



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS
MAESTRÍA EN DIDÁCTICA ESPECÍFICA CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

Tesis

**Procesos de construcción de clasificaciones y definiciones de cuadriláteros
Una propuesta para la formación docente**

por Cecilia A. Laspina

Para optar por el grado académico de:

Magister en Didáctica Específica
Orientación Matemática

Directora: Dra. Diana Giuliani (UBA)

Codirectora: Mg. Silvia Bernardis (UNL)

Santa Fe, 2024

Dedico esta investigación a Mati... mi compañero, que siempre apoya incondicionalmente mis proyectos, que me motiva y me anima a continuar creciendo.

A Milo y Bahía... mis dos amores, que con su llegada iluminaron el cierre de esta etapa.

Índice General

Capítulo 1: Planteamiento y justificación del problema.....	1
1.1. Tema de trabajo	1
1.2. Génesis y fundamentación del Problema	1
1.3. Objetivos	3
1.3.1. Objetivo general.....	3
1.3.2. Objetivos particulares	3
1.4. Metodología y recorte empírico	3
1.5. Estructura de la tesis.....	5
Capítulo 2: Marco Teórico	6
2.1. Nuestra concepción de matemática y de su enseñanza	6
2.1.2. Problema geométrico.....	7
2.2. Teoría de las situaciones didácticas.....	7
2.2.1. Variables didácticas	11
2.3. Transposición didáctica	11
2.4. Ingeniería didáctica.....	13
2.5. Secuencia didáctica.....	14
2.5.1. Interacciones entre pares	15
2.5.2. Trabajo promovido por la secuencia	15
2.5.3. Potencial de las consignas matemáticas	16
2.5.4. El uso de Geogebra en nuestra secuencia didáctica	16
2.5.5. La relación entre las nociones didácticas “dibujo” y “figura”	17
Capítulo 3: Clasificaciones y definiciones de cuadriláteros como objetos de reflexión. Revisión de antecedentes	19
3.1. La noción de definición en matemática	19
3.1.1. La definición y la clasificación como procesos o como productos	21
3.1.2. Definiciones afirmativas y negativas	22
3.2. La noción de clasificación en Matemática	22
3.2.1. Clasificaciones particionales y jerárquicas.....	22
3.2.2. Dificultades en las clasificaciones Jerárquicas	24
3.2.3. Relación entre definiciones y clasificaciones.....	25
3.3. Imagen conceptual y concepto	25
3.4. Antecedentes acerca de las definiciones y clasificaciones	26
3.4.1. En relación con los procesos de definir y clasificar	26

3.4.2. En relación con los procesos de definir y clasificar y los libros de texto.....	29
3.4.3. En relación con los procesos de definir y clasificar utilizando entornos dinámicos.....	30
Capítulo 4. Las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros en los libros y diseños curriculares.	33
4.1. Las definiciones y clasificaciones en el diseño curricular de Profesorado en Matemática de la provincia de Santa Fe	33
4.2. Muestra de libros seleccionada y análisis.....	34
4.3. Algunas consideraciones finales	39
Capítulo 5: Secuencia didáctica y análisis a priori.....	40
5.1. Acerca de la secuencia	40
5.2. Secuencia didáctica: enunciados.....	42
5.3. Análisis a priori de la secuencia	44
5.3.1. Primera clase	46
5.3.2. Segunda clase	54
5.3.3. Tercera clase.....	61
5.3.4. Cuarta clase	66
5.3.5. Quinta clase	70
5.4. Algunas reflexiones finales.....	75
Capítulo 6: Análisis a posteriori.....	76
6.1. Actividad 1 - “Formando cuadriláteros a partir de triángulos”	76
6.2. Actividad 2 - “Cuadriláteros y ángulos”	81
6.3. Actividad 3 - “Cuadriláteros y diagonales”	85
6.4. Actividad 4 - “Cuadriláteros y lados”	89
6.5. Caracterización de las clasificaciones y definiciones elaboradas por los estudiantes.	94
6.5.1. Acerca de lo particional y lo jerárquico en las clasificaciones de los estudiantes.....	94
6.5.2. Actividad 5 - Definiciones y clasificaciones elaboradas por los estudiantes	98
Capítulo 7: Conclusiones.....	106
7.1. Acerca del funcionamiento de la secuencia en la implementación	106
7.2. Conclusiones generales	107
7.3. Próximas implementaciones	110
7.4. Futuras líneas de acción	111
7.5. Aportes para la formación docente	111
Referencias Bibliográficas.....	113
Anexos	
Anexo 1.....	I

Anexo 2	IX
Implementación de la secuencia didáctica	IX
Descripción de la muestra	IX
Primera clase.....	X
Segunda clase.....	XIX
Tercera clase	XXVII
Cuarta clase	XXXII
Quinta clase	XL
Anexo 3	LII

Agradezco profunda y sinceramente...

A Diana, por aceptar dirigir esta tesis, por su generosidad, por su tiempo, por su lectura atenta y crítica, por permitirme crecer con sus comentarios y sugerencias tan pertinentes.

A Silvia, por aceptar codirigir esta investigación desde un principio, por acompañarme tan de cerca durante todo este tiempo, por apoyarme, por su mirada constructiva, por sus sabias sugerencias, por animarme y sobre todo por creer en mí.

A los estudiantes de 2do año de mi querido instituto de formación docente, quienes hicieron posible esta investigación y colaboraron de manera extraordinaria.

A Mónica Agrasar, por su tiempo, por su lectura crítica y por sus sugerencias tan acertadas.

A David Block, por su lectura, interpretación y sugerencias en el análisis de nuestra secuencia didáctica.

A Sara y a los integrantes del Proyecto de Investigación de la FHUC - UNL del que soy parte, por estar siempre dispuestos a la escucha, el intercambio de ideas y a realizar muy buenas sugerencias.

A Vicky, por su amistad incondicional, su apoyo, sus consejos, por cada discusión que nos hizo crecer y aprender una de la otra y principalmente por transitar y compartir conmigo cada seminario de esta Maestría.

A Beatriz, por su escucha, sus consejos sabios, por creer en mí y por motivarme a seguir creciendo.

A Lala, por su amistad, su apoyo, su acompañamiento, su motivación, su generosidad y por siempre estar dispuesta a pensar juntas lo que sea necesario.

A Flor, por su tiempo de lectura, por compartir material y por sus sugerencias tan pertinentes y acertadas.

A Ale, Cari, Marita y Malvi, por haber comenzado juntas este camino, por motivar, por apoyar y compartir además de una gran amistad, esta hermosa pasión.

Capítulo 1: Planteamiento y justificación del problema

1.1. Tema de trabajo

En esta investigación nos proponemos explorar y analizar las concepciones¹ de futuros docentes de Matemática en relación con clasificaciones y definiciones de cuadriláteros.

Nos interesa estudiar el tema con el propósito de que los futuros docentes construyan clasificaciones y formulen definiciones, que conciban estas tareas como un proceso y reconozcan que ambas dependen de la(s) propiedad(es) de los cuadriláteros que se seleccionan, de modo que produzca una ruptura con el carácter de unicidad que en muchas ocasiones los estudiantes les otorgan.

Como parte de esta investigación diseñamos una secuencia didáctica, que se constituye en el medio para trabajar y analizar estas cuestiones.

1.2. Génesis y fundamentación del problema

En mi experiencia como docente de la cátedra de Geometría II del Profesorado en Matemática del nivel superior, frecuentemente encontré evidencias de que los estudiantes presentan grandes dificultades en la formulación de definiciones de objetos geométricos que fueron, teóricamente, objetos de estudio a lo largo de gran parte de su escolarización, como por ejemplo figuras planas tales como es el caso de triángulos y cuadriláteros. Esta dificultad se manifiesta por ejemplo cuando los estudiantes definen al triángulo como “la unión de tres lados”, o como “la intersección de tres planos”, en un intento fallido de replicar definiciones ya elaboradas por otros y posiblemente establecidas en libros de texto; o también por ejemplo cuando solicitan “la definición” de una figura tanto al docente como a sus pares. Estas evidencias nos motivaron a formular las siguientes preguntas que orientan y dan origen a nuestra investigación: ¿cómo conciben los estudiantes de profesorado las definiciones y clasificaciones en matemática? ¿han vivenciado experiencias en su trayectoria escolar que les permitan construir conocimientos, y en particular definiciones y clasificaciones? ¿cómo generar condiciones de enseñanza que posibiliten que los estudiantes exploren cuadriláteros y elaboren distintas clasificaciones y definiciones? Como formadores de futuros docentes: ¿debemos enseñar definiciones o enseñar a definir?

Con el propósito de que los estudiantes de profesorado de nivel superior exploren y construyan conocimientos por sí mismos y no repliquen conceptos ya elaborados expuestos en un libro de texto, específicamente en el ámbito de la Geometría, diseñamos una propuesta de enseñanza que tiene como objetivo que los estudiantes analicen cuadriláteros, se desprendan de los nombres conocidos y los caractericen de acuerdo a sus propiedades, y que finalmente elaboren distintas clasificaciones de cuadriláteros que deriven a su vez en distintas definiciones. Haremos énfasis especialmente en el proceso reflexivo de construcción y formulación de definiciones y clasificaciones; proceso propio y tan importante como otras tareas del quehacer matemático, convencidas que este abordaje propicia la construcción del sentido de las clasificaciones y definiciones por parte de los estudiantes. En este sentido, adherimos a una idea que expresa Sadovsky (1999): “El conjunto de prácticas que despliega

¹ Si bien el término “concepción” es utilizado en distintas teorías didácticas, aquí lo utilizamos en su acepción corriente como modo de concebir, ver, comprender.

un alumno a propósito de un concepto matemático constituirá el sentido de ese concepto para ese alumno” (p.1).

Otra cuestión que delimita nuestro problema de investigación, es la necesidad de que los futuros docentes sean conscientes de que no hay una única definición para un objeto geométrico. Está muy presente la creencia de que, en Matemática en su carácter de ciencia exacta, existe solo una forma correcta de definir los objetos y relaciones que estudia. La Matemática en tanto construcción social admite, sin embargo, una diversidad de posibles definiciones igualmente válidas de un mismo concepto.

Esta creencia puede estar relacionada, entre otras razones, con un hecho del cual encontramos evidencias en el análisis de la muestra seleccionada de libros de texto, que corresponde a que existe un predominio del tratamiento de la clasificación y definición de cuadriláteros a partir de un único criterio, el paralelismo de sus lados². Sin embargo, es interesante preguntarnos: ¿los alumnos comprenden por qué se prioriza ésta antes que otras? ¿Tienen posibilidades de discernir acerca de las ventajas entre adoptar una y otra?

Las preguntas anteriores nos permitieron como investigadoras, pensar y repensar en varias oportunidades el objetivo de esta investigación y qué esperábamos que los futuros docentes logren a partir de la secuencia que diseñamos, pues al intentar responderlas, y basándonos en el estudio de antecedentes y de libros que realizamos, encontramos que carece de sentido ofrecer una propuesta que vuelva a replicar el abordaje de la enseñanza de las clasificaciones y definiciones que han sido plasmadas de una única forma a través del tiempo. Por lo tanto, nuestro interés se focalizó en que los estudiantes deconstruyan algunas prácticas y concepciones instaladas y que participen de la construcción de conocimientos.

En este sentido, Mariotti y Fischbein (1997) expresan que el proceso de definir debe ser considerado desde el punto de vista de su complejidad como un componente esencial del razonamiento geométrico y como un proceso específico de la actividad matemática. Los autores sostienen que este último aspecto a menudo se escapa en la práctica escolar: los alumnos nunca participan en el juego real de la construcción de definiciones, se propone el estudio de muchos conceptos; sin embargo, no se les permite la posibilidad de comprender las razones de ser de cada uno.

Consideramos que es necesario entonces que los docentes revaloricemos el proceso de definir, para que los estudiantes puedan comprender mejor la base del sistema lógico que representa la geometría y avanzar en el estudio de las relaciones entre conceptos, así como también que puedan considerar la matemática como actividad humana y no como algo preconstruido.

Entendemos que la concepción de enseñanza que posee el docente tiene directa relación con la experiencia que viven los estudiantes en relación al aprendizaje de la matemática y la concepción que forman de la misma. En tal sentido, si pretendemos que los futuros docentes diseñen experiencias en torno a la construcción de sentido de las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros consideramos necesario que en su formación inicial se propongan actividades que la problematicen.

² Esta cuestión será analizada en el desarrollo de la investigación a partir de una muestra de libros de texto.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Explorar y analizar el proceso de elaboración de clasificaciones y formulación de definiciones por parte de futuros docentes.

1.3.2. Objetivos particulares³

- Diseñar e implementar una secuencia didáctica que promueva la construcción de diversas clasificaciones y definiciones de cuadriláteros convexos.
- Caracterizar y categorizar las clasificaciones y definiciones elaboradas por parte de futuros profesores.

1.4. Metodología y recorte empírico

En el presente trabajo utilizamos una metodología de investigación cualitativa, que “se orienta a analizar casos concretos en su particularidad temporal y local, y a partir de las expresiones y actividades de las personas en sus contextos locales” (Flick, 2004, p.27). Específicamente, consideramos esta investigación como interactiva (McMillan y Schumacher, 2005), pues pretendemos realizar un estudio en profundidad mediante el empleo de distintas técnicas para producir los datos cara a cara de los distintos actores en sus entornos naturales.

Los sujetos de estudio son en este caso estudiantes de Profesorado en Matemática de un Instituto de Formación Docente de la ciudad de Santa Fe que cursan Geometría II, cohorte 2017. Esta materia forma parte del campo de la formación específica y se encuentra en el segundo año del plan de estudios. Son 13 estudiantes los que cursan la materia con regularidad, y la docente del curso es a la vez docente e investigadora y autora de la tesis.

Debido al doble rol tomado por la autora de la tesis, docente e investigadora, en el proceso de investigación se focaliza en lograr la precaución metodológica, al poner en práctica cautela epistemológica y objetivación (Lincoln y Guba, 1985) con el fin de que los datos y su respectivo análisis resulten adecuados. En este sentido, destacamos que los resultados que reportamos forman parte de un trabajo en interacción entre tesista, directora y codirectora que potencia la fiabilidad⁴ del estudio (McKnight, et al. 2000), de este modo en la tesis la autora se aleja de su rol docente y se coloca las lentes de investigadora.

³ Atendiendo a la naturaleza de los objetivos, consideramos al objetivo general como un objetivo primario y al primer objetivo particular según Yuni y Urbano (2006), como un objetivo secundario, ya que “los objetivos secundarios implican la realización de acciones de naturaleza metodológica, cuya realización es imprescindible para el logro de los resultados cognitivos. Si no se cumplen estos objetivos no se alcanzan los primarios” (p.97).

⁴ Según Munarriz (1992), la triangulación de métodos y personas permite comprobar la objetividad y confiabilidad de los datos obtenidos en la investigación cualitativa. La triangulación de métodos consiste en recoger datos mediante distintos canales, grabaciones, entrevistas, notas, entre otros, y la triangulación de personas consiste en que los datos obtenidos sean analizados por distintas personas —otros docentes que trabajan junto con el investigador en distintos ámbitos educativos, expertos en el tema de investigación.

En nuestra investigación diseñamos una secuencia didáctica⁵ y analizamos los datos construidos en el marco de su implementación. Esto implicó el diseño no solo del instrumento, sino también de categorías de análisis con los cuales examinamos los resultados. En términos de Calvo (2001) estas características responden a una investigación de diseño emergente.

El enfoque cualitativo nos permitirá indagar sobre la posibilidad que ofrece la secuencia para que los estudiantes formulen clasificaciones y definiciones de cuadriláteros de acuerdo a distintos criterios, es decir, si los problemas seleccionados son fértiles para generar un proceso de construcción de clasificaciones y definiciones.

A su vez, caracterizamos la investigación como exploratoria, dado que pretende documentar las concepciones de los estudiantes de un profesorado particular sin pretender generalizar ningún resultado, sino comprender lo singular del contexto estudiado, en términos de McMillan y Schumacher (2005), “los estudios exploratorios cualitativos examinan, a menudo, fenómenos que no han sido estudiados con anterioridad” (p.118), en este caso, las producciones que resultan a partir de la implementación de una secuencia didáctica diseñada para tal fin. De las modalidades⁶ que componen la investigación interactiva, utilizamos el estudio de casos. De acuerdo a McMillan y Schumacher (2005) este tipo de estudio examina un sistema definido o un caso detalladamente a lo largo de un período de tiempo, empleando múltiples fuentes de datos encontradas en su contexto. “El caso puede ser un programa, un acontecimiento, una actividad o un conjunto de individuos definidos en tiempo y lugar” (p.45). De acuerdo a Stake (1999) podemos clasificar el nuestro como un estudio de casos intrínseco e instrumental.

En este sentido, desarrollamos brevemente algunas ideas en relación con esta categorización. De acuerdo a Stake (1999), y en concordancia con McMillan y Schumacher (2005), un caso puede ser un niño, un grupo de alumnos o un determinado grupo de profesionales que estudian alguna situación de la infancia (p.16). El caso es uno entre varios. El tiempo que se le destine a su estudio puede variar, pero el autor expresa que, si nos concentramos en él estaremos realizando estudio de casos.

Stake (1999) propone utilizar la letra griega θ (theta mayúscula) para representar un caso, teniendo siempre presente que es un sistema integrado, y que como tal tiene límites y partes constituyentes.

El autor expresa que al momento de seleccionar un caso, en muchas oportunidades puede suceder que no sea posible tal selección y que θ venga dado e incluso nos veamos obligados a tomarlo como objeto de estudio. Es decir, con el análisis no pretendemos estudiar acerca de otros casos o sobre un problema general, sino que estudiamos ese caso particular. Por lo tanto, las conclusiones a las que arribaremos se ajustarán al presente caso de estudio. El autor expresa que en estas situaciones, es que se tiene un interés intrínseco en el caso, y podemos llamar a nuestro trabajo *estudio intrínseco de casos*.

En otras situaciones, el autor expresa que podremos encontrarnos con una cuestión que se debe investigar, una situación paradójica, una necesidad de comprensión general, y consideraremos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular, donde el mismo funciona como instrumento. En nuestro trabajo la selección del caso, estudiantes de profesorado, nos permitirá explorar y analizar el proceso de elaboración de clasificaciones y formulación de definiciones por parte de futuros docentes, a partir del diseño e implementación de la secuencia, y del posterior análisis de producciones. Podemos llamar a esta investigación *estudio instrumental de casos*.

⁵ Lo que constituye el instrumento a partir del cual se construyeron los datos.

⁶ Entre las cinco modalidades de investigación cualitativa interactiva encontramos: etnográfica, fenomenológica, estudio de casos, teoría fundamentada y estudios críticos (McMillan y Schumacher, 2005).

Según las fuentes, nuestro estudio es considerado de campo o empírico, ya que el origen de los datos es de primera mano. Bajo el consentimiento de los estudiantes que participan, realizamos grabaciones del trabajo en cada grupo en todas las clases, recopilamos producciones escritas y digitales y tomamos fotos de los pizarrones.

Según la temporalización, utilizamos métodos transversales, es decir se trata de una investigación sincrónica (McMillan y Schumacher, 2005), debido a que la información fue recogida por única vez en un período de tiempo limitado (octubre de 2018) y de una población definida (estudiantes de 2do año del Profesorado de Matemática de nivel superior).

Dado que el trabajo de campo lo realizamos en un curso completo de estudiantes de 2do año del Profesorado en Matemática, el tipo de muestra es no probabilística de tipo accidental pues la investigación es de tipo exploratoria y pretende describir y analizar las producciones de un determinado grupo de estudiantes, sin pretender generalizar sino comprender lo singular. Por último, el criterio fundamental de selección de la muestra ha sido la facilidad de acceso a la institución y a la cátedra donde la investigadora desempeña su tarea docente.

1.5. Estructura de la tesis

La tesis está compuesta por ocho capítulos, cuyas características centrales describimos a continuación. En el primer capítulo, “Planteamiento y Justificación del problema”, planteamos el problema considerado y los objetivos de la investigación, fundamentando la elección. También incluimos un desarrollo de la metodología a utilizar y del recorte empírico que realizamos.

En el segundo capítulo “Marco teórico”, desarrollamos los conceptos más importantes de la Didáctica de la Matemática que utilizamos en este trabajo.

En el capítulo tres “Clasificaciones y definiciones como objetos de reflexión. Revisión de antecedentes”, realizamos un estudio de las clasificaciones y definiciones en matemática, y en particular en geometría. También, incluimos un desarrollo de antecedentes significativos para esta investigación.

En el cuarto capítulo “Las definiciones y clasificaciones en libros y diseños curriculares”, realizamos un análisis del abordaje de las definiciones y clasificaciones en una muestra de libros que seleccionamos. También analizamos la propuesta de enseñanza en relación a nuestro tema, en los diseños curriculares correspondientes al Nivel Secundario y al Profesorado en Matemática de la Provincia de Santa Fe.

En el quinto capítulo “Secuencia diseñada y su análisis a priori”, incluimos la secuencia diseñada, un detalle de su estructura y diseño, así como también el análisis a priori de cada una de las actividades.

En el capítulo seis “Análisis a posteriori”, desarrollamos un análisis completo de la implementación de la secuencia y un análisis de las producciones de los estudiantes.

En el capítulo siete “Conclusiones”, a modo de cierre de la investigación, incluimos conclusiones tanto del funcionamiento de la secuencia en el aula, conclusiones generales que elaboramos recuperando los objetivos e interrogantes que nos planteamos en este estudio, como así también aportes que a nuestro criterio resultan significativos para la formación docente.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1. Nuestra concepción de matemática y de su enseñanza

Para explicitar qué concepción de Matemática sostenemos en esta investigación, tomando como referencia los aportes de Charlot (1986), consideramos que:

[...] Hacer matemáticas es un trabajo del pensamiento que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos en los universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran sin cesar. (p.3).

Entendiendo la matemática como una actividad del pensamiento, nos resulta necesario destacar que todos, pero todos, podemos aprender matemática. Esta idea rompe con una concepción muy instalada en algunas escuelas e incluso en la sociedad, de que solo unos pocos son “buenos para la matemática”. Charlot (1986) expresa que romper con una concepción elitista de la enseñanza equivale a democratizarla, y esto es sinónimo de pensar la actividad matemática como un trabajo accesible para todos.

Nos resulta oportuno destacar que adherimos a una perspectiva según la cual la matemática es considerada un producto cultural y social. Sadovsky (2005), expresa que se considera un producto cultural, dado que en sus producciones influyen las concepciones de la sociedad en la que surgen, y es también un producto social, dado que es el resultado del intercambio entre sujetos que pertenecen a la misma sociedad.

Desde esta perspectiva y en consonancia con el diseño curricular del Profesorado de Matemática de la provincia de Santa Fe (2015, p.17), “entender a la Matemática como proceso, producto y evolución de la actividad humana, lleva a identificarla como una actividad de modelización, cuyo punto de partida son diversas problemáticas intra o extra matemáticas”. De este modo, entender el *hacer matemática* como un trabajo de modelización, es sinónimo de considerar que el motor principal de la actividad es la resolución de problemas.

En el mismo diseño encontramos que se espera -con lo cual coincidimos y es lo que nos moviliza a realizar esta investigación- que las experiencias formativas por las que transiten estudiantes deben estar vinculadas con una genuina actividad problematizadora, superando de este modo la cultura monumentalista que ‘visita’ las obras construidas por la humanidad, y se acerquen a una cultura del cuestionamiento, que demanden una posición crítica frente al saber, intentando desnaturalizarlo, encontrando su origen y sentido.

Ahora bien, para que la resolución de problemas sea un camino fértil para la construcción de saberes, se requiere de un estudiante activo, que realice tareas propias del quehacer matemático⁷, como ser resolver, comparar, decidir, conjeturar, validar, argumentar, entre otras.

Brousseau (1993), quien define la matemática como un “conjunto de saberes organizados producidos por la cultura”, también agrega que conocer matemáticas no es meramente aprender definiciones y teoremas para reconocer cuándo utilizarlas y aplicarlas. Sino que hacemos matemáticas cuando resolvemos problemas, pero también formular buenas preguntas es un trabajo tan importante como encontrarles solución.

⁷ Ampliaremos estas ideas posteriormente.

2.1.2. Problema geométrico

Si hablamos de problematización, nos resulta importante caracterizar qué se entiende por problema. En los últimos años, los documentos curriculares de nuestro país plantean que cada actividad constituye un problema matemático para un alumno en la medida en que involucra un enigma, un desafío a sus conocimientos matemáticos, es decir, si estos le permiten iniciar la resolución del problema, pero para hacerlo elabora un cierto procedimiento poniendo en juego las nociones que tiene disponibles, modificándolas y estableciendo nuevas relaciones.

De acuerdo a las Orientaciones Curriculares de Educación Secundaria, elaboradas por el Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, nivel en el cual se desempeñarán nuestros estudiantes como docentes, se entiende que:

(...) un problema es una situación que permite al estudiante recuperar conocimientos y experiencias anteriores para elaborar una estrategia de base –la que se desarrollará a partir de su propia actividad, de las discusiones con sus compañeros y de los aportes de información del docente-, pero a la vez ofrece una resistencia suficiente como para que estos conocimientos puedan evolucionar, sean cuestionados y se constituyan en otros nuevos (p.39).

Dado que en esta investigación el objeto de estudio es la Geometría, nos resulta importante explicitar qué se entiende por problema geométrico. Itzcovich (2005) plantea las particularidades que deberían tener los problemas geométricos, las cuales tienen estrecha relación con la caracterización del trabajo geométrico que se espera que éstos promuevan, en el que nos detendremos posteriormente. En éstos términos, el autor expresa que tales particularidades deberían ser:

- Para resolver el problema se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado; las figuras-dibujos trazadas por este sujeto no hacen más que representarlo.
- La función que cumplen los dibujos en la resolución del problema no es la de arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema -es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su respuesta- no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen un nuevo conocimiento sobre los mismos. (p.13)

2.2. Teoría de las situaciones didácticas

Uno de los enfoques de la Didáctica de la Matemática que tomaremos como referencia en esta investigación son los aportes de la Escuela Francesa.

Esta escuela comienza a desarrollarse en los años setenta como resultado de las preocupaciones de un grupo de investigadores, en su mayoría franceses, por analizar e interpretar los fenómenos y procesos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático.

Para diseñar la secuencia didáctica y realizar su análisis didáctico tomamos aportes de la Teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau. Esta teoría, está basada en una concepción constructivista del aprendizaje, en el sentido piagetiano, y es caracterizada por el autor de la siguiente manera:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 2007, p.17).

La Teoría de Situaciones Didácticas realiza un aporte significativo a la Didáctica de la Matemática: la incorporación de un cuarto elemento a la conocida triangulación Alumno – Docente – Saber, el *medio (milieu)*. En palabras de Chevallard y Joshua (1982), el medio es el objeto de interacción de los alumnos. Representa la actividad en la cual trabajarán, así como también las condiciones en las cuales podrán realizarla. Algunas de estas condiciones pueden ser los materiales y recursos que pueden utilizar, por ejemplo lápiz y papel o TIC. Los autores señalan que el medio al que el alumno se enfrenta también está compuesto por las acciones del docente, como ser el tipo de intervenciones que realiza a propósito de la tarea, las decisiones que toma en la gestión de la misma, ayudas que proporciona o restricciones que define, incluso también por lo que espera que los estudiantes realicen. Es así que define a una situación didáctica como un sistema de interacciones entre los subsistemas de la situación: los alumnos, el medio (incluyendo el docente) y el saber, remarcando que una situación didáctica es construida intencionalmente con el propósito de que los estudiantes adquieran un saber determinado

En una situación escolar, será el docente quien organice y constituya un medio, por ejemplo, un problema, que revela en cierta medida su intención de enseñar al alumno un saber determinado, pero que lo disimula lo suficientemente como para favorecer que el alumno pueda dar por sí solo la respuesta esperada.

A partir de la incorporación del medio, esta teoría propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos en el ámbito escolar, que se lleva a cabo especialmente a partir de dos tipos de interacciones básicas: las interacciones del alumno con el medio y las interacciones del alumno con el docente. Las primeras tienen lugar en las así llamadas situaciones a-didácticas, y las segundas se analizan y describen a través de la noción de contrato didáctico.

Una situación a-didáctica representa una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, en la cual las intervenciones del docente buscan colaborar en la interacción entre el estudiante y la situación, orientándolo y con el propósito de que el alumno avance con su procedimiento y/o lo modifique, sin explicitar el conocimiento que se espera que él construya. El estudiante al aceptar el problema, pone en juego sus propios procedimientos, pero también los modifica, rechazándolos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones, las que son denominadas retroacciones del medio, produciendo de este modo conocimiento.

Se identifican dos condiciones que le son propias a una situación a-didáctica: que el estudiante pueda decidir qué estrategia utilizará para abordar la tarea que se le propone, lo que implica que la misma deberá ofrecer variedad de estrategias posibles; y que la situación contenga una finalidad, de tal modo que sea posible identificarla independientemente del conocimiento a producir. Esta finalidad puede ser entendida en términos de la acción explícita que se le solicita al estudiante.

De acuerdo a Sadovsky (2005), el modelo de situación a-didáctica concibe que la complejidad de los conocimientos que se ponen en juego requiere de tiempos más o menos prolongados para su elaboración.

Por eso, se piensa en una situación que se implementa varias veces cambiando cada vez algunas condiciones - por ejemplo los números en juego, o las herramientas que se permiten para abordarlo, o las formulaciones que se proponen - bajo el supuesto de que dichos cambios van dando lugar a la producción de nuevas relaciones matemáticas por parte del sujeto (p. 6).

En el diseño de la secuencia didáctica tuvimos en cuenta estas ideas al proponer elaboración de agrupaciones de cuadriláteros en actividades consecutivas variando las herramientas y recursos que

se permiten utilizar para abordarlas, los elementos de los cuadriláteros que se ofrecen como punto de partida, las características de los cuadriláteros en las cuales se pone el foco y las tareas que se proponen a los estudiantes.

Por otro lado, retomando la segunda de las dos nociones que nos interesa ampliar, el contrato didáctico explica y describe las interacciones docente-alumno a propósito de las que desarrolla el estudiante en relación con el medio. De acuerdo a Sadovsky (2005) esta herramienta teórica pone en un lugar central las interacciones con el docente que se desarrollan con respecto a un conocimiento matemático en particular y que se producen cuando cada uno de los integrantes de la relación didáctica interpreta las intenciones y las expectativas -explícitas e implícitas- del otro en el proceso de comunicación. Este concepto teórico posibilita visibilizar que la construcción de ideas matemáticas por parte de los estudiantes también se ve influenciada por inferencias que realizan de lo que el docente expresa pero no necesariamente dice.

En esta perspectiva didáctica se espera que un estudiante aprenda produciendo, haciendo funcionar y evolucionar sus conocimientos. Para permitir este funcionamiento, el docente no puede explicitar al estudiante qué es lo que se espera de él, sino que su tarea consiste en que el alumno acepte la responsabilidad de resolver las situaciones o problemas cuya respuesta no conoce. La teoría conceptualiza esta tarea bajo el término *devolución*.

En términos de Brousseau (2007), “la devolución es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia” (p.87).

En este sentido, Sadovsky (2005), recuperando a Margolinas (1993) y Perrin Glorian (1993), afirma que la devolución es concebida como un proceso de negociación entre el docente y sus estudiantes que se encuentra vigente durante toda la situación a-didáctica. Esto puede darse por ejemplo cuando el docente genera situaciones de reflexión en torno a las acciones desplegadas en los problemas propuestos que componen la situación a-didáctica, como así también cuando el docente necesariamente interviene para sostener a un alumno en la situación, orientándolo a que relacione con conocimientos que tiene disponibles.

Al considerar las relaciones de un alumno con el medio, Brousseau (2007) sostiene que éstas pueden ser agrupadas en al menos tres grandes categorías, en las cuales el conocimiento adquiere distintas funciones: situación de acción, formulación y validación.

En una *situación de acción* el alumno actúa sobre un medio, que puede ser material o simbólico, la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos. Esto significa que el estudiante no necesariamente es consciente de la presencia de un conocimiento en las interacciones que él establece con el medio, al buscar las estrategias para resolver un problema, y que no es en esta etapa necesariamente capaz de explicitarlo.

En una *situación de formulación* el alumno formula explícitamente un mensaje destinado a otro, quien debe poder comprender y actuar sobre éste con los conocimientos que tenga disponibles. En esta situación, se promueve que se hagan explícitos aspectos de ese conocimiento que hasta el momento eran implícitos.

Una *situación de validación* es el momento en que el estudiante elabora argumentos acerca de la validez de las formulaciones que se realizaron, así como también las somete a juicio por parte de otros alumnos. Estos podrán rechazarlas, aceptarlas o proponer en consecuencia otras afirmaciones.

En el diseño de la secuencia procuramos que los estudiantes tengan oportunidad de hacer funcionar sus conocimientos en diferentes situaciones. En cada una de las primeras cuatro actividades los estudiantes se enfrentarán a la resolución de un problema, por lo que en una primera instancia podrán actuar sobre el medio y elaborarán distintas estrategias de resolución, que implica la exploración de distintas propiedades de cuadriláteros. Algunos recursos con los que contarán para desarrollar sus estrategias de resolución son triángulos de cartulina, construcciones en lápiz y papel y construcciones con Geogebra. A partir de este momento los estudiantes, mediante el intercambio con sus compañeros, formularán conjeturas, es decir, establecerán posibles cuadriláteros que cumplan con las condiciones pedidas e incluso enunciarán propiedades de los cuadriláteros estudiados. Si bien es posible que muchas de las validaciones que realicen sean del tipo empíricas, esperamos que algunos grupos construyan pruebas para justificar sus afirmaciones.

Otra noción central que conceptualiza el rol docente en esta teoría es la *institucionalización*. En relación a esto, recuperamos a Panizza et al. (2003) quien expresa que:

La institucionalización es de alguna manera complementaria a la devolución. Brousseau (1986) reconoce en estos dos procesos los roles principales del maestro, y afirma: "(...) En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo a-didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status (...)" (p.14).

Esta noción fue incorporada en la teoría luego de varios estudios en los cuales se observó que el docente necesitaba, por distintas razones, dar cuenta de lo producido por los alumnos, es decir, identificar un objeto de enseñanza y reconocerlo como saber cultural, establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.

Recuperando a Panizza et al. (2003), "durante la institucionalización, se deben sacar conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, se debe recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica, etc., a fin de poder establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural" (p.15).

Sadovsky (2005), recuperando a Perrin Glorian (1993) expresa que existen condiciones para que la devolución sea posible, y una de ellas es que el estudiante tenga desde el comienzo un "proyecto de aprendizaje" que le posibilite iniciar un proceso de descontextualización de los conocimientos que producirá. Si bien la construcción de este proyecto es una construcción del estudiante, el docente colabora en él, lo cual permite concebir tanto a la devolución como a la institucionalización como procesos imbricados y que suceden simultáneamente.

Perrin Glorian (1993) en Sadovsky (2005) propone que:

la institucionalización de los conocimientos comienza para nosotros desde el momento mismo de la devolución porque ya ahí es necesario que el maestro dé al alumno, si no lo tiene, el proyecto de adquirir esos conocimientos; en este sentido los procesos de devolución y de institucionalización se imbrican y son, en cierta medida, contemporáneos. (p.14).

2.2.1. Variables didácticas

Otro concepto de la teoría que es muy importante es el de *variable didáctica*. Se llama de esta manera a aquellos elementos de una situación que son susceptibles de tomar diferentes valores y que al tomarlos pueden provocar cambios tales en la situación que hacen variar la estrategia que el alumno haya seleccionado para resolverla.

Bartolomé y Fregona en Panizza (2003), la definen de la siguiente manera:

(...) las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación (p.10)

Brousseau (1993) expresa que el docente podrá promover que los estudiantes construyan nuevos conocimientos a partir de las elecciones que realice en cuanto a los valores que toman las variables didácticas. Un ajuste de estos valores podrá originar como consecuencia que los conocimientos que los estudiantes tienen disponibles y que eran suficientes para comprender y resolver una situación, ya no lo sean para abordar la nueva. Así como también generar a partir de una situación inicial un campo de problemas en relación a un mismo conocimiento o un grupo de problemas que corresponden a diferentes conocimientos.

2.3. Transposición didáctica

Para realizar nuestro análisis didáctico, tanto de los libros de texto seleccionados como de la secuencia y su implementación, nos resulta importante considerar la noción de Transposición Didáctica. Incluimos a continuación una breve referencia de la misma, que nos permite y brinda sustento para analizar y comprender algunas cuestiones de esta investigación. En términos de Chevallard (1998), un contenido de saber que se selecciona para ser enseñado, sufre un conjunto de modificaciones para llegar a tener la categoría de “saber a enseñar”. Estos procesos que van a atravesar los saberes para transformarse en saberes didácticos, van a formar parte de lo que Chevallard denominó la “transposición didáctica”.

La importancia de dejar plasmada la noción de transposición didáctica en nuestro marco teórico reside en que al realizar el análisis de libros de texto, del diseño curricular del Profesorado en Matemática y al diseñar una propuesta de enseñanza, aparecen ciertos cuestionamientos en relación al proceso que hemos descrito: ¿qué decisiones toman los autores de los libros de texto para abordar clasificaciones y definiciones de cuadriláteros? ¿Qué lugar se le ha otorgado a esta temática en el diseño curricular de la formación de profesores de matemática? ¿Cuáles fueron nuestras decisiones al elaborar la propuesta de enseñanza en relación con este objeto de estudio?

Los saberes que son seleccionados como objetos de enseñanza en una institución⁸ particular presentan características propias que los distinguen de los mismos saberes en otras instituciones. Surgen así los fenómenos de “transposición didáctica” para describir y comprender los procesos de transposición del saber, de la institución de los matemáticos a distintas instituciones de la enseñanza, planes de estudio, programas, manuales, y clases. En cada una de estas instituciones, el

⁸ Para Chevallard una institución es un concepto primitivo, puede ser una escuela, una clase un libro de texto.

saber obedece a motivaciones de distinta índole y, en el paso de una institución a la otra, sufre transformaciones inevitables, necesarias, que se convierten en objeto de estudio.

Consideramos un texto de Chevallard (1996), donde él describe este concepto:

[...] ¿por qué hay transposición de los saberes? La respuesta es a priori muy simple y se puede explicitar en algunos puntos. Primer punto: los saberes nacen y crecen en ciertos “lugares” determinados de la sociedad. (La producción de los saberes es algo complejo, que supone una “ecología” particular.) Segundo punto: las necesidades sociales hacen que los saberes producidos deban vivir también en otros lugares de la sociedad. (La cosa es todavía más compleja y oscura: así, casi cada objeto de uso cotidiano “contiene” hoy día, de manera invisible para el usuario, matemáticas “cristalizadas”, y un montón de otros saberes más.) Tercer punto: para poder vivir “lejos” de sus lugares de producción, los saberes sufren transformaciones que los adaptan a las ecologías “locales” correspondientes. (De este modo, los objetos matemáticos que manipulan ingenieros, economistas o geógrafos deben empezar a vivir “en asociación” con otros objetos, que el matemático ignora y que, por lo menos culturalmente, parecen propios de estos ámbitos específicos de la práctica social.)

El esquema anterior define de manera muy amplia los procesos sociales de transposición. [...] Cuando un saber se transpone en una institución para ser estudiado, hablaremos de transposición didáctica. (El adjetivo didáctico corresponde aquí al sustantivo estudio.) El ejemplo de la Escuela es, en este caso, fundamental, aunque no sea único. (Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación, párr.55).

La transposición didáctica implica dos fases: la primera corresponde al pasaje del saber sabio al saber a enseñar y la segunda al pasaje del saber a enseñar al saber enseñado.

Los objetos del saber sabio son reconocidos como tal en una comunidad científica, sin embargo, no son enseñables de esta forma. Para que esto suceda Chevallard (1998) sostiene que se debe realizar una mediación entre ellos, en la cual un dominio del saber sabio sufre transformaciones para ser insertado dentro de un discurso didáctico. Una vez hecho este tratamiento; el saber a enseñar es diferente del saber sabio, pues este le sirve de referencia con su entorno epistemológico en particular y es diferente a la significación original ya que para introducirlo a la enseñanza se han incorporado una serie de conceptos que lo estructuran para hacerlo comprensible en la escuela.

En el pasaje del saber científico al saber enseñado, Chevallard (1998) sostiene que por un lado es necesario desconcentrarlo y secuenciarlo a los fines de que pueda ser evaluado parcialmente. Esto permite una programación para su adquisición, como así también lo independiza respecto de quienes le dieron origen, es decir, se despersonaliza.

Por otro lado, señala que se debe publicar a efectos de someterlo al inevitable control social del aprendizaje. Todos estos requisitos se hallan plasmados en el proceso de la puesta en texto del saber. El “texto del saber” se elabora concretamente por medio de diversos textos, es decir, cada autor de un manual realiza su propia versión del “texto del saber” teniendo en cuenta ciertas restricciones, por ejemplo, deberá adecuarse a las posibilidades didácticas de los sujetos, alumnos y profesores que utilizarán su texto como herramienta de estudio y a los contenidos establecidos por los programas oficiales.

Los interrogantes que nos planteamos al comenzar este apartado permiten visualizar que un libro de texto que el docente selecciona para su trabajo con estudiantes, un plan de estudios y hasta la propia formulación de una propuesta de enseñanza, se constituyen según Chevallard (1998) en instituciones y presentan características propias que los distinguen de otras instituciones, motivos por los cuales nos interesa detenernos y estudiarlos en esta investigación.

2.4. Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica surge en la didáctica de la matemática a comienzos de los años ochenta y se fundamenta en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y en la Transposición Didáctica de Chevallard. Está especialmente ligada a la experimentación en las clases y al proceso de evaluación de un trabajo teórico. “... se trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logran elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados” (Godino et al., 2013, p.7).

El nombre de esta metodología alude a un trabajo equiparable con el de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue et al., 1995, p.33).

Según Artigue et al. (1995), la ingeniería didáctica como metodología de la investigación se caracteriza por representar una investigación basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Además, se caracteriza por el registro de los estudios de caso y por la forma de validación.

La forma de validación es interna y se basa en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori de la secuencia realizada, es decir que no recurre a la validación externa basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control, como suele trabajarse en otras metodologías.

En esta metodología se pueden distinguir cuatro fases:

1. Análisis preliminares
2. Fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas
3. Experimentación
4. Análisis a posteriori y validación

En la primera fase, se deben realizar análisis preliminares respecto al marco teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos y relacionados con el tema. Los más frecuentes son el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica. En nuestra investigación hemos realizado un análisis preliminar reducido: consideramos diversos aportes teóricos e investigaciones sobre nuestro objeto de estudio que son las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros, analizamos su rol en la enseñanza y el aprendizaje y realizamos un análisis del abordaje en libros de texto recomendados para la formación docente en los diseños curriculares vigentes y en planes de cátedra de Geometría de Nivel Universitario, sin embargo no profundizamos en un estudio epistemológico de nuestro objeto de estudio, así como tampoco indagamos en las concepciones que los estudiantes tenían del mismo. Este recorte en la primera fase nos permite asegurar que nuestra investigación no se trata de una ingeniería didáctica en sentido estricto; sin embargo, nos apoyamos en varios aspectos de las siguientes fases para desarrollar nuestro trabajo.

La fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas comprende una parte descriptiva y predictiva, y es donde se toman decisiones en relación a las “variables de comando” no determinadas por las restricciones. Estas variables pueden ser tanto globales como locales, generales

o depender del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. En un nivel local, se encuentra la selección de las variables asociadas con el problema y de las variables asociadas con la organización y la gestión del "medio", variables didácticas en términos de Brousseau (1995).

En términos de Artigue et al. (1995) el análisis a priori se debe concebir como un control de significado, ya que el objetivo del mismo es determinar si las selecciones realizadas permiten incidir en los comportamientos de los estudiantes y su significado, así como también se debe analizar qué cuestiones se ponen en juego para un estudiante en la situación diseñada en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi autónomo.

En nuestra investigación es muy importante esta segunda fase, pues nos permitió tomar decisiones en cada una de las actividades, como por ejemplo en qué características de los cuadriláteros poner el foco y anticipar procedimientos que los estudiantes podrían desarrollar, qué tipo de tareas proponemos, así como también formas posibles de validación.

La fase de experimentación representa el momento de la implementación de la secuencia diseñada, en nuestro caso con futuros docentes de matemática.

Y por último, a la fase de experimentación le sigue la fase de análisis a posteriori y validación, que consiste en el análisis del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, como ser observaciones y producciones de los estudiantes a lo largo de la secuencia didáctica. Tal como hemos mencionado anteriormente, la validación es interna y se basa en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori, con el objetivo de evaluar el funcionamiento de la secuencia y dar lugar a que surjan modificaciones a la propuesta original.

2.5. Secuencia didáctica

Nos resulta importante recuperar la idea de secuencia didáctica, pues es una pieza central de esta investigación. Para esto, tomamos la siguiente definición de secuencias didácticas extraída del material de estudio de la Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria:

“las llamamos así, porque no están conformadas por un conjunto de actividades pensadas en forma aislada, sino que por el contrario, están atravesadas por un hilo conductor, y articuladas de forma tal que cada instancia se vincula con la anterior, retomando lo ya trabajado y agregando algún elemento o introduciendo alguna variante sobre los elementos que intervienen en la actividad” (Instituto Nacional de Formación Docente [INFD], 2015)

Se expresa en el texto que es importante visualizar que más allá de los distintos modos en los que pueden organizar un conjunto de actividades, se deben también variar las condiciones y las tareas que se proponen a los estudiantes.

Es importante destacar que planificar la enseñanza en términos de secuencias didácticas para el abordaje de cada contenido, se corresponde con la idea de que no será suficiente una sola interacción con el objeto de conocimiento para que los estudiantes lo aprendan. Será necesario volver a ponerlos en contacto con los conocimientos a través de distintas actividades, en distintas situaciones, en distintos contextos, con diversos grados de complejidad, proponiéndoles distintos tipos de tareas. Naturalmente, planificar todas estas instancias implicará también contemplar tiempos acordes a los procesos que se estarán propiciando.

2.5.1. Interacciones entre pares

Nos interesa mencionar la importancia de la interacción entre pares ya que la metodología que se propone en la implementación de la secuencia diseñada se basa principalmente en el trabajo colaborativo, puesto que consideramos que es a partir del intercambio con sus pares, el docente y las situaciones planteadas, que los estudiantes lograrán formular definiciones y clasificaciones de cuadriláteros.

Tomamos como referencia los aportes de Cambriglia et al. (2010), quienes consideran a la interacción como *medio de construcción*, en el sentido en que “da lugar a la emergencia de relaciones matemáticas que se construyen en torno a la actividad matemática del aula y que serían otras (o no serían) si aisláramos a los actores de la clase”. (p.141)

Las autoras expresan que en este medio los actores asumen distintos roles y en ciertas ocasiones más de uno a la vez, superando los clásicos modelos de comunicación donde uno de los sujetos es emisor o productor de un mensaje y otro receptor o intérprete del mismo. Esto significa que “el acto de interpretar comporta potencialmente la producción de algo nuevo que solo es posible a partir de la producción del otro”. (p.141).

Las autoras también sostienen que en una clase en la que se propicia la discusión entre pares y en la que se permite que los estudiantes tomen decisiones,

“el receptor es intérprete y productor, así como el emisor es productor e intérprete. El receptor produce sobre la producción de otro, desde su propio marco interpretativo, y esta nueva producción porta las primeras relaciones construidas por el/los productores anteriores ya sea modificadas/ enriquecidas/ eventualmente cuestionadas”. (p.141)

Por último, nos resulta interesante recuperar la idea de que la combinación de un espacio en el cual se discutan, analicen y se consideren como problemas las producciones de otros, permite generar en una clase un escenario que posibilita la generación de nuevas discusiones y preguntas.

2.5.2. Trabajo promovido por la secuencia

Es nuestra intención que la secuencia que diseñamos junto con la gestión del docente y las interacciones entre pares, según el enfoque de enseñanza que adoptamos, promueva en las clases un ámbito de producción de conocimientos y un modo de trabajo que priorice que los estudiantes realicen tareas propias del quehacer matemático⁹ tales como:

- involucrarse en la resolución del problema presentado, vinculando lo que se quiere resolver con lo que ya se sabe;
- plantearse nuevas preguntas;
- elaborar estrategias propias y compararlas con las de sus compañeros, considerando que los procedimientos incorrectos o las exploraciones que no los llevan al resultado esperado son instancias ineludibles y necesarias para el aprendizaje;
- discutir sobre la validez de los procedimientos realizados y de los resultados obtenidos;
- reflexionar para determinar qué procedimientos fueron los más adecuados o útiles para la situación resuelta;
- establecer relaciones y elaborar formas de representación, discutir las con las y los demás, confrontar las interpretaciones sobre ellas y acerca de la notación convencional;
- elaborar conjeturas, formularlas, comprobarlas mediante el uso de ejemplos o justificarlas utilizando contraejemplos o propiedades conocidas;

⁹ Adaptado de: Cuadernos para docentes. Serie Reencuentros. Ministerio de Educación de la Nación. 2021.

- reconocer los nuevos conocimientos y relacionarlos con los ya sabidos;
- interpretar la información presentada de distintos modos;
- producir textos con información matemática y avanzar en el uso del vocabulario adecuado.

En síntesis, nuestra intención es priorizar “un trabajo matemático en el cual el sentido de los conocimientos se construya al resolver problemas y reflexionar sobre ellos”. (MEN, 2021)

2.5.3. Potencial de las consignas¹⁰ matemáticas

Nos interesa tomar los aportes de Barreiro et al. (2016), para analizar el potencial matemático de las consignas de los problemas que componen la secuencia didáctica diseñada. Los autores expresan que la actividad matemática que el estudiante realice estará fomentada y relacionada, entre otras cuestiones, por las consignas que el docente proponga. Con la intención de que la actividad matemática que el estudiante realice sea valiosa y cognitivamente exigente, es que los autores proponen la valoración del potencial matemático de las consignas que seleccionamos como docentes. En términos de Barreiro et al. (2016), “el potencial matemático de una consigna está relacionado con las posibilidades de exploración que la consigna habilita o no y con las posibilidades de argumentar sobre la validez de la resolución o de su respuesta” (p.27). En relación con las posibilidades de exploración, la autora señala que hay, a su vez, dos cuestiones que las favorecen, que son que la consigna admita diferentes caminos de resolución y que la consigna no incluya pasos a seguir, es decir que no tenga pautado que ir resolviendo, de qué modo y en qué momento. Se considera muy importante que una consigna pueda admitir que el estudiante tenga posibilidades tanto de explorar como de argumentar porque le permite tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, eventualmente podría recurrir a heurísticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, explicar el porqué de su respuesta, argumentar sobre la validez de sus producciones, etc. asemejándose de ese modo al trabajo del matemático lo que legitima el tipo de trabajo que se realizaría en el aula de Matemática de nivel secundario. (Barreiro y Rodríguez, 2014)

Los autores mencionados proponen realizar una valoración cualitativa del potencial de una consigna, que será débil o pobre en el caso en que la consigna no admita exploración y no requiera ningún tipo de argumentación; o será rico, que se da en el caso opuesto, ante una consigna que abre las posibilidades al estudiante de que explore, razone, descarte, argumente, decida cómo debe argumentar, etc.

2.5.4. El uso de Geogebra en nuestra secuencia didáctica

Dado que en la secuencia didáctica que diseñamos proponemos el uso de Geogebra, nos resulta oportuno recuperar algunas cuestiones en relación a este software. Geogebra es un programa diseñado como herramienta didáctica, que promueve y posibilita la exploración y la investigación como medios para aprender Matemática. Es un software libre y gratuito, sus actualizaciones son constantes, y es además multiplataforma.

Novembre et al. (2015), expresan que:

¹⁰ Si bien respetamos la terminología utilizada por los autores, nos interesa destacar que, al referirnos a consigna, no solo haremos alusión al enunciado de un problema, sino en la tarea que éste propone.

La potencialidad de una herramienta tecnológica como el GeoGebra se manifiesta en dos transformaciones: abre la posibilidad de abordar problemas que serían imposibles sin su ayuda y permite adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambia la naturaleza de su aprendizaje (p.14).

Nos interesa recuperar algunas de las múltiples ventajas que ofrece la incorporación de las TIC a la enseñanza de la matemática, y en particular el uso de Geogebra, que enuncia la autora y que fundamentan nuestra elección de incorporarlo en la secuencia diseñada.

Una de ellas es la posibilidad de visualizar. El programa ofrece múltiples representaciones de objetos geométricos y permite relacionarlos dinámicamente.

La introducción de la geometría dinámica posibilita la construcción de múltiples figuras instantáneamente. Este tipo de trabajo brinda a los estudiantes retroacciones que deben analizar en función de las variaciones que realiza. Brinda también posibilidades de explorar: la construcción de muchos casos de análisis en lápiz y papel no siempre es posible, lo cual los limita como herramienta. En cambio, la computadora y en particular Geogebra permite trabajar rápidamente con muchos casos, lo que favorece la elaboración de conjeturas, que luego se podrán validar.

2.5.5. La relación entre las nociones didácticas “dibujo” y “figura”

Nos interesa recuperar una de las cuestiones centrales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, que es la relación entre las nociones didácticas “dibujo” y “figura”.

Según Parzysz, “la figura es el objeto geométrico descrito por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto” (como se citó en Laborde y Capponi, 1994).

En este sentido, Itzcovich (2005) expresa que:

- Los objetos de la Geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico conceptualizado.
- Los dibujos trazados son representantes de esos objetos teóricos. Es decir, la marca que deja un lápiz cuando traza un triángulo no hace más que representarlo. Y es bien conocido que los alumnos asignan a estos dibujos numerosas propiedades o características que no tienen categorías de tales para la geometría, como la posición de la hoja. Incluso los dibujos son “leídos” por los alumnos de una cierta manera que no siempre es aceptada por la geometría (p.199).

A su vez, en distintos documentos curriculares encontramos aportes para pensar la relación entre dibujo y figura. Por ejemplo, en el documento N°5, Sadovsky et al. (1998) expresan que esta relación es compleja, que cambia y evoluciona de acuerdo a los saberes que los estudiantes van construyendo de ese objeto geométrico.

Una de las grandes dificultades que se asocian a esta relación, es que los estudiantes adjudican a las figuras características que son propias de los dibujos, como ser la posición en la hoja, el tamaño, las longitudes de los lados, entre otras. Esto es consecuencia de que, en muchas ocasiones, las figuras están representadas de la misma manera, lo que muchos autores denominan figuras estereotipadas¹¹. Sadovsky et al. (1998) expresan que tener en cuenta la diferenciación entre dibujo y figura resulta una herramienta didácticamente útil para:

- poner en cuestión el punto de vista según el cual la representación de un objeto geométrico permite “ver” todas las propiedades que caracterizan dicho objeto,

¹¹ Esto es considerado según Brousseau (1983) como un obstáculo de origen didáctico, dado que es el resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.

- tomar conciencia de la imposibilidad de resumir en un dibujo todas las relaciones que caracterizan una situación,
- discriminar entre el conjunto de relaciones espaciales que pueden inferirse de un dibujo, cuáles son propiedades del objeto que se representa y cuáles no (p.12).

Estas ideas nos resultaron muy importantes para el diseño de la secuencia, pues buscamos que a partir de nuestra propuesta los estudiantes trabajen con un amplio conjunto de ejemplos, de materiales, de posiciones y tamaños en los que se presentan los dibujos, para propiciar de este modo un avance en la conceptualización de los objetos geométricos y discusión en torno de los mismos. Para lograrlo, decidimos incluir en algunas de las actividades el trabajo con Geogebra. En relación a esto, Novembre et al. (2015) expresan que la geometría dinámica, entendida como un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en los principios de la geometría euclidiana, presenta grandes beneficios y potencialidades:

Una de sus potencialidades es que favorece, en los alumnos, la distinción entre dibujo y figura. En ese sentido, tal como se ha señalado anteriormente, la figura es considerada como un referente teórico, mientras que el dibujo es un representante particular de la figura. Se trata de analizar qué propiedades corresponden a una clase de figuras y cuáles se agregan en un dibujo (p.34).

Los autores expresan que “el arrastre” es una de las potencialidades que ofrece Geogebra para favorecer la distinción entre figura y dibujo ya que “cuando se realiza una construcción sin tener en cuenta sus propiedades geométricas, el dibujo no resistirá el arrastre y se deformará” (p.34). Esto significa que muy posiblemente las propiedades que los estudiantes podían observar no se conservarán.

El trabajo en geometría dinámica introduce entonces un nuevo objeto para que los alumnos manipulen, una representación en la cual las propiedades geométricas de la figura pueden ser leídas como las que se conservan a través de desplazamientos, y las construcciones pueden ser validadas como aquellas que conservan las propiedades pedidas a través de desplazamientos (Restrepo, 2008, como se citó en Novembre et al., 2015)

A su vez, también resaltamos el potencial del acceso a muchas representaciones de casos particulares que ofrece Geogebra. Lo que abona el trabajo de exploración, de formulación de conjeturas y de construcción de la relación entre dibujo y figura que describimos.

Capítulo 3: Clasificaciones y definiciones de cuadriláteros como objetos de reflexión. Revisión de antecedentes

En este capítulo llevaremos a cabo un análisis del objeto de estudio de esta investigación: las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros. Para ello recuperamos aportes teóricos de diversos autores acerca de la noción de definición en matemática, en particular en Geometría, y de la estrecha relación con las clasificaciones de cuadriláteros.

Como parte del estudio, también realizamos una búsqueda y análisis de trabajos de investigación relacionados con la temática a abordar, incluimos un detalle de aquellos que nos resultan relevantes y forman parte de los antecedentes significativos para esta investigación.

3.1. La noción de definición en matemática

Analizar diversos aportes acerca de la definición en matemática nos permite tener un punto de partida para el posterior análisis tanto de libros de texto y de los diseños curriculares; como de la secuencia diseñada y de las producciones de los estudiantes a partir de la implementación de la misma.

En lo que respecta a la definición de un concepto matemático, tomamos como punto de partida el siguiente enunciado de Calvo (2001):

La definición de un concepto matemático es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de ejemplos. (p. 30)

En Matemática, particularmente en Geometría, teniendo en cuenta el método lógico deductivo, se toman conceptos primitivos y axiomas, nociones ya conocidas y teoremas, y a partir de ellos se definen nuevos conceptos. La autora, citando a Mariotti y Fischbein (1997), sostiene que desde el punto de vista lógico formal, una definición representa otorgar un “nombre” a un concepto del que ya se conocen sus atributos y propiedades; sin embargo, desde la perspectiva de la actividad matemática y de su enseñanza, la definición introduce una noción que no existía previamente y que puede incluso abrir nuevos problemas, abrir otros antiguos, o colaborar en la organización del sistema lógico en el que se inserta.

De este modo, las definiciones cumplen una función, la de abreviar, simplificar; pero también responden a la necesidad de ir organizando la matemática y facilitar así su desarrollo.

Otro aspecto que menciona la autora es que las definiciones se establecen convencionalmente. La cuestión principal se encuentra en qué características se deben tomar en cuenta a la hora de establecer la convención, y a su vez destaca que dependen de otros factores: estéticos (ligados a la elegancia y sencillez del enunciado), operativos (ligados a las conclusiones que se pueden extraer de la definición) y didácticos (ligados al proceso de transposición didáctica que sufre el conocimiento para ser comunicado, que deberá ser adaptado de acuerdo a los conocimientos previos de los alumnos o los objetivos del curso).

Calvo (2001) considera dos características de las definiciones matemáticas: *convencionalidad* y *minimalidad*:

La convencionalidad se refiere a que las definiciones no están predeterminadas sino que las selecciona el matemático, el autor de un libro de texto o el profesor, atendiendo a dos factores principales: el tipo de

caracterización del concepto matemático que se requiera en un momento dado y las convenciones en el grado de restricción utilizado para definir un concepto matemático. [...] La minimalidad se refiere al hecho de que una definición no incluya información redundante. Cuando este es el caso se habla de una definición económica; sin embargo, a una definición se le puede agregar más información de la necesaria sin que pierda el formato de definición matemática. Por ello, Govender y De Villiers (2002) consideran que una definición es incorrecta (solo) si contiene una propiedad incorrecta o si las propiedades mencionadas son insuficientes. (p. 30)

También encontramos los aportes de Winicki Landman (2006) quien cita a Felix (1960; 148-149), acerca de la definición:

En general, definir es el acto o proceso por el cual se establece de modo conciso el preciso significado o acepción de un concepto. Es el establecimiento de las propiedades esenciales (la intención) que caracterizan a todos y solamente a los elementos de la extensión del concepto. Pero “definir es un acto matemático y lógico, demasiado esencial para ser confundido con simplemente designar... Algunas veces la palabra a ser definida es una etiqueta atribuida a un objeto construido dentro de una teoría matemática y suficientemente importante para que distintas caracterizaciones hayan sido consideradas para él; la designación aparece cuando el objeto es bien distinguido de los otros objetos de la teoría. O, y esto es más serio, uno crea una nueva noción, lo que lleva a una extensión de la teoría”. (p.530)

En el proceso de definir influyen criterios que no siempre se revelan cuando las definiciones son presentadas como hechos consumados. De acuerdo a Winicki Landman y Leikin (2000) y con grandes similitudes a lo expresado por Calvo (2001), esos criterios son básicamente lógicos, estéticos, y pedagógicos. Dichos autores consideran que, desde el punto de vista lógico la definición de un concepto:

- a) Debe ser precisa.
- b) Debe basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos (criterio de jerarquía, según Van Dormolen y Zaslavsky, 2003).
- c) Debe ser consistente con definiciones anteriores en las que ella se apoya.
- d) Es arbitraria.
- e) Establece condiciones necesarias y suficientes, es decir es bicondicional.

