UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

LA CONSTRUCCIÓN DEL SENTIDO TRIGONOMÉTRICO EN INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD

Tesis que presenta:
Sabina Capitanelli

Para optar el grado académico de:
Maestría en Docencia Universitaria

Directora:
Mg. Silvia Bernardis

Santa Fe, 2023

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mi esposo Fernando y a mi hija Lourdes por su constante apoyo y compañía a lo largo de este camino.

Un reconocimiento y gratitud especial para mi directora, Silvia Bernardis que con su apoyo incondicional, su generosidad, dedicación y esfuerzo me guió en todo momento en cada etapa de esta tesis y me dió la fortaleza para superar cada obstáculo.

A los profesores, estudiantes y colaboradores externos que, desinteresadamente, colaboraron en este trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Problema de Investigación

La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad.
HANS FREUDENTHAL

1.1. Delimitación e interés del tema

En mi experiencia como docente del curso de articulación disciplinar de matemática para ingresantes a la Universidad Nacional del Litoral (UNL), surge la preocupación por las dificultades observadas en la resolución de problemas de triángulos rectángulos, específicamente aquellas ligadas a la práctica de modelar situaciones o contextos de otras áreas del conocimiento o de la vida cotidiana, cuestión que interpela respecto de la verdadera comprensión de las razones trigonométricas y que redunda en producciones de los estudiantes carentes de sentido. Al respecto, Martín-Fernández et al. (2019) mencionan que la trigonometría es una parte de las matemáticas que es difícil de entender para los estudiantes y ello ocasiona un bajo rendimiento en el dominio matemático universitario. Por otro lado, Torres-Corrales y Montiel-Espinoza (2020) manifiestan que, dado el abordaje con que los docentes del nivel secundario introducen la trigonometría a partir de las relaciones proporcionales entre los lados de los triángulos rectángulos semejantes en relación a un solo ángulo, el discurso matemático escolar de la razón trigonométrica admite un significado lineal (a crecimientos constantes de la amplitud de un ángulo agudo del triángulo rectángulo corresponden decrecimientos constantes de la longitud del lado).

Montiel (2014) a partir de un análisis de textos escolares, muestra que tanto en las tareas trigonométricas habituales como en los problemas de aplicación no se requiere que el estudiante realice o analice construcciones geométricas (ya que éstas, así como su proporcionalidad, constituyen condiciones de partida), que obtenga mediciones o datos, o consigan la solución por otra vía. Como consecuencia de ello, consideramos que la enseñanza de las razones trigonométricas no se vincula con temas que le dieron origen y ello provoca una ruptura con la propia historia de la trigonometría. Advertimos que, con frecuencia, los estudiantes toman ejemplos que le sirven de guía sin lograr situarse en el contexto de la problemática y menos aún, buscar otras alternativas de estrategias que le permitan resolver sin tener que recurrir al objeto matemático en estudio.

A partir de la revisión literaria basada en la investigación didáctica de los contenidos escolares de trigonometría, son numerosos los autores que se ocuparon del tema, no así los que se dedican a estudiar acerca de los sentidos y modos de uso de las razones trigonométricas. En estudios hallados sobre cuestiones de la didáctica de la trigonometría, podemos mencionar los trabajos aportados por Montiel (2005), Fiallo (2010), Hertel y Cullen (2011), Rueda Upegui (2012), Martín-Fernández (2013), Montiel-Espinosa y Buendía (2013), Gómez Ramírez (2013), Mateus Vargas (2013), Bravo et al. (2014), Montiel-Espinosa y Jácome-Cortés (2014), Peña-Medina y Vargas González (2015), Fonseca Montero (2016), Abonia y Miranda (2017), Cruz-Márquez (2018), Escalante Godoy (2018), Martín-Fernández et al. (2019), Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021), entre otros, quienes proponen diferentes secuencias didácticas para abordar el tema desde la circunferencia unidad, el triángulo rectángulo, las razones trigonométricas o las funciones trigonométricas. Además, varios de ellos han utilizado una aproximación a estos conceptos matemáticos a partir de situaciones reales y/o recursos tecnológicos, tales como los programas de geometría dinámica, con la intención de facilitar el abordaje del tema.

En relación a las investigaciones acerca del sentido y modo uso de las razones trigonométricas, destacamos estudios tales como, los aportes elaborados por Arenas et al. (2012), Martín-Fernández (2013) y Martín-Fernández et al. (2016, 2019).

La presente tesis tiene como objetivo primordial estudiar la construcción con sentido de las razones trigonométricas en ingresantes a la universidad. Para ello, caracterizamos en una primera etapa, el tratamiento del tema en la escuela secundaria y en el curso de articulación en el ingreso a la universidad, para luego con este insumo, en una segunda etapa, diseñar e implementar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) relativa a la modelización de situaciones que involucran triángulos rectángulos, en el marco del enfoque de la Educación Matemática Realista. La investigación se sitúa en la enseñanza de la matemática en Gálvez, provincia de Santa Fe.

La noción de sentido de contenidos matemáticos escolares actualmente se ha incorporado a las propuestas curriculares, como por ejemplo es el caso de los nuevos diseños curriculares en España. Estos sentidos, basados en las formas en las que se pueden usar los contenidos matemáticos, se ajustan a las competencias matemáticas, como las defendidas en los estudios PISA, ya que subrayan la funcionalidad de la matemática escolar y enfatizan el interés en los fenómenos del mundo real que requieren y desencadenan un tratamiento matemático. La transición de la escuela secundaria a la universidad presenta dos cuestiones importantes que son motivos de reflexión y preocupación para estudiantes y docentes, las evaluaciones para el acceso y la formación matemática con la que los estudiantes ingresan a la universidad. La noción de sentido matemático situada como elemento central, organiza la enseñanza del conocimiento matemático longitudinalmente, ya que se basa en las destrezas transversales que permiten construir y crear matemática, de allí la importancia de conocer los fundamentos, reflexionar e incluir este tema en futuros procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En los cursos de articulación de matemática para el ingreso a la universidad, como mencionamos, se evidencian dificultades de los estudiantes para la modelización de situaciones reales en los temas referentes a las razones trigonométricas, cuestión que consideramos relevante en el estudio del sentido de dichos contenidos escolares. Acordamos con Montiel (2013), quién expresa que el discurso trigonométrico escolar convierte a las razones trigonométricas en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo. Como menciona la autora, existe una pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico. En otras palabras, se utilizan estrategias algebraicas para convertir el tratamiento de las razones trigonométricas a través de la resolución de ecuaciones, sin conocer el sentido de cada una de las variables involucradas. Al respecto, Cruz Márquez (2018) menciona que, con frecuencia se utilizan mnemotecnias como ser SOHCAHTOA, la que asocia de forma acróstica las definiciones para el seno (SOH: seno-opuesto-hipotenusa), coseno (CAH: coseno-adyacente-hipotenusa) y tangente (tangente-opuesto-adyacente) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, evidenciando que las razones trigonométricas son vistas como cocientes entre las longitudes de los lados de triángulos rectángulos. Además, Montiel y Jácome (2014) llevaron a cabo un análisis del discurso Matemático Escolar (dME) en libros de texto del nivel secundario mexicano para identificar un posible origen del significado lineal construido por los profesores. Los autores comunicaron que en la trigonometría abordada desde la escuela no se presentan actividades y explicaciones que permitan reconocer e identificar que lo trigonométrico está en la naturaleza de la relación ángulo-distancia y, por lo tanto, esta característica constituye un espacio para que se manifieste la linealidad.

Abonia y Miranda (2017) mencionan que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas cuando éstas no se contextualizan, representando conceptos inmóviles que no tienen relación con el medio que los rodea, llevando a los estudiantes a no comprender los objetos matemáticos planteados. Por consiguiente, consideramos que es de suma importancia que los estudiantes vivencien situaciones donde observen, exploren, conjeturen, relacionen, validen y generalicen; en definitiva, matematicen contextos reales o bien aquellos provenientes de otros campos del conocimiento, para lograr una formalización con sentido de ese proceso geométrico que surge en la génesis de las razones trigonométricas.

Creemos relevante el estudio en la medida en que contribuirá, teórica y metodológicamente, a realizar aportes para mejorar la construcción con sentido de las razones trigonométricas en estudiantes de nivel secundario y esto redundará en la superación de las dificultades evidenciadas en torno al tema en los ingresantes a la universidad.

1.2. Problema de investigación

1.2.1. Planteamiento del problema

La trigonometría se inicia en la educación secundaria obligatoria con el objetivo de resolver problemas de triángulos rectángulos aplicando alguna de las tres razones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente. Abonia y Miranda (2017), mencionan:

> [...] una de estas problemáticas en el estudio de las razones trigonométricas se refleja cuando se aplican patrones de enseñanza que necesitan de un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad; de esta manera, algunos de los estudiantes no adquieren las habilidades necesarias; por consiguiente, se ven afectados los objetivos de aprendizaje deseados en estos objetos matemáticos. (p.13)

La preocupación no radica en la dificultad de resolver algún algoritmo, sino en la contextualización de situaciones y/o en la traducción de textos discursivos significativos y reales, donde el diseño de estrategias metodológicas para abordar la solución les permita visualizar, conjeturar, comprender, argumentar, validar y concluir el sentido de las razones trigonométricas.

Según Ruiz-Hidalgo y Flores (2022), existen diferentes acepciones de sentido en la Educación Matemática.

- Sentido como parte del significado: vinculado con el signifcado de una palabra o grupo de palabras y mencionan que en matemática, el sentido de un concepto matemático es parte inherente de su significado semántico y se centra en los modos de usos, las situaciones, los contextos y los fenómenos que forman parte del significado de dicho concepto.

- Sentido como habilidad o destreza: tiene que ver con la habilidad o destreza para hacer algo o para juzgar bien en ello, explican que desde el punto de vista del aprendizaje, el sentido aparece como conjunto de habilidades asociadas a contenidos matemáticos concretos que el estudiante debe desarrollar.

- Enseñar con sentido: consideran los autores que el docente debe enseñar con sentido, es decir el sentido como el modo de enfocar, de entender o juzgar algo, entendiendo por esto proporcionar oportunidades para que sus estudiantes aprendan matemáticas con sentido, esto es, implicar a los estudiantes en el desarrollo de instrumentos propios, no rutinizados en la resolución de problemas.

Las tres acepciones mencionadas por los autores se pondrán en juego en el estudio, dado que el análisis de las tareas en los textos escolares se vincula con la primera acepción y la propuesta de la THA tiene como objetivo principal la enseñanza con sentido de las razones trigonométricas en una matematización progresiva de un contexto realista, con la tercer acepción.

Desde el punto de vista de la segunda acepción, definiremos a continuación lo que denominaremos *sentido trigonométrico*.

