Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se ha extendido el resultado de Seidman ([54]) sobre la no convergencia del método de mínimos cuadrados al caso de divergencia con velocidad arbitraria ([57]). Se demostró que si se utiliza el método de mínimos cuadrados en problemas inversos mal condicionados, entonces siempre es posible elegir adecuadamente una sucesión de subespacios aproximantes de dimensión finita, de manera tal que las soluciones de mínimos cuadrados diverjan de la solución exacta con cualquier velocidad arbitrariamente grande, prescrita *a-priori*. Aunque estos resultados son en principio puramente teóricos (ver Teorema 5.4 y Corolario 5.6) sirven para probar que en el caso de problemas mal condicionados, no está garantizada la convergencia de las soluciones aproximantes obtenidas por la aplicación directa del método de mínimos cuadrados, y que sin una justificación matemática rigurosa de esta convergencia, este procedimiento no es aceptable.

Por otra parte, se ha desarrollado una teoría general de saturación global para métodos de regularización arbitrarios (lineales y no lineales). Se hallaron condiciones necesarias y suficientes para que un método posea saturación y se ha probado que en tales métodos el error total debe ser "doblemente optimal", esto es: el error debe ser orden de convergencia óptimo sobre un cierto conjunto el que a su vez debe satisfacer una cierta condición de optimalidad con respecto al error. Se han probado varios resultados recíprocos y aplicado la teoría desarrollada para caracterizar la saturación de los métodos espectrales con calificación clásica y de métodos espectrales que poseen calificación máxima.

Además, se extendió la definición de calificación introducida Por Mathé y Pereverzev (ver [44]), permitiendo que las funciones asociadas a órdenes de convergencia y conjuntos fuente puedan ser distintas. Esta extensión resultó muy adecuada para introducir tres niveles jerárquicos naturales de calificación: débil, fuerte y óptimo. Se mostró que el primero de estos niveles generaliza la definición de calificación dada por Mathé y Pereverzev y se presentó un ejemplo de un método de regularización espectral que posee calificación débil, pero esta no es calificación en el sentido de la Definición 3.8. También se dio una condición suficiente que garantiza que un método de regularización espectral posee calificación en el sentido de esta generalización. Asimismo, se probaron condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia dado sea calificación fuerte u óptima. Se presentaron varios ejemplos con el objetivo de ilustrar los niveles de calificación introducidos en esta tesis, como así también las relaciones entre los mismos y con el concepto de calificación clásica y la calificación dada por Mathé y Pereverzev. Por otra parte, se mostraron algunas importantes implicaciones de la teoría de calificación desarrollada, en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados.

Finalmente, se presentaron varias aplicaciones de los métodos y resultados nuevos a través de ejemplos y problemas concretos. En particular, se mostraron varios resultados numéricos en problemas inversos en conducción de calor y procesamiento de imágenes. Es importante destacar aquí que algunos de los métodos de regularización que fueron concebidos, en principio, por un interés puramente académico con el objeto de mostrar la existencia de métodos que no poseen calificación clásica y sí poseen calificación en alguno de los niveles definidos en este trabajo, produjeron sorprendentes resultados cuando fueron aplicados a algunos problemas concretos. Asimismo se exhibieron resultados numéricos que permiten visualizar el concepto de calificación introducido en el Capítulo 7, como orden de convergencia óptimo en problemas de restauración de imágenes.

Como señalamos en diversas oportunidades, varios problemas relacionados con el desarrollo de esta tesis permanecen aún abiertos y serán objeto de estudio de investigaciones futuras. Por ejemplo, en el capítulo 4 mencionamos que para el método de la inversa aproximada no se conoce hasta el momento ningún algoritmo o método que permita escoger adecuadamente el parámetro de reconstrucción. En este sentido, se investigará en este tema con el objetivo de desarrollar criterios que permitan determinar eficientemente el parámetro de reconstrucción del método de la inversa aproximada.

