiones $(a+b)^2$ y $a^2 + b^2$.

[d] Sabiendo que $a > 0$ y $b > 0$, compara las expresiones $\sqrt{ab}$ y $\frac{a+b}{2}$.

9.7.1. Tarea 1: CE en el marco geométrico

Para la tarea de comparación de expresiones en el marco geométrico incluimos en el cuestionario los problemas **1.**[a] y **2.**[a].

Destacamos que para abordar la resolución de estos problemas es necesario contar con algunos contenidos previos de geometría. En el caso del problema **1.**[a], comparando las longitudes de los segmentos con la del radio se concluye que $x - \sqrt{x} \geq 0$. En el caso del problema **2.**[a], comparando la suma de las áreas de los triángulos cuyos lados miden x y 1 unidad, y $\frac{1}{x}$ y 1 unidad, respectivamente, con el área del cuadrado de lado unidad, se concluye que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Ningún estudiante resuelve estos problemas. Entendemos que este tipo de consigna no es habitual en su historia escolar. El enunciado resultó muy complejo para los estudiantes (tanto en la búsqueda de un *máximo* valor para el parámetro como en la necesidad de *encontrar la relación*). Además, a ello se agrega el desconocimiento que manifiestan de los contenidos de geometría.

9.7.2. Tarea 2: RI en el marco geométrico

Para la tarea de comparación de expresiones en el marco geométrico incluimos en el cuestionario los problemas **1.[b]** y **2.[b]**. La resolución consiste en descubrir la condición para la variable x que aparece claramente en el gráfico, en ambos casos es $x \geq 1$. Sostenemos que como consecuencia de no poder abordar los problemas de la tarea anterior (CE) los estudiantes no resuelven el problema completo dado que ninguno responde a estos problemas.

9.7.3. Tarea 3: DDA en el marco geométrico

Respuesta		**3.[a]**		**3.[b]**		**3.[c]**		**3.[d]**	
		F	P	F	P	F	P	F	P
No Resuelve		10	53 %	12	63 %	12	63 %	15	79 %
Correcta	Sin Resol.	2	10 %	1	5 %	1	5 %	0	0 %
	Resol. geom.	3	16 %	3	16 %	2	10 %	0	0 %
	Resol. alg.	1	5 %	0	0 %	0	0 %	0	0 %
Incorrecta		0	0 %	1	5 %	1	5 %	4	21 %
No compara		3	16 %	2	10 %	3	16 %	0	0 %
Total		19	100 %	19	100 %	19	100 %	19	100 %

Cuadro 9.19: Sección 3: Marco geométrico - Tarea 3: DDA

En el caso de la tarea 3 (DDA), observamos en el cuadro 9.19 que en algunas situaciones la representación geométrica favorece la representación visual de la cuestión planteada, y algunos estudiantes logran utilizar el marco geométrico para justificar utilizando la comparación de áreas de las figuras. Como mostramos en las figuras 9.26 y 9.27, en este último caso el Estudiante 7 agrega a todas las respuestas la posibilidad de la igualdad (cuestión que no se verifica), pero la respuesta es correcta.

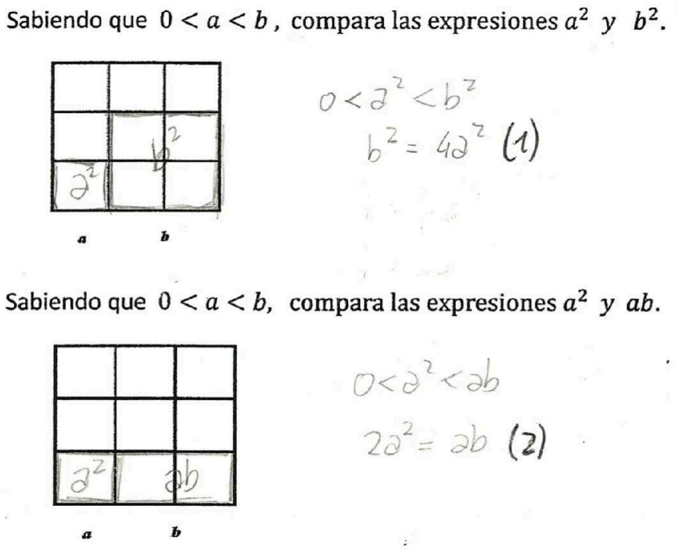


Figura 9.26: Respuesta del Estudiante 23 al problema **3.**[**a**]y [**b**]

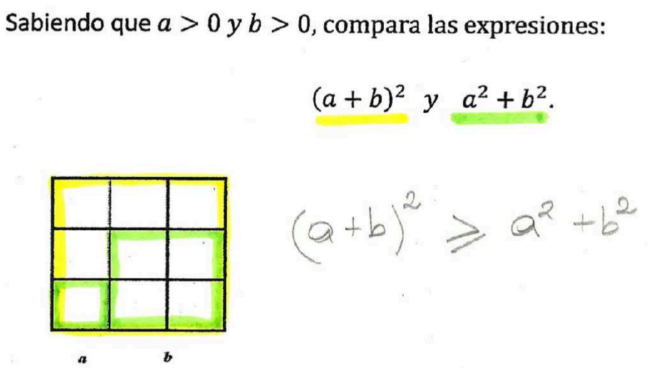


Figura 9.27: Respuesta del Estudiante 7 al problema **3.**[**c**]

En estos problemas se reitera el inconveniente con el término “compara” del enunciado, algunos estudiantes visualizan claramente la situación geométrica pero no realizan la comparación (ver figura 9.28). Está claro que no interpretan lo que significa en matemática comparar dos expresiones. Esto vuelve a darnos evidencia de que esta tarea no es habitual en el trabajo con desigualdades en general, ni en temas específicos de geometría en particular.

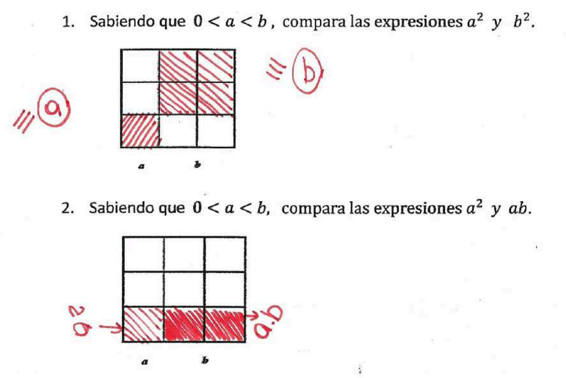


Figura 9.28: Respuesta del Estudiante 5 al problema **3.**[**a**] y [**b**]

9.7.4. Información adicional

La información referida a si habían resuelto alguna vez en la escuela secundaria un ejercicio parecido la resumimos en el siguiente cuadro (en el que los valores se expresan en porcentajes):

Respuesta	**Problema 1**		**Problema 2**		**Problema 3**			
Resolví uno parecido	[a]	[b]	[a]	[b]	[a]	[b]	[c]	[d]
Sí	0	0	0	0	5	5	5	5
No	100	100	100	100	79	79	79	79
No responde	0	0	0	0	16	16	16	16

Cuadro 9.20: Sección 3: Recuerda un problema parecido

La mayoría de los estudiantes reconoce que no resolvió en la escuela secundaria problemas de este tipo, como mostramos en el cuadro 9.20.

9.7.5. Conclusiones de la Parte 2: Sección 3

En esta Sección observamos que la mayoría de los estudiantes no resuelve los problemas, en algunos casos el porcentaje llega a un 100 %. Algunos de los que resuelven intentan utilizar procedimientos algebraicos y no hacen uso de la gráfica que se muestra.

Otra cuestión que aparece es la interpretación geométrica correcta de las expresiones, pero la ausencia de comparación (ya sea de longitudes de segmentos o de áreas de figuras). Los estudiantes no logran interpretar lo que se solicita en el enunciado mediante el uso del término “compara”. Insistimos en que es posible que esta tarea no sea habitual para los estudiantes y toman el significado cotidiano de la expresión y no el matemático, estableciendo una relación entre los objetos (ya sea de igualdad o de desigualdad). También podemos analizar que en este trabajo de comparación de longitudes y áreas se agregan las dificultades que se evidencian por el escaso espacio que se le otorga al trabajo geométrico en la escuela, como sugiere Itzcovich (2005).

Es muy reducido el número de estudiantes que podríamos decir que están ubicados en la situación, en el contexto geométrico, y logran expresar la desigualdad pedida.

La visualización que se logra con el marco geométrico en algunos estudiantes, parece no ayudar demasiado a mejorar su desempeño, si tomamos los resultados del mismo problema en el entorno algebraico. Si bien disminuyen los porcentajes de no resueltos, son muy pocos los que interpretan geométricamente la situación y sacan provecho de ello para resolverla.

9.8. Cruce de datos

9.8.1. Marcos en cada tarea

Para comparar las producciones de los estudiantes en cada una de las tareas, tomamos un problema representativo de cada una y analizamos el uso en cada marco. Para seleccionar el problema de cada tipo de tarea tuvimos en cuenta que haya sido resuelto correctamente por la mayor cantidad de estudiantes.