Desde el punto de vista estético, la definición de un concepto

- a) Debe ser minimalista, no debe contener partes que pueden deducirse lógicamente de otras partes de la definición.
- b) Debe ser preferiblemente elegante, lo que puede entenderse de distintas maneras: sencillez en el uso de simbolismo, simplicidad de su presentación, etc. Se podría decir, junto a Polya, que “la elegancia de un teorema [y de una definición] es directamente proporcional al número de ideas que en él se pueden identificar e inversamente proporcional al esfuerzo necesario para ello” (p.530).

Sin embargo, desde un punto de vista pedagógico, Winicki Landman y Leikin (2000) expresan que un profesor necesariamente debe poder tomar decisiones en relación a qué definición es más conveniente que otra para la situación en la que trabajará y los objetivos que persigue, por lo que no puede considerar solamente criterios lógicos y estéticos. Estas decisiones involucran un proceso de análisis de las definiciones por parte del profesor, que se constituyen en criterios pedagógicos. Los autores expresan además que un profesor debe saber crear situaciones en las que sus alumnos participen del proceso de formulación y elección de las definiciones.

Por otra parte, los autores también agregan que:

Cada definición determina un conjunto de objetos que cumplen con las condiciones de la definición. Estos objetos se dice que ejemplifican el concepto. Si dos enunciados diferentes definen dos conceptos y sus conjuntos correspondientes de objetos que los ejemplifican no son disjuntos, entonces las siguientes relaciones entre las definiciones son posibles: pueden ser equivalentes, una de las definiciones puede seguir de la otra, o las definiciones pueden competir (p. 18).

Describimos brevemente las posibilidades que se plantean:

1- Dos definiciones son *equivalentes* sí y solo sí el conjunto de objetos sobre el que se discute es el mismo para ambas. Por ejemplo, “un cuadrado es un rectángulo con sus lados iguales” y “un cuadrado es un rombo que tiene sus ángulos rectos”.

2- Dos definiciones son *consecuentes* cuando un conjunto de objetos es subconjunto propio del otro. Por ejemplo, “un cuadrado es un tipo particular de paralelogramo”, y “un cuadrado es un rectángulo que tiene los lados iguales”.

3- Dos definiciones son definiciones *en competencia* cuando los conjuntos de objetos se intersecan, pero no son iguales. Hay condiciones o propiedades que comparten y otras que los diferencian. Por ejemplo, “un paralelogramo se llama rectángulo cuando tiene sus cuatro ángulos iguales” y “un paralelogramo se llama rombo cuando tiene sus cuatro lados iguales”. Ambos conjuntos tienen objeto(s) en común (el cuadrado) pero hay rombos no rectángulos y rectángulos no rombos.

3.1.1. La definición y la clasificación como procesos o como productos

Como uno de los objetivos que persigue la secuencia didáctica que diseñamos es lograr que los estudiantes conciban a la construcción de clasificaciones y formulación de definiciones como un proceso, recuperamos aportes de distintos autores que abordan esta cuestión.

De acuerdo a Winicki Landman (2006), existe una diferencia entre definir como proceso y definición como producto. El autor expresa que un futuro profesor debe tener oportunidades que le permitan reflexionar acerca de los roles que las definiciones cumplen en el desarrollo de las matemáticas, la definición como objeto y el definir como proceso, los factores que influyen en la elección de una proposición como definición de un concepto matemático y las consecuencias de esta elección.

De Villiers (1998) cita a otros autores que expresan una crítica a la enseñanza de definiciones directas, sin poner énfasis en el proceso subyacente de definir. Por un lado, menciona a Freudenthal (1973), quien plantea que la mayoría de las definiciones no han sido el comienzo sino el toque final de la actividad organizativa y que no debería privarse a los niños o, en nuestro caso, futuros profesores de este privilegio. Justamente es este uno de los objetivos que perseguimos con la secuencia, que las definiciones y clasificaciones se formulen al final de un camino, luego de que se hayan estudiado los objetos y se los haya distinguido de otros. Por otro lado, cita a Ohtani (1996: 81), quien expresa que la práctica tradicional de impartir definiciones a los estudiantes es considerada un método de persuasión moral con varias funciones sociales, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes: para justificar el control del maestro sobre los estudiantes, para alcanzar un grado de uniformidad, para evitar tener que lidiar con las ideas de los estudiantes y para eludir la problemática de las interacciones con estudiantes.

De Villiers (1998) sostiene que, para favorecer la comprensión de las definiciones geométricas por parte de los estudiantes, y de los conceptos que éstas definen, es indispensable involucrarlos en alguna etapa del proceso de definición de conceptos geométricos. Por otra parte, también expresa que resulta casi irrazonable esperar que los estudiantes formulen definiciones formales por su cuenta, dada la gran complejidad inherente al proceso de definir y la trayectoria anterior de los estudiantes,

excepto que en ésta hayan sido guiados en forma didáctica a partir de ciertos ejemplos en los cuales luego puedan apoyarse para producir sus propios intentos.

El autor sostiene que la construcción de definiciones es una actividad matemática tan importante como otras, como por ejemplo la de resolver problemas, conjeturar, generalizar, validar, etc., cuestión que nos resulta muy importante destacar. Y sostiene que es muy extraño que esta tarea haya sido tan descuidada en la enseñanza de la matemática.

3.1.2. Definiciones afirmativas y negativas

Según Rey Pastor y Puig Adam (1948), se denominan definiciones negativas aquellas que caracterizan a los elementos definidos por la carencia de alguna propiedad.

Los autores expresan que realizar una afirmación equivale a realizar un juicio mientras que realizar una negación implica infinitos de ellos. También afirman que la diferencia entre las definiciones afirmativas y negativas no es más que una diferencia formal y expresan las siguientes razones por las cuales no hay una conveniencia en la utilización de una sobre la otra:

- a) Ciertas definiciones afirmativas implican infinitas afirmaciones tal como lo hacen algunas negativas: “Dos rectas son paralelas si todos los puntos de una equidistan de todos los puntos de la otra”.
- b) Algunas definiciones negativas pueden ser más simples que algunas afirmativas enunciadas para el mismo concepto. En el ejemplo anterior, se puede considerar la definición negativa de rectas paralelas como: “dos rectas son paralelas si no poseen ningún punto en común”.
- c) No es complejo dar carácter afirmativo a definiciones negativas, ya que el hecho de no pertenecer a una clase con una determinada característica equivale a pertenecer a otra con características opuestas.

3.2. La noción de clasificación en Matemática

3.2.1. Clasificaciones particionales y jerárquicas

Dado que la clasificación de cualquier conjunto de objetos, en particular geométricos, no sucede independientemente de las definiciones que se adopten de los mismos, es que nos interesa profundizar en el estudio de cuestiones en relación con la clasificación.

Para comenzar recuperamos los aportes de De Villiers (1994), quien plantea que se pueden distinguir distintos tipos de clasificaciones. Dos grandes categorías que se destacan, son las clasificaciones particionales y jerárquicas.

La clasificación *particional* está basada en lo que De Villiers denomina “definiciones excluyentes”, lo que lleva a que los subconjuntos de elementos que se generan sean disjuntos. Por ejemplo, definir un paralelogramo como un cuadrilátero de lados opuestos paralelos, pero que no tiene todos sus ángulos o lados iguales, excluiría inmediatamente los rectángulos.

En contraposición a la anterior, el autor plantea otro tipo de clasificación denominada *jerárquica*, que se basa en “definiciones incluyentes”. El paralelogramo, por ejemplo, se definiría en este caso como un cuadrilátero con lados opuestos paralelos y como el rectángulo cumple con tal condición, se trataría de un caso especial de paralelogramo. Esto no genera clases disjuntas, como en una clasificación particional, sino una jerarquía de cuadriláteros con clases inclusivas.

En el ejemplo anterior de clasificación jerárquica, el paralelogramo sería el cuadrilátero más general, que incluye como subconjuntos a los rectángulos y rombos y la intersección de ambos subconjuntos serían los cuadrados. Mientras que la clasificación estrictamente particional excluye a rombos y rectángulos de la categoría de paralelogramos, y excluye al cuadrado también de los mismos.

Con respecto a la utilización de cada una de ellas, el autor sostiene que si bien ambos tipos de clasificaciones son matemáticamente correctos, es importante comprender por qué una, la jerárquica, es usualmente más funcional en el estudio de la geometría. Las principales ventajas que plantea son:

- Simplifica la sistematización deductiva y derivación de propiedades o conceptos más específicos.
- Conduce a definiciones y formulaciones más económicas de teoremas.
- Provee a menudo de un esquema conceptual útil para resolver problemas.
- A veces sugiere definiciones alternativas y nuevas proposiciones.
- Provee de una perspectiva global útil.

Con respecto a la economía de cada uno de los tipos de clasificaciones, se evidencia que la elaboración de definiciones excluyentes requiere de explicitar mayor información, con el propósito de excluir casos no deseados. A diferencia de éstas, las definiciones incluyentes son más económicas, pues no es necesario agregar información adicional para excluir casos.

De Villiers (1994) también distingue otros dos tipos de clasificaciones, clasificación *descriptiva* (a posteriori) y *constructiva* (a priori), cada una de las cuales puede ser jerárquica o particional.

Recuperando a Freudenthal (1973), el autor expresa que "La definición descriptiva describe un objeto ya conocido señalando algunas propiedades características". (p.2) Cuando se define a posteriori un concepto, se entiende que éste y sus propiedades se conocen desde hace algún tiempo, y solamente se enuncian después. En sus palabras:

La definición a posteriori generalmente se logra seleccionando un subconjunto apropiado del conjunto total de propiedades del concepto a partir del cual se pueden deducir todas las demás propiedades. Este subconjunto sirve entonces como definición y las otras propiedades restantes se derivan lógicamente de él como teoremas. (p.2)

También recuperando a Freudenthal (1973), el autor expresa que "la definición algorítmicamente constructiva y creativa modela nuevos objetos a partir de los familiares". (p.2)

Este tipo de definición tiene lugar cuando una definición dada de un concepto se modifica mediante la exclusión, generalización, especialización, reemplazo o adición de propiedades o restricciones a la definición original, de modo que se construye un nuevo concepto en el proceso. A su vez, es importante mencionar que las propiedades específicas de este nuevo concepto pueden ser exploradas experimental o lógicamente.

En la formulación de una clasificación constructiva con el propósito de generar nuevos conceptos, tal como mencionamos anteriormente, intervienen dos grandes procesos matemáticos: la generalización y la especialización. En relación a éstos, De Villiers (1994) menciona:

Una generalización ocurre cuando un nuevo concepto B, más general, se construye a partir de un concepto A eliminando ciertas propiedades (restricciones) o reemplazando algunas de ellas por otras más generales. Durante la especialización sin embargo, un nuevo concepto B, más específico, se construye a partir de un concepto A, requiriendo propiedades (restricciones) adicionales o reemplazando algunas de ellas por otras más específicas. (p.14)

Nos interesa en particular recuperar que estos procesos de generalización y especialización no ocurren necesariamente solo entre dos conceptos, sino que pueden implicar a dos o más conceptos, seleccionando una o más propiedades o restricciones comunes de éstos.

De Villiers (1994) afirma que: “Mientras que el propósito principal o la función de la definición descriptiva es la de la sistematización del conocimiento existente, la función principal de la definición constructiva es la producción de nuevo conocimiento” (p.2)

Por ejemplo:

- Una clasificación descriptiva (a posteriori) de un cuadrilátero cualquiera, en particular de un cuadrado, tendría lugar si ésta se realiza luego de que se exploren y conozcan sus propiedades.
- En una clasificación constructiva (a priori) es posible partir del concepto más particular como ser el cuadrado, y generalizar como nuevos conceptos el rectángulo y en consecuencia el paralelogramo. El rectángulo se puede generalizar a partir del cuadrado eliminando la condición de igualdad de todos sus lados. De manera similar, se puede generalizar el paralelogramo a partir del rectángulo eliminando la restricción de igualdad de todos sus ángulos, pero manteniendo la condición de paralelismo de lados opuestos. De la misma manera, se puede generalizar el paralelogramo a partir del rombo.

También es posible partir de una figura más general y colocar restricciones para llegar a una particular. Si partimos del paralelogramo y especializamos con la condición de que todos sus ángulos sean congruentes, obtendremos un rectángulo. Y si, más aún, especializamos con la condición de que todos sus lados sean congruentes, entonces obtendremos a partir de este proceso un cuadrado, también: el rombo se puede especializar a partir del paralelogramo requiriendo la propiedad adicional de congruencia de todos sus lados, y el cuadrado se puede especializar a partir del rombo, agregando como condición la igualdad de todos sus ángulos. En conjunto, esto es equivalente a expresar que el cuadrado combina todas las propiedades del rombo y rectángulo a la vez.

3.2.2. Dificultades en las clasificaciones Jerárquicas

Berté (1999) describe algunas dificultades que pueden presentar los estudiantes¹² al momento de clasificar por inclusión, es decir en forma jerárquica. La autora menciona que en nuestra vida cotidiana hay una supremacía de clasificaciones disjuntas, como por ejemplo cuando clasificamos boletas, de gas, de luz, etc. Este hecho es uno de los primeros obstáculos al momento de clasificar por inclusión como lo realizan algunas ciencias.

Por otro lado, la autora expresa que la clasificación con particiones interfiere con las convenciones implícitas del lenguaje, dado que:

- a) “El verbo ser puede indicar la identidad o la inclusión: por ejemplo, en las frases: “un cuadrado es un rectángulo” o “un cuadrado es un rombo con un ángulo recto”. [...], respectivamente.
- b) El artículo “un” es cuantificador existencial o un número cardinal: por ejemplo “en la frase ‘el cuadrado es un rombo con un ángulo recto’, los dos “un” no tienen el mismo valor. El primero es un artículo indeterminado, el segundo debe entenderse como un cuantificador ‘al menos un ángulo recto’. [...] En la frase: “un triángulo es isósceles si tiene dos lados de la misma longitud”, es difícil comprender si se considera a “dos” como el cardinal dos. Si es así, entonces $2 \neq 3$ (en el sentido de los cardinales). [...] En la frase citada, hay que entender “al menos dos lados”. [...]
- c) Principio del máximo de información: en la vida corriente la información truncada es asimilada a la mentira, este principio no es seguido en matemática.” (Berté, 1999; p. 115)

¹² Si bien la autora se refiere a estudiantes de nivel primario, nos resulta igual de relevante considerar estas dificultades en la formación de futuros docentes.

En relación a este obstáculo, también tomamos los aportes de Mason (1996) en su artículo “Expresando generalidad y raíces del álgebra”, que complementan las dificultades asociadas al uso de cuantificadores y artículos en las convenciones matemáticas, donde expresa que:

La suma de los ángulos de un triángulo es 180° . ¿Cuál es la palabra más importante, matemáticamente hablando, en esta afirmación? Yo sugiero que es la más inocua, la más pequeña, la palabra menos notable y que el verdadero significado de esa palabra es construible solo cuando uno aprecia la naturaleza de las afirmaciones matemáticas. La palabra que tengo en mente es un. Ese pequeño artículo indefinido es un pronombre adjetivo cualquiera que a su vez se refiere al adjetivo todos, que refiere al margen de variabilidad considerado. (p. 4)

Consideramos que esto debe ser tenido en cuenta para ser explicitado y analizado en conjunto con los estudiantes, para construir con ellos un “lenguaje común” que permita comprender y otorgar sentido a los textos matemáticos, posibilitando de esta manera la construcción de nuevos saberes.

3.2.3. Relación entre definiciones y clasificaciones

El proceso de elaboración de clasificaciones está íntimamente relacionado con las definiciones de los objetos geométricos que se consideren. Calvo (2001) expresa que las clasificaciones no son únicas, y que dependen de las definiciones y de los criterios con los cuales se clasifica. Por ejemplo, podemos clasificar triángulos según la cantidad de lados iguales y según los tipos de ángulos que tienen. En el caso de los cuadriláteros, es posible tener en cuenta distintas opciones, como ser: la posesión de ángulos cóncavos o convexos, el paralelismo de lados, la cantidad de lados iguales que tienen, las características de sus diagonales, entre otras.

Calvo (2001) sostiene que los criterios de clasificación son cambiantes, por lo que es interesante proponer un trabajo en el que se juegue “a cambiarlos”, con el objetivo de favorecer la observación de distintas propiedades de las figuras. Este trabajo consecuentemente promoverá que se realicen agrupaciones distintas a las habituales, teniendo en cuenta propiedades distintas a las “ortodoxas” (p.108), relativizando de este modo el peso de los nombres y otorgando, en consecuencia, más importancia al análisis de las características. Este es uno de los aspectos /objetivos centrales de esta investigación.

3.3. Imagen conceptual y concepto

Atendiendo a la importancia que tiene el estudio de las definiciones en matemática, en la enseñanza de la matemática y en la formación de profesores, nos resulta importante recuperar los aportes de Vinner (1991), dado que describe ciertos elementos de los procesos cognitivos que permiten a un sujeto construir un concepto. En contraposición a lo que muchas teorías de aprendizaje sostienen - presentes también en libros de texto- este autor afirma que el hecho de que un estudiante pueda recitar una definición de un concepto, no es sinónimo de comprensión del mismo, ni tampoco que esto da certezas de que ese estudiante conozca características de dicho objeto.

Vinner (1991) expresa que cuando se lee o se escucha el nombre de un concepto, algo se evoca en nuestra memoria, lo que no significa que esto sea la definición de dicho concepto. Esto es lo que Tall y Vinner (1981) denominan “*imagen conceptual*”.

La imagen conceptual es “*algo*” no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del concepto, en caso de que la tenga; también puede ser una colección de impresiones o experiencias asociadas al concepto (p.4).

Los autores aclaran que la parte de la memoria evocada que representa la imagen conceptual no es necesariamente todo lo que un sujeto conoce acerca de un concepto, y también que en diferentes ocasiones una persona puede evocar distintas cuestiones en relación a un mismo concepto.

Las imágenes conceptuales nos interesan en gran medida en esta investigación dado que, para Vinner (1991), tienen un papel muy importante en la formación de un concepto:

[...] adquirir un concepto significa formar una imagen conceptual para él. Saber de memoria la definición de un concepto no garantiza entenderlo. Entender, de acuerdo a lo que creemos, significa tener una imagen conceptual, cierto significado debería estar asociado con palabras (p.4).

Vinner (1991), plantea que existen dos aspectos principales que conforman la estructura cognitiva: la(s) definición(es) de un concepto y la imagen conceptual. También sostiene que cuando una definición de un concepto se memoriza, es muy posible que la estructura cognitiva asociada a la imagen conceptual esté vacía, esto significa que es posible que no se asocie ningún significado a dicho concepto. Lo esperado es que haya una interacción entre ambos componentes de la estructura cognitiva, aun cuando la imagen del concepto y su definición se hayan formado en forma independiente.

El autor expresa que distintos estudios realizados les permiten asegurar que un estudiante, al resolver problemas, no recurre a la definición del concepto, sino que suele basarse en el proceso de resolución y recuperar la “celda” de la estructura cognitiva que almacena imágenes conceptuales del concepto. En relación a esto, Fischbein (1993) introduce el término concepto figural para referirse a la naturaleza dual que tienen los conceptos geométricos, dado que involucran aspectos tanto teóricos como figurales (usualmente asociados a las imágenes conceptuales). El autor expresa que es usual que lo figural prime sobre lo conceptual; es decir, que la imagen conceptual prime sobre la definición del concepto, lo que puede explicar muchos errores en el razonamiento geométrico de un estudiante (Mariotti y Fischbein, 1997; Fischbein, 1993).

Ahora bien, nos interesa en esta investigación en especial recuperar los aportes de Vinner (1991,) en lo que refiere a la siguiente pregunta: ¿cómo favorecer la construcción de la imagen conceptual de un concepto por parte de los estudiantes? El autor expresa que para que la imagen conceptual se forme, una cuestión clave es comenzar con muchos ejemplos y contraejemplos, usando todos los medios posibles para lograrlo. Por otra parte, también expresa que esto no significa que la definición formal no deba ser presentada a los estudiantes.

3.4. Antecedentes acerca de las definiciones y clasificaciones

En este apartado describiremos algunas investigaciones que aportan a nuestro trabajo, ya que tienen puntos en común, como ser objetivos o cuestiones metodológicas, o porque abordan nuestro objeto de estudio. A continuación, realizaremos un registro de las principales conclusiones que nos resultan útiles.

3.4.1. En relación con los procesos de definir y clasificar

El trabajo de Renzulli y Scaglia (2006), forma parte de una investigación (C.A.I.+D. 2006) desarrollada en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina) en la que se indaga sobre las dificultades que poseen los alumnos en el aprendizaje de conceptos geométricos.

Las autoras expresan que a lo largo de la investigación se pudieron identificar en los alumnos algunos fenómenos que ya han sido estudiado por distintos investigadores, que se relacionan casi exclusivamente con el uso de figuras estereotipadas durante la enseñanza de conceptos geométricos a lo largo de su trayectoria escolar. A su vez, explican que han constatado dificultades para elaborar definiciones de conceptos geométricos sencillos en estudiantes del Profesorado de Matemática que, a pesar de mostrar un desempeño satisfactorio en Geometría Euclídea Plana y Geometría Euclídea Espacial (asignaturas que forman parte del plan de formación), se ven en serias dificultades a la hora de expresar por escrito una definición de un concepto, por ejemplo de polígono.

Para realizar el análisis y presentar justificaciones teóricas que intentan explicar las dificultades de los alumnos, las autoras consideran los aportes de Vinner (1991), en particular las nociones de imagen conceptual y definición conceptual, los aportes de De Villiers (1994) quien define dos tipos de clasificaciones: jerárquicas y particionales y también los aportes de Berté (1999), quien describe algunas dificultades en la construcción del saber matemático y menciona los obstáculos para la clasificación jerárquica.

Para llevar a cabo la investigación se implementa una actividad en torno a la clasificación de cuadriláteros, en dos grupos de estudiantes: un curso de 8º año de EGB y otro de 1º año del Profesorado de Nivel Inicial de la ciudad de Santa Fe, y se comparan las producciones de ambos grupos. En el grupo de EGB, la actividad con la que trabajaron forma parte de una secuencia didáctica diseñada por el equipo de investigación que fue implementada por una de las integrantes que no es docente del curso. La actividad en el Profesorado de Nivel Inicial fue implementada por la docente del curso, que a su vez es integrante del equipo de investigación. En los dos casos, la actividad se propone para explorar los conocimientos previos y obtener información sobre la imagen conceptual de cuadriláteros de cada grupo.

La actividad presentada consiste en que, dadas solamente las representaciones de diversos cuadriláteros convexos, (paralelogramos, trapecios y trapezoides) los estudiantes los agrupen de acuerdo a alguna característica de modo que todas las figuras formen parte de algún grupo. Se solicita además que expliciten qué característica tuvieron en cuenta para armar cada grupo de cuadriláteros.

Al analizar las producciones, consideran tres cuestiones: los criterios con los cuales cada grupo agrupa las figuras, si la clasificación que realizaron los estudiantes es jerárquica o por partición, entendidas en términos de De Villiers (1994), y si se trata o no de clasificaciones exhaustivas. Las autoras explicitan que una clasificación es exhaustiva cuando se cubren todos los casos posibles, según el criterio adoptado, de cuadriláteros propuestos en la consigna.

Algunas de las conclusiones a las que arriban a partir del análisis de las producciones de ambos grupos son:

- En general, las producciones de las estudiantes de EGB 3 guardan mayor coherencia y tienen menos errores que las correspondientes a estudiantes del Profesorado de Nivel Inicial.
- El grupo de estudiantes de Profesorado no elaboró ninguna clasificación jerárquica, mientras que en el grupo de EGB 3 algunos equipos sí las formularon de tal modo. Las autoras expresan que “parece que habría una mayor predisposición en alumnas de 13 años que en alumnas mayores a desarrollarlas en el estudio de los cuadriláteros (p.18)”.

Las autoras concluyen a modo de síntesis que una explicación posible de estos resultados radica en que las futuras profesoras, para la realización de la actividad, recurrieron a los aprendizajes de conceptos geométricos adquiridos en la escuela elemental, donde la clasificación que se trabaja es por partición.

Los resultados obtenidos en el estudio que realizan, también ofrecen una alerta respecto de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la geometría relacionadas con las convenciones implícitas que se hacen presente en el propio lenguaje en matemática. Las investigadoras afirman que el docente debe ser consciente de estas dificultades y tenerlas en cuenta durante la planificación y el desarrollo de sus actividades.

Otro antecedente que consideramos es una publicación que forma parte de una colección de recursos para la enseñanza de la matemática, elaborados por especialistas del Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2008).

Si bien todo el documento aborda diferentes cuestiones de la enseñanza de la geometría, nos interesa especialmente el capítulo 4 en el que se presenta un problema fértil para hacer geometría en el aula, título que lleva esta sección, ya que abona y fundamenta una propuesta a futuro que realizamos en esta investigación.

Los autores conciben la actividad matemática en la clase, como parte de la construcción de cultura, lo cual conlleva a concebir necesarias una variedad de tareas para realizar en el aula como ser la elaboración de definiciones, de conjeturas, la determinación de la validez de la mismas, comprender las validaciones elaborados por otros, entre otras.

En el problema que se presenta se trata de estudiar la relación entre un cuadrilátero y otro que se construye a partir de los puntos medios de sus lados.

En la primera etapa del problema, se busca que los alumnos estudien cómo es el cuadrilátero que tiene como vértices los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera. En este momento juega un papel importante la relación que establecen los estudiantes entre el texto del problema, el estudio de una situación general y los dibujos que desarrollarán para resolver el problema.

En la segunda parte del problema, que es en la que nos detendremos, se busca que los estudiantes especifiquen condiciones sobre los datos del problema, para que el cuadrilátero que se obtiene cumpla con determinadas características. Esto lleva a que los alumnos exploren propiedades y definan clases de cuadriláteros no convencionales.

La consigna que se propone en esta segunda etapa es la siguiente:

¿Cómo debería ser el cuadrilátero ABCD para que el cuadrilátero EFGH obtenido uniendo los puntos medios de sus lados resulte un rectángulo? ¿Y un rombo? ¿y un cuadrado?

Los autores expresan que es probable que los alumnos se restrinjan en un principio a considerar los casos que ya habían sido estudiados en una primera etapa, como ser:

- Si ABCD es un rombo, entonces EFGH es un rectángulo.
- Si ABCD es un rectángulo, entonces EFGH es un rombo.
- Si ABCD es un cuadrado, entonces EFGH es un cuadrado.

Si bien este análisis es correcto, resulta incompleto para dar respuesta al problema planteado. Para ampliar las figuras analizadas, los autores expresan la importancia de que el docente proponga por ejemplo estudiar un romboide. Caso en el que también al unir los puntos medios de sus lados se obtiene un rectángulo.

El problema ahora consiste en determinar qué condiciones cumple un cuadrilátero general ABCD para que el cuadrilátero que resulte sea uno en particular, si suponemos que queremos obtener un rectángulo, entonces podrán establecer que para obtener un rectángulo las diagonales del ABCD deben ser perpendiculares.

Si consideramos el universo de figuras que poseen diagonales perpendiculares, encontraremos que éste abarca a los rombos, romboides y otras figuras sin lados paralelos. El docente podrá proponer entonces que los estudiantes otorguen un “nuevo nombre” a esta familia de cuadriláteros, los autores lo denominan en este documento “rectidiagonales”.

Como cierre de este momento de trabajo los autores plantean que el docente deberá sintetizar todo el conocimiento que se produjo en torno a esta nueva clase de cuadriláteros. También plantean la posibilidad de producir una definición equivalente, si se consideran otras propiedades de los cuadriláteros que no sea la perpendicularidad de las diagonales.

Nos interesa recuperar algunas de las conclusiones que los autores expresan, como ser que el valor formativo del trabajo que se propone radica principalmente con la construcción de conocimiento, y no con el conocimiento en sí mismo. En este sentido, ellos remarcan que vivenciar que es posible inventar una definición y que hay conocimientos exclusivos de su clase de matemática, son cuestiones que le posibilitan al estudiante tener mejor dominio de la disciplina y autonomía en el su trabajo.

3.4.2. En relación con los procesos de definir y clasificar y los libros de texto

En la investigación que consideramos Micelli y Crespo Crespo (2012) estudian la presencia de los cuadriláteros en el discurso matemático escolar y se centran en la clasificación de los mismos. El trabajo se enmarca dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático, la socioepistemología.

Las autoras expresan que, concibiendo la matemática como un saber construido socialmente, se evidencia que existen consensos en el proceso de institucionalización de dichos contenidos matemáticos, por lo que pretenden registrar y analizar cuáles son los consensos referidos al tema de los cuadriláteros.

La problemática que da origen a la investigación fue la detección de dificultades por parte de los estudiantes en el trabajo con propiedades de los cuadriláteros, quienes no lograban además establecer relaciones entre las definiciones de los mismos, en un nivel (Profesorado de Educación Primaria, Nivel superior no universitario) donde se supone que los alumnos tienen ya los conocimientos previos para poder realizarlo. Las autoras expresan que observar estas dificultades les generó varios interrogantes acerca de la unicidad de las clasificaciones existentes en el discurso matemático escolar y de la visión de docentes y alumnos frente a esta variedad.

Para llevar a cabo la investigación analizaron libros de texto escolares. Comenzaron con los libros de Euclides, que presenta definiciones muy distintas a las que se encuentran en libros actuales, y prosiguieron analizando 16 libros de texto escolares para escuela media que abarcan los últimos veinte años de educación en Argentina.

Una cuestión interesante que deseamos resaltar, es que las autoras argumentan esta decisión de la siguiente manera: *“la selección se fundamenta en que el libro de texto tiene una participación importante en la formación del discurso, ya que norma las acciones de enseñanza y aprendizaje o por lo menos tiene una gran influencia en ellas”* (Castañeda et al., 2009, p.1, citado por Micelli y Crespo Crespo, 2012).

Algunas de las conclusiones a las que arriban a partir del análisis realizado son:

- Infieren la coexistencia en el discurso matemático escolar de distintas definiciones para los cuadriláteros, de las cuales se desprende una clasificación particular que influye directamente en la forma de abordar las propiedades de los mismos, tanto para su aplicación como para una demostración: *“la clasificación de cuadriláteros no es única y esta falta de unicidad se ve reflejada en los contenidos de los libros de texto escolares de una misma época histórica”*.
- Las dificultades pueden aparecer cuando el docente no hace explícita en su discurso la anterior cuestión, y no acuerda con sus alumnos cuáles son las definiciones con las que se trabajará. Las investigadoras afirman que es necesario que los estudiantes conozcan que todas las definiciones son válidas y no intenten buscar correctas o incorrectas. *“La finalidad de dejar claro con cuál clasificación se acuerda es facilitar el abordaje de las propiedades de dichos cuadriláteros al establecer sus relaciones y al plantear estas relaciones para que sea un trabajo reflexivo y no un estudio memorístico”* (Micelli y Crespo Crespo, 2012, p.851). A su vez, expresan que las definiciones, como los axiomas, se generan a través de la aceptación de convenciones, razón por la cual se pueden encontrar variantes en las definiciones de un mismo cuadrilátero.
- Entendiendo que las convenciones son uno de los mecanismos de corte social que permiten, por ejemplo, la organización y generación de conocimientos matemáticos a través de la construcción de significados y funcionalidad, las autoras se cuestionan si los docentes son conscientes de la existencia de estos convenios que, en el caso de los cuadriláteros, provienen de la coexistencia de diferentes clasificaciones. Y trasladando esta pregunta a los estudiantes formulan ¿son capaces de comprender que existen consensos que pueden variar?

3.4.3. En relación con los procesos de definir y clasificar utilizando entornos dinámicos.

Aya et al. (2016) proponen analizar el potencial del uso de un mediador como la geometría dinámica y la adecuada intervención docente en la conceptualización del objeto geométrico cuadrado.

Los datos del estudio fueron tomados durante el desarrollo de dos cursos que forman parte de la carrera de formación inicial de profesores de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, a lo largo de un año. Escogieron los dos cursos ya que en el primero se trabaja el proceso de construcción de definiciones usando geometría dinámica y en el segundo estas se emplean en el marco de la actividad demostrativa.

A partir de la implementación de cuatro problemas, los autores expresan que buscan, por una parte, establecer si los estudiantes formulan, entre las que proponen, una definición económica y jerárquica en la que establezcan condiciones necesarias y suficientes; y por otra, analizar la variedad de definiciones presentadas. Argumentan que la decisión de solicitar varias definiciones abre la posibilidad de que algunas no sean económicas y jerárquicas, y que emerjan algunas definiciones personales del concepto que evidencien el impacto de las representaciones figurales¹³ del mismo.

¹³ Los autores toman como marco teórico los constructos de Fischbein (1993), quien introduce el término *concepto figural* para destacar la naturaleza dual que tienen los conceptos en geometría, pues involucran aspectos tanto teóricos como figurales (usualmente asociados a las imágenes conceptuales). El autor expresa que suele ocurrir que lo figural prime sobre lo conceptual; esto es, que la *imagen conceptual* prime sobre la *definición del concepto*, lo que puede explicar muchos errores en el razonamiento geométrico de un estudiante (Mariotti y Fischbein, 1997; Fischbein, 1993).

Otro propósito de su investigación es determinar si la representación figural sugiere al estudiante una relación específica entre la definición del concepto, la definición personal del concepto y la imagen personal del concepto.

A partir del marco teórico que toman como referencia, entre ellos De Villiers (1994, 1998) y Govender y De Villiers (2002), establecieron categorías de análisis para interpretar las justificaciones de estudiantes en relación con las tareas que se les propusieron, y constituir planteamientos acerca de la relación entre imagen conceptual y definición del concepto. Las mismas son:

Económica y jerárquica (EJ): La justificación expresada evidencia elementos para afirmar que la imagen conceptual de rectángulo está asociada a una definición jerárquica y económica, pero en ella no se presenta explícitamente una definición de rectángulo o cuadrado.

Jerárquica no económica (JNE): En la justificación se evidencian elementos para afirmar que la imagen conceptual de rectángulo o cuadrado está asociada a una definición jerárquica, y presenta información que indica que la imagen conceptual de estos conceptos obedece a una definición no económica.

Simplemente jerárquica (SJ): Se ofrecen elementos para afirmar que la imagen conceptual de rectángulo o cuadrado está asociada a una definición jerárquica, pero no provee información que permita afirmar que su imagen conceptual está asociada a una definición económica o no.

Simplemente económica (SE): La definición expresada es económica si establece las condiciones suficientes y necesarias para definir el objeto, pero no permite establecer si es jerárquica o no.

No aporta información (NA): En la justificación expresada no se encuentran elementos para afirmar que su imagen conceptual de rectángulo o cuadrado está asociada a una definición jerárquica o económica, o no se da justificación alguna.

No jerárquica ni económica pero correcta (NJEC): En la justificación no se encuentran elementos para afirmar que su imagen conceptual de rectángulo o cuadrado esté asociada a una definición jerárquica o económica con respecto al objeto mencionado en la pregunta, pero cita una definición correcta.

Algunas conclusiones a las que arribaron y nos resultan interesantes para nuestra investigación son:

- El uso de geometría dinámica contribuyó a la elaboración, aceptación y uso de definiciones de naturaleza jerárquica y económica para cuadrado y rectángulo. El diseño de las actividades proveyó evidencia empírica acerca de la reducción de condiciones para definir un objeto: por ejemplo cómo añadir una propiedad modifica al objeto, mostrando que algunos conjuntos son subconjuntos de otros, tal como plantea De Villiers (1994, 1998).
- Una definición jerárquica y económica de cuadrado¹⁴ puede estar influenciada por la imagen conceptual que se tenga de otros objetos geométricos como cuadrilátero, rectángulo o rombo, los cuales, usualmente, están asociados con representaciones canónicas y prototípicas. Los autores expresan que la geometría dinámica por sí sola no va a incidir en el proceso de conceptualización de los objetos geométricos, sino que la acción del docente, apoyada en el uso del software, podrá aportar elementos conceptuales que ayuden a que las definiciones personales del concepto y las imágenes conceptuales del mismo se aproximen a la definición del concepto.

¹⁴ Tal como los autores lo describen en una conclusión posterior, quienes escribimos esta investigación y apoyándonos en nuestro marco teórico, entendemos que una definición de un objeto por sí sola no puede ser jerárquica o particional, sino que lo es en relación con las definiciones de un conjunto de objetos que lo incluyen. En este sentido, la definición de un cuadrado será jerárquica, si tanto el paralelogramo, el rombo y rectángulo han sido definidos de manera tal que no excluyan la posibilidad de que un cuadrado sea un caso particular de todos ellos.

- Se evidenció la construcción de definiciones con jerarquías entre diferentes objetos geométricos: rectángulo con respecto al paralelogramo, rectángulo con cuadrado, paralelogramo con cuadrado y rombo¹⁵ con cuadrado. Esta última jerarquía fue la menos evidenciada, posiblemente por estar muy arraigada la definición personal de rombo o debido a la persistencia de aspectos figurales sobre conceptuales. La diversidad de definiciones para un mismo objeto geométrico, y la aceptación de la equivalencia de estas por parte de los estudiantes, constituye, desde una perspectiva teórica, un resultado importante del proceso de construcción de definiciones, pues es usual aceptar, de manera implícita, la unicidad de las definiciones de objetos matemáticos y no cuestionarse sobre ello.

¹⁵ Los autores no mencionan que se hayan establecido relaciones de jerarquía entre paralelogramo y rombo. Consideramos que esto no es casual, ya que el rombo usualmente queda definido por la igualdad de sus lados, quedando implícito el paralelismo de los mismos, lo que puede posiblemente obstaculizar considerar a un rombo como paralelogramo.

Capítulo 4. Las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros en los libros y diseños curriculares.

En este capítulo nos interesa analizar el tratamiento que se le da a las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros en distintos libros de texto que se utilizan en la formación de docentes de Matemática, los criterios que se adoptaron para clasificarlos y definirlos; y si se ofrecen distintas definiciones para un mismo cuadrilátero.

Nuestro interés en el análisis de diversos libros radica en que en muchas oportunidades se constituyen como recursos o fuentes con las cuales los docentes diseñan sus propuestas de enseñanza. En relación con esto, Vargas (2003), citado por Vidal (2010), señala:

el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el instrumento mayoritariamente usado por los profesores. [...] Esta posición privilegiada del texto, condice indudablemente al reconocimiento de la necesidad de convertirlo en objeto de estudio didáctico, y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico” (p.2).

En este sentido, Chemello (2002) expresa que:

Los textos constituyen otra instancia de la transposición didáctica pues introducen nuevas modificaciones en los objetos de enseñanza, constituyen una nueva y más fina delimitación del alcance de los contenidos. En algunos casos, frente a la insuficiencia de orientaciones oficiales, o la falta de ajuste periódico de las mismas, los libros de texto se constituyen para los profesores en una fuente en la que abreviar en la búsqueda de un parámetro de comparación de sus propios conocimientos disciplinares, de una clarificación respecto del tipo de actividades a realizar, de propuestas innovadoras en la articulación y organización de los contenidos a enseñar. (p.70)

Por otra parte, según Sierra et al. (1999), el sentido de analizar los libros de texto parte de la hipótesis de que en general la práctica de la enseñanza no está determinada por los currículos oficiales sino más bien por los libros utilizados en el aula. Con esta misma idea Vilella (2001) considera que:

los docentes suelen sustentar gran parte de sus prácticas en los libros escolares de Matemática que recomiendan usar a sus alumnos y que, algunas veces, ellos mismo usan, convirtiéndose así el texto en el vehículo que legitima los contenidos prescriptos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas. (p.6)

En el apartado 4.1 mencionamos qué se puede encontrar en relación con definiciones y clasificaciones de cuadriláteros en el diseño curricular del Profesorado en Matemática.

En el apartado 4.2 analizamos libros que abordan cuadriláteros, sugeridos para la formación de profesores de matemática.

4.1. Las definiciones y clasificaciones en el diseño curricular de Profesorado en Matemática de la provincia de Santa Fe

En este apartado vamos a considerar el diseño curricular correspondiente al Profesorado de Educación Secundaria en Matemática del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2015).

Según el Diseño Curricular, la carrera incluye cuatro materias anuales de geometría. El estudio de las figuras planas está propuesto en las finalidades formativas (fundamentación, propósitos de la cátedra) de Geometría II.

Nos resulta interesante mencionar que si bien se propone el trabajo a partir de invariancias de transformaciones de figuras en el plano, se consideran de forma explícita la elaboración de definiciones y la formulación de clasificaciones como un proceso, que debe ser llevado a cabo por

futuros docentes. Recuperamos a continuación una cita del Diseño Curricular del Profesorado donde se pone de manifiesto lo anterior:

El/la futuro/a profesor/a debe comprender que el análisis de las invariancias promueve la caracterización de los objetos geométricos a partir del reconocimiento de las relaciones entre los elementos, la indagación de sus equivalencias, los procesos de generalización y clasificación de ciertas clases de objetos, aportando al proceso de construcción de las condiciones necesarias y suficientes en pos de la elaboración de su definición. (p.96)

Los libros recomendados para Geometría II en el Diseño Curricular para el Profesorado que tratan el tema de nuestro interés, son:

- Puig Adam, P. (1979). *Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid: Biblioteca Matemática. España.
- Tiraio, J. (1979). *El Plano*. Buenos Aires: Taller de Docencia.

4.2. Muestra de libros seleccionada y análisis

La muestra seleccionada, contiene todos los libros que abordan cuadriláteros, sugeridos en el Diseño Curricular actual de nuestra provincia para la cátedra Geometría II del profesorado en Matemática y en los Programas de las cátedras Geometría Euclídea Plana y Taller de Geometría de la carrera del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), de los últimos diez años.

Los libros seleccionados son:

1) Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica. Gomez Puig Ediciones.*

Este libro conforma la bibliografía sugerida por el diseño curricular provincial para la cátedra de Geometría II del Prof. en Matemática, así como también forma parte de los Planes de las cátedras Geometría Euclídea Plana y Taller de Geometría de la carrera del Profesorado en Matemática de la FHUC - UNL. Accedimos a la versión del año 1980, que es la que consideraremos en esta investigación.

2) Tiraio, A. (1979). *El Plano. Docencia.*

Este libro conforma la bibliografía sugerida por el diseño curricular provincial para la cátedra de Geometría II del Prof. en Matemática, así como también forma parte de los Planes de las cátedras Geometría Euclídea Plana y Taller de Geometría de la carrera del Profesorado en Matemática de la FHUC - UNL.

3) Sanchez-Marmol, L. y Perez-Beato, M (1945). *Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación. Tomo I. Segunda edición. S.A.E.T.A.*

Este libro forma parte de la bibliografía básica de la cátedra Taller de Geometría de la carrera del Profesorado en Matemática de la FHUC - UNL.

Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica. Gomez Puig Ediciones.*

El libro se organiza en 58 lecciones. La definición de polígono convexo se encuentra en la segunda lección. Ésta se generaliza a partir de la definición de triángulo y se establece según Puig Adam (1980) de la siguiente manera:

Si n puntos del plano, A, B, C, \dots, F , se han podido ordenar de modo que tres de ellos no estén alineados y las rectas determinados por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano a los $n-2$ restantes, se llama "polígono convexo" al conjunto de puntos comunes a todos estos semiplanos (p.12).

A continuación, se nombran los elementos de los polígonos y se los denomina de acuerdo a la cantidad de lados que tengan.

También, se ofrece una prueba de la existencia de polígonos convexos de cualquier número de lados, la propiedad de convexidad y propiedades que verifican los mismos.

Luego de desarrollar la clasificación y propiedades de triángulos, en la lección n°12, se desarrollan conceptos de cuadriláteros. El autor establece que la clasificación de los mismos se realizará teniendo en cuenta el paralelismo de los lados, realizando la aclaración de que solo podrán ser paralelos los lados opuestos del mismo, es decir los no consecutivos.

Teniendo en cuenta esta clasificación, citamos las definiciones que el autor presenta:

Trapezio: “Cuando un cuadrilátero tiene un solo par de lados opuestos paralelos se llama trapezio” (p.66).

Paralelogramo: “Cuando un cuadrilátero tiene dos pares de lados opuestos paralelos se llama paralelogramo” (p.66).

Rectángulo: “Si uno de los ángulos de un paralelogramo es recto, lo son los otros tres, como suplementarios o iguales a él, y la figura se llama *rectángulo*” (p.67).

Rombo: “Llámesese *rombo* a un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales” (p.67).

Cuadrado: “Un rectángulo con los cuatro lados iguales se llama *cuadrado*” (p.67).

Romboide: “Se llama romboide a todo cuadrilátero ABCD con dos pares de lados consecutivos iguales” (p.68).

El autor expresa que se adopta la denominación “romboide” de Rey Pastor, por parecerle más útil que la aplicación clásica que de esta palabra se hace para designar a un paralelogramo que no sea rombo ni rectángulo, y que carece de interés.

No se hace referencia a los cuadriláteros que no tienen pares de lados paralelos, entendiendo que, dada la aclaración anterior, los mismos no son de interés para el autor.

Al definir trapezio como un “cuadrilátero con solo un par de lados paralelos” excluye de esta familia a los paralelogramos y a todos los romboides que tienen dos pares de lados consecutivos iguales pero distintos entre sí, es decir, excluye a los romboides no rombos y no cuadrados. De esta manera, en términos de De Villiers (1994) se generan dos familias disjuntas de cuadriláteros, lo cual corresponde a una clasificación particional. Sin embargo, dentro de cada una, encontramos que hay cuadriláteros que cumplen las propiedades de otros. Por ejemplo, un cuadrado, al estar definido como “un rectángulo con los cuatro lados iguales”, es a la vez rectángulo y cuadrado; y además es rombo por cumplir con la igualdad de todos sus lados.

Luego, tanto el rectángulo como el rombo, son paralelogramos, con características más específicas como ser un ángulo recto o todos sus lados iguales.

Es interesante mencionar que al definir romboide, el autor no lo realiza a partir del paralelismo de sus lados, sino a partir de la igualdad de los mismos. Si comparamos las definiciones de rombo y romboide, se puede inferir que un rombo cumple con las condiciones del romboide -y en consecuencia también el cuadrado-, por lo tanto también observamos una jerarquía dentro de la categoría romboide; así como también que las categorías “paralelogramo” y “romboide” tienen en común la categoría rombo y su subcategoría cuadrado. Por lo tanto, encontramos que Puig Adam (1980), realiza una clasificación de cuadriláteros tanto jerárquica como particional.

Al definir rectángulo, rombo y cuadrado el autor realiza en todos los casos la siguiente observación: “El rectángulo/rombo/cuadrado tiene pues, todas las propiedades del paralelogramo, y además las

siguientes específicas...” (p.67). Esto evidencia que la clasificación jerárquica en la familia de los paralelogramos, brinda una economía en el proceso deductivo de demostración de propiedades de los mismos, puesto que las propiedades demostradas para los paralelogramos, son válidas para todos aquellos cuadriláteros que poseen las mismas características en relación al paralelismo de sus lados. Si bien el autor, explicita que el criterio que se adopta para clasificar es el paralelismo de lados, define tanto al rombo como al romboide a partir de la igualdad de sus lados.

Es interesante destacar también que todas las definiciones de cuadrilátero que postula, satisfacen el principio de minimalidad según Calvo (2001).

De acuerdo a Rey Pastor y Puig Adam (1948), el autor formula solo definiciones afirmativas.

Tirao, A. (1979). *El Plano. Docencia.*

El autor de este libro, explicita que de los muchos sistemas axiomáticos que pueden elegirse para desarrollar la teoría del plano, escoge uno que resalta la importancia de las transformaciones rígidas del mismo, como el que propone P. Puig Adam en Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos. Biblioteca Matemática. Madrid 1961.

La definición que el autor presenta de polígono convexo es la siguiente:

Definición 1.13: Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ son n puntos del plano π ($n \geq 3$) ordenados de tal manera que las rectas $\overleftrightarrow{a_1 a_2}, \overleftrightarrow{a_3 a_4}, \dots, \overleftrightarrow{a_{n-1} a_n}, \overleftrightarrow{a_n a_1}$ dejen en un mismo semiplano abierto a los $n - 2$ puntos restantes, se llama polígono (convexo) a la unión de los segmentos $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_3 a_4}, \dots, \overline{a_{n-1} a_n}, \overline{a_n a_1}$.

Definición 1.14: El interior de un polígono es la intersección de todos los semiplanos respecto de las rectas que determinan dos vértices consecutivos y que contienen a los $n - 2$ vértices restantes. El exterior de un polígono es el conjunto de todos los puntos del plano que no son puntos del polígono ni de su interior. La unión de un polígono con su interior se llama región poligonal (p12).

Luego de desarrollar transformaciones rígidas del plano y triángulo, define cuadrilátero de la siguiente manera: “Se llama cuadrilátero a todo polígono (convexo) de cuatro lados. El segmento que tiene por extremo a dos vértices opuestos recibe el nombre de diagonal”. (p.32)

Citamos a continuación la definición de trapecio: “Un cuadrilátero se llama trapecio si tiene un par de lados paralelos. Estos lados se llaman bases. En todo trapecio se llama base media al segmento determinado por los puntos medios de los lados no paralelos” (p.32).

También encontramos la definición de paralelogramo:

Un cuadrilátero se llama paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos. En todo paralelogramo la base media con respecto a un par de lados paralelos es el segmento que tiene por extremos a los puntos medios de los otros dos lados (p.32).

Luego de enunciar y demostrar ciertos teoremas de paralelogramos y trapecios, presenta la siguiente definición:

Si uno de los ángulos de un paralelogramo es recto, el cuadrilátero se llama rectángulo. Se llama cuadrado a un rectángulo que tiene sus cuatro lados congruentes. Se llama rombo a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes. Se llama romboide a todo cuadrilátero que tiene un par de lados consecutivos congruentes y los otros dos lados también congruentes (p.35).

Si bien en la definición anterior, no se menciona la inclusión de los rombos dentro de la categoría paralelogramo, el autor realiza una observación posterior donde expresa que: “un rectángulo por ser paralelogramo tiene todas sus propiedades y además tiene otras específicas. Todo rombo es un paralelogramo y todo cuadrado es rombo” (p.35).

Al igual que en el libro de Puig Adam (1980), observamos que el autor también define a romboide a partir de la igualdad de lados consecutivos. Si comparamos las definiciones de rombo y romboide, se

puede inferir que un rombo cumple con las condiciones del romboide -y en consecuencia también el cuadrado-, por lo tanto también observamos una jerarquía dentro de la categoría romboide; así como también que las categorías “paralelogramo” y “romboide” tienen en común la categoría rombo y su subcategoría cuadrado.

En resumen, observamos que dentro de la categoría “paralelogramo” todos sus elementos están definidos de forma jerárquica (el cuadrado es rombo y rectángulo a la vez, y todos son paralelogramos), a su vez todos los elementos de la categoría “paralelogramo” satisfacen las condiciones de la categoría “trapezio”. Sin embargo, hay romboides que no cumplen con la propiedad de tener un par de lados paralelos, por lo que de acuerdo a De Villiers (1994), estamos frente a una clasificación tanto jerárquica como parcial.

Por otra parte, observamos que se adopta como característica para definir y clasificar los cuadriláteros, el paralelismo de sus lados, exceptuando al rombo y romboide que se los define por la igualdad de lados.

Es interesante destacar también que todas las definiciones de cuadrilátero que postula, satisfacen el principio de minimalidad según Calvo (2001).

De acuerdo a Rey Pastor y Puig Adam (1948), el autor formula solo definiciones afirmativas.

Sanchez-Marmol, L. y Perez-Beato, M (1945). Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación. Tomo I. Segunda edición. S.A.E.T.A.

El libro se organiza en dos tomos, posee una primera sección denominada Introducción y treinta y dos capítulos.

En el capítulo II, sección 1, se definen líneas quebradas y polígono convexo de la siguiente manera:

Definición 39: Dados n puntos $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ en un cierto orden, la figura formada uniendo los pares de puntos consecutivos A_1 con A_2, \dots, A_{n-1} con A_n , consta de $n - 1$ segmentos ($A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$) y se denomina *línea quebrada o poligonal, abierta*.

Si se une el punto A_n con el primero A_1 , la poligonal consta ahora de n segmentos y se llama *línea quebrada o poligonal, cerrada* (p. 59).

Luego de esto, en la definición 40, se define polígono convexo:

Región poligonal convexa es el conjunto de los puntos comunes a todos los semiplanos, que las rectas de los lados de una poligonal cerrada determinan. La línea quebrada cerrada es el contorno de la región.

Una región poligonal convexa y su contorno constituyen una figura plana convexa llamada polígono convexo, o simplemente polígono (p.59).

En la sección 4, específica de cuadriláteros, los autores en la definición 57 definen los siguientes cuadriláteros:

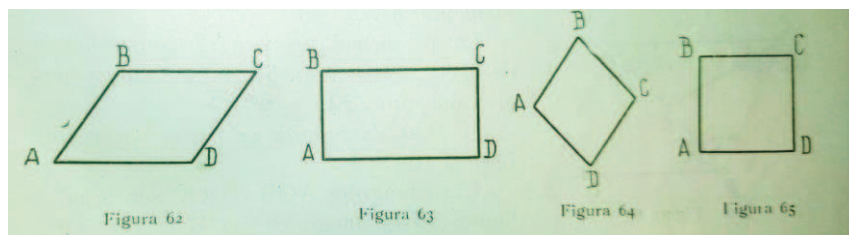
Entre los cuadriláteros convexos se distinguen:

El *paralelogramo*, que tiene sus lados opuestos paralelos (fig. 62).

El *rectángulo*, que tiene sus cuatro ángulos iguales entre sí (fig. 63).

El *rombo*, que tiene sus lados iguales (fig. 64).

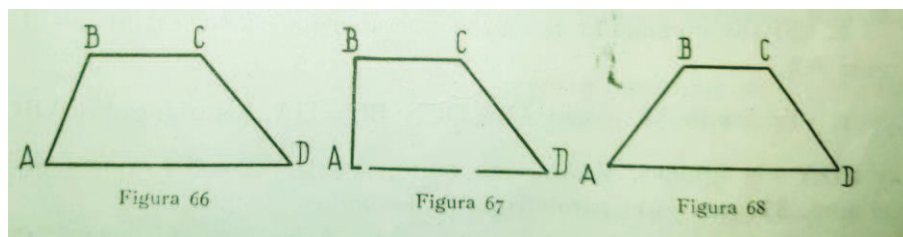
El *cuadrado*, que tiene sus lados y sus ángulos iguales (fig. 65).



El *trapezio*, que tiene dos lados opuestos paralelos (fig. 66).

Un *trapezio* se llama *rectángulo* si uno de los lados no paralelos es perpendicular a los paralelos (fig. 67).

Trapezio isósceles es aquel que tiene iguales los lados AB y CD no paralelos (fig. 68).



Los autores no hacen referencia en esta sección a cuadriláteros que no tengan lados paralelos.

Cabe aclarar que si bien, el rombo, rectángulo y cuadrado no son definidos como paralelogramos, se demuestra en el recíproco de un teorema que: “un cuadrilátero convexo es paralelogramo:

1. Si tiene sus lados opuestos iguales.
2. Si tiene sus ángulos opuestos iguales.
3. Si los lados opuestos son a la vez iguales y paralelos
4. Si sus diagonales se cortan mutuamente en partes iguales”. (p.82)

Al analizar las definiciones presentadas, observamos que de acuerdo a De Villiers (1994), estamos frente a una clasificación tanto jerárquica como particional. Si bien en las figuras se presenta una representación para cada cuadrilátero definido, con propiedades específicas (dos pares de lados opuestos distintos en el rectángulo, solo un par de lados paralelos en los trapezios), en las definiciones no hay elementos para indicar que un paralelogramo no pueda ser considerado como trapezio, pues satisface las condiciones que se postulan para este. De igual modo, un cuadrado satisface las condiciones de rectángulo y de rombo. Dentro de la categoría de los trapezios, si encontramos una partición, pues un trapezio rectángulo no podrá ser isósceles, pues de serlo no cumple la condición de poseer dos lados no paralelos.

Por otra parte, observamos que se adopta al paralelismo de sus lados como característica para definir y clasificar los cuadriláteros, exceptuando al rombo y romboide que se los define por la igualdad de lados.

Es interesante destacar también que, exceptuando la definición de rectángulo, las definiciones de cuadrilátero que postula, satisfacen el principio de minimalidad según Calvo (2001). En el caso de rectángulo no lo es, ya que menciona como condición la igualdad de sus cuatro ángulos, lo que resulta redundante pues si tiene un solo ángulo recto, es posible deducir que lo son los otros tres.

De acuerdo a Rey Pastor y Puig Adam (1948), el autor formula tanto definiciones afirmativas como negativas, ya que en el caso de los trapezios se niega el paralelismo de lados.

4.3. Algunas consideraciones finales

A partir del análisis realizado podemos enunciar, a modo de síntesis, algunas características comunes que presentan los libros que analizamos:

- Las definiciones son enunciadas por los autores de una única manera. Los textos no ofrecen al estudiante la posibilidad de cuestionarlas, analizarlas o construirlas por sí mismos, sino que en cambio son presentadas de forma acabada.
- El criterio principal con el que se clasifican los cuadriláteros en los libros es el paralelismo de los lados. En los tres casos, también se combinan con la igualdad de lados y la cantidad de ángulos rectos. Un ejemplo de esto es el cuadrado, que se define como un paralelogramo con un ángulo recto y cuatro lados iguales. Se exceptúa en los dos libros que lo definen, al romboide, ya que es definido solo a partir de la igualdad de lados.
- En los tres casos, las definiciones que los autores enuncian dan lugar a una clasificación tanto jerárquica como particional en términos de De Villiers (1994). No aparece una clasificación puramente jerárquica o puramente particional.

Las conclusiones a las que arribamos, reforzando y potenciando el propósito de este trabajo, nos posibilitan realizar algunas preguntas que motivan nuestra investigación: ¿Cómo influye la selección que realiza el docente de la bibliografía con la que trabaja en el tratamiento de definiciones y clasificaciones?, ¿cuáles son los criterios que el docente considera a la hora de seleccionar bibliografía para sus clases?, ¿en qué medida los libros de texto guían y determinan el trabajo en el aula?, ¿qué posibilidad tienen los estudiantes de analizar y conocer distintas definiciones de cuadriláteros?.

Estas preguntas y el análisis realizado nos sirven de guía y tienen relación con nuestro interés en la generación de propuestas de enseñanza que posibiliten a futuros profesores deconstruir concepciones acerca de la enseñanza de la geometría, problematizar la enunciación y construcción de definiciones, con el propósito de que posteriormente se conviertan en herramientas para la toma de decisiones; así como también que sean conscientes de que no hay una única forma de definir, ni un único criterio.

Capítulo 5: Secuencia didáctica y su análisis a priori

[...] podemos afirmar que la Matemática, para los alumnos, quedará en parte definida y caracterizada por el conjunto de experiencias que les hagamos vivir en relación con los conceptos que se traten. Es decir, el trabajo matemático quedará evidenciado ante los ojos de los alumnos a partir de las propuestas que las instituciones educativas les hagan experimentar a lo largo de la escolaridad. Itzcovich (2014).

En este capítulo presentamos la secuencia didáctica diseñada y su análisis. En primer lugar, realizamos una descripción de la misma y luego encontrarán las consignas y el análisis a priori.

5.1. Acerca de la secuencia

La versión de la secuencia que presentamos es la última de varios ensayos que realizamos previamente. Logramos implementar algunas pruebas piloto anteriores, pero como comentamos en el primer capítulo nuestro objetivo como investigadoras se fue modificando en el tiempo, por lo cual la secuencia fue modificándose hasta esta versión. No incluimos análisis de las versiones anteriores, pues no incluimos en esta versión ningún aspecto de ellas; sin embargo, nos han conducido a dar origen a esta.

La secuencia diseñada tiene como objetivo que los estudiantes construyan distintas agrupaciones/clasificaciones¹⁶ de cuadriláteros y que finalmente formulen definiciones de los mismos, haciendo especial énfasis en el proceso recorrido para lograrlo. A su vez, promueve el trabajo grupal, el intercambio entre pares, la confrontación de ideas, formulación de conjeturas y promueve la posibilidad de argumentar acerca de lo realizado.

La secuencia está compuesta por cinco actividades. Las cuatro primeras buscan que los estudiantes exploren y analicen cuadriláteros, y como cierre, que realicen unas primeras agrupaciones poniendo el foco en distintas propiedades de los mismos. Estas primeras cuatro actividades, persiguen un doble objetivo: que los estudiantes busquen nuevas relaciones para caracterizar las figuras y que pongan en juego las concepciones que tienen en relación con las mismas. La última actividad propone que los estudiantes recuperen lo construido en las actividades anteriores y formulen definiciones y clasificaciones de cuadriláteros.

Al diseñar la secuencia tuvimos en cuenta que cada actividad propicie la exploración de cuadriláteros a partir de distintas propiedades, buscando recuperar los saberes que los futuros docentes ya tienen disponibles. A su vez, consideramos que las actividades que diseñamos promuevan que los estudiantes realicen distintos tipos de tareas, las cuales detallamos a continuación:

- En la Actividad 1 proponemos que los estudiantes formen y exploren cuadriláteros a partir de figuras ya conocidas, en este caso, triángulos. Esta tarea da lugar a derivar propiedades para los cuadriláteros a partir de propiedades de los triángulos que los alumnos ya conocen. La validación

¹⁶ Utilizaremos los términos agrupaciones y organizaciones, como sinónimos de clasificaciones. Esta decisión se toma con el propósito de no limitar la selección de propiedades para organizarlos y no promover la asociación directa con saberes previos acerca de la clasificación de figuras

de las propiedades de las nuevas figuras dependerá de haber considerado en forma adecuada las propiedades de las figuras de partida.