En la Sección 5.1 hicimos referencia a un resultado de Seidman ([54]) que establece que cuando el operador está dado, como ocurre la mayoría de las veces en la práctica, entonces para "casi todo" dato en el rango del operador, existe una sucesión de subespacios aproximantes tales que la correspondiente sucesión de soluciones de mínimos cuadrados del problema no está acotada. En este sentido nos proponemos extender este resultado al caso de velocidades arbitrarias de divergencia.

En la Sección 6.3 aplicamos la teoría de saturación desarrollada en esta tesis a métodos de regularización espectrales con calificación clásica y calificación máxima. Sin embargo, resta todavía determinar condiciones suficientes para la existencia de saturación en métodos de regularización espectrales con calificación en cada uno de los niveles en que este concepto fue introducido en la Sección 7.1. Por otra parte, teniendo en cuenta la relación existente entre los conceptos de calificación y saturación como órdenes de convergencia óptimos del error de regularización y del error total, respectivamente, un trabajo pendiente es formalizar esta dualidad "calificación-saturación" para métodos de regularización arbitrarios. Nos proponemos también investigar sobre estos dos problemas.

Otro problema abierto sobre el cual nos proponemos investigar es la determinación de condiciones necesarias y/ó suficientes para que dado un operador T sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{X}$ y una función fuente s se verifique $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} Ran(s(T^*T)) = \mathcal{X}$. Recordar que este problema se presentó en el Ejemplo 7.22 de la Sección 7.3.

En la Sección 8.2 mencionamos que existe una generalización del método de Tikhonov-Phillips conocido como "regularización de variación acotada" que posee la ventaja de no producir soluciones "sobresuavizadas". Este método consiste en reemplazar el término de penalización $\alpha \|L(x)\|^2$ de los métodos clásicos (en general L es la identidad o un operador diferencial) por un término de la forma $\beta G(x)$ donde $G(x)$ es una seminorma de variación acotada adecuadamente elegida. Esto ocasiona en principio dos desventajas: la regularización no estabiliza el problema en la norma de la variación acotada y el término de penalización no es diferenciable. En este sentido se trabajará en la determinación de funcionales de penalización diferenciables para estos métodos que permitan capturar discontinuidades en las soluciones. Otro de los trabajos futuros es la aplicación de estos métodos a la detección de bordes, por ejemplo, en imágenes provenientes de la Medicina.

Finalmente, otro problema interesante en el que nos proponemos trabajar es en la restauración de imágenes en colores y en la aplicación de criterios que permiten elegir de manera eficiente el parámetro de regularización para este problema. Para ello necesitaremos superar algunas dificultades computacionales relacionadas con el cálculo del producto de Kronecker de matrices de grandes dimensiones.

Referencias Bibliográficas

[1] J. Abad Ortega, *Restauración y reconstrucción bayesianas de imágenes usando descomposiciones multibanda*, Ph.D. thesis, E.T.S. de Ingeniería Informática, Universidad de Granada, 2003.

[2] R. Acar and C. R. Vogel, *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*, Inverse Problems **10** (1994), 1217–1229.

[3] H.-M Adorf, *Hubble space telescope image restoration in its fourth year*, Inverse Problems **11** (1995), 639–653.

[4] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space. Vol. II*, Translated from the Russian by Merlynd Nestell, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1963.

[5] G. Bachman and L.Ñarici, *Functional analysis*, Academic Press, New York, 1966.

[6] A. B. Bakushinskii, *Remarks on choosing a regularization parameter using the quasi-optimality and ratio criterion*, USSR Comp. Math. Math. Phys. **24** (1984), 181–182.

[7] H. T. Banks and K. Kunisch, *Estimation techniques for distributed parameter systems*, Systems & Control: Foundations & Applications, vol. 1, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989.

[8] A. Chambolle and J. L. Lions, *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Numer. Math. **76** (1997), 167–188.

[9] D. Colton and R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Applied Mathematical Sciences, vol. 93, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[10] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 3: Spectral theory and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] L. Eldén, *The numerical solution of a noncharacteristic Cauchy problem for a parabolic equation*, Numerical treatment of inverse problems in differential and integral equations (Heidelberg, 1982), Progr. Sci. Comput., vol. 2, Birkhäuser Boston, Mass., 1983, pp. 246–268.