Para la tarea 1 (CE) comparamos el porcentaje de estudiantes que resolvió correctamente el problema **2.**[**a**] del marco algebraico, el **1.**[**a**] del marco funcional, y el **1.**[**a**] del marco geométrico. Mostramos los resultados en la figura 9.29.

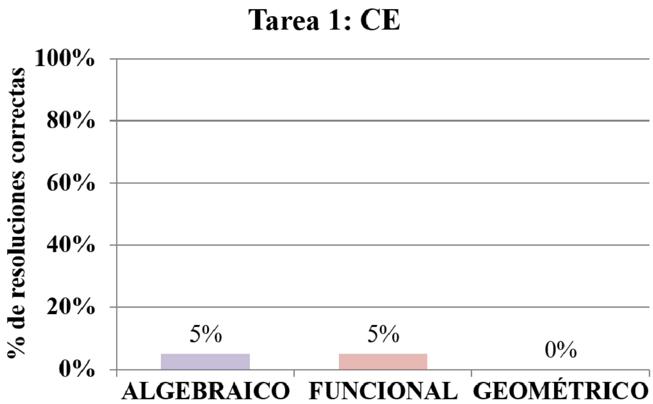


Figura 9.29: Tarea 1 (CE)

Para la tarea 2 (RI) comparamos el porcentaje de estudiantes que resolvió correctamente el problema **1.**[**a**] del marco algebraico, el **1.**[**b**] del marco funcional, y el **1.**[**b**] del marco geométrico. Los resultados se visualizan en la figura 9.30.

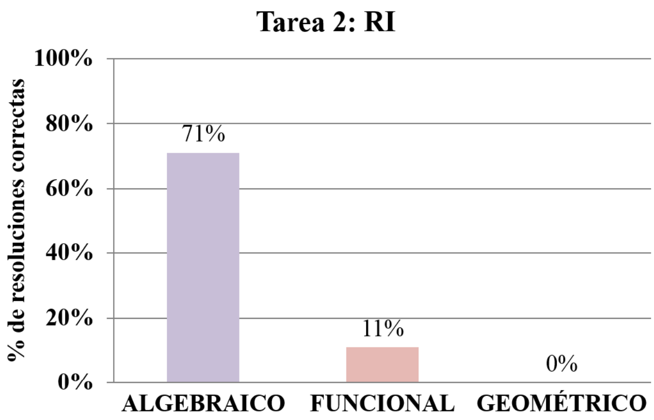


Figura 9.30: Tarea 2 (RI)

Para la tarea 3 (DDA) comparamos el porcentaje de estudiantes que resolvió correctamente el problema **3.**[**a**] del marco algebraico, el **2.**[**a**] del marco funcional, y el **3.**[**a**] del marco geométrico. Observamos los resultados en la figura 9.31.

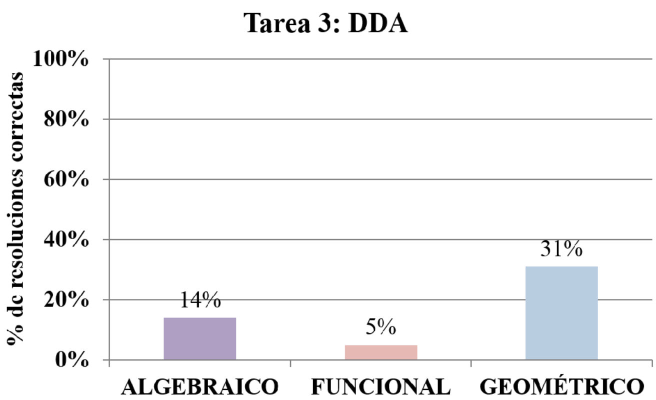


Figura 9.31: Tarea 3 (DDA)

Observando estas comparaciones surge claramente la presencia de la tarea 2 (RI) en el marco algebraico como la mejor resolución lograda por los estudiantes, en comparación con los otros marcos.

En cuanto a las otras tareas, son muy bajos los porcentajes de estudiantes que las abordan. En el caso de la tarea 1 (CE) algunos estudiantes logran resolverla en los marcos algebraico y/o funcional. En el caso de la tarea 3 (DDA) las mejores resoluciones se dan en el marco geométrico.

9.8.2. Tareas en cada marco

Para comparar las producciones de los estudiantes en cada marco, seleccionamos para cada tipo de tarea los problemas que fueron resueltos correctamente por el mayor número de estudiantes.

Para el marco algebraico tomamos para la tarea 1 (CE) el problema **2.**[**a**], para la tarea 2 (RI) el problema **1.**[**a**], y para la tarea 3 (DDA) el problema **3.**[**a**]. Observamos los resultados en la figura 9.32:

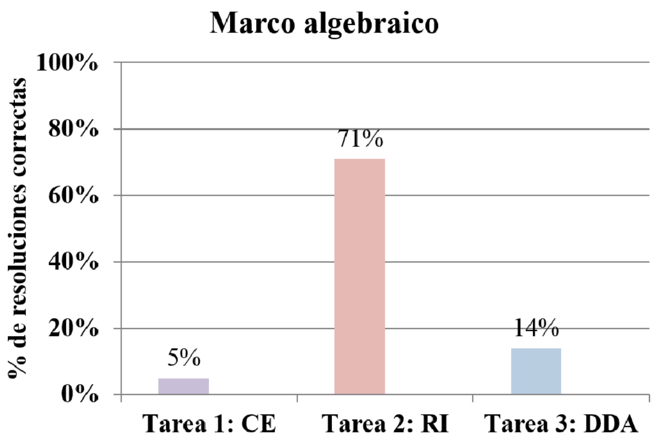


Figura 9.32: Marco Algebraico

Para el marco funcional tomamos para la tarea 1 (CE) el problema **1.**[**a**], para la tarea 2 (RI) el problema **1.**[**b**], y para la tarea 3 (DDA) el problema **2.**[**a**]. Mostramos los resultados en la figura 9.33:

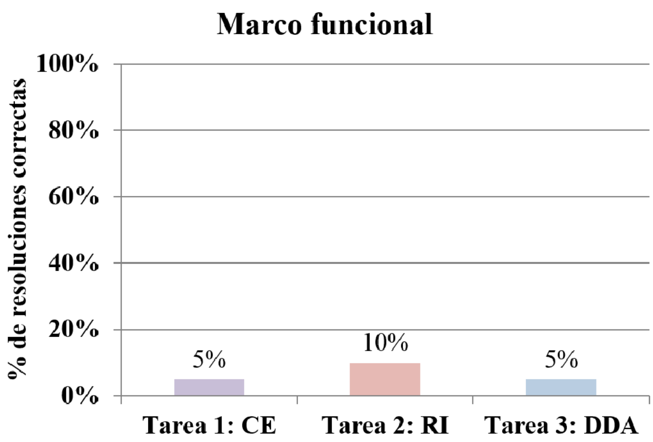


Figura 9.33: Marco funcional

Para el marco geométrico tomamos para la tarea 1 (CE) el problema

1.[**a**], para la tarea 2 (RI) el problema **1.**[**b**], y para la tarea 3 (DDA) el problema **3.**[**a**]. Mostramos los resultados en la figura 9.34:

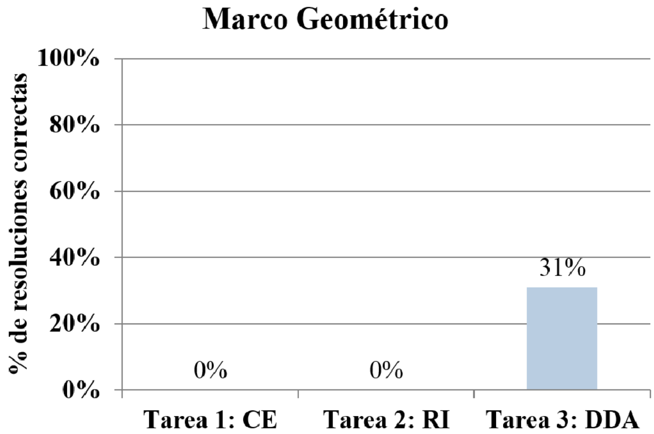


Figura 9.34: Marco geométrico

Observando estas comparaciones nuevamente se destaca la presencia de la tarea 2 (RI) en el marco algebraico como la mejor resolución lograda por los estudiantes, en comparación con las otras. Además, esta tarea fue resuelta por un 10 % de los estudiantes en el marco funcional y ninguno en el marco geométrico.

En cuanto a las otras tareas, son muy bajos los porcentajes de estudiantes que las abordan. Los que logran interpretarlas en el contexto funcional o geométrico pueden resolver incluso cuestiones que les resultan complejas en el marco algebraico.

En el caso del marco geométrico, la tarea 3 (DDA) ha sido abordada por un porcentaje muy bajo pero mayor que en los otros marcos, como se observa en la figura 9.34. Nuevamente pensamos que quienes utilizan adecuadamente este marco logran abordar problemas que en el marco algebraico resultan complejos.

9.9. Caracterización de las producciones

En este apartado se realiza una caracterización de cada estudiante a partir de su desempeño a lo largo de los problemas incluidos en el cuestionario.