Sentido Trigonómétrico: es el conjunto de habilidades que el estudiante debe desarrollar asociadas a las razones trigonométricas para modelar distintas situaciones (matemáticas, de la vida cotidiana y de otras áreas del conocimiento) en las que está involucrada la resolución de triángulos rectángulos.

En la sección 3.3.5, del Marco teórico, retomaremos estos términos y daremos precisiones respecto de la necesidad de definirlos.

1.2.2. Enunciado del problema

Los usos que los ingresantes a la universidad le confieren a las razones trigonométricas, evidencian experiencias insuficientes para la construcción del sentido trigonométrico.

1.2.3. Objetivo general

Estudiar la construcción del sentido trigonométrico en ingresantes a la Universidad.

Este estudio se abordará a partir de los objetivos específicos que enunciamos a continuación.

1.2.4. Objetivos específicos

- Identificar las dificultades de los ingresantes de la muestra en la resolución de triángulos rectángulos, específicamente en aquellas tareas que implican modelar situaciones de la vida cotidiana y de otras áreas del conocimiento.

- Caracterizar los sentidos y modos de uso en los textos escolares mencionados por sus docentes.

- Identificar elementos teóricos y metodológicos para diseñar una trayectoria hipotética de aprendizaje con sentido de las razones trigonométricas, enmarcada en el enfoque de la EMR.

- Gestionar un plan de clases en el marco de la EMR.

- Identificar, caracterizar y analizar los niveles de matematización horizontal y vertical por los que transitan los estudiantes en el trabajo con la THA diseñada.

1.2.5. Actividades de Investigación

- Analizar las producciones de los ingresantes a la universidad en tareas de resolución de triángulos rectángulos.

- Analizar los sentidos y modos de uso de las razones trigonométricas en los textos escolares que mencionan los docentes de 5to. año del nivel secundario.

- Diseñar, implementar y analizar una trayectoria hipotética de aprendizaje en la que los estudiantes de 5to. año construyan el sentido trigonométrico en el marco de un contexto realista.

1.2.6. Hipótesis

Los objetivos y las actividades propuestas se acompañan de las siguientes hipótesis de trabajo para orientar las acciones de investigación.

- *Hipótesis 1*: en las producciones de los ingresantes a la universidad de la muestra se evidencian dificultades en la resolución de triángulos rectángulos ligadas a la práctica de modelar situaciones de la vida cotidiana o de otras áreas del conocimiento.

- *Hipótesis 2*: las tareas escolares propuestas del tema por los textos analizados, si bien se presentan en contextos, situaciones y fenómenos diversos, hacen hincapié en el proceso algebraico más que en el geométrico en la construcción del sentido trigonométrico.

- *Hipótesis 3*: las experiencias con situaciones reales están ausentes en las propuestas escolares del tema en los materiales analizados.
- *Hipótesis 4*: para superar las restricciones caracterizadas en el tratamiento del tema es viable el diseño de un experimento realista, que propicie la matematización progresiva y la construcción del *sentido trigonométrico*.

1.2.7. Expectativas

- Avanzar en la caracterización del sentido trigonométrico en los ingresantes a la universidad.
- Poner de manifiesto algunas restricciones en los elementos de sentido priorizados en el tratamiento de las razones trigonométricas en el nivel secundario.
- Aportar elementos para incorporar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas.
- Evidenciar que el trabajo con experiencias con situaciones reales da sentido a los conceptos, las variables y las relaciones involucradas en el tratamiento del tema.

1.3. Metodología de investigación

En la primera etapa de la investigación analizamos por un lado, las producciones de los ingresantes a la universidad, específicamente las dificultades que surgen al abordar las tareas de resolución de triángulos rectángulos, en el marco de las evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática de la ciudad de Gálvez. Por otro lado, un análisis de los libros escolares y materiales de estudio propuestos por los docentes de 5to. año de las escuelas secundarias de la ciudad de Gálvez y el manual del curso de articulación de matemática para ingresantes a la UNL, nos focalizamos en el estudio de los sentidos y modos de uso que se priorizan en las tareas propuestas por los autores.

Para seleccionar la muestra de los textos, implementamos un cuestionario a los docentes de las escuelas secundarias, con el objetivo de detectar los materiales que utilizan para la enseñanza del tema. Se trata de un análisis documental de características descriptivas, donde contextualizamos y situamos el tema objeto de estudio en la enseñanza de la matemática en la ciudad de Gálvez.

Para la metodología que utilizaremos en la segunda etapa de esta investigación tomamos elementos del experimento de diseño propuesto por Cobb y Gravemeijer (2008), de naturaleza principalmente cualitativa, que "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (Molina et al., 2011, p.75). Dentro de los distintos tipos de experimentos de diseño, este estudio se desarrolla en torno a un experimento de enseñanza en relación con el contenido razones trigonométricas a partir del cual se plantea un experimento de enseñanza dirigido por la conjetura.

La IBD, en su esencia cualitativa, se enfoca en analizar el proceso de aprendizaje en un contexto específico, mediado por el diseño de secuencias de aprendizaje que conjeturan sobre las formas particulares en que los estudiantes aprenden, las herramientas que utilizan y las estrategias únicas de aprendizaje. De acuerdo con Confrey (2006, citado en Molina, 2006), este tipo de investigación se centra en documentar diversos aspectos, como los recursos y conocimientos previos que los alumnos ponen en juego, la interacción entre alumnos y profesores, la creación de anotaciones y registros, la emergencia y evolución de las concepciones, el uso de recursos y la ejecución de la enseñanza a lo largo del proceso de instrucción. Esto se logra mediante el estudio detallado del trabajo de los alumnos, grabaciones de videos y evaluaciones de la clase.

Los experimentos de enseñanza son la modalidad más común en la IBD. Según Steffe y Thompson (citados en Molina et al., 2011, p.79), un experimento de enseñanza se compone de una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son, un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores. "Los experimentos de enseñanza se realizan para poner una prueba y generar hipótesis durante el experimento en general o durante cada uno de los episodios" (Molina, 2006, p. 281). Las conjeturas acerca de las posibles trayectorias de aprendizaje se formulan y reformulan durante el desarrollo de los episodios planificados, siendo necesario en ocasiones abandonar una línea de estudio para replantear una nueva. Esta naturaleza cíclica obliga al investigador-docente a generar hipótesis sobre las posibles respuestas o reacciones de los estudiantes a las actividades propuestas.

La IBD coordina dos intenciones fundamentales: la creación de situaciones o entornos de aprendizaje y enseñanza, y el desarrollo de teorías que sean útiles para identificar.

Un aspecto crucial de la IBD es la necesidad de recoger registros exhaustivos para capturar todo el proceso, incluyendo lo que los alumnos, los docentes y los investigadores aprenden a lo largo del desarrollo del experimento. La recopilación de datos permite realizar análisis continuos durante los diferentes ciclos y un análisis final retrospectivo de todos los datos recopilados en el proceso de investigación. Aunque los investigadores recopilan más datos de los que pueden analizar y utilizar, es esencial distinguir la información relevante de la irrelevante posteriormente.

En el marco de los experimentos de diseño, específicamente tomamos elementos de los experimentos de enseñanza como destaca Molina (2006), se lleva a cabo en el aula y tiene como objetivo investigar nuevas estrategias de enseñanza de conceptos matemáticos. Su característica distintiva radica en la conjetura que lo define y guía el proceso de investigación, acompañado de objetivos y preguntas de investigación a las cuales se busca dar respuesta.

Molina et al. (2011) caracteriza la Investigación Basada en el Diseño (IBD) de la siguiente manera:

- La IBD se realiza en contextos naturales de enseñanza y aprendizaje. La complejidad de estos entornos se traduce en la implicación de múltiples variables, muchas de las cuales no se pueden controlar.
- Coordina dos intenciones. Una de ellas es el diseño de situaciones o ambientes de aprendizaje y enseñanza, y otra es el desarrollo de teorías útiles para detectar regularidades en los contextos con el fin de una mejora en la educación.
- El proceso de investigación y el desarrollo del diseño, tienen lugar a través de ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño de la intervención, basadas en las evidencias que van obteniendo y los constructos teóricos.
- La investigación debe dar cuenta de cómo y por qué funcionan los diseños educativos en contextos reales.
- El desarrollo de la investigación debe apoyarse en métodos prácticos y teóricos que permitan constatar las conexiones de los procesos de implementación con las conjeturas planteadas, para que los resultados sean de interés.

En la ejecución de los experimentos de enseñanza se incluyen tres fases: preparación del experimento, experimentación en contextos de clase y análisis retrospectivos de los datos generados con el propósito de extraer información sobre el diseño, permitiendo su mejora.

En la primera fase, definiremos las metas de aprendizaje, describiremos las condiciones iniciales, definiremos las intenciones teóricas y desarrollaremos el diseño instructivo para llevar al logro de las metas fijadas. En una segunda fase, se llevará a cabo el experimento de diseño.

El propósito, como plantean Cobb y Gravemeijer (2008), es probar y mejorar la THA conjeturada en la fase preliminar del experimento y desarrollar una comprensión de cómo funciona, siendo que los microciclos de diseño y análisis dan forma a la matematización progresiva esperada.

Por último, en la tercera fase, se analizarán los datos recogidos en la implementación del diseño privilegiando aquella información relevante en función a los objetivos planteados. El análisis de la heurística de reinvención guiada que proponemos para esta investigación se fundamenta con los principios teóricos y metodológicos de la educación matemática realista, de manera que los niveles de matematización guían la producción de un modelo emergente elaborado y desarrollado por los estudiantes participantes.

1.3.1. Sujetos y documentos de estudio

Los sujetos y documentos de estudio de esta investigación se detallan a continuación según las etapas en las que se desarrollará la misma.

- *Ingresantes a la universidad*: que realizaron el curso de articulación disciplinar de matemática en la ciudad de Gálvez (Provincia de Santa Fe) en las ediciones 2019 y 2020.

- *Profesores de matemática*: que se desempeñan en el 5to. año (17-18 años) en las escuelas secundarias de la ciudad de Gálvez.

- *Estudiantes de 5to. año/Ingresantes a la Universidad*: alumnos de la Escuela de Educación Secundaria Orientada Particular Incorporada Nº 3178 "Nuestra Señora del Calvario" de la ciudad de Gálvez (Provincia de Santa Fe), además, la mayoría de ellos se encuentra inscripto a la UNL y realiza el curso de articulación disciplinar de matemática para el ingreso a la universidad (adelantado de octubre para ingresantes 2022).

Los profesores participantes de la primera etapa serán seleccionados a partir de una indagación previa sobre la inclusión de las razones trigonométricas en sus planes de estudio, tratándose así de un muestreo no probabilístico intencionado. Los grupos de las muestras seleccionadas en cada etapa, ingresantes a la universidad y estudiantes de 5to. año del nivel secundario, corresponde a un muestreo no probabilístico por conveniencia, dado que están radicados en la ciudad de Gálvez.

