



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL FACULTAD DE  
HUMANIDADES Y CIENCIAS**

**MAESTRÍA EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS CON MENCIÓN EN  
MATEMÁTICA**

*La comprensión que tienen los alumnos referida a números racionales,  
como objeto matemático, al terminar la escuela secundaria*

*Esp. Marta Graciela NARDONI*

Director: Dr. Marcel POCHULU

Codirectora: Mg. Viviana CÁMARA

*Mayo de 2014*

*La comprensión que tienen los alumnos referida a  
números racionales, como objeto matemático, al terminar  
la escuela secundaria*

---

## ***Dedicatoria***

*A mis padres, por infundirme el amor al aprendizaje y al trabajo. Por educarme en la responsabilidad, en la solidaridad y en la humildad.*

*A Jorge, mi compañero en el amor, por la paciencia, el apoyo y los momentos compartidos.*

---

## *Agradecimientos*

*En especial a mi Director: Marcel David Pochulu*

*GRACIAS Marcel, por tanta generosidad, porque sus orientaciones, correcciones, paciencia, tolerancia y TIEMPO brindado, han sido fundamentales para mi crecimiento intelectual y para llevar a cabo este proyecto. Gracias a quién se convirtió en mi amigo, en mi referente profesional y me dio la oportunidad de aprender junto a una persona con tanta generosidad y honestidad en lo intelectual y en lo personal. Su ayuda y aporte tuvo, tiene y tendrá siempre un valor inconmensurable.*

*A mi amiga Codirectora: Viviana del Carmen Camara.*

*GRACIAS Vivi, porque sus orientaciones, sugerencias, consejos y paciencia han sido muy importantes para llevar adelante este proyecto. Su ayuda me permitió seguir, cuando mi ánimo decaía y nos permitió crecer juntas en lo académico y personal.*

*A mi amiga y Titular de Cátedra.: Susana Marcipar Katz.*

*GRACIAS Susana, porque su apoyo permitió mi crecimiento intelectual y personal desde que comencé a trabajar en la facultad. Sus estímulos y aportes enriquecieron mi formación Académica.*

*Además mis agradecimientos:*

*A todas mis compañeras de cátedra, por el respaldo y apoyo dado, para llevar adelante y concretar este proyecto.*

*A todos los estudiantes que colaboraron con su participación, para realizar la investigación.*

*A los colegas docentes investigadores, que colaboraron para dar mayor confiabilidad y validez a los instrumentos de la investigación.*

*A toda mi familia, que me brindó un apoyo incondicional, en todas y cada una de las etapas de este proyecto.*

*Finalmente, a los miembros del tribunal, desconocidos al momento de escribir estas palabras, por la lectura y evaluación de esta tesis.*

---

## RESUMEN

El trabajo tuvo por finalidad valorar la comprensión que alcanzan los estudiantes al finalizar la escuela secundaria, sobre un tema de Matemática en particular: *“los números racionales como objeto matemático”*. Como marco teórico y metodológico se utilizaron herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática.

Como contexto de investigación, se realizó una valoración de la comprensión que tienen los estudiantes ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, en carreras que tienen Matemática en su diseño curricular (Contador Público Nacional, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración) sobre los números racionales como objeto matemático y durante el año 2012. A su vez, la experiencia se replicó con un grupo de estudiantes ingresantes a carreras de profesorado en un Instituto de Formación Docente de la Provincia de Santa Fe.

Para el estudio, se diseñó e implementó un instrumento que pone en juego la red de relaciones que activa un individuo cuando ha comprendido el objeto matemático en cuestión (números racionales) y que se manifiesta a través de las prácticas operativas y discursivas que lleva a cabo. El instrumento se diseñó teniendo en cuenta el análisis didáctico realizado, en una fase previa de la investigación, sobre las tareas y actividades que proponen ocho libros escolares de Matemática, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales de Argentina.

Asimismo, se realizaron entrevistas clínicas con la finalidad de efectuar un análisis profundo de la comprensión que tienen los estudiantes sobre los números racionales, y los obstáculos y dificultades que aún persisten. La valoración realizada nos llevó a determinar, que si bien cada estudiante no domina la totalidad del sistema de prácticas relacionadas con los números racionales, dispone de una red de significados que es relevante para organizar procesos de enseñanza y aprendizaje cuidadosamente planificados, lo que contribuiría a mejorar la comprensión global que se puede alcanzar para este objeto matemático en particular.

---

## ABSTRACT

The study was intended to assess the students understanding reached at the end of high school, on a topic of mathematics in particular, " the rational numbers as a mathematical object ." The theoretical and methodological framework ontosemiotic Focus tools knowledge and mathematics instruction were used.

As research context, an assessment of understanding with incoming students to the Faculty of Economics of the Universidad Nacional del Litoral was held in races taking Mathematics in their curriculum (National Public Accountant, Bachelor of Economics and Bachelor administration) over the rational numbers as a mathematical object and during 2012. Meanwhile, the experience was replicated with a group of freshmen students to careers professorships in Institute of Teacher Education of the Province of Santa Fe

For the study, we designed and implemented a tool that brings into play the network of relationships that enable an individual when understood the mathematical object in question (rational numbers) and is manifested through the operative and discursive practices carried out. The instrument was designed taking into account the didactic analysis, at an earlier stage of the investigation, on the tasks and activities proposed 8 Math textbooks that are frequently used by teachers or recommended from official agencies of Argentina.

Also, clinical interviews in order to conduct a thorough analysis of the understanding that students have about the rational numbers, and the obstacles and difficulties which still exist were performed. The valuation led us to determine that while each student has not mastered the whole system of rational numbers related practices , has a network of meanings that is relevant to organize teaching and learning carefully planned , contributing to improve the overall understanding that can be achieved for this particular mathematical object .

# ÍNDICE

<b>PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>13</b>
1.1. Consideraciones generales .....	13
1.2. Delimitación del problema de investigación .....	15
1.3. Objetivos de la investigación .....	18
1.4. Justificación y alcances del estudio .....	19
1.5. Organización de la memoria de la investigación .....	20
<b>ESTADO DEL ARTE Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>23</b>
2.1. Introducción .....	23
2.2. La noción de fracción y sus significados en la escuela secundaria .....	23
2.3. El número racional como medida y reparto en la escuela primaria .....	24
2.4. Sistemas de representación de los números racionales en futuros profesores de enseñanza primaria .....	26
2.5. La construcción social del número racional en un escenario laboral.....	27
2.6. La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con las operaciones básicas y propiedades elementales .....	28
<b>MARCO TEÓRICO.....</b>	<b>31</b>
3.1 Introducción .....	31
3.2. Los objetos matemáticos y la noción de significado .....	32
3.3. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.....	35
3.4. Configuración epistémica/cognitiva .....	36
3.5. Las Funciones Semióticas.....	38
3.6. La comprensión matemática en el EOS .....	39
3.7. El análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados .....	40
3.8. Obstáculos y Dificultades .....	41
3.8.1 La noción de obstáculo.....	41
3.8.2. La noción de errores y dificultades .....	42
3.9. La noción de idoneidad didáctica .....	43
<b>METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>47</b>
4.1. Introducción .....	47
4.2. Fases de la investigación.....	48
4.3. Aspectos metodológicos específicos .....	50

---

4.3.1. Documentos Curriculares, Textos Escolares y Estudiantes participantes.....	50
4.3.1.2. Los textos escolares analizados .....	51
4.3.1.3. Los estudiantes cuyas producciones se analizaron.....	54
4.3.2. El diseño del instrumento .....	56
4.3.2.1 El instrumento comentado .....	61
4.3.3. Análisis de los datos obtenidos de las respuestas de los estudiantes participantes .....	80
<b>LOS NÚMEROS RACIONALES EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES Y EN TEXTOS ESCOLARES .....</b>	<b>84</b>
5.1. Introducción .....	84
5.2. Configuración Epistémica de Referencia del Objeto Matemático “Números Racionales” .....	85
5.3. Los números racionales en los textos escolares .....	89
5.4. Configuraciones epistémicas del objeto matemático “Números Racionales” en los textos escolares analizados .....	91
5.4.1. Configuración epistémica del Libro 1 .....	91
5.4.2. Configuración epistémica del Libro 2 .....	95
5.4.3. Configuración epistémica del Libro 3 .....	98
5.4.4. Configuración epistémica del Libro 4 .....	101
5.4.5. Configuración epistémica del Libro 5 .....	104
5.4.6. Configuración epistémica del Libro 6 .....	107
5.4.7. Configuración epistémica del Libro 7 .....	110
5.4.8. Configuración epistémica del Libro 8 .....	113
5.5. Idoneidad didáctica de las unidades analizadas en los textos escolares .....	116
5.6. Análisis y discusión de resultados .....	118
5.6.1. Configuración epistémica del bloque o grupo I .....	118
5.6.2. Configuración epistémica del bloque o grupo II .....	120
5.6.3. Configuración Epistémica de referencia .....	122
5.6.4. Idoneidad didáctica de las actividades analizadas en los textos escolares .....	125
5.6.4.1. Idoneidad didáctica del bloque o grupo I .....	125
5.6.4.2. Idoneidad didáctica del bloque o grupo II .....	126
5.6.5. Reflexiones finales del Capítulo .....	127

---

---

<b>LA COMPRESIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES .....</b>	<b>130</b>
6.1. Introducción .....	130
6.2. Configuraciones cognitivas de los estudiantes de la UNL.....	131
6.2.1 Configuración Cognitiva del estudiante 1F.....	132
6.2.2. Configuración Cognitiva del estudiante 2F.....	133
6.2.3. Configuración Cognitiva del estudiante 3F.....	135
6.3.4. Configuración Cognitiva del estudiante 4F.....	136
6.3.5. Configuración Cognitiva del estudiante 5F.....	137
6.3.6. Configuración Cognitiva del estudiante 6F.....	138
6.3.7. Configuración Cognitiva del estudiante 7F.....	139
6.3.8. Configuración Cognitiva del estudiante 8F.....	140
6.3.9. Configuración Cognitiva del estudiante 9F.....	141
6.3.10. Configuración Cognitiva del estudiante 10F.....	142
6.3.11. Configuración Cognitiva del estudiante 11F.....	143
6.3.12. Configuración Cognitiva del estudiante 12F.....	145
6.3.13. Configuración Cognitiva del estudiante 13F.....	146
6.3.14. Configuración Cognitiva del estudiante 14F.....	147
6.3.15. Configuración Cognitiva del estudiante 15F.....	149
6.3.16. Configuración Cognitiva del estudiante 16F.....	150
6.3.17. Configuración Cognitiva del estudiante 17F.....	152
6.3.18. Configuración Cognitiva del estudiante 18F.....	153
6.3.19. Configuración Cognitiva del estudiante 19F.....	154
6.3.20. Configuración Cognitiva del estudiante 20F.....	156
6.3.21. Configuración Cognitiva del estudiante 21F.....	157
6.3.22. Configuración Cognitiva del estudiante 22F.....	159
6.3.23. Configuración Cognitiva del estudiante 23F.....	160
6.3.24. Configuración Cognitiva del estudiante 24F.....	161
6.3.25. Configuración Cognitiva del estudiante 25F.....	163
6.4. Configuraciones Cognitivas de los estudiantes del ISP N° 10 .....	164
6.4.1. Configuración Cognitiva del estudiante 1I.....	164
6.4.2. Configuración Cognitiva del estudiante 2I.....	165
6.4.3. Configuración Cognitiva del estudiante 3I.....	166
6.4.4. Configuración Cognitiva del estudiante 4I.....	168

---

---

6.4.5. Configuración Cognitiva del estudiante 5I.....	169
6.4.6. Configuración Cognitiva del estudiante 6I.....	170
6.4.7. Configuración Cognitiva del estudiante 7I.....	171
6.4.8. Configuración Cognitiva del estudiante 8I.....	172
6.4.9. Configuración Cognitiva del estudiante 9I.....	173
6.4.10. Configuración Cognitiva del estudiante 10I.....	174
6.5. Configuraciones Cognitivas versus Configuración Epistémica.....	175
6.6. Relaciones entre elementos primarios del objeto matemático establecidas por los estudiantes de la UNL.....	176
6.6.1. La argumentación como proceso de justificación de respuestas en los estudiantes de la UNL .....	180
6.6.2. El tipo de lenguaje utilizado en los procesos de argumentación en estudiantes de la UNL.....	180
6.7. Relaciones entre elementos primarios del objeto matemático establecidas por los estudiantes del ISP N° 10 .....	181
6.7.1. La argumentación como proceso de justificación de respuestas en los estudiantes del ISP N° 10 .....	185
6.7.2. El tipo de lenguaje utilizado en los procesos de argumentación en estudiantes del ISP N° 10 .....	185
6.8. La comprensión alcanzada sobre los números racionales.....	186
6.9. Algunos obstáculos y dificultades que persisten sobre los números racionales al finalizar la escuela secundaria .....	191
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>196</b>
7.1. Consideraciones generales .....	196
7.2 Significado global o experto de referencia del objeto matemático número racional .....	197
7.3 Análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen los textos escolares sobre el objeto matemático número racional .....	198
7.4 Los conceptos, definiciones y propiedades que ponen en práctica los estudiantes en contextos de resolución de problemas con números racionales.....	200
7.5. Los procedimientos, técnicas y algoritmos que emplean los estudiantes en contextos de resolución de problemas con números racionales.....	203
7.6. Las argumentaciones y lenguaje matemático que usan los estudiantes en contextos de resolución de problemas con números racionales.....	205
7.7. La comprensión que han alcanzado los estudiantes sobre números racionales al finalizar la escuela secundaria .....	207

---

---

7.8. Las dificultades y errores que persisten en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes al finalizar la escuela secundaria .....	210
7.9. Reflexiones y consideraciones finales .....	212
Limitaciones de la investigación y perspectivas futuras de trabajo.....	214
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>217</b>

# **PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN**

## PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.1. Consideraciones generales

---

La educación sigue siendo para las sociedades uno de las cuestiones más importantes para generar igualdad social, impulsar el desarrollo económico, cultural, personal, y mejorar la calidad de vida. Sin embargo, a pesar de todas las políticas educativas aplicadas y los cambios tecnológicos implementados, en la escuela secundaria es recurrente la problemática acerca del aprendizaje logrado en Matemática y la calidad de los mismos. De la misma manera, en los primeros años de la universidad la matemática sigue presentando dificultades y suele ser catalogada por los estudiantes como la asignatura más difícil para aprobar y avanzar con los estudios.

Es frecuente, además, que los profesores de Matemática discutan la formación recibida por los alumnos en el nivel educativo anterior y las deficiencias que presentan en los aprendizajes. En este sentido, las experiencias en las aulas que se reportan indican que, para la gran mayoría de los estudiantes, la Matemática tiene poco sentido y les resulta incomprensible la aplicabilidad de los procesos matemáticos que aprenden en la escuela.

Cuando los alumnos finalizan la escuela secundaria y siguen estudios superiores, donde la Matemática está presente en el plan de estudios de la carrera escogida, es frecuente que deban realizar cursos de ingreso o de nivelación, los cuales suelen tener como objetivo determinar lo que saben sobre ciertos temas considerados básicos. Entre ellos, tenemos las propiedades y operaciones con números reales (en particular, con números racionales y en sus distintos modos de representación).

A pesar de que la enseñanza de los números racionales se inicia en la escuela primaria, se complejiza en los años de la escuela secundaria y es un tema de relevada importancia en el currículo escolar, por diversas razones, los alumnos suelen tener muchas dificultades al resolver situaciones o actividades que los involucren. Al respecto, diversos estudios e investigaciones, como los de Figueras (1988), Ávila y Mancera (1989), Duval (1999), Chamorro (2003), D'amore (2005), Pochulu (2005), Sanchez (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2007), Perera y Valdemoros (2007), Fandiño (2009), entre otros, muestran que los estudiantes no están logrando una formación matemática adecuada al afrontar estudios en niveles superiores y tienen dificultades, particularmente, en la comprensión alcanzada de los números racionales como objeto matemático.

Esta problemática, que es de conocimiento de los profesores de niveles superiores (universitario y superior no universitario en el ámbito académico de Argentina) implica, generalmente, que en las evaluaciones de los cursos de ingreso o de nivelación, se presenten situaciones y actividades que involucren números racionales y el éxito o fracaso obtenido, cuantificado a través de una calificación.

Esta calificación, puesta en el mejor de los casos con absoluta justicia, puede ser tomada como indicador de lo que el alumno sabe del tema, pero no cuánto sabe de él, cómo lo sabe o por qué sabe lo que sabe.

La noción de comprensión, que tiene múltiples acepciones, se vincula con posiciones de investigadores en Educación Matemática como Godino (2000 y 2003), Font (2001), Pino-Fan, Godino y Font (2011), Pochulu (2011) y Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011) y se entiende en este trabajo del siguiente modo:

Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que “obliga” al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFD, 2010, p. 122).

En consecuencia, si se ha comprendido un determinado objeto matemático, el alumno debiera ser capaz de articular coherentemente seis elementos referidos al mismo: las situaciones problemas en las que participa el objeto, los conceptos, las propiedades, los procedimientos, los argumentos y el lenguaje. No obstante, tal como se señala en INFD (2010) al reflexionar sobre esta acepción, la pregunta que subyace de fondo es: ¿cómo sabrán los docentes y los estudiantes que se ha alcanzado la comprensión de determinado objeto matemático? A esta pregunta, le anexamos las siguientes: ¿podríamos hablar de comprensión de un objeto matemático o de ciertas categorías de comprensión que alcanzó el alumno? Los textos escolares de Matemática ¿proponen tareas o actividades que ayudan a la comprensión de un determinado objeto matemático? Los profesores ¿valoran la comprensión que alcanzó un alumno sobre un objeto matemático en particular, o se centran sólo en algunos aspectos de ella?

## 1.2. Delimitación del problema de investigación

---

Desde los primeros años de la educación primaria, los estudiantes trabajan con números racionales. En un primer momento con fracciones, luego decimales y razones. Y así continúan en el nivel secundario, ampliando sus aplicaciones y significados. Sin embargo, al terminar la escuela secundaria e ingresar a los primeros años del nivel terciario o universitario podemos observar diferentes niveles de dificultades en la resolución de problemas sencillos o en la realización de actividades que impliquen operaciones con números racionales. Por ejemplo, confunden el algoritmo de diferentes operaciones, no identifican los números decimales como números racionales, entre otros.

Numerosos estudios e investigaciones, entre ellos Perera y Valdemoros (2007) y Fandiño (2005), reconocen a los números racionales, específicamente a las fracciones, como uno de los contenidos que ofrece mayores dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje. Al respecto, Cid, Godino y Batanero (2003) expresan:

Los números racionales son el primer conjunto de experiencias numéricas de los niños que no están basadas en los algoritmos de recuento como los números naturales (...). Ahora con la introducción de los números racionales el algoritmo de recuento falla (o sea, no hay un número racional siguiente a otro dado, además, las fracciones se multiplican de manera diferente, etc.). La práctica y el discurso que se pone en juego con los “números racionales” suponen un salto importante en la manera de pensar y usar los números que origina dificultades a muchos alumnos.

Las reglas de cálculo con las fracciones se pueden enseñar de manera simple: los alumnos pueden lograr una cierta destreza en el cálculo del denominador común para sumar o restar fracciones sencillas. De igual modo es posible que aprendan rápidamente las técnicas de multiplicar y dividir fracciones. Sin embargo, este enfoque algorítmico y memorístico tiene dos peligros (...): primero, ninguna de estas reglas ayuda a los estudiantes a pensar sobre el significado de las operaciones o por qué funcionan.

Segundo, el dominio observado a corto plazo se pierde rápidamente. Las reglas de operación con las fracciones llegan a parecer similares y se confunden. El enfoque de la enseñanza de las fracciones debe ser el logro del sentido numérico y la resolución de problemas. (p. 223)

Además el estudio de los números racionales constituye una parte importante de la matemática escolar, porque ello permite comprender los fenómenos del mundo real

asociados a las actividades de medir y de comparar, actividades que exigen desarrollar en los estudiantes una importante diversidad de competencias.

Aunque como todo objeto de conocimiento, el estudio de esta estructura numérica también plantea problemas de comprensión y de aprendizaje (Rico y Sáenz, 1982).

También Artigue (1998) considera que la investigación didáctica sobre los números reales ha puesto de manifiesto que la concepción desarrollada por los estudiantes no es la adecuada y comenta las siguientes dificultades:

- 1) La distinción entre los diferentes tipos de números depende mucho de su forma de representación.
- 2) La creciente y descontrolada utilización de las calculadoras y de las nuevas tecnologías tiende a reforzar la asimilación número real / nombre decimal.
- 3) El orden en  $\mathbb{R}$  es reconocido como un orden denso, pero, en función del contexto, los estudiantes pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números justo antes o justo después de un número determinado; por ejemplo, 0,9999..., nombrado, muchas veces, como el número anterior a 1.
- 4) La asociación entre los números reales y la recta real tampoco es coherente. Incluso, en el caso de que los alumnos acepten a priori el principio de la correspondencia uno a uno entre  $\mathbb{R}$  y la recta real, no están del todo convencidos de que un determinado número tenga un lugar en la recta real. (p. 19)

En virtud de esto, es evidente que hoy en día en el ámbito de la Educación Matemática se busca, más que aplicar mecánicamente un algoritmo o procedimiento, la comprensión de los conceptos. En general, muchas investigaciones dan cuenta de la preocupación sobre la comprensión alcanzada por los alumnos en Matemática, como Skemp (1976), Schoenfeld (1992), Brousseau (2004), Godino, Batanero, Cid, Font, Ruiz y Roa (2004), entre otros.

Todas estas investigaciones nos permitieron evidenciar un área problemática acerca del conocimiento de los números racionales, especialmente sobre la comprensión.

La problemática acerca de la comprensión y las dificultades que tienen los estudiantes, con los números racionales como objeto matemático al culminar sus estudios secundarios e ingresar a cursar estudios terciarios o universitarios, nos preocupa y ocupa como docentes de cátedras de Matemática del primer año de carreras en institutos terciarios y en carreras universitarias, pues nuestra experiencia en la práctica docente nos permite conjeturar que esta problemática influye negativamente en la comprensión de otros objetos matemáticos o actúan en algunos casos como obstáculos para su comprensión.

Esta preocupación por determinar qué han comprendido los estudiantes no es algo “personal”, sino del propio Ministerio de Educación y que se expresa a través de los distintos documentos curriculares y propuestas pedagógicas, y por tal razón, uniéndola a esa preocupación con un tema como los números racionales que están tan presentes en los cursos de ingreso y en las materias de Matemática de la Universidad, nos llevó a la necesidad de realizar una investigación exploratoria acerca de la comprensión del objeto matemático número racional en estudiantes que culminaron la escuela secundaria. Así que centramos nuestro problema de investigación en la exploración del estado de la comprensión alcanzada por los estudiantes y las dificultades que ocasiona esta comprensión.

Para abordar esta problemática, el propósito de este trabajo fue valorar la comprensión que tienen los estudiantes referida a los números racionales, como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria y que se encuentran iniciando estudios terciarios o universitarios. Según Godino, Font, Konic y Wilhemi (2009) se entiende por objeto matemático a un sistema complejo de prácticas que el mismo objeto posibilita, las cuales se relacionan con un tipo de lenguaje, un tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentos, unas determinadas definiciones, situaciones-problema y proposiciones. A su vez, todos estos elementos se articulan entre sí constituyendo una configuración epistémica del objeto matemático en cuestión. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que plantea Godino (2000, 2002, 2003) para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994), y permiten analizar la comprensión que un alumno alcanza sobre un objeto matemático.

El EOS concibe a la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (Godino, 2000; Font, 2001), pues sostiene que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. Esto lleva a determinar si reconoce el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, aplica y recuerda (implícitamente en la mayoría de los casos) los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y utiliza lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones.

En este marco, las preguntas que guiaron esta investigación fueron:

- ¿Qué han comprendido los alumnos sobre números racionales, como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria al iniciar estudios terciarios o universitarios?
- ¿Cuáles son las principales dificultades, a propósito de la comprensión alcanzada o no, que se les presentan a los estudiantes cuando operan con números racionales y al finalizar la escuela secundaria o al iniciar estudios terciarios o universitarios?

### 1.3. Objetivos de la investigación

---

Con esta investigación se pretende valorar la comprensión que alcanzaron los estudiantes al terminar la escuela secundaria sobre los números racionales como objeto matemático, con el propósito de contar con información que permita una revisión, análisis crítico y diseño de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se implementan actualmente cuando se enseña este contenido de Matemática en particular.

Esto implica, en primer lugar realizar un estudio sobre el significado global o experto de referencia del objeto número racional, luego un análisis didáctico de los textos escolares más consultados por los docentes en lo referente a los números racionales.

Y a continuación, realizar un estudio del conjunto de prácticas operativas y discursivas que los estudiantes realizan, buscando determinar si reconocen el campo de problemas en que se involucra a los números racionales, aplican y recuerdan los conceptos, propiedades, técnicas y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y utilizan lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones.

En este sentido los objetivos que guían esta investigación son:

**Objetivo general:** *Valorar la comprensión que han alcanzado los estudiantes, sobre números racionales como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria e iniciar estudios terciarios o universitarios.*

**Objetivos específicos:**

- a) Determinar un significado global o experto de referencia del objeto matemático número racional, a través del análisis de Documentos curriculares Nacionales y Jurisdiccionales*
- b) Realizar un análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen los textos escolares sobre el objeto matemático número racional.*
- c) Determinar los conceptos y propiedades, referidos a números racionales, que ponen en práctica los alumnos cuando resuelven problemas.*

- d) *Especificar los procedimientos y técnicas que emplean habitualmente los alumnos en contextos de resolución de problemas con números racionales.*
- e) *Caracterizar el tipo de argumentaciones y uso de lenguaje que emplean los alumnos cuando brindan explicaciones sobre la resolución de situaciones que involucran números racionales.*
- f) *Evaluar la comprensión que han alcanzado los alumnos, sobre números racionales y como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria e ingresar en un nivel superior.*
- g) *Detallar las dificultades que aparecen cuando los alumnos resuelven actividades matemáticas sobre números racionales, a propósito de la comprensión alcanzada o no, al finalizar la escuela secundaria e ingresar en un nivel superior.*

#### **1.4. Justificación y alcances del estudio**

---

La importancia de las actividades que realizan los estudiantes con los números racionales se evidencia en todo el nivel secundario como así también en las distintas cátedras de Matemática que cursan en el nivel terciario o universitario, dado que es un contenido básico para la apropiación de otros.

Específicamente, la presente investigación se justifica en el sentido de que ofrece herramientas teóricas y metodológicas para valorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre los números racionales, como objeto matemático.

Además, con los resultados de la investigación se pretende ofrecer aportes teóricos que permitan una revisión y análisis crítico de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se implementan actualmente cuando se enseñan los números racionales, lo cual se verá reflejado al:

- a) Proponer un conjunto de actividades que permitirán valorar la comprensión alcanzada por los alumnos sobre los números racionales como objeto de estudio.
- b) Contar con información acerca de las competencias matemáticas que ponen en juego los alumnos cuando resuelven situaciones con números racionales;
- c) Repensar y sugerir algunas recomendaciones para las propuestas de capacitación en las que el diseño de problemas y situaciones de enseñanza que involucran los números racionales se establecen como un propósito destacado;
- d) Elaborar algunas conclusiones sobre la comprensión de elementos primarios que conforman el objeto matemático números racionales por parte de los estudiantes participantes de la investigación.

### **1.5. Organización de la memoria de la investigación**

---

En el Capítulo 1, hemos realizado la descripción del problema de investigación, los objetivos y la importancia, relevancia y justificación del estudio realizado.

En el Capítulo 2 se presenta una revisión bibliográfica de los antecedentes del trabajo. Para ello, se realiza una introducción descriptiva tanto de aspectos teóricos, como de la metodología seguida y comentarios sobre los resultados que se obtuvieron. También realizamos una reflexión en torno al problema de investigación que los ocupa, en el sentido de resaltar en qué se asemeja y/o diferencia de nuestra investigación.

En el Capítulo 3 se presenta el marco teórico que sustenta la investigación. En particular describimos conceptos centrales del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2007).

En el Capítulo 4 se presenta el diseño de la investigación a través de la descripción de la metodología empleada, la selección de los sujetos participantes, los instrumentos diseñados y utilizados para la recolección y análisis de los datos.

En el Capítulo 5 nos abocamos a realizar un estudio sobre el significado global o experto de referencia del objeto número racional, a través del análisis de documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales al análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen ocho textos escolares utilizados en la escuela secundaria sobre números racionales, utilizando herramientas teóricas que provienen del EOS. Una de las intenciones de este Capítulo es determinar algunos indicadores de mejora (de los textos escolares) pues consideramos que estos guían la labor del docente, y se convierten en el primer aporte que realizamos a partir de la investigación.

En el Capítulo 6 analizamos cualitativamente las prácticas operativas y discursivas de 35 estudiantes (10 ingresantes a un instituto de educación superior y 25 a la universidad) que resolvieron el 50% o más de las actividades propuestas en el instrumento elaborado y utilizado para el desarrollo de la investigación.

En el Capítulo 7 presentamos las conclusiones a las que llegamos con la realización de la investigación, destacando los puntos más relevantes y que dan algunas respuestas a los objetivos propuestos. Exponemos además, algunas recomendaciones que a través de reflexiones didácticas esta investigación nos ha permitido elaborar.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y los anexos que dan evidencias del recorrido realizado en la investigación.

**ESTADO DEL ARTE Y  
REVISIÓN  
BIBLIOGRÁFICA**

## ESTADO DEL ARTE Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. Introducción

---

En este Capítulo relatamos algunos antecedentes relacionados con nuestro foco de estudio, los que devienen de investigaciones previas realizadas en distintos contextos. Esta descripción la realizaremos recuperando los aspectos constitutivos centrales de cada investigación, en lo que hace a marcos teóricos utilizados, metodología, resultados obtenidos y reflexión en torno al problema de investigación que nos ocupa. A su vez, para cada trabajo resaltamos los puntos comunes y no comunes con nuestra investigación, y los aportes que realizaríamos al mismo para ampliar el conocimiento actual sobre la comprensión de los números racionales como objeto de estudio.

### 2.2. La noción de fracción y sus significados en la escuela secundaria

---

El trabajo de Flores (2010), realizado en el Instituto Politécnico Nacional de México, analiza los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. Se plantea como pregunta directriz de la investigación: *¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción presente en la escuela secundaria?* (p. 6)

De esta pregunta se desprenden dos más: *¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción presentes en el discurso matemático escolar?* *¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción movilizados por los estudiantes?* (p. 6)

Para la investigación se tomaron trabajos realizados por diversos investigadores, para luego hacer un análisis del programa de estudio de números racionales en la escuela secundaria de México, tres series de libros de texto, la aplicación de un instrumento conformado por 6 problemas y el análisis de lo realizado por los estudiantes al afrontar los problemas.

Entre los principales resultados se destaca que existen al menos entre 12 y 14 significados asociados a la noción de fracción en los trabajos que abordaron a este objeto de estudio. A su vez, las producciones de los estudiantes revelaron que: (a) prevalece la dificultad para arribar a una “nueva unidad”, y a partir de ella generar la solución del problema; (b) la presencia de nociones como equivalencia y partición en las soluciones propuestas por los estudiantes; (c) dificultades para pasar de un contexto aritmético a uno geométrico o algebraico; (d) la multiplicidad de nociones en un mismo problema genera conflictos en la comprensión del problema; y (e) la recurrencia a la representación decimal pretendiendo evitar trabajar con las fracciones.

Esta investigación presenta varias coincidencias con nuestro trabajo, en tanto rescata significados presentes en textos escolares, diseñan un instrumento y se analizan las producciones de los estudiantes con el propósito de determinar los significados asociados a la noción de fracción. No obstante, en nuestro trabajo profundizamos el estudio pues no sólo abordamos la noción de significado, sino también, la vinculamos con la comprensión que alcanzan los estudiantes al finalizar la escuela secundaria, sobre los números racionales como objeto matemático. A su vez, la noción de significado se ha tomado desde diversos autores, intentando tomar una conceptualización que las abarque y esto hace que adquiera un sentido más general, sin profundizar en relaciones particulares. En nuestro trabajo utilizamos los constructos que provee el EOS, permitiendo profundizar en las relaciones que se establecen entre los elementos que conforman a un objeto matemático, y explicando algunas de las dificultades que pueden advertirse en la construcción del significado.

En cuanto a la población de estudiantes, Flores (2010) aplica el instrumento a un grupo con edades comprendidas entre los 11 y 14 años de la escuela secundaria, mientras que en nuestra investigación se aplica a dos grupos que ya finalizaron la escuela secundaria (18 años o más) e ingresaron a estudios superiores.

Este trabajo es un antecedente importante en nuestra investigación, pues permite comparar los significados presentes en textos escolares de México con los de Argentina, como así también, las soluciones que brindan los estudiantes a las situaciones planteadas en el instrumento que Flores diseñó y aplicó, y la construcción de significado que alcanzan.

Creemos que nuestra investigación ampliará el aporte que realiza el trabajo de Flores (2010), en el sentido que toma un objeto de estudio más amplio (los números racionales), permite valorar la comprensión alcanzada por los estudiantes brindando una herramienta para tal fin y detectar los conocimientos que efectivamente disponen al finalizar la escuela secundaria. Este conocimiento permitiría el diseño de actividades didácticamente idóneas para continuar con la construcción de conocimientos matemáticos en torno a los números racionales como objeto de estudio.

### **2.3. El número racional como medida y reparto en la escuela primaria**

---

Investigación realizada por Escolano (2001), con estudiantes de 4° y 5° grado de una escuela primaria de España, tuvo por objetivo explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta didáctica que excluye el significado de la fracción como parte-todo y

enfatisa los significados propios de la fenomenología del número racional como medida y reparto.

Como marco conceptual, el trabajo se inscribe en la línea de la Didáctica de la Matemática denominada Pensamiento Numérico. En particular, se consideraron tres dimensiones: las estructuras numéricas específicas, las funciones cognitivas y el estudio de problemas y situaciones que se abordan mediante estructuras numéricas, pero concretamente se ocupó de la dimensión cognitiva. Dentro de esta última dimensión se explica la noción de comprensión, los sistemas de representación y los modelos de aprendizaje. En lo que atañe a comprensión, que forma parte de nuestro objeto de estudio, Escolano (2001) asume que para alcanzar la comprensión es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación.

La investigación fue de tipo exploratorio e interpretativo enmarcada en el paradigma cualitativo. La innovación curricular se sustentó en la investigación acción empírica y diagnóstica de dos etapas, con un primer grupo natural de 4º grado; y luego, con 5º grado de educación primaria de un colegio de Zaragoza durante los años 1999–2001.

Las conclusiones generales de este trabajo fueron: (a) Los estudiantes no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida; (b) tuvieron dificultades para representar medidas fraccionales del peso; (c) no se observó diferencias significativas en la comprensión cuando se manipula modelos de longitud y superficie; y, (d) con la ayuda de material manipulativo construyeron con más facilidad las nociones de fracciones equivalentes.

Escolano (2001) señala, además, que el aprendizaje basado en magnitudes continuas (longitud y superficie) permitió a los estudiantes construir y evaluar semánticamente el sistema de representación fraccional y dar significados a las relaciones de equivalencia y orden; como así también, las representaciones gráficas facilitan la transmisión entre las acciones realizadas con materiales manipulativos y las representaciones simbólicas.

Esta investigación tiene coincidencias con la nuestra en el hecho de abordar el estudio de la comprensión de los números racionales en los estudiantes, pero lo realiza desde otro marco teórico de la Didáctica de la Matemática, en la escuela primaria y en un subtema particular de este objeto matemático. El trabajo tiene relevancia para nuestra investigación pues involucra las construcciones de significados que realizan estudiantes cuando inician su estudio con números racionales.

Con nuestro trabajo contribuimos al realizado por Escolano (2001) al elaborar un instrumento más amplio, en el sentido que el nuestro considera al número racional como

objeto de estudio y surge del análisis de las tareas y actividades que proponen los textos escolares más usados en la escuela secundaria y con alta idoneidad didáctica en función del significado global o experto tomado como referencia de los documentos curriculares, y al mismo tiempo, permite valorar la comprensión alcanzada por los estudiantes en ciclos superiores de la educación matemática formal.

#### **2.4. Sistemas de representación de los números racionales en futuros profesores de enseñanza primaria**

---

La investigación llevada a cabo por Gairín (1999) en la Universidad de Zaragoza, España, se planteó como pregunta directriz ¿De qué modo se pueden modificar los conocimientos sobre los números racionales de los estudiantes para maestro?

Para dar respuesta a esta pregunta, se aplica una metodología de investigación-acción, para la cual se elabora e implementa una propuesta didáctica en un grupo de estudiantes de la Diplomatura de Maestros de Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza. En la primera fase, se implementó un modelo didáctico que tuvo por propósito incrementar la comprensión de los futuros docentes sobre los números racionales positivos, mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. En la segunda etapa se entrevistaron a tres de los estudiantes que intervinieron en la primera fase. El propósito fue indagar sobre las relaciones entre las producciones previas y su actuación como profesores al revisar tareas realizadas por escolares.

El estudio se sustentó en la teoría de la comprensión matemática de Hierbert y Carpenter y los registros de representación semiótica de Duval. Los resultados permitieron determinar que la viabilidad de la propuesta didáctica incrementó las conexiones entre las notaciones fraccionarias y decimales de los números racionales positivos.

Gairín (1999) concluye que es relevante la relación entre los conocimientos matemáticos que poseen los futuros maestros y su actuación profesional, en el sentido que cuanto mayor es la comprensión del modelo, más eficaces se muestran en la detección y diagnóstico de los errores de los escolares, y más tienden a ofrecer razonamientos sustentados en el mundo de los objetos. Por otra parte, observó que los estudiantes para maestro que muestran una débil comprensión del modelo llegan a aceptar como correctas respuestas erróneas de los escolares, y predomina el lenguaje simbólico en las explicaciones que ofrecen a los niños.

Esta investigación tiene algunos puntos de contacto con la nuestra, en el sentido que se intenta favorecer la comprensión de los números racionales, y se trabaja con estudiantes

del nivel superior. No obstante, el trabajo de Gairín (1999) se focaliza en el contenido puntual de los números racionales como objeto de estudio (rationales positivos y conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal) y con el propósito de mejorar la comprensión en futuros profesores, mientras que nuestra investigación pretende valorar la comprensión de este objeto de estudio y a partir de ella, poder realizar una propuesta de enseñanza superadora.

## **2.5. La construcción social del número racional en un escenario laboral**

---

La investigación realizada por Elguero (2009), con estudiantes jóvenes y adultos de Argentina, se propone dar respuestas a dos preguntas: ¿Qué ideas en torno al número racional puede construir un sujeto inserto en el escenario laboral de la costura? ¿Cómo se construyen tales ideas?

Este trabajo, posicionado en la Socioepistemología como línea de la Didáctica de la Matemática, aborda la construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario no académico particular, como lo es el mundo del trabajo. Para ello, la autora estudia inicialmente el objeto número racional, sus formas de representación y los distintos significados asociados al mismo, lo que aporta herramientas de análisis para interpretar ideas que viven y prevalecen en el escenario laboral.

Luego aborda el estudio de los usos del número racional en actividades prototípicas del oficio, tomando fuentes de información como libros del oficio, entrevistas semi-estructuradas a modistas y observaciones participantes en un taller de costura, donde la investigadora asume el rol de aprendiz del oficio. La información recopilada se analiza a la luz de un modelo de construcción social del conocimiento que busca explicar cómo un sujeto o grupo cultural forma ideas matemáticas a partir de prácticas sociales que regulan y norman las actividades asociadas a la construcción de dichas ideas.

De este trabajo rescatamos la relevancia que tiene el tratamiento escolar del número racional al pensarlo en sus diferentes usos en ámbitos cotidianos del estudiante, en las ideas que se configuran tales usos y en la distancia que existe entre esas ideas y lo que la escuela quiere transmitir. Si bien en esta investigación se desarrolla un estudio de caso, aporta para conocer la realidad social del número racional y para reflexionar en torno a lo que se construye fuera de la escuela desde una perspectiva didáctica.

Este estatus que tiene el número racional, en este escenario sociocultural particular del mundo laboral, le permitió a Elguero (2009) concluir que el uso de fracciones y decimales

en situaciones de la vida cotidiana no implica que el sujeto que las usa las esté interpretando, en sentido estricto, como números, y sugiere:

- (a) No adoptar la postura ingenua de que los números racionales de uso cotidiano se conocen y reconocen como números;
- (b) Reconocer la influencia de los instrumentos de medida de uso cotidiano en la construcción de ideas;
- (c) Buscar escenarios significativos que hagan evidentes las limitaciones de lo que se ha construido fuera de la escuela. Consideramos que el punto de partida puede situarse en un escenario relacionado con el problema de medir o de representar medidas y desde allí avanzar hacia otros escenarios para construir la amplia gama de significados que el número racional puede asumir. (p. 130)

Si bien esta investigación difiere con la nuestra tanto en el marco teórico como en la población en que se aplica, consideramos que el punto de coincidencia es que en ambas se busca valorar la comprensión del número racional, aunque en escenarios diferentes. Esta investigación resulta un referente teórico importante, pues nos brinda conocimiento del tipo de actividades que favorecen la comprensión de los números racionales, lo cual permitió tenerlo en cuenta a la hora de diseñar el instrumento que utilizamos.

## **2.6. La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con las operaciones básicas y propiedades elementales**

---

La investigación desarrollada por Quispe Yapo (2011), quien trabajó con una muestra estratificada de 380 estudiantes, distribuidos en los cinco grados escolares de Perú, tuvo por objetivo determinar el tipo de relación que existe entre la comprensión de los significados del número racional positivo, con la resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, de los estudiantes de educación secundaria.

Además, el estudio tuvo por propósitos caracterizar e identificar los tipos de interferencias en la comprensión de los significados del número racional y partió de la hipótesis: *“A mayor capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y mayor conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales corresponde mayor comprensión de los significados del número racional positivo”* (Quispe Yapo, 2011, p. 15).

El marco teórico que fundamenta la investigación está compuesto por los antecedentes sobre la comprensión de los significados, la resolución de operaciones aritméticas y propiedades elementales del conjunto de los números racionales, construido a partir de la revisión bibliográfica de trabajos realizados en torno a la temática. En consecuencia, hace un análisis de la teoría relacionada a la comprensión, cognición y aprendizaje; además, de un estudio de la evolución histórica y fenomenología del número racional, evaluando las diferentes interpretaciones o significados de las fracciones.

Para la recolección de datos se aplicó tres pruebas: una sobre comprensión, otra sobre operaciones básicas y una tercera sobre propiedades elementales de los números racionales; los cuales fueron sometidos a un proceso de validación concurrente y confiabilización.

Los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los estudiantes, le permitieron concluir que en la comprensión de los significados del número racional existe una interferencia persistente del significado parte-todo, en la interpretación de los significados de medida, razón, cociente y operador. Además, con el trabajo se logró verificar la existencia de una relación directa entre la capacidad que tiene el estudiante para manejar los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades del número racional, y con la comprensión de sus significados.

En el caso de esta investigación, consideramos que existen muchos puntos de coincidencia con la nuestra, en el sentido que ambas buscan valorar la comprensión de los números racionales, aunque el objetivo planteado es distinto.

Consideramos que esta investigación es un referente teórico bibliográfico importante para nuestra investigación, en el sentido que nos permite mirar desde otra perspectiva la comprensión de los significados de los números racionales en relación a la capacidad en la resolución de operaciones básicas y al conocimiento de las propiedades. Esta visión aportó una mirada más amplia para realizar el análisis de las configuraciones cognitivas de los estudiantes de nuestro estudio. A su vez, creemos que nuestra investigación aportará a esta en el sentido que se analiza la comprensión básicamente como competencia, en el sentido de determinar si el sujeto reconoce el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, aplica y recuerda los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y utiliza lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones.

# MARCO TEÓRICO

## MARCO TEÓRICO

### 3.1 Introducción

---

En este Capítulo presentamos las ideas teóricas centrales que sustentan el desarrollo de la investigación. En particular describimos los constructos y herramientas que hemos utilizado del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que viene desarrollándose en España desde el año 1994 por Juan Díaz Godino y colaboradores.

Para el EOS, la Didáctica de la Matemática debiera dar respuesta a dos demandas fundamentales. Por un lado, los profesores debiéramos comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, y por el otro, realizar propuestas para guiar la mejora de esos procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Para la primera demanda se necesita disponer de herramientas teóricas que permitan la descripción, interpretación y/o explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, lo cual lleva a la realización de investigaciones de tipo teórico que inducen a la creación y desarrollo de marcos teóricos, lo cual no ha sido nuestro propósito para esta investigación. Estos marcos teóricos se aplican en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, lo que conlleva a la ampliación y consolidación del propio marco teórico, lo cual se ha convertido en nuestro propósito.

El aspecto ontológico de este enfoque se deriva del análisis de la existencia o inexistencia de entidades u objetos, mientras que el aspecto semiótico se ocupa de descubrir y analizar la significación que se otorga a esos objetos o entidades, su relevancia, vínculos que los interrelacionan, y otras particularidades que los hacen diferenciables entre ellos, incluso donde pareciera que esas diferencias no pudieran o debieran manifestarse.

Consideramos que al seleccionar al EOS como marco teórico de la investigación nos ha orientado sobre lo que debíamos observar y cómo hacer esa observación, y por tanto, nos condiciona indefectiblemente a utilizar las herramientas y constructos que se desarrollaron para tal fin. Como característica propia de este enfoque, se distinguen dos dimensiones interdependientes: personales e institucionales, y se dan definiciones particulares para conceptos teóricos como el de práctica, objeto (en sus facetas personal e institucional), significado y comprensión, así como el estudio de sus relaciones mutuas, que describiremos a lo largo del Capítulo.

Si bien las herramientas teóricas que provee el EOS se desarrollaron en diferentes etapas y se fueron refinando progresivamente, nos centraremos en la descripción de lo que esta línea de la Didáctica de la Matemática designa con el nombre de Teoría de Funciones Semióticas.

### **3.2. Los objetos matemáticos y la noción de significado**

---

En consonancia con el interaccionismo simbólico, Godino (2003, p. 147) considera como objeto o entidad matemática a “*todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia*”, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos Matemática. En consecuencia, cuando describimos la actividad matemática que acontece en una clase podemos aludir a muchos y diversos “objetos”, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos. No obstante, si pensamos que toda actividad matemática está centrada en la resolución de problemas (en el sentido más amplio de su acepción, que va desde simples ejercicios a instancias de modelación), podemos encontrar algunos o todos de los siguientes elementos:

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). Si bien en un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, en el trabajo matemático pueden usarse otros registros como el oral, corporal o gestual. Además, mediante el lenguaje, sea este ordinario, natural o específico matemático, también se describen otros objetos no lingüísticos.
- *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc.). Constituyen las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Procedimientos, técnicas o acciones* del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, etc.).
- *Conceptos o propiedades*. Están dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, lado, perímetro, baricentro, etc.).
- *Propiedades, procedimientos o atributos* de los objetos mencionados. Generalmente suelen darse como enunciados o proposiciones.
- *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo) de la actividad matemática.

Este modelo ontológico sitúa al lenguaje, en sus diversas manifestaciones, en el centro de atención de la didáctica, pero sin perder de vista la actividad matemática y los objetos culturales no lingüísticos emergentes de esa actividad.

Estos seis tipos de objetos, calificados de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc. Además, cada una de estas categorías, o tipos de objetos, son consideradas como “entidades primarias”, las cuales se pueden agrupar, a su vez, en entidades secundarias que poseen una cierta organización o estructura, como por ejemplo: praxis, logoi, praxeologías, conceptos–sistema, campos conceptuales, Teoría de Grupos, Aritmética, Geometría, etc.

Asimismo, podemos pensarlos que están dotados de una faceta ostensiva o perceptible, puesto que son reconocidos como tal objeto por una institución, llevando a que se hable de dicho objeto, se lo nombre y se comunique sus características a otras personas por medio del lenguaje (oral, escrito, gráfico o simbólico).

También poseen una faceta no ostensiva, puesto que un sujeto es capaz de pensar e imaginar uno de estos objetos sin necesidad de mostrarlo externamente. Si bien las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente (por escritura, sonido, gestos), el resto de las entidades no son directamente perceptibles, sino que precisan de los elementos lingüísticos para su comunicación a otras personas y para su funcionamiento en la actividad matemática. El lenguaje es, por tanto, no sólo el medio por el cual se expresan los objetos no ostensivos, sino también el instrumento para su constitución y desarrollo, y considerado como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

La Teoría de las Funciones Semióticas considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, en tanto que a la práctica se le otorga un lugar privilegiado. En este sentido, Godino (2003, pp. 91-92) define a una práctica como *“toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas”*.

Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas, y no es posible reducir su significado a una mera

definición matemática. De este modo, el análisis del significado de los objetos matemáticos se encuentra relacionado estrechamente con el problema de las representaciones externas e internas de estos objetos.

Al adoptarse una perspectiva pragmatista y definir el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir en el EOS dos términos que resultan difíciles de diferenciar: sentido y significado. Así el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, entre otros, para dar lugar a diferentes prácticas. En consecuencia el sentido se entiende como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto. A su vez, el significado de un objeto matemático, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Apoiado en las ideas de triángulo epistemológico y Teoría de los Campos Conceptuales, Godino (2003) propone una primera clasificación del significado sistémico de un objeto matemático, el cual incluiría los siguientes tipos de elementos:

- Situaciones–problema, aplicaciones, tareas, que inducen actividades matemáticas.
- Lenguaje, incluyendo en el mismo todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas).
- Generalizaciones, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías).

Además de los tres tipos de elementos citados, se hace necesario tener en cuenta explícitamente las acciones de los sujetos en la resolución de problemas (algoritmos, estrategias, procedimientos) y los argumentos empleados para justificar, tanto las acciones, como las propiedades de los objetos y la solución de los problemas.

Todos estos tipos de elementos son objetos explícitos de enseñanza para cada objeto matemático y como tal, no sólo es necesario analizar su naturaleza y características –así

como la mejor forma de introducirlos en la enseñanza— sino que, además, podemos encontrar dificultades y errores de los alumnos para cada uno de ellos.

### **3.3. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos**

---

Para el EOS, una misma expresión en la clase de Matemática puede hacer alusión a un objeto personal o institucional. Si hacemos referencia a una manifestación de un sujeto individual (como la respuesta a una prueba de evaluación o trabajo práctico, la realización de una tarea o actividad por un estudiante, etc.) hablamos de objetos personales, los que son portadores, al menos potencialmente, de rasgos característicos de conocimientos de la persona.

Por el contrario, si nos referimos a documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante una clase, etc., podemos considerar que están en juego objetos institucionales, en tanto tienen connotaciones normativas o convencionales, y son usados como una referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para Godino y Batanero (1994), una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemas. El compromiso mutuo con una misma problemática induce a la realización de unas prácticas sociales que son compartidas; las cuales están, en consecuencia, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

En el entorno cotidiano se suelen considerar a las instituciones básicamente desde dos perspectivas: la primera, tendría que ver con un conjunto de prácticas compartidas por personas y, la segunda, las entiende como una organización compuesta por un cuerpo directivo, edificio y trabajadores, destinada a servir algún fin socialmente reconocido y autorizado. Evidentemente las instituciones educativas encajan claramente en estas dos maneras de entender las instituciones; pero, en el EOS interesa, principalmente, la primera manera de entender la institución, aunque esto no lleva a ignorar el otro punto de vista.

Esta primera manera de entender la institución permite, por una parte, pensar en varias instituciones en el interior de un centro escolar y, por otra parte, en instituciones diferentes de las escolares. La segunda manera de entender la institución lleva a considerar que las instituciones que van a interesar, son aquéllas cuyo fin es ocuparse del hombre aprendiendo. Es decir, una institución está constituida por las personas en una misma clase de situaciones problemas, es decir, cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización.

Además, una institución particularmente importante es la institución matemática, la cual está formada por las personas comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos. Son los productores del “saber matemático” y en particular puede incluirse en ella a todos aquellos que están realizando investigaciones dirigidas a la producción de nuevo conocimiento matemático.

No obstante, es de destacar que si bien en el seno de cada una de estas instituciones se realizan prácticas diferentes, apropiadas para el fin de lograr la solución de un cierto campo de problemas, las mismas pueden variar de una institución a otra, cambiar a lo largo del tiempo, o ser dotadas de significados diversos. Al respecto, Godino (2003) sostiene que una distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos resulta fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En una clase de Matemática los objetos matemáticos son nombrados y se describen mediante sus definiciones y enunciado de propiedades, por lo que, a veces, son identificados a través de las mismas, y en ocasiones ocurre que se designa una cosa con el nombre de otra y se toma el efecto por la causa, o viceversa. Sobre esta situación, Godino (2003) advierte que un concepto no puede reducirse a su definición, más aún si nos interesamos en su aprendizaje y enseñanza. Un objeto personal es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. La práctica significativa se concibe como una forma expresiva situada, por tanto implica una situación problema, un contexto institucional, una persona (o una institución) y los instrumentos que mediatizan la acción.

La emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje. Así, la génesis del conocimiento personal se produce como consecuencia de la interacción del sujeto con tipos de problemas, mediatizada por los contextos institucionales en que tiene lugar dicha actividad.

### **3.4. Configuración epistémica/cognitiva**

---

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones (figura 1) son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser

epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).



Figura 1: Componentes de una configuración epistémica/cognitiva

Podemos advertir que en las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones-problemas son las que le dan origen a la propia actividad matemática, y son las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos, en tanto, los entendemos como prácticas que vienen a justificar las definiciones, procedimientos y proposiciones, las que están reguladas por el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

Es de destacar que cada objeto matemático, dependiendo del nivel de análisis que se quiera hacer, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, o combinaciones entre ellos y obviamente, está soportado por el lenguaje.

### 3.5. Las Funciones Semióticas

---

Habitualmente, en el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, en especial de los objetos abstractos, existiendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado. En el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados).

La idea de función semiótica, que plantea Godino (2003), se concibe como un par formado por el significante (expresión) y el significado (contenido), e implica también un acto de interpretación. Ligada a esta idea se encuentra la de código, que se concibe como la regla de correspondencia entre los planos de expresión y de contenido de las funciones semióticas.

Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes (significante, significado e interpretación), quedando los otros dos implícitamente establecidos. Hablar de significado supone que hay, además, una expresión y un código interpretativo. El signo, por tanto, no supone mera correspondencia entre expresión y contenido; o de algo que está en un lugar con otra cosa, sino que alguien debe hacer una posible interpretación.

La noción de función semiótica permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto matemático cualquiera –por parte de un sujeto, persona o institución– en términos de las funciones semióticas que pueden establecerse –en unas circunstancias fijadas– en las que interviene el objeto. Puesto que cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante, constituye, un conocimiento. Entonces, hablar de conocimiento equivaldrá a hablar de significado, esto es, de función semiótica.

En una función semiótica, tanto el objeto inicial como final, pueden estar constituidos por uno o varios de los elementos primarios del significado. Las entidades primarias consideradas pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, resultando entonces, diferentes tipos de tales funciones, algunas de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.).

Godino (2003) clasifica los tipos de funciones semióticas que aparecen en la actividad matemática atendiendo al contenido (significado) puesto en juego, en seis tipos:

- *Significado lingüístico*: Cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico;
- *Significado situacional*: Cuando el objeto final es una situación problema;
- *Significado conceptual*: Una correspondencia semiótica será de tipo conceptual cuando su contenido es un concepto definición;
- *Significado proposicional*: Cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto;
- *Significado actuativo*: Una función semiótica será de tipo actuativo cuando su contenido es una acción u operación, tal como un algoritmo o procedimiento;
- *Significado argumentativo*: Cuando el contenido de la función semiótica es una argumentación.

En síntesis, cuando un sujeto realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto (lenguaje, situaciones–problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), los que a su vez se agrupan formando una configuración (epistémica, instruccional o cognitiva). En consecuencia, el significado de un objeto matemático es para el EOS el par “Configuración epistémica-cognitiva / prácticas que posibilita”, siendo la definición (explícita o implícita) del concepto matemático sólo uno de los componentes de la configuración epistémica. Así, cada par constituye diferentes sentidos del concepto, mientras que el significado se lo entiende como el conjunto de todos los pares “Configuración epistémica-cognitiva / prácticas que posibilita” obtenidos.

### **3.6. La comprensión matemática en el EOS**

---

Godino (2003) sostiene que, en una situación ideal y en una institución dada, un sujeto “comprende” el significado del objeto –o se “ha apropiado del significado” de un concepto– si es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente.

Para el EOS la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente llegue a ser total, o por el contrario, sea nula; sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. El reconocimiento de la complejidad sistémica del significado del objeto implica, además, que su apropiación por

el sujeto deviene de un proceso dinámico, progresivo y no lineal, como consecuencia de los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que participa. De esta forma, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la apropiación de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes.

### **3.7. El análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados**

---

El análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados consiste básicamente en realizar un análisis sistemático de los objetos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática. Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas en el curso.

Godino (2003) llama análisis ontológico-semiótico (o simplemente, análisis semiótico) de un texto matemático / registro de clase, a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos. El análisis ontológico-semiótico se constituye, en consecuencia, en la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la transcripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori).

En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos. Algunos de estos conflictos pueden pasar desapercibidos por el profesor y, por tanto, no tenidos en cuenta en el proceso de estudio.

Godino (2003) expresa que el análisis semiótico ayuda a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción, entre los diversos agentes, en los cuales pueden existir lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

El criterio para definir las unidades de análisis (unidades semióticas) será cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del

enunciado del problema al desarrollo de una acción, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, se debe tener en cuenta, para delimitar las unidades de análisis, los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis tipos de elementos introducidos en el modelo teórico de la Teoría de las Funciones Semióticas, o también entidades mixtas derivadas.

### **3.8. Obstáculos y Dificultades**

---

#### **3.8.1 La noción de obstáculo**

El concepto de obstáculo fue introducido por Bachelard (1972) y fue trasladado al campo de la didáctica de las matemáticas por Brousseau (1983 y 1997), que le dio un sentido muy determinado

Para poder hablar de obstáculo, según Brousseau, se han de cumplir las siguientes condiciones:

- 1) Un obstáculo es un conocimiento. Por tanto, no es una falta de conocimiento.
- 2) El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas correctas en determinadas situaciones que halla con cierta frecuencia.
- 3) Cuando se utiliza este conocimiento en otro contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.
- 4) El alumno se resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al cambio del conocimiento antiguo por uno de nuevo.
- 5) A pesar de que el alumno es consciente de las limitaciones del conocimiento-obstáculo, lo continúa manifestando esporádicamente.

Brousseau (1983) considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

- 1) De origen ontogénico o psicogenético, causados por el desarrollo del alumnado.
- 2) De origen didáctico, provocados por las elecciones didácticas que se han hecho para diseñar la situación didáctica.
- 3) De origen epistemológico, intrínsecamente relacionados con el contenido matemático. Se pueden hallar en la historia de los contenidos, aunque no es necesario reproducir en el aula las condiciones históricas que permitieron superarlos.