Para realizar el análisis tenemos en cuenta las siguientes categorías:

Inertes: no resuelven, manifiestan que no recuerdan cómo hacerlo, o responden a muy pocas cuestiones, y las restantes no las resuelven. Por esa razón no disponemos de elementos suficientes para confirmar su pertenencia a las demás categorías.

Rituales: hacen uso de algoritmos que repiten y adoptan forzadamente para la situación que deben enfrentar, sin interpretar la misma en el contexto que se encuentra. Realizan procedimientos algorítmicos propios de una rutina en el proceso de resolución de la ecuación que se trasladan idénticamente a las desigualdades. Por ejemplo: para el caso del problema **1.[b]** de la Sección 1, una resolución observada en los estudiantes es la siguiente: $x^2 \geq 0$, $x \geq \sqrt{0}$, $x \geq 0$.

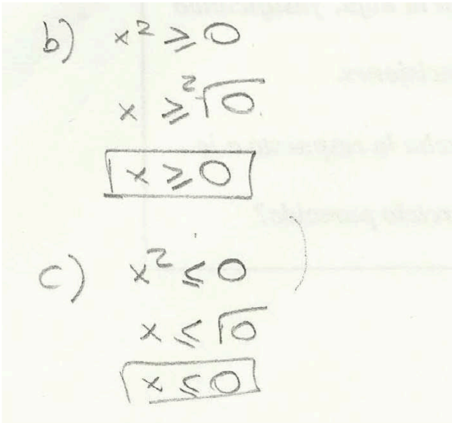


Figura 9.35: Resolución del Estudiante 7 problemas **1.[b]** y **[c]** Sección 1

Esta resolución consiste en aplicar la raíz cuadrada a ambos miembros, como se muestra en la figura 9.35, desconociendo que esta transformación no conduce a obtener una inecuación equivalente a la original. Además, cometen el error de resolver $\sqrt{x^2} = x$, sin tener en cuenta que x es un número real, por lo tanto corresponde $\sqrt{x^2} = |x|$. De este modo, concluyen que el conjunto solución son todos los reales que cumplen $x \geq 0$.

Otro ejemplo típico de resolución se presenta en el problema **1.[c]** de la Sección 1: en el ejercicio $x^2 \leq 0$ los estudiantes resuelven de la misma manera que en el caso anterior (ver respuesta del Estudiante 7 en la figura 9.35), y concluyen que el conjunto solución son todos los reales menores o iguales a 0.

Avanzados: interpretan la desigualdad sin resolverla en el marco algebraico; en el marco funcional utilizan las gráficas para responder a los problemas; o logra visualizar las comparaciones en el marco geométrico. Demuestra un grado mayor de abstracción en el análisis y en la interpretación de la situación. Por ejemplo, ver en las figuras 9.14, 9.18, 9.21 y 9.27 las respuestas de los *Estudiantes 5*, *23*, *20* y *7*.

De acuerdo a la categorización realizada y habiendo analizado el desempeño de cada estudiante en las tareas presentadas, mostramos en el cuadro 9.21 una clasificación de los estudiantes (columna E) según las categorías (columna C) señaladas:

E	C	Fundamento
1	R	Resuelve algorítmicamente en el marco algebraico, algebraicamente en el marco funcional, la tarea DDA en el marco geométrico.
2	R	Resuelve algebraicamente en el marco funcional. En los demás marcos no resuelve.
3	R	Resuelve algorítmicamente en el marco algebraico, algebraicamente en el marco funcional. En el marco geométrico no resuelve.
4	I	Resuelve muy pocos ejercicios.
5	A	Resuelve las inecuaciones lineales y la DDA en el marco algebraico, la tarea RI y DDA en el marco funcional, visualiza pero no realiza las comparaciones en la tarea DDA en el marco geométrico. Esta producción demuestra un grado de interpretación y abstracción superior.
6	R	Resuelve algorítmicamente en el marco algebraico.
7	A	Resuelve tareas RI, CE y DDA en el marco algebraico, en el marco funcional utiliza las gráficas para responder en la tarea DDA y RI y en la tarea DDA; logra visualizar las comparaciones de las tareas DDA en el marco geométrico. Esta producción demuestra un grado de interpretación y abstracción superior.
8	R	Resuelve algorítmicamente las tareas de RI, con errores algebraicos y aritméticos en el marco algebraico y no resuelve las demás tareas. Si bien trabajó sólo en este marco, no muestra otra interpretación que no sea la algorítmica.
9	I	Resuelve muy pocos problemas.
10	R	Resuelve algorítmicamente las tareas de RI en el marco algebraico, no resuelve las demás tareas. Si bien trabajó sólo en este marco, no muestra otra interpretación que no sea la algorítmica.
11	R	Resuelve algorítmicamente las inecuaciones lineales de las tareas de RI y la tarea DDA en el marco algebraico, algebraicamente en el marco funcional.
12	R	Resuelve algorítmicamente las tareas de RI en el marco algebraico, la tarea CE en el marco funcional con una tabla de valores, pero no interpreta lo hallado. No resuelve en el marco geométrico.
13	R	Resuelve algorítmicamente las inecuaciones lineales de las tareas de RI en el marco algebraico. No resuelve en los otros marcos. Si bien trabajó sólo en este marco no muestra otra interpretación que no sea la algorítmica.
14	R	Resuelve algorítmicamente las inecuaciones lineales de las tareas de RI en el marco algebraico. En el marco funcional no resuelve las tareas. En la tarea DDA, logra visualizar las comparaciones de las tareas DDA en el marco geométrico.
15	R	Resuelve algorítmicamente en el marco algebraico. En el marco funcional no resuelve las tareas.
16	I	Resuelve muy pocos problemas.
17	I	Resuelve muy pocos problemas.
18	I	Resuelve muy pocos problemas.
19	R	Resuelve algorítmicamente las inecuaciones lineales de las tareas de RI, con errores algebraicos y aritméticos en el marco algebraico. En el marco funcional no resuelve las tareas. En la tarea DDA, visualiza pero no realiza las comparaciones en la tarea DDA en el marco geométrico.
20	A	Resuelve algorítmicamente las inecuaciones lineales de las tareas de RI, con errores algebraicos y aritméticos en el marco algebraico. En el marco funcional presenta una tabla de valores, pero no interpreta lo hallado y resuelve las tareas DDA y RI. En el marco geométrico trabaja algebraicamente y resuelve un problema de la tarea DDA. Esta producción demuestra un grado de interpretación y abstracción superior.
21	R	Resuelve algorítmicamente las tareas de RI en el marco algebraico. En el marco funcional presenta una tabla de valores, pero no interpreta lo hallado. No resuelve las demás tareas. Si bien trabajó sólo en este marco, no muestra otra interpretación que no sea la algorítmica.
22	R	Resuelve algebraicamente la tarea RI en el marco funcional y la tarea DDA en el marco geométrico.
23	A	Resuelve las tareas CE, RI y DDA en el marco funcional y la tarea DDA en el marco geométrico.

Cuadro 9.21: Categorización de estudiantes en las tareas. I: Inerte; R: Ritual; A: Avanzado

En la figura 9.36 visualizamos la distribución de la muestra según cada categoría:

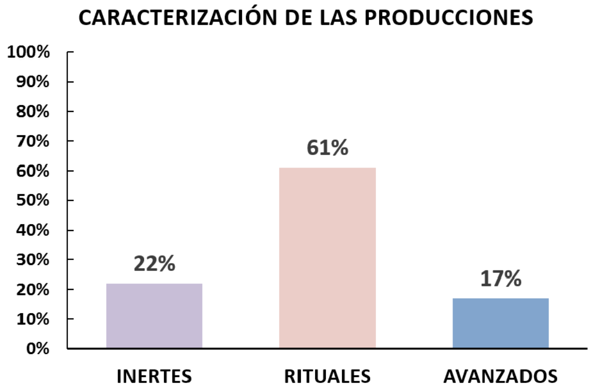


Figura 9.36: Caracterización de las producciones, I: Inertes; R: Rituales; A: Avanzados

9.10. Conclusiones

En lo que refiere al concepto de *desigualdad*, un 62 % de los estudiantes restringe las *desigualdades* a las *inecuaciones*. Hace referencia claramente al fenómeno de *especificación*. Además, un 58 % de ellos describe la *inecuación* en comparación con la *ecuación*, establecen diferencias en los símbolos o en el conjunto solución. Encontramos una total correspondencia con el análisis realizado de las respuestas de los docentes en las dos últimas cuestiones.

Según Perkins (2010), el conocimiento inerte consiste en conocimiento almacenado en el altillo de la mente, disponible sólo mediante esfuerzos deliberados para traerlo y desempolvarlo. Como menciona el autor, el conocimiento inerte está allí pero no se utiliza, puede verse como un problema de transferencia de aprendizaje. No se trata de que el problema sea difícil, complejo o complicado. Más bien, la resolución del problema requiere hacer la conexión correcta con algo que uno ya conoce perfectamente bien. A menudo esa conexión no llega a hacerse. El conocimiento es inerte; está allí pero no se utiliza. Las personas no logran activar el conocimiento que han adquirido en algún otro contexto.