[12] H. W. Engl, M. Hanke, and A.Ñeubauer, *Regularization of inverse problems*, Mathematics and its Applications, vol. 375, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[13] H. W. Engl and T. Langthaler, *Control of the solidification front by secondary cooling in continuous casting of steel*, Case studies in industrial mathematics, European Consort. Math. Indust., vol. 2, Teubner, Stuttgart, 1988, pp. 51–77.

[14] H. W. Engl, A. K. Louis, and W. Rundell, *Inverse problems in geophysics*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[15] H. W. Engl and P. Manselli, *Stability estimates and regularization for an inverse heat conduction problem in semi-infinite and finite time intervals*, Numer. Funct. Anal. Optim. **10** (1989), no. 5-6, 517–540.

[16] G. H. Golub, M. T. Heath, and G. Wahba, *Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter*, Technometrics **21** (1979), 215–223.

[17] C. W. Groetsch and A.Ñeubauer, *Convergence of a general projection method for an operator equation of the first kind*, Houston J. Math. **14** (1988), no. 2, 201–208.

[18] P. C. Hansen, *Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve*, SIAM Review **34** (1992), no. 4, 561–580.

[19] ———, *Regularization tools: a matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*, Numer. Algorithms **6** (1994), no. 1-2, 1–35.

[20] ———, *Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices*, Numer. Algorithms **29** (2002), no. 4, 323–378, Regularization with sparse and structured matrices.

[21] P. C. Hansen, J. G. Nagy, and D. P. O'Leary, *Deblurring images*, Fundamentals of Algorithms, vol. 3, SIAM, Philadelphia, 2006, Matrices, spectra, and filtering.

[22] P. C. Hansen and D. P. O'Leary, *The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems*, SIAM J. Sci. Comput. **14** (1993), no. 6, 1487–1503.

[23] D.Ñ. Hào and H.-J. Reinhardt, *Recent contributions to linear inverse heat conduction problems*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **4** (1996), no. 1, 23–32.

[24] G. Helmberg, *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 6, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969.

[25] T. Herdman, R. D. Spies, and K. G. Temperini, *Generalized qualification and qualification levels for spectral regularization methods*, (2007), enviado.

[26] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer-Verlag, New York, 1965.

[27] D.Ñ. Hào, *Methods for inverse heat conduction methods*, Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik, (Frankfurt/Main: Peter Lang), 1998.

[28] B. Hofmann and P. Mathé, *Analysis of profile functions for general linear regularization methods*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), no. 3, 1122–1141 (electronic).

[29] J. Honerkamp, *Ill-posed problems in rheology*, Rheol. Acta **28** (1989), 363–371.

[30] V. Isakov, *Inverse source problems*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[31] I.D. Johnson and B.S. Hudson, *Environmental modulation of m13 caot protein tryptophan fluorescence dynamics*, Biochemistry **28** (1989), 6392–6400.

[32] P. Jonas and A. K. Louis, *Approximate inverse for a one-dimensional inverse heat conduction problem*, Inverse Problems **16** (2000), no. 1, 175–185.

[33] J. B. Keller, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly **83** (1976), no. 2, 107–118.

[34] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Applied Mathematical Sciences, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1996.

[35] R. L. Lagendijk and J. Biemond, *Iterative identification and restoration of images*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[36] G. Landl, H. W. Engl, J. Chen, and K. Zeman, *Optimal strategies for the cooling of steel strips in hot strip mills*, Inverse Problems Engrg. **2** (1995), 103–118.

[37] G. Landl, T. Langthaler, H. W. Engl, and H. F. Kauffmann, *Distribution of event times in time-resolved fluorescence: the exponential series approach—algorithm, regularization, analysis*, J. Comput. Phys. **95** (1991), no. 1, 1–28.

[38] A. K. Louis, *Corrigendum: "Approximate inverse for linear and some nonlinear problems" [Inverse Problems **11** (1995), no. 6, 1211–1223]*, Inverse Problems **12** (1996), no. 2, 175–190.