La noción de obstáculo, y muy especialmente la noción de obstáculo epistemológico, no es muy clara, y ha generado controversia (Artigue, 1990; Sierpínska, 1988; Font, 2000a). Resulta complicado diferenciar la noción de obstáculo de la noción de dificultad. Otro

aspecto problemático de la noción de obstáculo es el de ser considerado un “conocimiento” que produce prácticas erróneas, ya que parece que el obstáculo es algo que acarrea el alumno y que ha de ser eliminado para que pueda avanzar en su proceso de aprendizaje.

### **3.8.2. La noción de errores y dificultades**

Las investigaciones sobre los errores y las dificultades en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utiliza indistintamente dificultad y obstáculo. En todo caso, los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de obstáculos y dejan en un segundo plano las limitaciones en los aprendizajes debidos a significados personales poco representativos de los significados institucionales de referencia.

En el EOS se considera que cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje.

De acuerdo con Font (2000a) y Godino, Batanero y Font (2003):

- Hablaremos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.
- El término dificultad indicará el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.
- A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Decimos entonces que existe un obstáculo.

En el caso particular de esta tesis la noción de obstáculo no la entendemos como la entiende Brousseau, sino la acepción del sentido común que tiene la palabra. Si hubiésemos centrado la investigación en un marco teórico como Teoría de Situaciones, seguramente la noción de obstáculo habría sido la que propone Brousseau. En nuestro caso, al no considerar un marco teórico donde la palabra obstáculo es clave, asumimos el sentido que podría darle el diccionario: un impedimento, dificultad o inconveniente, en este caso, relacionado a la resolución de tareas donde predominan los números racionales como objeto matemático.

Particularmente, en el EOS, los conflictos semióticos se consideran como explicaciones de las dificultades y/o limitaciones de los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados cuando los comparamos con el significado pretendido.

### **3.9. La noción de idoneidad didáctica**

---

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula.

La idoneidad didáctica es el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados (Godino, Batanero y Font, 2006; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

Para ello se utilizan seis criterios parciales de idoneidad:

*Epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (significados personales), *mediacional* (recursos tecnológicos y temporales), *emocional* (actitudes, afectos, emociones), *interaccional* (interacciones docente – discentes), y *ecológica* (relaciones intra e interdisciplinarias y sociales).

Cada una de estas idoneidades se valora cualitativamente como de baja, media o alta idoneidad.

Describimos muy sintéticamente cada una de ellas:

*Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos y/o implementados, respecto de un significado de referencia. Luego un proceso de estudio matemático, tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia.

*Idoneidad cognitiva* : se refiere al grado de proximidad de los significados pretendidos y/o implementados respecto de aquellos que son personales iniciales de los estudiantes (previos) o, dicho de otra forma la medida en que el “material de aprendizaje” esté en la zona de desarrollo potencial (Vygotsky, 1934) de los alumnos y alumnas.

*Idoneidad mediacional:* se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

*Idoneidad emocional:* se refiere al grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio.

*Idoneidad interaccional:* se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

*Idoneidad ecológica:* Se refiere al grado de adaptación curricular, y conexiones intra e interdisciplinarias.

Luego la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje se concibe como la articulación coherente de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

# **METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**



## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

### 4.1. Introducción

---

En este Capítulo se presentan los aspectos metodológicos que guiaron la investigación, la cual se considera de naturaleza diagnóstico-descriptiva y cualitativa, de corte etnográfico y hermenéutico, y fue desarrollada bajo el Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que propone Godino (2000, 2002, 2003) y Godino, Batanero y Font (2007), como línea teórica y metodológica de la Didáctica de la Matemática.

La investigación, de acuerdo a Arias (2006), Tamayo y Tamayo (2000) y Hernández Sampieri, Fernández Collado y Babtista Lucio (2010), asumió las siguientes características:

- Exploratoria, en tanto se pretendió recoger y analizar información que pudiera servir para orientar futuras investigaciones.
- Diagnóstica: es diagnóstica pues supone el análisis de situaciones. Es decir intenta conocer lo que está sucediendo en una determinada representación de la realidad que denominamos situación.
- Descriptiva, pues se generaron informes narrativos a partir de la investigación de campo realizada.
- De campo, debido a que se realizó mayoritariamente en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.
- Interpretativa, ya que se tuvo en cuenta el sentido de las acciones de los sujetos.
- Cualitativa, puesto que el objeto de estudio no fue algo que se pudiera observar y cuantificar.
- Hermenéutica, dado que se hicieron interpretaciones de las interpretaciones que hacían los sujetos investigados (por ejemplo, lo que decían los alumnos sobre las acciones que realizaron).
- Etnográfica, en el sentido de que se pretendió comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, mediante una inmersión en su pensamiento y en su práctica, evitando en la medida de lo posible alterar la realidad estudiada. A su vez, la información también se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.

En primera instancia, describimos las cinco fases que distinguimos de la investigación. Posteriormente caracterizamos los sujetos que fueron objeto de estudio, el diseño y validación del instrumento utilizado, y el modo en que recolectamos y analizamos los datos para arribar a las conclusiones plasmadas en el Capítulo 7.

## 4.2. Fases de la investigación

---

La investigación se ha organizado en cinco fases diferenciadas que se describen a continuación:

**Primera fase:** En primer lugar se analizaron en documentos curriculares, los bloques correspondientes al área matemática, y específicamente los referidos a números racionales.

Esto permitió elaborar una configuración epistémica de referencia (significado global o experto).

Luego se analizaron las actividades que proponen los libros escolares de Matemática, del nivel medio y superior, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales, centrandó la atención en aquellas donde se aborda a los números racionales como objeto de estudio. Este análisis también permitió estructurar una configuración epistémica de referencia del tema a partir de los textos.

Las configuraciones epistémicas elaboradas, están compuestas por:

- (a) Tipo de tareas o ejercicios, tanto extra-matemáticas como intra-matemáticas que se proponen,
- (b) Conceptos y definiciones que son necesarios para resolver la actividad,
- (c) Propiedades que se requieren conocer y dominar,
- (d) Procedimientos, algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones,
- (e) Argumentos y razonamientos necesarios para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema, los cuales pueden ser deductivos o de otro tipo,
- (f) Los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., que aparecen en la resolución de la actividad.

**Segunda fase:** Teniendo en cuenta la configuración epistémica de referencia elaborada en la primera fase a partir de los textos escolares, en base al significado global o experto de referencia de los documentos curriculares y la revisión bibliográfica llevada a cabo, se

diseñó un instrumento que pone en juego la red de relaciones que activa un individuo que ha comprendido el objeto matemático en cuestión (números racionales) y que se manifiesta a través de las prácticas operativas y discursivas que lleva a cabo. Este instrumento consta de una serie de actividades que los alumnos debieron resolver por escrito, y una entrevista clínica semiestructurada, que se elaboró teniendo en cuenta las respuestas brindadas.

Para la elaboración de las actividades del instrumento consideramos:

- 1-Un análisis de los contenidos tomando como referencia el significado institucional global o experto.
- 2-Elaboración de una versión piloto del cuestionario, aplicación a una muestra, valoración mediante juicio de expertos, y revisión del instrumento.
- 3-Elaboración de la versión definitiva del cuestionario, con actividades de los textos con alta idoneidad didáctica, en base al significado institucional global/experto elaborado de los documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales y teniendo en cuenta los seis tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática.

Una vez puesto a prueba, con las sugerencias de los pares de expertos, se elaboró la versión definitiva del instrumento, el cual validamos además considerando una valoración a través de indicadores de idoneidad epistémica, cognitiva y ecológica.

Para analizar los conocimientos matemáticos implicados en las actividades del instrumento, realizamos configuraciones epistémicas de cada actividad.

Esto nos permitió realizar otra validación para mejorar y reajustar las situaciones propuestas para darle mayor confiabilidad y poder anticipar algunos conflictos en las respuestas de los alumnos.

**Tercera fase:** Se administró el instrumento diseñado en la segunda fase, en calidad de evaluación diagnóstica, a los alumnos aspirantes a ingresar durante el año 2012 a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, en carreras que tienen Matemática en su diseño curricular (Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía) y en el Instituto Superior de Profesorado N° 10 de Helvecia, en las carreras de Profesorado de nivel primario y Profesorado de nivel secundario en Biología.

Posteriormente se seleccionaron las producciones escritas que, lograron resolver el 50% o más de las consignas planteadas. Se examinaron las producciones enfocándonos en el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes ante las situaciones–problemas planteadas, intentando establecer la relación entre el conglomerado

de prácticas que los alumnos son capaces de realizar con este objeto matemático (números racionales) y el significado que pudieron construir acerca del mismo.

Con la finalidad de efectuar un análisis profundo de la comprensión que tienen los estudiantes sobre los números racionales, se realizaron entrevistas clínicas para ahondar aún más en la problemática en cuestión.

**Cuarta fase:** Teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la fase anterior, se armaron las configuraciones cognitivas de cada estudiante. Esto es, el modo en que se articulan los elementos primarios recuperados en la primera fase y que se evidenciaron en las prácticas operativas y discursivas que llevó a cabo el estudiante. Esto permitió realizar una valoración individual de la comprensión alcanzada por cada estudiante y las dificultades que aún persisten al ingresar en el nivel superior.

**Quinta fase:** Se realizaron comparaciones entre las configuraciones cognitivas (obtenidas de la cuarta fase) con la configuración epistémica (construida en la primera fase) a fin de valorar la comprensión global alcanzada por los estudiantes. Estos actos de semiosis tienen como resultado final una aproximación a la configuración cognitiva de los alumnos, lo que permite, por un lado, construir algunas conclusiones sobre los objetos primarios y sus significados, y por el otro, valorar la comprensión que tienen sobre este objeto matemático. Esta fase permite, además, proponer mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje que se implementen sobre el tema.

### **4.3. Aspectos metodológicos específicos**

---

#### **4.3.1. Documentos Curriculares, Textos Escolares y Estudiantes participantes**

---

Según lo planteado en las diferentes fases de la investigación, se trabajó con documentos curriculares, con textos escolares de Matemática de nivel secundario que contaran con la unidad didáctica referida a números racionales y con estudiantes aspirantes a ingresar a carreras de nivel superior.

Describimos a continuación los mismos y brindamos características generales con la finalidad de contextualizar la investigación.

##### **4.3.1.1 Los Documentos curriculares analizados**

---

En la primera fase de la investigación, los documentos curriculares que consideramos son:

- Contenidos básicos comunes para la Educación General Básica de Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. Segunda Edición. República Argentina. 1995.
- Diseño Curricular Jurisdiccional Tercer Ciclo EGB. Matemática, Ciencias Naturales, Tecnología. De Ministerio de Educación. Gobierno de Santa Fe. 1999.

Esta selección se fundamenta en que los estudiantes que se consideraron para esta investigación, son egresados del sistema educativo de la provincia de Santa Fe o de otras provincias de la República Argentina durante el año 2011 o en años anteriores próximos a 2011, y por lo tanto cursaron su escuela secundaria estando en vigencia los diseños curriculares jurisdiccionales y/o nacionales correspondientes a la ley Federal de Educación (Ley N° 24195/93, suplantada por la Ley de Educación Nacional N° 26206/06).

En los CBC se analizaron los bloques correspondientes al área matemática para el tercer ciclo de la EGB, en particular los bloques correspondientes a Número, operaciones, lenguaje gráfico y algebraico y procedimientos relacionados con el quehacer matemático, centrandó la atención en lo referido a los números racionales como objeto de estudio.

En el caso del diseño jurisdiccional de santa fe se analizaron los contenidos prescritos en los CBC, organizados en el tercer ciclo en los siguientes ejes: Números y operaciones, considerando además el marco para todos los ejes de tratamiento de la información y resolución de problemas, centrandó la atención en lo referido a números racionales como objeto de estudio.

A partir del análisis de estos documentos se elaboró una configuración epistémica de referencia conformada por un significado institucional global o experto,

#### **4.3.1.2. Los textos escolares analizados**

---

Continuando, en la *primera fase de la investigación* se analizaron las actividades que proponen los textos escolares de Matemática del nivel medio, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales, centrandó la atención en aquellas donde se aborda a los números racionales como objeto de estudio.

Para determinar los textos escolares que utilizaríamos para el análisis de este estudio, encuestamos informalmente a colegas docentes, profesores de Matemática que se desempeñan actualmente en escuelas secundarias de la provincia de Santa Fe y tienen a su

cargo cursos de Matemática donde se desarrolla, básicamente, algunos contenidos relacionados con números racionales.

Además, revisamos información en documentos oficiales del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe donde aparece bibliografía sugerida para desarrollar las clases de Matemática en la escuela secundaria, y en particular, los números racionales como objeto matemático. Este proceso nos llevó a seleccionar 8 textos escolares que son los que con mayor frecuencia aparecieron en la información obtenida.

Posteriormente, de cada uno de estos textos, tomamos como unidad de análisis el Capítulo o unidad didáctica correspondiente al desarrollo números racionales.

Las unidades didácticas analizadas se obtuvieron de los siguientes textos:

Denominación	Detalles técnicos del texto
<b>LIBRO 1</b>	Becerril, M., Grimaldi, V., Ponce, H., Urquiza, M. y Broitman, C. (2008). Estudiar Matemática NAP 8°, ES 2°, CABA 1°. Buenos Aires: Ediciones Santillana.
<b>LIBRO 2</b>	Aragón, M., Laurito, L., Net, G. y Trama, E. (2005). Matemática 9 -Carpeta de actividades. Buenos Aires: Editorial Estrada.
<b>LIBRO 3</b>	López, A. y Pellet, C. (2005). Matemática en red – 8° EGB. Buenos Aires: AZ editora.
<b>LIBRO 4</b>	Martinez M., Rodriguez M. (2004). Matemática. M. E Buenos Aires. Ediciones Mc Graw Hill Interamericana
<b>LIBRO 5</b>	Berman A., Dacunti, D., Pérez, M., Veltri, A. y Moledo, L. (2007). Matemática II. Buenos Aires: Ediciones Santillana.
<b>LIBRO 6</b>	Aristegui, R., Graciani, A., Mancini, G., Ríos, L. y Sobico, C. (2009). Matemática 8 - Estadística y probabilidad. Buenos Aires: Puerto de Palos.
<b>LIBRO 7</b>	Chorny, F. (2009). Matemática 2 y 3 - Nuevos horizontes + selección ¿Matemática estas ahí?. Buenos Aires: Ediciones SM.
<b>LIBRO 8</b>	Alvarez C., Alvarez, F., Garrido, L., Martinez, S. y Ruiz A. (2004). Matemática 8. Buenos Aires: Ediciones Vicens Vives S. A.

En estos textos, el Capítulo referido a los números racionales involucra los siguientes contenidos o subtemas: Fracciones. Representación gráfica. Equivalencia de fracciones. Operaciones con fracciones. Expresión decimal de números racionales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales. Notación Científica.

Una vez seleccionados los textos escolares y el Capítulo correspondiente al desarrollo de los números racionales, se elaboró una tabla para cada texto donde se caracterizan las distintas situaciones problemas que se presentan (extra e intramatemáticas), los conceptos o definiciones (previos y emergentes), propiedades o proposiciones (previas y emergentes), procedimientos, técnicas o algoritmos (previos y emergentes), argumentos y lenguaje (natural, gráfico o simbólico). Estas tablas, que el lector puede consultar en el Anexo II, permitieron conformar la configuración epistémica de cada texto.

A su vez, teniendo la configuración epistémica de cada texto y considerando como referencia los criterios de idoneidad del EOS, se analizó la idoneidad didáctica del Capítulo, catalogándola en alta, media o baja, de acuerdo a indicadores que proponen Font, Planas y Godino (2010) para tal fin.

Esta idoneidad didáctica se analizó en base a la configuración epistémica de referencia elaborada en base al significado institucional global o experto elaborado a partir de los documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales.

No hemos centrado principalmente en las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica, dado que nos resulta poco viable valorar en las actividades de los textos la idoneidad mediacional y emocional pues la primera se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y la segunda se refiere al grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio.

Con respecto a la idoneidad interaccional, si bien no se puede observar exhaustivamente en los textos, como esta idoneidad se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje, la analizamos considerando por ejemplo un texto que proponga actividades a realizar en forma cooperativa o actividades que implique el análisis de lo que realizó otro resolutor, tiene una idoneidad interaccional alta.

A título de ejemplo, sólo detallamos dos indicadores de cada una de las idoneidades:

- *Idoneidad epistémica*: Asegurar que se considere una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); tipología de tareas variadas que generen procesos matemáticos relevantes como la argumentación, modelización, etc.
- *Idoneidad cognitiva*: Asegurar que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema; incluir actividades de ampliación y de refuerzo.
- *Idoneidad interaccional*: Reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); contemplar momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
- *Idoneidad mediacional*: Usar materiales manipulativos e informáticos; invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema.
- *Idoneidad emocional*: Seleccionar tareas de interés para los alumnos; promover la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.
- *Idoneidad ecológica*: Asegurar que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; relacionar los contenidos que se enseñan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas.

Este análisis permitió realizar una agrupación de los textos en dos grupos o bloques, de los cuales se determinó una configuración epistémica general de cada grupo o bloque, por tener características comunes, luego se elaboró una configuración epistémica de referencia ideal de los textos tomando como base la configuración epistémica de referencia del significado institucional global/experto y que se utilizó para la elaboración del instrumento.

#### **4.3.1.3. Los estudiantes cuyas producciones se analizaron**

---

En la *tercera fase de la investigación*, se realizó una valoración de la comprensión que tienen 43 estudiantes ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, en carreras que tienen Matemática en su diseño curricular (Contador Público Nacional, Licenciatura en Economía y Administración) sobre los números racionales como objeto matemático. Además, la experiencia se replicó con un grupo de 18 estudiantes ingresantes a carreras de profesorado en un Instituto Superior de Profesorado N° 10 de la provincia de Santa Fe.

Ambos grupos se seleccionaron, en el sentido de que eran alumnos de las comisiones donde la docente autora de esta tesis dictaba sus clases en el primer año de la Facultad de Ciencias Económicas y del Instituto Superior de Profesorado N° 10 y resultó más accesible

poder realizar la propuesta de realizar esta actividad para la investigación. Este fue el único motivo por el cual se seleccionó estos grupos y no se seleccionaron los correspondientes a otras carreras u otras instituciones.

Un grupo comenzaba a cursar la cátedra Matemática Básica del primer cuatrimestre del año 2012, y se les hizo la propuesta de realizar la actividad en forma optativa. Fue aceptada por 43 (cuarenta y tres) estudiantes. Para tal fin se los convocó para un día determinado con la indicación de traer todos los elementos necesarios para realizar las actividades (lápiz, regla, calculadora, etc.) y se les entregó el instrumento en forma escrita, en soporte papel, para que las resolvieran en un tiempo máximo de 3 (tres) horas.

Esta misma propuesta se replicó con el otro grupo de ingresantes del año 2012, a las carreras de Profesorado de Nivel Primario y Profesorado de Nivel Secundario en Biología del Instituto Superior del Profesorado N° 10 (ISP N° 10), a la cual respondieron 18 (dieciocho) estudiantes.

Para ambas instituciones, los estudiantes considerados corresponden a quienes aspiraban a ingresar durante el año académico 2012. Estos estudiantes provenían de distintas escuelas secundarias públicas o privadas, con distinta orientación o terminalidad, del nivel medio de la ciudad de Santa Fe y de otras localidades de la provincia.

Una vez que contamos con la resolución del instrumento de los 43 estudiantes ingresantes a la UNL y de los 18 estudiantes ingresantes al instituto de formación docente, analizamos las respuestas de cada uno, seleccionando todas aquellas pruebas escritas que tuviesen un 50% o más de las respuestas realizadas en las actividades del instrumento. Esto se fundamenta en el sentido que carece de interés, desde nuestro punto de vista, determinar cuánto sabe un alumno y cómo lo sabe si no logra resolver las actividades básicas sobre números racionales.

La cantidad de evaluaciones seleccionadas que alcanzaron el 50% o más de respuestas realizadas fueron 25 (veinticinco) en el caso de los ingresantes a la UNL y 10 (diez) en el caso de los ingresantes al ISP N° 10.

Posteriormente, se analizaron las prácticas operativas realizadas por estos estudiantes y aproximadamente a la semana de haber respondido las actividades del instrumento, se los convocó a cada uno para una entrevista personal, a fin de recabar información sobre prácticas discursivas referidas a las actividades que desarrollaron a partir del instrumento. Cada entrevista se transcribió y el lector puede consultarlas en el Anexo I.

### **4.3.2. El diseño del instrumento**

---

Teniendo en cuenta la configuración epistémica de referencia elaborada en la primera fase a partir del análisis de documentos curriculares y de los libros de textos, se diseñó un instrumento que puso en juego la red de relaciones que activa un individuo que ha comprendido el objeto matemático en cuestión (números racionales) y que se manifiesta a través de las prácticas operativas y discursivas que lleva a cabo.

#### **Elaboración del instrumento**

El instrumento consistió en un cuestionario consistente en una serie de 27 actividades, referidas a situaciones problemas intra y extra-matemáticas, donde los estudiantes debían poner en juego conceptos, procedimientos, propiedades, lenguaje y argumentos referidos al objeto matemático números racionales.

Para la elaboración de las actividades del cuestionario consideramos:

- 1-Los contenidos, tomando como referencia el significado institucional global o experto.
- 2-Elaboración de una versión piloto del cuestionario, aplicación a una muestra, valoración mediante juicio de expertos, y revisión del instrumento.
- 3-Elaboración de la versión definitiva del cuestionario, con actividades de los textos con alta idoneidad didáctica, en base al significado institucional global o experto elaborado de los documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales y teniendo en cuenta los seis tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática que son:

Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos), Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios, etc.), Procedimientos, técnicas o acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, etc.), Conceptos o propiedades. Están dados mediante definiciones o descripciones, Propiedades, procedimientos o atributos de los objetos mencionados. Generalmente suelen darse como enunciados o proposiciones y Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo) de la actividad matemática.

Para la versión definitiva del cuestionario realizamos una valoración a través de indicadores de idoneidad epistémica, cognitiva y ecológica, y para analizar los conocimientos matemáticos implicados en las actividades del instrumento, realizamos configuraciones epistémicas de cada actividad.

1-Contenidos tomados como referencia del significado institucional global para la elaboración instrumento.

Números Racionales. Concepto.
Formas de Escritura (Fraccionaria y decimal). Equivalencias.
Expresiones decimales.
La Recta y los números racionales.
Orden. Densidad.
Operaciones básicas con números racionales bajo distintas representaciones (fraccionaria y Decimal).
Cálculo exacto y aproximado.
Aproximación decimal de números racionales. Redondeo y Truncamiento.
Ecuaciones. Desigualdades.
Notación científica. Usos.
Proporcionalidad directa e inversa.
Razón y proporción numérica.
Expresiones usuales de la proporcionalidad.
Propiedades de las fracciones equivalentes.
Propiedades de las relaciones de orden.
Propiedades de densidad.
Propiedades de las operaciones con racionales.
Propiedades de la proporcionalidad directa e inversa.

2-La versión piloto del instrumento se puso a prueba con un reducido número de estudiantes a fin de realizar los ajustes correspondientes (analizar dificultades en las consignas, mejorar la narración de una consigna, estimar tiempos de resolución, entre otras).

Se revisaron los resultados obtenidos por este reducido grupo y en una etapa posterior, el instrumento se puso a discusión entre pares expertos, a través de sesiones online con un grupo de expertos en la temática y en particular, en el marco teórico utilizado (EOS).

Este grupo estuvo integrado por: Mg. Ricardo Fabián Espinosa y Lic. María Josefa Jorge de la Universidad Nacional del Nordeste; Lic. Raquel Susana Abrate, Prof. Ivana Beatriz Gabetta, Prof. Silvina Sierra y Dr. Marcel David Pochulu de la Universidad Nacional de Villa María.

Entendemos a la validez en el sentido de qué tan bien mide el instrumento lo que se pretende valorar (en nuestro caso la comprensión y no los errores y dificultades que

podrían tener los estudiantes) y la capacidad que tiene el propio instrumento para proporcionar la misma medición en diferentes ocasiones. Ambos criterios fueron trabajados buscando el consenso entre la comunidad de pares expertos, y no mediante pruebas estadísticas.

### 3- Elaboración de la versión definitiva del cuestionario.

Una vez puesto a prueba y con las sugerencias de los pares de expertos, se elaboró la versión definitiva del instrumento, el cual en un primer momento validamos considerando una valoración a través de indicadores de idoneidad epistémica, cognitiva y ecológica.

En un segundo momento y para analizar los conocimientos matemáticos implicados en las actividades del instrumento, realizamos un análisis epistémico a través de una descripción de la configuración epistémica de cada actividad en términos de objetos y significados.

Esto nos permitió realizar otra validación para mejorar y reajustar las situaciones propuestas para darle mayor confiabilidad y poder anticipar algunos conflictos en las respuestas de los alumnos.

Teniendo en cuenta que la noción de idoneidad didáctica puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, por ejemplo respuestas de estudiantes a tareas específicas, y con el propósito de analizar la validez y confiabilidad del instrumento, consideramos algunos indicadores de la idoneidad epistémica, de la idoneidad cognitiva y ecológica planteados en:

[http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino\\_indicadores\\_idoneidad.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf) (2011), mediante el cual realizamos una valoración del instrumento elaborado.

Para este análisis, realizamos un recorte, tomando solo algunos de los indicadores, en tanto no es un proceso completo de enseñanza y aprendizaje.

En las siguientes tablas quedan expresados los indicadores con sus evidencias.

Tabla 1: Componentes e indicadores de idoneidad epistémica.

COMPONENTES	INDICADORES	EVIDENCIA
Situaciones problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización.	Act.: 8,9,11,12,15,16,17,18, 23, 25,26
	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de ejercitación.	Ej.Activ.:1,4,7,10,12b),14,16, 20,21,22,23.
	Se presenta una muestra representativa y	Act.: 2,3,5,6,8,9,10,11,12a),13

	articulada de situaciones de aplicación.	14,15,16,17,18,19,24,25,26,27
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal).	Act.: 3,4,5,6,9,11,12,13,15,17,18,27
	Uso de diferentes modos de expresión matemática (gráfica).	Act.: 9, 11,18,25.
	Uso de diferentes modos de expresión matemática (simbólica).	Act.: 2,5,7,10,14,16,19,20,21,22,23,25,26.
	Uso de diferentes modos de expresión matemática, traducciones y conversiones entre los mismos.	Act.:1,2,3,4,5,6,9,11,12,16,17,18.19,20,22,24,27.
	Nivel del lenguaje adecuado a los estudiantes a que se dirige.	Adecuado a estudiantes que culminaron el nivel secundario
	Se proponen situaciones de expresión matemática.	Act.: 1,3,7, 10,14,16,19,22,23,24,26.
	Se proponen situaciones de interpretación.	Act.: 2,3,5,6,8,9,11,12,13,15,17,18,20,21,25,27.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.	Adecuado a alumnos que culminaron el nivel secundario.
	Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.	Adecuado en función de los contenidos tomados como referencia del significado institucional global/de expertos.
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.	Todas las situaciones tienden a generar conceptos, propiedades, procedimientos, o argumentos. ( se puede observar en el comentario que se realiza de cada actividad)
	Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.	Act. : 3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21c),22, 24, 27.

Tabla 2. Indicador de idoneidad cognitiva

COMPONEN TES	INDICADORES	EVIDENCIA
Conocimientos previos.	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema.	Las actividades del instrumento tuvieron en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes.
	Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	Los contenidos pretendidos fueron acordes al nivel educativo que culminaron (en función significado institucional global).

Tabla 3: Indicador de idoneidad ecológica

COMPONEN TES	INDICADORES	EVIDENCIA
Adaptación al currículo.	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	Las actividades del instrumento surgieron de los textos escolares con alta idoneidad didáctica tomando

		como base la configuración epistémica de referencia elaborada a partir del significado institucional global o experto obtenido de los documentos curriculares.
--	--	--

Del análisis anterior realizado, consideramos una valoración adecuada para las actividades planteadas en el instrumento, pues las mismas consideran una selección y variedad de situacionesproblemas extra-matemáticas e intra-matemáticas de introducción, aplicación y problematización del objeto matemático número racional.

A su vez, como propone el EOS, las situaciones plantean y orientan a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, propiedades, así como las justificaciones de las mismas.

Además tuvieron en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y los contenidos pretendidos fueron acordes al nivel secundario que culminaron (en función del significado institucional global/experto elaborado a partir de los documentos curriculares).

En el punto 4.3.2.1 comentamos el instrumento, y realizamos un análisis epistémico través de una descripción de la configuración epistémica de cada actividad en términos de objetos y significados.

**Aplicación del cuestionario a los estudiantes y recolección de datos.**

La recolección de datos que aportó este instrumento constó de dos momentos:

- (a) Realización de las tareas y actividades que realizaron por escrito los estudiantes, y
- (b) Entrevistas semiestructuradas diseñadas en función de las respuestas brindadas por los estudiantes en la instancia anterior.

Se administró el instrumento diseñado en la segunda fase a los 43 estudiantes aspirantes a ingresar, durante el año 2012 a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, en carreras que tienen Matemática en su diseño curricular (Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía) y a los 18 estudiantes del Instituto Superior de Profesorado N° 10 de Helvecia, en las carreras de Profesorado de nivel primario y Profesorado de nivel secundario en Biología.

Puesto que analizamos las producciones, de aquellos que resolvieron más del 50% de las actividades propuestas en el instrumento, los estudiantes efectivamente entrevistados

fueron 25 correspondientes a la facultad de Ciencias Económicas y 10 correspondientes al Instituto de Profesorado N° 10 de Helvecia, lo que se resume en el siguiente cuadro:

	Cantidad de Alumnos	Cantidad de alumnos que resolvieron +50% actividades
Facultad Ciencias Económicas	43 (cuarenta y tres)	25 (veinticinco)
Instituto Superior de profesorado N° 10	18 (dieciocho)	10 (diez)

Tabla 4: Cantidad estudiantes cuyas producciones fueron objeto de estudio

#### 4.3.2.1 El instrumento comentado

El instrumento tuvo como objetivo valorar la comprensión que tiene un alumno acerca de los números racionales como objeto matemático. El término comprensión tiene una connotación relevante en nuestro trabajo y el propio marco teórico utilizado (EOS) nos brinda herramientas al respecto. En este sentido, cada actividad propuesta en el instrumento intenta rescatar la relación que pudiera hacerse en su resolución entre conceptos, definiciones, propiedades, proposiciones, técnicas, algoritmos, rutinas, argumentos y lenguaje. No es suficiente constatar que un estudiante aplicó adecuadamente una técnica, sino más bien, determinar cómo relaciona esa técnica con otros elementos primarios del objeto matemático.

Describimos a continuación cada una de las actividades que tiene el instrumento, indicando intenciones y relaciones inmediatas que se buscan.

Luego realizamos una descripción de la configuración epistémica de cada actividad en términos de objetos y significados

**Consigna Inicial:** *Resuelve las siguientes actividades, indicando en cada caso los procedimientos que utilizas. No borres ningún cálculo o escrito que hagas. En todo caso, indica que no es correcto lo que has hecho y vuelve a realizarlo a continuación*

1- Sombrea de tres formas diferentes:

a)  $\frac{3}{8}$  de un cuadrado

La intencionalidad de fondo es recuperar procedimientos (ver cómo dividen la unidad, cómo seleccionan, cuántas partes toman de ella) y la relación con los argumentos y lenguaje (sobre todo gráfico).

Configuración epistémica Asociada Actividad 1

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Sombrea de 3 formas diferentes $\frac{3}{8}$ Cuadrado	Representación de números racionales  Concepto de fracción Igualdad de tres representaciones
CONCEPTOS	
Fracción Numero Racional	Relación de una parte , respecto de un todo
PROPIEDADES	
Áreas con formas diferentes pueden representar el mismo número	Diferentes formas de representar una fracción.
PROCEDIMIENTOS	
Representar una fracción en el área de un cuadrado	Representación gráfica de una fracción
ARGUMENTOS	
Áreas con formas diferentes representan la misma fracción	Justificación de la solución

2-¿Qué número racional hay que sumar a cada uno de los siguientes números para que el resultado sea 3?

a)  $-\frac{2}{3}$                       b) 1,8

Se busca observar cómo opera (procedimientos) con números racionales, en este caso sí tiene claro el concepto de resta. Aquí aparecen relaciones entre argumentos, lenguaje, conceptos, propiedades y procedimientos.

Configuración epistémica Asociada Actividad 2

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Número racional $-\frac{2}{3}$ , 1,8 Suma Resultado	Concepto de número racional Concepto de suma Concepto de ecuación Concepto de fracción y de número decimal
CONCEPTOS	
Número Racional Fracción Número Decimal Resta de números	Determinar un número que sumado a otro el resultado es 3 Expresión de una ecuación
PROPIEDADES	

$A+B = C \leftrightarrow C-B = A$	La Resta como operación inversa de la suma
PROCEDIMIENTOS	
Resolución de ecuaciones suma y resta de fracciones y decimales	Se usa para calcular el número
ARGUMENTOS	
Si $-\frac{2}{3} + x = 3$ , entonces $3 + \frac{2}{3} = x$ Si $1,8 + x = 3$ , entonces $3-1,8= x$	Justificación de la solución

3- Determina si existen números que satisfacen las siguientes condiciones, justificando tu respuesta.

- a) Al doble de la suma entre  $\frac{3}{4}$  y 2 , divídelo por la mitad de la resta entre 1 y  $\frac{1}{2}$
- b) Al opuesto del inverso de 2, réstale la tercera parte de la suma entre  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{3}{2}$

La intención es obtener información sobre las técnicas o procedimientos empleados para transformar la expresión al lenguaje simbólico, y recabar información sobre propiedades, procedimientos y el tipo de argumentos que utilizan, como así también, el modo en que se usa un concepto (inverso aditivo y/o el inverso multiplicativo de un número racional).

Configuración epistémica Asociada Actividad 3

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Números que satisfacen condiciones Doble. Mitad, tercera parte Opuesto , inverso Suma entre $\frac{3}{4}$ y 2 , resta entre 1 y $\frac{1}{2}$ , Suma entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$	Existencia de números que cumplen determinadas condiciones Expresión numérica de doble, mitad, tercera parte  Opuesto e inverso de un n° o expresión.  Suma y resta de racionales
CONCEPTOS	
Doble , mitad y tercera parte de una expresión Número Racional Opuesto, inverso Suma y resta de números racionales	Determinar un número que cumpla determinadas condiciones, aplicando conceptos de doble, mitad, tercera parte, opuesto, inverso, suma y resta de racionales
PROPIEDADES	
Opuesto e inverso de un número racional	Distinción de opuesto como inverso adictivo e inverso como inverso multiplicativo
PROCEDIMIENTOS	
Expresión de enunciados al lenguaje simbólico Cálculos numéricos. Algoritm. de suma y resta en Q	Se usa para calcular los números que satisfacen las condiciones
ARGUMENTOS	
Vinculación entre conceptos, propiedades y algoritmos	Justificación de la solución

4- Escribe Verdadero (V) o Falso (F), justificando tu respuesta.

- a) La suma de una fracción y su opuesta es igual a cero.

- b) La resta entre cero y una fracción es el opuesto de esa fracción.
- c) Todo número racional tiene su inverso multiplicativo.
- d) El cociente entre 1 y una fracción es igual al inverso multiplicativo de la fracción.

Aquí se busca recabar información sobre algunas propiedades de las operaciones entre números racionales y sobre los procedimientos que utilizan. Eso lleva a que argumenten y pongan en juego elementos lingüísticos.

Para la entrevista se reservaron las preguntas: ¿Cómo justificó la respuesta? ¿Aplicó alguna propiedad? ¿Por qué es válida en este contexto?

Configuración epistémica Asociada Actividad 4

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Verdadero, Falso Número racional Fracción, opuesto, inverso multiplicativo Suma, resta, cociente	Distinción entre expresiones verdaderas y falsas Identificación de propiedades de las operaciones en lenguaje verbal
CONCEPTOS	
Número Racional Fracción Opuesto, inverso multiplicativo. Suma, resta, Cociente	Identificación de propiedades de las operaciones en lenguaje verbal
PROPIEDADES	
$A + (-A) = 0$ $0 - A = -A$ Todo $Q$ , excepto el cero, tiene inverso multiplicativo $1/1/A = A$	Elemento neutra en la suma en $Q$ . Opuesto de un número. Inverso multiplicativo en $Q$
PROCEDIMIENTOS	
Expresión de enunciados al lenguaje simbólico. Verificación de propiedades	Se usa para calcular el número
ARGUMENTOS	
Identificación de propiedades de las operaciones en $Q$	Justificación de las propiedades

5- Si A y B son dos números racionales positivos. ¿Es cierto que siempre  $A : B$  es menor que A? Fundamenta tu respuesta.

Esta actividad sirve para que durante la entrevista se pueda determinar cómo tuvieron en cuenta el “siempre”. Las preguntas que se pueden realizar dependen de las respuestas que brindan los estudiantes.

Configuración epistémica Asociada Actividad 5

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	

## Metodología de la investigación

A y B racionales positivos A;B es menor que A	Desigualdad en los racionales. Significación de “ siempre” en una expresión Verdadera
CONCEPTOS	
Número Racional Desigualdad en racionales positivos.	Determinación de condiciones para que una desigualdad sea verdadera
PROPIEDADES	
Desigualdad de racionales positivos	Condiciones para que se cumpla una desigualdad
PROCEDIMIENTOS	
Resolución de desigualdades	Se usa para solución de la tarea
ARGUMENTOS	
Concepto de desigualdades	Justificación de la respuesta a la actividad

6- Un inversor tiene un tercio de sus ahorros en acciones, la cuarta parte del resto en un plazo fijo y los 60000 restantes en moneda extranjera. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado? Responde justificando tu respuesta.

Esta actividad tiene por finalidad determinar si el alumno reconoce el campo de problemas de los racionales. Asimismo, durante la entrevista da lugar a que mediante la argumentación ponga en juego el modo en que se relaciona con procedimientos.

### *Configuración epistémica Asociada Actividad 6*

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Tiene un tercio de los ahorros, cuarta parte del resto. 60000 restantes	Descripción de una situación problema extra-matemática
CONCEPTOS	
Números Racionales Fracciones Ecuación	Expresión de una ecuación a través de la interpretación del enunciado donde se utilizan números racionales
PROPIEDADES	
De las igualdades	Determinación de la incógnita
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado y traducción a otro lenguaje. Resolución y obtención de la solución	Interpretación de la situación problema y calcula de la solución
ARGUMENTOS	
Aplicación de conceptos y procedimientos puestos en juego	Justificación de la respuesta solución al problema

7- Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación  $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{6}{5}$

La actividad tiene por intención recuperar procedimientos distintos empleados para resolver ecuaciones que involucran a los números racionales. Se podría preguntar si el conjunto solución está formado sólo por un elemento, si hay más, etc.

Configuración epistémica Asociada Actividad 7

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Conjunto solución , Ecuación. $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{6}{5}$	Resolución de una ecuación con racionales
CONCEPTOS	
Ecuación Números racionales	Ecuación en los números racionales , cuya incógnita aparece en el denominador
PROPIEDADES	
De las igualdades	Determinación de la incógnita
PROCEDIMIENTOS	
Resolución de una ecuación. Algoritmo de la suma de fracciones con distinto denominador	Se usa para solución de la ecuación
ARGUMENTOS	
Aplicación de los procedimientos	Justificación de la respuesta a la actividad

8- Hacemos un batido con  $\frac{3}{4}$  litro de leche y  $\frac{1}{3}$  litro de frutas. ¿Cuántas copas de  $\frac{1}{6}$  litro podrían llenarse? Responde justificando tu respuesta.

Tiene por finalidad que en la argumentación podamos analizar cómo pone en juego elementos de lenguaje, conceptos y procedimientos, y preguntar sobre ellos en la entrevista.

Configuración epistémica Asociada Actividad 8

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Batido con $\frac{3}{4}$ litro de leche y $\frac{1}{3}$ litro de frutas.  Cuántas copas de $\frac{1}{6}$ litro podrían llenarse	Descripción de una situación problema extra-matemática
CONCEPTOS	
Fracciones. Suma de fracciones Cociente de fracciones	El cociente como fraccionamiento. Interpretación de “estar contenido en”
PROPIEDADES	
Cantidad de veces que una fracción está contenida en una fracción mayor	Remite al cociente como fraccionamiento
PROCEDIMIENTOS	

Interpretación de la situación problema Algoritmo de suma y cociente de fracciones	Se usa para solución de la situación
ARGUMENTOS	
Concepto de cociente	Justificación de la respuesta a la situación problema

9- Se llena hasta los  $\frac{3}{4}$  un bidón de 16,5 litros y hasta los  $\frac{2}{3}$  otro de 19 litros. ¿Cuál de los dos contiene más líquido? Responde justificando tu respuesta.

Tiene por finalidad observar cómo relaciona con la actividad los procedimientos, el tipo de argumento que utiliza, y los diferentes usos de lenguaje que podría utilizar (gráfico, simbólico, verbal).

*Configuración epistémica Asociada Actividad 9*

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Se llena hasta los $\frac{3}{4}$ un bidón de 16,5 litros y hasta los $\frac{2}{3}$ otro de 19 litros, ¿Cuál contiene más líquido?	Descripción de una situación problema extra-matemática, que implica la comparación de dos cantidades.
CONCEPTOS	
Fracción, número decimal . Unidades de capacidad	La fracción como parte de una cantidad continua expresada con un número decimal y una unidad de capacidad.
PROPIEDADES	
Del producto de una fracción por un n° decimal.	Obtención de una fracción como parte de una cantidad continua
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Procedimientos gráficos o simbólicos para calcular una fracción como parte de una cant. continua	Se usa para solución de la tarea
ARGUMENTOS	
Conceptos ,procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación problemática

10- Indica cuáles de estas igualdades son siempre correctas, sabiendo que a y b son números reales y b distinto de cero. Fundamenta tu respuesta

$$\frac{a+b}{b+6} = \frac{a}{6}; \quad \frac{1+a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b}; \quad \frac{4a}{b} = \frac{4}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Ante resoluciones de esta naturaleza nos interesa indagar si reconocen la equivalencia entre dos expresiones y las estrategias, técnicas y procedimientos que se pueden poner en juego para tal fin. A su vez, en la argumentación se detectaría el tipo de relación que efectúa, ya sea con un procedimiento, propiedad o concepto.

Configuración epistémica Asociada Actividad 10

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
<p>Cuáles de estas igualdades son siempre correctas, sabiendo que a y b son números reales?</p> $\frac{a+b}{b+6} = \frac{a}{6} \quad \frac{1+a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b} \quad \frac{4a}{b} = \frac{4}{b} \cdot \frac{a}{b}$	Interpretación de igualdades en el lenguaje simbólico.
CONCEPTOS	
Número Real Igualdades	Determinación de condiciones para que una igualdad sea verdadera
PROPIEDADES	
Simplificación de fracciones. Distributiva de la división respecto a la suma	Condiciones para que se cumpla una igualdad y reconocimiento de propiedades
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación de expresiones simbólicas. Reconocimiento de propiedades de las operaciones	Se usa para solución de la tarea
ARGUMENTOS	
Concepto de igualdad, propiedades de las operaciones	Justificación de la respuesta a la actividad

11- Elisa ha recorrido  $\frac{2}{5}$  del camino que va desde A hasta B y aún le faltan 2 km para llegar a la mitad. Calcula la distancia AB, justificando tu respuesta.

La situación busca analizar las estrategias, técnicas y procedimientos que ponen en juego para expresar en lenguaje simbólico y/o gráfico lo que se encuentra en lenguaje natural.

Configuración epistémica Asociada Actividad 11

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
<p>Si ha recorrido <math>\frac{2}{5}</math> del camino que va desde A hasta B y aún le faltan 2 km para llegar a la mitad. Calcula la distancia AB.</p>	Descripción de una situación problema extra-matemática, que implica el cálculo de una distancia
CONCEPTOS	
Fracción, número racional. Unidades de longitud	Expresión que determina una distancia.
PROPIEDADES	
Una longitud puede expresarse como una expresión algebraica que representa una ecuación.	Obtención de una longitud a través de una suma algebraica que tiene una incógnita
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Procedimientos gráficos, simbólicos o verbales para obtener la expresión que represente la longitud pedida	Se usa para solución de la situación problemática
ARGUMENTOS	
Conceptos, procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación problemática

12- a) Si se mezclan 2 vasos de jugo de limón concentrado con 5 vasos de agua, se obtiene un jugo para beber. ¿Será cierto que si se mezclan 5 vasos de jugo concentrado con 12 vasos y medio de agua se obtiene una bebida de la misma proporción ¿Y si se mezclan 26 vasos de concentrado con 65 de agua? Explica tu respuesta cada caso.

b) Busca diferentes combinaciones que den como resultado un jugo del mismo sabor que el que se obtiene con 2 vasos de jugo de limón y 5 vasos de agua.

La situación tiene una finalidad similar a la anterior, donde se pueden poner en juego variadas estrategias, técnicas y procedimientos, con vínculos y relaciones entre conceptos (fracción y razón, fracciones equivalentes y proporción). Nos interesa indagar si reconocen la equivalencia entre dos expresiones y las estrategias que se pueden poner en juego para tal fin.

*Configuración epistémica Asociada Actividad 12*

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Se mezclan 2 vasos de jugo de limón concentrado con 5 vasos de agua, se obtiene un jugo para beber. Si se mezclan 5 vasos de jugo concentrado con 12 vasos y medio de agua se obtiene una bebida de la misma proporción ¿Y si se mezclan 26 vasos de concentrado con 65 de agua? Busca diferentes combinaciones.	Descripción de una situación problema extra-matemática, que implica la comparación de cantidades que impliquen proporciones.
CONCEPTOS	
Razón, Proporción.	Vínculos y relaciones entre conceptos (fracción y razón, fracciones equivalentes y proporción).
PROPIEDADES	
De las fracciones equivalentes. De las proporciones.	Relación entre fracciones equivalentes y proporción.
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Propiedades y procedimientos para calcular combinaciones de cantidades que expresen una proporción.	Se usa para solución de la tarea.
ARGUMENTOS	
Vinculación entre conceptos y propiedades.	Justificación de la respuesta a la situación problemática.

13-Para resolver el problema 12 b) un alumno dijo que buscó fracciones equivalentes a  $\frac{2}{5}$  para formar otras combinaciones. ¿Es correcto el razonamiento que realiza el alumno? Fundamenta tu respuesta.

En este caso le mostramos lo realizado por otro alumno y le pedimos que nos explique lo que cree que ha hecho. Esta estrategia la utilizan algunos libros de texto escolar, cuando les piden a los estudiantes que analicen lo que dicen ciertos personajes ante la resolución del

mismo problema, con expresiones del tipo "con quién estás de acuerdo y por qué". Y la referencian llamándola "voces de los otros"

Por ej.: en esta actividad, se pone en consideración una estrategia, aludiendo a que otro alumno ha dicho tal cosa ante el ejercicio.

De esta manera indagamos si puede relacionar con la actividad distintos procedimientos y conceptos.

Configuración epistémica Asociada Actividad 13

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Un alumno dijo que buscó fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ para formar otras combinaciones. ¿Es correcto el razonamiento que realiza el alumno?.	Descripción de una situación extra-matemática, que pone en consideración una estrategia, aludiendo a que otro alumno ha realizado ese razonamiento.
CONCEPTOS	
Fracciones equivalentes. Proporciones.	Vínculos y relaciones entre conceptos (fracción y razón, fracciones equivalentes y proporción).
PROPIEDADES	
De las fracciones equivalentes, De las proporciones.	Relación entre fracciones equivalentes y proporción.
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Explicación del razonamiento realizado por el otro alumno.	Se usa para dar respuesta al interrogante.
ARGUMENTOS	
Conceptos, propiedades y/o procedimientos y lenguajes puestos en juego.	Justificación de la respuesta al interrogante planteado.

14- Encuentra un número natural n, de modo que se verifique lo siguiente:  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

¿Habrá más de un valor posible para n? Si crees que sí, indica cuáles podrían ser.

Si crees que no, explica por qué.

En este caso interesa indagar la interpretación que realiza del lenguaje simbólico, de las desigualdades y si es capaz de realizar una generalización. En función de sus respuestas o argumentos se puede preguntar acerca de conceptos y /o propiedades.

Configuración epistémica Asociada Actividad 14

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Número natural n, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ más de un valor posible para n?	Descripción de una situación intra-matemática, que implica generalización de valores para que se cumpla una desigualdad expresada en lenguaje simbólico
CONCEPTOS	

Número natural, Variable. Desigualdad fraccionaria	Expresión simbólica de una desigualdad. Concepto de variable en una desigualdad
PROPIEDADES	
De las desigualdades	Obtención de los valores de “n”
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación de la expresión simbólica Procedimientos para resolver una desigualdad Generalización de la solución	Se usa para la solución de las situación
ARGUMENTOS	
Conceptos ,propiedades procedimientos y lenguajes puestos en juego para realizar la generalización	Justificación de la respuesta a la situación problemática

15- Lee atentamente los siguientes enunciados y explica si es posible dar una respuesta certera a la pregunta que se hace en cada uno. Justifica tu respuesta.

- a) Un tercio de los alumnos del curso A son aficionados al básquet, mientras que  $\frac{3}{8}$  del curso B son aficionados al fútbol. ¿Cuál de los deportes tiene más aficionados?
- b) Un tercio de los alumnos del colegio de Martín son aficionados al básquet, mientras que tres octavos de los alumnos del colegio son aficionados al fútbol. ¿Cuál de los dos deportes tiene más aficionados?

A través de esta situación se busca recabar información sobre la interpretación de los enunciados y los datos del problema, y cómo los relaciona con argumentos. Durante la entrevista aparecen elementos vinculados al lenguaje para indagar sobre vínculos y relaciones con la situación problema que le da origen.

Configuración epistémica Asociada Actividad 15

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Explica si es posible dar una respuesta certera. a) Un tercio de los alumnos del curso A son aficionados al básquet, mientras que $\frac{3}{8}$ del curso B son aficionados al fútbol. b)Un tercio de los alumnos del colegio de Martín son aficionados al básquet, mientras que tres octavos de los alumnos del colegio son aficionados al fútbol. Para a) y b)¿Cuál de los dos deportes tiene más aficionados?	Descripción de una situación problema extra-matemática, que implica la comparación de dos cantidades expresadas en fracciones considerando distintos datos y debe explicar si es posible dar una respuesta.
CONCEPTOS	
Conjuntos expresados por cantidades. Fracción como parte de una cantidad	Identificación de conjuntos y datos relevantes en una situación problemática
PROPIEDADES	
Comparación de cantidades expresadas simbólicamente	Posibilidades de solución
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Reconocimientos de datos. Identificación de diferencias e igualdades de	Se usa para solución de la tarea

conjuntos Procedimientos gráficos o simbólicos para obtener las respuestas	
ARGUMENTOS	
Sobre la interpretación de los enunciados y los datos del problema, y relaciones que establece para las respuestas	Justificación de la respuesta a la situación problemática

16- Un transportista compra un camión. Paga 3/10 de su precio al solicitarlo y, en el momento de la entrega paga 3/5 del resto.

a) Lo que le queda por pagar lo divide en 12 cuotas mensuales. ¿Qué fracción del total representa cada plazo?

b) Un estudiante ha dejado indicadas las operaciones que conducen a la solución.

$\frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot 1 - \frac{3}{10} : 12$  Justifica las expresiones ¿por qué incluye paréntesis y corchetes

donde lo hace? y calcula los resultados.

Esta actividad recolecta información sobre procedimientos que podría utilizar en la resolución del problema y también cómo se articula con los argumentos. Nos interesa que en los argumentos (esgrimidos en la entrevista) establezcan similitudes o diferencias.

Configuración epistémica Asociada Actividad 16

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
a) Paga 3/10 de su precio, y en la entrega paga 3/5 del resto. Lo que le queda por pagar lo divide en 12 cuotas mensuales. Qué fracción del total representa cada plazo? b) Un estudiante indicó la solución: $\frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot 1 - \frac{3}{10} : 12$ Por qué incluye paréntesis y corchetes donde lo hace	Descripción de una situación problema extra-matemática, que implica la resolución de la situación y luego el análisis de la misma tarea realizada por otro estudiante y la justificación de las expresiones
CONCEPTOS	
Fracción, número racional. Operaciones algebraicas con números racionales Ecuaciones	Expresión de una ecuación con números racionales. Interpretación de la expresión de una operación algebraica con racionales
PROPIEDADES	
De las operaciones algebraicas con racionales	Se usan en la resolución de una operación algebraica
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Procedimientos para resolver una operación algebraica. Explicación del razonamiento realizado por el otro alumno	Se usa para solución de la tarea
ARGUMENTOS	
Conceptos, propiedades y/o procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación problemática

--	--

17- Si has resuelto  $\frac{2}{5}$  de un total de problemas, esto es, 4 problemas de un examen. ¿Cuántos había en total? Justifica tu respuesta.

La situación busca analizar las estrategias, técnicas y procedimientos que ponen en juego para expresar en lenguaje simbólico y en la entrevista indagar cómo se relacionan los mismos con conceptos (como el de proporcionalidad, por ejemplo).

Configuración epistémica Asociada Actividad 17

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
$\frac{2}{5}$ de un total de problemas = 4 problemas de un examen Cuántos había en total?	Descripción de una situación problema extra matemática, que implica una situación de proporcionalidad, utilizando fracciones
CONCEPTOS	
Fracción . Proporcionalidad	Aplicación de conceptos de proporcionalidad a los casos de fracciones y números..
PROPIEDADES	
De la proporcionalidad directa	Aplicación de la proporcionalidad directa para resolver la situación
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Utilización de $\frac{5}{5}$ para representar el total Utilización de la proporcionalidad directa	Se usa para solución de la tarea
ARGUMENTOS	
Conceptos, procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación problemática

18-Nicolás tiene una hoja de papel y la corta por la mitad. Se queda con una de las partes y vuelve a cortarla por la mitad. En total, realiza esa operación 8 veces.

- a) ¿Qué fracción del papel le queda en la mano, después de la octava vez?
- b) ¿Qué fracción descartó después de la octava vez?

En esta actividad se busca indagar cómo establece la relación entre la acción concreta y la operación matemática que representa (procedimientos, técnicas y algoritmos). Podría preguntarse en la entrevista. ¿Cómo pensó el problema? ¿Qué operación relacionaría con el procedimiento que hizo?

Configuración epistémica Asociada Actividad 18

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	

La corta por la mitad , vuelve a cortarla por la mitad, realiza esa operación 8 veces. ¿Qué fracción del papel le queda en la mano, después de la octava vez? ¿Qué fracción descartó después de la octava vez?	Descripción de una situación problema extra-matemática, que implica en forma preponderante el concepto de potenciación
CONCEPTOS	
Mitad de un número.. Potenciación de fracciones, Resta de fracciones	Aplicación del concepto de potenciación a una situación concreta
PROPIEDADES	
La potenciación como producto repetido	Obtención de una potencia como producto repetido
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Procedimientos gráficos o simbólicos para calcular la potencia de una fracción y la resta de fracciones	Se usa para solución de la situación problema.
ARGUMENTOS	
Explicación a través de conceptos ,procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación problemática

19-Sabiendo que **a** y **b** son números racionales distintos de cero, y **m** y **n** son números naturales, indica cuáles de las siguientes afirmaciones son SIEMPRE verdaderas (V) y cuales son SIEMPRE falsas (F).Expone algún argumento que justifique tus respuestas.

- a)  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  .....
- b)  $(ab)^2 = a^2 b^2$  .....
- c)  $a^m a^n = a^{m+n}$  .....
- d)  $a^m a^n = a^{m n}$  .....
- e)  $(a^m)^n = a^{(m)^n}$  .....
- f)  $(a^m)^n = a^{mn}$  .....

Esta actividad tiene por finalidad analizar cómo relaciona con la actividad el lenguaje simbólico, las propiedades de los números racionales y el modo en que las articula en la argumentación.

Configuración epistémica Asociada Actividad 19

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
<b>a</b> y <b>b</b> son números racionales distintos de cero y <b>m</b> y <b>n</b> son números naturales $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ $(a^m)^n = a^{(m)^n}$ $(ab)^2 = a^2 b^2$ $a^m a^n = a^{m n}$ $a^m a^n = a^{m+n}$ $(a^m)^n = a^m$	Descripción de expresiones simbólicas que implican igualdades con números racionales , de las cuales hay que determinar las verdaderas y falsas
CONCEPTOS	
Números Racionales. Potenciación en Q	Aplicación de las propiedades de la potenciación en Q a expresiones simbólicas
PROPIEDADES	

## Metodología de la investigación

De la distributiva de la potenciación , Del producto de potencias de igual base. Potencia de potencia,	Reconocimiento de las propiedades de la potenciación en Q
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado simbólico Procedimientos para validación de propiedades	Se usa para solución de la actividad.
ARGUMENTOS	
Explicación a través de la propiedades de la potenciación	Justificación de la verdad o falsedad de las expresiones

20- Un número multiplicado 4 veces por sí mismo da 2401. ¿Qué número es? Justifica tu respuesta.

Tiene por finalidad observar la relación entre situación problema y procedimientos, y el modo en que argumenta la respuesta.

### Configuración epistémica Asociada Actividad 20

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Número que multiplicado 4 veces por sí mismo da 2401.	Descripción de una situación intra-matemática que implica la operación radicación
CONCEPTOS	
Multiplicación, potenciación y Radicación en Q.	La potenciación como producto repetido. La radicación como operación inversa de potenciación
PROPIEDADES	
$n^p = m \leftrightarrow \sqrt[p]{m} = n$	Obtención de la base de la potencia.
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Procedimientos simbólicos para calcular la base de la potencia.	Se usa para solución de la actividad.
ARGUMENTOS	
Explicación a través de conceptos ,procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación.

21- Se quiere hallar una aproximación del número 4,1725128 que tenga tres cifras decimales.

- ¿Cómo es el valor truncado con respecto al valor exacto? ¿mayor, menor o igual?
- ¿Cómo es el valor redondeado con respecto al valor exacto? ¿mayor, menor o igual?
- ¿Cuál de los dos valores aproximados es más cercano al valor exacto? ¿Cómo te das cuenta?

Al igual que la actividad anterior, tiene por finalidad establecer relaciones entre la situación problema, los procedimientos o técnicas, los conceptos y el modo en que ellos se vinculan en una argumentación.

Configuración epistémica Asociada Actividad 21

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
<b>LENGUAJE</b>	
Aproximación del número 4,1725128 que tenga tres cifras decimales Valor truncado, valor redondeado. Mayor, menor o igual	Situación intra-matemática, que implica la aproximación de números decimales
<b>CONCEPTOS</b>	
Número decimal. Aproximación por redondeo y truncamiento	Distintas formas de aproximar números decimales
<b>PROPIEDADES</b>	
Relación de mayor en los números decimales. Relación de menor en los números decimales	Comparación de valores de números decimales aproximados con respecto al valor dado,
<b>PROCEDIMIENTOS</b>	
Procedimientos para calcular valores aproximados de números decimales. Comparación con el valor dado	Se usa para solución de la actividad
<b>ARGUMENTOS</b>	
Explicación a través de propiedades y procedimientos utilizados	Justificación de las respuestas dadas a la actividad

22- ¿Cuántos ceros tiene en su parte decimal el número  $2,34 \times 10^{+10}$ ? . Explica cómo lo pensaste.