Los documentos seleccionados para analizar en la investigación no interactiva están directamente vinculados con los sujetos de estudio de la investigación interactiva, y son los siguientes:

- *Evaluaciones de Ingresantes*: correspondientes al curso de articulación disciplinar de matemática desarrollado en el Centro Universitario Gálvez en 2019 y 2020.

- *Textos escolares*: en los que se aborda el tema, que fueron mencionados por los profesores de matemática entrevistados de la ciudad de Gálvez.

- *Manual del Ingreso*: material del curso de articulación disciplinar de Matemática propuesto para los ingresantes a la universidad (UNL).

1.3.2. Instrumentos de recolección de datos

Primera etapa

- Evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática del Centro Universitario Gálvez (UNL).
- Cuestionario semántico para las entrevistas a docentes de 5to. año del nivel secundario de la ciudad de Gálvez.

Segunda etapa
En esta etapa, debido a la complejidad y el tipo de experimentación, los datos se recolectarán por medio de los siguientes instrumentos.

- Grabaciones de audio.
- Videos.
- Notas de clase.
- Producciones de los estudiantes (escritas, imágenes, videos).

1.4. Etapas de la investigación

La agenda para la presente investigación es la siguiente:

1.4.1. Primera etapa: *Análisis del sentido trigonométrico*

Para la primera etapa de esta investigación, por un lado analizaremos las producciones de los ingresantes a la universidad en las evaluaciones del curso de articulación disciplinar. Por otro lado, recolectaremos datos a través de un cuestionario semántico con el objetivo de conocer los textos escolares y materiales del curso de articulación referidos al tema. El análisis de los textos y materiales mencionados se focalizará en recuperar información sobre los cuatro componentes que dan sentido al concepto en estudio.

- Los términos que lo identifican.
- Los contextos en los que se plantean las tareas.
- Los fenómenos que le dan origen y a los que organiza.
- Las situaciones en las que se aplica.

1.4.2. Segunda etapa: *Experimento de diseño realista*

El análisis en la primera etapa nos posibilitará conocer las dificultades de los ingresantes a la universidad y diferentes condiciones y restricciones del tratamiento del tema en la escuela secundaria, así como su influencia en la configuración de los objetos mentales construidos por los estudiantes, con el propósito de comprobar las hipótesis planteadas. En la segunda etapa, diseñaremos e implementaremos una propuesta superadora de las dificultades y restricciones mencionadas. A continuación describimos las fases de esta segunda etapa.

- *Fase 1: Preparación.* Se precisarán las metas de aprendizaje, describiremos las condiciones iniciales, definiremos las intenciones teóricas y desarrollaremos el diseño instructivo para llevar al logro de las metas fijadas.
- *Fase 2: Implementación.* Se llevará a cabo el experimento de diseño a través de una trayectoria hipotética de aprendizaje donde los microciclos de diseño y análisis dan forma a la matematización progresiva esperada.
- *Fase 3: Análisis retrospectivo.* Se analizarán los datos recogidos en la implementación del diseño, a partir de interpretación del discurso y la comunicación en el aula propuesta por Yackel y Cobb (1996) y, bajo los principios teóricos y metodológicos de la Educación Matemática Realista.

En el esquema de la Figura C.1 resumimos el proceso que seguimos en esta investigación:

Figura 1.1: Fases de la investigación

Capítulo 2
Estado del Arte

Nunca deberíamos pensar en las matemáticas que puede aprender un niño o una niña, sino en aquellas cuyo aprendizaje se contribuya al desarrollo de su dignidad humana.
HANS FREUDENTHAL

2.1. Introducción

En el siguiente apartado presentamos una breve descripción de investigaciones realizadas en el campo de la didáctica de los contenidos escolares de trigonometría y de los sentidos y modos de uso de las razones trigonométricas, como antecedentes que contribuyen a dar fundamentos para el abordaje, diseño y desarrollo de la presente investigación.

Los antecedentes están divididos en dos secciones. La sección 2.2 está dedicada a la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría desde la perspectiva que cada autor ha trabajado, ya sea a través de propuestas de secuencias didácticas para el tratamiento de la circunferencia unidad, el triángulo rectángulo, las razones trigonométricas o las funciones trigonométricas o bien, a partir del abordaje de situaciones reales y/o la utilización de recursos tecnológicos tales como software de geometría dinámica. La sección 2.3 está destinada a la descripción de estudios respecto del sentido y modo de uso de las razones trigonométricas.

2.2. Enseñanza y aprendizaje de la trigonometría

Weber (2005) menciona que la trigonometría es un tema de suma importancia en el plan de estudios de la escuela secundaria y la comprensión de las funciones trigonométricas son un requisito previo para entender temas de física, arquitectura, agrimensura, entre otras. Además, al vincular el razonamiento algebraico, geométrico y gráfico, sirve como un precursor importante para comprender el precálculo y el cálculo. En función a su preocupación sobre lo que denomina, el vacío en los conceptos trigonométricos más fundamentales, llevó a cabo una investigación con estudiantes estadounidenses de nivel universitario. En dicho estudio, dos grupos recibieron, por un lado una instrucción estándar y por otro, una instrucción experimental, concluyendo que la mayoría de los estudiantes que recibieron la instrucción experimental demostraron una sólida comprensión de las razones trigonométricas logrando justificar las propiedades que tienen. El autor reportó resultados positivos trabajando con el círculo pero hay que considerar que la población en estudio tenía un cierto dominio algebraico que le permitió tratar con el círculo, sin las dificultades que tiene la población del nivel secundario.

Thompson (2008), alude que la trigonometría puede ser un tema difícil para los estudiantes debido a la incoherencia de significados fundamentales desarrollados en años anteriores. Según la comprensión de los estudiantes, las razones trigonométricas no toman medidas de ángulos como argumentos, sino toman los triángulos como argumentos. A partir de ello, a los estudiantes les resulta problemático imaginar cómo podría variar un ángulo en un triángulo y, a partir de esta incomprensión, las razones trigonométricas se conciben como simples fórmulas a memorizar para encontrar el valor faltante.

Por otra parte, Kendal y Stacey (1996) abordaron un estudio para observar en qué contexto se obtiene un mejor aprendizaje al introducir el tema de Trigonometría (triángulo rectángulo o en el del círculo unitario). Las autoras se centraron en las habilidades de calcular los lados y ángulos de triángulos rectángulos y manifiestan que una de las dificultades que presentan los estudiantes es en la resolución de las ecuaciones algebraicas, el problema se da al momento de la división cuando la variable está en el numerador o denominador. Además, mencionan que los estudiantes que abordaron el estudio de la Trigonometría a partir del triángulo rectángulo se desempeñaron mejor que los del método del círculo unitario.

Montiel (2005) en su estudio reporta que uno de los fenómenos didácticos en el desarrollo del pensamiento trigonométrico es la aritmetización de la trigonometría. Se refiere al énfasis en los procesos aritméticos de dividir las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo en la determinación de las razones trigonométricas, provocando la pérdida del proceso geométrico en la construcción de las relaciones trigonométricas. A propósito de esta problemática, Montiel (2011) identificó que un escenario de emergencia del problema trigonométrico es el estudio de la naturaleza no proporcional de la relación ángulo-cuerda en el contexto geométrico del círculo. En el nivel secundario esto equivaldría al estudio de la relación no proporcional lado-ángulo en el triángulo rectángulo. Este tipo de enseñanza ha provocado que se admita la construcción de un significado lineal al considerar que a incrementos o decrementos constantes del cateto habrá decrementos o incrementos constantes del ángulo o viceversa (Jácome, 2011).

Posteriormente, Montiel y Jácome (2014) realizaron un análisis del discurso trigonométrico escolar para identificar un posible origen de este significado lineal construido por los profesores. Estos autores reportan que en la trigonometría escolar no se presentan explicaciones y actividades que permitan comprender la naturaleza entre la relación ángulo-distancia y esto constituye un espacio para que se manifieste la linealidad.

Además, Montiel y Jácome (2014) en su estudio sobre libros de textos del nivel secundario, mencionan que en las tareas habituales e incluso en los problemas llamados de aplicación, la construcciones geométricas son innecesarias y se concentra la actividad matemática en la operación aritmética para la obtención del valor faltante lo que identifica como fenómeno de aritmetización trigonométrica. Los autores reconocen que:

> [. . .] este fenómeno es un efecto de la pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico, donde las razones trigonométricas se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, lo cual, además, se manifiesta de manera clara en la estructuración del discurso escolar. (p.21)

También, la investigación de Torres-Corrales (2014), contrarresta en cierta medida el fenómeno de aritmetización que se presenta en la trigonometría escolar, resignificando la razón trigonométrica en el proceso de construcción geométrico. En este sentido, el escenario que utiliza para la significación progresiva de las razones es el contexto del círculo para evitar que los estudiantes evoquen de memoria a las razones trigonométricas y provocar intencionalmente la construcción de significados para desarrollar un pensamiento trigonométrico.

Por su parte, Buendía y Montiel (2011) proponen una epistemología de prácticas para la función trigonométrica orientadas a la construcción de la funcionalidad-trigonométrica, donde su propuesta consiste en la organización de un escenario de estudio de la variación y el cambio para dotarla de significados a partir de un análisis variacional del movimiento oscilatorio. Los autores reconocen que el trabajo en un contexto dinámico resignifica las propiedades de las funciones trigonométricas.

Trabajos como los de Jácome (2011) y Montiel (2007, 2014) destacan la importancia en la utilidad y pertinencia de acercar la construcción geométrica a la introducción y desarrollo de las nociones trigonométricas en la escuela, para que no se produzca una disociación entre las nociones y procedimientos geométricos y la trigonometría.

La investigación abordada por Cruz-Márquez (2018), busca confrontar el fenómeno de la aritmetización de las nociones trigonométricas que promueve el discurso trigonométrico escolar y para ello, plantea que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo constituye un escenario adecuado para confrontar el significado lineal y aritmético asociadas a las mismas, así como para promover la resignificación de su uso. Dando evidencia empírica que el trabajo geométrico constituye una alternativa viable para la construcción de las nociones trigonométricas, especialmente de la cantidad trascendental.

Fiallo (2010) en su investigación propone realizar el análisis de la unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración de conceptos y propiedades de las razones trigonométricas en un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), desde una perspectiva amplia y diferente de los estudios de esta línea de investigación, que no tienen en cuenta las demostraciones inductivas o empíricas. El objetivo de su investigación es aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto del estudio de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica. Entre sus conclusiones menciona que las actividades diseñadas contribuyeron a mejorar el nivel de demostración de los estudiantes, y que, los ambientes de geometría dinámica favorecen la interacción entre construir, demostrar, actuar y justificar por medio de argumentos teóricos.

