**Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral**

TESIS DE MAESTRÍA EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

# Estudio de consignas matemáticas vinculadas a la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real

Autora: Esp. Patricia Noemí Cavatorta

Directora: Mg. Adriana Gladys Favieri

Co-Directora: Dra. Bibiana Raquel Iaffei

Santa Fe, Argentina

-2023-

*A mis hijos, Santiago y Pedro.*

*Por ser mis fieles, dulces y generosos compañeros de vida.*

# *Agradecimientos*


*Cada mañana se crea un ayer, mediante un hoy.*
*Tenemos que saber lo que fuimos, para saber lo que seremos.*
*Paulo Freire*

Saber lo que fui, en ese ayer del que habla Freire, implica hacer presentes, reconocer y agradecer a las y los que formaron parte en este recorrido.

A quienes me dirigieron, **Adriana** y **Bibiana**, por la inconmensurable paciencia y el sostenido y amoroso acompañamiento. Gracias por la generosidad que me brindaron y por sus valiosas enseñanzas. Nunca olvidaré la dedicación con la que me ayudaron a recorrer este camino.

A mis profesores/as de la carrera, por todos los conocimientos aportados.

A mis compañeras de estudio de la maestría, Angie, Cin y Yami, por los momentos compartidos en los inicios del camino y las experiencias conjuntas.

A mis colegas de las distintas instituciones educativas en las que trabajé en los últimos años, ISP N°6, ISP N°8, ENS N°32, ISP N°64 y FHUC-UNL, de las y los que a menudo recibí palabras de aliento y fuerzas para no bajar los brazos.

A mis compañeras y compañeros de la FHUC, que siempre están ayudándome a crecer profesionalmente y como persona. Gracias por el apoyo en esta etapa.

A mis alumnas y alumnos, que todos los días me incentivan a crecer en mi profesión y me hacen disfrutarla y amarla.

A mis amistades y familiares por estar siempre presentes, ayudándome en los momentos más difíciles y celebrando conmigo cada pequeña meta alcanzada.

# ÍNDICE

# CAPÍTULO PRELIMINAR

# RESUMEN Y ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

## 0.1. RESUMEN

Esta tesis es el resultado de una investigación cualitativa de alcance exploratorio descriptivo, que tiene por objetivo valorar consignas propuestas para la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real en los libros de texto recomendados en la cátedra Cálculo I de la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (FHUC-UNL).

Nuestra posición es de tipo integradora, dado que revisamos trabajos previos para elaborar el marco teórico de referencia pero nos desprendimos de éstos porque que no versan exactamente sobre el tema elegido. Particularmente, realizamos estudios de consignas matemáticas, y la selección de las mismas no fue azarosa, estudiamos estos casos en profundidad.

Durante el proceso establecimos criterios de selección de libros y consignas propuestas en ellos, elaboramos el concepto de "fertilidad de una consigna matemática" y determinamos indicadores para la valoración de dicha fertilidad. Además identificamos aspectos subyacentes al concepto de límite involucrados en las consignas, describimos la influencia del uso de GeoGebra en las resoluciones y reformulamos y diseñamos nuevas consignas en función de los resultados del estudio, con el propósito de que ofrezcan oportunidades efectivas para la construcción del concepto de límite.

Extrajimos conclusiones a partir del análisis en profundidad de un grupo de consignas recuperadas de dos libros de texto propuestos en Cálculo I. Para escoger los libros tuvimos en cuenta los resultados de una encuesta realizada a las y los estudiantes que aprobaron la asignatura en el período 2016-2020. Para la selección de las consignas establecimos criterios atendiendo a la encuesta mencionada y los análisis generales de las secciones, relativas al tema, de los dos libros.

Para el estudio de las consignas consideramos el marco teórico de referencia construido, indagando respecto de lo emergente a partir de diferentes modos de resolver los problemas matemáticos que se plantean, contemplando lo compartido y lo singular. Consideramos las posibilidades de exploración y argumentación que ofrecen, los registros de representación semiótica involucrados, las demandas cognitivas que provocan y los aspectos del concepto de

límite que intervienen. También fue necesario, en los casos viables, describir posibles resoluciones con el uso de GeoGebra y reflexionar sobre la conveniencia de su utilización.
Establecimos resultados derivados del análisis, en los que recuperamos observaciones particulares destacadas y puntos focales, y establecimos criterios para determinar la fertilidad de consignas sobre límite en las que se dispone de GeoGebra para la resolución.
Además, atendiendo a los resultados, a modo de ejemplo, reformulamos seis consignas de las estudiadas y elaboramos dos nuevas consignas para el abordaje de la enseñanza de la definición métrica.
Consideramos como hallazgos importantes los instrumentos diseñados para la recolección de datos y para el análisis de consignas y los criterios construidos para la selección de libros y de consignas. Esto podría ser provechoso en investigaciones relacionadas.
Las contribuciones más destacadas de la investigación son la definición de "fertilidad de una consigna matemática" y los criterios para establecer dicha fertilidad en consignas sobre el tema límite. Estos son aportes tanto para la comunidad de investigadoras/es como de docentes ya que permiten tener una perspectiva fundada a la hora de seleccionar, formular y/o reformular consignas sobre el tema.

## 0.2. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Este escrito cuenta con 8 capítulos (además este Capítulo Preliminar), las referencias bibliográficas y 4 anexos. Expresamos en los capítulos el contenido depurado de la investigación y en los anexos documentación que amplía, fundamenta o sintetiza lo expresado en algunos capítulos.

### Sobre los capítulos

- En el CAPÍTULO 1 explicitamos el problema investigación, justificando su relevancia en el ámbito de la Educación Matemática. Expresamos las razones que dieron origen a las preguntas de investigación y al estudio del tema.
- En el CAPÍTULO 2 presentamos los antecedentes sobre el tema. Estos abordan estudios sobre algún aspecto o problemática de la enseñanza y/o el aprendizaje del límite puntual y sobre consignas para la enseñanza, relativas a: el contexto educativo en general, el contexto matemático, la enseñanza de límite y la enseñanza de la Matemática con inclusión de tecnologías digitales.

- En el CAPÍTULO 3 presentamos el marco teórico construido a partir de las teorías que consideramos de relevancia.
- En el CAPÍTULO 4 exponemos el contexto, los objetivos y el marco metodológico de la investigación. Damos cuenta de: el contexto en que se desarrolla el estudio, el objetivo general y los objetivos particulares perseguidos, el tipo de investigación realizada (con sus alcances) y del proceso de investigación organizado en fases.
- En el CAPÍTULO 5 presentamos cómo realizamos la selección de los dos libros de los cuales extrajimos las consignas analizadas y una síntesis del escaneo general de las secciones de los mismos correspondientes al tema de nuestro estudio.
- En el CAPÍTULO 6 damos a conocer los criterios de selección de las consignas y el estudio en profundidad de las mismas. También mostramos los resultados obtenidos y exponemos puntos focales a considerar para la selección, la reformulación y el diseño de consignas para la enseñanza de límite.
- En el CAPÍTULO 7 mostramos la reformulación de algunas de las consignas estudiadas, atendiendo a los resultados expuestos en el Capítulo 6 y presentamos "nuevas consignas" diseñadas para el abordaje de la construcción de la definición métrica de límite puntual.
- En el CAPÍTULO 8 damos cuenta de las evidencias que se dieron durante el proceso de investigación, las conclusiones a las que arribamos en relación a los objetivos planteados, las contribuciones parciales producidas y las posibles líneas de continuidad de nuestro trabajo.

**Sobre los anexos**

- En el Anexo I presentamos la encuesta realizada a las y los estudiantes, la justificación de la selección de encuestadas/os y los resúmenes de los resultados obtenidos a partir de sus respuestas.
- En el Anexo II mostramos el instrumento "Grillas de escaneo", diseñado para la revisión general de las consignas.
- En el Anexo III exhibimos el análisis general (en función del marco teórico de referencia construido) de las secciones 2.1 y 2.2 de los libros de texto seleccionados, de las cuales extrajimos las consignas estudiadas.
- En el Anexo IV mostramos el compendio de todas las consignas seleccionadas para el análisis expuesto en el capítulo 6.

## 0.3. INDICE DE ABREVIATURAS

En este escrito hacemos referencia repetida a ciertos términos, categorías y conceptos. Para evitar redundancias, en la primera aparición de los mismos, los presentamos de forma completa junto con sus abreviaturas correspondientes entre paréntesis. A partir de la segunda mención, utilizamos únicamente las abreviaturas.

En la Tabla 1 presentamos, en orden alfabético, el significado de las abreviaturas utilizadas.

| Abreviatura | Significado |
|---|---|
| **AM** | Actividad Matemática |
| **CPS** | Criterio de pertinencia y significatividad |
| **CS** | Con software |
| **PM** | Potencial Matemático |
| **RRA** | Registro de representación algebraico |
| **RRG** | Registro de representación gráfico |
| **RRN** | Registro de representación numérico |
| **RRV** | Registro de representación verbal |
| **SS** | Sin software |
| **TD** | Tecnología/s digital/es |
| **TIC** | Tecnología/s de la información y la comunicación |
| **TM** | Tarea de memorización |
| **TPCC** | Tarea de procedimiento con conexión |
| **TPM** | Tarea para producir matemáticas |
| **TPSC** | Tarea de procedimiento sin conexión |

**Tabla 1. Abreviatura utilizadas y significados**

# CAPÍTULO 1

# PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo consta de dos apartados. En el primero (1.1) presentamos el problema de investigación y la justificación de su relevancia. En el segundo (1.2) planteamos las preguntas que guiaron la investigación.

## 1.1. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La autora de esta tesis es parte del cuerpo docente de la asignatura Cálculo I de la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (FHUC-UNL). En esta cátedra notamos la existencia de dificultades recurrentes en los procesos de aprendizaje del concepto central de la asignatura: el de límite puntual de funciones reales de variable real. Cuestiones también detectadas por la directora y codirectora de este trabajo, por su experiencia como docentes del área Análisis Matemático.

Nuestra experiencia permite expresar que las y los estudiantes presentan pocos inconvenientes en el cálculo de límites, y que con constancia y dedicación logran superar las dificultades, al menos en su mayoría. Observamos especialmente dificultades en la interpretación de lo que están calculando, la elaboración de estrategias adecuadas para la resolución de las situaciones problemáticas, la comprensión de los procedimientos ligados a los cálculos y la construcción significativa de las definiciones. Las y los estudiantes dan cuenta, por la narración en la resolución de actividades en los trabajos prácticos y exámenes, y por las explicaciones que manifiestan a sus pares cuando pasan a la pizarra o trabajan en grupos, que utilizan procedimientos que han incorporado como herramientas obteniendo resultados correctos, pero en muchas ocasiones los utilizan mecánicamente, haciendo abuso de omisión de muchas cuestiones inherentes al concepto de límite. En relación a esto Azcárate et al. (1996) plantean que:

> En la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite se produce un fenómeno didáctico bien conocido: los profesores son conscientes de que la mayoría de sus estudiantes es incapaz de dominar el concepto y, sin embargo, proponen ejercicios que enseñan a resolver, de manera que buena parte de los alumnos pueden aprobar la asignatura. (p. 13)

Durante varios años, desde la cátedra de Cálculo I se han tomado decisiones didácticas para mejorar el aprendizaje de las y los estudiantes. Una de ellas ha sido la alteración del orden de desarrollo preestablecido en el libro de texto[1] utilizado en la asignatura, concretamente en la unidad II "Límite y continuidad" y III "Derivadas". En lugar de abordar estos temas siguiendo el orden del libro, se ha optado por abordarlos en dos etapas. En la primera etapa (capítulos 2 y 3 del libro), se introduce el tema sin utilizar la definición épsilon-delta. En la segunda etapa, se formaliza dicha definición, completando así la formalización de todo lo trabajado desde lo intuitivo y experimental. También se abordan demostraciones de mayor complejidad.

Las dificultades en el aprendizaje del cálculo han sido objeto de estudio por parte de muchos investigadores en Educación Matemática. En particular, Artigue (1995) ha planteado que estas dificultades se pueden clasificar en tres categorías: la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, la conceptualización y formalización del concepto de límite, que es la noción central del campo, y las rupturas necesarias en relación a los modos de pensamiento algebraico. La enseñanza universitaria de los conceptos del cálculo, tiende a centrarse en prácticas algorítmicas y algebraicas y en la evaluación de las competencias adquiridas, según sostienen tanto Artigue (1995) como Corica y Otero (2009). Estas ideas son relevantes a la hora de diseñar actividades y planificar una clase, ya que es necesario tener en cuenta las dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje del cálculo y diseñar estrategias didácticas que permitan superarlas.

En relación a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite, existen múltiples investigaciones[2] que abordan diferentes aspectos, tales como las dificultades en la construcción del concepto, los conflictos semióticos, las concepciones erróneas, el abordaje desde distintos registros de representación, las definiciones informales, las imágenes conceptuales asociadas al concepto, y el impacto de las propuestas de enseñanza en el aprendizaje. La renovación de la enseñanza del Cálculo implica, según Moreno Moreno (2005), cambios en varios aspectos, como el currículo, el desarrollo profesional de la universidad, el uso de tecnologías y la formación didáctica y científica de los futuros docentes. Estos cambios son fundamentales para mejorar la enseñanza del Cálculo y superar las dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Como investigadores en Educación Matemática, es importante tener en cuenta estos aspectos al abordar la problemática del aprendizaje del Cálculo y contribuir a su mejora continua.

---

[1] Salas, S., Hille. E. y Etgen, G. (2002). *CALCULUS. Una y varias variables* (C. Casacuberta Vergés, Trad.). Reverté.
[2] Estas investigaciones las explicitamos en la sección 2.1.

Por otro lado, la incorporación de tecnologías digitales (TD) en el proceso de enseñanza ha sido objeto de estudio por diversos investigadores. Según Codes y Sierra (2005), el uso de tecnología en el aula puede facilitar la exploración y experimentación de conceptos, incluso antes de definirlos formalmente. Sin embargo, para aprovechar al máximo estas oportunidades, es necesario diseñar actividades que involucren al estudiante activamente en la construcción de los conceptos, y que el/la docente actúe como mediador/a y guía en este proceso. Por su parte, Coll (2009) señala que las tecnologías de la información y comunicación (TIC) abren nuevos horizontes y posibilidades en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y que su uso adecuado permite la innovación y mejora en la enseñanza que son difíciles de lograr de otra manera. No es tanto en las tecnologías en sí mismas, sino en las actividades que se pueden realizar gracias a ellas, donde hay que buscar las claves para comprender y valorar su impacto en la enseñanza y el aprendizaje. Como investigadores en Educación Matemática, es importante tener en cuenta estas consideraciones al diseñar y evaluar la incorporación de TD en la enseñanza de las matemáticas.

Nos motiva el desafío de transformar la enseñanza del Cálculo, especialmente en lo que se refiere a la de límite puntual de funciones reales de variable real. En este sentido, compartimos la preocupación de otros autores acerca de la necesidad de desplazar la enseñanza centrada en prácticas algorítmicas y algebraicas hacia aquellas que promuevan la construcción de los conceptos con sentido.

Las investigaciones actuales en este campo señalan la importancia de profundizar en cuestiones relacionadas con las tareas y la incorporación de las TD para el aprendizaje de los conceptos del Cálculo. En este sentido, consideramos fundamental la selección o diseño de actividades y tareas que permitan a los estudiantes experimentar la riqueza matemática de los conceptos, en lugar de simplemente resolver ejercicios mecánicos.

En relación a este punto, Barreiro et al. (2016) proponen que las tareas deben incluir una consigna, un contexto y un objetivo establecido por el/la docente. Sin embargo, para que las tareas sean efectivas en la construcción de los conceptos, es importante que la consigna presente un desafío cognitivo que permita a los estudiantes explorar y experimentar los conceptos matemáticos de manera activa y significativa. En este sentido, creemos que las TD pueden ser herramientas valiosas para la elaboración de tareas y actividades que permitan a los estudiantes construir el conocimiento de manera más significativa y autónoma.

De allí que nuestro problema de investigación esté vinculado con el análisis de consignas matemáticas, con o sin uso de TD, relacionadas con la enseñanza del límite de funciones reales de variable real, específicamente aquellas previas al tratamiento de la definición métrica o durante el proceso de construcción de la misma. Nuestra finalidad es determinar si estas consignas ofrecen oportunidades efectivas para la construcción del concepto de límite, teniendo en cuenta su complejidad, y cómo podríamos formular nuevas consignas que superen aquellas que se encuentran comúnmente en el ámbito académico. Además, nos enfocamos en investigar el impacto del uso de GeoGebra, un software frecuentemente utilizado por los estudiantes de la carrera, en la resolución de estas consignas.

## 1.2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas de investigación del trabajo están referidas a las consignas propuestas para la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real en los libros de textos recomendados en la cátedra Cálculo I de la carrera Profesorado en Matemática de la FHUC-UNL y son:

- ¿Cuáles son los elementos fundamentales a tener en cuenta al valorar las oportunidades que brindan para la construcción del concepto?
- ¿Qué aspectos subyacentes al concepto de límite están involucrados en ellas?
- ¿Cómo influye el uso GeoGebra si se incluye en su resolución?
- ¿Será posible contar con consignas que ofrezcan oportunidades efectivas para la construcción del concepto de límite, teniendo en cuenta su complejidad?

# CAPÍTULO 2

# ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE

Este capítulo consta de dos apartados. En el primero (2.1) presentamos antecedentes de investigación que abordan estudios de algún aspecto o problemática de la enseñanza y/o el aprendizaje del límite puntual. En el segundo apartado (2.2) exponemos en forma organizada estudios que se han realizado sobre las consignas para la enseñanza, relativas a: el contexto educativo en general (2.2.1), el contexto matemático (2.2.2), la enseñanza de límite (2.2.3) y la enseñanza de la Matemática con inclusión de TD (2.2.4).

## 2.1. INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL LÍMITE

En relación a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite, existen varias investigaciones, que detallamos a continuación.

Tall y Vinner (1981) refieren a los términos de imagen conceptual y definición conceptual de los objetos matemáticos. Consideran que la imagen conceptual consta de toda la estructura cognitiva en la mente asociada con un concepto dado. Esto puede no ser globalmente coherente y tener aspectos que son muy diferentes de la definición formal del concepto. En relación a la enseñanza de los límites y la continuidad, dan cuenta de varias investigaciones que demuestran que las imágenes conceptuales asociadas a estos conceptos difieren de la teoría formal y que contienen factores que causan conflicto en los aprendizajes.

Cornu (1991) y Sierpinska (1985), han investigado sobre tareas y procesos de aprendizaje del concepto de límite y manifiestan las dificultades que tienen las y los estudiantes en la construcción del mismo.

Artigue (1998) plantea que no es fácil iniciarse en el estudio del campo conceptual del Análisis, cuando se pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de técnicas que están fundamentadas en él. Explica (y ejemplifica) por qué las tres dificultades de acceso al campo conceptual del análisis son las asociadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual, las asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y las vinculadas con las rupturas necesarias con la relación a los modos de pensamiento algebraico. Además, sintetiza las medidas tomadas en Francia en el siglo XX en relación a la enseñanza del Análisis.

La introducción generalizada del Análisis, con la reforma de 1902, dotó a la enseñanza bachillerato de instrumentos eficaces para resolver problemas clásicos, tanto en matemáticas como en las ciencias físicas. Esta introducción fue claramente un éxito pero sus propósitos quedaban limitados y lo que se enseñaba a esta época era esencialmente un cálculo diferencial e integral, es decir la parte más accesible del Análisis. Con las reformas de los años sesenta, el currículo en Análisis se dio nuevos anhelos: el Análisis se independizó del álgebra y su dimensión como objeto emergió de su dimensión como instrumento. Poco después, la reforma de las matemáticas modernas impuso una visión formal del campo donde los planteamientos relativos a sus fundamentos tendían a volverse dominantes. Esta visión formal fue rechazada con la contrarreforma de 1982; una nueva organización de este campo conceptual en torno a problemas de variación y aproximación constitutivos de su historia emergió, y las aproximaciones intuitivas y experimentales fueron preconizadas. (p.52)

Concluye que las aproximaciones intuitivas y experimentales se fueron imponiendo y se tomaron como una puerta de entrada razonable, pero que estas organizaciones permitieron resolver algunos problemas didácticos y no otros. Considera que se debe tener mayor control en relación las aproximaciones intuitivas si no se desea caer en facilidades aportadas en los primeros contactos con el Análisis que generen obstáculos serios en aprendizajes posteriores.

Blázquez y Ortega (1999) describen la importancia de las sucesiones como instrumento de aproximación didáctica al concepto de límite. Blázquez y Ortega (2001) realizan un estudio a partir de la implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza de límite que involucra los sistemas de representación del concepto función (verbal, numérico, gráfico y algebraico). Identifican que el aprendizaje de límite se enfrenta con las dificultades del cambio de sistema de representación y, a su vez, que el uso de diferentes representaciones favorece dicho aprendizaje. Los mismos autores (2002) publican una nueva definición de límite (como aproximación óptima[3]). Blázquez, et al. (2006) realizan un estudio comparativo de la definición métrica y la establecida por ellos para determinar cuál de las dos es más sencilla y apropiada para el aprendizaje del concepto, concluyendo que la segunda es más apropiada para aprendizajes iniciales. Blázquez, et al. (2008) a partir de un

[3] El límite de la función $f$ en $x = a$ es $L$ si para cualquier aproximación $K$ de $L$, $K \neq L$, existe una aproximación $H$ de $a$, $H \neq a$, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de $a$ que $H$ están más próximas a $L$ que $K$.
Esto equivale a decir que:
El límite de la función $f$ en $x = a$ es $L$ si para cualquier aproximación $K$ de $L$, $K \neq L$, existe un entorno reducido de $a$, tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a $L$ que $K$.
Utilizando la significación de tendencias: El límite de la función $f$ en $x = a$ es $L$ si cuando $x$ tiende a $a$, sus imágenes $f(x)$ tienden a $L$.

estudio empírico con estudiantes de ingeniería contrastan si la noción de límite ligada a la definición métrica perdura más en la memoria que la ligada a la definición como aproximación óptima.

Contreras de la Fuente et al. (2003) describen, explican e identifican factores condicionantes de la enseñanza y el aprendizaje del límite de una función en un contexto institucional fijado. A partir de las producciones de estudiantes, detectan varios conflictos semióticos, entre los más relevantes señalan: la asignación de un valor numérico al infinito, la aplicación de una regla como general cuando solo es cierta en casos particulares, la interpretación del término “indefinidamente” usado para el crecimiento de una función como un crecimiento hacia infinito y el considerar el límite de una función en un punto como el valor de la función en dicho punto.

Páez (2005) presenta los resultados de una investigación sobre la reconstrucción del concepto de límite en estudiantes de posgrado en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y auto-reflexión. Identifica dificultades en la notación $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ y en la definición formal de límite (el uso de cuantificadores y del orden de la implicación en la misma). También reconoce algunas concepciones erróneas en relación al concepto: considerar el límite como el valor que toma la función en el punto que se está analizando y, en relación a la definición métrica, que para cada épsilon basta tomar el delta igual a épsilon en el proceso de demostración.

Fernández Plaza et al. (2013) describen e interpretan las definiciones informales aportadas por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Destacan la riqueza de significados de las mismas debido a la interpretación del límite como objeto o proceso, los algoritmos y las destrezas prácticas para su cálculo. En otro trabajo Fernández Plaza et al. (2014) presentan un estudio exploratorio y descriptivo sobre los modos en que las y los estudiantes de bachillerato describen gráficas de funciones mediante enunciados simbólicos.

Hitt y Páez (2005) consideran que en la construcción del concepto de límite se enfrentan dificultades de aprendizaje que tienen que ver con la complejidad del concepto y con cómo se enseña. Plantean que han analizado estudios experimentales realizados por investigadores en Educación Matemática, como los de Cornu (1981, 1991), Sierpinska (1985, 1987, 1988), Tall y Schwarzenberger (1978) y estudios propios (Hitt y Páez; 2001, 2003). Se han acercado al entendimiento de las dificultades que tienen las y los estudiantes en la construcción del concepto de límite e infieren que una gran mayoría de esas dificultades tienen que ver con la manera como se enseña el tema. Exponen dichas dificultades y proponen una serie de actividades para promover una mejor adquisición del concepto.

## 2.2. ESTADO DEL ARTE. SOBRE LAS CONSIGNAS DE ENSEÑANZA

Dentro de la bibliografía especializada se encuentran varios estudios vinculados a aspectos relativos a las consignas de las tareas, con diferentes orientaciones de acuerdo al objeto de estudio. El relevamiento realizado nos llevó a agrupar estos estudios sobre las consignas de enseñanza en aquellas relativas al contexto educativo, al contexto matemático, a la enseñanza del tema límite y a la enseñanza de Matemática con inclusión de tecnológicas digitales. A continuación describimos lo analizado para cada agrupamiento.

### 2.2.1. Relativas al contexto educativo

La gran mayoría de los antecedentes en relación a la temática de la consigna están relacionados al campo de la Lengua. Se estudia, entre otras cosas, la interpretación y comprensión de la consigna por parte de los estudiantes (Muñoz et al., 2015), las representaciones puestas en juego a partir de la consigna (Falchini y Rafaelli, 2008), la consigna como instrucción que habilita u obstaculiza la escritura (Condito, 2016; Camelo González, 2010) y las consignas escritas como prueba de análisis del desempeño docente (Vinas Forcade y Emery Bianco, 2015).

En un estudio de Vázquez et al. (2006) se analizan los efectos que la escritura tiene sobre el aprendizaje, los procesos que siguen las y los estudiantes al escribir, los rasgos de sus textos y las estrategias discursivas que ponen en juego para producirlos. Los resultados de estos estudios contribuyen al diseño de experiencias didácticas destinadas a mejorar los desempeños de los estudiantes en los escritos académicos, teniendo en cuenta que el ambiente instruccional puede incidir en la calidad del desempeño de las y los estudiantes. Analizan las tareas desde tres variables: nivel de procesamiento cognitivo, grado de estructuración y operaciones cognitivo-lingüísticas. En relación al nivel de procesamiento cognitivo se considera que las tareas que exigen reproducir una información requieren menor exigencia cognitiva que las que exigen organizarla; suponen un procesamiento superficial cuyo objetivo es el incremento del conocimiento a través de la repetición literal de la información vinculada. En cambio, las tareas que requieren comprensión y están orientadas a la construcción de significados, suponen un enfoque profundo y se vinculan a estrategias de reorganización y transformación de la información. El grado de estructuración se refiere a la clarificación del trabajo que el/la alumno/a debe realizar, si se manifiesta el curso de la acción y el producto final está claramente definido o no. Dado que en este trabajo interesa analizar las consignas que demandan la producción escrita, se consideran las operaciones cognitivo-lingüísticas en las que convergen procesos de pensamiento y formaciones discursivas particulares. El estudio se desarrolla en dos etapas: la primera está dedicada a la recolección y análisis de consignas de escritura; y la segunda a estudiar, a través del análisis de entrevistas, las representaciones que sostienen los profesores a través de las tareas de escritura que demandan a los estudiantes.

La tesis doctoral "Las consignas de trabajo en el espacio socio-discursivo de la enseñanza de la lengua" de Riestra (2004) tiene como objeto de investigación los procesos de enseñanza-aprendizaje en el espacio concreto de la formación y, en sentido estricto, las consignas que los enseñantes dieron a sus alumnas/os. Se enfoca, además, en los problemas que las y los docentes encuentran en la realización de la actividad, en función de sus propias representaciones de los saberes que transmiten y las situaciones en las que están involucrados al enseñar, teniendo en cuenta los manuales y los programas. La interacción fue la unidad de análisis, tanto en el análisis textual, como en el análisis de la actividad para indagar en y sobre las consignas. Trabaja sobre tres objetos de análisis: las características de las consignas producidas por los enseñantes, las representaciones de los enseñantes y las características de los textos producidos por las y los estudiantes. Sobre las consignas analiza: el contenido, el tipo de texto y la actividad que solicita.

Estos antecedentes refieren a estudios hechos sobre las implicancias del ambiente instruccional o las consignas, gestados por las y los docentes, en los aprendizajes de estudiantes en el campo de la enseñanza de la Lengua. Aunque no es el campo disciplinar de esta tesis, rescatamos algunos enfoques y clasificaciones que podrían aplicarse a Matemática con las correspondientes adaptaciones. Entre ellas la clasificación correspondiente al nivel de procesamiento cognitivo, grado de estructuración y operaciones cognitivo lingüísticas; como así también el análisis de las consignas desde: el contenido, el tipo de texto y la actividad solicitada.

### 2.2.2. Relativas al contexto matemático

Salcedo (2012) analiza las actividades de un libro de texto de Matemática venezolano de tercer grado desde dos ángulos: por su relación con el contenido matemático y por el nivel de exigencia cognitiva que demandan de las y los estudiantes; para lo cual utiliza el modelo de tareas matemáticas propuesto por Stein et al. (2000). Considera que este conocimiento ayuda a conocer el tipo y nivel de aprendizajes que auspicia el libro.

Zakaryan (2013) hace un estudio de casos, considerando dos aulas (España y Armenia) de estudiantes de 15 años para mostrar la relación que tienen las oportunidades de aprendizajes que ofrece un profesor en un aula y la adquisición de competencias matemáticas de las y los estudiantes. Analiza particularmente el tipo de tareas que el profesor selecciona y propone; y las describe desde tres aspectos: Procesos cognitivos demandados (reproducción, conexión o reflexión), Situación (personal, educativa/profesional, pública o científica) y Contexto (auténtico o hipotético).

García y Benítez (2013) hacen una investigación cualitativa sobre las características necesarias para que una tarea matemática de cálculo diferencial e integral, sea una buena oportunidad de aprendizaje. Centran el análisis en el nivel de demanda cognitiva y el trabajo que requieren de las y los estudiantes. Muestran la estrecha relación entre el razonamiento que las y los estudiantes realizan al trabajar en una tarea y la forma de presentar la tarea, las instrucciones implícitas, los conocimientos previos y los conceptos que se pretenden desarrollar. Concluyen que las tareas que pueden ser exploradas a través de múltiples representaciones (icónica, verbal, numérica) favorecen el razonamiento independientemente de los conocimientos previos.

Font y Adán (2013) plantean que aumentó el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan las y los profesores de matemática para lograr una enseñanza eficaz. Sostienen que las investigaciones que ponen énfasis sobre las competencias del profesor coinciden en que una de las competencias profesionales que debe tener un profesor de matemáticas es el análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita su diseño, aplicación, valoración y mejora. Ellos investigan sobre el desarrollo de la competencia en análisis didáctico en futuros/as profesores/as de matemática. Centran el estudio en la adaptación de tareas ya diseñadas o en el diseño de nuevas actividades, y en su implementación. Utilizan elementos de la metodología de investigación basada en el diseño; que implica: estudiar la adquisición de competencias en un ambiente real, generar ambientes de aprendizajes eficaces y novedosos, la colaboración entre investigador/a y docentes y la búsqueda simultánea de la construcción de teorías y la innovación de la práctica.

Petrone et al. (2014) pusieron en evidencia que es necesario un trabajo formativo de las y los docentes en lo que respecta a la redacción y selección de los enunciados de problemas para la clase de matemática. Proponen las siguientes categorías de análisis de los enunciados de problemas: claridad semántica, precisión matemática, cantidad de información, registro de representación, contenido involucrado, vinculación con la realidad y momento de utilización.

Barreiro y Rodríguez (2014) presentan un modo de realizar una valoración del potencial matemático (PM) de consignas para la clase de matemática. Esto permitiría mejorar el conocimiento especializado del profesor, pues lo plantean como un punto de partida para pensar consignas de clase. Entienden que el PM de una consigna está relacionado con las posibilidades de exploración que la misma habilita o no y con las opciones de argumentar sobre la validez de la resolución o de su respuesta. Barreiro et al. (2016) profundizan estas ideas y plantean otras cuestiones que permiten valorar una propuesta de enseñanza, a saber, cuál será la actividad matemática (AM) que realizará el o la estudiante ante la tarea y el uso de TIC para resolver consignas matemáticas.

Pochulu et al. (2016) sostienen que en la última década aumentó el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de Matemática para lograr una enseñanza eficaz, constituyendo la formación de profesores de Matemática en un campo de investigación relevante. Consideran que "la competencia en análisis didáctico de los futuros profesores de secundaria debe ser desarrollada y evaluada por los formadores de profesores, los cuales a su vez también deben tenerla desarrollada" (p.73). Describen una investigación realizada sobre el desarrollo de la competencia en análisis didáctico durante la elaboración de tareas para la clase de matemática y su implementación, en un proceso de formación dirigido a formadores de futuros/as profesores/as de matemáticas de secundaria. Pretenden responder ¿qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, en la formación de formadores de profesores, que permitan evaluar y desarrollar la competencia en análisis didáctico? y ¿qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar su desarrollo? Muestran que el desarrollo de la competencia de análisis didáctico de tareas para el aula se evidencia, entre otros indicadores, en la incorporación y uso adecuado de herramientas para la descripción, explicación, valoración y mejora de procesos de enseñanza, dirigidos a la formación matemática de futuros profesores de secundaria. Una de las evidencias más significativa de este desarrollo es que las secuencias de tareas que los participantes diseñaron e implementaron eran coherentes con las orientaciones curriculares y significativamente diferentes a las que implementaban antes de realizar el curso. Explicitan una serie de criterios de diseños de tareas para el desarrollo de la competencia que se pretende estudiar y ejemplos de formulaciones de consignas de tareas diseñadas por los profesores y la última versión implementada, con el propósito de mostrar los cambios surgidos a partir de los criterios.

Estos antecedentes aluden al análisis de consignas, actividades o tareas diseñadas para clases de Matemática de distintos niveles educativos. Entre ellos se encuentra un punto de conexión que refiere a la importancia del análisis de éstas para establecer: la valoración de un libro de texto (Salcedo, 2012), la relación entre oportunidades de aprendizaje y la adquisición de competencias matemáticas (Zakaryan, 2013; García y Benítez, 2013), evidencias sobre el desarrollo de la competencia docente de análisis didáctico (Petrone et al., 2014; Font y Adán, 2013; Pochulu et al., 2016), la valoración del PM, de la AM que provoca y de la pertinencia y significatividad del uso de TIC (Barreiro y Rodríguez, 2014; Barreiro et al., 2016).

### 2.2.3. Relativas a la enseñanza del tema límite

Camacho y Aguirre (2001), tienen interés en el diseño de una situación didáctica para introducir el concepto de límite infinito en la materia Matemática I de ingeniería y realizan un análisis preliminar sobre la temática. Este cuenta con, el análisis epistemológico del contenido en la historia desde dos aristas (el estudio de libros de textos donde aparece el concepto de límite infinito y la revisión de obras donde surgen las ideas que le dieron origen), la ubicación del concepto de límite infinito en los planes de estudio y textos actuales (para esa fecha), el análisis de las formas de enseñanza de los profesores y el de las concepciones de los estudiantes.

Berman et al. (2011) presentan un estudio hecho sobre el análisis de las resoluciones de los estudiantes de un problema de examen de Análisis matemático I de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Mendoza, que mantiene relación con la definición formal de límite épsilon-delta. Identifican ausencia de concepciones cognitivas en las y los estudiantes para comprender el límite al nivel de esquema, la necesidad de interiorización de los conceptos previos al límite y del replanteo del tratamiento didáctico del mismo. Se usa la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) de Dubinsky para modelar la construcción mental matemática de los estudiantes.

Williner (2015) expone los resultados de una experiencia llevada a cabo en la materia Análisis I de las carreras de ingeniería en la Universidad Nacional de la Matanza. Se pone en marcha una metodología didáctica con el objetivo principal de lograr en las y los estudiantes una participación activa en sus aprendizajes. La propuesta pedagógica está basada en la incorporación de una Unidad Transversal de Resolución de Problemas con objetivos propios. Presenta los fundamentos teóricos en los que se basa la propuesta, los detalles específicos de la misma y algunas observaciones recolectadas a través de la evaluación efectuada, pues plantea que todo proyecto educativo debe ir acompañado de una evaluación.

Estos tres estudios dan cuenta de la necesidad de diseñar propuestas didácticas para abordar la enseñanza del cálculo desde una perspectiva que considere: la incorporación de problemas, situaciones o actividades no rutinarias, que asignen significación a los conceptos matemáticos, y las y los estudiantes sean participes activos de sus aprendizajes.

Hitt y Páez (2005) diseñan actividades sobre límite para ser desarrolladas en clase en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. La intención es que propicien un conflicto cognitivo en las y los estudiantes y permitan una discusión rica que pueda hacer emerger un cambio de pensamiento, y así promover una mejor adquisición del concepto. Esto surge a partir de que sus estudios brindan evidencias de que muchas de las dificultades del aprendizaje del concepto de límite mantienen relación con la forma en la que se enseña, como ya se explicitó antes.

Contreras de la Fuente et al. (2012) sostienen que en la investigación sobre enseñanza del límite la mayoría de los estudios tienen connotaciones de carácter psicológico y que es poco trabajado el análisis semiótico. Presentan un estudio que atiende a analizar la estructura y funcionamiento de una clase en la que se enseña límite de una función en forma intuitiva, desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (pensado para describir, explicar y valorar procesos de estudio matemático en el aula). Arriban a varias conclusiones atendiendo a distintos aspectos del enfoque; entre ellas recuperamos tres cuestiones relacionadas con la trayectoria instruccional de la clase analizada:

- La idoneidad cognitiva obtenida en el proceso de estudio fue baja, de lo que se infiere que desarrollar el límite de modo intuitivo (donde no se estudia el significado métrico) no garantiza que éste sea comprendido. Además elimina la posibilidad de conceptualización del infinito actual, los alumnos ven el concepto de límite como un proceso infinito potencial.
- Existe la presencia de distintos tipos de imágenes mentales (aproximación gráfica, aproximación estimada, el límite como valor de la función en un punto y el límite considerado como un algoritmo de cálculo) en las y los estudiantes. Algunas de dichas imágenes mentales están relacionadas con significados de referencia ligados a la propia historia epistemológica de las Matemáticas, y están presentes en el proceso de instrucción.
- El uso de distintas representaciones (gráfica, numérica y simbólica) es imprescindible para el aprendizaje del concepto.

#### 2.2.4. Relativas a la enseñanza de Matemática con inclusión de tecnológicas digitales

Mishra y Koehler (2006) elaboran un marco teórico metodológico que propone las cualidades que debe construir un docente para integrar las TD en las propuestas de enseñanza, denominado modelo TPCK (Technological Pedagogical Content Knowledge) o conocimiento tecnológico pedagógico del contenido. Lo planteado por este modelo puede tenerse en cuenta no sólo a la hora de planificar actividades para la enseñanza, sino también para analizar propuestas de enseñanza que hagan uso de las TD, particularmente las relativas a la enseñanza de la Matemática.

Balacheff (2000), Laborde (2000, 2001), Santos Trigo (2003), Hitt (2003), Rojano (2014) y Novembre et al. (2015) han estudiado sobre el uso de tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, aunque no específicamente sobre las consignas. A pesar de ello consideramos que sus aportes pueden abonar al estudio por lo que describimos a continuación.

Balacheff (2000) plantea que los ambientes de aprendizajes de matemática interactivos con ordenadores donde las y los estudiantes pueden convertirse en constructores de su propio aprendizaje (denominados micromundos), ofrecen entornos más relevantes y poderosos para dotar de significado a los conceptos matemáticos. Considera que estos entornos modifican el tipo de matemáticas a enseñar, los problemas y las estrategias didácticas, y por ende, debe modificarse el conocimiento profesional del profesor. El modo en que se evalúa y se da soporte a las y los estudiantes debe tener en cuenta las características de la tecnología.

Laborde (2000) considera que el software de geometría dinámica favorece la interacción entre construir y demostrar, entre hacer sobre el computador y justificar por medio de argumentos teóricos. El mismo autor (2001) sostiene que el papel desempeñado por la tecnología en las aulas ha cambiado: pasó de ser un proveedor de datos o amplificador visual a ser un componente esencial significativo de las tareas, pues afecta las concepciones de los objetos matemáticos que construyen las y los estudiantes.

Santos Trigo (2003) plantea que las reformas recientes sobre el currículo matemático remarcan la importancia del empleo de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las y los estudiantes. Fundamenta qué procesos del quehacer matemático se favorecen a través del empleo sistemático de estas herramientas (imágenes visuales de ideas matemáticas, organización y análisis de datos, realización de cálculos, visualización de relaciones matemáticas, búsqueda y formulación de: conjeturas, de relaciones y argumentos y de justificaciones matemáticas).

Hitt (2003) sostiene que el desarrollo de la tecnología y la capacidad de graficar de las computadoras y calculadoras impulsaron el estudio del rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto matemático en la construcción del mismo. Las representaciones de un concepto matemático, sólo representan una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que permitirá su construcción.

Rojano (2014) hace un planteo prospectivo sobre las TD en educación matemática y considera que además de analizar su integración al currículo, es necesario profundizar en el estudio de la influencia real de la tecnología en el currículo implementado. Uno de los desafíos para la investigación futura es poder traer esta temática en el campo de la Educación Matemática y abordarla con las especificidades didácticas, históricas y epistemológicas propias de la Matemática.

Novembre et al. (2015) declaran que la incorporación de tecnología debe generar rupturas en el quehacer matemático escolar ya que a través de ellas "...es posible abordar nuevos problemas matemáticos, con sus consecuentes nuevos conocimientos y saberes, y sus nuevas –y muchas veces, desconocidas– prácticas y tareas" (p.23). La elaboración de propuestas con tecnología implica pensar sobre los tipos de resoluciones, la gestión de las clases y los modos de registros de los trabajos individuales y grupales.

En particular, sobre tareas de límite con tecnología, consideramos importante mencionar dos estudios. Estos son los que resumimos a continuación.

Valerio López et al. (2013) presentan un material interactivo realizado con Descartes y el software GeoGebra, pensado para estudiantes de un primer curso de cálculo diferencial de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Querétaro. Diseñan e implementan un conjunto de aplicaciones con el objetivo que las y los estudiantes puedan entender que el comportamiento de una función puede determinarse apoyándose en el concepto de límite. Con estos materiales estudian los conceptos de límite de una función en un punto y en el infinito. En ambos casos se parte de una idea intuitiva de esos conceptos para llegar a obtener una definición formal de los mismos y facilitar la comprensión de las definiciones de manera visual. La implementación es posterior a las clases teóricas del tema límite donde se abordan las definiciones épsilon – delta para el límite puntual y en el infinito. Sostienen que Descartes y GeoGebra permiten conectar distintos elementos que: asocian las expresiones gráficas a las simbólicas, la medida a la cantidad y la propiedad geométrica a la forma algebraica, posibilitando coordinar las distintas representaciones que se usan en matemática. Consideran que esta propuesta de enseñanza con el uso de TD posibilita el entendimiento del comportamiento de la función sustentándose en el concepto de límite.

Guarin Amorocho y Parada Rico (2023) estudian la comprensión que logran sobre el concepto de límite de una función en un punto las y los estudiantes de un curso de cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia. Presentan el caso de un estudiante que resuelve una secuencia de actividades propuesta para ser abordada con el uso del software GeoGebra. Concluyen que el estudiante exhibió evidencias de comprensión logrando identificar las propiedades comunes de las clases de imágenes que había construido a medida que iba desarrollando las actividades. Destacan el uso de las nociones de aproximación y tendencia como un acercamiento a la comprensión del límite de una función en un punto por retomar el dinamismo que se esconde detrás de la definición formal. Además, señalan como importante la articulación entre el uso de GeoGebra y el trabajo a lápiz y papel en la resolución de las actividades propuestas.

# CAPÍTULO 3

# MARCO TEÓRICO

Organizamos este capítulo en seis apartados. A partir del estado del arte previo, seleccionamos los principios teóricos para fundamentar nuestro trabajo y los organizamos de manera que se puedan entrelazar los mismos.

En primer lugar, consideramos los aportes de Barreiro y Rodríguez (2014) y Barreiro et al. (2016) sobre el potencial matemático (PM) de consignas matemáticas y los criterios de redacción a considerar para que posean mayor riqueza matemática, y nos apoyamos en los trabajos de Smith y Stein (1998) y Stein et al. (2000) sobre la clasificación de tareas según la demanda cognitiva que promueven. Estos estudios enfatizan la importancia de considerar consignas que potencien el aprendizaje y la comprensión de los contenidos matemáticos.

Por otro lado, consideramos los aportes de Sanchez (2003) y Palmas Pérez (2018) en relación al uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza y recuperamos los criterios propuestos por Barreiro et al. (2016) para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TIC en la resolución de consignas matemáticas, fundamentado las adaptaciones consideradas.

Asimismo, incorporamos los aportes de Duval (1993, 1998, 1999a, 1999b, 2006, 2016) sobre las representaciones matemáticas y los registros de representación. La teoría de registros de representación semiótica de Duval resalta la importancia del uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático.

Además, presentamos la diferencia entre "objeto" y "concepto" en el ámbito matemático y la relevancia de los registros de representación en la construcción de conceptos.

Estas investigaciones nos permiten entender cómo diferentes consignas matemáticas pueden desafiar a las y los estudiantes a utilizar habilidades cognitivas específicas, fomentando un pensamiento matemático más profundo y reflexivo.

También exponemos consideraciones para nuestro trabajo, adaptando los principios teóricos en función del contexto y del tema de investigación, donde incorporamos un análisis particular de la definición métrica de "límite puntual de funciones reales de variable real".

En resumen, los principios teóricos que guían nuestro trabajo se basan en la valoración del potencial matemático de consignas y la pertinencia y significatividad del uso de las tecnologías en la resolución, la clasificación de tareas según la demanda cognitiva que promueven, la teoría de registros de representación de Duval y los distintos aspectos del concepto de límite puntual.

### 3.1. CONSIGNAS Y TAREAS MATEMÁTICAS

Según Barreiro et al. (2016), una tarea académica se compone de tres elementos fundamentales: la consigna, el contexto y el objetivo planteado por el docente al seleccionar dicha consigna. La consigna representa el enunciado o texto que presenta la tarea en sí. Por otro lado, el contexto proporciona información relevante sobre el proceso de enseñanza en curso, la dinámica de las clases y los contenidos que se están abordando. El objetivo refiere a lo que el/la docente quiere que el/la estudiante aprenda en relación al tema.

Estos autores sostienen que la planificación de clases abarca la creación o elección de una serie de tareas con criterios de secuenciación específicos, en función de las decisiones del docente. Asimismo, destacan la importancia de considerar anticipadamente posibles errores y las estrategias de intervención en el aula, entre otros aspectos relevantes.

Además, distinguen dos tipos de consignas, las matemáticas y las metacognitivas. Las consignas matemáticas son las vinculadas al quehacer matemático, las que implican resoluciones vinculadas a la aplicación de procedimientos, fórmulas y estrategias, a la utilización de una propiedad o de una definición matemática, a la modelización de algún fenómeno, al establecimiento de condiciones para que cierta cuestión sea válida. En cambio, las consignas metacognitivas refieren a aquellas que invitan a él/la estudiantes a desarrollar la reflexión sobre su propio quehacer, sobre lo matemático puesto en juego en la resolución, sobre las ventajas o desventajas de utilizar o no cierto procedimientos o recursos, etc.

### 3.2. CONSIGNAS MATEMÁTICAS: PM Y DEMANDAS COGNITIVAS

Se pueden identificar diversos aspectos que requieren análisis al evaluar una consigna matemática. En este sentido, retomamos aquellos relacionados con:

- El PM, un concepto presentado inicialmente por Barreiro y Rodríguez en 2014 y posteriormente enriquecido por Barreiro y colaboradores en 2016.
- Las variadas demandas cognitivas que plantean, basándonos en la clasificación de tipologías de tareas propuesta por Smith y Stein en 1998, además de la ampliación de Stein y su equipo en 2000.

### 3.2.1. PM de una consigna matemática

Barreiro y Rodríguez (2014) introdujeron el concepto de "Potencial Matemático" (PM). Según su enfoque, el PM de una consigna matemática se relaciona con las oportunidades que la misma brinda para la exploración y para la argumentación respecto a la validez de la resolución o respuesta obtenida.

> Consideramos valioso que una consigna pueda admitir que el estudiante tenga posibilidades de exploración y argumentación porque eso les permitiría tomar decisiones, a organizar sus intentos o modos de abordar la resolución, eventualmente podría recurrir a heurísticas (Rodríguez, 2012), a utilizar distintas habilidades generales matemáticas (Delgado Rubí, 1997), reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer su manera de explicar el por qué de su respuesta, argumentar por qué le parece válida su propuesta, etcétera. De ese modo, se asimilaría al trabajo del matemático, lo que legitima el tipo de trabajo que se realizaría en el aula de Matemática del nivel que sea. (Barreiro et al., 2016, p. 27)

El PM puede variar en una escala entre dos extremos opuestos:

- Un PM pobre, cuando la consigna no ofrece opciones de exploración ni requiere argumentación.
- Un PM rico, cuando la consigna abre posibilidades para que el/la estudiante pueda explorar y argumentar.

#### 3.2.1.1 Sobre la exploración y argumentación

El concepto de PM se esclarece aún más con la ampliación de los términos "explorar" y "argumentar".

Según Barreiro et al. (2016), las posibilidades de exploración se favorecen si la consigna permite diversas vías de resolución y evita establecer pasos a seguir predeterminados, de manera que él o la estudiante no se limite a una pauta fija durante el proceso de resolución. La Real Academia Española (2022) define explorar como “reconocer, registrar, inquirir o averiguar con diligencia una cosa o un lugar”.

La exploración al resolver una consigna matemática se refiere al proceso mediante el cual el/la estudiante investiga, examina y analiza diversas vías y enfoques para abordar el problema planteado. Durante esta etapa, el/la estudiante puede experimentar con distintas estrategias, probar diferentes métodos y explorar diversas soluciones posibles, sin necesariamente preocuparse por demostrar la validez de cada paso o resultado obtenido.

Por otro lado, la argumentación en el contexto matemático se centra en justificar y fundamentar las decisiones tomadas durante el proceso de resolución. Implica exponer razonamientos coherentes, presentar evidencias y explicar el por qué de cada paso dado, con el objetivo de convencer a otros o a uno mismo de la validez y pertinencia de las respuestas y soluciones alcanzadas.

Duval (1999) destaca que la argumentación está estrechamente vinculada con el uso del lenguaje común y se manifiesta en la práctica espontánea del discurso. Sin embargo, la argumentación no siempre se presenta como una demostración formal, incluso en su forma más elaborada. Para que un razonamiento sea considerado una demostración, debe ser válido, es decir, cumplir con la coherencia de las leyes de la lógica; mientras que la argumentación se enfoca en la pertinencia del razonamiento. En este sentido, la demostración busca establecer la verdad, mientras que la argumentación se centra en lo creíble o razonable.

> La argumentación es un proceso que hace referencia al porqué de lo que hace el estudiante mediante la exposición de razonamientos para justificar un procedimiento matemático, para ello parte de la identificación de una situación, para llegar a juicios de razonamientos y análisis desde el saber matemático. El proceso argumentativo lo realiza el estudiante desde dos habilidades propias del lenguaje: la oralidad y la escritura, en este sentido los argumentos que utiliza un aprendiz durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático se evidencia por la capacidad que tenga para mostrar un conjunto de proposiciones que establezcan una relación de coherencia entre lo que el sujeto piensa, dice y demuestra durante la resolución de una tarea en particular. (Bermúdez, 2014, p. 39)

La diferencia entre la exploración y la argumentación radica en su enfoque y propósito. La exploración se orienta hacia la búsqueda de posibles soluciones y procesos creativos, permitiendo a él o la estudiante desarrollar un pensamiento divergente y flexible. En cambio, la argumentación busca respaldar y validar las elecciones y resultados obtenidos, fomentando un pensamiento lógico. Ambos aspectos son fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático y la comprensión profunda de los conceptos.

#### 3.2.1.2 Criterios para la redacción de consignas matemáticas

Las consignas matemáticas tienen características que hacen que posean un determinado PM. Barreiro et al. (2016) proponen criterios fundamentales a tener en cuenta al redactar enunciados de consignas matemáticas, con el objetivo de promover una mayor riqueza matemática en la resolución de las y los estudiantes. Estos criterios son los siguientes:

- Criterio 1. La consigna debe presentarse tal como se entrega a los estudiantes, evitando descripciones imprecisas o incompletas.

- Criterio 2. Si el enunciado describe una situación en un "contexto real", se deben formular preguntas relacionadas con el contexto y evitar aquellas sobre objetos matemáticos abstractos.
- Criterio 3. En la medida de lo posible, se debe evitar dar información que asegure la existencia y/o la unicidad de lo que se está buscando.
- Criterio 4. Preferentemente, se deben evitar instrucciones directas para encontrar fórmulas, resolver ecuaciones, trazar gráficos, entre otros. Las preguntas deben plantearse de manera que estas acciones sean necesarias para responder la consigna.
- Criterio 5. Es importante incluir la solicitud de argumentos o justificaciones, de modo que aquellos que resuelvan la consigna expliquen en lenguaje coloquial por qué sus afirmaciones son válidas.
- Criterio 6. Si la consigna implica elegir la opción correcta entre varias alternativas, se debe solicitar explicaciones sobre por qué se descartan las opciones restantes.

### 3.2.2. Clasificación de tareas según la demanda cognitiva que promueven

Consideramos la clasificación de tareas propuesta por Smith y Stein (1998) y Stein et al. (2000). Es importante aclarar que el término "tarea" en este modelo no es análogo a lo establecido por Barreiro et al. (2016). En este contexto, "tarea" se refiere a un segmento de la actividad en el aula dedicado al desarrollo de una idea matemática particular. Una tarea puede incluir varios problemas relacionados o un solo problema (Smith y Stein, 1998). De esta manera, lo que nosotros consideramos como "consigna" o "consigna matemática" se comprende como "tarea" en este modelo.