La actividad pretende buscar relaciones entre conceptos, procedimientos, lenguaje y argumentos.

Configuración epistémica Asociada Actividad 22

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
<b>LENGUAJE</b>	
Cuántos ceros tiene en su parte decimal el número $2,34 \times 10^{+10}$	Interpretación del concepto de notación científica.
<b>CONCEPTOS</b>	
Notación científica	Expresión de un número en notación científica
<b>PROPIEDADES</b>	
Los números decimales puede expresarse a través de notación científica	Se usa como otra forma de expresar los números decimales
<b>PROCEDIMIENTOS</b>	
Análisis de la expresión Procedimiento para expresar un número decimal en notación científica. Determinación de número de ceros en la parte decimal	Se usa para solución de la tarea
<b>ARGUMENTOS</b>	
Conceptos ,procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación

23- Un segundo es el tiempo que tarda un átomo de cesio en emitir 9192631770 ciclos de radiación. Escribe ese número en notación científica.

Estas actividades tienen por finalidad recabar información sobre los conceptos y procedimientos utilizados en la notación científica, y cómo se articulan con la situación problema.

Configuración epistémica Asociada Actividad 23

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
Un segundo es el tiempo que tarda un átomo de cesio en emitir 9192631770 ciclos de radiación Número en notación científica	Descripción de una situación extra-matemática, que implica una cantidad a expresar en notación científica
CONCEPTOS	
Número decimal. Notación científica. Unidad de tiempo	Expresión de una cantidad en notación científica
PROPIEDADES	
Números muy grandes o muy pequeños pueden expresarse a través de notación científica.	Se usa como otra forma de expresar números muy grandes o muy pequeños
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado. Procedimientos para expresar un número de muchas cifras	Se usa para solución de la tarea
ARGUMENTOS	
Conceptos ,procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación planteada

24- Ariel y Karina al resolver  $\frac{7}{9} \cdot 0,25$ , obtuvieron diferentes resultados-

Ariel hizo  $7:9 = 0,777$  y  $0,777 \cdot 0,25 = 0,19425$

Karina hizo  $\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{36} = 0,19\bar{4}$

¿Alguno se equivocó? Fundamenta tu respuesta.

Esta actividad recolecta información sobre los procedimientos, técnicas y algoritmos que se relacionan con la situación problema, como así también, propiedades y conceptos. A su vez, en la entrevista se puede indagar cómo articula estos elementos primarios en sus argumentos.

Configuración epistémica Asociada Actividad 24

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	

Al resolver $\frac{7}{9} \cdot 0,25$ , obtuvieron diferentes resultados: $7:9 = 0,777$ y $0,777 \cdot 0,25 = 0,19425$ $\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{36} = 0,19\bar{4}$ ¿Alguno se equivocó?	Descripción de una situación intra-matemática, que implica la resolución de dos maneras por dos estudiantes, el análisis y la justificación de los procedimientos realizados
CONCEPTOS	
Fracción .Número decimal. Expresión decimal de una fracción. Producto con fracciones y con decimales	Distintas formas de expresar un número racional
PROPIEDADES	
Toda fracción puede escribirse como una expresión decimal de finitas cifras decimales	Obtención de la expresión decimal de una fracción
PROCEDIMIENTOS	
Interpretación del enunciado Análisis de procedimientos realizados por los dos estudiantes	Se usa para dar respuesta a la pregunta planteada en la tarea
ARGUMENTOS	
Explicación de la respuesta a través de conceptos, procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación planteada

25- Expresa el resultado de cada problema en notación científica. Verifica con tu calculadora.

- ¿Cuántas pelotitas de 2 cm de diámetro habría que colocar en línea recta, una al lado de otra, para cubrir una distancia de 227.000.000 km?
- La superficie de la tierra es de aproximadamente 510.000.000 km<sup>2</sup> y el 70,85% está cubierta de agua. Calcula la superficie cubierta por agua.

Tiene por finalidad indagar relaciones con técnicas y procedimientos (entre ellos las que utiliza manualmente y verificación que realiza con calculadora) con conceptos, lenguaje y argumentos.

Configuración epistémica Asociada Actividad 25

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
LENGUAJE	
a)¿Cuántas pelotitas de 2 cm de diámetro habría que colocar en línea recta, una al lado de otra, para cubrir una distancia de 227.000.000 km? b)La superficie de la tierra es de aproximadamente 510.000.000 km <sup>2</sup> y el 70,85% está cubierta de agua. Calcula la superficie cubierta por agua	Descripción de dos situaciones problema extra-matemática, que implican la utilización de notación científica y porcentaje
CONCEPTOS	
Número .Notación científica. Unidades de longitud y área Porcentaje	Utilización de notación científica y porcentaje para expresar cantidades de longitud y áreas
PROPIEDADES	
De la notación científica, De la proporcionalidad directa en el cálculo de porcentajes	Obtención de números expresados en notación científica y en porcentaje
PROCEDIMIENTOS	

## Metodología de la investigación

Interpretación de enunciados. Expresión de cantidades en distintas unidades de longitud. Cálculo de cantidades correspondientes a un porcentaje. Expresión de un número en notación científica.	Se usa para solución de la tarea
<b>ARGUMENTOS</b>	
Utilización de conceptos ,procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de la respuesta a la situación problemática.

26- Martín compra un equipo de audio de \$700. Por abonarlo en efectivo le hacen un descuento del 15%. Cuando se acerca a la caja para pagar, lo invitan a raspar una tarjeta y... ¡sorpresa! ¡Se gana un 10% de descuento sobre el monto que iba a pagar!

¿Cuál de estos cálculos expresa lo que pagó (en pesos)?

a)  $0,10 \cdot (700 - 15) =$     b)  $0,10 \cdot 0,85 \cdot 700 =$     c)  $0,85 \cdot 700 \cdot 0,90 =$     d)  $0,90 \cdot (700 - 15) =$

La actividad pretende indagar sobre vínculos que se realizan con conceptos y procedimientos, los cuales se evidencian aún más en la instancia de entrevista personal.

### Configuración epistémica Asociada Actividad 26

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
<b>LENGUAJE</b>	
Equipo de audio de \$700 Descuento del 15%. Gana un 10% a) $0,10 \cdot (700 - 15) =$ b) $0,10 \cdot 0,85 \cdot 700 =$ c) $0,85 \cdot 700 \cdot 0,90 =$ d) $0,90 \cdot (700 - 15) =$	Descripción de una situación problema extra-matemática, y análisis de procedimientos correctos en 4 soluciones propuestas
<b>CONCEPTOS</b>	
Número Decimal. Porcentaje	Cantidades expresadas cómo % o como número decimal
<b>PROPIEDADES</b>	
Las cantidades expresadas en %, pueden expresarse como número decimal	Transformación de cantidades expresadas en % a número decimal
<b>PROCEDIMIENTOS</b>	
Interpretación del enunciado. Procedimientos para transformar cantidades expresadas en % a número decimal. Análisis de procedimientos correctos en 4 soluciones propuestas	Se usa para solución de la tarea
<b>ARGUMENTOS</b>	
Conceptos, procedimientos y lenguajes puestos en juego para decidir la respuesta correcta	Justificación de la respuesta a la situación problemática

27- Resuelve los problemas y justifica tus respuestas:

a) La mitad de un número aumentado en un 15% es igual a 2,3. ¿Cuál es el número?

- b) A un artículo que cuesta \$p se le descuenta el 15% por fin de temporada y sobre ese precio, un 10% por pago al contado de modo que el precio final es de \$ 153. ¿Cuál era el precio original p?
- c) El 20% de un número natural es igual al 30% de su anterior. ¿Cuál es ese número?

Esta última situación tiene por objetivo determinar si son capaces de estructurar o identificar una expresión sumado a decodificaciones propias que aparecen en la traducción del lenguaje natural al simbólico, como el hecho de calcular porcentajes.

Configuración epistémica Asociada Actividad 27

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADO
<b>LENGUAJE</b>	
La mitad de un número aumentado en un 15% es igual a 2,3. ¿Cuál es el número? A un artículo que cuesta \$p se le descuenta el 15% por fin de temporada y sobre ese precio, un 10% por pago al contado de modo que el precio final es de \$ 153. ¿Cuál era el precio original p? El 20% de un número natural es igual al 30% de su anterior. ¿Cuál es ese número?	Descripción de tres situaciones problema extra matemática, que implica la resolución de ecuaciones con cantidades expresadas en porcentaje
<b>CONCEPTOS</b>	
Número decimal. Fracción Porcentaje. Ecuaciones	Cantidades expresadas como %, como fracción , como decimal
<b>PROPIEDADES</b>	
Las cantidades expresadas en %, pueden expresarse como fracción o número decimal para la resolución de ecuaciones	Expresión de ecuaciones con cantidades expresadas en %, , en fracciones o número decimal
<b>PROCEDIMIENTOS</b>	
Interpretación del enunciado. Expresión simbólica de los enunciados Procedimientos para transformar cantidades expresadas en % a fracción o número decimal. Procedimientos para resolver ecuaciones	Se usa para las soluciones de la situaciones planteadas
<b>ARGUMENTOS</b>	
Explicación a través de conceptos, propiedades procedimientos y lenguajes puestos en juego	Justificación de las respuestas a las situaciones problemáticas

**4.3.3. Análisis de los datos obtenidos de las respuestas de los estudiantes participantes**

Para el análisis de los datos obtenidos de las respuestas de los estudiantes seguimos el esquema que representamos en la Figura 2. En primera instancia analizamos las prácticas operativas que quedaron registradas en las evaluaciones realizadas por los estudiantes, las cuales estaban condicionadas por el instrumento que administramos. Ese análisis llevó a determinar posibles vínculos que estarían realizando para la resolución de la actividad, lo cual no necesariamente es así, pues es una interpretación que hacemos de lo que otra persona ha realizado. Esta correspondencia se realiza a través de una función semiótica

(indicada con número 1 en la Figura 2), la cual es un constructo que propone el EOS, y que tiene por antecedente a un objeto matemático, y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por un estudiante ante una cierta clase de situaciones–problemas que se les presentó en el instrumento.

Si bien cuando un estudiante realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto (lenguaje, situaciones–problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), no necesariamente lo realizan como el profesor o intérprete lo está pensando. Este acto de semiosis dio lugar a una primera agrupación de los elementos de significado, lo que constituye la “Primera Configuración Cognitiva” obtenida para cada estudiante.

Posteriormente, diseñamos una entrevista para llevar a cabo con cada estudiante, a fin de constatar o rectificar las prácticas operativas que habíamos supuesto en la primera configuración cognitiva. Asimismo, la entrevista permitió ampliar la información que presuponíamos de las prácticas operativas realizadas por el estudiante.

De la entrevista, y teniendo en cuenta la primera configuración cognitiva, volvimos a realizar otro acto de semiosis (indicado con el número 3 en la Figura 2) lo que permitió esbozar la “Configuración Cognitiva Final” de cada estudiante.



Figura 2: Esquema de análisis de los datos obtenidos de los estudiantes

A su vez, para cada grupo de estudiantes (aspirantes a ingresar a la UNL y al ISP N° 10) confeccionamos un cuadro *ad hoc* (ver Anexo III), donde se tabularon las respuestas de dadas a cada actividad del instrumento, considerando los conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y lenguaje utilizado. Esto permitió esbozar una Configuración Cognitiva General, la que comparada con la Configuración Epistémica obtenida del análisis de los textos escolares, permitió determinar: (a) Los conceptos, propiedades, procedimientos, lenguaje y argumentaciones que efectivamente ponen en juego los estudiantes al realizar tareas que involucran los números racionales, y (b) las dificultades, errores y deficiencias que se les presentan cuando resuelven las mismas. Estas últimas también se obtienen de las configuraciones cognitivas incompletas de los estudiantes. Para ello se tomó como base los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje de la configuración epistémica de referencia elaborada a partir del significado institucional global/ de expertos y se fueron realizando distintos cuadros *ad hoc*, sistematizando la información en cuanto a la presencia, parcialmente presente, o ausencia de los mismos en la configuración cognitiva de cada estudiante.

Con la finalidad de hacer más gráfica la información, se realizaron cuadros de resumen, donde determinamos cantidad de estudiantes que muestran la presencia de determinados elementos primarios del objeto matemático estudiado. A su vez, se acompaña a esa información con una valoración en porcentaje de la presencia o ausencia de los elementos primarios que aparecieron en sus configuraciones cognitivas.

**LOS NÚMEROS  
RACIONALES EN LOS  
DOCUMENTOS  
CURRICULARES Y EN  
TEXTOS ESCOLARES**

## **LOS NÚMEROS RACIONALES EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES Y EN TEXTOS ESCOLARES**

### **5.1. Introducción**

---

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales (extraídas de documentos curriculares, un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes).

En las configuraciones epistémicas (obtenidas de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante una clase, etc.), podemos considerar que están en juego objetos institucionales, en tanto tienen connotaciones normativas o convencionales, y son usados como una referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este Capítulo consideramos una configuración epistémica global de referencia que tomamos como “significado institucional de referencia” o significado institucional global o experto sobre el tema y que construimos en base a los siguientes documentos curriculares:

- Ministerio de Educación de la Nación (1995). Contenidos básicos comunes para la Educación General Básica – Segunda Edición. Buenos Aires: Consejo Federal de Cultura y Educación.
- Ministerio de Educación de Santa Fe (1999). Diseño Curricular Jurisdiccional para el Tercer Ciclo de la EGB - Matemática, Ciencias Naturales y Tecnología. Santa Fe: Ministerio de Educación de Santa Fe.

Esto se fundamenta en que los estudiantes que se consideraron para esta investigación, son egresados del sistema educativo de la provincia de Santa Fe o de otras provincias de la República Argentina durante el año 2011 o en años anteriores próximos a 2011, y por lo tanto cursaron su escuela secundaria estando en vigencia los diseños curriculares jurisdiccionales y/o nacionales correspondientes a la ley Federal de Educación (Ley N° 24195/93, suplantada por la Ley de Educación Nacional N° 26206/06).

Los contenidos básicos Comunes (CBC) forman parte de los acuerdos federales para la

transformación curricular y constituyen la definición del conjunto de saberes relevantes que integrarán el proceso de enseñanza de todo el país (Ley federal de Educación). Los CBC son la matriz básica para un proyecto cultural nacional, matriz a partir de la cual, cada jurisdicción del Sistema Educativo continuará actualizando sus propios lineamientos o diseños curriculares y dará paso, a su vez, a diversos pero compatibles proyectos curriculares institucionales (CBC para la EGB, 1995, Pág. 17).

En el diseño curricular jurisdiccional para el tercer ciclo de la EGB de la provincia de Santa Fe correspondiente a Matemática, Ciencias Naturales y Tecnología, el Ministerio de Educación propone algunos de los lineamientos básicos y brinda orientaciones sobre los marcos de referencia que servirán de base y a partir de los cuales se han de construir los proyectos curriculares institucionales.

En los CBC se analizaron los bloques correspondientes al área matemática para el tercer ciclo de la EGB, en particular los bloques correspondientes a Número, Operaciones, Lenguaje gráfico y algebraico y Procedimientos relacionados con el quehacer matemático, centrandó la atención en lo referido a los números racionales como objeto de estudio.

En el caso del diseño jurisdiccional de Santa Fe se analizaron los contenidos prescritos en los CBC, organizados en el tercer ciclo en los siguientes ejes: Números y operaciones, considerando además el marco para todos los ejes de Tratamiento de la Información y Resolución de Problemas, centrandó la atención en lo referido a números racionales como objeto de estudio.

## **5.2. Configuración Epistémica de Referencia del Objeto Matemático “Números Racionales”**

---

- *Situaciones problemas.*

Situaciones problemáticas contextualizadas. ( extra matemáticas)

Problemas de introducción y aplicación en que las variables que intervienen son números racionales y que incentiven:

La construcción de nuevos conocimientos.

La utilización de conocimientos ya adquiridos, en situaciones de dentro y fuera de la matemática misma.

La extensión del campo de utilización de una noción ya estudiada.

La aplicación conjunta de varias categorías de conocimientos.

El Control del Estado de conocimiento.

La investigación, apuntando al desarrollo de competencias metodológicas.

Situaciones no contextualizadas (intra-matemáticas).

Ejercicios de introducción como ejemplificación y de aplicación en los que las variables son números racionales.

• *Lenguaje.*

VERBAL: Enunciados coloquial de situaciones problemáticas, Argumentación de procedimientos.

Denominación, explicación y/o definición de conceptos, relaciones y propiedades.

SIMBÓLICO: Utilización de la notación simbólica para:

Expresión de Números racionales. Expresión de ecuaciones y desigualdades.

Expresión de propiedades de las operaciones con racionales. Expresión de algoritmos de las operaciones con racionales. Traducción de las condiciones de un fenómeno o problema en términos de igualdades. Ecuaciones e Inecuaciones. Utilización del lenguaje simbólico para describir el enunciado de un problema o para describir gráficas sencillas.

GRÁFICO: Representación de racionales en la recta numérica. Construcción de gráficos de fracciones con cantidades discretas y continuas. Interpretación de enunciados a través de tablas y gráficos. Anticipación de la solución de problemas. Ecuaciones e Inecuaciones a partir del análisis de tablas y gráficos. Utilización del lenguaje gráfico para describir el enunciado de un problema o la relación entre variables.

*Pasaje del lenguaje verbal al gráfico y simbólico y viceversa.*

• *Conceptos:* Sistema de numeración Posicional decimal. Noción de base. Valor relativo. El cero. Números Naturales y Enteros. La recta numérica. Valor absoluto. Orden. Discretitud. Operaciones con números naturales y enteros. Divisibilidad en los números enteros. Múltiplo y divisor de un entero. Múltiplo común Menor. Divisor Común Mayor. Criterios de Divisibilidad. Ecuaciones e Inecuaciones. Números Racionales: Concepto. Formas de Escritura (fraccionaria, decimal). Equivalencias. Expresiones decimales y periódicas. La Recta y los números y racionales. Orden. Densidad. Operaciones básicas con números racionales bajo distintas representaciones (fraccionaria y decimal). Potencia de exponente entero. Radicación. Cálculo exacto y aproximado. Error absoluto y relativo. Margen de Error. Órdenes de magnitud de los resultados. Notación científica. Usos. Proporcionalidad directa e inversa. Sucesiones numéricas proporcionales. Razón y proporción numérica. Expresiones usuales de la proporcionalidad. Análisis de Fórmulas.

Números irracionales. Algunos números especiales:  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ . Razón áurea. Números reales. Noción. Orden. Completitud

- *Propiedades*. De las operaciones con Naturales y Enteros. De las fracciones equivalentes. De las relaciones de orden. De densidad. De las operaciones con racionales. De la proporcionalidad directa e inversa.

- *Procedimientos*. Lectura y escritura de números enteros y racionales. Comparación y ordenación de números racionales. Ubicación de números racionales en la recta. Identificación de formas de escritura equivalentes de un número. Comparación y ordenación de números bajo distintas representaciones. Utilización de la notación científica para expresar y comparar números muy grandes o muy pequeños. Encuadramiento y aproximación de números. Cálculos numéricos. Interpretación de enunciados. Aplicación de algoritmos de las operaciones con enteros y racionales. Utilización de la jerarquía y las propiedades de las operaciones y las reglas de uso del paréntesis en cálculos sencillos. Completamiento de tablas. Interpretación de gráficos y enunciados. Cálculo de elementos en una proporción. Aproximación de decimales por redondeo y truncamiento. Expresión de números en notación científica. Resolución de ecuaciones e inecuaciones. Generalización de soluciones y resultados.

- *Argumentos*. Formulación de argumentos matemáticos lógicos que avalen o desapruében razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución de problemas usando el lenguaje matemático adecuado. Denominación, explicación y/o definición de conceptos, relaciones y propiedades usando el vocabulario adecuado.

**SITUACIONES PROBLEMÁTICAS CONTEXTUALIZADAS (EXTRAMATEMÁTICAS)**  
 Problemas de introducción y aplicación en que las variables que intervengan son números racionales y que incentiven:  
 La construcción de nuevos conocimientos.  
 La utilización de conocimientos ya adquiridos, en situaciones de dentro y fuera de la matemática misma.  
 La extensión del campo de utilización de una noción ya estudiada.  
 La aplicación conjunta de varias categorías de conocimientos.  
 El Control del Estado de conocimiento  
 La investigación, apuntando al desarrollo de competencias metodológicas.

**SITUACIONES NO CONTEXTUALIZADAS (INTRAMATEMÁTICAS).**  
 Ejercicios de introducción como ejemplificación y de aplicación en los que las variables son números racionales.

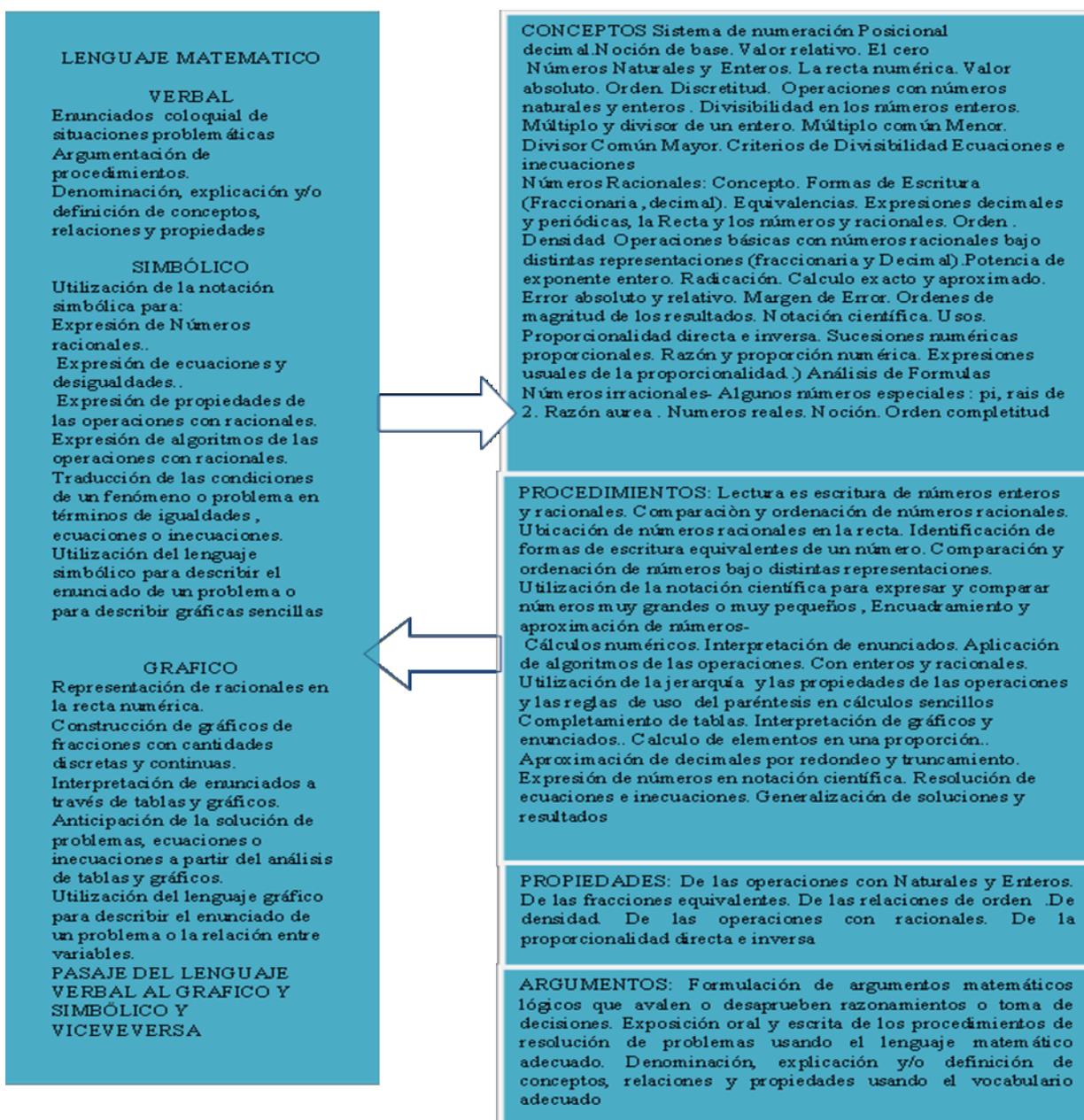
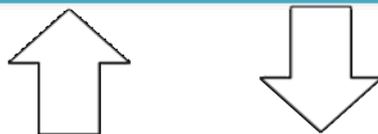


Figura 3: Configuración epistémica de referencia (significado institucional global o experto)

### 5. 3. Los números racionales en los textos escolares

---

Los textos escolares constituyen una fuente de consulta muy importante de los profesores para el diseño y preparación de sus clases, y por consiguiente, es indiscutible su influencia directa o indirectamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas.

Según Font (2011), una de las competencias profesionales que debe tener el profesor de Matemática es la competencia en análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita su diseño, aplicación, valoración y mejora. Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los estudiantes, las que son el punto de partida de la actividad a desarrollar en la clase, la que a su vez, produce como resultado algún aprendizaje.

Recientemente aumentó el interés en el área de la Educación Matemática sobre el diseño y rediseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad (por ejemplo, Mason & Johnston-Wilder, 2004; Tzur, Sullivan & Zaslavsky, 2008; Zaslavsky & Sullivan, 2011).

En este sentido, este Capítulo tiene por objetivo realizar un análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen los textos escolares sobre un objeto matemático particular, utilizando herramientas teóricas que provienen del EOS como línea de la Didáctica de la Matemática.

Este análisis didáctico tiene una doble finalidad. Por un lado, contar con información acerca de la idoneidad didáctica que tienen las tareas que proponen los textos escolares actuales de Matemática sobre un objeto matemático particular, y por el otro, aplicar herramientas de la Didáctica de la Matemática que pudieran ser útiles al profesor para desarrollar su competencia en análisis didáctico.

Se analizaron las actividades que proponen 8 libros de textos escolares de Matemática, de la escuela secundaria, centrando la atención en aquellas donde se aborda a los números racionales como objeto de estudio. La selección de los libros deviene, como hemos comentado en Capítulos anteriores, de los datos obtenidos a través de profesores que trabajan en la escuela secundaria y de las autoridades del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe que están a cargo de este nivel educativo.

El análisis de los libros de texto permite establecer el *significado institucional pretendido* Gaita, Wilhelmi, Huanqui y Lasa, (2009) para los números racionales como objeto matemático y establecer una Configuración Epistémica que fue utilizada de referencia para

el diseño del instrumento que se administró a los estudiantes, y para realizar comparaciones con las Configuraciones Cognitivas de los estudiantes.

A través de un estudio descriptivo hemos valorado a priori la idoneidad didáctica de los procesos de estudios potenciales basados en estos ocho libros de texto. Esta descripción se basó en la clasificación y agrupación de los objetos de significado (situaciones, conceptos o definiciones, procedimientos, propiedades, argumentos o justificaciones y lenguaje) que permitió la determinación de Configuraciones Epistémicas que resaltan el valor contextual y funcional de los elementos primarios que conforman el objeto matemático (número racional en nuestro caso).

Asimismo, con el análisis realizado también nos propusimos determinar algunos indicadores de mejora para las unidades analizadas de los textos escolares, o para el propio profesor que los utiliza, en tanto dotaría de mayor idoneidad didáctica a los procesos de enseñanza y aprendizaje que ellos promueven.

Utilizamos como herramientas teóricas las que propone y aporta el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2007) pues nos ofrece un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. La ontología matemática definida en el EOS permite describir las unidades didácticas (y las secuencias de actividades) de los libros de texto como la presentación estructurada de objetos matemáticos denominados primarios, los que conforman una configuración epistémica. Incluso, Font y Godino (2006) resaltan el hecho de que la noción de configuración epistémica puede ser utilizada para el análisis de libros de texto.

En particular, el análisis de las configuraciones epistémicas nos da información acerca de la “anatomía de un texto matemático”, lo que permite resaltar el valor contextual y funcional de los objetos matemáticos, pudiendo describir las características de los textos de distintas orientaciones epistemológicas y didácticas.

Para cada libro de texto se confeccionó una configuración epistémica. Asimismo, fue necesario imaginar posibles desarrollos que realizarían los estudiantes, con la finalidad de determinar conceptos, propiedades y procedimientos previos y emergentes. Si bien el análisis de cada texto se hace teniendo presente los objetos primarios que intervienen, la síntesis final deviene de una mirada global de esta configuración epistémica.

Asimismo, se utilizaron los indicadores de idoneidad didáctica que proporciona el EOS para realizar una valoración de las propuestas de tareas y actividades que se plasmaron en

los textos escolares analizados. Esta idoneidad se analizó tomando como referencia el significado institucional global/de expertos que describimos en la sección anterior.

No hemos centrado principalmente en las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica, dado que nos resulta poco viable valorar en las actividades de los textos la idoneidad mediacional y emocional pues la primera se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y la segunda se refiere al grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio.

Con respecto a la idoneidad interaccional, si bien no se puede observar exhaustivamente en los textos, como esta idoneidad se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje, la analizamos considerando por ejemplo un texto que proponga actividades a realizar en forma cooperativa o actividades que implique el análisis de lo que realizó otro resolutor, tiene una idoneidad interaccional alta.

#### **5.4. Configuraciones epistémicas del objeto matemático “Números Racionales” en los textos escolares analizados**

---

##### **5.4.1. Configuración epistémica del Libro 1**

Becerril, M., Grimaldi, V., Ponce, H., Urquiza, M. y Broitman, C. (2008). *Estudiar Matemática NAP 8º, ES 2º, CABA 1º*. Buenos Aires: Ediciones Santillana.

- *Situaciones problemas*. Se presentan situaciones contextualizadas relacionando los conceptos de razón y fracción, de proporción y fracciones equivalentes. En general las situaciones surgen de actividades de la vida cotidiana que tienen que ver con actividades económicas, actividades que requieren el conocimiento de las proporciones y de la geometría. Las situaciones no contextualizadas (intra-matemáticas) son fundamentalmente para aplicación o para profundizar los conceptos y/o propiedades.
- *Lenguaje*. Se utiliza lenguaje preponderantemente verbal para el enunciado de las situaciones y simbólico para la solución de las mismas. En algunas situaciones (muy pocas) se apela al lenguaje gráfico (por ejemplo, la comparación de tiras de papel o representaciones en la recta numérica).
- *Conceptos*: Aparecen como previos y necesarios para interpretar las situaciones los conceptos de razón, cociente, fracción y desigualdad y como emergentes los conceptos de proporción, desigualdades con fracciones, aproximación de números decimales, redondeo

y truncamiento y notación científica. A pesar de ser un texto que pretende profundizar sobre la enseñanza de los números racionales, llama la atención que no aparezcan las operaciones elementales con números racionales y sólo la potenciación y radicación.

- *Propiedades.* Se trabajan muy pocas propiedades y las mismas surgen de las situaciones o aparecen para debatirlas. Algunas son las propiedades de fracciones equivalentes, de las proporciones, de la igualdad y desigualdad de números y particulares de la potenciación.
- *Procedimientos.* Los que más se destacan, son: interpretación de enunciados y expresiones simbólicas, cálculos algorítmicos relacionados con las operaciones entre números racionales, ejemplificación y generalización, realización y comparación de gráficos.
- *Argumentos.* Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes, puesto que sólo se presenta en algunas actividades que demandan justificación de procedimientos o soluciones.

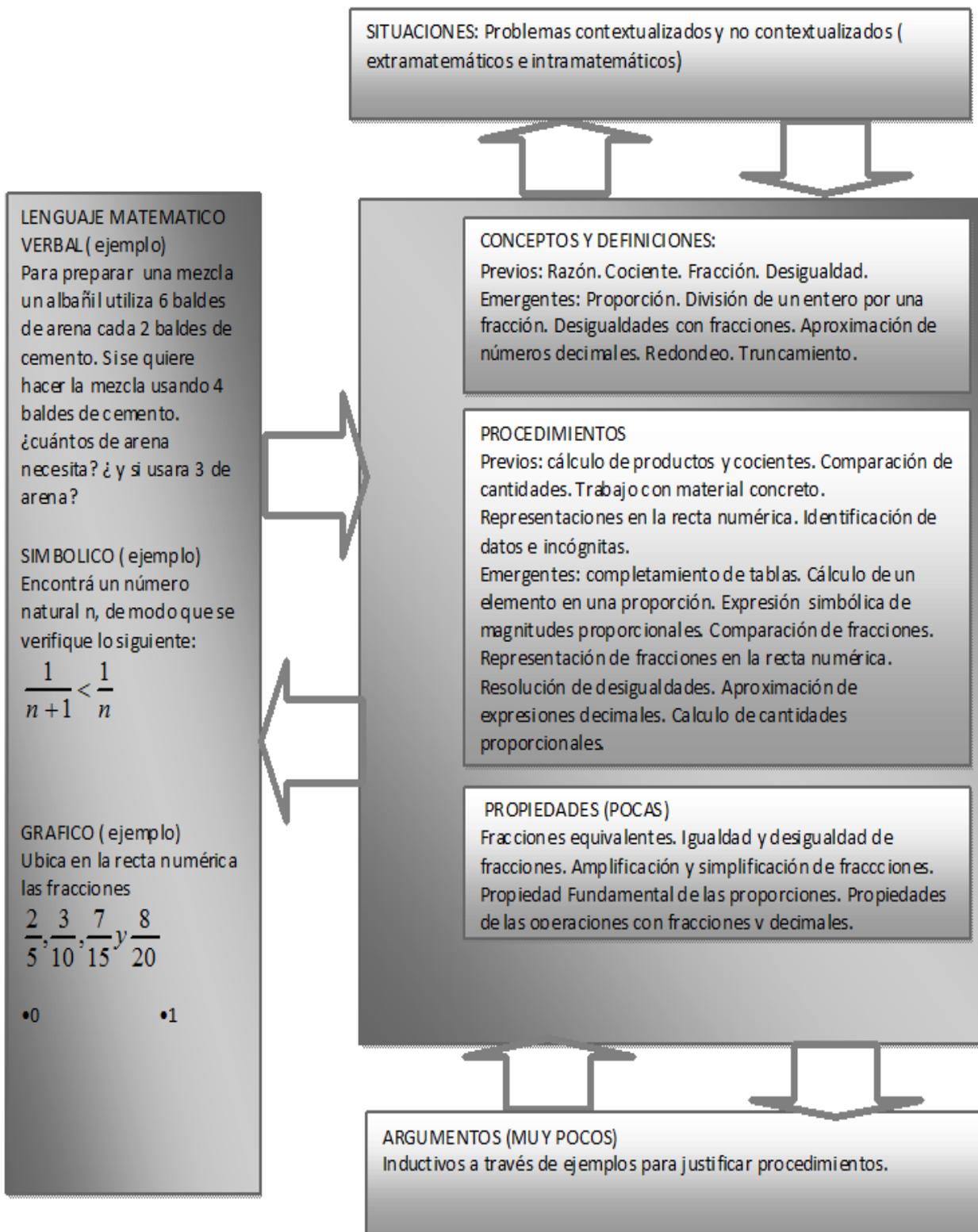


Figura 4: Configuración epistémica del Libro 1

LIBRO 1

Capítulo III Números racionales y reales

## Números racionales. Proporciones y comparación

**1. a.** Para preparar mezcla, un albañil utiliza 6 baldes de arena cada 2 baldes de cemento. Si quiere hacer la mezcla usando 4 baldes de cemento, ¿cuántos de arena necesita? ¿Y si usara 3 de arena?

.....

.....

**b.** Completá la tabla.

Baldes de cemento	2	8	5	13
Baldes de arena	6	60	7	

**c.** ¿Cuáles de estas fórmulas permiten determinar la cantidad de baldes de arena (A), conociendo la cantidad de baldes de cemento (C) que se usan, para obtener siempre la misma mezcla?

$6C = 2A$                        $2C = 6A$                        $C = \frac{2}{6}A$   
 $C = 3A$                            $C = \frac{1}{3}A$

**2. a.** Si se mezclan 2 vasos de jugo de limón concentrado con 5 vasos de agua, se obtiene un jugo para beber. ¿Será cierto que si se mezclan 5 vasos de jugo concentrado con 12 vasos y medio de agua se obtiene una bebida del mismo sabor? ¿Y si se mezclan 26 vasos de concentrado con 65 de agua?

.....

.....

**b.** Buscá diferentes combinaciones que den como resultado un jugo del mismo sabor que el que se obtiene con 2 vasos de jugo de limón y 5 vasos de agua.

.....

.....

**c.** Intentá encontrar una fórmula que permita determinar la cantidad de vasos de agua que contiene un jugo con el mismo sabor que el anterior, si se conoce la cantidad de vasos de jugo concentrado.

.....

.....

Figura 5: Ejemplo de actividades del Libro 1 extraído de Becerril et al (2008, p. 34)

### 5.4.2. Configuración epistémica del Libro 2

Aragón, M., Laurito, L., Net, G. y Trama, E. (2005). *Matemática 9 -Carpeta de actividades*. Buenos Aires: Editorial Estrada.

- *Situaciones problemas*. Se presentan situaciones contextualizadas para introducir los temas y para afianzarlos, las cuales implican interpretación de gráficos y problemas verbales donde se utilizan las fracciones para indicar una relación entre una parte y el total de una cantidad continua o discreta, para indicar la probabilidad de que ocurra un suceso o como operador de una cantidad (usos de las fracciones). En general las situaciones surgen de actividades de la vida cotidiana y muchas involucran representaciones gráficas geométricas. Las situaciones no contextualizadas (intra-matemáticas) aparecen en mayor proporción para trabajar todos los conceptos y fundamentalmente para integrar y/o profundizar los conceptos y / o propiedades.
- *Lenguaje*. Se utiliza lenguaje gráfico fundamentalmente para presentar el concepto de fracción y verbal para el enunciado de las situaciones, predominando el lenguaje simbólico para la solución de las mismas.
- *Conceptos*: Aparecen como previos y necesarios para interpretar las situaciones los conceptos de cociente, fracción, unidades de medida, porcentaje y operaciones numéricas en  $\mathbb{Z}$ , y como emergentes los conceptos de distintos usos de las fracciones, fracciones equivalentes, proporcionalidad, expresiones decimales, operaciones con fracciones y expresiones decimales y notación científica. Además, se presentan en muchas actividades el concepto de igualdades y desigualdades en  $\mathbb{Q}$ .
- *Propiedades*. Estas surgen de las situaciones o aparecen definidas para luego aplicarlas en actividades intra-matemáticas. Algunas son las propiedades de fracciones equivalentes, de la igualdad y desigualdad en  $\mathbb{Q}$ , orden en  $\mathbb{Q}$ , de las operaciones con números racionales.
- *Procedimientos*. Los que más se destacan, son: interpretación de gráficos y de enunciados, cálculos algorítmicos, ejemplificación, cálculo mental y con calculadora, escritura de expresiones simbólicas.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación que surgen son muy pocos y son específicamente inductivos a través de la fundamentación y justificación de procedimientos, de respuestas y de enunciados. Son argumentos inductivos en tanto se pretende que a partir de la observación de una propiedad definida o presente en una cierta cantidad de tareas, se generalice en la conclusión la propiedad observada y se la atribuye a

todos los miembros de esa misma clase. Esta generalización vale tanto para los casos observados, como para todas los de sus especies no observada.

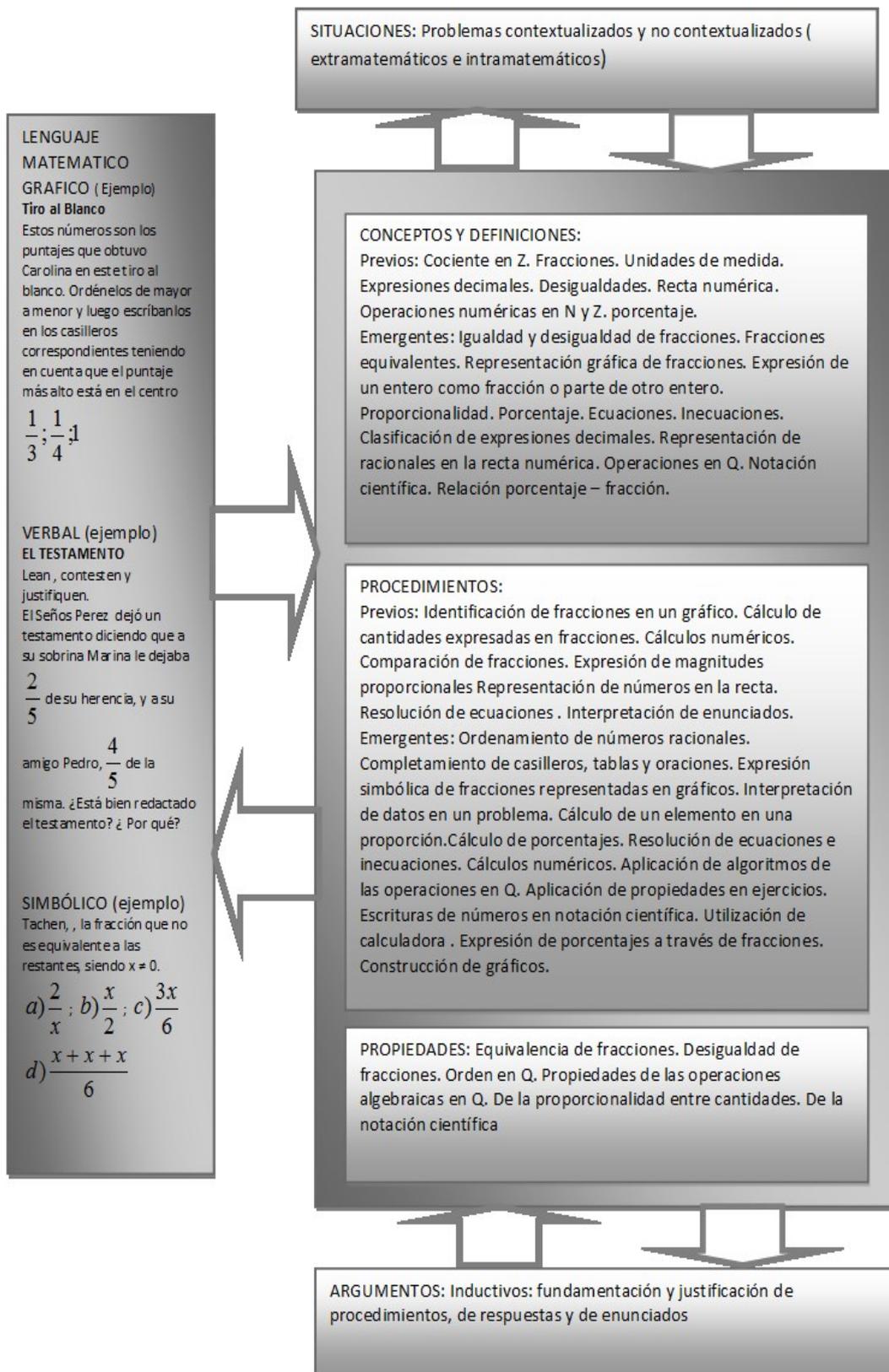


Figura 6: Configuración epistémica del Libro 2

LIBRO 2

Algunos números nos permiten contar, agregar y quitar; con otros, podemos "partir para repartir". Los primeros son los números naturales y enteros negativos, los otros, los fraccionarios.

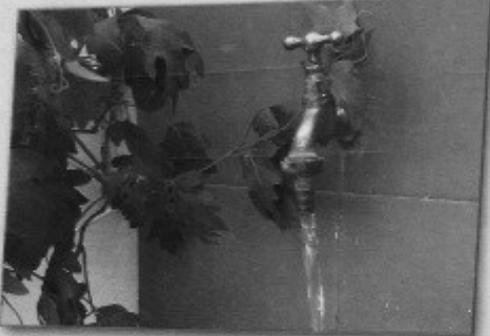
Los números fraccionarios y los números enteros forman el conjunto de los números racionales. En este capítulo, profundizaremos su estudio.

---

**3 ¡A CUIDAR EL AGUA!**

- Lean este cuadro sobre el consumo de agua y completen los espacios en blanco con la fracción irreducible correspondiente en cada caso:

Acciones	Consumo
Descarga de inodoro	20 litros
Ducha breve	80 litros
Baño de inmersión	150 litros
Lavado de un auto	500 litros



a) El consumo de agua en una descarga de inodoro es ..... del consumo en una ducha breve y ..... del de un lavado de un auto.

b) El consumo de agua de una ducha breve es ..... del de un baño de inmersión.

c) El consumo de agua de un baño de inmersión es ..... del de un lavado de un auto.

d) El consumo total entre una descarga de inodoro, una ducha breve y un baño de inmersión es ..... del de un lavado de un auto.

**4 EL TESTAMENTO**

- Lean, contesten y justifiquen:

El señor Pérez dejó un testamento diciendo que a su sobrina Marina le dejaba  $\frac{2}{5}$  de su herencia, y a su amigo Pedro,  $\frac{4}{5}$  de la misma.

¿Está bien redactado el testamento? ¿Por qué?

---

**5 ARTESANÍAS MATEMÁTICAS**



Para fabricar velas, las materias primas más comunes son la parafina y la estearina. Se aconseja usar una parte de estearina por cada 9 de parafina.

a) Si compran 2,7 kg de parafina, ¿cuánto comprarían de estearina?

b) ¿Qué porcentaje de cada material se aconseja usar para fabricar velas?

© Ángel Estrada y Cia. S. A. - Prohibido la fotocopia. Ley 11.723

NÚMEROS RACIONALES 21

Figura 7: Ejemplo de actividades del Libro 2 extraído de Aragón et al (2005, p. 21)

### 5.4.3. Configuración epistémica del Libro 3

López, A. y Pellet, C. (2005). *Matemática en red – 8° EGB*. Buenos Aires: AZ editora.

- *Situaciones problemas*. Se presentan situaciones contextualizadas para introducir el tema vinculando el concepto de fracción con el de proporción. La mayoría de las actividades se vinculan con la vida cotidiana del hogar (como la preparación de recetas de cocina). Aparecen además para afianzar el tema actividades llamadas “desafíos” donde se deben poner en juego muchos conceptos y/o propiedades, con usos de distintos lenguajes. Las situaciones en su mayoría vienen acompañadas de imágenes alusivas.
- *Lenguaje*. Se utiliza indistintamente y casi en la misma proporción el lenguaje gráfico, verbal y simbólico.
- *Conceptos*: Aparecen como conceptos previos: los números naturales, fracción, magnitudes, y unidades. Como conceptos emergentes, los referidos a distintos usos de las fracciones, fracciones equivalentes, proporcionalidad, expresiones decimales, operaciones con fracciones y expresiones decimales, ecuaciones y notación científica.
- *Propiedades*. Aparecen muchas propiedades para ser aplicadas en actividades intramatemáticas. Las más destacadas son las propiedades de fracciones equivalentes, orden en  $Q$ , de las operaciones con números racionales.
- *Procedimientos*. Los que más se destacan, son: interpretación de gráficos y de enunciados, cálculos algorítmicos, ejemplificación, cálculo mental y con calculadora, escritura de expresiones simbólicas. Además, en las actividades llamadas “desafíos” se solicita escribir en forma simbólica, verbal y gráfica las conclusiones.
- *Argumentos*. Hay varias situaciones donde aparecen procesos de argumentación y validación, los cuales en su gran mayoría son inductivos, en el sentido de fundamentar o justificar haciendo uso de procedimientos, de respuestas obtenidas o del mismo enunciado de la actividad. Aparecen actividades donde deben justificar la verdad o falsedad de los enunciados, y otras donde deben justificar los errores que encuentran en procedimientos realizados por otros resolutores.

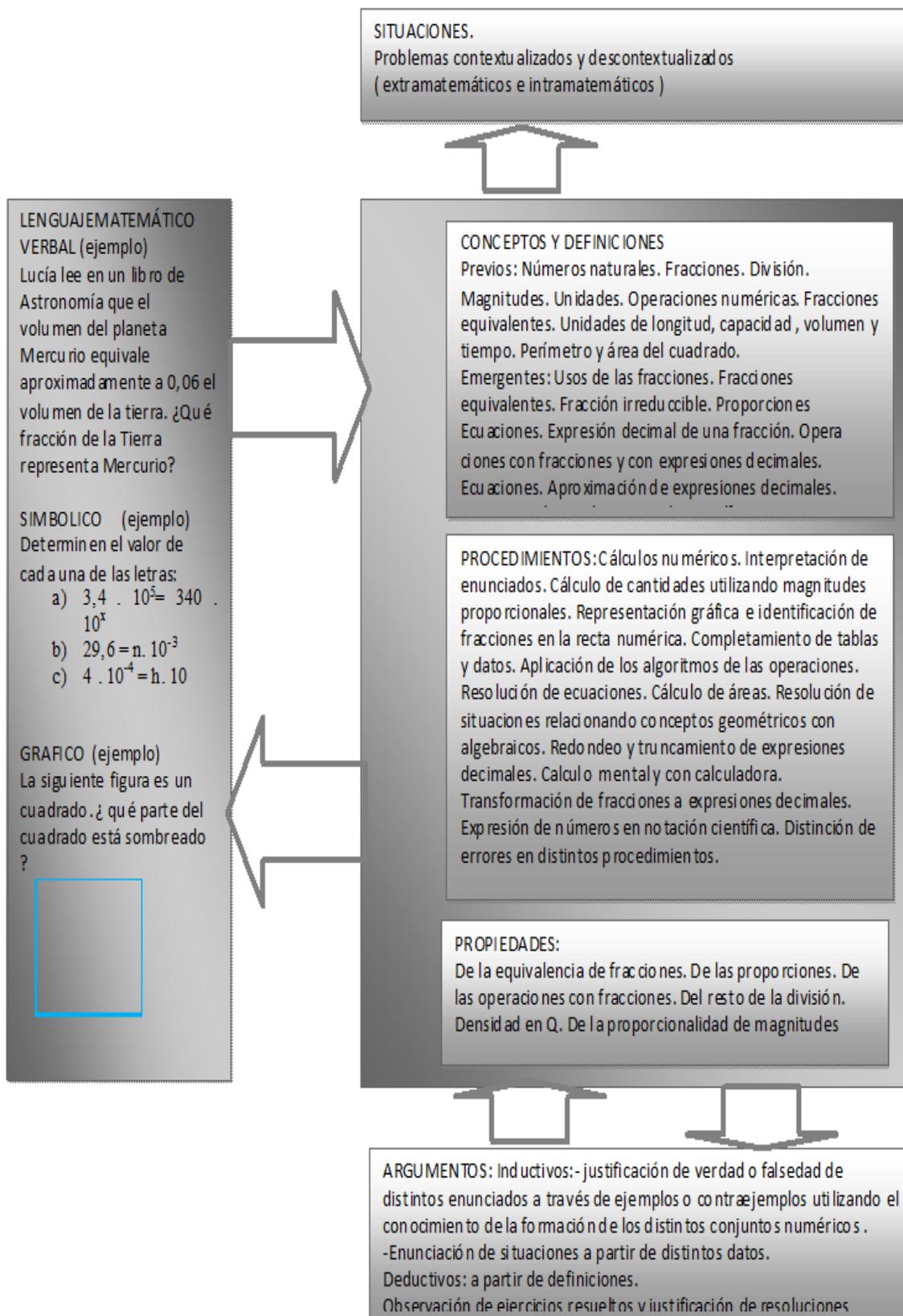


Figura 8: Configuración epistémica del Libro 3



## A corregir

LIBRO 3

A corregir

Alumnos de octavo resolvieron estos ejercicios. Corríjanlos en sus carpetas indicando todos los errores que encuentren.

1) Entre las siguientes operaciones hay dos que dan el mismo resultado. Marquen la respuesta correcta.

$A = -\frac{12}{(8-2)}$ 
 $B = \frac{(2-3)}{(4-6)}$ 
 $C = \frac{(12-15)}{(-8+2)}$

$D = -1 - 0,5$ 
 $E = -2 \cdot (\frac{1}{2} - 3)$

a) C y D    b) A y D    c) E y A     d) Ninguna de las opciones.

2) ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a)  $\sqrt{a^2} = a$

b) La suma de dos números periódicos siempre da otro número periódico.

c) La multiplicación entre números racionales es distributiva con la suma y la resta.

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

3) ¿Cuál es el resultado del siguiente cálculo?  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{6})^{-1} : (1 + 0,5) =$

a) 1                      b)  $\frac{9}{4}$

c) -1                      d) Ninguna de las respuestas anteriores.

4) Ramiro y Alejandro fueron de vacaciones como mochileros. Recorrieron  $\frac{1}{8}$  del camino durante el primer día. Al segundo día los recogió una camioneta que les permitió avanzar 540 km. En los dos días siguientes, caminaron 10 horas por día a razón de 2,5 km por hora. Si aún les falta recorrer  $\frac{1}{24}$  del camino, ¿a cuántos kilómetros de sus casas está el lugar donde veranearon?

*Respuesta: Se encuentra a 732 km de sus casas.*

101

Figura 9: Ejemplo de actividades del Libro 3 extraído de López y Pellet (2003, p. 101)

#### 5.4 4. Configuración epistémica del Libro 4

Martinez M., Rodriguez M.(2004). *Matemática. M. E.* Buenos Aires: Ediciones Mc Graw Hill Interamericana.

- *Situaciones problemas.* Se presentan algunas situaciones contextualizadas para introducir el tema, como por ejemplo: fracción como parte de una cantidad discreta o continúa. En general, las situaciones son no contextualizadas e intra-matemáticas.
- *Lenguaje.* Se utiliza fundamentalmente el lenguaje simbólico y verbal, y en muy pocas actividades aparece el lenguaje gráfico.
- *Conceptos:* Aparecen como conceptos previos: los números enteros y sus operaciones y fracción. Como conceptos emergentes se presentan los relacionados con fracciones equivalentes, expresiones decimales, operaciones con fracciones y expresiones decimales y notación científica.
- *Propiedades:* Las propiedades aparecen para ser aplicadas en actividades intra-matemáticas. Algunas de ellas aluden a las propiedades del orden en  $Q$ , y de las operaciones con números racionales.
- *Procedimientos.* Los que más se destacan son cálculos algorítmicos, ejemplificación, cálculo mental y con calculadora, escritura de expresiones simbólicas, interpretación de enunciados.
- *Argumentos.* Los procesos de argumentación no aparecen en las actividades ni son solicitados.

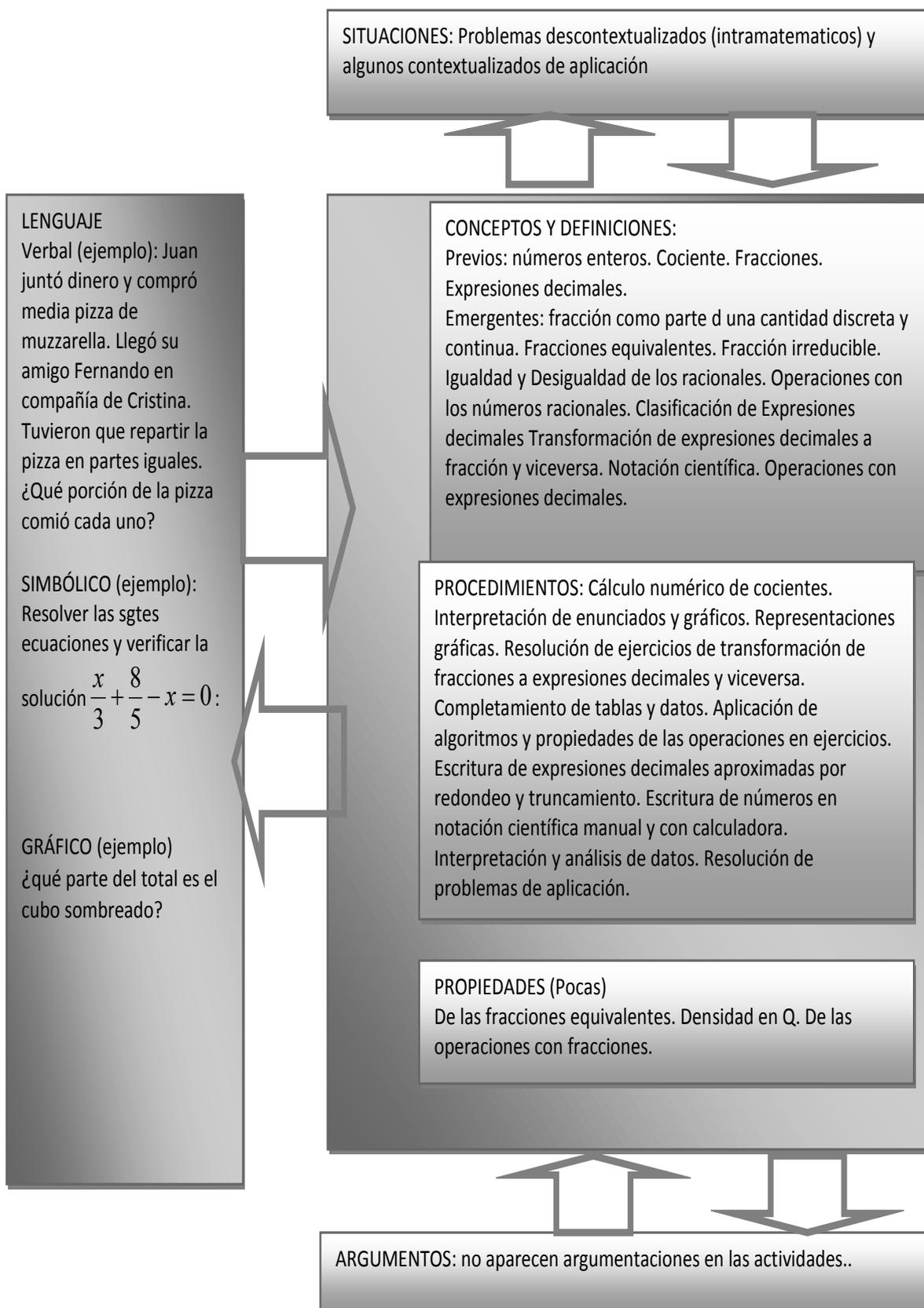


Figura 10: Configuración epistémica del Libro 4

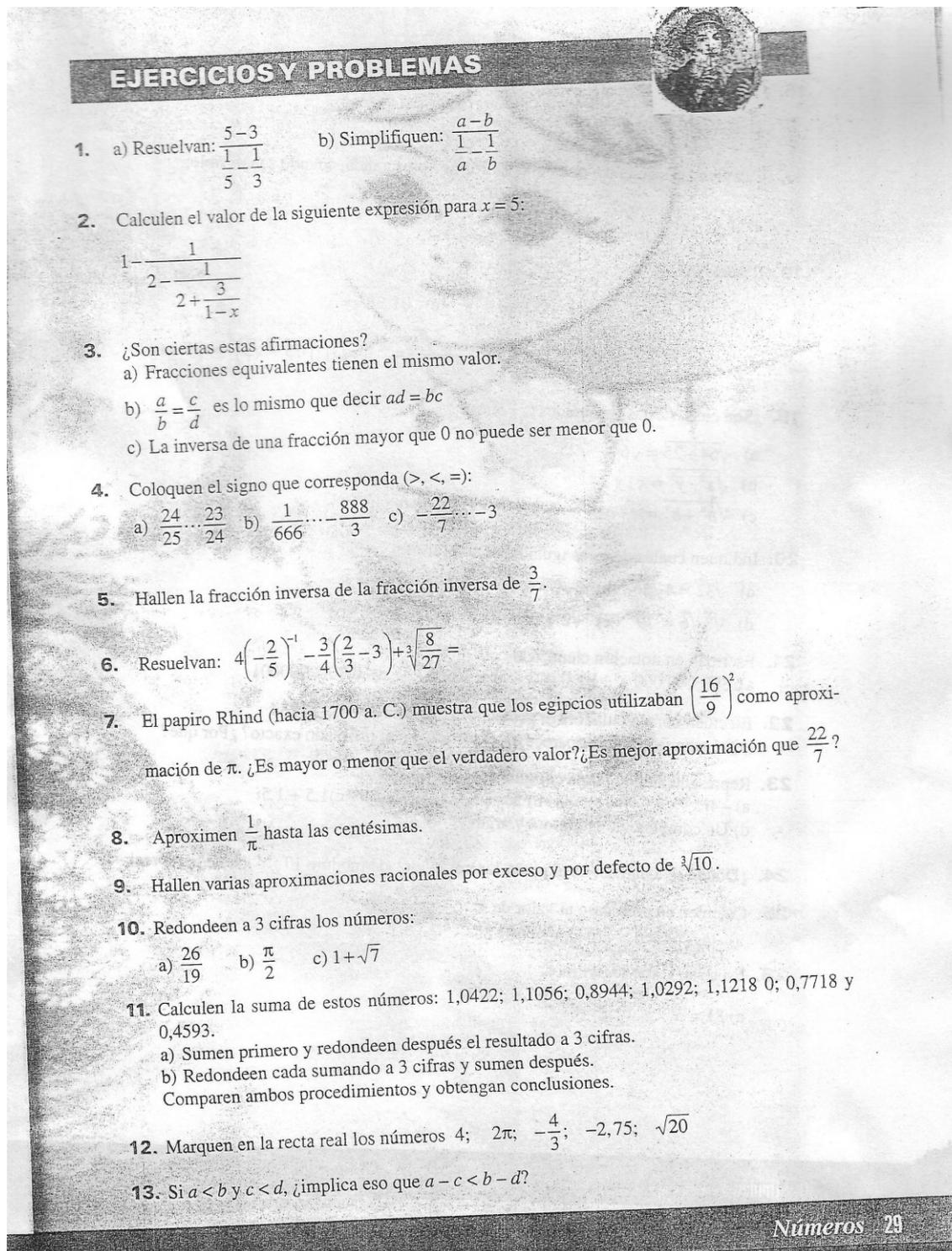


Figura 11: Ejemplo de actividades del Libro 4 extraído de Martínez, Rodríguez. (2004), pag.29).