- La Actividad 2 toma como punto de partida una pregunta que invita a los estudiantes a explorar la cantidad de ángulos de distintos tipos de un cuadrilátero, habilitando de forma opcional el uso del Software Geogebra para la exploración.
- En la actividad 3 proponemos la construcción de cuadriláteros en Geogebra, dando como única condición que sus diagonales sean segmentos de distinta longitud.
- Si bien la Actividad 4 parte de una pregunta que invita a explorar cantidad de lados iguales, similar a la actividad 2, cambia la tarea en el sentido en que en las anteriores los estudiantes deben proponer como cierre una posible organización de los cuadriláteros y en esta se propone que completen una posible tabla que los organiza. Además de cambiar el tipo de tarea, abre la exploración hacia otro camino: considerar dos propiedades simultáneamente para clasificar cuadriláteros.
- La actividad 5 propone considerar lo producido en las anteriores y formular definiciones de cuadriláteros sistematizando de este modo los saberes construidos a lo largo de la secuencia, promoviendo el análisis reflexivo y la toma de decisiones en relación a la conveniencia de organizar y clasificar los cuadriláteros de acuerdo a distintos criterios.

El orden en el cual se organizaron las actividades, permite que los estudiantes en cada una de ellas se apoyen en lo trabajado en las anteriores. En la primera de ellas se garantizó que se parta de un saber que el grupo tuviera disponible, que en este caso, fueron las figuras triangulares -contenido ya abordado y desarrollado previamente en el mismo curso-. Esto posibilitará que los estudiantes deduzcan propiedades de los cuadriláteros, tales como la igualdad y el paralelismo de lados y amplitudes de ángulos, a partir de las propiedades que ya conocen de los triángulos. En las siguientes actividades, los estudiantes profundizan su estudio, incorporan, formulan y validan distintas propiedades que poseen en relación con sus elementos -ángulos, diagonales y lados-. También, al avanzar en las actividades, comparan las distintas clasificaciones que formulan e identifican qué criterios de clasificación resultan más convenientes que otros, en cuanto a la claridad que aportan a las mismas.

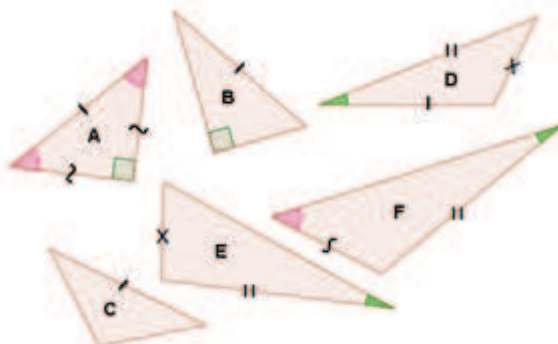
Es nuestra intención no valorar como correctas o incorrectas las producciones que realicen los estudiantes a lo largo de todas las actividades, pero si nos interesa resaltar que todas las organizaciones, en caso de que haya distintas, pueden ser correctas y válidas, es decir, que no hay una *única* forma ni criterio para organizar las figuras.

5.2. Secuencia didáctica: enunciados

Actividad 1: “Formando cuadriláteros a partir de triángulos”

Primera parte:

En los sobres, encontrarán los siguientes triángulos. Cada uno está repetido. Armen cuadriláteros combinando dos triángulos sin superponerlos.



Segunda parte:

Elaboren un cuadro/diagrama que les permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que consideraron.

Actividad 2: “Cuadriláteros y ángulos”

Primera parte¹⁷:

¿Cuántos ángulos obtusos, agudos o rectos puede tener un cuadrilátero convexo? Presenten un ejemplo de los casos posibles y expliquen, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

Recomendaciones:

- Pueden explorar posibilidades construyendo cuadriláteros con Geogebra si lo consideran conveniente.
- Para realizar las construcciones, pueden realizarlo mediante dos opciones: utilizar cualquier herramienta de geogebra y una vez construido el cuadrilátero, utilizar la herramienta



polígono, para constituirlo como tal, o simplemente construirlo con esta herramienta y analizar sus características.

Segunda parte:

Elaboren un cuadro/diagrama que les permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente¹⁸ de acuerdo a las características que consideraron.

¹⁷ La primera parte de esta actividad fue extraída de: Calvo et al. (2016). Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria. Madrid: Síntesis.

¹⁸ Utilizamos el término fácilmente, con la intención de que el diagrama que realicen los estudiantes como síntesis de la actividad, contribuya a diferenciar rápidamente los cuadriláteros de acuerdo a las características que consideraron.

Actividad 3: “Cuadriláteros y diagonales”

Primera parte:



Utilizando Geogebra, exploren las siguientes situaciones:

Dados dos segmentos de distinta longitud, construir, si es posible, un cuadrilátero que los tenga por diagonales.

¿Qué cuadriláteros convexos se pueden construir? Presenten un ejemplo de los casos posibles y expliquen, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

Segunda parte:

Elaboren un cuadro/diagrama que les permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que estuvimos considerando.

Actividad 4: “Cuadriláteros y lados”

Primera parte:

¿Cuántos lados iguales puede tener un cuadrilátero convexo? Pueden explorar posibilidades construyéndolos con Geogebra si les resulta conveniente.

Segunda parte:

Completen el siguiente cuadro, que representa una posible forma de organizar la información obtenida.

	Cantidad de ángulos rectos				
Cantidad de lados iguales	ninguno	1	2	3	4
Ninguno					
2 lados iguales					
3 lados iguales					
4 lados iguales					
2 pares de lados iguales y diferentes entre sí.					

Presenten ejemplos de los casos posibles y expliquen, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

Actividad 5: “Definiendo cuadriláteros”

Teniendo en cuenta las organizaciones realizadas en las actividades anteriores, elaboren a partir de ellas, una definición para cada uno de los cuadriláteros trabajados.

5.3. Análisis a priori de la secuencia

El análisis a priori que realizamos de las situaciones que se diseñaron y se implementaron con los estudiantes está compuesto de una parte descriptiva y una predictiva que dialogan y se complementan mutuamente. De acuerdo a Artigue et al. (1995), el objetivo de este análisis es determinar el efecto de las selecciones realizadas en el diseño de la secuencia en relación con los posibles procedimientos de los estudiantes y el sentido que puedan otorgarles.

En este capítulo analizaremos las posibilidades que brindan a los estudiantes cada una de las actividades y la secuencia en conjunto, de desarrollar acciones, de desplegar distintas estrategias de resolución y de argumentar sobre la validez de lo realizado; teniendo como principal objetivo que los estudiantes transiten un proceso de exploración de cuadriláteros, descripción a través de sus propiedades y como producto final que elaboren definiciones y clasificaciones de los mismos, reconociendo que las mismas no son únicas.

Al diseñar la secuencia didáctica, tal como mencionamos anteriormente, tuvimos en cuenta que cada una de las actividades propicie el análisis de distintas propiedades. Por otro lado, hubo otras decisiones que en términos de Brousseau (1995), se constituyen en variables didácticas, ya que cada una de las selecciones que realizamos modifica los saberes que se ponen en juego en cada actividad, así como también los procedimientos de resolución. De acuerdo a Artigue et al. (1995), estas variables didácticas que consideramos forman parte de lo que ella denomina micro-didácticas o locales, las cuales describimos a continuación para cada una de las actividades:

Actividad 1

- *La selección de los seis triángulos que intervienen* se realizó, de manera que los triángulos elegidos posibiliten la construcción de una amplia variedad de cuadriláteros, tanto cóncavos como convexos, dando lugar a que si los estudiantes no conocen algunos de ellos, comiencen a explorarlos en esta actividad.

Si nos centramos en los convexos, que son el objeto de estudio en esta investigación, es posible formar paralelogramos propiamente dichos, rectángulos, cuadrados, rombos, trapecios isósceles y no isósceles, así como también distintos trapezoides¹⁹ y romboides.

A partir de la selección de los triángulos hecha, no es posible formar trapecios rectángulos. Decidimos renunciar a la posibilidad de formarlos, dado que la inclusión de más triángulos que lo permitieran, generaría mayor cantidad de posibilidades de formación de cuadriláteros, muchos de ellos de las mismas clases desviando el propósito de la actividad que es poner ciertas cuestiones en movimiento y no un estudio pormenorizado de cada clase de cuadrilátero. Para compensar esta situación, se prevé que el docente proponga su análisis si no surgiera al interior de los grupos de trabajo.

¹⁹ Dado que ninguno de los libros que analizamos en el capítulo IV definen a esta figura, tomamos en esta investigación la definición que postulan Rey Pastor y Puig Adam (1928): “*Los cuadriláteros que no tienen paralelos ningún par de lados opuestos se llaman trapezoides*”. (p.97).

- *La decisión de incluir marcas en las representaciones de los triángulos y explicitar el tipo de triángulo (según sus ángulos y según sus lados):* a cada grupo se entrega un sobre con los triángulos, una tarjeta con la clasificación y una imagen con las representaciones de los triángulos, en los cuales se señalan con marcas lados y ángulos iguales, así como también los ángulos rectos. Consideramos que esta decisión permite que en el desarrollo de la actividad, los procedimientos de los estudiantes estén exclusivamente centrados en la formación de cuadriláteros, con la certeza de que los lados de los triángulos que decidan yuxtaponer son iguales. Se evita de esta manera que se desvíe el foco de análisis en mediciones de longitudes de lados, y así evitar el uso de reglas graduadas, ya que pueden o no resultar exactamente iguales. Por otro lado, conocer la igualdad de ángulos y los ángulos que son rectos, permite que los estudiantes se apoyen en estos datos sin necesidad de demostrarlo para validar propiedades de los cuadriláteros, como por ejemplo el paralelismo de lados y la presencia de ángulos rectos.

Actividad 2:

- *Habilitar el uso de geogebra:* modifica las estrategias de resolución, pues podrán explorar a partir de la construcción de cuadriláteros en el software, cuyo dinamismo posibilita que se obtengan gran variedad de figuras, y en consecuencia generar distintas formas de validación, tanto pragmáticas como intelectuales²⁰.

Actividad 3:

- *La selección de dos segmentos de distinta longitud:* representa una variable didáctica pues genera “casos” que no son posibles de construir a partir de ellos, como los cuadrados, rectángulos, trapecios isósceles y algunos trapecoides.
- *Habilitar el uso de Geogebra:* modifica las estrategias de resolución de los estudiantes pues dejan de apoyarse en construcciones en papel y lápiz para realizarlas en el software; posibilita, a partir del dinamismo del programa, la exploración de una mayor cantidad de cuadriláteros. También, es probable que, a partir del movimiento de los elementos de la figura, encuentren cuadriláteros que no conocen, o que no hubieran considerado si los construyeran en lápiz y papel.

Actividad 4:

- *Completar un cuadro de doble entrada con los criterios ya establecidos:* constituye una variable didáctica, pues mirar una sola propiedad ya no es suficiente. Genera la necesidad de analizar dos propiedades simultáneamente, cuestión que hasta el momento no resulta necesaria en las actividades previas.

En el diseño de la secuencia también hemos tenido en cuenta otro tipo de variables denominadas de acuerdo a Artigue et al. (1995), variables globales. Una de ellas es la cantidad de momentos de intercambio colectivo que buscamos que tengan lugar en la implementación de la secuencia, si bien esto dependerá de cómo funcione la secuencia, por el diseño abierto de las actividades esperamos variedad de producciones, lo cual amerita los espacios colectivos de intercambio.

²⁰ Balacheff (2000) define dos tipos de pruebas: denomina como pragmáticas a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión y como intelectuales a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en la formulación de propiedades en juego y de sus relaciones.

Definimos que sean dos los espacios de intercambio en cada actividad: uno intermedio con el propósito de que cada grupo se nutra del trabajo y aportes de los otros enriqueciendo la posterior etapa de trabajo, y otro momento al cierre, para compartir y reflexionar en torno a las producciones finales de cada grupo. Para lograr esto, las consignas de las primeras cuatro actividades fueron diseñadas en dos partes, la primera que apunta a la resolución de un problema y la segunda, destinada a organizar la información que recolectan en la primera. De este modo, en cada clase se alternan momentos de trabajo al interior de cada grupo con otros de intercambio con la clase completa.

Otra variable que consideramos es la metodología de trabajo en el aula, decidimos que en todas las clases el trabajo sea grupal y que los grupos se mantengan a lo largo de todas las clases. Esto busca promover que los estudiantes se apoyen en sus propias producciones en cada una de las actividades, vuelvan sobre ellas y modificarlas si fuera necesario. También a los fines de nuestra investigación, mantener las agrupaciones nos permitirá analizar los cambios que cada grupo realiza en las concepciones que poseen en relación a las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros. Se invitará a los estudiantes a agruparse en cuatro grupos, con la única condición de que en todos los grupos haya aproximadamente la misma cantidad de integrantes. Esta elección se apoya en la convicción de que las interacciones entre pares favorecen la construcción de saberes.

Por otro lado, consideramos el tiempo que se le destinará a la propuesta, que es de cinco clases consecutivas de 2 horas de duración cada una.

También decidimos que no se entregará a los estudiantes la totalidad de las consignas que componen la secuencia, sino que en cada clase se presentará la que se trabajará ese día, y a su vez recibirán una a una cada parte de la actividad. Esto tiene como propósito evitar que los estudiantes anticipen el objetivo y busquen información para realizar las actividades, especialmente en la última.

Cada una de las decisiones tomadas persiguen que los estudiantes en interacción con sus pares, con el docente y con la situación diseñada, pongan en conflicto sus saberes y que éstos funcionen de diversos modos tal como expresa Brousseau (1995), en situaciones de acción, de formulación y también de validación.

Al diseñar la secuencia consideramos los aportes de Rodríguez et al. (2016) para proponer consignas que posean un potencial matemático rico. Consideramos que logramos esto, dado que todas las consignas promueven la exploración por parte de los estudiantes, en ninguna de ellas se pauta lo que deben realizar ni se incluyen pasos a seguir. A su vez, todas las consignas promueven la formulación de conjeturas y la elaboración de argumentos que las validen, completando de esta manera los dos aspectos que la autora considera necesarios para evaluar las condiciones de trabajo que cada una de las actividades posibilita.

A continuación, presentamos el análisis a priori para cada una de las clases/actividades.

5.3.1. Primera clase

En esta clase se trabajará con la actividad 1 de la secuencia: “Formando Cuadriláteros a partir de triángulos”, que propone formar cuadriláteros con distintos triángulos.

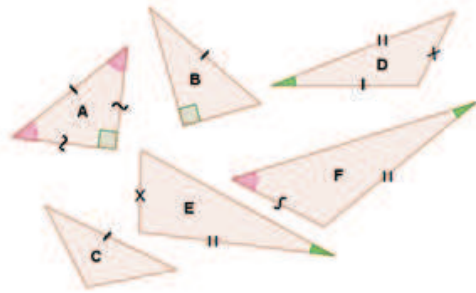
El objetivo de esta actividad es que los estudiantes realicen un primer análisis de cuadriláteros, movilicen los saberes que disponen de los mismos y que identifiquen y establezcan algunas características como ser el paralelismo de lados, igualdad de lados y tipos de ángulos que poseen, apoyándose en las propiedades ya conocidas de los triángulos. Como cierre, la actividad propone que los agrupen seleccionando algún criterio. Se entregará un sobre a los estudiantes con triángulos de

cartulina y un cuadro con la clasificación de los mismos según sus lados y ángulos. Dado el recurso que se utiliza, esperamos que el trabajo se inicie con comprobaciones empíricas y luego se promoverá el establecimiento de relaciones para que los estudiantes avancen en la caracterización de los cuadriláteros, a partir de las propiedades de lados y ángulos de los triángulos.

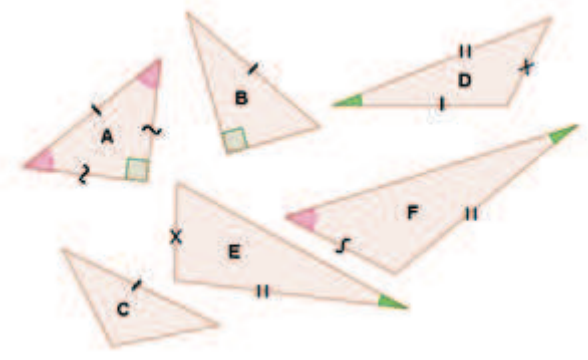
Primer momento

En un primer momento se trabajará con la primera parte de la actividad 1:

Consigna:
 En los sobres, encontrarás los siguientes triángulos. Cada uno está repetido.
 Arma cuadriláteros combinando dos triángulos sin superponerlos.



Se repartirán los sobres a cada grupo y además una tarjeta con las características de los triángulos como la siguiente:

Características de los triángulos:	
<p>A isósceles rectángulo B escaleno rectángulo C isósceles obtusángulo D escaleno obtusángulo E escaleno obtusángulo F escaleno obtusángulo</p>	

El docente solicitará a los estudiantes que registren los cuadriláteros que puedan armar, así como también que justifiquen cómo pueden asegurarlo. El pedido de justificación apunta a recuperar e identificar los saberes que los alumnos disponen de los cuadriláteros.

Esperamos que la información dada en las tarjetas les permita relacionar los lados y ángulos de los triángulos y elaborar algunos argumentos acerca de qué tipos de cuadriláteros encontraron. Los argumentos dependerán, en cada caso, de la concepción que posean de cada uno de ellos.

Comenzado el momento de trabajo el docente podrá sugerir en cada grupo, si fuera necesario, que organicen la exploración y el registro para abarcar más posibilidades sin repetir.

En este primer acercamiento es muy posible que los estudiantes consideren solo una de las características que éstos poseen, como ser la cantidad de pares de lados paralelos, cantidad de lados iguales o cantidad de ángulos rectos. Sin embargo, no descartamos que algunos grupos también los caractericen teniendo en cuenta más de una característica a la vez.

Como ya mencionamos, la selección de triángulos que realizamos posibilita que al combinarlos se formen cuadriláteros convexos como: paralelogramos propiamente dichos, rectángulos, rombos, cuadrados, trapecios isósceles, trapecios escalenos y trapezoides, incluido el romboide. También es posible obtener cuadriláteros cóncavos, si bien no serán nuestro objeto de estudio, esperamos que los estudiantes los identifiquen, caractericen y posteriormente establecer que en esta oportunidad no trabajaremos con ellos.

En el Anexo 1, describimos en detalle cómo es posible combinar triángulos para formar cada tipo de cuadrilátero, así como también cuáles son algunos de los posibles argumentos que esperamos que los estudiantes formulen, para argumentar qué tipos de cuadriláteros formaron.

Como esperamos que los estudiantes argumenten acerca del paralelismo de los lados de los cuadriláteros a partir de los ángulos de los triángulos que los conforman y las relaciones que hay entre ángulos entre paralelas, consideramos que es un prerequisite importante que los estudiantes tengan disponibles las relaciones entre ángulos entre paralelas, pues es la base para elaborar argumentaciones en relación con el paralelismo de lados.

Segundo momento

Luego de que cada grupo haya avanzado en la formación de cuadriláteros, se propondrá un momento de intercambio colectivo. Algunas preguntas que pueden mediarlo, son las siguientes:

- ¿Qué cuadriláteros pudieron formar? ¿Cómo los formaron?
- ¿Qué características poseen los cuadriláteros formados?
- ¿Cómo pueden asegurarlo?

Con estas preguntas esperamos que los estudiantes compartan los tipos de cuadriláteros que lograron formar y cómo los caracterizaron, así como también las razones en las que se basan para afirmar qué cuadriláteros son los que encontraron, las cuales dependerán de las características que consideren. Es muy posible que los estudiantes analicen la cantidad de lados iguales, la cantidad de ángulos de cada tipo y la cantidad de pares de lados paralelos que tienen los cuadriláteros.

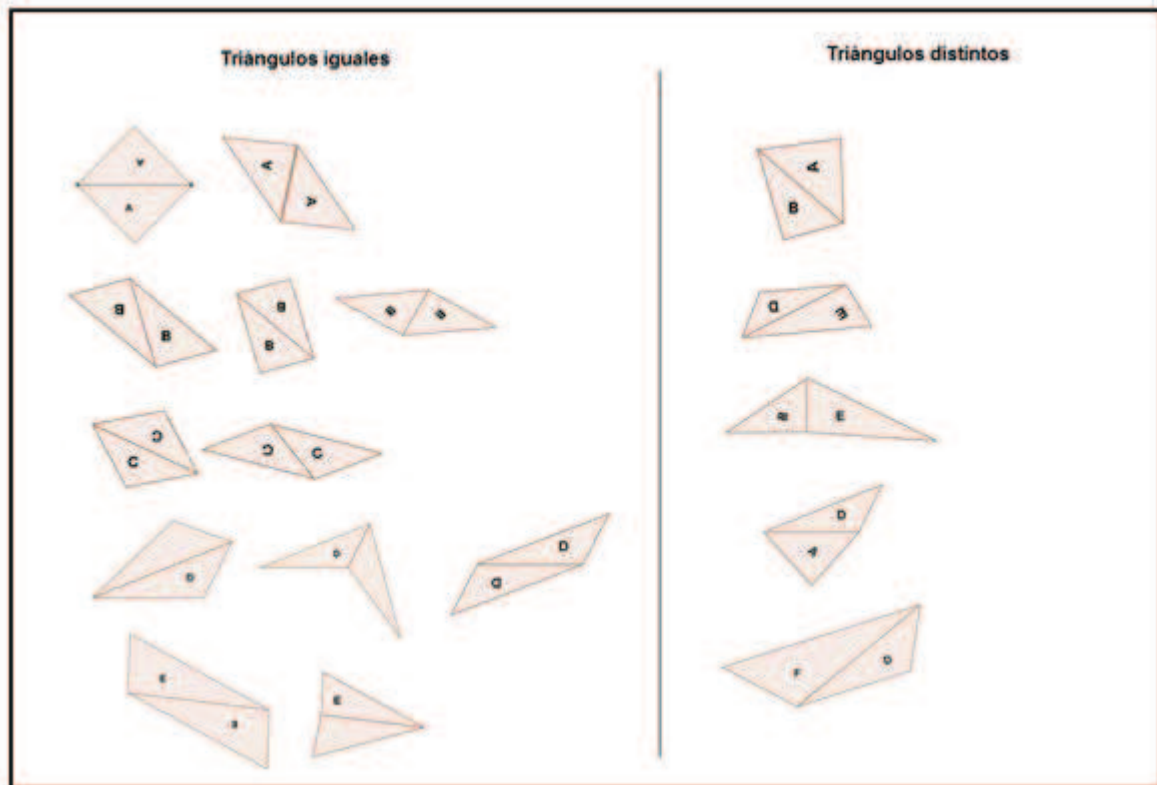
Este intercambio tiene como propósito que cada grupo compare sus hallazgos con los de otros y que esto sirva de insumo para avanzar en su trabajo, teniendo en cuenta que los argumentos que cada grupo elabore pueden diferir de acuerdo a las características que consideren.

Por otro lado, si no sucedió previamente, en este momento los estudiantes socializarán los nombres que asignaron a cada uno de los cuadriláteros que encontraron. En el caso de que haya diferentes denominaciones, distintas a los nombres tradicionales, el docente propondrá detenerse para analizarlos.

Es importante mencionar que nuestros estudiantes ya han abordado en su educación primaria y secundaria nociones de cuadriláteros, por lo que es muy probable que utilicen los nombres convencionales de los mismos y que a su vez, en la mayoría de los casos, coincide con la establecida

por Puig Adam (1980). Si esto sucede, se tomará dicha denominación para continuar con el posterior trabajo, o en contraposición, se acordarán otros.

El docente invitará a los estudiantes a que registren en el pizarrón la información que cada grupo comparta. Se les sugerirá organizarlo teniendo algún criterio, como por ejemplo, si fueron armados con dos triángulos iguales o dos triángulos distintos. De esta manera, un posible pizarrón que no necesariamente contemplará todas las posibilidades desarrolladas en el Anexo 1, puede ser el siguiente:



Otro posible pizarrón puede ser el que resulte de agrupar los cuadriláteros de acuerdo a las clases que los estudiantes definan, como por ejemplo, los paralelogramos, trapecios y trapezoides. Pero como no es nuestra intención otorgar nombres a las clases de cuadriláteros o a los cuadriláteros a priori, ni forzar a que los grupos reconozcan las mismas características en los cuadriláteros, se sugerirá organizarlo tal como presentamos en la imagen anterior.

En este intercambio el docente también propondrá comparar los cuadriláteros cóncavos y convexos, y establecerá que a partir de ese momento solo se centrarán en el estudio de los convexos, pues consideramos oportuno reducir el repertorio de cuadriláteros a analizar, en pos de favorecer la reflexión y poner en discusión saberes que es muy posible que los estudiantes tengan disponibles, aprovechando la oportunidad para desnaturalizar si existiera, por ejemplo, la concepción de unicidad de las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros.

Tercer momento:

Luego del primer intercambio colectivo se planteará a los estudiantes que trabajen en la segunda parte de la actividad, cuya consigna es la siguiente:

Elabora un cuadro/diagrama que te permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que estuvimos considerando.

El docente solicitará a cada grupo que registren todas las versiones de los diagramas que realizan y que plasmen el diagrama final en un afiche para compartir posteriormente en otro momento de intercambio.

Se evitará denominar a las organizaciones como “clasificaciones”, con el propósito de no limitar la selección de propiedades para organizarlos y no promover la asociación directa con saberes previos acerca de la clasificación de figuras.

En el momento de producción el docente recorrerá cada grupo y, en caso de ser necesario, podrá acompañar el trabajo de los alumnos preguntando:

- ¿qué características permiten diferenciar los cuadriláteros que encontraron? ¿qué características tienen en común?
- ¿es posible agrupar a todos los cuadriláteros teniendo en cuenta la/las características seleccionadas?

Estas preguntas tienen como propósito en primer lugar, que los estudiantes comparen los cuadriláteros obtenidos poniendo el foco en sus características y no en sus nombres; y por otro, que problematicen y reflexionen acerca de qué cuestiones son necesarias considerar al momento de clasificar.

Los diagramas o cuadros que cada grupo realice dependerán de las características que seleccionen para agrupar las figuras. Si bien es posible que los grupos elijan distintas propiedades, también es esperable que consideren el paralelismo de los lados, ya que es una clasificación fuertemente estudiada en sus niveles previos de escolarización.

A continuación, compartimos algunas organizaciones que los estudiantes podrían realizar.

- De forma particional (De Villiers, 1994) y considerando solamente la cantidad de pares de lados paralelos:

	Dos pares	Solo un par	Ninguno
Cantidad de pares de lados paralelos	Paralelogramos	Trapecios	Trapezoides
	Rombos	Trapecios Isósceles	Romboides
	Rectángulos		
	Cuadrados		

- De forma jerárquica (De Villiers, 1994) y considerando solamente la cantidad de pares de lados paralelos:

Cantidad de pares de lados paralelos	Al menos un par	Ninguno
	Trapecios	Trapezoides
	Trapecios Isósceles	Romboides
	Paralelogramos	
	Rombos	
	Rectángulos	
	Cuadrados	

- Otra posibilidad, como ya mencionamos anteriormente, es que los estudiantes consideren más de una característica a la vez, como ser cantidad de pares de lados paralelos y cantidad de ángulos rectos. Si realizan una clasificación particional en términos de De Villiers (1994), un posible cuadro organizativo puede ser:

Cantidad exacta de ángulos rectos	Cantidad de pares de lados paralelos		
	Dos pares	Solo un par	Ninguno
Cuatro	Cuadrados - Rectángulos - Rombos cuadrados		
Tres			
Dos		Trapecios rectángulos	Trapezoides con dos ángulos rectos - Romboides con dos ángulos rectos
Uno			Trapezoides con un ángulo recto
Ninguno	Paralelogramos no rectángulos - Rombos no cuadrados	Trapecios no rectángulos	Trapezoides sin ángulos rectos - Romboides sin ángulos rectos

- Si consideran categorías con elementos en común, clasificación jerárquica en términos de De Villiers (1994), otra posible organización es:

	Cantidad de pares de lados paralelos	
Cantidad exacta de ángulos rectos	Al menos un par	Ninguno
Cuatro	Cuadrados - Rectángulos - Rombos cuadrados	
Tres		
Dos	Trapezios rectángulos	Trapezoides con dos ángulos rectos
Uno		Trapezoides con un ángulo recto
Ninguno	Trapezios no rectángulos - Paralelogramos - Rombos no cuadrados.	Trapezoides sin ángulos rectos - Romboides sin ángulos rectos

En los últimos dos cuadros se puede observar que la fila de “tres ángulos rectos” está vacía, dado que no existen cuadriláteros con solamente tres ángulos rectos. Esperamos que los estudiantes puedan argumentar la inexistencia apoyándose en la propiedad de la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros, pues al tener tres ángulos rectos cuya suma es 270° , el cuarto ángulo debe ser exactamente igual a 90° .

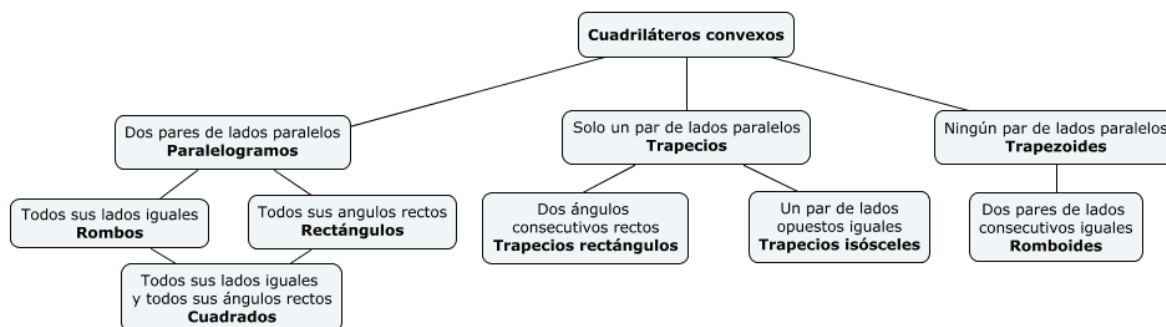
La cantidad de lados iguales y los ángulos rectos son características que muy probablemente los estudiantes reconozcan con facilidad, por este motivo, es posible que realicen una agrupación considerándolas simultáneamente junto con la cantidad de lados paralelos. A continuación, esquematizamos una posible organización en forma de diagrama²¹.

Cabe mencionar que, en este tipo de diagrama que presentamos, cada segmento debe leerse como “puede ser”. Por ejemplo, si seguimos la sucesión de segmentos a la izquierda, podemos leer que: los cuadriláteros convexos pueden ser paralelogramos y a su vez estos pueden ser rombos y los rombos pueden ser cuadrados. Por otro lado, también debe leerse que, si un cuadrilátero no cumple con las

21 Los cuadros de doble entrada como los anteriores se prestan bastante bien para clasificaciones de tipo particionales. En cuanto a las clasificaciones de tipo jerárquico, parecen quedar mejor representadas en diagramas de flechas como el anterior. Sin embargo, en un diagrama de “flechas” hay cuestiones que no se pueden abarcar por completo. Por un lado, no queda siempre claro cuándo se trata de una relación jerárquica o particional. Por ejemplo, cuando se “abren” los cuadriláteros convexos en las clases “dos pares de lados paralelos”, “solo un par de lados paralelos” y “ningún par de lados paralelos” se trata de clases disjuntas, mientras que cuando se “abren” los cuadriláteros en las clases “todos sus lados iguales” y “todos sus ángulos rectos”, la intersección es no vacía y no se trata de una partición.

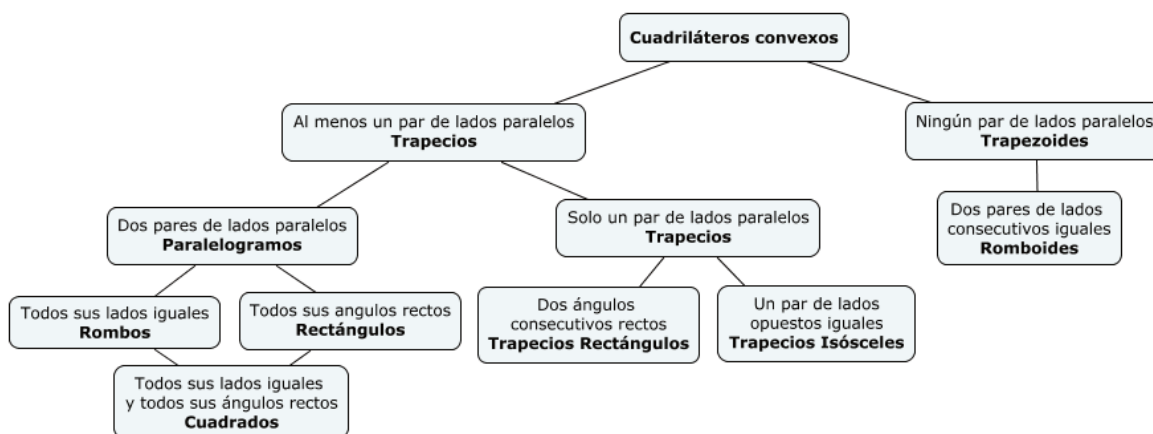
Por otro lado, quedan implícitos todos los cuadriláteros que no están incluidos en el diagrama, como los paralelogramos propiamente dichos o los trapezoides no romboides.

propiedades de alguno de los que están ubicados en tercera línea, solamente se nombra y ubica en la segunda, como por ejemplo un paralelogramo propiamente dicho, estaría incluido en la categoría paralelogramos y en ninguna otra más, pues no tiene las propiedades del rombo y del rectángulo. Si bien no descartamos que algún grupo lo incluya como una categoría más en la tercera línea del diagrama²².



En este diagrama si bien hay tres grandes categorías disjuntas, dentro de los paralelogramos hay una jerarquía entre los rombos, rectángulos y cuadrados. También hemos incluido a los paralelogramos propiamente dichos, a los trapecios y trapezoides, figuras que podrían estar incluidas en las categorías “Paralelogramos”, “Trapecios” y “Trapezoides” entendiendo que allí están los que no tienen ninguna de las características de las subcategorías.

Siguiendo esta línea de organización que combina categorías con y sin elementos en común, podrían plantear una organización con más jerarquía como la siguiente:



No descartamos que los estudiantes puedan organizar una clasificación puramente particional, donde ninguna categoría tenga elementos en común con otra. En este caso, dentro de la familia de los paralelogramos los cuadrados, rombos, rectángulos y paralelogramos propiamente dichos, serían categorías disjuntas.

²² Esta forma de leer e interpretar este diagrama, debe considerarse para todos los diagramas de este tipo que se presentan a lo largo de este trabajo.

Cuarto momento:

A modo de cierre de esta primera actividad, se propondrá realizar otro momento de intercambio colectivo, donde cada grupo pueda compartir su afiche y explicar cómo y con qué criterio organizó los cuadriláteros.

Esperamos que a partir del intercambio con sus compañeros cada grupo tenga la posibilidad de analizar su trabajo comparándolo con el de sus pares, ampliar categorías que tal vez no hayan sido consideradas, complementar el de sus compañeros y corroborar lo realizado.

En caso de que no surja en el intercambio o en otros momentos de la actividad, en este momento se trabajará en el trapecio rectángulo, cuadrilátero que no se puede formar a partir de los triángulos dados. El docente podrá poner en cuestión la existencia del mismo, con preguntas como por ejemplo:

- ¿Puede un trapecio tener un ángulo recto?
- ¿En qué categoría ubicarían esta figura? ¿Por qué?

Esperamos que a partir de estas preguntas los estudiantes consideren esta figura y la ubiquen en sus diagramas.

En esta instancia no es nuestra intención valorar como correctas o incorrectas las producciones que realicen, pero si nos interesa arribar a la conclusión que todas las organizaciones, en caso de que haya distintas, pueden ser correctas y válidas, es decir, que no hay una única forma ni criterio para organizar las figuras.

El docente hará hincapié en la necesidad de analizar minuciosamente la organización propuesta, y descartar posibles errores u omisiones, y completar todas las categorías con los cuadriláteros que se lograron formar.

5.3.2. Segunda clase

En esta clase se trabajará con la actividad 2: “Cuadriláteros y ángulos”, la cual se enfoca en la cantidad de ángulos obtusos, agudos o rectos que puede tener un cuadrilátero convexo. Trata de desvincularse de los nombres de los cuadriláteros, de representaciones estereotipadas, enfocarse en relaciones que los caracterizan y posteriormente agruparlos en familias que posean iguales características.

Primer momento

En un primer momento se trabajará con la primera parte de la consigna:

Consigna

¿Cuántos ángulos obtusos, agudos o rectos puede tener un cuadrilátero convexo? Presenta un ejemplo de los casos posibles y explica, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

Recomendaciones:

- Pueden explorar las posibilidades construyendo los cuadriláteros con Geogebra si lo consideran conveniente.
- Para realizar las construcciones, pueden realizarlo mediante dos opciones: utilizar cualquier herramienta de Geogebra y una vez construido el cuadrilátero, utilizar la herramienta



polígono, para constituirlo como tal; o simplemente construirlo con esta herramienta y analizar sus características.

El docente repartirá la primera parte de la consigna a cada grupo, se leerá en conjunto y ofrecerá que si lo desean pueden realizar la exploración tanto utilizando Geogebra, en lápiz y papel o combinando ambas.

Se solicitará a cada grupo que registren las posibilidades que encuentren, así como también que justifiquen qué tipo de cuadrilátero es y cómo pueden asegurarlo. En el caso que trabajen con Geogebra se les solicitará, a modo de registro, que realicen capturas de pantalla de cada uno de los casos que encuentren, ya que es muy posible que a partir de una construcción y moviendo los elementos del cuadrilátero consigan otros con distintas características.

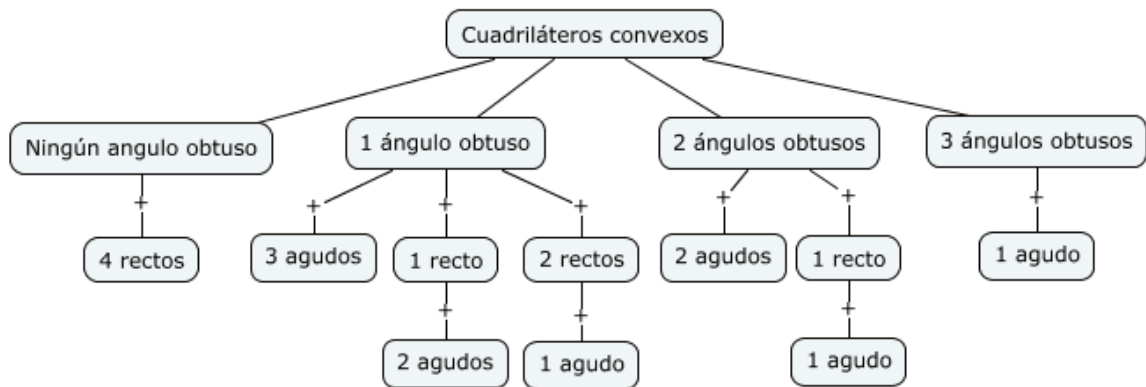
En el caso en que no utilicen Geogebra, podrán apoyarse en la primera actividad para determinar que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de los cuadriláteros es igual a 360° , dado que formaron cuadriláteros a partir de dos triángulos, en los cuales la suma de las amplitudes de los ángulos interiores es igual a 180° y en consecuencia, en una figura formada por dos de ellos será el doble.

Tanto en esta consigna, como en las de las actividades 3 y 4, se les solicita a los estudiantes como parte de su argumentación que “presenten un ejemplo de los casos posibles y explica, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar”; esperamos con este pedido que los estudiantes argumenten cuál es el motivo por el cual no presentan ejemplos, si es que no lograron construir/dibujar el cuadrilátero empíricamente o si es que no se presenta por tener otros argumentos para afirmar que no es posible construirlo. Por ejemplo, en la actividad 2, una vez establecida la propiedad de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero, los estudiantes podrán afirmar que no es posible construir un cuadrilátero con cuatro ángulos obtusos, pues la suma de los mismos será superior a 360° .

Si bien esta actividad promueve que se analice la cantidad de ángulos interiores de cada tipo -agudos, rectos y obtusos- que puede tener un cuadrilátero, cada grupo podrá optar por considerar solo un tipo de ángulo para organizar los casos obtenidos y explicitar a su vez con cuántos ángulos de otros tipos es posible combinarlos.

En caso en que decidan agrupar los cuadriláteros analizando la cantidad exacta de ángulos obtusos, una posible organización de la información, es la siguiente:

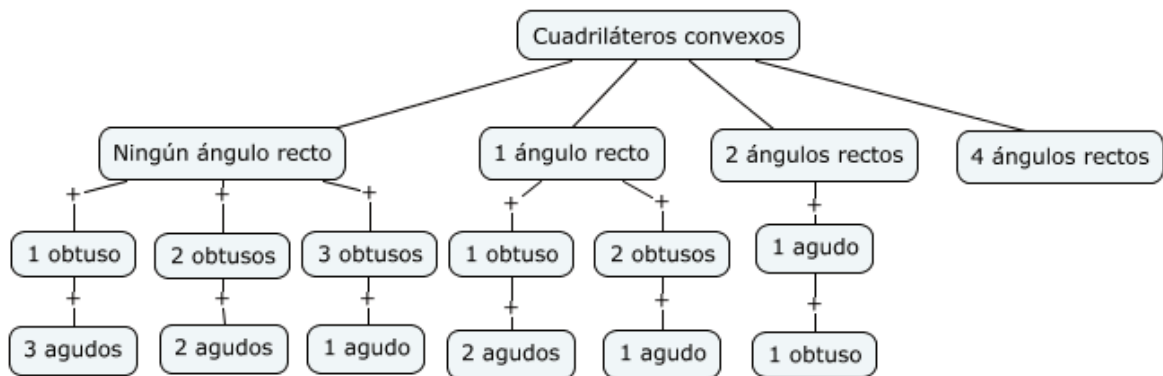
- Cantidad exacta de ángulos obtusos, rectos y agudos que pueden tener los cuadriláteros:



Al analizar con qué ángulos se pueden combinar los ángulos obtusos, esperamos que los estudiantes establezcan que no existe un cuadrilátero con 4 ángulos obtusos, pues la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores superaría los 360° . Así como también que, si un cuadrilátero no tiene ningún ángulo obtuso, todos sus ángulos deberán ser necesariamente de 90° , pues si hubiera un ángulo agudo, la suma total sería inferior a 360° .

Si los estudiantes hacen foco en la cantidad exacta de ángulos rectos que puede tener un cuadrilátero y con cuántos ángulos agudos y obtusos es posible combinarlos, una organización de los mismos en forma de diagrama puede ser la siguiente:

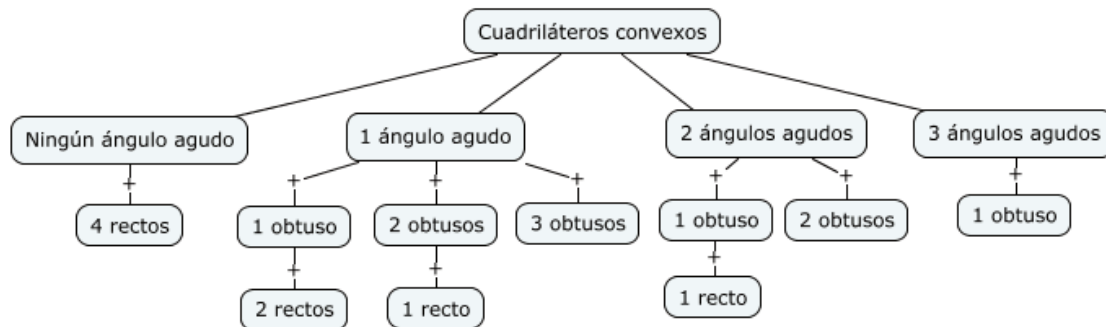
- Cantidad exacta de ángulos rectos, obtusos y agudos que pueden tener los cuadriláteros:



Al explorar las posibles combinaciones de ángulos rectos, esperamos que los estudiantes establezcan que si un cuadrilátero posee 3 ángulos rectos, el cuarto debe ser necesariamente recto, apoyándose en la propiedad de la suma de los ángulos interiores formulada anteriormente.

La última posibilidad que anticipamos, es que los estudiantes hagan foco en la cantidad exacta de ángulos agudos que puede tener un cuadrilátero y con cuántos ángulos rectos y obtusos es posible combinarlos, una posible organización puede ser la siguiente:

- Cantidad exacta de ángulos agudos, obtusos y rectos que pueden tener los cuadriláteros:



Al explorar las posibles combinaciones de ángulos agudos con ángulos obtusos y rectos, los estudiantes podrán establecer que un cuadrilátero no puede poseer 4 ángulos agudos, ya que la suma de las amplitudes de todos sus ángulos sería menor a 360° . Es posible que los estudiantes generen la categoría de 4 ángulos agudos y que posteriormente afirmen que la misma es vacía. Como el diagrama organiza casos que son posibles, esta categoría deberá ser retirada del mismo, en caso contrario, genera una contradicción en la lógica de la organización.

Esta manera de analizar los cuadriláteros no exige tener en cuenta las formas ni los nombres de cuadriláteros y a su vez, contempla todas las posibles combinaciones de ángulos que pueden tener los cuadriláteros. Por lo cual, consideramos que es un trabajo muy interesante para que realicen futuros docentes.

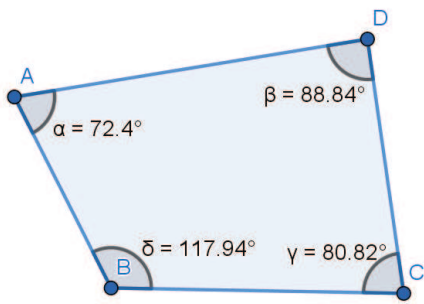
Otra manera de resolución de esta actividad, aunque posiblemente menos exhaustiva que la anterior, consiste en que los estudiantes exploren diferentes cuadriláteros utilizando Geogebra. Es posible que los estudiantes comiencen la exploración construyendo los cuadriláteros que ya conocen o que han podido conocer en las actividades anteriores, si bien este modo de proceder es correcto, puede limitarlos a trabajar con figuras con formas específicas o con figuras cuyos nombres conocen, obstaculizando el análisis de nuevos cuadriláteros con formas no consideradas, por ejemplo, en la actividad anterior.

Si en los grupos no surge la exploración de cuadriláteros que posean ciertos tipos de ángulos, el docente intervendrá invitando a que exploren si existe una figura con esas características en primer lugar, a partir de su construcción y posteriormente avanzar hacia otro tipo de argumentos que permitan validar la existencia o inexistencia de la misma.

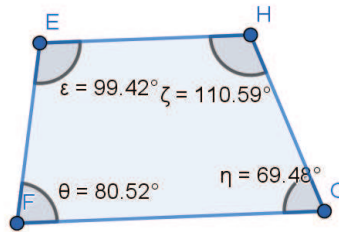
Es posible también que en este caso los estudiantes no hagan énfasis en los nombres de los cuadriláteros, sino que solo tengan en cuenta la forma de cada uno de ellos.

Mediante la herramienta de medición de ángulos, los alumnos podrían realizar un análisis como el siguiente:

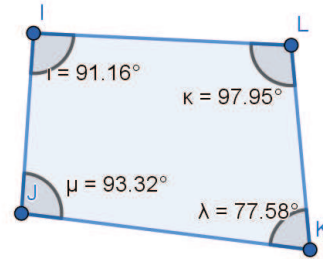
- Cuadriláteros con ángulos obtusos y agudos:



1 ángulo obtuso
3 ángulos agudos

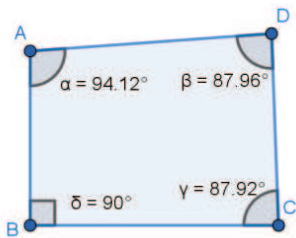


2 ángulos obtusos
2 ángulos agudos

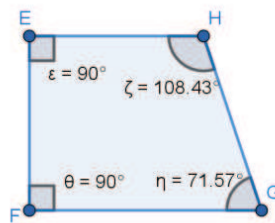


3 ángulos obtusos
1 ángulo agudo

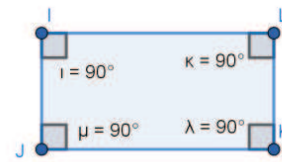
- Cuadriláteros con ángulos rectos:



1 ángulo recto
2 ángulos agudos
1 ángulo obtuso



2 ángulos rectos
1 ángulo agudo
1 ángulo obtuso



4 ángulos rectos

Una posibilidad de organización de la información obtenida a partir del análisis con Geogebra, es un cuadro o diagrama que contenga representantes de figuras, como el siguiente:

	1	2	3	4
Ángulos obtusos en un cuadrilátero				X
Ángulos rectos en un cuadrilátero			X	
Ángulos agudos en un cuadrilátero				X

Cuadro extraído de Calvo et al. (2001)

Nos resulta interesante mencionar que esta actividad da lugar a que los estudiantes reconozcan que hay figuras que tienen las mismas características en cuanto a la cantidad de ángulos de cada tipo que

poseen, pero no son iguales. Esto puede dar lugar a que se comiencen a realizar ciertas comparaciones entre figuras que en la actividad anterior no se realizaron. Por ejemplo, tanto el rectángulo no cuadrado como el cuadrado tienen cuatro ángulos rectos; sin embargo, al mirar una característica más como la longitud de sus lados, es posible afirmar que son cuadriláteros distintos. Otro ejemplo de lo mencionado son un trapecio isósceles y un rombo, ambos pueden tener 2 ángulos obtusos y dos agudos, sin embargo, uno tiene solo un par de lados opuestos paralelos y el otro tiene dos pares.

El docente podrá realizar preguntas que tengan como intención visibilizar tales diferencias como ser: ¿existe una única figura que posee los cuatro ángulos rectos?, en el caso en que haya más de una ¿son iguales? ¿en qué se diferencian? Estas preguntas también habilitarán a analizar, por ejemplo, que dos rectángulos distintos, son figuras distintas pero representantes de una misma "clase" de cuadriláteros. Consideramos que realizar este tipo de comparaciones contribuye a que los estudiantes amplíen la imagen conceptual (Vinner, 1991) que están construyendo de cada uno de los cuadriláteros que se estudian, así como favorece también el análisis de dibujos en posiciones y proporciones no estereotipadas, ya que el docente podrá proponer para comparar dos rectángulos como por ejemplo:



El docente sugerirá a cada grupo si fuera necesario, que organicen la exploración y el registro para abarcar más posibilidades sin repetir, por ejemplo describiendo qué cuadriláteros encontraron con un ángulo agudo, obtuso o recto, con dos, con tres o con ninguno.

Segundo momento:

Luego de que cada grupo haya logrado analizar diversos casos, se propondrá un momento de intercambio colectivo. Los objetivos de este momento son, por un lado, que los estudiantes compartan las justificaciones de por qué hay o no cuadriláteros con cierta cantidad de ángulos de cada tipo, y por otro lado dar un punto de partida para organizar la información encontrada en los grupos. Para ello, el docente podrá abrir el debate preguntando por ejemplo: ¿qué cuadriláteros encontraron con un ángulo agudo?

Puede suceder que los estudiantes no analicen cuadriláteros que tengan todos sus ángulos iguales, o que no posean ángulos del tipo que se estén considerando -agudos, rectos u obtusos-, ante esto el docente podrá intervenir con preguntas como: ¿es posible que un cuadrilátero no posea ángulos obtusos? ¿existen cuadriláteros que posean todos sus ángulos obtusos/rectos/agudos? ¿Cómo pueden asegurarlo?

El pedido de justificación tiene como intención, en esta instancia, que los alumnos comparen distintos argumentos, corroborando lo elaborado o completando a partir del aporte de los pares sus propias producciones.

Tercer momento:

Luego del primer intercambio colectivo, retomaremos el trabajo en grupo con la segunda parte de la consigna:

Elabora un cuadro/diagrama que te permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que estuvimos considerando.

El docente solicitará a cada grupo que plasmen el cuadro o diagrama que realicen en un afiche para compartir posteriormente en otro momento de intercambio.

En el caso en que fuera necesario, el docente podrá acompañar el trabajo de los alumnos preguntando:

- ¿Cómo es posible agrupar los cuadriláteros teniendo en cuenta lo analizado en los dos primeros momentos de trabajo?
- ¿Qué características seleccionarían para agrupar los cuadriláteros que analizaron?
- ¿Es posible organizar la información obtenida en un diagrama de modo que abarque todas las posibilidades sin repetir?

Estas preguntas tienen como propósito acompañar a los grupos a que seleccionen una característica que permita agrupar los cuadriláteros estudiados. De acuerdo a lo analizado, estas características pueden ser la cantidad de ángulos obtusos, agudos o rectos que poseen.

La tercera pregunta apunta a que, si un grupo realizó una exploración de casos sin ningún tipo de orden, logre en este momento sistematizar los resultados ordenándolos y abarcando de esta manera la mayor cantidad de casos posibles.

Se evitará también por el momento denominar a las organizaciones como “clasificaciones”, con el propósito de no limitar la selección de propiedades para organizarlos y no promover la asociación directa con saberes previos acerca de la clasificación de figuras.

Cuarto momento:

A modo de cierre se propondrá realizar otro momento de intercambio colectivo, con el propósito de que cada grupo comparta la organización que realizó de los cuadriláteros con los que trabajó y que analice la producción de los otros.

A partir del intercambio con sus compañeros cada grupo tendrá la posibilidad de reflexionar acerca de su trabajo comparándolo con el de sus pares, ampliar categorías que tal vez no hayan sido consideradas, complementar el de sus compañeros o corroborar lo realizado.

Será importante dar lugar en este último momento, a que cada grupo exprese si modificó alguna característica de su diagrama a partir del aporte de sus compañeros.

Tal como describimos en la actividad anterior, no es nuestra intención valorar como correctas o incorrectas las producciones que realicen, sino que nos interesa arribar a la conclusión que todas las organizaciones, en caso de que haya distintas, pueden ser correctas y válidas, es decir, que no hay una única forma ni criterio para organizar las figuras. Se resaltarán que en este caso se pueden seleccionar, de forma indistinta como criterio de agrupación tanto la cantidad de ángulos agudos como de ángulos rectos u obtusos que tienen los cuadriláteros.

El docente hará hincapié en la necesidad de analizar minuciosamente, considerando todos los casos analizados en este último momento, la organización propuesta con la intención de descartar posibles errores u omisiones y completar todas las categorías con los cuadriláteros que se lograron formar.

5.3.3. Tercera clase

En esta clase se trabajará con la actividad 3: “Cuadriláteros y diagonales”, que plantea como tarea la construcción de cuadriláteros en Geogebra a partir de dos datos: dos segmentos de distinta longitud que representan las diagonales del mismo.

Esta actividad busca que los estudiantes analicen qué cuadriláteros convexos es posible construir con los datos dados, si es posible construir todos los que conocen y posteriormente que los agrupen según las distintas relaciones que puede haber entre sus dos diagonales: la posición relativa y la ubicación del punto de intersección de ambas.

Asimismo, otro objetivo que persigue es que los estudiantes reconozcan que, con dos diagonales distintas, no es posible construir trapecios isósceles, cuadrados, rectángulos ni algunos trapecoides. Esperamos que las validaciones se basen, en todos los casos, en la posibilidad o imposibilidad de construirlos, así como también en propiedades ya conocidas de las diagonales de los cuadriláteros.

Por otro lado, esta actividad también promueve que los estudiantes consideren más de una característica a la vez al momento de agruparlos: posición relativa de las diagonales y lugar de intersección de ambas.

Primer momento:

En este primer momento, el docente repartirá la consigna de la primera parte de la actividad a cada grupo y se leerán en conjunto, para evacuar cualquier tipo de dudas que pueda surgir.

Consigna:



Utilizando geogebra, explora las siguientes situaciones:

Dados dos segmentos de distinta longitud, construir, si es posible, un cuadrilátero que los tenga por diagonales.

¿Qué cuadriláteros convexos se pueden construir? Presenta un ejemplo de los casos posibles y explica, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

Como consideraciones iniciales, el docente solicitará a cada grupo que registre los casos que encuentran, así como también que justifiquen qué tipo de cuadrilátero es. Dado que el trabajo en esta actividad se plantea con Geogebra, para contar con un registro de sus producciones, se les solicitará que en lo posible realicen capturas de pantalla de cada una de las posibilidades que encuentren.

En esta consigna el uso de Geogebra ya no se presenta opcional, sino que es parte de las indicaciones y condiciones que enuncia la consigna. Su uso posibilitará que los estudiantes analicen gran cantidad de cuadriláteros, ya que a partir de una construcción y del arrastre de los elementos del cuadrilátero, como ser los vértices que a su vez son extremos de las diagonales, generarán distintos cuadriláteros. Esto nos resulta muy positivo, pues es posible que de esta manera construyan cuadriláteros que no conocen o cuyos nombres no recuerden y que no hayan sido considerados en las actividades anteriores por estas razones, como por ejemplo algunos tipos de trapecios o trapecoides.

Una primera conjetura que esperamos que los grupos de estudiantes formulen es la siguiente: “se pueden construir infinitos cuadriláteros que tengan dichos segmentos como diagonales, la forma de

cada uno de ellos dependerá de la posición relativa de los mismos". Para validarla, tal como hemos mencionado anteriormente, se podrán apoyar en la posibilidad de construirlos.

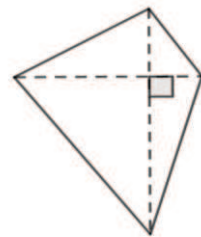
A continuación, describimos cuadriláteros que los estudiantes podrán determinar, de los cuales es posible también analizar tanto la posición relativa de sus diagonales, como otras características como ser el paralelismo de lados y la igualdad de lados, características que ya han sido analizadas en actividades previas. Para poder analizarlas, podrán valerse de herramientas de Geogebra, como ser la medición de las longitudes de los lados y la amplitud de ángulos y la comparación de objetos, para determinar el paralelismo.

Diagonales perpendiculares y ninguna interseca en el punto medio a la otra:

TRAPEZOIDE

El cuadrilátero:

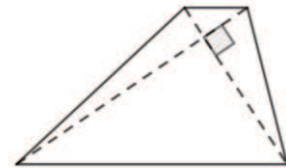
- No tiene lados paralelos.
- No tiene lados iguales consecutivos.



TRAPECIO (NO ISÓSCELES)

El cuadrilátero:

- Tiene solo un par de lados paralelos.

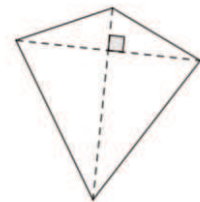


Diagonales perpendiculares y solo una de ellas interseca a la otra en su punto medio:

ROMBOIDE

El cuadrilátero:

- No tiene lados paralelos.
- Tiene dos pares de lados consecutivos iguales.

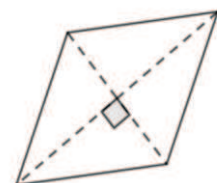


Diagonales perpendiculares y se intersecan mutuamente en el punto medio:

ROMBO (NO CUADRADO)

El cuadrilátero:

- Tiene dos pares de lados opuestos paralelos.
- Tiene cuatro lados iguales.

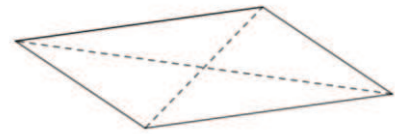


Diagonales no perpendiculares y se intersecan mutuamente en el punto medio

PARALELOGRAMO PROPIAMENTE DICHO

El cuadrilátero:

- Tiene dos pares de lados opuestos paralelos.
- Los lados paralelos son iguales.

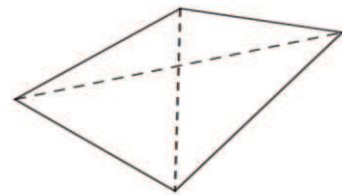


Diagonales no perpendiculares y solo una de ellas interseca en el punto medio a la otra

TRAPEZOIDE

El cuadrilátero:

- No tiene lados paralelos.
- No posee lados iguales.



Diagonales no perpendiculares y ninguna interseca a la otra en el punto medio

TRAPECIO NO ISÓSCELES

El cuadrilátero:

- Tiene solo un par de lados opuestos paralelos.
- No posee lados paralelos iguales.
- Puede poseer lados consecutivos iguales.



TRAPEZOIDE

El cuadrilátero:

- No tiene lados paralelos.
- Puede tener lados consecutivos iguales (figura 2).

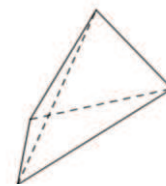


Figura 1

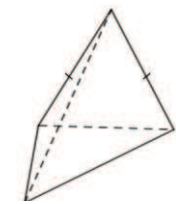


Figura 2

Cuadriláteros que no pueden construirse

Esperamos que los alumnos formulen que con las condiciones dadas del problema no es posible construir trapecios isósceles, cuadrados, rectángulos y algunos trapecoides, ya que éstos poseen las diagonales de igual longitud. En caso de que hayan surgido en las discusiones, el docente les sugerirá que los registren igual, para tenerlos en cuenta posteriormente o para una posible organización. A su vez, si en los grupos no se consideran algunos tipos de cuadriláteros, como por ejemplo aquellos que tienen diagonales no perpendiculares y ninguna interseca a la otra en su punto medio, o solo una interseca a la otra en su punto medio o en los que ambas se intersecan en su punto medio, el docente

podrá intervenir para guiar la búsqueda, realizando preguntas como: ¿qué cuadriláteros pueden encontrar si el punto de intersección de las diagonales no es el punto medio? ¿Qué cuadriláteros pueden encontrar si se modifica el ángulo que determinan las diagonales?

Por otro lado, es importante mencionar que, si bien realizamos la descripción anterior colocando los nombres de cada cuadrilátero, es muy posible que algunos grupos no se centren en ellos, sino que solamente registren por ejemplo el cuadrilátero que lograron construir, y no necesariamente otras características tal como lo detallamos.

En caso de ser necesario, el docente podrá sugerir, que organicen la exploración y el registro para abarcar más posibilidades sin repetir, considerando por ejemplo solo la posición de las diagonales o la ubicación del punto de intersección como principal característica y luego la otra como secundaria.

Segundo momento:

Luego de que cada grupo tenga avanzada la exploración, se propondrá un momento de intercambio colectivo que el docente mediará a partir de la siguiente pregunta: ¿qué cuadriláteros convexos pudieron construir?

Considerando las respuestas de los estudiantes, el docente podrá anotar en el pizarrón las características que van apareciendo, como ser la posición relativa de las diagonales y el lugar de intersección de las diagonales.