El término demanda cognitiva refiere al nivel de pensamiento que se requiere de las y los estudiantes para abordar y resolver una tarea con éxito. Según este modelo, existen cuatro niveles de demanda cognitiva en las tareas matemáticas:

- Tareas de memorización (TM). Implican la reproducción de fórmulas, reglas o definiciones sin la necesidad de aplicar un procedimiento. La resolución no exige un gran esfuerzo cognitivo, ya que no hay ambigüedad en lo que se debe hacer y cómo hacerlo. No se establece una conexión con los conceptos o significados detrás de las reglas o definiciones reproducidas, y se enfocan en la reproducción exacta de tareas resueltas previamente.
- Tareas de procedimiento sin conexión (TPSC). Son actividades algorítmicas que implican

procesos rutinarios. El procedimiento a utilizar es evidente o se describe claramente en las instrucciones de la tarea. Requieren poca demanda cognitiva para ser resueltas y no promueven una comprensión profunda de los conceptos matemáticos subyacentes. El énfasis está en producir respuestas correctas y no en desarrollar la comprensión matemática. Si se piden explicaciones, generalmente solo se solicita describir el procedimiento utilizado.

- Tareas de procedimiento con conexión (TPCC). Estas tareas requieren que las y los estudiantes utilicen procedimientos, pero con la intención de desarrollar una comprensión más profunda de las ideas y conceptos matemáticos. Los enunciados sugieren explícita o implícitamente el procedimiento a seguir, pero son procedimientos generales que buscan cerrar conexiones con los conceptos matemáticos. Se requiere el trabajo en varias representaciones para desarrollar la comprensión. Aunque los estudiantes pueden seguir procedimientos generales, no deben aplicarlos descuidadamente. Deben utilizar los conceptos matemáticos que fundamentan los procedimientos para completar la tarea con éxito y desarrollar la comprensión.
- Tareas para producir matemáticas (TPM). Estas tareas demandan un pensamiento complejo y no algorítmico. No sugieren aproximaciones a tareas previas, y la forma de resolver no es predecible. Las instrucciones no indican explícitamente la vía para encontrar la solución, lo que exige a las y los estudiantes explorar y comprender la naturaleza de los conceptos matemáticos, procesos o relaciones involucrados. Se requiere que las y los estudiantes tengan acceso a conocimientos relevantes y los utilicen adecuadamente en la resolución. Estas tareas demandan analizar las restricciones, que pueden limitar las posibles estrategias de resolución. Implican un considerable esfuerzo cognitivo y pueden generar ansiedad entre las y los estudiantes debido a lo impredecible del proceso de resolución.

Las TM y TPSC tienen una baja demanda cognitiva, ya que implican principalmente la memorización y reproducción de información sin permitir la exploración ni la argumentación. En cambio, las TPCC y TPM representan un salto cualitativo en las exigencias cognitivas, siendo potencialmente más ricas, ya que habilitan la exploración y la búsqueda de fundamentos matemáticos para respaldar la resolución.

## 3.3. LAS TIC EN LA RESOLUCIÓN DE CONSIGNAS MATEMÁTICAS

Según Sánchez (2003), la utilización de tecnologías en el ámbito educativo puede tener diversos propósitos, y la integración curricular de las TIC se refiere a su aplicación para facilitar el aprendizaje de conceptos, procesos y disciplinas específicas. Esta integración va más allá del simple uso curricular y supone valorar sus posibilidades didácticas en relación con los objetivos educativos. Se busca incorporar las TIC en las metodologías y estrategias didácticas para fomentar un proceso de aprendizaje efectivo, donde el enfoque se centra en el aprendizaje mismo y cómo las TIC pueden ser un recurso de apoyo, no siendo el foco principal.

Las consignas matemáticas pueden resolverse en ciertas ocasiones mediante el uso de herramientas tecnológicas. Algunas de estas consignas ofrecen indicaciones explícitas para emplearlas o sugieren la exploración con un software matemático. Barreiro et al. (2016) establecieron siete criterios para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TIC para resolver consignas y secuencias didácticas de matemática. Estos son:

- Criterio 1. Favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas.
- Criterio 2. Imprescindibilidad de las TIC: lo matemático puesto en juego no aparece sin su uso.
- Criterio 3: No perder de vista el objetivo matemático.
- Criterio 4: Incluir distintos usos de TIC (uso de software matemático, para la comunicación y búsqueda de información en internet).
- Criterio 5: Complementariedad: el uso de TIC es un recurso más.
- Criterio 6: Libertad para apelar a las TIC.
- Criterio 7: Libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar.

Los criterios 4 y 5 son aplicables al análisis de secuencias, el 1 se puede utilizar para analizar secuencias o consignas y los criterios 2, 3, 6 y 7 son para consignas. Si se cumplen el 2 y el 3 la valoración es positiva, y todo lo demás que se cumpla enriquece a la misma.

## 3.4. REPRESENTACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Según Rico (2009), en la década de los 80 se empleó sistemáticamente la noción de representación en Educación Matemática. El concepto de representación se aborda como una señal externa que hace presente un concepto matemático. Estas representaciones permiten a los sujetos pensar y trabajar con ideas matemáticas en forma de esquemas o imágenes mentales.

Emergieron diversos conceptos afines pero no idénticos, como "símbolos" según Skemp, "sistema matemático de signos" según Kieran y Filloy, "sistemas de notación" según

Kaput y "sistema de registros semióticos" conforme a Duval. Sin embargo, la comunidad matemática optó por conferir preeminencia al empleo del término "representaciones".

Las representaciones matemáticas se entienden desde entonces, en forma general, como todas las herramientas (signos, símbolos, gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Trabajando con las representaciones los sujetos le dan significados y comprenden las estructuras matemáticas.

Consideramos para nuestro estudio la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993, 2006, 2016), la cual establece que es esencial el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático. Para acceder a los objetos matemáticos, es necesario producir representaciones semióticas, y cada registro de representación subyace a un conocimiento parcial del objeto que representa.

Según Duval las matemáticas se distinguen de otras áreas del conocimiento, entre otras cosas, porque el único acceso a ellas es de naturaleza semiótica, a través de la representación. Distingue entre representaciones externas y representaciones internas. Habla así de los registros de representación, y de los sistemas que los producen, los cuales determinan el contenido de la representación.

La actividad ligada a la producción de una representación de objetos matemáticos se le llama semiosis, mientras que a la aprehensión conceptual de dichos objetos se le denomina noesis. Un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas asociadas a la semiosis, la construcción de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. La primera mantiene relación con la expresión de una representación mental, comunica y pone de manifiesto el inicio de la actividad matemática misma en un registro de representación. El tratamiento se refiere a la actividad matemática en un registro de representación particular. La conversión es el proceso mediante el cual se traduce información de un registro a otro. Esto implica que las y los estudiantes sean capaces de reconocer cómo una idea matemática se puede representar en diferentes formas y cómo estas formas están interconectadas.

Duval (1993) destaca una paradoja inevitable: sólo quienes han construido un objeto matemático pueden reconocer una representación semiótica como tal y no como el objeto en sí, pero para conocer el objeto deben valerse de representaciones del mismo.

“Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación” (Hitt, 2003, p. 214).

## 3.5. OBJETO Y CONCEPTO MATEMÁTICO

Es importante destacar la distinción entre los términos "objeto" y "concepto" en el contexto matemático. En este ámbito, los conceptos son entidades abstractas e intangibles que no pueden ser mostradas directamente como objetos físicos. Para hacer comprensibles estos conceptos, se utilizan representaciones en forma de símbolos, gráficos o notaciones, lo que los convierte en "objetos matemáticos" que pueden ser abordados y comprendidos por los sujetos.

La conceptualización de un objeto matemático implica el uso de registros representativos que lo hacen visible y accesible para las y los estudiantes. Estos registros pueden tomar diversas formas, y cada uno representa distintos aspectos del mismo concepto. Es esencial reconocer que la adquisición de un concepto en matemática se logra a través de la comprensión de una o más representaciones semióticas. La noesis, que es la aprehensión conceptual del objeto matemático, no puede existir sin el proceso de semiosis, que es la producción y comprensión de dichas representaciones.

En resumen, se accede a la comprensión de los conceptos matemáticos mediante sus representaciones semióticas. La noción de objeto matemático es esencial para cuestionar, comprender y valorar el conocimiento matemático, y su adquisición conceptual está estrechamente ligada al uso y comprensión de las representaciones semióticas.

> Cada objeto matemático o relación de objetos se convierte en un contexto de análisis en el que se pueden descubrir cualidades que permiten su interpretación u organización estructural, dando lugar a nuevos objetos matemáticos. Estas cualidades se descubren mediante la razón y desde el contexto que las motiva y desde el conocimiento que existe de ese contexto (Pecharromán, 2013, p. 127).

En el proceso de conceptualización, se seleccionan aspectos específicos que caracterizan al objeto matemático en un contexto particular, y las representaciones en distintos registros permiten identificar dichos aspectos (Pecharromán, 2013). En este sentido, las representaciones semióticas desempeñan un papel clave para la comprensión profunda de los objetos matemáticos y la construcción del pensamiento matemático.

### 3.5.1. Registros de representación semiótica

Los registros de representación semiótica propuestos por Duval son formas particulares en las que los conceptos matemáticos pueden ser expresados y comunicados.

Cada registro presenta una perspectiva única del objeto matemático y nos permite comprender y trabajar con él de diferentes maneras. A continuación, se explican brevemente algunos ejemplos de los registros de representación más comunes:

- Registro simbólico. Es el registro más común en matemáticas y se basa en el uso de símbolos y letras para representar conceptos matemáticos.
- Registro gráfico. En este registro, los conceptos matemáticos se representan visualmente a través de gráficos, diagramas o figuras geométricas
- Registro verbal. En este registro, los conceptos matemáticos se expresan en lenguaje natural, utilizando palabras y descripciones para comunicar ideas matemáticas
- Registro numérico: En este registro, los conceptos matemáticos se organizan en tablas o matrices para facilitar la visualización y el análisis de datos.

Cada registro de representación tiene sus ventajas y limitaciones, y puede proporcionar una comprensión diferente del objeto matemático. La interacción entre los distintos registros es esencial para una comprensión profunda y significativa de los conceptos matemáticos. Al utilizar múltiples registros, las y los estudiantes pueden construir conexiones y relaciones entre las diferentes representaciones, lo que les permite desarrollar una comprensión más completa y flexible de los temas matemáticos (Duval, 1993, 1998, 1999, 2006, 2016).

## 3.6. CONSIDERACIONES PARA ESTE ESTUDIO

Es comprensible y apropiado que, al realizar una investigación sobre consignas propuestas para la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real en libros de texto recomendados para la cátedra Cálculo I del Profesorado en Matemática de la FHUC-UNL, se requiera adaptar algunas definiciones y aspectos teóricos para asegurar la adecuación del estudio.

### 3.6.1. Criterios para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TD en la resolución de consignas matemáticas

Según Palmas Pérez (2018), el término TIC refleja “que la tecnología se debería centrar en la recopilación y almacenamiento de datos más que en su aprovechamiento para el bienestar común” (p. 117), mientras que el término TD surge “para poner de presente que el foco de las tecnologías radica en la relación entre estas y el modo en que las personas las usan, y no en su potencial ‘informativo’ o ‘comunicativo’” (p. 117). La tecnología puede entenderse entonces como herramienta (TIC), incorporándose como algo ajeno a lo cotidiano;

o como medio (TD), si se reconocen sus potencialidades didácticas. Utilizaremos de ahora en más el término TD, pues al abordar el análisis de consignas para la enseñanza consideramos la relación entre estas y el modo en que docentes y estudiantes las usan.

Para integrar curricularmente las TD en la enseñanza de la matemática es necesario contar con consignas en las que su utilización en la resolución sea pertinente y significativo. Para valorar dicho uso tomamos los aportes de Barreiro et al. (2016). De los siete criterios que proponen consideramos sólo cinco (descartando los aplicables a secuencias didácticas). Expresamos los mismos reemplazando el término TIC por TD y el término computadoras por dispositivos, dado que las y los estudiantes y docentes utilizamos también celulares y tablets.

Consideramos que los criterios de pertinencia y significatividad (CPS) del uso de TD en la resolución de consignas matemáticas son los que detallamos a continuación.

- CPS A: *Favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas*.

  El trabajo con las TD debe fomentar en las y los estudiantes una búsqueda genuina de pruebas que les permita comprender y justificar por qué la respuesta proporcionada por el software es válida. Es importante evitar que se convenzan únicamente por lo que visualizan en la interfaz del dispositivo. Las TD deberían proporcionar pistas y oportunidades para buscar pruebas más allá de su uso.
- CPS B: *Imprescindibilidad de las TD.*

  El uso de las TD en la resolución de una consigna será imprescindible cuando las ideas matemáticas claves no sean evidentes sin su utilización. Estas herramientas pueden revelar relaciones matemáticas que de otra manera pasarían desapercibidas. Esto no implica que sea imposible resolver la tarea utilizando lápiz y papel, pero existirán relaciones entre los objetos matemáticos involucrados que quedarán ocultas sin el uso de TD y dificultará el establecimiento de afirmaciones o conjeturas sobre estas relaciones. El hecho de que el/la docente pueda resolver la tarea sin recurrir a las herramientas digitales no es suficiente para afirmar que estas no son indispensables, ya que es posible que el/la estudiante no pueda abordar o resolver la tarea sin utilizarlas. Para aplicar este criterio es necesario ponerse en el lugar del estudiante y considerar qué enfoques de resolución podría llevar a cabo basándose en sus conocimientos.
- CPS C: *No perder de vista el objetivo matemático*.

  La consigna debe centrarse en la enseñanza de un contenido matemático y no del recurso tecnológico en sí mismo. Es importante que esté diseñada de manera que promueva la exploración y comprensión de los conceptos matemáticos involucrados, donde la utilización del recurso tecnológico sea un medio para alcanzar esos objetivos.

- CPS D: *Libertad para apelar a las TD*.

  Se debería conceder a las y los estudiantes la autonomía de determinar la utilidad de emplear TD al resolver la consigna. No es imperativo imponer explícitamente su utilización; en cambio, se les debería otorgar la libertad de elegir si desean incorporar herramientas digitales, basándose en su comprensión individual, preferencias y aptitudes. Esta flexibilidad les facultaría para tomar decisiones informadas sobre cómo abordar la tarea y utilizar las TD de manera eficaz, si así lo deciden. Debe considerarse la incorporación de herramientas digitales como una alternativa que amplía las posibilidades de exploración y comprensión matemática, en vez de ser percibida como un requisito impuesto para la resolución de la consigna.

- CPS E: *Libertad de selección del recurso tecnológico a utilizar*.

  En el caso de que las y los estudiantes decidan utilizar TD o si la consigna explícitamente lo solicita, se les debería permitir seleccionar autónomamente el recurso o plataforma que deseen utilizar, así como también buscar bibliografía adicional. La consigna no debería indicar de manera específica el uso de un recurso en particular. Esto brinda a las y los estudiantes la oportunidad de explorar y familiarizarse con diversas herramientas digitales, desarrollando sus habilidades para elegir y utilizar de manera efectiva los recursos que consideren más adecuados para abordar la tarea. Además, al permitirles buscar bibliografía adicional, se promueve la autonomía y la capacidad de investigación, lo que contribuye a su desarrollo como estudiantes autodidactas y críticos.

En concordancia con lo planteado por Barreiro et al. (2016), consideramos que si se cumplen los criterios B y C la valoración de significatividad y pertinencia es positiva, y que todo lo demás que se cumpla enriquece a la misma. Si alguno de estos dos criterios no se cumple el análisis finaliza y la valoración es negativa.

### 3.6.2. El software GeoGebra

Pensar en consignas para la enseñanza de límite en el contexto de nuestro estudio implica tener presente que GeoGebra es el software libre más usado en el ámbito de la carrera. Las y los estudiantes de Cálculo I lo utilizan frecuentemente en los trabajos áulicos en la mayoría de las asignaturas disciplinares.

En el estado del arte señalamos distintos referentes que manifiestan distintas ventajas del uso de TD en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Particularmente, los trabajos de Valerio López et al. (2013) y de Guarin Amorocho y Parada Rico (2023) señalan la importancia del uso de GeoGebra en consignas para la enseñanza de límite.

Este software está catalogado en el ámbito de la Educación Matemática como un buen recurso para la construcción de los conceptos matemáticos a partir de propuestas que contemplen sus potencialidades. Así, Arteaga Valdés et al. (2019) señalan que:

> GeoGebra ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una *vista gráfica*, una *vista numérica*, *vista algebraica* y, además, una *vista de hoja de cálculo*. Esta multiplicidad permite apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (como en el caso de puntos, gráficos de funciones), algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones), y en celdas de una hoja de cálculo. Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente.(p. 104)

### 3.6.3. Cuestiones del "límite puntual de funciones reales de variable real"

Si bien nuestra investigación se centra en valorar consignas matemáticas anteriores al tratamiento o durante el proceso de construcción de la definición métrica, consideramos necesario examinar dicha definición y cómo se manifiesta en distintas representaciones. Esto se debe a que en el análisis de una consigna resulta importante identificar los aspectos del concepto que permite abordar, y si favorece el desarrollo de una comprensión sólida del mismo y de su definición.

La definición métrica de límite puntual que consideramos es la presentada Salas et al. (2002) que se enuncia a continuación.

> Sea $f$ una función definida al menos en algún conjunto de la forma
>
> $$(c-p,c)\cup(c,c+p),\text{ con } p>0.$$
>
> Entonces
>
> $$\lim_{x\to c} f(x)=L \quad \text{sii}$$
>
> para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que
>
> $$\text{si} \quad 0<|x-c|<\delta \quad \text{entonces} \quad |f(x)-L|<\varepsilon.$$

#### 3.6.3.1 Análisis de la definición métrica

Como el concepto de límite está estrechamente relacionado con los conceptos de función y de número real, presentamos un análisis de la definición que atiende a la relación intrínseca entre estos tres conceptos, que juntos constituyen las bases del Análisis. Para ello planteamos algunos aspectos (organizados en tres puntos) que se deben tener en cuenta para poder pensar en lo que permiten recuperar, construir o poner en escena las representaciones en los distintos registros cuando se resuelve una consigna matemática sobre límite.

**1. Conceptos de base sobre los que actúa el concepto de límite puntual**

El concepto de límite surge a partir de considerar una función real de variable real ($f$), definida en un intervalo alrededor del punto ($c$) para el cual se calcula el límite aunque no necesariamente en ese punto; podemos referirnos a este conjunto como entorno reducido de centro $c$.

**2. Conceptos involucrados en la definición en relación a los conceptos de base**

En la definición se identifican los conceptos de distancia *entre números reales, distancias acotadas* y *aproximaciones*.

La *distancia entre números reales* se expresa en términos de valor absoluto de la diferencia entre números. Por un lado, se considera el valor absoluto de la diferencia entre $c$ y elementos del dominio de $f$, y por otro, el valor absoluto de la diferencia entre el límite ($L$) e imágenes de la función.

Las *distancias acotadas* se expresan en términos de inecuaciones con valor absoluto. Las cotas superiores de estas distancias están vinculadas. Por un lado, aparece un valor positivo fijo dado $\varepsilon$ (épsilon) y por otro, un valor positivo $\delta$ (delta) que depende de él. Estas distancias acotadas están asociadas a *aproximaciones* entre números reales conforme épsilon tiende a cero.

A su vez, existen *aproximaciones dependientes* en la relación entre esas inecuaciones con valor absoluto mediante una implicación lógica conforme épsilon toma valores arbitrarios cada vez más cercanos a cero. Esa relación entre las distancias acotadas expresada mediante la implicación lógica da cuenta de las *aproximaciones* de las imágenes de la función a un valor fijo para valores de la variable $x$ que se *aproximan* a $c$.

Sintetizamos las ideas previamente señaladas en la Tabla 2.

| Conceptos | Expresados en términos de |
|---|---|
| *Distancia entre números reales*<br>- entre $c$ y elementos del dominio, y<br>- entre el límite e imágenes de la función. | Valor absoluto de la diferencia entre dos números. |
| *Distancias acotadas* | Inecuaciones con valor absoluto acotadas. |
| *Aproximaciones*<br>de imágenes de la función a un valor fijo para valores de la variable $x$ próximos a $c$. | Implicación lógica entre desigualdades con valor absoluto. |

**Tabla 2. Relación entre conceptos de base de la definición de límite y formas en las que se expresan**

## 3. Puntos de interés en la definición

Existen aspectos que se mantienen implícitos en la notación de límite y su definición que es necesario visibilizar para comprender el concepto. Estos son:

- Es importante discernir que delta depende del épsilon dado, de la función y del valor c, $\delta(\varepsilon, f, c)$.
- En la definición subyace de manera implícita la idea de aproximaciones vinculadas, que dan sentido al significado de tendencia[4]. Para que el límite exista no basta con saber que cuando $x$ se aproxima a $c$, $f(x)$ debe aproximarse a $L$ (que es lo que muchas veces se dice cuando se lee la expresión $\text{lím}_{x \to c} f(x) = L$). Por esto $\delta$ debe depender de $\varepsilon$. En este sentido es más correcto decir que $f(x)$ tiende a $L$ conforme $x$ tiende a $c$.
- Establecer que las distancias entre las imágenes de la función y $L$ se hacen arbitrariamente pequeñas siempre que la distancia entre los $x$ y $c$ sea suficientemente pequeña pero distinta de 0 da idea de aproximaciones, pero no tanto de tendencias.
- El significado del signo "=" (igual) en la expresión $\text{lím}_{x \to c} f(x) = L$. El límite es $L$, pero desde las representaciones gráficas y numéricas observamos y decimos que las imágenes de la función tienden a tomar el valor $L$ conforme $x$ tiende a tomar el valor $c$. O bien, que las distancias entre las imágenes de la función y $L$ se hacen arbitrariamente pequeñas siempre que la distancia entre los $x$ y $c$ sea suficientemente pequeña pero distinta de 0. Más aún, no aparece el signo igual en el equivalente de la expresión $\text{lím}_{x \to c} f(x) = L$ en la definición métrica.
- Es necesario notar que no sólo existe una relación de dependencia entre $x$ e $y$ ($y = f(x)$), sino también entre distancias $|x - c|$ y $|f(x) - L|$.

[4] […] las ideas básicas de aproximación y de tendencia que se pueden esbozar numéricamente como sigue: 1, 1.1, 1.11, 1.111,... es una sucesión de números reales que se aproxima a 100, pero es evidente que no tiende a 100. Sin embargo, la misma sucesión se aproxima a 10/9 y tiende a 10/9. La diferencia estriba en que, en el primer caso, fijada una aproximación de 100, 2 por ejemplo, ésta no es mejorada por los términos de la sucesión; sin embargo, en el segundo caso, fijada una aproximación arbitraria de 10/9, distinta de 10/9, es posible encontrar un término de la sucesión, tal que a partir de él todos los que le siguen están más próximos a 10/9 que la aproximación fijada. (Blázquez et al., 2008, p. 9)

- La expresión “para cada épsilon mayor que cero” en la definición no da cuenta de que interesa mirar para épsilon tan pequeño como se quiera. Esto debe ser interpretado.

#### 3.6.3.2 Registros de representación para el concepto de límite

Según Blázquez y Ortega (2001), el concepto de límite, que se basa en el de función, se apoya en diversos sistemas de representación, a través de los registros: verbal, numérico, gráfico y algebraico. Resaltan en sus hallazgos que la utilización de estas diferentes modalidades amplía la comprensión del concepto de límite. Plantean que el uso de representaciones verbales se enfrenta con las dificultades relacionadas con la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual. Sostienen que, inicialmente se debe utilizar la representación numérica, ya que este registro es el que mejor muestra los aspectos de la aproximación; luego complementarse con la gráfica y, en etapas avanzadas se puede completar con la algebraica.

Consideramos para nuestro estudio los cuatro registros de representación semiótica mencionados. A continuación explicamos con mayor precisión lo que entendemos por cada uno de ellos, tanto en las consignas matemáticas sobre el tema o en las resoluciones de las mismas.

- **Registro de Representación Verbal (RRV).** Se representa el concepto de límite puntual de funciones reales de variable real en lenguaje natural, utilizando palabras y descripciones para comunicar la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto de interés ($c$)
- **Registro de Representación Numérico (RRN)**. Se representa el concepto de límite como un proceso de tendencia basado en una tabla de valores cercanos al punto de interés ($c$) y las imágenes de la función en esos valores. Cualquier aproximación del límite, distinta de él, se podría mejorar con las imágenes de valores más cercanos a $c$.
- **Registro de Representación Gráfico (RRG).** Se representa el concepto de límite como un punto en el eje de ordenadas, tal que a todo segmento sobre este eje que lo contiene (sin ser uno de sus extremos) le corresponde otro (sobre el eje de abscisas) que contiene al punto de interés ($c$). Para cada punto de este último segmento (excepto el mismo $c$ y sus extremos), le corresponde un punto (la imagen de la función) del segmento del eje de ordenadas.
- **Registro de Representación Algebraico (RRA).** Se presenta el concepto de límite

mediante:

- el uso de la definición métrica en los términos usuales de $\varepsilon$ y $\delta$, que son los controles de las aproximaciones o la definición topológica de entornos.
- el trabajo con expresiones algebraicas equivalentes para valores distintos del punto de interés ($c$) y el cálculo del límite o la determinación de su inexistencia.
- la notación de límite para expresarlo.

#### 3.6.4. Consignas matemáticas fértiles para la construcción del concepto de límite

Por lo anteriormente señalado en este marco teórico entendemos que, la construcción del concepto de límite puntual de funciones reales de variable real mantiene relación con el tipo de consignas propuestas.

El terreno desde donde se comienzan a construir nuevos conceptos matemáticos en un contexto de enseñanza determinado debe ser propicio para dar lugar al surgimiento de saberes relevantes en torno a los mismos. Un factor fundamental a tener en cuenta es el diseño o elección de las consignas que guiarán este proceso de construcción. Las consignas deben ser "fértiles", es decir, poseer ciertas cualidades que permitan su abordaje y que aquellos/as que las resuelvan puedan beneficiarse de diversos enfoques, conexiones, representaciones y razonamientos. Asimismo, éstas deben promover la interpretación y la comunicación de ideas matemáticas, profundizando los saberes disponibles y repertorios en relación al tema.

La "fertilidad de una consigna matemática", específicamente relacionada con el límite puntual de funciones reales de variable real, engloba tanto el PM de ella como la demanda cognitiva requerida para su resolución. Esto se vincula con las oportunidades de exploración y argumentación que la misma habilita, haciendo uso de diversos registros de representación; que en ocasiones pueden verse influenciados por el uso de TD disponibles. Este conjunto de elementos convergentes confiere a la consigna una fertilidad intrínseca, derivada tanto de su complejidad matemática como de las destrezas procedimentales y mentales que demanda.

# CAPÍTULO 4

# CONTEXTO, OBJETIVOS Y MARCO METODOLÓGICO

Organizamos este capítulo en cinco apartados. En el primero (4.1) exponemos el contexto en que se desarrolla la investigación. En el segundo (4.2) definimos los objetivos de investigación. En el 4.3 presentamos el enfoque del estudio y sus alcances. En el 4.4 damos a conocer los instrumentos de recolección de datos y de análisis de consignas, con sus respectivas justificaciones. Por último (4.5) explicitamos las fases en las que se realiza el estudio.

## 4.1. CONTEXTO DE TRABAJO

Como señalamos en el CAPÍTULO 1, la investigación está relacionada con la asignatura Cálculo I de la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (FHUC-UNL).

De acuerdo a lo establecido en el plan de estudios, el Profesor de Matemática cuenta con formación para el ejercicio de la docencia en los niveles Medio y Superior (terciario y universitario). Puede realizar asesoramiento pedagógico, profesional y técnico en la especialidad matemática, pudiendo desempeñarse en organismos e instituciones de las distintas jurisdicciones que estén relacionados con la educación. Su formación le permite también brindar asistencia técnica a equipos interdisciplinarios vinculados a actividades matemáticas específicas.

La carrera tiene una duración de 5 años. Los espacios curriculares están organizados en dos ciclos: Primero (básico o inicial) y Segundo (específico o superior), divididos a su vez en dos tipos principales de formación: General y Disciplinar. La Formación disciplinar es de dos tipos: la que corresponde a los saberes básicos, especializados e integrados de la Matemática y sus aplicaciones, y aquella correspondiente a la formación pedagógica y educativa que se reconocerá a su vez como básica e integrada. El primer ciclo de la carrera tiene por objetivos iniciar a las y los estudiantes en la formación disciplinar básica en Matemática, propiciando la adquisición de habilidades cognitivas e instrumentales específicas para el desarrollo del razonamiento matemático, y la comprensión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Cálculo I corresponde al primer ciclo, particularmente, al campo de la formación disciplinar específica y actualmente se dicta en el segundo cuatrimestre del primer año de estudios. Es el primer espacio curricular correspondiente al área Análisis Matemático en el plan de estudios. Cuenta con un total de 7 horas reloj de cursado, 3 correspondientes a clases de orden teórico y 4 correspondientes a clases de orden práctico. No posee espacios curriculares correlativos para poder ser cursada y aprobada, y a la vez es necesario tenerla aprobada para poder rendir Cálculo II (de segundo año).

Las y los estudiantes de Cálculo I cursan en el primer cuatrimestre del primer año Matemática Básica (de la formación disciplinar específica dentro del área Álgebra y Geometría), en la que abordan el estudio de conceptos fundamentales del álgebra, cónicas, funciones, funciones algebraicas y funciones trigonométricas. En dicho espacio adquieren algunas habilidades cognitivas e instrumentales específicas para el desarrollo del razonamiento matemático.

Además, Cálculo I se dicta simultáneamente al Taller de Métodos de Demostración en Matemática (del área Fundamentos, dentro de la formación disciplinar específica). Esto permite que las y los estudiantes construyan, en paralelo, las técnicas de demostración más importantes, como ser, la demostración directa, la indirecta, por contraposición y por reducción al absurdo. Esto requiere pensar en una lógica de desarrollo de la asignatura que contemple este proceso de construcción de saberes en torno a cómo validar y demostrar.

La asignatura Algebra Lineal I, también es dictada en paralelo. En esta se propone el estudio de temas básicos del álgebra lineal. En ocasiones, en Cálculo I, se recuperan algunos de estos temas (sistemas de ecuaciones, métodos de resolución, vectores en el plano, rectas) cuando se desarrollan contenidos propios del cálculo.

Asimismo, las y los estudiantes poseen conocimientos mínimos relativos al uso del software GeoGebra, por haberlo utilizado en otros espacios curriculares, fundamentalmente para graficar funciones.

La asignatura dispone de un aula virtual como complemento de las clases presenciales, para favorecer la comunicación, el acceso al material bibliográfico y como recurso de enseñanza en momentos que se requiera.

Por las razones antes expuestas, en el dictado de las clases, se trabaja en un primer período con la recuperación de los conceptos y objetos matemáticos del precálculo, resignificándolos con consignas que permiten revisarlos e introducir acciones matemáticas como mayorar, minorar o aproximar convenientemente expresiones matemáticas, acciones que colaboran en la construcción del sentido del Análisis Matemático.

Previo a la formalización de conceptos propios del Cálculo Diferencial, se plantean actividades que propicien la proposición de ejemplos, la recuperación de ideas intuitivas, la exploración. Con estas formas de empezar a abordar los conceptos se pretende que las y los estudiantes cuenten con un repertorio de ideas en torno a los objetos que facilita un acercamiento a la comprensión de las definiciones, propiedades y demostraciones matemáticas dentro de éste área de conocimiento.

En la asignatura se utiliza como bibliografía obligatoria el libro "Calculus: una y varias variables" (Salas et al., 2002) y se sugiere bibliografía de consulta. Como ya explicitamos en el CAPÍTULO 1, en el dictado se altera el orden preestablecido en el libro en lo que respecta a la Unidad II "Límite y continuidad" y III "Derivadas", correspondientes a los capítulos 2 y 3 del libro. Se abordan los temas en dos etapas. En una primera etapa se estudian lo capítulos 2 y 3 del libro, sin utilizar la definición métrica ($\varepsilon - \delta$) de límite. En una segunda etapa, se estudia dicha definición, completando así la formalización de todo lo trabajado desde lo intuitivo y experimental.

## 4.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Considerando el marco teórico expuesto en el capítulo previo y el contexto en el que nos desenvolvemos, identificamos los objetivos de investigación.

### 4.2.1. Objetivo General

Valorar consignas matemáticas propuestas para la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real en los libros de textos recomendados en la cátedra Cálculo I de la carrera Profesorado en Matemática de la FHUC-UNL.

### 4.2.2. Objetivos Específicos

- Establecer criterios de selección de libros y de las consignas de límite puntual propuestas en ellos.
- Determinar indicadores para valorar la fertilidad de las consignas.
- Identificar aspectos subyacentes al concepto de límite involucrados en las mismas.
- Describir la influencia del uso de GeoGebra en la resolución de ellas.
- Proponer algunas consignas fértiles que ofrezcan oportunidades efectivas para la construcción del concepto de límite, teniendo en cuenta su complejidad.

## 4.3. ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Dado que el tema fue poco explorado y realizamos un estudio que permite dar cuenta de resultados obtenidos a partir del análisis interpretativo de consignas sobre límite puntual (en el contexto descrito) atendiendo al marco referencial, nuestra investigación es de tipo cualitativa. Según Hernández et al. (2010), "las *investigaciones cualitativas* se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas). Van de lo particular a lo general" (p. 8) y se enfocan en "comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto" (p. 358).

> … los *estudios cualitativos* pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos. Con frecuencia, estas actividades sirven, primero, para descubrir cuáles son las preguntas de investigación más importantes; y después, para perfeccionarlas y responderlas. La acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien "circular" en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio. (Hernández et al., 2010, p.7)

Al plantear el problema de investigación consideramos que nuestra posición es de tipo integradora, dado que revisamos trabajos previos para elaborar el marco teórico de referencia pero nos desprendemos de éstos ya que no versan exactamente sobre el tema elegido por nosotras.

Particularmente, la investigación que realizamos es del tipo estudio de casos en profundidad, pues la selección de las consignas para analizar no depende de la probabilidad, sino que tuvimos en cuenta que las y los estudiantes de Cálculo I hayan tomado contacto con las mismas (o similares) y también características particulares de ellas en relación al tipo de resolución que pueden propiciar, con o sin el uso de GeoGebra.

Los casos estudiados son consignas matemáticas para la enseñanza de límite puntual. La selección de las mismas no fue azarosa, durante la investigación se fueron estableciendo criterios para escogerlas.

En la primera etapa de la investigación realizamos un registro de libros de texto relativos a Cálculo I. Luego diseñamos y realizamos una encuesta a estudiantes que han aprobado la asignatura entre los años 2016 y 2020, donde recabamos información respecto del material que utilizaron durante el estudio del tema límite puntual; lo que nos permitió realizar una primera selección de libros de texto de los que extrajimos luego consignas para analizar. En una tercera etapa realizamos un escaneo general de las secciones de los libros seleccionados que abordan el tema atendiendo al marco referencial. En una cuarta etapa seleccionamos las consignas para analizar en profundidad atendiendo a criterios que establecimos, como expresamos en el apartado 4.5 en lo referido a la fase 4. Luego continuamos con el análisis en profundidad de las consignas (para lo que construimos un instrumento contemplando el marco teórico). Posteriormente establecimos observaciones destacadas y puntos focales a considerar en el momento del diseño o selección de una consigna sobre el tema. Esto nos permitió reformular algunas consignas de las estudiadas para elevar su nivel de PM, demanda cognitiva y abordaje desde distintos registros de representación, entendiendo que las y los estudiantes hacen uso de GeoGebra. Es decir, mejorar su fertilidad. También nos permitió diseñar consignas que atiendan a la construcción de la definición métrica. Por último elaboramos las discusiones y conclusiones derivadas del estudio.

Por todo lo descrito, el enfoque de esta investigación es cualitativo interactivo, ya que consiste en un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas para recoger los datos en sus escenarios naturales (la selección de los consignas para analizar), interpretando los mismos a la luz de los constructos teóricos elaborados a partir de la revisión de antecedentes en forma continua.

Además, según el alcance, se puede clasificar el estudio como exploratorio y descriptivo.

Según Hernández et al. (2010), los estudios exploratorios “se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes” (p.91). En nuestro caso la revisión de literatura reveló que, en general, hay estudios realizados sobre: las dificultades en el aprendizaje del tema límite puntual, valiéndose del análisis de producciones de las y los estudiantes, y el análisis de propuestas implementadas que dan cuenta de los registros de representación utilizados al resolver consignas propuestas. No se identifican estudios en profundidad en relación a las características de las consignas para la enseñanza del límite puntual y sus potencialidades en relación a las posibilidades de exploración y argumentación que estas habilitan y los aspectos del objeto matemático en cuestión que permitirían poner en escena las resoluciones de las mismas (en distintos registros de representación) con o sin el uso de GeoGebra.

Asimismo, el alcance del estudio es descriptivo, ya que en determinadas etapas de la investigación damos cuenta de la búsqueda e identificación de características en la enunciación de las consignas y del tipo de funciones matemáticas que involucran, para analizar las posibilidades de exploración y argumentación que las mismas habilitan. Además describimos posibles resoluciones por parte de las y los estudiantes con o sin el uso de GeoGebra.

### 4.4. INSTRUMENTOS

Para la realización de este estudio, desarrollamos dos instrumentos con propósitos distintos: uno destinado a la recopilación de datos y otro diseñado para el análisis de las consignas matemáticas concernientes al límite puntual de funciones de variable real.

#### 4.4.1. Instrumento de recolección de datos

El instrumento para la recolección de datos empleado en este trabajo fue la "Encuesta a estudiantes que cursaron Cálculo I".

La diseñamos con las siguientes intencionalidades:

- Recabar información respecto del material bibliográfico que utilizaron las y los estudiantes durante el estudio del tema límite puntual; para realizar luego una selección depurada de libros de texto de los que extraeríamos consignas para someter al análisis.
- Identificar recursos tecnológicos utilizados en el estudio del tema.
- Reconocer ejercicios de la bibliografía obligatoria que las y los estudiantes consideren como importantes para el aprendizaje de la noción intuitiva de límite y las razones de su elección.
- Conocer la finalidad de uso de GeoGebra en la resolución de consignas sobre el tema (dado que es el software utilizado con primacía en la carrera y particularmente en la asignatura Cálculo I).

Para más detalles ver el Anexo I.

#### 4.4.2. Instrumento para análisis preliminar de consignas

El instrumento diseñado para llevar a cabo una revisión preliminar exhaustiva de las consignas lo denominamos "Grillas de escaneo". Este cuenta con dos grillas, y lo exponemos en el Anexo II. La grilla 1 se utiliza cuando en la consigna no se especifica el uso de software, mientras que la grilla 2 se emplea en los casos en los que se indica de forma específica la necesidad de utilizar software.

La grilla 1 consta de cinco secciones que refieren a:

- La redacción
- Los registros de representación
- Las posibilidades de exploración y argumentación
- La demanda cognitiva que requieren
- La posibilidad de resolver con GeoGebra

La grilla 2 tiene cinco secciones sobre:

- La redacción
- Los registros de representación
- Las posibilidades de exploración y argumentación
- La demanda cognitiva que requieren
- La pertinencia y significatividad del uso de TD para resolver

#### 4.4.2.1 Fundamentación del diseño del instrumento "Grillas de escaneo"

Cada sección de las grillas de escaneo corresponde a indicadores que establecimos para la valoración de la fertilidad de las consignas. Presentamos en este apartado dichos indicadores y sus justificaciones teóricas.

En cada grilla, evaluamos si se cumplen, no se cumplen o se cumplen parcialmente los aspectos de cada categoría de análisis. Además, incluimos una columna para indicar cuando no corresponde analizar (N/C) y una columna de observaciones, para agregar (en caso de ser necesario) algún comentario que contribuya al análisis.

##### 4.4.2.1.1 Indicadores para la valoración de la fertilidad de las consignas

Determinamos que para llevar a cabo una evaluación integral en relación a la fertilidad de las consignas seleccionadas, tendríamos que realizar un análisis exhaustivo considerando los indicadores fundamentales que listamos a continuación, numerados de 1 a 5. Los primeros 4 son considerados en ambas grillas de escaneo. El indicador 5A es utilizado en la grilla 1 y el 5B en la grilla 2.

- **Indicador 1: Redacción de las Consignas.** Calidad de la redacción de las consignas, a partir de nuestra adaptación de los criterios delineados por Barreiro y sus colaboradores en el año 2016.
- **Indicador 2: Registros de Representación y Transformaciones Asociadas.** Registros de representación empleados tanto en la formulación de las consignas como en las resoluciones, conjuntamente con las conversiones y tratamientos asociados (Duval, 2006).
- **Indicador 3: Exploración y Argumentación Facilitadas por las Consignas.**

Posibilidades de exploración y argumentación que las consignas ofrecen, en consonancia con lo planteado por Barreiro y Rodríguez (2014), Barreiro et al. (2016) y nuestra ampliación.

- **Indicador 4: Demanda Cognitiva Requerida.** Demanda cognitiva requerida por las consignas, en concordancia con la teoría planteada por Stein et al. (2000), con el objetivo de comprender los procesos intelectuales necesarios para sus resoluciones.
- **Indicador 5: Uso de TD GeoGebra**
  - **A) Viabilidad de resolución mediante la TD GeoGebra.** Posibilidades de abordaje con GeoGebra y aportes de su uso en la resolución.
  - **B) Pertinencia y significatividad del uso de la TD GeoGebra.** Pertinencia y significatividad de la implementación de GeoGebra para la resolución, atendiendo a los criterios de presentados en el apartado 3.6.1 del marco teórico.

Este enfoque integral nos permitió una comprensión más profunda y rigurosa de la fertilidad de las consignas. En este sentido, el presente estudio aspiró a arrojar luz en relación a la conjunción de: la redacción de las consignas, las posibilidades de exploración y argumentación, las representaciones semióticas y las demandas intelectuales, contribuyendo así a una mayor comprensión de los procesos educativos y de aprendizaje del tema. En consonancia con esta perspectiva, el análisis de viabilidad y pertinencia de la resolución mediante GeoGebra amplió el alcance de este estudio al explorar de manera concreta cómo el uso de una TD puede potenciar o no la comprensión del concepto.

#### 4.4.2.1.2 Justificación teórica de los indicadores

**Justificación del Indicador 1**

Para analizar riqueza matemática que habilitan los enunciados de las consignas, por su redacción, consideramos los criterios de Barreiro et al. (2016) presentados en el apartado 3.2.1.2 del marco teórico. Si bien estos criterios los proponen para ser considerados en el momento de la redacción de consignas, en el estudio los utilizamos para analizar la redacción de las consignas seleccionadas.

**Justificación del Indicador 2**

Consideramos la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993, 2006, 2016), la cual sostiene que el uso de sistemas de representaciones semióticas es fundamental para el pensamiento matemático. Esta teoría establece que se accede a los objetos matemáticos a través de la producción de representaciones semióticas, y que cada registro de representación conlleva un conocimiento parcial sobre aquello que representa.

Según Duval (2006), la actividad matemática se lleva a cabo necesariamente en un contexto de representación, pero también es importante que las y los estudiantes sean capaces de reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos de representación y utilizarlos.

En relación a esto, nos enfocamos en mirar dos aspectos de las consignas:

- En primer lugar, analizamos si la redacción de la consigna sugiere resolver utilizando algún tipo de registro de representación específico.
- En segundo lugar, estudiamos si durante la resolución se pueden aplicar la conversión y el tratamiento. La conversión implica cambiar de sistema semiótico (de un registro de representación a otro), mientras que el tratamiento implica trabajar dentro del mismo registro.

**Justificación de Indicador 3**

Examinamos si las consignas permiten la exploración y brindan opciones para argumentar sobre la validez de la resolución o respuesta, en concordancia con lo expresado en el marco teórico y particularmente con lo planteado por Barreiro y Rodríguez (2014) y Barreiro et al. (2016), quienes sostienen que esto está relacionado con el PM de una consigna.

Consideramos que una consigna habilita posibilidades de exploración si permite examinar y analizar la situación problemática planteada desde diferentes enfoques y registros de representación, lo que posibilita el reconocimiento de patrones, conjeturas y explicaciones. En otras palabras, la exploración de la situación no está impuesta o dirigida exclusivamente por la consigna, sino que se brinda espacio para que el estudiante reconozca diversas propiedades o características de algo desconocido o poco conocido a partir de sus saberes, estrategias y procedimientos disponibles.

En cuanto a la argumentación, entendemos que implica el razonamiento basado en el uso del lenguaje común, y su funcionamiento se manifiesta en la práctica espontánea del discurso (Duval, 1999). La argumentación en matemática no necesariamente implica una demostración formal. Para que un razonamiento sea considerado una demostración, debe ser válido según las leyes de la lógica, mientras que la argumentación necesita estar vinculada a la pertinencia.

Concebimos que la argumentación es el proceso mediante el cual se justifica un procedimiento matemático al exponer razonamientos que respaldan el trabajo realizado. Los argumentos utilizados por un/a estudiante se evidencian cuando expone un conjunto de proposiciones que mantienen una relación coherente entre lo que piensa, dice y hace durante la resolución de una consigna.

**Justificación de Indicador 4**

A partir de lo planteado por Stein et al. (2000), consideramos que la exigencia cognitiva de una consigna se refiere al nivel de pensamiento que requiere de el/la estudiante para involucrarse y resolverla con éxito. Para el análisis de dicha exigencia consideramos los cuatro niveles establecidos por los autores mencionados: TM, TPSC, TPCC y TPM.

**Justificación de Indicador 5**

Decidimos tomar como indicador el uso de la TD GeoGebra. Esta elección se fundamenta en que es el software utilizado en la asignatura Cálculo I, posee importantes potencialidades (señaladas en el marco teórico) y las y los encuestadas/os manifestaron saber utilizarlo (fue empleado por 17 de 21 en la resolución de consignas relacionadas con el tema).

Emplear un único software en el estudio contribuye a la uniformidad y comparabilidad de los resultados obtenidos.

➢ **Sobre el indicador 5A**

Dado que las consignas que son sometidas a análisis mediante la Grilla 1 no especifican el abordaje mediante un software matemático, hemos decidido analizar los posibles beneficios de utilizar GeoGebra como herramienta de resolución. En esta línea, nuestro propósito se enfoca en la identificación de los siguientes aspectos:

- Verificar la factibilidad de abordar la resolución empleando este software.
- Evaluar si el empleo de GeoGebra contribuye a reducir la carga de trabajo matemático requerida, eventualmente volviéndola obsoleta en comparación con tratamientos tradicionales.
- Investigar si la incorporación de esta TD amplía las posibilidades de representación, permitiendo abordar los requisitos desde una gama más amplia de registros, que de otro modo serían inaccesibles al utilizar únicamente papel, lápiz y calculadora.
- Analizar si la integración de GeoGebra implica un cambio en la demanda cognitiva, considerando las distintas tipologías de tareas (según Stein et al., 2000) previamente delineadas en la matriz de análisis.

➢ **Sobre el indicador 5B**

Dado que las consignas incluidas en la Grilla 2 demandan de manera específica el empleo de un software matemático, nuestro objetivo principal radica en evaluar la pertinencia y relevancia de utilizar GeoGebra en su resolución. Con esta finalidad, consideramos los “criterios para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TD en la resolución de consignas matemática” (CPS A, CPS B, CPS C, CPS D y CPS E) que establecimos y presentamos en el apartado 3.6.1 del marco teórico.

## 4.5. FASES DE ESTUDIO

La investigación la realizamos en 8 fases que describimos a continuación.

**Fase 1. Primera selección de libros de texto**

Esta fase es de tipo descriptiva, ya que registramos los libros propuestos como bibliografía en la planificación de la asignatura Cálculo I del año 2019. Esto lo expresamos en el CAPÍTULO 5, apartado 5.1.

**Fase 2. Encuesta y resultados**

Luego de contar con la primera selección de bibliografía expresada en la fase 1; implementamos la encuesta diseñada y analizamos resultados. Consideramos que el alcance de esta fase es exploratorio dado que nos permitió recabar información respecto de los recursos y materiales utilizados por las y los estudiantes durante el estudio del tema y sus apreciaciones respecto de consignas que consideran importantes.

**Implementación de la encuesta**

Decidimos encuestar a estudiantes que tengan una mirada integral de los contenidos abordados en Cálculo I, y que luego de un tiempo puedan reflexionar sobre el tema que se estudia en esta investigación. Por estas razones encuestamos a quienes cumplían con las siguientes condiciones:

(a) Aprobaron Cálculo I en los años 2016, 2017, 2018, 2019 y 2020.

(b) No abandonaron la carrera a diciembre del año 2020.

Para seleccionar las y los estudiantes que cumplieran con la condición (a) recurrimos a las actas de examen del sistema SIU Guaraní[5] de la UNL. Para identificar aquellas/os que no cumplieran con la condición (b) recurrimos a los registros de la profesora titular de Cálculo I en ese período (quien dictaba además asignaturas de los años superiores de la carrera). Consultamos particularmente (por correo electrónico) el estado de relación con la carrera a quienes no identificamos con continuidad en el cursado.

La encuesta fue realizada de manera virtual a través de un formulario de Google drive (https://forms.gle/opeZ1VC1D4auczyz6) y la presentamos en el apartado A.I.2 del Anexo I. La enviamos a 33 estudiantes que cumplían las condiciones señaladas y recibimos 21 respuestas. En la Tabla A1 del dicho Anexo, expresamos detalladamente las y los estudiantes encuestados, manteniendo su anonimato mediante el uso de una nomenclatura especial.

[5] Sistema de gestión académica que posibilita el registro de actividades de las y los estudiantes. Permite el acceso directo a la información de manera segura, íntegra y consistente a través de la web.

**Análisis de la encuesta**

A partir de los resultados de la encuesta elaboramos resúmenes de los datos obtenidos, expresados el apartado A.I.3 del Anexo I, presentados en forma de gráficos o tablas, dependiendo de las características de cada pregunta.

Si bien recabamos datos en relación a consignas presentes en libros y páginas web, decidimos enfocar nuestro estudio sólo en las presentes en libros, debido a que contábamos con mayor precisión de la información para una selección no azarosa.

**Fase 3. Selección definitiva de libros de texto y análisis general**

Con el análisis de los datos de la encuesta, establecimos criterios para la selección definitiva de los libros de texto a considerar para la extracción de las consignas a analizar. Estos criterios y la selección los presentamos en el CAPÍTULO 5, apartado 5.1.

En base al marco teórico realizamos un análisis general de las secciones de los libros seleccionados (ver el Anexo III). No partimos de un formato preestablecido, fuimos examinando a partir de lo observado con la lectura de los aspectos teóricos y la resolución de las consignas propuestas. Además consideramos la ampliación de esas resoluciones o la profundización de cuestiones que sólo están expresadas en forma general. Nos centramos fundamentalmente en describir las secciones estudiadas o apartado de ejercicios de las mismas. Para esto identificamos los registros de representación utilizados, reconocimos la necesidad o no de uso del software GeoGebra y analizamos el PM y la demanda cognitiva de los ejemplos y ejercicios. Luego elaboramos resúmenes que presentamos en el CAPÍTULO 5, apartado 5.2.

Esta fase es de alcance exploratorio porque pudimos recabar información que nos permitió conocer la estructura general de las secciones de los libros. Esto fue un insumo necesario para la posterior selección de consignas para estudiar en profundidad.

**Fase 4. Criterios de selección de consignas y consignas seleccionadas**

En esta fase elaboramos el listado de consignas consideradas como casos a estudiar en profundidad estableciendo criterios de selección que contemplan los resultados de las fases 2 y 3. Los criterios de selección de las consignas los exponemos en el CAPÍTULO 6, apartado 6.1. El compendio de los casos estudiados los presentamos en el Anexo IV.

**Fase 5. Análisis de consignas seleccionadas**

En esta fase estudiamos las consignas en profundidad atendiendo al marco teórico de referencia, utilizando el instrumento "Grillas de escaneo" e indagando respecto de lo que puede surgir a partir de diferentes modos de resolver. Fue necesario pensar y escribir posibles caminos de resolución, con o sin el uso de GeoGebra.

Luego del análisis, extrajimos conclusiones parciales respecto de las posibilidades de exploración y argumentación desde distintos registros de representación que las consignas habilitan, lo que demandan cognitivamente por parte de quién resuelve y qué aspectos del objeto límite puntual permiten abordar (con y sin el uso de GeoGebra).

Lo realizado en esta instancia lo presentamos en el CAPÍTULO 6, apartado 6.2. Su alcance, no sólo es exploratorio, sino también descriptivo.

**Fase 6. Recuperación de análisis para establecer resultados**

A partir de lo realizado en la fase 5, elaboramos resultados que contemplan: un resumen de los análisis, observaciones particulares destacadas, puntos focales a considerar en el diseño o selección de consignas sobre el tema y criterios para determinar la fertilidad de las mismas.

Recuperamos aspectos didácticos y matemáticos a tener en cuenta, de manera que las consignas propicien una mejor vinculación con el tema. Esto lo presentamos en el apartado 6.3 del CAPÍTULO 6.

**Fase 7. Reformulación y diseño de consignas**

Contemplando lo expuesto en el apartado 6.3, reformulamos los enunciados de seis consignas de las estudiadas y diseñamos "nuevas consignas" fértiles para el abordaje de la construcción de la definición métrica de límite puntual. Esto lo encuadramos dentro del CAPÍTULO 7.

**Fase 8. Cierre y aportes derivados de la investigación**

En esta fase recuperamos las discusiones y producciones que se dieron o derivaron del proceso de investigación, justificamos el cumplimiento de los objetivos, elaboramos las conclusiones del trabajo y planteamos las posibles líneas de continuidad del estudio. Exponemos esto en el CAPÍTULO 8.

# CAPÍTULO 5

# SELECCIÓN DE LIBROS Y ANÁLISIS GENERAL

Organizamos este capítulo en dos apartados 5.1 y 5.2. En el primero presentamos la selección de libros a analizar con su respectiva justificación. En el segundo exhibimos una síntesis del análisis general de los libros en función del marco teórico de referencia. Esto último resultó como insumo para establecer la selección de consignas que analizamos en el CAPÍTULO 6.

## 5.1. SELECCIÓN DE LIBROS

Partimos de la bibliografía expresada en la planificación de la asignatura del 2019 en la Unidad Temática II: "Límite y continuidad". En la misma se proponen cinco libros, uno como bibliografía obligatoria (1) y cuatro como bibliografía de consulta (2, 3, 4, 5). Estos son:

(1) Salas, S., Hille. E. y Etgen, G. (2002). *CALCULUS. Una y varias variables* (C. Casacuberta Vergés, Trad.). Reverté. (Obra original publicada en 1999)
(2) Apóstol, T. (1997). *CALCULUS*. Reverté.
(3) Lang, S. (1990). *CÁLCULO*. Adisson - Wesley Iberoamenreicana, S.A.
(4) Spivak, M (2010). *CALCULUS. Cálculo infinitesimal*. Reverté
(5) Stewart, J. (2010). *Cálculo: Conceptos y contextos*. Thomson.

