

Capítulo 7

Calificación generalizada y niveles de calificación para métodos de regularización espectrales

Hemos visto en la Sección 3.1.1 que el concepto de calificación de un método de regularización espectral (MRE) para problemas inversos mal condicionados está fuertemente asociado con el orden de convergencia óptimo del error de regularización ([12], [44]). En este capítulo extenderemos la definición de calificación e introduciremos tres niveles diferentes de este concepto: débil, fuerte y óptimo. Mostraremos que la calificación débil por un lado generaliza el concepto de calificación clásica (ver Definición 3.6) y por otro, extiende la definición introducida por Mathé y Pereverzev en el año 2003 ([44]) (ver Definición 3.8), principalmente en el sentido que las funciones asociadas a órdenes de convergencia y conjuntos fuente pueden no ser necesariamente las mismas.

En la Sección 7.1 definiremos los conceptos de “par fuente-orden” (débil y fuerte) y “par orden-fuente” para un MRE y a partir de ellos introduciremos los tres niveles de calificación de un MRE previamente mencionados. Daremos además una condición

suficiente para la existencia de calificación débil de un MRE como así también condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia sea calificación fuerte u óptima de un MRE. En la Sección 7.2 presentaremos ejemplos de todos los niveles de calificación y mostraremos las relaciones existentes entre los mismos, como así también con la calificación clásica y la introducida por Mathé y Pereverzev. En particular, presentaremos métodos de regularización espectrales que no poseen calificación clásica y sí tienen calificación en alguno de los sentidos en que esta se define en este capítulo. Finalmente, en la Sección 7.3 mostraremos algunas importantes implicaciones de esta teoría en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados concretos. Algunos de estos resultados se pueden encontrar también en [25].

7.1. Pares fuente-orden y orden-fuente. Calificación generalizada. Niveles de calificación.

Como señalamos en la Sección 3.1.1, es bien sabido que hay métodos de regularización espectrales que no poseen calificación clásica, por ejemplo TSVD (ver Sección 3.2.1) y el método de Showalter (ver Sección 3.2.3), debido a que el correspondiente μ_0 dado en la Definición 3.6 es infinito. Sin embargo, un análisis cuidadoso permite observar que el concepto de calificación como orden de convergencia óptimo del error de regularización sigue subyacente en la mayoría de estos métodos. Este análisis nos conducirá, en esta sección, a generalizar el concepto de calificación introducido por Mathé y Pereverzev en [44] y por lo tanto la noción de calificación clásica de un MRE. Definiremos además tres niveles de calificación: débil, fuerte y óptimo, los cuales, como veremos, introducen una jerarquía natural para los MREs. Mostraremos que, de estos

tres niveles, el más bajo es en efecto una generalización del mismo concepto introducido por Mathé y Pereverzev en la Definición 3.8. Para ello, necesitamos introducir previamente las siguientes definiciones.

Denotaremos con \mathcal{O} al conjunto de las funciones $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ no decrecientes tales que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) = 0$, y con \mathcal{S} al conjunto de las funciones $s : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continuas con $s(0) = 0$ y tales que $s(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$. Si además, s es creciente, entonces diremos que s es una *función índice* en el sentido de Mathé y Pereverzev ([44]).

Definición 7.1. Sean $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{O}$. Decimos que “ ρ precede a $\tilde{\rho}$ en el origen”, y lo denotamos con $\rho \preceq \tilde{\rho}$, si existen constantes positivas c y ε tales que $\rho(\alpha) \leq c\tilde{\rho}(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \varepsilon)$.

Definición 7.2. Sean $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{O}$. Decimos que “ ρ y $\tilde{\rho}$ son equivalentes en el origen”, y lo denotamos con $\rho \approx \tilde{\rho}$, si se preceden mutuamente en el origen, es decir, si existen constantes ε, c_1, c_2 , $\varepsilon > 0$, $0 < c_1 < c_2 < \infty$ tales que $c_1\rho(\alpha) \leq \tilde{\rho}(\alpha) \leq c_2\rho(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \varepsilon)$.

Claramente, “ \approx ” introduce una relación de equivalencia en \mathcal{O} . Análogas definiciones se utilizarán para $s, \tilde{s} \in \mathcal{S}$.

Definición 7.3. Sean $\{g_\alpha\}$ un MRE (ver Definición 3.1), $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$, $\rho \in \mathcal{O}$ y $s \in \mathcal{S}$.

(i) Decimos que (s, ρ) es un “par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ ” si satisface

$$\frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = O(1) \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+, \forall \lambda > 0. \quad (7.1)$$

(ii) Decimos que (s, ρ) es un “par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ ” si es un par débil fuente-orden y no existe $\lambda > 0$ para el cual en (7.1) $O(1)$ pueda reemplazarse por $o(1)$. Es decir, si vale (7.1) y además

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} > 0 \quad \forall \lambda > 0. \quad (7.2)$$

(iii) Decimos que (ρ, s) es un “*par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$* ” si existen una constante $\gamma > 0$ y una función $h : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, tales que

$$\frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \gamma \quad \forall \lambda \in [h(\alpha), +\infty). \quad (7.3)$$

En todas las definiciones precedentes nos referiremos a la función ρ como “*orden de convergencia*” y a s como “*función fuente*”. La razón de usar esta terminología quedará en claro en la Sección 7.3 cuando veamos aplicaciones de estos conceptos en el contexto de resultados directos y recíprocos para métodos de regularización.

Las siguientes observaciones se siguen inmediatamente de las definiciones:

Observación 7.4. Si (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ que no es un par fuerte fuente-orden, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda_0) |r_\alpha(\lambda_0)|}{\rho(\alpha)} = 0$, y por lo tanto (ρ, s) no puede ser un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$. Luego, si (ρ, s) es un par orden-fuente y (s, ρ) es un par débil fuente-orden, entonces (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden en el sentido de (ii).

Observación 7.5. Sean $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{O}$. Si (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y $\rho \preceq \tilde{\rho}$ entonces $(s, \tilde{\rho})$ es también un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Si (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y $\tilde{s} \in \mathcal{S}$ es tal que existe $c > 0$ para la cual $\tilde{s}(\lambda) \leq c s(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$, entonces (\tilde{s}, ρ) es también un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

En la siguiente definición introducimos el concepto de calificación generalizada y tres niveles diferentes del mismo.

Definición 7.6. Sea $\{g_\alpha\}$ un MRE.

(i) Decimos que ρ es “*calificación débil (ó generalizada) de $\{g_\alpha\}$* ” si existe una función s tal que (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

(ii) Decimos que ρ es “*calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$* ” si existe una función s tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

(iii) Decimos que ρ es “calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ ” si existe una función s tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ (es suficiente con que (s, ρ) sea un par débil fuente-orden) y (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$.

Es importante observar que la calificación débil generaliza el concepto de calificación introducido en [44] y por lo tanto, la noción de calificación clásica. En efecto, si $\{g_\alpha\}$ tiene calificación continua $\rho(\alpha)$ en el sentido de la Definición 3.8 y $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) = 0$, entonces la función

$$\tilde{\rho}(\alpha) \doteq \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0; \\ \rho(\alpha), & \text{si } 0 < \alpha \leq a; \\ \rho(a), & \text{si } \alpha > a \end{cases} \quad (7.4)$$

es calificación débil de $\{g_\alpha\}$ (aquí la constante a es como en la Definición 3.8). Sin embargo, estas dos nociones no son equivalentes. Veremos luego que es posible que una función sea calificación débil de un MRE y no sea calificación según la Definición 3.8 (ver Ejemplo 11 en la Sección 7.2).

Es oportuno señalar también que si $\{g_\alpha\}$ tiene calificación clásica de orden μ_0 , entonces $\rho(\alpha) = \alpha^\mu$ es calificación débil de $\{g_\alpha\}$ y más aún, $(\lambda^\mu, \alpha^\mu)$ es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ para todo $\mu \in (0, \mu_0]$. Recíprocamente, si para algún $\mu > 0$, $(\lambda^\mu, \alpha^\mu)$ es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, entonces el método tiene calificación clásica (de orden $\mu_0 \geq \mu$) siempre que $\mu_0 \doteq \sup \{ \mu : (\lambda^\mu, \alpha^\mu) \text{ es un par débil fuente-orden para } \{g_\alpha\} \} < +\infty$.

El siguiente resultado provee una condición suficiente para la existencia de calificación débil de un MRE.

Teorema 7.7. *Sea $\{g_\alpha\}$ un MRE tal que para todo $\lambda > 0$, $g_\alpha(\lambda)$ es decreciente para $\alpha \in (0, \alpha_0)$.*

a) Si existen una función creciente $h : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, $\rho^ \in \mathcal{O}$ y $\varepsilon > 0$ tales que*

$$\sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)| \leq \rho^*(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, \varepsilon), \quad (7.5)$$

entonces $\{g_\alpha\}$ tiene calificación débil, y en tal caso ρ^* es calificación débil del método.

b) Si para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $r_\alpha(\lambda)$ es positiva y monótona decreciente para $\lambda \in (0, +\infty)$, entonces siempre es posible hallar h y ρ^* como en **a)** que satisfagan (7.5) para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

Demostración. **a)** Sean $h : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función creciente con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, $\rho^* \in \mathcal{O}$ y $\varepsilon > 0$ tales que se satisface (7.5).

Caso I: Supongamos que existe $\tilde{\alpha} \in (0, \varepsilon)$ tal que $\sup_{\lambda \in [h(\tilde{\alpha}), +\infty)} |r_{\tilde{\alpha}}(\lambda)| > 0$.

Como $h(\alpha)$ es creciente, se deduce que $\sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)| > 0$ para todo $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$. Sea $\lambda_0 > 0$ arbitrario. Entonces para todo $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$,

$$\frac{|r_\alpha(\lambda_0)|}{\rho^*(\alpha)} \leq \frac{|r_\alpha(\lambda_0)|}{\sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)|}. \quad (7.6)$$

Puesto que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, existe $\alpha^* \in (0, \tilde{\alpha})$ tal que $\lambda_0 \in [h(\alpha), +\infty)$ para todo $\alpha \in (0, \alpha^*]$, de lo cual resulta que para todo $\alpha \in (0, \alpha^*]$,

$$\frac{|r_\alpha(\lambda_0)|}{\sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)|} \leq 1. \quad (7.7)$$

De (7.6) y (7.7) se sigue que para todo $\lambda_0 > 0$

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|r_\alpha(\lambda_0)|}{\rho^*(\alpha)} \leq 1.$$

Luego, para cualquier $s \in \mathcal{S}$ acotada resulta que el par (s, ρ^*) satisface (7.1), i.e., es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Así, hemos probado que ρ^* es calificación débil de $\{g_\alpha\}$.

Caso II: Supongamos ahora que $\sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)| = 0$ para todo $\alpha \in (0, \varepsilon)$.

Sea $\lambda_0 > 0$ arbitrario. Como $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, existe $\alpha^* \in (0, \varepsilon)$ tal que $\lambda_0 \in [h(\alpha), +\infty)$ para todo $\alpha \in (0, \alpha^*]$. Entonces $|r_\alpha(\lambda_0)| \leq \sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)| = 0$ para todo $\alpha \in (0, \alpha^*]$, de lo cual se sigue que $r_\alpha(\lambda_0) = 0$. Luego, para cualquier $s \in \mathcal{S}$,

$$\frac{s(\lambda_0)r_\alpha(\lambda_0)}{\rho^*(\alpha)} = 0 \quad \text{para todo } \alpha \in (0, \alpha^*).$$

Por lo tanto, (s, ρ^*) es par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, lo cual implica que ρ^* es calificación débil de $\{g_\alpha\}$. (Observar que en este caso cualquier orden de convergencia $\rho^* \in \mathcal{O}$ es calificación débil de $\{g_\alpha\}$).

b) Sea $\{g_\alpha\}$ un MRE tal que para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $r_\alpha(\lambda)$ es positiva y monótona decreciente para $\lambda \in (0, +\infty)$. Definimos para $\lambda > 0$, $f(\lambda) \doteq (1 - e^{-\lambda})\theta(\lambda)$, donde

$$\theta(\lambda) \doteq \sup\{\gamma \in (0, \alpha_0) : r_\alpha(\lambda) \leq \lambda \forall \alpha \in (0, \gamma)\}.$$

Notar que como para todo $\lambda > 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} r_\alpha(\lambda) = 0$, se sigue que dado $\lambda > 0$ existe $\gamma = \gamma(\lambda) > 0$ tal que $r_\alpha(\lambda) \leq \lambda$ para todo $\alpha \in (0, \gamma)$. Entonces $\theta(\lambda) \neq -\infty$. Más aún, $\theta(\lambda) \in (0, \alpha_0]$ para todo $\lambda > 0$ y así, $f(\lambda) \in (0, \alpha_0)$ para todo $\lambda > 0$. Por otro lado, debido a que para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $r_\alpha(\lambda)$ es decreciente para $\lambda > 0$, se sigue inmediatamente que f es estrictamente creciente. Como además f es acotada, tiene una cantidad a lo sumo numerable de puntos de discontinuidad de salto. Supondremos que f es continua (si no lo es, redefinimos f , quitándole los saltos en los puntos de discontinuidad i.e., redefiniendo f como su componente continua).

Así, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \alpha_0)$ resulta continua, estrictamente creciente con $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) = 0$. Por lo tanto, la función inversa f^{-1} existe sobre el rango de f , es estrictamente creciente y continua con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f^{-1}(\alpha) = 0$. Es obvio que es posible extender f^{-1} a todo el intervalo $(0, \alpha_0)$ de manera tal que preserve todas estas propiedades. Denotaremos con h a esta extensión.

A continuación definimos para $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $z(\alpha) \doteq \sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)| = r_\alpha(h(\alpha))$. Puesto que para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $r_\alpha(\lambda)$ es positivo para todo $\lambda > 0$, se sigue que $z(\alpha)$ también es positivo. Como para todo $\lambda > 0$, $f(\lambda) < \theta(\lambda)$, la definición de $\theta(\lambda)$ implica que $r_{f(\lambda)}(\lambda) \leq \lambda$ para todo $\lambda > 0$, o equivalentemente, $r_\alpha(h(\alpha)) \leq h(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Entonces $0 < z(\alpha) \leq h(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y el hecho que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$ implica que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} z(\alpha) = 0$. Si además z es una función no decreciente, entonces $z \in \mathcal{O}$ y basta definir $\rho^* \doteq z$. De lo contrario, como z es acotada, positiva

con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} z(\alpha) = 0$, existe siempre una función $\rho^* \in \mathcal{O}$ tal que $z(\alpha) \leq \rho^*(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ como queríamos probar. ■

Del Teorema anterior se deduce que todos los métodos de regularización espectrales $\{g_\alpha\}$ tales que para todo $\lambda > 0$, $g_\alpha(\lambda)$ es decreciente para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $r_\alpha(\lambda)$ es positiva y decreciente para $\lambda > 0$, poseen calificación débil. Es oportuno señalar aquí que varios de los métodos usuales satisfacen estas condiciones, por ejemplo, el método de Tikhonov-Phillips y el método de Showalter.

Ahora, dados el MRE $\{g_\alpha\}$ y $\rho \in \mathcal{O}$, definimos

$$s_\rho(\lambda) \doteq \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} \quad \text{para } \lambda \geq 0. \quad (7.8)$$

Notar que $s_\rho(0) = 0$ para todo $\rho \in \mathcal{O}$ (pues $r_\alpha(0) = 1$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) = 0$).

En los siguientes tres teoremas veremos que dada una función $\rho \in \mathcal{O}$, las características de la misma como posible calificación (fuerte u óptima) de un MRE se pueden determinar a partir de propiedades particulares de esta función s_ρ .

Teorema 7.8. (*Condición necesaria y suficiente para calificación fuerte.*) Una función $\rho \in \mathcal{O}$ tal que $s_\rho \in \mathcal{S}$ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$ si y sólo si

$$0 < s_\rho(\lambda) < +\infty \quad \text{para todo } \lambda > 0. \quad (7.9)$$

Demostración. Supongamos que ρ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$. Entonces existe una función $s \in \mathcal{S}$ tal que (s, ρ) es par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Luego, para todo $\lambda > 0$,

$$s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = \frac{1}{\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}} = \frac{s(\lambda)}{\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}}.$$

Así, (7.9) se sigue entonces de (7.1) y (7.2).

Recíprocamente, supongamos ahora que $0 < s_\rho(\lambda) < +\infty$ para todo $\lambda > 0$. Probaremos que ρ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$. Para ello veamos que (s_ρ, ρ) es un par fuerte

fFuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Como $0 < s_\rho(\lambda) < +\infty$ para todo $\lambda > 0$, se sigue que

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s_\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = s_\rho(\lambda) \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = 1 \quad \forall \lambda > 0.$$

Luego, s_ρ verifica (7.1) y (7.2), lo cual junto al hecho que $s_\rho \in \mathcal{S}$ implica que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden y así, ρ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$. ■

Teorema 7.9. *Sean $\rho \in \mathcal{O}$ calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$, $s \in \mathcal{S}$ y s_ρ como en (7.8). Entonces (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ si y sólo si existe $k > 0$ tal que $s(\lambda) \leq k s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$.*

Demostración. Como ρ es calificación fuerte, $s_\rho(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$ por el Teorema 7.8. Supongamos ahora que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Entonces existen constantes positivas k y ε tales que $\frac{s(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \leq k$ para todos $\lambda > 0$, $\alpha \in (0, \varepsilon)$. Luego, para todo $\lambda > 0$

$$\frac{s(\lambda)}{s_\rho(\lambda)} = s(\lambda) \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \leq k,$$

y por lo tanto $s(\lambda) \leq k s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$.

Recíprocamente, supongamos que existe $k > 0$ tal que $s(\lambda) \leq k s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$. Como $s_\rho(\lambda) > 0$ se sigue entonces que

$$k \geq \frac{s(\lambda)}{s_\rho(\lambda)} = \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \quad \forall \lambda > 0,$$

es decir, (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Además, como $s(\lambda)$ y $s_\rho(\lambda)$ son positivas para todo $\lambda > 0$, se sigue que $s(\lambda)$ verifica (7.2) y en consecuencia (s, ρ) es, más aún, un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. ■

Teorema 7.10. *(Condición necesaria y suficiente para calificación óptima.) Una función $\rho \in \mathcal{O}$ tal que $s_\rho \in \mathcal{S}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ si y sólo si s_ρ verifica (7.3) y (7.9).*

Demostración. Supongamos que ρ es calificación óptima. Entonces ρ es calificación fuerte y se sigue del Teorema 7.8 que s_ρ verifica (7.9). Queremos probar ahora que s_ρ satisface (7.3). Para esto observar que como ρ es calificación óptima, existe $s \in \mathcal{S}$ tal que (s, ρ) es par fuerte fuente-orden y (ρ, s) es par orden-fuente. De esto último se sigue que existen una constante $\gamma > 0$ y una función $h : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, tales que

$$\frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \gamma \quad \forall \lambda \in [h(\alpha), +\infty). \quad (7.10)$$

Por otro lado, como (s, ρ) es par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, se sigue del Teorema 7.9 que existe $k > 0$ tal que

$$s(\lambda) \leq k s_\rho(\lambda) \quad \text{para todo } \lambda > 0. \quad (7.11)$$

De (7.10) y (7.11) resulta que

$$\frac{s_\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \frac{\gamma}{k} \quad \forall \lambda \in [h(\alpha), +\infty),$$

es decir, s_ρ satisface (7.3) como queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que $s_\rho \in \mathcal{S}$ verifica (7.3) y (7.9). Por el Teorema 7.8 se tiene que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y (7.3) implica que (ρ, s_ρ) es un par orden-fuente. Luego, ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$. ■

A continuación probaremos un resultado de unicidad de la función fuente.

Teorema 7.11. *Si ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ entonces existe a lo sumo una única función s (en el sentido de las clases de equivalencia inducidas por la Definición 7.2) tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden y (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$. Más aún, si $s_\rho \in \mathcal{S}$, entonces s_ρ es tal única función.*

Demostración. Supongamos que ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$, (s_1, ρ) y (s_2, ρ) son pares fuerte fuente-orden y (ρ, s_1) y (ρ, s_2) son pares orden-fuente para $\{g_\alpha\}$. Entonces

existen $\gamma > 0$ y una función $h : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, tales que $\frac{s_2(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \gamma$ para todo $\lambda \in [h(\alpha), +\infty)$. Luego,

$$s_1(\lambda) = \frac{\frac{s_1(\lambda)s_2(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}}{\frac{s_2(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}} \leq \frac{s_2(\lambda)}{\gamma} \frac{s_1(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \quad \forall \lambda \in [h(\alpha), +\infty), \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (7.12)$$

Por otra parte, como (s_1, ρ) es par fuerte fuente-orden, existen constantes positivas k y ε tales que

$$\frac{s_1(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \leq k \quad \forall \lambda > 0, \forall \alpha \in (0, \varepsilon). \quad (7.13)$$

De (7.12) y (7.13) se sigue entonces que

$$s_1(\lambda) \leq \frac{k}{\gamma} s_2(\lambda) \quad \forall \lambda \in [h(\alpha), +\infty), \forall \alpha \in (0, \varepsilon).$$

Puesto que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$ se tiene que $s_1(\lambda) \leq \frac{k}{\gamma} s_2(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$. Análogamente intercambiando s_1 y s_2 se prueba que existe $\tilde{k} > 0$ tal que $s_2(\lambda) \leq \tilde{k} s_1(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$ y por lo tanto, $s_1 \approx s_2$, lo cual prueba la unicidad.

Supongamos ahora que $s_\rho \in \mathcal{S}$. Como ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ se sigue del Teorema 7.10 que s_ρ verifica (7.3) y (7.9). La condición (7.3) implica que (ρ, s_ρ) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$ mientras que la condición (7.9) implica, a través del Teorema 7.8, que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden. Luego, ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ y, en virtud de la primera parte de este teorema, s_ρ es la única función tal que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden y (ρ, s_ρ) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$. ■

El siguiente es un resultado sobre la unicidad del orden.