Scholz (2014) , diseña una secuencia didáctica con el objetivo de estudiar el proceso de significación progresiva de lo trigonométrico ante actividades de construcción geométrica en el contexto del círculo a partir de un problema de cálculo de distancias que articule las construcciones geométricas con lo trigonométrico; considerando las dificultades y efectos de la aritmetización de las razones y el significado lineal. En base a los resultados obtenidos muestra evidencias de un avance en el manejo del lenguaje geométrico por parte de los estudiantes, una resignificación de la razón trigonométrica y la vinculación de lo geométrico con lo trigonométrico.

Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2020) estudian la desarticulación de la matemática en las asignaturas de ingeniería, planteando el valor pragmático de la trigonometría en diversas áreas del conocimiento de uso culturalmente situado en la ingeniería. Las autoras reportan que en todas las asignaturas prevaleció el uso aritmético de las nociones trigonométricas, sin tener un referente visual que permita configurar el contexto del problema donde se articulen más usos, y de esa manera el estudiante reconozca y utilice las nociones trigonométricas sin importar el problema que resuelva.

En un estudio posterior, las autoras proponen una investigación de diseño donde los estudiantes de ingeniería resignifiquen la razón trigonométrica construyendo significados ausentes o diferentes del discurso escolar y que sin duda deben ampliarse. Consideran que "un conocimiento matemático se da en el ejercicio de prácticas contextualizadas, de él emergen significados que se ponen en funcionamiento en nuevas situaciones y, bajo la misma consideración de emergente social, se resignifica" (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021, p.210). En este sentido, utilizaron un contexto de significación estrictamente geométrico que enmarque el uso de los objetos constitutivos de la trigonometría, así como un campo de prácticas que proporcionen un modelo en el tránsito de lo macro a lo micro de una realidad no manipulable, concluyendo que fué el contexto de significación geométrica el que más influyó en el desarrollo de las tareas utilizando cálculos numéricos para comprobar el trabajo geométrico, lo que permitió que sus respuestas no se limitaran a repetir procesos memorísticos.

Algunos investigadores han utilizado diferentes tipos de software para que los estudiantes logren superar dificultades al enfrentarse con nociones trigonométricas. Hertel y Cullen (2011) reportan que el método de la razón fomenta una interpretación estática de las funciones trigonométricas en las que el valor de una función para un ángulo dado está relacionado con un solo triángulo rectángulo en lugar de una familia de triángulos. Por este motivo, su propuesta consiste en ofrecer secuencias didácticas de instrucción de actividades trigonométricas para que los estudiantes manipulen los objetos geométricos en forma dinámica y así, identificar y analizar su influencia en la comprensión de las funciones trigonométricas. Escobar-Rodríguez (2012) desarrolla una propuesta didáctica para revisar la teoría básica de trigonometría relacionada con la determinación de elementos de un triángulo a partir de situaciones reales, empleando el programa Cabri Geometry para el reconocimiento de relaciones y propiedades, concluyendo que la utilización del software fortalece la estructura del pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Valderrama-Ramírez (2013) reporta que al implementar una propuesta didáctica para la construcción de las funciones trigonométricas a dos grupos de estudiantes utilizando herramientas didácticas y tecnológicas, ésta última enriquece la enseñanza, facilita los aprendizajes y permite que los estudiantes adquieran herramientas útiles para enfrentarse al mundo real. Gómez-Ramírez (2013) presenta una propuesta experimental para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en el marco del aprendizaje significativo, la resolución de problemas en contexto y el uso de algunas herramientas TIC. En su trabajo de investigación evidenció que la incorporación de las TICs consigue una mayor comprensión de los contenidos matemáticos y un mayor rendimiento académico. También, Peña-Medina y Vargas-González (2015) llevaron a cabo una investigación utilizando el modelo de Van Hiele e incorporando la utilización de la tecnología. Concluyendo que el empleo de las TICs favoreció el análisis, la generalización, la deducción, y en especial, la relación entre conceptos y la generación de ideas; además las diversas representaciones que les ofrecía el software ayudó a desarrollar distintas maneras de pensar acerca de las tareas propuestas e independizarse de la tecnología.

Escalante-Godoy (2018) propone un trabajo de aula que posibilite al estudiante un uso comprensivo de las razones trigonométricas enfatizando el desarrollo del pensamiento geométrico, métrico y variacional. El autor reporta que la utilización de herramientas tecnológicas facilitó el desarrollo de cada una de las actividades evidenciando mejores resultados en el rendimiento de los estudiantes. Gutiérrez y Fiallo (2009) mencionan que:

> El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico y rutinario, sin ningún sentido ni utilidad para los estudiantes si no se les brindan las condiciones para que logren una comprensión

> profunda, dinámica y utilitaria de estos conceptos, sus propiedades y relaciones. Por esta razón, es importante para los estudiantes que el tema incluya no solo una serie de conceptos y fórmulas, sino también herramientas y estrategias útiles para explorar, relacionar, conjeturar y demostrar. El software de geometría dinámica (SGD) puede desempeñar un papel muy importante en este contexto. (p.148)

Sobre la base de lo citado, presentan una propuesta de enseñanza basada en tres ejes: conceptual, metodológico y formativo, donde sus objetivos centrales son la comprensión y aprendizaje de los contenidos matemáticos y la iniciación de los estudiantes a la demostración deductiva matemática. En sus conclusiones reportan que la utilización del software ha demostrado ser una valiosa ayuda para que los estudiantes alcancen los objetivos previstos justificando las conjeturas formuladas mediante la producción de demostraciones.

Otros investigadores han utilizado la propia historia de la trigonometría como herramienta que fundamenta sus propuestas de enseñanza, considerando que esa óptica puede ser útil para posibilitar el desarrollo de conceptos matemáticos propios de la trigonometría. Mateus-Vargas (2013) en su estudio, diseña actividades a partir de una revisión histórica y epistemológica de los conceptos razón, ángulo y cuerda, dado que éstos se relacionan con los métodos de construcción de las tablas de cuerdas presentes en El Almagesto de Ptolomeo. En cuanto a la validación de la propuesta, reporta que contribuye a un reconocimiento de la historia de la astronomía y de la trigonometría como herramienta para el diseño e implementación de actividades que son significativas para el estudiante y posibilitan el aprendizaje de conceptos dentro de un contexto de la matemática aplicada al desarrollo de las ciencias, en particular, de la astronomía. Luego, Bravo et al. (2014) en su propuesta de implementación de secuencias didácticas, realizan un rastreo de los orígenes de la trigonometría para facilitar su comprensión y adquirir elementos que enriquezcan el trabajo áulico. Los autores concluyen que el diseño de recursos didácticos conduce a obtener un aprendizaje significativo generando un mayor rendimiento académico y, además los estudiantes, muestran un mayor interés y motivación para el estudio. Por último, Abonia y Miranda (2017) mencionan que:

> En el aprendizaje de las razones trigonométricas en los estudiantes presentan dificultades cuando no se contextualizan las temáticas tratadas dentro del aula de clase, dejando a estas prácticas como trabajo que solo se puede observar en la escuela y no en el diario vivir, ya que observan representaciones de conceptos inmóviles que no tienen relación con el medio que los rodea, llevando a los estudiantes a no comprender los objetos matemáticos planteados por el docente, dado que existe muy poca investigación en algunos casos por parte de los maestros a

> la hora de trabajar este tipo de temas observando carencia en cuanto a propuestas novedosas. (p.14)

Por esta razón consideran que al involucrar la historia con actividades de aula, el estudiante puede ver reflejada la importancia de los diferentes procesos de construcción por los que ha pasado un objeto matemático y así logran concederles los significados particulares a los conceptos involucrados. En sus conclusiones se ven reflejadas que sus propuestas evidencian el reconocimiento de fenómenos asociados a procesos de variación o cambio y también, la adquisición de la importancia del pensamiento geométrico y sistemas de medidas para la construcción de las razones trigonométricas.

Con respecto al pensamiento variacional, Tavera-Acevedo (2013) realiza una investigación donde analiza las tareas propuestas en libros de texto sobre el estudio de las relaciones trigonométricas, reconociendo las ventajas y limitaciones que algunos ofrecen desde el punto de vista variacional. En sus conclusiones reporta que los libros de texto privilegian un contexto matemático descuidando elementos que propician el desarrollo del pensamiento variacional, dado que las tareas se resuelven por medio del uso de expresiones algebraicas, esto evidencia la existencia de un distanciamiento entre los lineamientos curriculares y lo que presentan los libros de texto. El autor sugiere la utilización de software de geometría dinámica para que las tareas sean pertinentes y se relacionen a contextos de variación. En un estudio posterior, Villa-Ochoa y Tavera-Acevedo (2019) siguiendo la línea de estudio acerca de la covariación, muestran que las tareas que proponen los libros de texto pueden resolverse por una interpretación estática de la relación entre las cantidades. Los autores mencionan que "las expresiones trigonométricas aparecen como expresiones para hacer cálculos y no para enfatizar en relaciones dinámicas o funcionales entre los ángulos y los lados de los triángulos" (Villa-Ochoa y Tavera-Acevedo, 2019, p. 1494). Las tareas propuestas por los libros de texto que han analizado evocan contextos realistas pero poco tienen que ver con la experiencia, necesidades o intereses de los estudiantes en situaciones académicas o cotidianas. Además, las tareas no promueven la experimentación dado que ofrecen toda la información numérica y plantean, de manera explícita, la pregunta por una cantidad desconocida.

Podemos mencionar que otros investigadores como Rueda-Upeguí (2012), Zamora Cintas (2013), David-Chico (2016) y Fonseca-Montero (2016) elaboraron propuestas de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría para ofrecer oportunidades en el aula que permitan a los estudiantes experimentar, analizar e interpretar situaciones en contexto utilizando diferentes recursos didácticos. En cuanto a sus significados y aplicaciones, los trabajos cuentan con propiedades muy similares en tanto que los objetivos apuntan a lograr aprendizajes persistentes y significativos en los estudiantes.

Serrano-Quevedo (2019) en su investigación, se enfoca en los usos de los conocimientos trigonométricos, particularmente en el análisis de los libros de textos sugeridos por el programa de estudio de ingeniería mecatrónica; el cual permitirá identificar la articulación o desarticulación entre los usos del conocimiento trigonométrico. El autor en su reporte distingue el conocimiento trigonométrico por medio de las herramientas razón trigonométrica, función trigonométrica y serie trigonométrica, pero su intención es reconocer los usos que el discurso matemático escolar, ha colocado dentro de la trigonometría. Así el reconocimiento de esos usos le permitió identificar los significados asociados a cada una de las herramientas concluyendo que hay una desarticulación en cuanto al uso que tiene cada herramienta y sus significados asociados. Además menciona que un factor que desfavorece la propia naturaleza de lo trigonométrico, es el fuerte arraigo a su uso aritmético y algebraico; y también que el apoyo geométrico-espacial permite dar sentido del conocimiento trigonométrico, como lo podemos observar en diferentes contextos que se presentaron.