En principio seleccionamos el libro (1), por ser la bibliografía obligatoria de la asignatura y del que se extraen (generalmente) las consignas para trabajar en las clases. De la bibliografía de consulta seleccionamos el (5), pues en la encuesta realizada las y los estudiantes manifiestan que durante el estudio prefieren complementar con libros que denominan "de ingeniería", y éste es el que cumple con esa característica. En síntesis los textos seleccionados son:

- **Libro 1:** *CALCULUS* (Salas et al., 2002)
- **Libro 2:** *Cálculo: Conceptos y contextos* (Stewart, 2010)

De ambos libros sometimos a estudio las secciones 2.1 y 2.2, dado que en ellas se inicia el abordaje del concepto de límite puntual de funciones reales de variable real.

## 5.2. RESUMEN DEL ANÁLISIS GENERAL

Para el análisis general de lo propuesto en las secciones 2.1 y 2.2 de los libros de texto seleccionados nos centramos en los siguientes aspectos:

- Descripción general de la sección o apartado de ejercicios de la sección,
- Registro de representación utilizado en ejemplos y ejercicios,
- Necesidad o no de uso de software GeoGebra,
- Análisis del PM y de la demanda cognitiva de los ejemplos y ejercicios.

Exponemos en 5.2.1 y 5.2.2 los resúmenes del análisis general. El estudio completo puede verse en el Anexo III.

### 5.2.1. Sobre Libro 1

Analizamos:

- la Sección 2.1 “La noción de límite” (pág. 59-71), incluidos los Ejercicios 2.1 (pág. 68),
- la Sección 2.2 “Definición de límite” (pág. 71-80) y incluidos los Ejercicios 2.2 (pág. 78).

**Resumen de análisis de Sección 2.1, incluidos los Ejercicios 2.1**

- En esta sección se presenta la noción intuitiva de límite, límites laterales y la notación correspondiente.
- En el apartado teórico se abordan resoluciones de consignas dentro distintos registros de representación (RRN, RRG, RRA y/o RRV); explicitándose sobre el final que estos procedimientos son intuitivos y que es necesario formalizar. Se plantea, como aplicación, el cálculo de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- En relación a los ejercicios propuestos, observamos que:
  a) En los primeros se pretende abordar la idea intuitiva de límite desde la interpretación de representaciones gráficas de funciones y la familiarización con la notación.
  b) De los ejercicios 13 a 48 se da libertad, a quien resuelve, de utilizar procedimientos intuitivos para establecer la existencia o no de un límite y solicita calcularlo si existe; por lo que se podría abordar desde cualquier registro de representación. La necesidad de trabajar desde un RRA podría darse en casos donde el límite no es un número entero y la función no es continua en el valor para el cual se calcula el límite; por ejemplo los ejercicios 47 y 48. Éstos pueden enmarcarse como TPM (Stein et al., 2000).

     Particularmente, estos ejercicios permiten visibilizar en el momento de la resolución la insuficiencia del trabajo desde un RRN y RRG. Es poco probable que las funciones involucradas puedan ser graficadas con lápiz y papel, es de esperarse que para una resolución desde un RRG se utilice un software graficador (uso de TD por necesidad). La valoración en relación al uso de las TD es positiva. Además no son fácilmente identificables los valores de los límites desde un RRN. La construcción de una estrategia de resolución algebraica puede surgir como necesidad.

c) Los ejercicios del 49 al 55 son direccionados, y se imponen los registros de representación desde los cuales trabajar. En términos de Stein et al. (2000) son TPSC, y en general no proponen posibilidades de exploración y argumentación.

d) En los ejercicios del 58 al 63 se imponen los registros de representación desde los cuales abordar la resolución (RRN y RRG) y el uso de un software graficador. Se focalizan en solicitar una respuesta y no en el pedido de explicaciones. Son TPSC.

- En esta sección la mayoría de las consignas tienen PM (Barreiro et al., 2016) pobre. El PM de algunas consignas (por ejemplo 47 y 48) es rico, esto merece un análisis más profundo que el presentado aquí para justificar la afirmación.

**Resumen de análisis de Sección 2.2, incluidos los Ejercicios 2.2**

- En esta sección se presenta la definición métrica de límite, se analizan las desigualdades y las implicaciones involucradas desde RRG, RRV y RRA.
- Hay un interés por trabajar las relaciones y desigualdades involucradas en la definición desde distintos registros de representación, RRG, RRA y RRV; generalmente se prioriza o direcciona hacia el trabajo dentro de un tipo de registro en cada consigna.
- En el apartado Ejercicios 2.2 se presentan consignas de diferentes índoles: TM, TPSC y TPCC (Stein et al., 2000). Particularmente, en principio, consideramos que el ejercicio 33 es una TPCC, que habilita la exploración y argumentación sin imponer un registro desde el cual trabajar y permite el surgimiento de conversiones de registros de representación durante la resolución. Puede posibilitar optar por el más conveniente y avanzar en el tratamiento correspondiente. Cuestión que resulta de interés para nuestro estudio.
- La incorporación del cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto se presenta en forma forzada. Consideramos que se propone en esta parte del libro para “hacer practicar” cálculos de límites de cocientes incrementales de forma “mecánica”. No estamos seguras que aporte necesariamente a la comprensión de la definición métrica, objetivo de esta sección.
- Por lo expuesto, en esta sección existen consignas con PM (Barreiro et al., 2016) rico y PM pobre. En algunos casos el uso de GeoGebra podría enriquecer el análisis.

### 5.2.2. Sobre Libro 2

Analizamos:

- la Sección 2.1 “Los problemas de la tangente y la velocidad” (pág. 90 -94), incluidos los Ejercicios 2.1 (pág. 94),
- la Sección 2.2 “Límite de una función” (pág. 95-104) y incluidos los Ejercicios 2.2 (pág. 102-104).

**Resumen de análisis de Sección 2.1, incluidos los Ejercicios 2.1**

- En esta sección no hay aportes teóricos formales en relación al límite puntual, sólo se presentan el concepto de tangencia de forma intuitiva y ejemplos donde se hace necesario usar la idea de límite para calcular pendientes de rectas tangentes a curvas en puntos de las mismas y velocidades instantáneas (en situaciones contextualizadas en la realidad). Existe en el texto un esfuerzo por mostrar la relación entre estos dos conceptos (tangencia y velocidad instantánea) y el de límite puntual, resolviendo problemas dentro de los RRN, RRG y/o RRV.
- Los ejercicios de práctica (Ejercicios 2.1) son consignas en las que, para su resolución, se debe imitar lo que se desarrolló previamente. Hay intentos de proponer el trabajo desde más de un registro de representación, pero esto es impuesto. Consideramos que pueden ser consideradas TPSC (Stein et al., 2000). Excepto el ejercicio 9, donde, si bien las actividades son direccionadas, puede considerarse TPCC. Los aspectos relativos a la insuficiencia del trabajo sólo desde el RRN se recuperan en la sección siguiente con otros ejemplos.
- En el ejercicio 9 es imprescindible el uso de un software graficador y no se pierde de vista el objetivo matemático, por lo que, en este caso, la valoración en relación a las TD la podemos considerar positiva.
- En general el PM de las consignas (Barreiro et al., 2016) es pobre pues, las propuestas de exploración y planteo de conjeturas son direccionadas y prácticamente no solicitan la argumentación por parte de quien resuelve.
- Los cambios de registros de representación también son impuestos por las consignas, no se da libertad, a quien resuelve, para pasar de un registro a otro.

**Resumen de análisis de Sección 2.2, incluidos los Ejercicios 2.2**

- En esta sección se presenta la noción intuitiva de límite y límites laterales y la notación correspondiente.

- Existe en el texto un interés por mostrar que el trabajo desde RRN y RRG resultan insuficientes para el cálculo de un límite. Cuestión que resulta de interés para nuestro estudio.
- En los ejercicios propuestos (Ejercicios 2.2) se presentan consignas que indican el trabajo desde RRN y RRG para el cálculo de límites o la determinación de la no existencia de los mismos. En general la exploración para establecer valores de los límites es sugerida o guiada y en pocas ocasiones se solicitan argumentos o explicaciones sobre lo que se logra establecer como respuesta.
- Observamos que las funciones con las que se trabaja en los ejercicios difícilmente puedan ser graficadas con lápiz y papel, por lo que probablemente para la resolución se utilice algún software graficador (uso de TD por necesidad, sin dejar de lado el objetivo matemático). Además, si bien los ejercicios permiten señalar la insuficiencia del RRN y RRG en el cálculo de límites, el tipo de funciones en general no permite que quien resuelva pueda hacer algún abordaje algebraico a partir de las herramientas con las que cuenta, ya que se presentan funciones que en sus leyes involucran funciones exponenciales, trigonométricas, etc.
- Los ejercicios del 3 al 30 los consideramos como TPSC o TPCC (Stein et al., 2000). Algunos los consideramos TPSC ya que implican procesos rutinarios donde el procedimiento a utilizar es evidente o descrito por la instrucción, exigiendo poca demanda cognitiva y focalizándose sólo en la producción de respuestas correctas; a otros los consideramos como TPCC porque exigen la utilización de procedimientos (sugeridos o no) con la intención de desarrollar niveles más profundos de la comprensión de ideas y conceptos matemáticos, buscando cerrar las conexiones con dichos conceptos.
- Los dos últimos (31 y 32), así como el ejemplo 9 del apartado sección 2.2, pueden enmarcarse como TPM (Stein et al., 2000).
- Consideramos que en esta sección existen consignas con PM (Barreiro et al., 2016) rico y PM pobre. Algunas merecen análisis más profundos que los expresados en este estudio para justificar nuestra afirmación.
- Los cambios de registros de representación, en general son impuestos, no se da libertad de pasar de un registro a otro. De todos modos, algunos cambios en la instrucción podrían subsanar esta imposición.

A partir del análisis general, reconocimos aspectos sobre los cuales era importante profundizar para hacer una valoración del PM de una consigna, en función de: las posibilidades de exploración y argumentación que habilitan desde distintos registros de representación semiótica, la demanda cognitiva exigida a quien resuelve y la obsolescencia o no de la consigna frente al uso de un software como GeoGebra.

Identificamos que hay consignas (por el enunciado que presentan) con un PM más alto que el resto, por ejemplo:

- Los ejercicios 47 o 48 (de ejercicios 2.1) y 33 (de ejercicios 2.2) del libro 1, y
- Los ejercicios 9 (de ejercicios 2.1) y 31 o 32 (de ejercicios 2.2) del libro 2.

Estas son algunas de las consignas que merecen ser estudiadas en profundidad.

# CAPÍTULO 6

# ANÁLISIS DE CONSIGNAS PARTICULARES Y RESULTADOS

Organizamos este capítulo en tres apartados. En el primero (6.1) presentamos los criterios para la elección de consignas del **Libro 1**[6] y del **Libro 2**[7] que analizamos en profundidad. En el 6.2 organizamos y mostramos el análisis de las mismas. En el último (6.3) exponemos resultados derivados del análisis, que dan cuenta de ciertos puntos focales a considerar para la selección, la reformulación y el diseño de consignas para la enseñanza de límite.

## 6.1. CRITERIOS DE SELECCIÓN DE CONSIGNAS PARA ANALIZAR

En el Anexo IV presentamos el compendio de todas las consignas que tuvimos en cuenta para el análisis.

Para seleccionar las consignas del **Libro 1** tuvimos en cuenta los resultados de la encuesta realizada al estudiantado, cuyo diseño e intencionalidad ya fueron presentadas en el CAPÍTULO 4. Escogimos aquellas que fueron mencionadas con mayor frecuencia, considerando que queden representados todos los tipos de respuestas por las que fueran consideradas de importancia (ver estudio completo en Anexo I). Resultaron ser un total de 11 consignas, 6 correspondientes a los Ejercicios 2.1 y 5 a los Ejercicios 2.2.

Para los Ejercicios 2.1 los tipos de respuestas sobre la importancia asignada son:

- T1: la mirada gráfica (global) para un primer acercamiento al objeto límite puntual.
- T2: comprensión y destreza en el trabajo algebraico para calcular límites.
- T3: comprensión de la idea de límite a partir de observar aproximaciones gráficas de imágenes de la función a un valor fijo para valores de la variable independiente próximos a $c$ (valor para el cual se calcula el límite).
- T4: comprensión de la idea de límite a partir de observar aproximaciones numéricas de imágenes de la función a un valor fijo, para valores de la variable independiente próximos a $c$ (valor para el cual se calcula el límite).
- T5: poner en evidencia que si se toma límite para la variable independiente tendiendo a $c$,

[6] Salas, S., Hille. E. y Etgen, G. (2002). *CALCULUS. Una y varias variables* (C. Casacuberta Vergés, Trad.). Reverté.
[7] Stewart, J. (2010). *Cálculo: Conceptos y contextos*. Thomson.

no es relevante lo que sucede en $c$.

- T6: utilización del software para el abordaje.
- T7: por el tipo de función involucrada.

Para los Ejercicios 2.2 los tipos de respuestas sobre la importancia asignada son:

- M1: permite observar o pensar la representación gráfica de la definición métrica.
- M2: ayuda a validar algebraicamente/demostrar la existencia de un límite calculado usando la definición métrica.
- M3: posibilita hallar relación/dependencia entre épsilon y delta, para valores particulares de épsilon y delta.
- M4: permite comprender relación y/o dependencia entre entornos reducidos en el conjunto de números reales.
- M5: complejiza la aplicación de la definición por el tipo de funciones involucradas.

La elección del **Libro 2** (que no es bibliografía obligatoria de la asignatura) fue justificada en el CAPÍTULO 5. De este seleccionamos 7 consignas, atendiendo al escaneo expuesto en dicho capítulo, contemplando el análisis general de las mismas y las observaciones planteadas. Escogimos aquellas que presentan algún aspecto relevante que no fuera analizado en las consignas seleccionadas del **Libro 1**.

## 6.2. ANÁLISIS DE CONSIGNAS

En este apartado presentamos el análisis de las consignas seleccionadas, organizadas en subapartados, cada uno corresponde a una sección de ejercicios de uno de los dos libros. A las consignas le asignamos un número, para poder citarlas posteriormente en este escrito. Además indicamos el número de ejercicio del libro y la página donde se encuentra.

Exponemos el análisis organizado en tres momentos:

1) **Preliminar:** sistematizamos un primer análisis utilizando las grillas de escaneo, que elaboramos con los aportes del marco teórico y presentamos en el Anexo II. Las opciones seleccionadas en la Grilla correspondiente a cada consigna se justifican a partir de lo que presentamos en los otros dos momentos.
2) **De examinación:** mostramos diferentes vías de resolución (con o sin GeoGebra) a partir de lo que la consigna habilita o propone.

3) **De conclusiones parciales:** damos a conocer conclusiones parciales respecto de las posibilidades de exploración y argumentación que la consigna habilita, los registros de representación desde los cuales puede presentarse una resolución, la demanda cognitiva que requiere de quien resuelve y qué aspectos del objeto límite puntual permite abordar.

### 6.2.1. Consignas de Ejercicios 2.1 del Libro 1

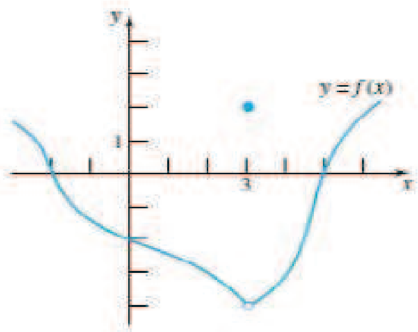
Se seleccionaron las consignas indicadas en la Tabla 3.

| Consigna | Denominación | Página | Tipos de respuestas sobre la importancia |
|---|---|---|---|
| **1** | Ejercicio 2 | 68 | T1-T3-T5 |
| **2** | Ejercicio 12 | 69 | T1-T7 |
| **3** | Ejercicio 18 | 70 | T2-T7 |
| **4** | Ejercicio 43 | 70 | T2-T4 |
| **5** | Ejercicio 47 | 70 | T2 |
| **6** | Ejercicio 58 | 70 | T3-T4-T6-T1 |

**Tabla 3. Selección de consignas de Ejercicios 2.1 de Libro 1**

### Consigna 1

**Ejercicio 2 (pág. 68)**
Utilizar la gráfica de $f$ y $c = 3$ para hallar:
(a) $\lim_{x\to c^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to c} f(x)$ (d) $f(c)$




### 1) Momento preliminar

| Sobre | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | X | | |
| | C5: Solicita argumentos | X | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | | | X | | |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | X | | | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | X | | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | | | X | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | X | | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | X | | | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | X | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 4. Escaneo de Consigna 1 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Por sus características esta consigna no es posible abordarla con el uso de un software; exponemos posibilidades de resolución sin estos.

### Procedimiento/s de resolución

Se impone un procedimiento de resolución, se requiere indicar los resultados solicitados observando el gráfico presentado en el enunciado.

Quien resuelve, por observación directa del gráfico de la función, puede identificar los valores solicitados. Recurriendo a dicha observación podría identificar que:

a) Las imágenes de esta función tienden a $-4$ conforme $x$ tiende a 3, tanto por valores mayores como menores que 3, y sin embargo la imagen de 3 es 2.

b) La existencia del límite cuando $x$ tiende a 3 no depende del valor que toma la función en $x = 3$.

Sin embargo, expresando “(a) $-4$, (b) $-4$, (c) $-4$ y (d) 2” se responde en su totalidad con lo que el enunciado solicita.

## 3) Momento de conclusiones parciales

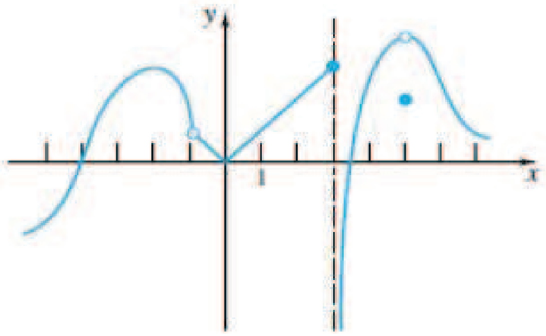
Esta consigna posee un PM pobre, ya que no solicita argumentación de lo hallado y además no garantiza exploración. Su PM podría enriquecerse si al menos se solicitase la comunicación de las razones de lo hallado como resultado. En ese caso, habilitaría a la recuperación de la idea de límite señalada en la sección 2.1 y un aspecto de la definición de límite señalado en el marco teórico, el de aproximaciones de imágenes de la función a un valor fijo para valores de la variable independiente suficientemente próximos al valor para el que se calcula el límite.

Sugiere el abordaje desde un RRG. Si se requiriera justificar lo hallado se podría hacer desde RRV, pero esto no se solicita.

Considerando la clasificación planteada por Smith y Stein (1998), es una TM porque puede realizarse imitando ejemplos presentados en la sección 2.1 del libro, y la falta de solicitud de argumentos hace que las conexiones con los conceptos no estén garantizadas.

**Consigna 2**

**Ejercicio 12 (pág. 69)**
Indicar los valores de $c$ para los cuales $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.




## 1) Momento preliminar

| Sobre | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | X | | | | |
| | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | X | | | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | X | | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | | | X | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | X | | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | X | | | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | X | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 5. Escaneo de Consigna 2 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Como la consigna 1, ésta también es inabordable con software. Exponemos posibilidades de resolución sin estos.

## Procedimiento/s de resolución

No se impone un procedimiento de resolución, se requiere indicar los valores para los cuales el límite de la función representada gráficamente no existe. La consigna se resuelve indicando dichos valores sin dar argumentos, dado que no los solicita.

A simple vista, quienes resuelven puede identificar los valores de $x$ para los cuales es necesario enfocar el análisis ($x = -1$, $x = 3$ y $x = 5$). Acudiendo a la observación del gráfico de la función pueden identificar que:

a) Las imágenes de la función tienden a un valor finito conforme $x$ tiende a $-1$, a pesar de no estar definida en $-1$, lo que hace que el límite exista.

b) Las imágenes de la función tienden a un valor finito cuando $x$ tiende a $5$ y ese valor es diferente a $f(5)$, pero de todos modos el límite existe.

c) Las imágenes de la función no tienden a un valor finito conforme $x$ se aproxima a $3$, lo cual implica que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $3$ no existe. Además para valores menores que 3, $f(x)$ se aproxima a un valor finito y, para valores mayores que 3, las imágenes de $f$ son negativas y se hacen arbitrariamente grandes en valor absoluto.

Sin embargo, expresando “si $c = 3$, no existe $\lim_{x\to c} f(x)$” se cumple en su totalidad con lo que el enunciado solicita.

**3) Momento de conclusiones parciales**

Entendemos que esta consigna no habilita a la exploración y la argumentación, y en este sentido su PM es pobre. Éste podría mejorarse si se le incorporan algunas modificaciones; por ejemplo, si solicitase la comunicación de las razones de la no existencia del límite en el valor $c$ indicado. Esto último permitiría que se recupere la idea de límite señalada en la sección 2.1 y un aspecto de la definición de límite señalado en nuestro marco teórico (que no se estaría cumpliendo), el de aproximaciones de imágenes de la función a un valor fijo para valores de la variable independiente suficientemente próximos al valor para el que se calcula el límite.

Tal cual está formulada no sugiere ni da lugar al trabajo desde algún registro de representación. Es probable que desde el RRV se pueda justificar, por un lado el valor de $c$ para el cuál el límite no existe y por otro lado los valores de $c$ para los cuales existe; pero, como ya señalamos, no es solicitado.

Podemos ubicarla como una TM ya que requiere de la reproducción de tareas presentadas con anterioridad en la sección 2.1 del libro, y no se establecen necesariamente conexiones con los conceptos ya que no se piden justificaciones de lo establecido.

**Consigna 3**

**Ejercicio 18 (pág. 70)**
Decidir con razonamientos intuitivos si existe o no el límite indicado y calcularlo en caso de existir.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$$

**1) Momento preliminar**

| Sobre | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad | | | X | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | de la solución. | | | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | X | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | | X | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | | X | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | X | | | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | X | | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | X | | | |

**Tabla 6. Escaneo de Consigna 3 con Grilla1**

## 2) Momento de examinación

Presentamos posibilidades de resolución: sin GeoGebra y con GeoGebra.

### Procedimiento/s de resolución

En esta consigna no hay imposición de un procedimiento, solicita tomar decisiones en relación a la existencia del límite a partir de razonamientos intuitivos.

Es probable que quien resuelve pueda establecer que el límite buscado no existe como valor finito, considerando sólo uno de los razonamientos intuitivos, desde los RRN, RRG, RRV o RRA presentados en la sección 2.1.

En este caso, con los conocimientos estudiados y sin el uso de un software, se puede abordar la consigna desde cualquier registro de representación. De todos modos consideramos que, es probable que la exploración o el tratamiento dentro de uno de los registros resulte suficiente para encontrar argumentos respecto de la no existencia del límite. No se estarían dando necesariamente interacciones entre representaciones del objeto matemático; cuestión que Duval considera como necesaria para la construcción de un concepto, ya que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa.

Utilizando una tabla de valores pueden observar que, a medida que se evalúa la función en valores cada vez más cercanos a cero (tanto positivos como negativos) las imágenes de la función son valores positivos que se incrementan en mayor proporción en relación al incremento o decremento de los valores del dominio en los que se evalúa. Verbalmente pueden expresar que al evaluar la función en valores cada vez más próximos a cero, sus imágenes se hacen arbitrariamente grandes. Pueden graficarla en la hoja y observar que la función presenta una asíntota vertical de ecuación $x = 0$. Y analíticamente pueden reescribir la función prescindiendo del valor absoluto y analizar lo que sucede con las imágenes de la misma conforme $x$ se aproxima a cero por valores positivos o negativos; observarán que dividen un número fijo por otro que es cada vez más próximo a cero y eso hace que la función tome valores cada vez mayores.

Esta consigna puede habilitar a discusiones en relación a cómo argumentar la no existencia del límite puntual de una función, en caso de que pidiese tales argumentos. Por ejemplo:

- Que la acotación de la distancia entre 0 y valores del dominio no permite establecer la acotación de las imágenes de la función para esos valores,
- Que para valores de igual signo del dominio de la función $x_1$ y $x_2$, que distan entre ellos un valor fijo, la distancia $|f(x_1) - f(x_2)|$ se incrementa arbitrariamente conforme $x_1$ y $x_2$ están suficientemente próximos a cero.
- Que las imágenes de la función no se están aproximando a un valor fijo conforme $x$ se aproxima a cero, sino que crecen arbitrariamente.

**Aportes en la resolución si se resuelve con software GeoGebra**[8]

- **Con GeoGebra 5.0** [9]

Si se aborda la resolución de la consigna con el uso de GeoGebra, es posible que se analice la no existencia utilizando más de un registro de representación.

En la Imagen 1 se observan en paralelo distintas vistas que remiten a RRA, RRG y RRN. También se observa que en la vista de **Cálculo Simbólico (CAS)** el software plantea que el límite es infinito, cuestión que habilita a discutir si es posible decir (en este caso) que el límite existe, aunque no sea finito.

[8] Software libre de código abierto diseñado para la enseñanza de la Matemática.
[9] GeoGebra 5.0: versión del software generalmente utilizada en computadoras.

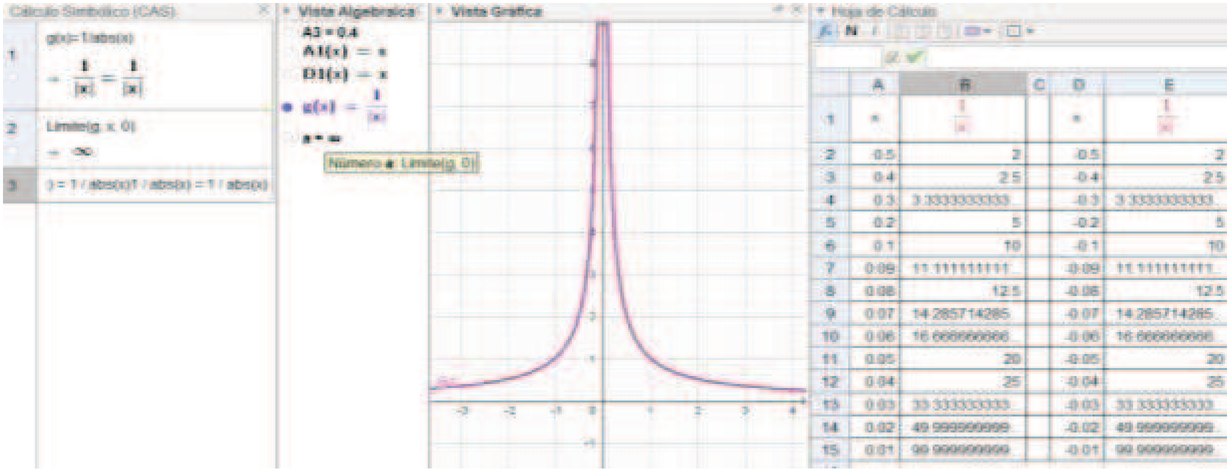



**Imagen 1. Vistas de CAS, algebraica, gráfica y Hoja de Cálculo en GeoGebra 5.0**

Esto necesariamente hace volver a pensar en la definición de límite dada en la sección 2.1, donde se considera a este como valor finito.

En este sentido, consideramos que la consigna podría habilitar (eventualmente) a un trabajo fuerte sobre la argumentación y además, el hecho de poder trabajar en varios registros de representación en conjunto, los argumentos pueden enriquecerse y complementarse.

**3) Momento de conclusiones parciales**

La consigna impone calcular el límite en caso de que exista, pero a la vez solicita decidir sobre la existencia del mismo, y en este sentido se habilita a la exploración por parte de quien resuelve. Sin embargo, no explicita el pedido de la comunicación de argumentos; cuestión que podría enriquecer su potencial.

A pesar de lo señalado, consideramos que el PM de ésta se enriquece si se aborda su resolución con el uso de GeoGebra, porque aumenta las posibilidades de exploración, y (eventualmente) de argumentación en torno al límite en cuestión. Permite abordar el análisis desde RRN, RRG y RRA en conjunto. Desde un RRN facilita una mayor y más rápida exploración, desde un RRG permite observar la presencia de una asíntota vertical ($x = 0$) que da cuenta de la no existencia del límite y desde RRA se obtiene el resultado "∞". Existe una visualización en paralelo de los tres registros, esto permite establecer comparaciones para hacer conexiones entre los resultados arrojados por el software y el concepto de límite. En el seno de una clase, pueden aparecer conjugaciones de estos tres registros de representación con el uso de GeoGebra, favoreciéndo las posibilidades de las conversiones de un registro a otro.

Es una TPCC por exigir la atención en el uso de procedimientos y de la interpretación de lo hallado en función del concepto involucrado para poder dar una respuesta, eventualmente podría implicar el uso de más de un registro de representación para poder aseverar la no existencia del límite finito planteado.

El análisis presentado deja ver que la exploración se ve potenciada por el uso de un software como GeoGebra.

**Consigna 4**

**Ejercicio 43 (pág. 70)**
Decidir con razonamientos intuitivos si existe o no el límite indicado y calcularlo en caso de existir.

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \text{ racional} \\ -2, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

**1) Momento preliminar**

| Sobre | | | Se cumple NO | Se cumple Parcial | Se cumple SI | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | X | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | | X | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | X | | | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | | ¿Permitiría trabajar con | | | | X | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | más registros de representación? | | | | | |
| | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 7. Escaneo de Consigna 4 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Expresamos posibles caminos de resolución sin software, dado que no es posible ingresar la función en GeoGebra tal como se hizo en la **consigna 3**.

### Procedimiento/s de resolución

Pueden coexistir distintas vías de resolución para concluir la no existencia del límite planteado.

Por un lado, quien resuelve podría valerse de un bosquejo incompleto de la gráfica de la función involucrada y observar que cuando los valores de la variable independiente se aproximan a cero las imágenes de la función oscilan entre -2 y 2; cuestión que hace suponer la no existencia, ya que éstas no se aproximan a un único valor conforme $x$ se aproxima a cero.

Por otro lado, se podría hacer un razonamiento de corte más analítico, considerando lo siguiente: si $x_n \in \mathbb{Q}$; $\text{lím}_{x_n \to 0} f(x) = 2$; en cambio, si $x_n \in \mathbb{I}$; $\text{lím}_{x_n \to 0} f(x) = -2$. Cuestión que permite inferir que el límite no existe, pues para que existiese debería suceder que para cualquier sucesión de números que converge a 0, las imágenes de la función deben tender a un único número.

## 3) Momento de conclusiones parciales

Entendemos que el PM de la consigna podría enriquecerse, como en la anterior, si se incorpora el pedido de argumentos en caso de la no existencia; ya que habilitaría a la recuperación del concepto de límite.

Algunas cuestiones que permite pensar esta consigna son:

- El observar lo que sucede con las imágenes de $f$ para una sucesión particular de números reales convergente a 0 (por valores mayores y menores que cero) no basta para establecer la existencia del límite planteado. Generalmente las y los estudiantes, haciendo uso de un RRN utilizan valores racionales, y en este caso erróneamente concluirían que el límite existe y es 2. Se pone en escena que éste comportamiento de las imágenes de $f$ no es compartido si evalúa en otra sucesión (por ejemplo, de números irracionales) que tiende a 0.
- Las cuentas algebraicas no permiten deducir una respuesta mecánicamente, es necesario analizar si se cumplen las condiciones para que el límite exista cuando $x$ tiende a 0 desde algún registro de representación escogido, o desde varios.

- La no existencia de un límite puntual de una función no se da sólo cuando los límites laterales existen y son distintos. Hay discusiones sobre el concepto que pueden habilitarse con el estudio de funciones del estilo de la presentada en esta consigna.

Por estas razones hemos considerado, en el momento preliminar del análisis, que permite el tratamiento dentro de los registros de representación desde los que se aborde y la conversión de un registro a otro, y es una TPCC.

### Consigna 5

**Ejercicio 47 (pág. 70)**

Decidir con razonamientos intuitivos si existe o no el límite indicado y calcularlo en caso de existir.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$$

### 1) Momento preliminar

| Sobre | | | Se cumple NO | Se cumple Parcial | Se cumple SI | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | X | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | | X | | |
| | | T Producción Mat. | | | X | | |
| | | ¿Es posible resolverla | | | X | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **El uso de GeoGebra** | utilizando el software? | | | | | |
| | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | X | | |
| | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | X | | |
| | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | X | | | | |

**Tabla 8. Escaneo de Consigna 5 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

En este momento exponemos dos posibilidades de resolución: sin software y con software.

### Procedimiento/s de resolución

Al igual que en las **consignas 3 y 4**, no se impone un procedimiento de resolución, se solicita decidir sobre la existencia o inexistencia de un límite a partir de razonamientos intuitivos. Esto habilita a la exploración desde razonamientos presentados en la sección 2.1 del libro, a saber, resoluciones dentro de los RRN, RRG, RRV y/o RRA. Sin embargo el trabajo desde un RRG no es posible sin un software, dado que las y los estudiantes sólo tienen disponibles en sus repertorios gráficas de funciones más elementales. No es posible graficar la función involucrada sin un análisis en profundidad con herramientas que se estudian posteriormente en la asignatura (derivada y aplicaciones del Teorema del valor medio).

En este caso, el valor del límite no es un número entero, racional decimal o racional; lo que lo hace particularmente especial, por todas las discusiones y exploraciones que se pueden dar en torno a cuál es el valor exacto del mismo. El valor exacto de este límite es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, lo que hace que resoluciones desde un RRN o RRV no basten para determinarlo, se requiere de un trabajo desde un RRA, pero justamente el procedimiento de racionalización (eficaz para un cálculo de este tipo) no es presentado como ejemplo en la sección 2.1, he aquí la relevancia de consigna. Hasta el momento en el que se propone este ejercicio (en libro 1) sólo se muestran los procedimientos de factorización y simplificación en funciones racionales.

En una exploración desde un RRN podrían presentarse tablas como las de la Imagen 2, que permiten intuir que es posible que el límite exista, pero no determinar exactamente el valor. Desde un RRV, las y los estudiantes, podrían plantear que aparentemente el límite existe y que el valor del límite es 0,7 (erróneamente) o aproximadamente 0,7. Estarían resolviendo parcialmente la consigna, dado que el enunciado explícitamente propone calcular el límite propuesto.

| $x$ | $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ | $x$ | $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ |
|---|---|---|---|
| 0.9 | 0.6885 | 1.1 | 0.7239 |
| 0.901 | 0.6887 | 1.0999 | 0.7239 |
| 0.902 | 0.6889 | 1.0899 | 0.7223 |
| 0.903 | 0.6891 | 1.0799 | 0.7207 |
| 0.904 | 0.6893 | 1.0699 | 0.719 |
| 0.905 | 0.6895 | 1.0599 | 0.7174 |
| 0.906 | 0.6897 | 1.0499 | 0.7157 |
| 0.907 | 0.6899 | 1.0399 | 0.714 |
| 0.908 | 0.6901 | 1.0299 | 0.7123 |
| 0.909 | 0.6903 | 1.0199 | 0.7106 |
| 0.91 | 0.6905 | 1.0099 | 0.7088 |

**Imagen 2. Tablas de evaluación de función de consigna 5 en valores próximos a 1**

Por todo lo expuesto, quien resuelve esta consigna, si explora sin la utilización de un software queda limitado/a a plantear una aproximación del valor del límite. Y las estrategias disponibles no son suficientes; se deben construir nuevas.

Sin otras herramientas disponibles más que el lápiz, el papel y la calculadora (común) es necesaria la intervención del/la docente para la construcción de una estrategia de resolución desde un RRA (racionalizar el numerador) que permita obtener la respuesta exacta y validar lo hallado desde el RRN.

**Aportes en la resolución si se resuelve con software GeoGebra**

Si se aborda esta consigna con el uso de un software como GeoGebra, es probable que las y los estudiantes recurran a la exploración no sólo desde un RRN o RRV, sino también a un abordaje desde un RRG y RRA.

- **Con GeoGebra 5.0**

Cuando se ingresa en GeoGebra 5.0 la ley de la función involucrada se observa inmediatamente lo mostrado en la Imagen 3.

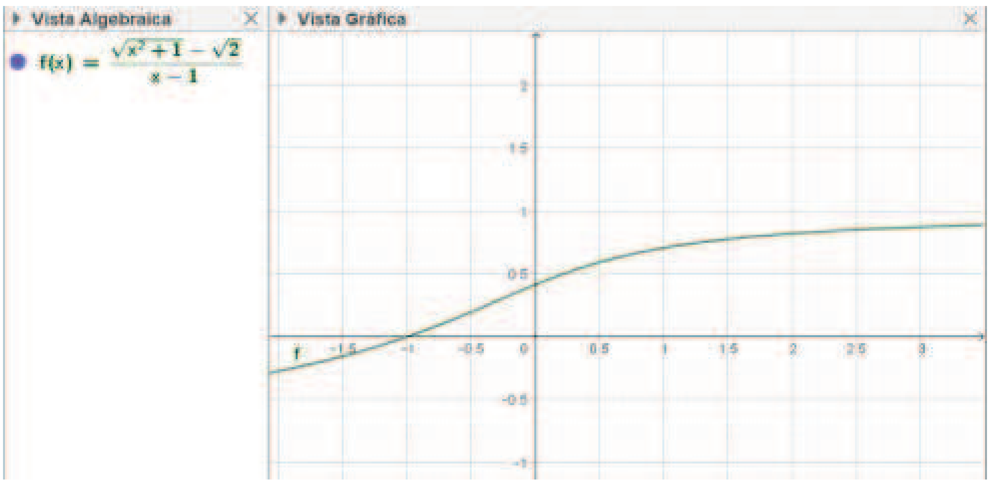



**Imagen 3. Vistas Algebraica y Gráfica de GeoGebra 5.0 al ingresar la ley de *f***

Si bien la función $f$ no está definida para $x = 1$, en la **Vista Gráfica** el software presenta una curva continua, pero si se traza la recta $x = 1$ y se busca la intersección de esta con la gráfica de $f$ aparece en la V**ista Algebraica** la expresión "$(?,?)$" como indicación de que no existe tal punto de intersección. Esto permite afianzar que la existencia en del límite en un punto es independiente del hecho que la función esté definida o no en ese punto.

Asimismo, si se trabaja con la **Hoja de Cálculo**, como se muestra en la Imagen 2 podrían hallarse aproximaciones al valor del límite, pero no el valor exacto. Esta exploración puede profundizarse dadas las posibilidades de arrastre y cálculo al instante que ofrece el software. Lo cierto es que por buena que sea la aproximación no se puede establecer el valor exacto del límite. Mirando el último renglón de las dos últimas tablas de la Imagen 4 puede suponerse que si existe el valor del límite estará entre 0.705330142198364 y 0.708865742394726.

Hoja de Cálculo

| | A | B | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.4142135623731 | 2 | 0.8218544151267 | | 0.9 | 0.6885115766572 | | 1.1 | 0.7239331235876 |
| 2 | 0.1 | 0.4546955558456 | 1.9 | 0.8143083255392 | | 0.91 | 0.6904564345442 | | 1.09 | 0.7223245168447 |
| 3 | 0.2 | 0.4930120745682 | 1.8 | 0.8061405822804 | | 0.92 | 0.6923817782007 | | 1.08 | 0.7206999633104 |
| 4 | 0.3 | 0.5288327306886 | 1.7 | 0.797278185655 | | 0.93 | 0.6942878155775 | | 1.07 | 0.7190592768512 |
| 5 | 0.4 | 0.5619676682437 | 1.6 | 0.787637773397 | | 0.94 | 0.6961747538212 | | 1.06 | 0.7174022697109 |
| 6 | 0.5 | 0.5923591472464 | 1.5 | 0.7771241507178 | | 0.95 | 0.6980427991945 | | 1.05 | 0.7157287525381 |
| 7 | 0.6 | 0.6200579585101 | 1.4 | 0.7656287275886 | | 0.96 | 0.6998921570005 | | 1.04 | 0.7140385344155 |
| 8 | 0.7 | 0.6451933359991 | 1.3 | 0.7530279477086 | | 0.97 | 0.7017230315123 | | 1.03 | 0.7123314228927 |
| 9 | 0.8 | 0.6679435744326 | 1.2 | 0.7391818640412 | | 0.98 | 0.7035356259062 | | 1.02 | 0.7106072240216 |
| 10 | 0.9 | 0.6885115766572 | 1.1 | 0.7239331235876 | | 0.99 | 0.7053301421984 | | 1.01 | 0.7088657423947 |
| 11 | | | | | | | | | | |

**Imagen 4. Vista de Hoja de Cálculo de GeoGebra 5.0: Imágenes de $f$ para valores próximos a 1**

En **Cálculo Simbólico (CAS)**, el software calcula el límite exacto con el comando "Límite (<Expresión>, <Variable>, <Valor>)", como mostramos en la Imagen 5, pero no expone los procedimientos utilizados para llegar al valor del límite.


**Imagen 5. Cálculo de límite de $f$ cuando $x$ tiende a 1 con CAS en GeoGebra 5.0**

En este sentido, hay algo para discutir, algo para construir; justamente el procedimiento para obtener ese valor del límite que ya se sabe que existe.

- **Con GeoGebra Suite** [10]

En esta versión del software se observan algunas cuestiones que también permiten construir ideas en torno al cálculo del límite en cuestión.

[10] GeoGebra Suite: versión del software generalmente utilizada en teléfonos móviles.

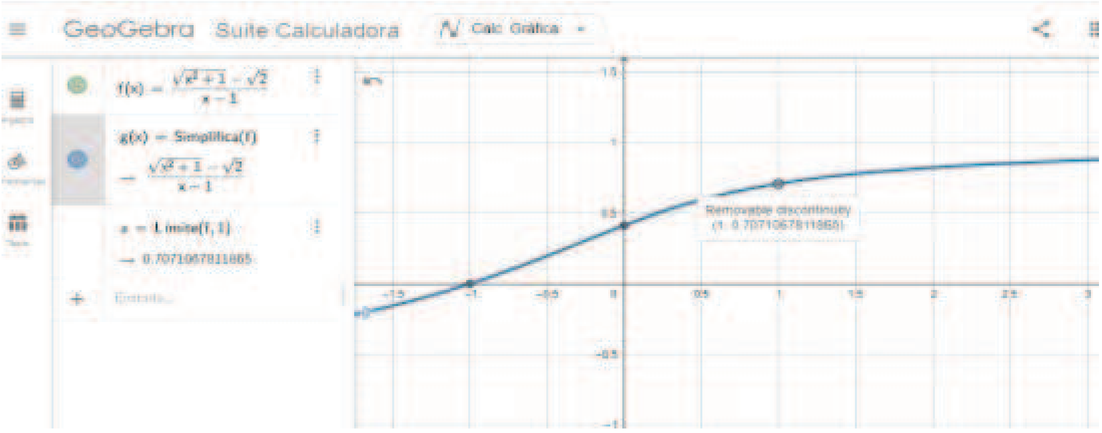



**Imagen 6. Vistas Algebraica y Gráfica de GeoGebra Suite ingresando $f$ y calculando el límite**

En principio, la **Vista Gráfica** (Imagen 6) presenta una curva continua, pero si se hace "click" sobre la misma señala un punto de "no continuidad", en este caso el valor de la ordenada del punto donde el software detecta una interrupción se expresa por aproximación, dado que es irracional. Esto hace suponer que el límite de $f$ cuando $x$ tiende a 1 existe, pero no se puede establecer con exactitud. De hecho, cuando se calcula el límite dentro de esta interfaz, arroja una aproximación del mismo, como se ve en la Imagen 6.

Por otro lado dentro de la misma interfaz se puede ingresar a la opción "tabla" y al asignar valores a la variable $x$ el software automáticamente evalúa la función en esos valores, generando al mismo tiempo puntos sobre la gráfica de la función, como se observa en la Imagen 7; cuestión que no se observa en GeoGebra 5.0.

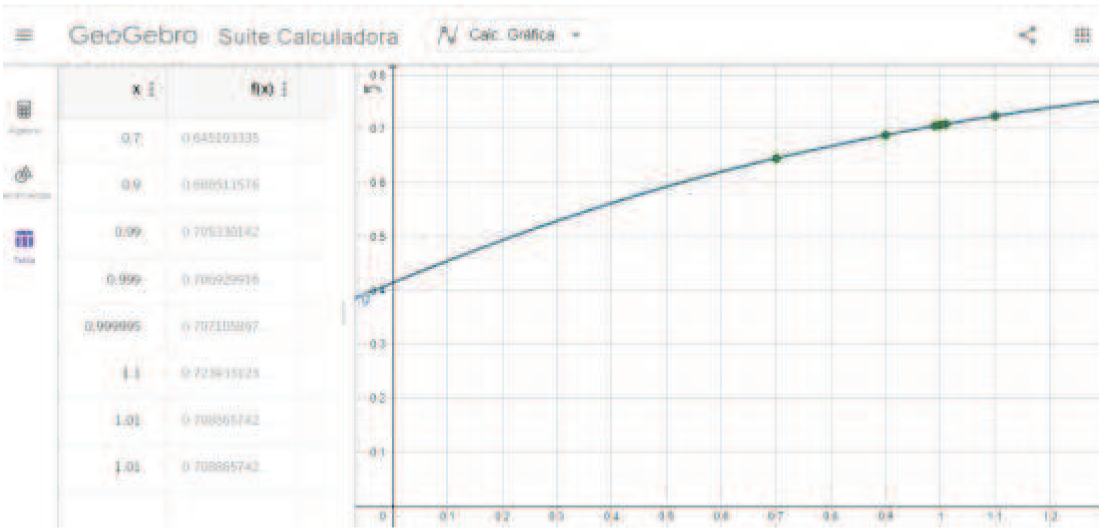



**Imagen 7. Vistas Gráfica de GeoGebra Suite al ingresar $f$ y utilizar la opción tabla**

También es posible utilizar la interface **Cálculo Simbólico (CAS)** y hallar el valor exacto del límite buscado, pero igual que en la otra versión no muestra los pasos algebraicos para arribar a la solución dada.

Lo importante del trabajo con GeoGebra radica en todas las posibilidades de exploración desde los registros de representación numérico y gráfico en conjunto, y el poder acceder al valor exacto del límite buscado. Esto permite que se genere la necesidad de construir un procedimiento que permita hallar la solución. Si bien hay aplicaciones como "Photomath"[11] que resuelven el ejercicio paso a paso, y se puede acudir a ellas para develar el procedimiento, la exploración con GeoGebra donde la conversión de registros está visible habilita a pensar en puntos centrales del concepto de límite que señalamos en el marco teórico.

**3) Momento de conclusiones parciales**

La consigna solicita decidir sobre la existencia del límite y calcularlo en caso de que exista. En este sentido se habilita a la exploración por parte de quien resuelve. No explicita el pedido de la comunicación de argumentos; cuestión que podría enriquecer su potencial.

De todos modos, consideramos que el PM de ésta se enriquece si se aborda su resolución con el uso de GeoGebra, dado que incrementa las posibilidades de exploración y argumentación en torno al límite que se está analizando. Fundamentalmente porque permite trabajar en paralelo con RRN Y RRG. Dentro del numérico permite una mayor y más rápida exploración (que si se prescinde del software) y al mismo tiempo hay una visualización de lo que sucede en ambos registros, favoreciéndose las conversiones de un registro a otro. Además, se pone en escena un concepto involucrado en la definición de límite puntual, el de aproximación de imágenes de la función a un valor fijo para valores de la variable independiente próximos al punto de interés.

Por otro lado, el hecho de que el software arroje la solución exacta invita a pensar el camino para llegar a ella, y en este sentido consideramos que puede enmarcarse en TPCC o TPM ya que exige una demanda cognitiva importante para quienes resuelven; para calcular necesitan hallar o construir un procedimiento general que les permita cerrar las conexiones realizadas desde los distintos registros de representación.

El análisis presentado da cuenta de que la exploración se vería limitada si las y los estudiantes no tienen acceso a un software como GeoGebra, dado que sólo podrían trabajar desde un RRN o RRA (y en éste último caso necesitan la instrucción u orientación de otro).

## Consigna 6

[11] Aplicación gratuita para teléfonos móviles, que surge en 2014 y funciona como una calculadora por cámara. Utiliza la cámara para reconocer ejercicios/problemas matemáticos y mostrar la solución y el procedimiento en la pantalla. Está disponible para Google Android e iOS.

**Ejercicio 58 (pág. 70)**

Crear una tabla de valores para estimar $\lim_{x \to c} f(x)$. A continuación utilizar un programa gráfico para ampliar la gráfica cerca de $x = c$ para justificar la estimación o para mejorarla.
Estimar

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \qquad \text{(medidos en radianes)}$$

después de calcular el cociente en $x = \pm 1$, $x = \pm 0,1$, $x = \pm 0,01$, $x = \pm 0,001$.

## 1) Momento preliminar

| **Sobre** | | | **Se cumple** NO | Parcial | SI | **N/C** | **Observación** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C1: Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución | | X | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | X | | |
| | | C5: Solicita argumentos. | | | X | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | | X | | | |
| | | Numérico | | | X | | |
| | | Gráfico | | | X | | |
| | | Algebraico | X | | | | |
| | Tipos de transformaciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | X | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumentación o justificación? | | | X | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | | X | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | X | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| **Pertinencia y significatividad del uso de TD para resolver** | | CPS A: Promueve la búsqueda de pruebas matemáticas. | | X | | | Valoración parcialmente positiva |
| | | CPS B: Requiere el uso imprescindible de TD | | X | | | |
| | | CPS C: Mantiene el enfoque en el objetivo matemático | | | X | | |
| | | CPS D: Brinda libertad para recurrir a TD | X | | | | |
| | | CPS E: Permite la elección libre de TD | | X | | | |

**Tabla 9. Escaneo de Consigna 6 con Grilla 2**

**2) Momento de examinación**

Exponemos posibilidades de resolución, las cuales incluyen el uso de un programa graficador ya que la consigna lo solicita.

**Procedimiento/s de resolución**

El enunciado solicita estimar el límite indicado, pero se impone un procedimiento de resolución. Este procedimiento consta de dos instancias, por un lado indica estimar usando una tabla de valores (RRN) que se debe crear haciendo uso de los números propuestos y por otro lado, para mejorar la estimación realizada, solicita graficar con un programa la función involucrada (RRG).

Quien resuelve podría realizar una tabla similar a la de la Imagen 8, dado que los valores obtenidos para las imágenes de la función dependen de las opciones de aproximación (por redondeo o truncamiento) consideradas.

| x | $\frac{1-\cos(x)}{x}$ | | x | $\frac{1-\cos(x)}{x}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4597 | | -1 | -0.4597 |
| 0.1 | 0.04996 | | -0.1 | -0.04996 |
| 0.01 | 0.005 | | -0.01 | -0.005 |
| 0.001 | 0.0005 | | -0.001 | -0.0005 |

**Imagen 8. Tablas de evaluación de función de consigna 6 en los valores indicados**

Bajo el supuesto de que el límite existe, y observando que el signo de $f(x)$ depende sólo del signo de $x$ y que las imágenes de $f$ en valor absoluto se aproximan a 0 podría conjeturarse que el límite es 0. El signo de $f(x)$ depende sólo del denominador pues el numerador es siempre positivo o cero porque $|\cos x| \leq 1$. En tal caso la construcción del gráfico no aportaría mayores argumentos. Sin embargo, si no se lograse conjeturar que el límite es 0 el gráfico permitiría observar que las imágenes de la función, aunque con distintos signos, están cada vez más próximas a 0.

Si el gráfico se realiza con GeoGebra, dependiendo de la versión utilizada se obtendrán bosquejos diferentes, como pueden observarse en la Imagen 9 e Imagen 10.

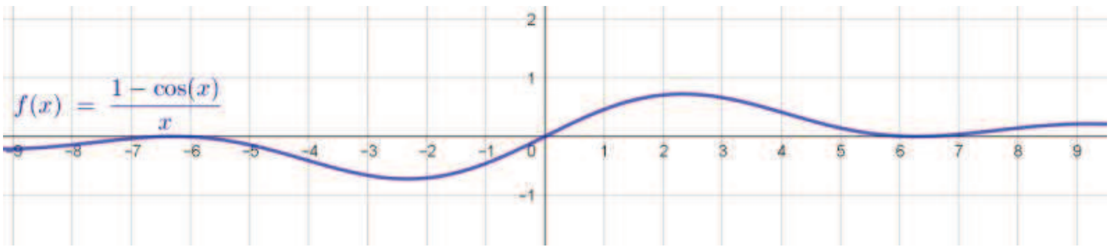



**Imagen 9. Vista Gráfica de GeoGebra 5.0 al ingresar en la entrada la ley de *f***

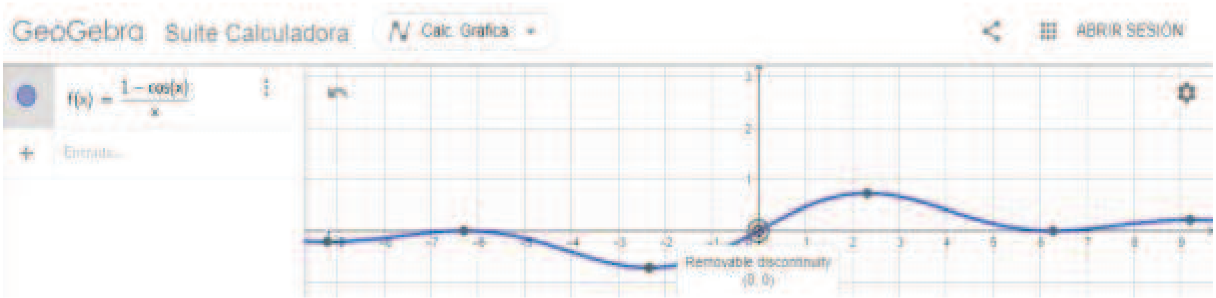



**Imagen 10. Vista Gráfica de GeoGebra Suite al ingresar en la entrada la ley de $f$**

En la **Vista Gráfica** de la versión de GeoGebra 5.0 se presenta una curva que parece continua en $x = 0$, a pesar de no estar $f$ definida allí, cuestión que hace suponer que el límite existe y es 0. Sin embargo, si se busca la intersección del eje de ordenadas con la gráfica de $f$ aparece la expresión "$(?,?)$" para indicar que no existe tal punto de intersección, de lo que se podría inferir que $f$ no está definida en 0. En cambio la **Vista Gráfica** de la versión Suite, inicialmente presenta una curva continua, pero si se hace "click" sobre la misma señala un punto de "no continuidad", y esto hace suponer que, a pesar de no estar definida $f$ en 0, el límite de $f$ cuando $x$ tiende a 0 existe y es 0.