Consideramos que el grupo que se ubica en la categoría de *Inerte* lo es en cuanto que formaría parte de los estudiantes que poseen un conocimiento *Inerte* sobre las desigualdades, ya que deciden no resolver el problema. Este grupo pertenece a la mayoría en algunas tareas.

Para describir el conocimiento *Ritual*, el autor utiliza como ejemplo el relato de un alumno de escuela primaria: "Sé qué hacer mirando los ejemplos. Si hay solo dos números, resto. Si hay muchos números, sumo. Si hay sólo dos números y uno es menor que el otro, es un problema difícil. Divido y veo si me da un número exacto; si no, multiplico" (p. 120).

Comenta el autor que esta estrategia de resolución de problemas es clara, elocuente y extraordinariamente eficaz para abordar problemas aritméticos.

Sostiene que es claramente inteligente, pero no inteligente en el sentido que queremos. Se trata de un conocimiento que tiene un carácter superficial carente de sentido. Aclara que el conocimiento ritual se parece precisamente a un ritual: se oprime un botón de forma mecánica para obtener una cierta solución; es el modo en que se supone debemos responder cuando alguien formula un cierto tipo de pregunta. Finalmente comenta que todos los educadores esperan algo más profundo que esto, pero gran parte de la práctica educativa es condescendiente con el conocimiento ritual, valorándolo como suficientemente bueno. Considera que en ocasiones el conocimiento ritual se convierte en el contrato social implícito entre docentes y alumnos. Ambos aceptan el trato de mantener las cosas simples y sencillas.

Acordamos que los estudiantes que ubicamos en la categoría *Ritual* tienen conocimientos *Rituales*, sus producciones se fundamentan en las rutinas de resolución algebraica, que intentan sostener como herramienta de fundamentación en todos los problemas. Esto no les permite interpretar el sentido de los fenómenos en cada uno de los marcos presentados.

Otros investigadores como Malara, Brandoli y Fiori (1999), citados por Alvarenga (2006), observaron errores similares cometidos por estudiantes italianos y brasileros, tales como: resolver una inecuación como si fuera una ecuación; emplear transformaciones en las inecuaciones, sin tener control de la validez de esas transformaciones. Tsamir y Almog (2001) encuentran que las manipulaciones algebraicas fueron el método más frecuentemente utilizado por estudiantes israelíes, estableciendo analogías inapropiadas entre los procesos de resolución de ecuaciones e inecuaciones. Esta cuestión también fue observada en los estudios de Garrote, Hidalgo y Blanco (2004).

El objeto mental *desigualdad* que poseen los estudiantes que tienen conocimiento *Inerte* o *Ritual* interpretamos que es "pobre", ya que no les permite pensar alguna estrategia para abordar el problema en los distintos marcos en los que se presenta. Observemos en el siguiente diagrama en la figura 9.37 lo expresado.

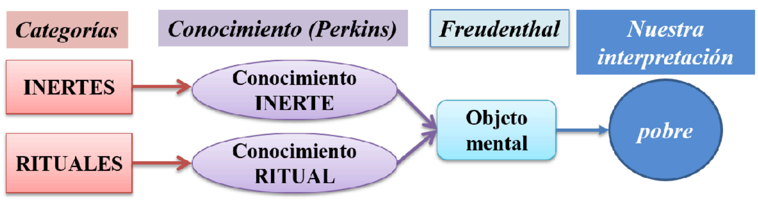


Figura 9.37: Tipo de conocimiento de la mayoría de los estudiantes

En cuanto a los estudiantes categorizados como *Avanzados* han logrado formar un objeto mental más elaborado, más "rico", con el cual se adaptan a los distintos marcos y les permite manejarse con más soltura en estas situaciones.

El análisis de las producciones de los estudiantes nos permitió comprobar en parte la tercer hipótesis que nos planteamos en esta investigación, recordémosla:

Hipótesis 3: en las producciones de los estudiantes que ingresan a primer año del Profesorado de Matemática predomina una mecanización del proceso de resolución algebraica de una inecuación.

Comprobamos en esta investigación que el trabajo de la mayor parte de los estudiantes (que resuelven) los problemas, se reduce a la mecanización del proceso de resolución algebraica de una inecuación. Esto se corresponde con las respuestas encontradas en el marco algebraico para la tarea 2 (RI). La mayoría no aborda las demás tareas en este marco.

Gran parte de los estudiantes es categorizada como *Inerte* en la resolución de problemas en los marcos funcional y geométrico, en los tres tipos de tareas, ya que no logra abordar la situación con las herramientas y datos que se le brinda. Cabe mencionar aquí las respuestas a la pregunta adicional donde manifiestan que no resolvieron en la escuela problemas de este tipo.

Borello, Farfán y Lezama (2008) ofrecen un estudio acerca de las convicciones y prejuicios de docentes con respecto al tema de las desigualdades. Dichas observaciones han permitido poner en evidencia cómo el maestro, con sus propias convicciones y elecciones, juega un papel fundamental en la construcción de conocimientos significativos por parte de los alumnos. Consideramos que la mirada desde los distintos marcos aportaría un contenido semántico al concepto, algo que es fundamental para la conformación de un objeto mental *desigualdad* más rico.

Parte III

Conclusiones

Capítulo 10

Conclusiones finales

10.1. Introducción

Organizamos la descripción de los resultados de la investigación en tres partes. En la primera, nos centramos en la descripción de fenómenos que organiza el concepto de desigualdad, surgidos en el análisis de las definiciones incluidas en los textos de matemática avanzada. En la segunda, describimos los resultados obtenidos en el análisis del tratamiento del tema en la escuela. Finalmente, en la tercera, dejaremos planteadas algunas preguntas emergentes de esta investigación que podrían constituirse en la base de estudios posteriores.

10.2. Primera parte

Con el objetivo de describir los fenómenos matemáticos para los que el concepto de desigualdad es un medio de organización, realizamos una indagación en libros de matemática avanzada y en artículos de historia de la matemática. Esto fue tratado en los capítulos 4 y 5. Según Freudenthal, este proceso es conveniente para indicar cuáles son los fenómenos para cuya organización dicho concepto fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. Además, realizamos la búsqueda en la matemática en su desarrollo actual y uso actual a través de las opiniones de los investigadores en el capítulo 6.

Los textos de matemática avanzada analizados son los que se utilizan en las asignaturas del primer ciclo del Profesorado de Matemática de la UNL. En particular, nos centramos en los utilizados por los estudiantes que conforman el caso de estudio, cuyo detalle puede consultarse en el capítulo 4. En ellos, en cuanto al concepto, encontramos una definición que distingue los conceptos de desigualdad condicional y absoluta. Esta clasificación permite diferenciar claramente a las desigualdades de acuerdo a su dominio de validez. Este hecho es relevante a nuestro entender, para identificar cada uno de estos conceptos con relación a los fenómenos que organizan.

En lo que refiere a los *fenómenos* a partir de las definiciones que establecen los textos de matemática avanzada, surgen tres fundamentales que describimos en detalle en el capítulo 4, a saber:

- *Ordenación* (O): la definición de desigualdad como una relación de orden que cumple con ciertas propiedades en un conjunto nos conduce a plantear la existencia de este fenómeno. Como resultado de la condición de orden en el conjunto de los números reales surgen en paralelo las desigualdades de expresiones. Este fenómeno está presente en la necesidad de compararlas.

- *Especificación* (E): refiere al dominio de validez de la desigualdad entre dos expresiones. Se basa en el llamado axioma (esquema) de especificación destinado a la formación de nuevos conjuntos a partir de un referencial.

- *Generalización* (G): basado en el principio de la generalización universal que permite ir de un ejemplo particular de sustitución a una expresión generalizada o cuantificada universalmente.

Estos fenómenos los caracterizamos en la Parte I de la tesis, y si bien surgieron del análisis de las definiciones incluidas en los textos de matemática avanzada, están directamente vinculados con Lógica y con la axiomática de la Teoría de conjuntos. También encontramos evidencias de la manifestación de estos fenómenos en la indagación histórica y en las opiniones de los matemáticos profesionales.

Conectado a los fenómenos constatamos la presencia de tareas que aparecen en los textos de matemática avanzada. Las más relevantes son las siguientes:

- *Tarea 1*: Comparar expresiones (CE).

- *Tarea 2*: Resolver inecuaciones (RI).

- *Tarea 3*: Demostrar desigualdades absolutas (DDA).

Después de analizar en el capítulo 5 los artículos de historia de la matemática en relación con las desigualdades, encontramos vínculos entre las tareas y los distintos marcos que pueden utilizarse en su tratamiento.

Así surgieron los siguientes marcos:

- *Marco algebraico*: las resoluciones de las tareas se realizan a través de procesos algebraicos basados en procedimientos, operaciones y uso de la estructura según el conjunto numérico en el que se trabaja.

- *Marco funcional*: la resolución de las tareas se basa en interpretar cada miembro de la desigualdad como una función. Se utilizan propiedades de las funciones y sus gráficas.

- *Marco geométrico*: las resoluciones se basan en la representación de los números positivos como longitudes de segmentos. Las construcciones y las propiedades de los objetos geométricos, las equivalencias de áreas o volúmenes respaldan las comparaciones.