Teorema 7.12. *Si (s, ρ_1) y (s, ρ_2) son pares fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y existe $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_1(\alpha)}{\rho_2(\alpha)}$ entonces $\rho_1 \approx \rho_2$.*

Demostración. Supongamos que (s, ρ_1) y (s, ρ_2) son pares fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Probaremos en primer lugar que $\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_1(\alpha)}{\rho_2(\alpha)} > 0$. Supongamos que

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_1(\alpha)}{\rho_2(\alpha)} = 0. \quad (7.14)$$

Como (s, ρ_1) es par fuerte fuente-orden se tiene que

$$\frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho_1(\alpha)} = O(1) \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+, \forall \lambda > 0 \quad (7.15)$$

y

$$0 < \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho_2(\alpha)} = \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)| \rho_1(\alpha)}{\rho_1(\alpha) \rho_2(\alpha)}.$$

Se sigue de (7.14) y (7.15) que el límite superior en el lado derecho de la expresión anterior debe ser cero, lo cual es una contradicción. Luego, $\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_1(\alpha)}{\rho_2(\alpha)} > 0$. Análogamente se prueba que $\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_2(\alpha)}{\rho_1(\alpha)} > 0$. Dado que existe $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_1(\alpha)}{\rho_2(\alpha)}$, se tiene entonces que $0 < \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_1(\alpha)}{\rho_2(\alpha)} < +\infty$ y $0 < \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho_2(\alpha)}{\rho_1(\alpha)} < +\infty$. Luego, $\rho_1 \preceq \rho_2$ y $\rho_2 \preceq \rho_1$, es decir, $\rho_1 \approx \rho_2$, como queríamos probar. ■

7.2. Ejemplos

En esta sección presentamos varios ejemplos que ilustran los distintos niveles de calificación introducidos previamente, como así también las relaciones entre los mismos y con el concepto de calificación clásica y la calificación dada en la Definición 3.8. Es importante aclarar que aunque algunos de estos ejemplos son sólo de naturaleza e interés puramente académicos, sirven para mostrar la existencia de métodos de regularización que poseen calificación en cada uno de los niveles introducidos en este trabajo. No obstante ello, los métodos de regularización generados con algunos de estos ejemplos han mostrado sorprendentes resultados cuando fueron aplicados a algunos problemas concretos, como veremos en el Capítulo 8.

Ejemplo 1. Hemos probado en la Sección 3.2.2 que la regularización de Tikhonov-Phillips tiene calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$. Veremos ahora que $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima en el sentido de la Definición 7.6 (iii). En efecto, para $\lambda > 0$, $r_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}$ y si $\rho(\alpha) = \alpha$ entonces $s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\lambda + \alpha) = \lambda > 0$, es

decir, s_ρ verifica (7.9). Además, puesto que

$$\frac{s_\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \geq \frac{1}{2} \quad \forall \lambda \in [\alpha, +\infty),$$

se tiene que s_ρ verifica (7.3). Del Teorema 7.10 se sigue entonces que $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$.

Ejemplo 2. En la Sección 3.2.1 vimos que el método TSVD no posee calificación clásica puesto que $\mu_0 = +\infty$, donde μ_0 es como en la Definición 3.6. En este caso, se tiene que

$$r_\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \in [\alpha, +\infty), \\ 1, & \text{si } \lambda \in [0, \alpha). \end{cases}$$

Sean $h(\alpha) = \alpha$ y $\rho \in \mathcal{O}$. Entonces

$$\sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)| = \sup_{\lambda \geq \alpha} |r_\alpha(\lambda)| = 0 \leq \rho(\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Luego, se sigue del Teorema 7.7.a) que cualquier función $\rho \in \mathcal{O}$ es calificación débil del método. Sin embargo, TSVD no tiene calificación fuerte. En efecto, para cualquier función $\rho \in \mathcal{O}$ se tiene que $s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = +\infty$ para todo $\lambda > 0$. Por lo tanto, el Teorema 7.8 implica que ρ no es calificación fuerte del método. En [44] se observó además que TSVD tiene calificación arbitraria en el sentido de la Definición 3.8.

Ejemplo 3. Definimos para $\alpha \in (0, \alpha_0)$,

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}}{\lambda + e^{-\frac{1}{\alpha}}}, \quad \text{para todo } \lambda \in [0, +\infty).$$

Es inmediato verificar que $\{g_\alpha\}$ satisface las hipótesis (H1)-(H3) y por lo tanto es un MRE. Como $r_\alpha(\lambda) = \frac{1+\lambda}{1+\lambda e^{\frac{1}{\alpha}}}$ para todo $\lambda \in [0, +\infty)$, resulta que para todo $\mu > 0$,

$$\frac{|r_\alpha(\lambda)| \lambda^\mu}{\alpha^\mu} = \frac{(1+\lambda)\lambda^\mu}{\lambda e^{\frac{1}{\alpha}} \alpha^\mu + \alpha^\mu} = o(1) \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+ \text{ para todo } \lambda \in [0, +\infty).$$

Luego, $\{g_\alpha\}$ no posee calificación clásica pues $\mu_0 = +\infty$.

Veremos ahora que $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\alpha}}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$. Como $s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \in (0, +\infty)$ para todo $\lambda > 0$, se sigue del Teorema 7.8 que ρ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$. Más aún, puesto que

$$\frac{s_\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \frac{\lambda}{\lambda + e^{-\frac{1}{\alpha}}} \geq \frac{1}{2} \quad \forall \lambda \in [e^{-\frac{1}{\alpha}}, +\infty),$$

se tiene que s_ρ verifica (7.3). El Teorema 7.10 implica entonces que $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\alpha}}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$.

Ejemplo 4. Para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ con $\alpha_0 < e^{-1}$, definimos

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1 + (\ln \alpha)^{-1}}{\lambda - (\ln \alpha)^{-1}}, \quad \text{para todo } \lambda \in [0, +\infty).$$

Claramente, $\{g_\alpha\}$ satisface las hipótesis (H1)-(H3) y por lo tanto es un MRE. Como $r_\alpha(\lambda) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda \ln \alpha}$ para todo $\lambda \in [0, +\infty)$, resulta que para todo $\mu > 0$,

$$\frac{|r_\alpha(\lambda)| \lambda^\mu}{\alpha^\mu} = \frac{(1+\lambda)\lambda^\mu}{\alpha^\mu - \lambda \alpha^\mu \ln \alpha} \rightarrow +\infty \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+ \text{ para todo } \lambda \in [0, +\infty).$$

Luego, $\mu_0 = 0$ y por lo tanto $\{g_\alpha\}$ no posee calificación clásica.

Sin embargo, veremos que $\rho(\alpha) = -(\ln \alpha)^{-1}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$. En efecto, como $s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lambda - (\ln \alpha)^{-1}}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \in (0, +\infty)$ para todo $\lambda > 0$ y

$$\frac{s_\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \frac{\lambda}{\lambda - (\ln \alpha)^{-1}} \geq \frac{1}{2} \quad \forall \lambda \in [-(\ln \alpha)^{-1}, +\infty),$$

se sigue del Teorema 7.10 que $\rho(\alpha) = -(\ln \alpha)^{-1}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$.

Ejemplo 5. Sea $\{g_\alpha\}$ el método de regularización de Tikhonov-Phillips, el cual posee calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$. En el Ejemplo 1 vimos que $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima de este método, y por lo tanto es además calificación débil. Como $\alpha \preceq \alpha^{\frac{1}{2}}$, se deduce de la Definición 7.6 - (i) y de la Observación 7.5 que $\rho^*(\alpha) \doteq \alpha^{\frac{1}{2}}$ también es calificación débil. Sin embargo, ρ^* no es calificación fuerte del método. En

efecto, para cualquier $s \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho^*(\alpha)} = \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) \alpha^{\frac{1}{2}}}{\alpha + \lambda} = 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

Ejemplo 6. Sea $\{g_\alpha\}$ el MRE definido en el Ejemplo 4. Este método no posee calificación clásica pues $\mu_0 = 0$. Probamos que $-(\ln \alpha)^{-1}$ es calificación óptima y en consecuencia, es además calificación débil. Puesto que $-(\ln \alpha)^{-1} \preceq (-\ln \alpha)^{-\frac{1}{2}}$, se deduce inmediatamente, como en el ejemplo anterior, que $\rho(\alpha) \doteq (-\ln \alpha)^{-\frac{1}{2}}$ es calificación débil. Veamos que ρ no es calificación fuerte del método. Para cualquier $s \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) (1 + \lambda)}{(1 - \lambda \ln \alpha) (-\ln \alpha)^{-\frac{1}{2}}} = 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

Es importante observar que si $\rho(\alpha) = \alpha^\mu$ es calificación fuerte de un MRE entonces se sigue inmediatamente de la definición de par fuerte fuente-orden que el método tiene calificación clásica de orden μ . En el siguiente ejemplo veremos que el recíproco no es cierto. Luego, es la calificación débil y no la fuerte la que generaliza la noción clásica de este concepto.

Ejemplo 7. Para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ con $\alpha_0 < 1/2$ definimos

$$h_\alpha(\lambda) \doteq \frac{\alpha}{\alpha + \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)}$$

y

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \begin{cases} \frac{1 - h_\alpha(\lambda)}{\lambda + h_\alpha(\lambda)}, & \text{si } \lambda \in [2\alpha, +\infty), \\ \frac{1 - h_\alpha(2\alpha)}{2\alpha + h_\alpha(2\alpha)} = \left(2\alpha - \frac{\alpha + 2\alpha^2}{\ln 3}\right)^{-1}, & \text{si } \lambda \in [0, 2\alpha). \end{cases}$$

En este caso,

$$r_\alpha(\lambda) \doteq \begin{cases} \frac{\alpha(1+\lambda)}{\lambda \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right) + \alpha(1+\lambda)}, & \text{si } \lambda \in [2\alpha, +\infty), \\ 1 - \lambda \left(2\alpha - \frac{\alpha + 2\alpha^2}{\ln 3}\right)^{-1}, & \text{si } \lambda \in [0, 2\alpha). \end{cases}$$

Es inmediato probar que $\{g_\alpha\}$ es un MRE con calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$. Sin embargo, $\rho(\alpha) = \alpha$ no es calificación fuerte del método. En efecto, para cualquier $s \in \mathcal{S}$, se puede ver que

$$\frac{s(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\alpha} = o(1) \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+, \forall \lambda \geq 0$$

y por lo tanto no se satisface (7.2).

Los métodos de regularización espectrales que poseen calificación fuerte no óptima poseen propiedades muy particulares. Por ejemplo, es posible probar que si ρ es calificación fuerte no óptima, entonces $\forall \lambda > 0$, la función $\frac{s_\rho(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}$ no es de variación acotada como función de α en ningún entorno de $\alpha = 0$. Aún así, los siguientes tres ejemplos prueban la existencia de MRE con calificación fuerte no óptima y muestran que calificación fuerte no implica calificación óptima en ninguno de los tres casos (i.e. $0 < \mu_0 < +\infty$, $\mu_0 = +\infty$ y $\mu_0 = 0$).

Ejemplo 8. Dado $k \in \mathbb{R}^+$ definimos para $\alpha, \lambda > 0$

$$g_\alpha^k(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}) - \alpha^k \lambda^{-3/2} \left| \text{sen}(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha) \right|,$$

de modo que $r_\alpha^k(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \alpha^k \lambda^{-1/2} \left| \text{sen}(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha) \right|$. Es inmediato ver que $\{g_\alpha^k\}$ es un MRE con calificación clásica de orden k . Con $\rho(\alpha) = \alpha^k$ se tiene que $\forall \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} s_\rho(\lambda) &= \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^k}{e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \alpha^k \lambda^{-1/2} \left| \text{sen}(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha) \right|} \\ &= \frac{1}{\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\alpha^{-k} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \lambda^{-1/2} \left| \text{sen}(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha) \right| \right)} \\ &= \lambda^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $s_\rho(\lambda) = \lambda^{1/2} \in \mathcal{S}$, del Teorema 7.8 se sigue que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden y $\rho(\alpha) = \alpha^k$ es calificación fuerte del método. Sin embargo, para todo $\lambda > 0$,

$$\liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s_\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\lambda^{1/2} \alpha^{-k} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \left| \sin \left(\frac{\lambda^{3/2}}{\alpha} \right) \right| \right] = 0.$$

Por lo tanto (7.3) no se satisface y $\rho(\alpha) = \alpha^k$ no es calificación óptima del método.

Ejemplo 9. Para $\alpha, \lambda > 0$ definimos $g_\alpha(\lambda)$ mediante

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \lambda^{-1} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}) - e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \lambda^{-3/2} \left| \sin(\lambda^{3/2}/\alpha) \right|,$$

de modo que

$$r_\alpha(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \lambda^{-1/2} \left| \sin(\lambda^{3/2}/\alpha) \right|.$$

Se verifica inmediatamente que $\{g_\alpha\}$ es un MRE y que no posee calificación clásica ($\mu_0 = +\infty$). No obstante, con $\rho(\alpha) \doteq e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} s_\rho(\lambda) &= \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{r_\alpha(\lambda)} \\ &= \frac{1}{\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[e^{-\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} + \lambda^{-1/2} \left| \sin(\lambda^{3/2}/\alpha) \right| \right]} \\ &= \lambda^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $s_\rho(\lambda) = \lambda^{1/2} \in \mathcal{S}$, por el Teorema 7.8 (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden y $\rho(\alpha) = e^{-1/\sqrt{\alpha}}$ es calificación fuerte del método. Sin embargo, $\forall \lambda > 0$ se tiene que

$$\liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s_\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\lambda^{1/2} e^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\lambda}{\alpha}} + \left| \sin(\lambda^{3/2}/\alpha) \right| \right) = 0,$$

por lo tanto no vale (7.3) y $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ no es calificación óptima del método.

Ejemplo 10. Para $0 < \alpha < 1$ y $\lambda > 0$ definimos

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \lambda^{-1} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}) + (\ln \alpha)^{-1} \lambda^{-3/2} \left| \sin(\lambda^{3/2}/\alpha) \right|,$$

de modo que

$$r_\alpha(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} - (\ln \alpha)^{-1} \lambda^{-1/2} \left| \sin(\lambda^{3/2}/\alpha) \right|.$$

Al igual que en los ejemplos 8 y 9, se puede verificar que $\{g_\alpha\}$ es un MRE, que no posee calificación clásica ($\mu_0 = 0$), que $\rho(\alpha) = \frac{-1}{\ln \alpha}$ es calificación fuerte no óptima del método y que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden con $s_\rho(\lambda) = \lambda^{1/2}$.

Ejemplo 11. En la Sección 3.2.3 probamos que el método de Showalter ($g_\alpha(\lambda) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}})/\lambda$) no posee calificación clásica pues $\mu_0 = \infty$. Se puede probar fácilmente, usando el Teorema 7.7 que $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ es calificación débil de este método. Sin embargo, también es fácil ver que dicha función no satisface la condición (3.15) y por lo tanto $\rho(\alpha)$ no es calificación en el sentido de la Definición 3.8.

Observar que los Ejemplos 2, 3, 4, 6, 9, 10 y 11 corresponden a métodos de regularización espectrales que no poseen calificación clásica, y sin embargo sí poseen calificación en alguno de los sentidos en que este concepto ha sido extendido en la Definición 7.6.

En la Figura 7.1 se visualizan los distintos niveles de calificación introducidos en este capítulo y la relación entre los mismos como así también con la calificación clásica y la calificación introducida por Mathé y Pereverzev.

7.3. Órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales

La generalización del concepto de calificación de un MRE introducida en las secciones previas está fuertemente relacionada con, y tiene un amplio espectro de aplicaciones en, el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados. Presentamos a continuación

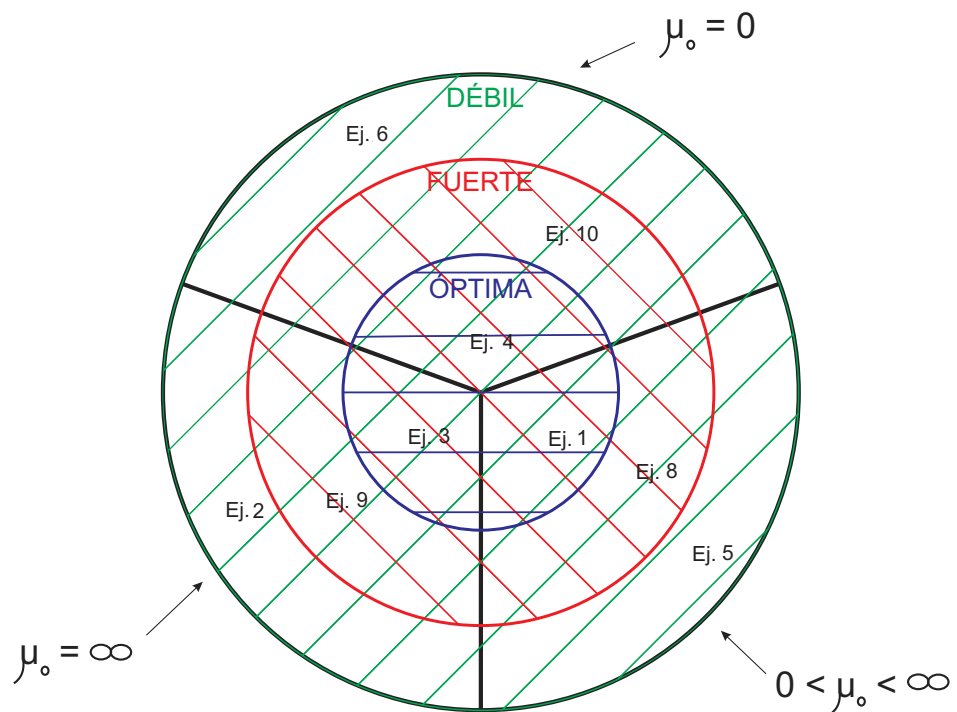
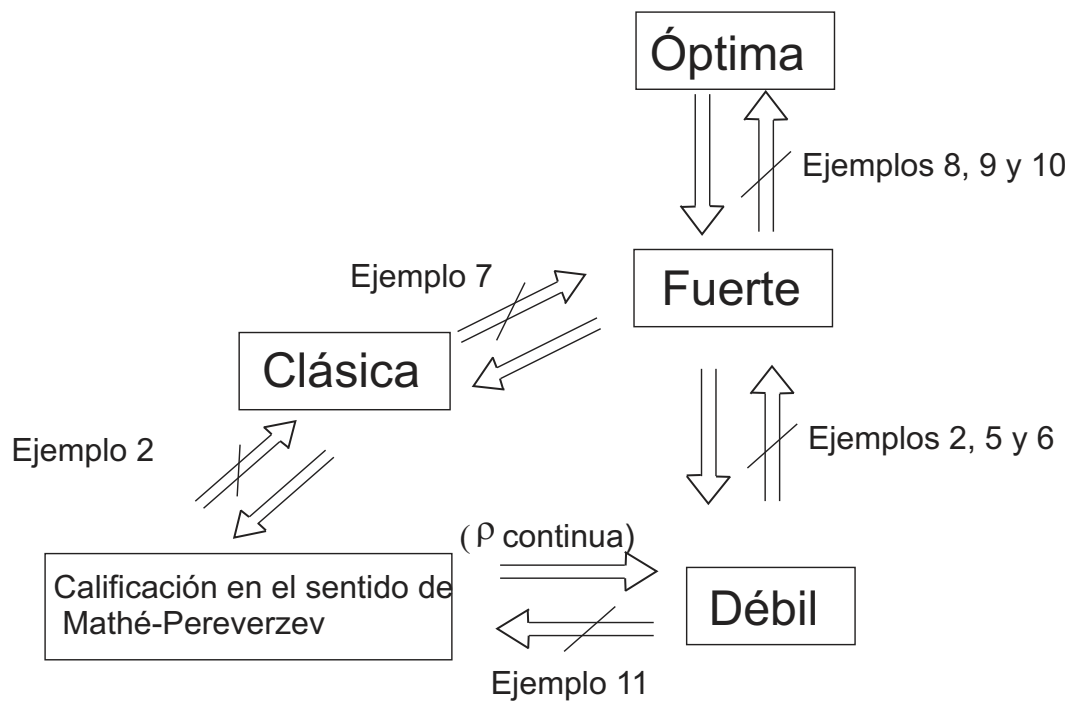


Figura 7.1: Relación entre los diferentes niveles de calificación, la calificación clásica y la definida en [44].

algunos resultados en esta dirección.

Para $s \in \mathcal{S}$, entenderemos por “conjunto fuente asociado a la función s y al operador T ” al conjunto $\text{Ran}(s(T^*T))$. En todo lo que sigue, la hipótesis $s \in \mathcal{S}$ puede ser reemplazada por $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continua sobre $\sigma(T^*T)$ y $s \in \mathcal{M}_0$, donde \mathcal{M}_0 como en la Sección 1.3 denota el conjunto de todas las funciones medibles con respecto a la medida $d\|E_\lambda x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

El siguiente resultado directo, por un lado pone de manifiesto la importancia del concepto de “par débil fuente-orden” y por otro lado muestra la relación existente entre la función fuente y el orden de convergencia en tales pares. Asimismo, echa luz sobre la importancia del concepto de calificación débil introducido en la Definición 7.6 (i). Brevemente, este resultado afirma que si la solución exacta x^\dagger del problema $Tx = y$ pertenece al conjunto fuente $\text{Ran}(s(T^*T))$ y (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, entonces el error de regularización $\|R_\alpha y - x^\dagger\|$ tiene orden de convergencia $\rho(\alpha)$.

Teorema 7.13. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}$ un MRE que posee calificación débil ρ y $s \in \mathcal{S}$ tal que (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Si $x^\dagger \doteq T^\dagger y \in \text{Ran}(s(T^*T))$ entonces $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

Demostración. Sean (s, ρ) un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y $x^\dagger \in \mathcal{R}(s(T^*T))$. Entonces existe $w \in X$ tal que $x^\dagger = s(T^*T)w$. De esto y (3.8) se sigue que

$$\begin{aligned} \|(R_\alpha - T^\dagger)y\|^2 &= \|r_\alpha(T^*T) x^\dagger\|^2 \\ &= \|r_\alpha(T^*T) s(T^*T)w\|^2 \\ &= \int_0^{\|T\|^2+} [r_\alpha(\lambda) s(\lambda)]^2 d\|E_\lambda w\|^2. \end{aligned}$$

Puesto que (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, existen constantes positivas k y ε tales que $s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)| \leq k \rho(\alpha)$ para todos $\lambda > 0$, $\alpha \in (0, \varepsilon)$. Luego,

$$\|(R_\alpha - T^\dagger)y\|^2 \leq k^2 \rho^2(\alpha) \int_0^{\|T\|^2+} d\|E_\lambda w\|^2 = k^2 \rho^2(\alpha) \|w\|^2 \quad \forall \alpha \in (0, \varepsilon),$$

y por lo tanto $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. ■

Observación 7.14. El resultado anterior es una generalización del Corolario 3.7 al caso de MRE con calificación débil y conjuntos fuente generales. En efecto, ese Corolario corresponde al caso particular en que $\{g_\alpha\}$ tiene calificación clásica de orden μ .