### 5.4.5. Configuración epistémica del Libro 5

Berman A., Dacunti, D., Pérez, M., Veltri, A. y Moledo, L. (2007). *Matemática II*. Buenos Aires: Ediciones Santillana.

- *Situaciones problemas*. Se presentan situaciones contextualizadas para introducir los conceptos a través de figuras geométricas y de problemas extra matemáticos que expresan la relación entre las fracciones y las proporciones, las fracciones y los segmentos y las expresiones decimales y el porcentaje. En general las situaciones surgen de actividades cotidianas y algunas relacionadas con la Geometría. En las situaciones no contextualizadas (entra-matemáticas) aparece mucho la utilización de gráficos y se utilizan fundamentalmente para trabajar la desigualdad y las operaciones con números racionales.
- *Lenguaje*. Se utiliza lenguaje gráfico para presentar el concepto de fracción y el orden en  $Q$ , y lenguaje verbal para el enunciado de las situaciones. Predomina el lenguaje simbólico para las operaciones en  $Q$  y para actividades de revisión.
- *Conceptos*: Aparecen como conceptos previos la noción de fracción, proporción, segmento, expresiones decimales y operaciones algebraicas en  $Z$ .

Como conceptos emergentes la relación entre fracciones y proporciones, relación entre fracciones y segmentos, y expresiones decimales y porcentaje. Además los conceptos de igualdad y desigualdad de fracciones, clasificación de expresiones decimales, aproximación, operaciones con fracciones y expresiones decimales y notación científica.

- *Propiedades*. Estas surgen de las situaciones pero no aparecen en formas específicas o definidas. Algunas son propiedades de las figuras geométricas (cuadriláteros), de la equivalencia de fracciones, de las proporciones, de orden en  $Q$ , de las operaciones en  $Q$ .
- *Procedimientos*. Predomina la interpretación de gráficos y de enunciados, identificación de propiedades, análisis de gráficos y expresiones simbólicas cálculos algorítmicos manuales y con calculadora, escritura de expresiones en notación científica.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación prácticamente no existen, sólo en algunos casos se solicita la justificación de la resolución para lo cual hay que recurrir a la validez del procedimiento utilizado.

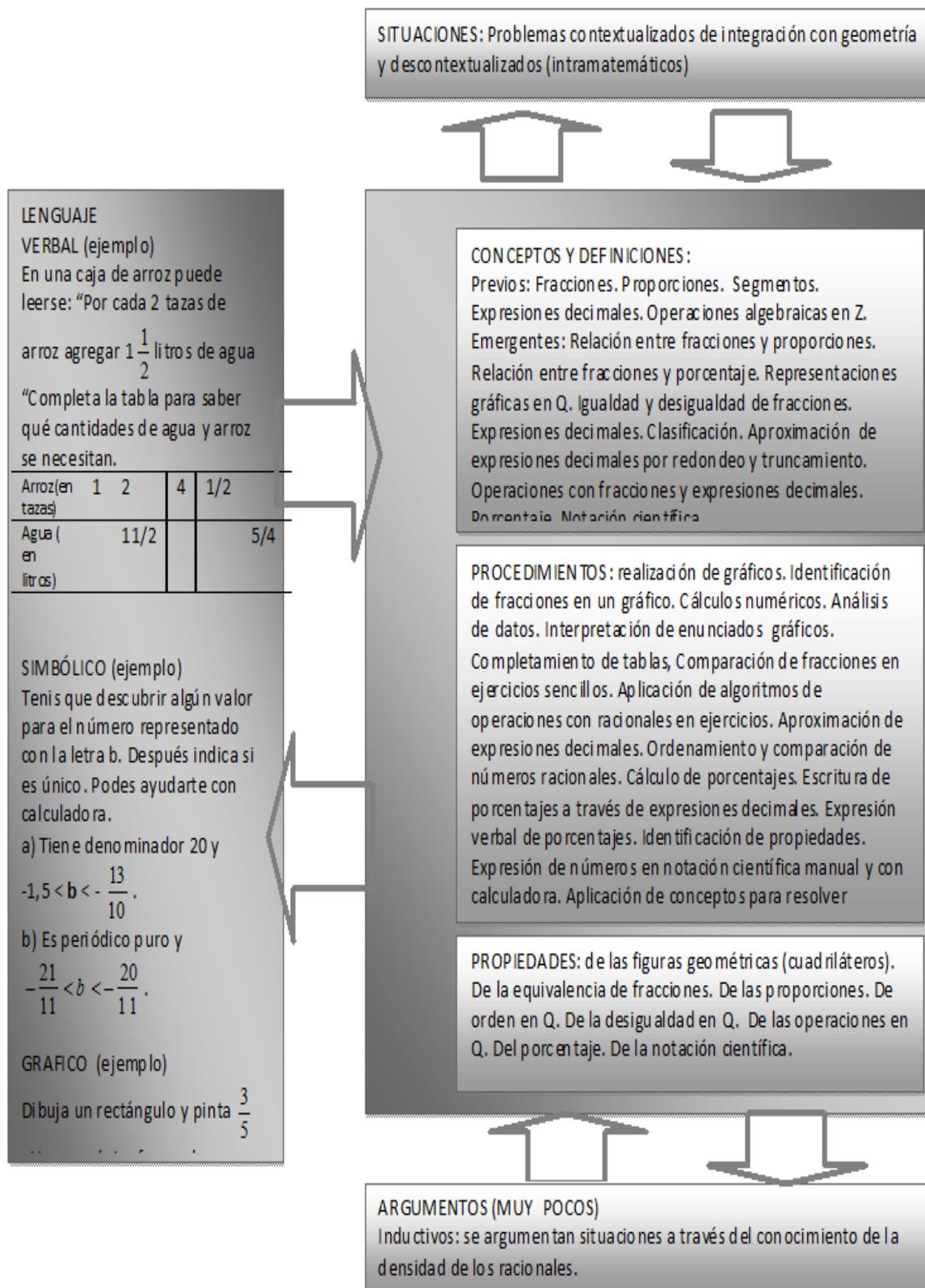


Figura 12: Configuración epistémica del Libro 5

LIBRO 5

## Problemas para repasar

1. Esta tira mide  $\frac{2}{3}$  de cierta unidad. Dibujá otra tira que mida  $\frac{5}{6}$  de esa misma unidad.



2. ¿Qué parte del rectángulo está pintada de rojo? ¿Y de verde?



3. Por cada cinco alumnos de una clase que fueron a un viaje de estudios, dos son varones. ¿Qué parte de la clase son varones?

4. Para preparar un color verde intenso se mezclan 12 latas de azul con 9 latas de amarillo. Si se quiere preparar pintura conservando esa tonalidad usando 15 latas de azul, ¿cuántas latas de amarillo serán necesarias? ¿Y si se quiere usar 10 latas de amarillo, qué cantidad de azul debe agregarse a la mezcla?

5. Indicá si la expresión decimal de cada fracción es finita o periódica. Si es finita, explicá cómo podés saber la cantidad de dígitos que tiene después de la coma sin hacer la división entre el numerador y el denominador.

a)  $\frac{7}{160}$  \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

b)  $\frac{11}{30}$  \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

6. De los números que figuran en el recuadro, escribí la expresión decimal de cada fracción.

$-2,025$	$-\frac{17}{9}$	$-0,00107$
$\frac{43}{900}$	$-0,105$	$\frac{13}{90}$

7. Cuando sea posible, escribí una fracción equivalente cuyo denominador sea una potencia de 10.

a)  $-\frac{14}{20}$       c)  $\frac{18}{30}$       e)  $\frac{4}{11}$   
 b)  $-\frac{78}{150}$       d)  $-\frac{14}{900}$       f)  $-\frac{8}{1500}$

8. Simplificá cada fracción y, sin hacer la división entre el numerador y el denominador, anticipá si tiene una expresión decimal finita o periódica. En caso de que sea finita, anticipá también cuántas cifras decimales tiene. Mostrá cómo te das cuenta.

a)  $\frac{36}{32}$       b)  $\frac{16}{120}$       c)  $\frac{14}{180}$       d)  $\frac{38}{900}$

9. a) Representá en la recta numérica los números

$-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{5}{12}, \frac{5}{6}$



b) Ordená de menor a mayor los números  $-4,35$ ;  $-4,\bar{3}$ ;  $-4,3\bar{3}$ ;  $-4,34$ ;  $-4,355$ .

\_\_\_\_\_ < \_\_\_\_\_ < \_\_\_\_\_ < \_\_\_\_\_ < \_\_\_\_\_

10. a) Escribí un número racional finito que esté comprendido entre  $-3,56$  y  $-2,9$ .  
 b) Escribí un número racional periódico puro que esté entre  $3,45$  y  $3,56$ .

37

© Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723  
 © Santillana S.A. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Figura 13: Ejemplo de actividades del Libro 5 extraído de Berman et al (2007, p. 37)

#### 5.4.6. Configuración epistémica del Libro 6

Aristegui, R., Graciani, A., Mancini, G., Ríos, L. y Sobico, C. (2009). *Matemática 8 - Estadística y probabilidad*. Buenos Aires.:Puerto de Palos.

- *Situaciones problemas*. Se presentan situaciones contextualizadas para introducir los conceptos, con un predominio muy importante de expresiones gráficas, ya sea geométrica o estadística. En las situaciones no contextualizadas (entra-matemáticas) aparece también la utilización de gráficos o imágenes de apoyo a las consignas.
- *Lenguaje*. Es uno de los textos en los que predomina el lenguaje gráfico, ya sea para plantear como para resolver las situaciones problemas. Asimismo, se presenta el lenguaje verbal y simbólico.
- *Conceptos*: Aparecen como previos los conceptos de cociente, fracciones, áreas de figuras y operaciones algebraicas en  $Z$ .

Como emergentes los conceptos de fracciones equivalentes, porcentaje, desigualdad de fracciones, expresiones decimales, clasificación, operaciones algebraicas con fracciones y expresiones decimales, y notación científica.

- *Propiedades*. Estas surgen de las situaciones pero no aparecen definidas explícitamente. Algunas son: de la equivalencia de fracciones, de orden en los racionales, de las operaciones con racionales (en particular del cociente y resto de la división).
- *Procedimientos*. Predomina puntualmente la lectura, interpretación, análisis y construcción de gráficos. Además interpretación de enunciados y expresiones simbólicas cálculos algorítmicos, manual y con calculadora, escritura de expresiones en notación científica.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación son inductivos, mediante de la justificación de los procedimientos hechos por el resolutor o por otros resolutores a través del conocimiento de los conceptos y/o las propiedades.

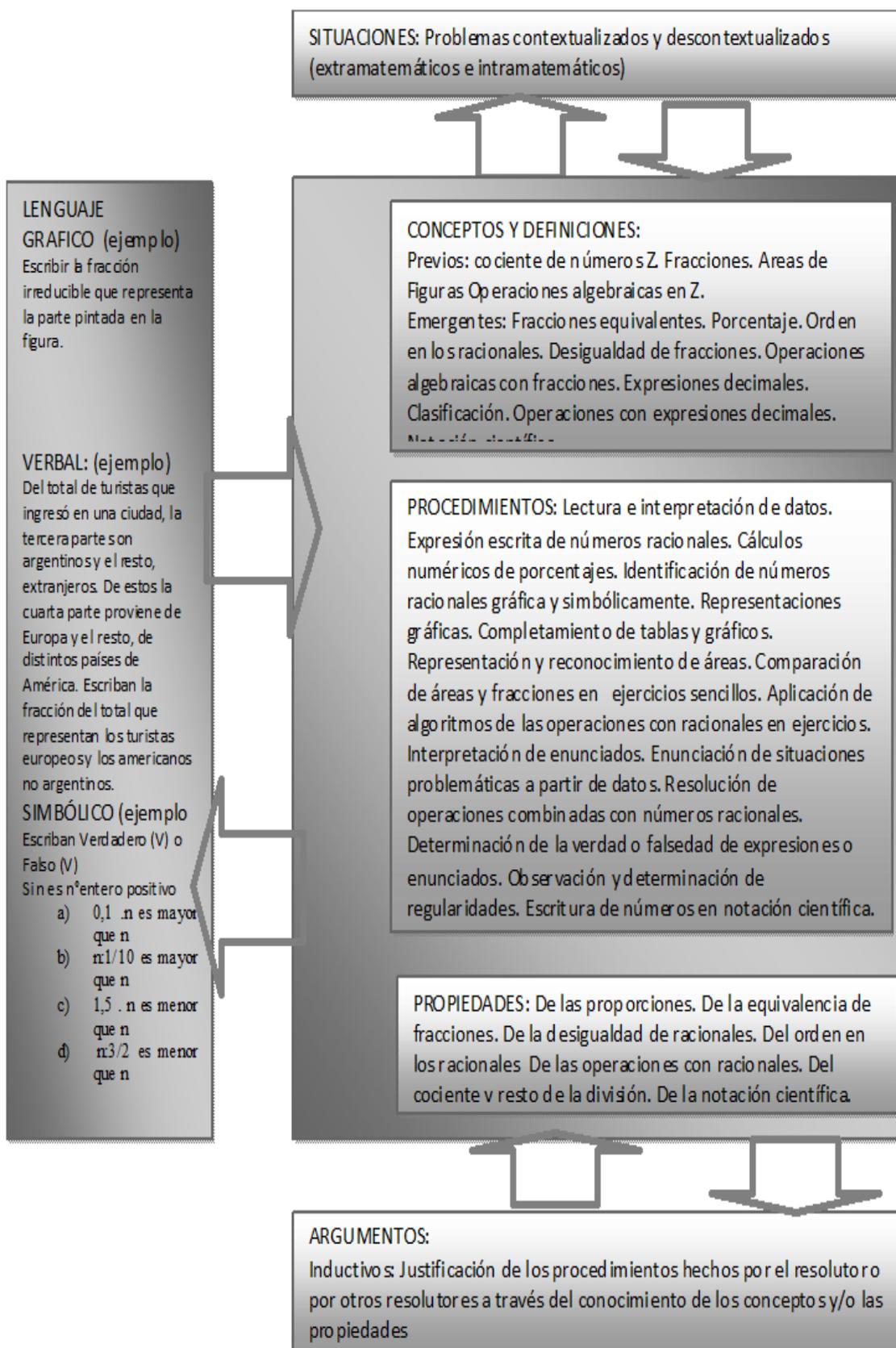


Figura 14: Configuración epistémica del Libro 6

**ACTIVIDADES**

12.1. Completen la tabla.

	a	b	c	EL PRODUCTO ENTRE a y b	EL PRODUCTO ENTRE b Y EL INVERSO DE c	EL COCIENTE ENTRE a y b	EL COCIENTE ENTRE a Y EL INVERSO DE c
a)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	-3				
b)	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{2}$				
c)	-2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$				

12.2. Escriban en cada caso el enunciado de una situación que se pueda resolver a través del cálculo indicado.

a) Cálculo:  $4 \cdot \frac{1}{3} =$  Situación: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

b) Cálculo:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} =$  Situación: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c) Cálculo:  $3 : \frac{1}{2} =$  Situación: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

12.3. Resuelvan sin escribir el cálculo.

a)  $\frac{7}{2} \cdot 3 =$       c)  $8 : \frac{1}{2} =$       e)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} =$       g)  $4 : \frac{1}{15} =$       i)  $\frac{10}{2} : 2 =$   
 b)  $\frac{1}{4} \cdot 2 =$       d)  $\frac{1}{9} : \frac{1}{9} =$       f)  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} =$       h)  $2 \cdot \frac{1}{3} =$       j)  $-\frac{1}{5} : -\frac{1}{5} =$

12.4. Resuelvan mentalmente.

Del total de turistas que ingresó en una ciudad, la tercera parte son argentinos y el resto, extranjeros. De éstos, la cuarta parte proviene de Europa y el resto, de distintos países de América.

Escriban la fracción del total que representan los turistas europeos y los americanos no argentinos.

*Europa  $\frac{1}{6}$       americanos no Arg  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$*

*Resto*

$\frac{2}{3}$	$\cdot \frac{1}{4}$	$= \frac{2}{12}$	$= \frac{1}{6}$
$\frac{2}{3}$	$\cdot \frac{3}{4}$	$= \frac{2}{4}$	$= \frac{1}{2}$

12.5. Completen la tabla con la cantidad de botellas que se necesitan para envasar la producción de la primera columna.

	TOTAL DE LITROS	CANTIDAD DE BOTELLAS DE $\frac{1}{2}$ l	CANTIDAD DE BOTELLAS DE $2\frac{1}{4}$ l	CANTIDAD DE BOTELLAS DE $\frac{3}{4}$ l
a)	900			
b)	450			

FRACCIONES Y EXPRESIONES DECIMALES 43

Figura 15: Ejemplo de actividades del Libro 6 extraído de Aristegui et al (2009, p. 43)

#### **5.4.7. Configuración epistémica del Libro 7**

Chorny, F. (2009). *Matemática 2 y 3 - Nuevos horizontes + selección ¿Matemática estas ahí?* Buenos Aires: Ediciones SM.

- *Situaciones problemas.* Se presentan muy pocas situaciones contextualizadas, específicamente para introducir el concepto de fracción. Predominan situaciones intramatemáticas con el propósito de introducir los conceptos.
- *Lenguaje.* Predomina el lenguaje verbal y simbólico. Muy pocas situaciones involucran el lenguaje gráfico.
- *Conceptos:* Aparecen como conceptos previos: números naturales, operaciones en  $\mathbb{N}$  y fracciones. Como emergentes fracciones equivalentes, operaciones con fracciones, ecuaciones, expresiones decimales y operaciones.
- *Propiedades.* Aparecen algunas propiedades para ser aplicadas en actividades intramatemáticas. Algunas son las propiedades de fracciones equivalentes, orden en  $\mathbb{Q}$ , de las operaciones con números racionales.
- *Procedimientos.* Los que más se destacan son: interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos, escritura de expresiones simbólicas.
- *Argumentos.* Los procesos de argumentación que surgen son muy pocos y son específicamente inductivos a través de la fundamentación y justificación de procedimientos y de respuestas logradas en la resolución de la actividad.

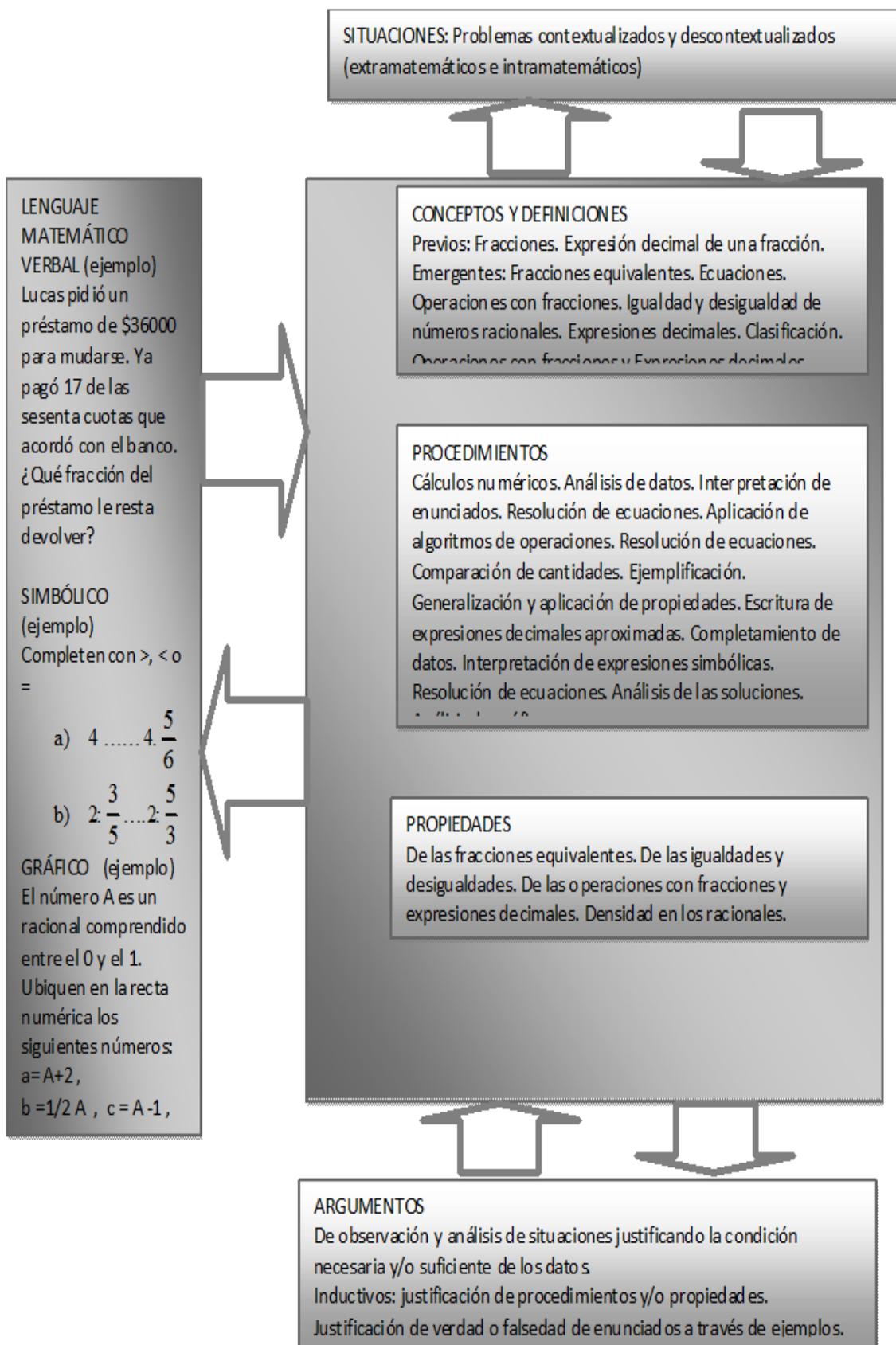
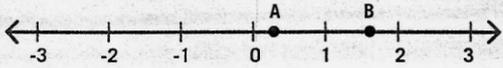


Figura 16: Configuración epistémica del Libro 7

**51.** Los números A y B son racionales. Ubiquen en la recta numérica los siguientes números:  
 $a = A - 3$      $b = A + B$      $c = \frac{1}{2}(A + B)$   
 $d = B - A$      $e = A - B$      $f = -2(B - A)$



**52.** Realicen los siguientes cálculos.

a)  $4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) - 22 : \left[\frac{11}{3}\right]^2 =$

---

b)  $\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + 1}\right) =$

---

c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

---

d)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 =$

---

**53.** Si  $A = \frac{2}{3}$  y  $B = \frac{1}{2}$ , calculen:

a)  $(A + B)^3 =$  \_\_\_\_\_

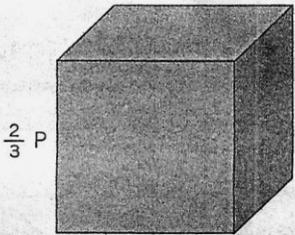
b)  $3A^4 B^5 =$  \_\_\_\_\_

c)  $(AB)^6 =$  \_\_\_\_\_

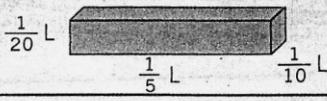
a)  $(A : B)^3 =$  \_\_\_\_\_

**54.** Patricio decidió medir algunos objetos con una unidad inventada por él, a la que denominó P. Si un cubo tiene como lado  $\frac{2}{3}$ , ¿cuál es el área total del cubo?

(antes de hacer las cuentas, piensen cuál será la unidad de área, en el sistema de Patricio).



**55.** En una caja cúbica cuyas aristas miden L, se quiere guardar una cantidad de cajas más pequeñas cuyas medidas son  $\frac{1}{5}$  L de largo,  $\frac{1}{10}$  L de ancho y  $\frac{1}{20}$  L de alto. ¿Cuántas cajas pueden guardarse? Resuelvan el problema de dos formas diferentes.



**56.** Realicen los siguientes cálculos.

a)  $\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)^2\right]^2 =$  \_\_\_\_\_

b)  $\left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^2\right]^2 =$  \_\_\_\_\_

**57.** Efectúen el cálculo realizando una única potenciación. Para ello, utilicen las propiedades que consideren convenientes:

$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot 5^{11}\right]^2 =$

---

Figura 17: Ejemplo de actividades del Libro 7 extraído de Chorny (2009, p. 18)

#### **5.4.8. Configuración epistémica del Libro 8**

Alvarez C., Alvarez, F., Garrido, L., Martinez, S. y Ruiz A. (2004). *Matemática 8*. Buenos Aires: Ediciones Vicens Vives S. A.

- *Situaciones problemas*. Se introduce el tema a través de ejemplificaciones. Por ej.: fracciones de una cantidad discreta, de una cantidad continua y de fracciones equivalentes. Se presentan algunas (muy pocas) situaciones contextualizadas y al final de cada tema, específicamente para afianzar los conceptos o para integrar contenido. Predominan en todo el texto las situaciones intra-matemáticas para introducir un concepto.
- *Lenguaje*. Predomina el lenguaje simbólico y verbal. Algunas situaciones involucran el lenguaje gráfico, sobre todo para representar distintas cantidades expresadas por fracciones.
- *Conceptos*: Aparecen como conceptos previos: números enteros, cociente, operaciones con números enteros. Como emergentes: fracciones, clasificación, números mixtos, fracciones equivalentes, operaciones con fracciones, comparación de fracciones, ecuaciones, expresiones decimales de fracciones.
- *Propiedades*. Aparecen algunas propiedades para ser aplicadas en actividades intra-matemáticas pero de manera implícita, y no desarrolladas. Algunas son las propiedades de fracciones equivalentes, orden en  $Q$ , y de las operaciones con números racionales.
- *Procedimientos*. Los que más se destacan, son, cálculos algorítmicos, escritura de expresiones simbólicas, interpretación de algunos gráficos, interpretación de enunciados simples que implican situaciones que involucran fracciones.
- *Argumentos*. Las actividades no involucran ningún tipo de argumentación ni justificación.

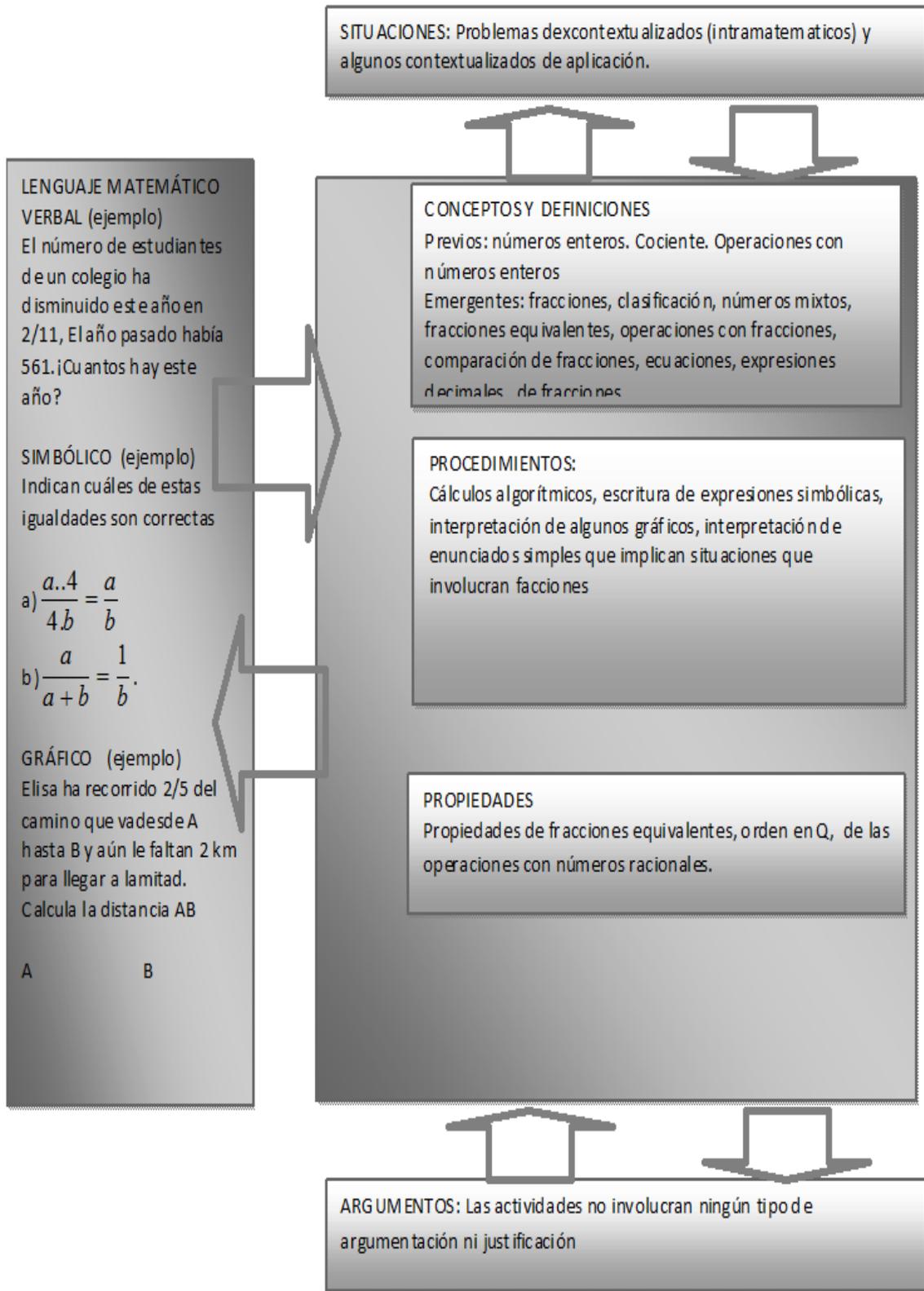


Figura 18: Configuración epistémica del Libro 8

**ACTIVIDADES**

**11** Calcula:

a)  $\frac{3}{5}$  de 250 m<sup>2</sup>  
 b)  $\frac{6}{7}$  de 80 l  
 c)  $\frac{15}{10}$  de 160 seg  
 d)  $\frac{2}{3}$  de 25 km

**12** Completa:

a) 3/5 kg = ..... g  
 b) 7/20 hl = ..... l  
 c) 2/3 año = ..... trimestres

**13** Escribe en forma de fracción irreducible:

a) 8 cm =  $\frac{\square}{\square}$  m                      b) 200 min =  $\frac{\square}{\square}$  h  
 c) 4 horas =  $\frac{\square}{\square}$  día                      d) 125 g =  $\frac{\square}{\square}$  t

**14** Completa:

a)  $\frac{2}{9}$  de  $\frac{3}{4}$  de 360° = ...  
 b)  $\frac{6}{5}$  de  $\frac{5}{6}$  de 24 = ...

**15** Completa:

a)  $\frac{5}{6}$  de  $\frac{3}{4}$                       b)  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{5}{6}$   
 c)  $\frac{2}{5}$  de los  $\frac{3}{7}$  de 35 000 \$

**16** Escribe en forma de fracción decimal y en forma de fracción irreducible:

a) 0,6                      b) 2,5                      c) 6,12                      d) 0,0032

**17** Indica tres fracciones comprendidas entre:

a) 2,36 y 2,38                      b) 3,46 y 3,47

**18** Calcula:

a)  $\frac{13}{28} + \frac{16}{42}$                       b)  $\frac{12}{225} - \frac{13}{15}$                       c)  $\frac{3}{80} + \frac{7}{20}$

Passa a decimal cada una de las fracciones anteriores, súmalas en forma decimal y confirma los resultados.

**19** Calcula:

a)  $-\frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6}$                       b)  $\frac{2}{21} - \frac{3}{28} + \frac{5}{12}$   
 c)  $\frac{8}{21} - \frac{5}{6} + \frac{13}{18} - \frac{11}{42}$                       d)  $\frac{8}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5}$

**20** Números mixtos. Completa:

$\frac{9}{2}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{74}{15}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{64}{12}$
$2 \frac{23}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$4 \frac{825}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$

**21** Reproduce y completa: (Todas las líneas suman lo mismo)

**22** La magia de las fracciones. Comprueba las igualdades y forma la fracción siguiente:

$$\frac{1}{11-2} = \frac{12}{111-3} = \frac{123}{1111-4} = \frac{1234}{11111-5} = \dots$$

**23** Cuadrado mágico. Las casillas de cada línea –horizontal, vertical y diagonal– suman lo mismo. Reproduce el cuadrado y complétalo.

$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{\square}{\square}$
$\frac{\square}{\square}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\square}{\square}$
$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{3}{10}$

**50** | Unidad 3

Figura 19: Ejemplo de actividades del Libro 8 extraído de Álvarez (2004, p. 50)

### 5.5. Idoneidad didáctica de las unidades analizadas en los textos escolares

---

La idoneidad didáctica es el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados (Godino, Batanero y Font, 2006; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

Para ello se utilizan seis criterios parciales de idoneidad: *epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (significados personales), *mediacional* (recursos tecnológicos y temporales), *emocional* (actitudes, afectos, emociones), *interaccional* (interacciones docente – discentes), y *ecológica* (relaciones intra e interdisciplinares y sociales). Cada una de estas idoneidades se valora cualitativamente como de baja, media o alta idoneidad. Describimos muy sintéticamente cada una de ellas:

*Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos (textos) y/o implementados (clases), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la propuesta de los textos con respecto a los números racionales puede limitarse al aprendizaje de ejercicios de aplicación algoritmos (Baja idoneidad), o presentar diferentes tipos de situaciones contextualizadas donde se incluyan la justificación o argumentación de los algoritmos (Alta idoneidad).

*Idoneidad cognitiva* : se refiere al grado de proximidad de los significados pretendidos y/o implementados respecto de aquellos que son personales iniciales de los estudiantes (previos) o, dicho de otra forma la medida en que el “material de aprendizaje” esté en la zona de desarrollo potencial (Vygotsky, 1934) de los alumnos y alumnas. Por ejemplo: un texto que realizara un test o evaluación inicial para saber si los alumnos dominan los conceptos previos al concepto de fracción, sería de un alto grado de idoneidad cognitiva.

*Idoneidad mediacional*: se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo: un texto que propusiera situaciones pertinentes al estudio de los números racionales a través de un software, página web, calculadora, etc., el proceso de estudio tendría mayor idoneidad mediacional que otro que esté basado exclusivamente en el lápiz y papel.

*Idoneidad emocional*: se refiere al grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio. Por ejemplo, podríamos decir que tendrán una

idoneidad emocional alta los textos que trabajen procesos basados en el uso de situaciones contextualizadas con números racionales que sean de interés para los estudiantes.

*Idoneidad interaccional:* Si bien no se puede observar exhaustivamente en los textos, esta idoneidad se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Por ejemplo: un texto que propone actividades a realizar en forma cooperativa o actividades que impliquen el análisis de lo que realizó otro resolutor, tendrá una idoneidad interaccional alta.

*Idoneidad ecológica:* Se refiere al grado de adaptación curricular, y conexiones intra e interdisciplinarias. Por ejemplo: un texto en donde los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares o se relacionen con otros contenidos intra e interdisciplinarios, tendrá idoneidad ecológica alta.

Luego, la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje se concibe como la articulación coherente de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

Teniendo en cuenta los indicadores dados por Godino para determinar si los tipos de cada una de estas idoneidades es baja, media o alta, se valora cualitativamente tomando como referencia la configuración epistémica elaborada a partir del significado institucional global o experto.

En este caso y teniendo en cuenta las configuraciones epistémicas de cada uno de los textos realizadas en las secciones anteriores, se muestra muy sintéticamente en un cuadro un primer análisis de las distintas idoneidades parciales. No hemos centrado principalmente en las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica, dado que nos resulta poco viable valorar en las actividades de los textos la idoneidad mediacional y emocional pues la primera se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y *la segunda* se refiere al grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio.

	EPISTÉMICA	COGNITIVA	INTERACCIONAL
LIBRO 1	MEDIA	MEDIA	MEDIA
LIBRO 2	ALTA	ALTA	ALTA
LIBRO 3	ALTA	ALTA	ALTA
LIBRO 4	MEDIA	MEDIA	BAJA
LIBRO 5	MEDIA	BAJA	BAJA
LIBRO 6	ALTA	ALTA	ALTA
LIBRO 7	MEDIA	BAJA	BAJA
LIBRO 8	MEDIA	BAJA	MEDIA

Tabla 5 Caracterización de las idoneidades de los textos analizados

Con respecto a la idoneidad ecológica y tomando como referencia la configuración epistémica elaborada a partir el significado institucional global/de expertos consideramos una valoración de los libros 2, 3 y 6 con idoneidad ecológica alta, mientras que los restantes (1,4,5,7 y 8) una idoneidad ecológica Media.

## 5.6. Análisis y discusión de resultados

En función de las características generales que presentaron las propuestas didácticas contenidas en los 8 libros de texto analizados, la estructuración de las mismas y del enfoque didáctico utilizado, encontramos características comunes en sus configuraciones epistémicas. Esto nos permitió agruparlos en dos bloques o grupos, los cuales se describirán a continuación.

### 5.6.1. Configuración epistémica del bloque o grupo I

Los Libros 2, 3 y 6 presentan la siguiente configuración epistémica:

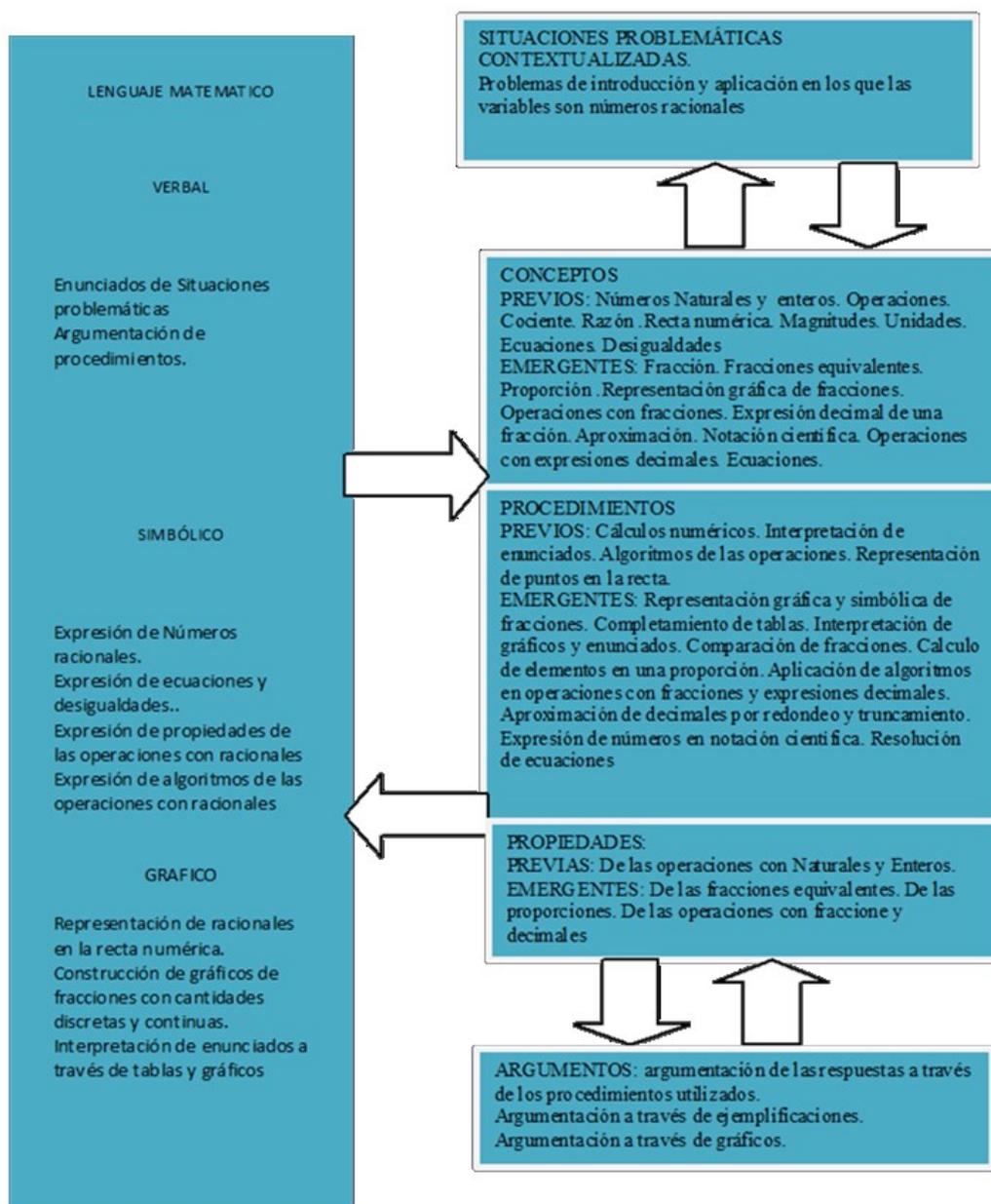


Figura 20: Configuración epistémica del bloque o grupo I

Como características distintivas y comunes, estos textos tienen:

- Problemas contextualizados iniciales para realizar la introducción del tema. Son *problemas de contexto evocado introductorios* puesto que se proponen al inicio de un tema matemático y se han diseñado para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo, en términos de Vygotsky (1934).
- Desarrollo de la unidad didáctica mediante problemas contextualizados de afianzamiento o consolidación. Estos problemas contextualizados de afianzamiento o integradores son propuestos al final del tema. En algunos casos se presentan *problemas contextualizados evocados de aplicación*, relativamente sencillos para el

estudiante, y en otros casos, *problemas contextualizados evocados de consolidación* cuando su resolución resulta más compleja (Font, 2006; Ramos 2006). En ambos casos, se trata de aplicar o integrar los conocimientos adquiridos previamente en el proceso de instrucción.

- Situaciones no contextualizadas (intra-matemáticas) de aplicación para afianzamiento o integración.
- La configuración epistémica de este grupo de textos muestra que se pone énfasis en la resolución de situaciones problemas como centro de la actividad matemática.
- Todos los temas de la unidad didáctica se introducen con situaciones problemas contextualizadas, las cuales para resolverlas necesitan de conceptos, propiedades y procedimientos previos que deben poseer los alumnos y motivan o aparecen conceptos, propiedades y procedimientos emergentes necesarios para llegar a la solución de la misma.
- Las tareas demandan de la utilización de un lenguaje verbal, simbólico y gráfico según el tipo de situación.
- Se introducen teóricamente los conceptos, propiedades y procedimientos emergentes (nuevos) de la actividad propuesta, seguidos de situaciones problemas intra-matemáticas y extra matemáticas para afianzar los mismos (tareas de refuerzo y/o consolidación).
- En muchas de las situaciones problemas propuestas se requiere de la argumentación, es decir, se deben justificar las respuestas en base a conceptos, propiedades o procedimientos aplicados previamente. El tipo de argumentación es inductivo.
- La gestión de la clase que sugiere el texto lleva a que el profesor proponga situaciones problemas que los estudiantes han de intentar resolver. Luego, en el proceso de puesta en común de las soluciones, además de resolver los problemas, se van recuperando los conceptos involucrados en la unidad didáctica. Estos conceptos, a su vez, se relacionan y organizan para ser primero aplicados a ejercicios y después, utilizarlos en la resolución de problemas contextualizados más complejos.

### **5.6.2. Configuración epistémica del bloque o grupo II**

Los Libros 1, 4, 5, 7 y 8 presentaron Configuraciones Epistémicas semejantes, lo que nos llevó a realizar otra categoría que denominamos bloque o grupo II, cuyas características

son:

- La mayoría de las situaciones problemas son descontextualizadas o intra-matemáticas, cuyo propósito es efectuar una ejemplificación de los conceptos o aplicación de procedimientos. Algunas de ellas son utilizadas para afianzar y/o integrar conceptos y procedimientos.
- Algunas situaciones problemas se encuentran contextualizadas y son utilizadas para aplicar o afianzar conceptos o procedimientos previamente desarrollados.
- Los conceptos, definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos se introducen con situaciones problemas intra-matemáticas, y llevan a la aplicación de estos elementos primarios.
- Las situaciones problemas requieren de la utilización de lenguaje verbal, simbólico y gráfico, según el tipo de situación, sin interacción entre ellos.
- No aparecen situaciones problemas que impliquen procesos de argumentación, es decir, no demandan justificar o validar las resoluciones con base en conceptos, propiedades o procedimientos aplicados previamente.
- La actividad matemática que caracteriza a las situaciones problemas propuestas están centradas en procesos de algoritmización y responden a una concepción más formalista de la Matemática. Las situaciones problemas sólo tienen la función de afianzar un concepto, y por sí solas no inducen a que se construyan los mismos.
- La gestión de la clase que promueve conduce a pensar en un docente que expone los conceptos, propone ejemplos y demuestra propiedades. Los alumnos han de aplicar dichos conceptos y propiedades a la resolución de problemas descontextualizados y en algunos casos (muy pocos) problemas contextualizados evocados de aplicación.

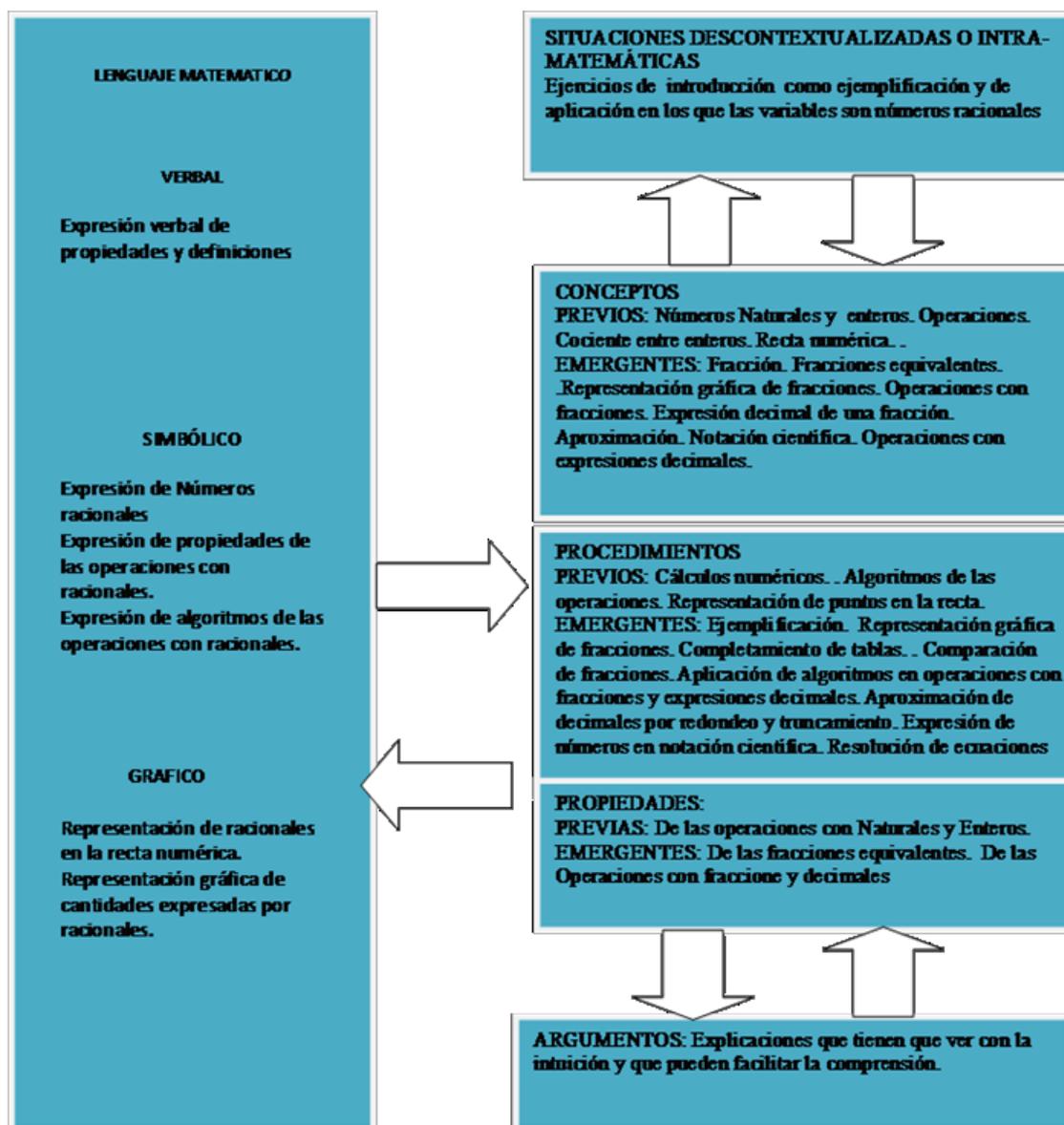


Figura 21: Configuración epistémica del bloque o grupo II

### 5.6.3. Configuración Epistémica de referencia

Teniendo en cuenta las configuraciones epistémicas de los 8 textos cuyos problemas analizamos, conformamos una *Configuración Epistémica de referencia lo más afín o semejante a la configuración Epistémica de Referencia elaborada a partir del significado institucional global o Expertos*, (sección 5.2 de este Capítulo), la cual utilizamos para elaborar las actividades del Instrumento y para realizar comparaciones con las *Configuraciones Cognitivas* asociadas a cada estudiante.

Describimos a continuación los elementos primarios que la conforman.

*Situaciones problema:* Actividades contextualizadas (extra matemáticas) y no contextualizadas (entra-matemáticas). Problemas contextualizados de introducción y

aplicación de conceptos, propiedades o procedimientos relacionados con números racionales. Actividades intra-matemáticas de consolidación del tema.

*Conceptos:*

*Previos:* Números Naturales y enteros. Operaciones. Cociente. Razón .Recta numérica. Magnitudes. Unidades. Ecuaciones. Desigualdades.

*Emergentes:* Fracción. Fracciones equivalentes. Razón .Proporción .Representación gráfica de fracciones. Operaciones con fracciones. Expresión decimal de una fracción. Aproximación. Notación científica. Operaciones con expresiones decimales. Ecuaciones. Desigualdades. Proporcionalidad. Porcentaje.

*Propiedades:*

*Previas:* De las operaciones con Naturales y Enteros.

*Emergentes:* De las fracciones equivalentes. De las proporciones. De las operaciones con fracciones y decimales. De las desigualdades. De las magnitudes proporcionales.

*Procedimientos:*

*Previos:* Cálculos numéricos. Interpretación de enunciados. Algoritmos de las operaciones. Representación de puntos en la recta.

*Emergentes:* Representación gráfica y simbólica de fracciones. Completamiento de tablas. Interpretación de gráficos, enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de fracciones. Cálculo de elementos en una proporción. Aplicación de algoritmos en operaciones con fracciones y expresiones decimales. Aproximación de decimales por redondeo y truncamiento. Expresión de números en notación científica. Resolución de ecuaciones y desigualdades. Cálculo de porcentajes. Análisis y resolución de situaciones que involucran magnitudes proporcionales. Expresión simbólica y gráfica de enunciados verbales.

*Argumentos:* Inductivos, del tipo: (a) Argumentación sostenida por los procedimientos utilizados, (b) Argumentación de las respuestas a través de las propiedades utilizadas, (c) Argumentación a través de ejemplificaciones (d) Argumentación a través de lenguaje gráfico, simbólico y /o verbal.

*Lenguaje:* (a) Verbal: Expresión de enunciados de situaciones problemas, Expresión de las respuestas que dan solución a las situaciones, Argumentación de procedimientos,

Expresión verbal de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. (b) Simbólico: Expresión simbólica de los enunciados (traducción de lenguaje verbal al simbólico), Expresión simbólica de Números racionales, Expresión simbólica de ecuaciones y desigualdades, Expresión simbólica de propiedades de las operaciones, Expresión simbólica de algoritmos de las operaciones, Expresión simbólica de conceptos, procedimientos y argumentos. (c) Gráfico: Expresión gráfica de enunciados verbales y simbólicos (traducción de lenguaje verbal y simbólico al gráfico), Representación de racionales en la recta numérica, Construcción de gráficos de fracciones con cantidades discretas y continuas, Interpretación de enunciados a través de tablas y gráficos, Expresión gráfica de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

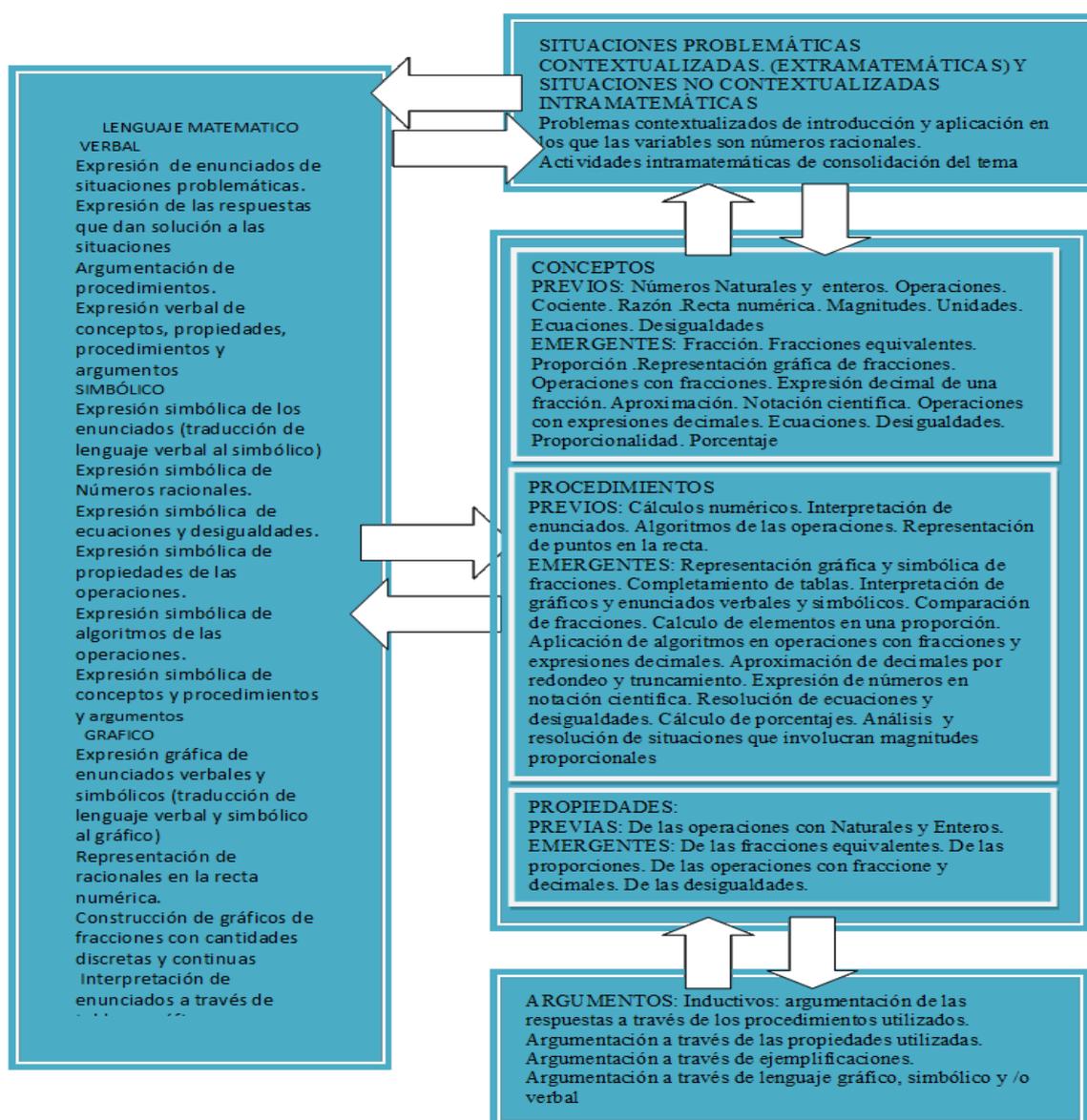


Figura 22: Configuración epistémica de referencia de textos escolares

#### **5.6.4. Idoneidad didáctica de las actividades analizadas en los textos escolares**

Después de haber realizado una caracterización de las actividades que proponen los 8 textos escolares de Matemática, procedimos a determinar la idoneidad didáctica de los mismos. Para ello, utilizamos los indicadores de idoneidad que propone el EOS y la valoramos con baja, media o alta, de acuerdo a la presencia de pocos, algunos o todos los indicadores. Nos hemos centrado en valorar las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica por considerarlas más relevantes, en tanto no se disponen de más elementos para hacerlos con las demás (emocional y mediacional).