**3) Momento de conclusiones parciales**

La consigna, al solicitar la estimación de un límite, da por supuesta la existencia del mismo. Impone dos procedimientos de resolución con un orden establecido, el primero desde un RRN y el segundo desde un RRG con software. Específicamente dice qué hacer y cómo hacerlo, se direcciona el camino de la resolución. Más aún, en el primer procedimiento indicado (RRN) no sólo exige evaluar la función en valores próximos a 0, sino que también indica en que valores hacerlo y da indicios de la existencia del límite cuando $x$ tiende a 0. Por otra parte, señala específicamente para qué utilizar el procedimiento desde el RRG (con software) propuesto, para justificar la estimación realizada o mejorarla.

Es observable que la exploración es dirigida, y por ende limitada. De la misma manera la justificación del valor del límite se ve limitada a lo observable en el gráfico de la función. Por estas razones consideramos que el PM es pobre. Sin embargo, el uso del software permite concluir respecto de la existencia del límite, ya sea validando lo estimado a partir de la tabla de valores o por simple inspección del gráfico.

Por otro lado, la consigna plantea la evaluación de $f$ en los primeros elementos de las sucesiones $(1/10^{n-1})$ y $(-1/10^{n-1})$, y esto puede generar construcciones conceptuales no adecuadas en relación al límite puntual, por ejemplo pensar que esa evaluación siempre es suficiente para estimar el valor del límite cuando $x$ tiende a 0. Puede pasar a formar parte del curriculum oculto que siempre se puede estimar el límite para $x$ tendiendo a 0 de una cierta función evaluando en los primeros elementos de alguna sucesión particular.

Para ilustrar lo referido en el párrafo anterior, si consideramos la función $g$,

$$g(x) = \begin{cases} x & si\ x = \dfrac{1}{10^n} \text{ para n} \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y utilizamos el tratamiento por sucesiones antes descripto, podríamos inferir que el límite para $x$ tendiendo a 0 de $g(x)$ es 0, cuando en realidad no existe.

Además no da la posibilidad de pensar en la existencia del límite para $x$ tendiendo a otro valor real distinto de 0, cuestión que habilitaría a una mayor exploración y búsqueda de argumentos.

El PM se enriquecería si dando la función $f$ involucrada se solicitase analizar la existencia del límite cuando $x$ tiende a $c$ para cualquier $c$ real y el pedido de explicitación de los procedimientos utilizados para determinar lo establecido. También si se solicitase encontrar las razones por las que las sucesiones $(1/10^{n-1})$ y $(-1/10^{n-1})$ funcionan para poder conjeturar, en este caso, el valor del límite.

Como la demanda cognitiva que exige esta consigna no es fuerte, dado que el procedimiento a utilizar es descrito por la instrucción, la consideramos una TPSC. Sin embargo tiene algunos rasgos que refieren a TPCC, pues requiere el trabajo en dos registros de representación y su vinculación con el concepto de límite para completar la tarea con éxito.

Por otro lado, el análisis de pertinencia y significatividad del uso de TD es parcialmente positivo, dado que si bien el uso del software es impuesto, es probable que las y los estudiantes no puedan prescindir de él para resolver.

### 6.2.2. Consignas de Ejercicios 2.2 del Libro 1

Se seleccionaron las consignas indicadas en la Tabla 10.

| Consigna | Denominación | Página | Tipos de respuestas sobre la importancia |
|---|---|---|---|
| **7** | Ejercicio 17 | 78 | M5 |
| **8** | Ejercicio 21 | 78 | M1 |
| **9** | Ejercicio 22 | 78 | M1 |
| **10** | Ejercicio 27 | 78 | M2 |
| **11** | Ejercicio 33 | 78 | M3 – M4 |

**Tabla 10. Selección de consignas de Ejercicios 2.2 de Libro 1**

## Consigna 7

**Ejercicio 17 (pág. 78)**
Determinar, al modo de la sección 2.1, si existen o no los límites indicados. Calcular los límites que existan

$$\lim_{x \to 3} f(x) \qquad \text{si}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \text{ es un entero} \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

## 1) Momento preliminar

| Sobre | | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | X | | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | X | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | | X | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | X | | | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | X | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 11. Escaneo de Consigna 7 con Grilla 1**

**2) Momento de examinación**

Por la ley que define la función involucrada en la consigna, consideramos que el abordaje con el uso de GeoGebra no surgiría como necesidad. Exponemos posibilidades de resolución con lápiz y papel.

**Procedimiento/s de resolución**

Pueden existir distintas vías de resolución para concluir la existencia del límite planteado, RRN, RRA o RRG. Quien resuelve podría realizar una tabla considerando valores de $x$ próximos a 3 y sus imágenes (RRN), concluyendo a partir de lo observado que el límite es 1. Por otro lado podría considerar que los valores de $x$ que distan de 3 menos que una unidad no son números enteros, por lo que para todo $x$ que satisfaga que $0 < |x - 3| < 1$, $f(x) = 1$ (RRA), permitiendo fundamentar la existencia del límite. Asimismo, puede valerse de un bosquejo incompleto de la gráfica de la función involucrada (RRG) y observar que las imágenes de la función toman el valor 1 para $x \in (2,3) \cup (3,4)$.

**3) Momento de conclusiones parciales**

La consigna sólo solicita analizar la existencia del límite para $x$ tendiendo a 3 y establecer cuál es en caso de que exista, pero de todos modos habilita a la exploración (y en distintos registros de representación), ya que no indica un procedimiento a seguir, sólo sugiere tener en cuenta lo abordado en la sección 2.1 (donde se aborda el cálculo de límites desde distintos registros de representación). El PM de la consigna podría enriquecerse si solicitase determinar lo que ocurre con el $\lim_{x \to c} f(x)$ para cualquier número real $c$ e incorporase el pedido de justificaciones. Esto admitiría un mayor análisis en relación al concepto de límite.

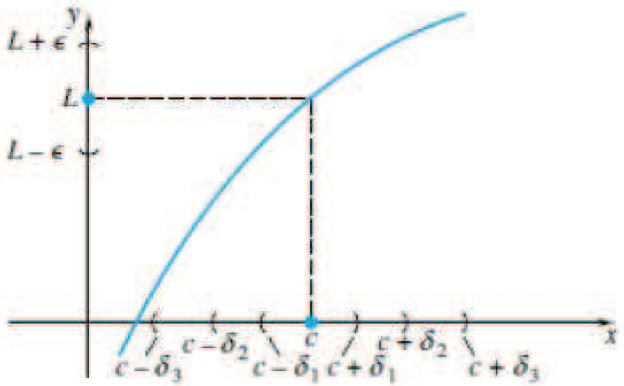
Algunas cuestiones que permite pensar esta consigna son:

- Al observar lo que sucede con las imágenes de $f$ para $x$ que pertenecen a los intervalos $(3 - p, 3)$ y $(3, 3 + p)$, con $0 < p < 1$, se puede concluir respecto del valor del límite cuando $x$ tiende a 3. Cuestión que pone en escena la definición métrica de límite puntual.
- Vale un estudio análogo si $x$ tiende a cualquier número entero $c$ distinto de 3.
- Si $c$ es un número real no entero, existe un número $0 < p_0 < 1$ tal que $f$ vale 1 en $(c - p_0, c + p_0)$ y el cálculo del límite cuando $x$ tiende a $c$ es inmediato.

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente es una TPCC.

## Consigna 8

**Ejercicio 21 (pág. 78)**
¿Cuál de los $\delta$ presentados en la figura "funciona" con el $\epsilon$ dado?




## 1) Momento preliminar

| Sobre | | | Se cumple NO | Se cumple Parcial | Se cumple SI | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | X | | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | X | | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | X | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | | | X | | |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | X | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | X | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | X | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **El uso de GeoGebra** | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | X | |
| | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 12. Escaneo de Consigna 8 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Por no contar con la ley que define la función involucrada, no es posible abordarla con el uso de un software. Exponemos las posibilidades de resolución sin GeoGebra.

### Procedimiento/s de resolución

Para abordar la resolución es necesario recuperar la definición métrica de límite puntual presentada en esta sección del libro. Es probable que quien resuelva recurra a la exploración trazando las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ y las rectas verticales que pasen por los puntos de intersección de éstas rectas con la gráfica de $f$, como se presenta en la Imagen 11.

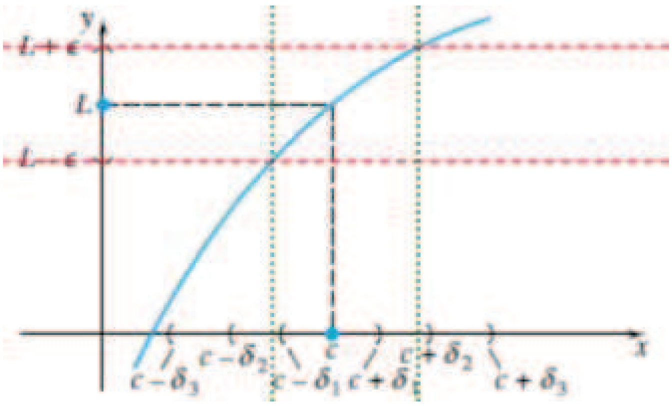



**Imagen 11. Gráfico de la consigna 8 con trazas auxiliares para el análisis**

Al observar el gráfico con estas intervenciones se puede deducir que para todo $x \in (c - \delta_1, c) \cup (c, c + \delta_1)$ se cumple que las imágenes de la función distan del valor $L$ menos que $\varepsilon$; dado que las imágenes $f(x)$ se encuentran dentro de la franja horizontal de anchura $2\varepsilon$ limitada por las rectas de ecuación $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ . Luego $\delta_1$ "funciona". Por otra parte, no se puede concluir lo mismo para $\delta_2$, dado que si bien existen otros valores de $x$, como ser los $x \in \left(c + \delta_1, c + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)\right)$, para los cuales las imágenes $f(x)$ se encuentran en esa franja; hay otros $x$, por ejemplo $x \in (c - \delta_2, c - \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2))$, para los que las imágenes de la función distan del valor $L$ más que $\varepsilon$.

Por las razones expuestas, si $\delta_2$ "no funciona" tampoco "funciona" un $\delta^* > \delta_2$, en particular $\delta_3$.

## 3) Momento de conclusiones parciales

En el enunciado se solicita escoger un $\delta$ que funcione, pero no se hace mención respecto del concepto de límite. Si se lo saca del contexto del libro no sería posible comprender a qué refiere el mismo. En este sentido consideramos que la consigna es precisa pero incompleta.

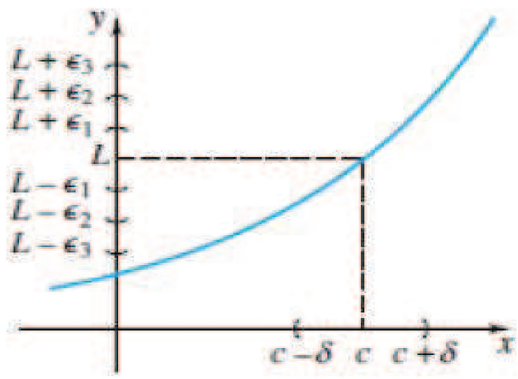
No impone un procedimiento de resolución, pero por cómo se presenta habilita a la exploración desde un RRG. Además, no solicita argumentos de ningún tipo en relación al $\delta$ escogido como solución.

Consideramos que el enunciado podría completarse y además debería solicitar que se expresen razones de selección de los $\delta$ para que se enriquezca su PM. La explicitación de argumentos podría brindar distintas posibilidades de discusión en torno al concepto de límite ligado a su definición métrica. Además habilitaría a la conversión desde un RRG a un RRA y viceversa, favoreciendo la comprensión de la definición métrica.

Si bien hemos hecho algunas observaciones respecto del enunciado, dado que el procedimiento a utilizar no es descrito por la instrucción y que entendemos que deben establecerse conexiones con la definición métrica para completar la tarea con éxito, podría considerarse (parcialmente) como una TPCC.

### Consigna 9

**Ejercicio 22 (pág. 78)**
¿Para cuál de los $\epsilon$ representados en la figura "funciona" el $\delta$ especificado?




## 1) Momento preliminar

| Sobre | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NO | Parcial | SI | | |
| La redacción | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | X | | | |
| | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | X | | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | | | X | | |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transformaciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumentación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | X | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | X | | | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | X | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 13. Escaneo de Consigna 9 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Exponemos posibilidades de resolución sin software.

### Procedimiento/s de resolución

Como en la **consigna 8**, para resolver es necesario recuperar la definición métrica de límite puntual, y quien resuelve debe recurrir a la exploración desde el gráfico, trazando las rectas verticales $x = c + \delta$ y $x = c - \delta$ y horizontales que pasen por los puntos de intersección de éstas rectas con la gráfica de $f$, como se presenta en la Imagen 12.

Como el límite de la función cuando $x$ tiende a $c$ existe y es $L$, según la definición debe cumplirse que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, es decir que las imágenes de la función disten de $L$ menos que $\varepsilon$.

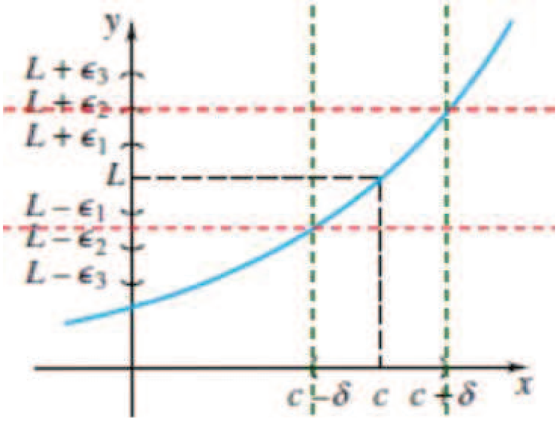



**Imagen 12. Gráfico de la consigna con trazas auxiliares para el análisis**

Aquí se debe pensar si esta relación se cumple para $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ y/o $\varepsilon_3$. Si $\varepsilon = \varepsilon_1$, para algunos $x \epsilon (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ la distancia entre $f(x)$ y $L$ es menor que $\varepsilon_1$ y para otros $x$ de ese conjunto es mayor que $\varepsilon_1$. Esto hace deducir que el delta dado "no funciona" para $\varepsilon_1$.

Ahora bien, para todo $x \epsilon (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ sucede que $|f(x) - L| < \varepsilon_2$, es decir se satisface la implicación planteada en la definición métrica, por lo que $\varepsilon_2$ "funciona" para el $\delta$ especificado, a pesar de existir otros valores de $x$ que no pertenecen al conjunto antes mencionado para los cuales también se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon_2$. Análogamente se deduce que además $\varepsilon_3$ "funciona".

Como consecuencia de lo anterior si un $\varepsilon$ "funciona", cualquier $\varepsilon^* > \varepsilon$ también "funciona".

**3) Momento de conclusiones parciales**

Como planteamos para la consigna 8, en el enunciado se solicita escoger un $\varepsilon$ que funcione, pero no se explicita "para que se cumpla la definición de $\text{lím}_{x \to c} f(x) = L$". No se comprendería la consigna si se la considera aislada. En consecuencia es precisa pero incompleta.

Por cómo se presenta es necesaria la exploración desde un RRG. No requiere argumentos de ningún tipo para los $\varepsilon$ escogidos como solución. Consideramos que se enriquecería su PM si se expresase en forma más completa y solicitase que se den las razones de selección de los $\varepsilon$ que funcionan y establezcan generalizaciones en relación a todos los $\varepsilon$ válidos.

La explicitación de argumentos habilitaría las discusiones en torno a la definición métrica de límite y a la conversión de un RRG a un RRA y viceversa.

Para la función presentada y la elección de un $\varepsilon$ que "funcione" sólo basta con considerar $|x - c| < \delta$ para que se cumpla que $|f(x) - L| < \varepsilon$, cuestión que habilita a discutir la condición $|x - c| > 0$ impuesta en la definición.

A pesar de las observaciones realizadas respecto del enunciado, como el procedimiento no es impuesto en la instrucción y pueden establecerse conexiones con la definición métrica para cumplimentar con la resolución, consideramos que es (parcialmente) una TPCC.

En esta consigna se da un $\delta$ y es necesario determinar un $\varepsilon$ que “funcione”; se plantea un análisis que requiere pensar en la dependencia $\delta(\varepsilon)$, en un sentido diferente al planteado en la **consigna 8**.

### Consigna 10

**Ejercicio 27 (pág. 78)**
Dar una demostración $\epsilon - \delta$ para el límite siguiente.

$$\lim_{x \to 4} (2x - 5) = 3$$

.

### 1) Momento preliminar

| Sobre | | | Se cumple NO | Se cumple Parcial | Se cumple SI | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | X | | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | X | | |
| | | C5: Solicita argumentos | | X | | | Pide demostrar |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | |
| | | Numérico | X | | | | |
| | | Gráfico | X | | | | |
| | | Algebraico | | | X | | |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | X | | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | | X | | | Pide demostrar |
| | | | | | | | |
| | | T Memorización | X | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **La demanda cognitiva que requieren** | T Proced. Sin Conexión | | | X | | |
| | T Proced. Con Conexión | X | | | | |
| | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | X | | | |
| | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | X | | |
| | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | X | | |
| | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | X | | |

**Tabla 14. Escaneo de Consigna 10 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

La consigna propone un trabajo desde el RRA, pero podría ser complementada también con un análisis en un RRG con el uso de GeoGebra. Exponemos posibilidades de resolución.

### Procedimiento/s de resolución

Se impone un procedimiento de resolución desde un RRA, se solicita realizar una demostración $\varepsilon - \delta$. Si se sigue lo presentado en la sección teórica 2.2 del libro, la resolución sería como sigue.

Hallemos un $\delta$. Dado un $\varepsilon > 0$ buscamos un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-4| < \delta$ entonces $|2x-5-3| < \varepsilon$. Para poder hallar el $\delta$ debemos buscar una relación entre las expresiones $|x-4|$ y $|2x-5-3|$. Vemos que,

$$|2x-5-3| = |2x-8| = |2.(x-4)| = |2|.|x-4| = 2.|x-4|.$$

Así, si $2|x-4|$ se mantiene menor que $\varepsilon$ sucede que $|2x-5-3| < \varepsilon$. Luego bastará tomar $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Veamos que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ "funciona". Sea $\varepsilon > 0$, elijamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ y supongamos que $0 < |x-4| < \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $|2x-5-3| = 2.|x-4| < 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

### Aportes en la resolución si se utiliza GeoGebra

Si bien la consigna indica una resolución desde el RRA, el/la estudiante podría realizar una construcción en la **Vista Gráfica** (Imagen 13) en GeoGebra que permita interpretar los resultados hallados. Se puede graficar la función involucrada, las rectas $y = 3 + \varepsilon$ e $y = 3 - \varepsilon$ habilitando un deslizador para $\varepsilon$ y a partir de allí comprobar que $f(x)$ dista de 3 menos que $\varepsilon$ siempre que $|x-4| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

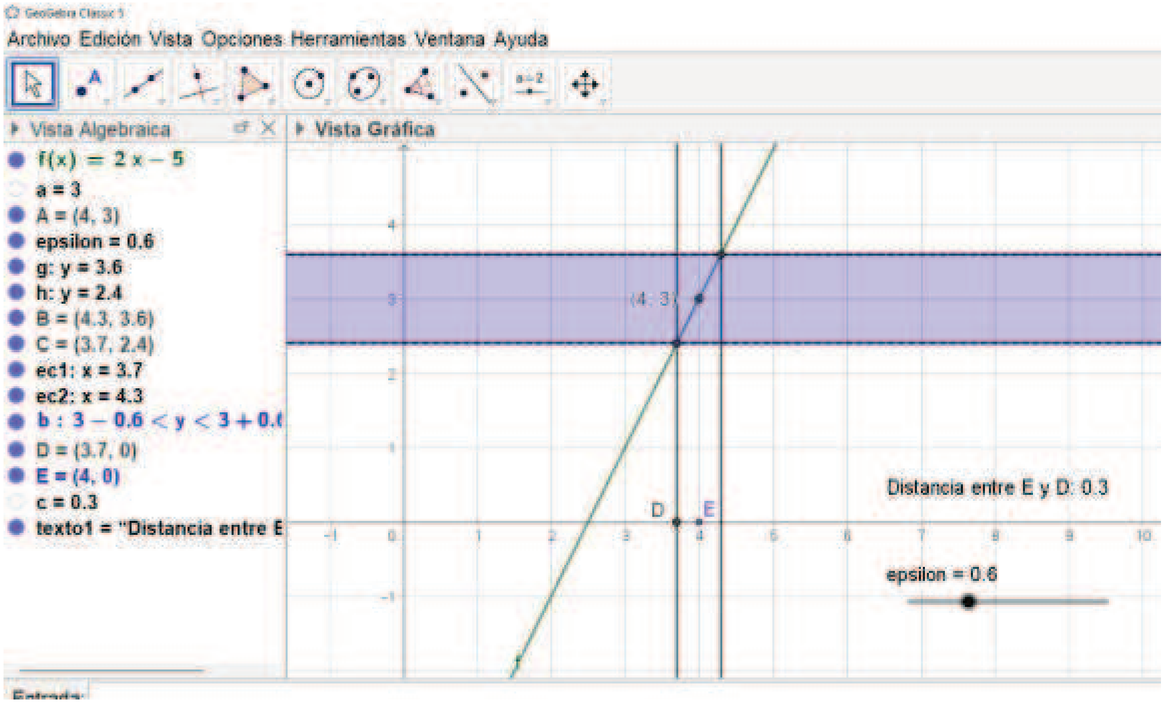



**Imagen 13. Gráfico de $f(x) = 2x - 5$ y construcciones auxiliares para interpretar la demostración**

## 3) Momento de conclusiones parciales

Si bien "demostrar" en Matemática cuenta como un argumento para asegurar que una afirmación es verdadera, en este caso el/la estudiante podría responder satisfactoriamente a la consigna imitando la demostración de un ejemplo similar presentado en apartado teórico del libro sin mayores reflexiones sobre la relaciones establecidas en la definición métrica. Podemos considerarla como un TPSC o TPCC dependiendo de las relaciones que el/la estudiante pueda establecer. Por esta razón entendemos que la solicitud de argumentos es parcial. Los argumentos no se construyen necesariamente a partir de establecer conexiones con los conceptos, pues podrían darse a partir de la reproducción de un procedimiento (pudiendo carecer de interpretación).

En la consigna se indica qué procedimiento seguir (desde un RRA) y el resultado al que se debe llegar, no exige la comunicación de la exploración ni de la argumentación (en el sentido que planteamos en el marco teórico). Su PM es intermedio.

Entendemos que alguna modificación sobre el enunciado podría favorecer la interpretación de lo que plantea la definición métrica además de la práctica del procedimiento de demostración. Por ejemplo, solicitando que se explique la relación entre el $\delta$ hallado para cualquier $\varepsilon$ dado. Para esto el o la estudiante podría hacer uso de una construcción con GeoGebra (como se mostró anteriormente) y dar una explicación desde el RRV haciendo uso de la misma.

## Consigna 11

**Ejercicio 33 (pág. 78)**
Sea $f$ una función de la cual sólo se sabe que

$$\text{Si} \quad 0 < |x-3| < 1, \qquad \text{entonces} \quad |f(x)-5| < 0,1.$$

¿Cuál de los siguientes asertos son necesariamente ciertos?

(a) Si $|x-3| < 1$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

(b) Si $|x-2,5| < 0,3$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

(c) $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.

(d) Si $0 < |x-3| < 2$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

(e) Si $0 < |x-3| < 0,5$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

(f) Si $0 < |x-3| < \frac{1}{4}$, entonces $|f(x)-5| < \frac{1}{4}(0,1)$.

(g) Si $0 < |x-3| < 1$, entonces $|f(x)-5| < 0,2$.

(h) Si $0 < |x-3| < 1$, entonces $|f(x)-4,95| < 0,05$.

(i) Si $\lim_{x\to 3} f(x) = L$, entonces $4,9 \le L \le 5,1$.

## 1) Momento preliminar

| **Sobre** | | | **Se cumple** | | | **N/C** | **Observación** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | X | | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | X | | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | | X | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | | X | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | T Memorización | X | | | | |
| | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | T Proced. Con Conexión | X | | | | |
| | T Producción Mat. | | | X | | |
| | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | | | X | |
| | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | X | |
| | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 15. Escaneo de Consigna 11 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Por sus características, esta consigna no es posible abordarla con el uso de un software; exponemos las posibilidades de resolución (sin GeoGebra) de cada inciso de la misma.

El enunciado plantea que una función $f$ satisface que: si $x \in (2,3) \cup (3,4)$ entonces $4{,}9 < f(x) < 5.1$, y se debe determinar si los asertos (de los incisos del (a) hasta el (i)) son necesariamente ciertos. Cada uno de los asertos es una implicación (a excepción del (c)) con su respectivo antecedente y consecuente.

**Posibilidades de procedimientos de resolución**

*Aserto de inciso (a)*

El antecedente de esta implicación es la única parte diferente de la implicación considerada como verdadera en el enunciado de la consigna. Para decidir si lo que se dice en este inciso es necesariamente cierto, es conveniente trabajar algebraicamente con esa desigualdad. Quien resuelve podría encontrar expresiones equivalentes a esta desigualdad (con valor absoluto) e identificar que $x \in (2{,}4)$. Entonces la afirmación no es necesariamente cierta, dado que para $x = 3$ podría no suceder que $|f(x) - 5| < 0{,}1$, por ejemplo en el caso que $f(3) = 9$.

Además de este trabajo algebraico es posible que para dar respuesta a la pregunta del enunciado se realice algún bosquejo gráfico planteando las posibilidades de verdad o falsedad de la afirmación, acompañado de un relato que fundamente lo observado.

*Aserto de inciso (b)*

En este caso, también se presentan las modificaciones en el antecedente de la implicación considerada como verdadera en el enunciado. Procediendo de manera similar a la planteada para la resolución del inciso (a) se halla que la desigualdad $|x - 2{,}5| < 0{,}3$ es equivalentes a $2{,}2 < x < 2{,}8$. Dado que el intervalo $(2{,}2; 2{,}8)$ está incluido en el conjunto

$(2,3) \cup (3,4)$ necesariamente se cumple que $|f(x) - 5| < 0{,}1$. Luego la afirmación es necesariamente cierta.

Gráficamente el/la estudiante podría notar que la zona del plano delimitada por las rectas $x = 2{,}2$ y $x = 2{,}8$ está completamente incluida en la que delimita la implicación original, pudiendo así, deducir directamente que la implicación es cierta necesariamente. Eligiendo este camino, entre todos los procesos y estrategias que pone en marcha el/la estudiante, vuelve a presentarse la habilidad para la conversión de registro de representación y su posterior interpretación.

*Aserto de inciso (c)*

El aserto no es necesariamente cierto. La afirmación $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$ es válida si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$ entonces es $|f(x) - 5| < \varepsilon$; y en el enunciado de la consigna sólo se afirma que para $\varepsilon = 0{,}1$ un $\delta = 1$ funciona.

El/la estudiante podría valerse también de bosquejos de gráficas de funciones para mostrar situaciones en las que se cumpla la implicación planteada en el enunciado valga o no el aserto.

En este caso entrarían en juego los RRA, RRG y RRV.

*Aserto de inciso (d)*

Al igual que en el inciso (a), se modifica el antecedente de la implicación considerada como verdadera en el enunciado de la consigna.

Para concluir que el aserto no es necesariamente cierto, se puede abordar algebraicamente trabajando con las desigualdades $0 < |x - 3| < 2$ y $0 < |x - 3| < 1$. Una justificación posible podría ser que en este caso se amplía el conjunto al cual pertenecen los valores de la variable independiente $x$, por lo que si $4{,}9 < f(x) < 5{,}1$ para $x \in (2,3) \cup (3,4)$ no permite aseverar que se cumpla para $x \in (1,3) \cup (3,5)$; pues si $f(1{,}5) = 4$ no se satisface el consecuente de la implicación del enunciado (y el aserto).

Además de este análisis el/la estudiante para dar respuesta podría realizar bosquejos de posibles gráficos de funciones que satisfagan la afirmación del enunciado y algunas satisfagan la afirmación del aserto y otras no.

*Aserto de inciso (e)*

En este caso mediante el abordaje algebraico se puede deducir que el aserto es necesariamente cierto dado que trabajando con las desigualdades $0 < |x - 3| < 0{,}5$ y $0 < |x - 3| < 1$ se puede notar que si $4{,}9 < f(x) < 5{,}1$ para $x \in (2,3) \cup (3,4)$ también se cumplirá que $4{,}9 < f(x) < 5{,}1$ para $x \in (2{,}5; 3) \cup (3; 3{,}5)$.

Al igual que en los análisis de los demás incisos podría el/la estudiante valerse de bosquejos de posibles gráficas de $f$.

*Aserto de inciso (f)*

A simple vista, el/la estudiante podrá reconocer que se multiplican los miembros derechos de las desigualdades involucradas en la implicación considerada como verdadera en el enunciado de la consigna y podría suponer que el aserto es necesariamente cierto cuando en realidad no lo es.

Con un trabajo algebraico se puede deducir que el aserto no en necesariamente cierto dado que trabajando con la desigualdad $0 < |x-3| < \frac{1}{4}$ equivale a considerar que $x \in (2{,}75; 3) \cup (3; 3{,}25)$ y que para estos valores del dominio sólo es posible asegurar que $4{,}9 < f(x) < 5{,}1$ ; pero no lo planteado en el consecuente del aserto, dado que se desconoce el comportamiento de la función.

En efecto, una buena argumentación para concluir que esta implicación no es necesariamente cierta, es manifestar que sólo se sabe cierta la implicación original y que por lo tanto para todos los valores del intervalo $(2{,}3) \cup (3{,}4)$ se cumple que $|f(x) - 5| < 0{,}1$, en particular para los valores del intervalo contenido $(2{,}75; 3) \cup (3; 3{,}25)$. Sólo se puede asegurar que $|f(x) - 5|$ se mantiene menor que 0,1, pero no necesariamente menor que valores más pequeños que 0.1.

*Aserto de inciso (g)*

Es necesariamente cierto. Algunas posibles justificaciones son:

- Es posible asegurar que todas las imágenes de la función $f$ en el intervalo $(2{,}3) \cup (3{,}4)$ distan menos de 0.1 unidades de 5. Sin necesidad de hacer cuentas puede deducirse que la distancia entre esas imágenes y la recta $y = 5$ es menor que todo número mayor que 0.1.
- Por el enunciado se sabe que “Si $0 < |x-3| < 1$ entonces $|f(x) - 5| < 0{,}1$” y además se sabe que 0.1 < 0.2. De esto resulta que “Si $0 < |x-3| < 1$ entonces $|f(x) - 5| < 0{,}2$”.
- Bosquejar posibles gráficas de $f$ y deducirlo de allí como se expresa en el primer inciso.

*Aserto de inciso (h)*

Esta implicación no es necesariamente cierta. Si se parte del el enunciado de la consigna, se sabe que “Si $0 < |x-3| < 1$ entonces $|f(x) - 5| < 0{,}1$”, trabajando algebraicamente con $|f(x) - 5| < 0{,}1$ se obtiene lo siguiente.

$$-0{,}1 < f(x) - 5 < 0{,}1$$

$$-0,1 + 5 < f(x) < 0,1 + 5$$
$$4,9 < f(x) < 5,1$$
$$4,9 - 4,95 < f(x) - 4,95 < 5,1 - 4,95$$
$$-0,05 < f(x) - 4,95 < 0,15$$

Y cómo

$$-0,15 < -0,05 < f(x) - 4,95 < 0,15$$

Si $0 < |x - 3| < 1$ podemos afirmar que $|f(x) - 4,95| < 0,15$. No se puede aseverar que $|f(x) - 4,95| < 0,05$, ya que podría existir un $x_* \in (2,3) \cup (3,4)$ para el cual se cumpla que $0,05 \leq f(x_*) - 4,95 < 0,15$.

Además el/la estudiante podría hacer uso de bosquejos de gráficas de funciones para mostrar situaciones en las que se cumpla la implicación planteada en el enunciado, y valga o no el aserto.

En este caso entrarían en juego los RRA, RRG y RRV.

*Aserto de inciso (i)*

El/la estudiante podría plantear en forma escrita, desde el RRV, que hay dos condiciones que se están cumpliendo:

- "si $0 < |x - 3| < 1$ entonces $4,9 < f(x) < 5,1$"
- "$\text{lím}_{x \to 3} f(x) = L$".

Si este límite existe, entonces debe suceder que cuando $x$ toma valores suficientemente próximos a 3 las imágenes de la función se aproximan arbitrariamente a $L$ (y no es de interés lo que sucede con la imagen de la función en $x = 3$). Luego como se cumple (por enunciado) que $4,9 < f(x) < 5,1$ para $x \in (2,3) \cup (3,4)$, por lo que $L$ podría tomar cualquier valor mayor o igual que 4,9 y menor o igual que 5,1. Pues, si $L$ no cumpliría esta condición, sucedería necesariamente que habría imágenes de la función para valores de $x$ suficientemente próximos a 3 que serían mayores que 5,1 o menores que 4,9; cuestión que no satisface la implicación tomada como verdadera en el enunciado de la consigna.

Formalmente, se sabe

- Por el enunciado que, para $x \in (2,3) \cup (3,4)$ se cumple que $4,9 < f(x) < 5,1$ (*)
- Además, como $\lim_{x \to 3} f(x) = L$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$ entonces $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$. Y por ende, $\varepsilon > -f(x) + L > -\varepsilon$ (**)

Así, de (*) y (**) se tiene que $4,9 - \varepsilon < L < 5,1 + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, de donde $4,9 \leq L \leq 5,1$. De esta manera el aserto es necesariamente cierto.

Otra manera de proceder sería realizar posibles gráficos de $f$ que cumplan las condiciones señaladas para poder observar y analizar lo planteado anteriormente.

**3) Momento de conclusiones parciales**

Consideramos que los asertos propuestos llevan a razonamientos que permiten construir ideas sobre el concepto de límite puntual, pues se analiza el comportamiento de funciones en términos de la dependencia entre desigualdades. Esto colabora en reconocer implicaciones entre desigualdades con módulo que dan cuenta de: valores del dominio de una función y valores de la imagen de la misma. Esta última cuestión allana el camino para la construcción de la definición métrica.

Es una consigna con PM rico, dado que habilita a la exploración y a la argumentación desde los RRG, RRA, RRV y RRN. Además, es una TPM, dado que requiere de un pensamiento complejo, no hay una vía de resolución a imitar y exige de el/la estudiante explorar y comprender la naturaleza de los conceptos matemáticos en juego y sus relaciones.

### 6.2.3. Consignas de Ejercicios 2.1 del Libro 2

Se seleccionaron las siguientes consignas

| Consigna | Denominación | Página | Aspecto relevante para la selección |
|---|---|---|---|
| **12** | Ejercicio 1 | 94 | Propone una situación en contexto real. Pendiente de recta secante y tangente. |
| **13** | Ejercicio 7 | 94 | Alude a otra situación en contexto real. Velocidad instantánea como límite de velocidades promedio. |
| **14** | Ejercicio 9 | 94 | Involucra la función $y = \text{sen}\left(\frac{10\pi}{x}\right)$ y refiere a la necesidad de realizar estimaciones de un límite usando valores suficientemente próximos. |

**Tabla 16. Selección de consignas de Ejercicios 2.1 de Libro 2**

### Consigna 12

**Ejercicio 1 (pág. 94)**

Un tanque contiene 1000 galones de agua que se descargan del fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen $V$ de agua restante en el tanque (en galones) después de $t$ minutos.

| $t$ (min) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ (gal) | 694 | 444 | 250 | 111 | 28 | 0 |

**(a)** Si $P$ es el punto $(15, 250)$ en la gráfica de $V$, encuentre las pendientes de las rectas secantes $PQ$ cuando $Q$ es el punto en la gráfica con $t = 5, 10, 20, 25$ y $30$.

**(b)** Estime la pendiente de la recta tangente en $P$ al promediar las pendientes de las dos rectas secantes.

**(c)** Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en $P$. (Esta pendiente representa la rapidez a la que el agua sale del tanque después de 15 minutos.)

## 1) Momento preliminar

| Sobre | | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | | C1:Enuncida de forma precisa y completa | | X | | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | X | | | | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | X | | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | X | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | | | X | | |
| | | Gráfico | | | X | | |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | X | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | X | | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | | X | | |
| | | T Proced. Con Conexión | X | | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | | X | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | X | | | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | X | | | | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | X | | | | |

**Tabla 17. Escaneo de Consigna 12 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Damos a conocer posibilidades de resolución: con y sin GeoGebra.

### Posibilidades de procedimientos de resolución

La introducción de la consigna está planteada en un contexto real, refiere al volumen de agua de un tanque que se está descargando. Sin embargo, los tres incisos que son parte de la misma dan indicaciones de lo que se debe realizar en un contexto puramente matemático, y pautando los procedimientos de resolución a seguir. En ninguno de los tres incisos hay duda sobre lo que se debe hacer y cómo hacerlo.

Quien resuelve, puede hacerlo imitando las resoluciones propuestas en el apartado teórico de esta sección del libro.

En el caso del inciso a) calculando las pendientes de rectas que pasan por el punto $P(15; 250)$ y los puntos $Q_1(5; 694)$, $Q_2(10; 444)$, $Q_3(20; 111)$, $Q_4(25; 28)$ y $Q_5(30; 0)$; obteniendo los valores $-44{,}4$, $-38{,}8$, $-27{,}8$, $-22{,}2$ y $-16,\hat{6}$ respectivamente.

En el caso del inciso b) calculando el promedio entre dos de los valores calculados en a), considerando dos puntos que tienen sus abscisas a derecha e izquierda de la de $P$ (aunque esto no está explicitado en el enunciado).

*Estimación de la pendiente de la recta tangente en P:* $\frac{-38{,}8+(-27{,}8)}{2} = -33{,}3$

En el caso del inciso c) realizando con lápiz y papel un gráfico como el de la Imagen 14, donde se bosqueja a mano alzada por interpolación una curva decreciente (el volumen disminuye conforme transcurre el tiempo) que pasa por los puntos $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $P$, $Q_4$, $Q_5$ y $Q_6$. También graficando una posible recta tangente a la gráfica de la curva en $P$ y el triángulo auxiliar $GHI$ que se utilizará para estimar la pendiente de dicha recta ($G(10{,}400)$, $I(10{,}90)$ y $H(20{,}90)$).

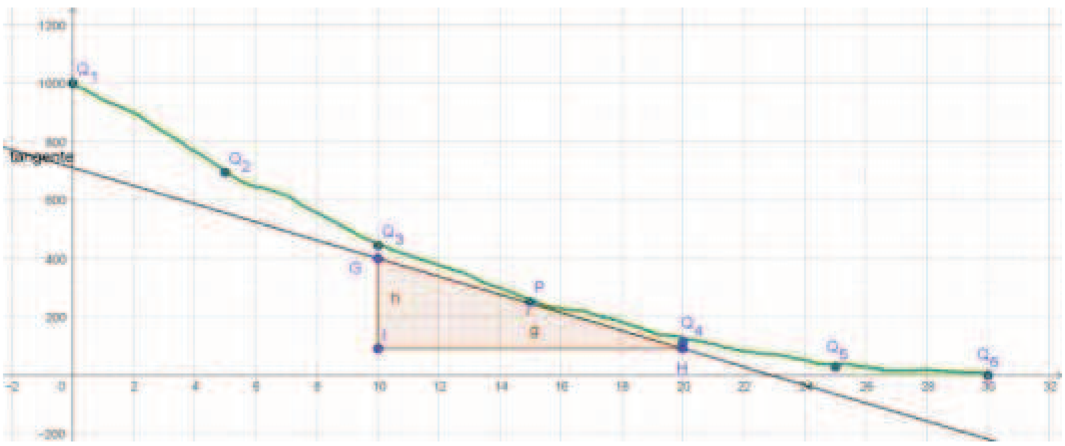



**Imagen 14. Bosquejo de gráfico de V(t), recta tangente en P y triángulo para cálculo de pendiente**

Luego, realizando los siguientes cálculos, se estima la pendiente de la (supuesta) recta tangente.

$$Pendiente\ recta\ tangente\ en\ P = -\frac{|\overline{GI}|}{|\overline{IH}|} = -\frac{400-90}{20-10} = -\frac{310}{10} = -31$$

De esta manera quedaría resuelto el ejercicio, donde se cumpliría lo solicitado trabajando desde RRN y RRG.

**Aportes en la resolución si se resuelve con software GeoGebra**

Con la incorporación del uso de GeoGebra, las y los estudiantes pueden no limitarse a realizar lo solicitado en los incisos. Pueden encontrar una función, cuya gráfica se ajuste lo mejor posible a los puntos dados, que modelice la situación. Por ejemplo, como mostramos en la Imagen 15, generando una lista de puntos **L** en la **Hoja de cálculo** y luego utilizando el comando "AjustePolinómico(<Lista de puntos>, <Grado del polinomio>)", obteniendo así $f(x) = 1{,}11x^2 - 66{,}68x + 999.81$ y luego considerar esa ley para $0 \leq x \leq 30$.

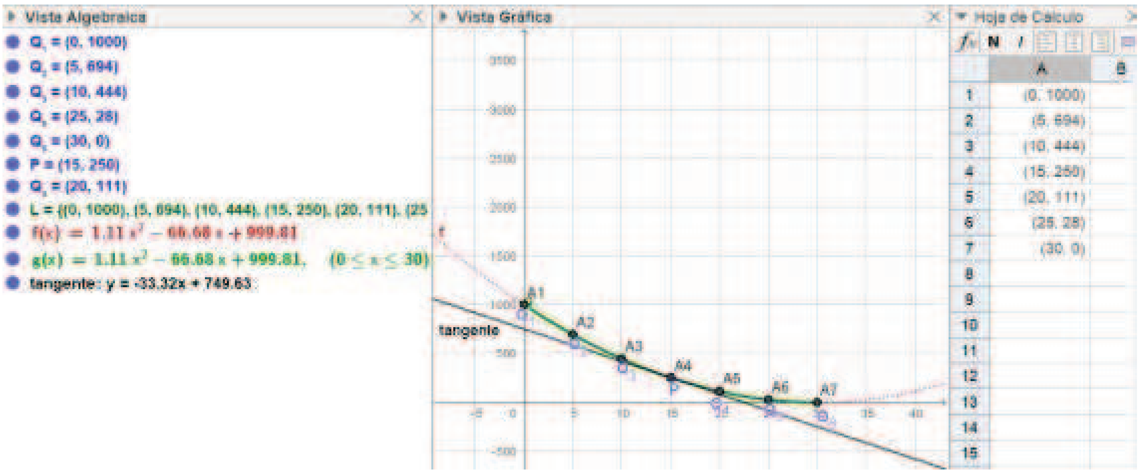



**Imagen 15. Gráfica de puntos, ajuste a función polinómica y trazo de recta tangente en *P***

Trazando luego la recta tangente a la gráfica de $f$ en $P$ y determinando a partir de lo observado en la **Vista Algebraica** la pendiente de la misma, cumplimentando así con lo solicitado en el inciso c).

También es posible trabajar dentro de esta vista para realizar más rápido las cuentas solicitadas en el inciso a) y b); pudiendo también graficar las rectas secantes mencionadas en la consigna.

**3) Momento de conclusiones parciales**

El enunciado es preciso, lo solicitado se circunscribe al pedido de cuentas matemáticas a pesar de relatarse una introducción en un "contexto real". Nada queda librado a la exploración por parte de quien resuelve y tampoco se solicitan argumentos que validen conjeturas o que expresen interpretaciones de lo calculado en relación al contexto real. Incluso la interpretación de lo realizado en el último inciso se expresa (entre paréntesis) en la consigna. Por estas razones el PM de la consigna es pobre.

Además, cabe mencionar que en el inciso b), pareciera que se deja librada la exploración sobre las rectas secantes a considerar, sin embargo no solicita justificar si existe una elección más conveniente que otras, o si es indistinta la elección.

Los registros de representación desde los que se debe resolver (RRN y RRG) son impuestos, no hay libertad de elección de los mismos. Para resolver lo solicitado en cada inciso basta con realizar tratamiento dentro del registro de representación indicado, esto no quita que se pueda hacer conversión de un registro a otro, pero si no se hace se puede resolver la consigna de todos modos.

No se establece ningún tipo de conexión entre conceptos, ni la producción de conceptos o interpretaciones de conceptos nuevos. Es una TPSC.

Se pone en evidencia, a partir del análisis presentado, que el trabajo con GeoGebra podría abrir posibilidades de exploración, conexión con conceptos matemáticos disponibles e interpretación de los nuevos conceptos en vías de construcción en un "contexto real", pero esto sólo es posible si se rediseñan los incisos de manera que satisfagan los criterios planteados en el marco teórico para enriquecer el PM.

Observamos que la interpretación del inciso c) expresada en la consigna no es correcta, ya que la rapidez es un número no negativo. La rapidez sería el valor absoluto de la pendiente de la recta tangente en $P$.

### Consigna 13

**Ejercicio 7 (pág. 94)**
La tabla muestra la posición de un ciclista

| $t$ (segundos) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ (metros) | 0 | 1,4 | 5,1 | 10,7 | 17,7 | 25,8 |

**(a)** Encuentre la velocidad promedio para cada período:

**(i)** $[1, 3]$ **(ii)** $[2, 3]$ **(iii)** $[3, 5]$ **(iv)** $[3, 4]$

**(b)** Use la gráfica de $s$ como función de $t$ para calcular la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

### 1) Momento preliminar

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Sobre</th><th rowspan="2"></th><th colspan="3">Se cumple</th><th rowspan="2">N/C</th><th rowspan="2">Observación</th></tr>
<tr><th>NO</th><th>Parcial</th><th>SI</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="6">La redacción</td><td>C1:Enuncia de forma precisa y completa</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C2: Formula preguntas en el contexto real</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución.</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C4: Proporciona los procedimientos a seguir</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C5: Solicita argumentos</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">Tipo/s de registro/s desde los</td><td>Verbal</td><td>X</td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td>No sugiere</td></tr>
<tr><td>Numérico</td><td>X</td><td></td><td></td><td>No sugiere</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
</table>

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Los registros de representación** | que sugiere resolver | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | X | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | X | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | | X | | |
| | | T Proced. Con Conexión | X | | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | | X | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | X | | | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | X | | | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | X | | | |

**Tabla 18. Escaneo de Consigna 13 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Expresamos posibilidades de resolución: con y sin GeoGebra.

### Posibilidades de procedimientos de resolución

La introducción de la consigna está planteada en un contexto real, la posición de un ciclista en relación al tiempo transcurrido. Los dos incisos solicitan el cálculo de velocidades promedio en periodos de tiempos específicos y la estimación de la velocidad instantánea en un tiempo particular.

Los procedimientos de resolución no están pautados, pero se puede resolver imitando lo planteado en el apartado teórico de la sección del libro en la que está inserta la consigna. No hay ambigüedad en relación a lo que hay que realizar. Pero la forma en la que se redacta deja abierta la posibilidad a que se utilicen procedimientos desde distintos registros de representación.

Quien resuelve puede, en el caso del inciso a), calcular las razones promedio de cambio entre los puntos $Q_1(1; 1{,}4)$ y $P(3; 10{,}7)$, $Q_2(2; 5{,}1)$ y $P$, $P$ y $Q_3(5; 25{,}8)$, $P$ y $Q_4(4; 17{,}7)$; obteniendo los valores $4{,}65\ \mathrm{m/s}$; $5{,}6\ \mathrm{m/s}$; $7{,}55\ \mathrm{m/s}$ y $7\ \mathrm{m/s}$ respectivamente. También puede realizar un bosquejo de la gráfica de la función posición por interpolación, considerando que la posición aumenta conforme transcurre el tiempo. Y a partir de la misma determinar las velocidades calculando las pendientes de las rectas secantes a la curva que pasan por los puntos mencionados anteriormente.

En todos los casos el número 3 es un extremo del intervalo, lo que hace suponer que las cuentas realizadas serán útiles para lo solicitado en el inciso b).

En el caso del inciso b) puede realizar la gráfica solicitada con lápiz y papel y una aproximación de la recta tangente a la misma por P, y utilizar el triángulo rectángulo auxiliar para determinar la velocidad instantánea en $t = 3$. También podría calcular el promedio entre las velocidades promedio de los periodos [2,3] y [3,4] y comparar con lo expuesto en la gráfica. El ejercicio quedaría resuelto, cumpliéndose lo solicitado trabajando desde RRN y RRG.

**Aportes en la resolución si se resuelve con software GeoGebra**

Con la incorporación del uso de GeoGebra, las y los estudiantes pueden no limitarse a realizar lo solicitado en los incisos. Pueden encontrar una función que modelice la situación, cuya gráfica se ajuste lo mejor posible a los puntos dados y realizar procedimientos semejantes a los expuestos para la **consigna 12**.

**3) Momento de conclusiones parciales**

La consigna se enuncia en forma precisa y completa, pero direccionada. Tanto lo expuesto en la introducción cómo lo solicitado en los incisos se expresa en un “contexto real”, pero de manera parcialmente dirigida. En el inciso a) si bien no indica el registro de representación desde el que se debe trabajar, se imponen los intervalos a considerar para calcular las velocidades promedio. En el inciso b) indica trabajar desde un RRG. En ninguno de los dos casos se solicitan argumentos o interpretaciones de lo calculado en relación al contexto real, más bien se limita al pedido de resultados numéricos.

El PM de la consigna es pobre, ya que no se da mucho lugar a la exploración (se imponen intervalos a considerar o el registro desde el cual trabajar) y no se solicita argumentación.

Para resolver lo solicitado en cada inciso basta con realizar tratamiento dentro de un registro de representación, aunque puede haber conversión de un registro a otro.

Presenta una leve diferencia con la **consigna 12**, dado que lo solicitado en los incisos se redacta (parcialmente) dentro del “contexto real” de la situación. Se refuerza lo trabajado en el apartado teórico en relación a entender a la velocidad instantánea en $t = 3$ como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $s$ en $P(3, s(3))$, pero no se producen nuevos conceptos o interpretaciones. En términos de Smith y Stein (1998), es una TPSC.

Una redacción diferente de la consigna, que satisfaga los criterios planteados por Barreiro y Rodríguez (2014) y el trabajo con GeoGebra, podrían habilitar una mayor exigencia cognitiva y más posibilidades de exploración y de argumentación. Se podría enriquecer el PM.

## Consigna 14

**Ejercicio 9 (pág. 94)**
El punto $P(1,0)$ se encuentra en la curva $y = \operatorname{sen}(\frac{10\pi}{x})$.

(a) Si $Q$ es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante $PQ$ (correcta a cuatro lugares decimales) para $x = 2; 1,5; 1,4; 1,3; 1,2; 1,1; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$ y $0,9$. ¿Las pendientes parecen aproximarse a un límite?

(b) 2 Use la gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso (a) no están cerca de la pendiente de la recta tangente en $P$.

(c) Al escoger rectas secantes apropiadas, calcule la pendiente de la recta tangente.

### 1) Momento preliminar

| Sobre | | | Se cumple NO | Se cumple Parcial | Se cumple SI | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C1: Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución | | X | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | X | | | |
| | | C5: Solicita argumentos. | | | X | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | | | X | | |
| | | Numérico | | | X | | |
| | | Gráfico | | | X | | |
| | | Algebraico | X | | | | |
| | Tipos de transformaciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumentación o justificación? | | | X | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | X | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | X | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | CPS A: Promueve la búsqueda de pruebas matemáticas. | | X | | | Valoración positiva |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Pertinencia y significatividad del uso de TD para resolver** | CPS B: Requiere el uso imprescindible de TD | | | X | | |
| | CPS C: Mantiene el enfoque en el objetivo matemático | | | X | | |
| | CPS D: Brinda libertad para recurrir a TD | | X | | | |
| | CPS E: Permite la elección libre de TD | | X | | | |

**Tabla 19. Escaneo de Consigna 14 con Grilla 2**

## 2) Momento de examinación

De los 3 incisos, sólo el b) propone el trabajo con una calculadora graficadora o computadora con software graficador. Presentamos resoluciones del inciso a) con lápiz y papel, y con el uso de GeoGebra (que no sólo es software graficador) las correspondientes a los incisos b) y c). Mencionamos también cuestiones que aluden al posible abordaje de la totalidad de la consigna con el uso de GeoGebra.

## Posibilidades de procedimientos de resolución

*Inciso a)*

Se solicita encontrar las pendientes de rectas $PQ$ a la gráfica de $y = \text{sen}\left(\frac{10\pi}{x}\right)$, siendo $P(1{,}0)$ y $Q\left(x, \text{sen}\left(\frac{10\pi}{x}\right)\right)$ para $x = 2;\ 1{,}5;\ 1{,}4;\ 1{,}3;\ 1{,}2;\ 1{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8\ y\ 0{,}9,$ y analizar "si las pendientes parecen aproximarse a un límite". Además indica "correcta a cuatro lugares decimales".

En principio, entendemos que la consigna es totalmente dirigida, sólo que no indica el procedimiento de resolución, pero si se hace con lápiz, papel y calculadora sólo es posible trabajar desde un RRN, calculando la pendiente de una recta que pasa por dos puntos (técnica ya conocida por el estudiantado) y realizando tablas como las siguientes.

| x | $\text{sen}\left(\frac{10\pi}{x}\right)$ | Q | Pend. PQ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | (2, 0) | 0 |
| 1.5 | 0.866 | (1.5, 0.866) | 1.7321 |
| 1.4 | -0.4339 | (1.4, -0.4339) | -1.0847 |
| 1.3 | -0.823 | (1.3, -0.823) | -2.7433 |
| 1.2 | 0.866 | (1.2, 0.866) | 4.3301 |
| 1.1 | -0.2817 | (1.1, -0.2817) | -2.8173 |

| x | $\text{sen}\left(\frac{10\pi}{x}\right)$ | Q | Pend. PQ |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 0 | (0.5, 0) | 0 |
| 0.6 | 0.866 | (0.6, 0.866) | -2.1651 |
| 0.7 | 0.7818 | (0.7, 0.7818) | -2.6061 |
| 0.8 | 1 | (0.8, 1) | -5 |
| 0.9 | -0.342 | (0.9, -0.342) | 3.4202 |

**Imagen 16. Tablas de cálculo de punto $Q$ y pendiente de recta $PQ$ de Consigna 14**

Quien resuelve, a partir de observar el comportamiento de los valores de las pendientes halladas, podría responder que estas pendientes no parecen aproximarse a un valor finito conforme $x$ se aproxima a 1, lo que podría llevar a conjeturar (erróneamente) que la gráfica de la función no admite recta tangente en el punto $P(1{,}0)$.

