Resumen

En este trabajo se abordó el estudio de métodos de regularización para problemas inversos mal condicionados desde un punto de vista general, utilizando la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert. Se extendió un resultado de T. Seidman sobre la no convergencia del método de mínimos cuadrados al caso de divergencia con velocidad arbitraria. En particular, se demostró que si se utiliza el método de mínimos cuadrados en problemas inversos mal condicionados, entonces siempre es posible elegir adecuadamente una sucesión de subespacios aproximantes de dimensión finita, de manera tal de conseguir que las soluciones de mínimos cuadrados diverjan de la solución exacta con cualquier velocidad arbitrariamente grande, prescrita *a-priori*.

Por otra parte, se extendió la definición de calificación introducida por Mathé y Pereverzev en el año 2003, principalmente permitiendo que las funciones asociadas a órdenes de convergencia y conjuntos fuente no necesariamente sean las mismas. Se introdujeron tres niveles de calificación: débil, fuerte y óptimo. Se mostró que el primero de estos niveles generaliza la definición de calificación dada por Mathé y Pereverzev y se presentó un ejemplo de un método de regularización espectral que tiene calificación débil que no es calificación en el sentido de Mathé y Pereverzev. Se dio una condición suficiente que garantiza que un método de regularización espectral posee calificación en el sentido de esta generalización. También se probaron condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia dado sea calificación fuerte u óptima. Se presentaron varios ejemplos de métodos de regularización espectrales que no tienen

calificación clásica y sí poseen calificación generalizada en alguno de los niveles definidos en este trabajo. También se mostraron y probaron varias implicaciones de esta teoría en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados.

La teoría de saturación existente hasta ahora sólo era aplicable a los métodos de regularización espectrales. En este trabajo se ha desarrollado una teoría general de saturación global para métodos de regularización arbitrarios (espectrales o no). Se hallaron condiciones necesarias y suficientes para que un método posea saturación y se probó que en tales métodos el error total debe ser doblemente optimal: como orden de convergencia óptimo sobre un cierto conjunto el que a su vez debe ser óptimo, en un sentido muy preciso, con respecto al error. Se han probado algunos resultados recíprocos y aplicado la teoría desarrollada para caracterizar la saturación de los métodos espectrales con calificación clásica y de métodos espectrales con calificación máxima.

También se utilizó el método de la inversa aproximada para desarrollar métodos de regularización que permiten resolver problemas inversos mal condicionados originados en aplicaciones concretas. Finalmente se presentaron varias aplicaciones a problemas inversos en conducción de calor y procesamiento de imágenes y resultados numéricos que permiten una mejor visualización de los resultados teóricos obtenidos.

Introducción

En las últimas dos décadas, el estudio de los problemas inversos ha sido sin duda una de las áreas de mayor crecimiento de la Matemática Aplicada. Este crecimiento ha sido en buena parte consecuencia de aplicaciones en otras ciencias y en la industria. En general se dice que dos problemas son inversos el uno del otro si la formulación de uno involucra al otro ([33]). Generalmente por razones históricas suele llamarse a uno de ellos el problema *directo* (usualmente éste es el más simple o el que se ha estudiado primero) y al otro, el problema *inverso*. Sin embargo, si detrás de un problema matemático existe un problema de la vida real, hay, en la gran mayoría de los casos, una distinción muy natural entre el problema directo y el problema inverso. Por ejemplo, si lo que se busca es predecir el comportamiento futuro de un sistema físico a partir del conocimiento de su estado presente y de las leyes físicas que lo gobiernan, entonces éste es naturalmente el problema directo. En este caso, entre los posibles problemas inversos podemos mencionar la determinación del estado presente del sistema a partir de observaciones futuras (es decir la evolución "hacia atrás" en el tiempo) y la identificación de parámetros físicos a partir de observaciones de la evolución del sistema.

Desde el punto de vista de las aplicaciones existen dos motivaciones principales para el estudio de los problemas inversos. Primero, la necesidad de determinar estados pasados o parámetros de un sistema físico y segundo, la necesidad de saber cómo se debe influenciar un sistema a través de su estado presente o sus parámetros, con el objeto de llevarlo a un cierto estado deseado en el futuro. Podría decirse entonces que los problemas inversos tratan la determinación de las causas de un efecto observado o deseado.