2.3. Sentidos y modos de uso

Arenas et al. (2012) en su preocupación de constatar que muchos profesores utilizan las razones trigonométricas como herramientas para solucionar ejercicios de resolución de triángulos, aplicados a problemas, sin tener en cuenta el contexto propio del estudiante, diseñan, implementan y evalúan una unidad didáctica para promover la construcción del concepto a partir de situaciones que tengan sentido para el estudiante y que sean cercanas a su propio contexto. Para establecer el significado de un concepto, utilizan tres organizadores del currículo: la estructura conceptual (objeto, concepto, estructura matemática, relaciones conceptuales y de representación), los sistemas de representación (verbal, simbólico, numérico, gráfico y manipulativo) y la fenomenología (descripción de los fenómenos que son organizados por los conceptos matemáticos y la relación que tiene el concepto con esos fenómenos).

En la línea de mejorar la calidad en la investigación didáctica sobre las razones trigonométricas, Martín-Fernández (2013) propone un estudio basado en explorar la comprensión de las razones trigonométricas en estudiantes de primer año de bachillerato mediante análisis de las representaciones gráficas y descripciones verbales referente a los conceptos seno y coseno. En sus conclusiones, el autor menciona que no pretende generalizar los resultados sino obtener evidencias sobre modos de entender las razones trigonométricas seno y coseno. Un fragmento a destacar es que los estudiantes manejan una amplia gama de representaciones y consideran una diversidad de sentidos no triviales para esas nociones, los cuales expresan la pluralidad de significados con los que estos estudiantes abordan e interpretan las nociones básicas de la trigonometría del plano.

Luego, en el año 2019 Martín-Fernández lleva a cabo una investigación con Ruiz-Hidalgo y Rico acerca del significado y comprensión de los conceptos seno y coseno en estudiantes de secundaria a través de un análisis semántico. El objetivo del trabajo es identificar y caracterizar los significados que le atribuyen a los conceptos seno y coseno a través de la tríada semántica de Frege (signo, sentido y referencia), para establecer una nueva definición de significado (sistema de representación, sentido y estructura conceptual). En consecuencia, esta investigación ha desarrollado argumentos y ha aportado razones para mejorar el conocimiento sobre la comprensión de los conceptos matemáticos y también ha contribuido a establecer un método para su caracterización.

2.4. Conclusiones

En la presentación de las investigaciones llevadas a cabo, observamos que el tema planteado para esta tesis es de interés para muchos investigadores. A pesar de las distintas propuestas para superar la dificultades en los estudiantes en el tema razones trigonométricas, observamos que las mismas persisten tanto, en el abordaje del tema por parte de los docentes como en las propuestas de los libros de texto. Además, es importante destacar que las deficiencias conceptuales en los estudiantes, impacta directamente en el dominio matemático universitario.

Alguna de las problemáticas halladas en torno a la enseñanza y al aprendizaje de las razones trigonométricas son el tratamiento algebraico con que se aborda el tema, la disociación del sentido geométrico con lo trigonométrico, la visión estática en las propuestas áulicas y la presentación de situaciones problemáticas alejadas del entorno del estudiante. Ante las consideraciones expuestas, se reconoce que en la trigonometría escolar no se propician metodologías ni actividades donde el estudiante vivencie el uso de las razones trigonométricas en contexto reales.

Otra cuestión importante para destacar es el interés que manifiestan algunos autores en indagar en la génesis de las razones trigonométricas puesto que concede herramientas interesantes para que los estudiantes encuentren sentido a las relaciones entre las variables involucradas.

Además, es importante considerar el trabajo de los conceptos trigonométricos con el apoyo de softwares de geometría dinámica dado que contribuye a despertar el interés, dar coherencia a los conceptos, generar autoconfianza al validar los resultados mediante la manipulación y a potenciar la articulación entre el tratamiento geométrico y el algebraico de los problemas.

Capítulo 3
Marco Teórico

El espacio y los cuerpos que nos rodean son objetos mentales tempranos...Dar nombres es un primer paso hacia la conciencia.
HANS FREUDENTHAL

3.1. Introducción

En la primera parte de este capítulo se presentan los fundamentos teóricos en los que se sustentan esta investigación, tomamos como referencia principal los aportes de la Educación Matemática Realista (EMR). En este marco se fundamenta el diseño, la implementación y el análisis retrospectivo del experimento de diseño realista que describimos en la segunda etapa de la tesis.

Además, para abordar el estudio del sentido y los modos de uso de las razones trigonométricas en los textos escolares y materiales del curso de articulación para ingresantes a la universidad, empleamos las vías de análisis propuestas por Ruiz-Hidalgo (2016) y Ruiz-Hidalgo y Flores (2022).

3.2. Educación Matemática Realista (EMR)

3.2.1. Los inicios de la EMR

La presente investigación toma como marco de referencia conceptual los principales aportes realizados por el matemático y educador alemán Hans Freudenthal (1905-1990) doctorado en la Universidad de Berlín. Freudenthal fue un matemático de alto nivel especializado en topología, álgebra e historia de la matemática, que desarrolló su carrera académica y teorías pedagógicas en Holanda. Sus aportes en didáctica de la matemática fueron internacionalmente conocidos y sus ideas trascendieron en la construcción teórica llamada Educación Matemática Realista (EMR).

Esta corriente didáctica nace en los años setenta con la finalidad de revertir el enfoque mecanicista de la enseñanza que se sustentaba en ese país. En ese período observó la necesidad de restablecer situaciones de enseñanza en virtud a los grandes fracasos en los estudiantes por falta de inventiva y pérdida de comprensión sobre lo que se hacía por prácticas áulicas orientadas hacia una matemática moderna. Santamaría (2006) menciona que en la filosofía basada en los aportes de Freudenthal, los objetivos instruccionales no son lo más importante; la finalidad principal era establecer una cierta forma de práctica educacional. El énfasis estuvo puesto en el proceso más que en el producto. El tener que alcanzar metas pasó a ser menos importante que la manera en que dichas metas son alcanzadas. Más aún, se aspiró a objetivos más abstractos y globales referidos, por ejemplo, al desarrollo de una "actitud matemática".

Freudenthal sostenía que las matemáticas deben tener conexión con la realidad, mantenerse apegadas a la experiencia de los niños y ser pertinentes a la sociedad para que tengan valor humano. En vez de ver las matemáticas como una asignatura por transmitir, Freudenthal insistió en la idea de las matemáticas como actividad humana.

> Las clases de matemáticas deben dar a los estudiantes la oportunidad guiada de re-inventar las matemáticas haciéndolas. Esto significa que, en la educación matemática, el foco de atención no debe ser las matemáticas como un sistema cerrado, sino la actividad, el proceso de matematización. (Freudenthal, 1968 citado en van den Heuvel-Panhuizen, 2008, p.26)

En base a esta nueva propuesta, la utilización de contextos realistas se convirtió en la principal característica de este nuevo enfoque didáctico. En la EMR, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando estrategias, aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos. Pero para que esto suceda, debemos tener en cuenta que el término realista propuesto por Freudenthal, no sólo se refiere a la vida diaria real de cada estudiante, sino a brindarles problemas en los que ellos puedan "imaginar la situación", y no siempre están restringidos a situaciones de la vida real. Un ejemplo propio para esta situación son los cuentos fantásticos, donde los individuos imaginan el escenario, incluso pueden ser partícipes de la historia y no necesariamente son lugares y personajes reales.

> La idea central que distingue este enfoque de muchos otros es que en la EMR se trata de superar la dicotomía entre los conocimientos formales de la matemática y los conocimientos informales de los estudiantes, mediante el uso de una trayectoria de aprendizaje que ayude a los estudiantes a reinventar las matemáticas formales, apoyándose para ello, en el uso de contextos o situaciones cercanas a la realidad que promuevan procesos de matematización progresiva. (Henao y Vanegas, 2012, p.29)

3.2.2. Matemática para todos

Freudenthal utiliza la palabra "matematizar" en el sentido de una forma de organización de la disciplina. Para él, matematizar es un proceso de simbolizar que debe emerger de la organización del tema.

Bressan et al. (2016), citando a Freudenthal (1991), mencionan que matematizar es un proceso que involucra:

- reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos;
- descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos;
- ejemplificar ideas generales;
- encarar situaciones problemáticas de manera paradigmática;
- la irrupción repentina de nuevos objetos mentales y operaciones;
- buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas;
- reflexionar acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas (1991, p. 30, pp. 35-36).

En definitiva, matematizar es hacer pensar temas de la realidad o imaginables y relacionarlos con objetos matemáticos que compartan características comunes para alcanzar su objetivo esencial que es hacer matemáticas para todos. Freudenthal destaca, que no todos los estudiantes son futuros matemáticos y es por ello que la matemática que usarán, debería servirles para resolver problemas en las situaciones de la vida diaria. "Se trata de posibilitar el acceso a estos conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución" (Bressan et al., 2004, p.3).

3.2.3. Principios de la EMR

Actualmente, la EMR se fundamenta en seis principios esenciales, los primeros tres están asociados con el aprendizaje de las matemáticas, en comparación a los restantes, cuyo énfasis está más próximo a la enseñanza de las matemáticas (Santamaría, 2006).

Principio de actividad

Para Freudenthal el objetivo principal es matematizar la realidad cotidiana, esto es organizar matemáticamente el mundo que nos rodea. Los estudiantes cambian su rol de ser receptores a participantes, generando espacios donde puedan hacer matemática, desarrollando herramientas y algoritmos en busca de la solución a las situaciones problemáticas presentadas. El alumno siente la necesidad de utilizar todos sus conocimientos, sean formales o informales, para hallar la solución a la situación planteada. Para Freudenthal (1973), lo más importante de este proceso de matematización es que ayuda a los estudiantes a estructurar la matemática misma.

En este sentido, la importancia del principio de actividad reside en el hecho de que los estudiantes se enfrentan a situaciones realistas que involucran la construcción de algún contenido matemático mediante el uso de estrategias informales y su intuición. Además, se originan intercambios y negociaciones fundamentales para la formalización de los conceptos (Henao y Vanegas, 2012).