*Inciso b)*

Se solicita usar la gráfica de la curva para dar una explicación respecto de que lo hallado en el inciso a) no permite inferir la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(1{,}0)$.

**Aportes si se resuelve con software GeoGebra**

Como se solicita explícitamente graficar con software el/la estudiante lo hará. En GeoGebra, al ingresar la función, el punto $P$ y trazar la tangente a la curva por $P$ se observa lo presentado en la Imagen 17.

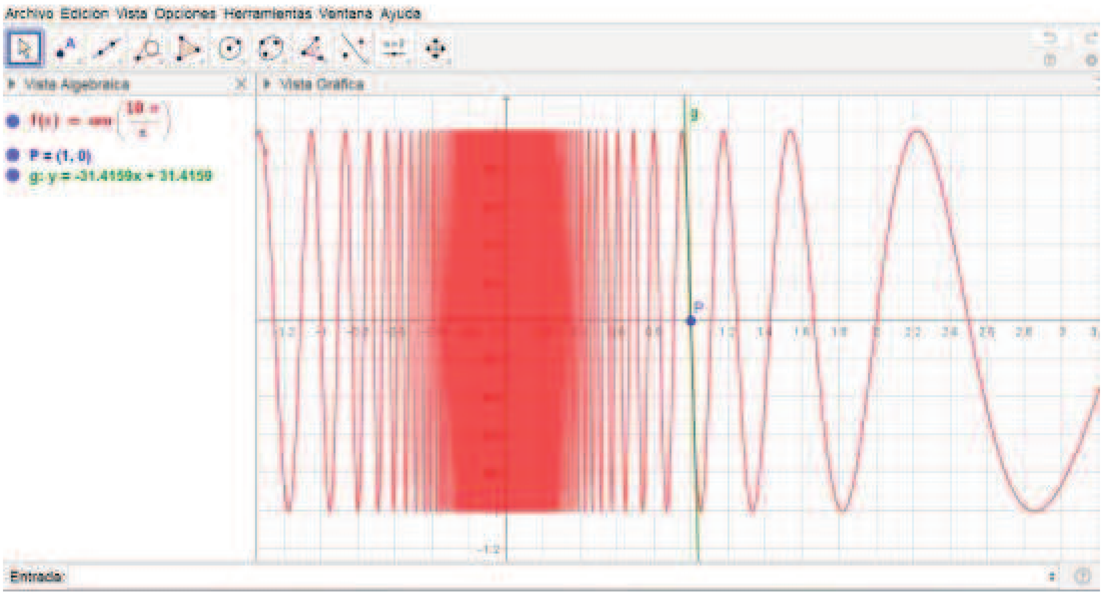



**Imagen 17. Vista Gráfica y Algebraica de GeoGebra 5.0 con la función, *P* y la recta tangente en *P***

Si se grafican las rectas secantes $PQ$ (considerando los valores de $x$ del inciso a)), es difícil observar en la **Vista Gráfica** que la posición límite de las mismas es la recta tangente trazada; a pesar de que las abscisas de los puntos $Q$ distar una unidad o menos de una unidad (hasta una decima inclusive) de 1. Esto se debe a la gran oscilación que poseen los valores de la función en el intervalo $[0{,}5; 2]$.

Para una buena aproximación es conveniente tomar valores de $x$ en un intervalo centrado en 1 en el cual la función presenta una monotonía. Por ejemplo, $\left(1-\frac{1}{20}, 1+\frac{1}{20}\right)$; y de esa manera lograr estimaciones de la pendiente de la recta tangente visible en la **Vista Algebraica**, que es $-31{,}4159$ (aproximación a cuatro cifras decimales).

*Inciso c)*

En concordancia con lo anteriormente expresado, se pueden escoger como rectas secantes apropiadas las que pasan por $P(1{,}0)$ y $Q\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{x}\right)\right)$ para $x = 0{,}995\ y\ 1{,}01$, obteniendo lo siguiente[12]:

- para $Q_1\left(0{,}995; \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{0{,}995}\right)\right)$, la pendiente de $PQ_1 \cong -31{,}4428$
- para $Q_2\left(1{,}01;\ \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{1{,}01}\right)\right)$, la pendiente de $PQ_2 \cong -30{,}6057$.

La pendiente de la recta tangente a la curva en $P$ es aproximadamente

$$\frac{-31{,}4428+(-30{,}6057)}{2} = -31{,}02425.$$

Si se realiza esto con GeoGebra se puede observar, en la **Vista Gráfica** y la **Hoja de Cálculo**, lo presentado en la Imagen 18. Las aproximaciones pueden ser mejoradas conforme se tomen valores de $x$ más próximos a 1 y también si se considera el redondeo a más cifras decimales. Esto es muy rápido de obtener con el uso del software. Asimismo, proporciona directamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $P$ donde se detecta su pendiente.

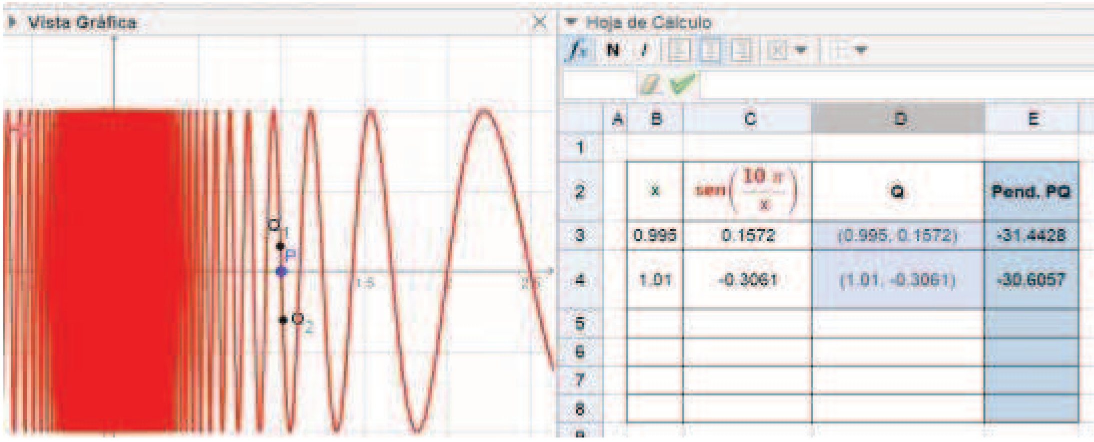



**Imagen 18. Vista Gráfica y Hoja de Cálculo de GeoGebra 5.0 con puntos $Q$ y pendientes de $\overleftrightarrow{PQ}$**

## 3) Momento de conclusiones parciales

Esta consigna tiene por objetivo lograr construir ideas en torno a que las aproximaciones numéricas no bastan para establecer la existencia o no de un límite puntual. Se enuncia en un contexto intramatemático, de forma precisa y completa.

En el inciso a) hay libertad para elegir el registro de representación desde el que va a trabajar, aunque se indican específicamente los valores de $x$ a considerar. Esto hace que sea dirigida la exploración, para que justamente surjan distintas respuestas o respuestas erróneas ante la pregunta “¿Las pendientes parecen aproximarse a un límite?”. Hay una exploración guiada y la solicitud de una conjetura o breve argumento.

En el caso del inciso b) impone el trabajo con RRG con software y hay una solicitud

[12] Valores de las pendientes de las rectas secantes con redondeo a cuatro cifras decimales.

de un argumento más sólido que en el inciso a).

El inciso c) da posibilidades de elección de rectas secantes apropiadas para calcular la pendiente de la recta tangente y no se impone el registro de representación. Parece dar libertad para la exploración y argumentación, aunque carece de sentido, o queda obsoleta, si se utiliza GeoGebra para resolver inciso b), ya que el software otorga la ecuación de la recta tangente.

Más aún, si se resuelve toda la consigna utilizando GeoGebra se empobrece el PM de la misma, fundamentalmente por lo solicitado en los incisos a) y c). Si las y los estudiantes disponen de este software para trabajar, es necesario reformular la consigna de manera que se potencien las posibilidades de exploración y argumentación. Por ejemplo, que solicite los valores de $x$ que se deben tomar para realizar una buena estimación de la pendiente de la recta tangente a partir de rectas secantes. De esta manera se recupera el concepto de "aproximación" inherente al de límite puntual.

Si sólo se utiliza un software graficador que no permita trazar la recta tangente en $P$ puede entenderse como una TPCC, ya que se utilizarían procedimientos desde distintos registros de representación para comprender ideas sobre el concepto de límite en relación a "acotaciones" y "aproximaciones". Sin embargo, entendemos que se transforma en una TPSC si se utiliza GeoGebra para la resolución de toda la consigna, por las razones antes expuestas. En este último caso es necesario reformularla para convertirla en una TPCC, con PM rico.

Valoramos como positiva la pertinencia y significatividad del uso de TD para resolver, dado que:

- No se da libertad absoluta para apelar a las TD y al recurso tecnológico (CPS D y CPS E), dado que impone, en el inciso b), el uso de un software graficador.
- Si esto no se impusiera el/la estudiante sentiría la necesidad de utilizarlo, pues se deben establecer relaciones matemáticas que no se advertirían sin su uso (CPS B), pero si se usase GeoGebra en la totalidad de la consigna el PM del inciso c) se vería empobrecido.
- Se focaliza en la enseñanza de algo matemático y no del software (CPS C),
- Es imprescindible el uso del software para el abordaje del inciso b) y para favorecer la búsqueda de pruebas (CPS A) que ayudan reflexionar sobre lo respondido en el inciso a) y lo escogido en el inciso c).

### 6.2.4. Consignas de Ejercicios 2.2 del Libro 2

Se seleccionaron las siguientes consignas

| Consigna | Denominación | Página | Aspecto relevante para la selección |
|---|---|---|---|
| **15** | Ejercicio 1 | 102 | Propone explicar con sus propias palabras el |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | significado de una expresión que utiliza la notación de límite. |
| **16** | Ejercicio 7 | 102 | Incluye una función definida en el conjunto de números reales, pero utilizando leyes diferentes por tramos. |
| **17** | Ejercicio 18 | 103 | Involucra una función racional y el límite que se solicita hallar no existe. |
| **18** | Ejercicio 32 | 104 | Involucra una función del estilo de la de la consigna 5, donde es sencillo hallar el valor del límite propuesto, pero en el inciso b) realiza una pregunta que posibilita construir ideas en torno a la definición métrica. |

**Tabla 20. Selección de consignas de Ejercicios 2.2 de Libro 2**

## Consigna 15

**Ejercicio 1 (pág. 102)**
Explique en sus propias palabras qué significa la ecuación.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que este enunciado sea verdadero y todavía $f(2) = 3$? Explique.

## 1) Momento preliminar

| Sobre | | | Se cumple NO | Se cumple Parcial | Se cumple SI | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | X | | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | | | X | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | | | X | | |
| | | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | X | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | | | X | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | X | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | T Producción Mat. | | | X | | |
| | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | X | | | | |
| | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | X | |
| | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | X | |
| | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | X | |

**Tabla 21. Escaneo de Consigna 15 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Por sus características no es posible abordarla con el uso de software. Exponemos posibilidades de resolución sin estos.

### Procedimiento/s de resolución

No se impone un procedimiento de resolución, si bien se explicita que se explique verbalmente. Presentamos continuación algunas posibilidades de resolución y/o respuestas.

Es probable que el/la estudiante realice diferentes bosquejos de gráficos de funciones que cumplan con la condición $\text{lím}_{x \to 2} f(x) = 5$ (continuas y con discontinuidades evitables en $x = 2$) y a partir de allí exprese las explicaciones solicitadas. Hipotéticamente, algunas respuestas podrían ser:

- "Cuando a $x$ se le asignan valores cada vez mas cercanos a 2 las $f(x)$ se aproximan al valor 5, porque el igual no refiere a que $f(2)$ es 5, $f(2)$ podría tomar un valor diferente a este, por ejemplo 3".
- "Cuando los valores de la variable independiente $x$ se aproximan a 2, es decir para valores de $x$ tales que sus distancias a 2 se reducen suficientemente, las imágenes de la función distan de 5 tanto como se quiera. $f(2)$ podría tomar el valor 3 y la ecuación planteada seguir siendo verdadera, dado que cuando se calcula ese límite se tiene en cuenta lo que pasa en las cercanías de 2 y no necesariamente en 2".
- "Esta ecuación significa que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 2 es igual a 5, es decir que las imágenes de la función se aproximan a 5 conforme $x$ se aproxima a 2 tanto por valores menores que 2, como mayores que 2. No importa cuál es la imagen de la función en $x = 2$, podría ser 5 o no. En este sentido la ecuación podría seguir siendo válida si $f(2) = 3$".
- "Esto significa que no importa lo que pasa en $x = 2$, pero que cuando $x$ se aproxima a 2 por izquierda las imágenes de la función se aproximan a 5 y que cuando $x$ se aproxima a 2 por derecha también eso sucede, por lo que el límite existe y es 5, pero eso no quiere decir que $f(2)$ es 5. La ecuación puede seguir siendo verdadera si $f(2) = 3$ o $f(2)$ toma

cualquier otro valor”.

### 3) Momento de conclusiones parciales

No se impone procedimiento de resolución, pero si la necesidad de expresar la respuesta en un RRV. Para lograr concluir las y los estudiantes pueden valerse del tratamiento dentro de otro registro de representación, por ejemplo el RRG o de la conversión de un registro a otro.

La consigna es de corte teórico, implica el análisis de la ecuación planteada a partir de la idea intuitiva de límite y de la notación utilizada para este concepto, fundamentalmente el uso del símbolo “=”.

Como no se asemeja a tareas realizadas con anterioridad en el libro de texto, implica un grado de incertidumbre respecto del proceso de resolución. Requiere de cierto esfuerzo cognitivo y de la recuperación de conocimientos relevantes para poder resolver. Es por ello que consideramos que es una TPM. Además dado que habilita a la exploración desde distintos registros de representación y también a la argumentación es que consideramos que posee un PM rico.

### Consigna 16

**Ejercicio 7 (pág. 102)**
Trace la gráfica de la función y úsela para determinar los valores de $a$ para los cuales $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } \quad x < -1 \\ x^2, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{si } \quad x \geq 1 \end{cases}$$

### 1) Momento preliminar

| Sobre | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NO | Parcial | SI | | |
| La redacción | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | X | | |
| | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | |
| Tipo/s de | Verbal | | X | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Los registros de representación** | registro/s desde los que sugiere resolver | Numérico | X | | | | No sugiere |
| | | Gráfico | | | X | | Sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | X | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | X | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | | X | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | | X | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | X | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | | X | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | X | | | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | X | | | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | X | | | | |

**Tabla 22. Escaneo de Consigna 16 con Grilla1**

## 2) Momento de examinación

Presentamos posibilidades de resolución: con y sin GeoGebra.

### Procedimiento/s de resolución

Se impone un procedimiento de resolución, se solicita trazar el gráfico a mano alzada y a partir de allí encontrar los valores de $a$ para los cuales el límite planteado existe.

Entendemos que se espera que construyan un gráfico similar al presentado en la Imagen 19 y a partir de allí concluyan que ese límite existe siempre que $a \neq -1$. Para la construcción del gráfico pueden hacer uso de sus saberes disponibles respecto de las gráficas de funciones polinómicas de primer y/o segundo grado o realizar tablas de valores.

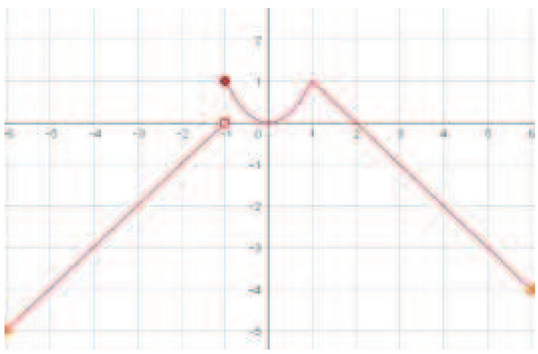


**Imagen 19. Bosquejo del gráfico de $f$**

Mediante la observación directa del gráfico, pueden identificar que las imágenes de esta función se aproximan a 0 conforme $x$ toma valores suficientemente próximos a -1 por izquierda y tienden a 1 conforme $x$ se aproxima suficientemente a -1 por valores mayores que -1. Sin embargo, no se solicita la explicación de los argumentos.

**Aportes en la resolución si se resuelve con software GeoGebra**

Si se grafica la función con GeoGebra el procedimiento esperado es que las y los estudiantes observen el gráfico y lleguen a la conclusión más rápidamente.

**3) Momento de conclusiones parciales**

Se impone el procedimiento de resolución y no se solicitan expresamente argumentos respecto de la respuesta dada. Sin embargo, por el tipo de función involucrada, se da lugar a la exploración y argumentación parcialmente. Se plantea abordar la resolución desde un RRG y la respuesta desde un RRV. Su PM es pobre y exige poca demanda cognitiva, es una TPSC (Stein y Smith, 1998).

El uso de GeoGebra en la resolución no implica incrementar las posibilidades de exploración desde distintos registros de representación, ya que es probable que las/los estudiantes se limiten a observar el gráfico mostrado. Más aún es probable que sin el uso del software pueda surgir el trabajo desde otro registro de representación, el RRN.

Hay cambios que podrían abonar el PM de la consigna y transformarla en una TPCC. Una posibilidad es solicitar que se explique la respuesta dada. De esa manera podrían surgir distintas expresiones que permitan recuperar la idea intuitiva de límite. Otra posibilidad es solicitar que propongan una modificación en un tramo de la función para construir otra que tenga límite para $x$ tendiendo a cualquier número real y que justifiquen esa decisión.

**Consigna 17**

**Ejercicio 18 (pág. 103)**

Intuya el valor del límite (si existe) al evaluar la función en los números dados (correcto a seis lugares decimales).

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$$

$$x = 0; -0,5; -0,9; -0,95; -0,99; -0,999; -2; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$$

**1) Momento preliminar**

| Sobre | | Se cumple | | | N/C | Observación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NO | Parcial | SI | | |
| | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **La redacción** | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | X | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | X | | |
| | | C5: Solicita argumentos | X | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | X | | | | No sugiere |
| | | Numérico | | | X | | |
| | | Gráfico | X | | | | No sugiere |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | X | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | X | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | X | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | | X | | |
| | | T Proced. Con Conexión | X | | | | |
| | | T Producción Mat. | X | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | | X | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | X | | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | X | | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | X | | | |

**Tabla 23. Escaneo de Consigna 17 con Grilla 1**

## 2) Momento de examinación

Presentamos posibilidades de resolución: con y sin software.

### Procedimiento/s de resolución

Como se impone evaluar la función en los números dados para intuir el valor del límite planteado, al resolver con lápiz, papel y calculadora sólo es posible trabajar desde un RRN. Quien resuelve puede realizar tablas como las de la Imagen 20 y establecer que el límite no existe dado que conforme $x$ tiende a $-1$, tanto por derecha como por izquierda, las imágenes de la función no se aproximan a un número.

| x | $\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -0.5 | -1 |
| -0.9 | -9 |
| -0.95 | -19 |
| -0.99 | -99 |
| -0.999 | -999 |

| x | $\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ |
|---|---|
| -2 | 2 |
| -1.5 | 3 |
| -1.1 | 11 |
| -1.01 | 101 |
| -1.001 | 1001.0000000002 |
| | |

**Imagen 20. Tablas de evaluación de la función en valores próximos a $-1$**

### Aportes si se resuelve con software GeoGebra

- **Con GeoGebra 5.0**

Cuando se ingresa en el renglón de entrada la ley de la función se observa lo mostrado en la Imagen 21.

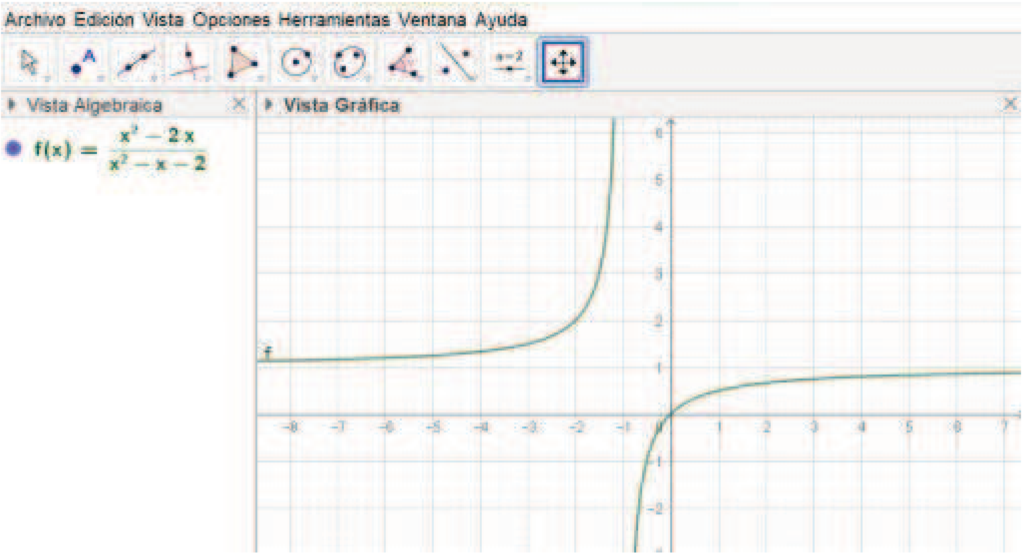



**Imagen 21. Vistas Algebraica y Gráfica de GeoGebra 5.0 al ingresar la ley de *f***

A partir de lo presentado en la **Vista Gráfica** puede inferirse que esta función racional no está definida en $x = -1$, presentando una asíntota vertical (vale aclarar que se muestra una curva continua en $x = 2$ aunque no lo es). Esto es un argumento posible para indicar que el límite propuesto no existe.

De todos modos, como la consigna solicita explícitamente evaluar la función en valores de $x$ dados, quien resuelve puede acudir a la **Hoja de Cálculo** y realizar en paralelo la evaluación de la función en dichos valores. Y así generar una lista de puntos que pueden observarse tanto en la **Vista Algebraica** como en la **Vista Gráfica** (ver Imagen 22). Además, es posible evaluar la función rápidamente en muchos más valores utilizando el arrastre en la hoja de cálculo.

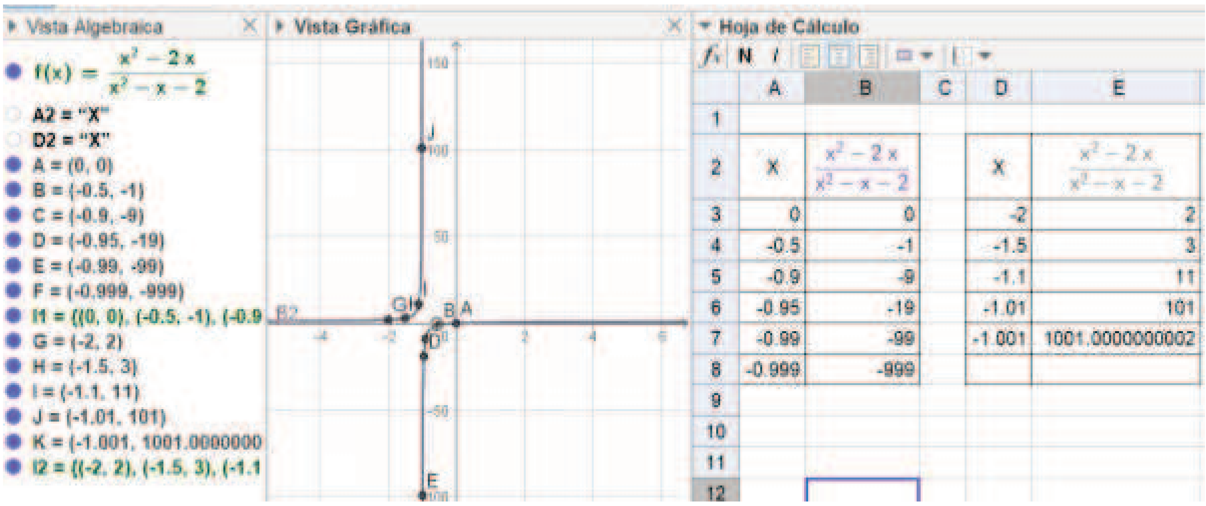



**Imagen 22. Vista Algebraica, Gráfica y Hoja de cálculo de GeoGebra 5.0**

Ingresando en el renglón de entrada "simplificar($f$)" aparece en la **Vista Algebraica** $g(x) = \frac{x}{x+1}$ , y la gráfica de ésta coincide con la de $f$ (aunque sabemos que son distintas en $x = 2$). Esto habilita a analizar el límite propuesto haciendo uso de la ley de $g$, y deduciendo que cuando $x$ tiende a $-1$ el numerador de la expresión tiende a $-1$, sin embargo del denominado tiende a tomar valores cada vez más cercanos a cero, positivos y negativos, cuando $x > -1$ y $x < -1$ respectivamente.

- **Con GeoGebra Suite**

Además de poder realizar un trabajo similar al presentado con GeoGebra 5.0, esta versión permite observar otras cuestiones. En la **Vista Gráfica** se puede identificar que la función presenta una asíntota vertical de ecuación $x = -1$ y que sucede algo particular en $x = 2$ o en las proximidades de este valor, dado que muestra un señalamiento especial (ver Imagen 23).

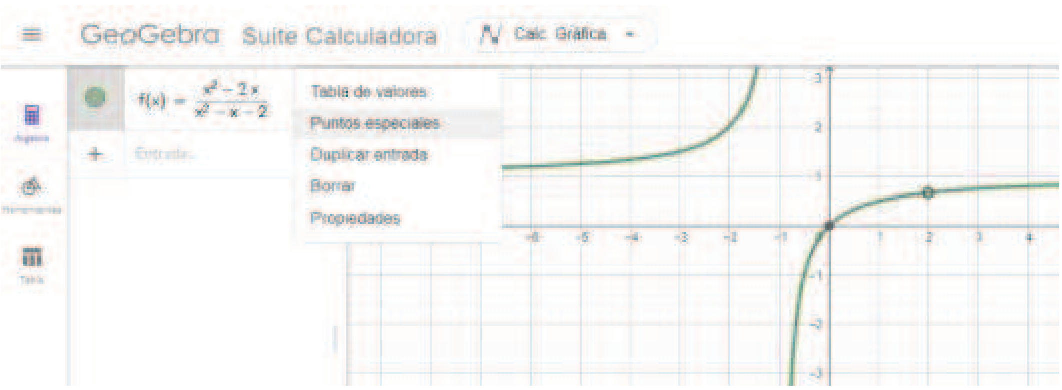



**Imagen 23. Vista Algebraica y Gráfica de GeoGebra Suite**

Además pueden calcularse los límites laterales directamente, como se muestra en la Imagen 24 (también se puede con GeoGebra 5.0).

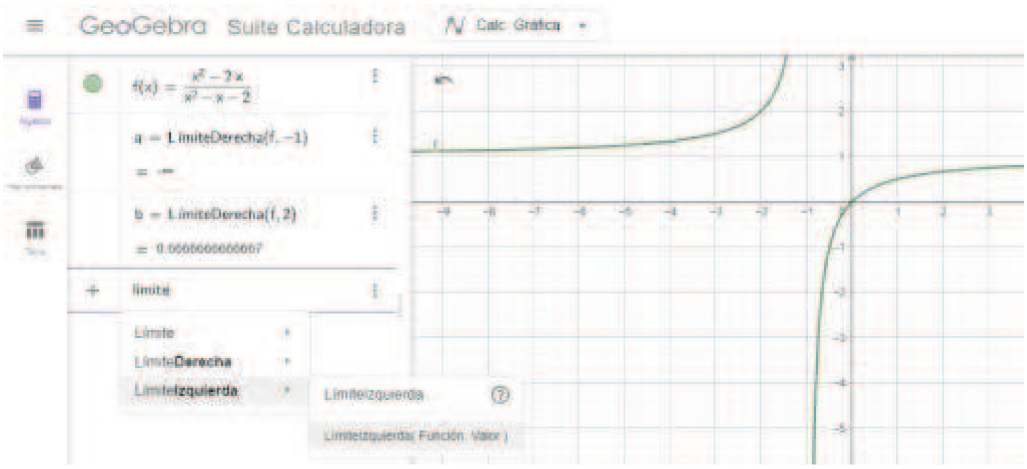



**Imagen 24. Vista Algebraica y Gráfica de GeoGebra Suite**

### 3) Momento de conclusiones parciales

El procedimiento de resolución es impuesto: "evaluar la función" (con la cantidad de cifras decimales a considerar). Además se indica en qué números evaluar por lo que no existe posibilidad de exploración libre por parte de las y los estudiantes, sino que da lugar a una exploración direccionada. Esto tampoco habilita a la toma de decisiones en relación al registro de representación en el cual trabajar, se impone el RRN.

No da lugar a la argumentación ya que solicita que intuya a partir de los datos obtenidos al evaluar la función en los valores que se indican. Quien resuelve esta consigna, explora en forma direccionada y no argumenta, sólo aplica un procedimiento impuesto y a partir de ello conjetura que el límite no existe.

Por lo expuesto consideramos que si se resuelve con lápiz, papel y calculadora la consigna tiene un PM pobre y es una TPSC, ya que el resolverla con éxito no garantiza la discusión respecto del concepto que está siendo estudiado.

La resolución con GeoGebra posibilita un trabajo desde tres registros de representación (RRN, RRG y RRA). Permite construir en paralelo más argumentos respecto de la no existencia del límite propuesto, habilita a una mayor exploración y convoca a pensar en otros procedimientos de resolución. Asimismo permite identificar otros valores de $x$ para los cuales sería interesante realizar un análisis. Para que esto sea posible debería modificase el enunciado.

Consideramos que si se modifica la consigna de manera que se solicite el análisis de la existencia del $\lim_{x \to a} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ $(a \in \mathbb{R})$ justificando lo hallado, puede transformase en una TPCC y enriquecerse su PM. En este caso, al dejar abiertas las posibilidades de exploración (ya que $a$ puede ser cualquier número real) no es posible hacerlo en forma exhaustiva desde un RRN. Es probable que quienes resuelvan opten por usar el software. Asimismo, es factible que focalicen las exploraciones y argumentaciones (desde distintos registros de representación) para los casos $a = -1$ y $a = 2$.

**Consigna 18**

**Ejercicio 32 (pág. 104)**

3

(a) Use evidencias numérica y la gráfica para intuir el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 debe estar $x$ para asegurar que la función del inciso (a) está dentro de una distancia de 0,5 de su límite?

## 1) Momento preliminar

| **Sobre** | | | **Se cumple** | | | **N/C** | **Observación** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | | C1: Enuncia de forma precisa y completa | | | X | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | X | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución | | X | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | X | | | |
| | | C5: Solicita argumentos. | | | X | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | X | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | | X | | | |
| | | Numérico | | | X | | |
| | | Gráfico | | | X | | |
| | | Algebraico | X | | | | No sugiere |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | X | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | X | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | X | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | | | X | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | X | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | X | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | | X | | |
| | | T Producción Mat. | | X | | | |
| | | | | | | | |
| | | CPS A: Promueve la | | | X | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Pertinencia y significatividad del uso de TD para resolver** | búsqueda de pruebas matemáticas. | | | | | Valoración positiva |
| | CPS B: Requiere el uso imprescindible de TD | | | X | | |
| | CPS C: Mantiene el enfoque en el objetivo matemático | | | X | | |
| | CPS D: Brinda libertad para recurrir a TD | X | | | | |
| | CPS E: Permite la elección libre de TD | | X | | | |

**Tabla 24. Escaneo de Consigna 18 con Grilla 2**

### 2) Momento de examinación

Presentamos posibilidades de resolución con GeoGebra, dado que la consigna se plantea para ser resuelta con software.

### Procedimiento/s de resolución

*Inciso a)*

- **Con GeoGebra 5.0**

Al ingresar en el renglón de entrada la ley de la función y utilizar la **Hoja de cálculo** para hacer evaluaciones en algunos números cercanos a 1 (seleccionados al azar) se observa lo presentado en la Imagen 25.

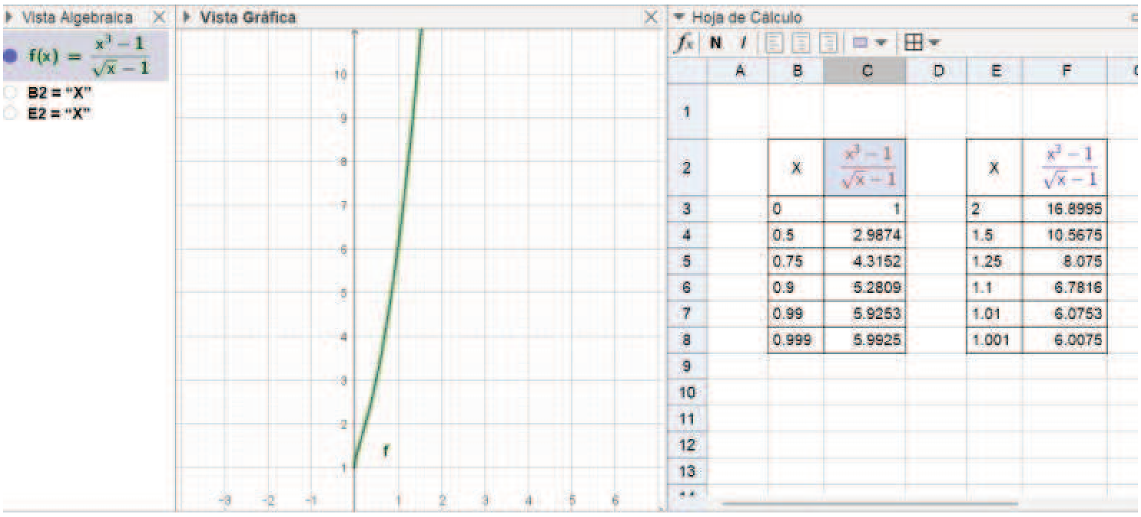



**Imagen 25. Vistas algebraica y gráfica y Hoja de Cálculo (GeoGebra 5.0) para $f(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$**

A partir de la **Vista gráfica** puede determinarse rápidamente que el límite planteado es 6, ya que se muestra una curva continua en $x = 1$, aunque no lo es. El uso de la **Hoja de cálculo** permite hacer evaluaciones que refuerzan esta conjetura.

- **Con GeoGebra Suite**

En la **Vista gráfica** de esta versión se puede identificar que sucede algo particular en $x = 1$ o en las proximidades de este valor, dado que muestra un señalamiento especial (ver

Imagen 26). Además, en la **Vista algebraica** puede calcularse el límite directamente (al igual que en GeoGebra 5.0).

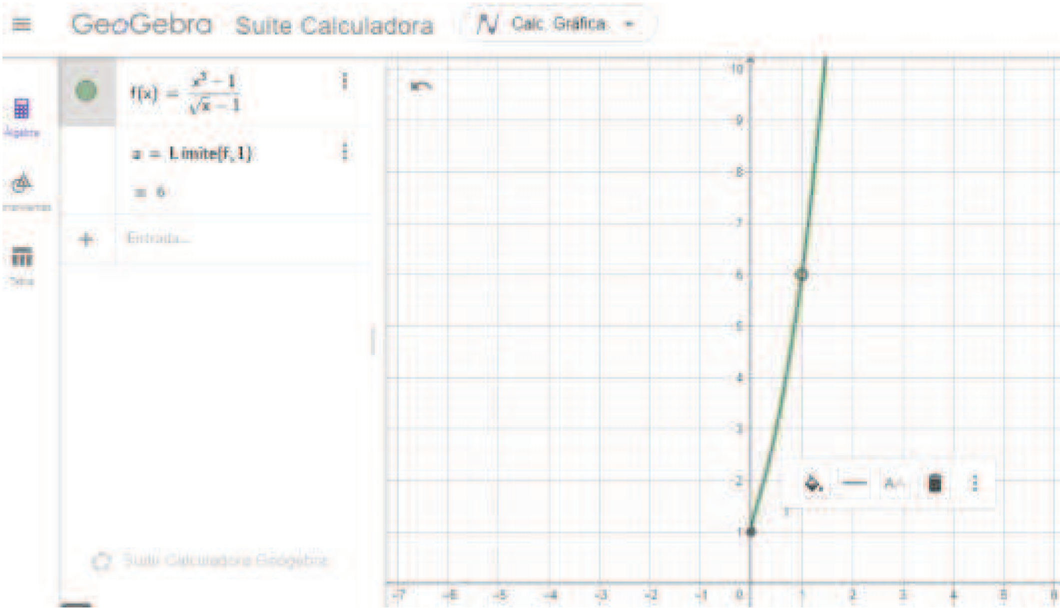



**Imagen 26. Vista algebraica y gráfica de GeoGebra Suite para $f(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$**

*Inciso b)*

Los abordajes más factibles (por lo propuesto en la parte *a)*) son con el uso de la **Hoja de Cálculo** o **Vista Gráfica**.

- **Con GeoGebra 5.0**

Quien resuelve a partir de lo observado para la diferencia $6 - \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$ en la **Hoja de cálculo** (ver Imagen 27), podría plantear que:

- Si $x < 1$, se observa que cuando $x = 0{,}99$ la distancia entre 6 y $f(x)$ es menor que 0,5. Lo mismo sucede para $x = 0{,}999$.
- Si $x > 1$, se observa que cuando $x = 1{,}01$ la distancia entre 6 y $f(x)$ es menor que 0,5. Lo mismo sucede para $x = 1{,}001$.

| x | $\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$ | $6-\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$ | sirve |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 | no |
| 0.5 | 2.9874 | 3.0126 | no |
| 0.75 | 4.3152 | 1.6848 | no |
| 0.9 | 5.2809 | 0.7191 | no |
| 0.99 | 5.9253 | 0.0747 | si |
| 0.999 | 5.9925 | 0.0075 | si |

| x | $\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$ | $6-\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$ | sirve |
|---|---|---|---|
| 2 | 16.8995 | -10.8995 | no |
| 1.5 | 10.5675 | -4.5675 | no |
| 1.25 | 8.075 | -2.075 | no |
| 1.1 | 6.7816 | -0.7816 | no |
| 1.01 | 6.0753 | -0.0753 | si |
| 1.001 | 6.0075 | -0.0075 | si |

**Imagen 27. Vista de Hoja de cálculo con las diferencias $6 - \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$**

Como $1 - 0{,}99 = 0{,}01$ y $1 - 1{,}01 = -0{,}01$ podría asegurarse que para $x$ que disten del 1 menos de 0,01 se cumple que $f(x)$ dista del valor del límite menos que 0,5 unidades. Aunque probablemente haya otros $x$ que disten más que 0,01 de 1 para los cuales también se cumple esta condición. Se podría seguir explorando.

Una posibilidad es mirar qué $x$ satisfacen la desigualdad,

$$\left|\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} - 6\right| < 0{,}5 \quad \text{o bien} \quad 5{,}5 < \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} < 6{,}5.$$

El software no resuelve estas desigualdades directamente. Pero es posible hallar una solución en forma aproximada dentro del RRG. Ingresando las funciones $g(x) = \left|\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} - 6\right|$ y $h(x) = 0{,}5$ se obtiene un gráfico como el de la Imagen 28 (consideramos un redondeo a 10 cifras decimales).

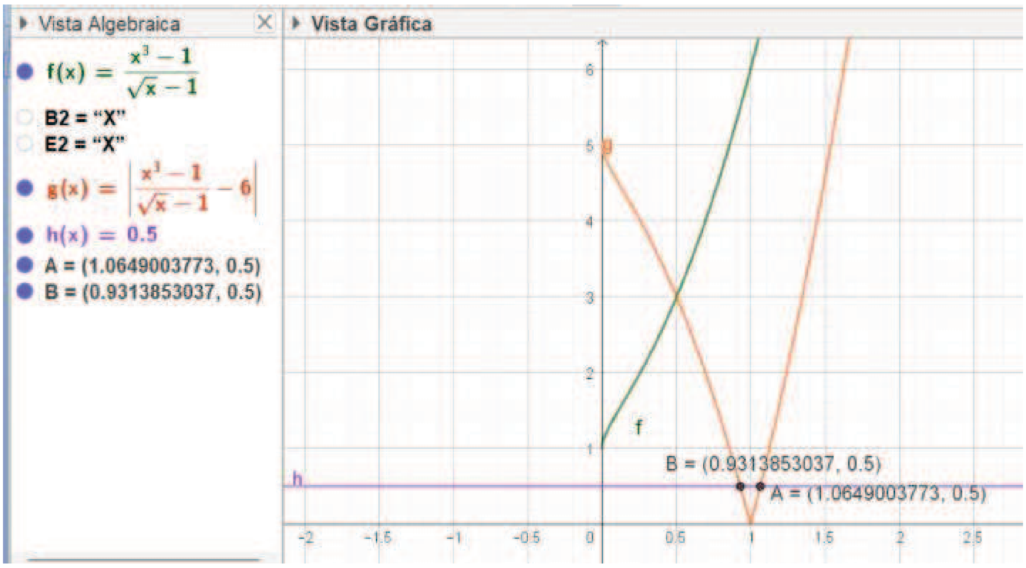



**Imagen 28. Vista Algebraica y Gráfica de GeoGebra 5.0 para $g$ y $h$**

A partir de observar las abscisas de los puntos de intersección entre las gráficas de $g$ y $h$ es posible encontrar una aproximación a la respuesta. Como

$$1 - 0{,}9313853037 = 0{,}0686146963$$

$$1 - 1{,}649003773 = -0{,}0649003773$$

se puede asegurar que para $x$ que se mantienen de 1 a una distancia menor que 0,064 unidades se satisface $\left|\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} - 6\right| < 0{,}5$; aunque se sabe que hay mas $x$ que también lo satisfacen.

Otra forma de abordar el problema desde la **Vista Gráfica** y arribar a conclusiones similares a las antes expuestas es mediante la construcción que presentamos en la Imagen 29. Allí se trazan las rectas $y = 5{,}5$ e $y = 6{,}5$, se determinan los puntos de intersección de éstas con la gráfica de $f$. Luego se construyen las rectas perpendiculares al eje $x$ que pasan por dichos puntos y se obtienen las distancias entre ellas y la recta $x = 1$.

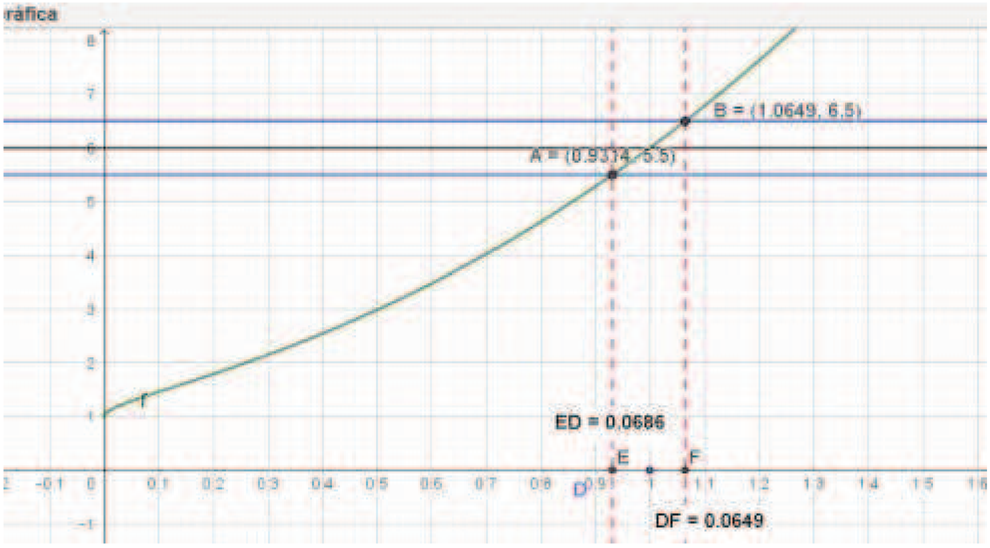



**Imagen 29. Vista Gráfica de GeoGebra 5.0 con gráfica de $f$ y rectas auxiliares**

### 3) Momento de conclusiones parciales

La consigna solicita el trabajo dentro de los RRN y RRG mediante el uso de software.

En la parte a), la exploración se ve reducida, dado que el valor del límite es fácil de identificar mediante la vista gráfica en GeoGebra (en sus dos versiones). En cambio, la parte b) permite la exploración y la argumentación desde distintos registros de representación (no impuestos), dado que la respuesta no es inmediata. El software no resuelve directamente, pero es necesario su uso para poder construir una respuesta.

El uso del software se impone, pero si no se impusiera, el/la estudiante tendería a utilizarlo, pues no es sencillo identificar cómo graficar la función. Graficar usando una tabla de valores sería limitado y generaría incertidumbre. En el inciso a) es necesario el uso del software para las evidencias gráficas (RRG), no así para las evidencias numéricas (RRN). En el inciso b) el uso es imprescindible, ya que el establecimiento de relaciones entre las distancias es limitado en una resolución con lápiz y papel.

Si bien GeoGebra trabaja con aproximaciones racionales, un abordaje en paralelo en los RRN, RRG y RRA puede aportar mejores aproximaciones a la posible respuesta, ya que permite evaluar más rápido en muchos puntos y disminuir el margen de error. Facilita también la comprensión de la implicación entre distancias, subyacente en la definición métrica de límite, pues trazando rectas paralelas a los ejes coordenados en los puntos de interés se pueden establecer relaciones de implicación entre las distancias de $x$ a $1$ y de $f(x)$ a $6$.

Entendemos que con b) se pretende la construcción de las relaciones involucradas en la definición métrica de límite: “la distancia entre $f(x)$ y $6$ se hace menor que $0{,}5$ siempre que $x$ tenga una cierta proximidad a $1$”. La enunciación es interesante, necesariamente implica exploración y construcción de argumentos para dar respuesta, que pueden darse desde o entre los RRN, RRG, RRV y RRA. Sin embargo consideramos que la función involucrada en la consigna no es la más adecuada si se pretende el hallazgo de una implicación entre desigualdades con valor absoluto para introducir la definición métrica. El trabajo algebraico es muy complejo y no inmediato, lo cual obstruiría tal objetivo. Presentamos en el 0 una consigna que recupera estas ideas y que intenta subsanar las cuestiones señaladas.

Por todo lo señalado es una TPCC y con posibilidades de ser una TPM. El PM es rico por las posibilidades de exploración y argumentación que habilita, contemplando diferentes registros de representación, tratamiento y conversión entre ellos. Además valoramos como positiva la pertinencia y significatividad del uso de TD (a pesar de ser impuesto su uso), dado que es imprescindible su uso para resolver (CPS B) y no se pierde de vista el estudio de "algo" matemático (CPS C), sumado a que favorece la búsqueda de pruebas y estrategias de resolución (CPS A). Sin embargo, el PM podría fortalecerse si se considerase otra función que posibilite además la resolución algebraica para justificar lo solicitado.

## 6.3. RESULTADOS DERIVADOS DEL ANÁLISIS DE LAS CONSIGNAS

A partir del estudio llevado a cabo sobre las consignas seleccionadas, hemos identificado ciertos resultados relevantes que se presentan en subapartados específicos.

- Resumen del análisis de las consignas.
- Observaciones particulares destacadas.
- Puntos focales para el diseño de consignas introductorias en la enseñanza del límite puntual y su definición métrica.
- Criterios para valorar la fertilidad de consignas sobre límite puntual con disponibilidad de GeoGebra en la resolución.

### 6.3.1. Resumen del análisis de las consignas

En la Tabla 25 exponemos un resumen de los análisis presentados en el apartado 6.2. En dicha tabla brindamos información detallada acerca de cada consigna, incluyendo su PM y el tipo de tarea, de acuerdo a la demanda cognitiva. Además, mencionamos razones por las que puede modificarse el enunciado y los aspectos en los que se enriquecería la consigna con dicha modificación.

Consideramos cuatro razones (numeradas de A a D) por las que podrían modificarse los enunciados de las consignas estudiadas:

A) Evitar direccionar los procedimientos y respuestas.

B) Solicitar comunicación o justificación de los procesos realizados o afirmaciones hechas.

C) Hacer imprescindible el uso de GeoGebra

D) Extender el alcance del estudio, ampliando a más casos, intervalos, números, funciones, registros, etc.

Establecimos aspectos que podrían enriquecerse realizando una o varias de las modificaciones señaladas anteriormente. Dichos aspectos son:

I) La exploración.

II) La utilización de diferentes registros de representación para abordar la problemática.

III) La argumentación y el razonamiento justificado.

IV) La consideración de aspectos fundamentales de la definición.

V) La demanda cognitiva requerida.

VI) El establecimiento de conexiones con contextos reales.

| **Consigna N°** | **Plantea abordaje** (Con o Sin Software) | **PM** | | | **Tipo de Tarea** | **Modificando el enunciado para** [a] | **Se enriquece**[b] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Pobre** | **Intermedio** | **Rico** | | | |
| 1 | SS | X | | | TM | B | III y IV |
| 2 | SS | X | | | TM | B | III y IV |
| 3 | SS | | X | | TPCC | B y C | I, II y III |
| 4 | SS | | X | | TPCC | B | IV |
| 5 | SS | | X | | TPCC/TPM | B y C | I, II, III y IV |
| 6 | CS | X | | | TPSC/TPCC | A y D | I, II, III, IV y V |
| 7 | SS | | X | | TPCC | B y D | I, III, IV y V |
| 8 | SS | | X | | TPCC | B | III y IV |
| 9 | SS | | X | | TPCC | B | III y IV |
| 10 | SS | | X | | TPSC/TPCC | B | I, II, III, IV y V |
| 11 | SS | | | X | TPM | ------- | ------- |
| 12 | SS | X | | | TPSC | A, B y C | I, III, V y VI |
| 13 | SS | X | | | TPSC | A, B, C y D | I, III, V y VI |
| 14 | CS | | X | | TPSC/TPCC | C y D | I y V |
| 15 | SS | | | X | TPM | ------- | ------- |
| 16 | SS | X | | | TPSC | A, B y D | I, II, III y V |
| 17 | SS | X | | | TPSC | A, B y D | I, II, III y V |
| 18 | CS | | | X | TPCC | D | II, III y IV |

**Notas**
[a]
A: Evitar direccionar los procedimientos y respuestas.
B: Solicitar comunicación o justificación de los procesos realizados o afirmaciones hechas.
C: Hacer imprescindible el uso de GeoGebra

D: Extender el alcance del estudio, ampliando a más casos, intervalos, números, funciones, registros, etc.

b

I: La exploración.
II: La utilización de diferentes registros de representación para abordar la problemática
III: La argumentación y el razonamiento justificado.
IV: La consideración de aspectos fundamentales de la definición.
V: La demanda cognitiva requerida.
VI: El establecimiento de conexiones con contextos reales.

**Tabla 25. Resumen del análisis de consignas realizado en 6.2**

En este resumen se observan algunas tendencias que relacionan el nivel de PM y el tipo de tarea de acuerdo a la demanda cognitiva (con algunas excepciones), cuestión que recuperamos en el CAPÍTULO 8. Los colores de las filas de la Tabla refieren al nivel de PM.

Además, se visibiliza que realizando modificaciones en los enunciados de las consignas con PM pobre o intermedio podrían enriquecerse varios aspectos que las transformarían en otras con mayor nivel de PM y de demanda cognitiva, por ende "más fértiles".

### 6.3.2. Observaciones particulares destacadas

En las encuestas realizadas las **consignas 1 y 2** fueron señaladas como importantes por muchas/os estudiantes, y fueron varias las razones de dicha importancia: T1, T3, T5 y T7.

Consideramos que si las consignas mencionadas lograron habilitar todo lo señalado por las/los encuestados, es probable que hayan estado respaldadas por una gestión de clase que fomentó la comunicación de argumentos y la discusión en torno a los mismos. Esta afirmación se basa en nuestro análisis, el cual indica que dichas consignas son TM y presentan un nivel de PM pobre.

Basándonos en lo expuesto, podemos afirmar lo siguiente:

a) El hecho que las y los estudiantes opten por abordar ejercicios que incorporan representaciones gráficas de funciones y los valoren como relevantes (aunque esta conclusión no sea una deducción directa de nuestro análisis) sugiere la posibilidad de que la formulación de consignas desde un RRG contribuya sustancialmente a la claridad en la comprensión de los requisitos y al fomento de una comprensión intuitiva del concepto de límite puntual.
b) Para una primera aproximación al concepto, es fundamental considerar consignas que incluyan representaciones gráficas de funciones. Sin embargo, además de esto, resulta crucial la inclusión de interrogantes en las consignas que fomenten el surgimiento de las ideas que las y los estudiantes señalan en relación con el concepto y su tratamiento en ese

registro de representación, así como la posibilidad de realizar conversiones a otros registros.

c) En la construcción del concepto, no sólo es importante analizar en qué casos el límite puntual existe como un valor finito, sino también en qué casos no existe y por qué motivo. Este enfoque favorece la comprensión de la definición informal del concepto.

Lo que señalamos en el inciso c) anterior también es mencionado en los análisis de las **consignas 3 y 4**.

Además, durante el análisis de varias consignas (como las **3**, **5**, **6**, **17**) que se proponían resolver sin el uso de software, vimos cómo la resolución con GeoGebra podría enriquecer la construcción del concepto de límite a través de diferentes registros de representación y las transformaciones entre ellos. El uso de GeoGebra también permite ampliar el rango de estudio, es decir, analizar la existencia del límite para la variable independiente tendiendo a cualquier número real, no limitándose únicamente a un valor propuesto. Esta aplicación proporciona una oportunidad para explorar casos más amplios y abarcar un espectro más completo de escenarios en la comprensión del concepto de límite.

También en algunos casos, como el de la **consigna 14**, donde se sugiere el uso de software para un inciso en particular, el uso de GeoGebra empobrece el PM de la consigna si se utiliza en los incisos para los que no se indica explícitamente. Al indicar el uso de un software en uno de los incisos se supone que el estudiantado tendrá acceso a él, por lo que sería beneficioso extender su uso a los restantes, lo cual requeriría una reformulación del enunciado. En cambio, en la **consigna 18**, el uso del software se vuelve indispensable para resolverla y, además, enriquece las posibilidades de exploración y argumentación, es decir, su nivel de PM se ve mejorado.