##### **5.6.4.1. Idoneidad didáctica del bloque o grupo I**

*Idoneidad epistémica:* Consideramos que este grupo de textos tiene una idoneidad epistémica alta teniendo en cuenta que:

- Las situaciones problemas son representativas de los significados asociados a los números racionales, y además, permiten contextualizar los conocimientos pretendidos, ejercitarlos y aplicarlos a situaciones relacionadas.
- El lenguaje verbal, simbólico y gráfico utilizado es representativo de los números racionales. Asimismo, se tienen en cuenta las transformaciones y conversiones entre los mismos.
- Los conceptos, propiedades y procedimientos son representativos de los números racionales y adaptados al nivel educativo de los estudiantes, capacidades y recursos. Los mismos se presentan de manera contextualizada, son explicados y justificados mediante argumentos representativos.
- A través de las situaciones problemas de aplicación los estudiantes tienen ocasión de expresar y comunicar sus procedimientos y argumentaciones, y en general, sus conocimientos.

*Idoneidad cognitiva:* Consideramos que es medianamente alta, pues si bien en los textos no se puede realizar un seguimiento de lo que efectivamente habrían realizado los estudiantes con las tareas (en términos de la zona de desarrollo próximo de los mismos para conocer sus significados previos), las actividades planteadas en las situaciones problemas tienen en cuenta los conocimientos previos de los mismos y en algunos casos, los retoman a través de explicaciones más profundas.

*Idoneidad interaccional:* Consideramos que las situaciones problemas planteadas generarían una idoneidad interaccional alta, en tanto el diseño de la tarea conlleva a que

interactúe el profesor con los alumnos y entre ellos. Si esto es acompañado de una gestión adecuada por parte del profesor, promovería el diálogo y trabajo cooperativo. Es de destacar que esta idoneidad se considera alta si el profesor advierte los conflictos potenciales de las tareas y son abordados en la clase, para lo cual, debería valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y, eventualmente, determinar la intervención más adecuada.

*Idoneidad ecológica:* Consideramos que es *alta* pues los significados, su implementación y evaluación se corresponden con el significado institucional global/de expertos elaborado a partir de los documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales y se relacionen con otros contenidos intra e interdisciplinarios.

#### **5.6.4.2. Idoneidad didáctica del bloque o grupo II**

*Idoneidad epistémica:* Consideramos que este grupo de textos tiene una idoneidad epistémica baja teniendo en cuenta que:

- Si bien las situaciones intra- matemáticas son representativas de los significados de los números racionales, éstas no permiten contextualizar los conocimientos pretendidos y aplicarlos a situaciones relacionadas. Las situaciones problemas que se proponen apuntan a desarrollar procesos de algoritmización a través de la resolución de tareas similares.
- El lenguaje verbal, simbólico y gráfico utilizado es representativo de los números racionales, pero se utiliza muy poco en la resolución de las situaciones problemas, fundamentalmente el verbal y gráfico. Tampoco se tienen en cuenta las transformaciones y conversiones entre los mismos.
- Los conceptos, propiedades y procedimientos son representativos de los números racionales pero no se integran entre sí a través de situaciones contextualizadas, ni tampoco son justificados con argumentaciones representativas.

*Idoneidad cognitiva:* Consideramos que es medianamente baja, pues si bien en los textos no se puede realizar un seguimiento de los estudiantes para evaluar la idoneidad cognitiva, las actividades planteadas consideran muy someramente los conocimientos previos de los mismos y en ningún caso los retoman a través de argumentaciones o justificaciones.

*Idoneidad interaccional:* Consideramos que las situaciones problemas generan una idoneidad interaccional baja dada que no implican una interacción entre profesor y alumno, o entre alumnos, puesto que esta configuración sugiere una clase magistral donde el

profesor explica, ejemplifica, y es el modelo a seguir. En tanto, los alumnos aplican procedimientos y técnicas sin que haya una interacción entre ellos. Esto no le permite al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos, ni tener en cuenta sus dificultades y, eventualmente, determinar la intervención más adecuada.

*Idoneidad ecológica:* Consideramos que es media pues los significados, su implementación y evaluación se corresponden medianamente con el significado institucional global/de expertos elaborado a partir de los documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales, dado que por ejemplo, prácticamente no aparecen situaciones contextualizadas, lo que implica que no permiten contextualizar los conocimientos pretendidos y aplicarlos a situaciones relacionadas con otros contenidos intra e interdisciplinarios.

En referencia a la *idoneidad mediacional*, que implica el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, si bien no puede inferirse en ninguno de los dos grupos de textos, consideramos que si el profesor y los estudiantes tuvieran a su disposición medios informáticos y calculadoras, el grupo de tareas que se proponen contextualizadas resultan pertinentes para el caso, en contraposición de aquellas que requieren aplicar procedimientos trabajados por el docente.

Con respecto a la *idoneidad emocional*, la cual sugiere el grado de interés y motivación de los estudiantes en el proceso de estudio, consideramos que el grupo de textos que trabaja con situaciones contextualizadas tiende a lograr que esta sea más alta, pues proponen tareas contextualizadas que generan mayor interés y motivación en los estudiantes.

### **5.6.5. Reflexiones finales del Capítulo**

Teniendo en cuenta los dos bloques o grupos de textos analizados, consideramos que el bloque o grupo 1, que propone problemas contextualizados y pone como centro de la actividad matemática la resolución de problemas, presenta una idoneidad didáctica global alta y está en concordancia con los lineamientos curriculares de Argentina (configuración epistémica de referencia a partir de significado institucional global o experto).

No obstante, es de destacar que entendemos que estas unidades curriculares tendrán idoneidad didáctica alta si el docente lleva a cabo una gestión de la clase en concordancia con el espíritu que intentan promover los textos.

Para este grupo de textos, aprender Matemática supone recurrir a experiencias cotidianas sobre el comportamiento de los objetos matemáticos, lo cual guarda concordancia con las

directrices curriculares de Argentina. Las situaciones que allí se proponen no son propuestas cerradas, sino que permiten trabajar los conceptos matemáticos en carácter de instrumento o de objeto, esto es, permiten resolver el problema planteado y al mismo tiempo se convierte en objeto de estudio.

Por otra parte, consideramos que las herramientas de análisis de texto que hemos empleado (configuración epistémica y funciones semióticas) son de gran utilidad para los profesores, pues permiten valorar la idoneidad didáctica que está plasmada a través de las tareas que proponen los textos escolares. Al mismo tiempo, el análisis didáctico de los textos pone en relieve la actividad matemática que estaría presente en la clase y permitiría al profesor gestionar adecuadamente la misma. Esto es, si se tiene un texto que presenta características más formalistas, como los del grupo II, se puede gestionar la clase elevando la idoneidad didáctica de aquellas facetas que se ven más desfavorecidas. En síntesis, creemos que para cualquier profesor que se plantee como adaptar a su contexto y circunstancia la propuesta didáctica de un determinado texto, es necesario adoptar criterios de idoneidad que permitan mejorarla y optimizarla.

# **LA COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES**

## LA COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

### 6.1. Introducción

---

En este Capítulo analizamos cualitativamente las soluciones que realizaron los 35 estudiantes (10 ingresantes a Instituto del Profesorado y 25 ingresantes universidad) que resolvieron el 50% o más de las actividades propuestas en el Instrumento elaborado y comentado en el Capítulo 4.

Utilizamos para registrar la información un protocolo ad hoc que se adjunta en Anexo III y como herramientas teóricas usamos las configuraciones epistémicas y cognitivas, de acuerdo a EOS (Godino, Batanero y Font, 2007).

De manera general, nos propusimos analizar:

- La presencia o ausencia de conceptos, proposiciones, propiedades y procedimientos, así como sus vínculos con la obtención de respuestas correctas al resolver las actividades planteadas.
- Las argumentaciones y/o justificaciones, y los nexos entre ellas con el uso de lenguaje formalizado para brindar respuestas correctas a los problemas planteados.
- Los diferentes usos de lenguajes y registros de representación cuando ofrecen argumentaciones.
- El vínculo entre el lenguaje utilizado y las argumentaciones que se brindan para justificar la resolución de una situación problema.

Para iniciar el análisis, determinamos las *Configuraciones Cognitivas* de los 35 estudiantes. Para ello, tuvimos en cuenta las resoluciones de todas las situaciones problemas que presentaba el instrumento elaborado y comentado en el Capítulo 4. Posteriormente examinamos estas configuraciones y las comparamos con la *Configuración Epistémica* de referencia (*Configuración Epistémica Global* de Referencia y *Configuración Epistémica Global* de los textos escolares). Este proceso nos permitió encontrar información para valorar la comprensión alcanzada sobre los números racionales, como también, los obstáculos y dificultades que subsisten en los alumnos cuyas prácticas operativas y discursivas fueron objeto de estudio.

Asimismo, para analizar las resoluciones a las situaciones problemas desarrolladas por los estudiantes, nos hemos situado en el primer estadio (informal o ingenuo) que plantea Mosterín (1980), quien sostiene que para estudiar el tipo de formalismo que está presente

en la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar como mínimo tres estadios sucesivos. Estos estadios se corresponden a tres diferentes niveles de rigor en el concepto de prueba o justificación de las respuestas. Por lo tanto, sostenemos en este trabajo que un alumno muestra rigor cuando hace algún tipo de justificación. En un primer nivel de rigor se puede hacer una graduación, según el tipo de prueba que haya efectuado el alumno, tales como: ausencia de prueba, un razonamiento mediante un ejemplo, un ejemplo cuidadosamente seleccionado o un ejemplo genérico, o bien un razonamiento lógico a partir de proposiciones conocidas, inducción completa, etc.

Los estudiantes participantes, cuyas prácticas operativas y discursivas fue objeto de estudio son recientes egresados de la escuela secundaria, donde el rigor que se les solicita en sus desarrollos no se corresponden a los que se espera en la Universidad (podría esperarse un segundo nivel de acuerdo a Mosterín).

Trabajamos con las *Configuraciones Cognitivas* de los estudiantes ingresantes a UNL y los estudiantes ingresantes al ISP N° 10 por separado, a los efectos de poder analizar la configuración de cada uno de ellos y una mirada global de las *Configuraciones Cognitivas* de los alumnos de cada institución. Llamaremos estudiantes F a los ingresantes a Facultad Ciencias Económicas de la UNL y estudiantes I a los ingresantes al ISP N° 10.

Para elaborar la *Configuración Cognitiva* de cada estudiante, en función de las respuestas dadas en el instrumento y la entrevista realizada, se elaboró un protocolo ad hoc con el fin de registrar y sistematizar la información (ver Anexo III).

En las configuraciones cognitivas, las situaciones problemas son las planteadas por el instrumento, por lo tanto se expresan una única vez pues se repiten para todos los estudiantes. En nuestro caso son *situaciones problemas* contextualizadas (extra-matemáticas) y no contextualizadas (intra-matemáticas). En particular, problemas contextualizados de introducción y aplicación de conceptos, propiedades y procedimientos referidos a números racionales, y actividades intra-matemáticas de consolidación del tema.

## **6.2. Configuraciones cognitivas de los estudiantes de la UNL**

---

Describimos a continuación las Configuraciones Cognitivas de cada estudiante, y presentamos el esquema que las sintetiza.

### **6.2.1 Configuración Cognitiva del estudiante 1F**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Proporcionalidad. Expresiones Decimales. Operaciones .Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Identificación y representación gráfica de fracciones, aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución y planteo de ecuaciones. Tanteo y formalización. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos o dando ejemplos concretos.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, planteo de ecuaciones, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales, propiedades de las operaciones, y porcentajes. Verbal para nombrar propiedades, expresar soluciones y para la argumentación, y el gráfico (poco) para representar cantidades expresadas por racionales.

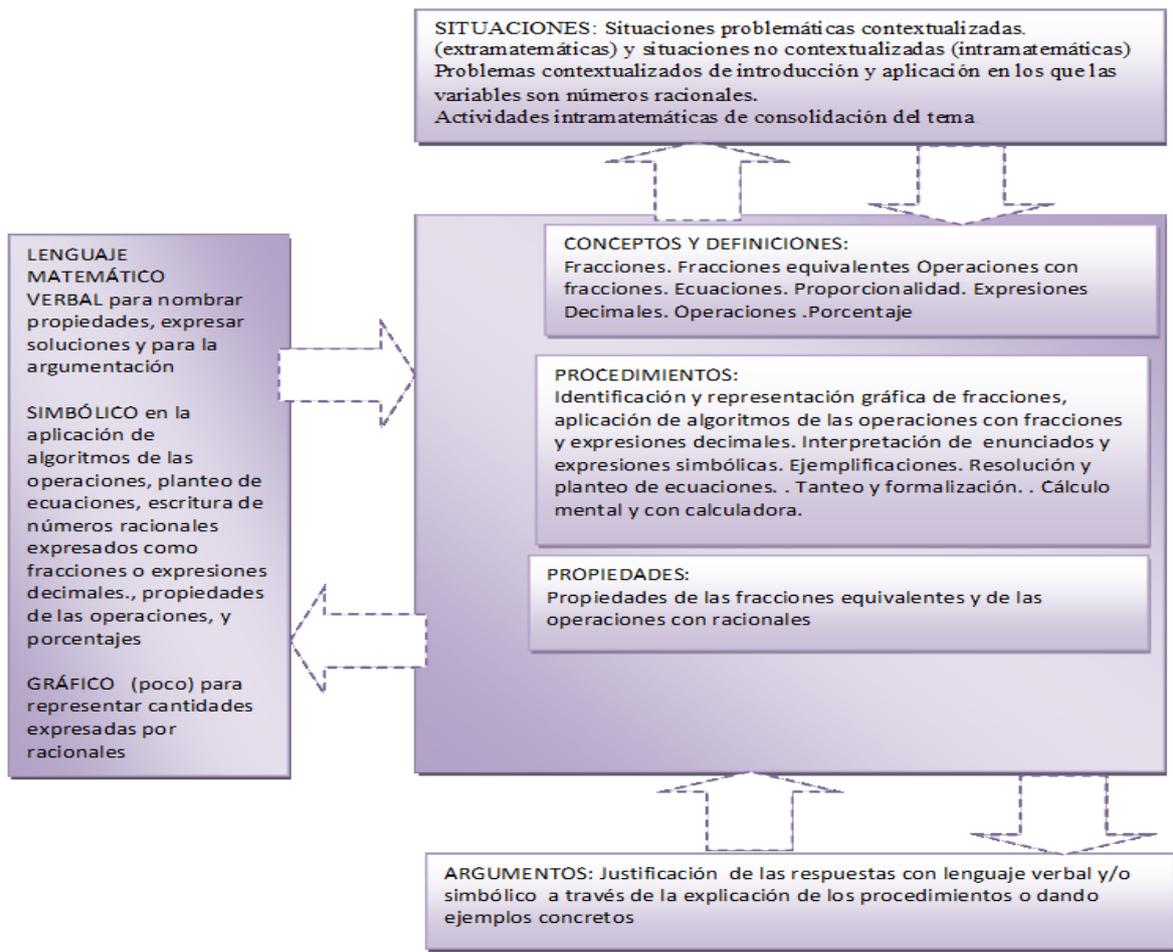


Figura 23: Configuración cognitiva del estudiante 1F

### 6.2.2. Configuración Cognitiva del estudiante 2F

*Conceptos:* Fracciones. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Expresiones Decimales. Operaciones. Aproximación de expresiones decimales. Notación científica.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Expresión de números decimales en forma aproximada y expresión de cantidades en notación científica. Resolución y planteo de ecuaciones. Identificación de propiedades. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos y/o propiedades o dando ejemplos concretos.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, planteo de ecuaciones, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones

decimales, aproximación de expresiones decimales y expresión de cantidades en notación científica y propiedades de las operaciones. Verbal para nombrar propiedades, expresar soluciones y para la argumentación y el grafico no se evidencia en las actividades.

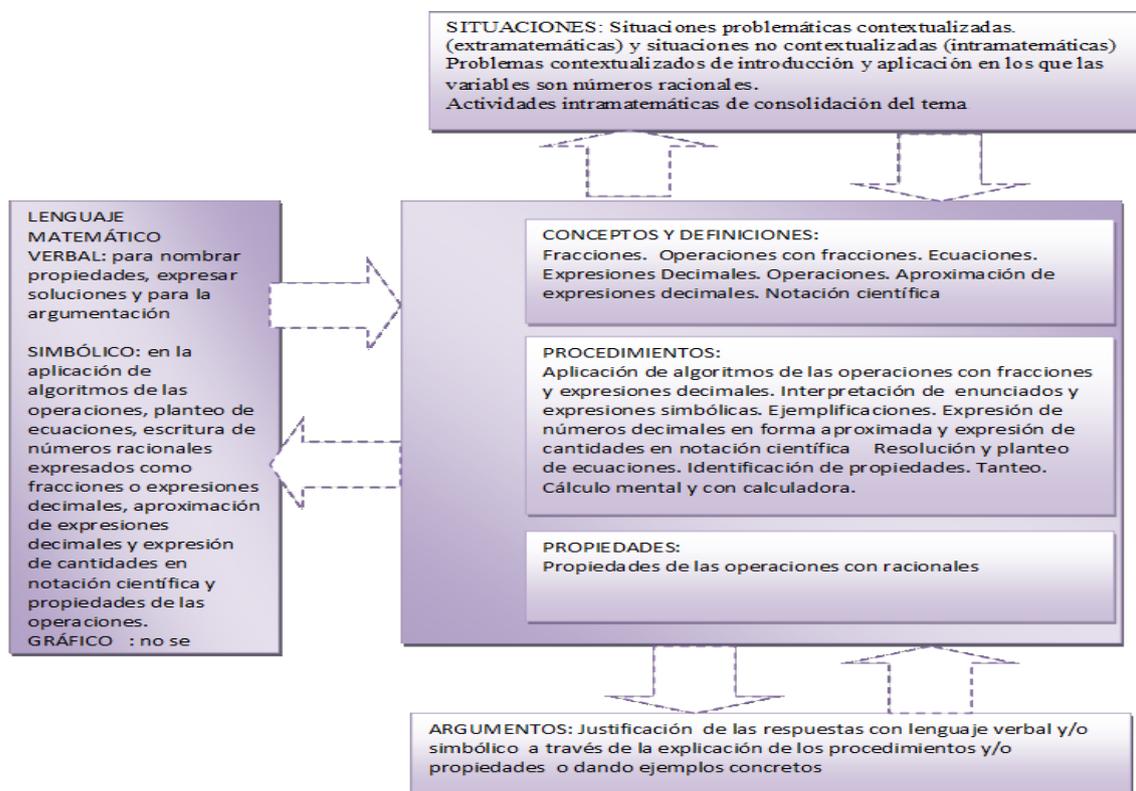


Figura 24: Configuración cognitiva del estudiante 2F

### 6.2.3. Configuración Cognitiva del estudiante 3F

*Conceptos:* Fracciones. Operaciones con fracciones. Proporción. Ecuaciones. Desigualdades Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales y de las desigualdades.

*Procedimientos:* Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución de ecuaciones y desigualdades. Identificación de propiedades. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos y/o propiedades.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, resolución de ecuaciones y desigualdades, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales. Verbal para nombrar propiedades, expresar soluciones y para la argumentación y el gráfico (poco) para identificar o representar fracciones.

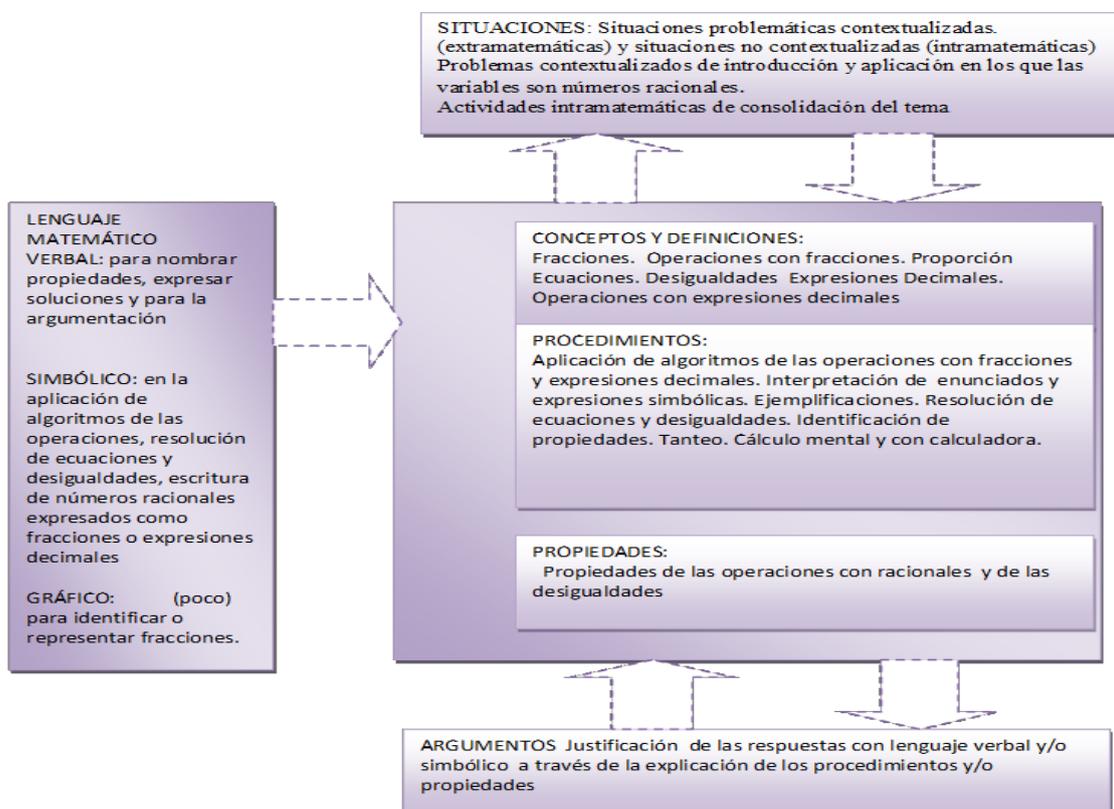


Figura 25: Configuración cognitiva del estudiante 3F

### 6.3.4. Configuración Cognitiva del estudiante 4F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones. Proporción Ecuaciones. Desigualdades Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales y de las desigualdades.

*Procedimientos:* Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución de ecuaciones y desigualdades. Identificación de propiedades. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora. Expresión verbal de las respuestas.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos y/o propiedades.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, resolución y planteo de ecuaciones y desigualdades, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales. Verbal para nombrar propiedades, expresar soluciones y para la argumentación y el gráfico (poco) para representar fracciones y planteo de enunciados.

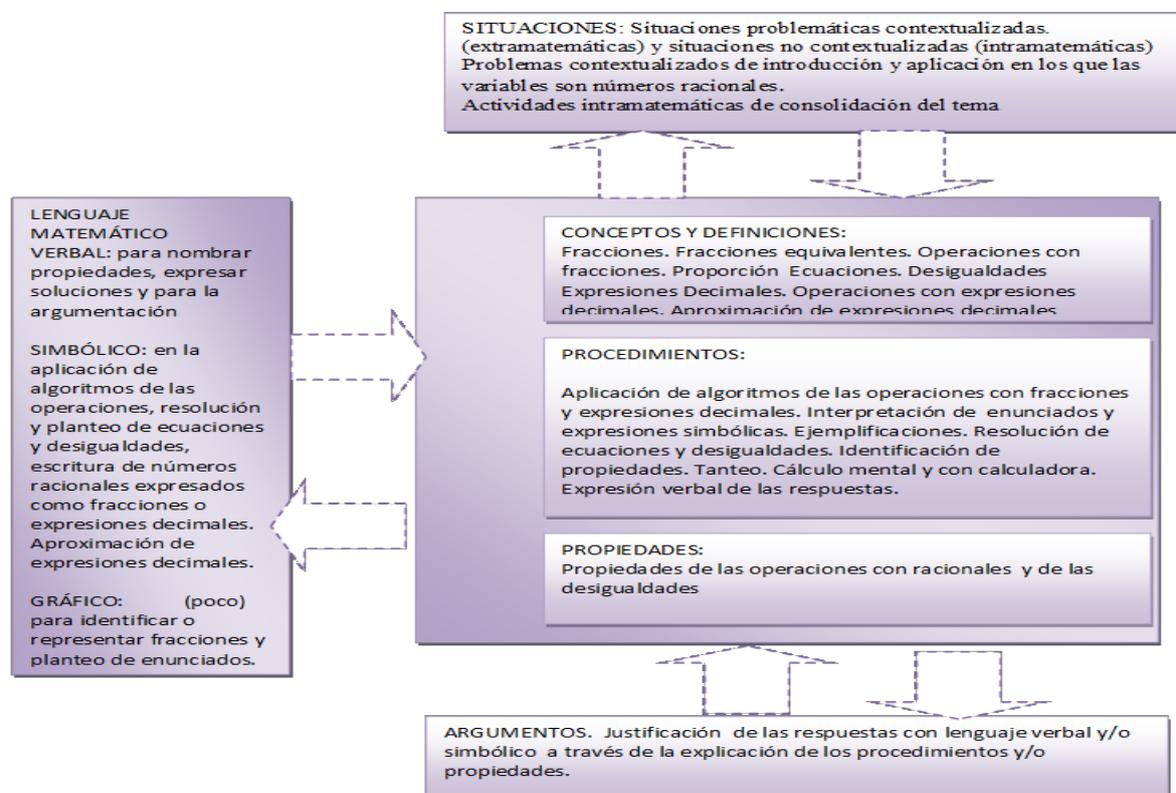


Figura 26: Configuración cognitiva del estudiante 4F

### 6.3.5. Configuración Cognitiva del estudiante 5F

*Conceptos:* Fracciones. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Desigualdades. Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales. Notación científica.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución de ecuaciones y desigualdades. Identificación de propiedades. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora. Expresión simbólica de enunciados. Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos o con ejemplificaciones.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, resolución y planteo de ecuaciones y desigualdades, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales y expresión de cantidades en notación científica Verbal para, expresar soluciones de las actividades y para la argumentación y el gráfico (poco) para representar fracciones y planteo de enunciados.

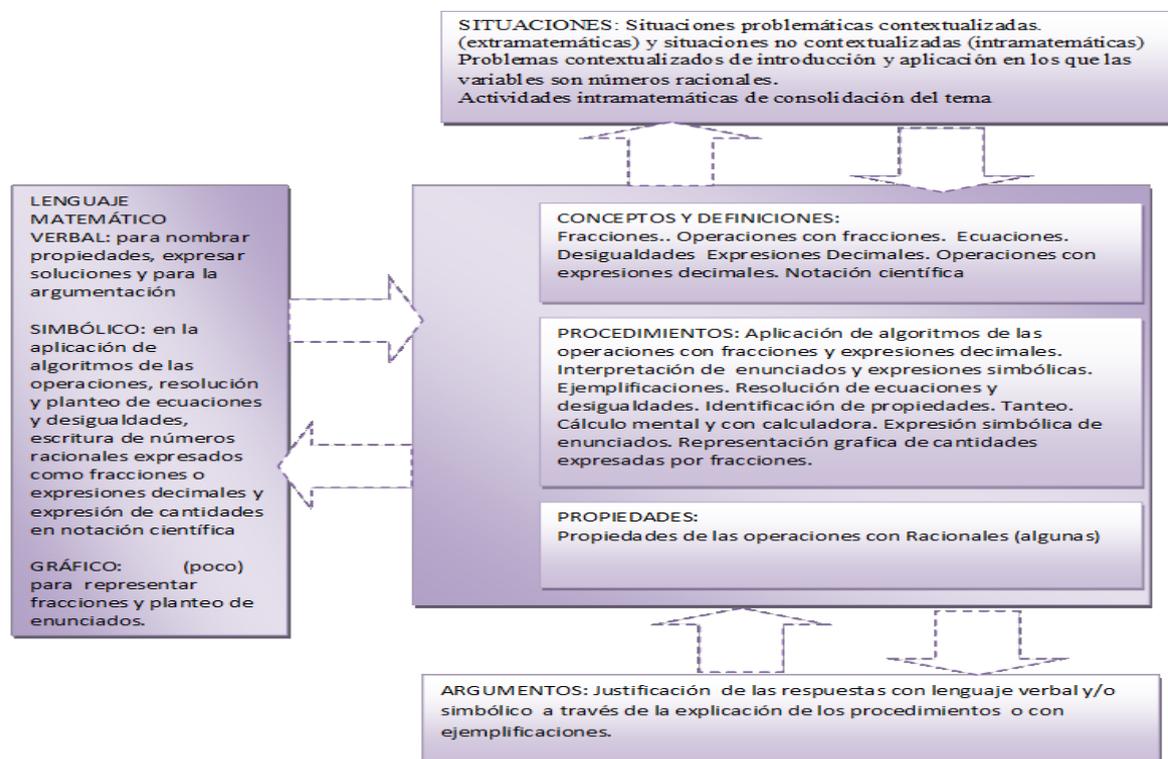


Figura 27: Configuración cognitiva del estudiante 5F

### 6.3.6. Configuración Cognitiva del estudiante 6F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporción. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Desigualdades. Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes, de las operaciones con racionales y de las desigualdades.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Representación gráfica de fracciones equivalentes. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución de ecuaciones y desigualdades. Identificación de propiedades. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora. Expresión simbólica de enunciados. Cálculo de porcentajes.

*Argumentos.* (Pocos) Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos y/o propiedades.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, resolución y planteo de ecuaciones y desigualdades, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales. Verbal para expresar soluciones de las actividades y para la argumentación y el gráfico (poco) para representar fracciones y fracciones equivalentes.

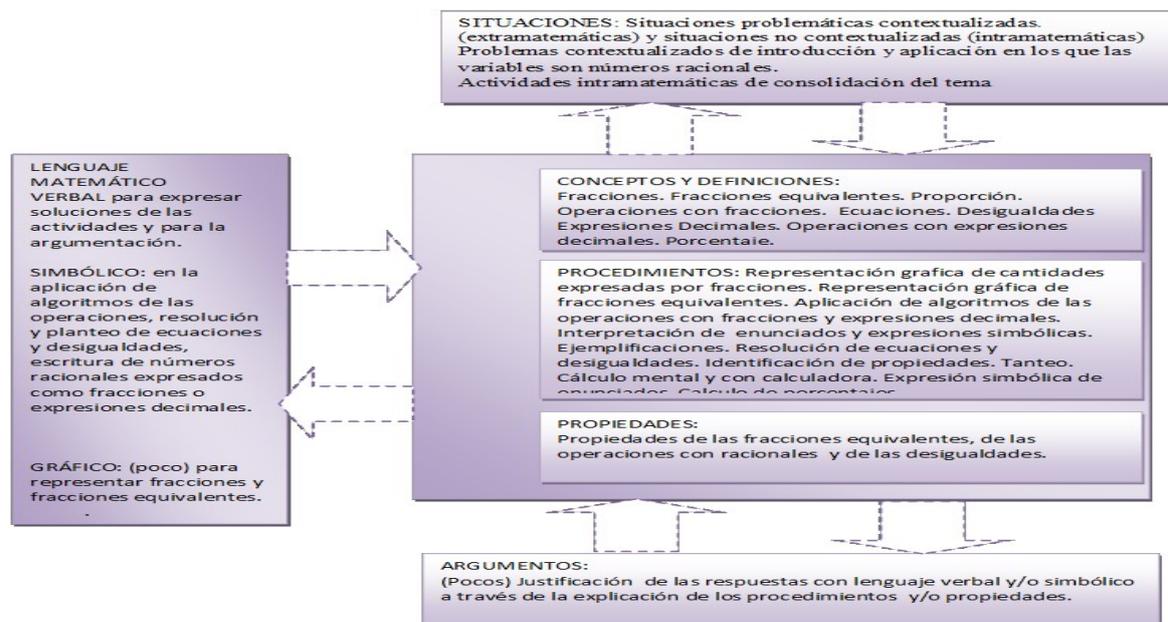


Figura 28: Configuración cognitiva del estudiante 6F

### 6.3.7. Configuración Cognitiva del estudiante 7F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes Operaciones con fracciones. Ecuaciones. .  
Expresiones Decimales. Operaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones, aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución y planteo de ecuaciones. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* No se evidencia argumentación.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, planteo de ecuaciones, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales. Verbal para nombrar propiedades, y expresar respuestas soluciones y el gráfico (poco) para representar cantidades expresadas por fracciones.

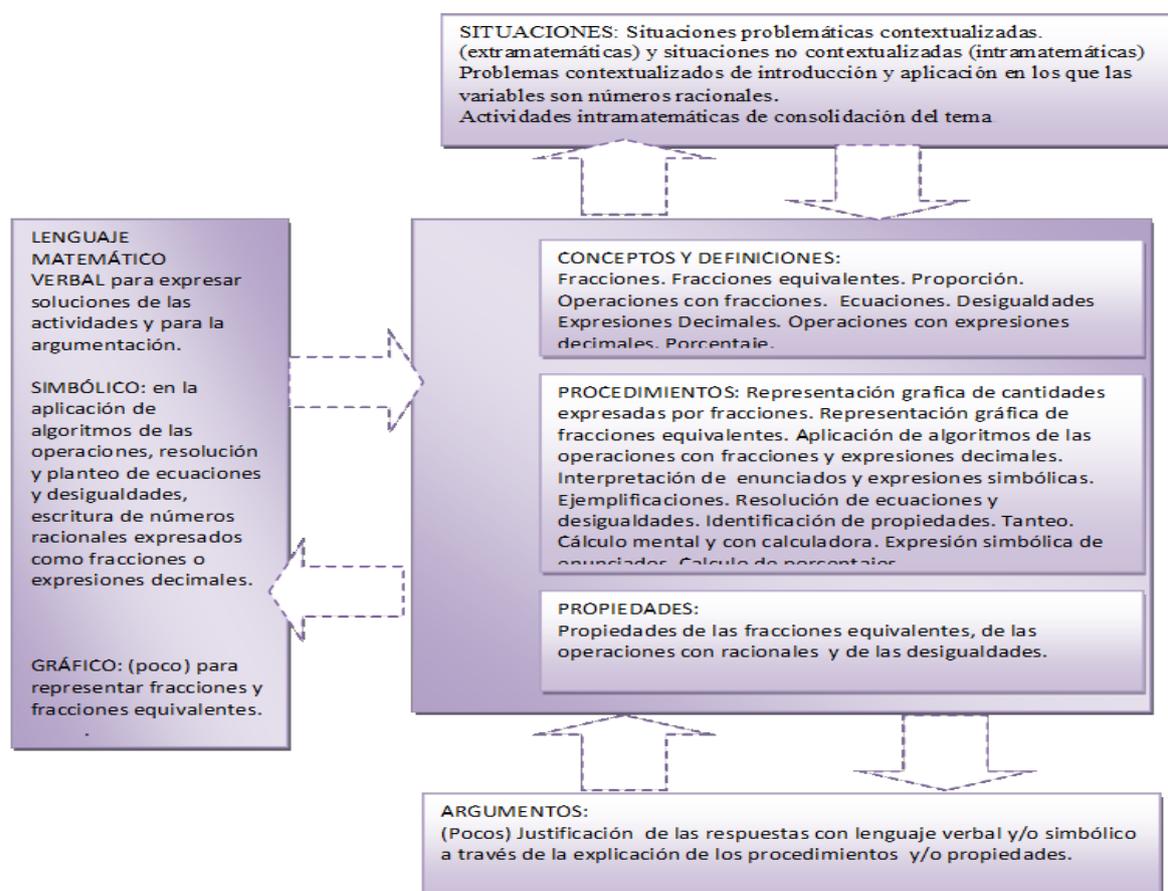


Figura 29: Configuración cognitiva del estudiante 7F

### 6.3.8. Configuración Cognitiva del estudiante 8F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporciones. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora. Planteo y resolución de ecuaciones.

*Argumentos.* La única argumentación que se evidencia es la expresión verbal del nombre de las propiedades que aplican en una actividad específica.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, planteo de ecuaciones, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales y aproximación de expresiones decimales. Verbal para nombrar propiedades, y expresar alguna respuesta y el gráfico no se evidencia en ninguna actividad.

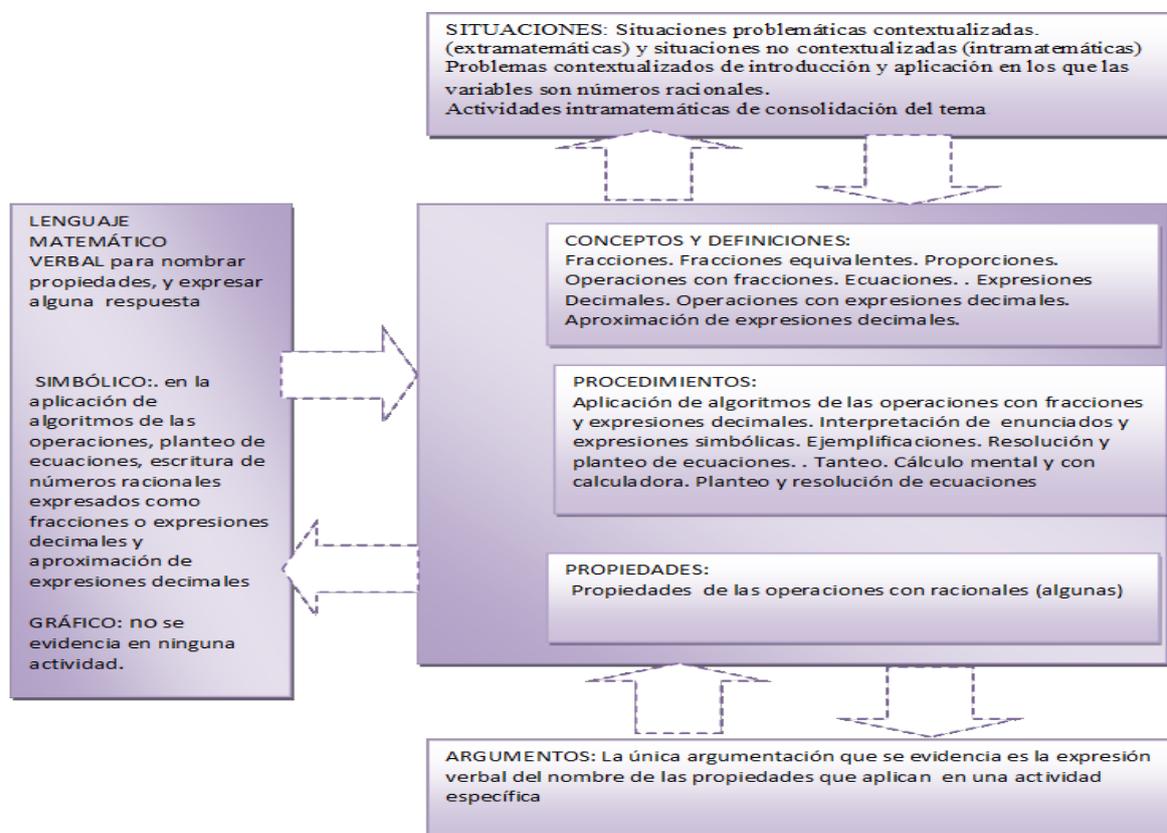


Figura 30: Configuración cognitiva del estudiante 8F

### 6.3.9. Configuración Cognitiva del estudiante 9F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporciones. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales. Notación científica. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución y planteo de ecuaciones. Escritura de expresiones decimales aproximadas y en notación científica. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora. Planteo y resolución de ecuaciones. Calculo de porcentajes.

*Argumentos.* (Pocos) Justificación verbal y/o simbólica (a través de ejemplos) de procedimientos o propiedades.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, planteo de ecuaciones, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales y aproximación de expresiones decimales. Verbal para nombrar propiedades, y expresar alguna respuesta o justificar procedimientos y el gráfico para representar cantidades expresadas por fracciones.

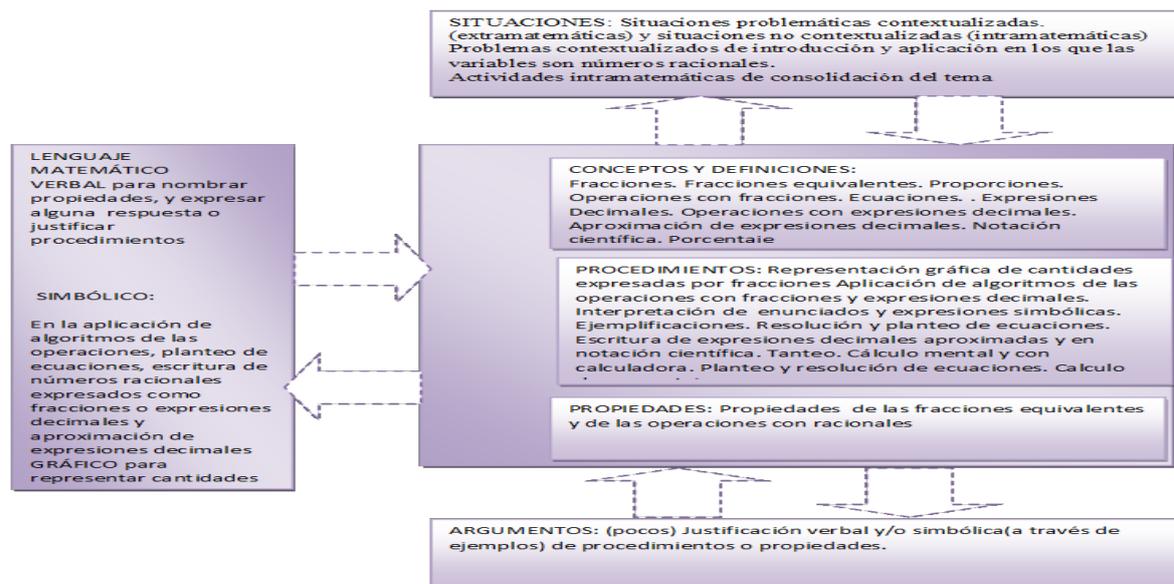


Figura 31: Configuración cognitiva del estudiante 9F

### **6.3.10. Configuración Cognitiva del estudiante 10F**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporción. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Desigualdades. Proporcionalidad. Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación. Notación científica. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Identificación y representación gráfica de fracciones, aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución y planteo de ecuaciones. Tanteo y formalización. Cálculo mental y con calculadora. Identificación de propiedades. Escritura de expresiones decimales aproximadas y en notación científica. Cálculo de porcentajes. Traducción de enunciados verbales a gráficos y expresiones simbólicas.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos, nombrando propiedades o dando ejemplos concretos

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, planteo y resolución de ecuaciones y desigualdades, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales, aproximación de expresiones decimales y escritura en notación científica, propiedades de las operaciones, y porcentajes. Verbal *para* nombrar propiedades, expresar soluciones y para la argumentación de respuestas y el gráfico (poco) para representar cantidades expresadas por racionales y para el planteo de situaciones problemas.

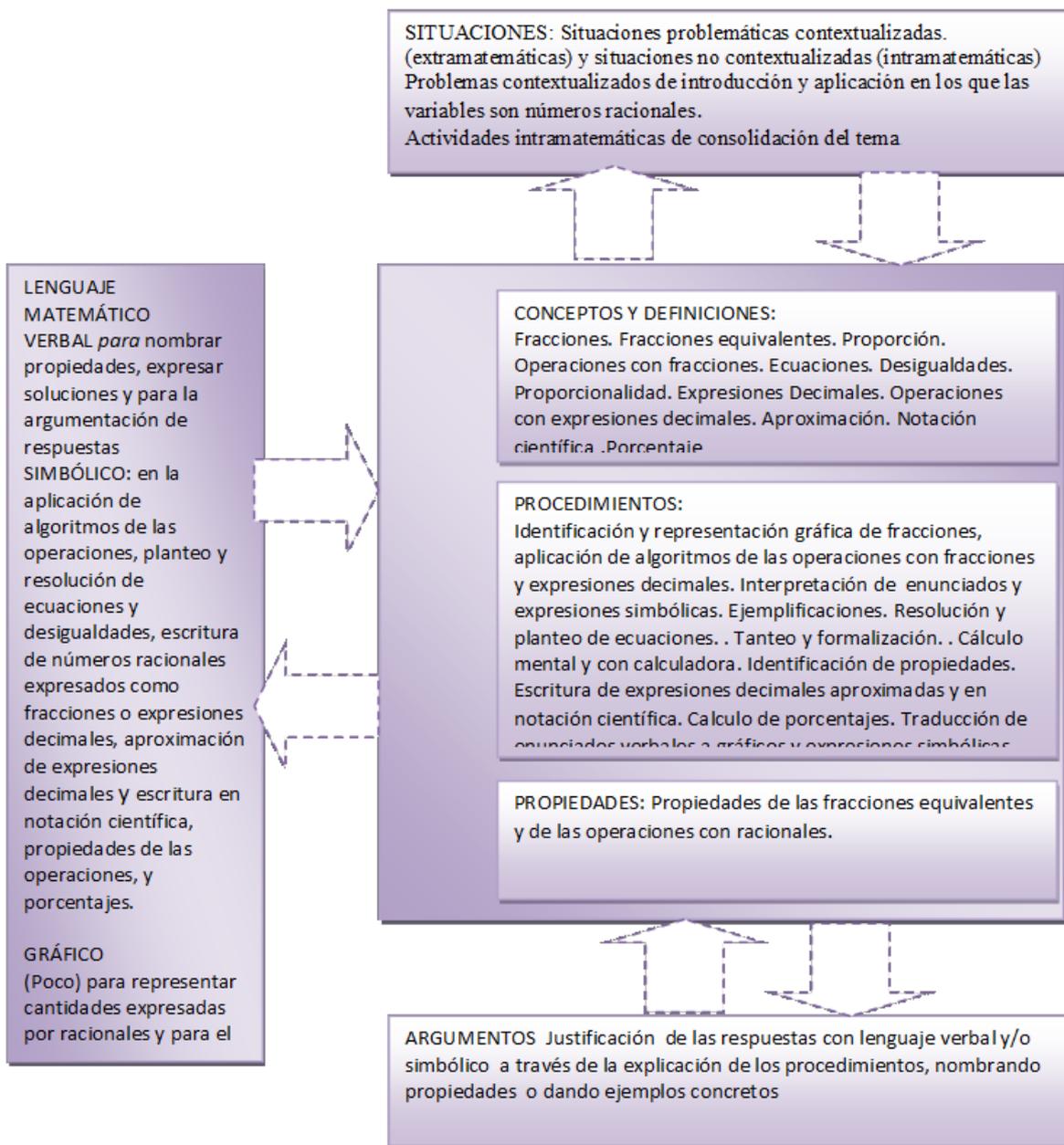


Figura 32: Configuración cognitiva del estudiante 10F

### 6.3.11. Configuración Cognitiva del estudiante 11F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporción. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones. Ecuaciones. Proporcionalidad. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Planteo y resolución de ecuaciones.

Identificación de propiedades. Tanteo y ejemplificación. Cálculo de porcentajes. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* (Pocos) justificación verbal y/o simbólica de los procedimientos o propiedades.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuación, en las ejemplificaciones, en el cálculo de porcentajes. Verbal en la expresión de las respuestas, en la identificación de propiedades y en la justificación de procedimientos. Gráfico (poco) en la representación de cantidades expresadas por fracciones.

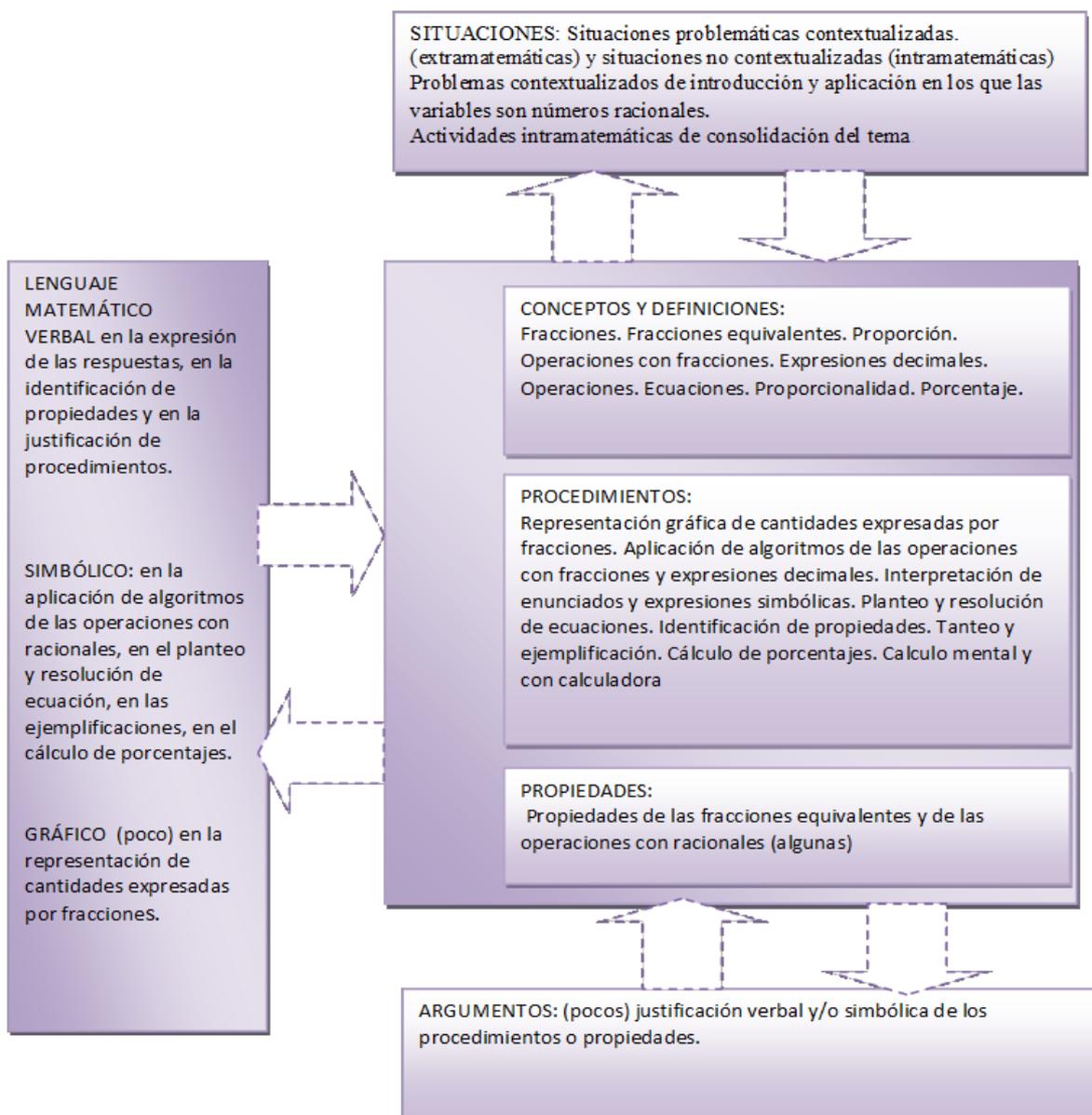


Figura 33: Configuración cognitiva del estudiante 11F

### 6.3.12. Configuración Cognitiva del estudiante 12F

*Conceptos:* Fracciones. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales Ecuaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Planteo y resolución de ecuaciones. Identificación de propiedades. Tanteo y ejemplificación. Escritura de expresiones decimales aproximadas. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* (Pocos) justificación verbal y/o simbólica de los procedimientos y/ o propiedades.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuaciones, en las ejemplificaciones, en la aproximación de expresiones decimales. Verbal en la expresión de las respuestas, en la identificación de propiedades y en la justificación de procedimientos. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y en el planteo de algunas situaciones.

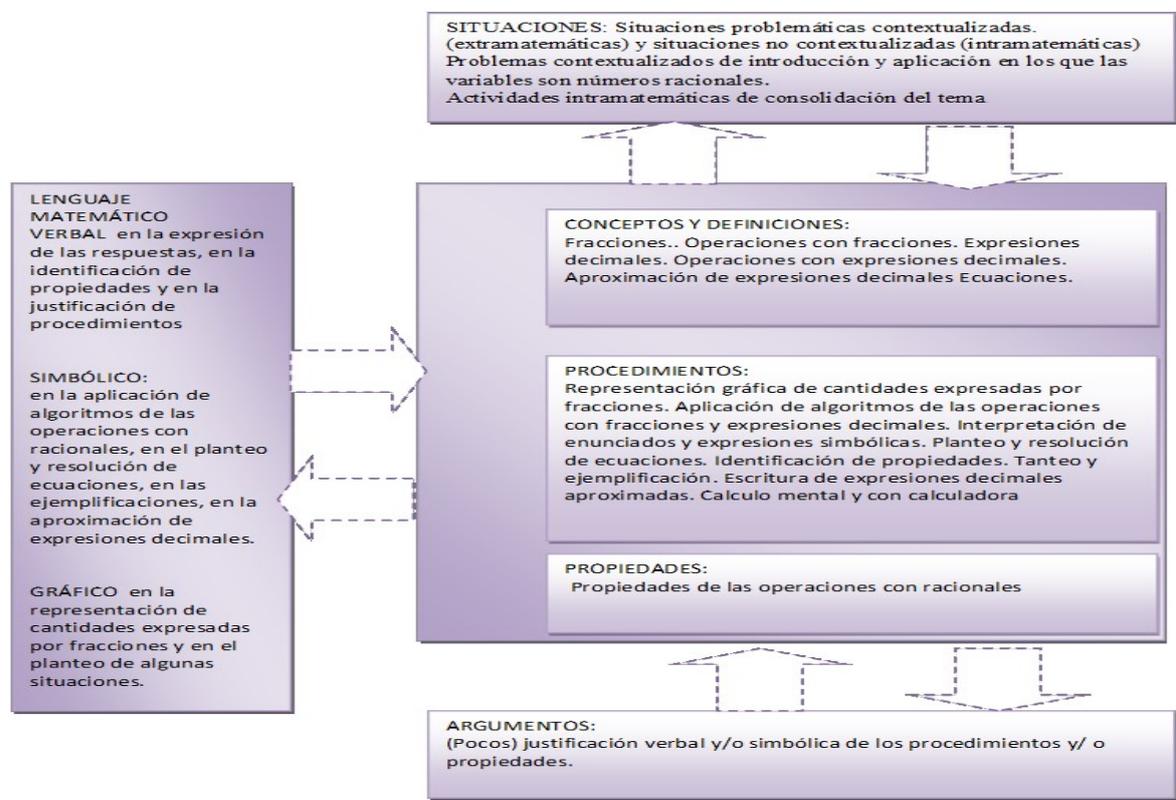


Figura 34: Configuración cognitiva del estudiante 12F

### **6.3.13. Configuración Cognitiva del estudiante 13F**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporciones. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Ecuaciones. Desigualdades. Proporcionalidad. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes, de las operaciones con racionales y (algunas) de las desigualdades.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Comparación de cantidades Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Planteo y resolución de ecuaciones. Resolución de desigualdades. Identificación de propiedades. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora. Cálculo de porcentajes.

*Argumentos.* Justificación verbal y/o simbólica de los procedimientos y/ o propiedades, con la utilización a veces de contraejemplos.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuaciones, en la resolución de desigualdades, en las ejemplificaciones, en el cálculo de porcentajes. Verbal en la expresión de las respuestas, para nombrar propiedades y en la justificación de procedimientos. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y en el planteo de algunas situaciones.

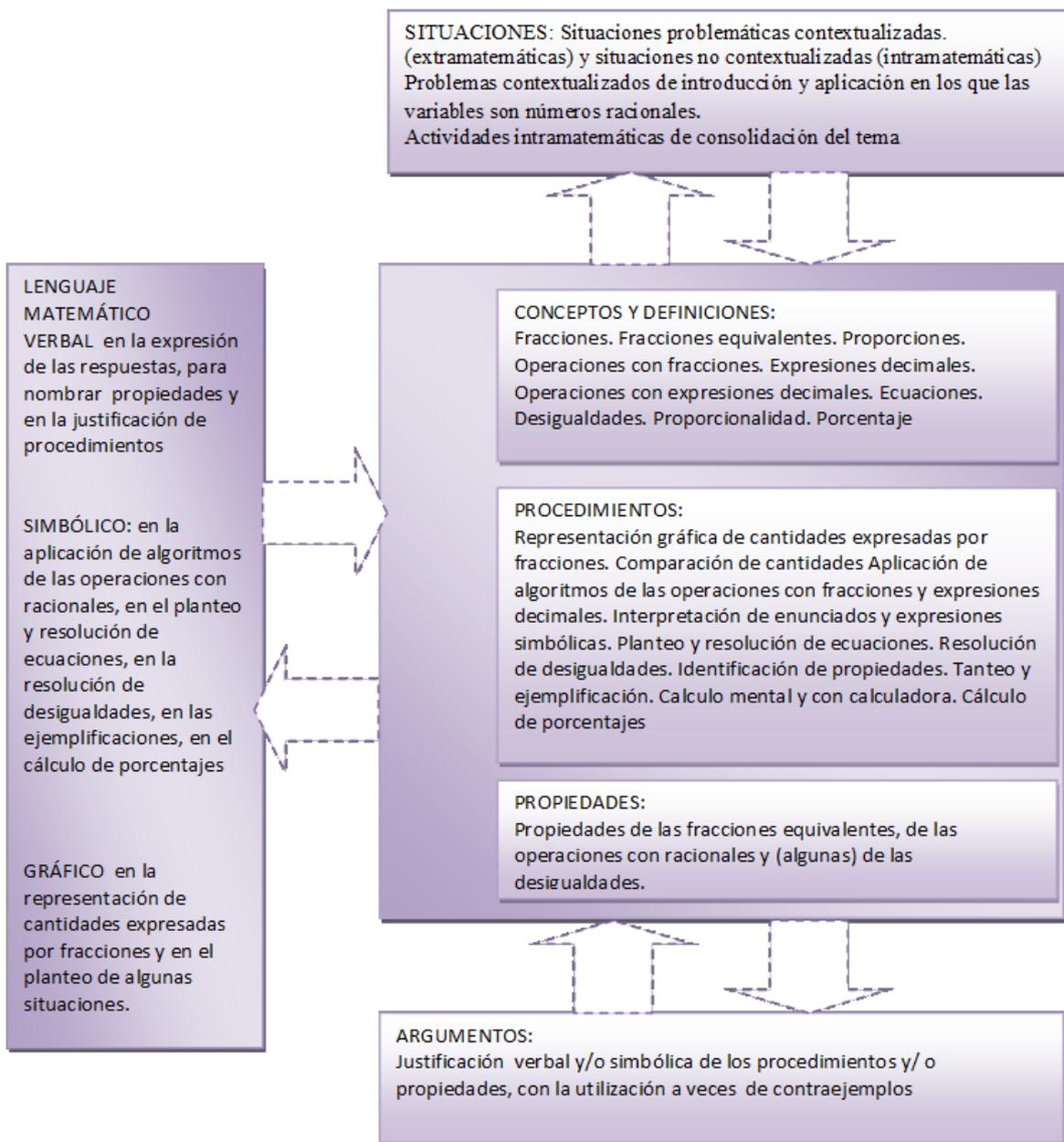


Figura 35: Configuración cognitiva del estudiante 13F

### 6.3.14. Configuración Cognitiva del estudiante 14F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Ecuaciones. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes, y (algunas) de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales.

Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Planteo y resolución de ecuaciones. Identificación de propiedades. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora. Cálculo de porcentajes.

*Argumento:* Prácticamente no se evidencia argumentación, solamente al nombrar propiedades o, con la utilización a veces de contraejemplos.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuaciones, en las ejemplificaciones y en el cálculo de porcentajes. Verbal en la expresión de las respuestas y para nombrar propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones.