Una de las cuestiones a destacar es que en los textos de matemática avanzada analizados la presentación de las tareas se realiza en el marco algebraico. El libro **L1** presenta sólo la tarea 2 (RI) en el marco funcional. En ninguno de los textos aparece el marco geométrico.

Cada uno de estos marcos aporta al objeto mental desigualdad de un modo específico, por lo que consideramos importante que los estudiantes aborden problemas que les permitan poner en juego, según sea el caso, cualquiera de ellos.

La totalidad de los usos de las desigualdades en todos los contextos constituye el campo semántico de "desigualdad". Si tomamos el marco geométrico para resolver una inecuación, por ejemplo, estamos ubicados en una restricción semántica de este concepto: las desigualdades en el marco geométrico.

Coincidimos con Puig (2001) al sostener que el sujeto que lee un problema o interpreta una situación no opera en el conjunto de la enciclopedia, sino en su campo semántico personal que ha elaborado produciendo sentido, y que se convierte en significado si la interpretación es correcta, en situaciones o contextos que le exigirían nuevos usos para "desigualdad". Es decir, el estudiante expuesto a experiencias diversas con estos fenómenos manipula para nuevos usos su campo semántico personal para interpretarlo, y si logra hacerlo correctamente, este sentido se convierte en un nuevo significado que amplía su campo semántico personal.

Si proponemos el tratamiento del tema desde los distintos marcos en el esfuerzo por ampliar ese campo semántico personal, pensamos que contribuiríamos a la construcción de un objeto mental más rico y por ende un conocimiento avanzado, y no frágil, inerte o ritual como lo llama Perkins (1995).

De las opiniones de los investigadores obtuvimos dos resultados muy interesantes: por un lado el concepto de desigualdad que describen, y por el otro los fenómenos que surgen.

En cuanto al concepto de inecuación, encontramos que la totalidad de los investigadores propone el vínculo entre: relación de orden, desigualdad e inecuación. Es decir, conectan la inecuación a una relación de desigualdad, como describimos en el capítulo 6.

En el cuadro de la figura 10.1 resumimos los marcos, fenómenos matemáticos y tareas que encontramos en esta primera etapa:

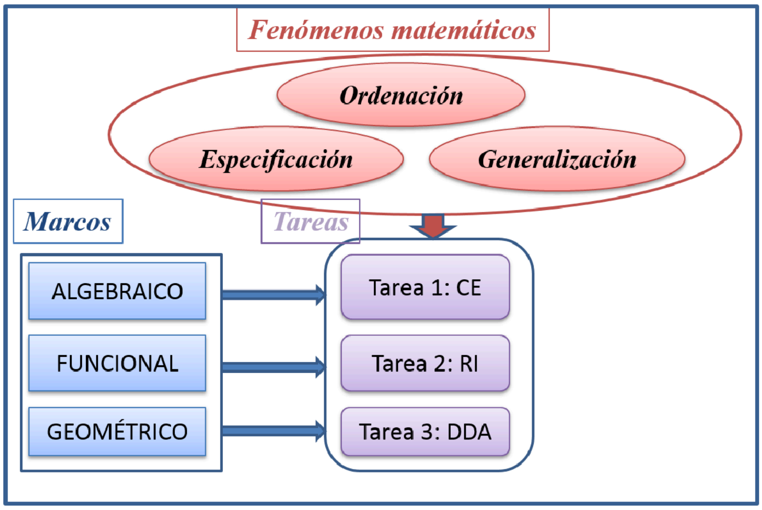


Figura 10.1: Marcos, fenómenos matemáticos y tareas encontradas

La constatación en los libros de textos, en la historia y en la opinión de investigadores nos ha permitido elaborar un panorama de todo aquello que la matemática avanzada requiere de las desigualdades. Consideramos que el hallazgo de estos fenómenos matemáticos constituye lo inédito de este trabajo, lo más importante de esta tesis. Con este insumo nos propusimos en la segunda parte analizar el tratamiento del tema en la escuela secundaria.

10.3. Segunda parte

En la Parte II de esta tesis como describimos tomamos como caso de estudio a la cohorte 2012 de la carrera del Profesorado de Matemática, conformada por estudiantes egresados de distintas escuelas secundarias. Analizamos las opiniones de sus docentes en torno al tema, el tratamiento del mismo que realizan los libros de textos citados por estos docentes y las producciones de los estudiantes en el trabajo con desigualdades. Describimos la metodología con que realizamos el estudio en la sección 1.4.

En las opiniones de los docentes respecto del concepto inecuación, podemos concluir que un 64 % de los encuestados lo vincula con el concepto de ecuación marcando diferencias y similitudes a través de dos características de los mismos: por un lado el conjunto solución (78 %), y por el otro los símbolos utilizados (33 %), como mostramos en las sección 7.4.2.

El hecho de remarcar las diferencias a través del conjunto solución nos lleva a entender que puede originar interpretaciones inadecuadas por parte de los estudiantes, dado que las inecuaciones pueden no tener solución o tener solución única al igual que una ecuación. En este caso, la idea que puede generarse es que todas las ecuaciones tienen como solución un conjunto finito y las inecuaciones siempre un conjunto infinito.

En cuanto a remarcar similitudes en los mecanismos algebraicos de resolución, exceptuando aquel caso en que se multiplica o divide por un número negativo, estimamos que es una manera de reducir el significado de la desigualdad a descripciones de procedimientos, muchas veces carentes de sentido para los estudiantes. Si lo que pretendemos es que el alumno no reduzca su aprendizaje del tema desigualdades a meros procedimientos mecánicos de resolución, es importante el concepto de inecuación equivalente a otra dada y los procedimientos para obtenerla, pues es esto lo que da contenido semántico a las técnicas, como afirman Garrote, Hidalgo y Blanco (2004).

En la sección 7.5 comparamos las opiniones de los docentes con las de los investigadores encuestados. Los investigadores caracterizan a las inecuaciones a través de su vínculo con la desigualdad, definiendo a esta última como una relación entre objetos distintos. Mientras que el 93 % de los docentes menciona que trabaja con *desigualdades* en todos o casi todos los años de la escuela secundaria, y lo hace en resoluciones de inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto, en cada conjunto numérico. Un 57 % vincula las necesidades a las que responden las *desigualdades* a la modelización de situaciones reales, entendiendo ésta como la resolución de problemas en contextos cotidianos que se modelizan a través de inecuaciones. Interpretamos que los docentes asocian la *desigualdad* a la *inecuación*. Un 64 % de los docentes encuestados utiliza la *ecuación* como soporte para explicar el concepto de *inecuación*.

La igualdad y la desigualdad son relaciones, y entre ambas existe una característica que las distingue, por ejemplo: la propiedad de simetría. Entendemos que esta comparación es importante para comprenderlas.

Acordamos con las ideas de Puig (1997) en lo que refiere al proceso de definir un concepto matemático. Resaltar unas propiedades en la definición de un concepto no constituye una operación inocente y neutral. En lo que concierne al tratamiento del concepto de inecuación, los docentes encuestados priorizan ciertas características al describirlo y ello determina una mirada particular.

En el estudio realizado de los libros de textos escolares citados por los docentes encuestados, en el capítulo 8, encontramos que un 82 % de ellos define la inecuación utilizando el término *desigualdad*, a diferencia de lo obtenido en la opinión de los docentes. Un 18 % de los libros no presenta definición, y en algunos observamos que realizan restricciones, ya que las limitan a un "tipo" particular: las inecuaciones lineales. En ningún caso encontramos una diferenciación entre desigualdad condicional y absoluta.

Respecto de las tareas en los textos escolares analizados, la tarea 2 (RI), que consiste en resolver inecuaciones la encontramos en la totalidad de ellos. La tarea 1 (CE), comparar expresiones, se observa en el 18 % de los textos. En tanto que la tarea 3 (DDA), demostrar desigualdades absolutas, está ausente en todos los libros de la muestra. El marco más utilizado es el algebraico y es el único que utiliza el 73 % de los libros. El marco funcional es adoptado por un 27 %, y en un solo texto encontramos una presentación en ambos marcos (algebraico y funcional). El marco geométrico no aparece para la presentación del concepto en ninguno de los libros analizados.

Del análisis de las producciones de los estudiantes destacamos que el fenómeno que aparece explícito en un 62 % de las descripciones que realizan del concepto de *desigualdad matemática* es el de *especificación*. Consideran que toda *desigualdad matemática* es una *inecuación*. Un 58 % de los estudiantes que explica el concepto utiliza la *ecuación* para caracterizar la *inecuación*. Encontramos aquí una correspondencia con el análisis realizado de la opinión de los docentes. En el aspecto que utilizan para compararlas también encontramos coincidencia: un 43 % de los estudiantes refiere al conjunto solución o a los símbolos (consideran que la diferencia es el signo) para diferenciarlas.

Aseveramos que los resultados obtenidos dan indicios de la validez de la hipótesis 1 planteada:

Hipótesis 1: existe una ruptura entre el concepto de desigualdad explicitado por los investigadores y el que describen los ingresantes al Profesorado en Matemática.

