TEORÍA AXIOMÁTICA DE CONJUNTOS Y EL AXIOMA DE ELECCIÓN

Girardi, Eros

Facultad de Ingeniería Química – UNL
Director/a: Marcos, Miguel
Codirector/a: Busaniche, Manuela

Área: Matemática

Palabras claves: Lógica, Teoría Axiomática, Elección.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación se enmarcó en uno de los fundamentos esenciales de las matemáticas, la teoría axiomática de conjuntos. Dentro de este tema, el trabajo pretendió investigar el polémico Axioma de Elección. Este axioma establece que se puede obtener un conjunto eligiendo un elemento de cada conjunto de una colección dada, aún cuando no exista un algoritmo o mecanismo constructivo de selección, lo cual generó, y sigue generando, un debate al respecto. Este enunciado ha sido objeto de controversia desde su concepción, por sus sorprendentes aplicaciones y consecuencias, dado que es equivalente a otras proposiciones sumamente diversas dentro del vasto espectro de las matemáticas. Para todo esto la lógica formal jugó un papel central en la investigación.

Durante nuestras investigaciones estudiamos formas/definiciones equivalentes del Axioma de Elección que sorprenderían a muchos, junto a otros resultados paradójicos o más bien poco intuitivos.

Esta investigación fue realizada en la Facultad de Ingeniería Química.

OBJETIVOS

- Realizar una introducción integral a los estudios de la lógica formal.
- Estudiar en profundidad la teoría axiomática de conjuntos ZFC+, base teórica de las matemáticas modernas.
- Comprender los alcances del controvertido Axioma de Elección y sus aplicaciones en resultados clásicos y actuales.

Título del proyecto: El álgebra como herramienta para el tratamiento de problemas de información.
Instrumento: CAI+D
Año convocatoria: 2020
Organismo financiador: UNL
Director/a: BUSANICHE, MANUELA

METODOLOGÍA

La metodología de investigación consistió en reuniones semanales donde poníamos en común nuestros avances en lo estudiado, y debatíamos al respecto. Este material estuvo previamente acordado, aunque dejábamos lugar a posibles ajustes según las necesidades de la investigación. En casos necesarios, se agregó material de otros autores para subsanar estas cuestiones.

PRIMERA PARTE

Nuestra investigación tuvo dos bloques muy marcados. En el primero de ellos estudiamos por un lado lógica formal y teoría axiomática de conjuntos. Esto comenzó con el estudio de lo que es un lenguaje formal desde el punto de vista lógico, junto a las demostraciones de resultados teóricos importantes como son los teoremas de completitud, de deducción, que son de calidad fundamental para el razonamiento matemática clásico en los que se basan las teorías axiomáticas. Además, también estudiamos lógica de primer orden que iba a resultar ser una de las bases de la teoría axiomática de conjuntos que pretendíamos estudiar, pues esta introduce los cuantificadores existenciales y universales, que hablan sobre la existencia de cosas particulares o sobre propiedades que se aplican a todos los objetos de la teoría (conjuntos). Dentro de esto también estuvo incluido el cálculo de predicados.
Una vez tuvimos las bases lógicas acentadas, comenzamos a estudiar efectivamente la teoría axiomática de conjuntos ZFC+. Para ello nos valimos de distinta bibliografía. Este estudio comenzó con los axiomas básicos de la teoría. Los axiomas se pueden pensar como los pilares fundamentales a partir de los cuales razonamos nuevas deducciones mediante inferencias también preestablecidas en el marco teórico. Los primeros axiomas que estudiamos fueron los de Zermelo, generalmente abreviados como 'Z'. Estos proponen reglas mediante las cuales íbamos a poder trabajar sobre los objetos que terminarían siendo conjuntos. Entre estas reglas tenemos nociones de igualdad entre conjuntos, y formas de construir conjuntos a partir de otros. Ahora sería aparente que faltaría algún objeto que sea un conjunto, pero para esto también teníamos axiomas. Estos fueron los que postulan que existe un conjunto vacío que pertenece a todos los conjuntos; y otro que dice que existe un conjunto infinito e inductivo. Esto último significa que para todo elemento en el conjunto su 'siguiente' está también en el conjunto.
El estudio de estos axiomas nos permitió realizar construcciones complejas como lo son los ordinales. Sin embargo, sobre cierto punto la teoría requirió axiomas adicionales. El primero de estos es el Axioma de Sustitución, que dice que la imagen de una función a través de algún conjunto es un conjunto. Esto nos permitió elevar nuestras construcciones e inclusive dejar de lado axiomas previos que se volvían redundantes. El agregado de este axioma a Z se conoce como 'ZF' por Fraenkel, el inventor del axioma.
Para terminar esta primera parte concluimos estudiando dos axiomas en particular. Uno de ellos el Axioma de Regularidad, que dice que un conjunto no puede pertenecer a sí mismo, y se denota agregando un '+' al final de 'ZF'('ZF+). El otro, que fue el objetivo central de la investigación, era el Axioma de Elección. Este axioma postula la existencia de un conjunto, dada una familia de conjuntos (muchos conjuntos), que contiene a un elemento de cada miembro (conjunto) de esta familia, y se escribe su inclusión en la teoría como 'ZFC'. La primera parte terminó con el estudio superficial de este, pues en la segunda parte del trabajo de investigación nos dedicamos de lleno a este axioma.

SEGUNDA PARTE

La segunda parte del trabajo de investigación, siguiendo el hilo anterior, fue un estudio extensivo del Axioma de Elección. Sobre este axioma estudiamos muchas de sus equivalencias, es decir resultados que implican lógicamente el axioma de elección. También en esta materia analizamos muchos resultados básicos en el análisis matemático que dependen totalmente de la aceptación del axioma, como otros que, si bien en general dependen de él, pueden probarse de otras formas. Sobre esto también estudiamos modelos que se pueden construir sin el Axioma de Elección que generan resultados indeseables. Hablamos de aceptación del axioma pues fue y es todavía en muchas comunidades un debate sobre si creer en él o no.
Entre resultados importantes relacionados al axioma, estudiamos sobre la Hipótesis del Continuo generalizada, que habla sobre el tamaño de conjuntos infinitos (y sobre sus tamaños, pues hay infinitos más 'grandes' que otros) y la paradoja de 'Banach-Tarski' que propone que de una sola esfera pueden generarse muchas más.

CONCLUSIONES

La investigación llevada a cabo nos permitió adentrarnos en muchos resultados teóricos fundamentales para las bases de las matemáticas y la teoría de conjuntos en general. Este modesto intento buscó introducirnos en estos temas para eventualmente habilitarnos a estudiar resultados más técnicos, dejando puertas abiertas a posibles investigaciones futuras sobre problemáticas más específicas en el área como problemas lógicos desde conjuntos desde el punto de vista de teoría de modelos o teoría de pruebas. Con entusiasmo, compartimos los resultados pues creemos que es una parte importante de las matemáticas que no suele verse en profundidad o de manera formal y suele pasar desapercibida.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Mendelson, E., 2009. Introduction to Mathematical Logic, 5ta Edición (Discrete Mathematics and Its Applications). Chapman and Hall/CRC.

Cignoli, R., 2002. Una introducción a la teoría axiomática de conjuntos, Cuadernos de Matemática y Mecánica, Serie de Cursos y Seminarios. CIMEC – IMAL.

Herrlich, H.,1876. Axiom of Choice, Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag.

Stromberg, K., 1979. The Banach-Tarski Paradox, Amer. Math. Monthly, Vol 86, No 3, pp. 151–161.