Hay consignas (como **la 12 y la 13**), que pretenden establecer conexiones entre el concepto de límite puntual y problemas reales que aluden a la velocidad instantánea y la rapidez, y al mismo tiempo que se exploren las interpretaciones geométricas de estos conceptos físicos. En el estudio se justifica la pobreza del PM de las mismas.

Las **consignas 8, 9 y 10** aluden a aspectos de la definición métrica de límite e incorporan el uso de la notación correspondiente. Consideramos que las tres tienen un PM intermedio, pero mostramos que las dos primeras tienen un PM más rico más en comparación con la última, donde se solicita realizar una demostración $\epsilon - \delta$. La 8 y 9 se distinguen por requerir una interpretación gráfica de las dependencias de $\epsilon$ y $\delta$ y requieren mayor exploración y análisis para poder dar una respuesta. Las **consigna 11 y 18** también buscan que el/la estudiante establezca conexiones que ayudan a la interpretación de la definición métrica de límite y tienen un PM rico.

La **consigna 15**, a pesar de parecer muy simple a primera vista debido a su enunciado preciso, consideramos que posee un PM rico. Esto se debe a las amplias oportunidades que brinda para la exploración y la argumentación. Aunque la apariencia inicial pueda ser engañosa, esta consigna permite a las y los estudiantes indagar más a fondo y desarrollar razonamientos sólidos en su resolución.

### 6.3.3. Puntos focales para el diseño o selección de consignas introductorias en la enseñanza del límite puntual y su definición métrica

A lo largo del proceso de estudio, hemos identificado una serie de elementos fundamentales que deben ser considerados al diseñar o seleccionar consignas destinadas a enseñar este tema. Estos elementos, a los que hemos denominado puntos focales, son:

- Fomentar la exploración y la argumentación. Es esencial priorizar la estimulación de la exploración activa y la argumentación entre las y los estudiantes.
- Claridad sobre el aspecto del concepto de límite que se desea abordar. Resulta imperativo contar con una comprensión nítida respecto al aspecto particular del concepto de límite que se busca fomentar en términos de pensamiento y reflexión, con el propósito de facilitar su construcción.
- Neutralidad del uso de software en la resolución. Las consignas que no han sido concebidas específicamente para ser resueltas con la utilización de software no deberían verse perjudicadas en términos de su nivel de PM y demanda cognitiva si se recurre al uso de un software de uso cotidiano de las y los estudiantes.
- Variedad de registros de representación. Es esencial que las consignas permitan la incorporación y utilización de múltiples registros de representación, dado que esta diversidad contribuye significativamente a una mayor comprensión del concepto.
- Conexión con el concepto y producción de conocimiento. Es recomendable que las consignas involucren alguna conexión con el concepto en cuestión o den lugar a la producción de "algo matemático" para la generación de conocimiento nuevo.

Estos puntos focales se erigen como directrices esenciales en la formulación de consignas fértiles para la enseñanza y el aprendizaje del tema en estudio.

### 6.3.4. Criterios para valorar la fertilidad de consignas sobre límite puntual con disponibilidad de GeoGebra en la resolución

En función del análisis (6.2) y de los resultados presentados hasta el momento elaboramos criterios para establecer las razones que hacen a la fertilidad de consignas como las estudiadas.

*Una consigna sobre límite puntual con disponibilidad de GeoGebra para ser resuelta es fértil si:*

- Criterio 1. *Habilita la exploración y la argumentación en las y los estudiantes*. Es decir, no debe indicar los pasos, caminos o procedimientos a seguir en la resolución y debe solicitar (implícita o explícitamente) la elaboración y comunicación de resultados relacionando el lenguaje común y el matemático.

  Entendemos que una consigna habilita posibilidades de:

  - *Exploración,* si permite que se examine y analice la situación problemática planteada desde diferentes caminos de resolución y diferentes registros de representación semiótica. Y así, poder reconocer y registrar patrones, establecer conjeturas fundadas en lo realizado. Es decir, dar lugar a quien resuelve de reconocer diferentes propiedades o características de un objeto matemático desconocido o poco conocido desde sus saberes, estrategias y procedimientos disponibles.
  - *Argumentación,* si requiere la exposición de ideas o razonamientos para fundamentar un procedimiento matemático utilizado, una conjetura deducida o un resultado hallado. Un argumento (escrito u oral) en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático es un conjunto de aseveraciones que plantean una relación coherente entre lo que se piensa, se hipotetiza o conjetura y se muestra en la resolución de la consigna planteada. En este sentido, la realización de una demostración no implica necesariamente un acto de argumentación, todo dependerá de las características del trabajo matemático que se ponga en juego y de las aseveraciones que se expliciten.

- Criterio 2. *Tiene por objetivo enseñar alguna idea clara sobre límite* en relación a, por ejemplo: el dominio de la función involucrada, la suficiencia de las aproximaciones, las aproximaciones vinculadas, el significado del signo "=" en la notación, un procedimiento para resolver, la vinculación entre los hallazgos en distintos registros de representación.
- Criterio 3. *No se ven disminuidas las posibilidades de exploración y argumentación y la construcción de ideas sobre el concepto cuando se usa GeoGebra en la resolución*. Esto no implica necesariamente que las consignas deban resolverse exclusivamente mediante el empleo del software. Sin embargo, es fundamental evitar la situación en la cual, si un/a

estudiante opta por utilizar el software, este facilite por completo el proceso de resolución, brindándole respuestas que le permitan completar la actividad exitosamente sin requerir la construcción de un entendimiento sólido del concepto en cuestión. En síntesis planteamos que, el uso de GeoGebra no debe obstruir el cumplimiento de los dos primeros criterios.

- Criterio 4. *Habilita del uso de múltiples registros de representación*, dado que el uso de distintos registros contribuye a mejorar la comprensión del concepto. Esto no implica que la resolución deba obligatoriamente incorporar todos los tipos de registros de representación semiótica disponibles. Sin embargo, se espera que, en la medida de lo posible, se recurra a más de un registro. Depender exclusivamente de un único registro de representación podría ser insuficiente para garantizar certeza en la respuesta proporcionada.
- Criterio 5. *Exige un considerable esfuerzo cognitivo*. Resulta pertinente que la resolución de la consigna exhiba una demanda cognitiva significativa, evitando la mera aplicación superficial de procedimientos generales y, en su lugar, requiriendo un enfoque de pensamiento no algorítmico. Esto se debe a que la ruta de resolución no se presente completamente predecible. Es esencial que exija la habilidad de establecer conexiones intrínsecas entre distintos procedimientos, resultados y el concepto de límite, así como la capacidad de generar nuevas perspectivas de conocimiento. Adicionalmente, se busca que fomente el pensamiento crítico y la reflexión, particularmente en términos de las limitaciones inherentes a determinados procedimientos al momento de afirmar o negar la existencia de un límite. En última instancia, el propósito fundamental radica en promover una comprensión profunda del concepto de límite y su definición.

# CAPÍTULO 7

# REFORMULACIÓN Y PRODUCCIÓN DE CONSIGNAS

Este capítulo cuenta con dos apartados importantes. En el 7.1 presentamos la reformulación de algunas de las consignas analizadas en el apartado 6.2, basándonos en los resultados expuestos en el apartado 6.3. Estas reformulaciones se ofrecen como ejemplos ilustrativos. En el 7.2 presentamos "nuevas consignas" fértiles especialmente diseñadas para abordar la construcción de la definición métrica de límite puntual.

## 7.1. REFORMULACIÓN DE ALGUNAS CONSIGNAS ANALIZADAS

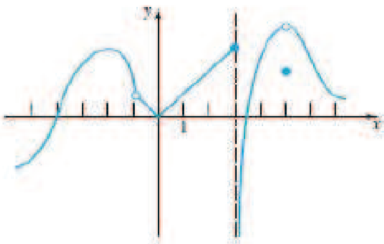
En este apartado, presentamos la reformulación de seis consignas (2, 6, 8, 12, 14 y 17) de las expuestas previamente en el apartado 6.2. El propósito de esta reformulación es enriquecer su fertilidad, teniendo en cuenta el análisis individual realizado para cada una de ellas, así como los resultados generales expuestos en el apartado 6.3.

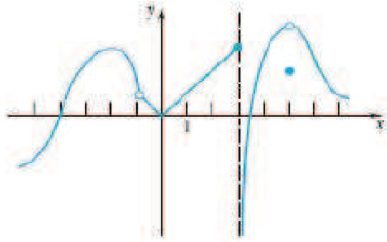
La selección de estas seis consignas se basa en su capacidad ejemplificadora de las consideraciones señaladas en el apartado 6.3.1. Esta sección trata sobre las razones que pueden motivar la modificación de los enunciados de las consignas estudiadas y los aspectos que podrían enriquecerse a través de dichas modificaciones. Para evitar redundancias en el texto, es recomendable consultar la Tabla 25 mientras se lee la nueva versión de cada consigna.

Es importante tener en cuenta que las reformulaciones presentadas no son las únicas posibles ni necesariamente las mejores maneras de modificar las consignas. Se trata de propuestas que, en nuestra opinión, contribuyen a enriquecer diversos aspectos, aumentando así el PM y las exigencias cognitivas que demandan para su resolución; por ende, su fertilidad.

Por lo anteriormente expuesto, es fundamental comprender que estos aportes del trabajo de investigación no son definitivos. No obstante, consideramos que pueden resultar útiles tanto para docentes como para investigadores/as que se interesen por el tema.

<table>
<tr><th>Consigna 2</th><th>Consigna reformulada</th></tr>
<tr><td>Indicar los valores de $c$ para los cuales $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.


</td><td>Si la gráfica de $f$ es la de la imagen y $c$ cualquier número real, ¿existe el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $c$? Explicar las razones por las que puede asegurar lo que se concluye para cada $c$.

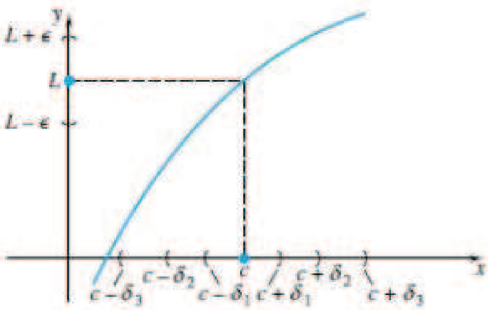

</td></tr>
</table>

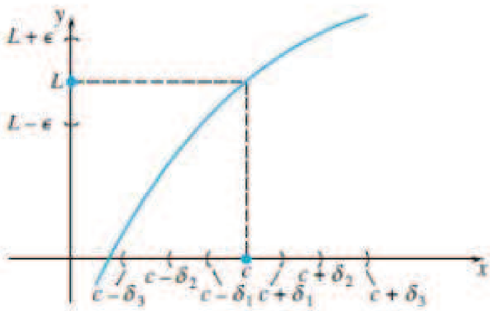
<table>
<tr><th>Consigna 6</th><th>Consigna reformulada</th></tr>
<tr><td>Crear una tabla de valores para estimar $\lim_{x\to c} f(x)$. A continuación utilizar un programa gráfico para ampliar la gráfica cerca de $x = c$ para justificar la estimación o para mejorarla.<br>Estimar

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \qquad \text{(medidos en radianes)}$$

después de calcular el cociente en $x = \pm 1$, $x = \pm 0,1$, $x = \pm 0,01$, $x = \pm 0,001$.</td><td>Sea la función definida por $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$. Si $c$ es cualquier número real, ¿existe el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $c$? Explicar los procedimientos utilizados para asegurar lo que se concluye para cada $c$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Consigna 8</th><th>Consigna reformulada</th></tr>
<tr><td>¿Cuál de los $\delta$ presentados en la figura "funciona" con el $\epsilon$ dado?


</td><td>Se sabe que $\lim_{x\to c} f(x) = L$. Considerando la figura, explicar cuál/es de los $\delta$ presentados "funciona" con el $\epsilon$ dado. Comentar qué otros $\delta$ podrían "funcionar" y por qué.


</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Consigna 12</th><th>Consigna reformulada</th></tr>
<tr>
<td>Un tanque contiene 1000 galones de agua que se descargan del fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen $V$ de agua restante en el tanque (en galones) después de $t$ minutos.<br><br>
<table>
<tr><td>$t$(min)</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td></tr>
<tr><td>$V$(gal)</td><td>694</td><td>444</td><td>250</td><td>111</td><td>28</td><td>0</td></tr>
</table><br>
(a) Si $P$ es el punto $(15, 250)$ en la gráfica de $V$, encuentre las pendientes de las rectas secantes $PQ$ cuando $Q$ es el punto en la gráfica con $t = 5, 10, 20, 25$ y $30$.<br><br>
(b) Estime la pendiente de la recta tangente en $P$ al promediar las pendientes de las dos rectas secantes.<br><br>
(c) Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en $P$. (Esta pendiente representa la rapidez a la que el agua sale del tanque después de 15 minutos.)</td>
<td>Un tanque contiene 1000 galones de agua que se descargan del fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen $V$ de agua restante en el tanque (en galones) después de $t$ minutos.<br><br>
<table>
<tr><td>$t$(min)</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td></tr>
<tr><td>$V$(gal)</td><td>694</td><td>444</td><td>250</td><td>111</td><td>28</td><td>0</td></tr>
</table><br>
(a) Estime la velocidad aproximada con la que está disminuyendo el volumen de agua en el tanque a los 15 minutos. Explique qué tuvo en cuenta para estimar.<br><br>
(b) Analice si existe una función que permita: modelizar la situación y determinar de manera aproximada la velocidad en cada instante de tiempo durante el período de descarga.<br><br>
(c) Explique con sus palabras lo que sucede durante la descarga en función de las velocidades instantáneas.</td>
</tr>
</table>

| Consigna 14 | Consigna reformulada |
|---|---|
| El punto $P(1,0)$ se encuentra en la curva $y = \text{sen}(\frac{10\pi}{x})$.<br><br>(a) Si $Q$ es el punto $(x, \text{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante $PQ$ (correcta a cuatro lugares decimales) para $x = 2; 1,5; 1,4; 1,3; 1,2; 1,1; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$ y $0,9$. ¿Las pendientes parecen aproximarse a un límite?<br><br>(b) Use la gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso (a) no están cerca de la pendiente de la recta tangente en $P$.<br><br>(c) Al escoger rectas secantes apropiadas, calcule la pendiente de la recta tangente. | El punto $P(1,0)$ se encuentra en la curva $y = \text{sen}(\frac{10\pi}{x})$.<br><br>(a) Si $Q$ es el punto $(x, \text{sen}(10\pi/x))$, encuentre las pendientes de las rectas secantes $PQ$ considerando puntos $Q$ próximos a $P$. ¿Esas pendientes parecen aproximarse al de la pendiente de la recta tangente? Justifique.<br><br>(b) Explique qué condiciones propondría para los puntos $Q$ de manera que usando la pendiente de dos rectas secantes se pueda llegar a una buena estimación de la pendiente de la recta tangente en $P$. |

| Consigna 17 | Consigna reformulada |
|---|---|
| Intuya el valor del límite (si existe) al evaluar la función en los números dados (correcto a seis lugares decimales).<br><br>$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,<br><br>$x = 0; -0,5; -0,9; -0,95; -0,99; -0,999; -2; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$ | Para cualquier número real $a$, analice la existencia de<br><br>$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,<br><br>y explique las razones por las que arriba a esas conclusiones. |

## 7.2. PROPUESTA DE CONSIGNAS FÉRTILES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA DEFINICIÓN MÉTRICA DE LÍMITE PUNTUAL

A partir del exhaustivo análisis de las consignas 8, 9, 10, 11 y 18, surgió la necesidad de diseñar consignas fértiles que aborden de manera efectiva la construcción de la definición métrica de límite y su no satisfacción en casos donde el límite puntual no existe.

En respuesta a esta necesidad, redactamos dos consignas (I y II) con PM rico y un alto nivel de exigencia cognitiva para quienes las resuelvan, específicamente TPM. Aunque estas consignas pueden parecer direccionadas, superan ampliamente las prácticas áulicas tradicionales, que se limitan a presentar la definición, explicarla desde el RRG y RRA y practicar los procedimientos para encontrar un δ dado un ε.

Al diseñarlas, consideramos las observaciones particulares del apartado 6.3.2, sobre las consignas que abordan cuestiones relacionadas con la definición métrica. También tuvimos en cuenta los criterios expresados en el apartado 6.3.4.

Cabe mencionar que estas consignas fueron readaptadas en un par de oportunidades en función de pruebas pilotos realizadas en clases de Calculo I. No exponemos esta descripción porque excede los objetivos de la tesis, pero serán motivo de estudio en la continuidad de esta investigación.

**Consigna I. Para construir la definición métrica**

**(1)** Calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$, siendo $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$.

[a] ¿Cuán cerca de 2 tienen que estar los valores de $x$ (en el eje $x$) para garantizar que **todas las imagenes** de $f$ estén a distancia menor que 1 de $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$?

[b] ¿Cuán cerca de 2 tienen que estar los valores de $x$ (en el eje $x$) para garantizar que **todas las imagenes** de $f$ estén a distancia menor que 0,5 de $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$?

**(2)** A partir del estudio realizado en el punto (1)[a] responder:

[a] ¿Para qué conjunto del dominio de la función sucede que $\left| f(x) - \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} \right| < 1$?

[b] Traducir lo analizado anteriormente en una implicación de la forma:
Si $0 < | x-2 | <$ .... entonces $| f(x) - \lim_{x\to 2} f(x) | < 1$

[c] Trabajar con la expresión $| f(x) - \lim_{x\to 2} f(x) |$ para llegar a una expresión que involucre $| x-2 |$ y luego reescribir el punto [b].

**(3)** A partir del estudio realizado en el punto (1)[b] responder:

[a] ¿Para qué conjunto del dominio de la función sucede que $\left| f(x) - \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} \right| < 0,5$?

[b] Traducir lo analizado anteriormente en una implicación de la forma:
Si $0 < | x-2 | <$ .... entonces $| f(x) - \lim_{x\to 2} f(x) | < 0,5$

[c] Trabajar con la expresión $| f(x) - \lim_{x\to 2} f(x) |$ para llegar a una expresión que involucre $| x-2 |$ y luego reescribir el punto [b].

**(4)** Si en lugar de 1 y 0,5 se considera un número $\epsilon > 0$. Encontrar una forma para determinar el número que falta en la siguiente implicación.
Si $0 < | x-2 | <$ .... entonces $| f(x) - \lim_{x\to 2} f(x) | < \epsilon$

**Consigna II. Para analizar que no se satisface la definición métrica en la no existencia de un límite**

Sea $f$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**[a]** Encontrar el intervalo mas grande del dominio de $f$ en el que se satisfaga que:

(i) $\mid f(x) - 1 \mid < 1$.

(ii) $\mid f(x) - 1 \mid < 0,5$

**[b]** ¿Es posible encontrar un intervalo del dominio de la función centrado en 0 para el cual se satisfaga que $\mid f(x) - 1 \mid < 0,2$? Justificar.

**[c]** Traducir lo hallado en el inciso [a] en notación matemática utilizando desigualdades.

**[d]** Realizar un análisis del tipo de intervalos del dominio de $f$ que satisfacen $\mid f(x) - 1 \mid < \epsilon$, para cualquier $\epsilon > 0$.

# CAPÍTULO 8

# EVIDENCIAS, CONCLUSIONES Y CONTINUIDAD

Este capítulo tiene como propósito presentar: corolarios de los resultados obtenidos del análisis de las consignas, las justificaciones del cumplimiento de los objetivos planteados en la investigación, las conclusiones finales, las producciones generadas y las posibles líneas de continuidad del estudio. Lo estructuramos en cuatro apartados principales.

En el apartado 8.1, presentamos los corolarios que surgieron de los resultados obtenidos del análisis de las consignas estudiadas. Estos proporcionan una perspectiva crítica y enriquecedora que da cuenta de una cabal valoración de las mismas en función del marco teórico.

En el apartado 8.2, justificamos el cumplimiento de los objetivos (4.2) que nos propusimos en la investigación. Esto refleja la validez del estudio a partir de un análisis riguroso y sistemático de los datos y las actividades realizadas, permitiendo una comprensión más profunda de la temática abordada.

En el apartado 8.3, exponemos las conclusiones finales sintetizando los aportes centrales de la investigación.

Por último, en el apartado 8.4, damos cuenta de las producciones que surgieron durante el proceso de investigación y señalamos las posibles líneas de continuidad que podrían ser exploradas en futuras investigaciones, con el objetivo de profundizar y ampliar los hallazgos y contribuciones de este estudio.

En conjunto, este capítulo brinda una visión integral de las reflexiones, conclusiones y perspectivas de desarrollo que emergieron a lo largo de la investigación, aportando así al campo de conocimiento correspondiente.

## 8.1. COROLARIOS DE LOS RESULTADOS

Los resultados derivados del análisis de las consignas (expuestos en el CAPÍTULO 6) han propiciado discusiones de carácter teórico-didáctico que decantaron en el establecimiento de corolarios de nuestro estudio. Los presentamos a continuación.

- Identificamos algunas regularidades, tendencias y anomalías[13] a partir del estudio de la Tabla 25 y ampliamos las justificaciones con la revisión del análisis de algunas consignas.
  - ✓ En términos generales, las consignas con un PM pobre tienden a demandar un esfuerzo cognitivo limitado de quien resuelve, implican TM y TPSC. Concluimos que para elevar la calidad de estas consignas, es necesario, como mínimo, reformular sus enunciados para que requieran explicación o justificación de los procesos seguidos o afirmaciones realizadas. No obstante, hacemos una salvedad para la consigna 6 (la única dentro del grupo que es propuesta para la resolución CS), ya que presenta algunos rasgos de una TPCC. En busca de su mejora, proponemos modificarla de manera que se evite la orientación específica de los procedimientos y respuestas, y se amplíe el alcance del análisis considerando los límites para cualquier número real. Esta modificación contribuiría a enriquecer el nivel de desafío y profundidad cognitiva de la consigna, promoviendo así una comprensión más completa del concepto.
  - ✓ En general, las consignas con PM intermedio demandan un mayor esfuerzo cognitivo y las asociamos a TPCC y TPM. Similar a lo planteado para las consignas con PM pobre, hemos llegado a la conclusión de que para elevar su calidad, es esencial modificar los enunciados de manera que requieran explicaciones o justificaciones. Sin embargo, observamos excepciones en las consignas 10 y 14, las cuales también podrían ser consideradas TPSC. La consigna 10, solicita una demostración usando la definición métrica y la consigna 14 es propuesta para resolver CS. Proponemos enfoques distintos para su mejora. Específicamente, planteamos ajustes diferentes que aborden sus particularidades.
  - ✓ En lo que respecta a las tres consignas con PM rico, identificamos que se caracterizan por representar una alta exigencia cognitiva. Específicamente, categorizamos las dos consignas destinadas a la resolución SS como TPM, mientras que la consigna destinada a la resolución CS la hemos clasificado como TPCC.

Condensamos las observaciones previamente expuestas en la Imagen 30. En ella es posible visualizar las tendencias identificadas, así como las excepciones señaladas. Asimismo, se pone en evidencia que la regularidad que hemos detectado se centra en las tres consignas propuestas para ser resueltas CS, las cuales presentan variaciones en la demanda cognitiva en comparación con las consignas de su grupo respectivo. Estas diferencias pueden manifestarse en un nivel de demanda cognitiva mayor o menor en

[13] Anomalía: cambio, desviación o discrepancia respecto de lo que es normal, regular, natural o previsible.

relación con otras consignas del mismo nivel de PM.

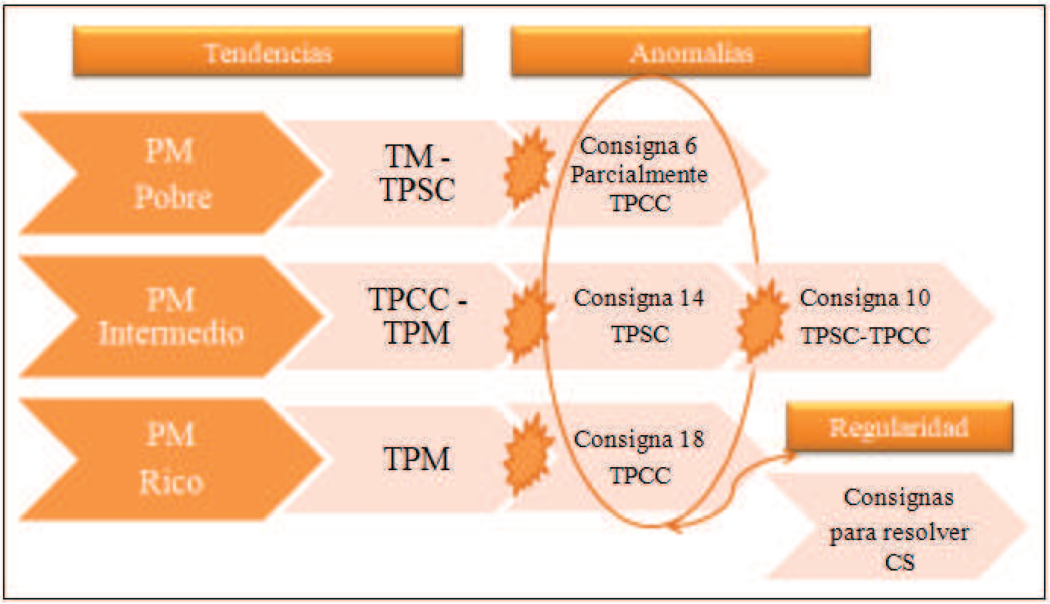



**Imagen 30. Tendencias, anomalías y regularidades en los resultados**

- El planteamiento anterior nos condujo a cuestionarnos: ¿es el empleo del software en la resolución un factor importante que altera el tipo de demanda cognitiva? En respuesta a este interrogante, consideramos que, si bien la disponibilidad o ausencia de software puede habilitar o limitar ciertos procedimientos, este no es el motivo subyacente de las diferencias en el tipo de demanda cognitiva inducida; dado que consideramos la posibilidad de utilizar GeoGebra para resolver todas las consignas en las que fuese viable. Inferimos que la disparidad en el tipo de demanda cognitiva generada está relacionada con la redacción del enunciado, la orientación en la exploración y la argumentación, así como la imposición de ciertos tratamientos dentro de los RRN y RRG. Estos elementos parecen influir en cómo las y los estudiantes abordarían y desarrollarían su pensamiento, independientemente de si utilizan software o no.
- En la mayoría de las consignas analizadas, observamos que no se solicita explícitamente la presentación de argumentos, y en muchas de ellas las exploraciones están guiadas y se establece una limitación en los registros de representación desde los cuales abordar el problema. Esta característica conlleva implicancias significativas en términos del PM y las demandas cognitivas necesarias para su resolución, y por ende en la fertilidad.
- Particularmente, las consignas que poseen un PM rico (consignas: 11, 15 y 18) tienden a allanar el camino hacia la construcción de la definición métrica o la interpretación de la notación.

- En las encuestas identificamos que varias/os recuperan como importante la consigna 10 que implica demostrar utilizando la definición métrica. En nuestros resultados este es un caso anómalo, dado que la clasificamos con PM intermedio, pudiendo ser considerada en ocasiones una TPSC, en caso de que quien resuelve responda satisfactoriamente imitando una demostración previa detectada, sin reflexionar sobre la relaciones establecidas en la definición métrica. Tal como está redactada no brinda seguridad respecto de que esté propiciando la exploración y la argumentación, a pesar de que demostrar es una forma de argumentar. Así, las discusiones circularon en relación a lo que significa argumentar y si necesariamente la solicitud de una demostración del estilo posibilita la argumentación en el sentido planteado en el marco teórico. Acordamos que el aprendizaje del procedimiento de demostración formal no implica automáticamente la construcción de argumentos en torno a la definición métrica de límite. Esto no significa que las y los estudiantes no deban aprender dichos procedimientos, ya que son fundamentales para el desarrollo de habilidades matemáticas, para comprender la importancia de las demostraciones formales en este ámbito y el uso de las definiciones para tal fin. Esta fue una de las razones por la que resultó imperioso proponer "nuevas consignas" para el tratamiento de la definición métrica.
- El optar por el uso del software GeoGebra para pensar posibles resoluciones de las consignas seleccionadas contribuyó a la uniformidad de los análisis, lo que permitió establecer comparaciones concretas a partir de los resultados obtenidos.

## 8.2. CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS

Valoramos un total de 18 consignas propuestas para la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real, extraídas de dos libros de texto recomendados en la cátedra de Cálculo I de la carrera de Profesorado en Matemática de la FHUC-UNL.

Fue posible realizar un análisis de estas consignas a partir de las teorías que seleccionamos para el estudio y el marco teórico construido. Las actividades y decisiones que fuimos describiendo en las distintas fases de la investigación nos permitieron cumplir con los objetivos específicos planteados.

### 8.2.1. Objetivo: "Establecer criterios de selección de libros y consignas de límite puntual propuestas en ellos"

Para la selección de libros y consignas de los mismos establecimos criterios que expresamos en los apartados 5.1 y 6.1. Estos atendieron diferentes aristas, como ser, el contexto educativo, la mirada del estudiantado y la de las investigadoras en función de los hallazgos a partir de las actividades de investigación llevadas a cabo (encuesta y análisis general de libros). Esto da validez y confiabilidad a nuestra investigación, dado que las consignas no fueron seleccionadas al azar o por conveniencia, sino bajo la utilización de dichos criterios.

### 8.2.2. Objetivo: "Determinar indicadores para valorar la fertilidad de las consignas"

Los primeros bosquejos del marco teórico en conjunto con los análisis incipientes de algunas consignas nos permitieron determinar los indicadores para valorarlas (la redacción, las oportunidades de exploración y argumentación que proporcionan a partir de diversas formas de representación semiótica, la complejidad cognitiva exigida al resolver y la influencia ante el uso de un software como GeoGebra). Surgió así el concepto de "fertilidad de consignas matemáticas" que expusimos en el marco teórico presentado. Dichos indicadores (4.4.2.1.1) no fueron excluyentes, sino que se complementaron para el análisis integral de cada consigna y fueron claves para el diseño del instrumento "Grillas de escaneo".

### 8.2.3. Objetivo: "Identificar aspectos subyacentes al concepto de límite involucrados en las mismas"

Identificamos, a partir del análisis, que las consignas abordan diversos aspectos en relación al $\lim_{x\to c} f(x)$. Los detallamos a continuación.

- Para que el límite exista:
  - ✓ No es necesario que la función esté definida en $c$, pero sí en un intervalo de la forma $(c-p,c) \cup (c,c+p)$ para $p>0$ (consignas: 1, 2, 5, 6, 7, 17).
  - ✓ Las imágenes de la función se aproximan a un valor fijo para valores de la variable independiente suficientemente próximos al valor para el que se calcula el límite (consignas: 1, 5, 6, 7, 15, 16).
  - ✓ Si $c$ pertenece al dominio de la función, es irrelevante el valor $f(c)$ (consignas: 1, 2, 7, 15, 16).
- Para que el límite no exista:
  - ✓ La imágenes de la función no deben aproximarse a un valor fijo (o un único valor fijo) conforme $x$ se aproxima al punto de interés (consignas: 2, 3, 4, 16, 17)
- Cuando el límite existe:

- ✓ El significado del signo “=” en la notación (consigna 15).
- ✓ Establecimiento de relaciones entre $\varepsilon$ y $\delta$, haciendo uso de lo establecido por la definición métrica (consignas: 8, 9, 10).

- Análisis de su existencia a partir de relaciones entre desigualdades con valor absoluto que involucran condiciones del conjunto imagen de una función para $x \in (c - p, c) \cup (c, c + p)$ con $p > 0$ (consigna 11).
- Introducción a la definición métrica desde un razonamiento sobre aproximaciones numéricas (consigna 18).
- Aplicación de concepto en contextos intra y extra matemáticos (consignas: 12, 13, 14).

#### 8.2.4. Objetivo: “Describir la influencia del uso de GeoGebra en la resolución de ellas”

La utilización de GeoGebra para la resolución de las consignas puede aumentar las posibilidades de exploración y de argumentación, como así también el trabajo desde distintos registros de representación. Sin embargo, esto está íntimamente relacionado con lo que propone la consigna. Identificamos casos en los que su uso empobrece el PM y otros en los que lo enriquece. A partir de los resultados obtenidos reconocimos aspectos favorables y no favorables. Los expresamos a continuación.

- GeoGebra se configura como una herramienta de relevancia sustancial en el contexto de este estudio, dado que facilita la exploración integral de las consignas pertinentes a la tesis. Esto se debe a su capacidad para abordarlas desde diversos registros de representación en simultáneo, permitiendo además llevar a cabo el tratamiento y conversiones entre estos registros de manera efectiva. Se ven potenciadas las posibilidades de exploración y argumentación y por ende el PM.
- La utilización de GeoGebra contribuye a la expansión del espectro de investigación viable a partir de una consigna dada. Esto se traduce en la capacidad de analizar la existencia o inexistencia de un límite para la variable independiente cuando tiende hacia cualquier número real. En contraste con la mayoría de las consignas estudiadas, que restringen el estudio del límite para un único valor propuesto, GeoGebra brinda la oportunidad de proponer consignas donde se explore un abanico más amplio de situaciones, lo que a su vez posibilita abarcar una gama más completa de escenarios en la aprehensión del concepto de límite.
- En ciertos casos, como el de la consigna 14, donde se sugiere la utilización de software para abordar una parte específica, la inclusión de GeoGebra empobrece el PM de la

consigna si se emplea en las partes no señaladas explícitamente. Al indicar el empleo de software para una parte, se infiere que las y los estudiantes tendrán acceso a dicha herramienta, por lo que sería provechoso extender su aplicación a las demás partes de la consigna, lo cual requeriría reformular el enunciado. En contraste con lo planteado, en la consigna 18, el uso del software se torna esencial para su resolución, además de enriquecer las oportunidades de exploración y argumentación, elevando así su nivel de PM.

Dentro del marco de nuestra investigación, las y los estudiantes cuentan con el recurso GeoGebra a su disposición. No obstante, según lo observado en el análisis efectuado, su uso no siempre resulta eficaz en el abordaje de las consignas estudiadas. En otras palabras, emplear el software en la resolución de estas consignas en ocasiones disminuye el nivel de PM.

#### 8.2.5. Objetivo: "Proponer algunas consignas fértiles que ofrezcan oportunidades efectivas para la construcción del concepto de límite, teniendo en cuenta su complejidad"

Para poner en práctica nuestros hallazgos y mostrar que es posible contar con consignas fértiles para la enseñanza del tema, reformulamos seis consignas de las estudiadas y formulamos dos nuevas, atendiendo a los resultados expresados en el apartado 6.3. Elaboramos las dos nuevas consignas con el objetivo de introducir la definición métrica de límite puntual, por su importancia en el área análisis matemático y la observación de la insuficiencia de consignas para tal fin.

Las seis consignas reformuladas superan en su nivel de fertilidad a las originales, dado que se ven mejorados la mayoría de los aspectos que refieren a los criterios expresados en el apartado 6.3.4.

Por otro lado, las dos nuevas consignas cumplen en forma parcial o total dichos criterios, por lo que son fértiles dado que tienen un PM rico y requieren alta demanda cognitiva para su resolución. Ofrecen buenas oportunidades de exploración y argumentación desde diversos registros de representación y no se impone el uso del software. Este último resulta necesario para la resolución, permitiendo más transformaciones de registros de representación.

### 8.3. CONCLUSIONES GENERALES

En esta investigación logramos cumplimentar con los objetivos específicos planteados para valorar consignas matemáticas relativas a la enseñanza de límite puntual de funciones reales de variable real. Si bien el estudio estuvo contextualizado a consignas extraídas de libros de texto recomendados por la cátedra de Cálculo I del Profesorado en Matemática de la UNL, hemos llegado a conclusiones que permiten valorar consignas sobre el tema en general.

Con la intencionalidad de valorar las consignas surgió la necesidad de definir "qué valorar". Esto dio origen a el establecimiento de la definición de "fertilidad de una consigna matemática", sustentada en los planteos de distintos referentes de la Educación Matemática como Barreiro y Rodríguez (2014), Barreiro et al. (2016), Smith y Stein (1998) y Stein et al. (2000), Duval (1993, 1998, 1999a, 1999b, 2006, 2016), y las consideraciones particulares construidas y fundamentadas en el marco teórico.

Realizamos un análisis de las consignas seleccionadas de manera rigurosa y sistemática a partir de indicadores que establecimos para la valoración, que nos permitió arribar a resultados contundentes, dando origen a la elaboración de criterios para estudiar la fertilidad de consignas matemáticas sobre el tema con disponibilidad de GeoGebra para ser resueltas.

Cabe aclarar que algunos hallazgos de nuestro estudio son los criterios establecidos para la selección de libros de texto y de consignas (de los mismos) para someter al estudio. Otros aportes son los instrumentos construidos para la recolección de datos y análisis de consignas. Estos dieron transparencia y fiabilidad a nuestro trabajo, y puede ser de utilidad para otras investigaciones del estilo.

Además, de los resultados obtenidos identificamos corolarios (presentados en el apartado 8.1) que vislumbran los cruces de las teorías y conceptos recuperados para el estudio, a saber, PM y demanda cognitiva de una consigna, registros de representación semiótica, pertinencia y significatividad del uso de TD en la resolución de consignas y aspectos relevantes del concepto de límite puntual. Estos dan cuenta de las tendencias, anomalías y regularidades halladas para el grupo de consignas seleccionadas que dan consistencia a nuestro estudio, ya que mantienen coherencia con los criterios de fertilidad propuestos para la valoración.

Otra contribución proporcionada es la ejemplificación de reformulación de consignas para mejorar su nivel de fertilidad y el diseño de consignas para el abordaje de la construcción y comprensión de la definición métrica de límite puntual de funciones reales de variable real.

Por último consideramos que la construcción del concepto de límite mantiene relación con el tipo de consignas propuestas y que la fertilidad de las mismas está vinculada a los criterios establecidos (teniendo en cuenta el contexto educativo en el que estarán inmersas).

Si bien la orientación y organización del currículo para la enseñanza del tema límite en la carrera de Profesorado en Matemática difiere de otras carreras universitarias, las conclusiones a las que arribamos podrían ser de utilidad para cualquier cátedra en cuanto a la tarea de seleccionar, formular y/o reformular consignas sobre el tema.

## 8.4. PRODUCCIONES Y LINEAS DE CONTINUIDAD

### 8.4.1. Producciones parciales durante la investigación

En el proceso de elaboración de esta tesis presentamos comunicaciones en dos congresos que detallamos a continuación.

- ✓ Cavatorta, P., Favieri, A. y Iaffei, B. (2018). Análisis de una consigna para la enseñanza de límite puntual de funciones reales de variable real. *Ponencia presentada en XIII Congreso Argentino de Educación Matemática (CAREM).* Universidad Nacional de La Plata.
- ✓ Cavatorta, P., Iaffei, B., Ramos, A. y Rodríguez, M. (2021). Discusiones en torno a la existencia del límite puntual a través de consignas con potencial matemático rico. *Actas de las VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática,* 310-323.
- ✓ Favieri, A., Iaffei, B y Cavatorta, P. (2021). Potencial matemático y registros de representación en consignas relativas a límite puntual. *Noticiero de la Unión Matemática Argentina. Reunión de Educación Matemática. Resúmenes extensos, 56*(2), 34-37.

### 8.4.2. Líneas de continuidad

El recorrido realizado en la investigación fue abriendo otras posibles puertas de acceso para la continuidad del estudio. Entre estas consideramos importante destacar las que detallamos a continuación:

- Estudio de consignas metacognitivas (Barreiro et al., 2016) en relación a las consignas matemáticas estudiadas.
- Estudio de consignas sobre el tema presentes en páginas web y el contraste con las de libros de texto.
- Implementación y análisis de lo acontecido en relación a las consignas reformuladas (con mayor grado de fertilidad) y las originales para poder establecer comparaciones y complejizar el estudio y los resultados obtenidos.
- Continuidad en el estudio en relación a la implementación, análisis y mejoras de nuevas

consignas para el abordaje de la definición métrica.

- Diseño y análisis de una secuencia de consignas que atiendan a los criterios de fertilidad establecidos.
- Escritura de ponencias y artículos relacionados con los constructos teóricos elaborados y las conclusiones a las que arribamos a partir de los resultados, de manera de dar a conocer a la comunidad de docentes e investigadores/as los aportes de nuestro trabajo.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Apóstol, T. (1997). *CALCULUS*. Reverté.

Arteaga Valdés, E., Medina Mendieta, J. y Del Sol Martínez, J. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Revista Conrado*, *15*(70), 102-108.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente - Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. *Relime, 1*(1), 40-55.

Azcárate, C.; Casadevall; M.; Casellas, E. y Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral. Educación Matemática en secundaria*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En M. N. Gorgorió y J. Deulofeu (Eds.), *Matemáticas y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 91-108). España: Graó.

Barreiro, P. y Rodríguez, M. (2014). *Análisis del potencial matemático de consignas para clases de Matemática*. Comunicación presentada en las V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas de Investigación en Educación Matemática, Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNGS.

Berman, C., Narvaez, A. y Rodríguez, M. (2011). *¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados?* En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 585-594). DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

A. C.

Bermúdez, E. (2014). La argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. *Revista científica*, *20*(3), 37-45.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1999). Didáctica del Análisis en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Concepto de límite. En, T. Ortega (ed.), *Temas controvertidos en Educación Matemática* (pp.121-154). SAE de la Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME,* 4*(3)*, 219-236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO* (30), 67-82.

Blázquez, S., Gatica, S. y Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: aprendizaje y memoria. *Contextos Educativos, Revista de Educación*, (11), 7-21.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *RELIME*, 9*(2)*, 189-209.

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis Preliminar. *RELIME, 4*(3), 237-265.

Camelo González, M. (2010). Las consignas como enunciados orientadores de los procesos de escritura en el aula. *Enunciación, 15*(2), 58-67.

Codes, M. y Sierra, M. (2005). *Entorno Computacional y Educación Matemática: Una revisión del estado actual*. Comunicación presentada en IX Simposio SEIEM, Córdoba, España.

Coll, C. (2009). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. En R. Carneiro, J. C. Toscano y T. Díaz (Coords.), *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo* (113-126). Madrid, España: OEI.

Condito, V. (2016). Las consignas en la escuela media: hacia una fundamentación y conceptualización de su carácter de herramientas mediadoras de la escritura. En *Currículo, evaluación y formación en lectura y escritura. Volúmenes digitales Cátedra*

*UNESCO* (12-19). Córdoba, Argentina: UNC.

Contreras de la Fuente, Á., García Armenteros, M. y Font Moll, V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Boletim de Educação Matemática*, *26* (42 B), 667-690.

Contreras de la Fuente, A., Garcia Armenteros, M. y Sánchez Gómez, C. (2003). Investigación acerca de la enseñanza de límite en el marco de la teoría de las funciones semióticas. En E. Castro Martinez (Coord), *Investigación en Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.189-200). Granada, España: Universidad de Granada.

Corica, A. y Otero M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Relime*, *12*(3), 305-331.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modeles spontanés et modeles propes. En *Actes due Cinquième Colloque du Groupe International P.M.E.* (pp. 322-326). Grenoble, Francia.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1998). Signe et objet: trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. Annales de Didactique et de Sciences 93 Cognitives, 6, 139-163.

Duval, R. (1999a). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (trad. M. Vega Restrepo). Cali: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (1999b). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz Ludlow (Eds.), *Énfasis. Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Falchini, A. y Rafaelli, G. (2008). *El aspecto dialógico de las consignas: de lo textual a lo socio-discursivo.* Documento para V Jornadas Académicas e Interinstitucionales de la REDISP. Universidad Nacional del Litoral.

Fernández Plaza, J., Ruiz Hidalgo, J., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA, 7*(3), 117-131.

Fernández Plaza, J., Ruiz Hidalgo, J., Rico, L. y Castro, E. (2014). Relación entre representaciones gráficas y simbólicas del concepto de límite finito de una función en un punto. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 287-295). Salamanca, España: SEIEM.

Font, V. y Adán, M. (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. En A. Berciano, G. Gutierrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 283-291). Bilbao, España: SEIEM.

García, M. y Benítez, A. (2013). Diseño e Implementación de Tareas para Apoyar el Aprendizaje de las Matemáticas. *Formación Universitaria, 6*(1), 13-19.

Guarin Amorocho, S. y Parada Rico, S. (2023). Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial. *Educación Matemática*, *35*(1), 197-228.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de investigación*. México: MC Graw Hill.

Hitt, F y Páez R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Uno,* (32), 97-108.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 213-

224.

Hitt, F. y Páez, R. (2001). The notion of limit and learning problems. *Proceedings PME-NA XXIII, Utah, USA, 1*, 169- 176.

Hitt, F., y Páez, R. (2005). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 133-156). Morelia, México: Morevallado Editores.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 151-161.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of Geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Lang, S. (1990). *CÁLCULO*. Adisson - Wesley Iberoamenreicana, S.A.

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Moreno Moreno, M. M. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros.* En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.): *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.

Muñoz, S., Suárez, A. y Ponce, M. (2015). *Las consignas escolares como enunciados mediadores de los aprendizajes. Primeras aproximaciones*. Ponencia presentada en la VIII Jornadas Nacionales y 1.er Congreso Internacional sobre la Formación del Profesorado "Narración, Investigación y Reflexión sobre las prácticas". Mar del Plata, Argentina.

Novembre, A., Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). Matemática y TIC - Orientaciones para la enseñanza. Buenos Aires, Argetina: ANSES.

Páez, R. (2005). *Reconstrucción del concepto de límite: estudio de un caso.* En A. Maz Machado, B. Gómez Alfonso y M. Torralbo Rodríguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación*

*Matemática* (pp. 175-186). Córdoba, España: Universidad de Córdoba y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM

Palmas Pérez, S. (2018). La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas. *Revista Colombiana de Educación*, (74), pp. 109-132.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 31* (3), 121-134.

Petrone, E., Cirelli, M., Contreras, N., Ferrari, N. y Sgreccia, N. (2014). *Análisis de enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria.* En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 379-388). DF, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de Matemática a través del diseño de tareas. *RELIME, 19* (1), 71-98.

Real Academia Española (2022). *Diccionario de lengua española*.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Riestra, D. (2004). *Las consignas de trabajo en el espacio socio-discursivo de la enseñanza de la lengua* [Tesis doctoral]. Universidad de Génova - Facultad de Psicología de Ciencias de la Educación, Italia.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática, 26*, 11-30.

Salas, S., Hille. E. y Etgen, G. (2002). *CALCULUS. Una y varias variables* (C. Casacuberta Vergés, Trad.). Reverté. (Obra original publicada en 1999)

Salcedo, A. (2012). Análisis de las actividades para el estudiante en los libros de matemáticas. *Investigación y Postgrado, 27*(1), 83-109.

Sánchez, J. (2003). Integración curricular de las TIC: Conceptos e ideas. *Revista Enfoques Educacionales, 5*(1), 51-65.

Santos Trigo, L. M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 195-212.

Sierpinska, A. (1985) Epistemological obstacles relative to the limit concept. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématique, 6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Sierpinska, A. (1988). Sur la relativité des erreurs. En *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique* (pp. 70-87). Sherbrooke, Québec, Canadá: Éditions de l'Université de Sherbrooke.

Smith M. y Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 3, 344-350.

Spivak, M (2010). *CALCULUS. Cálculo infinitesimal*. Reverté

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. y Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: Acasebook for professional development.* New York: Teachers College Press.

Stewart, J. (2010). *Cálculo: Conceptos y contextos*. Thomson.

Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching,* (82), 44-49.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Valerio López, T., Sosa Garza, C. y Spíndola Yáñez, P. (2013). Límite de una función en un punto y en el infinito. *Revista Electrónica AMIUTEM, 1*(1), 33-46.

Vázquez, A., Pelizza, L., Jakob, I. y Rosales, P. (2006). *Consignas de escritura y procesos cognitivo lingüísticos implicados. Un estudio en la universidad*. En Rodi, A. y M. Casco (coord.) Primer Congreso Nacional Leer, Escribir y Hablar Hoy. Tandil, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Vinas Forcade, J. y Emery Bianco, C. (2015). *Las consignas de pruebas escritas como herramienta de evaluación del desempeño docente*. Ponencia presentada en Segundo Congreso Latinoamericano de Medición y Evaluación Educacional. México.

Williner, B. (2015). Un cambio de metodología didáctica en cursos de Análisis Matemático I: fundamentos, implementación y primera evaluación. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, 4*(8), 33-40.

Zakaryan, D. (2013). *El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años*. Comunicación presentada en el I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. Santo Domingo, República Dominicana.

**Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral**

# ANEXOS

TESIS DE MAESTRÍA EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

**Estudio de consignas matemáticas vinculadas a la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real**

Autora: Esp. Patricia Noemí Cavatorta

Directora: Mg. Adriana Gladys Favieri

Co-Directora: Dra. Bibiana Raquel Iaffei

Santa Fe, Argentina

-2023-

# ÍNDICE DE ANEXOS

# ANEXO I

# ENCUESTA A ESTUDIANTES Y RESULTADOS

En este anexo exhibimos la encuesta realizada a las y los estudiantes, la justificación de la selección de encuestadas/os y el resumen de los resultados obtenidos a partir de sus respuestas.

### A.I.1. Tabla resumen de estudiantes encuestadas/os

En la Tabla A1 numeramos a las y los 35 estudiantes que aprobaron Cálculo I en los años académicos 2016, 2017, 2018, 2019 y 2020, indicando fecha de aprobación. Las y los estudiantes numerados recibieron la invitación para responder la encuesta, excepto E1 y E25, que han abandonado la carrera. Las y los 21 estudiantes resaltados han enviado su respuesta.

| Estudiante | Fecha de aprobación | Relación con la carrera |
|---|---|---|
| **AÑO ACADÉMICO 2016 (10 turnos, cambio reglamentación)** | | |
| **E1** | 10/2/2016 | ABANDONÓ |
| **E2** | 10/2/2016 | Continua |
| **E3** | 10/2/2016 | Continua |
| **E4** | 2/3/2016 | Continua |
| **E5** | 11/5/2016 | Continua |
| **E6** | 3/8/2016 | Continua |
| **E7** | 1/12/2016 | Continua |
| **E8** | 15/2/2017 | Continua |
| **E9** | 15/2/2017 | Continua |
| **E10** | 15/2/2017 | Continua |
| **E11** | 15/2/2017 | Continua |
| **E12** | 15/2/2017 | Continua |
| **E13** | 8/3/2017 | Continua |
| **AÑO ACADÉMICO 2017** | | |
| **E14** | 20/12/2017 | Continua |
| **E15** | 07/02/2018 | Continua |
| **E16** | 07/02/2018 | Continua |
| **AÑO ACADÉMICO 2018** | | |
| **E17** | 01/08/2018 | Continua |
| **E18** | 19/12/2018 | Continua |
| **E19** | 19/12/1018 | Continua |
| **E20** | 13/2/2019 | Continua |
| **E21** | 7/3/2019 | Continua |
| **E22** | 7/3/2019 | Continua |
| **E23** | 7/3/2019 | Continua |
| **AÑO ACADÉMICO 2019** | | |
| **E24** | 22/5/2019 | Continua |
| **E25** | 22/5/2019 | ABANDONÓ |
| **E26** | 3/7/2019 | Continua |
| **E27** | 4/12/2019 | Continua |
| **E28** | 18/12/2019 | Continua |
| **E29** | 18/12/2019 | Continua |
| **E30** | 4/3/2020 | Continua |
| **AÑO ACADÉMICO 2020** | | |
| **E31** | 5/8/2020 | Continua |
| **E32** | 5/8/2020 | Continua |
| **E33** | 5/8/2020 | Continua |
| **E34** | 17/3/2021 | Continua |
| **E35** | 17/3/2021 | Continua |

**Tabla A1. Estudiantes que aprobaron Cálculo I entre años académicos 2016 y 2020**

### A.I.2. La encuesta

La encuesta cuenta con cuatro secciones y la realizamos mediante un formulario de Google Drive (https://forms.gle/opeZ1VC1D4auczyz6). La primera sección corresponde a datos del encuestado y su apreciación respecto de la complejidad al estudiar el tema límite. La segunda pretende indagar respecto de los recursos utilizados para estudiar "Límite de una función en un punto". En la tercera sección las preguntas están orientadas a recabar información respecto de las consignas matemáticas (de la bibliografía obligatoria) que resolvieron cuando estudiaron el concepto de limite puntual. Y en la última sección preguntamos sobre el uso de GeoGebra para el estudio del concepto de límite.

Transcribimos a continuación la estructura de la misma.

---

| **Encuesta a estudiantes que cursaron Cálculo I<br>(Profesorado en Matemática -FHUC-UNL)** |
|---|
| Esta encuesta se diseñó para hacer un relevamiento de los libros, uso de GeoGebra, otros software y sitios web que utilizan o consultan los estudiantes del Profesorado en Matemática de la FHUC (UNL) para abordar el estudio del concepto de "límite puntual defunciones reales de variable real" en la materia Cálculo I.<br>La intencionalidad es recabar datos para el trabajo de Tesis de Maestría en Didácticas Específicas titulado: "Estudio de consignas matemáticas vinculadas a la enseñanza del límite puntual de funciones reales de variable real", de la Profesora Patricia Cavatorta, dirigido por la Magister Adriana Favieri y codirigido por la Doctora Bibiana Iaffei.<br>La encuesta cuenta con 4 secciones.<br>Una vez que termines de responder no olvide colocar ENVIAR para que llegue tu respuesta.<br>Es importante que respondas siendo lo más sincera/o posible.<br>¡Muchas gracias por tu colaboración! |
| **Sección 1. Datos y consultas generales** |

**(1) Dirección de correo electrónico:** ……………………………………………………

**(2) Apellido:** ……………………………………………………

**(3) Nombre:** ……………………………………………………

**(4) En qué año/años cursaste Cálculo I:** ……………………………………………………
[Si cursó la materia más de una vez, indicar todos los años en que la cursó separados por un guión (-).]