A continuación, el docente cuestionará: ¿hay cuadriláteros que no pudieron construir? y luego de que haya un intercambio se procederá a preguntar acerca de las razones por las cuales no pudieron construirlos.

En estos casos, si bien los estudiantes disponen de los saberes necesarios para elaborarlas²³, no haremos hincapié en la demostración formal de la igualdad de las diagonales de los cuadriláteros que mencionen, sino que aceptaremos como válida la información obtenida empíricamente a través de las construcciones en Geogebra; pues las formas de validar no son el centro de nuestro estudio y dado que posteriormente se abordan estas cuestiones en el programa de la cátedra.

Las preguntas se realizarán en ese orden, con la intencionalidad de organizar la información que han encontrado en los grupos y la puesta en común.

Este momento de intercambio, tiene como propósito que cada grupo compare y complete, en caso de ser necesario, la información que obtuvo en el momento anterior.

Tercer momento:

Luego del primer intercambio colectivo se planteará el trabajo en la segunda parte de la consigna:

Elabora un cuadro/diagrama que te permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que estuvimos considerando.

El docente solicitará a cada grupo que plasmen el cuadro o diagrama que realicen en un afiche para compartir posteriormente en otro momento de intercambio.

En el caso en que fuera necesario, el docente podrá acompañar el trabajo de los alumnos preguntando:

²³ Es posible demostrar la igualdad de las diagonales de los cuadrados, rectángulos y de trapecios isósceles, por medio de la comparación de triángulos, tomando como hipótesis la igualdad de sus lados. Propiedad ya explorada en actividades previas.

- Teniendo en cuenta las características que aparecieron, ¿cómo armarían un diagrama que incluya todas las posibilidades?
- ¿dónde ubicarían los cuadriláteros que no han logrado construir?

Estas preguntas tienen como propósito acompañar a los grupos a que seleccionen una característica, un criterio que permita agrupar los cuadriláteros estudiados.

Es posible que los estudiantes organicen en forma de cuadro los cuadriláteros obtenidos considerando por ejemplo, tanto la posición de las diagonales así como también la ubicación del punto de intersección:

Diagonales de distinta longitud	Ambas se intersecan en su punto medio	Solo una interseca a la otra en su punto medio	Ninguna interseca a la otra en su punto medio
Perpendiculares	Rombos	Romboides	Trapezoides - Trapecios
No perpendiculares	Paralelogramos no rectángulos	Trapezoides no romboides	Trapecios - Trapezoides

Otra posibilidad será que organicen la información realizando un diagrama solo con la representación de algunos cuadriláteros que cumplan las condiciones dadas.

Destacamos que esta actividad promueve que los estudiantes consideren más de una característica a la vez para organizar las figuras, ya que en caso de solo considerar una de ellas, sería muy amplia la cantidad de figuras que habría en cada clase. No descartamos tampoco que algún grupo lo realice de ese modo, pero en este caso, el docente podrá intervenir orientando a los estudiantes para que la organización permita identificar más fácilmente a los cuadriláteros. Por ejemplo, si los estudiantes solo consideran como criterio de agrupación si las diagonales son perpendiculares o no, el docente podrá preguntar: ¿en qué se diferencian un rombo de un romboide? ¿Hay otras figuras que también cumplen con esas características? ¿Cuáles?

Dado que en el desarrollo de la actividad el docente sugerirá a los estudiantes que registren los casos de cuadriláteros que no pudieron construir, es posible que algunos grupos opten por incorporarlos en la organización, dando como por ejemplo lugar a un cuadro como el siguiente:

Diagonales de distinta longitud			
	Ambas se intersecan en su punto medio	Solo una interseca a la otra en su punto medio	Ninguna interseca a la otra en su punto medio
Perpendiculares	Rombos	Romboides	Trapezoides - Trapecios
No perpendiculares	Paralelogramos no rectángulos	Trapezoides no romboides	Trapecios - Trapezoides
Diagonales de igual longitud			
Perpendiculares	Cuadrados	Romboides	Trapecios isósceles - Trapezoides
No perpendiculares	Rectángulos	Trapezoides	Trapecios isósceles - Trapezoides

Cuarto momento:

En este último momento de la clase se propondrá realizar otro intercambio colectivo, donde cada grupo pueda compartir la organización que realizó de los cuadriláteros con los que trabajó.

A partir del intercambio con sus compañeros, cada grupo tendrá la posibilidad de reflexionar acerca de su trabajo comparándolo con el de sus pares, ampliar categorías que tal vez no hayan sido consideradas, complementar el de sus compañeros o corroborar lo realizado.

Será importante dar lugar en este último momento, a que cada grupo exprese si modificó alguna característica de su diagrama a partir del aporte de sus compañeros.

Tal como describimos en las actividades anteriores, no valoraremos como correctas o incorrectas las producciones que realicen, pero si nos interesa arribar a la conclusión que todas las organizaciones, en caso de que haya distintas, pueden ser correctas y válidas, es decir, que no hay una única forma ni criterio para organizar las figuras. Se resaltarán en este caso que se pueden seleccionar de forma indistinta como criterio de agrupación la posición relativa de las diagonales o la ubicación del punto de intersección, y luego considerar la otra para generar subcategorías.

El docente hará hincapié en la necesidad de analizar minuciosamente la organización propuesta, y descartar posibles errores u omisiones, y completar todas las categorías con los cuadriláteros que se lograron formar.

Se evitará también en esta actividad denominar a las organizaciones como “clasificaciones”, con el propósito de no limitar la selección de propiedades para organizarlos y no promover la asociación directa con saberes previos acerca de la clasificación usual de cuadriláteros.

5.3.4. Cuarta clase

Se trabajará en esta clase con la actividad 4: “Cuadriláteros y lados”, que propone como foco de estudio el análisis de los lados de los cuadriláteros. A partir de la exploración que realicen, esperamos que los estudiantes vuelvan sobre los cuadriláteros que ya conocen, focalizando ahora en otra propiedad que no ha sido considerada explícitamente en otras actividades: la cantidad de lados iguales que pueden tener.

En una segunda parte, la consigna propone a los estudiantes que completen un cuadro de doble entrada, si bien éste cumple con la función de organizar la información obtenida, promueve también que para completarlo los estudiantes analicen simultáneamente dos características previamente definidas de los cuadriláteros: cantidad de lados iguales y ángulos rectos que posee una figura; tarea y análisis que no se presentan en otra actividad de la secuencia.

Si bien la consigna en la primera parte no menciona los ángulos rectos, al ofrecer la tabla con las dos características en la segunda parte se impulsa a una nueva exploración.

Seleccionar que combinen la cantidad de lados iguales con la cantidad de ángulos rectos que poseen los cuadriláteros, habilita a que puedan darse ciertas discusiones y comparaciones entre algunos de ellos, como por ejemplo entre cuadrado y rectángulo, cuadrado y rombo.

Primer momento:

En este primer momento, el docente repartirá la consigna de la primera parte de la actividad a cada grupo y se leerán en conjunto, para evacuar cualquier tipo de dudas que pueda surgir.

Consigna

¿Cuántos lados iguales puede tener un cuadrilátero convexo? Puedes explorar posibilidades construyéndolos con Geogebra si te resulta conveniente.

Los estudiantes podrán apoyarse en sus producciones previas para analizar ahora la cantidad de lados iguales que puede tener un cuadrilátero convexo. Para favorecer esto, el docente tendrá disponibles los afiches elaborados en las clases anteriores.

Es muy posible que los estudiantes analicen cada una de las familias de los cuadriláteros que se conocen poniendo el foco ahora en la cantidad máxima de lados iguales que puede tener cada uno. Por ejemplo: la familia de los trapecios puede tener ninguno, dos o tres lados iguales. En caso de considerar una clasificación particional, afirmarán que no podrá tener cuatro, ya que en consecuencia tendría dos pares de lados paralelos, siendo de este modo un paralelogramo; caso contrario podrá tener cuatro, siendo entonces el rombo un caso especial de un trapecio.

Si los estudiantes analizan por ejemplo la familia de los rectángulos, la posibilidad de asegurar que tienen exactamente dos pares de lados iguales y diferentes entre sí, o que pueden tener cuatro lados iguales, siendo en este caso un rectángulo cuadrado, dependerá de la concepción y de las características que hayan considerado hasta el momento.

El docente acompañará a cada grupo, y si fuera necesario realizará intervenciones del estilo: “busquen en las actividades anteriores si había o no cuadriláteros que no tuvieran ningún lado igual a otro, o que solo tuvieran 2 lados iguales, o 2 pares de lados iguales pero distintos entre sí”.

Por otro lado, también es posible que los grupos no consideren los cuadriláteros que ya conocen, sino que los construyan en Geogebra y al modificar por ejemplo la longitud de los lados, vayan dando origen a la construcción de distintos cuadriláteros. Si bien esta forma de abordar el problema es interesante, pues posibilita conocer nuevos cuadriláteros y nuevas formas puede resultar un poco acotada dado que en la exploración empírica es posible que se omitan o pierdan casos para analizar, como por ejemplo si analizan cuadriláteros con solo dos lados iguales, podría suceder que hallen la familia de trapecios, pero no la de trapezoides, o viceversa.

Segundo momento:

Luego de que cada grupo tenga avanzada la primera etapa de análisis, el docente propondrá un momento de intercambio para que compartan sus primeros resultados y la forma en que organizaron la búsqueda.

El principal propósito de este momento es que los grupos intercambien cómo abordaron el análisis, dado que habrá grupos que además de apoyarse en sus producciones previas, habrán trabajado con Geogebra abarcando de este modo mayor cantidad de cuadriláteros. A partir de esto esperamos que si advierten que su búsqueda está incompleta respecto de la de sus compañeros, puedan ampliarla en un momento posterior de trabajo.

Tercer momento:

Al finalizar este breve intercambio, el docente repartirá la segunda parte de la consigna y un afiche a cada grupo, para que puedan plasmar sus producciones.

Consigna:

Completa el siguiente cuadro²⁴, que representa una posible forma de organizar la información obtenida.

	Cantidad de ángulos rectos				
<i>Cantidad de lados iguales</i>	ninguno	1	2	3	4
<i>Ninguno</i>					
<i>2 lados iguales</i>					
<i>3 lados iguales</i>					
<i>4 lados iguales</i>					
<i>2 pares de lados iguales y diferentes entre sí.</i>					

Presenta ejemplos de los casos posibles y explica, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

El docente acompañará a cada grupo mientras avanzan en la búsqueda de cuadriláteros que cumplan esas condiciones, así como también mientras completan el cuadro, y en caso de ser necesario orientando la búsqueda con preguntas que refieran a la recuperación del trabajo ya realizado, como ser: ¿trabajaron con cuadriláteros que tengan dos ángulos rectos y dos lados iguales? ¿Es posible que tenga más de dos lados iguales y solo dos ángulos rectos? ¿Y más de dos lados iguales y solo dos ángulos rectos? ¿Por qué?

Esperamos que esta consigna permita que algunos grupos de trabajos abran y amplíen la exploración de los cuadriláteros que venían realizando, dado que ahora se solicita que se consideren dos características simultáneamente, cuestión que, si bien había aparecido en algunos momentos, no era completamente necesaria en actividades anteriores.

Es posible que al explorar las figuras los estudiantes aseguren que poseen ciertas características sin validarlas, como la cantidad de lados iguales. Si esto sucede, será necesario ponerlas en cuestión, debatirlas con la clase y validarlas. Aceptaremos en este caso, validaciones empíricas a partir de las herramientas que ofrece Geogebra de comparación de objetos.

Por otro lado, podemos anticipar que el hecho de que los criterios para organizar los cuadriláteros estén dados, generará muy posiblemente poca cantidad de respuestas diferentes. El docente evaluará de acuerdo a la producción de los estudiantes, si poner o no en cuestión la forma en que se completó cada cuadro.

Si bien el cuadro no explicita si la cantidad de lados iguales y de ángulos rectos es exactamente la explicitada, es muy posible que sea considerado de esta segunda manera por los estudiantes, ya que se encuentran más familiarizados con clasificaciones de este tipo. La siguiente, es una forma posible

²⁴ El cuadro presenta una fila vacía para que, en caso en que consideren necesario, puedan agregar otra categoría de análisis de lados iguales.

de completar el cuadro, del tipo particional, teniendo en cuenta exactamente la cantidad de ángulos rectos y la cantidad de lados iguales que posee cada figura.

<i>Cantidad exacta de lados iguales</i>	Cantidad exacta de ángulos rectos				
	ninguno	1	2	3	4
<i>Ninguno</i>	Trapezio - Trapezoide	Trapezoide	Trapezio - Trapezoide		
<i>2 lados iguales</i>	Trapezio - Trapezoide	Trapezoide	Trapezio - Trapezoide		
<i>3 lados iguales</i>	Trapezio - Trapezoide	Trapezoide			
<i>4 lados iguales</i>	Rombo no cuadrado				Cuadrado
<i>2 pares de lados iguales y diferentes entre sí.</i>	Paralelogramo propiamente dicho	Romboide	Romboide		Rectángulo no cuadrado

Si bien es menos esperado, los estudiantes también podrán interpretar alguna o ambas condiciones como: “cantidad mínima de ángulos rectos” y “cantidad mínima de lados iguales”. Si fueran ambas consideradas de ese modo darían origen a una clasificación del estilo jerárquico; sin embargo, las categorías tal como están planteadas invitan a completarse más fácilmente con la cantidad exacta de lados iguales y de ángulos rectos que posee cada figura.

Cuarto momento:

Se propondrá realizar un último momento de intercambio colectivo, donde cada grupo pueda compartir el afiche con el cuadro completo.

Se espera que a partir del intercambio con sus compañeros, cada grupo reflexione acerca del trabajo realizado comparándolo con el de sus pares, amplíe categorías que tal vez no hayan sido consideradas, complemente el de sus compañeros o corrobore lo realizado.

El docente, en caso de que no surjan naturalmente, propondrá comparar figuras que estén dentro de los mismos casilleros como por ejemplo:

- En la categoría ningún ángulo recto y ningún lado igual ubicaron a los trapecios y trapezoides: ¿en qué se parecen y en qué se diferencian estas figuras?

Consideramos que este tipo de preguntas es interesante, pues si bien estas figuras en esta clasificación están agrupadas en una misma clase, también poseen características que las diferencian como ser cantidad de lados paralelos, cantidad de ángulos rectos que pueden poseer -aquí se podrá discutir nuevamente desde el punto de vista jerárquico y particional-, entre otras.

También, podrá poner en cuestión la ubicación de ciertas figuras en distintas categorías, lo que esperamos que dé lugar a hacer explícitas las características de cada cuadrilátero:

- ¿Por qué ocurre que algunos cuadriláteros como los trapecios pueden estar en varias categorías y otros como los paralelogramos propiamente dichos no?

Esperamos también que, si no surge previamente, este sea el momento en el que se pongan en discusión algunas ideas en relación a la clasificación jerárquica como ser:

- ¿Es posible que un rombo tenga los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos?
- ¿Es posible ubicar a los rectángulos en la categoría “cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales”?, o en caso en que hayan considerado las condiciones mínimas, se podrá formular de la siguiente manera: ¿es posible ubicar a los rectángulos en la categoría “un ángulo recto y cuatro lados iguales”?

Tal como hemos mencionado en otras actividades, en este momento, no se valorarán como correctas o incorrectas las concepciones que los estudiantes vayan formando. Si no que se hará hincapié en que las respuestas a las preguntas anteriores, dependerán en gran medida de cómo se consideren los cuadriláteros y de qué características se escojan para definirlos.

Se volverá a remarcar la idea de que todas las producciones, una vez pulidas, pueden ser correctas ya que no hay una única manera de organizar los cuadriláteros.

5.3.5. Quinta clase

Se trabajará en esta clase con la última actividad de la secuencia: “Definiendo cuadriláteros”, que plantea como tarea la elaboración de una definición para cada uno de los cuadriláteros, y en consecuencia una posible organización de los mismos, teniendo como insumo las organizaciones que realizaron en las actividades anteriores.

La tarea propuesta apunta al logro de un objetivo que es establecer una definición de cada uno de los cuadriláteros convexos con los cuales se trabajó, discernir en qué característica poner el foco para elaborarla y poner en evidencia que hay más de una definición posible para cada figura, dependiendo del conjunto de propiedades que se consideren necesarias y suficientes.

Primer momento:

El docente repartirá la consigna a cada grupo, y se solicitará que elaboren una definición para cada uno de los cuadriláteros con los que han trabajado. Cuando hayan establecido acuerdos, se les solicitará que plasmen las definiciones en un afiche, y en lo posible, plasmen también las clasificaciones a las que arribaron a partir de las mismas.²⁵

Consigna

Teniendo en cuenta las organizaciones realizadas en las actividades anteriores, elaboren a partir de ellas, una definición para cada uno de los cuadriláteros trabajados.

Para que cada grupo tenga disponible el conjunto de producciones que realizó hasta el momento, se colgarán todos los afiches realizados en las actividades anteriores, ordenados por grupos, en las paredes del aula.

El docente acompañará a cada grupo en la elaboración de las definiciones y si es necesario, intervendrá realizando preguntas como las siguientes: ¿Es necesario agregar alguna condición para que esta definición no incluya otras figuras? ¿Hay algún otro cuadrilátero que también cumpla estas características?

²⁵ Dado que en la consigna no solicitamos a los estudiantes que realicen una clasificación de las figuras, consideramos que en una próxima implementación esto debería ser explicitado.

Se espera que, a partir de estas preguntas analicen si las condiciones que enuncian son suficientes para definir a la figura deseada, de manera tal que no incluya cuadriláteros que no se corresponden con la misma.

Dado que la consigna menciona la necesidad de apoyarse en las actividades anteriores para la elaboración de las definiciones, es posible que los estudiantes las realicen basándose en las propiedades analizadas: paralelismo de lados, cantidad de ángulos obtusos, rectos y agudos, longitud y posición relativa de sus diagonales, cantidad de lados iguales y cantidad de ángulos rectos. Si bien estas son las propiedades en las que la secuencia hizo foco, no descartamos que puedan aparecer otras que los estudiantes decidan considerar.

A continuación, realizaremos algunas anticipaciones de definiciones que es posible que los estudiantes formulen y en consecuencia, posibles clasificaciones²⁶. Sabemos que no podremos anticipar todas las posibilidades, sin embargo, haremos hincapié en aquellas que consideramos que los estudiantes con mayor probabilidad realicen apoyándose en las producciones de las actividades previas de la secuencia, considerando las dificultades y obstáculos que genera la producción de definiciones en matemática.

Presentaremos distintas variantes: clasificaciones particionales, jerárquicas o mixtas, basadas en definiciones minimales o no minimales y a partir de considerar distintas propiedades, de forma simultánea o no.

Definiciones a partir de condiciones sobre lados y ángulos

Una posibilidad es que definan cuadriláteros teniendo en cuenta el paralelismo de sus lados y simultáneamente otra característica como pueden ser la longitud de los lados o la cantidad de ángulos de un cierto tipo, pues luego de explorar las figuras con tanta profundidad considerar solo el paralelismo será insuficiente para diferenciar cuadriláteros que posean la misma propiedad; por ejemplo, dos pares de lados paralelos. Por otro lado, es posible que los estudiantes intenten diferenciar una figura de otra, generando una clasificación con categorías disjuntas dentro de otras más generales, como ser los paralelogramos, trapecios y trapezoides. Las siguientes definiciones ejemplifican este caso, que corresponde en términos de De Villiers (1994) a una clasificación particional:

Paralelogramos: cuadriláteros que poseen dos pares de lados paralelos.

Rectángulos: paralelogramos que poseen un ángulo recto y dos pares de lados diferentes entre sí.

Rombos: paralelogramos que poseen cuatro lados iguales y ningún ángulo recto.

Cuadrados: paralelogramos que poseen cuatro lados iguales y un ángulo recto.

Paralelogramos propiamente dichos²⁷: paralelogramos que poseen pares de lados diferentes entre sí y ningún ángulo recto.

Trapecios: cuadriláteros que poseen solo un par de lados paralelos.

Trapecios rectángulos: trapecios que poseen dos ángulos rectos.

Trapecios isósceles: trapecios que poseen el par de lados no paralelos iguales.

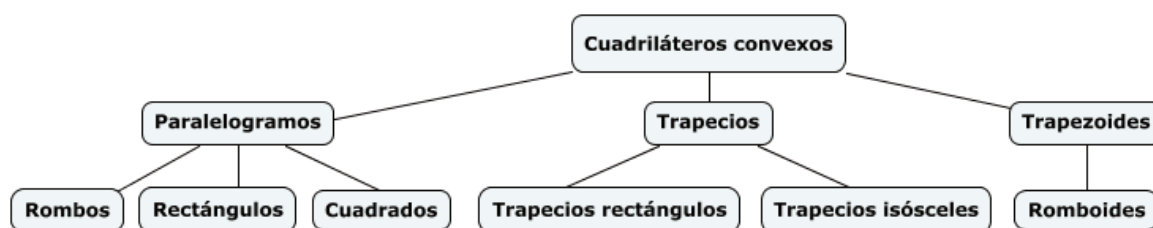
Trapezoides: cuadriláteros que no poseen lados paralelos.

Romboides: trapezoides que poseen dos pares de lados consecutivos iguales.

²⁶ En el capítulo 3, tomamos como referencia los aportes de Calvo (2001) que establecen la relación entre las definiciones y las clasificaciones.

²⁷ Es posible que esta categoría no sea incluida por los estudiantes y que los paralelogramos propiamente dichos sean los que están incluidos en la categoría más general de paralelogramos y que no cumplen ninguna de las condiciones de los rombos, rectángulos o cuadrados.

Una posible organización de la clasificación a la que dan origen las definiciones anteriores en forma de diagrama sería la siguiente:



Según Calvo (2001) y según Winicki Landman y Leikin (2000), las definiciones enunciadas se basan en el principio de minimalidad, que expresa que una definición debe ser minimalista, es decir, que no debe contener partes que pueden deducirse lógicamente de otras partes de la definición, en otros términos, que incluya las condiciones necesarias y suficientes para definir a cada una de las figuras. A continuación damos ejemplos de definiciones no minimales, que también serían posibles:

Cuadrados: paralelogramos que posee cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. En este caso no cumpliría las condiciones de minimalidad, dado que si consideramos que el cuadrado es un paralelogramo y éste tiene un ángulo recto, a partir de considerar el paralelismo de sus lados, se puede deducir que todos sus ángulos serán rectos.

Otro ejemplo de esto es que definan a los *rectángulos como cuadriláteros que posee cuatro ángulos iguales y dos pares de lados opuestos entre sí.* La cantidad de ángulos y la aclaración de que los lados son opuestos, se deducen de la naturaleza de ser paralelogramo; sin embargo, es posible que la misma no sea considerada. Puede suceder también, que definan a los *trapezoides rectángulos como trapezoides que poseen dos ángulos consecutivos rectos, cuyos lados son un lado del trapecio y uno de los dos lados paralelos.* La información de que los ángulos deben ser consecutivos y cuáles son los lados que lo determinan, es información extra que se deduce de considerar la cantidad máxima de lados paralelos de la figura. Si se considera, como en este caso, que la figura solo tiene un par de lados paralelos, no podría ser de otra manera pues tendría los dos pares.

Otra posibilidad, es que se formulen definiciones que den origen a una clasificación del tipo mixta; es decir, se definen tres grandes categorías excluyentes: Paralelogramos, Trapezoides y Trapezoides, pero se defina de forma jerárquica dentro de cada una de ellas, por ejemplo:

*Paralelogramos*²⁸: *cuadriláteros que poseen dos pares de lados paralelos.*

Rectángulos: paralelogramos que poseen un ángulo recto.

Rombos: paralelogramos que poseen cuatro lados iguales.

Cuadrados: paralelogramos que poseen cuatro lados iguales y un ángulo recto.

Trapezoides: cuadriláteros que poseen solo un par de lados paralelos.

Trapezoides rectángulos: trapezoides que poseen dos ángulos rectos.

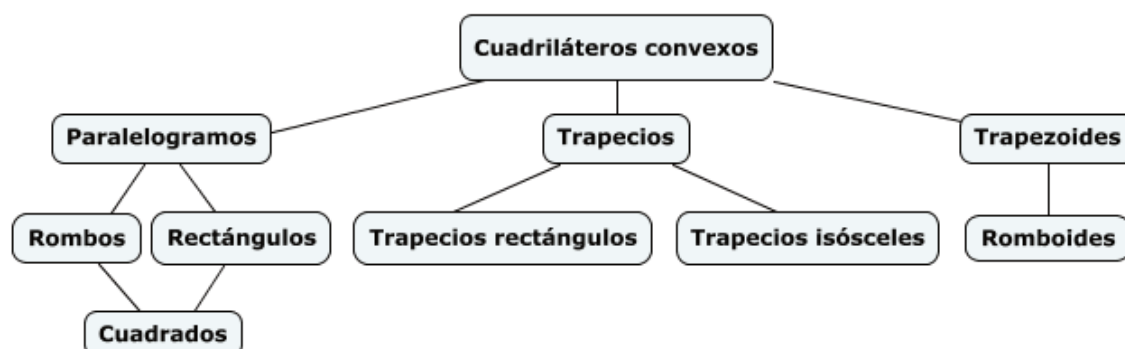
Trapezoides isósceles: trapezoides que poseen el par de lados no paralelos iguales.

Trapezoides: cuadriláteros que no poseen ningún par de lados paralelos.

²⁸ Este es el caso en el que los paralelogramos propiamente dichos, son aquellos que no cumplen las condiciones de los rombos, rectángulos y cuadrados.

Romboides: trapezoides que poseen dos pares de lados consecutivos iguales.

Una posible organización de la misma en forma de diagrama sería la siguiente:



Definiciones a partir de condiciones sobre diagonales

Otra característica de los cuadriláteros que los estudiantes podrían considerar para definirlos es la longitud y posición de sus diagonales.

- Si consideramos la organización realizada en la actividad 3, tenemos que:

Diagonales de distinta longitud	Ambas se intersecan en su punto medio	Solo una interseca a la otra en su punto medio	Ninguna interseca a la otra en su punto medio
Perpendiculares	Rombos	Romboides	Trapezoides Trapezoides
No perpendiculares	Paralelogramos propiamente dichos	Trapezoides	Trapezoides Trapezoides

- Los estudiantes podrán ampliar este análisis y considerar los cuadriláteros que poseen diagonales de igual longitud:

Diagonales de igual longitud	Ambas se intersecan en su punto medio	Solo una interseca a la otra en su punto medio	Ninguna interseca a la otra en su punto medio
Perpendiculares	Cuadrados ²⁹	Romboides	Trapezoides Trapezoides isósceles
No perpendiculares	Rectángulos	Trapezoides	Trapezoides Trapezoides isósceles

Podemos observar que tanto si las diagonales son iguales como distintas, hay trapezoides y trapezoides en más de una categoría. Esto se debe a que las características sobre las diagonales no producen las mismas categorías que el paralelismo o la igualdad de lados. Sin embargo, es posible que los estudiantes elaboren definiciones como la siguiente:

²⁹ En esta categoría podrán incluir los rombos cuadrados y los rectángulos cuadrados, en caso en que se considere que una figura puede cumplir con las condiciones de otra.

Un trapecoide es un cuadrilátero cuyas diagonales no se intersectan mutuamente en su punto medio. Ahora bien, es posible que los estudiantes combinen más de una propiedad, para poder diferenciar y especializar aún más los cuadriláteros. Por ejemplo, si seleccionan el paralelismo de lados y las características de sus diagonales, algunas definiciones posibles para los paralelogramos son:

Paralelogramos: cuadriláteros que poseen dos pares de lados paralelos y sus diagonales se intersectan mutuamente en el punto medio.

Paralelogramos propiamente dichos: paralelogramos cuyas diagonales son oblicuas no perpendiculares y de distinta longitud.

Rectángulos: paralelogramos cuyas diagonales son de igual longitud.

Rombos: paralelogramos cuyas diagonales son perpendiculares.

Cuadrados: paralelogramos cuyas diagonales son perpendiculares y de igual longitud.

Si bien, la definición de la categoría general “paralelogramo” no cumple con el criterio de minimalidad, incluir el análisis de las diagonales, les posibilitará generar una definición para cada elemento de la misma, que define en particular a un único cuadrilátero.

En el resto de las categorías considerar ambas propiedades simultáneamente permitirá a los estudiantes diferenciar solo algunos cuadriláteros, por ejemplo, definiendo los trapecios de la siguiente manera:

Trapecios: cuadriláteros que poseen solo un par de lados paralelos.

Trapecios isósceles: trapecios cuyas diagonales son de igual longitud.

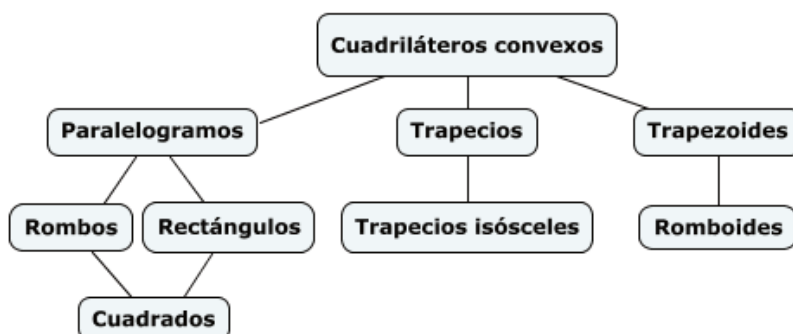
Sin embargo, no es posible establecer una condición sobre la posición de las diagonales que permita diferenciar a los trapecios rectángulos de los que no lo son, por lo que en esta clasificación no podrán establecer diferencia entre los mismos, ya que además el énfasis está puesto sobre la cantidad de pares de lados paralelos y la posición y longitud de sus diagonales.

De igual modo, es posible definir a los trapezoides de la siguiente manera:

Trapezoides: cuadriláteros que no poseen lados paralelos.

Romboides: trapezoides cuyas diagonales son perpendiculares y solo una de ellas interseca en el punto medio a la otra.

La información anterior puede ser organizada en un diagrama que la sistematice por ejemplo de la siguiente manera:



Esta clasificación, en términos de De Villiers (1994) es tanto jerárquica como particional, por lo que podríamos decir que es mixta. Es jerárquica, pues dentro de cada categoría hay cuadriláteros que son

casos particulares de otros, como ser el cuadrado del rombo, y a su vez es particional pues las tres grandes clases Paralelogramos, Trapecios y Trapezoides no tienen elementos en común.

Segundo Momento:

En este segundo momento se propondrá realizar un intercambio entre la clase completa donde cada grupo comparta el afiche con las clasificaciones y definiciones que elaboró, así como también que cuente el proceso que transitaron para llegar a las mismas.

Esperamos también en esta oportunidad que, a partir del intercambio con sus compañeros, cada grupo complemente su trabajo, modifique sus definiciones o corrobore lo realizado.

Si no surge en los estudiantes, el docente acompañará el momento de intercambio generando preguntas que propicien la comparación de las distintas definiciones que se enuncien, así como también las clasificaciones que generen. Por ejemplo, un cuadrado definido a partir de sus diagonales, a partir del paralelismo de sus lados y como caso particular del rombo o rectángulo, o como un paralelogramo rombo con cuatro ángulos rectos.

Se analizarán las condiciones mínimas que se deben enunciar en las definiciones para cada figura, así como también las suficientes. Si se formulan definiciones que generen clasificaciones del tipo jerárquicas y particionales de acuerdo a De Villiers (1994), se promoverá analizarlas y establecer las diferencias. El docente compartirá posteriormente la bibliografía necesaria para que los estudiantes dispongan de ella.

A modo de institucionalización y como cierre del trabajo de las cinco clases esperamos establecer en esta instancia, que hay más de una definición posible para cada cuadrilátero y que todas pueden ser correctas, dado que las mismas son elaboradas poniendo en relieve una u otra propiedad de los cuadriláteros.

Se hará énfasis en la importancia del proceso de exploración que realizaron, ya que les permitió caracterizar los cuadriláteros analizando distintas propiedades que poseen, y principalmente en que las definiciones en nuestro trabajo fueron el producto final de este proceso y no el punto de partida.

5.4. Algunas reflexiones finales

Podemos observar que si bien en las definiciones que esperamos que realicen los estudiantes al finalizar la implementación de la secuencia predominan aquellas que enfatizan en el paralelismo de los lados, el trabajo a lo largo de las actividades que conforman la secuencia permite que los estudiantes exploren y analicen cada uno de los cuadriláteros convexos, que los agrupen de acuerdo a diversas propiedades y que finalmente decidan cuáles de las organizaciones desarrolladas consideran más adecuadas en cuanto a la posibilidad que ofrecen de organizar y reconocer los cuadriláteros de acuerdo a características comunes.

El trabajo con la secuencia, pone el foco en el proceso reflexivo de construcción de definiciones, de la selección de las propiedades que posibilitan una organización de los cuadriláteros y en consecuencia su definición, o viceversa; y a su vez pondera el trabajo grupal, el intercambio entre pares, la confrontación de ideas, formulación de conjeturas y promueve la posibilidad de argumentar acerca de lo realizado.

Tal como lo hemos mencionado, nos resulta de gran valor que un futuro docente, pueda vivenciar experiencias en las cuales construya conocimientos y además que, en muchos casos, deconstruya prácticas de enseñanza correspondientes a un modelo tradicional, donde las definiciones de los conceptos son dadas y no hay posibilidad de cuestionarlas.

Capítulo 6: Análisis a posteriori

En este capítulo realizaremos un análisis de la puesta en el aula de la secuencia y de las producciones de los estudiantes en cada una de las actividades de la secuencia. Si bien decidimos considerar las producciones de todas las actividades, ya que nos permite observar el proceso completo que transitó cada grupo, haremos especial énfasis en la última actividad en la que los estudiantes se basan en lo producido en actividades previas para formular definiciones y elaborar clasificaciones de cuadriláteros. Para realizar el análisis tendremos como insumos las transcripciones de las clases, fotografías de los apuntes de los estudiantes y pizarrones, así como también los afiches finales que realizaron en cada una de las actividades³⁰.

Es nuestra intención contrastar el análisis a priori realizado con lo sucedido en la implementación, para evaluar de este modo el funcionamiento de la secuencia. Algunas preguntas que guiaron este análisis son: ¿se cumplieron los objetivos que fijamos para cada una de las actividades y para la secuencia en general?, ¿las tareas que proponen las consignas son las adecuadas?, ¿qué cambios podríamos proponer?, ¿qué cambios en la gestión de clase propondríamos para acercarnos aún más a nuestros objetivos?

Analizaremos las producciones de tres grupos -grupos 1, 2 y 3 -. Tomamos la decisión de no analizar la producción del grupo 4 debido a que no tuvo continuidad en la asistencia al total de las clases en las que se trabajó con la secuencia, sumado a que este grupo estaba compuesto por estudiantes que cursaban por segunda vez la materia, por lo cual es posible que ya contaran con saberes acerca de nuestro objeto de estudio.

6.1. Actividad 1 - “Formando cuadriláteros a partir de triángulos”

La actividad de formar cuadriláteros a partir de triángulos fue muy bien recepcionada por toda la clase, todos los grupos mostraron una actitud muy positiva y activa frente a la tarea propuesta.

En la etapa exploratoria, combinada con el primer momento de intercambio propuesto, evidenciamos que los grupos analizaron la totalidad de tipos de cuadriláteros que es posible formar con dos triángulos, tal como anticipamos en el análisis a priori.

El trabajo en grupo permitió no solo que los estudiantes exploren y analicen qué cuadriláteros se pueden formar, sino que discutan y formulen ciertas conjeturas. Por ejemplo, el grupo 1 enunció las siguientes:

- *“con el triángulo isósceles rectángulo, es con el único que se puede armar un cuadrilátero rectángulo que tiene los lados iguales”*
- *“con dos triángulos rectángulos escalenos, también se forma un cuadrilátero rectángulo, pero no tiene todos sus lados iguales, son distintos”.*

En una primera etapa los estudiantes nombraron como “cuadrilátero rectángulo” al cuadrilátero que posee todos sus ángulos rectos, y observamos que reconocían las propiedades de la figura sin necesidad de llamarla por su nombre. Trabajo que nos resultó muy importante, pues permite que los estudiantes se despeguen de los nombres para analizar las características de los cuadriláteros.

Otra cuestión que nos resulta interesante destacar es que los estudiantes asociaron el concepto de cuadrilátero con aquellos cuadriláteros que les resultaban conocidos, como por ejemplo los rombos o

³⁰ En el anexo 2, se realiza una reconstrucción de cada clase a partir de estos insumos.

los cuadrados. En la clase se evidenció un desconocimiento de la existencia de dos tipos de cuadriláteros: los cóncavos y los trapezoides, por lo que podemos afirmar que la actividad diseñada funcionó para correrlos de los cuadriláteros usuales y permitir que exploren y conozcan otros nuevos. A continuación, presentamos algunos comentarios de los estudiantes:

- Comentario realizado señalando un cuadrilátero cóncavo. (Ver imagen 1):
"Sabemos que es un cuadrilátero porque tiene cuatro lados, pero este no tiene nombre".
Afirmación que realizan los estudiantes al referirse a distintos trapezoides.:
"no, no trabajamos nunca... y no sabemos cómo se llaman".

También se destaca en algunas expresiones de los estudiantes, tales como:

- *"¿tienen que ser cuadriláteros? ¿No necesitan ser rombos o algunos de esos?"*
- *"Es como que está deformado...pero sí, es un cuadrilátero"*

Consideramos que estos hallazgos son evidencia, en términos de Vinner (1991), de que las imágenes conceptuales que los estudiantes poseen de los cuadriláteros son bastante limitadas y no permiten reconocer a todos los cuadriláteros como tales. Asocian con cuadriláteros a las figuras y formas conocidas, como cuadrado y rombo. También reconocen que un cuadrilátero posee cuatro lados, sin embargo, esto no les resulta suficiente para asegurar que figuras como las de las imágenes 1, 2 y 3 sean cuadriláteros. Así mismo, esto nos permite destacar la potencia de esta actividad, pues posibilita que los estudiantes puedan formar cuadriláteros que incluso no conocen, lo cual también está estrechamente ligado a la selección de triángulos que realizamos.



Imagen 1



Imagen 2

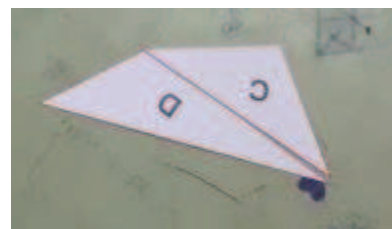


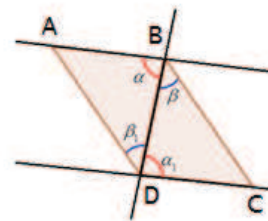
Imagen 3

En la gestión de la primera actividad, la docente solicitó que justifiquen qué tipos de cuadriláteros formaron. Si bien no se hizo especial hincapié en la argumentación, constatamos que los estudiantes validaron las características de los cuadriláteros, tal como anticipamos en el análisis a priori³¹.

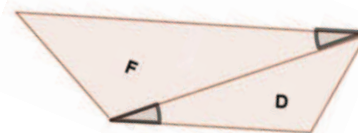
Algunos ejemplos de lo anterior son:

³¹ En el Anexo 1 encontrarán desarrollado en detalle un análisis de cuadriláteros que es posible formar, así como también diversas formas de validar.

- Demuestran que un cuadrilátero es un paralelogramo apoyándose en las relaciones entre ángulos determinados entre dos rectas paralelas y una transversal. Esto les permite demostrar que la figura tiene dos pares de lados paralelos, condición que consideran suficiente para que la misma sea un paralelogramo.



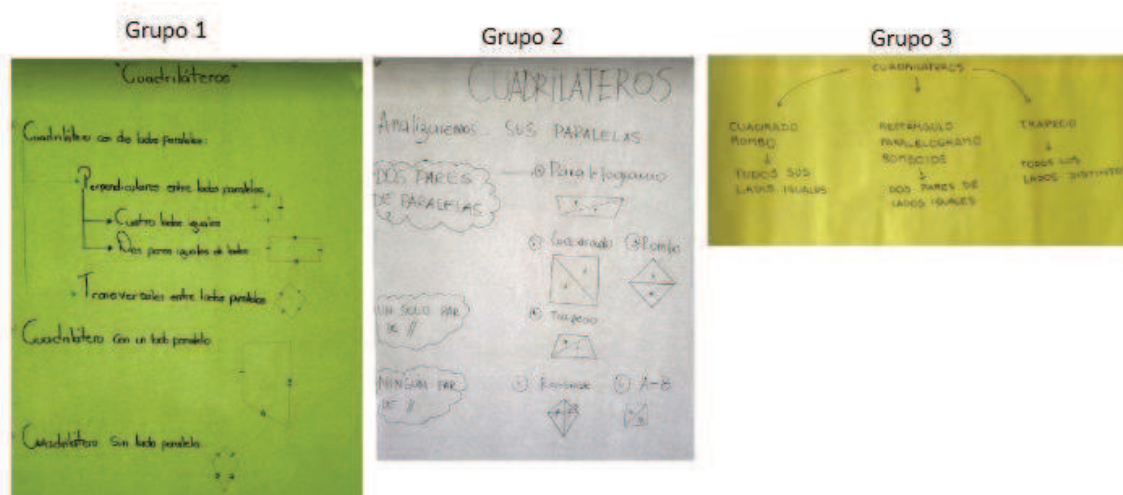
- Luego de asociar al trapecio con la característica de poseer un solo par de lados paralelos, los estudiantes argumentaron el paralelismo de los lados del trapecio comparando los ángulos que conocen de los triángulos y, como solo es posible establecer la congruencia de un par de alternos internos, dados como dato, concluyen que solo tiene un par de lados paralelos.



- En el caso del trapecoide, la justificación de que no posee lados paralelos fue empírica, es decir al no poder probar la igualdad de ángulos a partir de los datos dados en la consigna, se basaron en la representación para poder afirmarlo.

Por otro lado, tal como era nuestra intención, en un primer momento de trabajo observamos que el grupo 2 identificó qué propiedades debían tener los triángulos que iban seleccionando para que los cuadriláteros que formaran con ellos tuvieran características específicas. Esto evidenció que los estudiantes se apoyaron en conceptos y relaciones que tenían disponibles, en este caso las propiedades de los triángulos, para poder formular nuevos.

Nos interesa detenernos y analizar las producciones finales de cada uno de los grupos en relación con la tarea de elaborar un cuadro/diagrama que permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente en base a características que cada grupo eligió. Recuperamos para esto los afiches que cada grupo confeccionó (imágenes 8, 9 y 10):



En cuanto a los criterios con los que organizaron los cuadriláteros observamos que, tanto el grupo 1 como el 2, seleccionaron como criterio principal el paralelismo de los lados y el grupo 3, la igualdad de los lados.

Si bien no es explícito, los estudiantes del grupo 1 en las categorías que generaron se refirieron a cuadriláteros con *dos pares* de lados paralelos, *un par* de lados paralelos y *ningún par* de lados paralelos.

En la explicación de su organización manifiestan que en la primera categoría tuvieron en cuenta: “cuadriláteros que tienen lados perpendiculares, y los otros dos, paralelos a los anteriores, también son perpendiculares: es decir, que tienen todos sus ángulos rectos” y también consideraron “cuadriláteros en los que los lados son transversales”, refiriéndose a lados que no son perpendiculares, apoyándose en la idea de ángulos formados entre rectas paralelas y una transversal, que no es perpendicular a las anteriores. A su vez, al realizar una síntesis oral de su agrupación, los estudiantes expresaron haber tenido en cuenta la cantidad de lados paralelos y los lados iguales. Sin embargo, omitieron mencionar que también tuvieron en cuenta la perpendicularidad de sus lados, es decir la cantidad de ángulos rectos que poseen.

Al analizar las expresiones utilizadas por los estudiantes observamos que las categorías y subcategorías que consideraron son:

- Dos pares de lados paralelos con dos subcategorías disjuntas, una de ellas: todos los ángulos rectos, donde se distinguen el cuadrado con todos sus lados iguales y el rectángulo con dos pares de lados iguales distintos entre sí, y la otra: ningún ángulo recto y cuatro lados iguales, donde ubican al rombo.
- Un solo par de lados paralelos, sin subcategorías, donde ubican a un trapecio con tres lados desiguales, sin hacer referencia al cuarto.
- Ningún par de lados paralelos, sin subcategorías, donde ubican al romboide, cuyas marcas en los lados permiten afirmar que posee dos pares de lados consecutivos iguales y diferentes entre sí.

Observamos que, en esta forma de organización los estudiantes no reconocieron ni incluyen a los paralelogramos propiamente dichos, aun habiéndolos analizado en la etapa exploratoria. Tampoco hicieron mención a los distintos tipos de trapecios y tampoco reconocieron o mencionaron la existencia de cuadriláteros sin lados iguales -llamados convencionalmente trapezoides-. Esto nos da indicios de que los estudiantes reconocieron solo los cuadriláteros que ya conocían o que les resultaban más familiares, primando esto sobre lo nuevo que habían encontrado. Cabe aclarar que en esta etapa no esperábamos que los estudiantes reconocieran al trapecio rectángulo, dado que no es una figura que pueda obtenerse a partir de la combinación de dos de los triángulos ofrecidos.

Para realizar la organización, el grupo 2 consideró solamente el paralelismo de los lados. Plasmaron en el afiche que analizaron “sus paralelas” y podemos determinar que las tres categorías que definieron son: “dos pares de paralelas”, “un solo par de paralelas” y “ningún par de paralelas”. Dentro de cada una de ellas ubicaron los siguientes cuadriláteros:

- Dos pares de paralelas: paralelogramo propiamente dicho, cuadrado y rombo.
- Un solo par de paralelas: trapecio
- Ningún par de paralelas: romboide y trapezoide.

Algunas observaciones que realizamos en relación a la primera categoría es que no incluyeron al rectángulo y, si bien reconocieron la omisión, luego del momento de intercambio final no modificaron su afiche. Por otro lado, la representación que realizaron de un paralelogramo corresponde a un trapecio, aunque la forma de obtenerlo (a partir de dos triángulos F) indica que en verdad es un

rectángulo. Y la más interesante, es que diferencian las figuras cuadrado y rombo; sin embargo, utilizan la misma representación para ambas en distintas posiciones. En ambos casos la figura está formada por dos “triángulos A” que dan origen a un cuadrado. En este caso, el uso de figuras estereotipadas en la enseñanza de la geometría ha dejado su huella, dado que este grupo no advierte que la figura que representan es la misma, excepto por la posición en la que es dibujada³².

En relación con la segunda categoría, observamos que no hacen distinciones entre los distintos tipos de trapecios, solo representan uno que es no isósceles.

Y, por último, en relación con la tercera categoría, los estudiantes diferencian dos tipos de trapezoides: los romboides y otro tipo formado por los triángulos A y B (ver imagen 2), al que no colocan nombre. Resaltamos aquí nuevamente la posibilidad que brindó la actividad de analizar cuadriláteros sin hacer foco en sus nombres, sino en las características que los definen, que en este caso sería no poseer ningún par de lados paralelos.

El grupo 3, a diferencia de los otros dos, agrupó los cuadriláteros considerando solamente como característica la igualdad de los lados. Para esto generaron tres categorías que son: “todos sus lados iguales”, “dos pares de lados iguales” y “todos los lados distintos”. En cada una de ellas ubicaron los siguientes cuadriláteros:

- Todos sus lados iguales: cuadrado y rombo.
- Dos pares de lados iguales: rectángulo, paralelogramo PD y romboide.
- Todos sus lados distintos: trapecio

En esta organización no es posible ubicar trapecios y trapezoides que tengan un par de lados iguales, o tres lados iguales. Tampoco brindan información de las características que diferencian a cada cuadrilátero dentro de cada categoría, por lo cual no podemos analizar si están considerando la posibilidad de que un cuadrilátero cumpla con las condiciones de otro simultáneamente, generando de esta manera subcategorías con elementos en común.

Luego de que cada grupo compartió su producción, se compararon las tres clasificaciones. El grupo 3 expresó que los criterios que habían seleccionado no les resultaron "buenos", pues no les permitieron abarcar tantas opciones e incluir distintos cuadriláteros como a sus compañeros.

A modo de síntesis podemos mencionar que, tal como esperábamos, esta actividad posibilitó que los estudiantes conocieran y reconocieran figuras como cuadriláteros. La mayoría de ellos consideró principalmente el paralelismo de sus lados, complementando la caracterización con la cantidad de lados iguales y la cantidad de ángulos rectos. Es muy posible que las experiencias de aprendizaje que los estudiantes han vivenciado en relación al aprendizaje de los cuadriláteros, los condicionen a relacionar fuertemente a los cuadriláteros con la cantidad de lados paralelos que poseen. Esto pone de manifiesto el tratamiento limitado de los cuadriláteros que se realiza en la escuela secundaria. En términos de Vinner (1991), los estudiantes, al evocar la imagen conceptual que poseen de cuadriláteros, la asocian a un conjunto de impresiones o experiencias ligadas a éstos.

En relación con los objetivos que nos planteamos para esta primera actividad, podemos afirmar que se cumplieron, ya que posibilitó que los estudiantes movilicen saberes que tienen disponibles de los

³² Dificultades que ya hemos descrito en el capítulo 3.

cuadriláteros y que identifiquen y establezcan algunas características como por ejemplo, el paralelismo de lados, la igualdad de lados y los tipos de ángulos que poseen, apoyándose en las propiedades ya conocidas de los triángulos. Así como también posibilitó que clasifiquen cuadriláteros según distintos criterios.

6.2. Actividad 2 - “Cuadriláteros y ángulos”

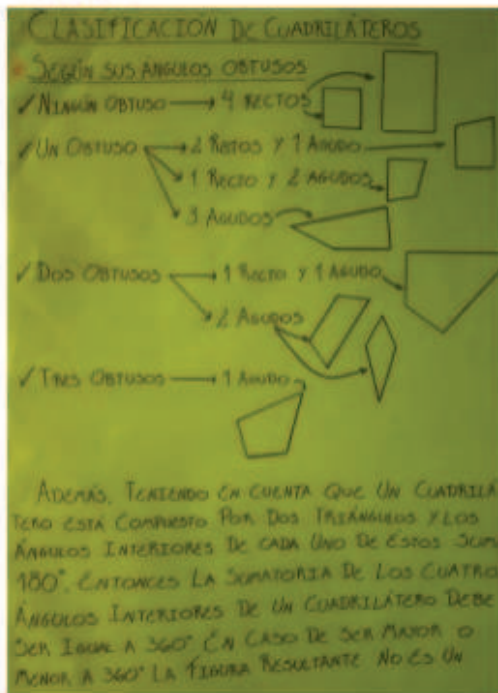
Al comenzar el trabajo con la tarea de proponer cuadriláteros con distintos tipos de ángulos, observamos que el grupo 1 analizó en primer lugar la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, para luego apoyarse en esa propiedad. Este grupo se basó en la actividad anterior y tal como anticipamos en nuestro análisis, establecieron que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° , argumentando que éstos están compuestos por dos triángulos en los que dicha suma es 180° en cada uno, propiedad ya demostrada previamente en el año.

El grupo 3 realizó un análisis muy minucioso y exhaustivo de combinaciones de ángulos, y en su descripción expresó que, por ejemplo, no es posible formar cuadriláteros con tres ángulos rectos, ya que si no, el cuarto debería también ser recto. Los estudiantes realizaron esta afirmación apoyándose primero en la posibilidad de construirlo y luego recuperaron que en la clase anterior un compañero había hecho un comentario acerca de la suma de los ángulos, por lo que sabían que la suma de las amplitudes de todos los ángulos interiores debía ser 360° , y este hecho comprobaba lo que ellos empíricamente pudieron observar.

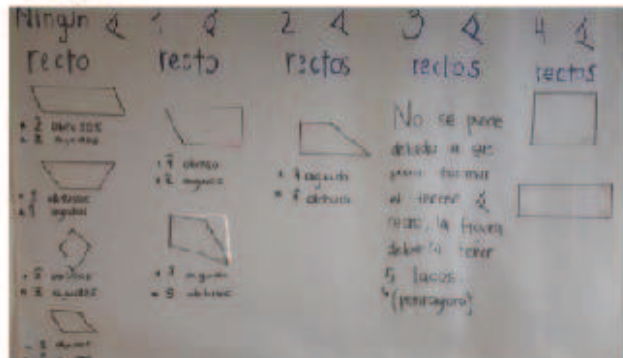
El grupo 2 no hace referencia a esta deducción, y tampoco se evidencia en sus producciones que tenga en cuenta la propiedad, sino que trabajan solamente a partir de representaciones de figuras. Lo que ocurrió nos permite afirmar que hubo decisiones que tomamos en el diseño de la secuencia, que tuvieron el efecto buscado. Una de ellas es que los estudiantes pudieran apoyarse en saberes que tienen disponibles para construir otros. En este caso, trabajar a partir de triángulos fue una decisión acertada para que se pudieran apoyar en propiedades de los mismos y deducir otras de cuadriláteros. Por otro lado, el diseño de momentos de intercambio entre todos los grupos permitió que los estudiantes consideren las propiedades conjeturadas por sus pares, las validen y las tengan en cuenta para su análisis.

Nos interesa analizar las producciones finales de cada uno de los grupos en relación con la tarea de elaborar un cuadro/diagrama que permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente en base a características que cada grupo eligió. A continuación, recuperamos para esto los afiches que confeccionó cada grupo. Recuperamos para ello las imágenes 13, 14 y 15:

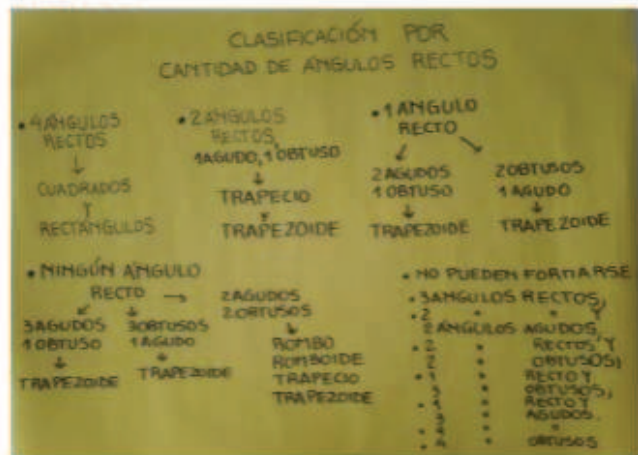
Grupo 1



Grupo 2



Grupo 3



Observamos que dos grupos optaron por agrupar los cuadriláteros de acuerdo a la cantidad de ángulos rectos que poseen y solo uno de ellos de acuerdo a la cantidad de ángulos obtusos.

Para el análisis de los cuadriláteros, el grupo 1 se apoyó tanto en la propiedad de la suma de los ángulos interiores, así como también en las construcciones que realizaron con Geogebra. Decidieron agruparlos de acuerdo a la cantidad de ángulos obtusos que poseen, posibilidad que fue considerada en nuestro análisis a priori.

Algo interesante es que, debajo del cuadro, anotaron la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, argumentando que la misma justifica todos los casos que no pueden construirse, como ser uno de ellos, los cuatro ángulos obtusos. Dada la forma en la que organizó la exploración, este grupo realizó un detalle completo y no omitió ningún caso en el que sea posible la construcción de un cuadrilátero.

Observamos en el diagrama que no mencionaron los nombres de los cuadriláteros que ubicaron en cada categoría, sino que dibujaron un representante de los cuadriláteros que poseen dichas características.

Los estudiantes expresaron:

“Geogebra nos ayudó mucho a observar algunas particularidades, por ejemplo al construir rectángulos partiendo de los ángulos rectos. Si movíamos los vértices, la figura cambiaba de forma, pero seguía teniendo todos sus ángulos rectos. Lo mismo con otras”.

Esto les permitió centrarse en los ángulos de las figuras que construyeron, sin la necesidad de recurrir a construir cuadriláteros que ya conocían.

Si bien esta forma de trabajo les permitió despegarse de los nombres de las figuras, dificultó la posibilidad de que por sí solos tengan en cuenta más de una característica de las figuras a la vez, por ejemplo, que hay figuras que tienen dos ángulos obtusos y dos agudos y que a su vez tienen todos sus lados iguales, como ser el rombo. Lo ocurrido puede atribuirse a la consigna de la tarea, y en una nueva implementación incorporar una pregunta que invite a mirar más que los ángulos para generar este tipo de reflexiones o también pensar en intervenciones del docente que apunten y orienten a los estudiantes a relacionar los tipos de ángulos que posee cada cuadrilátero con otra característica, como ser la igualdad de lados.

A pesar de este impedimento es interesante mencionar que, tal como se anticipó en el análisis a priori, hubo intervenciones que realizó el docente que permitieron establecer semejanzas y diferencias entre figuras que tienen sus ángulos iguales, como cuadrados y rectángulos, o sus lados iguales, como rombos y cuadrados.

En esta primera instancia la clase completa acordó que los cuadrados y rectángulos, si bien ambos tienen sus cuatro ángulos rectos, los cuadrados tienen sus lados iguales y los rectángulos no. En el caso de los cuadrados y rombos, si bien tienen ambos sus cuatro lados iguales, los rombos tienen dos pares de ángulos agudos y dos obtusos. Esto da indicios de que hasta el momento los estudiantes no consideran la posibilidad de que los rombos puedan tener ángulos rectos, o los rectángulos tenga sus lados iguales, pensamiento ligado a una clasificación particional.

El grupo 2 no utilizó Geogebra para explorar posibilidades. Al presentar su trabajo final y comparándolo con el de otros grupos, expresaron que notaban que no consideraron muchas opciones, por lo cual su trabajo iba a estar incompleto.

Coincidiendo con una de nuestras anticipaciones en el análisis a priori, este grupo decidió agrupar los cuadriláteros de acuerdo a la cantidad de ángulos rectos que poseen, dado que al comenzar el análisis se dieron cuenta de que había muchos cuadriláteros “conocidos” con ángulos rectos.

Tal como se observa en la imagen 14, los estudiantes no colocaron los nombres de las figuras en su organización, pero al exponer su trabajo y explicitar oralmente las relaciones establecidas, mencionaron a cada una de las figuras por su nombre convencional. Observamos en ese momento que los estudiantes nombraron a todos los trapezoides como “romboides”. Interpretamos nuevamente esta situación como una dificultad que se genera muy probablemente por la escasa presencia de trapezoides en el nivel secundario.

El hecho de que en todas las categorías hayan representado las figuras en forma aislada, sin conexiones, es un indicio de que los estudiantes no consideraron la posibilidad de que una figura cumpla con las condiciones mínimas de otra. Esto evidencia que en esta segunda actividad los estudiantes siguen focalizados en establecer diferencias entre figuras y no en establecer semejanzas. En este caso en particular, los estudiantes consideran al cuadrado y al rectángulo como figuras distintas, excluyendo la posibilidad de que un rectángulo pueda ser un cuadrado, satisfaciendo más condiciones. Al buscar semejanzas el pensamiento estaría más ligado a lo jerárquico y al buscar diferencias a lo particional.

Por otra parte, observamos que este grupo decidió incluir en su organización una categoría “tres ángulos rectos” que no contiene elementos, es decir, que es vacía. La validación que dan es completamente empírica, pues se basan en la posibilidad o no de construir el cuadrilátero con lápiz y papel.

Nos interesa mencionar dos cuestiones que se dan mientras el grupo presenta su diagrama. La primera de ellas en relación a la selección de los criterios para agrupar los cuadriláteros:

G3: Nosotras en un primer momento habíamos buscado pares de lados paralelos, pero después nos dimos cuenta que acá teníamos que hacer hincapié en los ángulos, por lo tanto empezamos de nuevo.

En esta expresión podemos observar que los mismos estudiantes reconocen el peso de la clasificación de acuerdo al paralelismo de lados; sin embargo, la secuencia cumple con sus objetivos de correrlos de ella y de brindar la posibilidad de generar distintas clasificaciones de acuerdo a distintos criterios.

La segunda cuestión es que al final de la presentación del diagrama se da una discusión en torno a las figuras rombo y cuadrado, que recuperamos a continuación.

G3: Sí, y concluimos que con cuatro ángulos rectos, las figuras pueden ser rectángulos o cuadrados...

G2: ¡y también los rombos!

P: ¿Por qué?

G1: Mirá acá hay un rombo... señalando una figura en el afiche

En ese momento, participa un compañero de otro grupo y expresa:

V1: Claro, pero ese cuadrilátero que estás señalando... tiene los cuatro lados iguales, pero tiene dos obtusos y dos agudos....

P: ¿Ustedes qué piensan?

G2: ¡Ah! Claro, es parecido a un cuadrado, pero es cierto, no tiene ángulos rectos.

Este diálogo pone en evidencia que los estudiantes de este grupo están asociando características a los objetos geométricos a partir de la observación de las representaciones. Una de las razones para que esto suceda puede radicar en el fuerte peso que tienen en la escuela ciertas representaciones, como por ejemplo las estereotipadas. En este caso la representación de un rombo con dos ángulos obtusos y dos agudos obstaculizó que los estudiantes consideren que un rombo puede tener sus ángulos rectos, como así también es el caso del rectángulo con dos pares de lados distintos. Esto pone de manifiesto que los estudiantes no logran aún despegarse de las representaciones para analizar las figuras geométricas a partir de sus propiedades. En términos de Brousseau (1983), esto constituye un obstáculo de origen didáctico, y en términos de Sadovsky et al. (1998), constituye parte de la compleja relación entre dibujo y figura. También encontramos aportes en los antecedentes que mencionamos en el capítulo 3, como ser en Renzulli y Scaglia (2006), que relacionan estas dificultades con el uso casi exclusivo de figuras estereotipadas durante la enseñanza de conceptos geométricos a lo largo de la formación de los estudiantes.

Es interesante mencionar cómo se entremezclan las características de los cuadriláteros con los nombres conocidos, y a su vez cómo los estudiantes se manejan naturalmente con las características. Al mismo tiempo, se puede observar cómo la clasificación de acuerdo al paralelismo de los lados –si bien sirve de punto de apoyo– limita la variedad de cuadriláteros a considerar.