Comprobamos que los investigadores encuestados caracterizan a las inecuaciones a través de su vínculo con la *desigualdad*; éstos se refieren a una relación de orden entre los elementos de un conjunto y definen a la *desigualdad matemática* como una "relación" de objetos distintos. Mientras que un 62 % de los estudiantes restringe el concepto de *desigualdad* al de *inecuación*, y la describen tomando como soporte para ello al concepto de *ecuación*.

En lo que se refiere a las tareas, en las producciones de los estudiantes surge claramente el marco algebraico en la tarea 2 (RI) como el mejor logrado, en comparación con los otros marcos. En las otras tareas, son muy bajos los porcentajes de estudiantes que las abordan. En la tarea 1 (CE), algunos estudiantes (un 5 %) logran trabajar en el marco algebraico o el funcional. Mientras que en la tarea 3 (DDA) un 31 % de estudiantes utiliza el marco geométrico para justificar las comparaciones.

En síntesis, del análisis de las producciones de los estudiantes tenemos indicios de la validez de la hipótesis 3. Recordémosla:

Hipótesis 3: en las producciones de los estudiantes que ingresan a primer año del Profesorado de Matemática predomina una mecanización del proceso de resolución algebraica de una inecuación.

Comprobamos en esta investigación que, *de los estudiantes que resuelven* las actividades, sus trabajos se reducen a la mecanización del proceso de resolución algebraica de la tarea 2 (RI), y esto es debido a que un 71 % resuelve correctamente la inecuación lineal en el marco algebraico. Las demás tareas en este marco no son abordadas correctamente por la mayoría de los estudiantes (un 95 % para la tarea 1 —CE—, y un 86 % para la tarea 3 —DDA—, ver sección 9.8). Las producciones en los tres tipos de tareas son categorizadas, en su mayoría, como *inactivos* o *incorrectas* en el trabajo en los marcos funcional (95 %, 90 % y 95 %) y en el geométrico (100 %, 100 % y 69 %), ya que no logran ubicarse en la situación a resolver con las herramientas que se les brindan. Esto está directamente relacionado con las respuestas a la pregunta adicional donde manifiestan que no resolvieron o no recuerdan haber resuelto en la escuela problemas de ese tipo.

Además, esta tendencia a resolver a través de procesos algebraicos se constituye en una dificultad insalvable cuando el problema que se plantea exige un análisis previo a la aplicación de procedimientos algorítmicos. Estimamos que esto se debe a la falta de sentido que tienen dichos procedimientos cuando son desprovistos de sus fundamentos ligados a la transformación de inecuaciones equivalentes, a interpretaciones en el marco funcional o a la representación a través de objetos y propiedades geométricas.

En el esquema de la figura 10.2 utilizamos la distinción realizada por Perkins (2010) para concluir que la mayoría de los estudiantes tiene un conocimiento de las desigualdades de tipo *Inerte*, ya que decide no resolver el problema; o bien de tipo *Ritual*, en el caso de las producciones que consisten en las aplicación de rutinas de manipulación algebraica, que intentan sostener como estrategia de resolución en todos los problemas. El objeto mental *desigualdad* que poseen los estudiantes es *pobre*, ya que no les permite elaborar alguna estrategia para abordar el problema en los distintos marcos en los que éste se presenta.

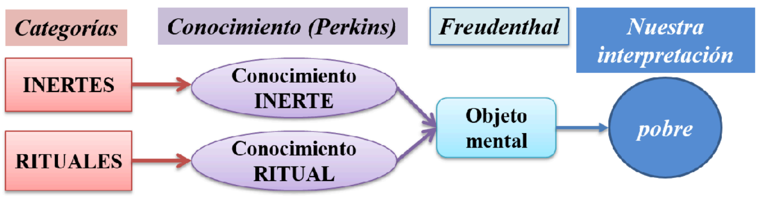


Figura 10.2: Tipo de conocimiento de la mayoría de los estudiantes

Tanto en la opinión de los docentes como en los libros escolares y en la producción de los estudiantes de la muestra constatamos que la tarea que se priorizó en el tratamiento del tema es la de resolución de una desigualdad condicional (tarea 2), con el objetivo de encontrar el conjunto solución de la inecuación. Esta limitación explica las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de las demás tareas que la matemática avanzada necesita.

Observamos una clara preferencia por la utilización del marco algebraico en las tres indagaciones realizadas. No se propicia adecuadamente el trabajo con las desigualdades durante el estudio de las funciones en la escuela secundaria. Asimismo, la ausencia del tratamiento en el marco geométrico parece ser una constante en el abordaje del tema en el nivel.

En estos aspectos los resultados que obtuvimos son coincidentes con los estudios que realizaron otros investigadores, como describimos en el capítulo

2.

Al comparar lo que encontramos en los libros de matemática avanzada en cuanto a *fenómenos*, con el análisis del tratamiento en la escuela, obtuvimos argumentos que nos permiten confirmar una de las hipótesis detalladas en la sección 1.2.5:

Hipótesis 2: los fenómenos que organiza la desigualdad necesarios para la matemática avanzada no son priorizados en su totalidad en las tareas propuestas por los libros escolares.

En el esquema de la figura 10.3 resumimos los resultados encontrados en esta segunda etapa para la muestra analizada.

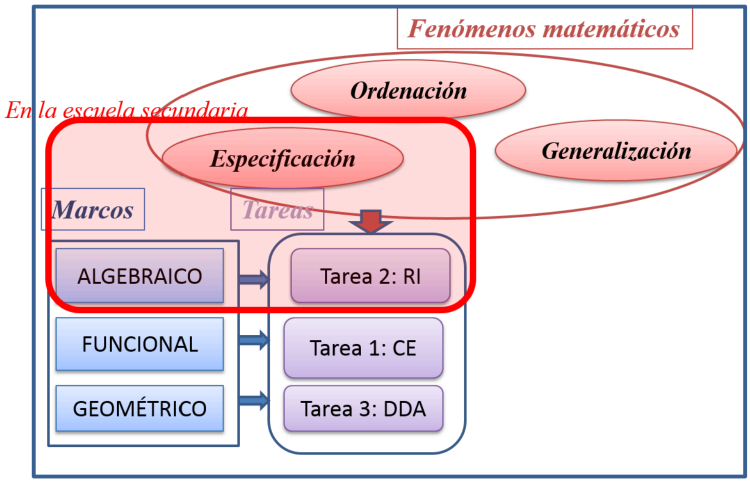


Figura 10.3: Marcos, fenómenos matemáticos y tareas en la escuela

Como lo mencionamos en el marco teórico, Puig (2001) retoma una idea de sistema matemático de signos, que tiene origen en trabajos realizados por Eugenio Filloy, para explicar en términos semióticos la diferencia que hace Freudenthal entre *objeto mental* y *concepto*. La totalidad de los usos de las desigualdades en todos los contextos se circunscribe, para el campo semántico de *desigualdad*, al significado enciclopédico de “desigual” . La identificación del contexto en que la desigualdad se está usando permite a quien lee el texto, o recibe el mensaje, atenerse a la restricción semántica que establece el contexto e interpretarlo así de forma correcta.

Acordamos con las ideas de otros investigadores que explican la potencialidad de adoptar distintos marcos para mirar el mismo objeto matemático, como afirma Frege (1985), citado por Sackur (2004), “Dos representaciones diferentes, en dos registros distintos, del mismo objeto matemático no tienen el mismo significado. El cambio de registro hace explícitos los diferentes aspectos y las diferentes propiedades del mismo objeto”. Lo que Freudenthal llama objeto mental *desigualdad* se corresponde en esta descripción semiótica a este campo semántico personal.

En estos términos, la intención de los sistemas educativos tendría que ser que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico (abarque suficiente enciclopedia) como para permitirle interpretar de forma correcta todas las situaciones en las que haya de usar “desigualdades”.

A continuación listamos algunas *rupturas* entre el tratamiento del tema *desigualdades* en la escuela secundaria y lo que la matemática avanzada demanda de ellas, que encontramos en esta investigación:

- en la definición de *desigualdad matemática* tal como se presenta en textos de matemática avanzada, y el concepto que se deriva del abordaje del tema en la escuela secundaria (a partir de los textos escolares, de las respuestas de los docentes y de las producciones de los estudiantes). Los fenómenos que organiza el concepto de desigualdad no se corresponden biunívocamente;

- en las tareas presentadas en los textos de matemática avanzada en relación con las propuestas en textos escolares, y con las abordadas exitosamente por los estudiantes de la muestra. No nos referimos en este caso a la complejidad específica del nivel sino a los tipos de tareas presentadas;

- en los marcos reconocidos en el desarrollo histórico en relación con los presentados en libros de matemática avanzada y en textos escolares.

Consideramos que estas *rupturas* responden a dos de las dificultades que Artigue (1995) describe:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo y al hecho de que estos objetos se conceptualizan plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que va a contribuir de forma fuerte a tal conceptualización.

- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

Jonassen (1991) distingue tres etapas en la adquisición de conocimiento: introductorio, avanzado y experto. Las estrategias de enseñanza y aprendizaje a seguir en cada etapa son diferentes. Los objetivos de la etapa introductoria se limitan a la capacidad para “tareas reproductivas y aplicaciones elementales del conocimiento en ejemplos rígidos tomados de un número limitado de casos sobre-simplificados”. Esto suele implicar estrategias de aprendizaje muy dirigidas, con escaso margen a la autonomía del estudiante, que producen modelos mentales simples, acabados y estáticos.