**(5) Si pudieras medir numéricamente la complejidad para comprender el tema límite puntual de una función ¿Qué valor escogerías?** [Marcar sólo una opción]

**Sin complejidad** ◯ 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 **Mucha complejidad**

| **Sección 2. Sobre recursos utilizados para estudiar "Límite de una función en un punto"** |
|---|

**(1) Cuando estudiaste el concepto de límite en la materia Cálculo I, ¿qué recursos utilizaste? Puedes marcar más de una opción.**

- ☐ Libros de bibliografía obligatoria de la materia
- ☐ Libros de bibliografía complementaria sugeridos en el programa de cátedra
- ☐ Otros libros
- ☐ Páginas web
- ☐ Videos de youtube
- ☐ Otro tipo de videos

-  Software o app / calculadora graficadora

**(2)** **Si seleccionaste "Otros libros", como recurso utilizado, menciona en cada caso el nombre de libro y autor/es. Responder sólo si seleccionó esa opción. De lo contrario colocar NO.**

…………………………………………………………………………………….

**(3)** **Si seleccionaste "Páginas web", como recurso utilizado, pega el/los link/s a continuación. Responder sólo si seleccionó esa opción. De lo contrario colocar NO.**

…………………………………………………………………………………….

**(4)** **Si seleccionaste "videos", coloca a continuación el/los línk/s que te haya/nayudado a estudiar y comenta por qué. Responder sólo si seleccionó esa opción. De lo contrario colocar NO. En caso de no encontrar el link, escribe como y donde encontró el mismo.**

…………………………………………………………………………………….

**(5)** **Si seleccionaste "Software/calculadora graficadora", como recurso utilizado, menciona el/los nombre/s a continuación. Responder sólo si seleccionó esa opción. De lo contrario colocar NO.**

…………………………………………………………………………………….

**Sección 3. Sobre las consignas (de la bibliografía obligatoria) que resolviste cuando estudiaste el concepto de limite puntual**

[Aquí se comparte el link para acceder al capítulo 2 del libro de texto que es bibliografía obligatoria de la materia Cálculo I, por si necesitas consultarlo.
https://drive.google.com/file/d/11sJXYq_K8PY8yWReuFf61V9OTIG-jZHG/view?usp=sharing ]

**(1)** **Menciona (indicando el número) tres ejercicios del apartado EJERCICIOS 2.1 que fueron importantes para el aprendizaje de la noción intuitiva de límite. Explica por qué.**

…………………………………………………………………………………….

**(2)** **Menciona (indicando el número) dos ejercicios del apartado EJERCICIOS 2.2 que fueron importantes para el aprendizaje de la definición formal de límite. Explica por qué.**

…………………………………………………………………………………….

**(3)** **Menciona algún/os ejercicio/s que te resultaron complejos y/o nunca pudiste terminar de abordarlos. Indica el número y sección del libro.**

…………………………………………………………………………………….

**Sección 4. Sobre el uso de GeoGebra para el estudio del concepto de límite**

**(1)** **¿Utilizaste GeoGebra cuando estudiaste el concepto de límite?**
[Marcar una sola opción]

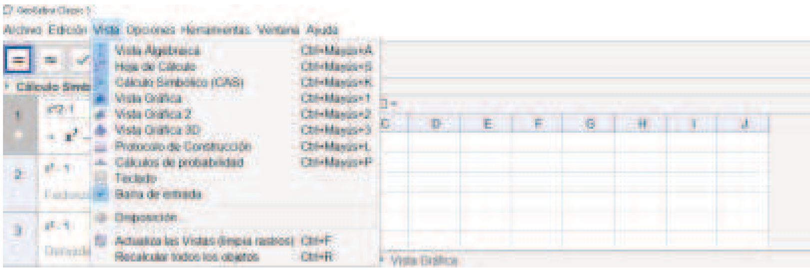
-  SI
-  NO
-  No recuerdo

**(2)** **Si utilizaste GeoGebra, ¿con qué finalidad lo hiciste?**

-  Verificar mediante la vista gráfica resoluciones realizadas con lápiz y papel
-  Verificar mediante la vista algebraica resoluciones analíticas realizadas con lápiz y papel
-  Graficar para anticipar posibles soluciones
-  Calcular en vista algebraica para anticipar posibles soluciones/resultados
-  Comparar lo resuelto con lápiz y papel y lo realizado por GeoGebra en vista algebraicay gráfica en paralelo.

- ☐ Hacer aproximaciones numéricas con tablas de valores
- ☐ Hacer factorizaciones/desarrollo de expresiones/simplificaciones
- ☐ No lo usé yo, lo usaron compañeros/as y docentes; yo sólo observé.
- ☐ Otra finalidad no mencionada anteriormente

**(3) ¿Usaste/ron otras vistas además de la gráfica y algebraica? ¿cuáles?**




[Seleccionar todos los que correspondan]

- ☐ Cálculo simbólico (CAS)
- ☐ Hoja de cálculo
- ☐ Protocolo de construcción
- ☐ Otras
- ☐ No usé/usaron otras vistas

**(4) ¿Consideras importante el uso de GeoGebra para comprender el concepto de límite y/o resolver ejercicios que lo involucren? ¿Por qué?**

[Escribe todos lo que consideres necesario]

……………………………………………………………………………………….

**(5) Al resolver ejercicios/actividades/problemas que involucraban el concepto de límite ¿en qué momento decidías/decides utilizar GeoGebra? ¿por qué?**

[Escribe todos lo que consideres necesario]

……………………………………………………………………………………….

---

### A.I.3. Resumen general de las respuestas

En este apartado presentamos el resumen de las respuestas a las preguntas de la encuesta, exceptuando aquellas que corresponden a datos personales de las y los estudiantes (preguntas 1, 2 y 3 de la sección 1).

En algunos casos citamos explícitamente lo expresado por las y los estudiantes, indicando a qué estudiante corresponde. Para tal fin numeramos las respuestas de la encuesta desde R1 hasta R21, teniendo en cuenta el orden en que las recibimos. En la Tabla A2 numeramos las 21 respuestas de la encuesta y le asociamos el o la estudiante correspondiente, de E1 a E35 (de la Tabla A1).

| Respuesta | Estudiante |
|---|---|
| R1 | E29 |
| R2 | E31 |
| R3 | E32 |
| R4 | E7 |
| R5 | E19 |
| R6 | E15 |
| R7 | E12 |
| R8 | E8 |
| R9 | E20 |
| R10 | E9 |
| R11 | E33 |
| R12 | E10 |
| R13 | E34 |
| R14 | E21 |
| R15 | E30 |
| R16 | E11 |
| R17 | E2 |
| R18 | E14 |
| R19 | E5 |
| R20 | E18 |
| R21 | E16 |

**Tabla A2. Asociación entre respuestas recibidas y estudiantes encuestados/as**

Exponemos a continuación el resumen de lo obtenido como respuestas a cada pregunta, bajo el subtítulo que indica el número de sección y pregunta dentro de cada sección de la encuesta.

### Sección 1. Pregunta 4

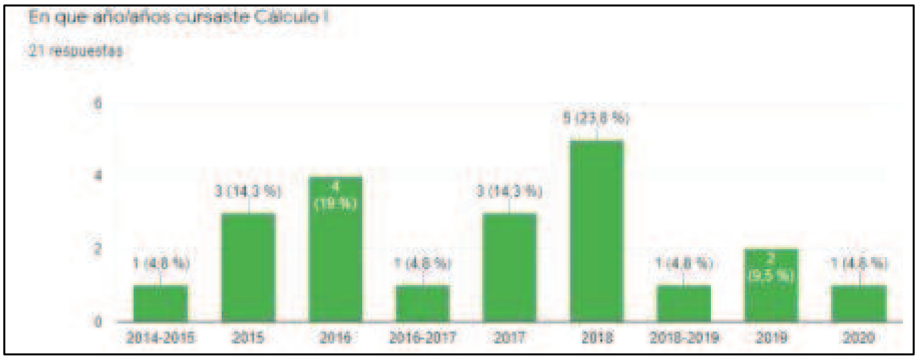



**Imagen A1. Año de cursado**

### Sección 1. Pregunta 5

En la mayoría de las respuestas (un total de 16) manifiestan que la complejidad para comprender el tema límite puntual de funciones varía de 3 a 5, en una escala de 1 a 5 donde el valor 1 significa sin complejidad y el valor 5 muy complejo.

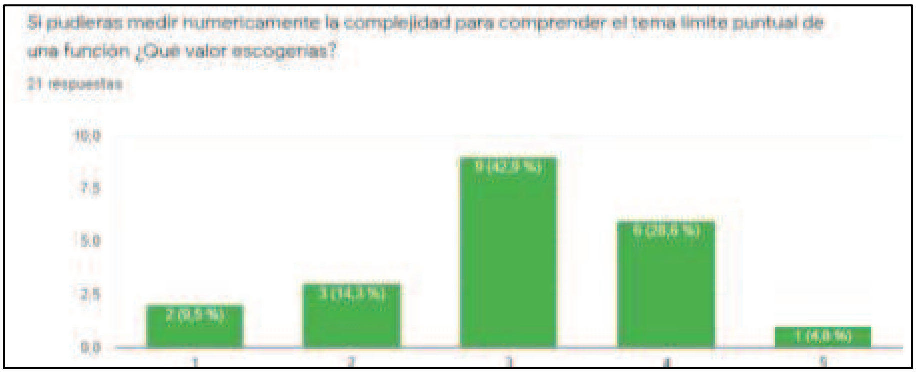



**Imagen A2. Apreciación sobre la complejidad de comprensión de Límite puntual**

### Sección 2. Pregunta 1

Entre los recursos utilizados para el estudio del tema se destacan: bibliografía obligatoria (100% de respuestas), software/calculadora graficadora (71 % de respuestas) y videos de YouTube (47,6% de respuestas).

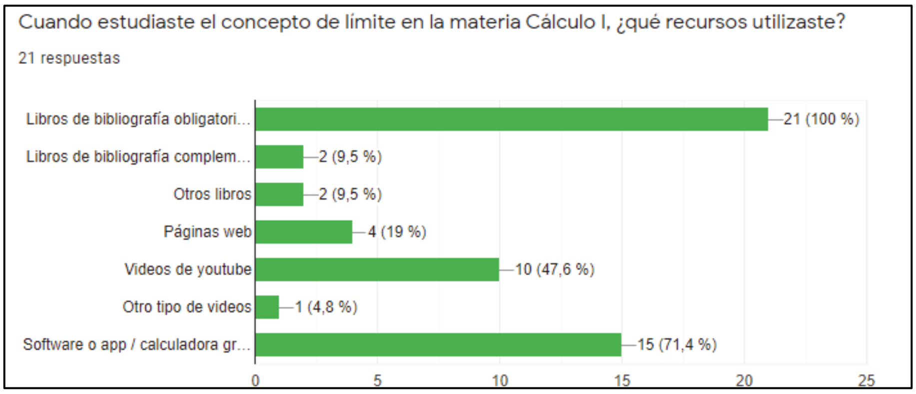



**Imagen A3. Tipo de recursos utilizados para el estudio del tema Límite**

**Sección 2. Pregunta 2**

De los 21 encuestados, 19 respondieron que no utilizaron otro libro de texto diferente al de la bibliografía obligatoria. Un/a estudiante respondió “No recuerdo los nombres pero use libros de ingeniería” y otra/o respondió “Cálculo: El cálculo diferencial, de Adriana Engler, Daniela Müller, Silvia Vrancken y Marcela Hecklein”.

**Sección 2. Pregunta 3**

Del total de encuestados/as, 17 manifiestan no haber utilizado páginas web como recurso. Un/a estudiante dice que ha utilizado, pero no recuerda los enlaces (R12) y 3 estudiantes (R14, R19, R20) comparten los enlaces de páginas web que expresamos a continuación.

a) https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/dc-limits
b) https://www.problemasyecuaciones.com/limites/calculo-limites-explicados-metodos-reglas-procedimientos-indeterminaciones-grados-infinito-resueltos.html
c) https://definicion.de/limite-de-una-funcion/
d) https://es.khanacademy.org/math/eb-5-semestre-bachillerato-nme/x7193c35109289ad8:limite-y-continuidad-de-funciones

Las páginas web mencionadas en los incisos c) y b) no las consideramos cruciales para la recuperación de consignas. La señalada en c) nos remite a una página sobre aspectos teóricos generales y poco precisos sobre el concepto de límite. En la citada en el inciso b) se enlistan más de 50 ejercicios resueltos mecánicamente, se prioriza mostrar el uso de distintos procedimientos, principalmente de tipo algebraicos.

Los enlaces de los incisos a) y d) nos remiten a la misma página web “Khan Academy”, particularmente a una unidad llamada “Límites y continuidad de funciones”, en la que se ofrece material bibliográfico, consignas, videos, ejercicios resueltos, prácticas con cuestionarios de múltiple opción para responder en línea, entre otros. En esta observamos el abordaje del concepto de límite desde un posicionamiento más integral, poniendo en evidencia el trabajo desde distintos registros de representación, con mayor solidez conceptual. Cabe aclarar que esta página web fue creada y es supervisada por expertos, asimismo es gratis para estudiantes y docentes.

**Sección 2. Pregunta 4**

En las respuestas, 11 estudiantes plantean que no han utilizado videos para el estudio del tema. Los/as 10 restantes mencionan uno o varios videos que las/os ayudaron en el estudio y comentan por qué. Esto lo expresamos en la Tabla A3.

| Respuetas | Enlace/ forma de acceder | ¿Por qué ayudó en el estudio? | Descripción del video |
|---|---|---|---|
| R3 | https://www.youtube.com/channel/UCwqteIzpGiy1dytN7NJzmUg. | Para tener otra explicación de las demostraciones. | Enlace a un canal de YouTube. No se identifica a qué video hace referencia. |
| R4 | 1) https://www.youtube.com/watch?v=EYcwxYab0Qk<br>2) https://www.youtube.com/watch?v=xKyL1OO47Ls | (No responde) | 1) Video del canal de Youtube "JulioProfe". Explica cómo determinar el valor de límites y límites laterales observando la gráfica de una función.<br>2) Se explican 5 ejemplos de cómo calcular límites usando la definición métrica. Se halla el delta en función de épsilon en funciones que no son lineales. Enseña procedimientos para calcular delta en función de épsilon, no hay reflexión respecto de la definición.<br>(Presenta errores). |
| R5 | Colocando en YouTube: "definición de limite épsilon delta" | (No responde) | ---- |
| R11 | https://www.youtube.com/channel/UC3RYy7GbMHDvPQGCdAh3H5g | Explica muy bien y contiene ejercicios de la bibliografía obligatoria. | El enlace corresponde a un canal de YouTube denominado "Unicoos". No se identifica a qué videos hace referencia. |
| R12 | No tengo los links de los videos, pero recuerdo que buscaba en youtube "limite de funciones" y luego seleccionaba los videos que más se relacionaban con lo dado en la materia. | Estos videos me sirvieron porque muchas veces en el momento de la clase no entendía nada debido a que para mí era un tema muy complejo, que no había visto antes; y el ver luego de la clase otra explicación, con el material más leído y hechos los ejercicios muchas veces me resultaba mejor. | ---- |
| R13 | Busqué videos de profesores de universidades de distintos países. | (No responde) | ---- |
| R14 | Canal de "Unicoos" https://www.youtube.com/user/davidcpv<br>Canal de "Julioprofe" https://www.youtube.com/channel/UCIkCzk3ezlAxX5r2OFlHLaQ | (No responde) | Los enlaces corresponden a los canales de YouTube mencionados. No se identifica a qué videos hace referencia. |
| R15 | 1) https://www.youtube.com/watch?v=mcoaA0xUn5M<br>2) https://www.youtube.com/watch?v=o334wYiR | (No responde) | 1) Video del canal de YouTube "Unicoos". Plantea la definición métrica, explica graficamente lo que expresan las desigualdades y la implicación involucradas. Luego desarrolla un ejemplo donde comprueba que se cumple la |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Dcw<br>3) https://www.youtube.com/watch?v=0iA2sDzEm6Y&t=110s | | definición para un límite calculado.<br>2) Video del canal de YouTube “Mate movil”. Explica cómo determinar el valor de límites y límites laterales o determinar si el límite no existe, observando las gráficas de funciones. Utiliza el pizarrón y en un caso grafica con GeoGebra (límite de $f(x) = sen\ (\pi/x)$ cuando $x$ tiende a cero.<br>3) Video del canal de YouTube “Fisicaymate”. Explica cómo determinar el valor de límites de funciones evaluando la función en valores próximos al valor para el cual se toma el límite. |
| R19 | 1) https://youtu.be/rrbS5l--1Ss<br>2) https://youtu.be/EYcwxYab0Qk<br>. | 1) Generalmente buscaba ejemplos para comprender la definición, por eso este video.<br>2) Este video también hace referencia a un ejemplo pero a partir de una gráfica, lo que también me ayudaba a comprender mejor el concepto. Siempre intentaba buscar videos del mismo autor y no tan largos, eso también tiene que ver con la elección de estos videos. | Videos del canal de YouTube “JulioProfe”.<br>1) Explica el cálculo de límite con un trabajo algebraico en caso de indeterminación del tipo $0/0$.<br>2) Igual a video 1 de la respuesta R4. |
| R21 | https://www.youtube.com/watch?v=UtB_d6ZS_wg&ab_channel=unicoos | Estos casos abarcan muchas cuestiones algebraicas, y es por eso que este tipo de videos me ayudaban mucho. | Video del canal de YouTube “Unicoos”. Explica 2 ejemplos de cómo calcular límites algebraicamente en casos donde se presentan indeterminaciones del tipo $0/0$. |

**Tabla A3. Videos que ayudaron a estudiar, razones de selección y descripción**

## Sección 2. Pregunta 5

Del total de encuestados/as, 6 plantean que no han utilizado software o calculadora graficadora como recurso para el estudio de límite. De los/as 15 restantes, 1 señala haber utilizado Symbolab y 14 señalan haber utilizado sólo GeoGebra, o bien GeoGebra y otros como: Symbolab, MATLAB, Mathway y Photomath. En la Tabla A4 señalamos la cantidad de estudiantes que menciona cada software.

| Software/ calculadora graficadora | Cantidad de estudiantes | Respuestas |
|---|---|---|
| GeoGebra | 14 | R1-R2-R3-R4-R5-R8-R10-R11-R12-R13-R14-R15-R16-R19 |
| Symbolab | 4 | R2-R13-R14-R20 |

| | | |
|---|---|---|
| MATLAB | 2 | R3-R14 |
| Mathway | 1 | R13 |
| Photomath | 1 | R14 |

**Tabla A4. Uso de software o calculadora graficadora para el estudio de límite**

## Sección 3. Pregunta 1

En esta pregunta requerimos indicar tres ejercicios del apartado "Ejercicios 2.1", de la bibliografía obligatoria, que consideraban importantes para el aprendizaje de la noción intuitiva de límite y la razón de su importancia. En la Tabla A5 citamos textualmente las respuestas de las y los estudiantes. Aclaramos que algunas/os no mencionaron exactamente tres ejercicios y/o no explicitaron la razón por la que los consideraban importantes. Dos estudiantes no mencionan ejercicios (R11 y R17), manifiestan no recordar.

Además, realizamos una clasificación de tipos de respuestas en función de las razones por la que las y los estudiantes consideran importantes los ejercicios que mencionan. Esta clasificación no es exhaustiva y con ella no pretendemos incluir las respuestas en conjuntos disjuntos, sino detectar las razones de importancia otorgadas. En la última columna de la Tabla A5 indicamos el código asignado de acuerdo al tipo de respuesta. Los códigos utilizados los detallamos a continuación.

**Tipo de respuestas de acuerdo a la importancia asignada por las y los estudiantes**

- T1: la mirada gráfica (global) para un primer acercamiento al objeto límite puntual.
- T2: comprensión y destreza en el trabajo algebraico para calcular límites.
- T3: comprensión de la idea de límite a partir de observar aproximaciones gráficas de imágenes de la función a un valor fijo para valores de la variable independiente próximos a $c$ (valor para el cual se calcula el límite).
- T4: comprensión de la idea de límite a partir de observar aproximaciones numéricas de imágenes de la función a un valor fijo, para valores de la variable independiente próximos a $c$ (valor para el cual se calcula el límite).
- T5: poner en evidencia que si se toma límite para la variable independiente tendiendo a $c$, no es relevante lo que sucede en $c$.
- T6: utilización del software para el abordaje.
- T7: por el tipo de función involucrada.

| Respuesta | Ejercicios mencionados | Razón de la importancia | Tipo de respuesta/ observaciones |
|---|---|---|---|
| R1 | 1 y 2 | Permitieron que comprenda mejor la idea de límite, entendiendo que lo "importante" es tener en cuenta lo que sucede en las proximidades del '$x$' tendiendo a '$c$' y no el valor de la función en el mismo. | T3 y T5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 13 al 48 | En particular en los que se anula el denominador cuando el $x$ tiende al valor $c$, me ayudaron a comprender y conocer otras maneras de pensar cómo hallar el límite pedido. | T2 |
| R2 | 1 al 10 | Porque son aquellos que se debía pensar en las graficas y como era su comportamiento. Los que para mi eran más de pensar. | T1 |
| | 13 al 48 | (No responde) | - |
| R3 | 18, 37 y 47. | Porque era diferentes uno de los otros. | - |
| R4 | 18, 21 y 43 | (No responde) | - |
| R5 | 1 al 10 | Para entender visualmente la definición de límite. Además de ayudarme a comprender que el límite de una función $f$ cuando $x$ tiene a $c$ no necesariamente es $f(c)$. | T1, T3 yT5 |
| | 61 | Me ayudó a observar que valores toma una función a medida que la evaluó con valores cercanos al límite por el cual se está haciendo tender a la $x$. | T4 |
| R6 | 1, 2 y 3 | Porque en con esos 3 se puede apreciar que sucede con el límite en distintos tipos de funciones discontinuas y al ser de manera gráfica es más sencillo comprenderlo. | T1 |
| | 1 al 12 | Fueron importantes porque por ser el primer acercamiento a dicho concepto, las gráficas ayudaban mucho a entender. | T1 |
| R7 | 58 al 63 | Porque se iba viendo cómo se comportaba la función para valores cada vez más cercanos al punto en el que se pedía tomar el límite. | T3 y T4 |
| | 37 | Porque nos ayudaban a ver que aunque la función tenga un valor distinto en el punto donde nos pedía el límite a comparación de cómo se venía comportando en las cercanías del mismo, el límite existía de igual manera. | T5 |
| | 11 | Porque en este ejercicio se muestra en un solo gráfico, una función que tiene comportamientos variados, en donde el estudiante debe ir mirando intuitivamente que sucede en los casos en donde la función varía, y se busca en particular los valores de $c$ en donde el límite cuando $x$ tiende a $c$ no existe. | T1 |
| R8 | 23 | Porque en este ejercicio ayuda a comprender que no importa lo que suceda en el valor de $x = 3$, un alumno podría evaluar directamente que sucede cuando $x$ tiende a 3 concluyendo que entonces el limite no existe, por el contrario si el ejercicio se resuelve en forma adecuada, se tendría que simplificar las expresiones equivalentes entre numerador y denominador dando como resultado una constante, por lo que el limite cuando $x$ tiene a 3 existe sin importar que sucede en concreto en el valor exacto $x = 3$. | T5-T2 |
| | 58 | Porque este ejercicio trabaja con algunos valores de $x$ cercanos al valor del límite, y además hace trabajar a los estudiantes con un software gráfico para visualizar lo que sucede cerca del límite, así mejorar la estimación o justificarla. | T3-T4-T6 |
| R9 | 8 | Este ejercicio me parece rico ya que permite analizar y reflexionar acerca de la relación entre el límite de $f$ cuando $x = -1$ y los límites a derecha e izquierda de $f$ al aproximarse a dicha $x$. También solicita el valor de la función en $x = -1$, por lo que este análisis permitirá concluir si los límites a derecha e izquierda pueden ser llamados límites laterales. | T3 (idea errónea) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 11 | Considero que este ejercicio pone en juego las justificaciones de por qué, una vez identificado, no existe el límite en ciertos $c$. | - |
| | 24 | Considero que al haber una división polinómica como función para hallar el límite se pone en juego la noción de entorno reducido. Sabiendo que analizamos el comportamiento alrededor de (en este caso) $x = 3$ podemos simplificar numerador con denominador, ya que el denominador no valdrá cero. | T2 |
| R10 | 1 | Se puede observar la no existencia del límite por salto. | T1 |
| | 20 y 21 | Podemos probar límite (en uno existe, el otro no). | - |
| R11 | (No responde) | (No responde) | - |
| R12 | 57 | Porque al marcar los puntos permite ver qué sucede con la función a medida que nos aproximamos a cero y luego de esto pensar que pasa con los límites laterales. | T4 (idea errónea) |
| | Cualquier ejercicio del 58 al 63 | Porque igual que en el anterior permite ver primero que pasa cuando nos acercamos a cero y luego pensar en el límite; además pide usar un programa para graficar la función lo que a mi parecer permite ver mejor lo que sucede. | T4 –T6 – T1 |
| R13 | 7 | Porque comprendí cómo abordar el problema cuando la función no está definida. | T7 |
| | 10 | Porque se trataba de una función por partes. | T7 |
| | 12 | Porque abordaba una función trigonométrica. | T7<br>(no aborda este tipo de funciones) |
| R14 | 1 al 10 | Ya que a partir de la grafica fácilmente podíamos determinar si el limite existía en el punto o si teníamos una discontinuidad de salto o infinita | T1 |
| R15 | 5 y 11 | Es una gran ayuda saber lo que sucede gráficamente con la función. En los primeros ejercicios comprendí el concepto "tender" hacia un valor. | T1 |
| | 41 | Con ejercicios del estilo del 41, estudié cómo hallar el valor de límite algebraicamente. | T2 |
| R16 | 1, 47 y 50 | Hacen reflexionar y ver diferentes situaciones que nos enfrentamos cuando trabajamos con límite | - |
| R17 | (No responde) | (No responde) | - |
| R18 | 1 al 10 | Yo creo que para la noción intuitiva de límite es muy importante analizar qué es lo que pasa gráficamente, por lo tanto considero que de los ejercicios del 1 al 10 fueron muy importantes para poder fortalecer este concepto. Cualesquiera tres de ellos han sido importantes. | T1 |
| R19 | 1 al 10 | Me ayudaron a interpretar gráficamente la noción de límite por el hecho de poder visualizarlo. | T1 |
| | 57 | Permite analizar lo que sucede alrededor del punto donde se quiere calcular el límite. | T3-T4 |
| R20 | 4 , 11 y 12 | Mostraban gráficamente conceptos cómo límites laterales, discontinuidad y continuidad en un punto. Todo lo anterior sin realizar cuentas, sólo viendo la gráfica, lo que para una idea primera aproximación, me sirvieron bastante | T1 |
| R21 | 18 | Porque se tiene que redefinir la función. | T7 |
| | 34 | Porque se debe trabajar con la expresión | T2 |
| | 43 | Ayuda a imaginar la densidad en los reales. | T4 |

**Tabla A5. Selección de "Ejercicios 2.1" de bibliografía obligatoria y razón de importancia**

En resumen, las y los estudiantes mencionan en el siguiente orden de prioridad las razones de importancia por las que seleccionan los ejercicios de “Ejercicios 2.1”:

- T1 (12 respuestas)
- T3 (6 respuestas)
- T4 (7 respuestas)
- T2 (5 respuestas)
- T5  y T7 (4 respuestas)
- T6 (2 respuestas)

**Sección 3. Pregunta 2**

En esta pregunta requerimos indicar dos ejercicios del apartado “Ejercicios 2.2”, de la bibliografía obligatoria, que consideraban importantes para el aprendizaje de la definición métrica de límite y la razón de su importancia. En la Tabla A6 expresamos las respuestas de las y los estudiantes en forma ordenada. Aclaramos que algunas/os no mencionaron exactamente dos ejercicios y/o no explicitan la razón por la que los consideraban importantes. Tres estudiantes no mencionan ejercicios (R11, R17 y R18), manifiestan no recordar.

Realizamos una clasificación de tipos de respuestas de acuerdo a la importancia asignada por las y los estudiantes. Estas atienden fundamentalmente a los conceptos involucrados en la definición métrica. En la última columna de la tabla indicamos el código asignado de acuerdo al tipo de respuesta. Los códigos utilizados se detallan a continuación.

**Tipo de respuestas de acuerdo a la importancia asignada por las y los estudiantes**

- M1: permite observar o pensar la representación gráfica de la definición métrica.
- M2: ayuda a validar algebraicamente/demostrar la existencia de un límite calculado usando la definición métrica.
- M3: posibilita hallar relación/dependencia entre épsilon y delta, para valores particulares de épsilon y delta.
- M4: permite comprender relación y/o dependencia entre entornos reducidos en el conjunto de números reales.
- M5: complejiza la aplicación de la definición por el tipo de funciones involucradas.

| Respuesta | Ejercicios mencionados | Razón de la importancia | Tipo de respuesta/ observaciones |
|---|---|---|---|
| R1 | 21 y 22 | Ayudando con esa representación visual. | M1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 27 al 32 | Me ayudaron a formalizar y demostrar que el límite que encuentro al resolver los mismos, es el correcto y no tuve un error. | M2 |
| R2 | 1 al 20 | Porque siento que fueron los que me ayudaron a terminar de entender la teoría. | --- |
| R3 | 15, 33 y 45 | Por la variedad además tenían la solución para controlar. | --- |
| R4 | 7, 17 y 27 | (No responde) | --- |
| R5 | 21 | Para entender visualmente la definición épsilon-delta de límite. | M1 |
| | 27 al 32 | Me sirvieron para comprender la definición épsilon-delta de límite aplicándola a una función concreta. | M2 |
| R6 | 17 y 19 | Porque puede verse una caso interesante | M5 |
| R7 | 27 al 32 | Ayudaban a reforzar la definición. | M2 |
| | 33 | Permitía que nos detengamos en cada detalle que nos presentaba cada inciso, haciéndonos preguntas a nosotros mismos, para afirmar su validez o no. | --- |
| R8 | 27 | Pide que se dé una demostración épsilon-delta para el límite en la cual hace que se vuelva a revisar la definición formal de límite y además hace justificar por qué sucede esto. | M2 |
| | 33 | A partir de este ejercicio se pueden visualizar cuales son enunciados equivalentes a la definición de límite, y que sucede entre los entornos de x y f(x) para el límite pedido, permitiendo además relacionarlos entre sí. También me parece importante lo de mirar que para el épsilon particular que se da (0,1) encuentro que el delta que funciona es 1 pero a su vez debería ver qué sucede cuando los deltas son mayores o menores a 1. | M3 – M4 |
| R9 | 21 y 22 | Considero que pueden ser importantes para el aprendizaje de la definición formal de límite ya que se puede analizar gráficamente y de manera general qué significa "el límite de f cuando x->c es L sii para cada épsilon (>0) existe un delta (>0) tal que 0<\|x-c\|<delta implica \|f(x)-L\|<epsilon". Para el primer ejercicio mencionado está en juego analizar el delta adecuado partiendo de un épsilon dado y en el segundo, debemos buscar el epsilon que se adapte al delta dado. De manera que, también se está poniendo en juego analizar las desigualdades -épsilon<f(x) y f(x)<épsilon +L y, -delta+c<x y x<delta+c. | M1 – M3 |
| R10 | 7 y 17 | En uno se aplica valor absoluto, lo que despliega 2 casos posibles y en el otro, encontramos una función que está definida por partes lo cual, complejiza el cálculo del límite. | M5 |
| R11 | (No responde) | (No responde) | --- |
| R12 | 23 al 26. | Permite ver más intuitivamente que pasa con el delta dado un épsilon especifico, lo que luego creo que permite una mejor comprensión de la definición. | M2 |
| | 33 | Permite analizar la definición formal de límite. | --- |
| R13 | 1 y 2 | Porque al ser los primeros están más detallados, mejor explicados y logra entenderse la idea. | --- |
| R14 | 21 y 22<br>27 al 32 | En todos se considera la definición épsilon-delta de límite puntal. Además, en algunos debíamos hallar los valores para que la definición sea válida, no recuerdo particularmente si los procedimientos para encontrar los valores de épsilon eran o no engorrosos, pero considero que para comprender el concepto es más fácil, en un comienzo, que los mismos sean sencillos. | M2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R15 | 21 y 22 | Me ayudaron bastante los ejercicios porque como dije anteriormente, me ayuda mucho el vista gráfico. | M1 |
| | 33 | Para poder interpretar correctamente lo que plantea. | --- |
| R16 | 21 | Porque recupera el aspecto gráfico de la definición. | M1 |
| | 33 | Porque hace reflexionar. | --- |
| | 23-28 | Porque implica trabajar y comprender la definición formal del límite. | --- |
| R17 | (No responde) | (No responde) | --- |
| R18 | (No responde) | Lamentablemente por todo el tiempo que pasó desde que cursé la materia no recuerdo mucho las implicaciones sobre la sección 2.2. Si recuerdo que la noción formal de límite me costó un poco más así que supongo que en los ejercicios donde haya tenido que aplicar en diferentes límites la definición formal habrán sido muy importantes para mí. | --- |
| R19 | 22 y 23 | Exigen relacionar de forma puntual delta y épsilon. | M3 |
| R20 | 21 y 22 | Me permitieron observar de manera gráfica lo que enunciaba la definición formal de límite con, en ese entonces, aquellas extrañas letras y símbolos. | M1 |
| | 27 | Me ayudó a hacer el camino inverso, es decir, ya con una idea gráfica en mente de lo que estaba escribiendo, poder expresar la misma mediante la definición formal. | M1 – M2 |
| R21 | 32 | Porque eran fáciles para encontrar el delta dado épsilon por los ejemplos del libro. | M2 |
| | 38 | Me ayudó a buscar un contraejemplo con la profesora. | --- |
| | 44 | Me llevó a leer el ejemplo del libro muchas veces para entenderlo. | --- |

**Tabla A6. Selección de "Ejercicios 2.2" de bibliografía obligatoria y razón de importancia**

En resumen, las y los estudiantes recuperaron como importante el trabajo con la definición desde un registro de representación gráfico y la necesidad de aprender a validar algebraicamente haciendo uso de la definición métrica. Esta última razón es la más mencionada y entendemos, por la forma en que se expresan, que se preocupan por aprender el procedimiento de aplicar la definición. Fueron muy poco mencionadas las razones referidas a hallar y comprender la relación o dependencia entre épsilon y delta, para valores particulares de éstos; como así también entre entornos reducidos en el conjunto de números reales.

## Sección 3. Pregunta 3

En esta pregunta solicitamos ejercicios de la bibliografía obligatoria que le resultaron complejos y/o nunca pudieron terminar de abordarlos. En la Tabla A7 presentamos las respuestas de las y los estudiantes en forma ordenada. De 21 encuestadas/os, 7 no responden a esta pregunta. En 4 casos (R8, R12, R19, R21) mencionan ejercicios de otras secciones del libro diferentes a la 2.1 y 2.2 (que son las de interés para este estudio) o no mencionan a cual corresponden. Si bien no se solicita explicación sobre la selección, algunas/os realizan observaciones sobre los mismos (indicadas en última columna de la Tabla A7).

Los ejercicios que seleccionaron en su gran mayoría son los que solicitan algún tipo de demostración. En un caso (R13), no menciona ejercicios y escribe “demostraciones”. En un par de repuestas mencionan ejercicios de cálculo de límites donde el procedimiento es el de racionalizar (R8, R14). En una respuesta (R20) se mencionan ejercicios que involucran el cálculo de límites especiales, por el tipo de funciones involucradas, donde los procedimientos algebraicos usuales no son posibles de ser aplicados. En un caso (R2) menciona los ejercicios 21 y 22 de la sección 2.2, seleccionados por varios en la pregunta 2 de la sección 3 de la encuesta.

En síntesis, los ejercicios que fueron más seleccionados implican preponderantemente la realización de una demostración. En un segundo plano mencionan ejercicios que implican racionalizar o realizar el cálculo de un límite por un procedimiento poco habitual.

| Respuesta | Ejercicios | Sección del libro | Observación |
|---|---|---|---|
| R1 | 41 y 45 | 2.2 | |
| R2 | 21 y 22 | 2.2 | |
| R3 | 47 | 2.2 | Varios ejercicios me costaron resolver sola, en este momento el único que recuerdo es el de la sección 2.2 el 47. |
| R4 | 53 | 2.2 | |
| R5 | (No responde) | (No responde) | |
| R6 | (No responde) | (No responde) | No recuerdo ninguno especifico pero evitaba los con raíces. |
| R7 | (No responde) | (No responde) | |
| R8 | 47 | 2.1 | |
| | 29 y 31 | 2.5 | |
| R9 | Demostraciones | 2.2 | Ya que el concepto de límite formal me llevó más tiempo de reflexión y práctica. |
| R10 | (No responde) | (No responde) | |
| R11 | (No responde) | (No responde) | Recuerdo la dificultad de abordar la definición de límite con épsilon delta. Existieron ejercicios cuya resolución me fueron imposibles dada la complejidad a la hora de desgranar la expresión de $\lvert f(x) - L \rvert$ a su correlativo $\lvert x - c \rvert$. |
| R12 | 43 | 2.3 | |
| | 47 y 51 | 2.4 | |
| | 31, 32 y 39 | 2.6 | |
| R13 | Demostraciones | | |
| R14 | 47 y 48 | 2.1 | Los comencé a resolver en su momento pero no los concluí debido al trabajo algebraico, no por no comprender la consigna o el concepto. |
| R15 | 41, 43 y 45 | 2.2 | |
| R16 | 47 | 2.2 | |
| R17 | (No responde) | (No responde) | |
| R18 | (No responde) | (No responde) | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R19 | 55 | 2.3 | |
| R20 | 43, 44 y 57 | 2.1 | |
| | 46 al 53 | 2.2 | |
| R21 | 48 y 49 | No indica | No podía demostrar. |

**Tabla A7. Selección de ejercicios que no comprendieron o no terminaron de resolver**

## Sección 4. Pregunta 1


**Imagen A4. Uso de GeoGebra en el estudio del concepto de Límite**

## Sección 4. Pregunta 2

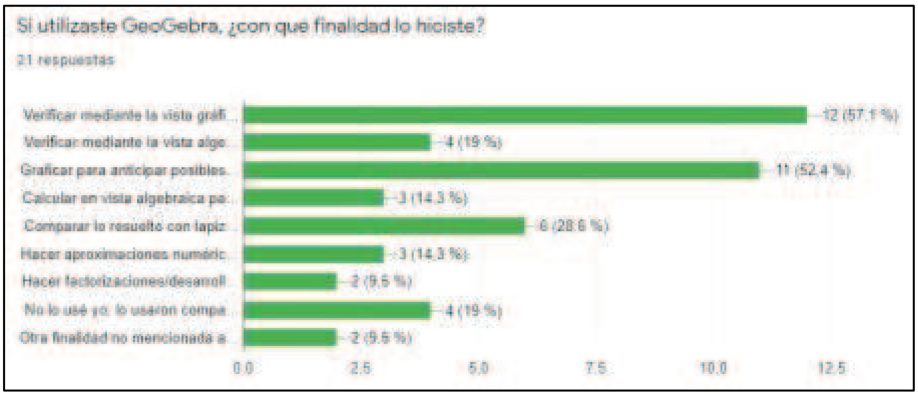



**Imagen A5. Finalidad de uso de GeoGebra**

Presentamos las finalidades de uso de GeoGebra seleccionadas en forma decreciente, de acuerdo al porcentaje de elección:

1. Verificar mediante vista gráfica resoluciones realizadas con lápiz y papel (57,1%).
2. Graficar para anticipar posibles soluciones (52, 4%).
3. Comparar lo resuelto con lápiz y papel y lo realizado por GeoGebra en vista gráfica y algebraica en paralelo (28,6%).
4. Verificar mediante vista algebraica resoluciones realizadas con lápiz y papel (19%).
5. No lo usé yo, lo usaron compañeros/as y docentes; yo sólo observé (19%).
6. Calcular en vista algebraica para anticipar posibles soluciones/resultados (14,3%).
7. Hacer aproximaciones numéricas con tablas de valores (14,3%).
8. Hacer factorizaciones / desarrollo de expresiones / simplificaciones (9,5%).

**9.** Otra finalidad no mencionada anteriormente (9,5%).

Observamos una preponderancia por el uso de la vista gráfica, para verificar resoluciones hechas con lápiz y papel o para anticipar posibles soluciones. En un segundo nivel se encuentra el uso de vista algebraica para los mismos fines y por último se observa un menor uso para aproximaciones numéricas y procedimientos algebraicos.

**Sección 4. Pregunta 3**

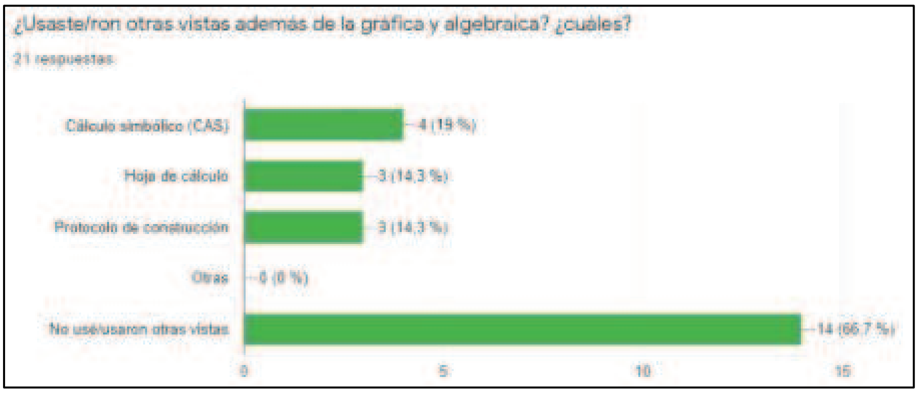



**Imagen A6. Vistas de GeoGebra utilizadas además de la gráfica y algebraica**

En la mayoría de los casos (66,7%) manifestaron que no han usado otras vistas de GeoGebra más que la gráfica y la algebraica. Sólo un 19% mencionan haber utilizado la vista "CAS", un 14,3% "Hoja de cálculo" y un 14,3% "protocolo de construcción".

**Sección 4. Pregunta 4**

Todos los encuestados valoraron como importante el uso de GeoGebra para comprender el concepto de límite y/o resolver ejercicios que lo involucren. La mayoría hace referencia a las posibilidades que ofrece el software a partir de su vista gráfica. En la segunda columna de la Tabla A8, se aprecian distintas expresiones que fundamentan lo antes dicho.

| Respuesta | Justificación de la importancia |
|---|---|
| R1 | Sí, permite comprender mejor la definición formal y poder visualizar (gráficamente) los cálculos que se están realizando en papel. |
| R2 | si, ya que el apoyo de la grafica fue muy útil. |
| R3 | Si, visualizar conceptos que me parecían medios abstractos. |
| R4 | Si ya que aporta un acceso más rápido a una representación grafica del límite. |
| R5 | Dado que la definición formal de límite utiliza nociones de valor absoluto que en un primer año de la carrera puede resultar un poco confusa y complicada de entender. El software GeoGebra resulta ser una gran herramienta para intentar comprender la noción, ya que por un lado dispone de una vista gráfica para que los estudiantes puedan observar el comportamiento de la función. También puede servir para controlar las resoluciones de los ejercicios que realizan. |
| R6 | Creo que es muy útil para ver el límite en forma gráfica, facilitado bastante en relación a las gráficas en papel. |
| R7 | Sí, me parece fundamental que se pueda utilizar el software para comprender el concepto de límite, ya que permite trabajar dinámicamente con las funciones planteadas, ver que va pasando, |

| | |
|---|---|
| | darse cuenta de las limitaciones que tiene el mismo (como la discontinuidad en las funciones racionales que se pueden factorizar), y demás. Desde mi experiencia, por ser una materia de primer año, donde recién nos estamos acostumbrando a la universidad, no tuve la oportunidad de utilizar el software para aprender el concepto de límite, porque no sabía usarlo y tampoco era una herramienta sugerida (que yo me acuerde), recién en segundo año comenzamos a utilizarlo. |
| R8 | Si considero importante el uso de GeoGebra para comprender el concepto de límite y/o resolver los ejercicios porque mediante esta herramienta se puede visualizar de una manera rápida, sencilla e intuitiva los resultados, las gráficas y los procedimientos. Principalmente para cálculo I, considero muy importante tanto la vista algebraica como la vista gráfica para encontrar relaciones entre el comportamiento de una función y su expresión algebraica. |
| R9 | En el Taller de Álgebra y Cálculo recuperamos este concepto y lo trabajamos graficamente, trabajamos con enunciados que involucraban determinar si existía el límite de la función en un c y en caso de existir hallar L y delta apropiado tal que se garantice que \|f(x)-L\|< epsilon dado. (Adjuntó imagen en mail)<br>Considero que esta clase de ejercicio enriquece la enseñanza y el aprendizaje, ya que se pone en juego la dinámica del software y las justificaciones vistas en la clase de Cálculo para poder graficar la situación y arribar a lo solicitado. Recuerdo que al cursar el Taller esta actividad me gustó mucho y me resultó muy interesante para llevar al aula. |
| R10 | Sí, porque permite observar fácilmente las gráficas de las funciones. |
| R11 | Es importante para tener una representación gráfica y "practica" de lo realizado en la hoja. A su vez, si usamos deslizadores es valioso para generarte una "pantallazo" de como se vería la grafica de una función y por consiguiente, cómo trabajarla. En calculo II al momento de calcular áreas entre curvas si se conoce como se comportan las funciones no es necesario graficarlas para saber cómo armar nuestra expresión. |
| R12 | Me parece importante sobre todo al principio, cuando todavía no están tan claros los conceptos ya que permite observar la gráfica de la función y ver a simple vista que pasa en algún punto en particular. |
| R13 | Considero importante el uso de estas herramientas, ya que se gana tiempo a la hora de graficar y observar, al igual que a la hora de hacer cálculos. |
| R14 | Si, ya que es una herramienta que permite visibilizar de forma dinámica la noción de limite, incluso cuando realice el taller de algebra y calculo, el hecho de explorar la definición épsilon delta de limite hizo que pueda cerrar por completo el termino, ya que era muy claro como para cada épsilon existía un delta y la dependencia que existía entre ellos.<br>Si bien el hecho la construcción para poder hallar los valores de épsilon y delta en principio resultaban un poco abrumadores, considero que presentar el "resultado final" e ir mostrando esa dependencia, con el uso de deslizadores, a los estudiantes de Calculo I puede ser de gran utilidad para comprender el concepto. |
| R15 | Particularmente, hace más comprensible lo que dice la definición formal, te muestra qué es lo que estás buscando. |
| R16 | Considero que GeoGebra ayuda mucho a la noción más que nada intuitiva del límite y es un recurso que al estar disponible podría explotar aun más el trabajo de dicho concepto |
| R17 | Es un recurso de gran ayuda a la hora de lograr visualizar puntualmente algunos límites que se complica imaginarlos o hacerlos en papel. |
| R18 | Obviamente que lo considero muy importante, GeoGebra permite un montón de cosas que en papel serían imposibles de realizar, me parece muy importante iniciar en el aprendizaje de límite utilizando esta herramienta. |
| R19 | Si considero que es importante ya que se pueden a provechar las funciones y limitaciones del software para construir la noción intuitiva de límite y para desarrollar la definición formal. |
| R20 | Si, lo considero muy importante pues al trabajar en el "Taller de Álgebra y Cálculo" la definición formal de límite, me percaté de cuanto me hubiera servido en ese entonces poder "jugar" con los deslizadores y comprobar que lo que observaba en GeoGebra era lo que hacíamos en lápiz y papel. No considero que sea necesario enseñar a construirlo, sino trabajar con un modelo ya terminado, justamente para que los estudiantes exploren. |
| R21 | Si, es muy importante saber en qué puntos puede "tener problemas" el límite y no hay mejor manera que ver la gráfica de la función para darse cuenta. |

**Tabla A8. Importancia del uso de GeoGebra para comprender "límite"**

**Sección 4. Pregunta 5**

Sólo 4 estudiantes (R6, R18, R20, R21) manifestaron no haber utilizado GeoGebra al resolver ejercicios/actividades/problemas que involucraban el concepto de límite. El resto de las y los estudiantes plantean que sí lo han hecho y las principales razones de uso fueron: previo a la resolución de un ejercicio para visualizar la gráfica de la función y anticiparse a posibles soluciones (sobre todo si la gráfica de la función involucrada no era conocida), para controlar lo realizado con lápiz y papel y si se encontraban con alguna dificultad algebraica durante la resolución con lápiz y papel (utilizando vista algebraica y/o gráfica).

Recuperamos como importante también la expresión de la respuesta R14 "no solo debía ver el comportamiento en la cercanías, sino evaluar las funciones en x_0, ya que era consciente de que el software "no detecta" en la grafica las discontinuidades evitables", donde se manifiesta que el software tiene limitaciones.

Transcribimos las respuestas de las y los encuestados en la Tabla A9.

| Respuesta | Momento en el que decidía utilizar GeoGebra y justificación |
|---|---|
| R1 | Cuando terminaba de realizar los ejercicios o si me trababa con alguno. También cuándo necesitaba ver una gráfica que más compleja a las acostumbradas. |
| R2 | Al final, para corroborar que los cálculos y conjeturas realizadas eran correctos. |
| R3 | Para graficar la función que me daban y poder controlar lo que estaba haciendo. |
| R4 | En momentos en los que los cálculos analíticos en hoja o no coincidían con los esperados o se me presentaban dudas en la resolución. |
| R5 | Decidía utilizarlo al final de resolver un ejercicio para controlar si me resultado era correcto y poder observar el comportamiento de la gráfica de la función |
| R6 | No recuerdo haber utilizado GeoGebra para límites. |
| R7 | Para corroborar el trabajo realizado (como dije anteriormente prestando atención a las limitaciones del software). |
| R8 | Al resolver ejercicios/actividades/problemas que involucraban el concepto de límite, en los momentos en los cuales más utilicé GeoGebra fue para graficar las funciones que se daban en los ejercicios, mirar el comportamiento de dichas funciones para saber si se encontraban asíntotas, discontinuidades y los tipos de discontinuidades. Además para evaluar la función en determinados puntos y para verificar los resultados encontrados mediante las resoluciones realizadas con lápiz y papel. Utilizaba GeoGebra en estas situaciones nombradas ya que me parece una herramienta muy útil, fácil de usar, accesible y complementaria para comprender mejor no solo lo que pedían los ejercicios/actividades/problemas, sino su desarrollo y el resultado de los mismos. |
| R9 | Cuando utilicé GeoGebra en el cursado de Cálculo I lo utilizaba como guía para ir resolviendo y verificar lo que obtenía en lápiz y papel. |
| R10 | Desde el principio porque agilizaba la realización y me permitía encarar el problema con mayor facilidad. |
| R11 | Utilizar guías como lo son las verticales delta y horizontales épsilon comprendemos el funcionamiento del límite. Si a estas logramos vincularlas de forma en que si se cambia un valor interfiere en las otras paralelas, poseemos una perspectiva casi completa del concepto límite de una función. |
| R12 | Cuando teníamos que calcular limites de funciones los primero que hacía era graficar la función en GeoGebra y ver que pasaba en el punto que se indicaba. Luego trataba de resolverlo analíticamente, ya teniendo una visión previa de lo que sucedía; esto me permitía estar más segura de mi resolución. |
| R13 | A la hora de graficar las funciones involucradas y luego al corregir lo resuelto en lápiz y papel. |

| | |
|---|---|
| R14 | Los utilizaba mayormente cuando no eran funciones polinómicas, o bien cuando se volvían engorrosos los cálculos algébricos.<br>Para verificar lo usaba la mayoría de las veces, ya que hay software que determinados problemas no los resuelven y en el caso de GeoGebra siempre podía obtener la grafica y ver el comportamiento de la función en las cercanías del x_0.<br>Además el ver y lograr entender que a existían las funciones con discontinuidades evitables, me permitió hacer las salvedades de que en esas verificaciones en las graficas, no solo debía ver el comportamiento en la cercanías, sino evaluar las funciones en x_0, ya que era consciente de que el software "no detecta" en la grafica las discontinuidades evitables. |
| R15 | No tenía mucha experiencia con el software, lo utilizaba más que nada para ver gráficamente la función y para ver qué sucedía cuando la x se iba acercando a un valor determinado. |
| R16 | En realidad durante todo el proceso de resolución del ejercicio, ya que en un primer momento lo usaba para tener una idea de la grafica, además también lo usaba para simplificar o trabajar con las expresiones y también para corroborar resultados |
| R17 | Al momento de verificar mayormente, pero si me encuentro trabada y sin salida por ahí intento de utilizar está herramienta para ver si obtengo alguna idea de cómo encarar. |
| R18 | No utilicé el Software durante mi cursado de la materia. |
| R19 | Si no conozco el comportamiento de la función o los valores que toma cerca del punto en cuestión lo utilizo al comienzo para tener una idea general de la misma. Si conozco el comportamiento de la función o tengo la posibilidad de analizar cómo se comporta alrededor de un punto entonces lo utilizo al finalizar la resolución para corroborar que mi idea este correcta. |
| R20 | Antes del taller no utilizaba GeoGebra. Más adelante y/o en este momento utilizo GeoGebra para abordar ejercicios que involucraban/ involucran cuando la función en cuestión no me resulta familiar y/o son funciones trigonométricas . Pues me ahorra tiempo y me ayudan a realizar conjeturas o guiarme en que es lo que está sucediendo en un punto o intervalo para luego poder encarar una demostración formal |
| R21 | No lo use, porque no sabía usarlo bien. |

**Tabla A9. Momentos de utilización de GeoGebra y sus razones**

## ANEXO II

## INSTRUMENTO PARA ANÁLISIS PRELIMINAR DE UNA CONSIGNA

En este anexo presentamos el instrumento "Grillas de escaneo" construido para el análisis preliminar de las consignas.

## A.II.1. Instrumento: Grillas de escaneo

Presentamos el instrumento denominado "Grillas de escaneo" que fue justificado en el CAPÍTULO 4. Como ya explicamos, cuenta con dos grillas.