El grupo 3 también decidió agrupar los cuadriláteros de acuerdo a la cantidad de ángulos rectos que poseen. Argumentaron la decisión como mostramos a continuación.

A1: Bueno, nosotros primero buscamos todas las combinaciones, es decir: con cuatro ángulos obtusos, con tres, con dos, con uno y con ninguno, después con tres agudos, así con todos... y lo que vimos que más se repetían eran los ángulos rectos, como para hacer una clasificación más linda...

P: ¿En qué sentido sería más linda la clasificación?

A2: En realidad buscábamos que la organización sea sencilla, ordenada, y nos pareció que a partir de los ángulos rectos era la más simple, porque si considerábamos otros ángulos, había muchas figuras que estaban en muchas categorías y quedaba muy desordenado.

Parece haber una evolución en este grupo, dado que en la primera actividad su forma de organizar los cuadriláteros no les había resultado “sencilla y ordenada” para identificar los cuadriláteros, y ahora buscaron mejorar la forma de clasificar. A su vez, la exploración que realizaron es mucho más minuciosa y detallada que en la actividad anterior.

Es interesante mencionar que si bien no crearon una categoría que permanezca vacía, argumentaron que no es posible construir cuadriláteros con exactamente tres ángulos rectos, con cuatro ángulos agudos ni con cuatro ángulos obtusos apoyándose en la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero que había sido enunciada por un compañero. Sin embargo, en el resto de los casos, no realizaron este tipo de análisis, sino que expresan que “fueron probando”, es decir, argumentan que no es posible construirlos a partir de la imposibilidad de construirlos en Geogebra.

Este grupo no utilizó representaciones de los cuadriláteros en su diagrama, sino que mencionó los nombres de las figuras que cumplen cada una de las condiciones.

En cada una de las categorías ubicaron cuadriláteros sin establecer relaciones entre ellos. Por ejemplo, en la categoría “ningún ángulo recto” encontramos que “trapezoide” está presente en las tres subcategorías que generaron, pero es interesante su argumentación pues expresaron que si bien utilizaron el nombre en singular en cada una de las clases, la figura no es única, por ejemplo al mencionar “rombo” están mencionando una familia de rombos que cumplen con esas condiciones. Discusión que se amplió al grupo clase y se trabajó en conjunto. Es interesante que sea conscientes que cuando hablamos de “cuadrado”, o “un cuadrado” nos referimos a un representante de una familia de cuadrados. Dificultades a la hora de elaborar clasificaciones que mencionamos en el capítulo 3.

Por otro lado, en el momento de presentación de su clasificación, este grupo hizo mención a que sorprendentemente encontraron trapezoides en muchas categorías, cuadriláteros que la semana anterior no conocían y ahora podían ubicarlos en tantas clases distintas.

Para cerrar el análisis de esta actividad y teniendo en cuenta los objetivos que nos habíamos planteado, podemos asegurar que los mismos se cumplieron pues los estudiantes lograron en gran medida desvincularse de los nombres de los cuadriláteros y enfocarse en relaciones que los caracterizan, traspasando los mismos. Los estudiantes también lograron analizar semejanzas y diferencias entre algunas figuras, comenzar a romper con la representación estereotipada de figuras y principalmente reforzar la idea de que es posible agrupar cuadriláteros de acuerdo a distintos criterios.

6.3. Actividad 3 - “Cuadriláteros y diagonales”

En relación con la tarea propuesta de construir cuadriláteros a partir de sus diagonales nos resulta importante mencionar en primer lugar que, aun siendo parte de la consigna, solo dos grupos trabajaron con Geogebra -grupos 1 y 3-. El grupo 2 decidió apoyarse en las producciones de las actividades anteriores. Esta decisión no fue por falta del recurso, sino que fue una decisión al interior del grupo, ante la cual el docente no forzó su modificación.

Los grupos 1 y 3, que utilizaron Geogebra, construyeron dos segmentos de distinta longitud que representan las diagonales, y luego un polígono cuyos vértices son los extremos de las diagonales. A partir del arrastre de los vértices y la modificación de la posición de las diagonales, analizaron qué condiciones se deben satisfacer para formar distintos cuadriláteros.

En el grupo 3, a partir del análisis de un dibujo en particular, se formularon preguntas que cambiaron su modo de proceder: ya no modifican los extremos de los segmentos para analizar qué cuadrilátero se forma, sino que se cuestionan: *“¿cómo debería ser la posición de las diagonales para que se forme un rombo?”*. Si bien para responder se apoyan en la construcción del cuadrilátero en Geogebra, observamos que recurren a las figuras que conocen para analizar sus diagonales.

Este grupo se apoyó en el trabajo de la primera actividad para realizar conjeturas acerca de las diagonales. Cabe resaltar que en la primera actividad el hecho de formar cuadriláteros a partir de triángulos, aunque no sea explícitamente, hace foco en una de las diagonales de los cuadriláteros, lo cual puede haber resultado un punto de apoyo en esta actividad.

Los estudiantes formularon que *“al analizar un cuadrado, las diagonales deben formar triángulos rectángulos isósceles”* y que, al trabajar con diagonales de distinta longitud, los triángulos que obtienen serían rectángulos pero escalenos, por lo que con esas condiciones no es posible formarlo. También, analizando los tipos de triángulos que determinan las diagonales, lograron establecer diferencias entre el cuadrado y el rectángulo.

Recuperamos el siguiente diálogo entre dos estudiantes, que se da mientras discuten las relaciones que describimos en el párrafo anterior.

A3: Entonces podemos clasificar los cuadriláteros, pensando si las diagonales son perpendiculares o no, y si son iguales o no.

A4: Sí, pero tenemos que aclarar que acá no vamos a poder construir los que tengan diagonales iguales. Observamos que el alumno A4 manifiesta una tensión entre la tarea propuesta y el querer ir más allá de la misma para generar una nueva clasificación, mientras que A3 ya está posicionado más allá de la tarea. Esto es interesante, dado que se evidencia la intención de generar una clasificación que incluya todos los cuadriláteros, aun cuando la consigna solo da lugar a la exploración de algunos de ellos.

Por otro lado, también en este grupo se dio el siguiente diálogo que nos interesa recuperar:

A1: profe, queremos saber si esta figura es un paralelogramo. (señalando un romboide construido en Geogebra)

P: a ver: ¿qué características conocen ustedes de los paralelogramos?

A2: mmm... en realidad queremos saber si esta figura puede tener todos sus lados iguales...

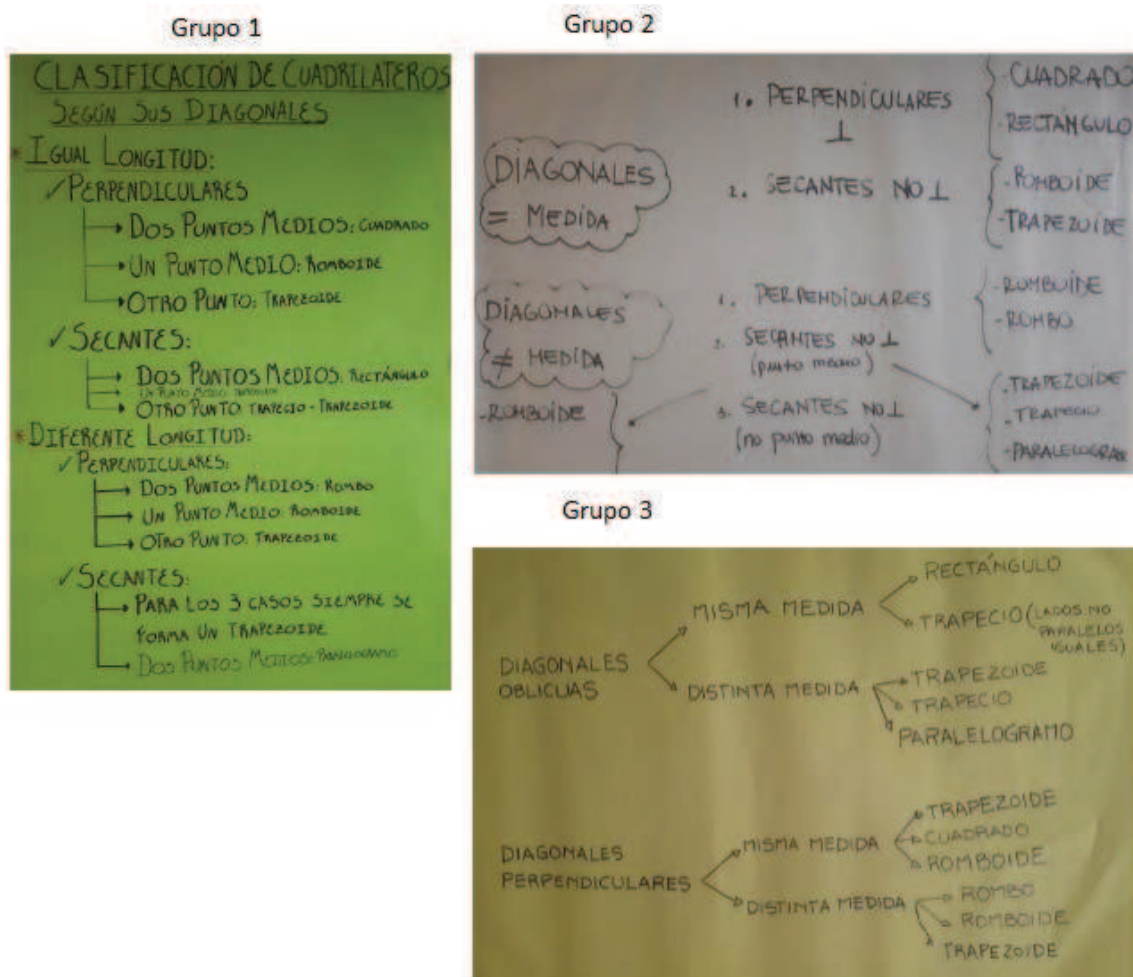
A1: Ah, no, pasa que si tiene todos los lados iguales es un rombo, y esta figura no es un rombo.

A2: Claro, no, porque esta figura tiene dos pares de lados consecutivos iguales, pero no son iguales entre sí; sin embargo, las diagonales también son perpendiculares.

Observamos en este diálogo cómo interfiere la clasificación de acuerdo al paralelismo de lados con la nueva que está emergiendo. Por un lado, los estudiantes reconocieron que las diagonales del rombo son perpendiculares y a partir de esto, si bien habían considerado en una primera instancia el paralelismo de los lados, concluyeron que hay otras características que pueden considerar como la perpendicularidad de las diagonales y la igualdad de lados en este caso.

Ahora nos interesa detenernos y analizar las producciones finales de cada uno de los grupos en relación con la tarea de elaborar un cuadro/diagrama que permita reconocer los cuadriláteros

convexos fácilmente en base a características que cada grupo eligió. A continuación, recuperamos para esto los afiches que confeccionó cada grupo, correspondientes a las imágenes 19, 20 y 21.



Observamos que el criterio principal que seleccionaron, tanto el grupo 1 como el grupo 2, fue la longitud de las diagonales. A diferencia del grupo 2, el grupo 1 consideró tanto la perpendicularidad de las mismas como así también la cantidad de puntos medios que se determinan al intersectarse ambas diagonales. El grupo 2, solamente en una de las categorías detalló esa información: diagonales de distinta medida y no perpendiculares.

A diferencia de los otros dos grupos, el grupo 3 seleccionó como criterio principal la posición relativa de las diagonales, y como segundo criterio la longitud de las mismas, y no consideró la ubicación del punto de intersección de las diagonales.

Nos interesa mencionar que, a diferencia de lo que anticipamos en nuestro análisis a priori, ninguno de los grupos consideró otras propiedades como ser igualdad de lados, paralelismo o tipos de ángulos, aunque hayan sido trabajadas en las tres actividades anteriores.

Al realizar los afiches, los tres grupos colocaron ejemplos de cuadriláteros que cumplen las condiciones de cada categoría generada, llamando a las figuras con sus nombres convencionales, sin hacer representaciones gráficas.

También observamos que al ejemplificar, ningún grupo logró colocar todas las posibles figuras que estarían incluidas en las categorías que plantearon. A modo de ejemplo, la categoría "diagonales perpendiculares de diferente longitud" incluye trapezoides, romboides, trapecios y rombos. Sin

embargo, los grupos 1 y 3 no incluyeron a los trapecios y el grupo 2 a los trapecios ni los trapezoides. Interpretamos que esto puede deberse al tiempo que le destinamos a la exploración, pues puede haber resultado insuficiente para realizar un detalle minucioso.

Si bien no hay evidencia de que alguno de los grupos esté considerando que una figura puede satisfacer condiciones de otra, en el grupo 2 observamos algo interesante: los estudiantes consideraron que el rectángulo tiene sus diagonales de igual medida y perpendiculares. Sin embargo, si hubieran tratado de la misma forma al rombo, podrían haberlo incluido también en esta categoría, pues cuando éste tiene todos sus ángulos rectos, sus diagonales son de igual medida y perpendiculares. Si bien la inclusión del rectángulo en dicha categoría podría ser considerada una contradicción en relación con la lógica seleccionada para realizar la organización, ya que es mayoritariamente parcial, podríamos también interpretarlo como un incipiente pensamiento jerárquico.

Nos resulta interesante resaltar que en esta actividad los grupos comienzan a referirse a las organizaciones como clasificaciones. La docente, que había evitado intencionalmente la utilización de este término³³, pregunta a la clase completa qué consideran que es clasificar, y los estudiantes describen ideas acertadas acerca de lo que significa clasificar en matemática, incluso basándose en lo realizado en las actividades previas. Mencionamos a continuación algunas expresiones de los estudiantes.

A1: Empezamos a hablar de clasificación, porque siempre que por ejemplo, depende los ángulos que tienen los triángulos los clasificamos, clasificamos los ángulos de acuerdo a sus características...

G1: Sí, es una agrupación

V1: Es que hasta ahora, ya vimos varias propiedades de los cuadriláteros, el paralelismo de sus lados, la amplitud de sus ángulos, la igualdad de lados, las características de sus diagonales... es decir que se pueden agrupar por esas características

V2: Es como que la clasificación te permite reconocer mediante características a los objetos geométricos...

P: ¿qué piensan de esto?

A3: sí, que es una agrupación

P: ¿Alguien más quiere agregar algo?

G2: No, nada más, que es una manera de agrupar... más fácil...

Por otro lado, teniendo en cuenta los aportes de Barreiro y Rodríguez (2014) en cuanto a la potencia de las consignas matemáticas, en una nueva implementación de la secuencia reformularíamos la primera parte de la consigna de esta actividad para que no anticipe la posibilidad de construcción de ciertos cuadriláteros convexos conocidos -a partir de dos diagonales distintas-, así como la imposibilidad de construir otros.

En lugar de: "Dados dos segmentos de distinta longitud, construir, si es posible, un cuadrilátero que los tenga por diagonales. ¿Qué cuadriláteros convexos se pueden construir?". Diríamos: "Dados dos segmentos de distinta longitud, ¿es posible construir cuadriláteros convexos que los tengan por diagonales?"

Pues tal como está formulada la consigna original, la pregunta: "¿qué cuadriláteros convexos se pueden construir?" anticipa tanto que es posible construir cuadriláteros convexos que posean como

³³ En el análisis a priori justificamos por qué evitamos la utilización de este término.

diagonales dos segmentos de distinta longitud, como que habrá casos en los que no será posible. Mientras que la reformulación que proponemos no anticipa resultados y deja más abierta la exploración.

En relación con los objetivos que nos planteamos inicialmente, consideramos que los mismos se cumplieron, ya que los estudiantes analizaron exhaustivamente qué cuadriláteros convexos es posible construir con los datos dados y cuáles no, y posteriormente los agruparon según distintas relaciones que hay entre sus dos diagonales: la posición relativa y la ubicación del punto de intersección de ambas.

Asimismo, otro objetivo que se logró es que los estudiantes reconozcan que con dos diagonales distintas no es posible construir trapecios isósceles, cuadrados, rectángulos ni algunos trapezoides. Por otro lado, si bien con algunos errores, los estudiantes también lograron considerar más de una característica a la vez al momento de agruparlos, así como también robustecer la idea de que los criterios de clasificación de figuras no son únicos. En esto último, consideramos que el trabajo en equipo y los momentos de intercambio colectivo fueron de vital importancia, pues permitieron que se comparen distintas formas de clasificar y de abordar la tarea propuesta.

6.4. Actividad 4 - “Cuadriláteros y lados”

En esta actividad, que propone analizar cuántos lados iguales y cuántos ángulos rectos puede tener un cuadrilátero convexo, se hace explícita la consideración de dos características a la vez para agruparlos, y comienzan a surgir algunas ideas ligadas a un razonamiento del tipo jerárquico en materia de clasificaciones. Si bien hasta el momento no analizamos este aspecto en las producciones de los estudiantes, serán tratadas en profundidad en la próxima sección.

Dada la ausencia de estudiantes, el docente, priorizando el trabajo en equipo, invitó a los estudiantes de dos grupos a que conformaran uno solo. Por eso en esta actividad analizaremos las producciones de solo dos grupos, el grupo 1, fusión de integrantes de los grupos 1 y 2, y el grupo 3.

En el primer momento de exploración, los estudiantes analizaron la cantidad de lados iguales que puede tener un cuadrilátero, y observamos que persiste la concepción parcial de las clasificaciones, pues refuerzan la idea de que el rectángulo no puede ser nunca cuadrado. Esto se evidencia por ejemplo en el siguiente diálogo:

A1: Bueno empecemos, con todos los lados iguales... el cuadrado seguro, pero el rectángulo no...

A2: No, dos lados iguales... en realidad hasta dos lados iguales.

A4: pero el rombo también puede estar en cuatro lados iguales...

A3: sí, y el romboide puede estar con el rectángulo, ya que tienen dos y dos...

Sin embargo, es interesante cómo comenzó a surgir la idea de que el rombo posee las mismas características que el cuadrado, en cuanto a cantidad de lados iguales; y lo mismo entre el romboide y el rectángulo, parentescos que en una clasificación de acuerdo al paralelismo de lados no aparecerían, pues el foco de interés está solo en el paralelismo de lados.

También observamos que se generaron discusiones en relación a la cantidad máxima de lados iguales que puede poseer un cuadrilátero y al paralelismo de lados. Esto sin duda da cuenta de lo arraigada que está la clasificación de acuerdo al paralelismo de lados, pues no posibilita que los estudiantes se

despeguen de esa característica para solo mirar la cantidad de lados iguales que puede tener una figura.

En una discusión en torno a si un trapecio puede tener tres lados iguales y dos ángulos rectos, observamos cómo los estudiantes, a partir del intercambio entre ellos, contrastan dos formas distintas de validar una conjetura y elaboran en conjunto una nueva.

P: ¿Y qué sucede con tres lados iguales y dos ángulos rectos?

A2: Nosotros encontramos un trapecio, igual al que dibujó el compañero recién, pero el lado inclinado, apenas inclinado, para que quede con la misma longitud y el ángulo quede recto.

P: ¿Ustedes qué opinan?

Los compañeros no están convencidos, por lo que la docente los invita a construirlo en el pizarrón.

El alumno intenta construir la figura en el pizarrón, explicando esta diferencia mínima que debe haber en el “lado inclinado”, a lo que una compañera le contesta:

G1: No, si vos tenés tres lados iguales, y dos ángulos rectos, el cuarto lado para cerrar la figura si o si tiene que ser igual.

V2: Sí, yo probé y no daba.

A1: Nosotros lo probamos en la compu, moviendo apenas un vértice, para que solo un lado se modifique....

P: ¿Y cómo probaron?

A2: Nosotros movíamos apenas en la compu, este lado (el inclinado) pero nos fijamos que quede de la misma longitud de los otros dos.

V1: Y claro, pero si tiene ya 2 lados iguales, estos dos también van a ser iguales.

Los compañeros contestan que no, que no es posible, por lo que la docente pregunta:

P: ¿Qué tenemos como datos?

V1: Tenemos dos lados paralelos.

P: ¿Y qué más?

V2: Y tenemos una recta perpendicular a esas... si la distancia entre las paralelas es, por ejemplo, 2 cm, no va a haber ningún segmento inclinado que también mida 2 cm...

A2: Claro, es cierto, no sé qué vimos en el Geogebra.

A3: sí, tal vez nosotros miramos y no tuvimos en cuenta algunos decimales, porque es cierto, si lo pensamos con las distancias entre paralelas, la mínima que es la perpendicular va a ser siempre 2 unidades, todas las demás, son más grandes.

P: Entonces, ¿qué podemos concluir?

V1: Que no hay trapecios con tres lados iguales y dos ángulos rectos, ni con tres ni con cuatro tampoco... porque si no serían cuadrados y por lo tanto serían paralelogramos.

Hay cuestiones interesantes que surgen del diálogo anterior. La primera es que, en esta oportunidad, la utilización de Geogebra como recurso para validar fue insuficiente, pues la lectura que realizaron los estudiantes de la construcción realizada les llevó a formular una conjetura incorrecta. Al ponerlo en discusión con el grupo completo, otros estudiantes interpellaron dicha afirmación recuperando nociones de distancia y argumentaron a partir de propiedades. El intercambio entre pares posibilitó la elaboración de una conjetura y una validación correcta. Podemos afirmar entonces que este es un ejemplo de cómo la interacción entre pares funcionó como medio de construcción de saberes de acuerdo a Cambriglia et al. (2010), así como también los estudiantes cambiaron sus roles en la interacción entre receptores, intérpretes y productores. Pues los estudiantes tomaron como propia

una inquietud que surgió al interior de otro grupo, la analizaron y transformaron. Por otro lado, también observamos en este diálogo la fuerte presencia de una concepción particional de los cuadriláteros, pues los trapecios no pueden tener “tres lados iguales y dos ángulos rectos (...) si no serían cuadrados y por lo tanto serían paralelogramos”. Esto conduce a que incluyan condiciones para que una figura no pueda satisfacer condiciones de otra.

Otra cuestión que promovió esta actividad junto con la gestión del docente, fue que los estudiantes comparen figuras como ser paralelogramos y romboides, que establezcan diferencias y similitudes entre ambas y que, como cierre de esta comparación, establezcan que, en la clasificación que están realizando, dos figuras están dentro de la misma familia -categoría- ya que comparten propiedades, aunque sean figuras distintas. Este razonamiento, nos resulta más que interesante pues no sucedió en otras actividades previas. En otros casos, los estudiantes manifestaron que algunas agrupaciones no resultaban adecuadas, pues había cuadriláteros que se repetían en muchas categorías, sin poder visualizar que en cada caso, el criterio de agrupación cambiaba.

Por último, recuperamos una discusión interesante que se da al finalizar la etapa exploratoria, donde un estudiante pregunta al grupo completo si un rombo puede tener todos sus lados iguales y todos sus ángulos rectos, cuando se analizaba la categoría “dos pares de lados iguales y diferentes entre sí”:
A3: *Yo quería saber... si es posible que un rombo tenga los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos...*

[1] G2: *¡Yo también me lo preguntaba el otro día! ¡Me pasaba a mí el otro día que movía el afiche! Yo sigo manteniendo que un cuadrado puede ser un rombo.*

V1: *Para mí, es como que el rombo incluye al cuadrado...*

N1: *Claro, para mí en ese caso es un cuadrado.*

P: *¿Entonces podemos concluir que el rombo incluye al cuadrado?*

[2] V2: *No, para mí es al revés. Todo cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es cuadrado.*

P: *¿Y cómo podés explicar eso?*

[3] V1: *¡era una regla del secundario!*

[4] G2: *¡Claro! No sé por qué... porque era una regla...*

V2: *¿Puede ser que cambien las diagonales?*

G1: *Por la longitud de los lados...*

[5] V1: *Y pero el cuadrado tiene los cuatro lados iguales y el rombo también... lo que va a variar sí o sí, son los ángulos. Porque el cuadrado sí o sí, tiene los cuatro ángulos rectos, en cambio el rombo puede tener cuatro rectos o dos pares de ángulos iguales.*

P: *¿Entonces?*

G1: *Claro, sí, es cierto. Puede tener los cuatro rectos o no...*

[6] P: *Entonces, ¿Cuáles serían las condiciones mínimas que necesita un cuadrado para ser cuadrado?*

V1: *tener todos los lados iguales y sus ángulos rectos*

P: *¿Y el rombo?*

Todos: *No, el rombo solo necesita tener los lados iguales.*

P: *Entonces, pensando en términos de condiciones mínimas ¿quién satisface las condiciones de quién?*

V1: *El cuadrado cumple siempre las condiciones del rombo, y no al revés.*

G1: *Sí, el cuadrado tiene más condiciones que el rombo.*

[7] V1: *Sí, yo recuerdo que en otra actividad, nosotros tomamos un cuadrado y dijimos que si lo rotábamos era un rombo... pero ahora vemos que ese no era el fundamento. No importa la posición...*

P: *¡Muy bien! La figura es la misma aunque esté rotada.*

[8]P: *Pero pensemos ahora, si yo considero que el rombo es un paralelogramo con sus lados iguales y dos pares de ángulos diferentes entre sí. ¿El cuadrado podría ser un rombo?*

Los estudiantes responden que no...

[9]P: *Muy bien, pero esto depende de cómo se considere cada una de las figuras y de qué condiciones se adoptan para caracterizar cada una de las figuras.*

V2: *Claro, profe, porque si tenemos en cuenta lo mínimo, el cuadrado es también paralelogramo... ¿o no?*

El grupo casi completo, responde que sí, porque tiene dos pares de lados paralelos.

[10]P: *Muy bien, podemos empezar a ver que una misma figura puede cumplir a la vez condiciones mínimas de otras figuras. Todo esto dependerá de cómo se considera cada una de las figuras. Podríamos preguntarnos acá: ¿el cuadrado cumple con las condiciones mínimas de otras figuras?*

G2: *Sí, del paralelogramo*

G1: *Y del rectángulo...*

V2: *Y del rombo...*

G1: *si claro... pero es el que más exige cosas*

V1: *claro, él puede estar en otras familias, pero las otras no pueden estar en la de él.*

En este intercambio se evidencia la huella que deja en los estudiantes el uso de figuras estereotipadas, y que mencionamos en el marco teórico, pues para afirmar que un cuadrado puede ser rombo los estudiantes expresaron que necesitaban “mover” el afiche y “rotar la figura” [1] y [7]. Por otro lado, los estudiantes dan cuenta de un aprendizaje memorístico de la geometría cuando afirman que “*Todo cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es cuadrado*”, pues es una “regla” del secundario [2], [3] y [4].

También es interesante cómo por un lado los estudiantes analizaron, por primera vez, las condiciones mínimas que necesitan los cuadriláteros para ser definidos. Esto ocurre a partir de una intervención del docente [6], de la que ellos se apropiaron rápidamente ya que les servía para resolver el dilema que tenían. Y por otro lado, cómo compararon figuras a partir de las distintas propiedades que poseen [5].

Se institucionaliza a partir de esta discusión que, dependiendo de cómo se considere cada una de las figuras y de qué condiciones se adoptan para caracterizarlas, es que algunas de ellas podrán satisfacer las condiciones mínimas de otras, [8], [9] y [10]. Sin duda, esta cuestión es una entrada al razonamiento jerárquico que se da de forma explícita con el conjunto completo de la clase, y que tuvo lugar a causa del cuestionamiento de los mismos estudiantes. El trabajo con la secuencia está comenzando a dar sus frutos.

A continuación, presentamos las agrupaciones que realizaron los dos grupos como cierre de la actividad. Vale recordar que en esta oportunidad cambia el tipo de tarea respecto de las tres anteriores, pues en este caso no fueron los estudiantes quienes seleccionaron los criterios, sino que se les ofreció un cuadro de doble entrada para que ubicaran los cuadriláteros estudiados de acuerdo a dos características a la vez: cantidad de lados iguales y cantidad de ángulos rectos. Las producciones fueron las siguientes, (imágenes 22 y 23):

		Grupo 1				
		CANTIDAD DE ÁNGULOS				
CANTIDAD DE LADOS IGUALES	NINGUNO	1	2	3	4	
NINGUNO	TRAPEZIO TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO TRAPEZOIDE			
2 LADOS IGUALES	TRAPEZIO TRAPEZIO	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO TRAPEZOIDE			
3 LADOS IGUALES	TRAPEZIO TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE				
4 LADOS IGUALES	ROMBO				Cuadrado ROMBO	
2 PARES DE LADOS IGUALES Y DIFERENTES ENTRE SÍ	PARALELOGRAMO ROMBOIDE	ROMBOIDE	ROMBOIDE		Rectángulo	

		Grupo 3				
		CANTIDAD DE ÁNGULOS RECTOS				
CANTIDAD DE LADOS IGUALES	NINGUNO	1	2	3	4	
NINGUNO	TRAPEZIO TRAPEZOIDE	TRAPEZIO TRAPEZOIDE	TRAPEZIO TRAPEZOIDE			
2 LADOS IGUALES	TRAPEZIO TRAPEZIO	TRAPEZOIDE TRAPEZOIDE	TRAPEZIO TRAPEZOIDE			
3 LADOS IGUALES	TRAPEZIO TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO TRAPEZOIDE			
4 LADOS IGUALES	ROMBO				CUADRADO	
2 PARES DE LADOS IGUALES Y DIFERENTES ENTRE SÍ	PARALELOGRAMO ROMBOIDE	ROMBOIDE	ROMBOIDE		RECTÁNGULO	

Observamos que hay mínimas diferencias entre las producciones de ambos grupos. El grupo 1 consideró la posibilidad de ubicar al rombo en la categoría de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos, es decir, consideró que el rombo podría ser cuadrado, cuestión que no es casual, pues esta noción de jerarquía fue desarrollada en las discusiones anteriores más fuertemente por integrantes de este equipo. Sin embargo, no consideraron que el rectángulo también puede estar en la misma clase. Otra diferencia es que este mismo grupo ubicó trapezoides en las categorías “2 lados iguales” y “2 ángulos rectos”.

Tal como anticipamos en el análisis a priori, los cuadros generaron una clasificación particional, pues las categorías “cantidad de lados iguales” y “cantidad de ángulos rectos” fueron interpretadas por parte de los estudiantes como cantidad exacta de lados iguales.

Consideramos que en la próxima implementación sería enriquecedor ofrecer el cuadro de doble entrada sin las categorías creadas, solamente ofreciendo los dos criterios a tener en cuenta para completarla, o incluso solamente ofrecer los criterios con los cuales se deben agrupar los cuadriláteros. Esto posibilitará que los estudiantes puedan generar explícitamente categorías como “al menos dos lados iguales”, que no distingan entre dos lados iguales y distintos entre sí, dando origen de este modo a una clasificación con mayor presencia de categorías inclusivas. Incluso podrían hacer diagramas, en lugar de cuadros de doble entrada, dando a los estudiantes mayor libertad en la toma de decisiones.

En relación con los objetivos que nos planteamos originalmente, podemos afirmar que los mismos se concretaron, pues logramos que los estudiantes volvieran sobre los cuadriláteros que ya conocen, focalizándose en otra propiedad que no había sido considerada explícitamente en las otras actividades: la cantidad de lados iguales que pueden tener. A su vez, la actividad promovió que los estudiantes analizaran dos características simultáneas, previamente definidas de los cuadriláteros: cantidad de lados iguales y cantidad de ángulos rectos que posee una figura.

Nos resulta importante mencionar que las intervenciones del docente promovieron que en los momentos de intercambio se comparen cuadriláteros que pertenecen a las mismas clases de acuerdo a los criterios establecidos, logrando establecer similitudes y diferencias. Por ejemplo, al preguntar: “Los paralelogramos PD y los romboides están en la categoría “Dos pares de lados iguales y diferentes entre sí”, ¿esto significa que son la misma figura? ¿en qué se diferencian?”.

6.5. Caracterización de las clasificaciones y definiciones elaboradas por los estudiantes.

Antes de analizar la actividad 5, en la que se propone a los estudiantes producir definiciones de cuadriláteros, queremos analizar qué tipo de clasificaciones produjeron en las primeras cuatro actividades.

6.5.1. Acerca de lo particional y lo jerárquico en las clasificaciones de los estudiantes

Uno de nuestros objetivos en esta investigación es caracterizar y categorizar las clasificaciones y definiciones que los estudiantes elaboraron. Uno de los aspectos que nos interesa analizar es el carácter particional o jerárquico, en términos de De Villiers (1994), de las clasificaciones que elaboraron los estudiantes. Para ello, presentamos el siguiente cuadro que resume y compara las agrupaciones realizadas por cada grupo a lo largo de las actividades 1 a 4 de la secuencia.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	
Actividad 1	Tipo de Clasificación	Híbrida. Tanto particional como jerárquica (dentro de la subcategoría: “dos lados paralelos”).	Particional.	Particional.
	Criterios	Principal: Paralelismo de lados. Secundarios: cantidad de ángulos rectos y lados iguales.	Principal: Paralelismo de lados.	Principal: Igualdad de lados.
	Categorías principales creadas	Tres categorías disjuntas: “Dos lados paralelos”, “solo un par de lados paralelos” y “ningún par de lados paralelos”.	Tres categorías disjuntas: “Dos lados paralelos”, “solo un par de lados paralelos” y “ningún par de lados paralelos”.	Tres categorías disjuntas: “todos los lados iguales”, “Dos pares de lados iguales”, “Todos los lados distintos”.
	Observaciones	No incluyen en las categorías creadas todos los cuadriláteros que analizaron, aun	No incluyen en las categorías creadas todos los cuadriláteros que analizaron, aun cuando las categorías generadas	Las categorías creadas no permiten incluir todos los tipos de cuadriláteros

		cuando las categorías generadas permiten cubrir todos los tipos de cuadriláteros convexos.	permiten cubrir todos los tipos de cuadriláteros convexos.	convexos, por ejemplo los trapecios con dos lados iguales.
Actividad 2	Tipo de Clasificación	Particional.	Particional.	Particional.
	Criterios	Principal: Cantidad de ángulos obtusos. Secundarios: cantidad de ángulos agudos y rectos.	Principal: Cantidad de ángulos rectos. Secundarios: cantidad de ángulos obtusos y agudos.	Principal: Cantidad de ángulos rectos. Secundarios: cantidad de ángulos obtusos y agudos.
	Categorías principales creadas	Cuatro categorías disjuntas: "Ningún ángulo obtuso", "un ángulo obtuso", "dos ángulos obtusos" y "tres ángulos obtusos".	Cinco categorías disjuntas: "Ningún ángulo recto", un ángulo", "dos ángulos rectos", "tres ángulos rectos" y "cuatro ángulos rectos".	Cuatro categorías disjuntas: "Cuatro ángulos rectos", "Dos ángulos rectos", "Un ángulo recto" y "Ningún ángulo recto".
	Observaciones	Generan categorías que permiten incluir todas las posibles combinaciones y en consecuencia todos los posibles cuadriláteros.	Si bien las categorías abarcan todos los posibles cuadriláteros, no incluyen todas las posibles combinaciones en ellas. Por ejemplo, en ningún recto, faltan considerar casos.	Generan categorías que permiten incluir todas las posibles combinaciones y en consecuencia todos los posibles cuadriláteros.
Actividad 3	Tipo de Clasificación	Particional.	Particional.	Particional.
	Criterios	Principal: Longitud de las diagonales. Secundarios: posición relativa y ubicación del punto de intersección de las mismas.	Principal: Longitud de las diagonales. Secundario: posición relativa. Solo en una subcategoría consideran la ubicación del punto de intersección.	Principal: posición relativa. Secundario: Longitud de las diagonales

	Categorías principales creadas	Dos categorías disjuntas: “Igual longitud”, “Distinta longitud”.	Dos categorías disjuntas: “Igual longitud”, “Distinta longitud”.	Dos categorías disjuntas: “Diagonales oblicuas”, “Diagonales perpendiculares”.
	Observaciones	Generan categorías que permiten incluir todos los tipos de cuadriláteros.	No plantean todas las categorías con los mismos criterios. En algunas se considera además la ubicación del punto de intersección y en otras no.	Generan categorías que permiten incluir todos los tipos de cuadriláteros. No consideran la ubicación del punto de intersección.
Actividad 4	Tipo de Clasificación	Híbrida		Particional
	Criterios	Cantidad de lados iguales y cantidad de ángulos rectos.		
	Observaciones	Consideran todos los posibles cuadriláteros que satisfacen las condiciones de cada categoría creada.		

Analizar el carácter particional o jerárquico de las clasificaciones que produjeron los estudiantes junto con la elaboración de este cuadro nos permitió detectar una cuestión que si bien la habíamos considerado en nuestras discusiones y en el análisis a priori que realizamos, no formó parte de las previsiones. La magnitud de esta dificultad que a continuación describimos, se fue manifestando a través de la implementación y el análisis de las producciones de los estudiantes.

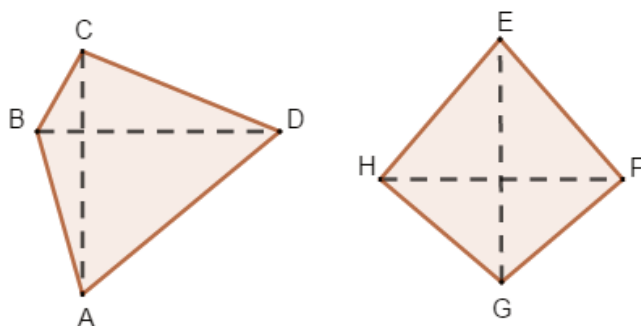
En las actividades 2 y 3, considerar los cuadriláteros por sus nombres convencionales, es decir por los nombres correspondientes a una clasificación de acuerdo al paralelismo de los lados, representó un gran obstáculo para dar origen a clasificaciones de acuerdo a otros criterios.

Esto se evidencia por ejemplo en la actividad 2, donde los estudiantes afirman que hay figuras como ser el trapecio, que están incluidas en muchas categorías a la vez, generando poca claridad en la organización: los trapecios están incluidos en “ningún ángulo recto” y en “dos ángulos rectos”. Esto se debe a que las figuras conservan el nombre de acuerdo a una clasificación según otros criterios - el paralelismo de lados- pero en este caso representan figuras de distinto tipo por tener características distintas de acuerdo a sus ángulos. Así, si bien en la clasificación hay nombres de figuras que se repiten en varias categorías, la misma es de carácter particional. A simple vista parecería una contradicción, sin embargo no lo es, por el motivo que expresamos previamente: dichas figuras, si bien poseen el mismo “nombre”, son figuras distintas en relación con las propiedades con las cuales se organizaron.

También encontramos evidencias de esto mismo en afirmaciones que realizaron los estudiantes al finalizar la Actividad 3, donde concluían que agrupar los cuadriláteros de acuerdo a sus diagonales no resulta una forma “adecuada” de organizarlos, pues no es “fácil” describirlos a partir de sus

diagonales. A modo de ejemplo, los estudiantes mencionaron el caso del trapecioide (ver imágenes 19, 20 y 21): se encuentra en muchas categorías a la vez y, al mismo tiempo, al analizar la posición y longitud de sus diagonales no podían describir una característica general que los diferenciara de otras figuras. Aquí podemos ver cómo está interfiriendo la clasificación convencional a partir del paralelismo de lados, en la que todos los trapecioides estarían agrupados en una misma clase. Ahora, los criterios con los cuales se clasifica son la longitud y la posición relativa de las diagonales, es decir, las figuras están definidas y agrupadas según otras propiedades, de modo que dos trapecioides con distintas características en relación con sus diagonales serían figuras pertenecientes a categorías diferentes. Por ejemplo, no representan el mismo tipo de figuras trapecioides de diagonales perpendiculares y trapecioides de diagonales no perpendiculares, aun cuando ambos carecen de lados paralelos. Así mismo, un trapecio isósceles y un rectángulo no cuadrado estarían incluidos en la misma categoría, por tener ambos diagonales de igual longitud no perpendiculares.

Consideramos que este tipo de actividades se vería potenciado si a las figuras se les otorgara un nuevo nombre en cada una de las distintas clasificaciones, como se describe en el capítulo 4 del Documento de Geometría para Nivel Medio (2007) a propósito del problema de los puntos medios de los lados de un cuadrilátero al hablar de “rectidiagonales”, que forma parte de nuestros antecedentes de investigación. Ilustramos con un ejemplo para nuestro caso:



Los cuadriláteros ABCD y EFGH tienen sus diagonales de igual longitud y perpendiculares, por lo cual estarían en una misma categoría y podrían denominarse por caso “equi-rectos”. Y en el caso en que una diagonal interseque a la otra en su punto medio, podría añadirse la denominación “doble punto”, o si una sola interseca a la otra en su punto medio sería “punto” y en el caso en que ninguna de las diagonales cortara a la otra en su punto medio, “cero punto”. De modo que el cuadrilátero ABCD se denominaría en esta nueva clasificación “**equi-recto cero punto**” y el EFGH se denominaría “**equi-recto punto**”. Los dos ejemplos anteriores representan figuras distintas, con características distintas, aún cuando ambas coinciden en no tener ningún par de lados paralelos y se llaman “trapecioides” en la clasificación según el paralelismo de los lados.

Cabe aclarar que este trabajo no fue propuesto a los estudiantes en esta ocasión, como así tampoco se trata de una necesidad derivada de la actividad, pues el foco no estuvo en analizar si las clasificaciones que producían eran jerárquicas o particionales, sino que en esta primera implementación priorizamos que los estudiantes exploren y analicen los cuadriláteros, y experimenten las clasificaciones como procesos. De haber analizado con los estudiantes esta tarea de otorgar nombres, se habría puesto en tensión esta cuestión de que por más que una figura parezca pertenecer

a varias categorías a la vez, las clases son disjuntas y en consecuencia la clasificación es particional. A su vez, evidenciamos en las primeras actividades que los estudiantes desconocían propiedades de los cuadriláteros, e incluso algunos cuadriláteros, y tal vez entrar en este juego requiere de un dominio más avanzado de los cuadriláteros y de sus propiedades, incluso de la clasificación de acuerdo al paralelismo de lados, para poder distinguir ambas y el razonamiento que se realiza.

Aun así, consideramos que en una nueva implementación nos gustaría incluir esta tarea de otorgar nuevos nombres, por ejemplo en un estadio avanzado de la secuencia, y dependiendo también de los saberes que el grupo tenga disponible. Pensamos que desprejarse de los nombres tradicionales al clasificar según otros criterios puede ayudar a los estudiantes a desarmar la concepción de que otras clasificaciones no son adecuadas pues hay figuras que pertenecen a varias categorías a la vez

6.5.2. Actividad 5 - Definiciones y clasificaciones elaboradas por los estudiantes

Para abordar la consigna de elaborar una definición para cada uno de los cuadriláteros trabajados, teniendo en cuenta las organizaciones realizadas en las actividades anteriores, los estudiantes realizaron primero una clasificación en forma de diagrama y a partir de éste procedieron a la construcción de las definiciones.

Si bien la consigna de la actividad 5 solo solicitaba que formulen una definición, los estudiantes relacionaron la definición con la clasificación de cuadriláteros, procesos que tal como hemos descrito no son independientes uno del otro.

Para analizar las clasificaciones y definiciones que formularon los estudiantes, tomaremos como insumos las producciones de los grupos 1 y 3 en la actividad 5 de la secuencia. Cabe aclarar, como ya mencionamos anteriormente, que seleccionamos estos grupos ya que son los dos que trabajaron con todas las actividades de la secuencia.

Analizaremos las producciones de cada grupo por separado para poder caracterizar detenidamente las definiciones que produjeron, a partir del registro de la clase, el afiche y las definiciones elaboradas.

Grupo 1

Comenzaremos con el grupo 1 que en esta clase también fue una fusión entre integrantes de los grupos 1 y 2. La clasificación que realizaron (presentada en el afiche y también en word) y las definiciones que formularon (escritas por el grupo también en un documento word), son las siguientes:

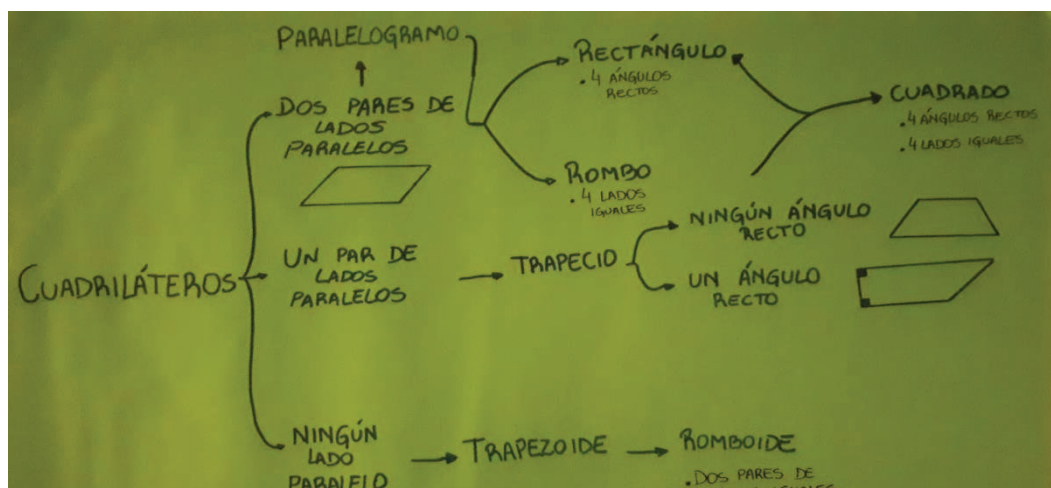


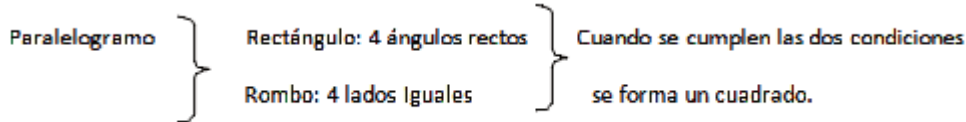
Imagen 30

Paralelismo

2 pares de lados paralelos: paralelogramo, (rombo, cuadrado y rectángulo).

1 par de lados paralelos: trapecio.

Ningún lado paralelo: trapezoide, romboide.



Definiciones elaboradas por el grupo 1

Cuadrado: Necesita cumplir con la condición de tener 4 lados iguales y sus 4 ángulos rectos.

Rectángulo: Necesita tener 4 ángulos rectos y 2 pares de lados iguales y diferentes entre sí.

Rombo: Necesita tener 4 lados iguales.

Romboide: Necesita 2 pares de lados iguales y ningún lado paralelo.

Trapecio: Necesita 1 par de lados paralelas

Paralelogramo: Necesita 2 pares de lados paralelas.

Trapezoide: Necesita tener 4 lados sin importar la longitud, pero no puede tener paralelas.

Este grupo manifiesta que el criterio que seleccionaron para realizar la clasificación es la cantidad de lados paralelos que tienen los cuadriláteros. De este modo, definen tres categorías: dos pares de lados paralelos, un par de lados paralelos y ningún par de lados paralelos, y dentro de cada una de estas categorías, diferencian cuadriláteros que se ubican allí.

Podemos afirmar que todo el trabajo con la secuencia permitió que los estudiantes formulen definiciones del tipo descriptivas (también llamadas "a posteriori"): De Villiers (1994), recuperando a Freudenthal (1973), expresa que "La definición descriptiva describe un objeto ya conocido señalando algunas propiedades características". (p.2) Cuando se define a posteriori un concepto, se entiende que éste y sus propiedades se conocen desde hace algún tiempo, y solamente se enuncian después.

Pero a la vez, también se observan otros procesos propios de la construcción de definiciones constructivas (a priori), como el de especialización, que tuvo lugar fuertemente en este grupo. Por ejemplo, dentro de los paralelogramos definen constructivamente, a partir de un proceso de especialización, al rectángulo, rombo y cuadrado.

El proceso de especialización tiene lugar en este grupo, pues como observamos en el primer extracto del Word presentado por los estudiantes, reconocen que tanto el rectángulo como el rombo y el cuadrado tienen dos pares de lados paralelos, pero que cada uno de ellos tiene además otras características. En el caso del rectángulo, los estudiantes reconocen que es un paralelogramo que tiene como condición necesaria que todos sus ángulos sean rectos, y en el caso del rombo todos sus lados iguales, y que si alguna figura cumple con las condiciones del rombo y del rectángulo, entonces es un cuadrado. No obstante esta cuestión no aparece en las definiciones que logran expresar en el segundo extracto.

De igual manera especifican dentro de la familia de los trapecios, al trapecio rectángulo, requiriendo como condición extra que posea un ángulo recto, y a otros trapecios excluyendo la posibilidad de que tengan ángulos rectos; y dentro de la familia de los trapezoides al romboide, adicionando la condición de poseer dos pares de lados iguales. Sin embargo, no establecen la condición de que deben ser distintos entre sí.

Observamos que las definiciones de trapezoide y trapecio son, de acuerdo a Rey Pastor y Puig Adam (1948), definiciones negativas, pues caracterizan a los elementos definidos por la carencia de alguna propiedad: el trapezoide está caracterizado por la carencia de lados paralelos y un caso particular de trapecio (explicitada la definición solo en el afiche) por la carencia de ángulos rectos. El resto de los casos son definiciones positivas.

Analizaremos a continuación si las definiciones que enunciaron los estudiantes satisfacen la condición de minimalidad según Calvo (2001), quien expresa que esta se refiere al hecho de que una definición no incluya información redundante. Cuando este es el caso se las denomina definiciones económicas. También analizaremos si las definiciones que elaboraron generan una clasificación particional o jerárquica en términos de De Villiers (1994).

En las tres grandes categorías que inicialmente definen de acuerdo al paralelismo de los lados, para indicar las condiciones mínimas que debe satisfacer un cuadrilátero para ser paralelogramo, trapecio o trapezoide, si bien no es explícito, consideran la cantidad exacta de pares de lados paralelos, por lo cual podríamos afirmar que estas tres categorías son excluyentes, es decir del tipo particional. Sin embargo, si recuperamos expresiones de los estudiantes como ser: *“un trapecio solo puede tener un solo par de lados paralelos, pues en caso contrario se convertiría en un paralelogramo”*, podemos ver que a pesar de la formulación de las categorías disjuntas, los estudiantes están teniendo un incipiente pensamiento inclusivo, en el sentido de que una figura puede “convertirse” en otra de acuerdo a las condiciones que satisfaga.

Dentro de la familia de los paralelogramos, definen al rombo y al rectángulo. La definición de rombo es minimal, pues solamente enuncian como condición necesaria la igualdad de todos sus lados. Y a su vez es jerárquica, pues no excluye la posibilidad de que el rombo posea todos sus ángulos iguales. Sin embargo, la enunciación de la definición de rectángulo presenta algunas contradicciones internas: postulan que debe tener cuatro ángulos rectos y dos pares de lados iguales y diferentes entre sí, lo cual excluye la posibilidad de que el rectángulo pueda ser cuadrado, pero tanto en el afiche como en el diagrama no incluyeron esta restricción. Al revisar las discusiones al interior del grupo de estudiantes encontramos que la intención fue generar una clasificación jerárquica, pues expresaron que si una figura cumple con las condiciones del rectángulo y del rombo, entonces esa figura es un cuadrado y que el cuadrado cumple con las condiciones de ambos. Por eso las flechas de vuelta (dejaron sin agregar la flecha en sentido del cuadrado al rombo, aun cuando discutieron al respecto y hubo acuerdo. Entendiendo que las flechas indican "puede ser"). Al incorporar la condición de cuatro ángulos rectos, y no solo uno, formulan una definición con información redundante, así como también al incorporar condiciones acerca de la longitud e igualdad de sus lados.

De igual modo, en el caso del cuadrado, al enunciar la necesidad de que posea 4 ángulos rectos además de 4 lados iguales, cuando uno solo sería suficiente, deja de ser una definición minimal pero si lo es del tipo jerárquica.

Para el caso de los trapecios, si bien en el diagrama distinguen al trapecio rectángulo mediante el proceso de especialización, no elaboran una definición del mismo. En el diagrama podemos ver

también que diferencian los trapecios rectángulos, que son aquellos que tienen un ángulo recto, de los que no tienen ninguno.

Al analizar las definiciones de trapecios observamos que consideraron un conjunto minimal de condiciones: un ángulo recto y que las dos subcategorías que generaron son disjuntas, por lo tanto son del estilo particional. Sin embargo, un trapecio rectángulo es un caso particular de un trapecio más general, por lo tanto también hay jerarquía en el planteamiento.

Por otro lado, observamos que en la definición de trapezoide incluyeron como información la condición de ausencia de lados paralelos y la cantidad de lados que debe poseer, la cual resulta redundante. También, a partir del proceso de especialización, definen al romboide como “Necesita 2 pares de lados iguales y ningún lado paralelo”. En este caso, la información acerca de la cantidad de lados iguales por sí sola es insuficiente, pues podrían ser consecutivos u opuestos. Por otro lado, mencionar nuevamente la ausencia de lados paralelos resulta información redundante dado que el romboide es un caso particular del trapezoide y en consecuencia hereda sus propiedades. Sin embargo, ambas condiciones se complementan para definir correctamente al romboide.

Si consideramos los aportes de Govender y De Villiers (2002), quienes consideran definiciones incorrectas a aquellas que contienen propiedades incorrectas o insuficientes, podemos afirmar por lo antes analizado, que en todos los casos los estudiantes definieron de forma correcta a los cuadriláteros.

Una cuestión central que notamos en la producción de este grupo es que si bien desarrollaron un pensamiento jerárquico que quedó reflejado en un diagrama organizado y claro para la clasificación, no quedó plasmado de la misma forma en las definiciones que elaboraron. Realizamos esta afirmación en base a que las definiciones que redactaron no dan cuenta de la jerarquía con la que fueron pensados en la clasificación que ellos mismos produjeron. Por ejemplo, al definir al rectángulo como “Necesita tener 4 ángulos rectos y 2 pares de lados iguales y diferentes entre sí”, no se visibiliza que se está considerando al rectángulo como un caso particular de paralelogramo. Algo similar sucede con las definiciones de cuadrado, rombo y romboide. Asimismo, las propiedades que usan para definir rectángulo, cuadrado, rombo y romboide generan información redundante en relación con el paralelismo de lados que posee cada cuadrilátero.

Cabe resaltar que los estudiantes enunciaron las definiciones en forma de condiciones que una figura necesita para ser de un determinado tipo, en lugar de enunciar las características que posee, como usualmente se encuentran definidas en libros de texto. Por ejemplo, en Tirao (1979), que analizamos en el capítulo 3, encontramos un estilo de definición muy usual: “Un cuadrilátero se llama paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos”. Sin embargo, los estudiantes redactan qué condiciones necesita una figura para ser un paralelogramo: “*Paralelogramo: Necesita 2 pares de lados paralelas*”.

Esta forma de redacción puede estar vinculada con la discusión que se dio en la clase y con las intervenciones del docente, que cuestionó explícitamente cuáles son las condiciones mínimas “que necesita” satisfacer una figura para ser definida como tal. A su vez, es una primera aproximación a la escritura de definición y esta forma de redacción, podrá ser mejorada en el sentido del rigor matemático a partir del acompañamiento del docente.

Grupo 3

Este grupo también seleccionó como criterios para clasificar los cuadriláteros al paralelismo de lados, cantidad de ángulos rectos y cantidad de lados iguales. La clasificación y las definiciones que elaboraron son las siguientes:

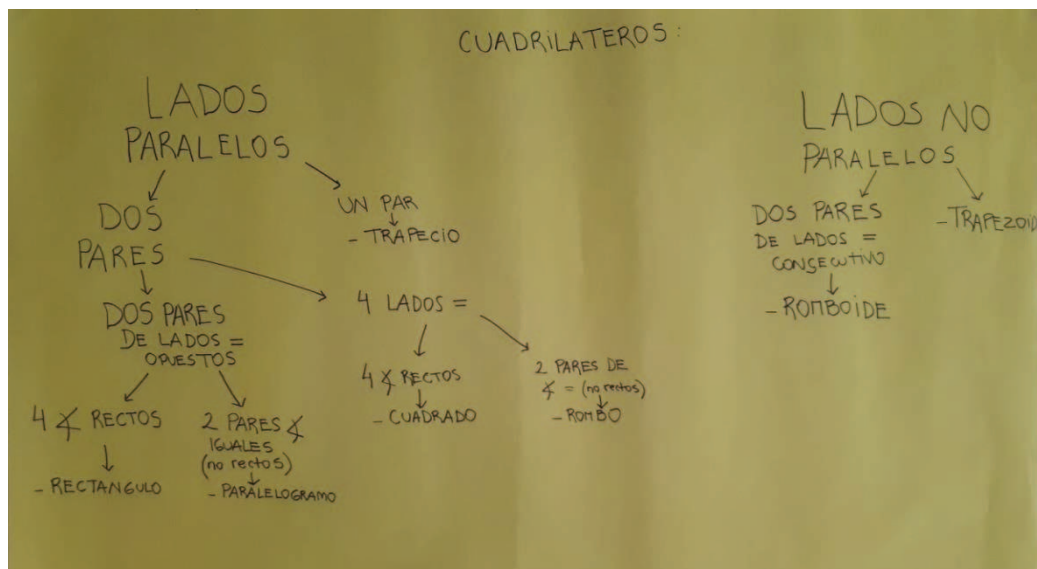


Imagen 31

Definiciones elaboradas por el grupo 3

Paralelogramo: dos pares de lados paralelos y dos pares de ángulos iguales no rectos.

Rectángulo: dos pares de lados paralelos y distintos entre sí, y todos sus ángulos interiores rectos.

Cuadrado: dos pares de lados paralelos, cuatro lados iguales y todos sus ángulos interiores rectos.

Rombo: dos pares de lados paralelos, dos pares de ángulos iguales no rectos y cuatro lados iguales.

Trapezio: tiene un par de lados paralelos, y dentro de esta categoría:

- **Trapezio isósceles:** un par de lados paralelos y los ángulos que se forman sobre los lados paralelos iguales.
- **Trapezio rectangular:** un par de lados paralelos y dos ángulos rectos.

Romboide: Ningún par de lados paralelos, tiene dos pares de lados consecutivos iguales y ángulos iguales.

Trapezoide: Ningún par de lados paralelos.

Cabe mencionar que notamos una evolución en las producciones de ambos grupos en esta actividad final, ya que en los diagramas que realizaron en esta instancia ambos grupos se ve una estructura mucho más organizada que en las actividades anteriores. A su vez, también observamos que en este grupo hay más coherencia que en el anterior entre las definiciones que elaboraron y el diagrama en el cual plasmaron la clasificación.

En la producción de este grupo observamos que los estudiantes no incluyeron en el diagrama que corresponde a la clasificación a todos los cuadriláteros que definieron. Por ejemplo, dentro de la categoría trapezio, los estudiantes definieron al trapezio isósceles y al trapezio rectangular, sin

embargo no los incluyeron en el diagrama. A su vez, también observamos que en el diagrama, en la categoría dos pares de lados paralelos, organizan a los cuadriláteros de acuerdo a dos criterios: “dos pares de lados opuestos iguales” y “cuatro lados iguales”, sin embargo el primero de ellos no fue mencionado en las definiciones de rectángulo y paralelogramo. Para mantener un orden, a continuación analizaremos las definiciones de cada uno de los cuadriláteros que los estudiantes redactaron.

Los estudiantes definieron tres grandes categorías de acuerdo a la cantidad de lados paralelos que poseen los cuadriláteros: “dos pares de lados paralelos”, “un par de lados paralelos” y “ningún par de lados paralelos”. Considerando las discusiones al interior del equipo podemos afirmar que las mismas fueron pensadas de forma excluyente, es decir que los cuadriláteros tengan exactamente la cantidad de pares de lados paralelos que indican.

Al compartir en la clase cuál fue el proceso que transitaron, los estudiantes expresaron que: *“empezamos como desde lo más general, que eran los lados paralelos a lo más específico de cada figura”*. Esto confirma que también este grupo definió los cuadriláteros, en términos de De Villiers (1994), de forma constructiva y mediante un proceso de especialización. Dentro de la categoría “dos pares de lados paralelos” dieron definiciones para rectángulo, paralelogramo, cuadrado y rombo; dentro de “un par de lados paralelos”, para trapecio, trapecio isósceles y trapecio rectangular, y finalmente dentro de la categoría “ningún par de lados paralelos”, para trapezoide y romboide.

Tanto el rectángulo, como el paralelogramo, cuadrado y rombo son especializaciones de “dos pares de lados paralelos distintos entre sí”, por lo que para definir al rectángulo establecieron como condición extra que tenga todos sus ángulos rectos. En el paralelogramo adicionan a los dos pares de lados paralelos distintos entre sí, que tenga dos pares de ángulos iguales no rectos; en el cuadrado que todos sus lados iguales y todos sus ángulos interiores rectos y por último en el caso del rombo requieren además que posea dos pares de ángulos iguales no rectos y cuatro lados iguales.

En la categoría “un par de lados paralelos” encontramos que los estudiantes adicionan propiedades al cuadrilátero general que es el trapecio y dan origen a dos casos particulares: trapecio isósceles y trapecio rectangular. Para definir al trapecio isósceles agregan como condición que los ángulos que se forman sobre los lados paralelos sean iguales y en el caso del trapecio rectangular adicionan como condición que posea dos ángulos rectos. Y por último en la categoría “Ningún par de lados paralelos”, en el caso del romboide adicionan como condición que posea un par de lados consecutivos iguales. Considerando los aportes de Rey Pastor y Puig Adam (1948), observamos que las definiciones de paralelogramo, rombo, rectángulo, romboide y trapezoide serían definiciones *negativas*, pues incluyen la carencia de alguna propiedad. En los casos de paralelogramo y rombo carecen de ángulos rectos; en el rectángulo por la carencia de pares de lados de la misma medida, y en el caso de romboide y trapezoide, de lados paralelos.

Analizaremos, tal como hicimos con el grupo 1, si las definiciones que enunciaron los estudiantes satisfacen la condición de minimalidad según Calvo (2001), si son incorrectas de acuerdo a Govender y De Villiers (2002) y también si generan una clasificación particional o jerárquica en términos de De Villiers (1994).