[39] ______, *Application of the approximate inverse to* 3*D X-ray CT and ultrasound tomography*, Inverse problems in medical imaging and nondestructive testing (Oberwolfach, 1996), Springer, Vienna, 1997, pp. 120–133.

[40] A. K. Louis and P. Maass, *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Problems **6** (1990), no. 3, 427–440.

[41] G. R. Luecke and K. R. Hickey, *Convergence of approximate solutions of an operator equation*, Houston J. Math. **11** (1985), no. 3, 345–354.

[42] P. Mathé, *Saturation of regularization methods for linear ill-posed problems in Hilbert spaces*, SIAM J. Numer. Anal. **42** (2004), no. 3, 968–973 (electronic).

[43] P. Mathé and S. V. Pereverzev, *Optimal discretization of inverse problems in Hilbert scales. Regularization and self-regularization of projection methods*, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2001), no. 6, 1999–2021 (electronic).

[44] ______, *Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales*, Inverse Problems **19** (2003), no. 3, 789–803.

[45] H. Moritz, *Advanced physical geodesy*, Wichmann, Karlsruhe, 1980.

[46] V. A. Morozov, *On the solution of functional equations by the method of regularization*, Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 414–417.

[47] M. Z. Nashed and G. Wahba, *Convergence rates of approximate least squares solutions of linear integral and operator equations of the first kind*, Math. Comp. **28** (1974), 69–80.

[48] F.Ñatterer, *The mathematics of computerized tomography*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[49] A.Ñeubauer, *On converse and saturation results for regularization methods*, Beiträge zur angewandten Analysis und Informatik, Shaker, Aachen, 1994, pp. 262–270.

[50] ______, *On converse and saturation results for Tikhonov regularization of linear ill-posed problems*, SIAM J. Numer. Anal. **34** (1997), no. 2, 517–527.

[51] D. L. Phillips, *A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind*, J. Assoc. Comput. Mach. **9** (1962), 84–97.

[52] R. Plato, *Optimal algorithms for linear ill-posed problems yield regularization methods*, Numer. Funct. Anal. Optim. **11** (1990), no. 1-2, 111–118.

[53] J. Radon, *Uber die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten*, P.M. Gruber, E. Hlawka, W. Nöbauer and L. Schmetterer, eds., J. Radon, Gesammelte Abhandlungenn - Collected works, Band 2,Verlag d. Österr. Akad. d. Wiss., Birkhäuser, Basel (1987).

[54] T. I. Seidman, *Nonconvergence results for the application of least-squares estimation to ill-posed problems*, J. Optim. Theory Appl. **30** (1980), no. 4, 535–547.

[55] D. Showalter, *Representation and computation of the pseudoinverse*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 584–586.

[56] D. W. Showalter and A. Ben-Israel, *Representation and computation of the generalized inverse of a bounded linear operator between Hilbert spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **48** (1970), 184–194.

[57] R. D. Spies and K. G. Temperini, *Arbitrary divergence speed of the least-squares method in infinite-dimensional inverse ill-posed problems*, Inverse Problems **22** (2006), no. 2, 611–626.

[58] ______, *Global saturation of regularization methods for inverse ill-posed problems*, (2007), enviado.

[59] D. B. Tata, M. Foresti, J. Cordero, M. A. Tomashefsky, M. A. Alfano, and R. R. Alfano, *Fluorescence polarization spectroscopy and time-resolved fluorescence kinetics of native cancerous and normal rat kidney tissues*, Biophys J. **50** (1986), 463–469.

[60] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1958.

[61] A.Ñ. Tikhonov, *Regularization of incorrectly posed problems*, Soviet Math. Dokl. **4** (1963), 1624–1627.

[62] ______, *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method*, Soviet Math. Dokl. **4** (1963), 1035–1038.

[63] C. R. Vogel and M. Oman, *Iterative methods for total variation denoising*, Siam J. Sci. Computing **17** (1996), 227–238.

[64] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1980, Translated from the German by Joseph Szücs.

[65] G. Whaba, *Spline models for observational data*, SIAM, Philadelphia, 1990.