Pero, a medida que vamos alcanzando el nivel avanzado, es necesario introducir estrategias de enseñanza que permitan ampliar la transferibilidad del conocimiento, es decir, la capacidad del estudiante para aplicar su conocimiento a casos y situaciones nuevos y únicos, dotados ya de la complejidad propia del mundo real. Los estudiantes tienen entonces que desarrollar modelos mentales flexibles y ricos que sean capaces de reflejar esa complejidad y dinamismo que caracteriza el mundo real. La capacidad de transferencia se convierte en el objetivo central de esta etapa avanzada: el conocimiento debe ir alcanzando su verdadera dimensión de modelo mental, de herramienta intelectual, que facilita la interacción con el mundo y la resolución de problemas y situaciones.

En nuestro estudio, observamos que los estudiantes en la categoría *avanzados* interpretan las desigualdades en el marco funcional y logran resolver inecuaciones cuadráticas que le resultaron complejas de abordar en el marco algebraico. En el marco geométrico, la visualización que logran los ayuda a interpretar la situación y sacan provecho de ello para resolverla. Justifican sus afirmaciones, argumentan lo que aseguran es verdadero basándose en resultados y propiedades que ya conocen.

Feltovich, Spiro y Coulson (1993, citado por Perkins, 2010) reflexionan en torno a la adquisición de conocimiento avanzado. Lo definen como el tipo de conocimiento que va más allá de la adquisición de datos y rutinas.

Según los autores: "En el aprendizaje inicial, el objetivo educativo primordial consiste, a menudo, en presentar grandes áreas de contenidos curriculares (cobertura de contenidos), sin hacer gran hincapié en el dominio conceptual del saber (...). En concreto, no se prevé que los alumnos comprendan profundamente los conceptos ni que sean capaces de aplicarlos, porque se presume que, tras su presentación, irán consiguiendo paulatinamente una mayor comprensión y descubriendo las posibilidades de aplicación de los conocimientos" (p. 184). Comparan el aprendizaje avanzado con el inicial del siguiente modo: "En algún punto del proceso educativo, hay que reemplazar los objetivos restrictivos del aprendizaje introductorio. Es decir, debe preverse que los estudiantes alcancen un conocimiento preciso y más profundo de los contenidos, que sean capaces de razonar con ellos y de aplicarlos con flexibilidad en contextos distintos, mal estructurados y, a veces, nuevos" (p. 184).

A partir de los resultados de esta investigación, sugerimos unas pautas para el abordaje de la desigualdad en la escuela secundaria que promuevan la conformación de un objeto mental *desigualdad* lo suficientemente *rico*. Confiamos en que podrán construirlo si como docentes tenemos en cuenta los fenómenos matemáticos que organiza el concepto, trabajamos con los distintos tipos de tareas y las presentamos en los distintos marcos. Como mostramos en el esquema de la figura 10.4.

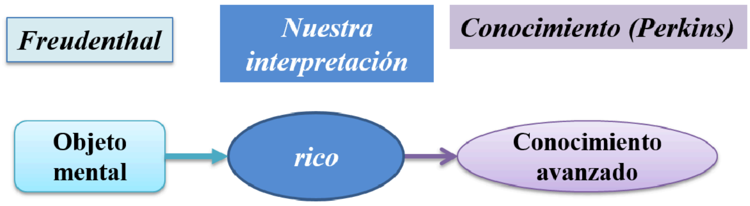


Figura 10.4: Conocimiento *avanzado* y objeto mental *rico*

Consideramos que:

- Las tareas del tipo 1: (CE) (Comparar expresiones) involucran a los estudiantes en actividades enmarcadas en el fenómeno de *ordenación*. Aportan sentido de *relación* a las desigualdades y los introduce en la noción de orden presente cada vez que aparece una desigualdad, en los distintos marcos.

- Las tareas del tipo 2: (RI) (Resolver inecuaciones) se enriquecen al incluirse los casos no típicos, donde los procedimientos no se automatizan. Estas tareas deben estar fundadas en el reconocimiento de que un "pasaje de términos" es la transformación de una inecuación en otra equivalente.

- Las resoluciones de tareas del tipo 3 (DDA) (Demostrar desigualdades absolutas) contribuyen a introducir a los estudiantes en la problemática de la demostración matemática y brinda experiencias dentro del fenómeno de *generalización*. Es importante habituar a los estudiantes a que justifiquen sus decisiones con las herramientas matemáticas que poseen, respaldando las afirmaciones con propiedades conocidas. Como sostiene Dreyfus (2000), "no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático" (p. 130).

- La utilización de los marcos (algebraico, funcional y geométrico) en el tratamiento del tema, podría contribuir al uso de diferentes estrategias frente al mismo problema y aportaría otra interpretación de la situación en pos de una mejor comprensión.

- Promover la interpretación de la desigualdad con un sentido de relación entre objetos, sin restringirla solamente al concepto de inecuación, contribuye a la conformación de un objeto mental más *rico*.

- Comprender que la inecuación no es una mera complejización de la ecuación respecto del conjunto solución y de su signo, favorece un tipo de aprendizaje no rutinario.

Finalmente, consideramos que es importante no retardar indebidamente las experiencias para que los estudiantes alcancen un conocimiento preciso y más profundo de las desigualdades, ya que podrían acostumbrarse a verlas sólo como una rutina de procedimientos, con el propósito de que sean capaces de razonar con ellas y aplicarlas con flexibilidad en los distintos marcos.

En esta segunda parte los resultados que obtuvimos están alineados con los de otros investigadores. Estimamos que el encuadre teórico de la primera parte otorga un potencial diferente al análisis.

10.4. Tercera parte

En definitiva, manifestamos que todo lo analizado nos orienta a continuar debido a que surgen, a partir de esta indagación, inquietudes que pueden convertirse en líneas de futuras investigaciones en torno a este tema. Planteamos a continuación algunas de ellas:

Frente a las dificultades encontradas para hallar datos históricos en la evolución del concepto de desigualdad, creemos necesaria una indagación minuciosa para reconstruir dicha evolución con detalles precisos; para tal análisis, podrían utilizarse los libros de matemática avanzada en distintos períodos.

Nuestra investigación se centró en los fenómenos matemáticos que organizan las desigualdades y que son requeridos en la matemática avanzada. Nos resulta interesante plantearse una búsqueda de otros fenómenos en la modelización de situaciones reales que podrían ser abordados en el tratamiento del tema en la escuela secundaria, como por ejemplo, qué fenómenos organiza la desigualdad en la Física, en Biología, en las ciencias económicas, entre otras. También constituyen un aspecto de interés a estudiar las dificultades en el aprendizaje de las desigualdades vinculadas con las cuestiones lógicas subyacentes que están relacionadas directamente con los fenómenos matemáticos que encontramos en este estudio.

Creemos que es relevante replicar esta investigación utilizando como muestra una cohorte de estudiantes avanzados del Profesorado de Matemática, por ejemplo del 5to. año. Se trataría de caracterizar el objeto mental *desigualdad* de los mismos, en comparación con el que predomina en los estudiantes de la muestra trabajada en esta investigación.

Detectamos claramente una carencia en los materiales bibliográficos, tanto en los textos de matemática avanzada como en los textos escolares consultados, del tratamiento del tema *desigualdades*. Debido a esta ausencia, en la propuesta de tareas que ponen en juego los fenómenos matemáticos que organiza el concepto de desigualdad y en los marcos que utilizan en su presentación, creemos que es fundamental la producción de un texto que pueda servir de guía tanto a los docentes como a los estudiantes para su abordaje.

Referencias

Alvarenga, K. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios* (Tesis doctoral no publicada). Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Alvarenga, K., & Machado, S. (2012). Investigações sobre o ensino e a aprendizagem de inequações. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, 1(2), 160-175.

Alsina C., & Nelsen, R. (2009). *When less is more. Visualizing basic inequalities.* Washington: Mathematical Association of America.

Altman, S.; Comparatore, C., & Kurzrok, L. (2005). *Funciones I.* Buenos Aires: Longseller.

Armendaris, M., Azcárate, C., & Deulofeu, F. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Revista infancia y aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, 62-63, 77-100.

Arnau, D. (2011). Presencia y ausencia del número natural en la Educación Infantil. *Suma*, 66, 7-15.

Artigue, M (1995). La Enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en la educación Matemática.* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 135-149.

Azcárate, C., & Deulofeu, J (1990). *Funciones y gráficas.* Matemáticas: culturas y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Bagni, R. (2005). Equazioni e disequazioni Riferimenti storici e proprietà interazionali *La matematica e la sua didattica*, 3, 285-296.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2002a). Le disequazioni tra procedure e relazioni: uno studio comparativo su studenti italiani e israeliani. *LÍnsegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 25B, 247-270.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2002b). Teaching implications deriving from a comparative study on the instruction of algebraic inequalities. En *Proceedings of CIEAEM 54*, Vilanova y la Gertrue, España.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2003). Connection between theroy and research findings: the case of inequalities. En *Proceedings of Congress of European Research in Mathematical Education III*, Bellaria, Italia.