Comenzamos analizando las definiciones de los cuadriláteros dentro de la categoría: “Dos pares de lados paralelos”. Es importante mencionar que los estudiantes no le asignaron nombre a esta clase de cuadriláteros, por lo que al definir cada figura indican la necesidad de que posea dos pares de lados paralelos. En este sentido, el paralelogramo fue definido como *“dos pares de lados paralelos y dos*

pares de ángulos iguales no rectos". Al intentar restringir la presencia de ángulos rectos, mencionan dos pares de ángulos sin especificar si son opuestos o consecutivos. Si bien esta información es insuficiente, no genera una definición incorrecta en términos de Govender y De Villiers (2002), debido a que es información redundante, dado que la condición mínima que se debería requerir es solamente un ángulo no recto (pues a partir de ésta puede deducirse el resto). Por lo tanto, esta definición al contener información redundante, es una definición no económica. Por otro lado, al incorporar dicha restricción se anula la posibilidad de que por ejemplo un rectángulo satisfaga las condiciones de un paralelogramo, por lo que genera una clasificación particional.

El rectángulo fue definido como *"dos pares de lados paralelos y distintos entre sí, y todos sus ángulos interiores rectos"*. Podemos afirmar que no es una definición minimal dado que enuncian como condición que todos sus ángulos interiores sean rectos, cuando partiendo del paralelismo de sus lados basta con exigir que solo uno lo sea para deducir el resto. Si bien es cierto que esta definición no es minimal, aporta más claridad hablar de cuatro ángulos rectos que de uno solo. Estas son cuestiones a tener en cuenta desde un punto didáctico y no meramente lógico matemático. Al exigir que los pares de lados paralelos sean distintos entre sí, se excluye la posibilidad de que un cuadrado satisfaga las condiciones del rectángulo, por lo tanto da origen a una clasificación del tipo particional y la definición enunciada es correcta en términos de Govender y De Villiers (2002).

El rombo fue definido como *"dos pares de lados paralelos, dos pares de ángulos iguales no rectos y cuatro lados iguales"*. En este caso, al igual que en el paralelogramo, los estudiantes intentaron restringir que tenga ángulos rectos mencionando dos pares de ángulos no rectos, sin embargo no especifican si los pares de ángulos son opuestos o consecutivos. Si bien es insuficiente, tampoco en este caso genera una contradicción, se trata de información redundante. En este caso es suficiente con restringir que solo uno de los ángulos no sea recto, motivo por el cual la definición no es económica, pero si es correcta en términos de Govender y De Villiers (2002). Al exigir la ausencia de ángulos rectos, se excluye la posibilidad de que el cuadrado satisfaga las condiciones del rombo, por lo tanto genera una clasificación del tipo particional.

El cuadrado fue definido como: *"dos pares de lados paralelos, cuatro lados iguales y todos sus ángulos interiores rectos"*. En este caso la condición necesaria y suficiente para definir al cuadrado, además de los cuatro lados iguales, es la presencia de un ángulo recto, en consecuencia al exigir los cuatro no representa una definición económica, pues contiene propiedades que pueden deducirse. La definición elaborada es correcta en términos de Govender y De Villiers (2002). En cuanto al tipo de clasificación que genera, al considerar el resto de las definiciones elaboradas, observamos que el cuadrado no cumple con las condiciones de ningún otro cuadrilátero, por lo tanto la clasificación es particional.

Avanzamos ahora en el análisis de la categoría "un par de lados paralelos", que si bien no es explícito en la redacción, al analizar los diálogos al interior del grupo encontramos evidencia de que consideran exactamente solo un par de lados paralelos. Los estudiantes tampoco asignaron un nombre a esta categoría, por lo que al definir los cuadriláteros que pertenecen a ella mencionan en cada caso la propiedad de tener un par de lados paralelos.

Definieron al trapecio como: "tiene un par de lados paralelos". Esta definición no posee información redundante, por lo que podemos decir que es económica y también es correcta en términos de Govender y De Villiers (2002), pues no contiene ninguna condición errónea. En este caso, podemos observar que esta definición da origen a una clasificación del estilo jerárquica, pues figuras con propiedades más específicas estarán incluidas en esta categoría.

Si bien no está incluido en el diagrama, el trapecio isósceles fue definido como: *“un par de lados paralelos y los ángulos que se forman sobre los lados paralelos iguales”*. A pesar de que la definición no contiene información redundante, no es suficiente la condición que establecen sobre la igualdad de ángulos. Si los ángulos iguales fueran consecutivos (adyacentes ambos a uno de los lados iguales) u opuestos, la figura definida sería un rectángulo y esto contradiría la condición de que esta familia posea un solo par de lados paralelos. Por lo tanto, podemos afirmar que esta definición es incorrecta en términos de Govender y De Villiers (2002), por falta de precisión en las condiciones enunciadas.

El trapecio rectangular fue definido de la siguiente manera: *“un par de lados paralelos y dos ángulos rectos”*. En este caso, la definición tampoco contiene información redundante, pero es insuficiente. No aportan detalle en relación a qué ángulos deben ser rectos, por lo que admitiría que los ángulos rectos sean adyacentes a uno de los lados paralelos y nuevamente la figura definida sería un rectángulo. Por lo cual esta definición es incorrecta en términos de Govender y De Villiers (2002).

La última categoría que definieron es *“Ningún par de lados paralelos”*, a la cual tampoco le asignaron nombre. En el diagrama vemos que diferenciaron dos tipos de cuadriláteros dentro de ésta: Romboide y Trapezoide. Analizamos a continuación las definiciones elaboradas.

El trapezoide fue definido como: *“Ningún par de lados paralelos”*. Como no ofrece información redundante podemos afirmar que la definición es económica. Además es correcta en términos de Govender y De Villiers (2002). Sin embargo, no podemos asegurar que dé origen a una clasificación jerárquica, pues al definir romboide como un cuadrilátero especial de los que no tienen lados paralelos, interpretamos (también a partir de la organización del diagrama) que esta categoría no incluye a aquellos que tienen dos pares de lados consecutivos iguales, generando dentro de esta categoría subcategorías disjuntas: trapezoides y romboides.

Por otro lado, el romboide fue definido de la siguiente manera: *“Ningún par de lados paralelos, tiene dos pares de lados consecutivos iguales y ángulos iguales”*. Esta definición contiene información redundante y además insuficiente, por lo cual no es económica y tampoco correcta en términos de Govender y De Villiers (2002). Redundante ya que a partir de la condición de igualdad de lados se puede deducir la igualdad de ángulos, e insuficiente pues no especifican que los pares de lados iguales deben ser distintos entre sí, dando lugar de este modo a que esta definición abarque por ejemplo al cuadrado o rombo contradiciendo de este modo, la ausencia de lados paralelos.

En síntesis, los estudiantes formularon tres definiciones incorrectas en términos de Govender y De Villiers (2002), las de trapecio isósceles, trapecio rectángulo y la de romboide. En los tres casos se las consideró incorrectas por ser insuficiente la información que incluyen en la misma, y no por la inclusión de propiedades incorrectas.

Capítulo 7: Conclusiones

7.1. Acerca del funcionamiento de la secuencia en la implementación

Los objetivos que perseguimos en cada una de las actividades y con la secuencia completa consideramos que fueron logrados, tal como hemos descrito en el capítulo 7 donde realizamos el análisis a posteriori.

Los estudiantes recuperaron sus conocimientos acerca de cuadriláteros, los pusieron en discusión y en todos los casos construyeron conocimientos nuevos. En cada actividad analizaron propiedades distintas de los cuadriláteros y formularon una definición para cada uno de ellos, consideraron cuáles condiciones son necesarias para realizarlos y/o caracterizarlos. También compararon figuras y establecieron semejanzas y diferencias.

Observamos que los estudiantes conocían muy poco acerca de algunos cuadriláteros, como por ejemplo los trapecios, trapezoides y los cóncavos (en los cuales no profundizamos). En la primera clase los estudiantes manifestaron no conocer por ejemplo los trapezoides y cuadriláteros cóncavos, incluso en la clase 4 encontramos por ejemplo un diálogo en el que los estudiantes expresaron que un trapecoide era un cuadrilátero con todos los lados desiguales; sin embargo, en el transcurso de las actividades, lograron describirlos, establecer que pueden tener hasta tres lados iguales, entre otras propiedades, y caracterizarlos en algún grado. A su vez, en el caso del trapecio, en la primera clase solo los caracterizaban por tener un par de lados paralelos y luego establecieron propiedades en relación a sus ángulos, diagonales y cantidad de lados iguales.

En los casos de los paralelogramos, rectángulos, cuadrados y rombos, cuadriláteros que eran “conocidos” por los estudiantes, en el sentido en que los podían diferenciar de otros, en general solo reconocían propiedades como el paralelismo de lados, igualdad de lados y presencia de ángulos rectos. Observamos que en el transcurso de las clases profundizaron el estudio de los mismos, caracterizando sus diagonales e incluso uno de los grupos desarrolló un razonamiento asociado a definiciones jerárquicas, considerando que los cuadrados son un caso particular de los rombos y rectángulos, y estos últimos de los paralelogramos.

Esto nos da evidencia de que la imagen conceptual que los estudiantes poseían de cada uno de los cuadriláteros que se estudió fue enriquecida a lo largo del desarrollo de la secuencia.

Consideramos que a partir de la implementación, los estudiantes construyeron la idea de que hay más de una definición posible para cada cuadrilátero, y que todas pueden ser correctas, dado que las mismas son elaboradas poniendo de relieve una u otra característica de los mismos.

Por otro lado, también logramos que los estudiantes sean conscientes de que el proceso que transitaron les permitió caracterizar los cuadriláteros analizando distintas propiedades que poseen, y principalmente que experimenten que las definiciones surgen como producto de este proceso y no como punto de partida.

Nos resulta interesante mencionar que, si bien lo habíamos anticipado en el análisis a priori, no constituía parte de los objetivos que en la última actividad los estudiantes clasifiquen y definan a los cuadriláteros de acuerdo al paralelismo de los lados. Esto pone de manifiesto el peso que aún tiene en ellos “lo aprendido” en la escuela, sobre “lo nuevo” que abordamos en esta secuencia.

En relación con esto, consideramos que no es casual que los estudiantes hayan formulado una clasificación de acuerdo al paralelismo de los lados de los cuadriláteros, ya que ellos buscaban generar una clasificación clara, sencilla y ordenada y, utilizando los nombres convencionales de los

cuadriláteros, el único criterio que se los permitiría es el mismo paralelismo. Las clasificaciones que generaron de acuerdo a otros criterios, no les resultaron claras, argumentando que una misma figura pertenecía a muchas categorías a la vez. Sin embargo, valoramos que a pesar de que no se despegaron de la clasificación de acuerdo al paralelismo de lados, el trabajo con la secuencia les permitió otra mirada al respecto, y fundamentalmente, el reconocimiento de que esta forma y estos criterios de clasificación, no son los únicos.

Por otra parte, tampoco formó parte de nuestros objetivos que los estudiantes elaboren clasificaciones jerárquicas; sin embargo, las tareas que se propusieron fueron abriendo el camino para que puedan realizarlo.

En el proceso que transitamos en esta investigación, lo que describimos anteriormente fue algo que nos llevó, a mí como investigadora y a mis directoras, a cuestionarnos el papel que queríamos que tengan las clasificaciones jerárquicas: ¿nos interesaba generar una propuesta que apuntara a la construcción de clasificaciones jerárquicas? ¿Cuál era la riqueza didáctica de este trabajo? En este sentido, priorizamos dar origen a una propuesta que posibilite que los estudiantes construyan diferentes clasificaciones y a partir de ellas, promover un ambiente de reflexión en el que se discutan semejanzas y diferencias entre ellas. Además de cuestionar cómo se ve modificado el trabajo con las demostraciones de propiedades si parto de universos de cuadriláteros particionales o jerárquicos, entre otras posibles acciones.

7.2. Conclusiones generales

A modo de conclusión general de esta investigación, podemos mencionar que la Teoría de Situaciones fue un marco teórico que nos permitió visibilizar cuestiones en relación con el diseño, el análisis y la implementación de la secuencia didáctica, que posiblemente de otro modo no hubiéramos tenido en cuenta o al menos no de forma tan consciente. Así es que pensamos en situaciones que promuevan que los estudiantes realicen tareas propias del quehacer matemático, que consideren y sean necesarios los saberes que tienen disponibles, y que a su vez éstos sean el punto de partida para generar nuevos; también anticipamos posibles decisiones que los estudiantes podrían tomar para resolver los problemas, las posibles intervenciones y gestión de la clase por parte del docente.

El estudio didáctico realizado acerca de las definiciones y clasificaciones junto con el análisis de libros y la revisión de antecedentes realizados en los capítulos 3 y 4, nos permitieron profundizar en nuestro objeto de estudio, reconocer dificultades en su enseñanza y conocer una visión del tratamiento que se dio a las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros en libros de texto presentes en los programas de cátedras de Geometría para las carreras de Profesorados de Matemática de nivel universitario como de superior no universitario. Dicho estudio permitió observar el predominio del paralelismo de lados como único criterio en las clasificaciones de cuadriláteros en los libros, así como también reafirmar la importancia y necesidad de que futuros docentes vivencien el proceso de construcción de definiciones y clasificaciones. Este hecho modificó algunas ideas y propósitos con las cuales comenzábamos a plantear esta investigación, dejó de interesarnos la generación de una propuesta de enseñanza que continúe replicando un tratamiento de cuadriláteros que de manera unilateral e indiscutida es expuesto en libros de texto y comenzamos a hacernos preguntas como ¿qué necesitan los futuros docentes conocer acerca de las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros? ¿Tiene sentido clasificar cuadriláteros por el solo hecho de clasificarlos? ¿Cuándo cobran sentido las tareas de clasificar y definir?

En este marco, con este insumo de base y a partir de estos cuestionamientos, diseñamos la secuencia que tuvo como propósito propiciar la exploración de cuadriláteros, la clasificación de acuerdo a distintos criterios y como cierre la elaboración de distintas definiciones de los mismos.

A continuación, recuperamos los objetivos que planteamos en el Capítulo 1 y describimos algunas conclusiones respecto a ellos.

En primer lugar, retomamos los objetivos que definimos como secundarios, que resultaron en nuestro caso imprescindibles para el logro de los primarios y que implicaban:

- Diseñar e implementar una secuencia didáctica que promueva la construcción de diversas clasificaciones y definiciones de cuadriláteros.
- Caracterizar y categorizar las clasificaciones y definiciones elaboradas por parte de futuros profesores.

En relación al primero de ellos, una de las primeras acciones fue el diseño de una secuencia didáctica compuesta por cinco actividades que, a partir de la exploración de cuadriláteros y de poner el foco en distintas propiedades de los mismos, promueva la creación de distintas definiciones y clasificaciones. Luego de realizar el análisis a priori que incluimos en el Capítulo 5, la implementamos con el grupo de futuros docentes que describimos en el Anexo 2. El análisis del recorrido completo que realizamos en el Capítulo 6 nos permitió tener una visión global del proceso por el que cada uno de los grupos transitó durante la puesta en práctica de la secuencia

A partir de este análisis elaboramos las conclusiones que presentamos a continuación. Nos resulta importante mencionar que las conclusiones a las que arribamos, si bien no son generalizables³⁴, permiten comprender y describir posibles procesos de construcción de los conocimientos.

El trabajo con la secuencia permitió que los futuros docentes exploren cuadriláteros, establezcan propiedades, formulen definiciones y elaboren clasificaciones de acuerdo a distintos criterios, consiguiendo de esta manera cumplir con uno de los objetivos que persigue la secuencia, que los estudiantes sean conscientes de que las definiciones y las clasificaciones no son únicas. Para que esto suceda, las interacciones entre pares al interior de cada grupo y con la clase completa jugaron un papel relevante.

Tomando como referencia los aportes de Cambriglia et al. (2010), podemos afirmar que la metodología de trabajo que seleccionamos, basada en la alternancia de momentos de trabajo al interior de cada grupo y de momentos de intercambio con la clase completa, posibilitó que las interacciones entre los estudiantes se constituyeran en un medio de construcción de conocimientos, ya que dieron lugar a que a partir de ellas se problematicen situaciones, se discutan conjeturas y se establezca la validez de las mismas. Observamos que, a lo largo de los momentos de intercambio, los estudiantes han asumido distintos roles en las interacciones, han sido emisores, receptores y simultáneamente intérpretes y productores de mensajes e información. Tal como afirman las autoras mencionadas, el acto de interpretar conduce potencialmente a la producción de algo nuevo que solo es posible a partir de la producción del otro, cuestión que hemos visto suceder cuando los estudiantes tomaron las afirmaciones que otros elaboraron, las interpelaron, discutieron y dieron origen a otras nuevas.

³⁴ Uno de los motivos es el tamaño pequeño de la muestra, sumado a que estamos trabajando con un único caso, que hemos seleccionado por la posibilidad de acceder a él.

Para responder al objetivo general en el que nos proponemos explorar y analizar el proceso de elaboración de clasificaciones y formulación de definiciones por parte de futuros docentes, analizamos qué tipo de definiciones y clasificaciones formularon los estudiantes a lo largo del trabajo con la secuencia. Uno de los principales puntos que nos interesa resaltar es que formularon clasificaciones de acuerdo a distintos criterios: paralelismo de lados, cantidad de lados iguales, cantidad de ángulos obtusos, rectos y agudos que poseen los cuadriláteros, posición relativa y longitud de sus diagonales e incluso combinando simultáneamente algunos de estos, como ser paralelismo de lados, cantidad de ángulos rectos y lados iguales. Este trabajo nos resultó sumamente fértil, pues permitió que los estudiantes exploren, profundicen y amplíen lo que conocen de cada uno de los cuadriláteros y que finalmente seleccionen aquellos criterios que les resultaron, al interior de cada grupo, apropiados para formular definiciones y clasificaciones en la actividad final.

En cuanto a la selección de criterios para clasificar cuadriláteros, observamos que el trabajo con cada una de las actividades de la secuencia propició que los estudiantes evalúen y seleccionen aquellos que daban lugar a una clasificación ordenada y clara de todos los cuadriláteros estudiados. Si bien no era nuestro objetivo, en la actividad de cierre, como ya mencionamos, en ambos grupos el criterio principal seleccionado fue el paralelismo de lados.

En relación con el tipo de clasificaciones que elaboraron, observamos que a lo largo de las primeras cuatro actividades predominaron las del tipo particional, sin embargo, en la última actividad uno de los grupos elaboró una clasificación mixta, tanto del tipo jerárquica como particional, tal como la que hemos visto en Puig Adam (1980).

Por otro lado, a pesar de que no consideramos el trabajo del grupo 4 debido a que los estudiantes no estuvieron presentes en todas las clases, nos resulta de gran interés mencionar que, habiendo trabajado en su cursado del año anterior con una clasificación jerárquica de cuadriláteros, en esta oportunidad formularon una clasificación del estilo particional.

Las dos cuestiones que mencionamos anteriormente nos dan evidencias del gran peso que tiene en los niveles primario y secundario la enseñanza de clasificaciones particionales, y además, cómo esto puede convertirse en un obstáculo al momento de desarrollar un razonamiento más ligado a lo jerárquico en materia de clasificaciones.

Otra cuestión que resulta importante mencionar es que consideramos muy positivo el uso de Geogebra en el desarrollo de la secuencia, pues brindó la posibilidad a los estudiantes, a través del arrastre de elementos de los cuadriláteros, de obtener algunos que manifestaron no conocer, como por ejemplo trapecios, trapezoides, cuadriláteros cóncavos. A su vez, también promovió la formulación de conjeturas en relación con la posibilidad o imposibilidad de construir figuras, en relación con las condiciones que deben cumplir ciertos elementos como las diagonales, los lados y ángulos. Esto, sin duda, fue una decisión acertada ya que, si no hubieran utilizado Geogebra, posiblemente hubieran mantenido el foco de estudio solo en figuras que ya conocían.

A modo de cierre, no queríamos dejar de mencionar algunas cuestiones que generaron grandes reflexiones en nuestro equipo. Una de ellas es qué nos dice nuestro lenguaje acerca de lo particular y de la generalidad. Algunas preguntas que nos hicimos en torno a esto son: ¿cuál es la diferencia al referirnos a “un” cuadrado, a “el” cuadrado o a “los” cuadrados? En estas preguntas se ven reflejados el uso de cuantificadores y artículos, obstáculos que, como afirman distintos autores, forman parte de la construcción de definiciones, y hasta nos atrevemos a afirmar que forman parte de la construcción de imágenes mentales en los estudiantes. ¿Cuál es la construcción que un estudiante realiza cuando

afirma que “un cuadrado” tiene ciertas características frente a otro que afirma que “los cuadrados” o “todos los cuadrados”?

Consideramos que es un punto en el cual se debe hacer foco en el trabajo con futuros docentes, hacer explícitas estas diferencias y hacerlos conscientes del uso del lenguaje en la construcción de conjeturas, definiciones y validaciones.

Por último, en esta investigación asumimos la doble función de docente-investigador. Esto tuvo como ventaja que la implementación sea realizada por quien diseñó la secuencia y sus propósitos, así como que también el vínculo y contrato didáctico ya estaba construido con los estudiantes. Sin embargo, consideramos que obstaculizó la posibilidad de analizar imparcialmente la gestión del docente, al no contar con la distancia necesaria de un observador.

Si bien hemos analizado el funcionamiento de la secuencia didáctica en su implementación, creemos que la misma se convirtió en el medio que nos permitió conocer cómo este grupo de futuros docentes construyó saberes acerca de cuadriláteros, con qué dificultades se encontraron en el proceso y qué tipo de definiciones y clasificaciones formularon.

7.3. Próximas implementaciones

El análisis del funcionamiento de la secuencia en su implementación nos concedió la oportunidad de reflexionar acerca de algunas cuestiones que pueden ser mejoradas para una próxima puesta en práctica.

Algunas modificaciones en las consignas y en las tareas que estas proponen, que no repetiremos en este apartado, han sido descritas en el cuerpo del capítulo 6. Estos cambios tienen como propósito generar que las mismas sean más abiertas, que no anticipen posibles soluciones y formas de proceder y que favorezcan aún más la toma de decisiones por parte de los estudiantes.

Consideramos que en una próxima implementación sería necesaria una clase extra, número 6, en la cual se trabaje en el análisis de las definiciones que se elaboraron. Si bien este trabajo fue realizado en esta ocasión, no formó parte de la secuencia y en consecuencia del análisis. En un principio, como investigadora me interesaba analizar los alcances y limitaciones de la secuencia, sin embargo como docente de la materia resultó un trabajo fértil, no solo didácticamente sino matemáticamente, reflexionar en torno a lo elaborado. Consideramos entonces que en esta sexta clase será interesante analizar las definiciones que cada grupo elaboró, compararlas, establecer diferencias si las hay, pulir cuestiones que no estén claras, analizar si contienen información redundante, si son correctas o no y analizar el carácter particional o jerárquico de las mismas. Para ello, si no se ha abordado antes, en esta clase será necesario compartir con los estudiantes los constructos teóricos para trabajar en base a éstos.

Si la discusión lo amerita, será interesante también que en esta clase se discuta el obstáculo que descubrimos al implementar la secuencia: ¿cómo es posible que en una clasificación particional haya figuras que pertenecen a distintas categorías?

El trabajo con este conflicto puede dar lugar a proponer una actividad extra cuya tarea consista en otorgar nuevos nombres a las figuras de acuerdo a las propiedades que se estén considerando, tal como hemos descrito en la Sección 6.5.1.

Por otro lado, al analizar las producciones de los estudiantes a lo largo de la secuencia y en la última actividad, nos surge una cuestión interesante en la cual nos detendremos: ¿en qué medida el hecho de que las figuras fueran conocidas fue un obstáculo para que los estudiantes formulen clasificaciones y definiciones del estilo jerárquicas?

Hemos observado que los estudiantes consideraron por ejemplo con mayor frecuencia a los romboides como caso especial de trapezoides, que a los cuadrados como casos de rectángulos.

También tuvieron lugar discusiones interesantes acerca de las condiciones que pueden satisfacer los trapezoides, figuras poco exploradas en su variedad, y el análisis de qué condiciones deberían satisfacer para “convertirse” en otras figuras. En estos razonamientos observamos frutos del trabajo con la secuencia, porque logró que los estudiantes se corrieran de sus esquemas y vislumbraran categorías inclusivas. Nos resulta importante mencionar que en estas situaciones es donde el docente debería dar el debido valor a estos pensamientos “inclusivos” para intentar generar un cambio en la mirada de los estudiantes. Si bien no fue uno de nuestros objetivos y hubo intervenciones del docente que acompañaron este razonamiento por parte de los estudiantes, consideramos que sería algo importante para considerar en la gestión del docente para una futura implementación.

7.4. Futuras líneas de acción

En base a uno de los grandes obstáculos que en esta investigación encontramos, que es la utilización de la denominación de los cuadriláteros de acuerdo a la clasificación de acuerdo al paralelismo de lados en la construcción de clasificaciones a partir de otros criterios, es que consideramos que un trabajo interesante para continuar es el desarrollo de una propuesta de enseñanza que promueva la construcción de clasificaciones y de definiciones de figuras poco exploradas como los trapezoides, o quizás los hexágonos, donde no hay nombres conocidos con anterioridad.

En base a lo que hemos analizado, consideramos que el estudio de figuras poco conocidas por los estudiantes podría constituir un terreno fértil para la exploración de sus propiedades y la formulación de criterios de clasificación, pues es posible que no cuenten con saberes previos ni nombres acerca de los mismos en los que apoyarse. De este modo se podría generar un ámbito libre de preconcepciones para la construcción de clasificaciones y definiciones, que permita un trabajo genuino de formulación de conjeturas, de discusión y de validación.

Esto promoverá también que se consolide el proceso de producción de definiciones como una actividad propia de la matemática, tan importante y esencial como otras, así como también que los estudiantes visualicen que las definiciones son el producto de un proceso de exploración y de estudio de las figuras y no el punto de partida del conocimiento.

Otra línea de investigación que consideramos interesante para continuar profundizando, es el estudio epistemológico de las definiciones y clasificaciones en matemática y en particular en geometría.

7.5 Aportes para la formación docente

A partir del análisis realizado en esta investigación, consideramos que la experiencia con la secuencia ofreció un ambiente propicio para la discusión y reflexión en torno a cuestiones, que mencionamos a continuación, y que constituyen, a nuestro criterio, un aporte significativo para el abordaje del tema en la formación de docentes.

- El vocabulario geométrico es una necesidad para comunicarse con otros estudiantes y con el docente, para economizar en la descripción de las figuras y para precisarlas.

- Una figura geométrica tiene unas propiedades que la diferencian de otras y la caracterizan, de esas propiedades seleccionamos algunas para clasificarlas y definirlas.
- Al contrastar ejemplos de figuras que cumplen ciertas propiedades con objetos que no, se enriquecen las colecciones de ejemplos de manera que no incluyan únicamente los casos prototípicos.
- La clasificación de objetos geométricos no siempre es única, depende de las definiciones y de los criterios de clasificación. Si los criterios son cambiantes, ¿por qué no cambiarlos para enriquecer la observación y exploración de las propiedades de diferentes figuras?
- La construcción de clasificaciones y definiciones de figuras no son el punto de partida del trabajo matemático, los estudiantes pueden otorgar sentido a las mismas cuando son consideradas como procesos, como parte de la actividad matemática.
- Los procesos de clasificación y de definición no están separados, dependen uno del otro.
- La posibilidad de explorar las figuras poniendo el foco en distintas propiedades, es un camino fértil para que los estudiantes las analicen y posteriormente construyan clasificaciones y definiciones.
- Al seleccionar otras propiedades y combinarlas como criterios para clasificar figuras, es posible encontrar casos en los que no será posible cumplir todas las condiciones y no existirá ninguna figura que las satisfaga.
- El trabajo con las propiedades se amplía con la exploración de relaciones no siempre evidentes, en algún caso puede ser de gran ayuda el uso del software de geometría dinámica, en otros un buen apoyo resulta la utilización de materiales físicos.
- La exploración de figuras con ciertas condiciones dadas, a partir de un software de geometría dinámica, posibilita que los estudiantes vayan más allá de las que conocen, pues construyen figuras que no hubieran logrado analizar de otra manera.
- Los nombres que conocemos de las figuras responden a una clasificación particular que contempla ciertas características, esto puede generar dificultades al usar otros criterios para agrupar colecciones de figuras.
- La concepción de los estudiantes de lo particular y de la generalidad en el lenguaje coloquial se enfrenta al uso de cuantificadores y artículos en el lenguaje matemático; y forma parte de la construcción de definiciones y de sus imágenes mentales.
- Las interacciones entre pares, planificadas y mediadas por el docente, se constituyen en un medio de construcción de conocimiento. Los estudiantes intercambian roles en la comunicación, no son solo receptores, sino también emisores de información y en este intercambio se aceptan enunciados de otros o se interpelan, lo cual propicia la formulación de conjeturas.
- La argumentación surge como la necesidad de fundamentar las decisiones que se toman y afirmaciones que se formulan.

Algunas de estas cuestiones son propias del “hacer matemática” y otras del conocimiento especializado del profesor, que consideramos son necesarias tener en cuenta a la hora de pensar propuestas de enseñanza que involucren procesos de construcción de definiciones y clasificaciones.

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1995). "Ingeniería Didáctica". En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Una Empresa Docente—Grupo Editorial Iberoamericana.
- Aya, O., Echeverry, A. y Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo? *Sophia* 12(1), 139-158.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Universidad de los Andes. Traducción realizada por Pedro Gómez y Ángela Pinilla.
- Barreiro, P., Leonian P., Marino T., Pochulu M. y Rodríguez M. (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación Matemática*. Ediciones UNGS.
- Barreiro, P., y Rodríguez, M. (2014). Análisis del potencial matemático de consignas para la clase de matemática. *Actas de las V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas Investigación en Educación Matemática*. Universidad Nacional del Litoral.
- Bartolomé, O. y Fregona, D. (2003). El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales. En M. Panizza (comp), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB: Análisis y Propuestas* (pp.131-161). Paidós.
- Berté, A. (1999). *Matemática Dinámica*. A-Z editora.
- Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega. FaMAF. UNC.
- Brousseau, G. (1995). *E' enseignant dans la théorie des situations didactiques*. École d' Été.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. (Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales).
- Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria*. Síntesis.
- Cambriglia, V, Sadovsky, P. y Sessa, C. (2010). *Procesos colectivos de generalización*. III Repem-Memorias.
- Charlot, B. (1986). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de la enseñanza de las matemáticas*. Conferencia dictada en 1986, Cannes, Francia.
- Chemello, G. (2002). *La enseñanza de la Matemática y la formación del pensamiento. Un estudio sobre la demostración en el nivel medio*. Tesis de Maestría en Didácticas Específicas. Universidad de Buenos Aires.
- Chevallard Y. y Johsua M. A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique. La notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(2), 157–289, 466.
- Chevallard, Y. (1996). *La transposición didáctica et l'avenir de l'École*. IUFM de Aix-Marseille. Traducción realizada por Marianna Bosch.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor.
https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf
- De Villiers, M.D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? Paper in *PME 22 Proceedings*, A. University of Durban-Westville, South Africa.
- Fischbein, E. (1993). La teoría de los conceptos figurales. (Traducción de Víctor Larios Osorios; tomada de versión original). *Educational Studies in Mathematics* 24 (2). 139-162.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.
- Godino, J., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño*.
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_2013_Ingenieria_didactica.pdf
- Govender, R. y De Villiers, M. (2002). *Constructive evaluation of definitions in a sketchpad context*. Presentado en Associated Mathematics Educators of South Africa AMESA 2002. University of Natal, Durban, South Africa.
- Instituto Nacional de Formación Docente (2015). *Clase 03. Estudio de una propuesta didáctica para los primeros abordajes de las regularidades en la serie numérica. Módulo: Enseñanza del número y el sistema de numeración – 1º ciclo*. Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria. Ministerio de Educación de la Nación Argentina.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Libros del Zorzal.
- Itzcovich, H. (Coord.). (2014). *La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Aique.
- Laborde, C. y Capponi, B. (1994): "CABRI-GEOMETRE Constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de Figure géométrique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1), 2, 165-210.
- Lincoln, Y. y Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. SAGE.
- Mariotti, M. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- Mason, J. (1996). *Expressing Generality and Roots of Algebra*.
https://www.researchgate.net/publication/279402143_Expressing_Generality_and_Roots_of_Algebra
- McKnight, C., Magid, A., Murphy, T. y McKnight, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. American Mathematical Society.
- McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. Pearson Education.
- Micelli, M., y Crespo Crespo, C. (2012). *¿Existe más de una clasificación de cuadriláteros? ¿Por qué?* ALME. <http://funes.uniandes.edu.co/4358/1/MicelliExisteALME2012.pdf>
- Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2008). *Matemática geometría. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio*.
- Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2021). *Cuaderno para docentes. Serie Reencuentros*.
<https://www.educ.ar/recursos/156397/reencuentros-cuaderno-para-docentes-cuarto-yquinto-grado-pr>
- Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2015). *Diseño Curricular del Profesorado en Educación Secundaria*.
- Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). *Diseño curricular Educación Secundaria Orientada*.
- Munarriz, B. (1992). Técnicas y métodos en Investigación cualitativa. En J. Muñoz Cantero, J y E. Abalde Paz (coord.). *Metodología Educativa I* (pp. 101-116). Universidade da Coruña.

- Novembre, A., Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). *Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza*. ANSES.
- Panizza, M., Bartolomé, O., Broitman, C., Fregona, D., Itzcovich, H., Quaranta, M. E., Ressa de Moreno, B., Saiz, I., Tarsow, P. y Wolman, S. (2003). *Enseñar Matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y propuesta*. Paidós.
- Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. (15ª ed.). Gomez Puig Ediciones.
- Renzulli, F y Scaglia S. (2006). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de egb3 y futuros profesores nivel inicial.
https://www.researchgate.net/publication/268253441_Clasificacion_de_cuadrilateros_en_estudiantes_de_EGB3_y_futuros_profesores_de_Nivel_Inicial
- Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1928). *Elementos de Geometría*. Colección Elemental Intuitiva. Nuevas Gráficas.
- Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1948). *Metodología de la Matemática Elemental* (2da ed.). Ibero-Americana.
- Sadovsky, P. (1999). *Marco general del Pre Diseño Curricular*. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy*. Libros del Zorzal.
- Sadovsky, P. (s.f.). La Teoría de las Situaciones Didácticas: Un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática.
https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf
- Sadovsky, P., Alagia H. y Bressan A. (2005). Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Libros del Zorzal.
- Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H. y Broitman, C. (1998). La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Documento de actualización curricular N°5. GCBA- Secretaría de Educación. Dirección de currícula.
- Sanchez-Marmol, L. y Perez-Beato, M (1945). Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación. Tomo I. Segunda edición. S.A.E.T.A.
- Sierra, M., González, A. y López. C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria. *Enseñanza de las ciencias*, 17(3), 463-476.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*.
https://www.researchgate.net/publication/37143310_Concept_Image_and_Concept_Definition_in_Mathematics_with_Particular_Reference_to_Limits_and_Continuity
- Tirao, J. (1979). *El plano*. Docencia.
- Vidal, R. (2010). El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo 1910-2010. *Cuadernos de Educación N° 27*, Facultad de Educación Universidad Alberto Hurtado.
- Villella, J. (2001). *El razonamiento pedagógico de los docentes en relación con la selección y uso de libros de textos en la clase de geometría con alumnos de 12-14 años*. Memoria de Investigación para la obtención del DEA (Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Huelva.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Springer.
- Winicki Landman, G y Leikin, R. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions. Part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17-21.

Winicki Landman, G. (2006). Las definiciones en Matemáticas y los procesos de su formulación: Algunas reflexiones. California State Polytechnic University, Pomona – USA. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19*.

Yuni, J. y Urbano, C. (2006). Técnicas para investigar: recursos metodológicos para la preparación de proyectos de investigación. Editorial Brujas.

Páginas de internet consultadas

Saiz, I. y Acuña, N. La didáctica de la matemática como disciplina científica (sd). En Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación. http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/tradiciones-deensenanza/-sintesis-deldesarrollo-de-algunas-teorias-sobre-la-ensenanza-de-la-tematica/la_didactica_de_la_matematica.php?page=1

Anexos

Anexo 1

En este anexo incluimos un análisis a priori detallado de la actividad 1 de la secuencia didáctica. En particular, cuáles cuadriláteros se pueden formar combinando dos triángulos, iguales o distintos, de la actividad 1, y cuáles serían posibles validaciones por parte de los estudiantes. La consigna es la siguiente:

Actividad 1: “Formando cuadriláteros a partir de triángulos”

Primera parte:

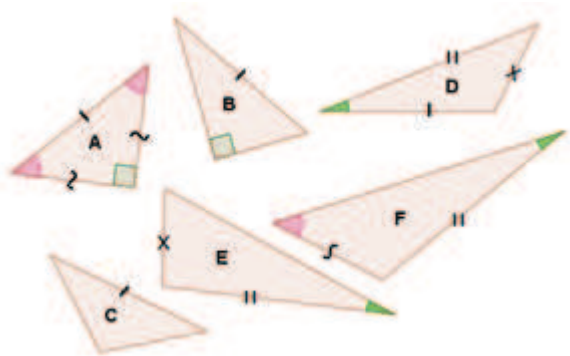
En los sobres, encontrarán los siguientes triángulos.

Cada uno está repetido.

Armen cuadriláteros combinando dos triángulos sin superponerlos.

Segunda parte:

Elaboren un cuadro/diagrama que les permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que consideraron.



En los sobres con los triángulos hay una tarjeta que agrega la siguiente información:

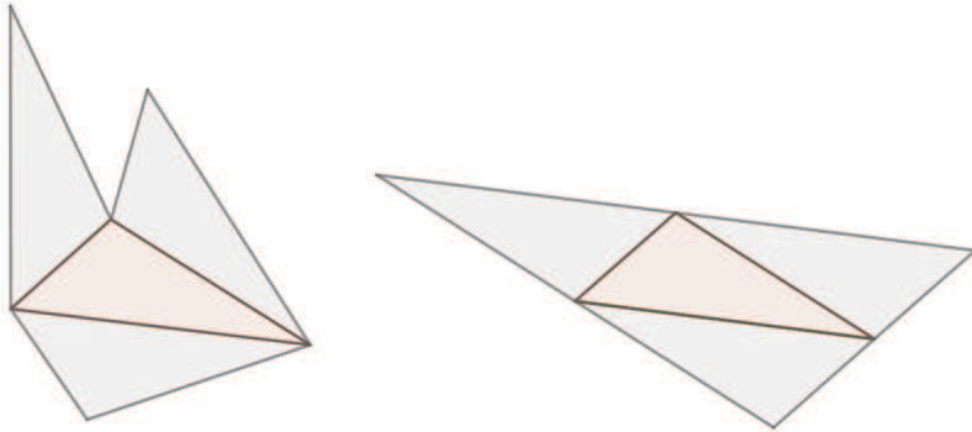
- A isósceles rectángulo
- B escaleno rectángulo
- C isósceles obtusángulo
- D escaleno obtusángulo
- E escaleno obtusángulo
- F escaleno obtusángulo

En total, hay 6 combinaciones de cada triángulo consigo mismo (A-A, B-B, C-C, D-D, E-E, F-F). De las 15 combinaciones de dos triángulos distintos, hay 5 que no forman cuadriláteros (A-E, B-F, B-E, C-E, C-F,) por incompatibilidad de los datos. Las 10 restantes son: A-B, A-C, A-D, A-F, B-C, B-D, C-D, D-E, D-F, E-F³⁵.

Combinando dos triángulos iguales

En general, al combinar un triángulo consigo mismo, se pueden armar 6 cuadriláteros: 3 que se obtienen haciendo una simetría axial del triángulo respecto de cada uno de sus 3 lados, y 3 que se obtienen haciendo una simetría central del triángulo respecto del punto medio de cada uno de sus 3 lados. Los 3 primeros cuadriláteros resultan ser trapezoides o cuadriláteros cóncavos y los otros 3 cuadriláteros resultan ser paralelogramos.

³⁵ Cabe aclarar que no esperamos que los estudiantes realicen un análisis detallado como el que presentamos.



Trapezoides y cuadriláteros cóncavos que se obtienen haciendo una simetría axial de un triángulo respecto de cada uno de sus 3 lados (izq.) y
 Tres paralelogramos que se obtienen haciendo una simetría central de un triángulo respecto del punto medio de cada uno de sus 3 lados (der.)

Dependiendo de si el triángulo es escaleno o isósceles, y de la amplitud de sus ángulos, puede resultar que entre los 3 paralelogramos haya paralelogramos iguales, que los paralelogramos resulten ser rectángulos, cuadrados o rombos, y que sean trapezoides o cuadriláteros cóncavos, que pueden ser iguales, e incluso que coincida un paralelogramo rombo con un romboide, como es el caso de A-A y C-C.

A continuación, detallaremos posibles cuadriláteros que los estudiantes pueden formar combinando dos triángulos, iguales o distintos.

1) Combinando dos triángulos "A":

a) y haciendo coincidir los triángulos por la hipotenusa, es posible formar un cuadrado.



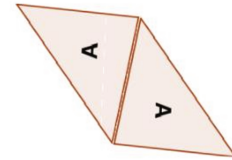
Esperamos que los estudiantes afirmen que la figura es un cuadrado ya que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos rectos. Es posible que la mayoría de los estudiantes conozcan estas dos características, pues es una de las figuras más utilizada en todos los ciclos de enseñanza.

Una posible validación de que la figura obtenida tiene todos sus lados iguales puede ser realizada apoyándose en la información recibida en la tarjeta. Dado que los lados del cuadrado son lados de dos triángulos isósceles rectángulos iguales y los ángulos agudos de cada triángulo miden la mitad de un recto, al sumar sus amplitudes, se obtienen ángulos iguales a un recto que son los ángulos del cuadrado.

Si algunos grupos no consideraran que el cuadrado debe tener todos sus lados y todos sus ángulos iguales, la docente podrá intervenir preguntando si justificar solo una de las dos características es suficiente para afirmar que la figura es un cuadrado. Dos posibles preguntas para formular a los estudiantes, para discutir al interior de cada grupo y retomar posteriormente en un momento de

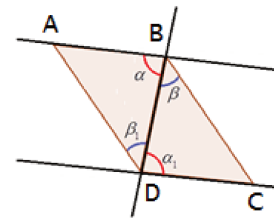
intercambio colectivo son: *¿hay alguna figura que tenga los cuatro ángulos rectos y no sea un cuadrado? ¿Existe otra figura que tenga todos los lados iguales?* Ante estas preguntas, se busca que establezcan que es necesario que el cuadrado tenga ambas características a la vez, pues si no podría tratarse de un rectángulo o un rombo no cuadrados.

b) *Si hacen coincidir los triángulos por cualquiera de sus catetos es posible formar dos paralelogramos iguales*³⁶.



Se espera que los estudiantes reconozcan, en este primer momento, características de los paralelogramos como ser sus dos pares de lados paralelos y la igualdad de los mismos.

Podrán justificar el paralelismo apoyándose en las relaciones entre ángulos determinados entre dos rectas paralelas y una transversal, saberes que ya tienen disponibles dado que se abordaron previamente.

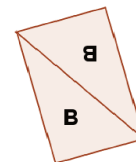


Por ejemplo, si se consideran los ángulos α y α_1 , que son iguales por ser ángulos rectos y además como son ángulos alternos internos entre las dos rectas que contienen los lados del cuadrilátero y la transversal que contiene la diagonal, se puede afirmar que al ser los ángulos alternos internos iguales, las rectas que contienen los lados, son paralelas. De igual modo podrán argumentar que el otro par de lados son paralelos considerando los ángulos β y β_1 .

Observación: Consideramos la anterior, como una argumentación que los estudiantes podrían utilizar para demostrar que la figura obtenida es un paralelogramo, por lo que para no redundar, no incluiremos argumentaciones similares en los casos análogos que aparecen de aquí en adelante.

2) Combinando dos triángulos “B”:

a) *y haciendo coincidir los triángulos por la hipotenusa es posible formar un rectángulo no cuadrado.*



Es muy posible que los estudiantes no realicen la aclaración de que la figura es un rectángulo no cuadrado, ya que por ejemplo al clasificar triángulos, no se evidenció que tengan disponibles formas de clasificar del tipo jerárquicas, según De Villiers (1994). En este caso, dado que los triángulos que lo componen son escalenos, podrán asegurar que los lados consecutivos son distintos, asociando esta característica al rectángulo.

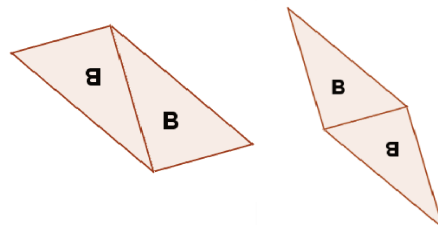
El docente podrá poner en cuestión si un rectángulo puede tener todos sus lados iguales, en caso de que esta discusión no surja al interior de cada grupo. Este tipo de intervenciones tiene como propósito que los estudiantes logren a lo largo del trabajo con la secuencia considerar figuras como casos particulares de otra, lo que puede abrir el camino para la formulación de definiciones y clasificaciones del tipo jerárquicas. (De Villiers, 1994).

Ante el pedido de justificación, se espera que los estudiantes argumenten que este cuadrilátero tiene todos los ángulos rectos ya que: los ángulos agudos de cada triángulo rectángulo son

³⁶ Optamos por usar el término iguales sin hacer diferencia entre los conceptos de congruencia e igualdad.

complementarios, por lo que al sumar sus amplitudes, se obtiene que las medidas de los ángulos opuestos del cuadrilátero son iguales a un recto. El otro par de ángulos opuestos del cuadrilátero, corresponden a los ángulos rectos del triángulo original.

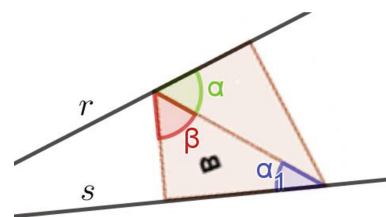
b) Si hacen coincidir los triángulos por cada uno de sus catetos también es posible formar dos paralelogramos, en este caso, distintos.



c) Si hacen coincidir los triángulos por la hipotenusa, también es posible formar un trapecoide romboide. Para lograrlo, deberán además invertir uno de los triángulos (considerar el simétrico respecto a la hipotenusa).

Es posible que muchos estudiantes, no conozcan el nombre de este cuadrilátero, ante lo que se les pedirá que lo describan sin la necesidad de asignarle un nombre en particular.

Ante el pedido de descripción y justificación, esperamos que los estudiantes argumenten que el cuadrilátero tiene dos pares de lados consecutivos iguales y además, distintos entre sí, dado que está compuesto por dos triángulos iguales y escalenos.



También es posible que analicen que la figura no tiene lados paralelos.

Podrán argumentar esta afirmación basándose, también en este caso, en las relaciones entre ángulos definidos entre dos rectas paralelas y una transversal. Por ejemplo: al considerar la figura de la derecha, se trazan dos rectas \vec{r} y \vec{s} , que contienen a dos lados opuestos del cuadrilátero. Los ángulos α y α_1 son alternos internos determinados por las rectas nombradas y la recta que contiene a la diagonal del cuadrilátero. Dado que los triángulos considerados son escalenos, sus tres ángulos son distintos, y dado que los triángulos son simétricos respecto de la diagonal, se tiene que los ángulos α y β son iguales, por lo cual α y α_1 no lo son.

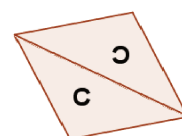
En consecuencia, las rectas \vec{r} y \vec{s} no son paralelas.

Análogamente, se demuestra para el otro par de lados.

Observación: Consideramos la anterior, como una argumentación que los estudiantes podrían utilizar para demostrar que la figura obtenida es un trapecoide, por lo que para no redundar, no incluiremos argumentaciones similares en los casos análogos que aparecen de aquí en adelante.

3) Combinando dos triángulos "C":

a) y haciendo coincidir los triángulos por el lado desigual, es posible formar un rombo.



Es posible que los estudiantes reconozcan como una primera característica del rombo a la igualdad de sus lados. Podrán argumentar basándose en que los triángulos que lo forman

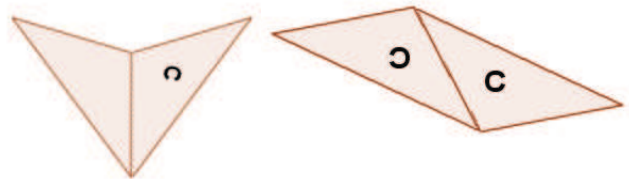
son triángulos isósceles iguales y como coinciden por el lado desigual, los cuatro lados que forman la nueva figura son iguales.

Es muy posible también, que los estudiantes no analicen y en consecuencia no validen que la figura es un paralelogramo con todos sus lados iguales, por lo cual no buscarán justificar el paralelismo de sus lados. Sin embargo, en caso de que algún grupo lo hiciera, su demostración sería análoga a la del caso 1) b).

De acuerdo al trabajo que esté realizando cada grupo, y evaluando su grado de avance, el docente podrá intervenir para poner en discusión y reflexionar acerca de las características que poseen los lados de esta figura, teniendo como propósito que consideren al rombo como un paralelogramo con todos sus lados iguales.

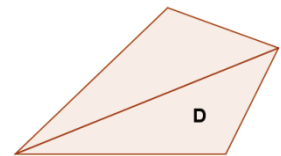
b) Si hacen coincidir los triángulos por los lados iguales, es posible formar:

- un único paralelogramo,
- un cuadrilátero cóncavo.

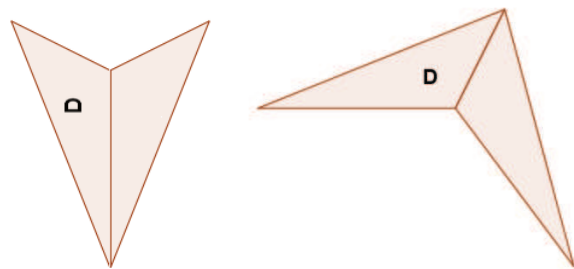


4) Combinando dos triángulos "D":

a) y haciendo coincidir los triángulos por el lado opuesto al ángulo obtuso y además invertir uno de los triángulos (considerar el simétrico respecto al lado nombrado), es posible formar un romboide.



b) Si hacen coincidir los triángulos por los lados no opuestos al obtuso e invirtiendo uno de los triángulos, es posible formar dos cuadriláteros cóncavos.

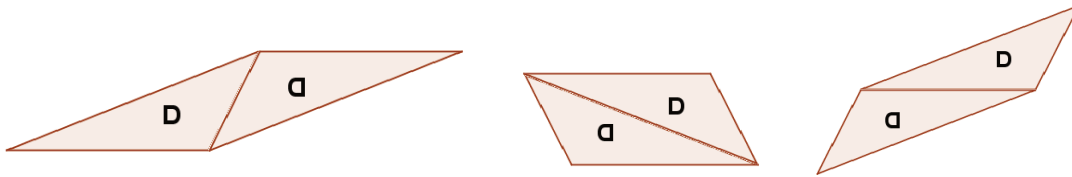


Si bien los estudiantes han analizado ángulos cóncavos, es muy posible que desconozcan este tipo de cuadriláteros, ya que no son usualmente estudiados.

En caso de que algunos estudiantes lo consideren, podrán formular que este tipo de cuadrilátero se llama cóncavo y se puede reconocer porque uno de sus ángulos interiores es mayor que un ángulo llano que resulta de sumar dos ángulos obtusos.

Observación: Consideramos la anterior, como una argumentación que los estudiantes podrían utilizar para demostrar que la figura obtenida es un cuadrilátero cóncavo, por lo que para no redundar, no incluiremos argumentaciones similares en los casos análogos que aparecen de aquí en adelante.

c) Si hacen coincidir los triángulos por cualquiera de sus lados, es posible formar tres paralelogramos distintos.



5) Combinando dos triángulos "E" o "F":

- es posible formar los mismos cuadriláteros que con dos triángulos "D", por ser los tres triángulos obtusángulos escalenos.

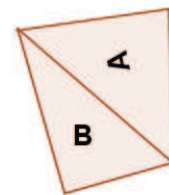
Combinando dos triángulos distintos

Al combinar dos triángulos distintos es que aparecen trapecios y trapezoides, algunos de ellos romboides, algunos cóncavos y otros convexos, según las igualdades de lados y las amplitudes de los ángulos. Cada uno de los pares A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, C-D forma un trapecioide convexo, siendo el A-C además romboide. Cada uno de los pares A-F y B-E forma un cuadrilátero cóncavo y un trapecioide. Con D-E se pueden formar un trapecio isósceles, un cuadrilátero cóncavo y un trapecioide. Con D-F se pueden formar un trapecio escaleno y un trapecioide, y con E-F un trapecio escaleno y un trapecioide.

A continuación analizamos solo algunas de estas combinaciones. Para no redundar, elegimos una combinación que forma un trapecioide no romboide (A-B), otra que forma un romboide (A-C), otra que forma un trapecio isósceles (D-E), otra que forma un trapecio escaleno, es decir, no isósceles (D-F) y un cuadrilátero cóncavo (B-E).

1) Combinando un triángulo "A" y uno "B":

y haciendo coincidir los triángulos por el lado de igual longitud, tal como se muestra en la figura, es posible formar un trapecioide.

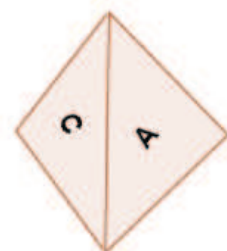


Ante el pedido de justificación es probable que los estudiantes argumenten de manera análoga al caso 2) c), donde se valida que la figura obtenida no posee pares de lados paralelos.

Esperamos que en un primer momento el paralelismo de lados sea la característica que en mayor medida analicen, pues es un tratamiento que muy frecuentemente se realiza en los niveles previos de escolarización y presentado como único en los libros de textos estudiados.

2) Combinando un triángulo "A" y uno "C":

y haciendo coincidir los triángulos por el lado de igual longitud, tal como se muestra en la figura, es posible formar un trapecioide.



3) Combinando un triángulo “D” y uno “E”:

y haciendo coincidir los triángulos por el lado de igual longitud, tal como se muestra en la figura, es posible formar un trapecio isósceles.



Es posible que muchos estudiantes no tengan claras cuáles son las características que pueden definir a esta figura. A su vez, consideramos que es muy poco probable que haya cuestionamientos acerca de que si es necesario que la misma posea un solo par de lados paralelos o al menos un par de lados paralelos dado que, como se mencionó anteriormente, al estudiar triángulos los estudiantes no evidenciaron haber trabajado con definiciones y clasificaciones jerárquicas, sino del estilo particional. El docente podrá evaluar, tal como en casos anteriores, de acuerdo al trabajo que cada grupo vaya realizando si someter a discusión la cantidad de pares de lados paralelos que puede tener esta figura. Esperamos también que algunos grupos no conozcan este cuadrilátero, o no lo recuerden y que tampoco recuerden su nombre, ante esto no se insistirá con la asignación de uno, sino con el análisis de sus características.

Una posibilidad que también podemos anticipar es que, en caso de reconocer que este cuadrilátero solo posee un par de lados paralelos, los estudiantes lo argumenten apoyándose nuevamente en las relaciones entre ángulos determinados por rectas paralelas y una transversal, por ejemplo: los ángulos α y β son iguales (observado en la ficha entregada a cada grupo) y además si consideran las rectas \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{DC} que contienen a sus lados, se observa que son alternos internos, por lo tanto \overleftrightarrow{AB} es paralela a \overleftrightarrow{DC} .



Se sabe que los lados \overline{AD} y \overline{BC} son iguales ya que también es un dato dado.

Podrán argumentar que los lados \overline{AD} y \overline{BC} no son paralelos, ya que para que lo fueran deberían ser iguales los ángulos alternos internos que se determinan considerando las rectas \overleftrightarrow{AD} y \overleftrightarrow{BC} y \overleftrightarrow{DB} transversal, y eso no es un dato dado por lo cual no es posible afirmarlo.



4) Combinando un triángulo “D” y uno “F”:

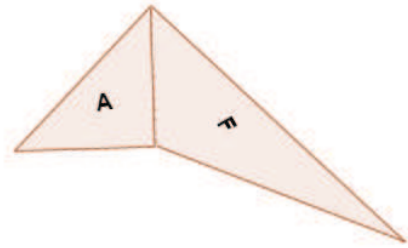
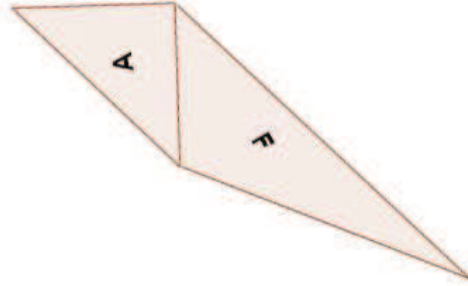
y haciendo coincidir los triángulos por el lado de igual longitud, tal como se muestra en la figura, es posible formar un trapecio no isósceles.

Esperamos que en este caso, a diferencia del anterior, los estudiantes observen que la figura no posee ningún par de lados iguales. Si no surgiese esta diferenciación, el docente promoverá que los estudiantes comparen los dos trapecios que encontraron y que establezcan similitudes y diferencias. Esto posibilitará reconocer que dentro de la categoría “trapecios” - o como la denominen los estudiantes - existen figuras con características específicas que las diferencian entre sí.

5) Combinando un triángulo "A" y uno "F"

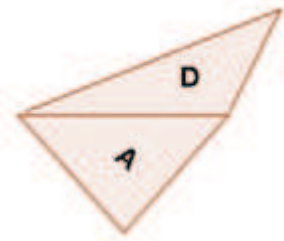
y haciendo coincidir los triángulos por el lado de igual longitud, tal como se muestra en la figura, es posible formar:

- un cuadrilátero cóncavo,
- un trapezoide.



6) Combinando un triángulo "A" y uno "D":

y haciendo coincidir los triángulos por el lado de igual longitud, tal como se muestra en la figura, con un triángulo "A" y un triángulo "D", es posible formar un trapezoide.



Anexo 2

Implementación de la secuencia didáctica

En este anexo se describe cronológicamente la implementación de la secuencia en el aula. Realizamos la reconstrucción de cada una de las clases a partir de la información recolectada mediante grabaciones de audio³⁷ en el trabajo en grupo y puestas en común, producciones escritas de los grupos, afiches donde los grupos plasmaron la síntesis de lo trabajado en cada actividad y fotografías de los pizarrones en las puestas en común.

Descripción de la muestra

La secuencia didáctica se implementa en la cátedra Geometría II, en la segunda división de 2do año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Escuela Normal Superior N°32 “Gral. José de San Martín” de la Provincia de Santa Fe.

La propuesta se lleva a cabo a lo largo de cinco clases, cada una de ellas de 120 minutos de duración. Las clases tuvieron lugar los días 4, 8, 9, 18 y 22 de Octubre de 2018.

El grupo donde se lleva a cabo la experiencia ya analizó distintas formas de definir y clasificar triángulos, así como también las características de una definición matemática³⁸, y además viene realizando un trabajo basado en argumentar y justificar los procedimientos que realizan.

Los alumnos se dividieron en 4 grupos que se mantuvieron en las clases formados de la misma manera, excepto en las últimas dos clases (actividades 4 y 5) donde dos grupos se fusionaron, ya que tres estudiantes estuvieron ausentes.

Cada uno de los grupos utilizó un color de afiche distinto:

Grupo 1: afiche color verde (3 estudiantes)

Grupo 2: afiche color gris (4 estudiantes)

Grupo 3: afiche color amarillo (4 estudiantes)

Grupo 4: afiche color naranja (2 estudiantes)

Es importante mencionar que el grupo 4 no estuvo presente en la realización de las actividades 2 y 3, y que en la última clase realizaron una organización utilizando apuntes propios de geometría, dado que los estudiantes estaban cursando por segunda vez la materia. Sin embargo, el año anterior el tema fue abordado de otra manera, estudiando solamente la clasificación de cuadriláteros de acuerdo al paralelismo de sus lados.

³⁷ Previamente a realizar las grabaciones se solicitó el permiso y acuerdo a cada uno de los estudiantes. Posteriormente, se han transcrito todos los diálogos que fueron audibles. Dado el bullicio propio del aula y a que los estudiantes por muchos momentos al interior del trabajo en cada grupo murmuraban, no fue posible recuperar absolutamente todos los diálogos. Sin embargo, resaltamos que solo estos casos han sido omitidos y no incluidos.

³⁸ En el anexo 3, se encuentra un apunte de clases en relación a esto.

Primera clase

La clase comienza con una propuesta de trabajo grupal, y se aclara a los estudiantes que, en lo posible, mantengan los mismos grupos a lo largo de las próximas cinco clases. Se conforman tres grupos, dos de tres integrantes y uno de cuatro. Se les reparte la consigna, un sobre a cada grupo con los triángulos y la tarjeta que indica información acerca de los mismos.

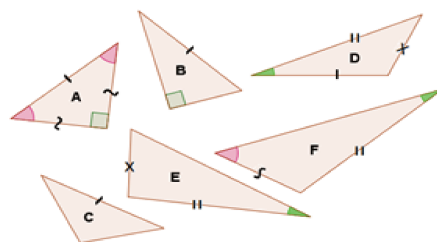
Consigna:

Primera parte:

En los sobres, encontrarán los siguientes triángulos.

Cada uno está repetido.

Armen cuadriláteros combinando dos triángulos sin superponerlos.



La docente comienza a recorrer cada uno de los grupos para acompañar en el trabajo.

Los estudiantes comienzan a manipular los triángulos y a ubicarlos de distintas formas, se observa que hay un primer momento en el cual solamente se limitan a hacer pruebas. Se observa que comienzan a recordar y consultarse entre ellos, qué cuadriláteros conocen, así también lo que es un cuadrilátero. En el grupo 1, un alumno le consulta a la docente:

V1³⁹: Profesora, ¿tienen que ser cuadriláteros? ¿No necesitan ser rombos o algunos de esos? – Señalando un cuadrilátero cóncavo que acaban de formar (Imagen 1).