El siguiente resultado recíproco afirma que si el error de regularización tiene orden de convergencia $\rho(\alpha)$ y (ρ, s) es un par orden-fuente entonces la solución exacta pertenece al rango del operador $s(T^*T)$.

Teorema 7.15. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}$ un MRE. Si (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$ y $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, entonces $x^\dagger \in \text{Ran}(s(T^*T))$.

Demostración. Como $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = O(\rho(\alpha))$ para $\alpha \rightarrow 0^+$, existen constantes positivas k y ε tales que

$$\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| \leq k\rho(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, \varepsilon). \quad (7.16)$$

Debido a que (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$, existen $\gamma > 0$ y una función $h : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0 \quad (7.17)$$

tales que se satisface (7.3). Para ver que $x^\dagger \in \text{Ran}(s(T^*T))$ debemos probar que $\int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{s^2(\lambda)} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2$ es finito. Para ello, observar que

$$\begin{aligned} \int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{s^2(\lambda)} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{h(\alpha)}^{\|T\|^2+} \frac{1}{s^2(\lambda)} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \quad (\text{por (7.17)}) \\ &\leq \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{h(\alpha)}^{\|T\|^2+} \frac{r_\alpha^2(\lambda)}{\gamma^2 \rho^2(\alpha)} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \quad (\text{en virtud de (7.3)}) \\ &= \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\gamma^2 \rho^2(\alpha)} \int_{h(\alpha)}^{\|T\|^2+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \\ &\leq \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\gamma^2 \rho^2(\alpha)} \int_0^{\|T\|^2+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \\ &= \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\gamma^2 \rho^2(\alpha)} \|r_\alpha(T^*T)x^\dagger\|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\gamma^2 \rho^2(\alpha)} \|(R_\alpha - T^\dagger)y\|^2 \right) \\
&\leq \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\gamma^2 \rho^2(\alpha)} k^2 \rho^2(\alpha) \right) \quad (\text{por (7.16)}) \\
&= \frac{k^2}{\gamma^2} < \infty,
\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba del teorema. ■

Es oportuno observar que el Teorema anterior puede verse como una generalización del Teorema 3.12. En efecto, este último corresponde al caso particular en que $s(\lambda) \doteq \lambda^\mu$ y $\rho(\alpha) \doteq \alpha^\mu$. Si además ρ es calificación óptima entonces también vale el recíproco del Teorema 7.15, como se prueba a continuación.

Corolario 7.16. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\{g_\alpha\}$ un MRE que posee calificación óptima ρ . Si $s_\rho \in \mathcal{S}$, entonces $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ si y sólo si $x^\dagger \in \text{Ran}(s_\rho(T^*T))$.

Demostración. Sean ρ calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ y $s_\rho \in \mathcal{S}$. Entonces por el Teorema 7.11, (ρ, s_ρ) es par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$ y como $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, se sigue del Teorema 7.15 que $x^\dagger \in \text{Ran}(s_\rho(T^*T))$.

Recíprocamente, si $x^\dagger \in \text{Ran}(s_\rho(T^*T))$, como en virtud del Teorema 7.11 se sigue que (s_ρ, ρ) es par fuerte fuente-orden, y por lo tanto un par débil fuente-orden, el Teorema 7.13 implica que $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. ■

El Corolario 7.16 pone de manifiesto la importancia del concepto de “calificación óptima”, a la vez que muestra claramente la “dualidad” existente entre la calificación óptima ρ , como orden de convergencia y los correspondientes conjuntos fuente determinados por la función fuente s_ρ asociada a ρ .

Otro resultado importante en lo que respecta a la existencia y maximalidad de conjuntos fuente es el siguiente: si ρ es calificación fuerte de un MRE y $s_\rho \in \mathcal{S}$ entonces

$Ran(s_\rho(T^*T))$ es un conjunto fuente maximal donde ρ es orden de convergencia del error de regularización. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 7.17. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $s \in \mathcal{S}$ y $\{g_\alpha\}$ un MRE que posee calificación fuerte ρ tal que $s_\rho \in \mathcal{S}$. Si (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y $Ran(s(T^*T)) \supset Ran(s_\rho(T^*T))$ entonces $Ran(s(T^*T)) = Ran(s_\rho(T^*T))$.

Demostración. Si (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden, por el Teorema 7.9, existe $k > 0$ tal que $s(\lambda) \leq k s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$, lo cual implica que $Ran(s(T^*T)) \subset Ran(s_\rho(T^*T))$. ■

Si además ρ es calificación óptima se obtiene el siguiente resultado, aún más fuerte.

Teorema 7.18. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $s \in \mathcal{S}$ y $\{g_\alpha\}$ un MRE que posee calificación óptima ρ tal que $s_\rho \in \mathcal{S}$. Entonces $Ran(s_\rho(T^*T))$ es el único conjunto fuente donde ρ es orden de convergencia del error de regularización.

Demostración. Este resultado se sigue inmediatamente de los Teoremas 7.11 y 7.17. ■

Presentamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 7.19. Hemos visto en el Ejemplo 1 de la Sección 7.2 que $\rho(\alpha) \doteq \alpha$ es calificación óptima del método de Tikhonov-Phillips. Como $s_\rho(\lambda) = \lambda \in \mathcal{S}$, se sigue del Teorema 7.18 que el único conjunto fuente donde α es orden de convergencia del error de regularización es $Ran(s_\rho(T^*T)) = Ran(T^*T)$.

Ejemplo 7.20. En el Ejemplo 4 de la Sección 7.2 probamos que $\rho(\alpha) \doteq -(\ln \alpha)^{-1}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ y que $s_\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. Puesto que $s_\rho \in \mathcal{S}$ se sigue del Teorema 7.18 que $Ran(s_\rho(T^*T)) = Ran(T^*T)$ (pues $\frac{\lambda}{1+\lambda} \approx \lambda$) es el único conjunto fuente donde ρ es orden de convergencia del error de regularización.

Ejemplo 7.21. En el Ejemplo 9 de la sección 7.2, para $\rho(\alpha) \doteq e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ se tiene que $s_\rho(\lambda) = \lambda^{1/2}$. Como ρ es calificación fuerte del MRE, se sigue que $Ran(s_\rho(T^*T)) =$

$Ran((T^*T)^{1/2})$ es un conjunto fuente maximal donde ρ es orden de convergencia del error de regularización.

Ejemplo 7.22. Como mencionamos en el Ejemplo 11 de la Sección 7.2, $\rho(\alpha) \doteq e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ es calificación débil del método de Showalter. Se puede ver fácilmente que para cualquier $s \in \mathcal{S}$, (s, ρ) es un par débil fuente-orden para el método. Por lo tanto, se sigue del Teorema 7.13 que el error de regularización $\|R_\alpha y - x^\dagger\|$ tiene orden de convergencia $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ siempre que $x^\dagger \in \bigcup_{s \in \mathcal{S}} Ran(s(T^*T))$.

Capítulo 8

Aplicaciones y resultados numéricos

Si bien los resultados presentados en esta tesis son predominantemente teóricos, consideramos razonable incluir este capítulo con el objetivo de ilustrar diversas aplicaciones e implicaciones de los métodos y resultados presentados en los capítulos anteriores en problemas concretos. En las Secciones 8.1 y 8.2 presentaremos dos problemas inversos en conducción de calor: la ecuación lateral del calor y la ecuación del calor hacia atrás en el tiempo (introducida en el Ejemplo 1.2.1). Finalmente, con el objeto de presentar aplicaciones muy concretas que permitan una clara visualización de los resultados, en las Secciones 8.3 y 8.4 hacemos una breve incursión al interesante problema de restauración de imágenes, que se presenta en diversas áreas tales como Astronomía y Medicina. Allí mostramos primero cómo funcionan algunos de los métodos de regularización espectrales que fueron introducidos como ejemplos en la Sección 7.2, para obtener soluciones regularizadas a partir de imágenes degradadas y luego presentamos algunos resultados numéricos sobre los conceptos de calificación fuerte y óptima que hemos introducido en la Sección 7.1, aplicados al problema de restauración de imágenes.

8.1. La ecuación lateral del calor

Consideramos aquí el problema de determinar el flujo de calor en un extremo de una barra metálica a partir de mediciones de la temperatura ó del flujo en el otro extremo. Es bien sabido que este problema es fuertemente mal condicionado: pequeñas perturbaciones en los datos pueden causar errores muy grandes en la solución (ver por ejemplo [12], [23]). Siguiendo los resultados de P. Jonas y A. K. Louis ([32]), definimos

$$\begin{aligned} Q_T &\doteq (0, 1) \times (0, T) \\ H^{1,0}(Q_T) &\doteq \{u \in L^2(Q_T) : u_x \in L^2(Q_T)\} \\ H^{1,1}(Q_T) &\doteq \{u \in L^2(Q_T) : u_x \text{ y } u_t \in L^2(Q_T)\} \\ V^{1,0}(Q_T) &\doteq C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2((0, T); H^1(0, 1)) \end{aligned}$$

y consideramos el problema de valores iniciales y de frontera

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde $f \in L^2(0, T)$. Una solución débil de este problema es una función $u \in V^{1,0}(Q_T)$ que satisface

$$\int_{Q_T} (-u\eta_t + u_x\eta_x) dx dt = \int_0^T u_x(1, t)\eta(1, t) dt$$

para cada $\eta \in H^{1,1}(Q_T)$. D. N. Hào ([27]) probó que si $f \in L^2(0, T)$, entonces existe una única solución débil del problema (8.1). Definimos ahora el operador $L : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ que mapea el flujo en el extremo derecho en la temperatura en el extremo izquierdo, es decir $L(f) = u|_{x=0}$ donde u es la única solución débil del problema (8.1). Entonces L está bien definido porque u es única y el mapeo $H^{1,0}(Q_T) \rightarrow L^2(0, T)$ sobre

la frontera es continuo. El problema inverso consiste en determinar el flujo de calor $f(t) = u_x(1, t)$ en el extremo derecho de la ecuación $Lf = g$, donde $g(t) \doteq u(0, t)$ es la temperatura conocida en el extremo izquierdo. Se plantea de la siguiente manera: Dada $g(t)$, determinar $f(t) = u_x(1, t)$ donde $u(x, t)$ es solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(0, t) = g(t), & 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (8.2)$$

En 1996, bajo ciertas condiciones generales sobre la función g , D. N. Hào y H.-J. Reinhardt ([23]) probaron que el problema inverso (8.2) tiene solución única.

Es importante señalar que para este problema no se dispone de una expresión explícita del sistema singular asociado al operador correspondiente al problema directo. Sin embargo, como veremos a continuación, el operador adjunto es bien conocido. Por tales motivos, para resolver esta clase de problemas inversos resulta apropiado utilizar el método de la inversa aproximada introducido en la Sección 2.4. Para ello, dado un molificador $m_\gamma(\cdot, \cdot)$ necesitamos hallar para cada instante de tiempo $t \in (0, T)$ el núcleo de reconstrucción ψ_γ^t tal que

$$L^* \psi_\gamma^t(\cdot) = m_\gamma(t, \cdot). \quad (8.3)$$

Definimos ahora el problema adjunto:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t') = -\frac{\partial v}{\partial t'}(x, t'), & (x, t') \in Q_T, \\ v(x, T) = 0, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, t') = 0, & 0 < t' \leq T, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t') = \tilde{f}(t'), & 0 < t' \leq T, \end{cases} \quad (8.4)$$

donde $\tilde{f} \in L^2(0, T)$. Una solución débil del problema (8.4) es una función $v \in V^{1,0}(Q_T)$ que satisface

$$\int_{Q_T} (v\eta_t + v_x\eta_x) \, dx \, dt = \int_0^T v_x(0, t)\eta(0, t) \, dt$$

para cada $\eta \in H^{1,1}(Q_T)$. Si reemplazamos t' en (8.4) por $t = T - t'$ se obtiene el mismo problema que en (8.1). Luego, el operador $L^* : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$, dado por $L^*(\tilde{f}) = v|_{x=1}$, donde v es la solución débil del problema (8.4), está bien definido. Una consecuencia directa del Teorema 1.11.1 de D. N. Hào ([27]) es que el operador L^* es el operador adjunto de L con respecto al producto interno en $L^2(0, T)$. Utilizamos el método de la inversa aproximada para aproximar la solución f del problema inverso por los momentos $\langle f, m_\gamma(t, \cdot) \rangle$, para lo cual resolvemos primero el problema adjunto con

$$L^*v_x(0, t, t') = m_\gamma(t, t'), \quad (8.5)$$

donde $t \in (0, T)$ es el tiempo de reconstrucción. De (8.3) y (8.5), resulta que el núcleo de reconstrucción en el instante t está dado por $\psi_\gamma^t(t') = \frac{\partial}{\partial x}v(0, t, t')$.

Puesto que el molificador m_γ se conoce exactamente, usando separación de variables o descomposición Adomiana es posible calcular la función $v_x(0, t, t')$ (ver [32]). De este modo si m_γ es de clase C^∞ se obtiene que

$$\psi_\gamma^t(t') = \frac{\partial}{\partial x}v(0, t, t') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{\partial^n m_\gamma^t(t')}{\partial t'^n}, \quad (8.6)$$

donde $m_\gamma^t(t') = m_\gamma(t, t')$.

Por último, con el núcleo de reconstrucción y el dato se calcula la solución molificada del flujo en el extremo derecho utilizando (2.41). La aplicación del método de la inversa aproximada se puede entonces dividir en dos partes: primero, el cálculo del núcleo de reconstrucción a partir del molificador elegido (lo cual se realiza “*a-priori*”, antes de la obtención del dato) y segundo, la inversión propiamente dicha a partir del dato, de la cual se obtiene una versión molificada de la solución o solución “regularizada” o “reconstruída”.

Resultados numéricos

Aplicaremos aquí el método de la inversa aproximada para obtener aproximaciones estables del flujo a derecha, en primer lugar a partir de datos exactos en el extremo izquierdo y luego, a partir de datos con ruido. En este caso, usaremos el molificador Gaussiano (2.44) por sus propiedades de regularidad que nos permiten utilizar (8.6) y su propiedad de invariancia que genera núcleos de tipo convolución. Esto permite reducir en gran parte los esfuerzos computacionales ([32]). Así por ejemplo si definimos $\Psi_\gamma(t') \doteq \psi_\gamma(0, t')$ se tiene que $\psi_\gamma(t, t') = \Psi_\gamma(t - t')$ para todo t, t' . Por lo tanto, sólo es necesario calcular el núcleo de reconstrucción en $t = 0$. En primer lugar elegimos $M \in \mathbb{N}$ y aproximamos (8.6) con la suma finita

$$\psi_\gamma^t(t') \cong \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{\partial^n m_\gamma^t(t')}{\partial t'^n}. \quad (8.7)$$

En la Figura 8.1 se muestra el núcleo de reconstrucción calculado en $t = 0$ usando (8.7) con $M = 20$ y $\gamma = 0,02$. Es oportuno señalar que en este caso no es posible

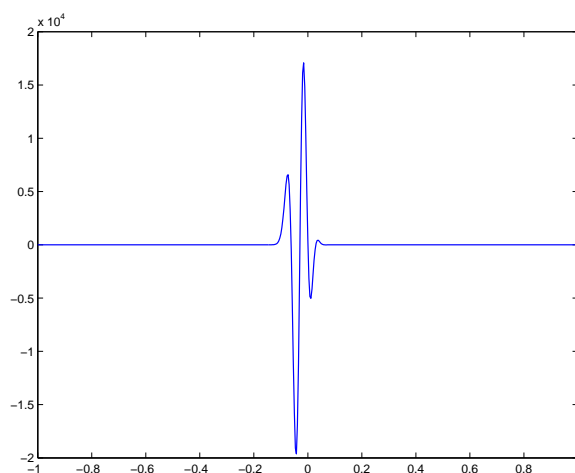


Figura 8.1: Núcleo de reconstrucción en $t = 0$ con $\gamma = 0,02$.

reconstruir el flujo de calor en $t = T$ a partir de datos conocidos solamente en $[0, T]$ (ver L. Eldén [11]). P. Jonas y A. K. Louis ([32]) sugieren trabajar con datos en el

intervalo $[0, T + 5\gamma]$, donde γ es el parámetro de regularización. Consideramos entonces N instantes de reconstrucción en el intervalo $[0, T + 5\gamma]$ y los denotamos con t_j para $j = 1, \dots, N$. A modo de ejemplo tomamos como flujo en el extremo derecho

$$u_x(1, t) = f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0.1, 0.3] \cup [0.4, 0.6] \cup [0.7, 0.9] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este es un buen ejemplo para mostrar la eficiencia del método de la inversa aproximada puesto que f no es continua en el intervalo $[0, 1]$, y por lo tanto para obtener una aproximación razonable con cualquier método clásico serían necesarias componentes de alta frecuencia, las que harían muy inestable el problema. Para este ejemplo, el dato “artificial”, es decir, la temperatura en el extremo izquierdo $u(0, t)$, $0 \leq t \leq T$, se obtuvo resolviendo numéricamente el problema directo con $T = 1$. En la Figura 8.2 se muestra la evolución de la temperatura. En la Figura 8.3 se muestran el flujo a derecha

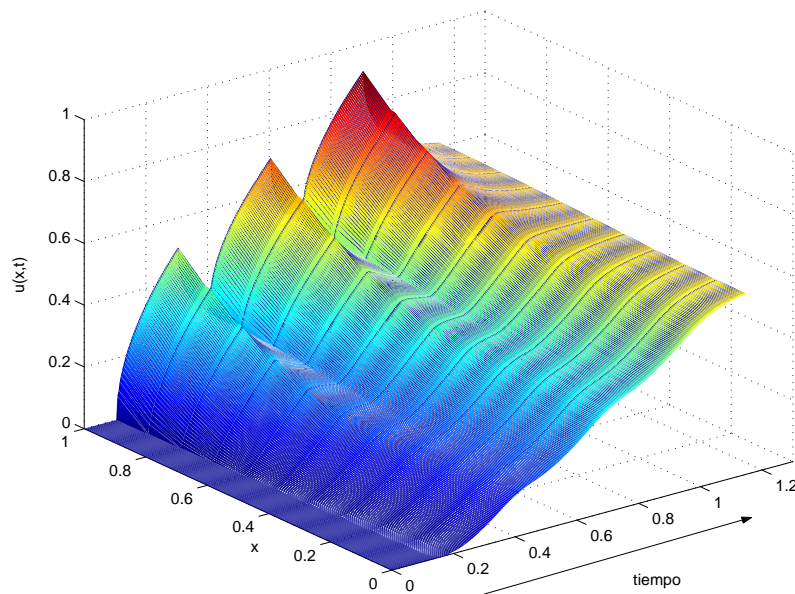


Figura 8.2: Evolución de la temperatura correspondiente al flujo a derecha $f(t)$.

$f(t)$ y el reconstruido a partir del dato exacto con $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,02$. Puede

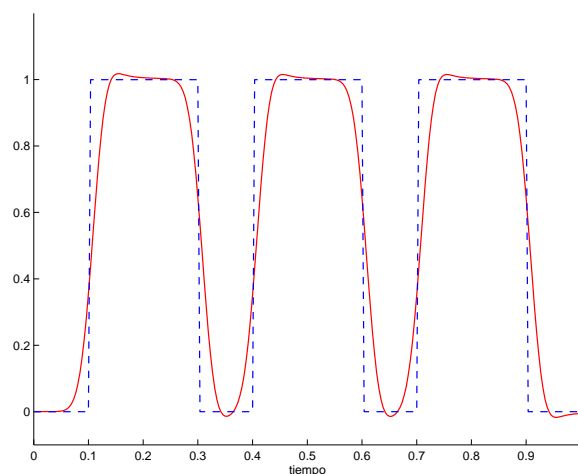


Figura 8.3: Solución exacta (---) y solución reconstruida (—) a partir del dato exacto con $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,02$.

observarse que el método permite hallar una buena aproximación de f .

Para analizar la robustez del método ante la presencia de ruido, se calcularon reconstrucciones del flujo a partir de datos a los que se les agregaron diferentes niveles de ruido. Consideraremos datos perturbados de la forma

$$\tilde{g} = g + \epsilon, \quad (8.8)$$

donde ϵ es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y desviación estandar

$$\sigma = (k/100) \|g\|_{\infty}. \quad (8.9)$$

Aquí k es el porcentaje de ruido como función de $\|g\|_{\infty}$ que se adiciona al dato g para simular errores de medición. En las Figuras 8.4 y 8.5 se muestran las versiones modificadas del flujo obtenidas a partir de datos con un 1% de nivel de ruido ($k = 1$), $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,04$ en el primer caso y 3% de ruido ($k = 3$), $N = 400$, $M = 20$ y $\gamma = 0,045$, en el segundo, mientras que para la reconstrucción que se muestra en la Figura 8.6, se consideró un ruido de baja magnitud y alta frecuencia $r(t) = 5 \times 10^{-3} \text{sen}(100t)$. Como es de esperar, al aumentar el nivel de ruido en el dato,

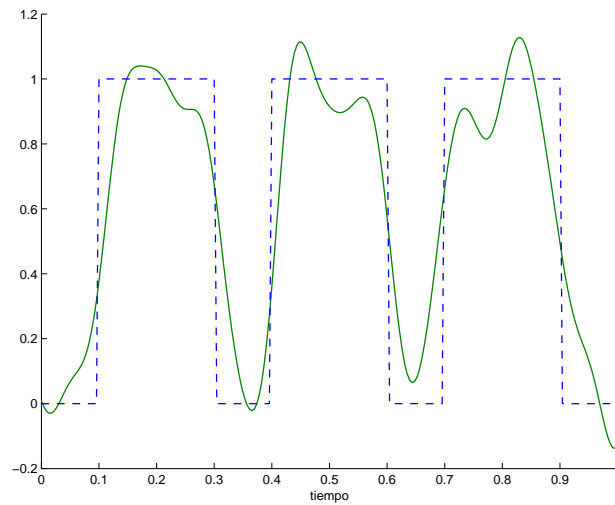


Figura 8.4: Solución exacta (- - -) y solución reconstruida (—) a partir de un dato perturbado con un 1% de nivel de ruido ($k = 1$), $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,04$.

se obtiene una aproximación menos exacta, aunque aún en este caso la aproximación sigue siendo estable y el método es capaz de proveer una razonable cantidad de información sobre la solución. Es oportuno mencionar aquí que un ruido de esta naturaleza haría fuertemente inestable y absolutamente inviable la aplicación de cualquier método clásico de aproximación.