Principio de realidad

Este principio hace referencia a qué tan reales pueden ser las actividades propuestas a los estudiantes. Resolver problemas situados en contextos realistas (realizables o imaginables) es central en la tarea de matematización. Como mencionan Bressan et al. (2004) se trata de presentar problemas de modo que los estudiantes puedan imaginar la situación y utilizar su sentido común para afrontarla, poniendo en juego procedimientos de cálculo, estrategias de resolución y modelos matemáticos para organizarlas.

Así como las matemáticas surgieron de la matematización de la realidad, así también el aprendizaje de las matemáticas debe tener su origen en la matematización de la realidad. Incluso en los primeros años de la EMR se insistía en que, si los alumnos aprendían matemáticas de forma aislada, divorciada de sus experiencias, las olvidarían rápidamente y no serían capaces de aplicarlas (Freudenthal, 1973). En vez de comenzar con ciertas abstracciones o definiciones que se aplicarán más tarde, hay que partir de contextos ricos que demanden una organización matemática o, en otras palabras, contextos que puedan ser matematizados. De este modo, mientras trabajan sobre problemas de contexto, los estudiantes desarrollan herramientas matemáticas y la comprensión (van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

Los contextos al ser significativos para los estudiantes se constituyen en puntos de partida de su actividad matemática, al promover el sentido común y sus estrategias informales para abordar la actividad. El uso de diferentes contextos permite ampliar el campo semántico de los estudiantes con la finalidad de que el concepto se pueda utilizar sobre otros fenómenos. Una de las características prioritarias en la EMR es la utilización de contextos como medio para matematizar. "Los contextos son considerados como un aspecto intrínseco al problema, en tanto permitirían a los alumnos imaginar la situación planteada, representar esquemáticamente mediante un modelo y por medio de esta modelización, llegar a una resolución del problema en cuestión" (Bressan et al., 2006, p.23). Freudenthal (1991) plantea que un contexto es un fragmento de la realidad el cual, dentro de un proceso de enseñanza y de aprendizaje, se presenta a los alumnos para su matematización.

Principio de niveles

Dentro de este enfoque teórico aprender matemáticas significa que los estudiantes deben pasar por distintos niveles de comprensión, desde la capacidad para inventar soluciones informales relacionadas con un contexto a la creación de diversas esquematizaciones, a la adquisición de una comprensión de los principios subyacentes y el discernimiento de relaciones más amplias. La condición para llegar al siguiente nivel es la capacidad para reflexionar sobre las actividades realizadas (van den Heuvel-Panhuizen, 2008). En este proceso, los modelos sirven como puentes de conexión entre los distintos niveles de comprensión por los que transitan los estudiantes. Además, son un recurso indispensable para salvar la distancia entre los conocimientos informales de los formales a partir de un contexto que otorgue sentido al objeto matemático.

Para Freudenthal los estudiantes deben comenzar a matematizar un contenido real para luego modificar su propia actividad matemática. Este proceso de matematización fue elaborado por Treffers (1978, 1987) y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas:

- la matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva;

- la matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

A partir de esta distinción entre la matematización horizontal y vertical, podemos dar cuenta que la EMR admite que los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión antes de formalizar el contenido propuesto.

Destacamos que la construcción de modelos y la reflexión conjunta con el grupo de la clase son las herramientas básicas para el cambio de nivel. Como menciona van den Heuvel-Panhuizen (2008), los modelos se ven como representaciones de situaciones problema que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para dichas situaciones, pero que pueden tener diversas manifestaciones. Esto significa, que no se toma el término modelo de manera literal, sino que son: materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas e incluso símbolos llegan a servir de modelos. Los modelos sirven como puentes para acortar la distancia entre la matemática contextualizada e informal y la formal, permitiendo por su flexibilidad avanzar en los distintos niveles de comprensión.

En la EMR los modelos emergen de la propia actividad matemática de los estudiantes como herramientas para representar y organizar estos contextos. "El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal" (Freudenthal, 1991, p. 34).

Cabe mencionar que para la EMR los modelos no se refieren a los de la matemática formal, sino que son pensados como aquellas representaciones sobre las cuales los estudiantes visualizan, reflexionan, comparan y comprueban relaciones para que, poco a poco, se despeguen de dicha situación particular que le dió origen hasta adquirir el carácter de modelos formales y generales, pasando así de un modelo relativo a la situación particular, a un modelo para razonar matemáticamente las situaciones dentro del mundo de la matemática misma.

Las características que deben reunir los modelos dentro de este enfoque teórico son:

- deben estar arraigados a contextos realistas imaginables y deben ser flexibles para aplicarlos a niveles más altos y lograr así una generalización del tema (Bressan et al., 2006).
- deben ser flexibles para que los estudiantes puedan reinventarlos hasta lograr desprenderse del contexto inicial para obtener un modelo general y descontextualizado, el que puede servir para organizar matemáticamente otras situaciones.

Niveles de comprensión

Los niveles de comprensión representan el pasaje del conocimiento informal al formal y están caracterizados por distintos tipos de actividades cognitivas y lingüísticas asociadas al uso de estrategias y modelos (Bressan y Gallego, 2010). El primer nivel está enmarcado dentro de la matematización horizontal, mientras que los demás se encuadran, generalmente, en la matematización vertical.

El nivel situacional se encuentra asociado al conocimiento del contexto y a las estrategias que son utilizadas para abordar el mismo. Los estudiantes utilizan su sentido común y conocimientos informales para identificar la matemática subyacente en la situación.

En el nivel referencial aparecen las representaciones, los modelos, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos al contexto de la situación particular que se está abordando. De allí que los modelos se consideren como modelos de en tanto están referidos a las situaciones particulares que le dieron origen.

El nivel general se desarrolla a través del reconocimiento, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero favoreciendo la focalización matemática sobre las estrategias utilizadas. En este nivel, surgen aspectos generalizables y los estudiantes pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los modelos para la resolución de los mismos.

En el nivel formal, se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales propios de la matemática.

Estos niveles son dinámicos y un estudiante asciende a niveles de comprensión más avanzados si reflexiona sobre las actividades realizadas en el nivel anterior. La figura 3.1 presentada a continuación muestra una síntesis de los niveles de comprensión por los que transitan los estudiantes en un proceso de matematización, partiendo de contextos realistas hasta lograr la formalización del objeto matemático:

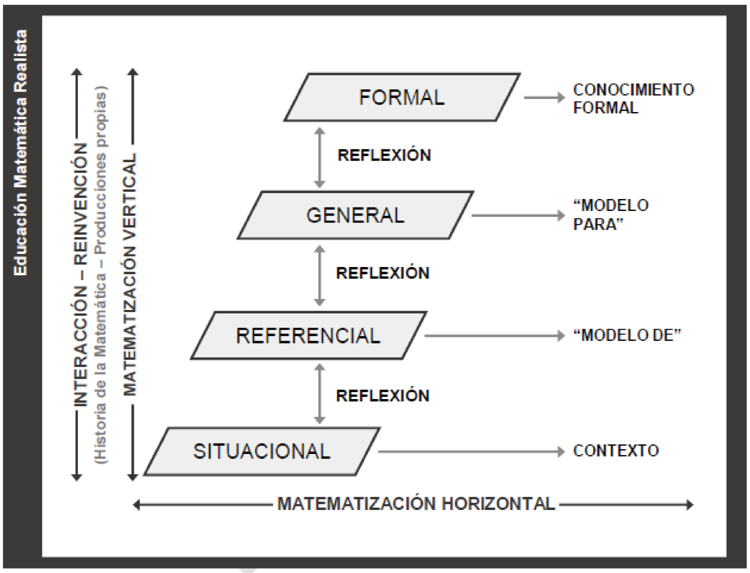


Figura 3.1: Matematización Progresiva. Tomado de Bressan et al.(2016)

Para que los estudiantes transiten por los distintos niveles de matematización, las situaciones a plantear deben ser concretas, flexibles y brindar una diversidad de estrategias de resolución para lograr la formalización con sentido del contenido.

Principio de reinvención guiada

Uno de los principios fundamentales de la EMR es que los estudiantes matematicen situaciones cercanas a sus experiencias reales y para conseguir este propósito, es fundamental que los docentes propicien espacios y oportunidades dirigidas para que los estudiantes reinventen las matemática (Henao y Vanegas, 2012).

Para Freudenthal (1991) el proceso de reinvención guiada es: "un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar"(p.9).

En este sentido, la reinvención guiada intercede para que el conocimiento informal sea construido por los estudiantes a partir de la matematización de los contextos bajo la orientación del docente. Éste, debe ser capaz de prever dónde y cómo anticipar herramientas matemáticas que apenas se asoman en el horizonte (van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

Según Bressan et al. (2004), para orientar este proceso es importante la capacidad de anticipación, observación y reflexión de los docentes acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos. Esto le permitirá conocer las comprensiones y habilidades de los mismos, para organizar la actividad en el aula, dar lugar a esta reinvención y a los cambios de nivel que pretende lograr en esas comprensiones.

Principio de interacción

En la EMR el aprendizaje de la disciplina está considerado como una actividad social. La interacción entre estudiantes y, entre estudiantes y profesores son un aspecto esencial para que se manifieste la negociación, la discusión, la cooperación y la evaluación en un proceso de aprendizaje en el cual los métodos informales son utilizados para alcanzar conocimientos formales (Santamaría, 2006). De esta manera, se logra una dinámica interactiva donde la reinvención juega un papel fundamental para alcanzar la apropiación de nuevos objetos matemáticos.

"En la EMR hay una fuerte preferencia por mantener junta la clase como unidad de organización y por adaptar en cambio la educación a los diferentes niveles de habilidad de los estudiantes" (van den Heuvel-Panhuizen, 2008, p.32). De esta manera, se privilegia el trabajo en grupos heterogéneos para que los estudiantes puedan reflexionar acerca de las situaciones, y conseguir formalizar el contenido.

Principio de interconexión

En el enfoque de la EMR, los bloques de contenidos matemáticos no pueden ser tratados como unidades separadas, el entrelazado de los contenidos de varios ejes de aprendizaje debe ser incluido en las situaciones problemáticas (Santamaría, 2006). Se privilegia la interrelación de varios contenidos matemáticos para que los estudiantes puedan utilizar todo su bagaje para reflexionar y resolver una situación problemática realista.

Además, este principio pone de manifiesto que al abordar una situación problemática a través de diferentes herramientas y estrategias metodológicas, los estudiantes crean modelos de diferente naturaleza que dan cuenta de la interconexión de contenidos que promueve para la generación de nuevos aprendizajes (Henao y Vanegas, 2012).