P: Sí, tienen que ser cuadriláteros. ¿Cómo saben que es un cuadrilátero esa figura que formaron?

V2: Sabemos que es un cuadrilátero porque tiene cuatro lados, pero este no tiene nombre.

En el grupo 2, al formar un romboide, los alumnos preguntan:

G4: Profe, este es un cuadrilátero, pero no sabemos si ponerlo porque no tiene nombre... tiene una forma extraña...

G1: Es como que está deformado...pero sí, es un cuadrilátero, ¿lo ponemos en la lista?

Ante esto, la docente les responde que sí, que lo pongan en la lista y que por el momento no importa el nombre, importa que los vayan identificando. Los invita a investigar si hay más con esa forma y que comiencen a observar qué es lo que los diferencia de los otros.



Imagen 1

Al comenzar a encontrar distintos cuadriláteros que pueden formarse, en el grupo 2, algunos de los integrantes daban como realizada la tarea y dos compañeros, continuaron intentando otras posibilidades y se dieron cuenta que debían continuar el análisis, por lo cual se comenzaron a organizar, quien tomaba nota, cómo registraban los resultados, qué escribían y hasta consultaron al

³⁹ Esta notación indica a cada uno de los alumnos de los grupos: An: alumno n del grupo amarillo, Gn: alumno n del grupo Gris, Vn alumno n del grupo verde y Nn alumno n del grupo naranja.

docente si lo cómo lo pensaban era correcto o no. Una de las estrategias que utilizaron, para registrar, fue marcar el contorno de la figura obtenida al combinar dos triángulos, en sus apuntes. En tanto en el Grupo 1, fueron más minuciosos desde el comienzo de la tarea, en la búsqueda y en el registro. Tuvieron en cuenta las características de cada uno de los triángulos, para concluir qué características tienen los cuadriláteros que formaron.

En el Grupo 1, al organizar la información obtenida, elaboraron las siguientes conjeturas:

- V1: Nos dimos cuenta de que con el triángulo isósceles rectángulo, es con el único que se puede armar un cuadrilátero rectángulo que tienen los lados iguales.
- V2: Pero en este cuadrilátero, que está formado por dos triángulos rectángulos escalenos, también se forma un cuadrilátero rectángulo, pero no tiene todos sus lados iguales, son distintos.

También, en este grupo analizan que hay cuadriláteros que al estar formados por los mismos triángulos, tienen distinta forma, pero su área es la misma.

Los estudiantes del Grupo 2, llaman a la docente para mostrarles los cuadriláteros que registraron, algunos de los cuales se pueden observar en las Imágenes 2 y 3, y se produce el siguiente diálogo:

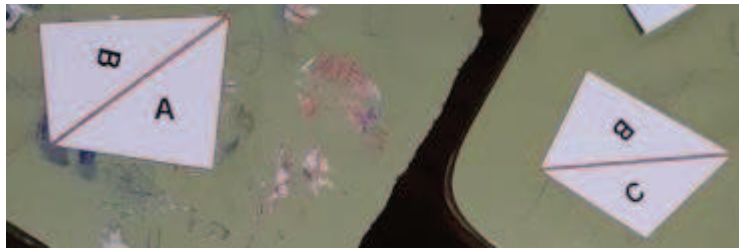


Imagen 2

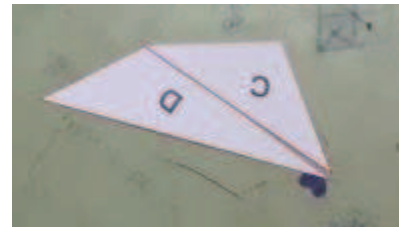


Imagen 3

P: ¿Qué me pueden decir de éstos cuadriláteros? ¿Qué características tienen?

G1: Mmm... vemos que tienen ángulos distintos.

G2: Y los lados todos distintos...

G3: Sí, tienen todos los lados distintos...

G1: O algunos, como éste (señalando a los de la imagen 2) tienen dos lados iguales consecutivos, pero solo dos, porque los triángulos son isósceles.

P: ¿Ya los conocían?

Todos: no...

P: ¿No trabajaron anteriormente con ellos? ¿Saben cómo se llaman?

Todos: No, no trabajamos nunca... y no sabemos cómo se llaman.

P: Muy bien, no hay problemas... ¿y no encontraron cuadriláteros que tengan más cantidad de lados iguales por ejemplo?

G2: no...

P: ¿Y existen cuadriláteros que tengan más cantidad de lados iguales? ¿Ustedes que creen?

G1: Sí, el cuadrado por ejemplo...

G3: Claro... el tema es cómo estamos uniendo los triángulos, estos triángulos son escalenos o isósceles... por eso los cuadriláteros no tienen lados iguales...

G1: No, sí tienen lados iguales, los lados por los que los superponemos...

G3: Sí, pero ese lado ya no es más un lado... es... no me acuerdo el nombre...

G1: Una diagonal...

P: Muy bien, ese segmento se denomina diagonal, entonces ¿cómo podrían combinar los triángulos para formar cuadriláteros que tengan lados iguales?

G1: Ah, ¡ya sé! Combinando dos triángulos iguales... no sé por qué pensamos que no podía.

A partir de esta recomendación, los estudiantes encuentran cuadriláteros que conocen, tales como el rombo, el cuadrado, el paralelogramo, el trapecio y recuperando y estableciendo ciertas propiedades:

- El rombo tiene todos los lados iguales, y tiene dos pares de ángulos opuestos iguales.
- El cuadrado tiene todos los lados iguales y todos sus ángulos rectos.
- El paralelogramo, tiene lados paralelos.
- El trapecio, tiene lados paralelos, pero uno mayor que otro (los ayuda a identificar el trapecio, recordando que tiene una base mayor y una base menor)
- Romboide, tiene dos pares de lados iguales.

Cuando algunos grupos comienzan a mencionar los nombres, estas ideas se generalizan entre los distintos grupos y a partir del momento, comienzan a utilizar los nombres de cada figura para referirse a las mismas. Algunos nombres como paralelogramo o trapecio, no surgieron rápidamente en todos los grupos. A su vez, al recordar al nombre paralelogramo, abrió la exploración hacia la cantidad de lados paralelos que tienen las figuras, característica que en una primera búsqueda no había sido tenida en cuenta.

En el grupo 2, un estudiante menciona a la docente que el único nombre que no se acuerdan es el de un trapecoide -identificándolo mediante su representación-, por lo cual, la docente lo pone a consideración del grupo en dónde se le otorga el nombre. Se decidió, compartir la consulta para todo el grupo, dado que había sido una consulta recurrente. Un grupo sin mencionar las características que poseen, nombró al cuadrilátero, y la docente invitó a identificar cuáles otros pueden ser llamados de la misma manera y porqué.

En el momento en que recorre cada uno de los grupos, la docente agrega al pedido anterior, que intenten identificar qué cuadriláteros poseen y que justifiquen por qué lo consideran.

Tanto en el grupo 1 como en el 2, habían caracterizado a los paralelogramos como cuadriláteros que poseen dos pares de lados paralelos, y ante el pedido de justificación, los estudiantes expresaron que dado que los cuadriláteros están formados por dos triángulos congruentes, pueden identificar en ellos ángulos alternos internos congruentes, formados por la diagonal y los lados, por lo cual los lados son paralelos, como se muestra en la imagen 4.

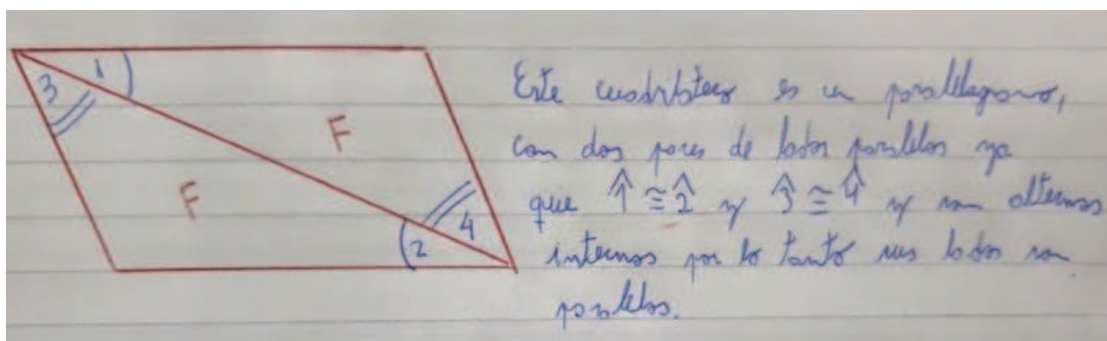


Imagen 4

Dado que los estudiantes lograron identificar y argumentar porqué un cuadrilátero es un paralelogramo, la docente les pregunta: ¿hay otros cuadriláteros que posean la misma característica? ¿o que posean menos cantidad de pares de lados paralelos?

Esta pregunta, permite a cada uno de los grupos, identificar que hay otras figuras que también tienen dos pares de lados opuestos paralelos, e identificar que hay otras figuras que solamente tienen un par como el caso de los trapecios o ningún par en el caso de los trapezoides.

En el grupo 1, expresan:

V1: Profe, estos cuadriláteros que antes ni sabíamos cómo se llamaban, que son los trapezoides no tienen ningún par de lados paralelos. ¡Ahora aparecen por todos lados!

Los alumnos manifestaron asombro, dado que encontraron muchísimos cuadriláteros que no conocían, como por ejemplo los cóncavos y los trapezoides.

Luego de que cada uno de los grupos realizó una primera exploración y un registro de los primeros cuadriláteros, la docente propuso un primer momento de intercambio entre todos los grupos, abriendo el debate con las siguientes preguntas:

P: Me gustaría que cada grupo comente qué tipo de cuadriláteros encontró y que los vayamos registrando en el pizarrón, ¿cómo les parece que podemos organizar la información?

Una alumna del grupo 2 contesta:

G1: Creo que podríamos agruparlos de acuerdo a si usamos triángulos congruentes o no para formarlos, dado que como nosotros no entendimos bien al principio, nos quedaron bien divididos los casos.

P: ¿están de acuerdo el resto? ¿Qué les parece?

V1: yo creo que sí, porque los que formas con triángulos iguales son todos paralelogramos, en cambio los otros no.

P: Muy bien, veamos si esto es así...

La docente divide el pizarrón en dos mitades, colocando como títulos las dos categorías propuestas por G1 e invita a pasar a distintos alumnos a dejar registrados los cuadriláteros que encontraron.

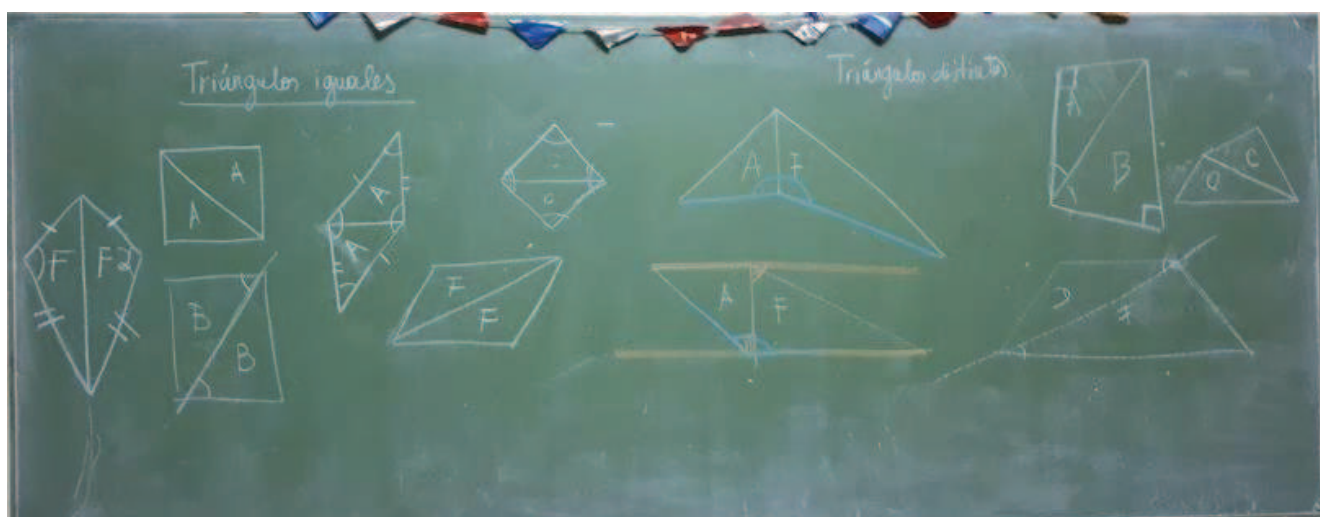


Imagen 5

A medida que cada uno de los alumnos representaba un cuadrilátero en el pizarrón, explicaba de qué cuadrilátero se trataba.

Se explicitó en este momento de intercambio que:

- El cuadrilátero formado por los triángulos A y F, así como también el formado por dos triángulos E (no está en el pizarrón), se denominan cuadriláteros cóncavos, dado que poseen un ángulo con esa característica. Se acordó que a partir de ese momento solo se estudiarán los cuadriláteros convexos.

Dado que los alumnos ya han trabajado la clasificación de ángulos, se decide por el momento caracterizar a los cuadriláteros cóncavos de esa manera, solamente por la presencia de un ángulo cóncavo. No se profundiza en las propiedades de los mismos, o en una definición más formal, ya que no representa el objetivo del estudio, lo que no impide que puedan ser retomados posteriormente y profundizar el trabajo con ellos.

Para facilitar la lectura presentamos a continuación las imágenes del pizarrón dividido en dos categorías, donde también agregamos en las imágenes marcas en los lados y ángulos de los cuadriláteros. En este momento se formularon las siguientes afirmaciones:

Cuadriláteros formados por dos triángulos iguales:

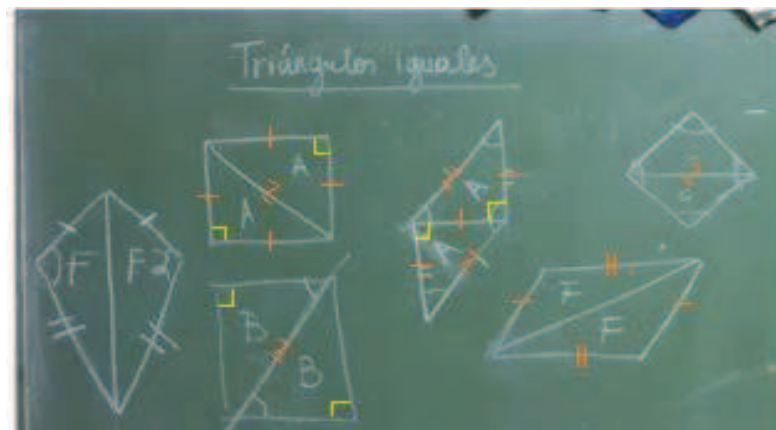


Imagen 6

- Los cuadriláteros formados por dos triángulos A, dos B, dos C, dos D (no está en el pizarrón), y dos F (el de la derecha) son paralelogramos, ya que tienen dos pares de lados paralelos.
- El cuadrilátero formado por dos triángulos A, es un cuadrado, dado que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos rectos. Dos son rectos porque son los ángulos de triángulos rectángulos y los otros dos también, dado que son la suma de dos ángulos de 45° .
- Con dos triángulos E, se puede formar un romboide (no está en el pizarrón), que posee dos pares de lados consecutivos iguales y dos ángulos iguales, dado que los triángulos que lo componen son congruentes.
- El cuadrilátero formado por dos triángulos F (el de la izquierda), es un romboide, que posee dos pares de lados consecutivos iguales y dos ángulos iguales, dado que los triángulos que lo componen son congruentes.

Cuadriláteros formados por dos triángulos distintos:

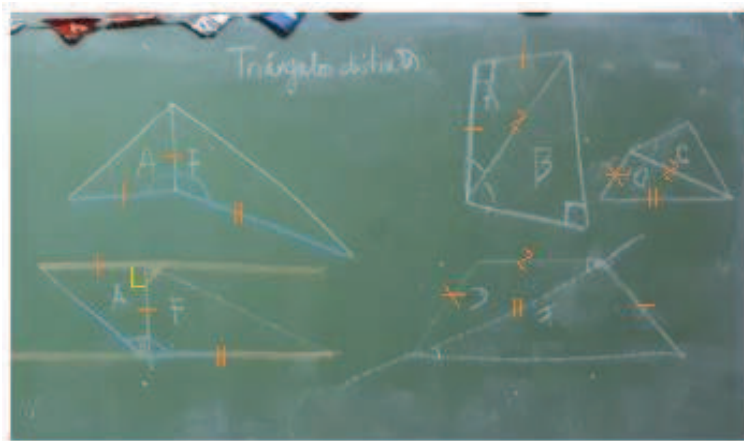


Imagen 7

- El cuadrilátero no cóncavo formado por un triángulo A y uno F, tiene un par de lados paralelos, por lo tanto es un trapecio.
- El cuadrilátero formado por un triángulo F y uno D, es un trapecio no isósceles, pues los lados no paralelos son de distinta longitud.

En los últimos dos casos, los estudiantes argumentaron el paralelismo de los lados del trapecio, comparando los ángulos que conocen de los triángulos y como solo pueden establecer la congruencia de un par de alternos internos, dada como dato, concluyen que solo tiene un par de lados paralelos.

- Los cuadriláteros formados por un triángulo C y uno D, y por un triángulo A y uno B, no tienen lados paralelos. Estos cuadriláteros se denominan trapezoides.

Luego de este primer momento de intercambio, en el cual se socializan todas las producciones y los argumentos que cada grupo encontró, la docente les reparte la segunda parte de la consigna:

Elabora un cuadro/diagrama que te permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que estuvimos considerando.

La docente reparte un afiche a cada grupo, para que plasmen en él la organización de los cuadriláteros que elaboren.

En esta instancia de trabajo y de acuerdos al interior de cada uno de los grupos, la docente tuvo mínima participación. Solamente respondió preguntas puntuales, para no intervenir en la selección de las características para la organización de los cuadriláteros.

Al observar que todos los grupos terminaban la tarea, se propone un nuevo momento de intercambio. Los grupos se turnan para tomar la palabra y comunicar la organización que realizaron de los cuadriláteros.

Comienza compartiendo su producción el grupo 2:

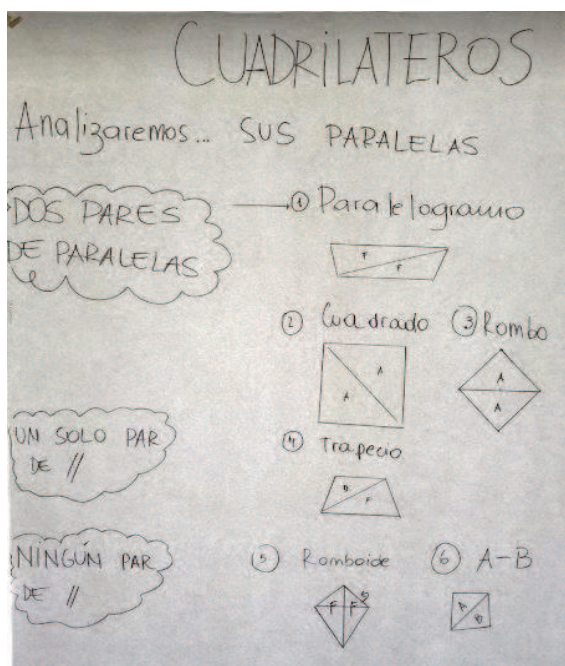


Imagen 8

Mientras una compañera sostenía el afiche, otra explicaba:

G1: *Nosotros decidimos agrupar los cuadriláteros teniendo en cuenta la cantidad de lados paralelos que tienen. No dibujamos todos los casos, porque son muchos, pero los resumimos en el afiche.*

Como pueden ver, los agrupamos en dos pares de paralelas, que son los paralelogramos, cuadrados y rombos.

En un par de paralelas, que son los trapecios. Y en ningún par de paralelas, que son los romboides y estos que se llamaban....

G4: *Trapezoides...*

G1: *Exacto trapezoides, aunque el dibujo no nos salió muy bien.*

La profesora en este momento pregunta: *¿pudieron ubicar en estas categorías todos los cuadriláteros con los que trabajaron hoy?*

G3: *Sí, porque todos los que encontramos o tenían dos pares de lados paralelos, o uno o ninguno. Por ejemplo, estos raros, entran acá en ningún par de lados paralelos (refiriéndose a algunos trapezoides que encontraron).*

G2: *Muchos tienen lados iguales, o lados distintos, pero siguen cumpliendo lo de los lados paralelos.*

P: *Muy bien, y ahora les pregunto ¿por qué eligieron esa característica para agrupar a los cuadriláteros?*

G1: *Porque cuando íbamos viendo lo que tenían en común, en primera medida miramos los ángulos y nos dimos cuenta que había muchas combinaciones, agudo, obtuso, agudos y agudos, y se nos hacía muy complicado... entonces empezamos a ver que tenían ángulos rectos y lados paralelos y ahí fue cuando pensamos en esto.*

G2: *Claro, la verdad que la elegimos porque era la más simple, en los otros casos había mucho para analizar y se hacía confuso.*

A continuación, toma la palabra el Grupo 1:

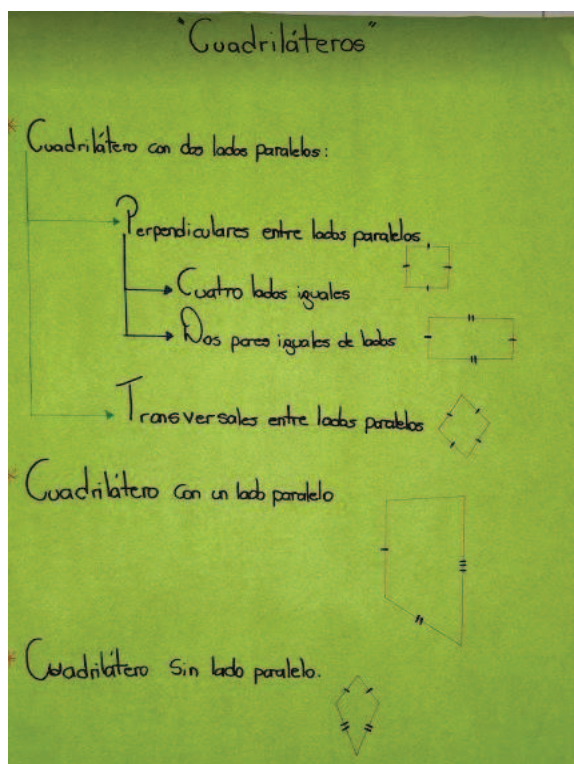


Imagen 9

V1: Bueno, a los cuadriláteros los dividimos en dos grupos, el primer grupo son los cuadriláteros que tienen lados perpendiculares, y los otros dos, paralelos a los anteriores, también son perpendiculares. Es decir que tienen todos sus ángulos rectos. Estos dos lados que son paralelos, son perpendiculares a los otros dos, que también son paralelos entre ellos.

V3: tenemos que cuando tienen sus lados iguales, forman un cuadrado y cuando tienen dos pares de lados iguales forman un rectángulo.

V2: Exacto, otro caso, es cuando los lados son transversales (refiriéndose a lados que no son perpendiculares, apoyándose en el concepto de ángulos formados entre rectas paralelas y un transversal, que no es perpendicular a las anteriores) ...en este caso formarían un rombo.

V1: después, tenemos otro caso, que son los cuadriláteros con un lado paralelo...que serían estos dos (señalando los lados paralelos del trapecio que dibujaron).

V2: y por último, este caso que no tiene lados paralelos, que es el romboide.

Se hace un silencio y la docente les pregunta:

P: ¿Pueden afirmar entonces ustedes también que todos los cuadriláteros con los que trabajaron pudieron ser ubicados en estas categorías que ustedes seleccionaron?

V1: Sí, creemos que sí.

P: Muy bien, y ¿cuál es la diferencia entre esta forma de organizar y la del otro grupo?

V1: Que nosotros miramos los lados paralelos y además los lados iguales.

El Grupo 3 comparte su producción:

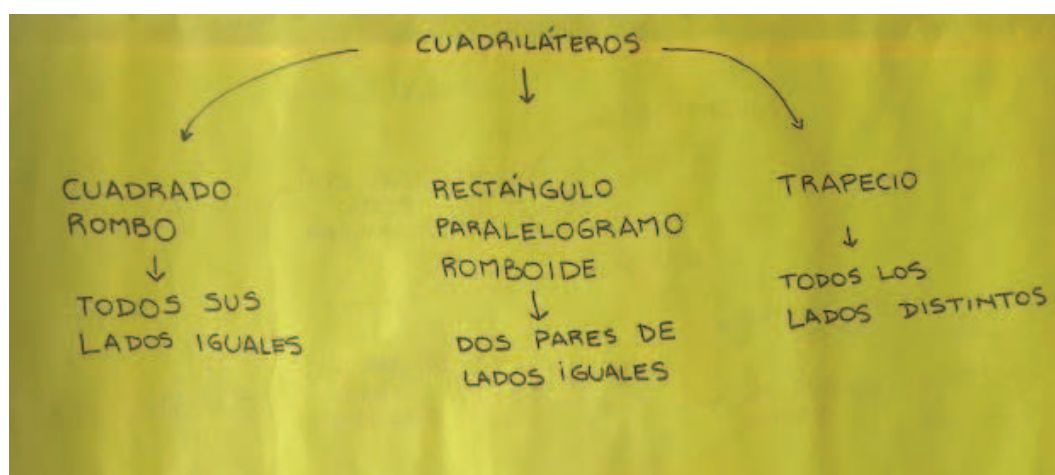


Imagen 10

A1: Bueno, nosotros en realidad lo pensamos directamente por los lados...es decir... solo tuvimos en cuenta para organizarlos los lados...

P: Está muy bien, pero ¿qué de los lados tuvieron en cuenta?

A2: La igualdad de los lados solamente tuvimos en cuenta.

A1: Por ejemplo, pusimos el cuadrado y rombo en una categoría porque los dos tienen lados iguales. En otra el rectángulo, paralelogramo y el romboide porque vimos que tienen dos lados iguales, por tener dos pares de lados iguales, y en la última, el trapecio porque tiene todos los lados desiguales.

P: Muy bien, y ahora les pregunto: ¿pudieron ubicar en estas categorías todos los cuadriláteros con los que trabajaron hoy?

A3: No, en realidad... sí, creíamos que sí mientras lo hacíamos, pero mientras fuimos viendo los otros afiches nos dimos cuenta que nos faltan...

Un alumno del grupo 1, pide la palabra y comenta:

V1: los trapecios... ¿no podían tener dos lados iguales?

P: ¿Ustedes qué piensan? ¿Qué trapecio encontraron? A ver, recuperemos eso...

Los alumnos intercambian entre ellos qué tipo de trapecio encontraron y con qué triángulos los habían formado, y encontraron que hay trapecios que tienen dos lados iguales y otros que tienen lados distintos.

Continúa el grupo 3 su exposición y expresan que, en este momento, se dan cuenta que tal vez debería haber otra categoría, como ser "solo un par de lados iguales", entonces allí podrían entrar otros cuadriláteros que no habían tenido en cuenta.

Otra alumna del mismo grupo expresa que:

A4: Tampoco pusimos ninguno de estos (señalando en el afiche del otro grupo a un trapecoide).

A2: Es cierto, sí, nos dimos cuenta que no era fácil esta forma que estábamos agrupando, porque hay muchos casos para analizar, la de los otros chicos es más simple.

P: Puede ser, sin embargo, si pudieran completarla, las tres formas en las que los agruparon son correctas, ya que cada uno consideró distintas características de los cuadriláteros para hacerlo. Y ahora les consulto, comparando sus afiches con los de los otros grupos: ¿creen que deberían completar algo en el suyo? ¿o no es necesario?

Los alumnos piensan y discuten un breve momento al interior de cada grupo y el grupo 1, toma la palabra y expresa que:

V2: Profe, nosotros nos dimos cuenta que no pusimos los paralelogramos, solamente pusimos en lados transversales al rombo, por lo tanto deberíamos agregar una nueva categoría que diga: lados transversales y dos pares de lados iguales, que no la teníamos... como lo tenemos en la categoría de arriba, cuatro lados iguales o dos pares de lados iguales.

P: Excelente, pueden agendarlo para agregarlo al cuadro.

Una alumna del Grupo 2, expresa que:

G1: A nosotros nos falta poner los rectángulos profe, los chicos lo tienen en su cuadro, y nosotros no los pusimos.

Por último, comparte su producción el grupo 4. Mientras comentan su afiche, expresan que ellas recuerdan una forma de organización ya estudiada y que la utilizaron para formular su diagrama (Las integrantes del grupo cursan por segunda vez la cátedra, cabe aclarar que en su cursado previo solo se abordó la clasificación de cuadriláteros de acuerdo al paralelismo de sus lados).

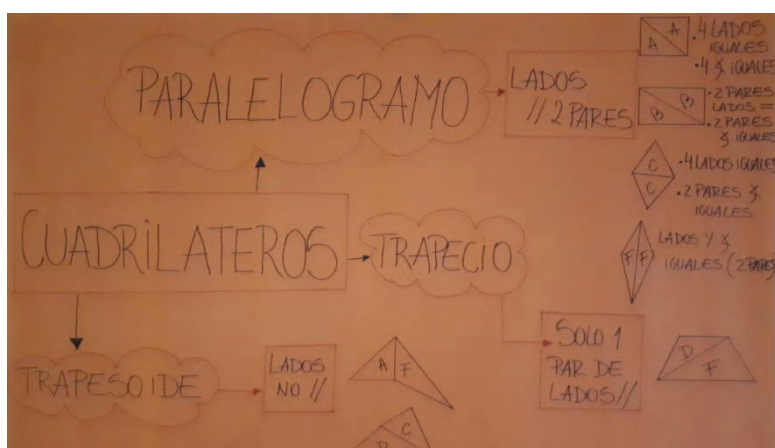


Imagen 11

Al comparar su cuadro con el de sus compañeros, admiten que el cuadrilátero formado por dos triángulos F, no tiene dos pares de lados paralelos y a su vez, que omitieron colocar en el diagrama a los paralelogramos, pero no modifican el afiche.

La docente cierra la clase, felicitando al grupo por el trabajo realizado y vuelve a resaltar que los criterios que seleccionaron para realizar las agrupaciones son correctos y que es interesante que surjan distintas agrupaciones, dependiendo de la característica que se tenga en cuentas, tal como algunos compañeros miraron el paralelismo, otros miraron la longitud de los lados para hacerlo. Los invita, también a que analicen si harían alguna modificación más a los afiches para la próxima clase.

Segunda clase

La docente comienza la clase preguntando a los estudiantes si pudieron revisar las producciones de la última clase y si realizaron modificaciones.

El grupo 1, recupera lo expresado en la clase anterior, que a su cuadro le agregarían los paralelogramos, en la categoría dos lados paralelos y que además en la categoría "ningún par de lados paralelos" deberían haber realizado un gráfico más general de los cuadriláteros, ya que el romboide que graficaron tiene propiedades específicas que otros no tienen, como por ejemplo cualquier trapezoide sin lados iguales.

El grupo 3, expresa que no lograron hacer modificaciones, porque consideraron que no seleccionaron una buena característica para agrupar, ya que se dieron cuenta que un mismo cuadrilátero, por ejemplo el trapecio puede estar en más de una de las categorías que plantearon: “ningún lado igual” o “un par de lados iguales”, cuestión que no habían considerado. Por otra parte, en el caso del rombo y cuadrado, pueden pertenecer a cuatro lados iguales o a dos pares de lados iguales. A partir de estas observaciones, decidieron no considerar esta agrupación, dado que les resulta muy compleja la organización de los cuadriláteros en la misma.

El grupo 2 expresa que, en la clase anterior se dieron cuenta de que tenían que agregar los rectángulos en el cuadro, ya que no los habían tenido en cuenta.

Luego de revisar la actividad anterior, la docente les propone volver a armar los mismos grupos y comenzar a trabajar en la segunda actividad. No hay integrantes del grupo 4 presentes. Se reparte la consigna a cada grupo, se leen en conjunto y se explicita que pueden utilizar Geogebra si lo necesitan para resolver la consigna. Se les solicita a los alumnos que en caso de utilizar Geogebra, realicen capturas de pantalla para dejar registrada la exploración, y que el registro que realicen en sus carpetas sea lo más detallado posible.

Consigna:

Primera parte:

¿Cuántos ángulos obtusos, agudos o rectos puede tener un cuadrilátero convexo? Presenten un ejemplo de los casos posibles y expliquen, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

Recomendaciones:

- *Pueden explorar posibilidades construyendo cuadriláteros con Geogebra si lo consideran conveniente.*
- *Para realizar las construcciones, pueden realizarlo mediante dos opciones: utilizar cualquier herramienta de geogebra y una vez construido el cuadrilátero, utilizar la herramienta*



polígono, para constituirlo como tal, o simplemente construirlo con esta herramienta y analizar sus características.

Segunda parte:

Elaboren un cuadro/diagrama que les permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que consideraron.

Las consignas de los dos momentos de la actividad fueron entregadas simultáneamente, de este modo los estudiantes sabían que, luego de una primera etapa exploratoria, debían plasmar la información encontrada en un cuadro/diagrama.

El grupo 1, comienza el trabajo, recuperando los cuadriláteros que formaron en la actividad anterior y analizan qué tipos de ángulos tienen. Luego de unos minutos de discusión entre ellos, deciden organizar la búsqueda considerando cuadriláteros que tengan sus cuatro ángulos obtusos, sus cuatro ángulos agudos y sus cuatro ángulos rectos.

Al comenzar a buscar posibles cuadriláteros, uno de los integrantes del grupo se pregunta:

V3: *¿Cómo me doy cuenta cuánto pueden sumar los ángulos del cuadrilátero?*

Luego de debatir esta pregunta entre ellos, en el intento de querer recordar la propiedad, uno de ellos recupera la actividad previa y explica:

V1: *Como los cuadriláteros están formados por dos triángulos, y la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a ciento ochenta grados, entonces la del cuadrilátero va a ser el doble... ¿o no?*

Los compañeros acuerdan con dicha afirmación y continúan con el trabajo, combinan distinta cantidad de ángulos de cada tipo y validan sus conjeturas con el uso de Geogebra, mostrando la existencia o no del cuadrilátero.

Luego de un momento de exploración, organizan la información obtenida de la siguiente manera:

Casos Posibles: *Clasificación de Cuadriláteros según sus ángulos obtusos.*

Cantidad de Ángulos Obtusos	Cantidad de Ángulos Rectos	Cantidad de Ángulos Agudos
0	4	0
1	2	1
1	1	2
1	0	3
2	0	2
2	1	1
3	0	1

Casos No Posibles

Teniendo en cuenta que un cuadrilátero está compuesto por dos triángulos y los ángulos interiores de cada uno de éstos suman 180° , entonces la sumatoria de los 4 ángulos interiores de un cuadrilátero debe ser igual a 360° , por lo que llegamos a la conclusión que no se pueden construir cuadriláteros convexos con los siguientes tipos de ángulos:

- *Cuatro ángulos obtusos. La sumatoria sería mayor a 360° .*
- *Cuatro ángulos agudos. La sumatoria menor a 360° .*
- *Dos ángulos rectos y dos ángulos obtusos. La sumatoria sería mayor a 360° .*
- *Dos ángulos rectos y dos ángulos agudos. La sumatoria sería menor a 360° .*
- *Tres ángulos obtusos y un ángulo recto. La sumatoria sería mayor a 360° .*
- *Tres ángulos agudos y un ángulo recto. La sumatoria sería menor a 360° .*
- *Tres ángulos rectos y un ángulo agudo. La sumatoria sería menor a 360° .*
- *Tres ángulos rectos y un ángulo obtuso. La sumatoria sería mayor a 360° .*

El grupo 2, organiza el trabajo de exploración a partir de la representación en sus apuntes con regla y lápiz, de cuadriláteros que cumplan con determinadas características y en ellos el análisis de sus ángulos, por ejemplo grafican un trapecoide, como muestra la imagen 11, y describen que posee un ángulo obtuso, uno recto y dos agudos. Este grupo opta por trabajar solo con esta modalidad y no utilizan Geogebra.

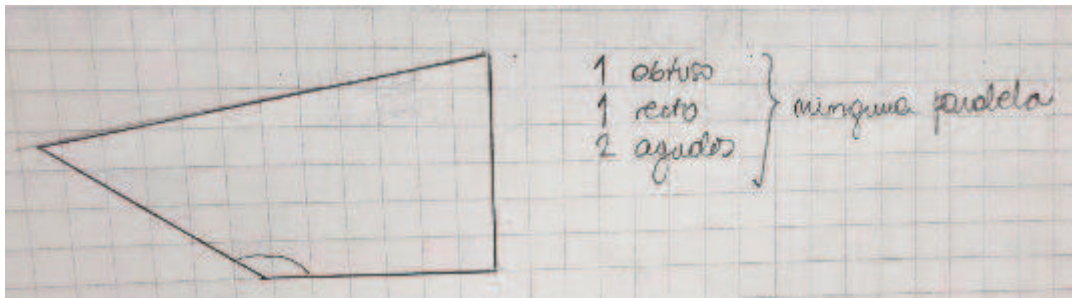


Imagen 11

Los estudiantes organizan su exploración comenzando por las figuras conocidas trabajadas en la actividad anterior, ya que que las figuras que representan son rectángulos, cuadrados, trapecios isósceles, paralelogramos, romboides y trapecios rectángulos.

Cabe aclarar, que si bien en el gráfico hacen mención a la cantidad de lados paralelos que posee la figura, no recuperan esta información posteriormente.

Luego de esta primera etapa exploratoria, este grupo decide agrupar los cuadriláteros de acuerdo a la cantidad de ángulos rectos que poseen, dado que consideran que son los que más abundan en los cuadriláteros.

El grupo 3, al igual que el grupo 1, teniendo en cuenta que la sumatoria de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 360° , realizan una formulación exhaustiva de todas las posibles combinaciones de ángulos. La imagen 12 muestra las notas de uno de los integrantes de este grupo.



Imagen 12

Al comprobar que todos los grupos hayan avanzado en el análisis, la docente propone un momento de intercambio colectivo, comenzando el diálogo de la siguiente manera:

P: ¿Cuántos ángulos obtusos puede tener un cuadrilátero convexo? ¿Por qué?

A1: Bueno, nosotros primero buscamos todas las combinaciones, es decir: con cuatro ángulos obtusos, con tres, con dos, con uno y con ninguno, después con tres agudos, así con todos... y lo que vimos que más se repetían eran los ángulos rectos, como para hacer una clasificación más linda...

P: ¿En qué sentido sería más linda la clasificación?

A2: En realidad buscábamos que la organización sea sencilla, ordenada, y nos pareció que a partir de los ángulos rectos era la más simple, porque si considerábamos otros ángulos, había muchas figuras que estaban en muchas categorías y quedaba muy desordenado.

A1: Otra cosa que tuvimos en cuenta fue que clasificamos solo los cuadriláteros que se pueden construir.

Posteriormente, describen leyendo la clasificación construida, haciendo hincapié en que encontraron muchas veces cuadriláteros que son trapezoides, familia de figuras que la semana anterior ni siquiera sabían que existían y hoy ya conocen mucho más de ellas.

Como los estudiantes expresan que, por ejemplo, con dos ángulos agudos y dos obtusos se puede construir un rombo, la docente pregunta:

P: Cuando ustedes se refieren a un rombo, ¿significa que solo ese cumple con las condiciones?, ¿es única la figura?

A3: No, es un rombo, pero hay muchos rombos, porque en realidad pueden tener lados de diferente longitud y sus ángulos no tienen que medir lo mismo...

A1: Claro, hay rombos que tienen ciertos ángulos agudos y otros que tienen otros

P: ¿Les sucedió algo similar a ustedes?

La docente amplía la pregunta al resto de la clase, donde comparten también situaciones donde a través de Geogebra pudieron visualizar que esa figura no es única, sino que hay muchas con las mismas condiciones. Por lo cual acuerdan que esas figuras son representantes de una familia de figuras que tienen iguales características.

El grupo finaliza describiendo todos los casos que detectaron en los que no pueden construirse cuadriláteros.

A1: Con tres ángulos rectos no puede construirse ningún cuadrilátero...

P: ¿Y por qué pueden afirmar eso?

A1: En realidad, cuando lo quisimos construir vimos que si tiene tres ángulos rectos, el cuarto tenía que ser recto... y ahí nos acordamos de lo que mencionó Ariel la clase pasada, que como los cuadriláteros están formados siempre por dos triángulos, entonces la suma de sus ángulos interiores es igual a 360° . Entonces, al acordarnos de esta propiedad, descartamos rápidamente cuatro agudos y cuatro obtusos.

P: ¿Y el resto de los casos?

A2: No, el resto de los casos, los fuimos probando.

Antes de cerrar este primer intercambio la docente pregunta a toda la clase:

P: En el primero de los casos ustedes anotaron que con todos los ángulos rectos pueden formar cuadrados y rectángulos, ¿son iguales esas figuras?

G1: No, no son iguales, nosotros también las pusimos en la misma categoría, tienen los ángulos iguales, pero los lados no...

G2: Claro una tiene todos los lados iguales y la otra no...

La docente consulta si toda la clase está de acuerdo con esa afirmación y como contestan que sí, se invita a continuar a otro grupo y toma la palabra, el grupo 1, muestran su afiche y comparten sus estrategias y su producción:

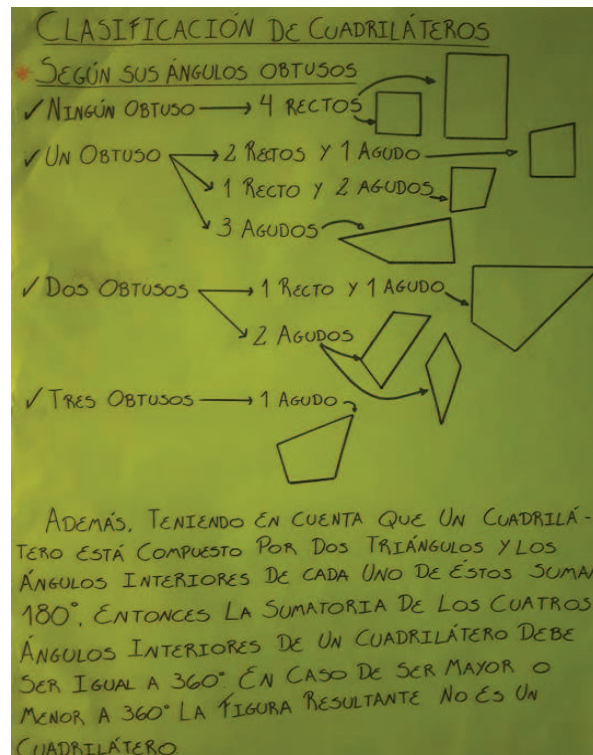


Imagen 14

V1: Bueno, como comentaron los compañeros, nosotros comenzamos probando, y encontramos por el momento quince casos, siete que se pueden construir y ocho que no.

V2: Nosotros, elegimos agrupar los cuadriláteros de acuerdo a la cantidad de ángulos obtusos que tienen. Aparecieron las categorías de ningún ángulo obtuso, uno, dos y tres. No pudimos poner la categoría de cuatro ángulos obtusos porque superarían los 360° , que es la suma de los ángulos interiores, la pusimos en el afiche a esta propiedad, porque justifica todos los casos que no pueden construirse.

V1: Con ningún ángulo obtuso solo encontramos que hay figuras que tienen sus cuatro ángulos rectos, como ser el cuadrado y el rectángulo. No puede haber cuadriláteros con los cuatro ángulos agudos, ya que la sumatoria de los mismos sería menor a 360° .

V2: Luego, con un ángulo obtuso es posible combinarlo con dos rectos y uno agudo, uno recto y dos agudos o los tres agudos.

Continúan de esta manera compartiendo las posibles combinaciones.

V3: También en nuestro afiche, dejamos plasmada la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, como ya vimos que un cuadrilátero puede componerse por triángulos, y que la suma de los ángulos interiores de cada uno es 180° , entonces la suma de los cuadriláteros debe ser 360° . Cualquier suma mayor o menor, no permitirá que se construya un cuadrilátero.

V1: Geogebra, nos ayudó mucho a observar algunas particularidades, por ejemplo al construir rectángulos, partiendo de los ángulos rectos, si movíamos los vértices, la figura cambiaba de forma, pero seguía teniendo todos sus ángulos rectos. Lo mismo con otras.

La docente pregunta si alguien desea agregar algo, e invita al próximo grupo, el grupo 2, a compartir su producción, mientras acomodan el afiche, una alumna expresa:

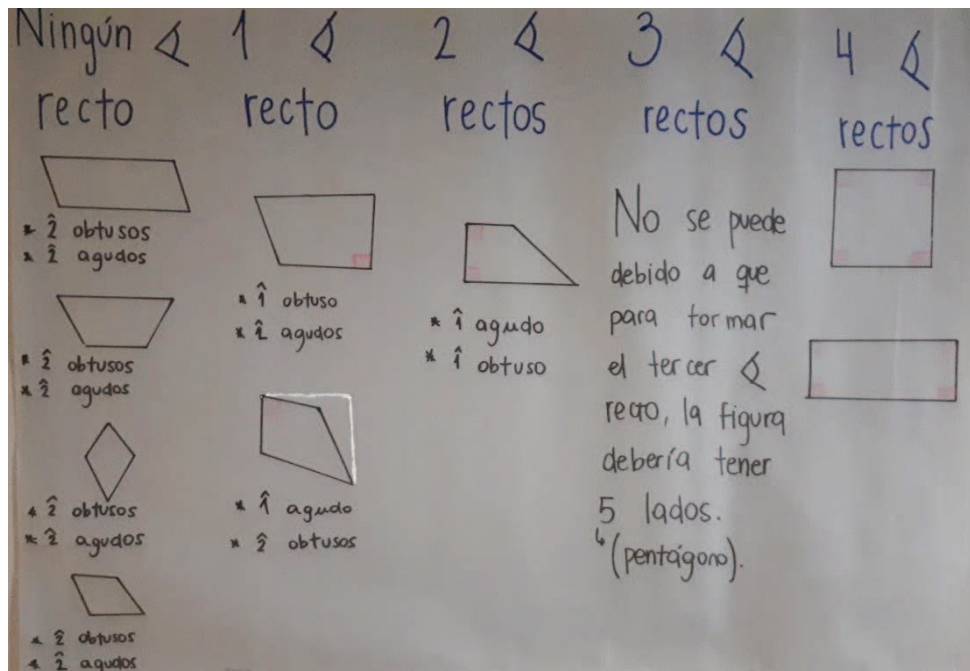


Imagen 15

G1: En relación a lo que comentaron los chicos, nosotros nos dimos cuenta que al no usar Geogebra, buscamos muy pocas posibilidades, no nos dimos cuenta de un montón de opciones que los chicos encontraron, pero bueno intentamos organizar la información que tenemos...

P: Bueno, de todos modos, ustedes pueden volver a pensar su cuadro y agregar los casos que consideren necesarios.

G2: Sí, solo que ahora van a faltar algunas figuras.

G3: Nosotras en un primer momento, habíamos buscado pares de lados paralelos, pero después nos dimos cuenta que acá teníamos que hacer hincapié en los ángulos, por lo tanto empezamos de nuevo.

G2: Como empezamos a ver que había ángulos rectos en muchos cuadriláteros, decidimos agruparlos de acuerdo a la cantidad que poseen.

Mostrando su afiche, lo describen:

G1: Con ningún ángulo recto, está el paralelogramo (PD), ya que tiene dos obtusos y dos agudos; el trapecio que también tiene dos obtusos y dos agudos y también encontramos el rombo (no cuadrado), pero acá nos pasó algo... porque el primero tiene... no, los dos tienen dos ángulos obtusos y dos agudos, pero en realidad el segundo es muy similar al cuadrado, porque los lados eran muy similares entre sí.

P: ¿Y qué pudieron concluir?

G2: Pudimos concluir que uno es un romboide, porque en realidad no tenían todos los lados iguales, y el otro era un rombo.

G2: Después, con un ángulo recto pueden combinarse con dos ángulos agudos y uno obtuso, y acá también tenemos otro romboide que tiene, como en la punta, un ángulo recto. También se puede combinar con dos obtusos y uno agudo.

G1: Con dos ángulos rectos, encontramos por ejemplo el trapecio, pero tal vez por lo que dijimos antes nos faltaron considerar otros casos, este fue el único que encontramos nosotros.

G2: Sí, este trapecio tiene dos ángulos rectos, uno agudo y uno obtuso.

G1: Después quisimos hacer tres ángulos rectos, pero nos dábamos cuenta, que cuando queríamos cerrar la figura, o necesitábamos un lado más o si o si el otro ángulo también tenía que ser recto.

G3: Sí, y concluimos que, con cuatro ángulos rectos, las figuras pueden ser rectángulos o cuadrados...

G2: ¡y también los rombos!

P: ¿Por qué?

G1: Mirá: acá hay un rombo... señalando una figura en el afiche.

En ese momento, participa un compañero de otro grupo y expresa:

V1: Claro, pero ese cuadrilátero que estás señalando.... tiene los cuatro lados iguales, pero tiene dos obtusos y dos agudos....

P: ¿Ustedes que piensan?

G2: ¡Ah! Claro, es parecido a un cuadrado, pero es cierto, no tiene ángulos rectos.

G3: Tienen los dos los cuatro lados iguales, pero no los ángulos.

La docente cierra la clase, felicitando a los grupos por el trabajo realizado y vuelve a resaltar que todas las organizaciones que comenzaron a plantear son correctas y que puede haber otras dependiendo de la característica que se tenga en cuenta para agruparlos, tal como algunos compañeros tuvieron en cuenta la cantidad de ángulos obtusos y otros de rectos, otra posible organización podría ser a partir de la cantidad de ángulos agudos que poseen, haciendo hincapié en que todas son igualmente correctas.

Los invita también a que analicen si harían alguna modificación más a los afiches teniendo en cuenta los aportes de los compañeros.

Tercera clase

La clase comienza con una propuesta de trabajo grupal, la profesora los invita a agruparse tal como lo hicieron en las actividades anteriores. Como en la clase anterior, no hay presentes estudiantes del grupo 4, por lo cual trabajan tres grupos.

La docente reparte la primera parte de la consigna, la leen en conjunto y comienza a recorrer los grupos, para acompañar en el trabajo.

Consigna:

Primera parte:



Utilizando Geogebra, exploren las siguientes situaciones:

Dados dos segmentos de distinta longitud, construir, si es posible, un cuadrilátero que los tenga por diagonales.

¿Qué cuadriláteros convexos se pueden construir? Presenten un ejemplo de los casos posibles y expliquen, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

En el grupo 3, luego de construir en Geogebra los dos segmentos de distinta longitud, discuten la siguiente situación, moviendo de posición los extremos de los mismos:

A1: Si uno de los extremos de los segmentos, pertenece al otro segmento, al trazar los lados de la figura se forma un triángulo. Así que esta es una condición que le debemos poner a los segmentos...

A2: Claro, no pueden ser cualesquiera.

En la exploración con Geogebra, encuentran algunas figuras, que rápidamente reconocen como trapecoides y justificando que lo son ya que no tienen ningún par de lados paralelos, comprobación que realizan con las herramientas del programa.

A partir de esto, al recorrer los distintos grupos, la docente explicó el uso de algunas herramientas de Geogebra, como ser la comparación de objetos, la medición de la amplitud de los ángulos, la herramienta polígono, entre otras.

En el grupo 3, comienzan una exploración mediante prueba y error, modificando la posición y longitud de los segmentos construidos en geogebra.

Los estudiantes se encuentran discutiendo qué tipo de cuadrilátero es cada uno de los que encuentran. Al visualizar un cuadrilátero, se preguntan si ese cuadrilátero puede ser un rombo. Recuperan sus apuntes de las clases anteriores y acuerdan que el rombo es un cuadrilátero con cuatro lados iguales. Al medir los lados de la figura que analizan con las herramientas de Geogebra, concluyen que no es un rombo, dado que los lados son de diferente longitud.

La discusión se transforma y se preguntan ahora: *¿cómo debería ser la posición de las diagonales para que se forme un rombo?* Al trabajar con la herramienta polígono, y medir la longitud de cada uno de los lados, nuevamente mediante prueba y error, encuentran que las diagonales deben ser perpendiculares y además intersectarse mutuamente en el punto medio para que la figura resulte un rombo.

Otra conjetura que realiza el grupo, es que las diagonales del cuadrilátero determinan dos triángulos (cada una de ellas), y que depende de los triángulos que forman es el cuadrilátero que determinan. Al analizar un cuadrado, observan que las diagonales deben formar triángulos rectángulos isósceles y que en este caso no iban a poder formarlo nunca, dado que los triángulos que obtienen son rectángulos pero escalenos, ya que las longitudes de las diagonales son distintas.

De igual modo, descartan el rectángulo, dado que necesita que sus diagonales sean de igual longitud. La docente ante esta conjetura, les pregunta a los estudiantes del grupo: *¿cuál es la diferencia entre las diagonales del cuadrado y del rectángulo?*

A1: en el cuadrado, estamos viendo que las diagonales forman triángulos rectángulos isósceles...

P: Muy bien, ¿cómo pueden decir que son las diagonales?

A2: Claro, son perpendiculares. Si no, no formarían esos triángulos.

P: ¿Y en el rectángulo?

A2: Y en el rectángulo... no son perpendiculares, porque los triángulos no son rectángulos, no sabemos bien qué tipo de triángulo son, depende el rectángulo, pero sí sabemos que son iguales.

P: Muy bien el análisis.

A3: Entonces podemos clasificar los cuadriláteros, pensando si las diagonales son perpendiculares o no, y si son iguales o no.

A4: Sí, pero tenemos que aclarar que acá no vamos a poder construir lo que tengan diagonales iguales.

A1: ¿Podemos construir trapecios?

A2: y... depende de qué trapecio.

A3: Creo que los isósceles no los vamos a poder construir, porque tienen diagonales iguales.

A1: Sí, pero los otros, que tienen diagonales distintas sí.

A1: Hagamos al revés, pensemos en los cuadriláteros que ya sabemos y miremos sus diagonales.

A partir de esto, el grupo comienza a explorar cada uno de los cuadriláteros que conocen, y analizan la posición de sus diagonales. Acuerdan cuatro criterios para agrupar cuadriláteros: diagonales oblicuas, perpendiculares, y dentro de cada categoría analizan si son de igual longitud o de distinta.

Otro diálogo que se distingue en este grupo, al construir una figura en Geogebra, es el siguiente:

A1: *profe, queremos saber si esta figura es un paralelogramo. (señalando un romboide construido en Geogebra)*

P: *A ver: ¿qué características conocen ustedes de los paralelogramos?*

A2: *Mmm... en realidad queremos saber si esta figura puede tener todos sus lados iguales...*

A1: *Ah, no, pasa que si tiene todos los lados iguales es un rombo... y esta figura no es un rombo.*

A2: *Claro, no, porque esta figura tiene dos pares de lados consecutivos iguales, pero no son iguales entre sí, sin embargo, las diagonales también son perpendiculares.*

Luego, de explorar algunas figuras más, el grupo acuerda que van a organizar la información que tienen, considerando figuras que tienen diagonales perpendiculares o secantes, e iguales o distintas.

El primer bosquejo de este agrupamiento es el siguiente:

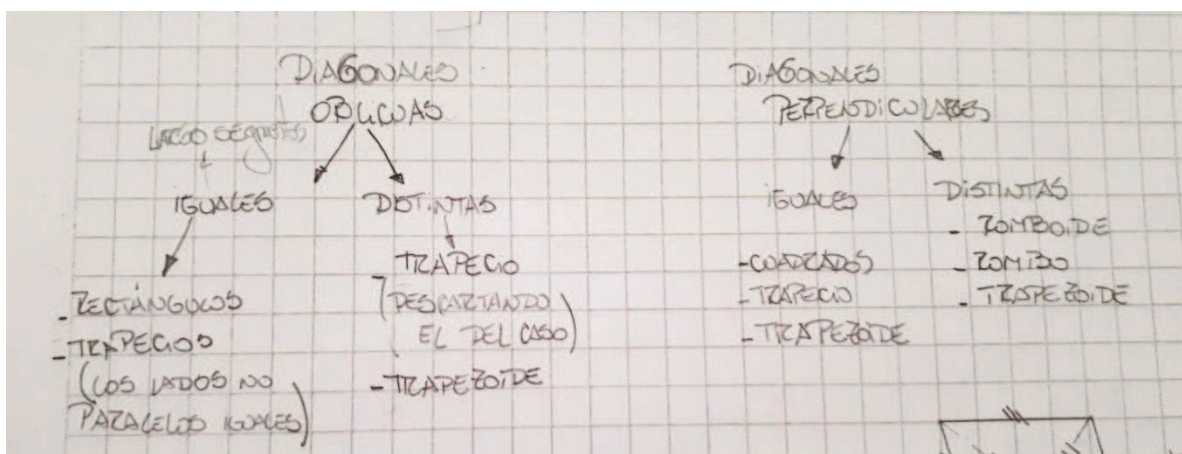


Imagen 16

El grupo 1, comienza la exploración utilizando Geogebra. Trazan dos segmentos de distinta longitud y al desplazar los extremos de los mismos y haciendo foco en las condiciones que deben satisfacer los segmentos para que los cuadriláteros se puedan construir, establecen las primeras conjeturas, validadas empíricamente con su construcción en Geogebra:

- “Ningún extremo puede pertenecer al segmento contrario, ya que si no se formaría un triángulo”.

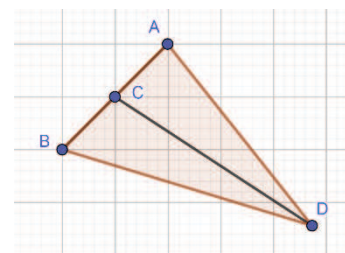


Imagen 17

AB y DC son diagonales, y el extremo C pertenece al segmento AB.

- “Los segmentos que forman las diagonales tienen que intersectarse en un punto, en caso contrario la figura resultante es un cuadrilátero cóncavo”.

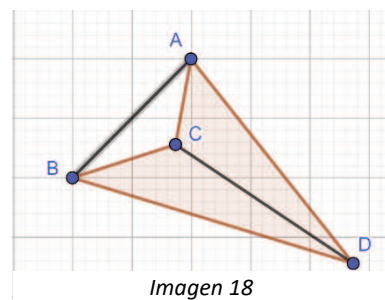


Imagen 18

AB y DC son diagonales sin puntos de intersección.

A su vez, analizaron en un primer momento, los casos que no pueden construir: cuadrados y rectángulos. Si bien sus diagonales son de igual longitud, se diferencian pues en los cuadrados son perpendiculares y en los rectángulos no.

Luego de que cada grupo, tuviera avanzada la exploración y la organización de los cuadriláteros que encontraron, la docente propone un momento de intercambio, para que cada grupo pueda escuchar el trabajo de los otros.

Dado que los estudiantes se referían a la organización que debían hacer como una forma de “clasificar los mismos”, la docente pregunta al grupo total:

P: Ustedes utilizaron en todos los grupos una palabra, que hasta ahora no se había mencionado, están hablando de clasificación de cuadriláteros. ¿Qué entienden por clasificación?

A1: Empezamos a hablar de clasificación, porque siempre que por ejemplo, depende los ángulos que tienen los triángulos los clasificamos, clasificamos los ángulos de acuerdo a sus características...

G1: Sí, es una agrupación

V1: Es que hasta ahora, ya vimos varias propiedades de los cuadriláteros, el paralelismo de sus lados, la amplitud de sus ángulos, la igualdad de lados, las características de sus diagonales... es decir que se pueden agrupar por esas características

V2: Es como que la clasificación te permite reconocer mediante características a los objetos geométricos...

P: ¿qué piensan de esto?

A3: sí, que es una agrupación

P: ¿Alguien más quiere agregar algo?

G2: No, nada más, que es una manera de agrupar... más fácil...

Como nadie responde más nada, la docente agrega:

P: Muy bien, ustedes lo pusieron en palabras, todas las afirmaciones que mencionaron son correctas. Podemos decir que clasificar es agrupar, de acuerdo a ciertos criterios y en este caso como ustedes mencionan, se clasifica de acuerdo a características comunes que tienen las figuras. Luego ustedes podrán decirme si tienen ventajas o no, y por qué.

A continuación de esto, la docente promueve que cada grupo comente cómo realizaron la exploración en este primer momento, y sus respectivos resultados parciales:

El grupo 1, comenta que a partir de graficar los segmentos en Geogebra pudieron encontrar condiciones que éstos deben cumplir, como por ejemplo que tengan un punto de intersección. Por otro lado, encontraron casos que no es posible construir, ya que las diagonales de esos cuadriláteros son iguales, como ser el caso del cuadrado, rectángulo y el trapecio isósceles.

Al modificar la ubicación los extremos de los segmentos en Geogebra mediante el arrastre, pudieron observar que los segmentos pueden intersectarse mutuamente en sus puntos medios, o no, o ser perpendiculares o no. Por lo tanto, esto es lo tendrán en cuenta al organizar las figuras.

El grupo 3, complementando lo que sus compañeros comentaron, expresan que ellos también realizaron una búsqueda con Geogebra en la que modificaban por medio del arrastre los extremos de los segmentos que construyeron. A partir de esto decidieron agrupar las figuras en dos categorías: diagonales iguales y diagonales distintas, pero a su vez dentro de cada una de ellas pueden distinguir cuadriláteros con diagonales perpendiculares y diagonales oblicuas.

Los estudiantes expresan que, si bien no creen haber terminado de ubicar todos los cuadriláteros, esas características son las que tendrán en cuenta para organizarlos.

El grupo 2, que no utilizó Geogebra, sino que se apoyó en los afiches realizados en las actividades anteriores, expresa que al no utilizar Geogebra no alcanzaron a analizar tantas posibilidades, pero que sí tienen claro que las diagonales pueden ser iguales o distintas, pero que también hay muchos cuadriláteros en los cuales las diagonales se “cortan” en su punto medio, por lo cual consideran importante mirar esa característica para agruparlos.