Se obtuvieron buenas aproximaciones de las soluciones, ya sea que el método se aplique a partir de datos exactos como de datos con distintos niveles de ruido. Desde el punto de vista computacional su implementación es sencilla y rápida. La principal ventaja radica en que dado el molificador, el cálculo del núcleo de reconstrucción se puede realizar antes de la obtención de los datos, lo cual permite utilizarlo en la reconstrucción de soluciones correspondientes a diferentes datos. Asimismo, la inversa aproximada consiste en un producto interno cuyo cálculo es apropiado para procesamiento en paralelo en casos de grandes dimensiones.

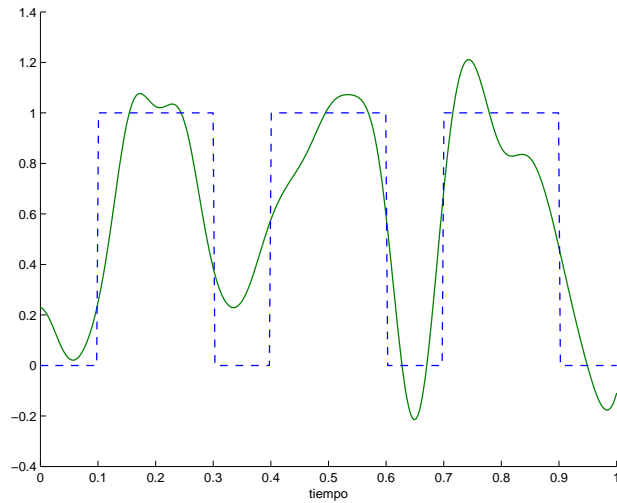


Figura 8.5: Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con un 3% de nivel de ruido ($k = 3$), $N = 400$, $M = 20$ y $\gamma = 0,045$.

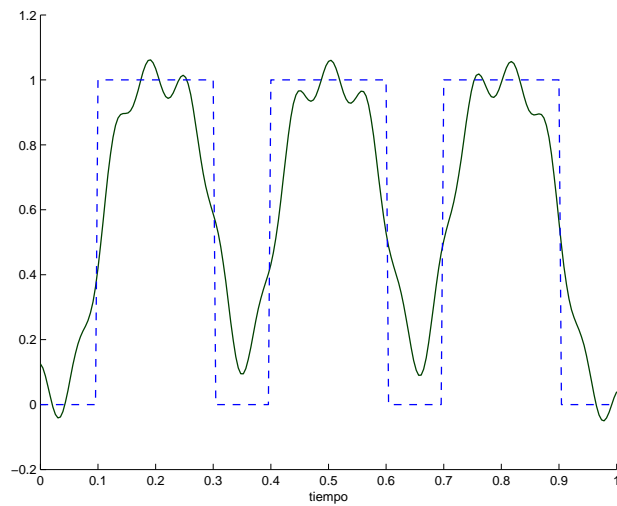


Figura 8.6: Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con ruido $r(t) = 0,005 \sin(100t)$, $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,035$.

8.2. La ecuación del calor hacia atrás en el tiempo

Al igual que en la Sección 1.2.1, por simplicidad, consideraremos sólo el caso unidimensional. Recordemos en qué consiste este problema inverso. Supongamos que $u(x, t)$ es solución de la ecuación de difusión en un sólido unidimensional homogéneo $\Omega = [0, \pi]$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0, \quad (8.10)$$

con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogéneas:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (8.11)$$

de modo que $u(x, t)$ denota la temperatura del punto x en el instante de tiempo t . Nuestro problema consiste en, dada la temperatura final en $t = T$

$$g(x) \doteq u(x, T), \quad x \in [0, \pi],$$

con $g(0) = g(\pi) = 0$, determinar la temperatura inicial

$$f(x) \doteq u(x, 0), \quad x \in [0, \pi]. \quad (8.12)$$

Definiendo el operador integral

$$\begin{aligned} K : L^2[0, \pi] &\rightarrow L^2[0, \pi] \\ f(\cdot) &\rightarrow (Kf)(x) \doteq \int_0^\pi k(x, \tau) f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

se puede ver que el problema inverso consiste en resolver la ecuación integral de Fredholm de primera clase

$$g(x) = \int_0^\pi k(x, \tau) f(\tau) d\tau,$$

donde

$$k(x, \tau) \doteq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \operatorname{sen}(n\tau) \operatorname{sen}(nx),$$

es decir, en resolver la ecuación

$$Kf = g. \tag{8.13}$$

Nos referiremos a éste como “el problema BHE” (por “Backwards Heat Equation”)

Como vimos en la Sección 1.2.1, el operador K es compacto con sistema singular

$$\left\{ \left(e^{-n^2T}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx) \right) \right\}$$

y el problema inverso (8.13) es severamente mal condicionado. Sea

$$g_n \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(\tau) \text{sen}(n\tau) d\tau$$

el n -ésimo coeficiente de Fourier generalizado del dato g . Recordemos que según el criterio de Picard (ver (1.17)), el problema (8.13) tiene solución de mínimos cuadrados si y sólo si

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{|g_n|^2}{(e^{-n^2T})^2} = \sum_{n=1}^\infty e^{2n^2T} |g_n|^2 < \infty. \tag{8.14}$$

En tal caso, la solución de mínimos cuadrados de mínima norma está dada por

$$f^\dagger(x) = (K^\dagger g)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^\infty e^{n^2T} g_n \text{sen}(nx). \tag{8.15}$$

8.2.1. Resolución del problema BHE por el método de la inversa aproximada

Veremos a continuación cómo se resuelve este problema utilizando el método de la inversa aproximada. En primer lugar se debe hallar para cada punto $s \in [0, \pi]$ el núcleo de reconstrucción $\psi_\gamma^s(\cdot)$ tal que $K^* \psi_\gamma^s(\cdot) = m_\gamma(s, \cdot)$, donde m_γ es un molificador elegido. Dado que en este caso el operador K es autoadjunto, resulta que el núcleo de reconstrucción ψ_γ^s es solución de la ecuación $K \psi_\gamma^s(\cdot) = m_\gamma(s, \cdot)$. Es decir, tenemos un problema inverso similar al original, pero ahora con dato exacto a derecha. Usando (8.15) se obtiene que

$$\psi_\gamma^s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^\infty e^{n^2T} m_{\gamma,n}^s \text{sen}(nx), \tag{8.16}$$

donde $m_{\gamma,n}^s \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi m_\gamma(s, \tau) \text{sen}(n\tau) d\tau$ es el n -ésimo coeficiente de Fourier del molificador $m_\gamma(s, \cdot)$. Por último, con el núcleo de reconstrucción y el dato g se calcula, para cada $s \in [0, \pi]$, la solución molificada del problema inverso utilizando (2.41).

Resultados numéricos

En primer lugar resolveremos este problema inverso usando el método de la inversa aproximada y luego, algunos métodos de filtro.

Para aplicar el método de la inversa aproximada consideramos N nodos o puntos de reconstrucción equidistantes en el intervalo $[0, \pi]$, a los que denotaremos con s_j , $j = 1, \dots, N$, y aproximamos (8.16) mediante la suma finita

$$\psi_\gamma^s(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^M e^{n^2 T} m_{\gamma,n}^s \text{sen}(nx). \quad (8.17)$$

Presentaremos varios ejemplos en los que calculamos una versión molificada de la temperatura inicial a partir del dato exacto. Luego, se obtendrán soluciones regularizadas a partir de datos perturbados. Supongamos además, que sólo se dispone de mediciones del dato g en los nodos s_1, s_2, \dots, s_N . Los puntos de reconstrucción pueden no coincidir con los de medición. Mas aún, la cantidad de ambos puede no ser la misma.

A modo de ilustración consideramos los siguientes tres perfiles iniciales de temperatura $u(x, 0)$:

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1], \\ 3 - x, & x \in (1, 2], \\ 1, & x \in [2, 2.5], \\ \frac{x-\pi}{2.5-\pi}, & x \in (2.5, \pi] \end{cases}$$

y

$$f_3(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x, & x \in [0, 1.5], \\ \frac{2.25(x-\pi)}{1.5-\pi}, & x \in (1.5, \pi]. \end{cases}$$

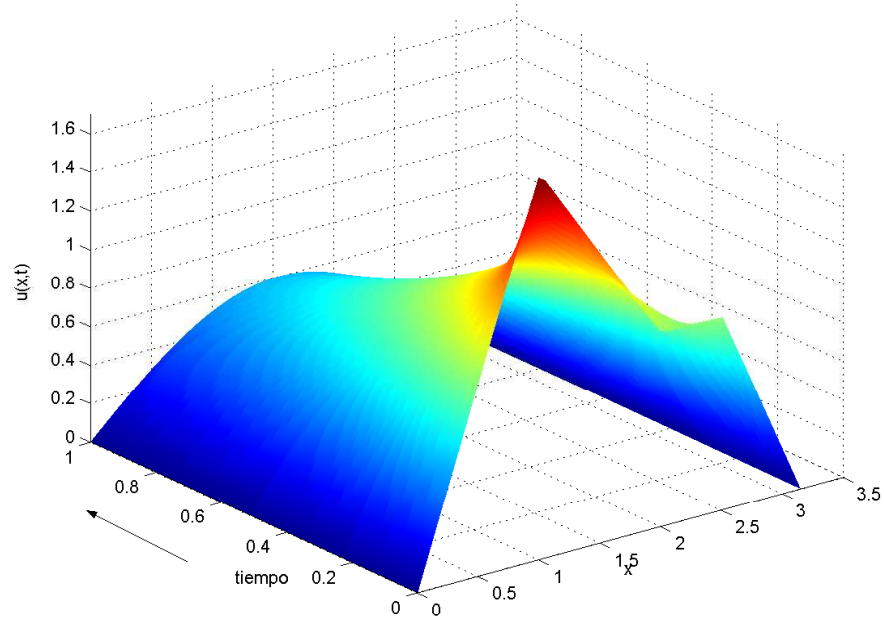


Figura 8.7: Evolución de la temperatura $u(x,t)$ con temperatura inicial f_2 .

Para obtener datos artificiales del problema inverso se resolvió primero el problema directo con temperatura inicial f_1 , f_2 o f_3 y tiempo final $T = 1$. En la Figura 8.7 se muestra la distribución de la temperatura para el perfil inicial f_2 .

Es interesante observar primero lo que ocurre si se intenta resolver este problema directamente invirtiendo el operador K , es decir, mediante la ecuación $f = K^{-1}g$. En la Figura 8.8 se muestra la solución obtenida a partir de un dato “exacto”, i.e. el dato resultante al resolver el problema directo con temperatura inicial f_2 . Aquí se ve claramente la inestabilidad producida por el fuerte mal condicionamiento del problema. En efecto, como señalamos en la Sección 1.2.1, cualquier intento por resolver numéricamente este problema con métodos tradicionales resulta infructuoso aún cuando el dato g se conozca en forma exacta (en este último caso debido a la amplificación de

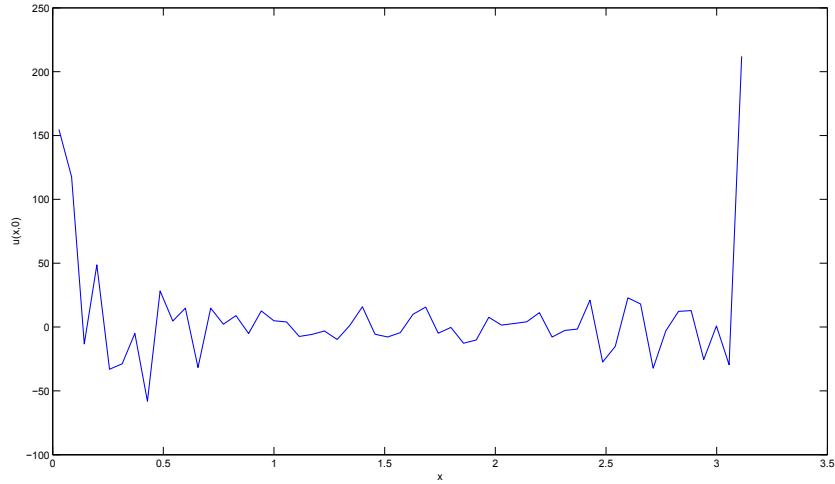


Figura 8.8: Solución obtenida invirtiendo el operador K a partir de un dato exacto.

los errores de discretización).

Apliquemos entonces el método de la inversa aproximada. Para ello, tomamos $N = 55$ puntos de reconstrucción y $M = 6$, donde M es el extremo superior de la suma en (8.17). Consideramos el molificador de promedios locales $m_\gamma(s_j, x)$ dado por (2.43), cuyo n -ésimo coeficiente de Fourier generalizado se puede ver fácilmente que es

$$m_{\gamma,n}^{s_j} = (\sqrt{2\pi} \gamma n)^{-1} [\cos(n(s_j - \gamma)) - \cos(n(s_j + \gamma))].$$

La Figura 8.9 muestra el núcleo de reconstrucción en el punto $s_{30} \approx 1,6872$ calculado a partir de (8.16) con $\gamma = 0,04$.

Las Figuras 8.10, 8.11 y 8.12 muestran las temperaturas iniciales f_1 , f_2 y f_3 y sus versiones molificadas obtenidas aplicando el método de la inversa aproximada a partir de cada uno de los correspondientes datos exactos (perfiles de temperatura en el instante $T = 1$), con parámetro γ igual a 0.04, 0.035 y 0.012, respectivamente. Se observa en estas gráficas que las reconstrucciones obtenidas son buenas aproximaciones de las soluciones exactas. También en este caso se puede ver que el método de la inversa

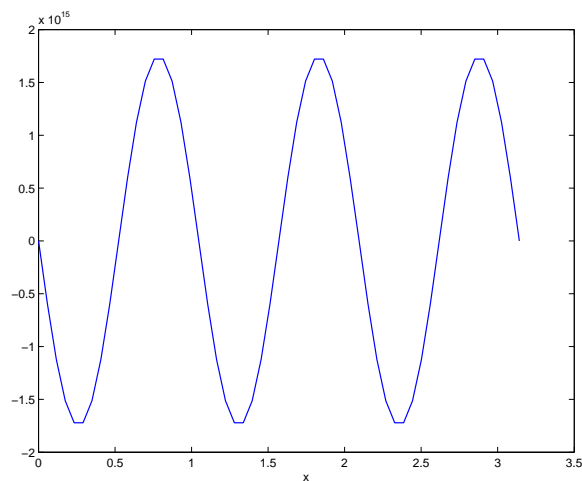


Figura 8.9: Núcleo de reconstrucción $\psi_\gamma^{s30}(x)$ con $\gamma = 0,04$.

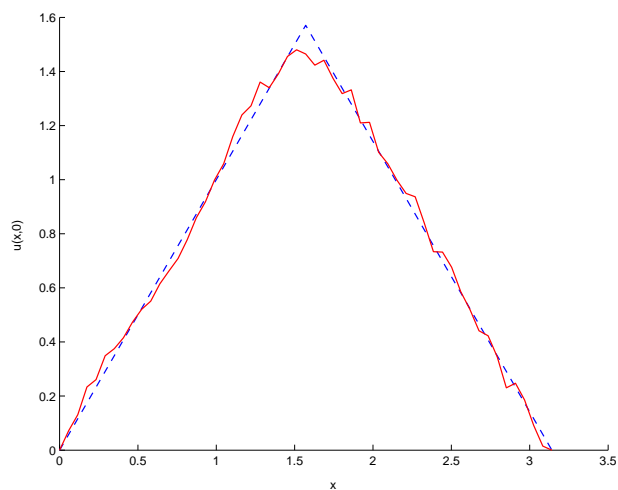


Figura 8.10: Solución exacta f_1 (- - -) y solución reconstruida (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,04$.

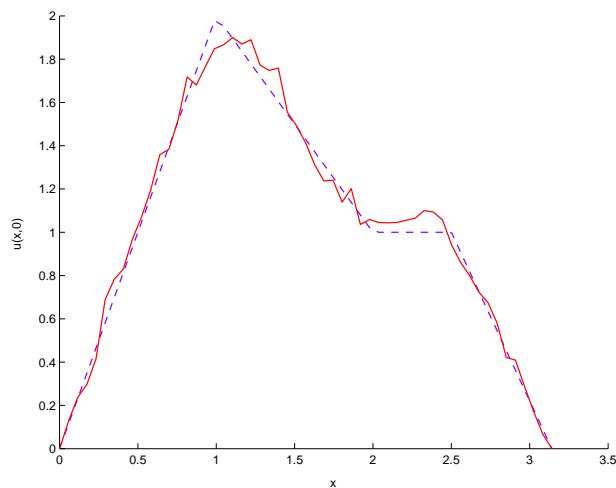


Figura 8.11: Solución exacta f_2 (- - -) y solución reconstruida (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,035$.

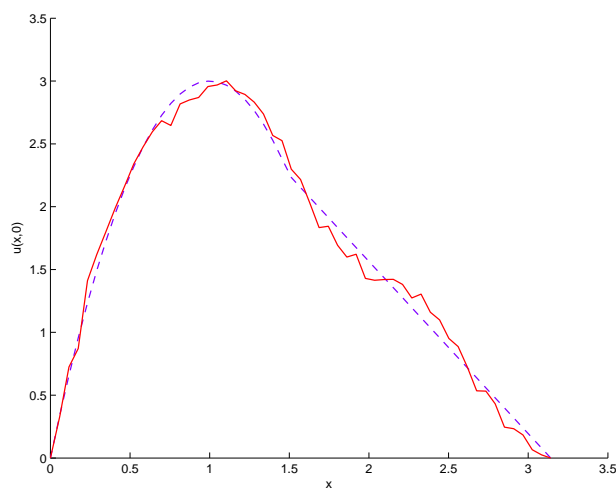


Figura 8.12: Solución exacta f_3 (- - -) y solución reconstruida (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,012$.

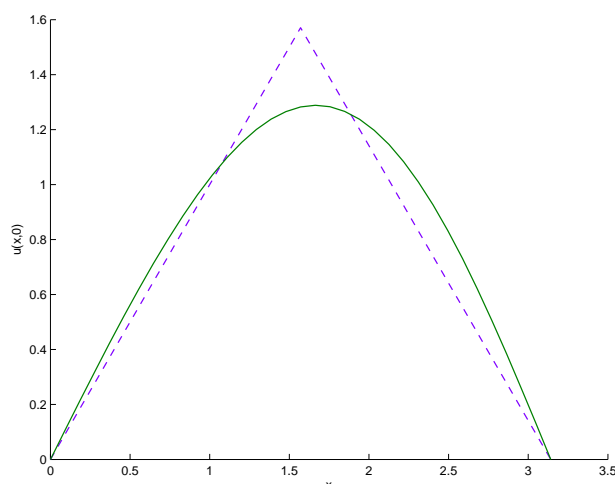


Figura 8.13: Solución exacta (- - -) y solución reconstruida (—) a partir de un dato perturbado con un 5% de nivel de ruido ($k = 5$), $N = 35$, $M = 2$, $\gamma = 0,018$ y $T = 1$.

aproximada resulta robusto ante la presencia de ruido. Para mostrar esto consideramos, al igual que en la Sección 8.1, datos perturbados de la forma (8.8), donde ϵ es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y desviación estandar dada por (8.9). Las Figuras 8.13 y 8.14 muestran las temperaturas iniciales f_1 y f_2 y las correspondientes reconstrucciones obtenidas a partir de datos con 5% de nivel de ruido ($k = 5$), $N = 35$, $M = 2$, $\gamma = 0,018$ y $T = 1$ en el primer caso, y 3% de nivel de ruido ($k = 3$), $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,042$ y $T = 1$ en el segundo. En ambos casos se utilizó el molificador de promedios locales (2.43).

Por último, analizamos otro ejemplo en el que la solución de (8.10), (8.11), (8.12) está dada por $u(x, t) = \sin x \exp(-t)$, $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, T]$. Este ejemplo es bastante riguroso a los efectos de poner a prueba la eficacia del método, debido a que $u(x, \cdot)$ decae rápidamente a cero a medida que t crece. La temperatura inicial en este caso es claramente $f(x) \doteq u(x, 0) = \sin x$.

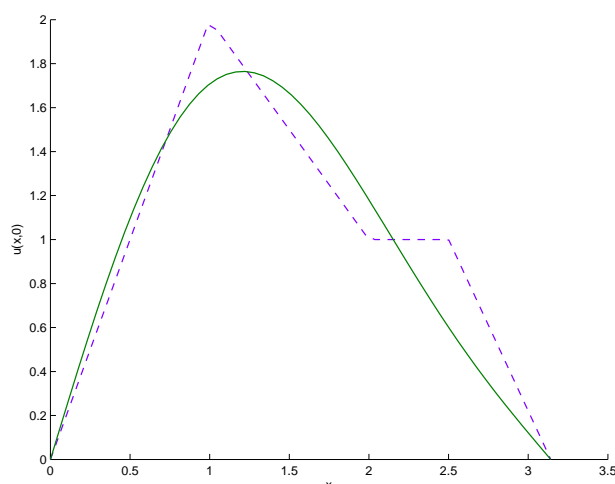


Figura 8.14: Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con un 3% de nivel de ruido ($k = 3$), $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,042$ y $T = 1$.