3.2.4. Fenomenología didáctica

"El análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de la matemática" (Puig, 1997, p.7). Una de las tareas de la fenomenología es indagar acerca de cuáles son los fenómenos del mundo que organizan los conceptos matemáticos, permitiendo así establecer los fenómenos que le dan sentido a los contenidos escolares. En palabras de Puig (1997) "los conceptos matemáticos son medios de organización de los fenómenos del mundo" (p.7). De modo que los fenómenos que van a ser organizados por los conceptos matemáticos, son fenómenos del mundo real, cotidiano; son objetos del mundo físico, con sus propiedades, las acciones que producimos en ellos y las propiedades de dichas acciones.

El objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se pueden generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Para encontrar fenómenos que puedan ser matematizados, podemos buscar entender cómo fueron inventados. (Gravemeijer y Terwel, 2000)

El análisis freudenthaliano puede ser una fenomenología histórica cuando los fenómenos que se toman en consideración en el análisis son aquellos para los que el concepto en cuestión fue un medio de organización en la historia. Pero será fenomenología didáctica cuando los fenómenos que se toman en consideración son los que están presentes en el mundo en que viven los alumnos a los que se pretende enseñar en los sistemas escolares.

Freudenthal manifiesta que el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización del contenido escolar, se convierten en objetos matemáticos situados en un campo de fenómenos, incorporándose al mundo de nuestra experiencia en la que crean nuevos conceptos matemáticos. Sugiere comenzar por los fenómenos y, a partir de ellos, enseñar al alumno a manipular los conceptos, como medios de organización de esos fenómenos (Puig, 1997).

Según Puig (1997), la totalidad de los usos (fenómenos) de una noción matemática en todos los contextos constituye el *campo semántico de la noción*, su significado enciclopédico. Un sujeto, cuando realiza una actividad que pone en juego esa noción, se desenvuelve en su *campo semántico personal*, que ha ido elaborando produciendo sentido en situaciones o contextos que le exigían nuevos usos para la misma.

El autor manifiesta, siguiendo las ideas de Freudenthal, que el objetivo de la acción educativa debe ser la constitución de buenos objetos mentales y, sólo en segundo lugar, la adquisición de conceptos. A esos efectos, la constitución de buenos objetos mentales se determina gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente. El sistema educativo debería proporcionar la oportunidad de que el campo semántico personal de los alumnos respecto de una noción, sea lo suficientemente rico como para permitirles interpretar de forma afortunada todas las situaciones en las que haya de usar esa noción produciendo así, sentido en los contextos que le exijan nuevos usos.

En Puig (2001), Freudenthal expone la complejidad inherente al concepto de "razón" y, como consecuencia, al de "razones trigonométricas". Sostiene la razón como concepto y como "objeto mental" requiere de un desarrollo notablemente alto por parte del alumno. Debido a que el concepto de razón en el ámbito de la semejanza se desarrolla en los estudiantes con notoria rapidez a través de la percepción óptica, por tratarse de un rasgo característico del sistema nervioso central, su recreación como objeto mental se dificulta considerablemente. "Para construir un puente de razones no visuales a razones visuales, la visualización estricta por semejanza ha de ser debilitada" (Puig, 2001, citado en Fiallo, 2010).

> Entre los objetos mentales y los conceptos la relación es variada. Ambos se constituyen como medios de organización de fenómenos, los objetos mentales preceden a los conceptos y éstos no sustituyen a los primeros sino que contribuyen a la formación de nuevos objetos mentales que los contienen o con los que son compatibles. (Puig, 1997, p.21)

Como menciona Puig (1997), en el caso de la geometría elemental, se puede progresar en los contenidos sin la constitución de los conceptos, ya que los objetos mentales son suficientes para organizar numerosos fenómenos. En este dominio de la matemática, la formación de conceptos puede abordarse reorganizando el contenido, de modo que se ajuste la distancia entre los objetos mentales y los conceptos.

Para nuestra investigación, la constitución de los objetos mentales ángulos, triángulos y unidades de longitud juegan un papel primordial para la constitución del concepto razón trigonométrica. Las operaciones aritméticas también lo son, pero juegan un papel secundario ya que sólo se utilizan para obtener el producto final de una serie de relaciones mentales de variación entre las magnitudes intervinientes en la situación.

Freudenthal manifiesta que los objetos geométricos, como conceptos, están en el espacio, pero los objetos mentales correspondientes a esos conceptos, están en un contexto geométrico. Los conceptos geométricos se elaboran a partir de objetos mentales constituidos como medios de organización de los fenómenos ligados a la producción humana. En el análisis de las figuras y los dibujos, están presentes la constitución de los objetos mentales para una posterior adquisición de los conceptos. Las relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico son más complejas, debido a que el paso del dibujo al objeto geométrico es el resultado de una interpretación subjetiva por parte del estudiante.

Finalmente podemos concluir que el mundo que nos rodea es un mundo de fenómenos, un mundo que podemos organizarlo por objetos matemáticos, lleno de fenómenos geométricos esperando ser explorados para la constitución del objeto mental. Desde el punto de vista de la fenomenología didáctica sólo basta buscar en la naturaleza, en el arte, en las construcciones humanas, en imágenes, etc., para que estos fenómenos estén presentes en el entorno de nuestros alumnos y puedan así configurar el objeto matemático para que el concepto a trabajar adquiera un significado propio.

Fenomenología de las razones trigonométricas

Los fenómenos son las raíces de las ideas matemáticas y contribuyen al desarrollo de los contenidos matemáticos (Freudenthal, 1983). Los fenómenos se presentan en una variedad de situaciones problemáticas, que son la fuente y pueden servir como contextos para este desarrollo (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). La fenomenología entendida como la descripción de fenómenos organizados por los conceptos matemáticos y la relación existente entre ellos, surge como un eje articulador en el proceso de enseñanza.

Según Martín Fernández (2013), los interrogantes que han ayudado al desarrollo del estudio de la trigonometría han variado a lo largo del tiempo. La trigonometría en sus inicios tiene una íntima relación con las estrellas, pudiéndose considerar que la trigonometría era una astronomía cuantitativa. Esta motivación fundamental, continuó asociada a los cielos hasta la edad media, donde la trigonometría comienza a considerarse como una rama de la matemática. Más tarde, el estudio de la naturaleza, permite su ampliación y su consecuente generalización.

Como menciona el autor, a lo largo de la historia, también la definición de cada una de las nociones que abarca la trigonometría se ha modificado. Así, en sus comienzos, el seno se asoció a la cuerda del arco (segmento), para más tarde relacionarse con la semicuerda. Después, se relacionó el seno, es decir, la semicuerda, con el ángulo (no con el arco) en el triángulo, adquiriendo éste una mayor relevancia. Otras nociones fueron apareciendo, como el coseno, y posteriormente la tangente, esta última asociada al mundo de las sombras, pero siempre relacionadas con segmentos. En el siglo XVII, con el desarrollo de la goniometría, las razones trigonométricas llegan a ser consideradas simplemente números asociados a un ángulo, ordenadas y valores de distintas funciones. Finalmente, también aparece la definición de razón.

Son muchas las interpretaciones de las razones trigonométricas a lo largo de la historia, muestra inequívoca de la complejidad que este tópico tiene, de las cuestiones que aborda y del interés que presenta para su proceso de enseñanza y de aprendizaje.

En cuanto a los fenómenos, dicho autor sostiene que la trigonometría se presenta en multitud de fenómenos, los cuales se pueden clasificar en:

- fenómenos de medida: tanto directa como indirecta de distancias, que se hacen presentes en topografía, cartografía,etc; medida de ángulos, que se ponen de manifiesto en astronomía, geodesia, navegación,etc.; cálculo de áreas y volúmenes de figuras resolubles por triangulación, que aparecen en agrimensura, etc,

- fenómenos físicos, dentro de los que podríamos distinguir los de naturaleza periódica: el estudio del oleaje, el cálculo de la fase de impedancias, inductancias en electricidad, y no periódicos, como serían las aplicaciones a cinemática y dinámica, y

- fenómenos interrelacionados con la propia matemática, como pueden ser el estudio de los números complejos.

Arenas et al. (2012), señalan que algunos de los fenómenos que organizan las razones trigonométricas son:

- la determinación de la altura de un objeto,de las coordenadas polares de un punto, de la dirección y del desplazamiento de un cuerpo en un sistema de coordenadas, el rastreo de un satélite;

- el cálculo de distancias inaccesibles;

- el cálculo de áreas y perímetros;

- el cálculo de ángulos de elevación y de depresión; y

- la construcción de componentes vectoriales.(p.354)

Fernández Medina (2010), menciona también algunos de los fenómenos en los que la trigonometría se hace relevante, y considera que ellos son:

- Fenómenos relacionados con el cálculo de trayectorias y rumbos que se utilizan en aeronáutica, navegación, astronomía, astronomía de posición.

- Fenómenos de medida indirecta o medida de distancias inaccesibles, que pueden aparecer en agrimensura, arquitectura, ingenierías, cartografía, etc.

- Fenómenos que impliquen el cálculo de áreas de figuras resolubles por triangulación, aplicable de nuevo en agrimensura, ingenierías, etc.

En base a los fenómenos que organizan las razones trigonométricas es que definiremos *sentido trigonométrico* en la sección 3.3.5 .

3.3. Sentidos de los contenidos matemáticos escolares

3.3.1. Análisis didáctico de un contenido matemático escolar

El análisis didáctico de tareas juega un papel primordial en este trabajo de investigación, pues proporciona insumos para abordar la segunda etapa de este estudio.

Rico (2016) define el análisis didáctico de un contenido matemático escolar como un método para indagar, organizar e interpretar los contenidos didácticos de las matemáticas escolares desde un marco curricular, teniendo como objetivo planificar, implementar en el aula y evaluar tales contenidos; se presenta así como una herramienta de gran potencial para el docente, entre otros.

El autor menciona que el análisis didáctico se estructura según cuatro categorías de análisis, con objeto de estudio distintos, según las dimensiones del currículo de matemática. En primer lugar, comienza por el análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares.

Luego, realiza el análisis cognitivo de esos contenidos, seguidamente, el análisis de instrucción y por último el análisis evaluativo. Cada uno de estos análisis se organiza mediante categorías propias.

Así pues, atendiendo a las consideraciones de Rico (2016), el análisis didáctico comienza por un análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares organizado en tres categorías: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso. A continuación, detallaremos con mayor profundidad el análisis de significados y, específicamente la categoría de sentidos y modos de uso de los contenidos matemáticos escolares, que serán de interés para este trabajo de investigación.

3.3.2. Significado de un contenido matemático escolar

La noción de significado desempeña un papel importante en el currículum de matemática y ha sido un tema de debate desde tiempos muy antiguos. De acuerdo con Rico (2016), el significado de un concepto matemático escolar viene dados por los siguientes componentes:

- *Una estructura conceptual*: identifica los aspectos formales y los cognitivos con que se caracterizan y describen los contenidos. Los aspectos formales se establecen en términos de nociones, conceptos, propiedades, razonamientos y demostraciones matemáticas.