La docente les propone organizar los casos encontrados en un cuadro o diagrama, que les permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que estuvieron considerando. Lo que corresponde a la segunda parte de la consigna:

Segunda parte:

Elaboren un cuadro/diagrama que les permita reconocer los cuadriláteros convexos fácilmente de acuerdo a las características que estuvimos considerando.

La docente reparte un afiche a cada grupo, para que plasmen en él la organización de los cuadriláteros que elaboren.

Luego de que cada grupo elaboró sus organizaciones, comparten sus producciones, comentando las características que tuvieron en cuenta para organizarlos:

Grupo 1

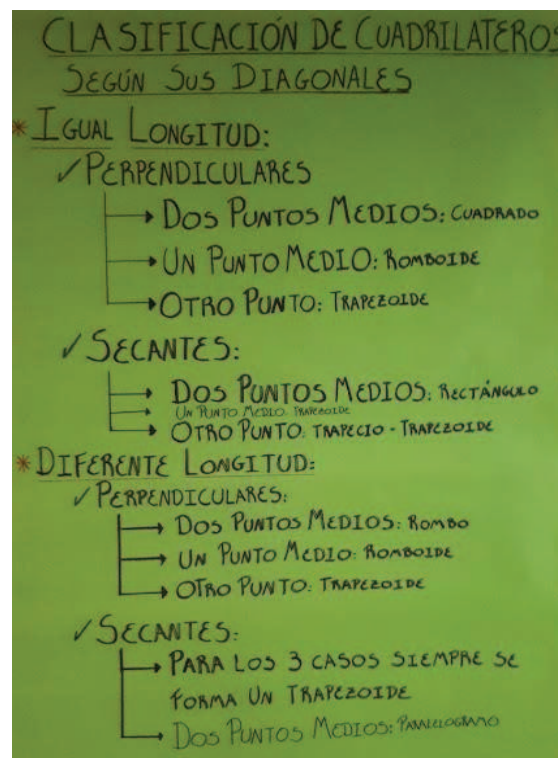


Imagen 19

Grupo 2

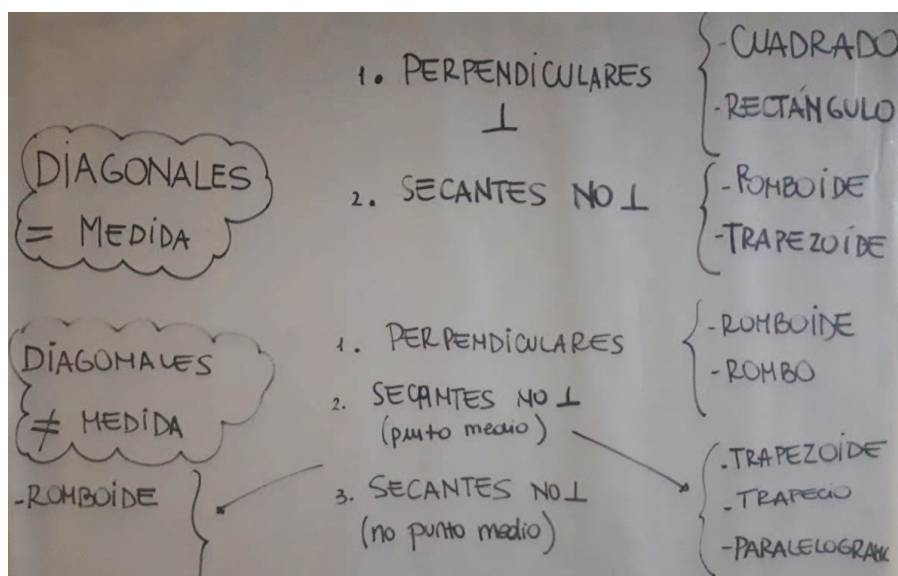


Imagen 20

Grupo 3:

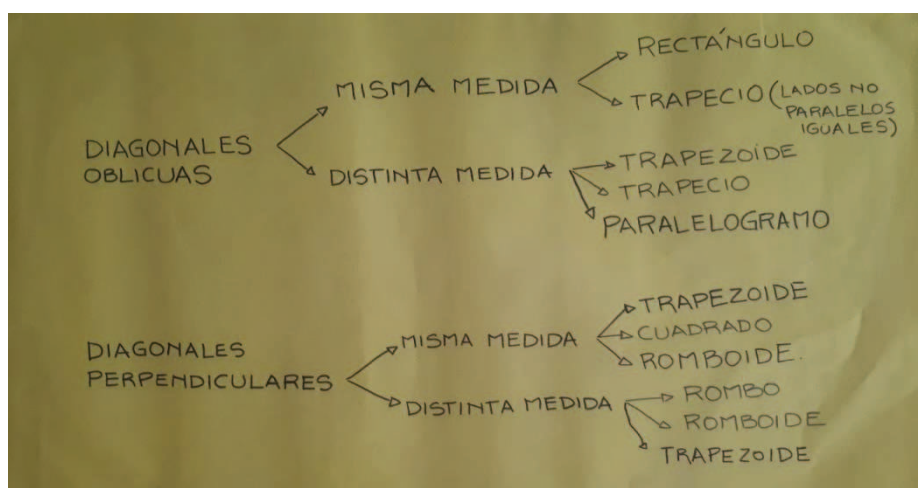


Imagen 21

Al finalizar la puesta en común, los estudiantes expresan y concluyen que no consideran que agrupar los cuadriláteros de acuerdo a sus diagonales, sea una forma “adecuada” de organizarlos, argumentando que no es fácil describirlos a partir de éstas. Para ejemplificar, nombran el trapezoide, que se encuentra en muchas categorías a la vez, por lo tanto al analizar la posición y longitud de sus diagonales no podrán describir una característica general que los diferencie de otras figuras, ya que comparten varias categorías con todas las demás.

Cuarta clase

La clase comienza con una propuesta de trabajo grupal, la docente invita los estudiantes a agruparse tal como lo hicieron en las actividades anteriores. Dado que al comienzo de la hora tres estudiantes del Grupo 2 están ausentes, se propone que el Grupo 1 y 2 se fusionen y trabajen en un solo grupo, utilizando el afiche color verde del grupo 1. El grupo 4 está presente en esta clase. La docente reparte

la primera parte de la consigna, la leen grupalmente y comienza a recorrer los grupos, para acompañar en el trabajo. Se invita a los estudiantes a explorar posibilidades con Geogebra construyéndolos si les resulta conveniente.

Consigna:

Primera parte:

¿Cuántos lados iguales puede tener un cuadrilátero convexo? Pueden explorar posibilidades construyéndolos con Geogebra si les resulta conveniente.

Segunda parte:

Completen el siguiente cuadro, que representa una posible forma de organizar la información obtenida.

	Cantidad de ángulos rectos				
Cantidad de lados iguales	ninguno	1	2	3	4
Ninguno					
2 lados iguales					
3 lados iguales					
4 lados iguales					
2 pares de lados iguales y diferentes entre sí.					

Presenten ejemplos de los casos posibles y expliquen, en los casos en que no se presentan ejemplos, si el motivo es que no existen o que no se han podido encontrar.

Al comenzar la exploración, dos de los grupos recurrieron a sus anotaciones que realizaron en las actividades anteriores. La docente acompaña el trabajo en los distintos grupos.

En el grupo 3, los estudiantes desarrollan el siguiente diálogo, en el cual expresan que una figura puede estar contenida en más de una categoría a la vez:

A1: Bueno empecemos, con todos los lados iguales... el cuadrado seguro, pero el rectángulo no...

A2: No, dos lados iguales... en realidad hasta dos lados iguales.

A4: Pero el rombo también puede estar en cuatro lados iguales...

A3: sí, y el romboide puede estar con el rectángulo, ya que tienen dos y dos...

A1: Bien, empecemos buscando los que ya conocemos...

A2: Dale, busquemos "dos y dos".

A3: Bien, dos y dos, serían rectángulo y romboide...

A4: Pero el trapecio también puede estar ahí...

A1: No, me parece que no...

A2: Para mí no, porque si no tiene más lados paralelos, como el rectángulo.

A3: Para mí puede tener dos lados iguales, o habría que ver si puede tener más de dos.

A4: Acá encontré uno que no tiene ningún lado igual... (señalando una figura construida)

A1: Pero es un trapecio...

A2: Sí, entonces el trapecio puede estar en dos grupos distintos...

A4: Sí, y el trapecioide también.

A3: ¡Sí! Ese seguro va a estar en varios.

Luego de un tiempo en donde cada uno de los grupos realizó una primera exploración, la docente propone que cada grupo comente los avances de su trabajo, para ver si hay, por ejemplo, similitudes en la forma de abordar la búsqueda.

Cada grupo comenta cómo trabajó hasta el momento:

Grupo 3:

A1: *Nosotros empezamos por los cuadriláteros que ya conocemos, y empezamos a hacer como categorías... cuatro lados iguales, tres lados iguales, dos y dos... es decir dos opuestos y distintos, pero también pueden ser consecutivos, como en el romboide. Y así fuimos buscando todos los casos, cuando no nos convencía alguno, graficamos en Geogebra a ver si es posible construirlo o no.*

Grupo 1:

V1: *Nosotros nos basamos en todos los afiches de las clases anteriores, y cuando había dudas también graficamos en Geogebra como los chicos...*

Grupo 4:

N1: *Nosotros no trabajamos con la compu ni con el celu, por el momento lo que fuimos haciendo es analizar cuántos lados tienen iguales los cuadriláteros que conocemos, pero vemos que los chicos (refiriéndose al grupo 3) tienen como más organizadas las posibilidades.*

Luego de este momento de intercambio, la docente entrega una copia a cada uno de los grupos, con el cuadro que se espera que completen, aclarando que es una forma posible de agrupar los cuadriláteros, teniendo en cuenta las dos características que allí se consideran: cantidad de lados iguales y cantidad de ángulos rectos.

Cantidad de lados iguales	Cantidad de ángulos rectos				
	ninguno	1	2	3	4
Ninguno					
2 lados iguales					
3 lados iguales					
4 lados iguales					
2 pares de lados iguales y diferentes entre sí.					

En este momento de trabajo la participación de la docente fue mínima en cada grupo, pues todos pudieron abordar la tarea y resolverla con la información analizada en la etapa previa.

Cuando todos los grupos completaron el cuadro, se les propone dar comienzo a un momento de intercambio. Cada grupo comenta cómo fue completando el cuadro:

Comienza el grupo 3:

A1: Bueno, nosotros usamos Geogebra y fuimos “probando” caso por caso, cuáles eran los que entraban en cada uno...

P: ¿A qué se refieren con probando? ¿Qué es lo que probaron?

A1: Por ejemplo: cantidad de lados iguales y ningún ángulo recto. Después con un ángulo recto, después con dos y con tres... moviendo en el programa.

P: ¿Y qué movían en el programa?

A2: Y al trabajar con un cuadrilátero, podíamos mover los lados para hacer coincidir los ángulos y después veíamos qué pasaba con los ángulos cuando movíamos los lados. Porque, por ejemplo, en el trapecio, si ya teníamos dos ángulos rectos, nos dábamos cuenta que no podíamos tener uno más, porque si no tenía dos pares de lados paralelos, entonces encontramos trapecios con ningún lado igual a otro y como máximo dos ángulos rectos...

Un compañero del grupo 1, pregunta para toda la clase:

V1: Pero ¿cómo? Si no tienen lados iguales... no puede ser trapecio.

V1: ¿No es que los trapecios tienen dos lados iguales? Nosotros no los contamos con ningún lado igual a otro.

N1: Sí, pero para mí, es un trapezoide... si no tiene lados iguales es un trapezoide.

P: A ver, les propongo... ¿podemos construir ese trapecio en el que ustedes pensaron?

A2: Sí profe, yo paso y lo construyo en el pizarrón...

Pasa el estudiante y construye un trapecio, con ningún par de lados iguales entre sí.

A2: Quedaría así, estos dos lados son paralelos y todos los lados desiguales...

P: ¿Están de acuerdo?

G1: Claro, nosotros pensábamos que si tiene todos los lados desiguales es un trapezoide...

Se hace un silencio en la clase, y luego comienzan a reír, dado que no habían tenido en cuenta esa figura.

N1: ¡Ah! Claro, no es un trapezoide, porque el trapezoide no tiene ningún par de lados paralelos, y esta figura sí.

V1: ¡Claro! es trapezoide por no tener lados paralelos, no por no tener lados iguales. Nosotros confundimos esas dos propiedades...

El grupo 1 expresa que, para completar el cuadro, se fijaron en los afiches que ya habían realizado las clases anteriores, y que cuando se presentaba alguna duda, graficaron en Geogebra para analizar qué pasaba con cada una de las figuras.

Un estudiante del Grupo 1 agrega:

V1: Nosotros tuvimos dudas donde poner el cuadrado y el rombo, porque cuando completamos la categoría “4 lados iguales” los dos cumplen esa condición; sin embargo, el cuadrado siempre tiene los cuatro ángulos rectos y el rombo no. Pero algo que nos sirvió para darnos cuenta de eso, es no manejarnos con los nombres de las figuras, porque los nombres no nos daban información de la figura, sino que cuando teníamos una duda... graficábamos en Geogebra la figura y la analizábamos. Muchas veces, la figura varía mucho y están en el límite... entonces solo graficábamos para analizar las diferencias, haciendo hincapié en las características de cada una.

El grupo 4, acordó con muchas de las cuestiones que se comentaron, pero explicaron que ellos solamente completaron el cuadro teniendo en cuenta los afiches realizados y algunas construcciones en lápiz y papel que realizaron, no trabajaron con Geogebra porque no creyeron necesitarlo. Motivo por el que en este momento pensaban que tal vez algunas cuestiones iban a estar incompletas.

Para que el diálogo sea ordenado y no repetitivo, los estudiantes proponen ir analizando cada una de las categorías que tiene el cuadro y que cada grupo vaya aportando sus anotaciones.

La docente acepta y modera el debate. En el relato de cada grupo acerca de cómo completaron el cuadro, se destacan los siguientes diálogos.

Al analizar los cuadriláteros que ubicaron en la categoría: “Ningún par de lados iguales” y advertir que solamente se completó con trapecios y trapezoides, la docente pregunta:

P: ¿Es posible que en esta categoría estén incluidos los paralelogramos?

G1: No profe, porque los paralelogramos tienen dos pares de lados opuestos iguales, por lo tanto, no pueden estar ahí.

P: ¿Están de acuerdo?

El resto de los estudiantes contestan que acuerdan.

Continuando con la discusión de la misma categoría, la docente pregunta:

P: ¿es posible que los trapecios estén incluidos también en otras categorías?

V1: Sí, profe. Puede estar en dos lados iguales y ningún ángulo recto.

G1: También puede estar en ningún lado igual a otro y dos ángulos rectos.

A4: No lo veo a ese...

P: ¿Pueden construirlo?

A2: Sí, yo paso y lo construyo.

Pasa el estudiante y lo construye en el pizarrón. La docente pregunta si están de acuerdo y los estudiantes responden que sí.

A4: Sí, también en dos lados iguales y dos ángulos rectos.

V2: Sí profe, lo que vemos acá es que los lados iguales son consecutivos.

P: ¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero?

A1: Sí, pero también pueden ser opuestos, como en el caso del trapecio isósceles, pero este no tiene ángulos rectos.

A4: Claro, sí nosotros vimos esos casos.

P: ¡Excelente, entonces aprovechen para completar sus cuadros!

V1: Profe... ¿y dos lados iguales y un ángulo recto?

P: Bien, aprovechemos la pregunta del compañero y analicemos... ¿un trapecio puede tener solo un ángulo recto?

N1: ¡No!

P: ¿Por qué no?

A3: No, porque tiene que tener si o si lados paralelos.

P: ¿Y cómo podrían justificar eso?

V2: Había una propiedad de perpendiculares...

P: ¿Cómo era esa propiedad?

V2: Sí, que si una recta es perpendicular a otra, lo es a todas sus paralelas.

P. Muy bien, entonces ¿qué justifica esa propiedad?

V1: Y... que si un cuadrilátero tiene dos lados paralelos y un ángulo recto, entonces al menos tiene dos.

V2: en esta categoría pueden ir los dos, trapecio y trapezoide...

P: ¿Están de acuerdo?

V1: Sí, entonces los trapecios pueden estar en dos lados iguales y dos ángulos rectos y también en la categoría ningún ángulo recto.

A1: Sí, profe, pero en todas estas categorías también pueden ir los trapezoides.

P: ¿Estamos todos de acuerdo?

El grupo responde que sí.

Continúan discutiendo el resto de las categorías.

P: ¿Es posible que haya un trapecio con tres lados iguales y ningún ángulo recto?

A2: Sí, profe, nosotros encontramos uno.

P: ¿Cuál?

A2: El que tiene dos lados opuestos iguales y uno de los paralelos también. (refiriéndose a un trapecio isósceles)

P: ¿Están de acuerdo?

V1: Sí, claro, nosotros habíamos pensado hasta dos lados iguales...

V2: No, con tres también lo pensamos, pero no sé porque no nos dimos cuenta.

Algunos compañeros manifiestan no darse cuenta cuál es, por lo que la compañera pasa y construye un ejemplo en el pizarrón. Luego de esto, acuerdan en que es correcto.

P: ¿Y qué sucede con tres lados iguales y un ángulo recto?

V2: Trapezoide... nosotros solo encontramos trapezoides.

A1: Sí profe, nosotros lo encontramos con Geogebra, moviendo un poco los vértices, ya te dabas cuenta que no tiene lados paralelos.

P: ¿Y qué sucede con tres lados iguales y dos ángulos rectos?

A2: Nosotros encontramos un trapecio, igual al que dibujó el compañero recién, pero el lado inclinado, apenas inclinado, para que quede con la misma longitud y el ángulo quede recto.

P: ¿Ustedes qué opinan?

Los compañeros no están convencidos, por lo que la docente los invita a construirlo en el pizarrón.

El alumno intenta construir la figura en el pizarrón, explicando esta diferencia mínima que debe haber en el "lado inclinado", a lo que una compañera le contesta:

G1: No, si vos tenés tres lados iguales, y dos ángulos rectos, el cuarto lado para cerrar la figura si o si tiene que ser igual.

V2: Sí, yo probé y no daba.

A1: nosotros lo probamos en la compu, moviendo apenas un vértice, para que solo un lado se modifique....

P: ¿Y cómo probaron?

A2: Nosotros movíamos apenas en la compu, este lado (el inclinado) pero nos fijamos que quede de la misma longitud de los otros dos.

V1: Y claro, pero si tiene ya 2 lados iguales, estos dos también van a ser iguales.

Los compañeros contestan que no, que no es posible, por lo que la docente pregunta:

P: ¿Qué tenemos como datos?

V1: Tenemos dos lados paralelos.

p: ¿Y qué más?

V2: y tenemos una recta perpendicular a esas... si la distancia entre las paralelas es, por ejemplo, 2 cm, no va a haber ningún segmento inclinado que también mida 2 cm...

A2: Claro, es cierto, no sé que vimos en el Geogebra.

A3: sí, tal vez nosotros miramos y no tuvimos en cuenta algunos decimales, porque es cierto, si lo pensamos con las distancias entre paralelas, la mínima que es la perpendicular va a ser siempre 2 unidades, todas las demás, son más grandes.

P: Entonces, ¿qué podemos concluir?

V1: *Que no hay trapecios con tres lados iguales y dos ángulos rectos, ni con tres ni con cuatro tampoco... porque si no serían cuadrados y por lo tanto serían paralelogramos.*

P: *¿Están de acuerdo?*

A lo que el grupo contesta rápidamente que sí.

Continúan analizando dos categorías más, que no generan ningún tipo de intercambio, dado que todos están de acuerdo.

Al analizar la categoría: "Dos pares de lados iguales y diferentes entre sí", en los afiches, los estudiantes colocaron dos cuadriláteros: paralelogramos PD y romboides. Por lo que la docente pregunta:

P: *Estos dos cuadriláteros... ¿son la misma figura?*

G1: *No, no son iguales,*

P: *¿Y en qué se diferencian? Si ambas tienen dos pares de lados iguales, diferentes entre sí y ningún ángulo recto...*

V1: *Y por ejemplo en las diagonales.*

P: *¿Cómo sería eso?*

V2: *En el paralelogramo se intersecan mutuamente en el punto medio y en el trapezoide, en este trapezoide no, solo una interseca a la otra.*

V2: *También podríamos decir que en el romboide son perpendiculares, y en ese paralelogramo son solo secantes.*

G1: *Claro, pero de acuerdo a esta clasificación están dentro de la misma familia... y sin embargo son figuras distintas.*

P: *Está muy bien tu observación.*

Se consulta si el resto de los compañeros están de acuerdo y si no desean agregar algo.

Antes de cerrar este momento de intercambio, una compañera pregunta:

A3: *Yo quería saber... si es posible que un rombo tenga los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos...*

G2: *¡Yo también me lo preguntaba el otro día! ¡Me pasaba a mí el otro día que movía el afiche! Yo sigo manteniendo que un cuadrado puede ser un rombo.*

V1: *Para mí, es como que el rombo incluye al cuadrado...*

N1: *Claro, para mí en ese caso es un cuadrado.*

P: *¿Entonces podemos concluir que el rombo incluye al cuadrado?*

V2: *No, para mí es al revés. Todo cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es cuadrado.*

P: *¿Y cómo podés explicar eso?*

V1: *¡era una regla del secundario!*

G2: *¡Claro! No sé por qué... porque era una regla...*

V2: *¿Puede ser que cambien las diagonales?*

G1: *Por la longitud de los lados...*

V1: *Y pero el cuadrado tiene los cuatro lados iguales y el rombo también... lo que va a variar sí o sí, son los ángulos. Porque el cuadrado si o si, tiene los cuatro ángulos rectos, en cambio el rombo puede tener cuatro rectos o dos pares de ángulos iguales.*

P: *¿Entonces?*

G1: *Claro, sí, es cierto. Puede tener los cuatro rectos o no...*

P: *Entonces, ¿Cuáles serían las condiciones mínimas que necesita un cuadrado para ser cuadrado?*

V1: tener todos los lados iguales y sus ángulos rectos

P: ¿Y el rombo?

Todos: No, el rombo solo necesita tener los lados iguales.

P: Entonces, pensando en términos de condiciones mínimas ¿quién satisface las condiciones de quién?

V1: El cuadrado cumple siempre las condiciones del rombo, y no al revés.

G1: Sí, el cuadrado tiene más condiciones que el rombo.

V1: Sí, yo recuerdo que en otra actividad, nosotros tomamos un cuadrado y dijimos que si lo rotábamos era un rombo... pero ahora vemos que ese no era el fundamento. No importa la posición...

P: ¡Muy bien! La figura es la misma aunque esté rotada.

P: Pero pensemos ahora, si yo considero que el rombo es un paralelogramo con sus lados iguales y dos pares de ángulos diferentes entre sí. ¿El cuadrado podría ser un rombo?

Los estudiantes responden que no...

P: Muy bien, pero esto depende de cómo se consideren cada una de las figuras y de qué condiciones se adoptan para caracterizar cada una de las figuras.

V2: Claro, profe, porque si tenemos en cuenta lo mínimo, el cuadrado es también paralelogramo... ¿o no?

El grupo casi completo, responde que sí, porque tiene dos pares de lados paralelos.

P: Muy bien, podemos empezar a ver que una misma figura puede cumplir a la vez condiciones mínimas de otras figuras. Todo esto dependerá de cómo se consideran cada una de las figuras. Podríamos preguntarnos acá: ¿el cuadrado cumple con las condiciones mínimas de otras figuras?

G2: Sí, del paralelogramo

G1: Y del rectángulo...

V2: Y del rombo...

G1: si claro... pero es el que más exige cosas

V1: claro, él puede estar en otras familias, pero las otras no pueden estar en la de él.

Las producciones de cada grupo fueron las siguientes:

Grupo 1:

CANTIDAD DE LADOS IGUALES	CANTIDAD DE ÁNGULOS				
	NINGUNO	1	2	3	4
NINGUNO	TRAPECIO TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE	TRAPECIO TRAPEZOIDE		
2 LADOS IGUALES	TRAPEZOIDE TRAPECIO	TRAPEZOIDE	TRAPECIO TRAPEZOIDE		
3 LADOS IGUALES	TRAPECIO TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE			
4 LADOS IGUALES	ROMBO				Cuadrado ROMBO
2 PARES DE LADOS IGUALES Y DIFERENTES ENTRE SI	PARALELOGRAMO ROMBOIDE	ROMBOIDE	ROMBOIDE		Rectángulo

Imagen 22

Grupo 3:

		CANTIDAD DE ÁNGULOS RECTOS				
CANTIDAD DE LADOS IGUALES		NINGUNO	1	2	3	4
NINGUNO	→	TRAPEZIO TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO		
2 LADOS IGUALES	→	TRAPEZOIDE TRAPEZIO	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO		
3 LADOS IGUALES	→	TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO		
4 LADOS IGUALES	→	ROMBO				CUADRADO
2 PARES DE LADOS IGUALES Y DIFERENTES ENTRE SÍ	→	PARALELOGRAMO ROMBOIDE	ROMBOIDE	ROMBOIDE		RECTÁNGULO

Imagen 23

Grupo 4:

		CANTIDAD DE ÁNGULOS				
CANTIDAD DE LADOS =		NINGUNO	1	2	3	4
2 LADOS IGUALES		TRAPEZOIDE TRAPEZIO TRAPEZOIDE	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO TRAPEZOIDE		
3 LADOS IGUALES		TRAPEZOIDE TRAPEZIO	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO		
4 LADOS IGUALES		ROMBO				CUADRADO
2 PARES = 4 ≠		PARALELOGRAMO ROMBOIDE	TRAPEZIO ROMBOIDE	TRAPEZIO ROMBOIDE		RECTÁNGULO
NINGUNO		TRAPEZOIDE TRAPEZIO	TRAPEZOIDE	TRAPEZIO		

Imagen 24

Quinta Clase

La clase comienza con una propuesta de trabajo grupal, la docente los invita a agruparse tal como lo hicieron en las actividades anteriores. Dado que al comienzo de la hora hay tres estudiantes del Grupo 2 que están ausentes, se propone que el Grupo 1 y 2 se fusionen y trabajen en un solo grupo, utilizando el afiche color verde, manteniendo la agrupación de la clase anterior. La docente reparte la consigna, que consiste en que los estudiantes elaboren una definición de los cuadriláteros con los cuales se trabajó en las últimas clases, teniendo en cuenta las organizaciones realizadas.

Consigna

Teniendo en cuenta las organizaciones realizadas en las actividades anteriores, elaboren a partir de ellas, una definición para cada uno de los cuadriláteros trabajados.

Cada grupo comienza a trabajar y la docente acompaña.

El grupo Grupo 3, solicita ayuda a la docente y se da el siguiente diálogo:

A1: Profe, nos damos cuenta que estamos mirando dos afiches a la vez...

P: A ver, cuéntenme cómo es eso...

A2: Sí, porque nos damos cuenta que estamos mirando de las figuras varias cosas a la vez; por ejemplo, el paralelismo, lados y ángulos...

A3: Sí, las diagonales las dejamos de mirar

P: ¿Y por qué decidieron no mirar las diagonales?

A1: Porque todos los cuadriláteros aparecen en todas las categorías. No nos daba muchas pistas... es decir, no es una característica que nos permita diferenciar algunos cuadriláteros de otros...

P: Muy bien, ¿Cómo por ejemplo?

A2: Y... hay figuras que están en muchos lados, como el trapecio, entonces no podemos definirlo...

P: Perfecto, entonces sigan como están trabajando, está muy bien que no se queden solamente con una sola propiedad, como la que está en los afiches, pueden crear una nueva si les resulta conveniente.

Al interior del grupo, se dan las siguientes discusiones:

A1: podríamos ir mirando cada uno de los cuadriláteros que conocemos...

A2: Dale, por ejemplo el cuadrado...

A1: Tiene cuatro lados iguales, dos pares de lados paralelos.

A3: Y también tiene cuatro ángulos iguales.

A1: Si miramos hay muchos que tienen dos pares de lados paralelos...

A2: Exacto, todos los paralelogramos tienen dos pares de lados paralelos.

A3: Pero hay diferencia entre ellos...

A1: Claro, por ejemplo en el cuadrado siempre tienen que ser los ángulos rectos... en cambio en el paralelogramo no. (mirando el paralelogramo "propriadamente dicho")

A1: ¿y el rombo?

Mirando los afiches que ya confeccionaron:

A2: Cuatro lados iguales, dos pares de ángulos opuestos iguales y también dos pares de lados paralelos.

A2: Yo empezaría a hacer una clasificación que diga... lados paralelos y lados no paralelos...

A1: ¿y éste qué es? Señalando a un romboide

A2: este tiene dos pares de lados consecutivos iguales... ¿pero son paralelos?

A1: No, para mí no.

A3: ¿Y los ángulos?

A1: A mí me parece que tiene dos ángulos iguales...

A2: Sí, estos dos tienen que ser iguales, y los otros dos tomar cualquier medida.

A3: Sí, mirá acá (señalando al afiche) Puede tener dos ángulos rectos y dos pares de lados iguales...

A1: Sí, pero pueden no ser rectos también, acá hay un ejemplo, puede solamente tener un solo ángulo recto.

A2: Claro, solamente podemos decir que solamente tiene un par de ángulos iguales.

A1: ¿Y los lados?

A3: Y... no son paralelos, pero tiene dos pares de lados iguales.

A1: Vamos con otro: ¿el trapecio?

A2: ¿Qué sabemos?

A1: No puede tener todos los lados iguales, sino sería cuadrado o rombo

A2: Puede tener dos lados iguales...

A3: Pero no dos pares.

A1: No, dos pares no, pero acá (mirando un trapecio rectángulo) puede tener dos lados consecutivos iguales, o en estos los isósceles pueden tener lados opuestos iguales.

A2: Ah, puede ¡tener tres!

A2: Vamos a preguntarle a la profe...

Llamando a la docente, le consultan:

A1: No sabemos qué características ponerle al trapecio...

P: ¿Por qué?

A2: Porque sabemos que el trapecio puede solo tener dos lados paralelos

P: Claro, es decir: un par

A1: Sí, un par de lados paralelos, y ahí no sabemos cómo escribir que no tiene ni cuatro lados iguales, ni dos pares de lados iguales paralelos.

A2: Claro, porque puede tener dos lados iguales, puede tener tres lados iguales...

P: Bien, pero vos estás diciendo que solamente tiene un par de lados paralelos. Si pensamos en figuras que solamente tienen un par de lados paralelos, ¿entraría alguna figura que lo tenga y no sea un trapecio? Es decir, ¿hay algo más que debieran excluir para que en esa familia no entre una figura extraña?

A1: No, porque todos los otros están incluidos siempre en otras familias...

A2: Eh... ¡no! Todos tienen un par de lados paralelos...

A3: Claro, pueden tener más cosas, pueden tener tres lados iguales, o dos lados consecutivos iguales, puede tener ángulos rectos, pero siempre respetando un solo par de lados paralelos.

A1: Claro, igual que en el trapecoide, que aparecía en todos lados cuando mirábamos las diagonales, pero siempre pasa que no tiene ningún par de lados paralelos.

A2: Es como que pueden cumplir propiedades de las otras, pero quedan excluidos porque tienen que cumplir específicamente esa, que no tienen lados paralelos.

A3: Claro, siempre hay una general que siempre respetan.

P: Muy claro. ¿Se animan a hacer una clasificación que incluya estas características que están mirando? ¿Cómo están queriendo definir a estas figuras?

A1: En realidad... lo que queremos hacer es buscar una característica general; por ejemplo, acá (en los paralelogramos) la característica que los agrupa y los define es que tienen dos pares de lados paralelos...

A2: Claro, pero acá hay muchos que cumplen esas características, entonces estamos buscando las diferencias entre ellos...

A1: Por ejemplo, el rectángulo tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados iguales pero distintos entre sí, el cuadrado todos los ángulos rectos y todos sus lados iguales...

A3: Claro, el rombo solo los lados iguales y sin ángulos rectos.

P: Muy bien, entiendo entonces que están buscando diferenciar cada figura dentro de cada gran categoría.

A2: Claro, porque son todas figuras distintas...

P: Muy bien, entonces ustedes ahora deberían pulir cuales son las propiedades que están mirando, y comenzar a diagramar y a organizar toda la información que tienen.

A3: Sí, perfecto, estamos mirando tres propiedades, nos estamos ayudando con tres afiches de las clases anteriores.

P: Muy bien sigan ustedes...

Al retirarse la docente, continúa el diálogo al interior del grupo.

A2: Ahora yo me quedo pensando en el romboide, ¿tiene que tener dos ángulos iguales siempre?

A1: Claro, los ángulos opuestos son iguales...

A3: ¿Pero necesitan ser rectos?

A1: No, acá en este afiche hay uno que no tiene ambos de 90°...

A2: Claro, pueden ser o no rectos, lo importante es que sean iguales, porque si no los lados no serían iguales...

A3: Claro.

A3: ¿Y con el trapecio?

A2: Y al trapecio le tenemos que pedir que tenga dos lados paralelos, un par como dijo la profe...

A1: Sí, pero nos queda ese tema de que pueden tener dos o tres lados iguales...

A2: Si, pero todos tienen más características, pero tienen un par de lados iguales... o sea que ahí entran en esa categoría, y no va a entrar ningún extraño, porque todos los otros o tienen dos pares de lados paralelos o no tienen ningún par...

A1: Si, es cierto, armemos el cuadro.

Al interior del Grupo 1, se producen diálogos que resultan interesantes, que se describen a continuación:

V2: Yo creo que los más fáciles son el rombo, el cuadrado y el rectángulo...

V1: ¿Por qué?

V1: Y porque el cuadrado tiene 4 lados iguales y 4 ángulos rectos...

G1: ¿Vas a ir caracterizando cada figura?

V1: Sí, yo lo haría tipo cuadro...

V1: Yo creo que no... que solo hay que poner lo que la define... es decir las condiciones necesarias...

G1: ¿Y con eso van a hacer una definición?

V1: Yo creo que esa es la definición, las características necesarias que los definen.

V2: Y, es que al cuadrado lo define los lados y los ángulos...

V1: Claro, pero al rombo solo los lados y al rectángulo solo los ángulos...

G1: Sí, es verdad...

V1: Entonces faltarían el romboide, el trapezoide, el paralelogramo...

V1: Veamos... el romboide necesita tener dos pares de lados iguales

G1: ¿Y los ángulos no?

V2: No, necesita tener dos pares de lados iguales...

G1: Pero el paralelogramo también tiene dos pares de lados iguales...

V1: Ah... pará, pará...

V1: ¿Qué necesita el romboide?

G1: Podemos poner las dos cosas, los lados y ángulos

V1: ¿Y qué me dijiste vos, entonces?

G1: Que el paralelogramo cumple esas...

V1: Entonces pongamos que no tiene que tener lados paralelos...

V1: Y pero ahí estás poniendo más de una cosa, estás hablando de lados y de paralelas... para mí hay que poner una sola condición, o los lados o las paralelas...

G1: Pará, llamemos a la profe...

V1: Acá estamos discutiendo porque nos damos cuenta que estamos mirando más de una cosa a la vez...

P: Bueno, si ustedes consideran necesario considerar más de una característica a la vez, lo pueden explicitar...

G1: Ah, entonces se puede... mirar más de una característica a la vez...

V1: Y sí, si en la actividad anterior miramos dos, miramos lados y miramos ángulos...

P: Muy bien, hagan diagramas que les permitan ver cómo los organizarían.

V1: Claro, por ejemplo, en el romboide nos dimos cuenta que necesita tener dos lados iguales, pero que los lados iguales no tienen que ser paralelos.

G1: Claro, pero el rombo tiene lados paralelos....

V2: Estamos mirando también los lados paralelos.

V2: Pero acá en el rectángulo, estás poniendo que necesita dos pares de lados iguales y todos los ángulos rectos

G1: Entonces deberíamos agregarle que sean distintos entre sí...

V1: No, porque sabes que pasa: el rectángulo puede ser un cuadrado, pero el cuadrado no puede ser rectángulo.

V2: Al revés, me parece que el cuadrado puede ser un rectángulo

V1: Claro pero el rectángulo no puede ser un cuadrado.

V1: Por eso, la condición necesaria del rectángulo es que tenga los cuatro ángulos rectos, el mismo nombre te lo dice...

V2: ¿Y el cuadrado puede ser rombo?

G2: El cuadrado puede ser rombo y el cuadrado puede ser rectángulo...

V1: Claro...

V2: Pero al rombo hay que agregarle algo más...

V1: Para mí, lo que necesita el rombo solamente es tener los cuatro lados iguales, después todo lo demás puede variar... como que el rombo incluye a todo lo otro, está el rombo, después está cuadrado...

V1: No, pero acá falta el rectángulo...

G1: No, porque el rombo no puede ser rectángulo... no pueden estar juntos...

V2: ¿no?

G1: No, porque la condición del rombo dijimos que es que tenga los cuatro lados iguales, y el rectángulo no siempre tiene los cuatro lados iguales...

V1: Pero yo al rectángulo no le pondría los lados... solo los ángulos tienen que ser rectos...

Se hace un silencio en el grupo mientras piensan el obstáculo con el que se encontraron

V1: Pensemos: el rombo solo necesita los cuatro lados iguales, ya que el rombo puede ser un cuadrado o...

V2: Solo rombo.

V2: El rectángulo necesita tener solo los cuatro ángulos rectos...

G2: ¿Y los lados?

V1: Para mí que no, solo los ángulos...

G1: Claro, pero si lo tomas así, el rectángulo puede ser rombo o cuadrado también.

G1: A ver, si vamos a tomar ángulos y lados, tomemos en todos los mismo... a ver si podemos llegar a alguna conclusión...

V1: Es que lo que yo veo es que si una figura cumple esta condición y ésta a la vez (señalando las del rombo y las del rectángulo) entonces esa figura es un cuadrado... ¿entienden?

V1: Y por otro lado, yo pondría al romboide, trapecio y al trapezoide...

G1: Intentemos definir al trapecio y al romboide....

V1: Me parece que yo los quiero convencer con lo mío ... pero no. Fijense ustedes...

V2: El trapezoide, es como el cuadrilátero general....

V1: Sí, no tiene lados paralelos...

G1: Ah, nos falta el paralelogramo....

V1: A ver... el trapecio solo tiene un par de lados paralelos y en cambio el trapecio tiene uno...

G2: ¿y el trapezoide?

V1: Los trapezoides no tenían lados paralelos...

V2: Entonces el cuadrado y el rombo no van ahí....

G1: Pero hoy no pusimos nada de los lados paralelos cuando hablábamos de los rombos...

V1: Claro, el trapezoide la única condición que necesita es no tener lados paralelos...

V2: Es la única condición... claro, pero hoy no estábamos pensando así... ¿en el trapecio que pusiste?

V1: Sí, para mí esas son las condiciones necesarias

G1: En el trapecio, en las otras actividades lo teníamos con dos pares de paralelas...

V1: No, con dos lados paralelos, no con dos pares...

V2: Claro, el trapecio necesita tener 2 lados paralelos...

V1: ¡Sí! Un par de lados paralelos.

G1: Está bien, es lo mismo... en el paralelogramo si puse dos pares de lados paralelos.

G2: ¿y le sacaste los ángulos rectos?

V1: no, no sé si sacarlo...

G2: Y pasa que si no lo sacas puede ser un rectángulo o un cuadrado y en consecuencia un rombo...

V1: Y sí, es que el cuadrado y el rectángulo son paralelogramos, porque tienen dos pares de lados paralelos... no importan los ángulos...

Al acercarse la docente al grupo le expresan:

V1: Creo que estamos...

V2: Sí, pero seguimos poniendo cosas...

P: Bueno, entonces cuéntenme qué fue lo que tuvieron en cuenta para armar esta organización...

V1: es como que estos tres primeros tienen relación entre sí, el rectángulo necesita tener los cuatro ángulos rectos y el rombo necesita tener los cuatro lados iguales. Y si se cumplen estas dos condiciones a la vez, se forma un cuadrado, que necesita tener cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. Después estos ya serían "otra especie", el romboide necesita tener dos pares de lados iguales, pero sin lados paralelos.

V2: En esta clasificación, nos dimos cuenta de que empieza a entrar lo que es el paralelismo...

P: Muy bien

V1: Entonces acá recién nos dimos cuenta que podemos empezar a poner paralelismo

P: ¿Y el trapecio?

V1: Necesitar tener un par de lados paralelos

V2: Sí, un par

V1: Y el paralelogramo necesita tener dos pares de lados paralelos

P: ¿Y hay alguna otra figura que cumple esta condición? ¿Que tenga dos pares de lados paralelos?

Todos: Sí, sí, ya nos dimos cuenta que los tres primeros son paralelogramos, porque tienen dos pares de lados paralelos

P: ¿Entonces?

G1: Entonces, lo que habíamos pensado era ponerlos acá, dentro de esta familia...

V1: Sí, de esa especie.

V2: Claro, sí, estos dos también tienen que estar juntos, los trapezoides y los romboides.

P: Muy bien, ya están armando una nueva organización. ¿Se animan a armar un diagrama?

V2: Sí, ya lo empezamos a pasar...

P: ¿Les puedo preguntar por ejemplo por qué no miraron diagonales?

G1: Sí, no las miramos, porque había que tener muchas cosas en cuenta: si eran iguales, o diferentes, si se cortaban en el punto medio, si eran perpendiculares...

P: Bien...

G1: Sí, cuando hicimos la actividad de las diagonales, fue la que más nos costó, en cambio cuando mirábamos otras características, nos resultaron más simples...

V1: Claro, con estas características que estamos mirando es como que nos permite identificar todo más fácil.

P: Muy bien, esto está entonces de la mano de la consigna que les solicitaba armar una organización que les permitiera identificar claramente y de forma sencilla a cada cuadrilátero.

El diagrama que organizaron los estudiantes, fue el siguiente:

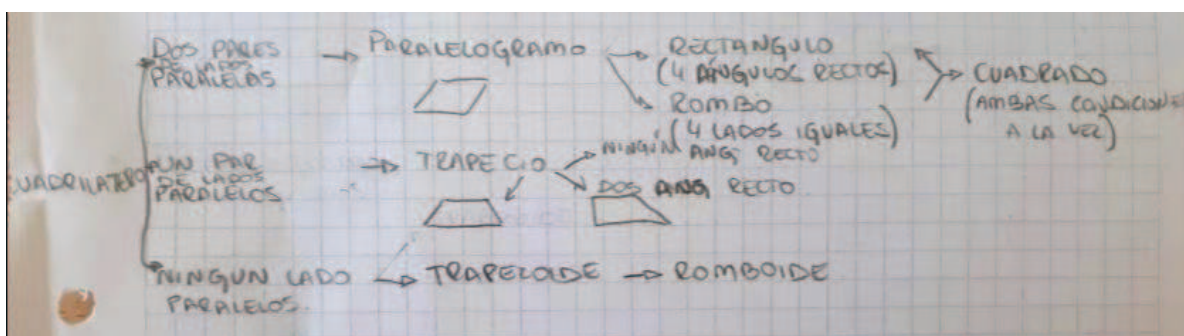


Imagen 25

Luego de que cada grupo tuvo su cuadro organizado y las definiciones elaboradas, se los invita a compartir con el resto de los compañeros cada una de las producciones.

El grupo 3 comienza compartiendo su afiche y comentan que ellos optaron por organizar los cuadriláteros de acuerdo a “pares de lados paralelos”.

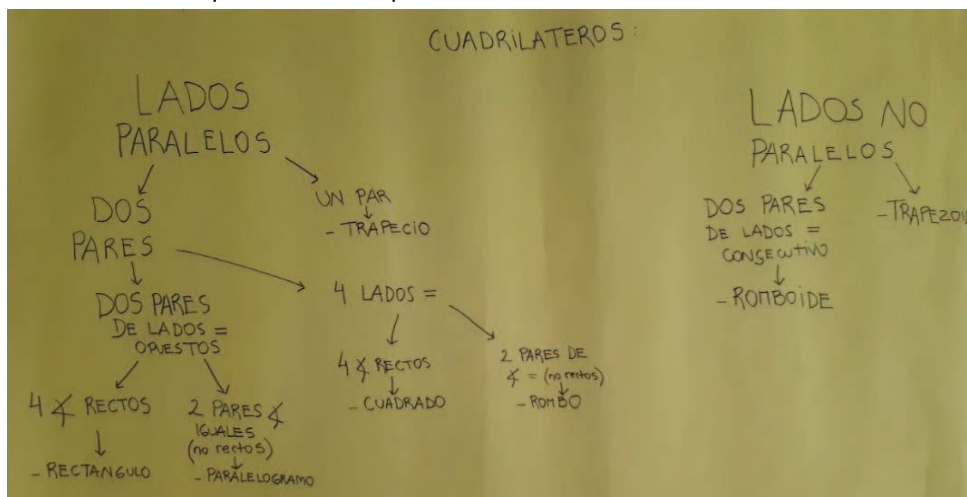


Imagen 26

Las definiciones que elaboró el grupo, son las siguientes:

Paralelogramo: dos pares de lados paralelos y dos pares de ángulos iguales no rectos.

Rectángulo: dos pares de lados paralelos y distintos entre sí, y todos sus ángulos interiores rectos.

Cuadrado: dos pares de lados paralelos, cuatro lados iguales y todos sus ángulos interiores rectos.

Rombo: dos pares de lados paralelos, dos pares de ángulos iguales no rectos y cuatro lados iguales.

Trapezio: tiene un par de lados paralelos, y dentro de esta categoría:

- Trapezio isósceles: un par de lados paralelos y los ángulos que se forman sobre los lados paralelos iguales.
- Trapezio rectangular: un par de lados paralelos y dos ángulos rectos.

Romboide: Ningún par de lados paralelos, tiene dos pares de lados consecutivos iguales y ángulos iguales.

Trapezoide: Ningún par de lados paralelos.

P: ¿Cuáles son las características que tuvieron en cuenta para realizar esta organización?

A1: Tuvimos en cuenta, lados paralelos, lados iguales y ángulos rectos.

P: Muy bien, tuvieron en cuenta tres de las características que estuvimos trabajando en clases.

A2: Para los que necesitábamos definir con más precisión agregamos características, pero el trapezio solamente necesita solo un par de lados paralelos.

A3: En lados no paralelos, está el trapezoide que es el único que no tiene lados paralelos y que se diferencia del romboide que no tiene lados paralelos, pero tiene dos pares de lados consecutivos iguales.

A2: Si, igualmente el trapezoide puede tener distintas características, la principal es diferenciarlo con que no tiene lados paralelos y luego al romboide darle una característica más, ya alcanzaba para diferenciarlos.

P: Muy bien, ¿nos pueden contar por qué seleccionaron estas características para agrupar los cuadriláteros?

A2: Fue como la más abarcativa.

A1: Claro, empezamos como desde lo más general, que eran los lados paralelos a lo más específico de cada figura.

A2: Sí, al mirar todas las figuras es algo que comparten... en cambio en los otros afiches, muchas figuras estaban en muchas categorías y no nos servían. Esta nos resultó más clara y más organizada.

La docente agradece y pregunta si hay consultas, y le da la palabra al grupo 1, quienes comparten como organizaron su trabajo:

V1: Nosotros lo primero que hicimos fue definir las figuras que tenían características más sencillas que eran el cuadrado, el rombo y el rectángulo. El rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, el rombo cuatro lados iguales y el cuadrado cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

Pero nos quedaban por fuera el trapezoide, el romboide, el paralelogramo y el trapezio. Pero ahí, nos dimos cuenta de que había más características...

G1: Claro, empezamos a ver el tema del paralelismo de los lados.

V1: Entonces, el romboide no tiene lados paralelos, pero necesita tener dos pares de lados iguales. El trapezio, necesita tener un par de lados paralelos. El paralelogramo, necesita tener dos pares de lados paralelos, como lo definimos nosotros, y el trapezoide no necesita tener lados paralelos. Y a partir de esto, hicimos el cuadro:

Al presentar el afiche, lo comentan con sus compañeros:



Imagen 27

V1: Los cuadriláteros los podemos clasificar en tres grupos: Dos pares de lados paralelos, van a ser los paralelogramos. Dentro de estos, van a estar el rectángulo y el rombo.

V2: Pero si un rectángulo tiene los cuatro lados iguales, entonces es un cuadrado.

V1: Claro, y si el rombo tiene los cuatro ángulos iguales, entonces es un cuadrado.

V1: El rombo puede ser un rectángulo, pero el rectángulo no puede ser rombo. El rombo puede ser un cuadrado, pero no siempre el cuadrado puede ser rombo, por eso no tenemos la flecha que vuelve en el gráfico.

P: ¿Y el cuadrado no puede ser rombo?

V1: Ah, sí sí, el cuadrado siempre es un rombo, pero no siempre el rombo es un cuadrado, necesita si o si los ángulos rectos. El problema está en que el rectángulo no puede ser rombo.

P: ¿Por qué no puede ser rombo?

V1: Porque el rectángulo necesita si o si, los cuatros ángulos rectos, y el rombo cuatro lados iguales, pero como el rombo no tiene restricciones sobre sus ángulos, si son rectos, entonces el rombo es un rectángulo. Pero un rectángulo, no puede ser rombo.

P: ¿Por qué no? ¿Qué necesitaría para poder serlo?

V2: Porque el rectángulo necesitaría los cuatro lados iguales...

P: ¿Y si los tiene que es?

V2: Es un cuadrado, claro y si es un cuadrado, entonces es un rombo.

V1: Otra categoría es un par de lados paralelos, está el trapecio. Y acá miramos si hay ángulos rectos o no: con ningún ángulo recto y con por lo menos un ángulo recto está esta figura (señalando al trapecio rectángulo que tienen graficado en el afiche).

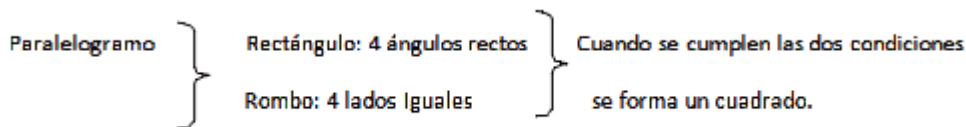
V1: Y nos quedan los que no tienen ningún par de lados paralelos, que se llaman trapezoides. Y que si además les agregamos una condición más, que tengan dos pares de lados sean iguales, es un romboide. Entonces el romboide es un trapezoide.

Las definiciones que este grupo elaboró, son las siguientes: (estas definiciones, así como el formato fue escrito por el grupo en un documento word)

Paralelismo

2 pares de lados paralelos: paralelogramo, (rombo, cuadrado y rectángulo).

1 par de lados paralelos: trapecio.
 Ningún lado paralelo: trapezoide, romboide.



Cuadrado: Necesita cumplir con la condición de tener 4 lados iguales y sus 4 ángulos rectos.
 Rectángulo: Necesita tener 4 ángulos rectos y 2 pares de lados iguales y diferentes entre sí.
 Rombo: Necesita tener 4 lados iguales.
 Romboide: Necesita 2 pares de lados iguales y ningún lado paralelo.
 Trapecio: Necesita 1 par de lados paralelas
 Paralelogramo: Necesita 2 pares de lados paralelas.
 Trapezoide: Necesita tener 4 lados sin importar la longitud, pero no puede tener paralelas.

Luego de que el grupo comparte toda su producción, la docente comenta:

P: ¿Cuál es la diferencia entre esta forma de organizar y la que propone el primer grupo?

A1: el primer grupo como que puso figuras en todas categorías distintas, en cambio los chicos (el segundo grupo) hay cuadriláteros que están en más de una categoría a la vez, como por ejemplo que el cuadrado es rombo.

P: Muy bien, en cuanto termine el último grupo, podemos profundizar en esto.

Por último, el Grupo 4, presenta su afiche y comenta que si bien ellos no estuvieron en dos de las actividades en las que trabajaron en las clases anteriores, mirando el afiche que sus compañeros realizaron la clase anterior en el que se tuvieron en cuenta dos características a la vez de los cuadriláteros, crearon una organización teniendo en cuenta lados paralelos y además lados iguales y ángulos rectos. El grupo aclaró que ya habían cursado la materia y que muchas cuestiones ya las habían trabajado en su cursado anterior. Un primer bosquejo de esa organización fue el siguiente:

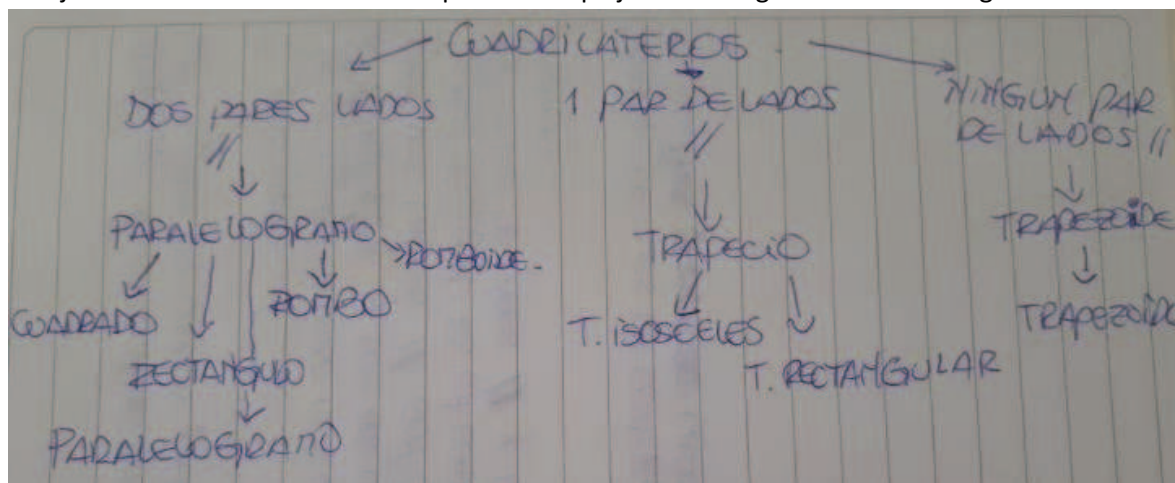


Imagen 28

Una compañera lee las definiciones elaboradas, mientras otra se encarga del afiche.

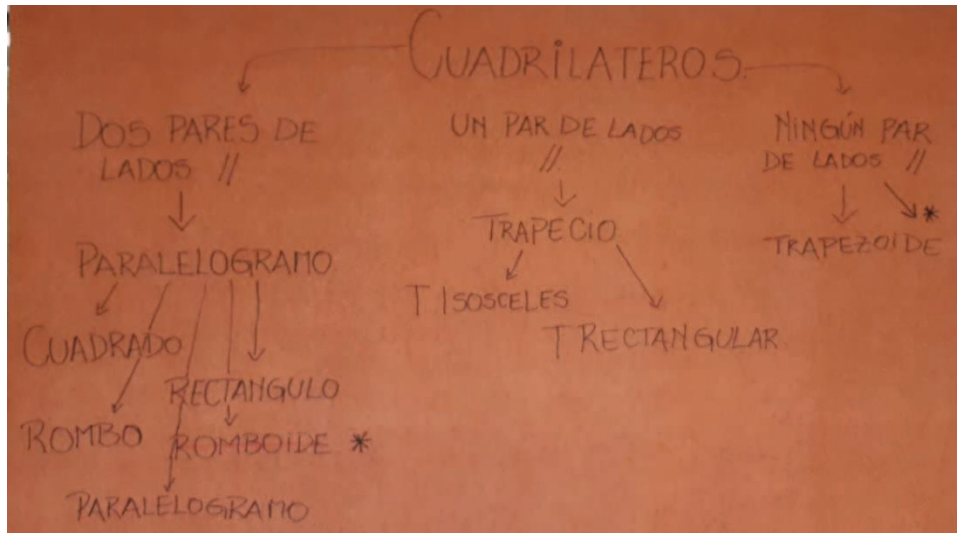


Imagen 29

Cuadrado: Es un cuadrilátero convexo con dos pares de lados paralelos, todos sus lados congruentes y todos sus ángulos interiores rectos.

Rectángulo: Es un cuadrilátero convexo con dos pares de lados iguales y distintos entre sí y todos sus ángulos son rectos.

Paralelogramo: Es un cuadrilátero convexo que tiene dos pares de lados paralelos.

Rombo: Es un cuadrilátero convexo con dos pares de ángulos iguales y cuatro lados iguales.

Romboide: Es un cuadrilátero convexo con dos pares de lados y ángulos iguales.

Trapezio: Es un cuadrilátero convexo con un par de lados paralelos.

- Trapezio isósceles: Es un cuadrilátero convexo con un par de lados paralelos y los ángulos que se forman sobre los lados paralelos son iguales.
- Trapezio rectangular: Es un cuadrilátero convexo con un par de lados paralelos y dos ángulos rectos.

Trapezoide: Es un cuadrilátero convexo sin lados paralelos.

Al finalizar un estudiante del Grupo 1, comenta:

V1: *Nosotros al romboide no lo pusimos en el mismo lugar que ustedes... nosotros lo pusimos como un caso particular de los trapezoides porque no tienen lados paralelos...*

A lo que los estudiantes del grupo 4 contestan:

N1: *Lo que tiene esa figura es dos lados iguales...*

V1: *Sí, pero los lados no son opuestos, son consecutivos... si no sería un paralelogramo...*

N1: *Ah, claro, nos faltó poner que no son opuestos...*

N2: *Creo que nos confundimos con el rombo, por eso lo pusimos ahí, pero sí, es cierto, no tiene lados paralelos, iría con los trapezoides. Ahora lo modificamos en el afiche. (se observa en el afiche, la corrección es esta figura con un asterisco)*

La docente interviene nuevamente:

P: *¿Cuál es la diferencia entre esta organización y las otras?*

Un estudiante del grupo 1, contesta:

V1: Y... esta clasificación es un poco de las dos, porque las compañeras pusieron al rombo, al cuadrado, al rectángulo y al paralelogramo dentro del paralelogramo, pero ninguna puede tener las características de las otras.

N1: Claro, sí, nosotros nos dimos cuenta de eso cuando los escuchábamos a ustedes. Por ejemplo, acá en el rectángulo, nosotros le pedimos que los lados sean distintos entre sí, entonces nunca un rectángulo va a poder ser cuadrado como lo pusieron ustedes.

N2: Claro, nosotros les pusimos más restricciones, por eso no cumplen las condiciones de otro.

La docente consulta si alguien tiene alguna duda, a lo que los estudiantes contestan si hay alguna de las clasificaciones que es correcta. A partir de lo cual, se abordan las nociones de “clasificación jerárquica” y “clasificación particional” que desarrolla De Villiers (1994). Se hace hincapié en que se puede definir y en consecuencia clasificar (o viceversa) cuadriláteros de muchas formas posibles, de acuerdo a las características en las cuales se haga foco y se consideren como condiciones necesarias y suficientes.

Se discute también la importancia de conocer que es posible clasificar de diversos modos a las figuras, y acerca de las ventajas y desventajas de una u otra.

Anexo 3

En este anexo encontrarán un documento trabajado previamente con el grupo de estudiantes, en el que se abordaron algunas nociones acerca de las definiciones en matemática.

Acerca de la definición de “definición” en Matemática

Según Winicki-Landman y Leikin (2000), “...definir es el acto o proceso por el cual se **establece de modo conciso el preciso significado** o acepción de un concepto.”

Definir los objetos/conceptos matemáticos es parte de la actividad matemática que permite:

- **caracterizar** específicamente a ‘ese’ concepto/objeto, sintetizando las **propiedades esenciales** que lo diferencian de otros.
- **organizar y desarrollar** el conocimiento matemático.

Desde una perspectiva epistemológico-didáctica que asume la **Matemática como un producto social y cultural**, es fundamental reconocer que las definiciones se establecen convencionalmente. Esa convencionalidad se refiere a que:

“... las definiciones no están predeterminadas sino que las selecciona el matemático, el autor de un libro de texto o el profesor, atendiendo a dos factores principales: el tipo de caracterización del concepto matemático que se requiera en un momento dado y las convenciones en el grado de restricción utilizado para definir un concepto matemático. (Calvo, 2001)

Con respecto al grado de restricción, de Villiers (1994) clasifica las definiciones en jerárquicas y particionales. Una definición jerárquica permite que los conceptos más particulares sean subconjuntos de los más generales, mientras que en una definición particional, los subconjuntos de conceptos se consideran disyuntos. Por ejemplo, decir “*un cuadrado es un rectángulo que tiene sus lados iguales*”, es una definición jerárquica. En cambio, decir: “*un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos e iguales, pero diferentes entre sí*”. De esta manera, no podremos afirmar que un cuadrado es un rectángulo, ya que no sería correcta esta clasificación.

Criterios para la elaboración de definiciones

Cuando las definiciones son presentadas como “hechos consumados”, no siempre se revela la influencia de los criterios que influyen en su elaboración. Esos criterios son básicamente lógicos, estéticos y pedagógicos (WinickiLandman y Leikin, 2000).

Desde el punto de vista lógico, la definición de un concepto:

- a) Debe ser precisa. Por ejemplo, no es claro definir un rectángulo como “una poligonal cerrada de cuatro lados más sus puntos interiores, en donde sus lados opuestos son paralelos e iguales y además todos sus ángulos son rectos”.
- b) Debe basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos.
- c) Debe ser consistente con definiciones anteriores en la que dicha definición se apoya, evitando todo tipo de contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones.
- d) Es arbitraria. Dos definiciones son equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de objetos. Por ejemplo, se puede definir paralelogramos como un cuadrilátero con ángulos opuestos iguales o como un cuadrilátero con ángulos opuestos iguales.
- e) Establece condiciones necesarias y suficientes que caractericen al objeto/concepto.

Desde el punto de vista estético, la definición de un concepto:

- a) Debe ser minimalista, no debe contener información redundante. Por ejemplo, no está bien definido *cuadrado* si decimos: *“es el cuadrilátero que tiene lados paralelos e iguales, ángulos iguales y diagonales iguales y perpendiculares”*.
- b) Debe ser preferiblemente elegante, lo que puede entenderse de distintas maneras: sencillez en el uso de simbolismo, simplicidad de su presentación, etc.