Consideramos el molificador lineal por tramos $m_\gamma(s_j, x)$ dado por (2.45), cuyo n -ésimo coeficiente de Fourier generalizado puede probarse que es

$$m_{\gamma,n}^{s_j} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\gamma n)^2} [2 \operatorname{sen}(ns_j) - \operatorname{sen}(n(s_j - \gamma)) - \operatorname{sen}(n(s_j + \gamma))].$$

La Figura 8.15 muestra la temperatura inicial y la reconstruída a partir del dato “exacto” con $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,015$ y tiempo final $T = 11$. Observamos que a pesar de que la magnitud del dato es del orden de 10^{-5} , lo cual es despreciable en comparación con la magnitud de la temperatura inicial, el método permite hallar una muy buena aproximación de la temperatura inicial.

En la Figura 8.16 se muestran la temperatura inicial y la reconstrucción que se obtuvo a partir de un dato con un 2% de nivel de ruido ($k = 2$), $N = 65$, $M = 2$ y $\gamma = 0,005$ y $T = 2$, observándose, aún en estas condiciones, una aproximación razonablemente buena.

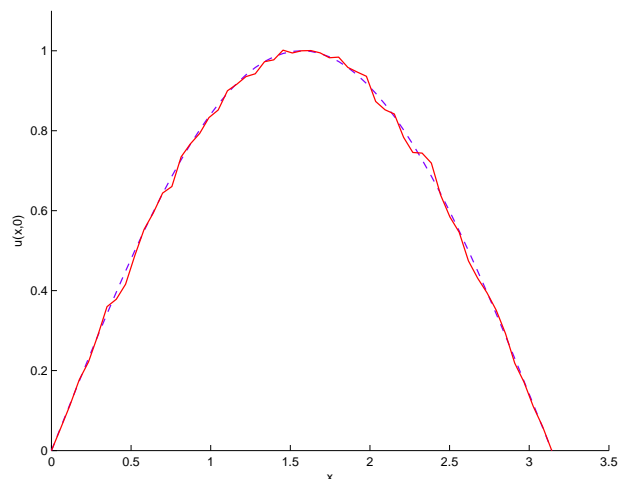


Figura 8.15: Solución exacta (- - -) y solución reconstruida (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,015$ y $T = 11$.

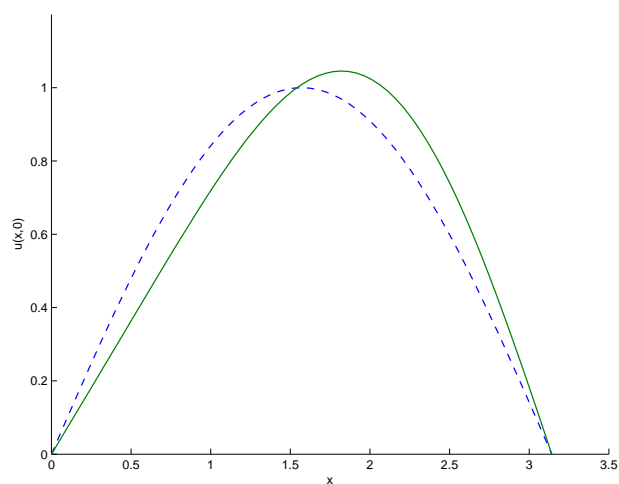


Figura 8.16: Solución exacta (- - -) y solución reconstruida (—) a partir de dato perturbado con un 2% de nivel de ruido ($k = 2$), $N = 65$, $M = 2$, $\gamma = 0,005$ y $T = 2$.

8.2.2. Resolución del problema BHE por métodos espectrales

En esta sección resolveremos el problema inverso (8.13) utilizando algunos métodos de regularización espectrales los que, puesto que el operador K es compacto, son también métodos de filtro (ver Sección 3.2.4). A partir de aquí llamaremos dato “exacto” al que se obtiene al resolver el problema directo con temperatura inicial f_2 y tiempo final $T = 1$. Como en el caso de la inversa aproximada, tomamos 55 puntos equidistantes en el intervalo $[0, \pi]$. En todos los casos se consideraron sólo 10 valores singulares.

Para los métodos de Tikhonov-Phillips y TSVD, se halló un valor del parámetro de regularización implementando los criterios de la curva L y validación cruzada generalizada (VCG) introducidos en la Sección 4.3. Para ello, utilizamos un paquete de programas para Matlab denominado “Regularization Tools” de P. C. Hansen (ver [19]). En las Figuras 8.17 y 8.18 se muestran los gráficos de la curva L y de la función VCG, respectivamente, para el método de Tikhonov-Phillips a partir del dato exacto. En ambos casos, se obtuvo $\alpha = 1,3978 \cdot 10^{-15}$ como parámetro de regularización.

La Figura 8.19 muestra la temperatura inicial f_2 y la solución regularizada que se obtuvo a partir del dato exacto usando el método de Tikhonov-Phillips con el parámetro de regularización dado anteriormente. En este caso, la solución regularizada obtenida es una muy buena aproximación de la solución exacta. Como no hay error asociado a ruidos, si se elige un parámetro de regularización α aún más pequeño, todavía se obtiene una aproximación estable de la solución. Esto puede verse en la Figura 8.20, donde se muestran la temperatura inicial f_2 y la regularizada a partir del dato exacto con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 10^{-30}$. Es oportuno observar que esta solución regularizada no difiere mucho de la obtenida con el parámetro determinado por los criterios de la curva L y VCG, lo cual está relacionado con el hecho que, como vimos en la Sección 2.2, el error de regularización $\|(R_\alpha - T^\dagger)y\|$ tiende a cero cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

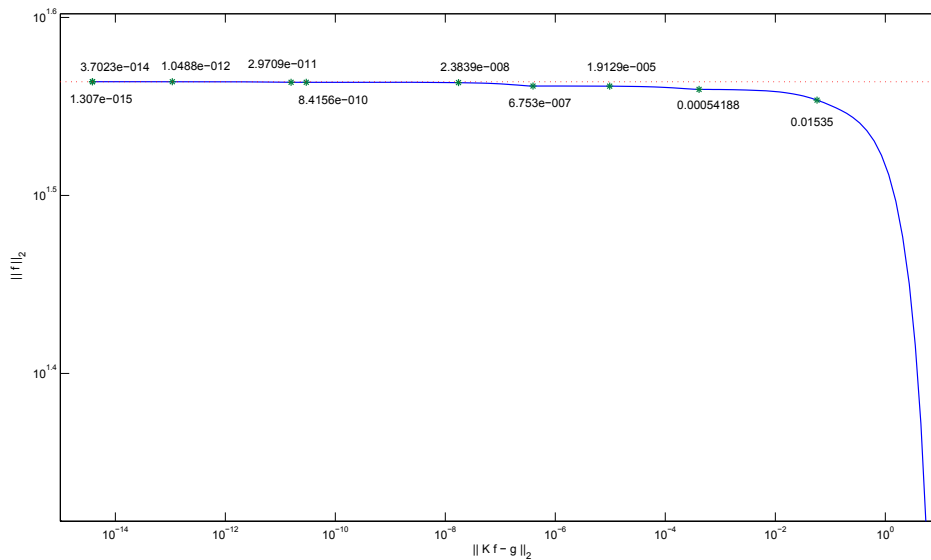


Figura 8.17: Curva L para el método de Tikhonov-Phillips con dato exacto.

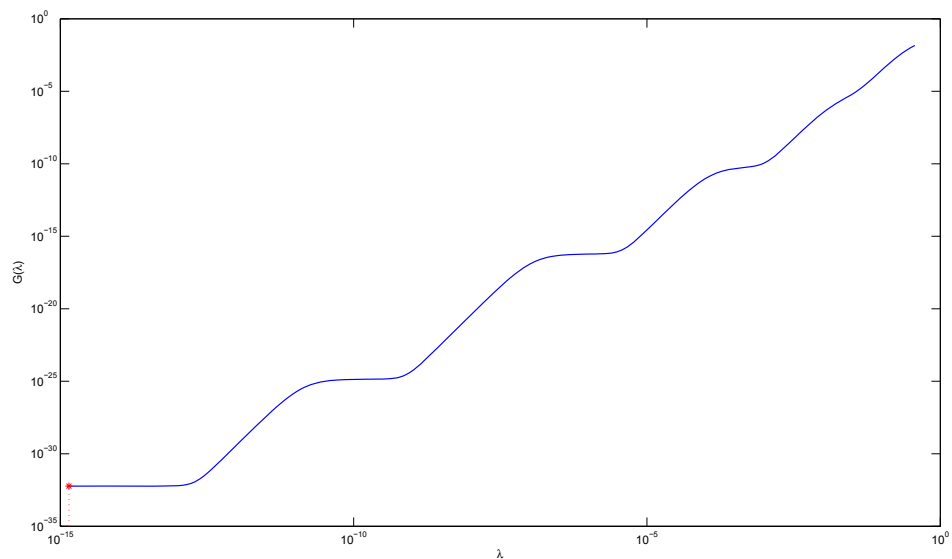


Figura 8.18: Función VCG para el método de Tikhonov-Phillips con dato exacto.

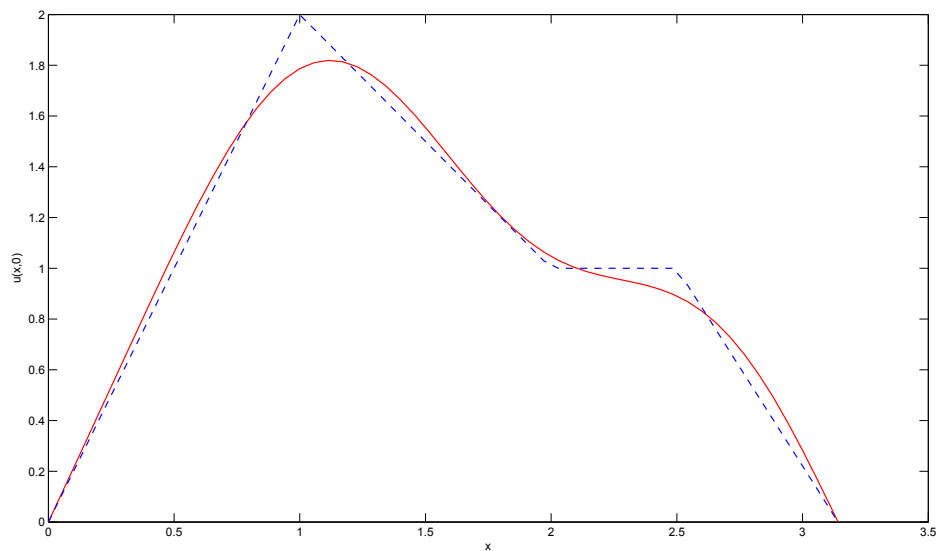


Figura 8.19: Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir del dato exacto con $\alpha = 1,3978 \cdot 10^{-15}$.

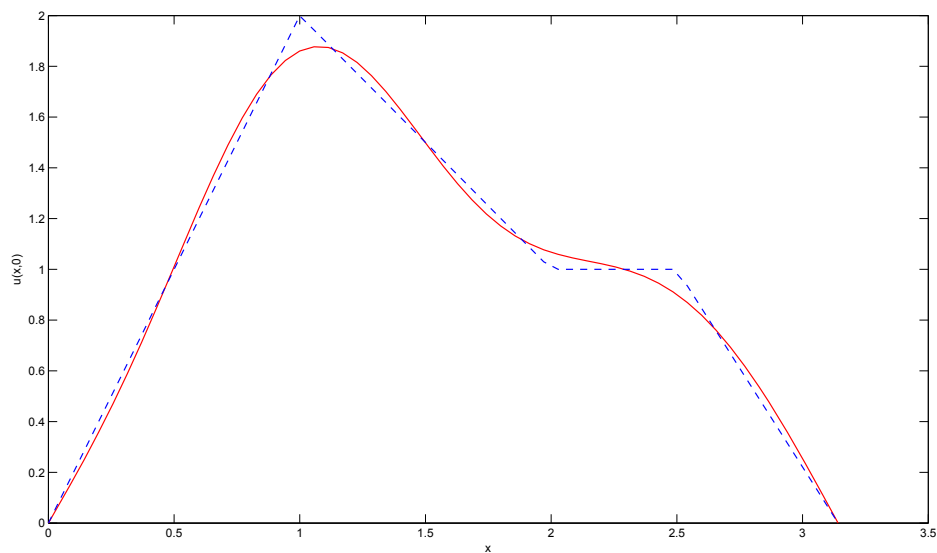


Figura 8.20: Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir del dato exacto con $\alpha = 10^{-30}$.

En las Figuras 8.21 y 8.22 se muestran los gráficos de la curva L y de la función VCG, respectivamente, para el método TSVD a partir del dato exacto. En este caso se obtienen los siguientes parámetros: $\alpha = 1,3888 \cdot 10^{-11}$ y $\alpha = 6,6397 \cdot 10^{-36}$, respectivamente. Observar que para este método (i.e. TSVD) las gráficas son discretas, pues la regla de elección de parámetros en este caso es discreta. La temperatura inicial f_2 y la solución regularizada a partir del dato exacto usando TSVD con cada uno de estos valores de α se muestran en las Figuras 8.23 y 8.24. En este caso, se ve que el parámetro dado por el criterio VCG permite obtener una mejor aproximación de la solución exacta. Para este ejemplo, se obtienen buenas aproximaciones de la solución exacta tanto con el método de Tikhonov-Phillips como con TSVD. Es importante observar que estas regularizaciones “suavizan” en el sentido que la reconstrucción no es buena cerca de los puntos angulosos. No ocurre lo mismo con el método de la inversa aproximada y el molificador de promedios locales, con el cual se obtienen soluciones más irregulares, como se puede ver en la Figura 8.11. Es oportuno mencionar aquí que el método de Tikhonov-Phillips, como se observa en las Figuras 8.19 y 8.20, tiende a producir aproximaciones “sobresuavizadas” que pueden resultar en la pérdida de las características de discontinuidad o irregularidad que posea la solución exacta. En algunos casos esto constituye un serio problema. Esto es así por ejemplo en aplicaciones a imágenes provenientes de la Medicina, donde la detección de bordes en las imágenes es de fundamental importancia. Recientemente varios autores ([2], [8], [63]) han propuesto una generalización del método de Tikhonov-Phillips que se conoce como “regularización de variación acotada” que posee la ventaja de no producir soluciones “sobresuavizadas”.

Analizaremos ahora qué ocurre con datos perturbados de la forma (8.8). Si invertimos directamente el operador a partir de datos con niveles de ruido del 1% y del 3% se obtienen las soluciones que se muestran en las Figuras 8.25 y 8.26, respectivamente. Como era de esperar, en presencia de ruido la inestabilidad es mayor que la que se

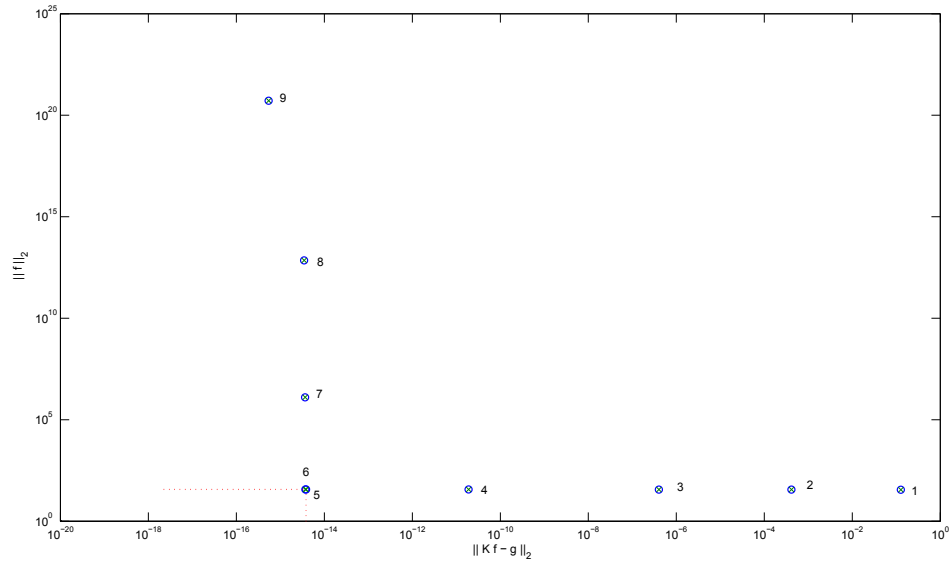


Figura 8.21: Curva L para el método TSVD con dato exacto.

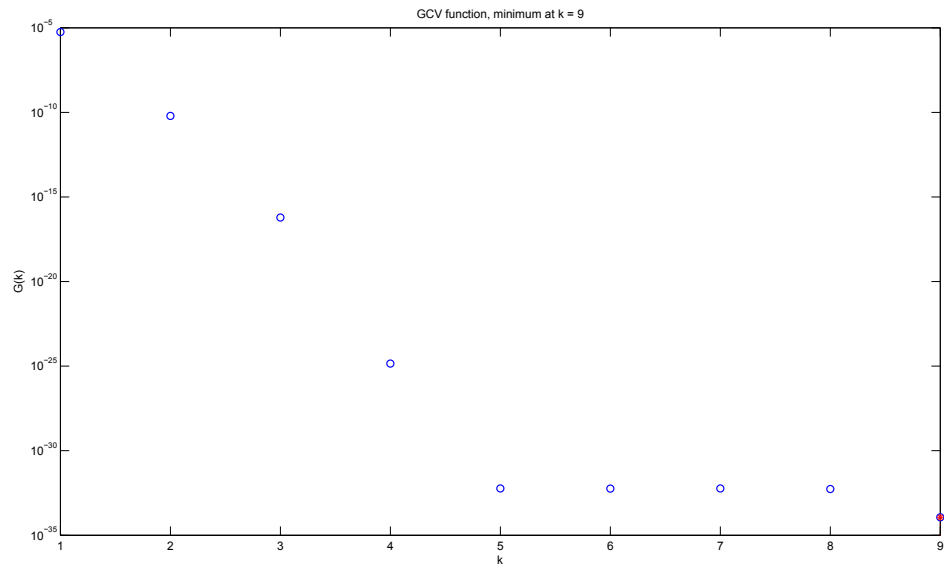


Figura 8.22: Función VCG para el método TSVD con dato exacto.

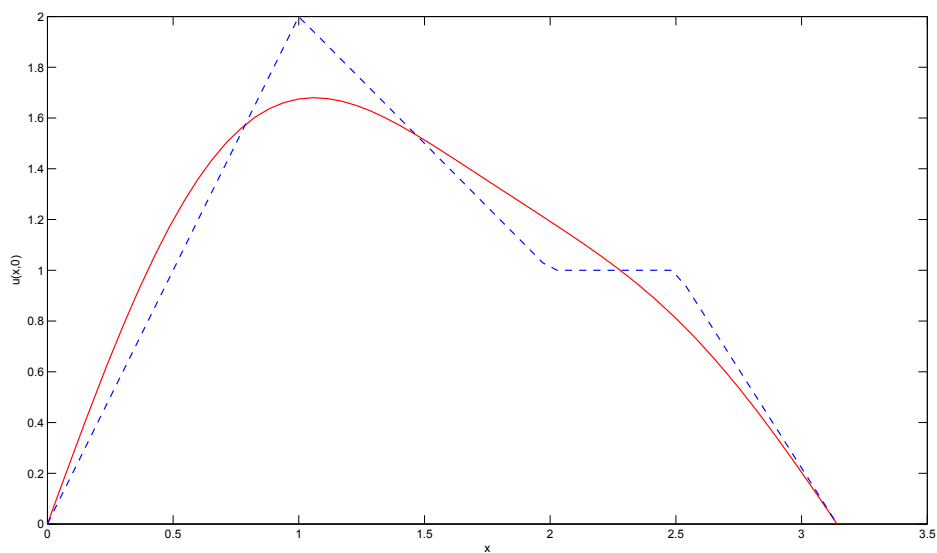


Figura 8.23: Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método TSVD a partir del dato exacto con $\alpha = 1,3888 \cdot 10^{-11}$, dado por la curva L .

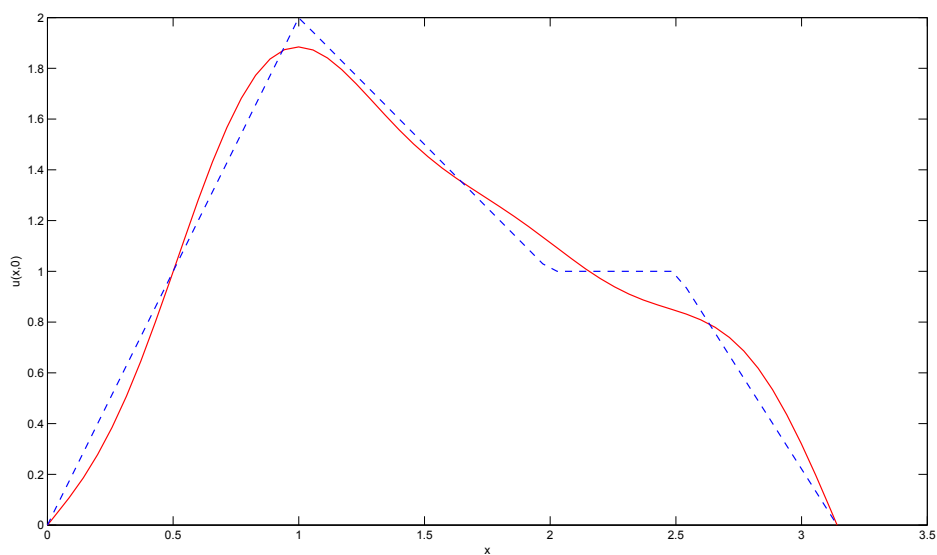


Figura 8.24: Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método TSVD a partir del dato exacto con $\alpha = 6,6397 \cdot 10^{-36}$, dado por VCG.