En su gran mayoría, los problemas inversos no satisfacen los postulados de Hadamard de buen condicionamiento ("well-posedness"). Pueden no tener una solución en el sentido estricto, las soluciones pueden no ser únicas y/o no depender continuamente de los datos. Los problemas que poseen alguna de estas indeseables propiedades se dice que son mal condicionados ("ill-posed") y el tratamiento matemático de los mismos presenta, principalmente debido a la falta de dependencia continua de los datos, serias dificultades, especialmente desde el punto de vista computacional y numérico. Mientras que el estudio de problemas inversos concretos frecuentemente involucra el problema de cómo forzar unicidad mediante información o supuestos adicionales, no se puede decir mucho sobre esto en un contexto general. Sin embargo, la pérdida de estabilidad y su restauración mediante métodos apropiados (métodos de regularización) sí se puede tratar y estudiar con bastante generalidad.

Es oportuno mencionar que existe una gran variedad de problemas aplicados concretos que originan problemas inversos mal condicionados y cuyo tratamiento requiere necesariamente del uso de métodos de regularización. Entre ellos mencionamos: tomografía computada ([12], [48], [53]), problemas de fluorescencia ([31], [37], [59]), reología ([29]), geofísica ([14], [45]), procesamiento de señales e imágenes ([3], [20], [21]), conducción de calor ([13], [15], [23], [27], [36]), identificación de parámetros ([7], [30]), problemas de dispersión inversos ("inverse scattering") ([9]), etc..

En esta tesis abordaremos el estudio de métodos de regularización para problemas inversos mal condicionados desde un punto de vista general, haciendo uso de la teoría espectral para operadores en espacios de Hilbert. En particular, este enfoque nos conducirá a desarrollar un andamiaje matemático apropiado que nos permitirá cumplir con los siguientes objetivos:

- Exhibir el estado del arte de la teoría de regularización de problemas inversos mal condicionados desde la óptica de la teoría espectral.
- Demostrar que la aplicación del método de mínimos cuadrados en problemas mal condicionados puede generar soluciones aproximadas que diverjan de la solución exacta con velocidad arbitrariamente grande.
- Desarrollar una teoría general dentro de la cual podamos definir adecuadamente el concepto de "saturación" de un método de regularización formalizando la idea intuitiva del mismo como la máxima eficiencia que puede alcanzar dicho método, cualquiera sea la información de la que se disponga sobre la solución del problema.
- Formalizar adecuadamente el concepto de "calificación" de un método de regularización atendiendo a su concepción heurística como orden óptimo de convergencia.

Esta tesis consta de ocho capítulos. En los cuatro primeros se presenta el estado del arte sobre el tema incluyendo las principales herramientas matemáticas necesarias que nos permitirán abordar adecuadamente los problemas que son tratados en las secciones posteriores. Si bien gran parte de los resultados contenidos en estos capítulos son conocidos, en varias ocasiones hemos incluído demostraciones y desarrollos propios utilizando el enfoque previamente mencionado.

En 1980, Seidman ([54]) probó un resultado de no convergencia del método de mínimos cuadrados cuando se aplica a problemas inversos de dimensión infinita. En el Capítulo 5 extendemos este resultado probando que se puede obtener divergencia con cualquier velocidad arbitrariamente grande, prescrita *a-priori*.

En el Capítulo 6 desarrollamos una teoría general de saturación global para métodos de regularización arbitrarios (espectrales o no) y damos condiciones necesarias y suficientes para que un método de regularización arbitrario posea saturación. En particular, probamos que para que un método de regularización posea saturación, el error total debe ser "doblemente optimal", en el sentido que debe ser orden de convergencia óptimo sobre un cierto conjunto, el que a su vez debe satisfacer una cierta condición de optimalidad con respecto al error. Además, damos una forma explícita para la saturación en términos de la familia de operadores de regularización y del operador asociado al problema. Por último, demostramos algunos resultados recíprocos que son utilizados luego para caracterizar la saturación de los métodos espectrales con calificación clásica y de los métodos que poseen calificación máxima.

En el Capítulo 7 extendemos la definición de calificación de métodos de regularización espectrales dada por Mathé y Pereverzev en el año 2003 ([44]) e introducimos tres niveles jerárquicos del concepto de calificación: débil, fuerte y óptimo. También damos una condición suficiente para la existencia de calificación débil de un método de regularización espectral y condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia sea calificación fuerte u óptima de un método de regularización espectral. Además, presentamos varios ejemplos de métodos de regularización espectrales que no tienen calificación clásica y sí poseen calificación en alguno de los niveles definidos en este trabajo. Al final de dicho capítulo mostramos algunas importantes implicaciones de esta teoría en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados.

En el Capítulo 8 se presentan varias aplicaciones de los métodos y resultados previos a través de ejemplos y problemas concretos. En particular se muestran varios resultados numéricos en problemas inversos en conducción de calor y procesamiento de imágenes. Asimismo se exhiben resultados numéricos que muestran el concepto de calificación introducido en el Capítulo 7, como orden de convergencia óptimo en problemas de restauración de imágenes.