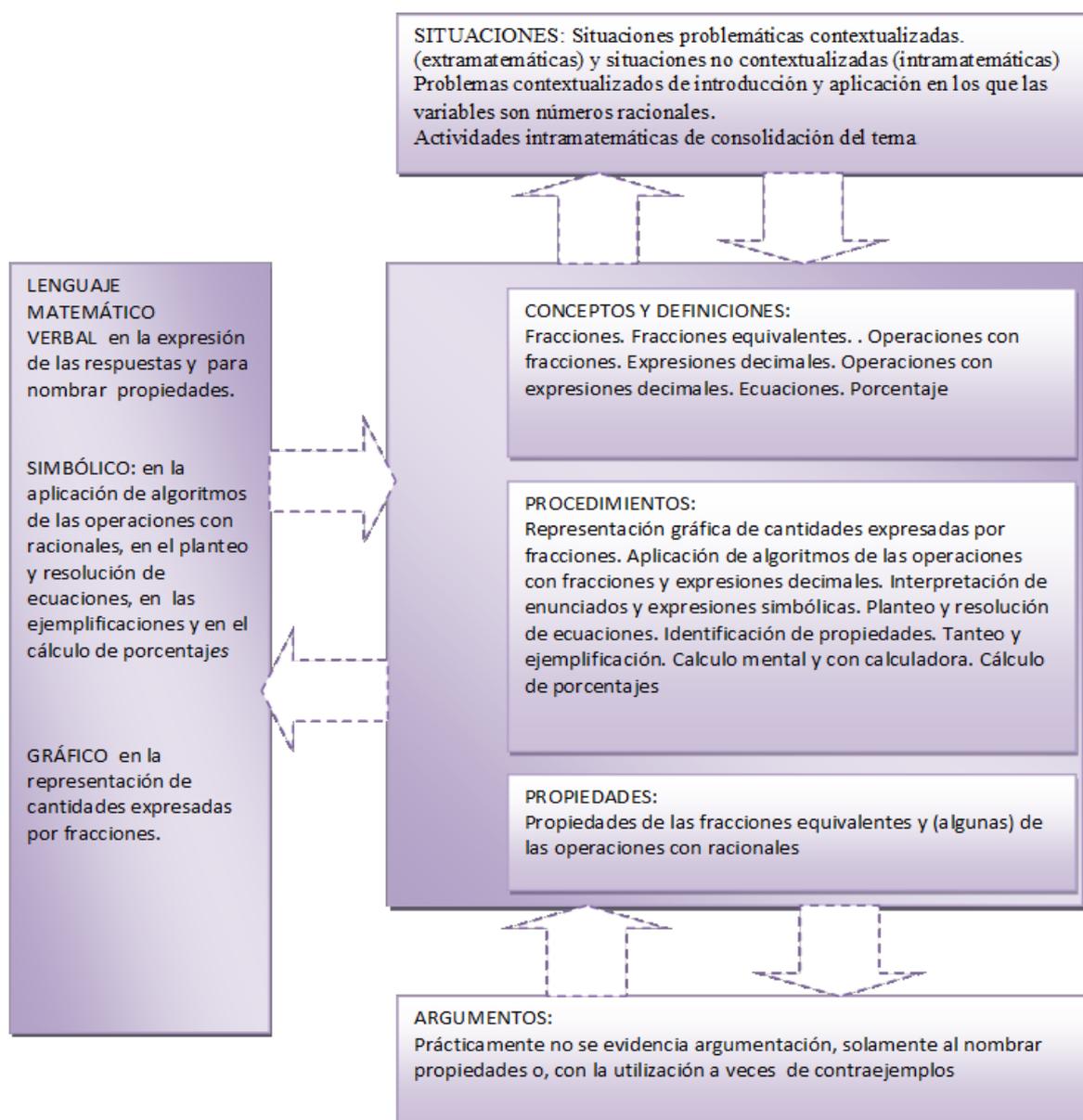


Figura 36: Configuración cognitiva del estudiante 14F

### **6.3.15. Configuración Cognitiva del estudiante 15F**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporciones. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Desigualdades. Proporcionalidad. Expresiones Decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación. Notación científica. Porcentaje

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes, de las operaciones con racionales y de las desigualdades.

*Procedimientos:* Identificación y representación gráfica de fracciones, aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Ejemplificaciones. Resolución y planteo de ecuaciones. Tanteo y formalización. Cálculo mental y con calculadora. Identificación de propiedades. Escritura de expresiones decimales aproximadas y en notación científica. Cálculo de porcentajes. Traducción de enunciados verbales a gráficos y expresiones simbólicas.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos, nombrando propiedades o dando ejemplos concretos.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones, planteo y resolución de ecuaciones y desigualdades, escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales, aproximación de expresiones decimales y escritura en notación científica, propiedades de las operaciones, y porcentajes. Verbal *para* nombrar propiedades, expresar soluciones y para la argumentación de respuestas y el gráfico para representar cantidades expresadas por racionales y para el planteo de situaciones problemas.

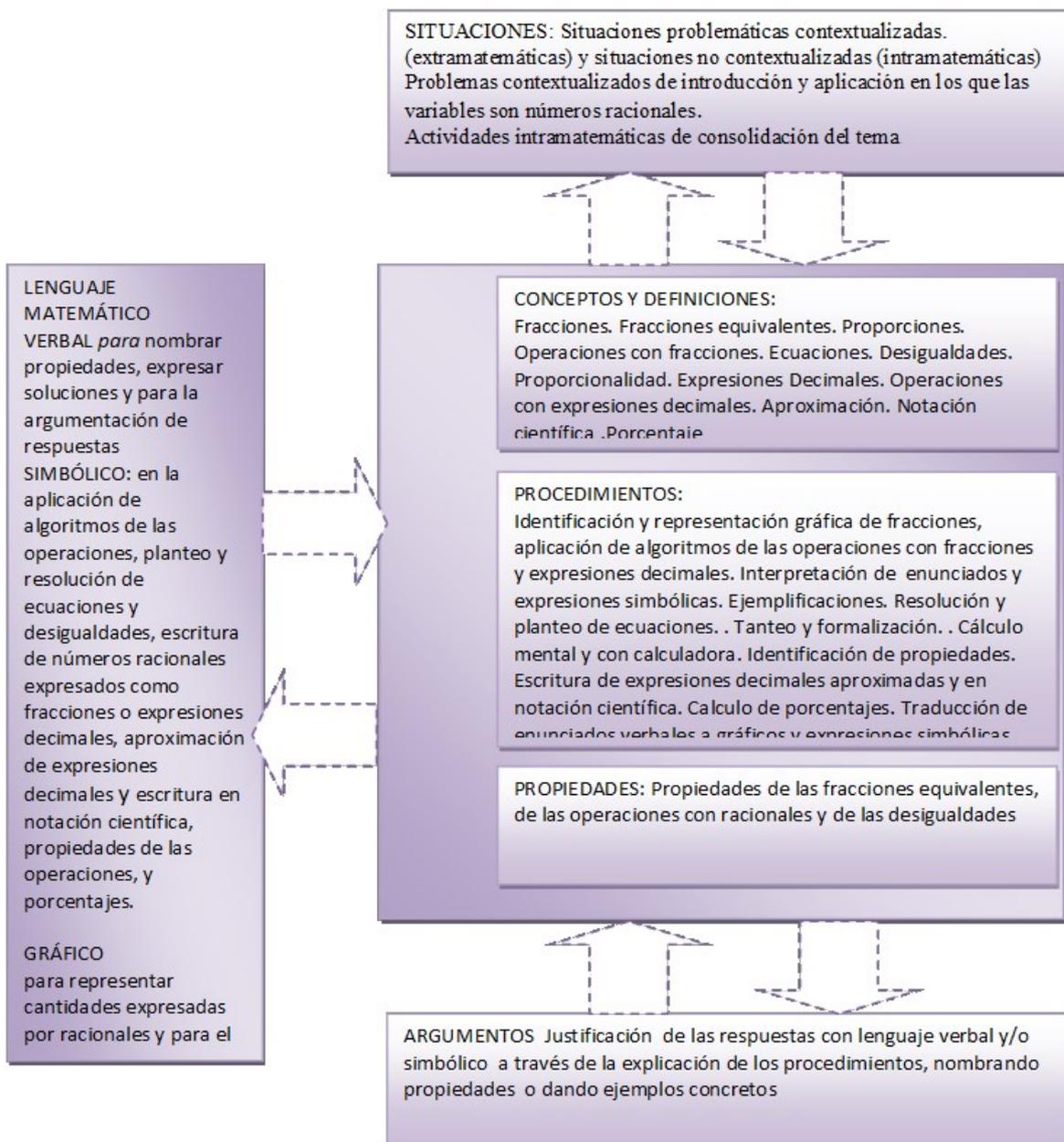


Figura 37: Configuración cognitiva del estudiante 15F

### 6.3.16. Configuración Cognitiva del estudiante 16F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporciones. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales. Ecuaciones. Desigualdades. Proporcionalidad. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de cantidades. Planteo y resolución de ecuaciones. Análisis e interpretación de desigualdades. Identificación de propiedades. Escritura de expresiones decimales aproximadas. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora. Cálculo de porcentajes.

*Argumentos.* . Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos, nombrando propiedades o dando ejemplos concretos.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuaciones, en la interpretación de desigualdades, en la escritura de expresiones decimales aproximadas, en las ejemplificaciones y en el cálculo de porcentajes. Verbal en la justificación de las respuestas, en la expresión de las soluciones y para nombrar propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y en el planteo de algunas situaciones problemas.

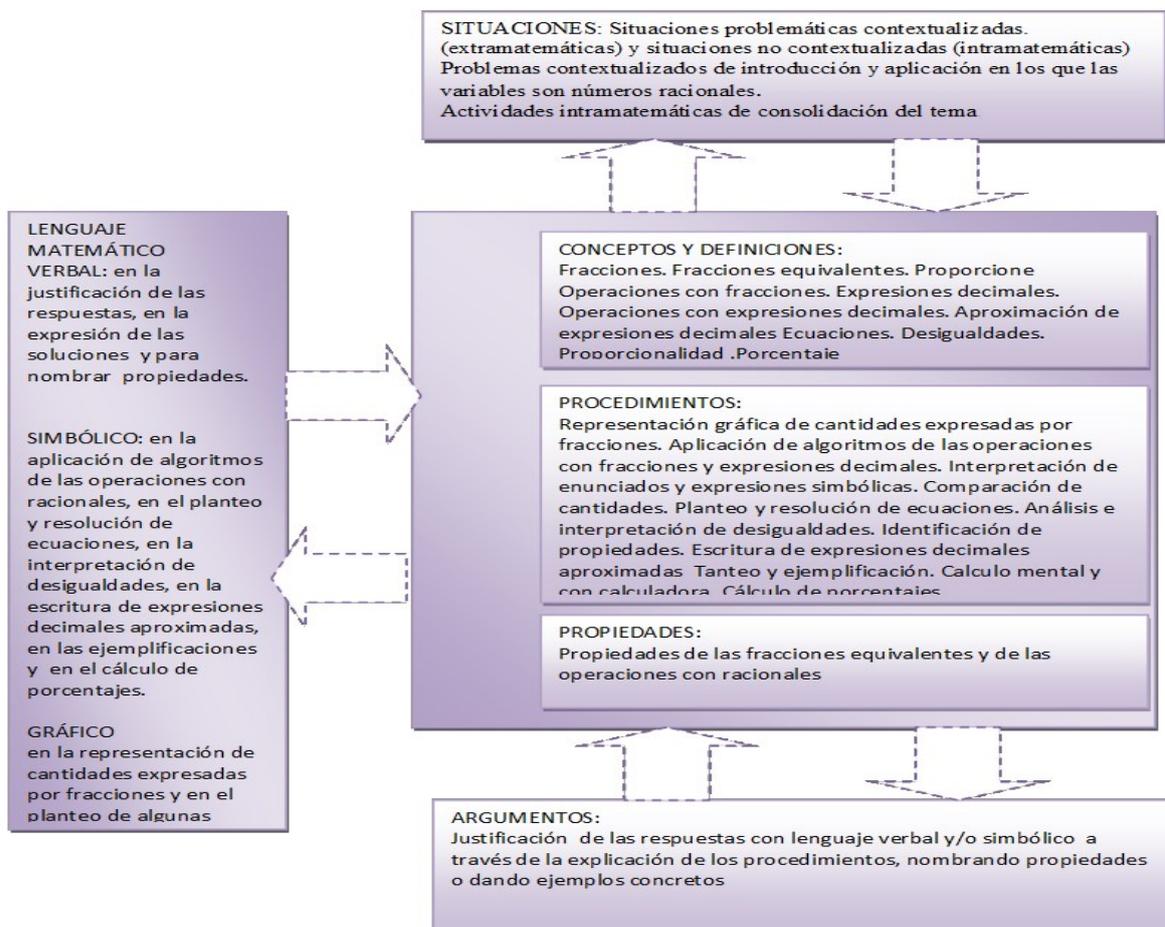


Figura 38: Configuración cognitiva del estudiante 16F

### 6.3.17. Configuración Cognitiva del estudiante 17F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Ecuaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Resolución de ecuaciones. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Prácticamente no se evidencia argumentación, solamente ejemplificaciones para determinar verdad o falsedad de las expresiones involucradas.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en la resolución de ecuaciones, y en las ejemplificaciones. Verbal (poco) en la expresión de las soluciones y para nombrar algunas propiedades. Gráfico (poco) en la representación de cantidades expresadas por fracciones.

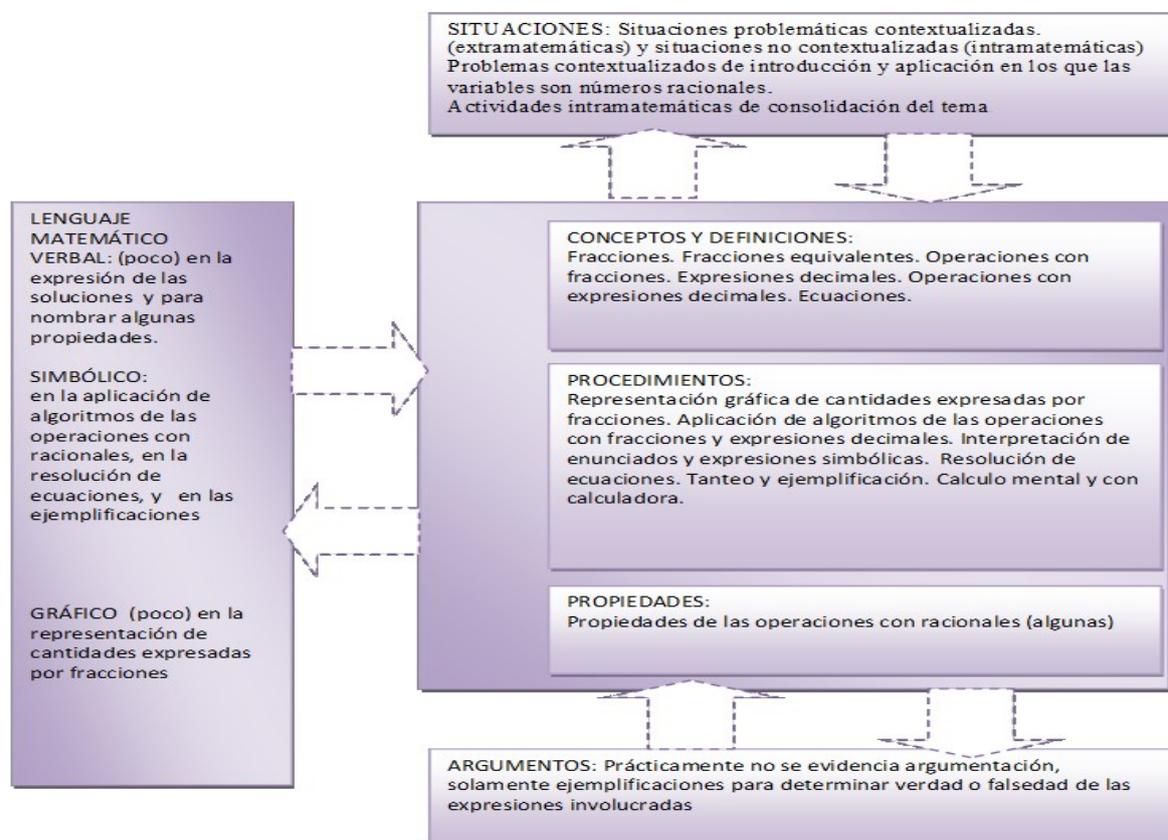


Figura 39: Configuración cognitiva del estudiante 17F

### **6.3.18. Configuración Cognitiva del estudiante 18F**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales. Ecuaciones. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Comparación de cantidades. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Resolución de ecuaciones. Tanteo y ejemplificación. Escritura de expresiones decimales aproximadas. Cálculo mental y con calculadora. Traducción de enunciados verbales a gráficos. Cálculo de porcentajes.

*Argumentos.* Prácticamente no se evidencia argumentación, solamente ejemplificaciones para verificar propiedades.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en la resolución de ecuaciones, en las ejemplificaciones, en la escritura de expresiones decimales aproximadas y en el cálculo de porcentajes. Verbal (poco) en la expresión de las soluciones y para nombrar algunas propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y en el planteo de situaciones problemas.

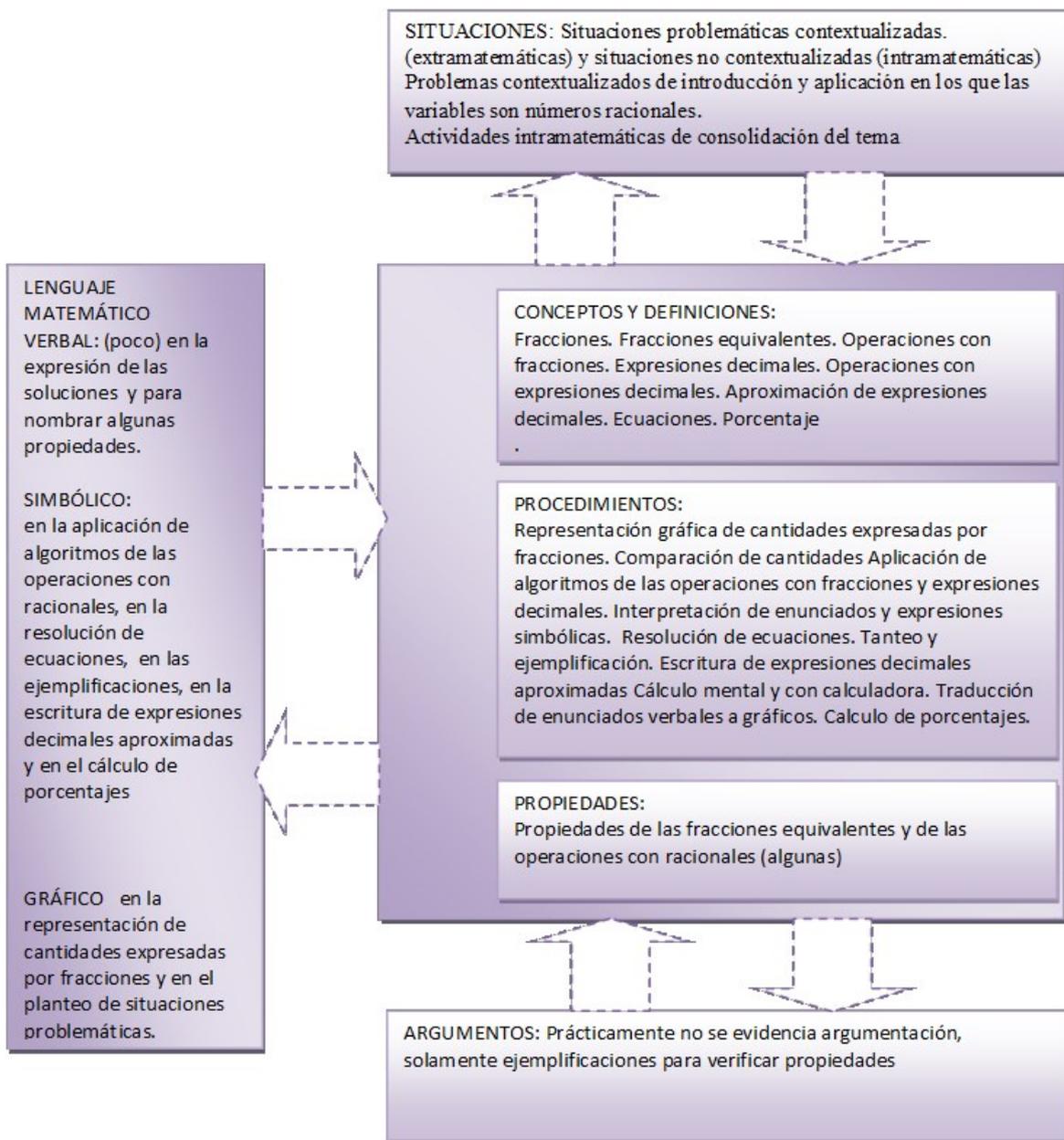


Figura 40: Configuración cognitiva del estudiante 18F

### 6.3.19. Configuración Cognitiva del estudiante 19F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Ecuaciones. Desigualdades. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Resolución de ecuaciones y desigualdades. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora. Cálculo de porcentajes.

*Argumentos.* Prácticamente no se evidencia argumentación.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en la resolución de ecuaciones, en la verificación de desigualdades, en las ejemplificaciones, y en el cálculo de porcentajes. Verbal (poco) en la expresión de las soluciones y para nombrar algunas propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones.

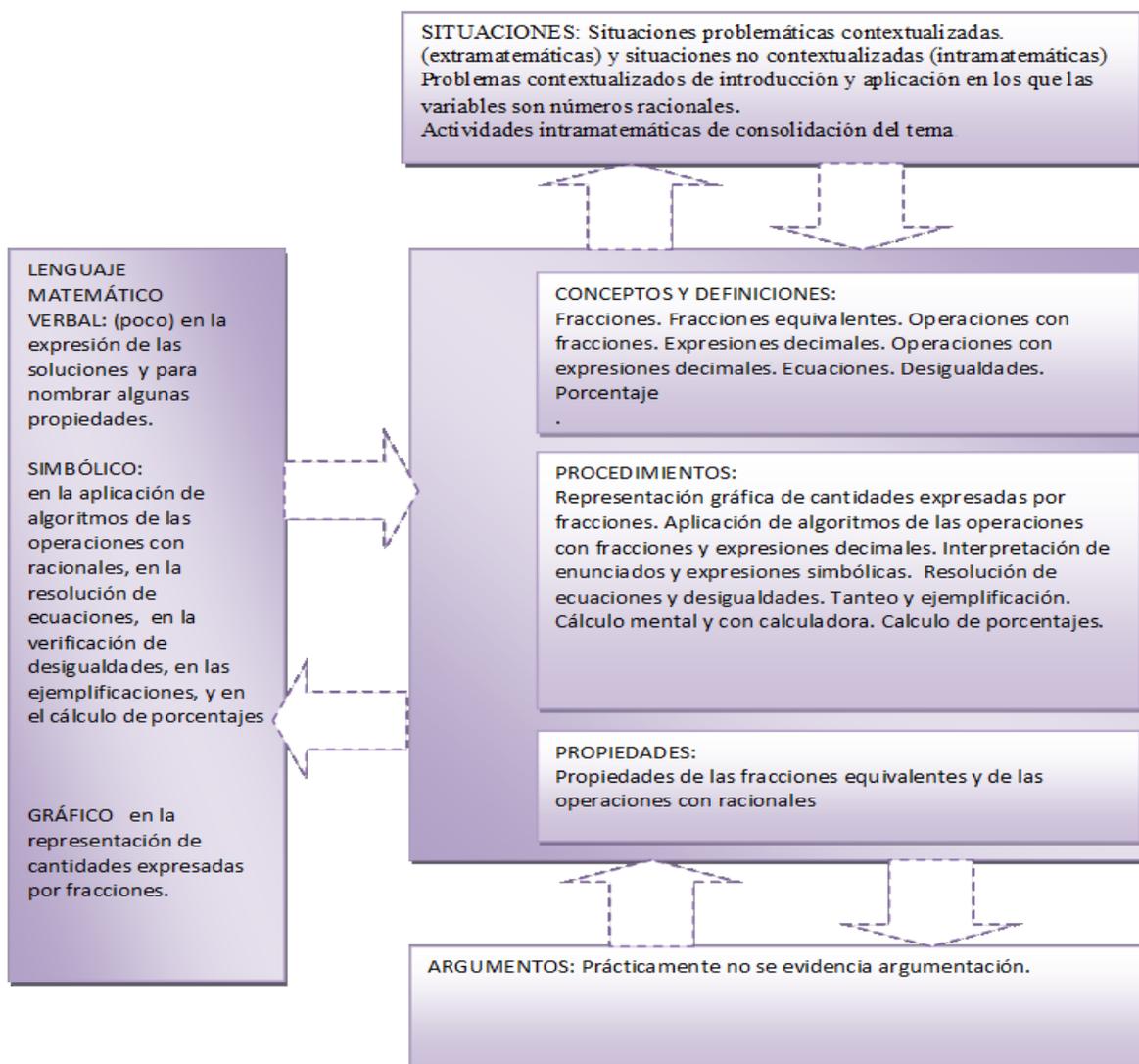


Figura 41: Configuración cognitiva del estudiante 19F

### **6.3.20. Configuración Cognitiva del estudiante 20F**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales. Notación científica. Ecuaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Escritura de expresiones decimales aproximadas y en notación científica. Planteo y resolución de ecuaciones. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora. Traducción de enunciados verbales a simbólicos y gráficos.

*Argumentos.* (Algunos) Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos, nombrando propiedades o dando ejemplos concretos.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en la escritura de expresiones decimales aproximadas o en notación científica, en la resolución de ecuaciones, y en las ejemplificaciones. Verbal en la expresión de las soluciones, en la justificación de las respuestas y para nombrar algunas propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y para el planteo de situaciones problemas.

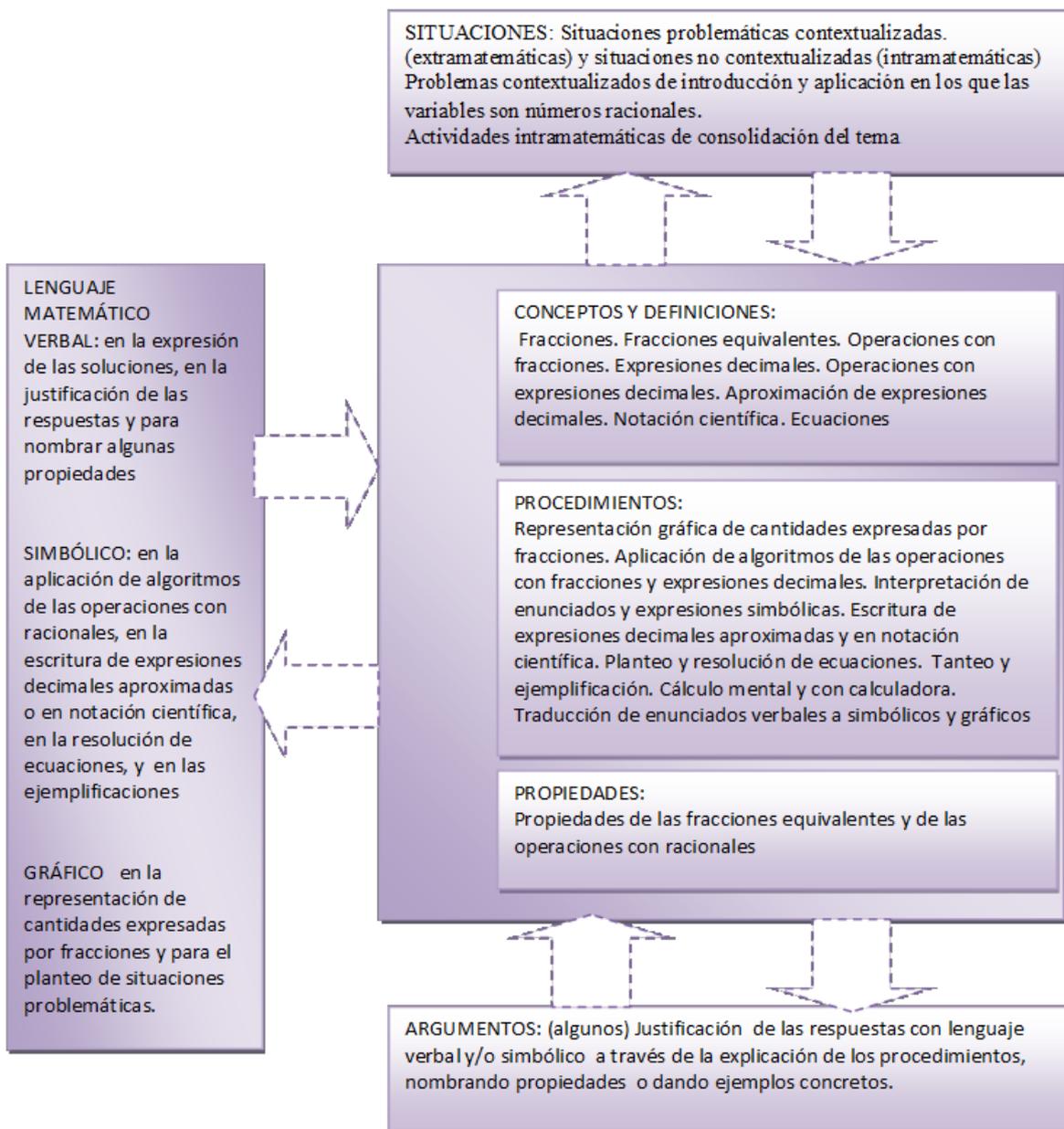


Figura 42: Configuración cognitiva del estudiante 20F

### 6.3.21. Configuración Cognitiva del estudiante 21F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporción. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones. Aproximación por redondeo. Ecuaciones. Proporcionalidad. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales.

Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Planteo y resolución de ecuaciones. Escritura de expresiones decimales aproximadas por redondeo. Tanteo y ejemplificación. Cálculo de porcentajes. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* (Pocos) justificación verbal y/o simbólica de los procedimientos.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuación, en las ejemplificaciones, en la escritura de expresiones decimales aproximadas, en el cálculo de porcentajes. Verbal en la expresión de las respuestas y en la justificación de procedimientos. Gráfico (poco) en la representación de cantidades expresadas por fracciones.

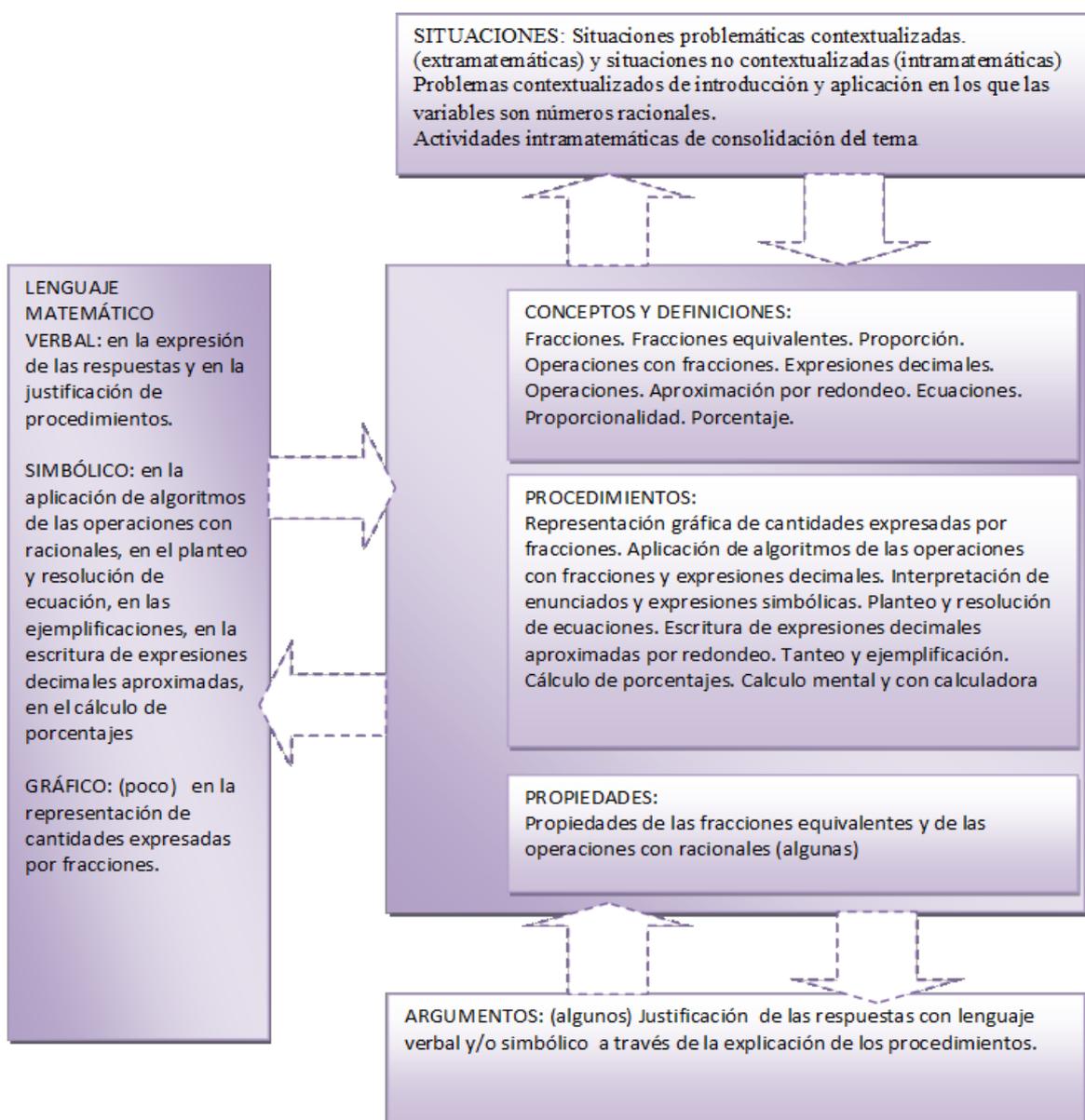


Figura 43: Configuración cognitiva del estudiante 21F

### 6.3.22. Configuración Cognitiva del estudiante 22F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones. Ecuaciones. Desigualdades.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Comparación de cantidades. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Planteo y resolución de ecuaciones. Verificación de desigualdades. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Prácticamente no se evidencia argumentación.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuaciones, en las ejemplificaciones, en la verificación de desigualdades. Verbal (poco) en la expresión de las respuestas. Gráfico (poco) en la representación de cantidades expresadas por fracciones.

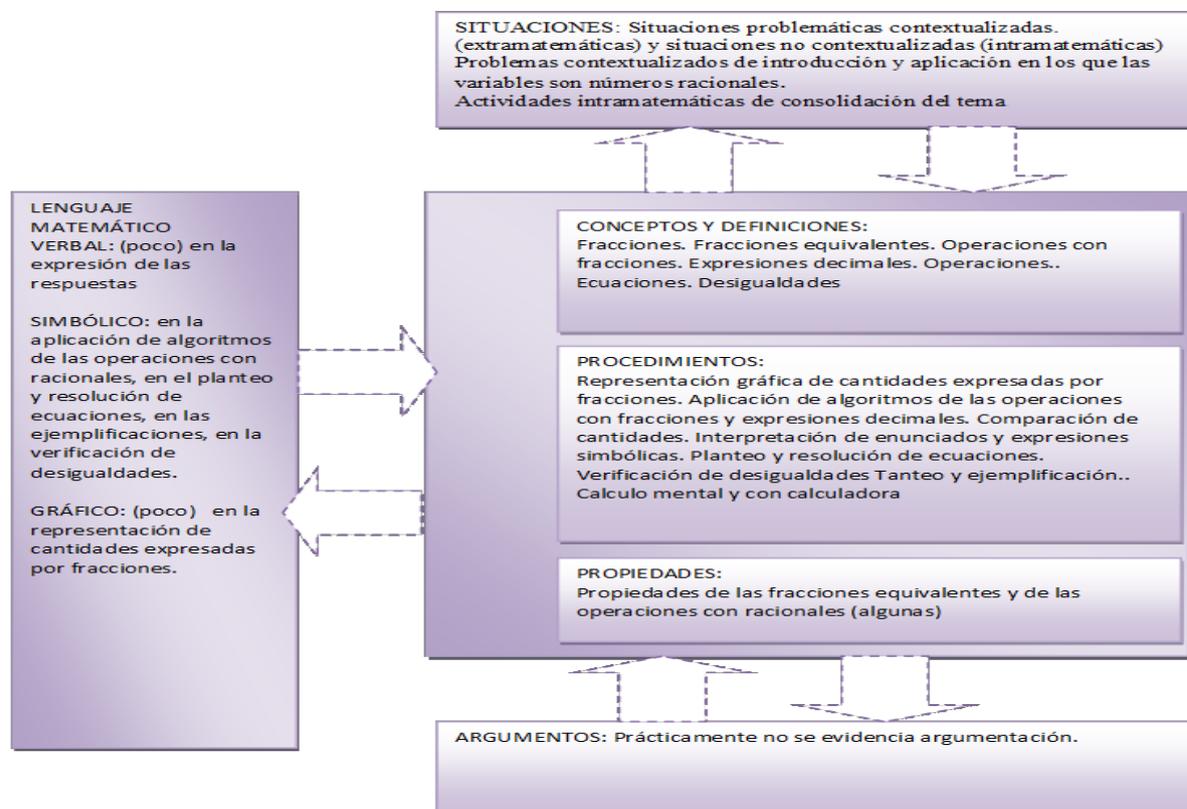


Figura 44: Configuración cognitiva del estudiante 22F

### **6.3.23. Configuración Cognitiva del estudiante 23F**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporciones. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Aproximación de expresiones decimales. Notación científica. Ecuaciones. Proporcionalidad. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de cantidades. Planteo y resolución de ecuaciones. Verificación de igualdades. Identificación de propiedades. Escritura de expresiones decimales aproximadas y en notación científica. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora. Cálculo de porcentajes.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal y/o simbólico a través de la explicación de los procedimientos, nombrando propiedades, verificando igualdades o dando ejemplos concretos.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en el planteo y resolución de ecuaciones, en la verificación de igualdades, en la escritura de expresiones decimales aproximadas y en notación científica, en las ejemplificaciones y en el cálculo de porcentajes. Verbal en la justificación de las respuestas, en la expresión de las soluciones y para nombrar propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y en el planteo de algunas situaciones problemas.

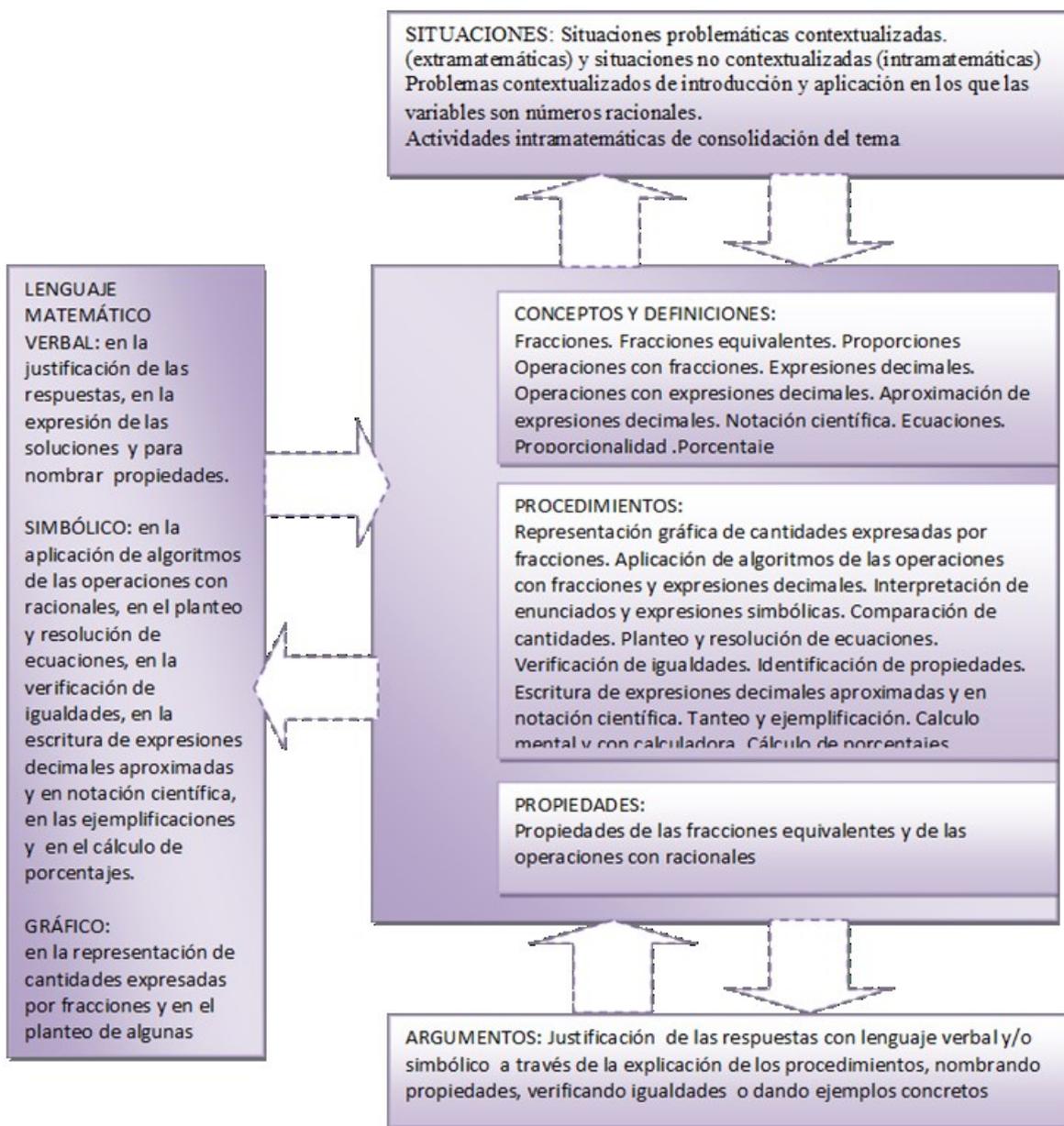


Figura 45: Configuración cognitiva del estudiante 23F

### 6.3.24. Configuración Cognitiva del estudiante 24F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporciones Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Ecuaciones. Proporcionalidad. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con racionales.

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de cantidades.

Resolución de ecuaciones. Identificación de propiedades. Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora. Cálculo de porcentajes.

*Argumentos.* Prácticamente no se evidencia argumentación.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en la resolución de ecuaciones, en las ejemplificaciones y en el cálculo de porcentajes. Verbal en la expresión de las soluciones y para nombrar propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y en el planteo de algunas situaciones problemas.

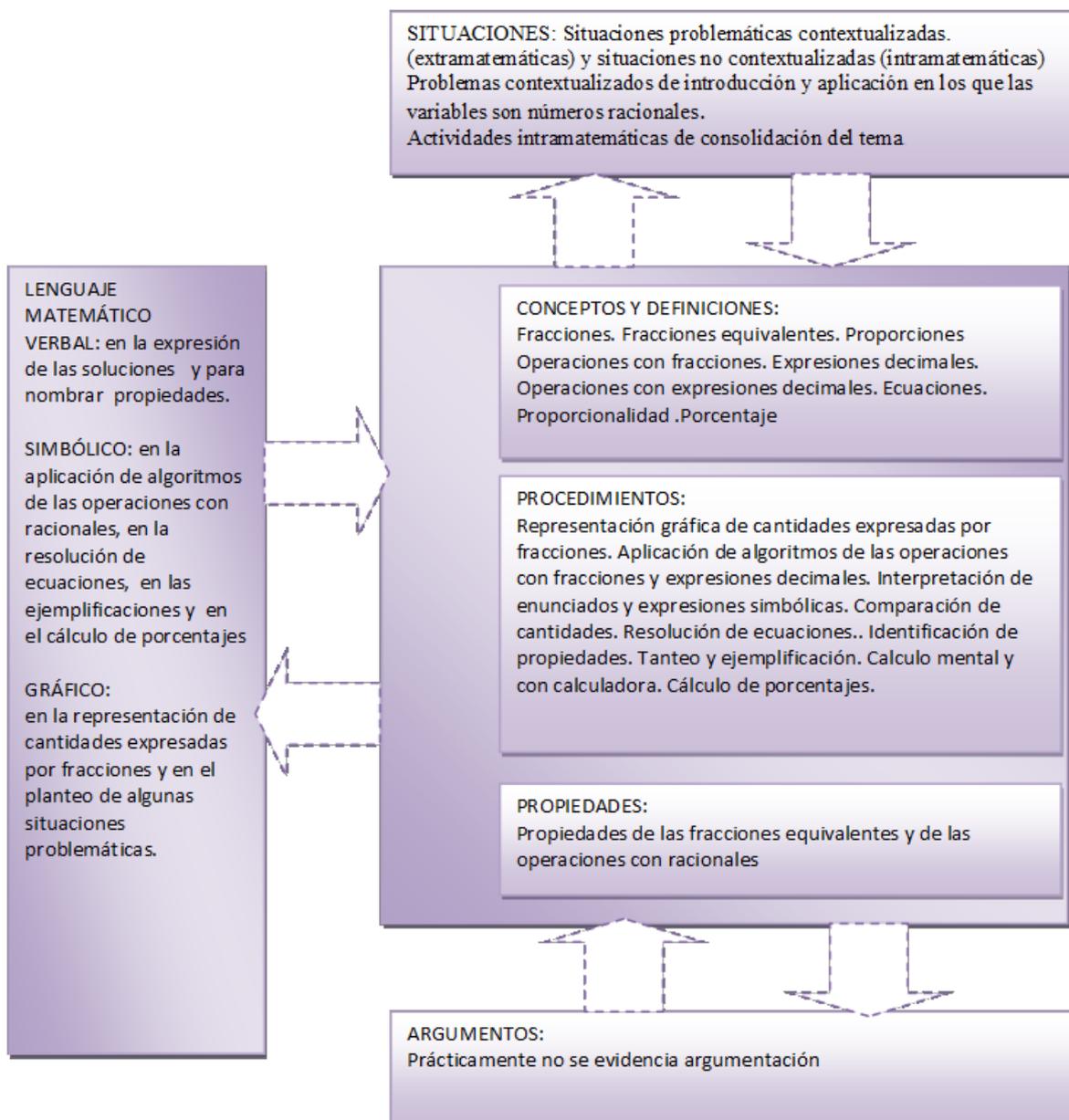


Figura 46: Configuración cognitiva del estudiante 24F

### 6.3.25. Configuración Cognitiva del estudiante 25F

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Notación científica Ecuaciones. Desigualdades.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes, de las desigualdades y de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de cantidades. Resolución de ecuaciones y desigualdades. Expresión de cantidades en notación científica Tanteo y ejemplificación. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Prácticamente no se evidencia argumentación.

*Lenguaje.* Simbólico en la aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales, en la resolución de ecuaciones y desigualdades, en la escritura de cantidades en notación científica, y en las ejemplificaciones. Verbal (poco) en la expresión de las soluciones Gráfico (poco) en la representación de cantidades expresadas por fracciones.

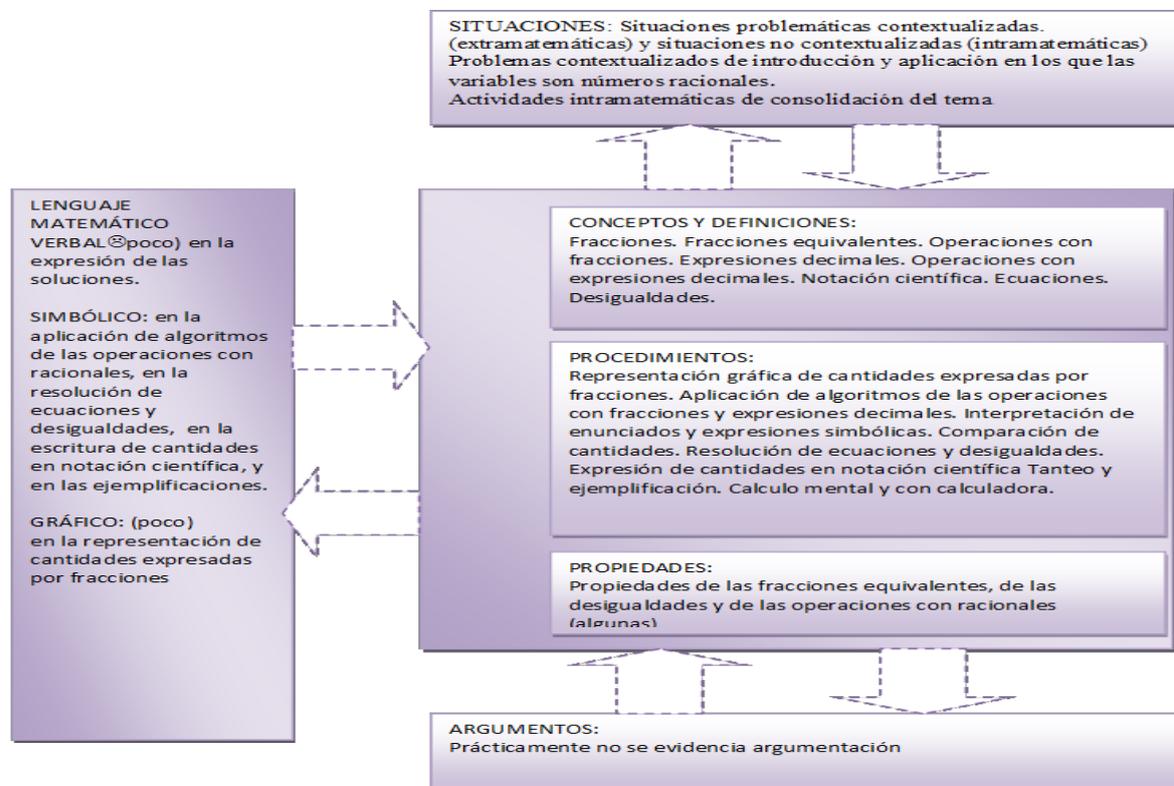


Figura 47: Configuración cognitiva del estudiante 25F

## 6.4. Configuraciones Cognitivas de los estudiantes del ISP N° 10

### 6.4.1. Configuración Cognitiva del estudiante 1I

*Conceptos:* Fracción. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Expresiones decimales. Aproximación.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con fracciones.

*Procedimientos:* Representación gráfica de fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Escritura de expresiones decimales aproximadas. Resolución de ecuaciones. Tanteo. . Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Explicación verbal del procedimiento algorítmico (pocos casos)

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico a través de (aplicación de algoritmos, planteo de ecuaciones, expresión simbólica de números racionales expresados como fracciones o decimales). El lenguaje gráfico (poco) aparece en representación de cantidades discretas y continuas expresadas por fracciones y el verbal (poco) para expresar algunas soluciones y argumentar procedimientos.

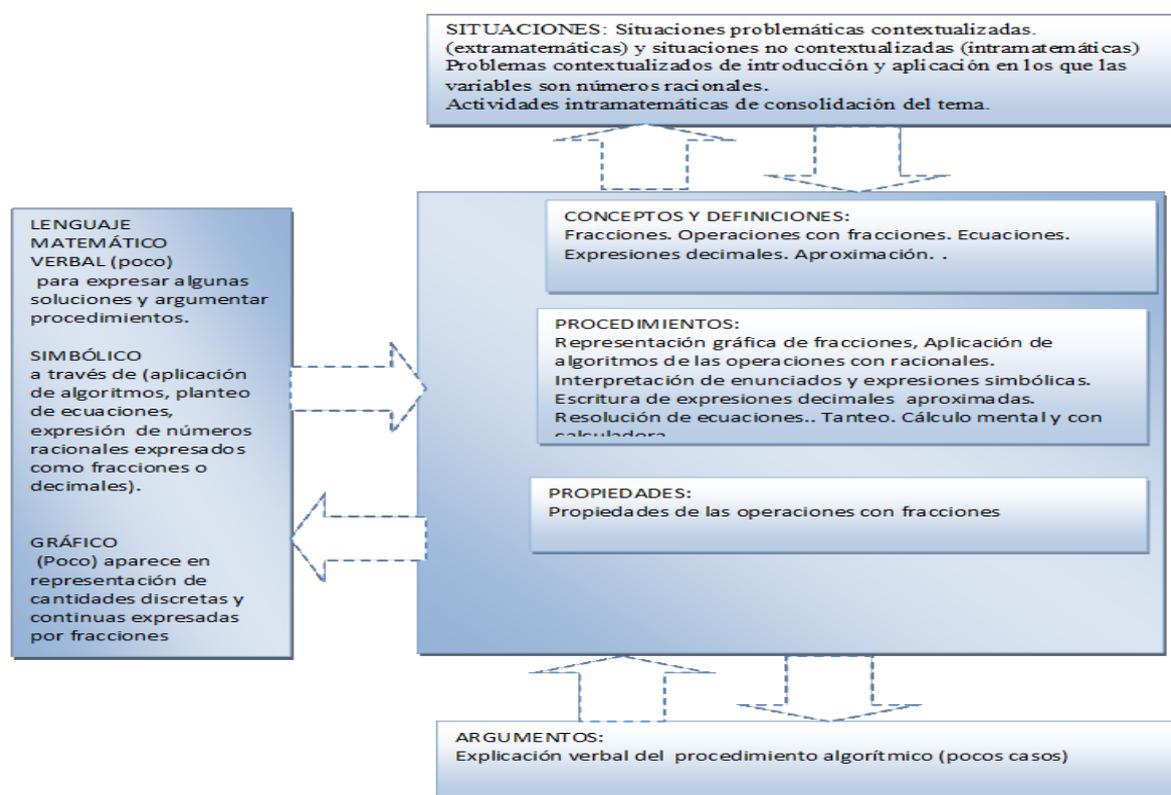


Figura 48: Configuración cognitiva del estudiante 1I

### **6.4.2. Configuración Cognitiva del estudiante 2I**

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes. Proporción. Operaciones con fracciones. Ecuaciones. Desigualdades. Proporcionalidad. Expresiones Decimales. Operaciones Aproximación. Notación científica. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes, de las operaciones con racionales y de las desigualdades

*Procedimientos:* Representación gráfica de fracciones, aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Resolución de ecuaciones. Expresión escrita de números decimales aproximados y expresiones en notación científica. Tanteo y formalización. . Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos.* Justificación de las respuestas con lenguaje verbal a través de la explicación de los procedimientos y mencionando alguna propiedad utilizada. Es decir son inductivos.

*Lenguaje.* Lenguaje simbólico en la expresión de algoritmos, en el planteo y resolución de ecuaciones, en la verificación de desigualdades, en la escritura de números racionales expresados como fracciones o expresiones decimales, y expresión de propiedades de las operaciones, y porcentajes. Verbal para la justificación de las respuestas y argumentación y el gráfico (poco) para representar cantidades expresadas por racionales o para interpretar el enunciado de un problema.

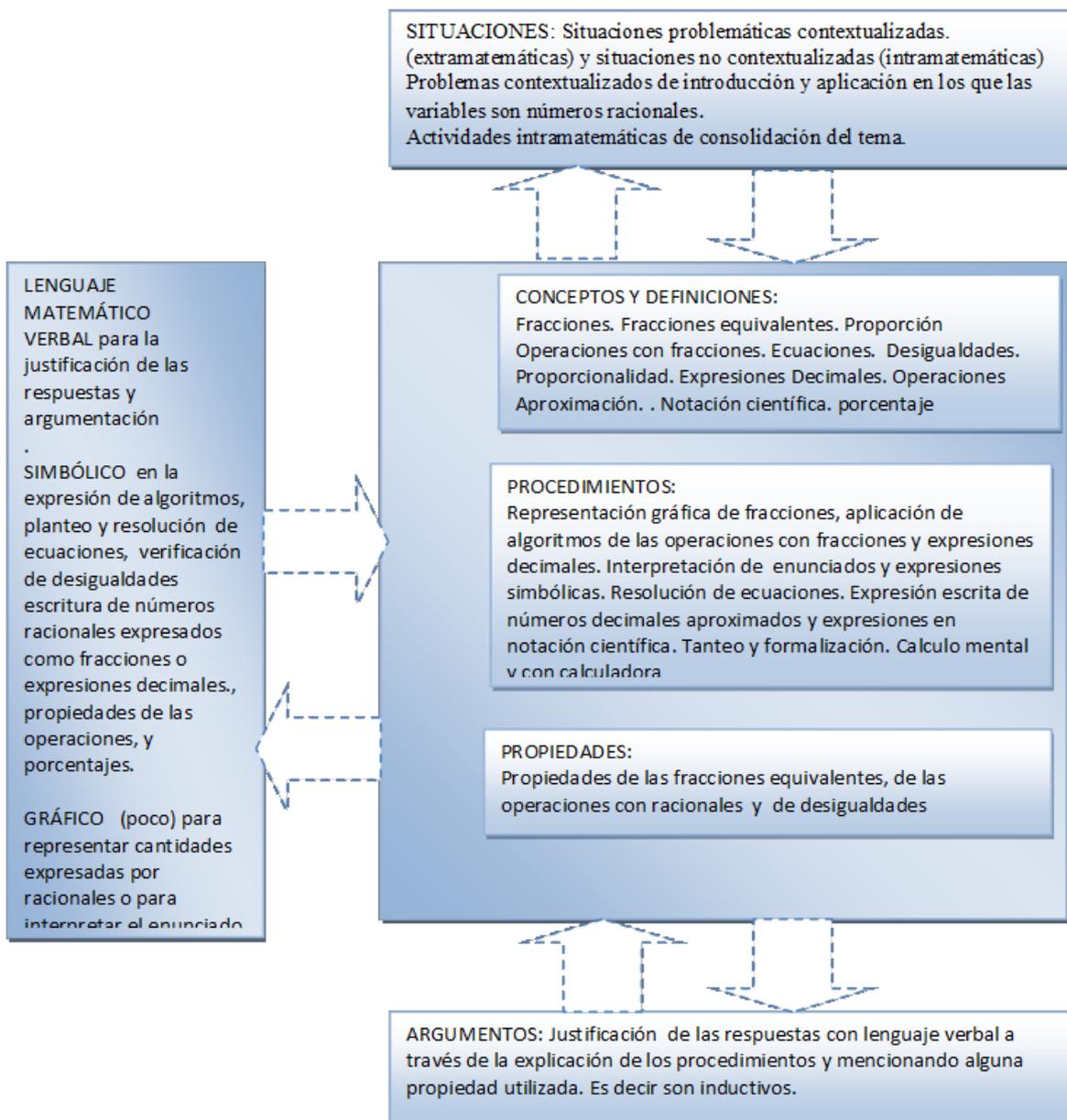


Figura 49: Configuración cognitiva del estudiante 2I

### 6.4.3. Configuración Cognitiva del estudiante 3I

*Conceptos:* Fracciones. Fracciones equivalentes .Operaciones con fracciones. Expresiones decimales y operaciones. Ecuaciones. Aproximación de expresiones decimales. Porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes y de las operaciones con fracciones.