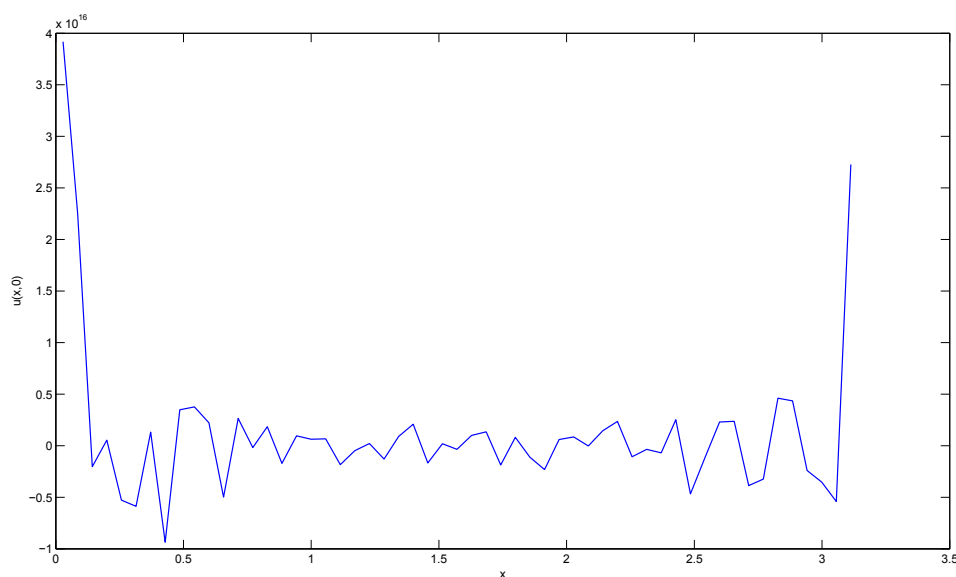


Figura 8.25: Solución obtenida invirtiendo el operador K a partir de un dato perturbado con un 1% de nivel de ruido.

obtiene en el caso de invertir el operador cuando el dato es exacto (ver Figura 8.8). Mientras que en este último caso la magnitud de las oscilaciones es del orden de 10^2 , cuando se obtiene la solución invirtiendo el operador a partir de un dato con nivel de ruido del 1% la magnitud de dichas oscilaciones es del orden de 10^{16} .

En las Figuras 8.27 y 8.28 se muestran los gráficos de la curva L para el método de Tikhonov-Phillips a partir de datos con 1% y 3% de nivel de ruido, respectivamente. Los valores del parámetro de regularización obtenidos son $\alpha = 0,0017$ y $\alpha = 0,0035$, respectivamente. Notar que los valores obtenidos en presencia de ruido son mucho más grandes que los que se obtienen a partir de datos exactos, con lo cual se evita la inestabilidad debida a la presencia de este ruido. La temperatura inicial f_2 y las correspondientes soluciones regularizadas se muestran en las Figuras 8.29 y 8.30. Considerando que en este caso el dato del problema inverso contiene ruido, las soluciones regularizadas que se obtienen son razonablemente buenas.

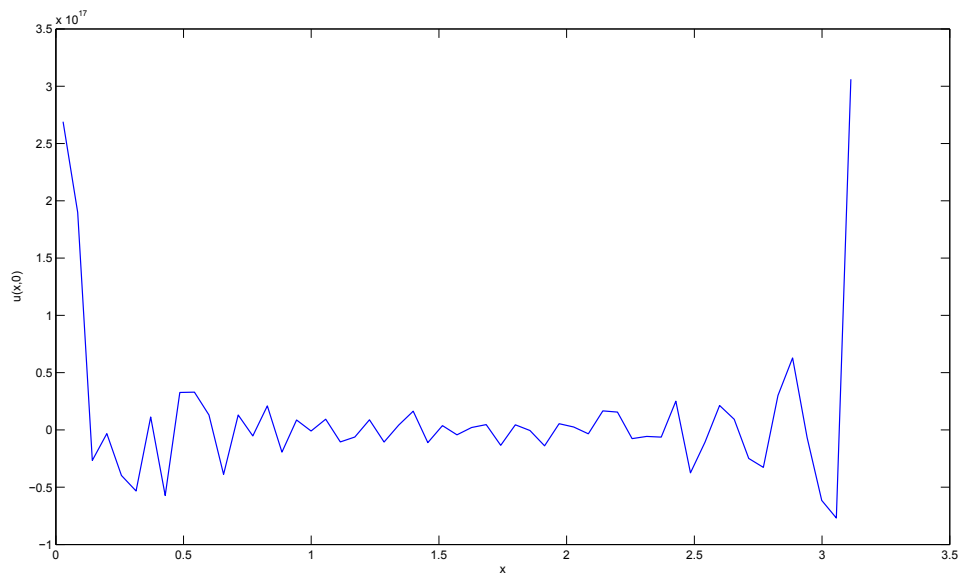


Figura 8.26: Solución obtenida invirtiendo el operador K a partir de un dato perturbado con un 3 % de nivel de ruido.

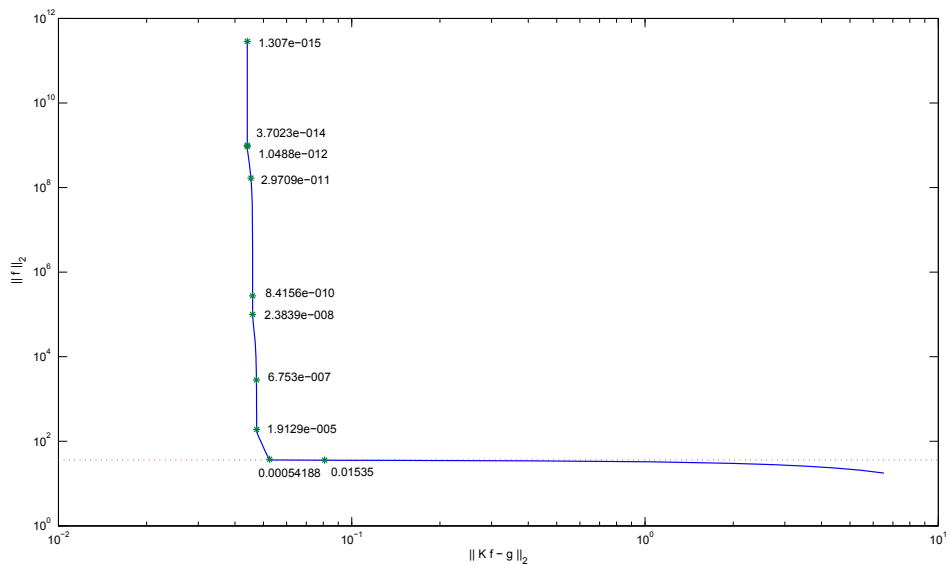


Figura 8.27: Curva L para el método de Tikhonov-Phillips para dato perturbado con un 1 % de nivel de ruido.

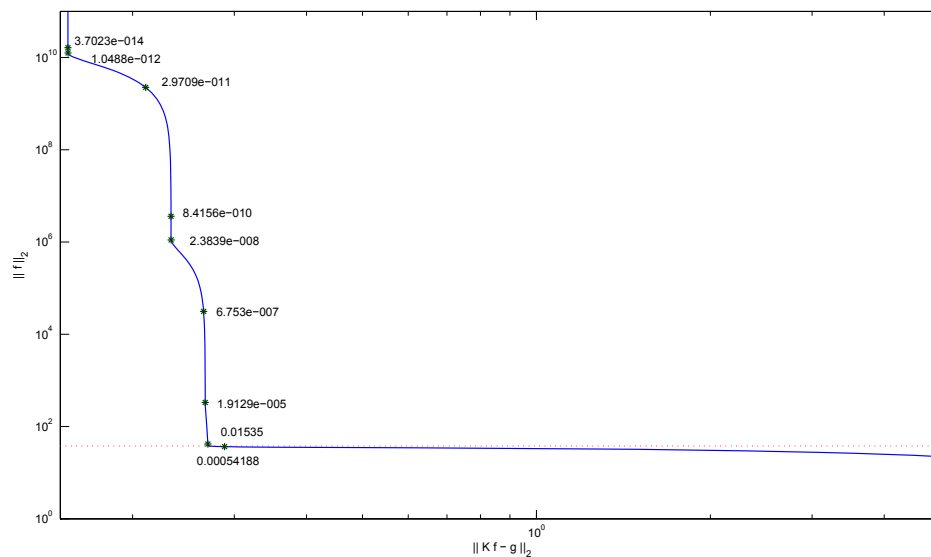


Figura 8.28: Curva L para el método de Tikhonov-Phillips para dato perturbado con un 3% de nivel de ruido.

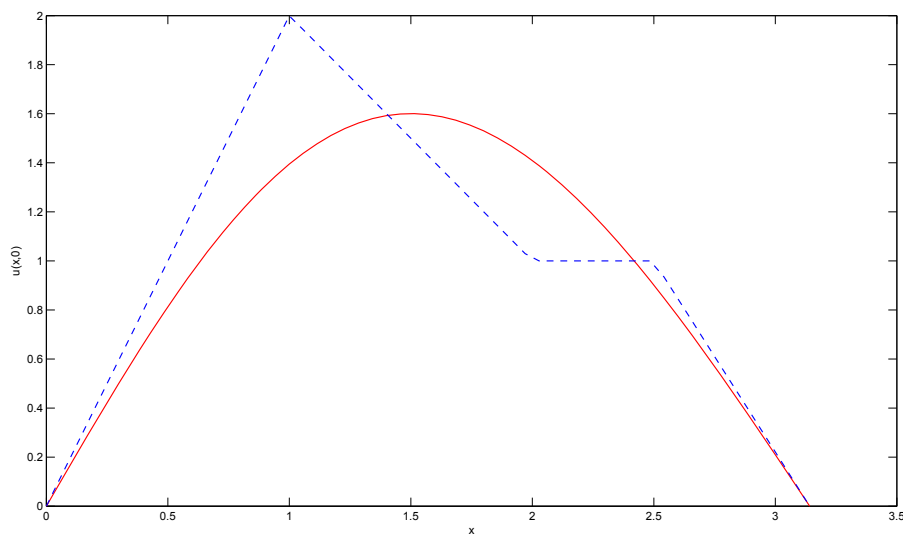


Figura 8.29: Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir de un dato perturbado con 1% de nivel de ruido y $\alpha = 0,0017$.

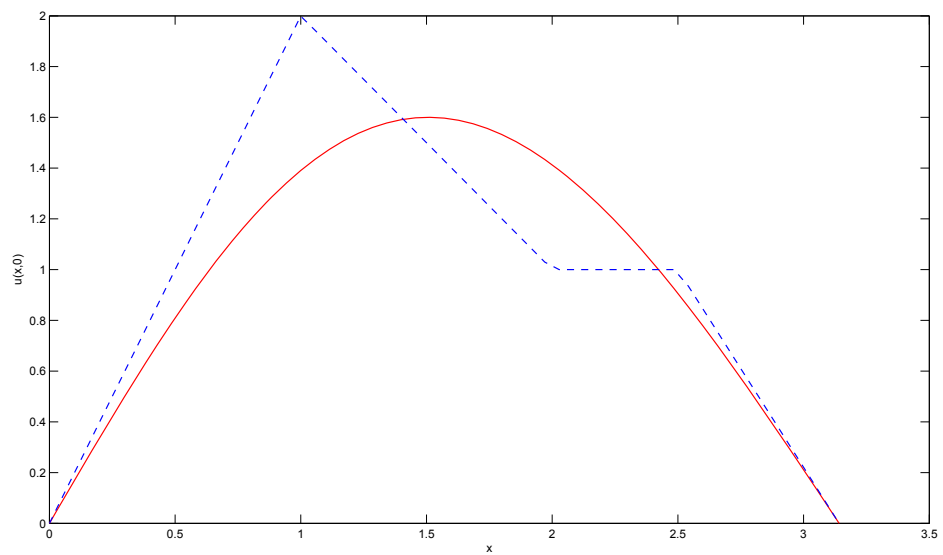


Figura 8.30: Solución exacta (---) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir de un dato perturbado con 3% de nivel de ruido y $\alpha = 0,0035$.

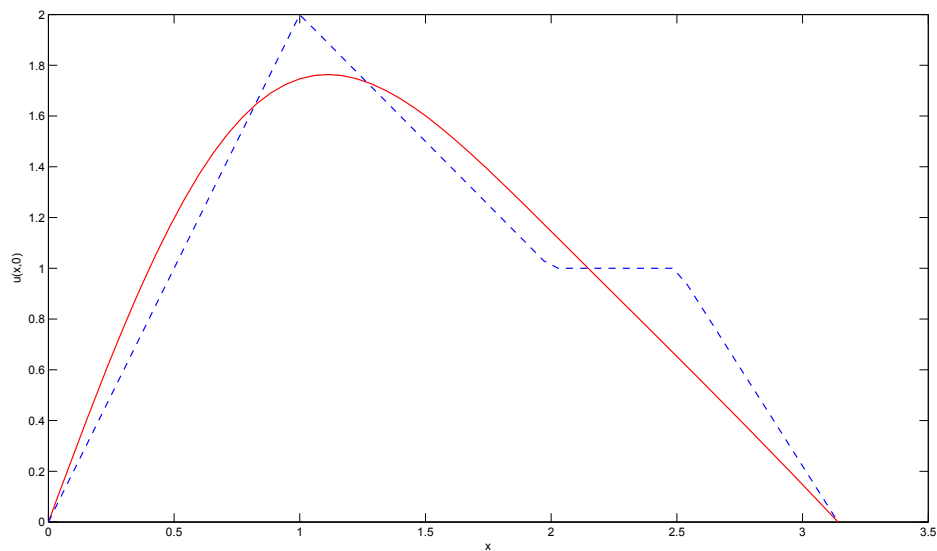


Figura 8.31: Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir de un dato perturbado con 1% de nivel de ruido y $\alpha = 10^{-6}$.

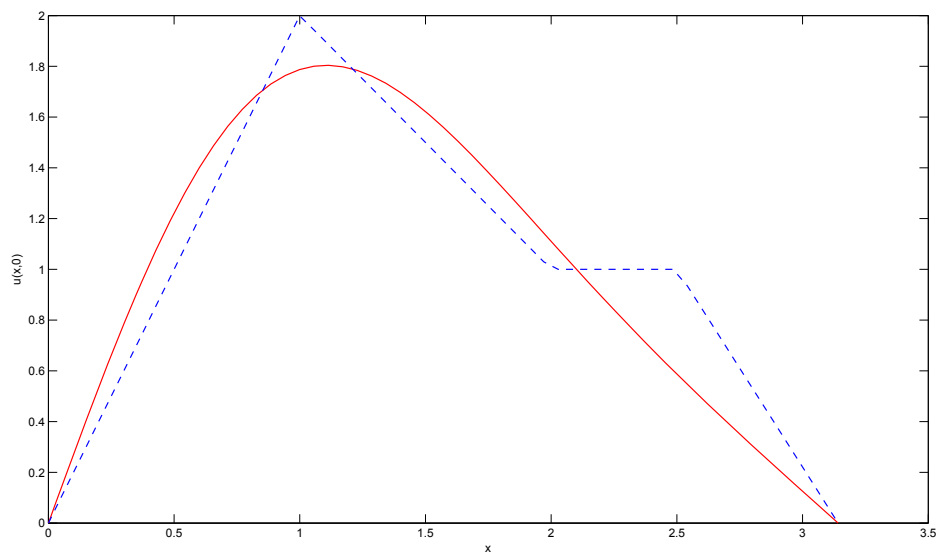


Figura 8.32: Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Showalter a partir de un dato perturbado con 1% de nivel de ruido y $\alpha = 10^{-6}$.

Es interesante observar que para el método de Tikhonov-Phillips a partir de un dato con un nivel de ruido del 1 % con $\alpha = 10^{-6}$, se obtiene una solución regularizada mejor que con los valores anteriores obtenidos mediante curva L y VCG, como se puede ver en la Figura 8.31. Esto es consistente con el hecho que tanto curva L como VCG son reglas heurísticas y en ningún caso constituyen reglas óptimas de elección de parámetros. Más aún no pueden formar parte de métodos de regularización convergente, como se señaló en la Sección 2.1. Con el método de Showalter usando ese mismo valor del parámetro α para un dato con un 1 % de nivel de ruido se obtiene la solución que se muestra en la Figura 8.32, la cual es muy similar a la obtenida mediante el método de Tikhonov-Phillips. En ambos casos, si se utilizan parámetros de regularización menores que 10^{-6} las soluciones regularizadas presentan oscilaciones causadas por el efecto de la presencia del ruido.

8.3. Restauración de imágenes

En esta sección presentamos muy brevemente el problema inverso de restauración de imágenes digitales y lo resolvemos usando distintos métodos de regularización espectrales. La restauración de imágenes es un área en la cual se estudian métodos que permiten recuperar una imagen original a partir de observaciones degradadas. Esta área se diferencia de las técnicas de mejoramiento de imágenes (“image enhancement”), debido a que estas últimas pretenden manipular una imagen con el objetivo de producir resultados más agradables para el observador, sin usar modelos de degradación concretos. Por otra parte, las técnicas de restauración de imágenes también se distinguen de las técnicas de reconstrucción, las cuales operan sobre un conjunto de proyecciones, en lugar de hacerlo sobre una imagen observada. Sin embargo, tanto la restauración como la reconstrucción de imágenes tienen como objetivo en común la recuperación de

la imagen original y por ello terminan resolviendo el mismo problema ([1]). Es importante mencionar que el problema originado con el Telescopio Espacial Hubble ([3]) es quizás el más famoso ejemplo de la necesidad de restaurar imágenes.

Un modelo matemático muy general para el proceso de degradación (“blurring”) de imágenes está dado por la siguiente ecuación integral de Fredholm de primera clase

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x, y, x', y') f(x', y') dx' dy' = g(x, y), \quad (8.18)$$

donde f y g son las imágenes bidimensionales continuas, original y degradada, respectivamente y el núcleo k es la función de dispersión puntual (“point spread function”), a la que nos referiremos como PSF por su sigla en inglés ([35]). Así, el problema inverso de restauración (“deblurring”) consiste en resolver la ecuación integral (8.18), es decir, en obtener una aproximación de la imagen original f con tanta precisión como sea posible a partir de una imagen borrosa g y de un proceso de degradación (“blurring”) dado por la PSF k . De las propiedades del núcleo k (el cual en general “suaviza”) se puede deducir que el operador integral asociado a la ecuación 8.18 es compacto y que este problema inverso es mal condicionado.

Consideraremos el caso en que el núcleo k es “separable” y de tipo convolución, es decir,

$$k(x, y, x', y') = \kappa(x - x')\omega(y - y'),$$

donde κ y ω son funciones reales. Esto significa que todo punto de la imagen tiene la misma degradación y que esta puede “separarse” en sus componentes puramente vertical y puramente horizontal. Hay muchas situaciones en las cuales un sistema de captación de imágenes puede favorecer la degradación de la calidad de las imágenes adquiridas. En general, estas situaciones son el resultado de sistemas de enfoque defectuosos, fuentes externas o internas de perturbación en el sistema de captación y degradaciones

introducidas por el mismo medio de captación ([1]). A continuación introducimos algunos de los tipos de degradación (“blurring”) más usuales con sus correspondientes PSF asociadas ([35]).

(i) *Degradación de movimiento*: surge cuando la cámara se mueve mientras la imagen es captada o cuando se mueve el objeto mientras la cámara está fija. Si el tiempo en que transcurre el movimiento es pequeño, se puede considerar que este es lineal. Cuando el movimiento es horizontal, entonces la PSF correspondiente tiene la forma

$$k(x, y, x', y') = h_L(x - x') = \begin{cases} (2L)^{-1}, & \text{si } |x - x'| \leq L, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (8.19)$$

donde L es un parámetro denominado longitud del movimiento que cuantifica la degradación de la imagen. Similarmente, si el movimiento es vertical entonces la PSF está dada por

$$k(x, y, x', y') = h_L(y - y') = \begin{cases} (2L)^{-1}, & \text{si } |y - y'| \leq L, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde L tiene el mismo rol que antes.

(ii) *Degradación por desenfoque uniforme o de tipo fuera de foco*: surge, obviamente, cuando la lente de la cámara está fuera de foco. Si la apertura de la cámara es circular, la imagen correspondiente a cualquier fuente puntual será un pequeño disco denominado “círculo de confusión”. En este caso, un buen modelo de la PSF es el siguiente

$$k(x, y, x', y') = \begin{cases} (\pi R^2)^{-1}, & \text{si } \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \leq R, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde el parámetro R es el radio del círculo de confusión. Sin embargo, esta función no es separable en las variables $x - x'$ y $y - y'$. Por lo tanto, usaremos una PSF alternativa cuyas variables son separables,

$$k(x, y, x', y') = h_R(x - x')h_R(y - y'),$$

donde h_R se define como en (8.19) con R en lugar de L .

(iii) *Degradación de tipo turbulencia atmosférica*: surge, por ejemplo, en astronomía debido al cambio en las condiciones de refracción de la atmósfera terrestre. Por razones prácticas, en este caso se puede considerar una PSF Gaussiana

$$\begin{aligned} k(x, y, x', y') &= \frac{1}{2\pi\sigma_h\sigma_v} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{\sigma_h}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-y'}{\sigma_v}\right)^2\right) \\ &= \eta_{\sigma_h}(x-x')\eta_{\sigma_v}(y-y'), \end{aligned}$$

donde la función η_σ está dada por

$$\eta_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2\right)$$

para $\sigma = \sigma_h, \sigma_v$. Las desviaciones estandar σ_h y σ_v caracterizan la degradación en la dirección horizontal y vertical, respectivamente.

La discretización de cada una de estas PSF tiene forma de un producto de Kronecker $A_h \otimes A_v$, donde A_h y A_v son las correspondientes discretizaciones de las funciones reales en las que se separa el núcleo de convolución k . Por otra parte, una imagen digital en escala de grises está asociada a una matriz I de orden $m \times n$ cuyas entradas (no negativas) representan la intensidad de un pixel. Luego, al discretizar (8.18) el problema inverso se puede plantear como

$$KI = (A_h \otimes A_v)I = I_b, \quad (8.20)$$

donde I_b es la imagen degradada, es decir, el dato del problema inverso.