### Grilla 1. Para analizar consignas que no hacen mención explícita al uso de software

| **Sobre** | | | **Se cumple** | | | **N/C** | **Observación** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución. | | | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | | | |
| | | C5: Solicita argumentos | | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | | |
| | | | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | | | | | |
| | | Numérico | | | | | |
| | | Gráfico | | | | | |
| | | Algebraico | | | | | |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | | | |
| | | | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | | | | | |
| | | | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | | | | |
| | | T Producción Mat. | | | | | |
| | | | | | | | |
| **El uso de GeoGebra** | | ¿Es posible resolverla utilizando el software? | | | | | |
| | | ¿Enriquecería el trabajo matemático? | | | | | |
| | | ¿Permitiría trabajar con más registros de representación? | | | | | |
| | | ¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada? | | | | | |

**Tabla A10. Grilla 1**

## Grilla 2. Para analizar consignas que requieren específicamente el uso de software

| **Sobre** | | | **Se cumple** | | | **N/C** | **Observación** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | NO | Parcial | SI | | |
| **La redacción** | | C1:Enuncia de forma precisa y completa | | | | | |
| | | C2: Formula preguntas en el contexto real | | | | | |
| | | C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución | | | | | |
| | | C4: Proporciona los procedimientos a seguir | | | | | |
| | | C5: Solicita argumentos. | | | | | |
| | | C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples | | | | | |
| **Los registros de representación** | Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver | Verbal | | | | | |
| | | Numérico | | | | | |
| | | Gráfico | | | | | |
| | | Algebraico | | | | | |
| | Tipos de transforma-ciones | ¿Permite tratamiento? | | | | | |
| | | ¿Admite o pide conversión? | | | | | |
| **Las posibilidades de exploración y argumentación** | | ¿Es necesario explorar distintas posibilidades? | | | | | |
| | | ¿Da lugar a la argumen-tación o justificación? | | | | | |
| **La demanda cognitiva que requieren** | | T Memorización | | | | | |
| | | T Proced. Sin Conexión | | | | | |
| | | T Proced. Con Conexión | | | | | |
| | | T Producción Mat. | | | | | |
| **Pertinencia y significatividad del uso de TD para resolver** | | CPS A: Promueve la búsqueda de pruebas matemáticas. | | | | | |
| | | CPS B: Requiere el uso imprescindible de TD | | | | | |
| | | CPS C: Mantiene el enfoque en el objetivo matemático | | | | | |
| | | CPS D: Brinda libertad para recurrir a TD | | | | | |
| | | CPS E: Permite la elección libre de TD | | | | | |

**Tabla A11. Grilla 2**

# ANEXO III

# ANÁLISIS GENERAL DE LIBROS SELECCIONADOS

En este anexo exhibimos el análisis general de las secciones 2.1 y 2.2 de los libros de texto seleccionados. Estos son:

- Libro 1: CALCULUS (Salas et al., 2002).
- Libro 2: Cálculo: Conceptos y contextos (Stewart, 2010).

Para el escaneo consideramos las teorías presentadas en el marco teórico y nos centramos en los siguientes aspectos:

- Descripción general de la sección o apartado de ejercicios de la sección,
- Registro de representación utilizado en ejemplos y ejercicios,
- Necesidad o no de uso de software GeoGebra,
- Análisis del potencial matemático y de la demanda cognitiva de los ejemplos y ejercicios.

## A.III.1 Análisis general de Libro 1

| **Sección 2.1: La noción de límite (pág. 59-71)** |
|---|

En el desarrollo teórico de la sección se expone la siguiente "idea de límite".

| El número $L$ es el límite de $f$ cuando $x$ se aproxima a $c$, y se simboliza $\lim_{x\to c} f(x) = L$, si y sólo si *los valores de la función $f(x)$ se aproximan (tienden) a L cuando $x$ se aproxima a $c$.* |
|---|

Además se presentan:

- Una introducción que plantea que cualquier noción del cálculo es un límite en uno u otro sentido, se realiza un listado de preguntas sobre velocidad instantánea, pendiente y longitud de una curva, área de una región y suma de series, donde la respuesta es siempre: "es el límite de…".

  Consideramos que alguien que se inicia en el estudio del cálculo posiblemente no comprenda este planteo. Estas ideas son interesantes para hacer un cierre o para concluirlas a partir de la resolución de situaciones problemáticas previas.
- Los conceptos de límites laterales intuitivamente, introduciendo la notación y estableciendo que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $c$ existe en caso de que existan los límites laterales y sean iguales.

  Asimismo, plantea la notación de límite a utilizar cuando los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes (o arbitrariamente grandes en valor absoluto) conforme $x$ se aproxime a un valor $c$ especifico por izquierda o por derecha.
- Catorce ejemplos, donde se muestran métodos intuitivos para evaluar (calcular) límites o establecer que no existen. Los métodos son:

  a) Observación del comportamiento de la gráfica de la función.

  b) Análisis verbal (coloquial) del comportamiento de $f(x)$ para valores de $x$ suficientemente próximos a $c$.

  c) Exploración numérica. En algunos casos propone el uso de calculadoras u ordenadores. El planteo del uso de ordenadores se hace recién en el ejemplo 14, en el ejemplo 6 también hay una tabla de valores.

  d) Realización de un trabajo algebraico para simplificar la expresión de la ley de la función y continuación con un análisis gráfico, coloquial o numérico.

En la Tabla A12 presentamos el tipo de registro de representación utilizado en cada ejemplo desarrollado.

| Ejemplos / Registros | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Verbal | X | X | | X | X | X | | | X | X | X | X | X | X |
| Numérico | | | | | | X | | | | | | X | | X (uso TD) |
| Algebraico | | X | | X | | | X | X | X | X | X | X | | |
| Gráfico | | X | X | X | X | X | X | Propuesto | X | | | X | X | X |
| | | | | | | | | | | | | Llamados CASOS EXÓTICOS | | |

**Tabla A12. Registros de representación presentes en los ejemplos**

Los ejemplos 12, 13 y 14 son denominados exóticos, para ellos se proponen distintos caminos y procedimientos de resolución intuitivos (sucesión de números reales que converge al valor para el cual se está tomando el límite, graficas con software, uso de calculadora o software para armar tablas de valores). Es necesario recurrir a las TD (para graficar o hallar imágenes de la función en valores próximos a los que se quiere analizar si el límite existe) o a estudios matemáticos más avanzados para arribar a una conclusión. El ejemplo 12 en particular, permite ver como el uso de TD es necesario pero insuficiente, ya que la simple evaluación para valores próximos a 0 (sin que sigan una regularidad), o la mera observación del gráfico, no permiten concluir. En este caso, para analizar el límite de la función cuando $x$ tiende a 0, por un lado se evalúa la función en elementos de una sucesión que converge a 0 y se obtiene 1, y luego se evalúa la función en elementos de otra sucesión que converge a 0 y se obtiene 0. Este método es útil para probar la no existencia del límite, pero no es posible su uso para mostrar la existencia.

En el texto se aclara que todos los procedimientos estudiados son intuitivos, que pueden generar incertidumbre, que se necesita formalizar y es lo que se hará en las secciones próximas.

Se cierra la sección con una aplicación del concepto, la del cálculo de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. La cual corresponde a una de las preguntas de la introducción.

## Ejercicios 2.1 (pág. 68)

Este apartado cuenta con 64 ejercicios.

En los ejercicios del 1 al 12, los enunciados incluyen graficas de funciones. Éstos no solicitan ningún tipo de fundamento o justificación respecto de lo que se tiene en cuenta para establecer los resultados. Están divididos en dos tipos de ejercicios. Del 1 al 10 (tipo A) solicitan establecer el valor de un límite cuando $x$ tiende a un $c$ particular, los límites laterales y $f(c)$. Del 11 al 12 (tipo B), requieren que se indiquen valores de $c$ para los cuales el límite no existe. La diferencia entre estos dos tipos de ejercicios radica en que, en los de tipo A se señala explícitamente el valor $c$, mientras que en los de tipo B, el valor $c$ debe ser hallado.

Aquí entra en juego la idea de límite ($L$) propuesta en el inicio de la sección 2.1: $L$ es un número real, $L$ es único y el significado de la expresión "cuando $x$ se aproxima a $c$". Además en relación a esta última expresión se habilita a pensar en el interrogante: ¿sólo por valores menores que $c$, mayores que $c$ o ambos?

En los ejercicios del 13 al 48 la consigna es: "Decidir con razonamientos intuitivos si existe o no el límite indicado y calcularlo en caso de existir". En todos se expresa un límite (cuando $x$ tiende a un $c$ particular) con la ley que define la función. Podemos observar que:

a) Muchos de ellos son posibles de resolver: "analizando" el comportamiento de $f$ para valores de $x$ cercanos a $c$", desde RRV, RRA o RRN y/o "graficando las funciones involucradas en los límites", desde un RRG. En este último caso, con el uso del software GeoGebra no habría casi problema para determinarlos. La discusión aquí podría darse fundamentalmente en aquellos casos donde se presentan indeterminaciones del tipo "$0/0$", donde al graficar la función se puede observar una curva continua en $x = c$ (aunque no lo sea) o bien que la gráfica de función presente una asíntota.

b) En el 47 y el 48 se presentan situaciones especiales, $\lim_{x\to 1}((\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2})/(x-1))$ y $\lim_{x\to 5}((\sqrt{x^2+5}-\sqrt{30})/(x-5))$ respectivamente. Ninguna de las estrategias presentadas en el desarrollo de la sección son de utilidad para resolverlos, dado que los límites existen pero son números irracionales y para un trabajo desde el RRA es necesario aplicar la técnica de racionalizar (no presentada previamente). Además, si se grafican las funciones involucradas con GeoGebra se puede observar y conjeturar que existe el límite, pero dadas las particularidades del software (aproxima valores irracionales) no podrán establecerlo desde dicha exploración. Si hacen una tabla de valores tampoco podrán determinar el valor exacto del límite. Esto hace que el uso del software sea imprescindible pero insuficiente: "Hay que hacer algo más" (matemático) para establecer que los resultados son: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{5}{\sqrt{30}}$ respectivamente.

En los ejercicios del 49 al 55, se solicita calcular $[(f(x) - f(c))/(x - c)]$, determinar si existe $\lim_{x \to c}[\left(f(x) - f(c)\right)/(x - c)]$ y dar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $f$ en $(c, f(c))$. Se pide que apliquen lo presentado como aplicación sobre el final de la sección 2.1.

Hasta el 52 inclusive, para calcular el límite, se puede usar la estrategia de factorizar polinomios (presentada en la sección 2.1) y luego simplificar la expresión para hallar una función que tenga el mismo comportamiento que la original en las cercanías del punto de interés.

En el 53 se sugiere la racionalización del numerador, y en el 54 la reescritura de la función valor absoluto como una función por tramos. En éste último, no existe el límite del cociente incremental, que implica la no existencia de la derivada y por ende, la no existencia de la recta tangente en $(0, f(0))$.

En el 55, aparece un nuevo problema. Es fácil determinar, desde un RRA y RRV, que el límite solicitado no existe, pero si se grafica la función involucrada se puede observar intuitivamente que la función admite recta tangente en $(0,0)$. Una conclusión a la que se puede arribar a partir de esta situación es que algunas veces el límite del cociente incremental no existe pero la recta tangente sí. En este caso la recta tangente a la gráfica de $f$ en $(0,0)$ es vertical. Sólo el análisis de este caso no basta, es necesario un estudio más profundo para estudiar bajo qué condiciones esto puede darse.

En los ejercicios 56 y 57, se retoma y profundiza el trabajo realizado en la resolución del ejemplo12 de la sección 2.1.

En los ejercicios del 58 al 63 se solicita estimar el límite de una cierta función cuando $x$ tiende a 0, a saber, $f(x) = (1 - \cos x)/x$, $f(x) = (\tan 2x)/x$, $f(x) = (x - sen\, x)/x^3$, $f(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)/(x - 1)$ y $f(x) = (2^x - 1)/x$ respectivamente. En el 61 se presenta un error en el enunciado, pues por los valores en los que indica evaluar la función debería proponer el cálculo del límite cuando $x$ tiende a 1, además como es una función definida en el conjunto de números reales positivos y cero no tiene sentido el límite planteado. En estos ejercicios se imponen los registros de representación desde los cuales abordar la resolución, un RRN indicando específicamente los valores en cuales evaluar y un RRG, dado que sugiere graficar la función y hacer zoom en las cercanías de $x = 0$. Implican procesos rutinarios, se focalizan en que se dé una respuesta y no solicitan explicaciones que permitan evidenciar la comprensión (TPSC). Como se solicita ‘estimar’ el valor del límite, puede ser un punto fuerte para discutir, dado que ya en el ejemplo 12 de la sección 2.1 se hace visible que no basta con evaluar la función para algunos valores próximos al punto de interés y observar lo que sucede desde su gráfica. Esta estimación quedaría en el plano de una conjetura.

Es pertinente aclarar que en el 61, utilizando la técnica de racionalización del numerador de la expresión de la función involucrada se pueden calcular el límite en forma precisa, sin embargo no sugiere el trabajo desde el RRA e impone los ya mencionados.

En el ejercicio 64 se solicita estimar el valor de $3^{\pi}$ desde un RRN, evaluando la función $3^{x}$ en una sucesión (no impuesta) de números racionales que converja al número $\pi$. La existencia de este límite es inminente dada la continuidad de la función exponencial en su dominio. Es necesario pensar en el sentido que se le quiere otorgar a estas cuentas cuando con el uso de una calculadora se puede estimar en forma directa.

**Observaciones generales Sección 2.1 y Ejercicios 2.1**

- En esta sección se presenta la noción intuitiva de límite, límites laterales y la notación correspondiente.
- En el apartado teórico se abordan resoluciones de consignas dentro distintos registros de representación (RRN, RRG, RRA y/o RRV); explicitándose sobre el final que estos procedimientos son intuitivos y que es necesario formalizar. Se plantea, como aplicación, el cálculo de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- En relación a los ejercicios propuestos, observamos que:
  a) En los primeros se pretende abordar la idea intuitiva de límite desde la interpretación de representaciones gráficas de funciones y la familiarización con la notación.
  b) De los ejercicios 13 a 48 se da libertad, a quien resuelve, de utilizar procedimientos intuitivos para establecer la existencia o no de un límite y solicita calcularlo si existe; por lo que se podría abordar desde cualquier registro de representación. La necesidad de trabajar desde un RRA podría darse en casos donde el límite no es un número entero y/o la función no es continua en el valor para el cual se calcula el límite; por ejemplo los ejercicios 47 y 48. Éstos pueden enmarcarse como TPM (Stein et al., 2000).

     Particularmente, estos ejercicios permiten visibilizar en el momento de la resolución la insuficiencia del trabajo desde un RRN y RRG. Además es poco probable que las funciones involucradas puedan ser graficadas con lápiz y papel, es de esperarse que para una resolución desde un RRG se utilice un software graficador (uso de TD por necesidad). La valoración en relación al uso de las TD la consideramos como positiva. Además no son fácilmente identificables los valores de los límites desde un RRN. La construcción de una estrategia de resolución algebraica puede surgir como necesidad.

c) Los ejercicios del 49 al 55 son direccionados, y se imponen los registros de representación desde los cuales trabajar. En términos de Stein et al. (2000) son TPSC, y en general no proponen posibilidades de exploración y argumentación.

- En esta sección la mayoría de las consignas tienen PM (Barreiro et al., 2016) pobre. El PM de algunas consignas (por ejemplo 47 y 48) es rico, esto merece un análisis más profundo que el presentado aquí para justificar la afirmación.

**Sección 2.2: Definición de límite (pág. 71-80)**

En principio, se plantea coloquialmente para qué $x$ debe estar definida la función $f$ si se quiere calcula: $\lim_{x \to c} f(x)$.

Luego explica coloquialmente que significa $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Continúa expresando dos enunciados del concepto en paralelo; uno informal, incorporando expresiones con valor absoluto para expresar distancias y otro formal, donde enuncia el concepto en términos de épsilon y delta.

Concluye aglomerando lo expresado en la definición métrica de Límite de una función $f$ cuando $x$ tiende a $c$.

A continuación realiza un análisis de las relaciones planteadas en la definición desde un RRV y un RRG señalando las franjas de anchura $2\varepsilon$ y $2\delta$. Recupera las relaciones de épsilon y delta, pero sin mucha profundidad.

Plantea luego 7 ejemplos, en los que se muestra como demostrar la existencia de un límite por definición. En todos ellos se utilizan 3 tipos de registros de representación: RRV (comentarios aclaratorios o explicaciones coloquiales), RRG (gráfica de función y delta hallado para un épsilon dado) y RRA (uso de relaciones de igualdad y de desigualdad involucradas en la definición métrica de límite).

Entre los ejemplos 5 y 6 expresa cuál es el procedimiento a seguir para hallar delta ($\delta$) dado un épsilon ($\varepsilon$). Explicita que en los ejemplos 6 y 7 es un poco más complejo el tratamiento. En ellos el $\delta$ es el mínimo entre dos deltas, uno impuesto y uno hallado, $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Es necesario usar algún artificio extra para establecer las relaciones. Las funciones involucradas en los 7 ejemplos están definidas por una única expresión algebraica, es decir, no se presentan funciones definidas por tramos.

Presenta luego formulaciones equivalentes a $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y una idea de cómo se pueden deducir esas relaciones, pero no profundiza. Muestra como pasar de una expresión a otra con un ejemplo en particular (ejemplo 8).

Continúa expresando las definiciones métricas de límites laterales. Expresa coloquialmente ideas en relación a límite bilateral o límite y límites unilaterales o laterales.

En los ejemplos 9 y 10 presenta el cálculo del límite de una función definida por tramos. En el caso del ejemplo 9 el límite no existe cuando $x$ tiende a 0, y en el caso del ejemplo 10 el límite de la función existe cuando $x$ tiende a 1; 0 y 1 son los valores donde se presenta un cambio de ley en las funciones respectivamente. En el ejemplo 9 no explicita por qué analiza la existencia o no del límite para $x$ tendiendo a 0 y no para $x$ tendiendo a otro valor. Lo mismo sucede en el ejemplo 10 con $x$ tendiendo a 1. La definición métrica no se retoma en estos ejemplos, no se explicita por qué no se cumple en el ejemplo 9 y sí se cumple en el ejemplo 10.

La Tabla A13 muestra los registros de representación utilizados en cada ejemplo.

| **Ejemplos** / **Registros** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Verbal | X | X | X | X | X | X | X | | | |
| Numérico | | | | | | | | | | |
| Algebraico | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Gráfico | X | X | X | X | X | X | X | | X | X |

**Tabla A13. Registros de representación presentes en los ejemplos**

## Ejercicios 2.2 (pág. 78 - 80)

Este apartado se proponen 68 ejercicios.

Los ejercicios del 1 a 20 solicitan determinar, al modo de la sección 2.1, si existen o no los límites indicados y calcular los límites que existan. En la Tabla A14 señalamos características generales de los mismos en relación al tipo de funciones involucradas y las causas de existencia o no de los límites.

| | **Funciones definidas por una sola expresión** | | | | | | | **Funciones definidas por tramos** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sin indeterminación | | Con indeterminación 0/0 | | | Con indeterminación inf/inf | | Análisis donde hay cambio de ley | | | Análisis donde NO hay cambio de ley | | |
| | Existe | L. infinito | Existe | L. infinito | Laterales distintos | Existe | No existe | Existe | No existe (limites laterales distintos) | No existe (Al menos un límite lateral infinito) | Existe | No existe (limites laterales distintos) | No existe (Al menos un límite lateral infinito) |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Límite | 1<br>4<br>9 | 6<br>10 | 3 | 2<br>5<br>8 | 7 | | | 17<br>18 | | | 19<br>20 | | |
| Límite lateral | 12<br>13<br>14 | 11 | | | | | | 15<br>16 | | | | | |

**Tabla A14. Ejercicios y sus características**

En estos ejercicios observamos que:

a) Al igual que del 13 al 48 del apartado Ejercicios 2.1, muchos de ellos son posibles de resolver: “analizando el comportamiento de $f$ para valores de $x$ cercanos a $c$” y/o “graficando las funciones involucradas en los límites”. Con el uso GeoGebra, por ejemplo, no habría casi problemas para determinarlos. Las consignas no imponen el registro de representación desde el cual abordarlos.

b) Con el uso de GeoGebra, para graficar las funciones involucradas y conjeturar el valor del límite, aquellos ejercicios donde se presentan indeterminaciones del tipo 0/0 podrían permitir una discusión (en torno al concepto). En estos casos al graficar la función se pueden observar una curva continua en $x = c$ (aunque la función no lo sea) o bien que la gráfica presenta una asíntota.

c) En general los ejercicios implican procesos rutinarios, exigen poca demanda cognitiva para ser resueltos y se focalizan (de acuerdo a cómo se enuncian) en la producción de respuestas correctas (TPSC). Sin embargo, de acuerdo a lo señalado en b), en algunos casos podrían reformularse los enunciados o pensarse una gestión de clase que habilite a la discusión sobre el concepto de límite.

Los ejercicios 21 y 22 recuperan el trabajo con la definición presentando el enunciado desde un RRG, escoger el delta adecuado (entre varios representados en la gráfica) para un épsilon dado (en la gráfica) y para qué épsilon (entre varios representados) el delta dado es válido, respectivamente. La resolución implica trabajar dentro de este registro.

Los ejercicios del 23 al 26 recuperan el trabajo con la definición presentando el enunciado desde un RRA. La resolución podría desarrollarse dentro de este registro o desde el RRG. Dado un épsilon particular, se solicita hallar el delta más grande posible. Todas las funciones involucradas en los límites son polinómicas de primer grado. En estos ejercicios no se solicitan explicaciones respecto de lo que se analiza para la escogencia de épsilon o delta, por esta razón el PM de las consignas es pobre. Sin embargo pueden ser consideradas una

TPCC (Stein et al., 2000) ya que exigen la atención de los estudiantes sobre el uso de procedimientos para desarrollar niveles más profundos de comprensión del concepto de límite ligado a su definición métrica. Requieren de cierto esfuerzo cognitivo, dado que se pueden seguir procedimientos generales, pero deben utilizar el concepto matemático que subyace.

Del 27 al 31 se recupera el trabajo con la definición solicitando demostración $\varepsilon - \delta$ para límites ya calculados. Se indica el procedimiento a seguir (mostrado en ejemplos de la sección 2.2). Esto implica un trabajo dentro del RRA. En todos los casos las funciones involucradas son polinómicas de primer grado (o el valor absoluto de estas). Consideramos estas consignas como TPSC.

En el 33, se presentan distintas implicaciones entre desigualdades con valor absoluto que se asemejan a la planteada en la definición métrica. Estas pueden permitir recuperar ideas respectos de la definición. No está explicito el registro de representación desde el cual se debe trabajar, por lo que habilita al abordaje desde cualquier registro. No solicita explícitamente justificaciones de la verdad o falsedad de los enunciados, sin embargo para poder determinar el valor de verdad de cada afirmación es necesario “hacer algo matemático”, y en este sentido puede considerarse que el PM de la consigna es rico y además que es un TPCC.

En el 34 se solicita demostración de una desigualdad muy útil en cálculo (si $|A - B| < E$ para cada $E > 0$, entonces $A = B$). Presenta la sugerencia para su resolución. Si bien solicita una demostración, indica cómo hacerla. En 35 y 36 se pide expresar un límite de 4 formas aplicando lo explicitado en teoría. Sólo implica la reproducción de definiciones alternativas de límite. La resolución se daría dentro de un RRA y su objetivo es la memorización de dichas definiciones. No implica el aprendizaje de ningún procedimiento (TM).

Del 37 al 40 se solicitan demostraciones de resultados teóricos. Es necesario aplicar la definición métrica para llevarlas a cabo (TPSC). El abordaje debe darse dentro de un RRA.

Del 41 al 45 requieren demostrar límites por definición métrica. Son más complejos que los presentados del 27 al 32. Las resoluciones implican encontrar un $\delta$, el cual se determina como mínimo entre dos deltas, uno dado y otro hallado ($\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$). Del 42 al 45, se puede resolver siguiendo algunas ideas de los ejemplo 6 y 7 del apartado sección 2.2 y/o el procedimiento del ejercicio 41. Son consignas con PM pobre dado que no habilitan posibilidades de exploración y argumentación, e implican un trabajo desde el RRA.

El 47 requiere demostración de la no existencia de límite de la función de Dirichet para ningún número $c$ y el 46, la demostración de límite cuando $x$ tiende a 0 de una función similar. Este último implica la aplicación de definición en una situación diferente a las antes abordadas, no se puede aplicar un procedimiento general descuidadamente (TPCC).

Del 48 al 54 se solicitan demostraciones en las que entra en juego la definición para probar equivalencias entre expresiones que involucran límites o propiedades. No se puede aplicar un procedimiento general descuidadamente (TPCC) y parcialmente se solicita la argumentación ya que es necesario hacer una demostración formal. No se explicita el tipo de registro de representación en el cual se debe trabajar, pero consideramos que es posible el abordaje desde un RRA o un RRG.

Del 55 al 58 solicitan calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un $(c, f(c))$ para un $c$ dado, indicando el límite que debe calcularse. Imponen el trabajo desde un RRA. Asimismo del 59 al 64 requieren el cálculo de un límite, el de la función derivada de una función, aunque no menciona tal concepto. Impone el trabajo desde un RRA. El PM de las consignas es pobre y se pueden considerar TM.

Del 65 al 68 se pide estimar el límite de un cociente incremental. Propone un trabajo desde un RRN. Sugiere usar calculadora o software, indica los valores de $c$ (próximos a cero en los cuales evaluar ese cociente). Las técnicas estudiadas en el libro (hasta allí) no permiten calcularlos directamente. Excepto en el 66.

Sobre el final de la sección Ejercicios 2.2, se presenta el denominado "PROYECTO 2.2: Hallar gráficamente un delta para un épsilon dado". Se hace una explicación de lo que expresa la definición métrica para límite cuando $x$ tiende a 2 de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$, desde un RRG y RRN. Esta propuesta podría cobrar más sentido si se plantea al inicio de la sección 2.2, en el proceso de incorporación de la definición métrica. También se proponen cuatro ejercicios, indicando el trabajo con software, donde se dan valores para épsilon y se solicita encontrar los deltas.

**Observaciones generales de Sección 2.2 y Ejercicios 2.2**

- En esta sección se presenta la definición métrica de límite, se analizan las desigualdades y las implicaciones involucradas desde RRG, RRV y RRA.
- Hay un interés por trabajar las relaciones y desigualdades involucradas en la definición desde distintos registros de representación, RRG, RRA y RRV; generalmente se prioriza o direcciona hacia el trabajo dentro de un tipo de registro en cada consigna.

- En el apartado Ejercicios 2.2 se presentan consignas de diferentes índoles: TM, TPSC y TPCC (Stein et al., 2000). Particularmente, en principio, consideramos una TPCC al ejercicio 33, que habilita la exploración y argumentación sin imponer un registro desde el cual trabajar y permite el surgimiento de conversiones de registros de representación durante la resolución. Puede posibilitar luego optar por el más conveniente y avanzar en el tratamiento correspondiente. Cuestión que resulta de interés para nuestro estudio.
- La incorporación del cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto se presenta en forma forzada. Consideramos que se propone en esta parte del libro para “hacer practicar” cálculos de límites de cocientes incrementales de forma “mecánica”. No estamos seguras que aporte necesariamente a la comprensión de la definición métrica, objetivo de estos apartados.
- Por lo expuesto, en esta sección existen consignas con PM (Barreiro et al., 2016) rico y PM pobre. En algunos casos el uso de GeoGebra podría enriquecer el análisis.

## A.III. 2. Análisis general de Libro 2

### Sección 2.1: Los problemas de la tangente y la velocidad (pág. 90)

En el apartado teórico, expresa cómo surge la noción de límite a partir del hallazgo de la recta tangente a una curva por un punto de la misma y la velocidad de caída de un objeto en un tiempo determinado.

En cuanto al *problema de la tangente*, narra sobre las diferencias entre trazar la recta tangente a una circunferencia y a una curva cualquiera. Resuelve dos consignas, en los ejemplos 1 y 2.

En el Ejemplo 1 la consigna es: Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1,1)$. En la resolución, se encuentran las pendientes de las rectas secantes a la parábola que pasan por $P(1,1)$ y puntos cercanos, se exponen tablas con estos valores. Se presentan gráficas con la parábola y rectas secantes que pasan por $P(1,1)$ y $Q(x, x^2)$, con la intención de mostrar que las rectas secantes tienden a tomar la posición de la recta tangente a medida que $Q$ se aproxima a $P$. Se establece que la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes $PQ$. El valor se establece a partir de observar numéricamente las tendencias de las pendientes de las rectas secantes, conforme $Q$ se aproxima a $P$. Se halla la ecuación analíticamente.

En el Ejemplo 2 se plantea un problema en contexto (función que modeliza la carga de una batería de una cámara fotográfica en función del tiempo). En la resolución de la consigna, se realiza lo que en ella se solicita: a partir de la tabla de datos dada, se hace un gráfico de la situación, considerando los puntos del gráfico se calculan pendientes de las secantes y se estima la pendiente de la tangente en un punto. Para esto último se toman dos pendientes de rectas secantes (una a izquierda y una a derecha) y se calcula el promedio. Luego propone, trazar aproximadamente la recta tangente en el gráfico y estimar usando los catetos de un triángulo rectángulo. En esta resolución se deja de lado el contexto y se trabaja sobre lo matemático; en el desarrollo no se hace ningún comentario respecto de lo que representa la pendiente de la recta tangente para ese valor de $t$, sólo se menciona en el enunciado de la consigna.

En relación al *problema de la velocidad*, narra sobre lo que sucede con el velocímetro del auto, plantea que la velocidad no es constante, que es instantánea. Luego desarrolla el Ejemplo 3, en el que analiza este concepto (velocidad instantánea) con un ejemplo de caída libre de una pelota. El desarrollo es extenso y confuso. Presenta la función $s(t) = 4.9\,t^2$, como la distancia recorrida por un cuerpo que cae. Define la velocidad instantánea como el límite de las velocidades promedio, durante periodos de tiempo cada vez más cortos que se inician en $t = 5$ (tiempo para el cual se quiere calcular la velocidad instantánea). Realiza un trabajo desde un RRN calculando las velocidades promedio y establece que la velocidad instantánea en $t = 5$ es $49\ m/s$ . No utiliza, para hallar velocidades promedio, intervalos de la forma $[a, 5]$, con $a < 5$.

La fórmula presentada corresponde a la de distancia recorrida en un cierto tiempo t y no la posición del objeto, en este sentido se considera la celeridad como velocidad.

Luego señala que esto mantiene relación con el problema de las tangentes. Plantea un cociente incremental $((s(a + h) - s(a))/h)$ para expresar la velocidad promedio en un intervalo de tiempo $[a, a + h]$, y que la velocidad instantánea en $t = a$ (pendiente de la recta tangente) es el límite de ese cociente cuando $h$ tiende a 0. Grafica la función $s$ y expresa lo que representa ese cociente incremental geométricamente.

Finaliza afirmando que para resolver problemas de tangentes y velocidades, debemos poder hallar límites. Es decir, intenta mostrar la necesidad del concepto para resolver determinados problemas.

**2.1 Ejercicios (pág. 94)**

En esta parte se presentan 9 consignas. Todas ellas son para aplicar lo desarrollado en la Sección 2.1.

En los ejercicios 1, 2, 5, 6, 7 y 8 se presentan situaciones en contextos reales, particularmente del cálculo de velocidades promedios y aproximaciones de velocidades instantáneas, propiciándose que en la resolución se utilice un RRN. En los ejercicios 1, 2 y 7 los datos están dados en una tabla (RRN); en cambio, en los ejercicios 5, 6 y 8 se dan las leyes de las funciones que modelizan cada situación; y en los ejercicios 1 y 7 se pide, además del cálculo de velocidades promedios e instantáneas, que se representen las gráficas de las funciones y se estime a partir de ellas las pendientes de las rectas tangentes.

Los ejercicios 3, 4 y 9 abordan particularmente el problema de la recta tangente sin utilizar un contexto de la realidad.

En los ejercicios 3 y 4 se da la ley de la función y se sugiere uso de calculadora para trabajar con seis decimales. Se piden cálculos de pendientes de rectas secantes y que se conjeture la pendiente de la recta tangente en un punto dado. La consigna direcciona los procedimientos a seguir, da los puntos que se deben considerar para las rectas secantes. En este sentido las actividades de conjeturar, explorar y argumentar son limitadas. Las consignas piden, en un principio, conjeturar el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto particular y luego solicitan hallar la ecuación de la recta tangente; es posible que realizar los cálculos con 6 decimales haga suponer que es suficiente para asegurar el valor del límite, cuando en realidad no es siempre válido. En el ejercicio 4 pide además que se grafiquen la curva, dos rectas secantes y la recta tangente hallada.

En el 9 se solicita explícitamente que se resuelva con un software graficador. Se pide que encuentre pendientes de secantes que contengan el $P(1,0)$ y $Q(x, sen(10\pi/x))$ para $x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$. Por la formulación de esta consigna se da a entender que, lo que se puede conjeturar a partir del cálculo de las pendientes de estas rectas secantes es erróneo. Luego se solicita el uso del graficador para observar que a pendiente de la recta tangente en $P$, no es el estimado. Por último se requiere selección de rectas secantes apropiadas para estimar la pendiente de la recta tangente en $P$.

**Observaciones generales de Sección 2.1 y Ejercicios 2.1**

- En esta sección no hay aportes teóricos formales en relación al límite puntual, sólo se presentan el concepto de tangencia de forma intuitiva y ejemplos donde se hace necesario usar la idea de límite para calcular pendientes de rectas tangentes a curvas en puntos de las mismas y velocidades instantáneas (en situaciones contextualizadas en la realidad). Existe en el texto un esfuerzo por mostrar la relación entre estos dos conceptos (tangencia y velocidad instantánea) y el de límite puntual, resolviendo problemas dentro de los RRN, RRG y/o RRV.
- Los ejercicios de práctica (Ejercicios 2.1) son consignas en las que, para su resolución, se debe imitar lo que se desarrolló previamente. Hay intentos de proponer el trabajo desde más de un registro de representación, pero esto es impuesto. Consideramos que pueden ser consideradas TPSC (Stein et al., 2000). Excepto el ejercicio 9, donde, si bien las actividades son direccionadas, puede considerarse TPCC. Los aspectos relativos a la insuficiencia del trabajo sólo desde el RRN se recuperan en la sección siguiente con otros ejemplos.
- En el ejercicio 9 es imprescindible el uso de software graficador y no se pierde de vista el objetivo matemático, por lo que, en este caso, la valoración en relación a las TD la podemos considerar positiva.

- En general el PM de las consignas (Barreiro et al., 2016) es pobre pues, las propuestas de exploración y planteo de conjeturas son direccionadas y prácticamente no solicitan la argumentación por parte de quien resuelve.
- Los cambios de registros de representación también son impuestos por las consignas, no se da libertad, a quien resuelve, para pasar de un registro a otro.

**Sección 2.2 límite de una función (pág. 95)**

En este apartado se dejan de lado los contextos presentados en la sección 2.1 y se da lugar a la noción de límite y los métodos para calcular. Inicialmente se estudia el comportamiento de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a $x = 2$. Se establece que $\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 2) = 4$, después de un análisis desde los RRN, RRG y RRV. Incorpora la notación y una aproximación intuitiva de la definición de límite en forma coloquial mostrando gráficos de funciones (continuas y discontinuas) que tienen el mismo límite cuando $x$ tiende a un valor $a$. Presenta *9 ejemplos*, donde se resuelven consignas de diferentes características.

En el ejemplo 1, plantea encontrar el valor de $\lim_{x\to 1}((x-1)/(x^2-1))$. En la resolución se muestra y describe como conjeturar el valor del límite, se presentan análisis desde RRV, RRN y RRG.

El ejemplo 2, solicita encontrar el valor de $\lim_{t\to 0}((\sqrt{t^2+9}-3)/t^2)$. En la resolución se presentan análisis desde RRV, RRN y RRG. Se plantea cómo, en este caso, un estudio desde un RRN es insuficiente para determinar el valor del límite. Se muestra cómo la calculadora puede mostrar valores erróneos al aproximar, y cómo un software graficador podría ayudar a detectar ese error.

En el ejemplo 3, plantea intuir el valor de $\lim_{x\to 0}((sen\, x)/x)$. Se usan RRN y RRG para conjeturar que el valor es 1. Se afirma que esto es correcto y que será argumentado en una sección posterior.

En el ejemplo 4, la consigna es investigar $\lim_{x\to 0}(sen(\pi/x))$. Se presentan análisis desde RRV, RRN y RRG. Muestra que éste es otro ejemplo donde el trabajo desde un RRN puede llevar a errores de conjetura, proporcionando la idea de que límite es $0$, cuando en realidad no existe por oscilación (evalúa la función en la sucesión: $(1/n)$).

El ejemplo 5, presenta otro caso donde el RRN no es suficiente para establecer el valor de un límite. Al tratar de encontrar el $\lim_{x\to 0}(x^3 + (\cos 5x)/10.000)$ desde este registro puede llevar a considerar que es 0, cuando en realidad es 0,0001.

Explícitamente expresa, recuperando los ejemplos 2, 4 y 5, que es necesario buscar otras formas de calcular los límites, que lo numérico no basta.

En el ejemplo 6, se presenta la función H de Heaviside y se describe verbalmente su comportamiento cuando la variable independiente tiende a 0. Se utiliza el ejemplo 6 para introducir los conceptos de límites laterales y su notación.

En el ejemplo 7, la consigna propone que a partir de la observación del gráfico de una función se expresen los valores (si existen) de los límites y límites laterales cuando $x$ tiende a 2 y cuando $x$ tiende a 5. En un caso el límite existe y en el otro no por ser distintos los límites laterales hallados.

En el ejemplo 8 se realiza un análisis desde RRV, RRN y RRG para establecer que $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ no existe.

En el ejemplo 9 se retoma el límite hallado en el inicio de la sección ($\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 2) = 4$), y mediante un RRV y un RRG, se realiza un análisis para responder a la pregunta: ¿qué tan cerca de 2 tiene que estar $x$ para asegurar que $f(x)$ esté dentro de una distancia de $0{,}1$ del número 4? No se indica uso de software graficador, pero la resolución se relata como si se estaría haciendo uso de un software. Hay planteos de desigualdades desde la observación del gráfico, esto no es totalmente certero ya que el software puede aproximar. No se presenta el planteo de desigualdades con valor absoluto para deducir algebraicamente. Se plantea que ésta idea puede usarse para formular la definición métrica de límite que se estudia en el apéndice D. Consideramos que esta consigna puede ser reformulada para convertirse en una TPM (Stein et al., 2000) con PM rico (Barreiro y Rodriguez, 2014), habilitando la exploración y la argumentación desde distintos registros de representación.

## 2.2 Ejercicios (pág. 102)

En esta parte se presentan 32 ejercicios.

En los ejercicios 1 y 2, se piden explicaciones, argumentos, sobre expresiones que involucran límites, para dar cuenta de la comprensión de la noción intuitiva del concepto y la notación.

Los ejercicios del 3 al 6 son réplicas del ejemplo 7, se piden argumentos en caso de que el límite no exista, se debe observar la gráfica de la función para establecer los valores de los límites indicados o imágenes de la función.

En los ejercicios 7 y 8 se solicita trazar la gráfica de funciones por tramos con dominio en R y hallar los valores de $a$ para los cuales $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

En los ejercicios del 9 al 11 se solicita que se grafique con software para completar, como se hizo en los ejercicios de 3 a 6, límites laterales de $f$ cuando $x$ tiende a cero y límite cuando $x$ tiende a cero. En el 9, el límite no existe y no existe uno de los laterales, en el 10 y 11 existen los laterales, pero son distintos.

En el 12, se solicita lo mismo que en los del 3 al 6 pero en un contexto real y se pide explicación de los resultados en términos de la situación del problema.

Los ejercicios del 13 al 16 exigen una producción, se dan ciertas condiciones sobre una función y se debe proponer un gráfico que las satisfaga.

En los ejercicios del 17 al 20, se solicita que se intuya el valor del límite indicado (correcto a seis lugares decimales), en caso de existir, evaluando la función propuesta en números dados. En todos casos se propone el cálculo del límite en un valor donde la función no está definida. En el 18 existe una discontinuidad infinita en $x = -1$, por lo que el trabajo desde el RRN puede bastar para dar una respuesta. En el 19 y el 20 mediante aproximaciones numéricas se puede llegar con mayor certeza a intuir el límite, dado que son valores enteros. Sin embargo, en el 17 es más difícil intuir el valor exacto del límite ya que es un número racional no entero. Esto puede habilitar el surgimiento de un RRA por necesidad.

Además si se trabaja con GeoGebra, por ejemplo, es probable que se presenten la vista algebraica, gráfica y numérica en paralelo, cuestión que nos permite afirmar nuevamente que en el 17 es más difícil determinar el valor exacto del límite, no así en los ejercicios 19 y 20 donde el software grafica una curva continua en los puntos de interés (a pesar de no serlo).

En los ejercicios del 21 al 24 se pide estimar límites de funciones difíciles de ser graficadas sin un software, indica trabajar desde un registro numérico, realizando una tabla de valores, y luego desde uno gráfico, solicitando el uso de calculadora graficadora para confirmar lo estimado. En parte, se está proponiendo lo mismo que en los ejercicios previos a estos, pero sin indicar los valores en los cuales evaluar la función.

Del 25 al 27, se indica específicamente trabajar con un software graficador. Aquí aparecen casos de límites especiales. Sugiere graficar para estimar y luego ver qué sucede numéricamente cuando se evalúa la función en valores cercanos al punto de interés, o el proceso inverso.

En los ejercicios 28 y 29 no indica trabajar con software específicamente. En 28 se explicita el límite que permite determinar la pendiente de la recta tangente de la función

$f(x) = 2^x$ en el punto (1,0) y se solicita su estimación hasta 3 cifras decimales sin dar los valores en los cuales evaluar. En el 29 se solicita evaluar una función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ en valores próximos a 0 (dados), mayores que 0, y estimar el límite de $f$ cuando $x$ tiende a 0. Luego se pide evaluar en otros valores positivos más próximos a 0 y que vuelva a estimar. En este caso con las primeras evaluaciones sugeridas, podría conjeturarse que el límite es cero; sin embargo, considerando las segundas evaluaciones sugeridas se pone en evidencia que la función toma valores negativos para valores de $x$ positivos más próximos a cero. Consideramos que se pretende hacer notar que el trabajo desde un RRN no es suficiente, de todos modos en este caso la función es continua en $x = 0$ por lo que podría determinarse directamente el valor del límite evaluando la función en 0.

En los ejercicios del 30 al 32, se indica trabajar con un software graficador.

En el 30 se solicita intuir el valor de $\lim_{x\to 0}((tg(x) - x)/x^3)$a partir de una exploración numérica sugerida. Luego propone realizar una nueva estimación evaluando la función en valores más cercanos a 0 y solicita repensar lo conjeturado. Además plantea el trabajo desde un RRG con software graficador. Nuevamente se quiere poner en evidencia que el trabajo sólo desde un RRN no basta para establecer el valor del límite. En este caso el valor del límite es 1/3 y no es posible detectarlo desde registros de representación numérico y gráfico. Esta consigna puede dar sentido a la búsqueda de un procedimiento algebraico que permita calcular el límite.

En los ejercicios 31 y 32 se plantean consignas del estilo de las planteadas en el ejemplo 9, pero redactados de otra forma. Ya mencionamos que esto puede ser de interés para construir la definición métrica de límite, ya que buscan aproximarse a las relaciones entre desigualdades que se dan en la misma.

**Observaciones generales de Sección 2.2 y Ejercicios 2.2**

- En esta sección se presenta la noción intuitiva de límite y límites laterales y la notación correspondiente.
- Existe en el texto un interés por mostrar que el trabajo desde RRN y RRG resultan insuficientes para el cálculo de un límite. Cuestión que resulta de interés para nuestro estudio.
- En los ejercicios propuestos (Ejercicios 2.2) se presentan consignas que indican el trabajo desde RRN y RRG para el cálculo de límites o la determinación de la no existencia de los mismos. En general la exploración para establecer valores de los límites es sugerida o

guiada y en pocas ocasiones se solicitan argumentos o explicaciones sobre lo que se logra establecer como respuesta.

- Observamos que las funciones con las que se trabaja en los ejercicios difícilmente puedan ser graficadas con lápiz y papel, por lo que probablemente para la resolución se utilice algún software graficador (uso de TD por necesidad, sin dejar de lado el objetivo matemático). Además, si bien los ejercicios permiten señalar la insuficiencia del RRN y RRG en el cálculo de límites, el tipo de funciones en general no permiten que quien resuelva pueda hacer algún abordaje algebraico a partir de las herramientas con las que cuenta, ya que se presentan funciones que en sus leyes involucran funciones exponenciales, trigonométricas, etc.
- Los ejercicios del 3 al 30 los consideramos como TPSC o TPCC (Stein et al., 2000). Algunos los consideramos TPSC ya que implican procesos rutinarios donde el procedimiento a utilizar es evidente o descrito por la instrucción, exigiendo poca demanda cognitiva y focalizándose sólo en la producción de respuestas correctas; a otros los consideramos como TPCC porque exigen la utilización de procedimientos (sugeridos o no) con la intención de desarrollar niveles más profundos de la comprensión de ideas y conceptos matemáticos, buscando cerrar las conexiones con dichos conceptos.
- Los dos últimos (31 y 32), así como el ejemplo 9 del apartado sección 2.2, pueden enmarcarse como TPM (Stein et al., 2000).
- Consideramos que en esta sección existen consignas con PM (Barreiro et al., 2016) rico y PM pobre. Algunas consignas de esta sección merecen análisis más profundos que los expresados en este escaneo para justificar nuestra afirmación.
- Los cambios de registros de representación, en general son impuestos, no se da libertad de pasar de un registro a otro. De todos modos, algunos cambios en la instrucción podrían subsanar esta imposición.

# ANEXO IV

## COMPENDIO DE CONSIGNAS SELECCIONADAS

En este anexo presentamos todas las consignas analizadas en el CAPÍTULO 6. Las organizamos bajo el título del libro correspondiente y en el orden en el que fueron ubicadas en dicho capítulo.

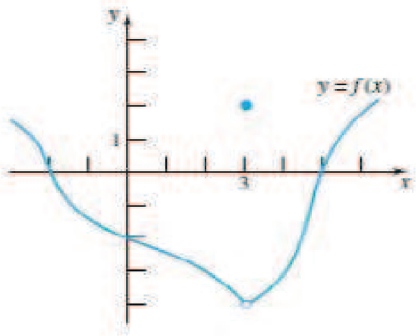
## A.IV. 1. Consignas del Libro 1

### Consigna 1

**Ejercicio 2 (pág. 68)**

Utilizar la gráfica de $f$ y $c = 3$ para hallar:

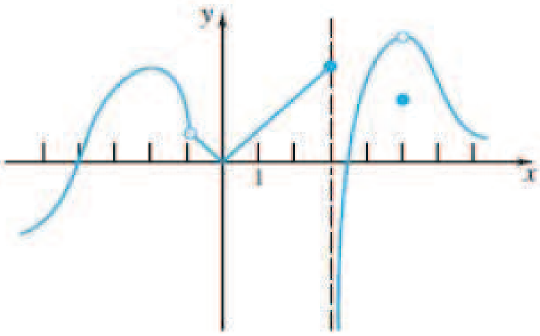
(a) $\lim_{x\to c^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to c} f(x)$ (d) $f(c)$




### Consigna 2

**Ejercicio 12 (pág. 69)**

Indicar los valores de $c$ para los cuales $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe.




### Consigna 3

**Ejercicio 18 (pág. 70)**

Decidir con razonamientos intuitivos si existe o no el límite indicado y calcularlo en caso de existir.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$$

## Consigna 4

**Ejercicio 43 (pág. 70)**
Decidir con razonamientos intuitivos si existe o no el límite indicado y calcularlo en caso de existir.

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \text{ racional} \\ -2, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

## Consigna 5

**Ejercicio 47 (pág. 70)**

Decidir con razonamientos intuitivos si existe o no el límite indicado y calcularlo en caso de existir.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$$

## Consigna 6

**Ejercicio 58 (pág. 70)**
Crear una tabla de valores para estimar $\lim_{x\to c} f(x)$. A continuación utilizar un programa gráfico para ampliar la gráfica cerca de $x = c$ para justificar la estimación o para mejorarla.
Estimar

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \qquad \text{(medidos en radianes)}$$

después de calcular el cociente en $x = \pm 1$, $x = \pm 0,1$, $x = \pm 0,01$, $x = \pm 0,001$.

## Consigna 7

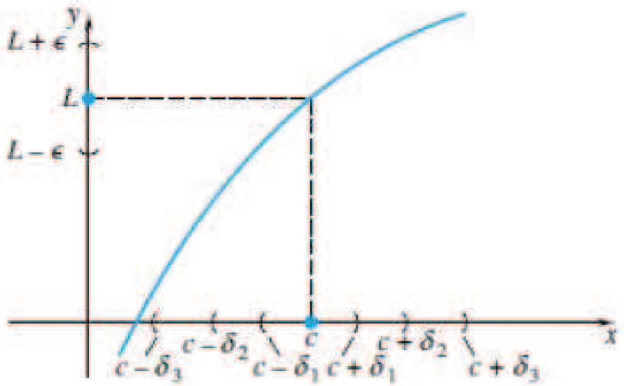
**Ejercicio 17 (pág. 78)**
Determinar, al modo de la sección 2.1, si existen o no los límites indicados. Calcular los límites que existan

$$\lim_{x\to 3} f(x) \qquad \text{si}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \text{ es un entero} \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

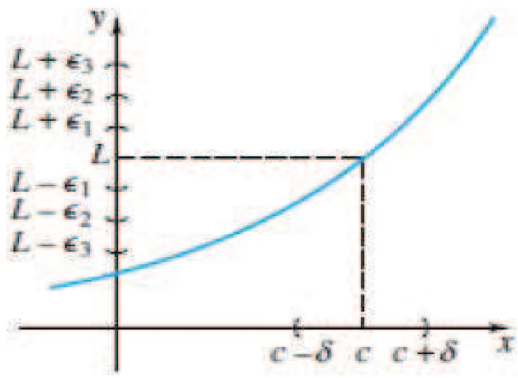
## Consigna 8

**Ejercicio 21 (pág. 78)**
¿Cuál de los $\delta$ presentados en la figura "funciona" con el $\epsilon$ dado?




## Consigna 9

**Ejercicio 22 (pág. 78)**
¿Para cuál de los $\epsilon$ representados en la figura "funciona" el $\delta$ especificado?




## Consigna 10

**Ejercicio 27 (pág. 78)**
Dar una demostración $\epsilon - \delta$ para el límite siguiente.

$$\lim_{x \to 4} (2x - 5) = 3$$

.

**Consigna 11**

**Ejercicio 33 (pág. 78)**
Sea $f$ una función de la cual sólo se sabe que

$$\text{Si} \quad 0 < |x-3| < 1, \qquad \text{entonces} \quad |f(x)-5| < 0,1.$$

¿Cuál de los siguientes asertos son necesariamente ciertos?

**(a)** Si $|x-3| < 1$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

**(b)** Si $|x-2,5| < 0,3$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

**(c)** $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.

**(d)** Si $0 < |x-3| < 2$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

**(e)** Si $0 < |x-3| < 0,5$, entonces $|f(x)-5| < 0,1$.

**(f)** Si $0 < |x-3| < \frac{1}{4}$, entonces $|f(x)-5| < \frac{1}{4}(0,1)$.

**(g)** Si $0 < |x-3| < 1$, entonces $|f(x)-5| < 0,2$.

**(h)** Si $0 < |x-3| < 1$, entonces $|f(x)-4,95| < 0,05$.

**(i)** Si $\lim_{x\to 3} f(x) = L$, entonces $4,9 \leq L \leq 5,1$.

### A.IV. 2. Consignas del Libro 2

### Consigna 12

**Ejercicio 1 (pág. 94)**

Un tanque contiene 1000 galones de agua que se descargan del fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen $V$ de agua restante en el tanque (en galones) después de $t$ minutos.

| $t$ (min) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ (gal) | 694 | 444 | 250 | 111 | 28 | 0 |

**(a)** Si $P$ es el punto $(15, 250)$ en la gráfica de $V$, encuentre las pendientes de las rectas secantes $PQ$ cuando $Q$ es el punto en la gráfica con $t = 5, 10, 20, 25$ y $30$.

**(b)** Estime la pendiente de la recta tangente en $P$ al promediar las pendientes de las dos rectas secantes.

**(c)** Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en $P$. (Esta pendiente representa la rapidez a la que el agua sale del tanque después de 15 minutos.)

### Consigna 13

**Ejercicio 7 (pág. 94)**

La tabla muestra la posición de un ciclista

| $t$ (segundos) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ (metros) | 0 | 1,4 | 5,1 | 10,7 | 17,7 | 25,8 |

**(a)** Encuentre la velocidad promedio para cada período:

**(i)** $[1, 3]$ **(ii)** $[2, 3]$ **(iii)** $[3, 5]$ **(iv)** $[3, 4]$

**(b)** Use la gráfica de $s$ como función de $t$ para calcular la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

### Consigna 14

**Ejercicio 9 (pág. 94)**

El punto $P(1, 0)$ se encuentra en la curva $y = \text{sen}(\frac{10\pi}{x})$.

**(a)** Si $Q$ es el punto $(x, \text{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante $PQ$ (correcta a cuatro lugares decimales) para $x = 2; 1,5; 1,4; 1,3; 1,2; 1,1; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8$ y $0,9$. ¿Las pendientes parecen aproximarse a un límite?

**(b)** 2 Use la gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso (a) no están cerca de la pendiente de la recta tangente en $P$.

**(c)** Al escoger rectas secantes apropiadas, calcule la pendiente de la recta tangente.

## Consigna 15

**Ejercicio 1 (pág. 102)**
Explique en sus propias palabras qué significa la ecuación.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que este enunciado sea verdadero y todavía $f(2) = 3$? Explique.

## Consigna 16

**Ejercicio 7 (pág. 102)**
Trace la gráfica de la función y úsela para determinar los valores de $a$ para los cuales $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2, & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

## Consigna 17

**Ejercicio 18 (pág. 103)**
Intuya el valor del límite (si existe) al evaluar la función en los números dados (correcto a seis lugares decimales).

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$$
$$x = 0; -0,5; -0,9; -0,95; -0,99; -0,999; -2; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$$

## Consigna 18

**Ejercicio 32 (pág. 104)**

**(a)** Use evidencias numérica y la gráfica para intuir el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

**(b)** ¿Qué tan cerca de 1 debe estar $x$ para asegurar que la función del inciso (a) está dentro de una distancia de 0,5 de su límite?