*Procedimientos:* Representación gráfica de fracciones. Interpretación de enunciados de las situaciones problemas. Interpretación simbólica. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y decimales. Utilización de algunos gráficos en el planteo de

situaciones. Cálculo mental y con calculadora. Planteo y resolución de ecuaciones. Calculo de porcentajes.

*Argumentos:* Justificación verbal y / o simbólica de los procedimientos o propiedades. (Algunas)

*Lenguaje:* Simbólico en la aplicación de algoritmos, en la resolución de ecuaciones en la escritura de expresiones decimales aproximadas. Lenguaje gráfico para plantear o interpretar las situaciones, y el lenguaje verbal para justificar sus respuestas a través de procedimientos utilizados

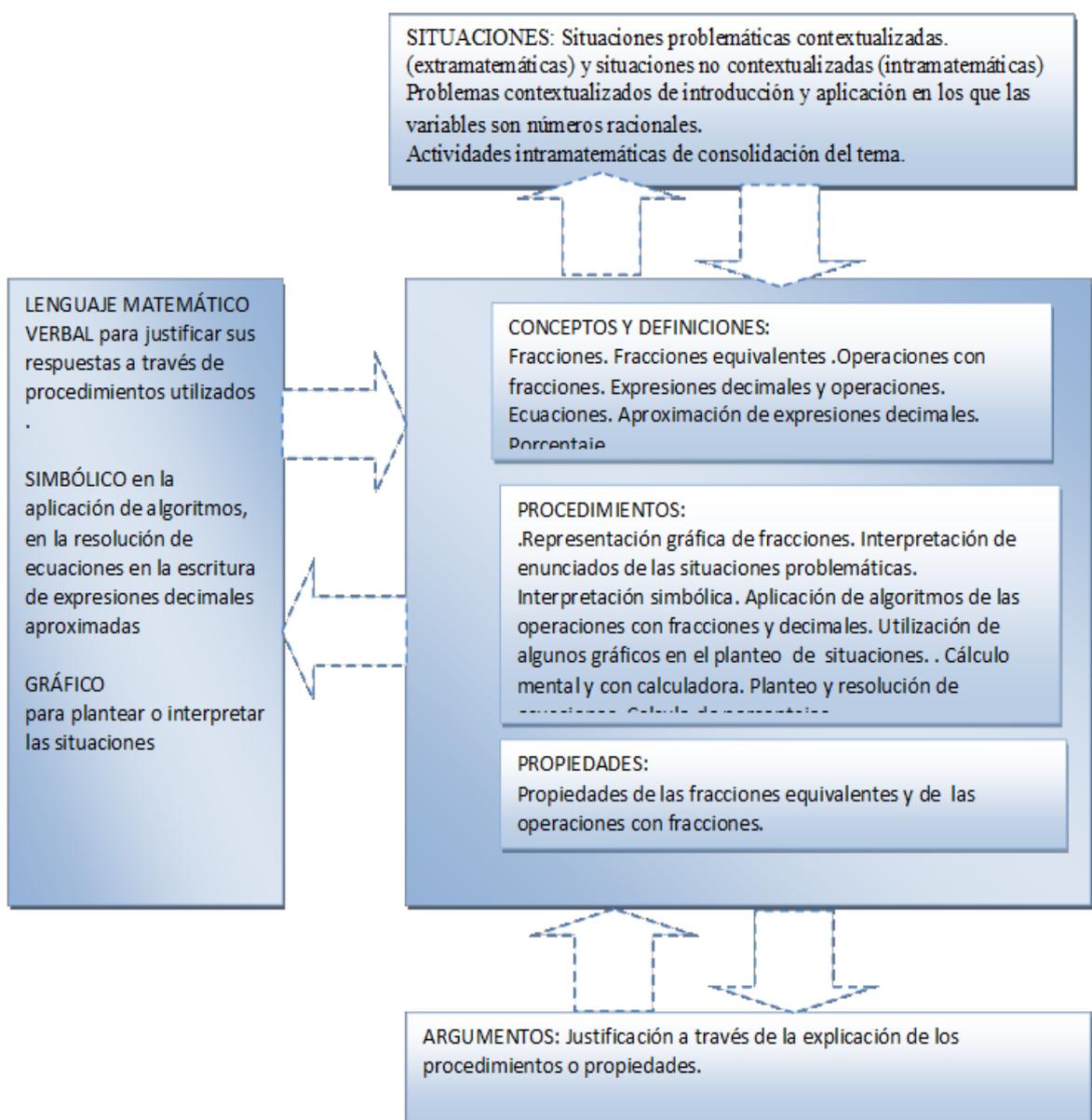


Figura 50: Configuración cognitiva del estudiante 3I

### 6.4.4. Configuración Cognitiva del estudiante 4I

*Conceptos:* Fracciones. Operaciones con fracciones. Expresiones decimales y operaciones. Ecuaciones. Aproximación de expresiones decimales.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con racionales (algunas).

*Procedimientos:* Interpretación de enunciados de las situaciones problemas. Interpretación de expresiones simbólicas. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y decimales. Resolución de ecuaciones. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos:* No se evidencian argumentos.

*Lenguaje:* Simbólico en la resolución de las actividades (utilización de algoritmos, planteo de ecuaciones y escritura de expresiones decimales en forma aproximada). Gráfico (muy poco) para representar cantidades expresadas por fracciones. El lenguaje verbal para expresar las respuestas de las situaciones problemas.

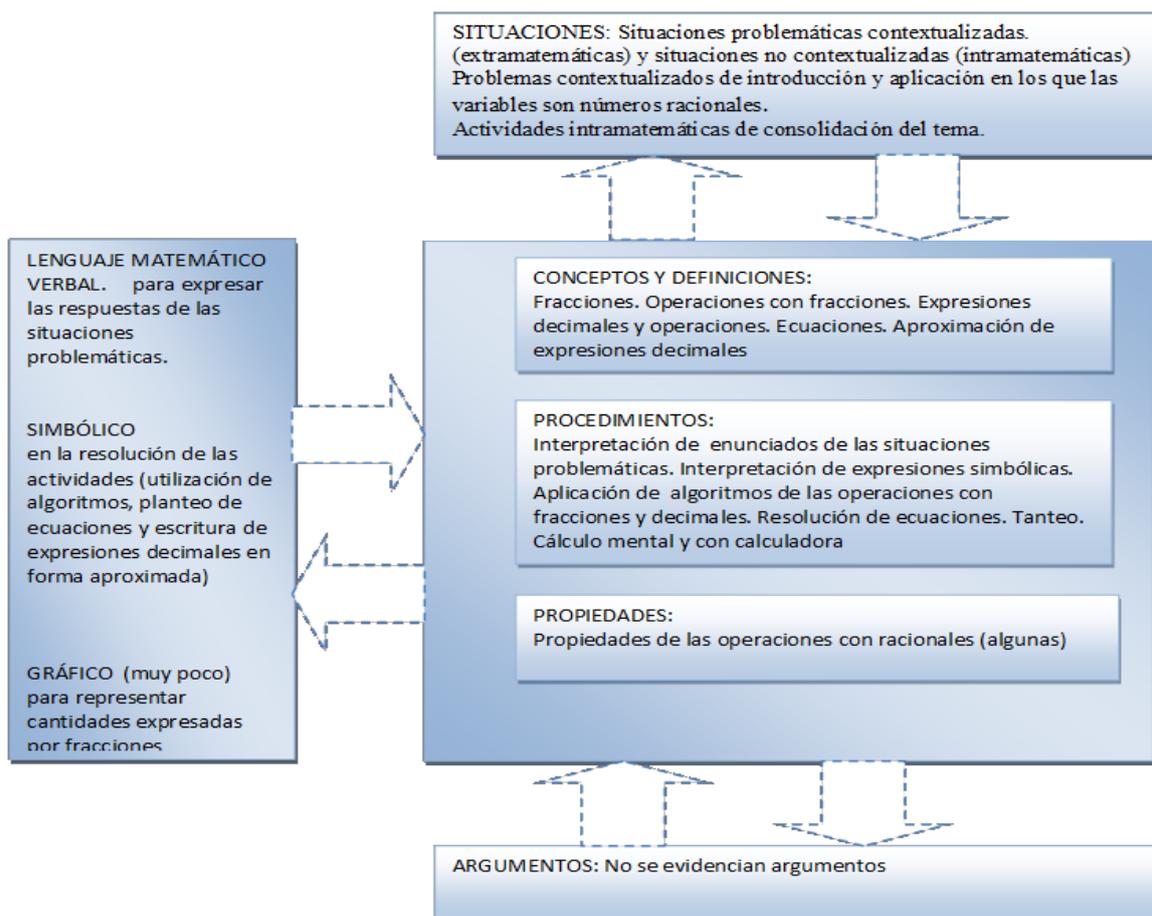


Figura 51: Configuración cognitiva del estudiante 4I

### 6.4.5. Configuración Cognitiva del estudiante 5I

*Conceptos:* Fracciones, operaciones con fracciones, ecuaciones, expresiones decimales y operaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con Racionales (algunas).

*Procedimientos:* Aplicación de algoritmos de las operaciones. Interpretación de enunciados y de expresiones simbólicas. Resolución de ecuaciones. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos:* Explicación verbal de los procedimientos utilizados en la resolución de actividades. (Pocos casos)

*Lenguaje:* Simbólico para la escritura de números racionales, para expresar algoritmos y propiedades. El lenguaje gráfico no aparece y el verbal en la escritura de sus respuestas y explicación de procedimientos.

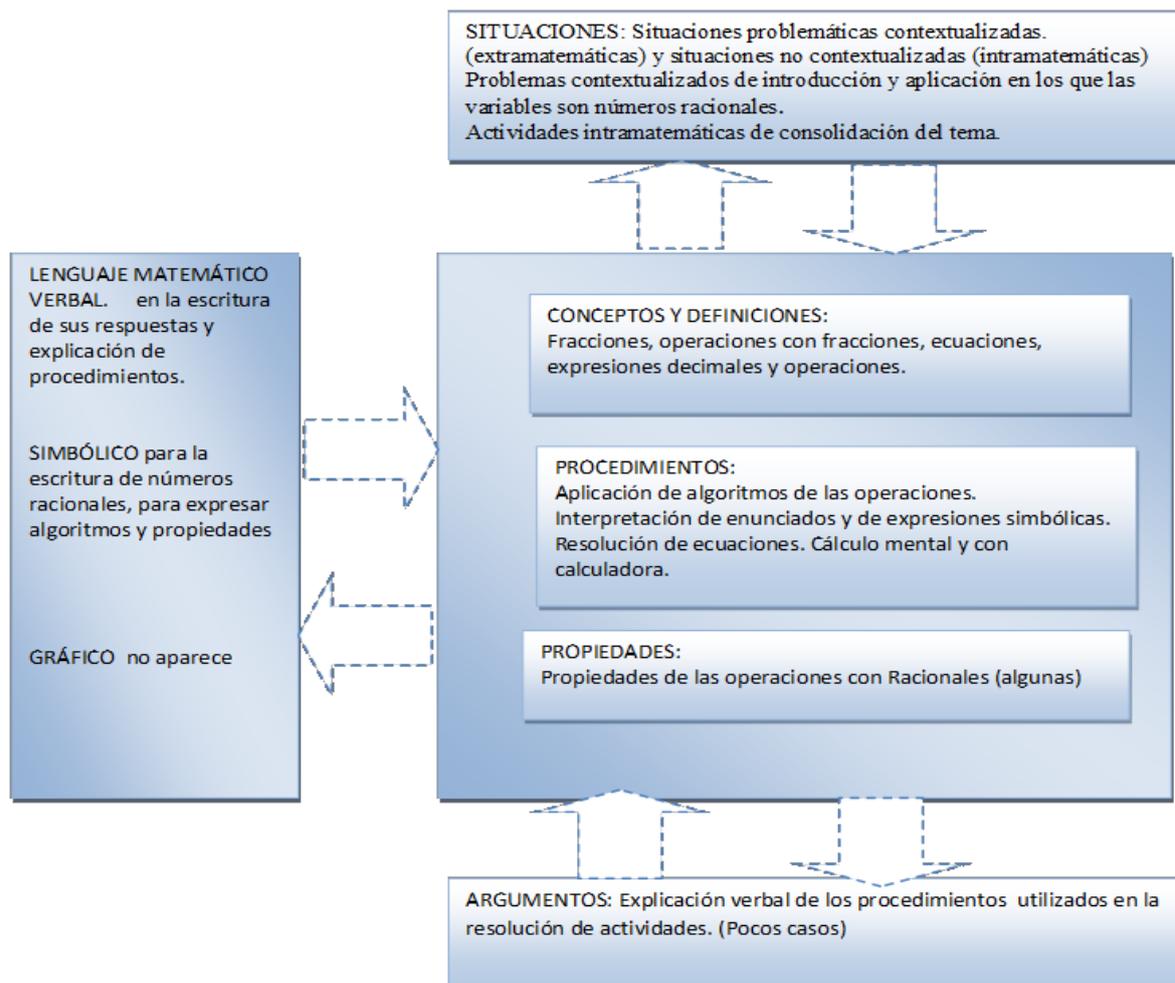


Figura 52: Configuración cognitiva del estudiante 5I

### 6.4.6. Configuración Cognitiva del estudiante 6I

*Conceptos:* Fracciones, operaciones con fracciones, ecuaciones, expresiones decimales y operaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con Racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representaciones gráficas de fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones. Interpretación de enunciados y de expresiones simbólicas. Tanteo. Cálculo mental y con calculadora

*Argumentos:* Justificación verbal de las actividades mediante explicación de los procedimientos y propiedades (pocos casos)

*Lenguaje:* Simbólico en la expresión de los números racionales, en los procedimientos y propiedades. Gráfico en la representación de cantidades expresadas por fracciones y para el planteo de situaciones problemas y verbal en la justificación de los procedimientos.

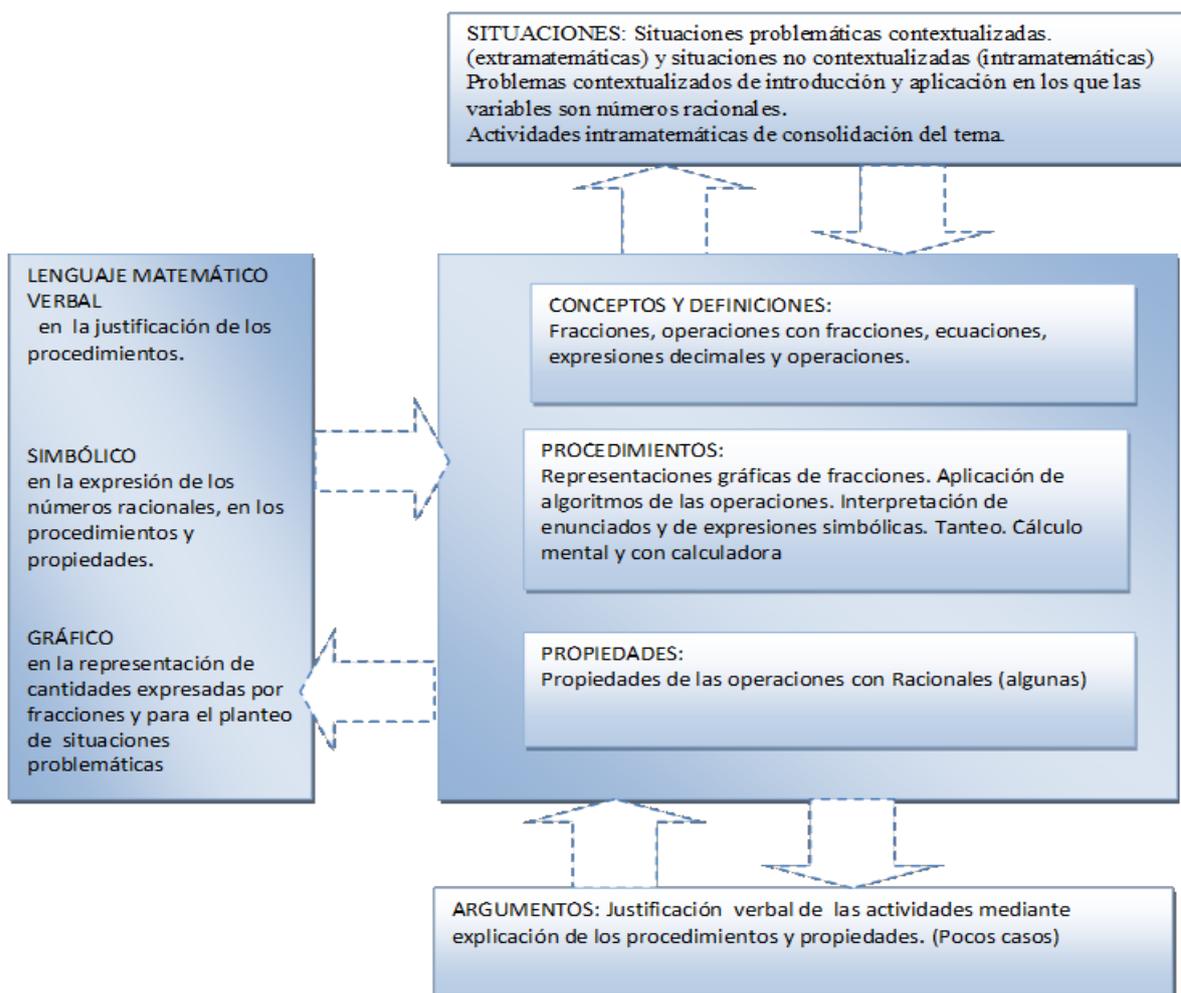


Figura 53: Configuración cognitiva del estudiante 6I

### 6.4.7. Configuración Cognitiva del estudiante 7I

*Conceptos:* Fracciones, operaciones con fracciones. Expresiones decimales. Operaciones con expresiones decimales. Ecuaciones y porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con Racionales. (Algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos:* No se evidencia argumentación.

*Lenguaje:* Gráfico (poco) para representar cantidades expresadas por fracciones. Simbólico en la expresión de números racionales, en la expresión de algoritmos y propiedades y verbal (poco) para expresar las soluciones de los problemas.

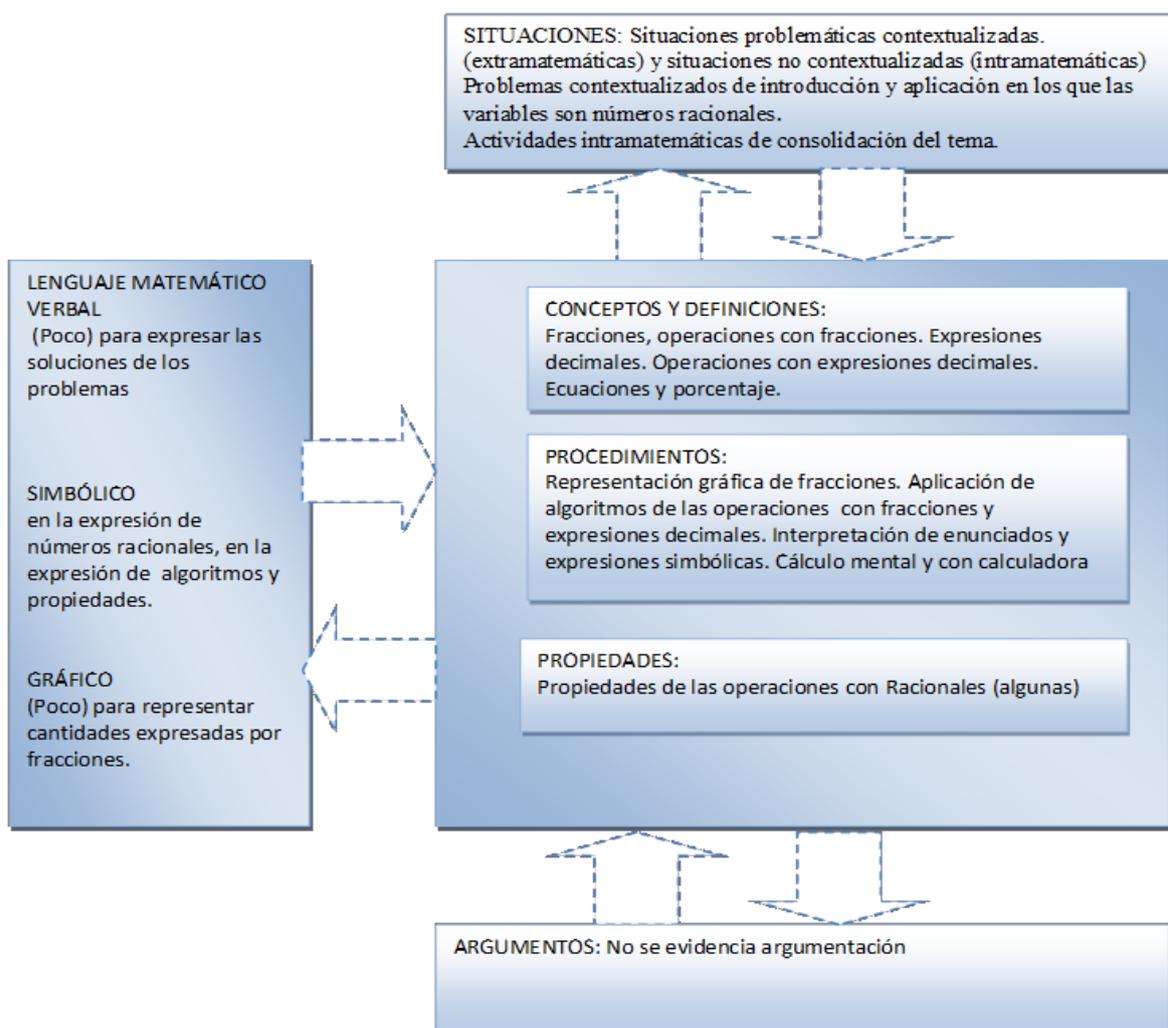


Figura 54: Configuración cognitiva del estudiante 7I

### 6.4.8. Configuración Cognitiva del estudiante 8I

*Conceptos:* Fracciones, operaciones con fracciones, ecuaciones, expresiones decimales, operaciones con expresiones decimales y aproximación con expresiones decimales, notación científica y porcentaje.

*Propiedades:* Propiedades de las fracciones equivalentes, de las operaciones con racionales y de las desigualdades.

*Procedimientos:* Representación gráfica de fracciones. Aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Tanteo y formalización. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos:* Justificación de las soluciones a través de la explicación de los procedimientos y propiedades. Inductivos.

*Lenguaje:* Simbólico en la expresión de números racionales, en la expresión de los procedimientos y propiedades, gráfico en las representación de cantidades y para el planteo de situaciones problemas y verbal en la argumentación de las soluciones para explicar procedimientos y propiedades.

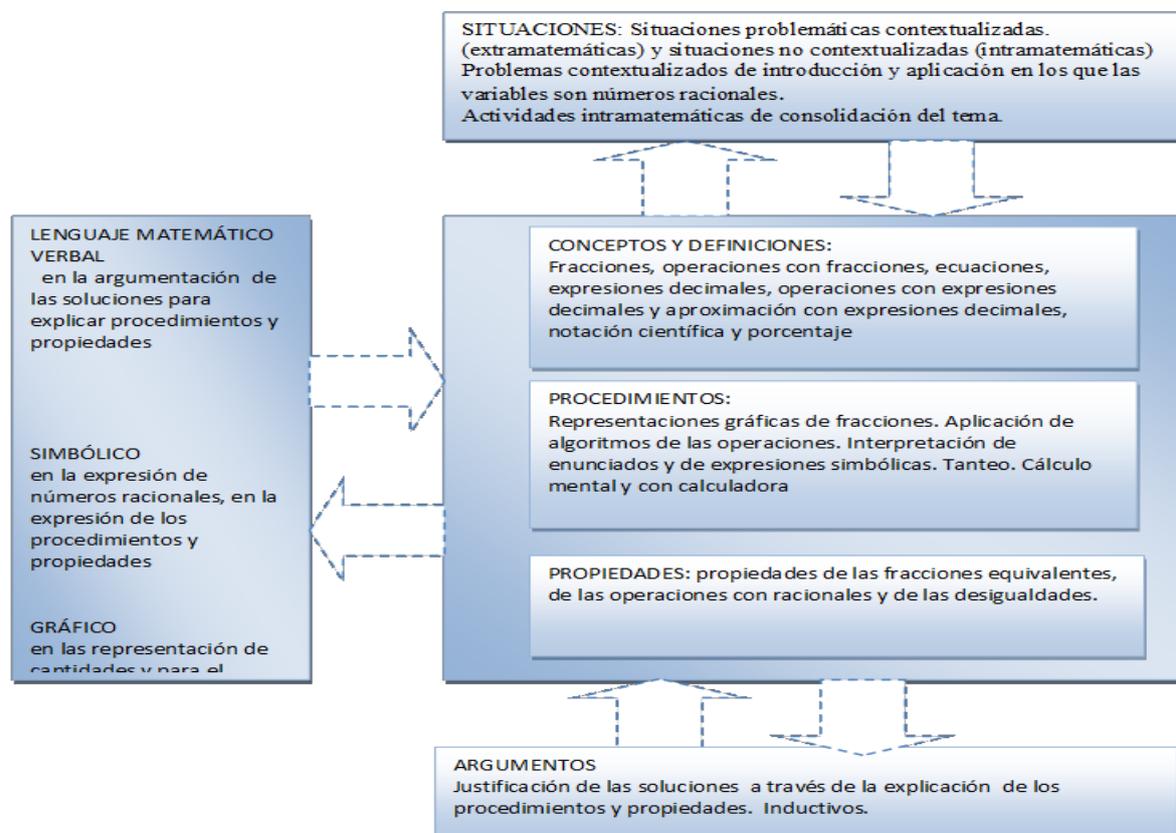


Figura 55: Configuración cognitiva del estudiante 8I

### 6.4.9. Configuración Cognitiva del estudiante 9I

*Conceptos:* Fracciones, operaciones con fracciones, expresiones decimales y operaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con Racionales (algunas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones. Aplicación de los algoritmos de las operaciones con racionales. Interpretación de enunciados. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos:* No se evidencia argumentación.

*Lenguaje:* Simbólico en la expresión de números racionales, procedimientos y propiedades. Gráfico (poco) en la representación de cantidades expresadas por fracciones y verbal (poco) para expresar respuestas de situaciones problemas.

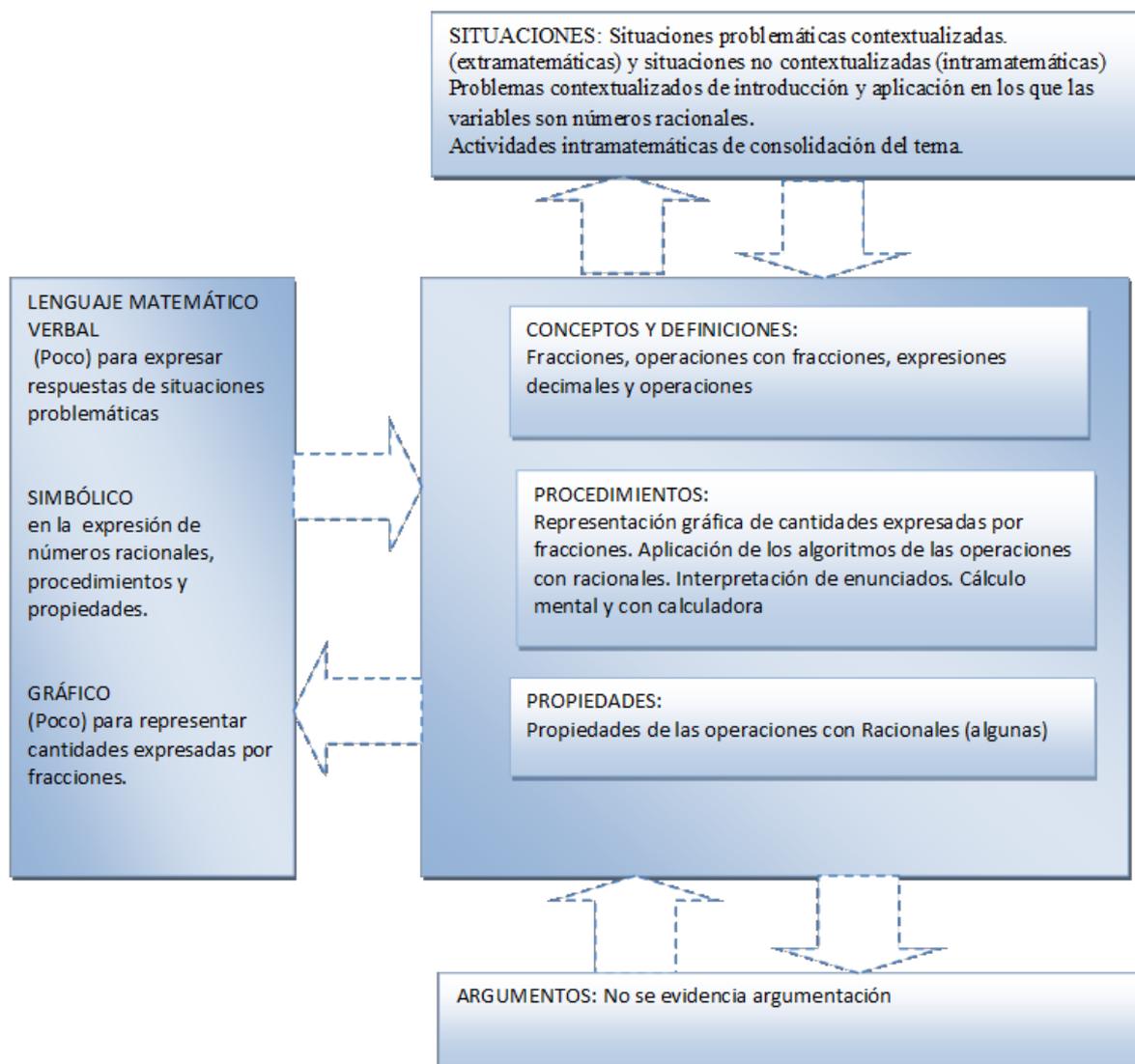


Figura 56: Configuración cognitiva del estudiante 9I

### 6.4.10. Configuración Cognitiva del estudiante 10I

*Conceptos:* Fracciones, operaciones con fracciones, expresiones decimales y operaciones.

*Propiedades:* Propiedades de las operaciones con Racionales (pocas).

*Procedimientos:* Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones  
Aplicación de algoritmos de las operaciones con racionales. Interpretación de enunciados y expresiones simbólicas. Cálculo mental y con calculadora.

*Argumentos:* No se evidencian argumentación.

*Lenguaje:* Simbólico en la expresión de números racionales, procedimientos y propiedades.  
Verbal (poco) para expresar las respuestas a las situaciones problemas y el gráfico (poco) para representar cantidades expresadas por fracciones.

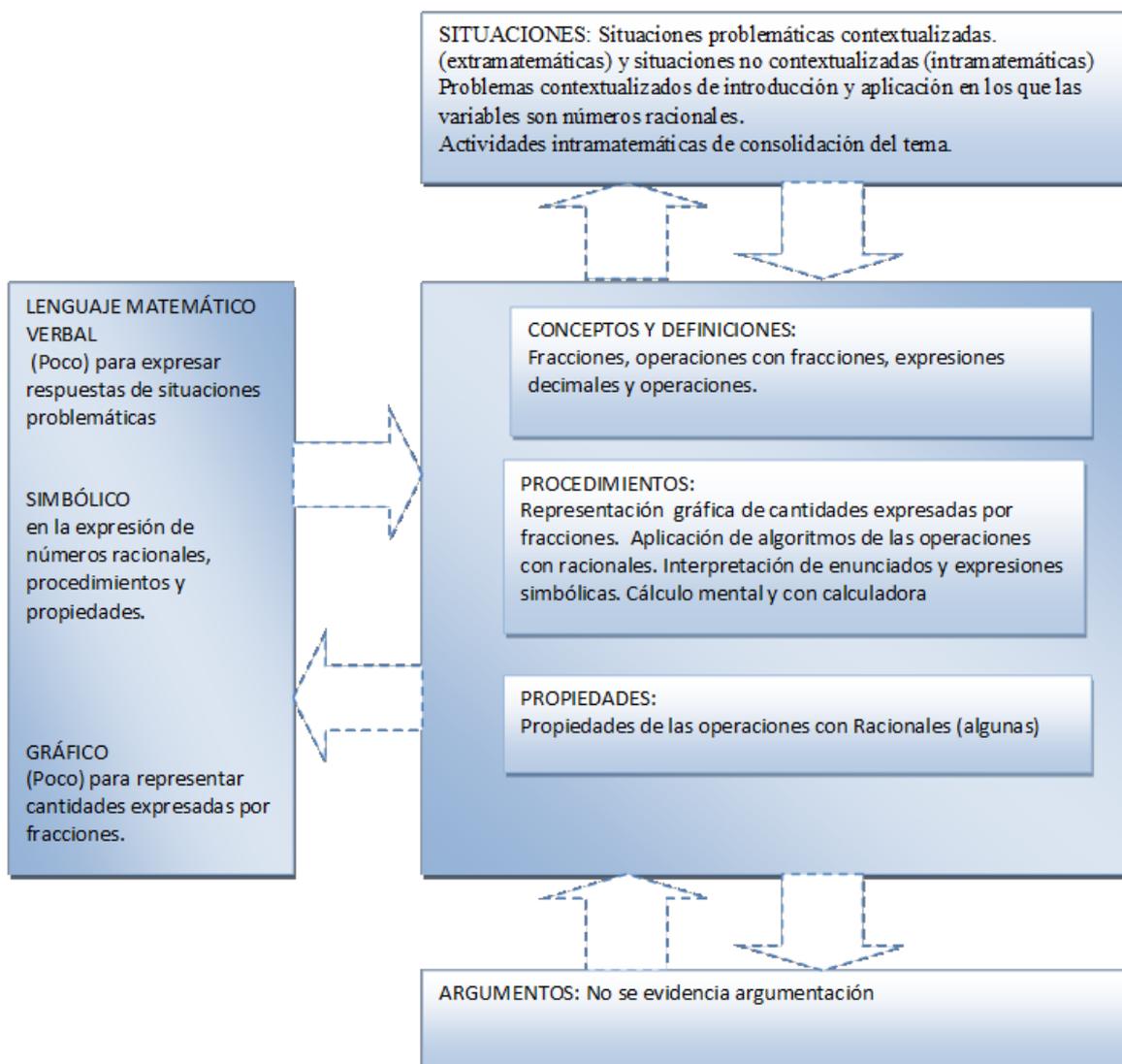


Figura 57: Configuración cognitiva del estudiante 10I

### 6.5. Configuraciones Cognitivas versus Configuración Epistémica

Para realizar una valoración de la comprensión alcanzada por los estudiantes, comparamos en primera instancia cada *Configuración Cognitiva* de los estudiantes con la *Configuración Epistémica* de referencia. La comparación inicial la realizamos teniendo en cuenta los elementos primarios de un objeto matemático y los criterios siguientes:

- La presencia o ausencia de conceptos, propiedades y procedimientos, así como sus vínculos con la obtención de respuestas correctas al resolver las actividades planteadas. Usamos las expresiones SI, NO y MED para indicar la presencia, ausencia o un estado intermedio

CONCEPTOS			PROPIEDADES			PROCEDIMIENTOS			RESPUESTAS		VINCULACIÓN	
SI	NO	MED.	SI	NO	MED.	SI	NO	MED.	COR.	INC.	SI	NO

- Las argumentaciones y/o justificaciones y los nexos de ellas con el uso de lenguaje formalizado, como así también, la obtención de respuestas correctas a las situaciones problemas planteadas. Usamos las expresiones SI, NO y MED para indicar una argumentación adecuada, no adecuada o ausente, o parcialmente argumentada. Para lenguaje discriminamos en verbal (VER), simbólico (SIMB) o gráfico (GRAF). Para las respuestas las catalogamos en completas (CO) o incompletas (INC).

ARGUMENTACIÓN			LENGUAJE			RESPUESTAS			NEXOS O VINCULACIÓN	
SI	NO	MED	VER.	SIMB.	GRAF	CO.	INC.	SI	NO	

- Si los alumnos consideran que la argumentación alcanza para justificar la respuesta brindada ante cada situación problema.
- El uso del lenguaje formal en la conformación de una argumentación adecuada.
- La relación y vínculo que se advierte entre la respuesta brindada a la situación problema, el uso de lenguaje formal y la argumentación realizada.

A continuación, sistematizamos la información en cuadros, discriminando en los criterios enunciados. Los cuadros se presentan para cada grupo de estudiantes (ingresantes a la UNL e ingresantes al ISP N°10).

## 6.6. Relaciones entre elementos primarios del objeto matemático establecidas por los estudiantes de la UNL

Presencia o ausencia de conceptos en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

La comprensión de los números racionales

CONCEPTOS	ESTUDIANTES																									
	E 1F	E 2F	E 3F	E 4F	E 5F	E 6F	E 7F	E 8F	E 9F	E 10F	E 11F	E 12F	E 13F	E 14F	E 15F	E 16F	E 17F	E 18F	E 19F	E 20F	E 21F	E 22F	E 23F	E 24F	E 25F	
Fracciones	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
F. Equivalentes	Si	No	Si	Si	Med	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Med	Si	Si												
Proporción	No	No	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	No	No	Si	No	Si	Si	No	No
Operaciones con fracciones	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Exp. Decimal de una fracción	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Aproximación	No	Si	No	Si	No	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	No	Si	Si	No	Si	No	Si	Med	No	Si	No	No	No
Notación científica	No	Si	No	No	Si	No	No	No	Si	Si	No	No	No	No	Si	No	No	No		Si	No	No	Si	No	Si	Si
Op. Con Exp. Decimales	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Ecuaciones	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Desigualdades	No	No	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	No	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si	No	No	Si	No	No	Si	Si
Proporcionalidad	Si	No	Med	Med	No	Med	No	Med	Med	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	No	No	Si	No	Si	Si	Si	No
Porcentaje	Si	No	No	No	No	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No

Cuadro resumen de presencia o ausencia de conceptos en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

CONCEPTOS	Fracciones N° %	F.Equivalentes N° %	Proporción N° %	Op.fracciones N° %	Exp. Decimal frac. N° %	Aproxim. N° %	Notación Cient. N° %	Op. exp. Dec. N° %	Ecuaciones N° %	Desiguald. N° %	Proporc. N° %	Porcentaje N° %
SI	25 100%	22 88%	13 52%	25 100%	25 100%	12 48%	12 48%	25 100%	25 100%	11 44%	9 36%	14 56%
No	0 0%	1 4%	12 48%	0 0%	0 0%	12 48%	13 52%	0 0%	0 0%	14 56%	11 44%	1 44%
Med	0 0%	2 8%	0 0%	0 0%	0 0%	1 4%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	5 20%	0 0%

Presencia o ausencia de propiedades en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

PROPIEDADES	ESTUDIANTES																									
	E 1F	E 2F	E 3F	E 4F	E 5F	E 6F	E 7F	E 8F	E 9F	E 10F	E 11F	E 12F	E 13F	E 14F	E 15F	E 16F	E 17F	E 18F	E 19F	E 20F	E 21F	E 22F	E 23F	E 24F	E 25F	
De las F. equivalentes	Si	Si	Si	Si	Med	Si	Med	Med	Si	Si	Si	Med	Si	Si	SI	Si	Med	Si	Si							
De las proporciones	No	No	No	No	No	Med	No	No	Med	Med	No	No	Med	No	Med	Med	No	No	No	No	Med	No	Med	Med	No	
De las operaciones con racionales	Si	Si	Si	Si	Med	Si	Med	Med	Si	Si	Med	Si	Med	Med	Si	Si	Med	Med	Si	Si	Med	Med	Si	Si	Med	
De las desigualdades	No	No	Si	Si	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si	No	Si	No	No	No	Med	No	No	No	No	No	Si	
De las magnitudes proporcionales	No	No	No	No	No	Med	No	No	Med	Med	No	No	No	No	No	Med	No	No	No	No	Med	No	Med	Med	No	

La comprensión de los números racionales

Cuadro resumen de presencia o ausencia de propiedades en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes					
PROPIEDADES	De las Fracciones equivalentes N° %	De las Proporciones N° %	De las operaciones con Racionales N° %	De las desigualdades N° %	De las magn. Proporcionales N° %
SI	20 80%	0 0%	14 56%	6 24%	0 0%
NO	0 0%	16 64%	0 0%	18 72%	18 72%
MED	5 20%	9 36%	11 44%	1 4%	7 28%



Cuadro resumen de presencia o ausencia de procedimientos, técnicas o algoritmos en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes										
PROCEDIMIENTOS	Rep. Graf de Fracc. N° %	Int. Enunciados N° %	Int. Exp. Simb. N° %	Comp. Tablas o exp. N° %	Ap. Alg. De las operac. N° %	Aproximac. Exp. Dec. N° %	Exp. En Not. Científica N° %	Res. Ecuaciones N° %	Res. Desigualdades N° %	A y R de Sit. Con Mag. Prop. N° %
SI	25 100%	13 52%	12 48%	8 32%	25 100%	9 36%	7 28%	25 100%	11 44%	8 32%
NO	0 0%	0 0%	0 0%	6 24%	0 0%	13 52%	17 68%	0 0%	13 52%	13 52%
MED.	0 0%	12 48%	13 52%	11 44%	0 0%	3 12%	1 4%	0 0 %	1 4%	4 16%

Presencia o ausencia de procesos de argumentación en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

ARGUMENTOS	ESTUDIANTES																								
	E 1F	E 2F	E 3F	E 4F	E 5F	E 6F	E 7F	E 8F	E 9F	E 10F	E 11F	E 12F	E 13F	E 14F	E 15F	E 16F	E 17F	E 18F	E 19F	E 20F	E 21F	E 22F	E 23F	E 24F	E 25F
Argumentación a través de los procedimientos utilizados	Med	Med.	Med	Med	Med	Med	No	Med	Med	Med	Med	Med	Med	No	Med	Med	No	No	No	Med	Med	No	Med	No	No
Argumentación a través de propiedades utilizadas	No	Med	Med	Med	Med	Med	No	Med	Med	Med	Med	Med	Med	Med	Med	Med	No	No	No	Med	No	No	Med	No	No
Lenguaje utilizado en la argumentación	VyS	V yS	VyS	VyS	VyS	VyS	No	V	V	VyS	V	V	VyS	V	VyS	VyS	No	No	No	VyS	S	No	VyS	No	No

Cuadro resumen de presencia o ausencia de procesos de argumentación en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes					
ARGUMENTOS	A través de los procedimientos N° %	A través de las propiedades N° %	Lenguaje verbal N° %	Lenguaje Simbólico N° %	Lenguaje Gráfico N° %
SI	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%
NO	8 68%	9 36%	8 32%	12 48%	25 100%
MED	17 32%	16 64%	17 68%	13 52%	0 0%

### **6.6.1. La argumentación como proceso de justificación de respuestas en los estudiantes de la UNL**

Teniendo en cuenta que gran parte de los procesos de argumentación se suscitaron durante las entrevistas, y que los estudiantes recién culminaban la escuela secundaria, encontramos que:

- Un 32% de los estudiantes realizó una argumentación *medianamente* adecuada, valiéndose para la justificación de los procedimientos utilizados. Un 68% de los estudiantes no llevaron a cabo procesos de argumentación adecuados o pertinentes.
- Un 64% de los estudiantes realizó una argumentación *medianamente* adecuada para efectuar una justificación valiéndose de las propiedades de los números racionales. Un 36% *no* realizó ningún tipo de argumentación (se aclara que sólo pretendíamos que la justificación se nombrara alguna propiedad que utilizaba (verbal) o diera un ejemplo particular (simbólico)).

### **6.6.2. El tipo de lenguaje utilizado en los procesos de argumentación en estudiantes de la UNL**

La mayoría de los estudiantes no justificaron las respuestas cuando resolvieron las situaciones problemas que planteaba el instrumento, por lo cual, los procesos de argumentación se completaron durante la entrevista.

Teniendo en cuenta que en algunos casos los estudiantes utilizan expresiones simbólicas y/o verbales para realizar procesos de argumentación, y que en ningún caso apelaron al lenguaje gráfico, podemos concluir que:

- El 68% de los estudiantes utiliza el lenguaje verbal para justificar sus respuestas de manera medianamente adecuada.
- El 52% de los estudiantes utiliza el lenguaje simbólico para justificar sus respuestas de manera medianamente adecuada.

Si bien el lenguaje verbal y simbólico ha sido utilizado por más del 50% de los estudiantes en forma medianamente adecuada, es de destacar que esto interfirió para que efectuaran una argumentación totalmente correcta, en tanto la misma estaba incompleta o se utilizaban términos lingüísticos no apropiados al lenguaje matemático.

### 6.7. Relaciones entre elementos primarios del objeto matemático establecidas por los estudiantes del ISP N° 10

Presencia o ausencia de conceptos en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

La comprensión de los números racionales

CONCEPTOS	ESTUDIANTES									
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
Fracciones	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Fracciones equivalentes	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Proporción	Med	Med.	Med	Med.	NO	Med.	SI	SI	Med.	Med.
Operaciones con fracciones	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Expresión decimal de una fracción	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Aproximación.	Med	Med.	SI	SI	NO	NO	NO	SI	NO	Med.
Notación científica	NO	SI	Med.	Med.	NO	NO	NO	SI	NO	NO
Operaciones con expresiones decimales	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Ecuaciones	Med.	Med	SI	Med.	SI	MED.	SI	SI	Med.	Med.
Desigualdades	NO	Med.	NO	NO	NO	NO	NO	Med	NO	No
Proporcionalidad	NO	Med.	SI	NO	NO	Med.	Med.	SI	NO	Med.
Porcentaje	Med.	Med.	NO	NO	NO	Med.	SI	SI	NO	NO

**Cuadro resumen de presencia o ausencia de conceptos en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes**

CONCEPTOS	Fracciones N° %	F. Equiv. N° %	Proporción N° %	O. c. Fracc N° %	Exp. Dec. de fracc N° %	Aprox. N° %	Not. Cientif. N° %	O. Exp Dec. N° %	Ecuaciones N° %	Desig. N° %	Propor. N° %	Porcentaje N° %
Si	10 100%	10 100%	2 20%	10 100%	10 100%	3 30%	2 20%	10 100%	4 40%	0 0%	2 20%	2 20%
No	0 0%	0 0%	1 10%	0 0%	0 0%	4 40%	6 60%	0 0%	0 0%	8 80%	4 40%	5 50%
Med	0 0%	0 0%	7 70%	0 0%	0 0%	3 30%	2 20%	0 0%	6 60%	2 20%	4 40%	3 30%

Presencia o ausencia de propiedades en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

La comprensión de los números racionales

PROPIEDADES	ESTUDIANTES									
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
De las Fracciones equivalentes	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
De las proporciones	Med.	Med	Med	Med	Med.	Med.	SI	Med.	Med	Med.
De las operaciones con Racionales	SI	SI	SI	Med	SI	SI	SI	SI	Med.	Med
De las Desigualdades	NO	SI	NO	NO	NO	NO	NO	SI	NO	NO
De las magnitudes proporcionales	NO	Med	NO	NO	Med	NO	Med.	Med.	NO	Med.

Cuadro resumen de presencia o ausencia de propiedades en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes					
PROPIEDADES	De Fracc. Equivalentes	De Proporciones	De oper. Racionales	De Desigualdades	De Mag. Proporcionales
	N° %	N° %	N° %	N° %	N° %
<b>SI</b>	10 100%	1 10%	7 70%	2 20%	0 0%
<b>NO</b>	0 0%	0 0%	0 0%	8 80%	5 50%
<b>MED.</b>	0 0%	9 90%	3 30%	0 0%	5 50%

Presencia o ausencia de procedimientos, técnicas o algoritmos en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

PROCEDIMIENTOS	ESTUDIANTES									
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
Representación gráfica de cantidades expresadas por fracciones	SI	SI	SI	Med.	Med.	SI	SI	SI	SI	SI
Interpretación de enunciados.	SI	SI	SI	Med.	SI	SI	SI	SI	Med.	Med.
Interpretación de expresiones simbólicas.	Med	Med.	Med.	Med.	Med.	Med.	Med.	SI	Med.	Med.
Completamiento de tablas o expresiones verbales y/o simbólicas	Med	SI	Med	Med	Med.	Med	Med.	SI	Med.	Med.
Aplicación de algoritmos de las operaciones con Racionales	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Aproximación de expresiones decimales	SI	SI	SI	Med.	NO	NO	NO	SI	NO	Med.
Expresión de cantidades en Notación Científica	NO	SI	NO	NO	NO	NO	NO	SI	NO	NO
Resolución de ecuaciones	Med.	SI	Med.	Med.	Med.	Med.	Med.	SI	Med.	Med
Resolución de desigualdades.	NO	Med.	NO	NO	NO	NO	NO	Med.	NO	NO
Análisis y resolución de situaciones que involucran magnitudes proporcionales.	NO	Med.	NO	NO	Med.	Med.	Med.	SI	NO	Med.

La comprensión de los números racionales

Cuadro resumen de presencia o ausencia de procedimientos, técnicas o algoritmos en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes										
PROCEDIMIENTOS	R.G. Cant. N° %	Int. Enunc. N° %	Int. Ep. Simb. N° %	Comp. T. o exp. N° %	Aplic. Algorit. N° %	Aprox. Exp.Dec N° %	Exp. N. cient. N° %	R. Ecuaciones N° %	R. desigualdades N° %	A y R sit. Mag.Prop. N° %
<b>Si</b>	8 80%	7 70%	1 10%	2 20%	10 100%	4 40%	2 20%	2 20%	0 0%	1 10%
<b>No</b>	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	4 40%	8 80%	0 0%	8 80%	4 40%
<b>Med</b>	2 20%	3 30%	9 90%	8 80%	0 0%	2 20%	0 0%	8 80%	2 20%	5 50%

Presencia o ausencia de procesos de argumentación en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes

ARGUMENTOS	ESTUDIANTES									
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
Argumentación a través de los procedimientos utilizados	Med.	SI	SI	NO	SI	Med	NO	SI	NO	NO
Argumentación a través de propiedades utilizadas	NO	Med.	Med.	NO	NO	Med.	NO	Med.	NO	NO
Lenguaje utilizado en la argumentación	Verb.	Verb.	Verb	NO	Verb.	Verb.	NO	Verb	NO	NO

La comprensión de los números racionales

Cuadro resumen de presencia o ausencia de procesos de argumentación en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes					
ARGUMENTOS	A través de los procedimientos Nº %	A través de las Propiedades Nº %	Lenguaje Verbal Nº %	Lenguaje Simbólico Nº %	Lenguaje Gráfico Nº %
SI	4 40%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%
NO	4 40%	6 60%	4 40%	10 100%	10 100%
MED.	2 20%	4 40%	6 60%	0 0%	0 0%

### **6.7.1. La argumentación como proceso de justificación de respuestas en los estudiantes del ISP N° 10**

En este caso, considerando los estudiantes ingresantes a. ISP N° 10 destacamos que los procesos de argumentación que hicieron para la justificación de sus respuestas se suscitaron fundamentalmente en las entrevistas, pues cuando resolvieron las situaciones problemas planteadas en el instrumento fueron muy pocos los casos en lo que dejaron registros textuales argumentativos. Podemos resumir que:

- Un 40 % de los estudiantes realizó *procesos de argumentación* centrados en los procedimientos utilizados. Un 20% lo hizo en forma medianamente adecuada mientras que un 40 % no realizó ningún tipo de argumentación.
- Un 40% de los estudiantes realizó *procesos de argumentación* medianamente aceptables, centrados en las propiedades de los números racionales utilizadas, mientras que el 60% *no* realizó ningún tipo de argumentación. Destacamos que sólo pedíamos una justificación haciendo alusión al nombre de la propiedad que utilizaban.

### **6.7.2. El tipo de lenguaje utilizado en los procesos de argumentación en estudiantes del ISP N° 10**

En la mayoría de los casos los estudiantes del ISP N° 10 se valieron de lenguaje verbal en los procesos de argumentación, y que estuvo ausente el lenguaje simbólico y/o gráfico, hemos observado que:

- El 60% de los estudiantes utiliza el lenguaje verbal en los procesos de argumentación de manera medianamente adecuada. En general utilizan un lenguaje cotidiano y poco formal para explicar sus procedimientos.
- La utilización del lenguaje verbal y poco formal para llevar a cabo justificaciones de las resoluciones ha contribuido a que la argumentación no sea del todo adecuada, por estar incompleta o por usar términos lingüísticos no apropiados al lenguaje matemático.

En de destacar que si bien los estudiantes lograron obtener una respuesta correcta a las situaciones problemas que planteaba el instrumento, el vínculo o relación que establecen con procesos de argumentación y utilización de lenguaje verbal ha sido deficiente.

### 6.8. La comprensión alcanzada sobre los números racionales

Describimos a continuación algunas de las actividades que tiene el instrumento, y mostramos evidencias a través de respuestas obtenidas por estudiantes, las que dan cuenta del modo en que articulan los elementos primarios que intervienen en la actividad. Para un detalle más exhaustivo el lector puede consultar las entrevistas realizadas en el Anexo I y la resolución de las situaciones problemas en el Anexo N° IV.

Una de las actividades propuestas en el instrumento es la siguiente:

Determina el o los números que satisfacen las siguientes condiciones, justificando tu respuesta.

- a) Al doble de la suma entre  $\frac{3}{4}$  y 2, divídelo por la mitad de la resta entre 1 y  $\frac{1}{2}$ .
- b) Al opuesto del inverso de 2, réstale la tercera parte de la suma entre  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{3}{2}$ .

Ante esta actividad, solicitamos que los estudiantes explicaran cómo habían procedido para dar una respuesta. La intencionalidad es que en sus argumentos pongan en juego el lenguaje matemático, conceptos, propiedades y procedimientos que desencadena la situación problema propuesta. Frente a esta situación problema, una estudiante realizó lo siguiente:

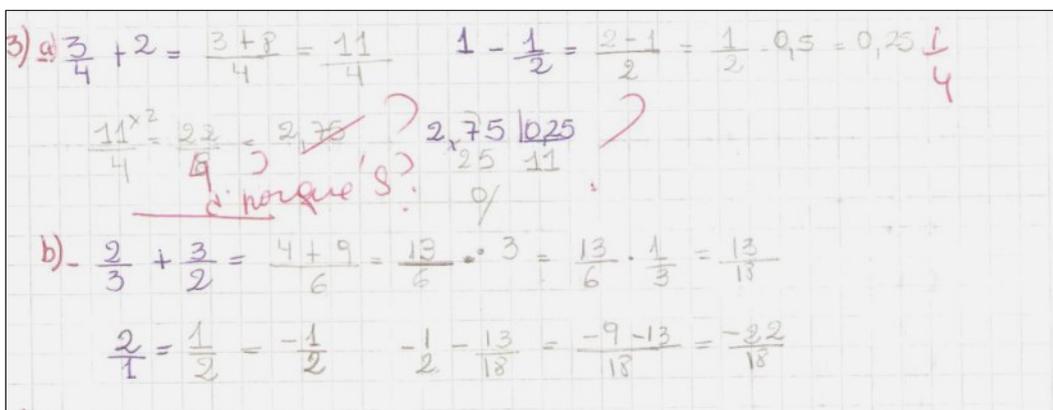


Figura 57: Resolución de la situación problema

Ante la resolución de la actividad, se entrevistó a la estudiante.

**Entrevistador:** ¿Cómo expresaste el doble? ¿Cómo resolviste el doble de  $11/4$ ?

**Alumna:** El doble significa multiplicar por 2. Luego  $2 \cdot 11/4 = 22/8$ . Humm... no sé si está bien.

**Entrevistador:** En uno de tus procedimientos escribiste  $2/1 = 1/2 = -1/2$  ¿Qué quisiste expresar? ¿Es correcto?

**Alumna:** Quise escribir a que es igual el opuesto del inverso de 2. Así lo calculé. ¡Sí! es correcto.

Si consideramos la respuesta y el fragmento de la entrevista que se transcribió anteriormente, se advierte que la estudiante interpreta el lenguaje verbal traduciendo al simbólico, aplica en forma correcta la suma de fracciones de distinto denominador (procedimiento) para resolver ambas actividades, y reconoce propiedades de las operaciones (opuestas e inversas). Sin embargo, cuando debe realizar el doble de un número (concepto y procedimiento) considera a la fracción conformada por dos números (concepto). A su vez, no logra conservar las igualdades (concepto), dado que va operando y mantiene el signo igual expresiones que no lo son. Cuando se le consulta sobre esta situación, argumenta que las expresiones son correctas, y no advierte la inconsistencia.

Algunas de las situaciones problemas que contiene el instrumento tienen por intención determinar si se reconoce el campo de problemas de los números racionales. Entre ellas la siguiente:

Un inversor tiene un tercio de sus ahorros en acciones, la cuarta parte del resto en un plazo fijo y los \$60000 restantes en moneda extranjera. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado?

En la resolución, se debían aplicar estrategias (procedimientos) que se relacionan con procesos de traducción del lenguaje natural al simbólico. Una resolución que efectuó otra estudiante fue la siguiente:

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 60000$$
$$\frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$
$$x = \frac{7}{12} + 60.000$$

Figura 58: Resolución de la situación problema

Un fragmento de la entrevista correspondiente se transcribe a continuación:

**Entrevistador:** ¿Cómo realizaste el procedimiento?

**Alumna:** X es el capital, pero no sé cómo expresar lo demás.

**Entrevistador:** ¿Cómo expresarías  $\frac{1}{3}$  de sus ahorros? ¿Y la cuarta parte del resto?

**Alumna:**  $\frac{1}{3}$  del capital, sería  $\frac{1}{3}$  de X,  $\frac{1}{4}$  de lo que me queda sería  $\frac{1}{4} X - \frac{1}{3}$  me parece.

En este caso, como en los demás problemas que se le presentaron a la estudiante, se observa que realiza correctamente las operaciones con fracciones (procedimientos), pero tiene dificultades para interpretar la expresión simbólica de algunos enunciados (lenguaje), y no logra explicitar con argumentos apropiados la justificación de sus procedimientos. Esto evidencia que no logra establecer adecuadamente relaciones entre los objetos primarios que intervienen en la situación problema.

Otra situación planteada fue la siguiente:

Se llena hasta los  $\frac{3}{4}$  un bidón de 16,5 litros y hasta los  $\frac{2}{3}$  otro de 19 litros. ¿Cuál de los dos contiene más líquido?