Las Figuras 8.33 y 8.34 muestran una imagen real (en colores y en escala de grises) correspondiente a la superficie de Io, una de las lunas de Júpiter. Su tamaño es de 512×512 píxeles. Esta imagen es cortesía de la NASA y está extraída de la página web: <http://www2.imm.dtu.dk/~pch/HNO/> que contiene también material relacionado con el libro de P. C. Hansen, J. G. Nagy y D. P. O'Leary "Deblurring Images" recientemente publicado (ver [21]). Nos referiremos a la versión en escala de grises de

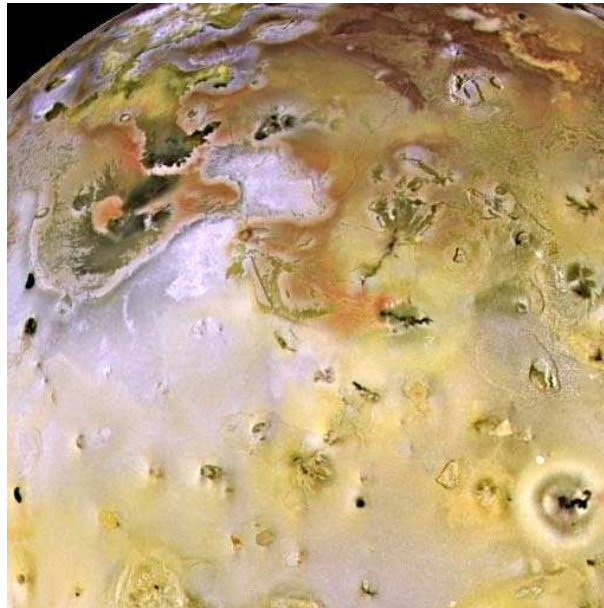


Figura 8.33: Luna Io de Júpiter (512×512 píxeles). Extraída de: <http://www2.imm.dtu.dk/~pch/HNO/>.

esta imagen como “imagen original”. Por razones de simplicidad y conveniencia computacional trabajaremos sólo con imágenes en escala de grises.

Las Figuras 8.35 - 8.38 ilustran los distintos tipos de degradación de la imagen original dada en la Figura 8.34.

En la Figura 8.39 se muestran, a la izquierda la imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y a la derecha, la solución que se obtiene al invertir directamente el operador mediante la expresión $f = K^{-1}g$. Aquí, se pone de manifiesto claramente el mal condicionamiento de este problema y se ve la necesidad de aplicar métodos de regularización para aproximar de manera estable la solución.

Notemos aquí que si la matriz I que representa una imagen es de orden $n \times n$, entonces $A_h \otimes A_v$ (ver (8.20)) tiene dimensión $n^2 \times n^2$, con lo cual la resolución numérica del problema inverso puede ser muy costosa. Por esta razón conviene usar propiedades del producto de Kronecker para reducir el esfuerzo computacional. Para implementar

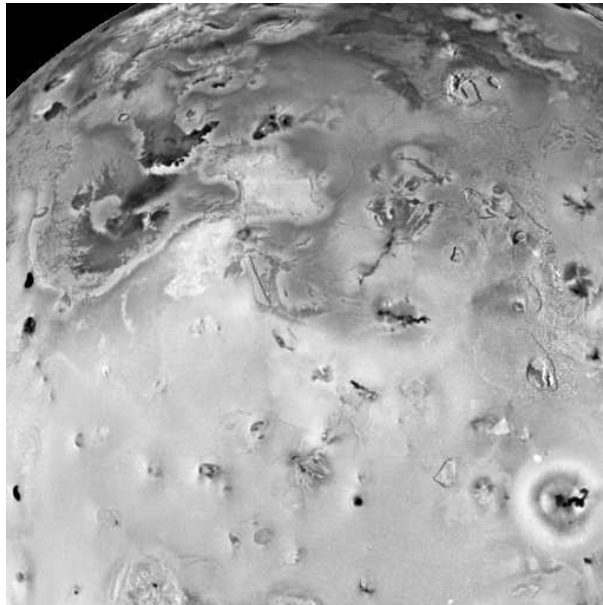


Figura 8.34: Imagen original: luna Io en escala de grises.

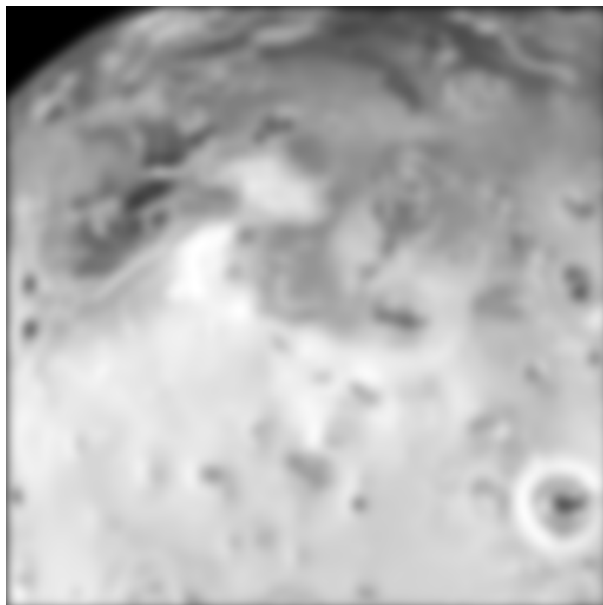


Figura 8.35: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$.

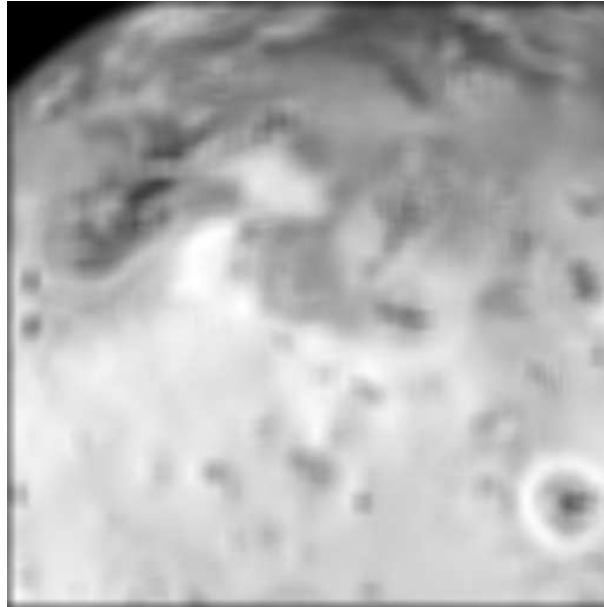


Figura 8.36: Imagen degradada por desenfoque uniforme con $R = 8$

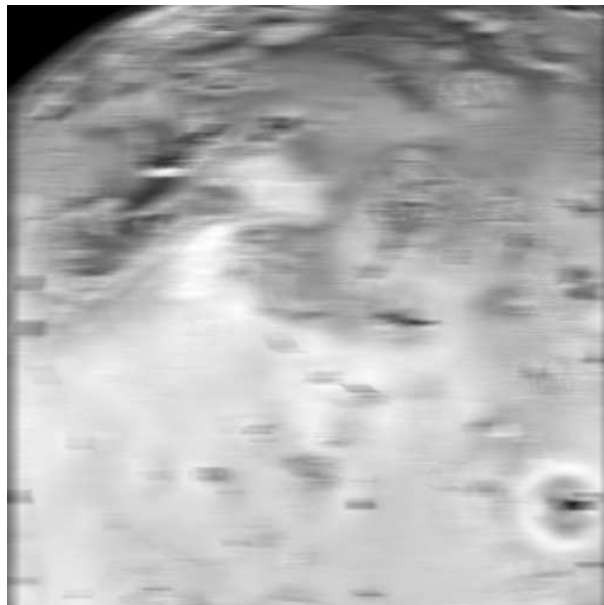


Figura 8.37: Imagen degradada por movimiento horizontal de longitud $L = 12$.



Figura 8.38: Imagen degradada por movimiento vertical de longitud $L = 12$.

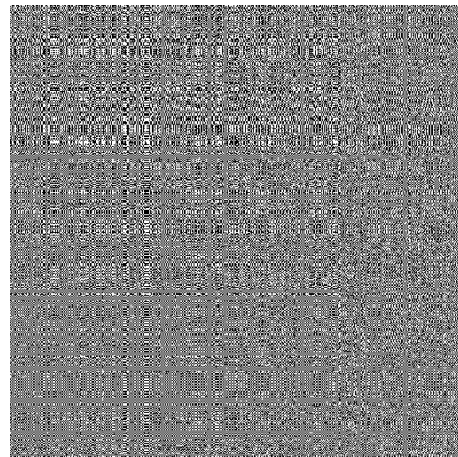
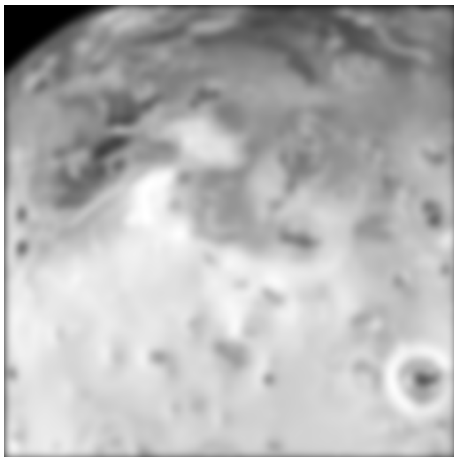


Figura 8.39: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución que resulta de invertir el operador (der.).

los métodos de regularización espectrales (que en este caso son también métodos de filtro porque el operador es compacto) utilizando productos de Kronecker nos basamos en [20].

Con el objetivo de restaurar la imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ dada en la Figura 8.39 (izq.), a la que nos referiremos a partir de ahora como “imagen degradada”, resolveremos el problema mediante la aplicación de algunos métodos de regularización espectrales.

En las Figuras 8.40 - 8.42 se muestran la imagen degradada a la izquierda y a la derecha, las soluciones regularizadas usando el método de Tikhonov-Phillips y los métodos espectrales de los Ejemplos 4 y 9, ambos de la Sección 7.2, respectivamente. En todos los casos se utilizó como parámetro de regularización $\alpha = 0,1$. Es oportuno señalar aquí que debido a limitaciones computacionales relacionadas con la imposibilidad de resolver el producto de Kronecker de matrices de grandes dimensiones, no hemos podido implementar ningún criterio para hallar el valor “óptimo” del parámetro de regularización. Con respecto a las soluciones regularizadas obtenidas, podemos observar que en los tres casos son muy buenas aproximaciones de la imagen original. Es importante notar que pueden detectarse bordes y detalles finos en las imágenes restauradas que son casi imposibles de ver en la imagen degradada. Si ahora tomamos un parámetro de regularización menor, por ejemplo, $\alpha = 10^{-10}$, las soluciones regularizadas mejoran y se observa mayor nitidez, como puede verse en las Figuras 8.43 - 8.45

Veamos ahora qué ocurre si adicionamos ruido Gaussiano a la imagen degradada y restauramos esta imagen. En las Figuras 8.46 - 8.48 se muestran a la izquierda la imagen degradada con ruido del 1 % y a la derecha, las soluciones regularizadas por los métodos de Tikhonov-Phillips y los de los Ejemplos 4 y 9 de la Sección 7.2, respectivamente, para un valor de $\alpha = 0,1$. Con un valor de $\alpha = 0,9$ se obtienen las soluciones que se muestran en las Figuras 8.49-8.51. Si bien las tres soluciones regularizadas son buenas

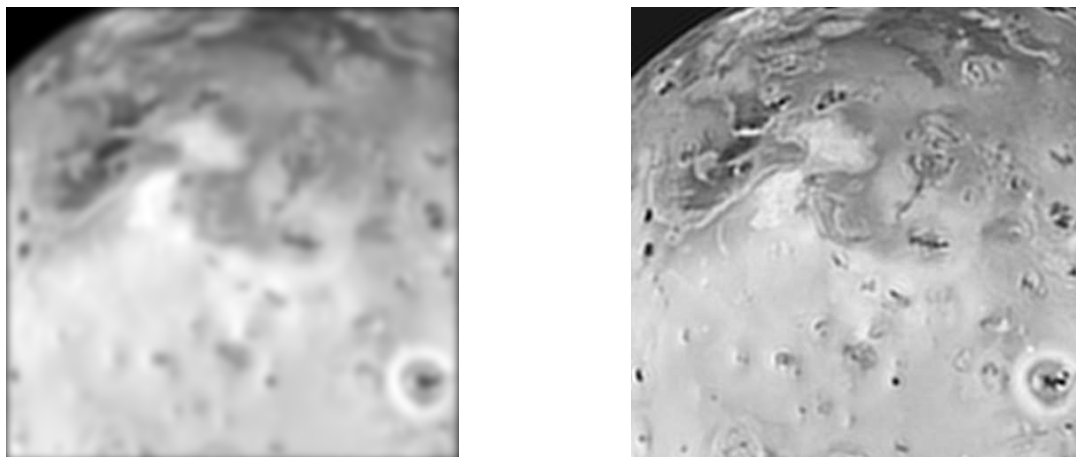


Figura 8.40: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 0,1$ (der.)

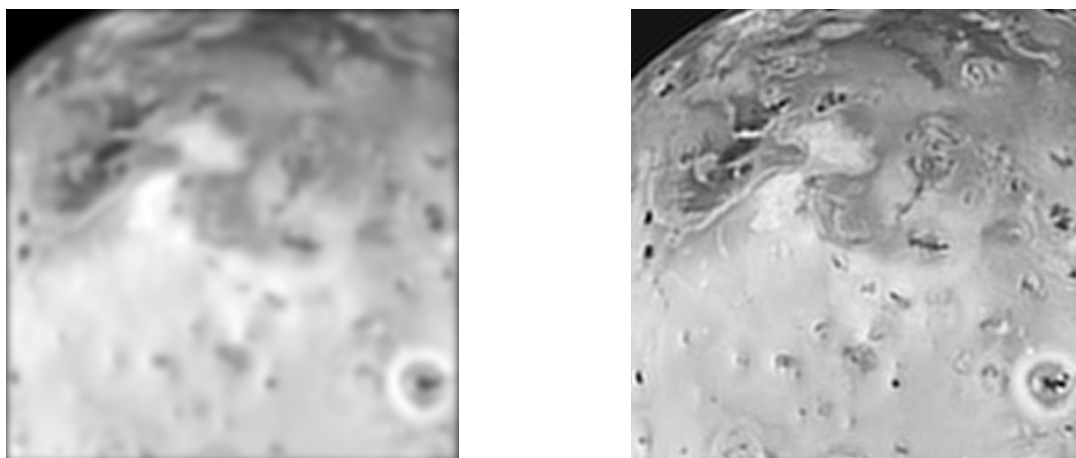


Figura 8.41: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).

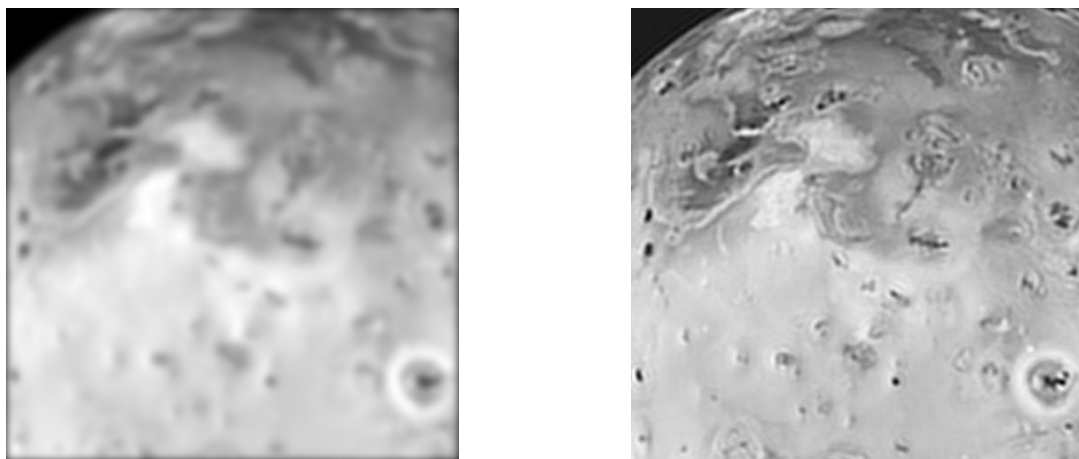


Figura 8.42: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).

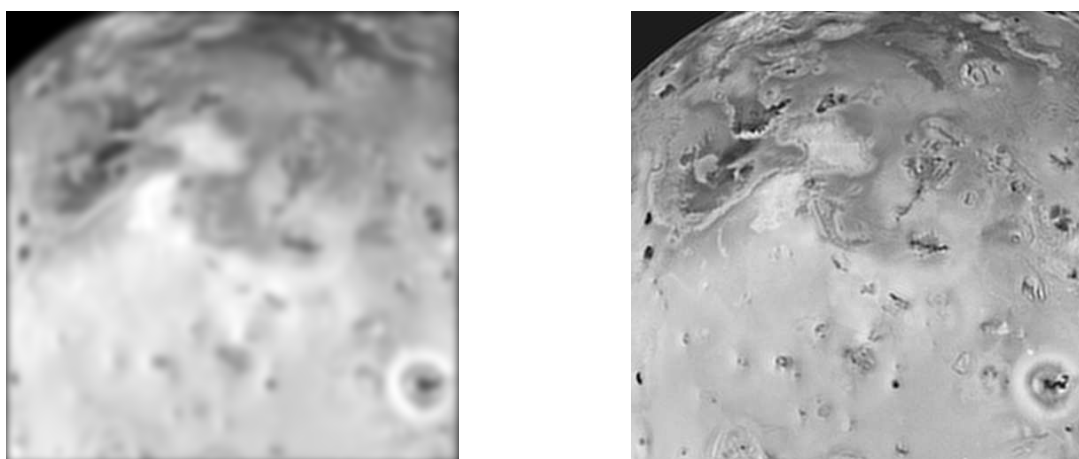


Figura 8.43: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 10^{-10}$ (der.).

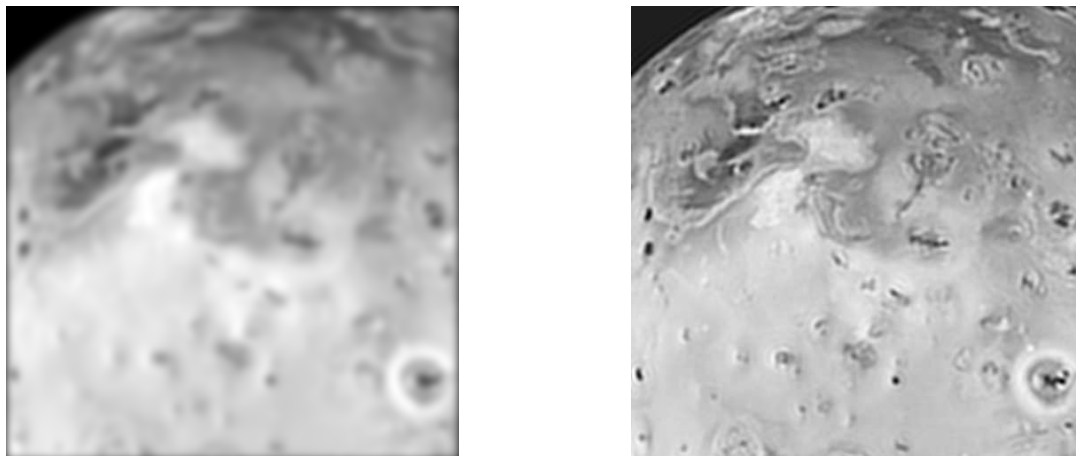


Figura 8.44: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 10^{-10}$ (der.).

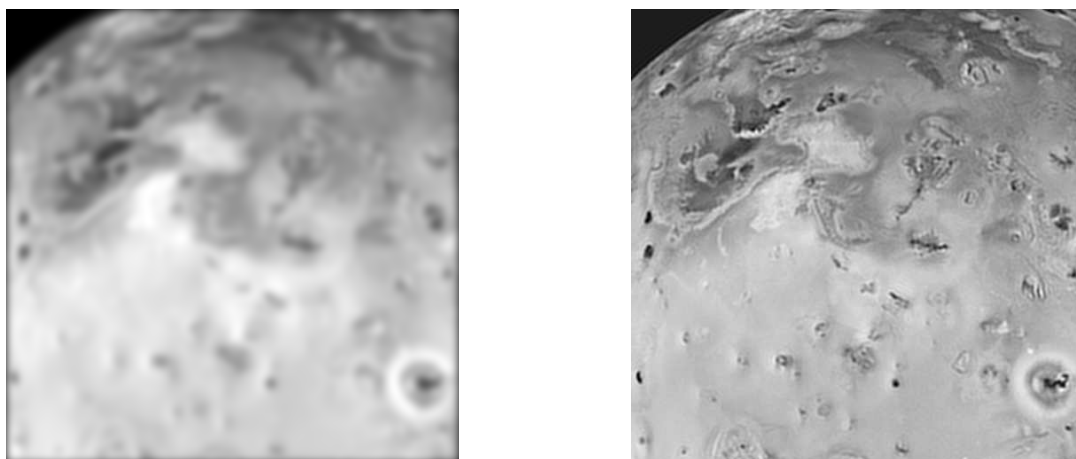


Figura 8.45: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 10^{-10}$ (der.).

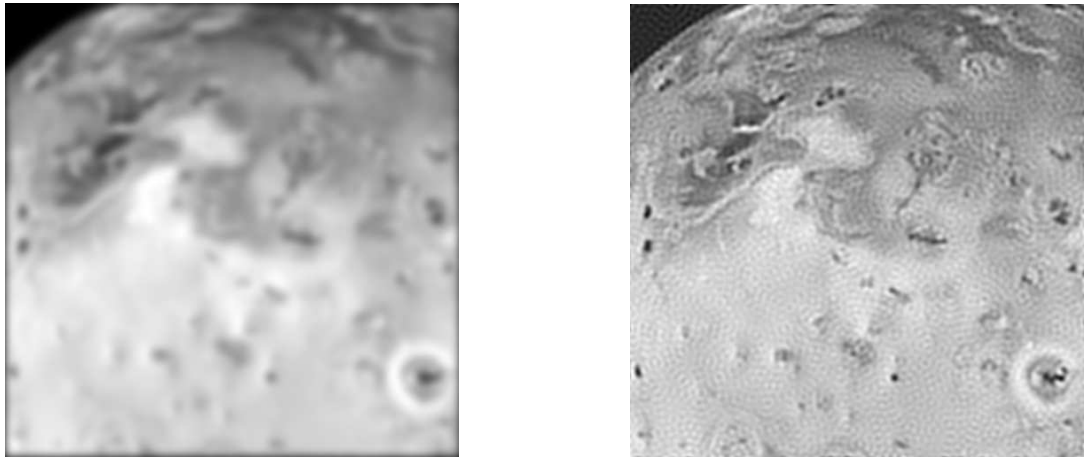


Figura 8.46: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1% (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 0,1$ (der.).

aproximaciones de la imagen original, se puede observar que para $\alpha = 0,1$, la solución obtenida con el método del Ejemplo 4 es mejor que las otras dos. No ocurre lo mismo para el valor $\alpha = 0,9$. Notar que si comparamos las soluciones obtenidas a partir de la imagen degradada sin ruido y las que resultan de resolver el problema a partir de imágenes perturbadas, estas últimas presentan ciertas imperfecciones (en forma de pequeños círculos) que ponen de manifiesto la inestabilidad producida por el ruido. Sin embargo, las aproximaciones resultan razonablemente buenas teniendo en cuenta el mal condicionamiento del problema.