Berio, A., Mancini, G., & Mastucci, S. (2008). *Matemática 2. logonautas* Buenos Aires: Puerto de Palos.

Bindstein, M., & Hanflinig, M. (2004). *Matemática 8. EGB* Buenos Aires: Aique.

Boero, P., Bazzini, L., & Garuti, R. (2001). *Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities.* En Proceedings of PME 25(2), 185-192. Utrecht, Holanda.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). *Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives.* En Proceedings of PME 28(I), 139-143. Bergen, Noriega.

Borello, M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte* (Tesis de maestría no publicada). Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. Instituto Politécnico Nacional. México.

Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. Instituto Politécnico Nacional. México.

Borello, M., Farfán, R. M., & Lezama, J. (2008). Relazione tra le concezioni e le idee del docente e lapprendimento dellallievo nel caso delle disequazioni. Lo stato dellarte. *La matematica e la sua didattica*, 22 (3), 331-361. Bologna, Italia: Pitagora.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Bressan, A. (2005). Los principios de la educación matemática realista. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (comp.) *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática.* (pp. 69-98) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2004). *I Parte: La educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* (sf). Recuperado el 3 de septiembre de 2014 de www.gpdmatematica.org.ar

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona.

Claros Mellado, F. (2010). *Limite finito de una sucesión: fenómenos que organiza* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada.

Cohen, L., & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Conde, F. (2004). El papel de la comparación como dispositivo de paso de la dimensión cualitativa a la cuantitativa en los discursos sociales. *Empiria*, 7, 99-111.

Copi, I. (1999). *Introducción a la lógica* Buenos Aires: Eudeba.

Cortés, G. (2009). *Matemática 1* Buenos Aires: Stella.

Diez, M. (1995). *Sobre la simbolización en el Álgebra. Aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en Educación Secundaria* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid. España.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Dreyfus, T. (2000). *La demostración como contenido del currículum.* En Colén, M Fraile, Y, Vidal, C (editores): Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional, Barcelona, GRAÓ DE Irif, S. L.

Etchegoyen, S., Fagale, E., Rodríguez, S., Avila de Kalan, M., & Alonso, M. (2000). *Matemática I* Buenos Aires: Kapeluz.

Farfán, R. (2000). *Lenguaje algebraico y percepción espacial. Un estudio de funciones pretextando la resolución de desigualdades.* En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanis, A. Rodríguez y A. Garza (Eds.), Desarrollo del pensamiento matemático (pp. 89-144), México: Trillas.

Feltovich, P., Spiro, R., & Coulson, R. (1993). *Learning, Teaching, and Testing for Complex Conceptual Understanding.* En N. Frederiksen, R.J. Mislevy y I.I.Bejar (eds.), Test theory for a New Generation of Tests. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fernandez, E., Moretto, G., Oviedo, L., Mamut, N., Contini, L., Vaira, S., et al. (2007). *Matemática para el ingreso.* Santa Fe: Ediciones UNL.

Ferraris, L., & Tasso, M. (2003). *Aprendamos Matemática 9* Córdoba: Comunicarte.

Fink, A. M. (2000). An essay on the history of inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 1*, 118134.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel Publis. Co.

Freudenthal, H. (1981). *Major Problems of mathematics educations.* Educational Studies in mathematics. 12: 133-150. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel. Traducción de Luis Puig (2001), publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht.

Garrote, M., Hidalgo, M., & Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, 46, 37-44.

Garuti, R. (2003). Attività sulle disequazioni come contesto per lo sviluppo dei concetti di variabile e funzione, *Rivista di Matemática della Università Di Parma 2001*, 1-9.

Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students'conceptions of inequalities: sanding the lens.* (Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy). Faculty of Education. Simon Fraser University.

Halmaghi, E. (2012). Inequalities in the history of mathematics: from peculiarities to a hard discipline. *Proceedings of the 2012 annual meeting of the canadian mathematics education study groop/ Actes de la recontre annuelle 2012 du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques.* 171-178. Canadá: Université Laval.

Halmos, P. (1967). *Teoría intuitiva de los conjuntos.* México: Compañía editorial continental S.A.

Hardy, G., Littlewood, J., & Polya, G. (1934). *Inequalities.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Cambridge, UK.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H., & Novembre, A. (2003). *Matemática 9* Buenos Aires: Tinta Fresca.

Itzcovich, H., & Novembre, A. (2007). *M1 Matemática.* Buenos Aires: Tinta Fresca.

Jonassen, D.H. (1991). Evaluating Constructivist Learning. *Educational Technology*, 31(9), 28-33.

Kaczor, P., Schaposchnik R., Franco, E., Cicala R., & Díaz B. (2000). *Matemática I.* Buenos Aires: Santillana.

Kieran, C. (2004). The equation / inequality connection in constructing meaning for inequality situations. En M. Hoines and A.B. Fuglestad, eds., *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. 143-147). Noriega: Bergen.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lehmann, C. H.(1992). *Álgebra.* México: Limusa.

Martinez, M., & Rodriguez, M. (2004). *Matemática.* México: Mc Graw Hill.

Mcmillan, J.H., & Schmacher, S. (2005). *Investigación educativa.* 5° edición. Madrid: Pearson Addison Wesley.

Mcknight, C., Magid, A., Murphy, T., & Mcknigt, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* Rhode Island: American Mathematical Society.

Negrete, J. (2002). *Lógica elemental.* México: Limusa.

Nitti, L., & Bernardis, S. (2006). Las desigualdades: dificultades y enseñanza. En A. Mantica, L. Nitti y S. Scaglia (comps.). *La Matemática: aportes para su enseñanza.* (pp. 37-48). Santa Fe: Ediciones UNL.

Pellicer, M. (2007). Algunos descubrimientos matemáticos del siglo XX. *Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* 101(2). 285-305. España.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente: Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente.* Barcelona: Gedisa.

Perkins, D. (2010). *El aprendizaje pleno: Principios de la enseñanza para transformar la educación.* 1a. ed. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. (1971). *Seis estudios de psicología.* Primera edición. Barcelona: Barral editores.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Puig, L. (2001). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal.* Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV.

Radford, L. (2004). *Syntax and Meaning.* En Proceedings of PME 28 (I). (pp. 161-166). Bergen, Noriega.

Rey Pastor, J., & Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática. Vol I y II* 3a. ed. España: Gedisa.

Rico, L. (1991). Ha fallecido Hans Freudenthal. *Suma*, 7, 92-93.

Rico, L, Marín, A., Lupiáñez, J., & Gomez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma*, 58, 7-23.

Rudin, W. (1980). *Principios de análisis matemático.* 3ra edición. México: McGraw Hill

Sánchez Compaña, M. (2012). *Limite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada.

Salas, S., Hille, E., & Etgen, G. (2002). *Cálculus. Una y varias variables.* Volumen I. (4ta ed). España: Editorial Reverté, S.A.

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. 148-151). Noriega: Bergen.

Sessa, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas.* 1a. ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sfard, A. (1995). *The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives.* Journal of Mathematical Behavior, 14, 15-39.

Sierra, M., Gonzalez, M., & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU), 1940-1995, *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3).

Sinaceur, H. (1992). La construction algébrique du continu: calcul, ordre, continuité. En Jean-Michel Salanskis y Hourya Sinaceur (Edit.) *Le* *labyrinthe du continu: Coloquio de Cerisy (French Edition).* Paris: Springer-Verlag.

Sobel, M., & Lerner, N. (1998). *Precálculo.* 5ta. edición. Prentice Hall.

Tall, D. (1981). *Comments on the Difficulties and Validity of Various Approaches to the Calculus.* For the Learning of mathematics 2(2) pp. 11-21, Publishing Association: Montreal, Quebec.

Tall, D. (1991). *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking.* En D. Tall (Ed) Advanced mathematical thinking. (3-21), Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1994). *Understanding the processes of Advanced Mathematical Thinking.* An invited ICMI lecture at the International Congress of Mathematicians, Zurich.

Tall, D. (1995). *Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking.* Plenary lecture, Conference of the International Group Psychology of Learning Mathematics, (1) (161- 175) Recife, Brazil.

Tarski, A. (1977). *Introducción a la lógica y a la metodología de las Ciencias deductivas.* Madrid: Espasa-Calpe.

Tsamir, P., & Almog, M. (2001). Students strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 32(4), 513-524.

Vargas J. (2003). La Construcción de los irracionales de Dedeking como instrumento en un análisis de textos de octavo grado.*Revista Ciencia y Tecnología Nº 14*. Colombia.

Vidal, R. (2010). El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo 1910 2010. En: *Cuadernos de Educación Nº 27*, Facultad de Educación Universidad Alberto Hurtado.

Villella, J. (2007). *Matemáticas escolares y libros de texto.* Un estudio desde la Didáctica de las Matemáticas. San Martín, Argentina: USAM.

Zapico, I., Micelli, M., Tajeyan, S., & Vera Ocampo, J. (2007). *Matemática Perspectivas.* Buenos Aires: Santillana.