La resolución que efectuó una estudiante fue la siguiente:

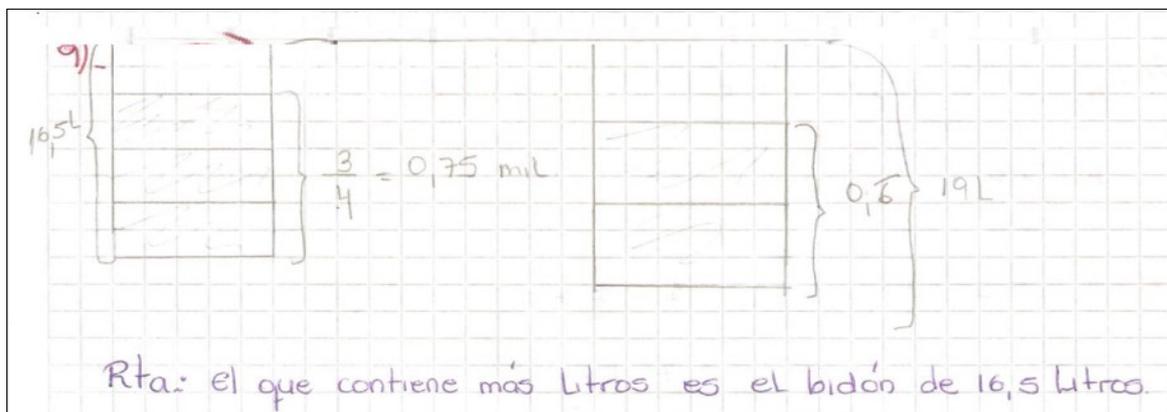


Figura 59: Resolución de la situación problema

El fragmento de la entrevista asociada a esta resolución fue:

**Entrevistador:** - En tu respuesta realizaste un gráfico ¿Qué significa lo que representaste?

**Alumna:** Representé el entero y me dio  $\frac{3}{4} = 0,75$  y  $\frac{2}{3} = 0,6$ , luego  $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

**Entrevistador:** ¿Las cantidades son iguales? ¿Podrías representarlas con un mismo gráfico?

**Alumna:** No, no son iguales. Ah, eso no lo pensé.

**Entrevistador:** ¿De qué otra forma podrías calcular  $\frac{3}{4}$  de 16,5?

**Alumna:** No, no sé. No me acuerdo.

En este caso podemos advertir que trabaja con representaciones gráficas (lenguaje) en forma incorrecta, en tanto utiliza el mismo entero para representar distintas cantidades (conceptos). Cuando se le pregunta de qué otra forma puede calcular  $\frac{3}{4}$  de 16,5, expresa que no recuerda el modo de hacerlo (procedimientos).

Otra actividad planteada fue la siguiente:

Se quiere hallar una aproximación del número 4,1725128 que tenga tres cifras decimales.

- 1) ¿Cómo es el valor truncado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual?
- 2) ¿Cómo es el valor redondeado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual?
- 3) ¿Cuál de los dos valores aproximados es más cercano al valor exacto? ¿Cómo te das cuenta?

Las respuestas brindadas a la misma fueron las siguientes:

21- Se quiere hallar una aproximación del número 4,1725128 que tenga tres cifras decimales.

- a) ¿Cómo es el valor truncado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual? *menor*
- b) ¿Cómo es el valor redondeado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual? *mayor*
- c) ¿Cuál de los dos valores aproximados es más cercano al valor exacto? ¿Cómo te das cuenta?  
*El redondeado.*

Figura 60: Resolución de la situación problema

La entrevista realizada para esta resolución fue la siguiente:

**Entrevistador:** ¿Podrías justificar o explicar las respuestas que diste en a, b y c?

**Alumna:** Es menor pues el valor truncado es 4,172 y si resto este del exacto me da 0,0005128, o sea es menor. Es mayor porque el valor redondeado es 4,173 y si resto este del exacto me da negativo -0,0004872. El redondeado, me doy cuenta en la resta.

**Entrevistador:** ¿Los números que trabajaste en esta actividad son números Racionales?

**Alumna:** No, son decimales, aunque si los paso a fracción son racionales.

En esta actividad podemos observar que la alumna tiene dificultades para expresar en forma escrita sus justificaciones (argumentos) y presenta confusión en lo que respecta al conjunto de números racionales (conceptos).

Otra actividad referida a las desigualdades se enunció de la siguiente manera:

- Encuentra un número natural  $n$ , de modo que se verifique lo siguiente:  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

¿Habrá más de un valor posible para  $n$ ? Si crees que sí, indica cuáles podrían ser. SI crees que no, explica por qué.

Respuesta:

La resolución de la actividad y el fragmento de entrevista correspondiente de las prácticas operativas y discursivas llevadas a cabo por una estudiante se indican a continuación.

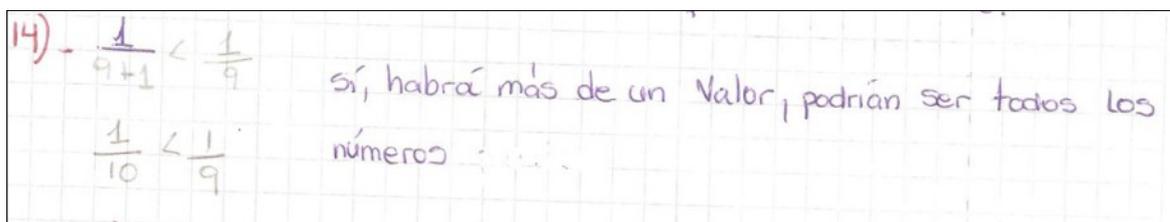


Figura 61: Resolución de la situación problema

**Entrevistador:** ¿Cómo lo resolviste?

**Alumna:** Busqué un número y lo sustituí en  $n$ .

**Entrevistador:** ¿Cómo te das cuenta que se verifica la desigualdad?

**Alumna:** Porque al realizar el producto cruzado se verifica.

**Entrevistador:** ¿Cómo se verifica?

**Alumna:** Me queda por ejemplo  $9 < 10$ ,  $2 < 3$ , etc.

**Entrevistador:** ¿Por qué decís que se podría dar con todos los números?

**Alumna:** Porque siempre en el primer denominador me quedará un número mayor.

En esta actividad podemos observar que la estudiante realiza distintos procedimientos pero no reconoce las propiedades que utiliza. Tiene dificultades para dar un argumento convincente utilizando lenguaje adecuado. También se observa que aborda cada caso tomando ejemplos particulares, pero no puede realizar generalizaciones.

### 6.9. Algunos obstáculos y dificultades que persisten sobre los números racionales al finalizar la escuela secundaria

Teniendo en cuenta que los estudiantes no han logrado una comprensión total de los números racionales, sino aspectos parciales, en tanto en muchos casos no han podido utilizarlo de manera competente en diferentes prácticas, se pudieron identificar una serie de obstáculos y dificultades.

Mostramos a continuación algunos ejemplos para luego realizar algunas apreciaciones generales. No obstante, el lector podrá consultar los protocolos escritos (resoluciones de situaciones problemas del instrumento) en el Anexo IV y las entrevistas realizadas a los estudiantes en el Anexo I.

Una de las actividades que se les presentó a los estudiantes tiene por finalidad la identificación de conceptos y/o propiedades como su generalización. Por ejemplo:

a) - Indica cuáles de estas igualdades son correctas y fundamenta tu respuesta

$$\frac{a+b}{b+6} = \frac{a}{6} \qquad \frac{1+a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b} \qquad \frac{4a}{b} = \frac{4}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

La respuesta y fragmento de la entrevista de las prácticas operativas y discursivas de una estudiante fueron las siguientes:

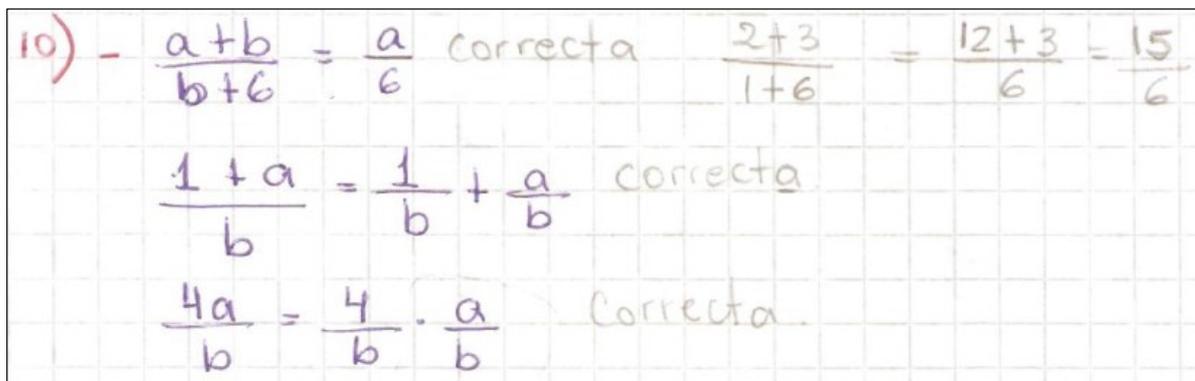


Figura 62: Resolución de la situación problema

**Entrevistador:** ¿Qué procedimientos realizaste para demostrar que son correctas?

**Alumna:** En el primero utilicé números y ahora veo que no da, no es correcta.

En el segundo y en el tercero distribuí el denominador

**Entrevistador:** ¿Aplicaste alguna propiedad?

**Alumna:** La distributiva de las fracciones.

En esta actividad podemos observar que en el primer ítem la estudiante intenta justificar con un ejemplo, pero lo realiza en forma incorrecta (procedimientos). En el tercer caso no se da cuenta que no se verifica la igualdad, lo que demuestra que no aplica correctamente las propiedades. Cuando se le pregunta si aplicó alguna propiedad, responde en forma incorrecta pues no logra relacionar que la propiedad distributiva hace referencia a dos operaciones.

Para la misma situación problema, otra estudiante realizó la siguiente práctica:

Handwritten work showing three examples of fraction addition:

$$1c) \frac{1+2}{2+6} = \frac{3}{8} \quad \checkmark$$

$$\frac{1+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \checkmark$$

Figura 63: Resolución de la situación problema

En este caso, reemplaza por números y verifica la verdad o falsedad de las igualdades, pero no justifica, ni logró hacerlo durante la entrevista.

Otra situación problema fue la siguiente:

15- Lee atentamente los siguientes enunciados y explica si es posible resolver cada problema. En el caso de serlo, resuélvelo.

- Un tercio de los alumnos del curso A son aficionados al básquet, mientras que  $\frac{3}{8}$  del curso B son aficionados al fútbol. ¿Cuál de los deportes tiene más aficionados?
- Un tercio de los alumnos del colegio de Martín son aficionados al básquet, mientras que tres octavos de los alumnos del colegio son aficionados al fútbol. ¿Cuál de los dos deportes tiene más aficionados?

Las respuestas que brindó una estudiante (Figura 64) y la entrevista realizada se transcriben a continuación:

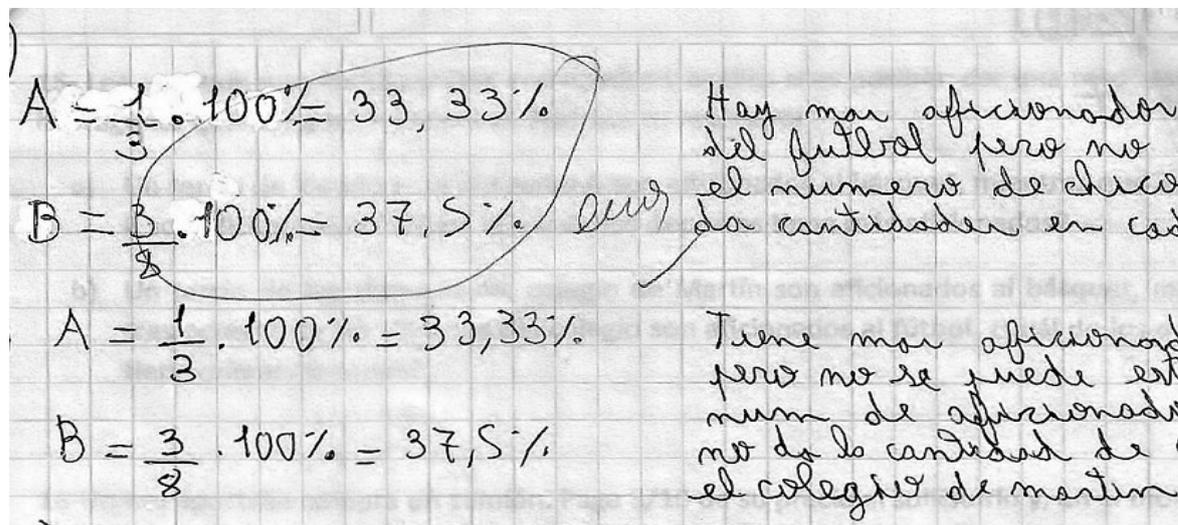


Figura 64: Resolución de la situación problema

**Entrevistador:** ¿Podrías contarme como pensaste esta actividad?

**Alumna:** En los dos casos son iguales, calculé el porcentaje que me representa cada fracción del entero y pude obtener la respuesta.

**Entrevistador:** Podrías leer de nuevo el enunciado y revisar tu respuesta.

**Alumna:** Si, pero me parece que está bien lo que hice.

En esta actividad podemos observar que la alumna tiene dificultades para interpretar el enunciado. Asimismo, no relaciona adecuadamente elementos lingüísticos, e intenta resolver un caso particular referido a porcentajes.

En otra actividad del instrumento se plantea:

11- Elisa ha recorrido  $\frac{2}{5}$  del camino que va desde A hasta B y aún le faltan 2 km para llegar a la mitad. Calcula la distancia AB.

Cuya respuesta por parte de una estudiante fue la que contiene la Figura 65.

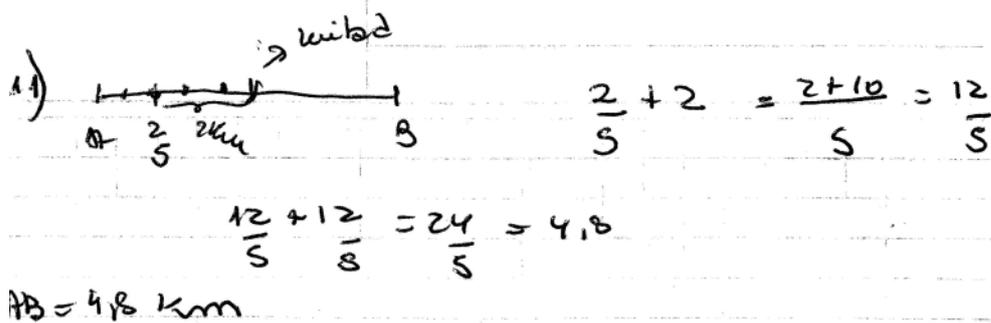


Figura 65: Resolución de la situación problema

La entrevista correspondiente fue:

**Entrevistador:** ¿Podrías explicarme como resolviste esta actividad?

**Alumna:** Realicé un dibujo de A hasta B y marque la mitad, luego eso es  $\frac{2}{5}$  +2. Resolví y me dio  $\frac{12}{5}$ , pero como es la mitad, lo sume dos veces, así obtuve la respuesta.

Podemos observar que utiliza el lenguaje gráfico, pero interpreta en forma incorrecta el enunciado. En particular, tiene dificultades en la interpretación lo que se evidencia en la incorrecta traducción entre representaciones.

# CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES

### 7.1. Consideraciones generales

---

En este Capítulo buscamos recuperar reflexiones y conclusiones a las que hemos arribado teniendo en cuenta las dos preguntas directrices que formulamos para la investigación, y que enunciamos del siguiente modo:

- ¿Qué han comprendido los alumnos sobre números racionales, como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria o al iniciar estudios terciarios o universitarios?
- ¿Cuáles son las principales dificultades, a propósito de la comprensión alcanzada o no, que se les presentan a los estudiantes cuando operan con números racionales y al finalizar la escuela secundaria o al iniciar estudios terciarios o universitarios?

Intentar dar respuestas a estos interrogantes, nos llevó a estructurar una Configuración Epistémica de referencia a partir de un significado institucional global o experto, elaborado a partir de los documentos curriculares que establecen los saberes básicos de referencia, luego a partir de este significado de referencia elaboramos una configuración epistémica de referencia a partir de las unidades didácticas sobre números racionales que proponen ocho textos escolares (Capítulo 5), lo que sirvió de base, junto a los referentes teóricos consultados, para diseñar un instrumento que fue administrado a alumnos que aspiraban a ingresar a la UNL y al ISP N° 10 durante el año 2012.

La resolución de las situaciones problemas que contenía el instrumento, y las entrevistas realizadas dio lugar a estructurar las Configuraciones Cognitivas de los estudiantes (Capítulo 6). Posteriormente, realizamos la comparación entre la Configuración Epistémica global de referencia con las Configuraciones Cognitivas, permitiéndonos arribar a las conclusiones que detallamos a continuación.

Para la presentación de las conclusiones, retomaremos los objetivos específicos formulados en el Capítulo 1: (a) Determinar un significado global o experto de referencia del objeto matemático número racional, a través del análisis de Documentos curriculares Nacionales y Jurisdiccionales; (b) Realizar un análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen los textos escolares sobre el objeto matemático número racional; (c) Determinar los conceptos y propiedades, referidos a números racionales, que ponen en práctica los alumnos cuando resuelven problemas; (d) Especificar los procedimientos y técnicas que emplean habitualmente los alumnos en contextos de resolución de problemas con números

racionales; (e) Caracterizar el tipo de argumentaciones y uso de lenguaje que emplean los alumnos cuando brindan explicaciones sobre la resolución de situaciones que involucran números racionales; (f) Evaluar la comprensión que han alcanzado los alumnos, sobre números racionales y como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria e ingresar en un nivel superior, y (g) Detallar las dificultades que aparecen cuando los alumnos resuelven actividades matemáticas sobre números racionales, a propósito de la comprensión alcanzada o no, al finalizar la escuela secundaria e ingresar en un nivel superior.

Cerramos el Capítulo con reflexiones y conclusiones generales, sumándole las limitaciones que le encontramos a la investigación, las cuales dejan perspectivas futuras para continuar con el estudio.

### **7.2 Significado global o experto de referencia del objeto matemático número racional**

---

En las configuraciones epistémicas (obtenidas de documentos curriculares), podemos considerar que están en juego objetos institucionales, en tanto tienen connotaciones normativas o convencionales, y son usados como una referencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje que llevan a cabo los profesores. En la primera parte del Capítulo 5, consideramos una configuración epistémica global de referencia que tomamos como “significado institucional de referencia” o significado institucional global o experto sobre el tema y que construimos en base a los documentos curriculares. Esto se fundamenta en que los estudiantes que se consideraron para esta investigación, cursaron su escuela secundaria estando en vigencia los diseños curriculares jurisdiccionales y/o nacionales correspondientes a la ley Federal de Educación (Ley N° 24195/93, suplantada por la Ley de Educación Nacional N° 26206/06).

Sabemos que los contenidos básicos comunes (CBC) constituyen la definición del conjunto de saberes relevantes que integran el proceso de enseñanza de todo el país. A partir de los cuales, cada jurisdicción del Sistema Educativo continuó actualizando sus propios lineamientos o diseños curriculares, generando, a su vez, diversos y compatibles proyectos curriculares institucionales. En el diseño curricular jurisdiccional para el tercer ciclo de la EGB de la provincia de Santa Fe, de Matemática, Ciencias Naturales y Tecnología, el Ministerio de Educación propone algunos de los lineamientos básicos y brinda

orientaciones sobre los marcos de referencia que sirven de base y a partir de los cuales se han de construir los proyectos curriculares institucionales.

En los CBC se analizaron los bloques correspondientes al área Matemática para el tercer ciclo de la EGB, en particular los bloques correspondientes a números y operaciones, lenguaje gráfico y algebraico y procedimientos relacionados con el quehacer matemático, centrando la atención en lo referido a los números racionales como objeto de estudio.

En el caso del diseño jurisdiccional de Santa Fe se analizaron los contenidos prescriptos en los CBC, organizados en el tercer ciclo en los siguientes ejes: números y operaciones, considerando además el marco para todos los ejes de tratamiento de la información y Resolución de problemas, centrando la atención en lo referido a números racionales como objeto de estudio. Esto nos permitió elaborar una configuración epistémica de referencia, a partir de lo que consideramos el significado institucional global o experto que fue tomado como referente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las instituciones de Argentina.

Si bien en esta configuración aparece como bloque: número y operaciones, considerando los conjuntos numéricos desde los naturales a los reales, nos sirvió como referencia específica para el tratamiento del segundo objetivo específico.

### **7.3 Análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen los textos escolares sobre el objeto matemático número racional**

---

Reconocemos que los textos escolares constituyen una fuente de consulta muy importante de los profesores para el diseño y preparación de sus clases, y por consiguiente, es indiscutible su influencia directa o indirectamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas. Según Font (2011), una de las competencias profesionales que debe tener el profesor de Matemática es la competencia en análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita su diseño, aplicación, valoración y mejora.

En la segunda parte del Capítulo 5 realizamos un análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen los textos escolares sobre un objeto matemático particular, utilizando herramientas teóricas que provienen del EOS como línea de la Didáctica de la Matemática.

Este análisis didáctico tuvo una doble finalidad. Por un lado, contar con información acerca de la idoneidad didáctica que tienen las tareas que proponen los textos escolares actuales de Matemática sobre un objeto matemático particular, y por el otro, aplicar

herramientas de la Didáctica de la Matemática que resultan ser útiles a los profesores para desarrollar su competencia en análisis didáctico.

El análisis de los libros de texto nos permitió establecer el *significado institucional pretendido* para los números racionales como objeto matemático. Comparando este significado institucional pretendido y el significado institucional global o experto elaborado en la primera parte del Capítulo 5 establecimos una Configuración Epistémica que fue utilizada de referencia para el diseño del instrumento que se administró a los estudiantes.

A través de un estudio descriptivo valoramos a priori la idoneidad didáctica de los procesos de estudios potenciales basados en estos ocho libros de texto. Esta descripción se basó en la clasificación y agrupación de los objetos de significado (situaciones, conceptos o definiciones, procedimientos, propiedades, argumentos o justificaciones y lenguaje) que permitieron la determinación de Configuraciones Epistémicas.

Asimismo, se utilizaron los indicadores de idoneidad didáctica que proporciona el EOS para realizar una valoración de las propuestas de tareas y actividades que se plasmaron en los textos escolares analizados.

En función de las características generales que presentaron las propuestas didácticas contenidas en los ocho libros de texto analizados, la estructuración de las mismas y del enfoque didáctico utilizado, encontramos características comunes en sus configuraciones epistémicas, lo que nos permitió agruparlos en dos bloques o grupos.

De estos dos bloques o grupos de textos analizados, consideramos que el bloque o grupo 1, que propone problemas contextualizados y pone como centro de la actividad matemática la resolución de problemas, presenta una idoneidad didáctica global alta y está en concordancia con los lineamientos curriculares de Argentina (configuración epistémica de referencia a partir de significado institucional global o experto).

No obstante, es de destacar que entendemos que estas unidades curriculares tendrán idoneidad didáctica alta si el docente lleva a cabo una gestión de la clase en concordancia con el espíritu que intentan promover los textos.

Para este grupo de textos, aprender Matemática supone recurrir a experiencias cotidianas sobre el comportamiento de los objetos matemáticos, lo cual guarda concordancia con las directrices curriculares de Argentina.

Las situaciones que allí se proponen no son propuestas cerradas, sino que permiten trabajar los conceptos matemáticos en carácter de instrumento o de objeto, esto es, permiten resolver el problema planteado y al mismo tiempo se convierte en objeto de estudio.

Por otra parte, consideramos que las herramientas de análisis de texto que hemos empleado (configuración epistémica y funciones semióticas) son de gran utilidad para los profesores, pues permiten valorar la idoneidad didáctica que está plasmada a través de las tareas que proponen los textos escolares.

Al mismo tiempo, el análisis didáctico de los textos pone en relieve la actividad matemática que estaría presente en la clase y permitiría al profesor gestionar adecuadamente la misma. Esto es, si se tiene un texto que presenta características más formalistas, como los del grupo II, se puede gestionar la clase elevando la idoneidad didáctica de aquellas facetas que se ven más desfavorecidas.

En síntesis, creemos que para cualquier profesor que se plantee como adaptar a su contexto y circunstancia la propuesta didáctica de un determinado texto, es necesario adoptar criterios de idoneidad que permitan mejorarla y optimizarla.

### **7.4 Los conceptos, definiciones y propiedades que ponen en práctica los estudiantes en contextos de resolución de problemas con números racionales**

---

En el Capítulo 6 analizamos cualitativamente las soluciones que realizaron los 35 estudiantes, (10 ingresantes a Instituto del Profesorado y 25 ingresantes universidad), a las actividades del instrumento elaborado, validado y comentado en el Capítulo 4.

Determinamos las *Configuraciones Cognitivas* de los 35 estudiantes y posteriormente examinamos estas configuraciones y las comparamos con la *Configuración Epistémica* de referencia (*Configuración Epistémica Global* de Referencia y *Configuración Epistémica Global* de los textos escolares).

Esta comparación entre la Configuración Cognitiva (personal) de los estudiantes y la Configuración Epistémica de referencia (institucional), haciendo un paralelismo entre estudiantes ingresantes a Facultad de Ciencias Económicas de la UNL y los estudiantes ingresantes a ISPN° 10 de Helvecia arrojó los resultados plasmados en la Tabla 6 que se encuentra a continuación, puesto que hay diferencias entre ambos grupos de estudiantes, consideramos más apropiado hacer la distinción.

## Conclusiones

Indicamos algunos porcentajes con respecto al total de estudiantes participantes de cada grupo en el manejo de algunos elementos primarios haciendo la distinción entre quienes lo utilizan adecuadamente y los estudiantes que lo ponen en práctica articulándolo con la resolución de situaciones problemas, pero de manera medianamente adecuada.

INGRESANTES A LA UNL	INGRESANTES AL ISP N° 10
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 100% de los estudiantes ponen en práctica adecuadamente los conceptos de fracción, operaciones con fracciones, expresión decimal de una fracción, operaciones con expresiones decimales y ecuación.</li> <li>- El 88% de estudiantes ponen en práctica adecuadamente el concepto de fracción equivalente, mientras que un 8% solo lo hace medianamente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 100% de los estudiantes ponen en práctica los conceptos de fracción, fracciones equivalentes, operaciones con fracciones, expresión decimal de una fracción y operaciones con expresiones decimales.</li> <li>- El 40% de estudiantes pone en práctica adecuadamente el concepto de ecuación, mientras que un 60% solo lo hace medianamente</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 52% de estudiantes pone en práctica en forma adecuada el concepto de proporción.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 20% de estudiantes pone en práctica en forma adecuada el concepto de proporción, mientras que el 70% solo lo realiza medianamente.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 36% de estudiantes pone en práctica en forma adecuada el concepto de proporcionalidad, mientras que un 20% solo lo realiza medianamente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 20% de estudiantes pone en práctica en forma adecuada el concepto de proporcionalidad, mientras que el 40% lo realiza medianamente</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 56% de estudiantes pone en práctica adecuadamente el concepto de porcentaje</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 20% de estudiantes pone en práctica adecuadamente el concepto de porcentaje y el 30% solo lo realiza medianamente.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 48% de estudiantes pone en práctica en forma adecuada los conceptos de expresión decimal aproximada y notación científica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 30% de estudiantes pone en práctica el concepto de expresión decimal aproximada y el 30 % solo medianamente y el 20% de estudiantes pone en práctica en forma adecuada el de notación científica y el 20% solo medianamente</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 44% de estudiantes pone en práctica el concepto de desigualdad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 20% de estudiantes pone en práctica medianamente el concepto de desigualdad.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 80% de estudiantes pone en práctica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El 100% de estudiantes pone en práctica las</li> </ul>

## Conclusiones

adecuadamente las propiedades de las fracciones equivalentes y el 20% solo medianamente	propiedades de las fracciones equivalentes.
- El 36% de estudiantes pone en práctica medianamente las propiedades de las proporciones.	- El 10% de estudiantes pone en práctica en forma adecuada las propiedades de las proporciones y el 90% solo lo hace medianamente
- El 56% de estudiantes pone en práctica adecuadamente las propiedades de las operaciones con números racionales, mientras que el 44% lo hace medianamente	- El 70% de estudiantes pone en práctica adecuadamente las propiedades de las operaciones con números racionales, mientras que el 30% lo hace medianamente.
- El 28% de estudiantes pone en práctica en forma medianamente adecuada las propiedades de las magnitudes proporcionales.	- El 50% de estudiantes pone en práctica en forma medianamente las propiedades de las magnitudes proporcionales.
- El 24% de estudiantes pone en práctica adecuadamente las propiedades de las desigualdades mientras que el 4% lo hace medianamente	- El 20% de estudiantes pone en práctica adecuadamente las propiedades de las desigualdades.

Tabla 6: Conceptos, definiciones y propiedades que utilizan los estudiantes

Teniendo en cuenta los resultados esbozados para ambos grupos de estudiantes participantes, el análisis de las resoluciones realizadas y las entrevistas que llevamos a cabo, podemos sintetizar en forma general que:

- Los **conceptos** más utilizados, o que ponen en práctica en la resolución de situaciones problemas que involucran a los números racionales, son los de fracción, operaciones con fracciones, expresiones decimales y operaciones.
- No utilizan de manera apropiada algunos **conceptos** como: fracción como parte de una cantidad continua o discreta, fracción como razón y fracción como operador., desigualdad en expresiones que contienen números racionales.
- No relacionan en algunos casos los **conceptos** de fracción con razón, ni de fracciones equivalentes con proporción.
- La mayoría de los estudiantes no logran articular con la situación problema los **conceptos** de notación científica y expresión decimal aproximada. En algunos

casos aparecen algunos **procedimientos** incompletos o la aproximación por redondeo.

- Los estudiantes para carreras de formación docente (ISP N° 10) lograron mostrar un mejor manejo de los **conceptos** de proporción, magnitudes proporcionales y porcentaje.
- Ponen en práctica la mayoría de las **propiedades** de las fracciones equivalentes, no así de las **propiedades** de las proporciones y magnitudes proporcionales.
- La mayoría desconocen algunas **propiedades** asociadas a la resolución de problemas con números racionales (distributiva de la división con respecto a la suma o resta, asociativa de la multiplicación, inverso aditivo, inverso multiplicativo, entre otras) y las **propiedades** de las desigualdades, las cuales se relacionan con el **concepto** de desigualdad.

Si bien los estudiantes ponen en práctica algunos conceptos, definiciones y propiedades asociadas a los números racionales en la resolución de situaciones problemas, cabe preguntarse ¿Hasta qué punto podemos asegurar que el hecho de que ponga en práctica ciertos conceptos o propiedades, implica que tenga en claro el significado de dichos conceptos? En particular, aludimos a los conceptos de ecuación y proporción.

### **7.5. Los procedimientos, técnicas y algoritmos que emplean los estudiantes en contextos de resolución de problemas con números racionales**

---

Continuando con el mismo criterio establecido en la sección anterior, esbozamos un resumen, discriminado para cada grupo de estudiantes, sobre la utilización de procedimientos, técnicas y algoritmos que emplean en contextos de resolución de problemas con números racionales, para finalizar con conclusiones generales al respecto.

INGRESANTES A LA UNL	INGRESANTES AL ISP N° 10
- El 100% de los estudiantes realizan correctamente los procedimientos que implican la representación gráfica de fracciones con cantidades continuas, algoritmos de las operaciones con números racionales, y resolución de ecuaciones algebraicas sencillas.	- El 80% de los estudiantes realizan correctamente los procedimientos que implican la representación gráfica de fracciones con cantidades continuas, mientras que un 20% lo realiza medianamente - El 100% de los estudiantes aplican correctamente los algoritmos de las operaciones con números racionales.

## Conclusiones

- El 52% de los estudiantes interpreta en forma adecuada las consignas de los enunciados de las situaciones problemas, mientras que el 48% lo realiza medianamente	- El 70% de los estudiantes interpreta en forma adecuada las consignas de los enunciados de las situaciones problemas, mientras que el 30% lo realiza medianamente
- El 48% de los estudiantes interpreta adecuadamente las expresiones simbólicas, mientras que el 52% lo realiza medianamente	- El 10% de los estudiantes interpreta adecuadamente las expresiones simbólicas, mientras que el 90% lo hace medianamente
- El 32% de los estudiantes utilizan procedimientos correctos para completar tablas, enunciados y expresiones simbólicas y el 44% lo realiza medianamente	- El 20% de los estudiantes utilizan procedimientos correctos para completar tablas, enunciados y expresiones simbólicas y el 80% lo realiza medianamente
- El 32% de los estudiantes analiza y resuelve situaciones problemas que involucran magnitudes proporcionales, mientras que el 16% lo realiza medianamente	- El 10% de los estudiantes analiza y resuelve situaciones problemas que involucran magnitudes proporcionales, mientras que el 50% lo realiza medianamente
- El 36% de los estudiantes aproxima en forma adecuada expresiones decimales, mientras que el 12 % lo realiza en forma medianamente adecuada y el 28% expresa correctamente cantidades numéricas en notación científica y el 4% lo realiza de forma medianamente adecuada	- El 40% de los estudiantes aproxima en forma adecuada expresiones decimales, mientras que el 20% lo realiza en forma medianamente adecuada y el 20% expresa correctamente cantidades numéricas en notación científica.
- El 44% de los estudiantes resuelve adecuadamente situaciones problemas que involucran ecuaciones y desigualdades, mientras que el 4% lo realiza medianamente	- El 20% de los estudiantes resuelve adecuadamente situaciones problemas que involucran ecuaciones, mientras que el 80% lo realiza medianamente, y el 20% logra resolver medianamente desigualdades.

Tabla 7: Procedimientos, técnicas y algoritmos que utilizan los estudiantes

Teniendo en cuenta los resultados que se reflejan en la Tabla 7 sobre la utilización de procedimientos, técnicas y algoritmos por parte de los estudiantes en la resolución de las situaciones problemas intra y extra matemáticas con números racionales, el análisis de las respuestas dadas en el instrumento y las entrevistas realizadas, podemos sintetizar en forma general que:

- Los **procedimientos** más utilizados, ya sea en forma correcta o con algunas deficiencias son: representar gráficamente fracciones en cantidades continuas y algoritmos básicos de las operaciones con racionales.
- Se presentan deficiencias para interpretar problemas verbales, traducción de lenguaje simbólico a natural y viceversa, y aplicación de procedimientos adecuados para hallar la solución.
- La mitad de los estudiantes logra aplicar adecuadamente **procedimientos** asociados con la resolución de situaciones problemas que involucran magnitudes proporcionales.
- Pocos estudiantes son los que logran realizar aproximaciones de expresiones decimales (sólo aproximan por redondeo) y menor aún quienes expresan cantidades numéricas en notación científica.
- Muy pocos estudiantes logran interpretar y resolver situaciones problemas que involucren **procedimientos** necesarios para trabajar con desigualdades.
- Utilizan en varios casos, de manera errónea **procedimientos** relativos a la resolución de ecuaciones, cálculo de porcentajes, aproximación de expresiones decimales por redondeo o truncamiento, y expresión de números en notación científica.
- No utilizan en general **procedimientos** que impliquen la utilización del lenguaje gráfico en la resolución de situaciones problemas. Sólo en algunos casos aparecen intentos por realizar traducciones de un enunciado verbal a gráfico.

### 7.6. Las argumentaciones y lenguaje matemático que usan los estudiantes en contextos de resolución de problemas con números racionales

---

Esbozamos a continuación algunos porcentajes con respecto al total de estudiantes de cada grupo referidas al vínculo que realizan los estudiantes en sus argumentaciones con conceptos, propiedades o procedimientos. Expresamos en primera instancia una descripción general, para finalizar con una valoración más cualitativa.

INGRESANTES A LA UNL	INGRESANTES AL ISP N° 10
- El 32% de los estudiantes llevan a cabo procesos de argumentación medianamente aceptables, utilizando procedimientos para justificar la validez de lo realizado.	- El 40% de los estudiantes llevan a cabo procesos de argumentación aceptables utilizando procedimientos para justificar la validez de lo realizado, mientras que el 20% lo

## Conclusiones

	realiza de manera medianamente aceptable.
El 64% de los estudiantes llevan a cabo procesos de argumentación medianamente aceptables, utilizando propiedades para justificar la validez de lo realizado.	El 40% de los estudiantes llevan a cabo procesos de argumentación medianamente aceptables, utilizando propiedades para justificar la validez de lo realizado.
El 68% de los estudiantes utilizan lenguaje verbal, y el 52% lenguaje simbólico, para procesos de argumentación medianamente aceptables.	El 40% de los estudiantes utilizan lenguaje verbal para procesos de argumentación aceptables en la resolución de una situación problema, mientras que el 20% utiliza lenguaje verbal de manera medianamente aceptable.

Tabla 8: Las argumentaciones y lenguaje matemático que utilizan los estudiantes

Teniendo en cuenta los resultados alcanzados en el tipo de argumentaciones y uso de lenguaje que emplean los alumnos cuando brindan explicaciones sobre la resolución de situaciones que involucran números racionales, el análisis de las respuestas dadas en el instrumento y las entrevistas, podemos sintetizar en forma general que:

- Llevan a cabo procesos de **argumentación** mediante prácticas discursivas sólo cuando se sienten presionados a realizarlos (en este caso mediante una entrevista). Esto es, no argumentan de manera escrita, aun cuando sea una condición de la consigna de la situación problema.
- Los estudiantes aspirantes a ingresar en carreras de Formación Docente lograron mejores **argumentaciones** que involucran procedimientos para justificar lo realizado en las situaciones problemas.
- Los estudiantes aspirantes a ingresar a la Universidad lograron mejores **argumentaciones** que involucran las propiedades de los números racionales para justificar sus desarrollos. Estas justificaciones se remiten sólo a mencionar alguna propiedad sin lograr profundizar demasiado en ellas.
- El **lenguaje** utilizado en las argumentaciones difiere en ambos grupos, dado que los estudiantes ingresantes a la universidad utilizan el lenguaje verbal y/o simbólico, mientras que los estudiantes ingresantes a Formación Docente sólo utilizan el lenguaje verbal.

- La mayoría de los estudiantes no llevan a cabo procesos de argumentación que se encuadren en el primer estadio<sup>1</sup> (informal o ingenuo) que propone Mosterin (1980). Además, cuando lo hacen introducen **argumentos** a través del lenguaje verbal que no son adecuados y emplean **elementos lingüísticos** que no se encontrarían en una configuración epistémica asociada a números racionales.

### **7.7. La comprensión que han alcanzado los estudiantes sobre números racionales al finalizar la escuela secundaria**

---

Teniendo en cuenta que el EOS considera la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental, pues se asume que un estudiante comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas, hacemos a continuación una síntesis del análisis global de las Configuraciones Cognitivas centrándonos en la comprensión alcanzada sobre los números racionales. Para este análisis y síntesis hemos tenido en cuenta:

- Las resoluciones a las situaciones problemas planteadas en el instrumento por los 35 estudiantes, y las entrevistas realizadas luego para indagar con mayor profundidad los conceptos propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje que utilizaron y las relaciones entre estos elementos primarios de los números racionales como objeto matemático.
- La Configuración Epistémica de referencia que se construyó a partir del significado institucional global o experto del análisis de documentos curriculares y determinación de las Configuraciones Epistémicas de los textos escolares analizados cuyas unidades didácticas referidas a los números racionales se analizaron.
- La comparación realizada entre la Configuración Epistémica de referencia y la Configuración Cognitiva de cada estudiante.
- El marco teórico y los antecedentes bibliográficos considerados.

Podemos sintetizar en forma general que:

Las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes a propósito de resolver situaciones problemas que involucran a los números racionales reflejan que:

---

<sup>1</sup> Utilizar un razonamiento mediante un ejemplo, un ejemplo cuidadosamente seleccionado o un ejemplo genérico, o bien un razonamiento lógico a partir de proposiciones conocidas, inducción completa, etc.

- (a) En el caso de situaciones problemas con los números racionales, dados en contextos intra o extra matemáticos, se evidencia en algunos casos la incorrecta interpretación de los enunciados, el uso inadecuado del lenguaje simbólico y/o gráfico y una deficiente aplicación de procedimientos.
- (b) Los **conceptos** más utilizados son los de fracciones, operaciones con fracciones, expresiones decimales y operaciones, lo que parece evidenciar un aprendizaje centrado en rutinas y algoritmos propios de este campo numérico.
- (c) En muchos de los casos no dan evidencias de tener claro los **conceptos** de fracción como parte de una cantidad continua o discreta, ecuaciones, desigualdades, notación científica, proporcionalidad, porcentaje, entre otros, pues no los utilizan de manera adecuada en la resolución de las situaciones problemas.
- (d) En varios casos no relacionan los **conceptos** de fracción con razón, ni de fracciones equivalentes con proporción, lo que aparentemente evidenciaría un aprendizaje atomizado, fragmentado o segmentado de los números racionales.
- (e) En general, no se ha vinculado a las resoluciones de situaciones problemas el **concepto** de desigualdad en expresiones que contienen números racionales, ni las **propiedades** asociadas a las desigualdades.
- (f) Evidencian desconocimiento en muchos de los casos de algunas **propiedades** de las operaciones asociadas a la resolución de problemas con números racionales, tales como distributiva de la división con respecto a la suma o resta, asociativa de la multiplicación, inverso aditivo, inverso multiplicativo, entre otras.
- (g) Utilizan algunos **procedimientos** erróneos al operar con números racionales, en situaciones problemas que involucran ecuaciones, cálculo de porcentajes, aproximación de expresiones decimales por redondeo o truncamiento, y al expresar números en notación científica.
- (h) En la mayoría de los casos no dan **argumentos** convincentes de las resoluciones que llevan a cabo, e introducen lenguaje verbal que no es adecuado, con **elementos lingüísticos** que no se encontrarían en una Configuración Epistémica asociada a números racionales.

Esta síntesis refleja conclusiones generales de las prácticas operativas y discursivas de ambos grupos de estudiantes participantes en la investigación, a propósito de resolver situaciones problemas que involucran a los números racionales.

Si se tienen en cuenta las relaciones que establecieron o no entre los elementos primarios del objeto matemático, sostenemos que Los estudiantes no han alcanzado una comprensión global de los números racionales como objeto matemático, sino más bien, que han logrado alcanzar aspectos parciales, ya que en muchos casos no han podido utilizarlo de manera competente en diferentes prácticas operativas y discursivas. Esto guarda relación con el hecho de que la Configuración Cognitiva referida a números racionales de cada estudiante evaluado es incompleta puesto que no se establecieron todas las redes de relaciones que estarían presentes en la Configuración Epistémica.

No obstante, rescatando lo que cada estudiante ha comprendido sobre números racionales (redes de relaciones que logra establecer adecuadamente), se logra estructurar la Configuración Epistémica deseada y utilizada como referencial para el estudio.

Teniendo en cuenta a Godino (2003) que sostiene que, en una situación ideal y en una institución dada, un sujeto “comprende” el significado del objeto –o se “ha apropiado del significado” de un concepto– si es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente. Y que para el EOS la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente llegue a ser total, o por el contrario, sea nula; sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. Nos permite sostener que si se organizaran procesos de enseñanza y aprendizaje cuidadosamente planificados, teniendo en cuenta las múltiples relaciones que se establecen entre la situación problema, los conceptos, propiedades, procedimientos, lenguaje y argumentos, se mejoraría la comprensión global que los estudiantes lograrían tener sobre los números racionales como objeto de estudio. La complejidad sistémica del significado de un objeto, implica que su apropiación deviene de un proceso dinámico, progresivo y no lineal, como consecuencia de los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que participa.

En este caso rescatamos del trabajo de Elguero (2009) la relevancia que tiene el tratamiento escolar del número racional al pensarlo en sus diferentes usos en ámbitos cotidianos del estudiante, en las ideas que se configuran tales usos y en la distancia que existe entre esas ideas y lo que la escuela quiere transmitir. Si bien en esta investigación se desarrolla un estudio de caso, aporta para conocer la realidad social del número racional y para reflexionar en torno a lo que se construye fuera de la escuela desde una perspectiva

didáctica. Al mismo tiempo, propone interesantes redes de relaciones entre los objetos primarios que conforman una configuración epistémica referida a números racionales. Esto último, es un aspecto que recuperamos para el diseño o selección de tareas para proponer a los estudiantes sobre números racionales.

### **7.8. Las dificultades y errores que persisten en las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes al finalizar la escuela secundaria**

---

El análisis de las prácticas operativas y discursivas llevadas a cabo por ambos grupos de estudiantes participantes, frente a las situaciones problemas nos permitió observar y sintetizar en forma general que los estudiantes tienen:

- Dificultades para utilizar el concepto de número racional de manera competente en la resolución de situaciones problemas.
- Dificultades para identificar las múltiples representaciones que tiene un número racional y cómo se relacionan entre sí las mismas. En particular, no distinguen a la fracción como una razón, o como la cantidad de veces que está una cantidad en otra, y por consiguiente, para relacionar fracciones equivalentes con proporciones.
- Dificultades para utilizar los diferentes significados (entendidos como conjunto de prácticas operativas y discursivas) de número racional, la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias estructurales, relacionales y de representación y la significación de la densidad respecto del orden.
- Errores y dificultades en la aplicación de los algoritmos de las operaciones con números racionales, y en la resolución de ecuaciones y desigualdades que los involucran. En este caso, utilizan algoritmos y procedimientos que no logran sostener en procesos argumentativos adecuados para justificar su aplicación, en tanto no se vinculan con conceptos ni propiedades.
- Errores y dificultades para operar con números decimales, en el uso del cero, en la lectura y escritura de los números y para establecer el orden entre ellos.
- Dificultades para emplear conceptos y procedimientos necesarios para la aproximación de expresiones decimales y en la escritura en notación científica.
- Dificultades para interpretar la noción de densidad de los números racionales.
- Errores y dificultades para interpretar enunciados verbales y simbólicos en situaciones problemas, lo que se evidencia en la incorrecta traducción a otros

lenguajes como simbólico o gráfico y en lo inadecuado que fueron los procesos de argumentación.

- Dificultades para justificar respuestas que se vinculan con conceptos, propiedades, procedimientos y algoritmos propios de los números racionales.
- Errores y dificultades para aplicar propiedades de las operaciones con números racionales y de las desigualdades.
- Dificultades para relacionar los conceptos de fracción y razón, fracciones equivalentes y proporciones y por consiguiente para resolver situaciones problemas que involucran magnitudes proporcionales.

Considerando lo expuesto en esta síntesis y sin que sea un objetivo de esta investigación, nos aventuramos a esbozar algunas categorías de los errores y dificultades detectados:

- Dificultades relacionadas con los objetos matemáticos.

Creemos que si un tipo de error o dificultad se manifiesta en un determinado número de estudiantes de manera persistente, su origen se debería buscar en los conocimientos requeridos, y no tanto en los propios estudiantes, por esto creemos que la complejidad semiótica asociadas a las prácticas matemáticas son una posible causa de las dificultades de aprendizaje.

En este caso, coincidimos con el trabajo de Flores (2010), en el sentido que los estudiantes tienen dificultades para pasar de un contexto aritmético a uno geométrico o algebraico y la recurrencia a la representación decimal pretendiendo evitar trabajar con las fracciones.

Y con el trabajo de Quispe Yapó(2011) que concluyó que en la comprensión de los significados del número racional, existe una interferencia persistente del significado parte-todo en la interpretación de los significados de medida, razón, cociente y operador.

- Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas

Otra posible causa de las dificultades pueden ser el caso de que la propuesta de actividades no fue potencialmente significativa (la complejidad semiótica no fue bien gestionada), por causas diferentes que pudieron darse en la elaboración de las actividades del instrumento.

- Dificultades relacionadas con los significados de los objetos personales de los estudiantes

En este caso aparecen conflictos o diferencias entre significados (institucional y personal).

## 7.9. Reflexiones y consideraciones finales

---

El estudio realizado en nuestra investigación nos lleva a formular algunos criterios que pudieran tenerse en cuenta en el diseño o rediseño de situaciones problemas que involucran a los números racionales como objeto de estudio. Estos criterios los fuimos utilizando también para la elaboración del instrumento utilizado en la investigación, y devienen de establecer situaciones problemas que pongan en evidencia redes de relaciones entre los objetos primarios involucrados para los números racionales.

- Seleccionar o diseñar situaciones problemas en contextos extra e intra-matemáticos que tengan sentido en el campo de conocimientos del alumno, cercanas a la realidad concreta de su entorno. Estas situaciones debieran buscarse deliberadamente abiertas y que involucren una red relevante de conceptos, propiedades y procedimientos para su resolución. Un análisis a priori de los elementos primarios que conforman al objeto matemático involucrado (Configuración Epistémica e Instruccional) no debiera atomizarse sólo en uno de ellos (por ejemplo, en procedimientos).

De Elguero (2009) rescatamos el buscar escenarios significativos que hagan evidentes las limitaciones de lo que se ha construido fuera de la escuela. Consideramos que el punto de partida puede situarse en un escenario relacionado con el problema de medir o de representar medidas y desde allí avanzar hacia otros escenarios para construir la amplia gama de significados que el número racional puede asumir.

- Es importante que en las actividades se destaque la importancia que tiene las redes de relaciones entre los elementos primarios del significado de número racional, antes de mostrar los algoritmos o procedimientos propios de los números racionales.

El trabajo de Quispe Yapó (2011) logró verificar la existencia de una relación directa entre la capacidad que tiene el estudiante para manejar los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades del número racional, y con la comprensión de sus significados.

- Es relevante que la situación problema promueva el uso de diferentes registros de representación y lenguajes (verbal, simbólico y gráfico), entendidos éstos como red de relaciones entre dos elementos que constituyen la Configuración Epistémica de número racional como objeto de estudio (lenguaje y argumentos).

Del trabajo de Escolano (2001) rescatamos, que el aprendizaje basado en magnitudes continuas permite a los estudiantes construir y evaluar semánticamente el sistema de representación fraccional y dar significados a las relaciones de equivalencia y orden; como así también, las representaciones gráficas facilitan la transmisión entre las acciones realizadas con materiales manipulativos y las representaciones simbólicas.

- Las situaciones problemas deben generar y promover procesos de argumentación, pues en ellos se advierten las relaciones que los estudiantes realizan entre los objetos primarios y se tienen indicios de la comprensión alcanzada. La mera aplicación de procedimientos, técnicas o algoritmos no es evidencia de haberse comprendido un objeto matemático.
- Es importante el análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático pues nos permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza,
- Algunas dificultades se podrían resolver utilizando una evaluación formativa que permita superar obstáculos presentando situaciones, suficientemente complejas, para que el alumno sea consciente de que determinadas prácticas sólo son válidas en determinados contextos.

Finalmente, pensamos que este trabajo orienta no sólo hacia el análisis que debiera realizar el profesor para valorar la comprensión de los alumnos, y de los errores y dificultades que genera la misma, sino también, a repensar sobre las estrategias que pueden resultar más convenientes a la hora de llevar adelante los procesos de enseñanza y aprendizaje en Matemática. Esto guarda relación con el trabajo de Gairín (1999), quien concluye que es relevante la relación entre los conocimientos matemáticos que poseen los futuros maestros y su actuación profesional, en el sentido que cuanto mayor es la comprensión del modelo, más eficaces se muestran en la detección y diagnóstico de los errores de los escolares, y más tienden a ofrecer razonamientos sustentados en el mundo de los objetos. Para ello la noción de idoneidad didáctica puede ser útil para analizar un proceso de estudio implementado en una clase, en la planificación o en el desarrollo de una unidad didáctica, además para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un texto escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, por ello consideramos importantes los indicadores de los distintos tipos de idoneidad planteados en Godino (2011), mediante el cual los docentes de Matemática puedan construir la competencia en análisis didáctico de secuencias de tareas.

Las configuraciones epistémicas de las actividades propuestas pueden ser de utilidad para anticipar posibles conflictos o diferencias entre significados (institucional y personal), lo cual contribuye al diseño, aplicación, valoración y mejora de las tareas, que son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los estudiantes, las que son el punto de partida de la actividad a desarrollar en la clase, y la que a su vez, produce como resultado algún aprendizaje.

Esto también nos lleva a reflexionar, incluso, en los procesos de evaluación que implementamos, pues centrarnos sólo en prácticas operativas descartando las discursivas estaría mostrando una parte de la realidad en torno a la comprensión alcanzada por los estudiantes sobre cierto objeto matemático.

### **7.8. Limitaciones de la investigación y perspectivas futuras de trabajo**

---

Los resultados y conclusiones del presente estudio corresponden al caso de dos grupos de estudiantes (ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL y carreras de formación docente en el ISP N° 10) en el año 2012, por lo que no pueden extenderse a otros grupos de estudiantes. No obstante, sí se puede extender la metodología utilizada para valorar la comprensión de un objeto matemático, y el instrumento puede servir de base para otro que tenga por finalidad determinar relaciones que establecen los estudiantes entre los elementos primarios que conforman a los números racionales como objeto matemático.

El trabajo realizado deja algunas líneas posibles de profundización de la investigación, tales como:

- Comprensión alcanzada de algunos elementos primarios que conforman el objeto matemático números racionales, los que se constituyen en un nuevo objeto matemático desde la perspectiva del EOS.
- Concepciones sustentadas por los profesores en torno a la comprensión de un objeto matemático.
- Criterios que tienen profesores y/o libros de textos para enseñar un objeto matemático con el propósito de lograr la comprensión.
- Niveles de comprensión alcanzados sobre un objeto matemático cuando se enfatizan procesos de argumentación por parte de los estudiantes.

Por último, para la valoración de la comprensión de los números racionales utilizamos las herramientas y constructos que proporciona el EOS como línea de la Didáctica de la

Matemática. Sabemos y somos conscientes que utilizar un marco teórico particular hace sesgar el modo de analizar y ver una realidad, por lo cual las conclusiones a las que arribamos no necesariamente son homólogas a las que se obtendrían si se hubieran usado otras herramientas que provienen de otras líneas y enfoques de la Didáctica de la Matemática. Esto, incluso, puede verse como una perspectiva futura de estudio de la investigación que hemos llevado a cabo.

# **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- Alvarez C., Alvarez, F., Garrido, L., Martinez, S. y Ruiz A. (2004). *Matemática 8*. Buenos Aires: Ediciones Vicens Vives S. A.
- Aragón, M., Laurito, L., Net, G. y Trama, E. (2005). *Matemática 9 -Carpeta de actividades*. Buenos Aires: Editorial Estrada.
- Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica*. Caracas: Episteme.
- Aristegui, R., Graciani, A., Mancini, G., Ríos, L. y Sobico, C. (2009). *Matemática 8 Estadística y probabilidad*. Buenos Aires: Puerto de Palos.
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2-3), 243-285.
- Artigue, M. (1998). Teaching and Learning Elementary Analysis. En C. Alsina et al. (eds.), ICME 8 (1996). Selected Lectures (pp. 15-29). Sevilla: S.A.E.M. THALES.
- Ávila, A. y Mancera, E. (1989). La fracción: una expresión difícil de interpretar. *Revista de la Universidad Pedagógica Nacional* 6 (17), 21-26.
- Bachelard, G. (1972). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires: Siglo XXI.
- Becerril, M., Grimaldi, V., Ponce, H., Urquiza, M. y Broitman, C. (2008). *Estudiar Matemática NAP 8º, ES 2º, CABA 1º*. Buenos Aires: Ediciones Santillana.
- Berman A., Dacunti, D., Pérez, M., Veltri, A. y Moledo, L. (2007). *Matemática II*. Buenos Aires: Ediciones Santillana.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164-198.
- Brousseau, G. (2004). *Théorie des Situations Didactiques (Didactiques des Mathématiques 1970-1990)*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

- Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Extraído el 30 de noviembre de 2011 de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson.
- Chorny, F. (2009). *Matemática 2 y 3 - Nuevos horizontes + selección ¿Matemática estas ahí?*. Buenos Aires: Ediciones SM.
- D' amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México: Reverté.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Cali: Universidad del Valle.
- Elguero, C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural del trabajo*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.
- Escolano, R. (2001). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. En Moreno, M. F.; Gil, F.; Socas, M.; Godino, J. D. (Eds.), *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la SEIEM* (pp. 149-158). Almería: Servicio de Publicaciones.
- Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Bologna. Italia.
- Fandiño, M. I. (2009). *Las Fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. Tesis de doctorado no publicada, Centros de Investigación y de estudios avanzados del IPN. México.
- Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria*. Tesis de maestría no publicada, CICATA- IPN. México.
- Font, V. (2000a). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona
- Font, V. (2001). Processos mentals versus competencia. *Biaix 19*, 33-36.

- Font, V., Planas, N. y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO* 56, 86-94.
- Gairín, J. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos, Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza, España.
- Gaita, C., Wilhelmi, M. R., Huanqui, J. y Lasa, A. (2009). Estudio de significados institucionales de la función en textos oficiales de secundaria. En M. J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación, XIII Simposio de la SEIEM*, (pp. 1-15). Santander: Universidad de Cantabria.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO* 25, 77-87.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F. y Roa, R.(2004). *Matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. and Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma XXVII(2)*, 221-252.
- Godino, J. D.; Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 39(1-2)*, 127-135.
- Godino, J.; Font, V.; Konic, P. y Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico* (pp. 117-184). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino J. (2011) en [http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino\\_indicadores\\_idoneidad.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf).
- Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Editorial Mc Graw Hill.
- INFD. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. *Área: Matemática*. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias.
- López, A. y Pellet, C. (2005). *Matemática en red – 8º EGB*. Buenos Aires: AZ editora.
- Martínez M. y Rodríguez M.(2004). *Matemática. M. E.* Buenos Aires. Ediciones Mc Graw Hill Interamericana.
- Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education*. London: Routledge Falmer.
- Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. (1995). *Contenidos básicos comunes para la Educación General Básica, Segunda Edición*. Buenos Aires: Consejo Federal de Cultura y Educación..
- Ministerio de Educación de Santa Fe. (1999). *Diseño Curricular Jurisdiccional Tercer Ciclo EGB. Matemática, Ciencias Naturales, Tecnología*. Santa Fe: Gobierno de Santa Fe.

- Mosterín, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona: Ariel
- Perera y Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctico para la enseñanza de las fracciones en Educación primaria. *Investigación en educación matemática XI*, 209- 218.
- Pino-Fan, L.; Godino, J.D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa 13 (1)*, 141-178.
- Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad. *Revista Iberoamericana de Educación 35*.
- Pochulu, M. (2011). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática. En: M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 54 – 84). Los Polvorines: Ediciones UNGS y EDUVIM.
- Quispe Yapo, W. (2011). *Comprensión de los significados del número racional y su relación con las operaciones y propiedades*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima. Perú.
- Rico, I. y Sáenz, o. (1982): Programación del bloque de las fracciones en el ciclo medio de E.G.B.. En *Actas de las IJJAEM*, tomo II, Sevilla: Sociedad Andaluza de profesores de matemáticas Thales.
- Rodríguez, M.; Pochulu, M. y Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa 13 (3)*, 624-650.
- Sánchez, F. (2006). *Expresiones fraccionarias a expresiones decimales y viceversa en el conjunto de los racionales*. Bogota: Universidad Pedagógica.
- Sierpiska, A. (1988). *Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. Actes du Colloque: Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Montreal: CIRADE.
- Skemp, R. R. (1976.) Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching 77*, 20-26.

- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problema. Solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334 – 370). New York: Macmillan.
- Tamayo y Tamayo, M. (2000). *El proceso de la investigación científica*. México: Limusa
- Tzur, R.; Sullivan, P., & Zaslavsky, O. (2008). Examining teachers' use of (non-routine) mathematical tasks in classrooms from three complementary perspectives: Teacher, teacher educator, researcher. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the 30th North American Chapter* (Vol. 1, pp. 133-137). México: PME.
- Vigotsky, I. (1934). *Pensamiento y lenguaje Edición 1998*. Buenos aires. Ediciones Fausto
- Zaslavsky, O. & Sullivan, P. (Eds.). (2011). *Constructing knowledge for teaching: Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. New York: Springe