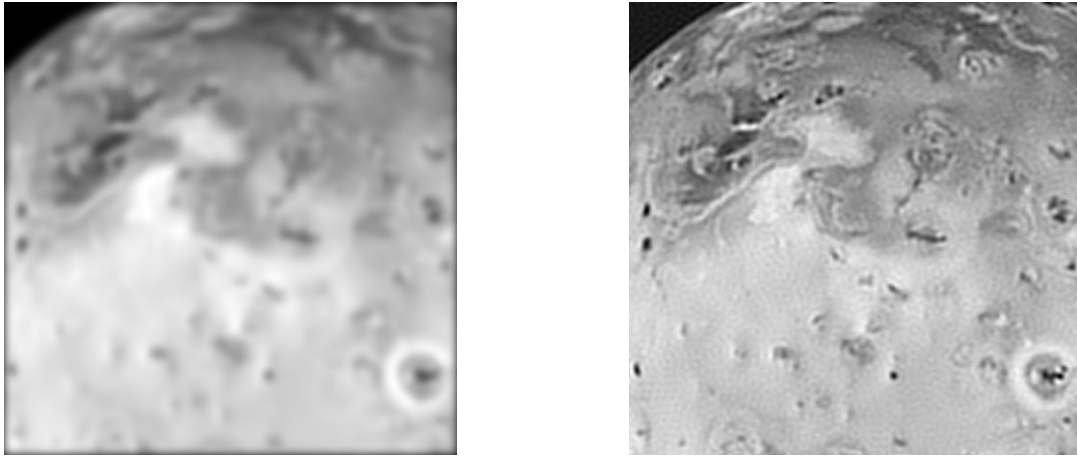


Figura 8.47: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1% (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).

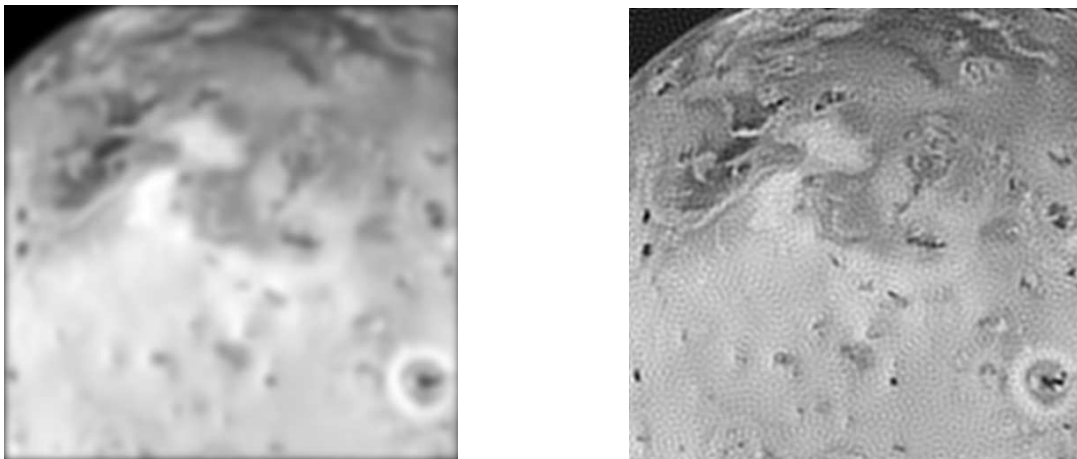


Figura 8.48: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1% (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).

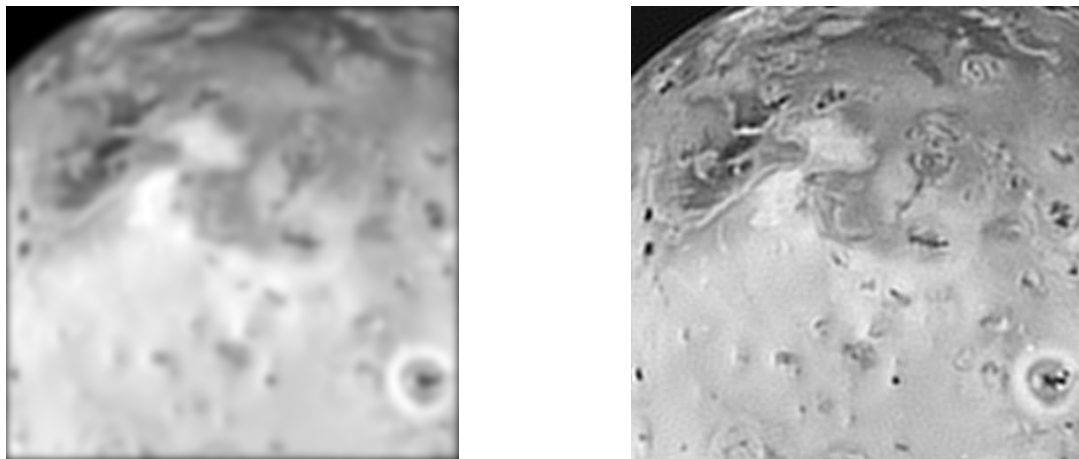


Figura 8.49: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1% (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 0,9$ (der.).

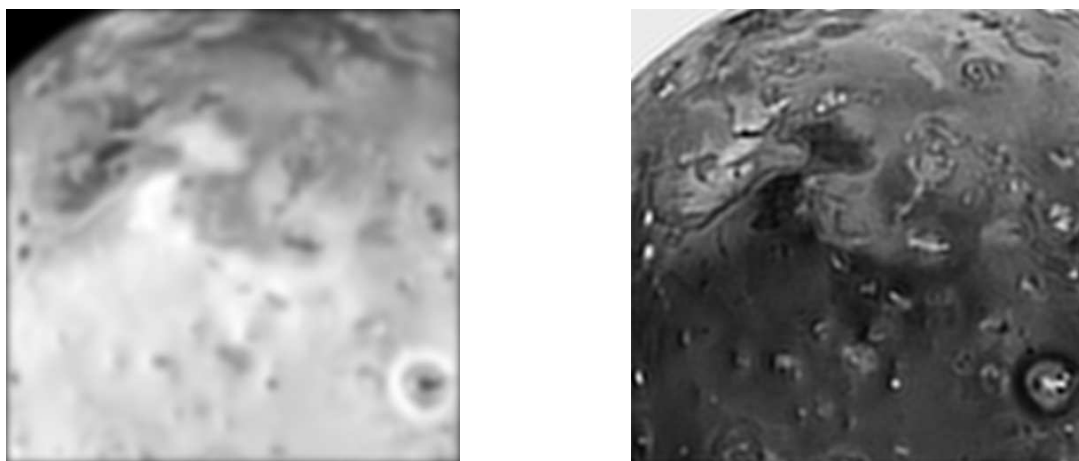


Figura 8.50: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1% (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,9$ (der.).

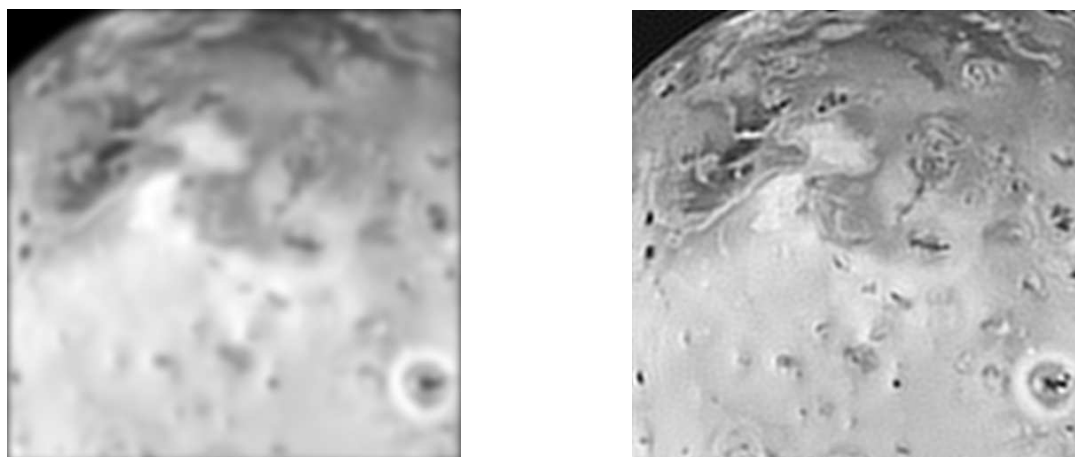


Figura 8.51: Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1% (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,9$ (der.).

8.4. La calificación como orden de convergencia óptimo en restauración de imágenes

En esta sección presentamos algunos resultados numéricos sobre los conceptos de calificación fuerte y óptima que hemos introducido en el Capítulo 7 aplicados al problema de restauración de imágenes. En la Figura 8.52 se muestran tres imágenes en colores, a las que denominaremos “luna”, “mar” y “arco iris”. Como señalamos en la sección anterior por simplicidad y conveniencia computacional trabajaremos sólo con imágenes en escala de grises. Por ello, nos referiremos a las versiones en escala de grises de estas imágenes (Figuras 8.53 izq., 8.54 izq. y 8.55 izq.) como “imágenes originales”.

En las Figuras 8.53-8.55 se muestran a la izquierda la imagen original y a la derecha, la imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$.

Con el objetivo de analizar el orden de convergencia del error de regularización, se restauraron las imágenes borrosas aplicando el método de Tikhonov-Phillips y los métodos de los Ejemplos 4 y 9 de la Sección 7.2 utilizando distintos valores del parámetro



Figura 8.52: Imágenes: luna (512×512 píxeles) (izq.), mar (128×128 píxeles) (centro) y arco iris (64×64 píxeles) (der.).

de regularización α . La razón de haber elegido estos tres métodos quedará clara en el siguiente análisis.

Como vimos en el Ejemplo 1 de la Sección 7.2, el método de Tikhonov-Phillips posee calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$. También probamos allí que la función $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima de este método y por lo tanto, fuerte. En la Figura 8.56 se muestran la calificación óptima $\rho(\alpha)$ y el error de regularización que se obtiene al restaurar cada una de las tres imágenes borrosas aplicando este método. Como se puede observar, el orden de convergencia del error de regularización cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ nunca es mejor que la calificación ρ . Esto es consistente con el hecho que la calificación fuerte está asociada al orden óptimo de convergencia de este error.

Consideremos ahora el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2, el cual no posee calificación clásica por ser $\mu_0 = 0$. Sin embargo, vimos que la función $\rho(\alpha) = -(\ln \alpha)^{-1}$ es calificación óptima. Como puede verse en la Figura 8.57, los errores de regularización convergen a cero más lentamente que la calificación fuerte ρ . Lo mismo ocurre para el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 (ver Figura 8.58), para el cual $\mu_0 = +\infty$ y en consecuencia el método no posee calificación clásica, aunque, como vimos, la función $\rho(\alpha) = e^{-1/\sqrt{\alpha}}$ es calificación fuerte del método.

Es importante señalar que el error de regularización que se obtiene al restaurar la

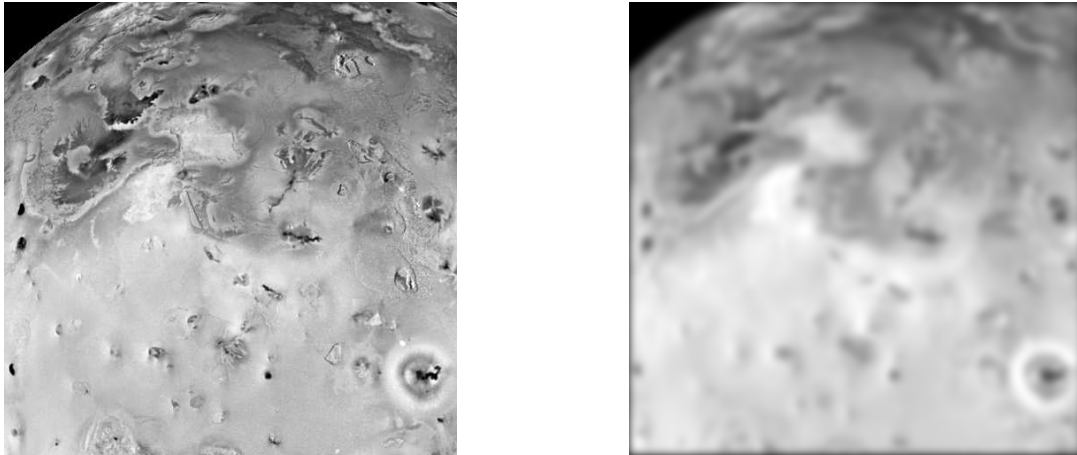


Figura 8.53: Imagen original luna (izq.) e imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (der.).

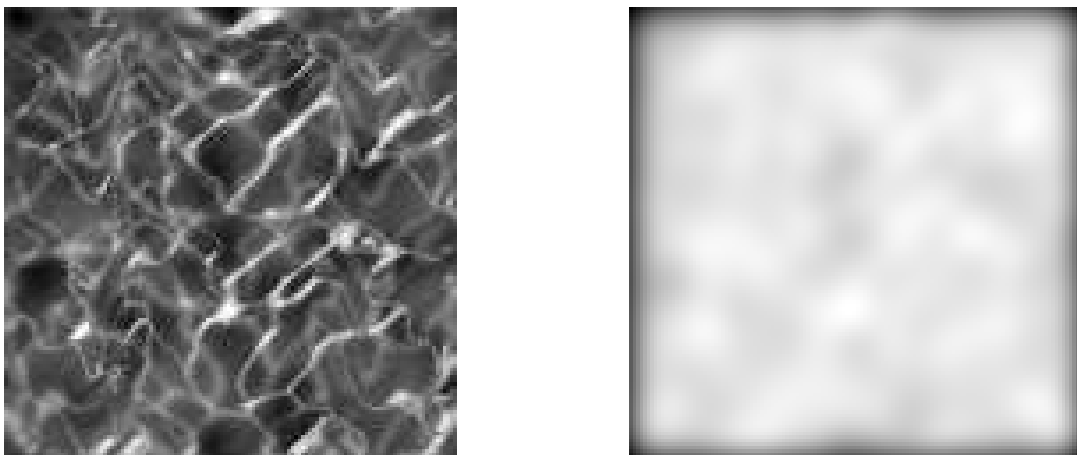


Figura 8.54: Imagen original mar (izq.) e imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (der.).

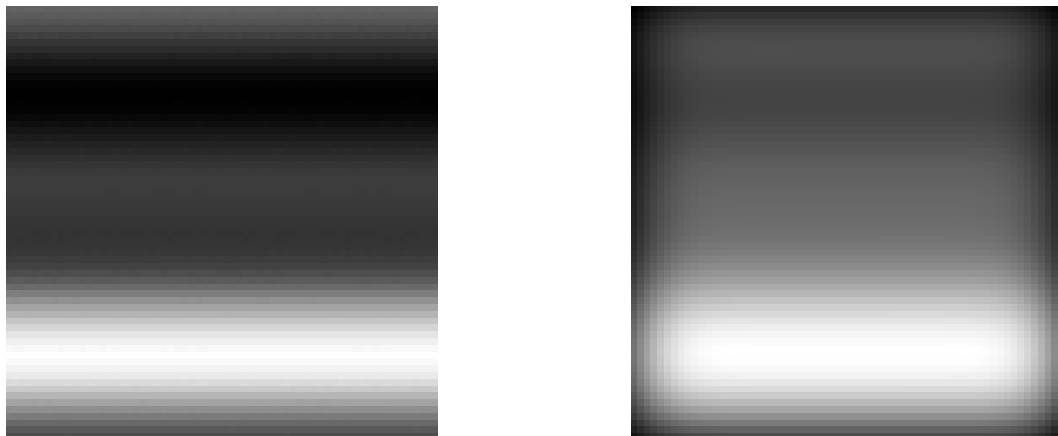


Figura 8.55: Imagen original arco iris (izq.) e imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (der.).

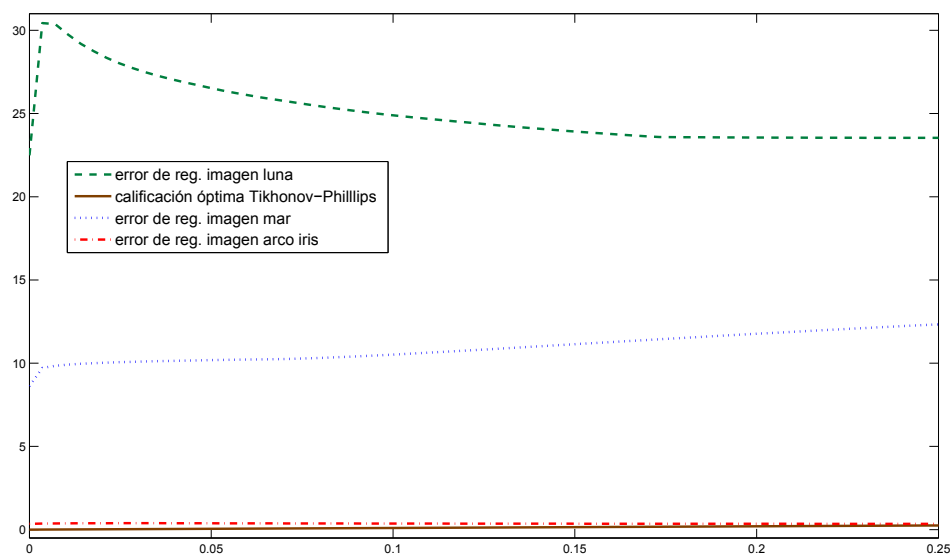


Figura 8.56: Errores de regularización y calificación óptima del método de Tikhonov-Phillips.

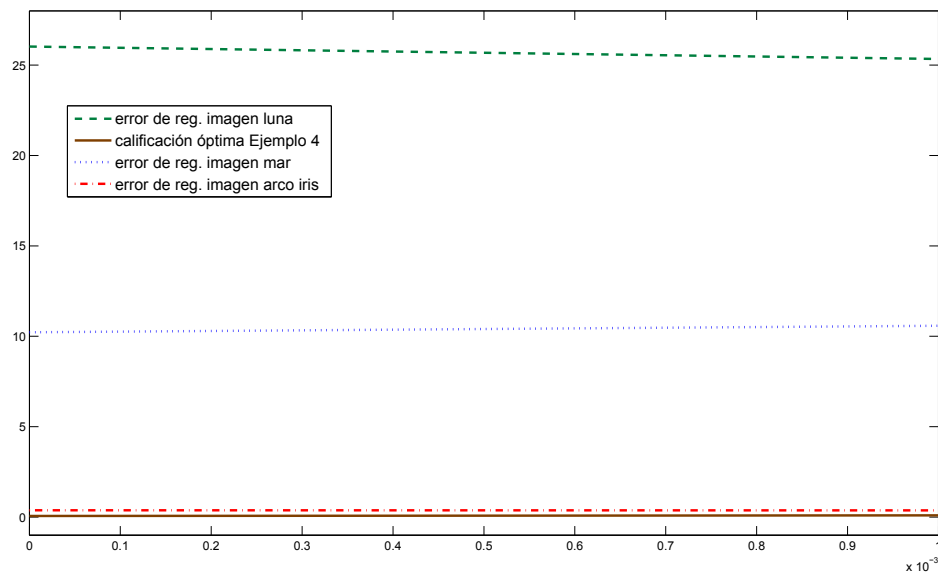


Figura 8.57: Errores de regularización y calificación óptima del método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2.

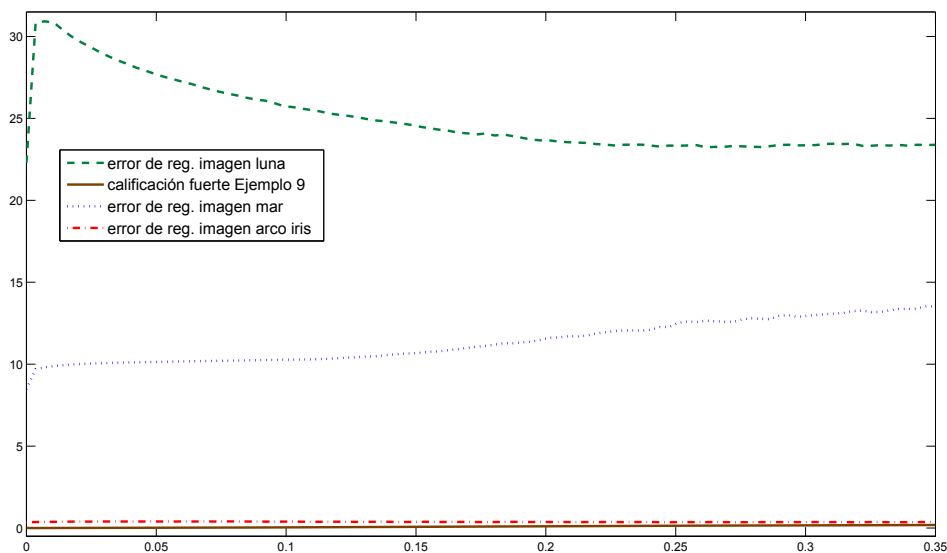


Figura 8.58: Errores de regularización y calificación fuerte del método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2.

imagen degradada arco iris con cualquiera de los tres métodos está muy cercano a la correspondiente calificación fuerte. Esto es así porque la imagen arco iris (es decir, la solución exacta) es muy “suave”. Recordemos que cuanto mayor regularidad tiene la solución exacta, más rápido converge a cero el error de regularización. Con la imagen de la luna ocurre lo contrario debido a que presenta muchos bordes e irregularidades, que se traducen en componentes significativas en alta frecuencia. Observar además que, para esta figura, el error de regularización crece para valores de α pequeños, a medida que α tiende a 0. Esto es así debido precisamente a la propagación de los errores de discretización en estas componentes de alta frecuencia.