- *Los sistemas de representación*: sus categorías identifican los sistemas de reglas y notaciones, símbolos, imágenes y grafismos abstractos que expresan y hacen presente las correspondientes nociones y conceptos de los contenidos en estudio.

- *Sentidos y modos de uso*: corresponden a un conjunto de situaciones, contextos, fenómenos y modos de uso que permiten comprender el dominio matemático del concepto.

Por otra parte, el autor menciona que hay una multiplicidad de significados para un mismo concepto debido a la multiplicidad de sistemas de signos para su representación, los diversos términos, los contextos, fenómenos y situaciones a las que se refieren y dan sentido a un mismo concepto.

Para esta investigación, nos centramos en el último componente y adaptamos al tema en estudio los aportes de Ruiz Hidalgo (2016) y Ruiz Hidalgo y Flores (2022), quienes consideran el sentido de un concepto matemático como elemento central que organiza la enseñanza de los contenidos escolares.

3.3.3. Sentido de un concepto matemático escolar

Montes et al. (2022) mencionan que ayudar a los estudiantes a dar sentido a los conceptos matemáticos orienta su enseñanza, logrando competencias, a través de oportunidades de compartir experiencias y significados, de establecer conexiones e ideas y ser capaces de aplicarlas en forma reflexiva en situaciones de la vida cotidiana. Esta idea de sentido matemático proporciona una reorganización para respetar los bloques de contenidos, centrándose en los elementos que le atribuyen significado (Ruiz Hidalgo y Flores, 2022).

La palabra sentido tiene muchas connotaciones al formar parte de nuestro vocabulario habitual. Ruiz Hidalgo y Flores (2022) mencionan que las acepciones para la noción de sentido matemático, por un lado, proporcionan una organización fenomenológica del contenido matemático escolar y por otro, subrayan la importancia de la funcionalidad de la matemática escolar para promover las competencias matemáticas defendidas en los estudios PISA de la OCDE (2012). Además, reúne tres cualidades primordiales:

> [...] su carácter idiosincrático, es decir, dependiente del que aprende; comprende una diversidad de capacidades relacionadas, que permitan actuar con flexibilidad en situaciones en las que se aplica el contenido; y es posible estudiar las componentes que deben actuar de manera coordinada, para delimitar una cierta definición del aprendizaje final deseable, que será alcanzado en diverso nivel y profundidad por cada sujeto. (Ruiz Hidalgo y Flores, 2022, p.59)

Ruiz Hidalgo y Flores (2022) aluden a la propuesta de Puig (1997) al mencionar que:

> Esta visión de sentido de un contenido matemático escolar es muy cercana a la que Freudenthal defiende, en la que los conceptos matemáticos son los modos de organización de los fenómenos, que son los objetos de la experiencia matemática de las personas. La dualidad fenómenos-organización de fenómenos permite construir nuevos conceptos matemáticos que, a su vez, son fenómenos que se organizan para construir nuevos conceptos. Entendida la construcción de conceptos matemáticos de esta manera, las personas que aprenden parten de fenómenos (o de situaciones o contextos) que permiten experimentar (usar e interpretar) determinado concepto de manera que tenga sentido y produzca nuevos significados utilizables en nuevas situaciones en las que se necesite dicho concepto (p. 57).

Tomando en consideración lo mencionado en los párrafos anteriores, apelamos a los aportes de Ruiz Hidalgo (2016) al proponer dos vías para interpretar el sentido de un concepto matemático escolar. En primer lugar, al considerar los conceptos como acciones intelectuales organizadoras de los fenómenos que hacen el mundo comprensible y en segundo lugar, cuando se resaltan los usos y las aplicaciones técnicas matemáticas que proporcionan herramientas para resolver situaciones de la vida real. A partir de ello, manifiesta que el sentido de las nociones y conceptos matemáticos escolares, se presentan mediante:

- *Los términos y modos de uso que lo identifican.* Un concepto se establece mediante las distintas interpretaciones que mejor se ajustan al mismo. Para conocer los sentidos conviene escoger sinónimos o términos semejantes que identifiquen cada concepto, aunque dicho estudio viene condicionado ya que algunos términos no pertenecen al vocabulario habitual del estudiante o bien tienen un uso matemático diferente al cotidiano.

- *Los contextos y cuestiones a las que da respuesta.* "Un contexto es una descripción de cómo los conceptos y estructuras matemáticas atienden y responden, como instrumentos de conocimiento, a unas necesidades intelectuales o prácticas determinadas" (Ruiz Hidalgo, 2016, p.142). A partir de ello, propone la indagación sobre la necesidad de la utilización de un determinado concepto, haciendo hincapié sobre las distintas necesidades y funciones cognitivas que conducen a identificar sus contextos matemáticos escolares. Los contextos se describen atendiendo a sus funciones como ser: contar, cuantificar, medir, ordenar, operar o calcular, estructurar y etiquetar.

- *Los fenómenos que le dan origen y a los que organiza.* Esta tercera vía de análisis consiste en identificar los fenómenos por los cuales surge el concepto. Este punto de estudio, se relaciona con el enfoque que hemos seleccionado para abordar este trabajo de investigación y es el análisis fenomenológico propuesto por Hans Freudenthal. Este autor propone por un lado, identificar la génesis que otorgó origen al concepto, y por otro lado, trata de analizar cómo se ha organizado formalmente el concepto para aplicarlos a la realidad de los estudiantes. Ruiz Hidalgo (2016) aclara que para conocer e identificar el sentido de un concepto no utiliza el análisis fenomenológico como método de estudio sino que lo utiliza para identificar dos aspectos esenciales como son: los problemas que están en el origen de los conceptos matemáticos y la forma en que está estructurado dicho concepto en la actualidad.

- *Las situaciones en las que se aplica.* Para aportar sentido a los conceptos matemáticos, Ruiz Hidalgo (2016) adopta el marco del estudio PISA de la OCDE (2012) donde infiere que una situación es una tarea matemática ligada al mundo del estudiante en la cual se aplica un concepto matemático. Las situaciones están dadas por una mención del mundo, ya sea de características naturales, sociales, culturales o científicas y pueden referirse a lugares, sucesos, momentos, noticias u otros.

El autor recupera los aportes presentados por estos estudios, para definir cuatro categorías que se emplean para analizar y categorizar según las tareas proporcionadas a los estudiantes. Estas categorías son:

- *Situaciones personales*: se refieren a aquellos problemas que reflejan situaciones cotidianas de los estudiantes como por ejemplo, los juegos, los deportes, la comida o la economía personal.

- *Situaciones laborales o escolares*: son aquellas situaciones centradas en el mundo de trabajo como ser las acciones de medir, ordenar, diseñar inventarios, planos, entre otras.

- *Situaciones públicas*: se refieren a aquellas en las que se observan aspectos de su entorno social, como ser transporte público, problemáticas demográficas, políticas gubernamentales, medios de comunicación, entre otras. Los problemas ponen el acento en la perspectiva comunitaria.

- *Situaciones científicas*: se refieren a aquellas situaciones donde la matemática se aplica a cuestiones del mundo natural y también, a cuestiones y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Los contextos concretos podrían incluir áreas como la meteorología, la ecología, la medicina, las ciencias del espacio, las mediciones, entre otras, y también, el propio mundo de la matemática.

Una vez organizados estos componentes, se podrá reconocer y definir los sentidos que incluye cada concepto matemático escolar, seleccionarlos según las demandas de los estudiantes y plantear situaciones o fenómenos en un determinado contexto que enriquezca el concepto, destacando su utilidad en la vida cotidiana.

3.3.4. Sentidos Matemáticos Escolares

Ruiz Hidalgo y Flores (2022) presentan cinco sentidos matemáticos escolares de la enseñanza obligatoria: algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico, atendiendo a los contenidos matemáticos de esta fase educativa. Cada uno de ellos organizado en componentes o dominios de habilidades que, a su vez, se describen mediante habilidades más específicas.

Respecto del sentido algebraico, consideran que los componentes que organizan las habilidades a desarrollar son:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.
- Resolución de problemas.
- Situaciones funcionales.
- Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

El sentido espacial se organiza alrededor de dos componentes y sus respectivas habilidades, que lejos de ser independientes, están íntimamente enlazadas:

- Manejo de conceptos geométricos.
- Visualización.

El desarrollo de las destrezas se consigue con la propuesta de tareas escolares que fomenten tres acciones básicas: construir, representar y describir.

El sentido de la medida organiza habilidades y destrezas de gran utilidad en la vida cotidiana, que son necesarias para el aprendizaje de otras áreas de conocimiento y que permiten establecer conexiones con otros dominios de la matemática, como los números o la probabilidad. Esta organización está dada por cuatro componentes:

- Reconocimiento de las magnitudes como cualidades comparables y medibles.
- Comprensión del proceso de medir, que incluye el conocimiento de las unidades de medida, la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas y la medida de una cantidad de magnitud.

- Estimación en situaciones de medida.
- Medida del cambio.

Su enseñanza con sentido debe fomentar la manipulación de objetos que permitan comparar cualidades y el de las unidades e instrumentos apropiados para las magnitudes habituales, antes de llevar al aprendizaje de técnicas de cálculo indirectas.

A continuación, en esta misma dirección definiremos lo que vamos a considerar en esta tesis sentido trigonométrico.

3.3.5. Sentido Trigonométrico

La idea que nos impulsa a realizar esta investigación es indagar qué cuestiones son necesarias para que los estudiantes de la escuela secundaria desarrollen el *sentido trigonométrico*. Consideramos pertinente introducir estos términos dado que se diferencia del sentido espacial o geométrico, del sentido algebraico y del sentido de la medida (adoptado por Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022) y entendemos que las habilidades que demandan de los estudiantes las tareas de resolución de triángulos rectángulos tienen características que le son propias además de tomar elementos de las habilidades de los tres sentidos mencionados.

Wenthworth (1883, p. 3), menciona claramente que:

> La geometría muestra en forma general que los lados y los ángulos de un triángulo son mutuamente dependientes. La Trigonometría comienza mostrando la naturaleza exacta de esta dependencia en el triángulo rectángulo y para este propósito emplea las razones de sus lados.

El *sentido trigonométrico* se inicia en la exploración de las relaciones entre los lados y ángulos en el triángulo rectángulo. ¿Qué tipo de relación tienen? No es una relación lineal, no es cuadrática, no es exponencial, no es logarítmica.

En el estudio que nos proponemos realizar en torno a lo que denominaremos *sentido trigonométrico*, a la habilidad del estudiante para utilizar las herramientas de la trigonometría en distintas situaciones (matemáticas, de la vida cotidiana y de otras áreas del conocimiento) en las que está involucrada la resolución de triángulos, en particular en esta tesis nos referiremos a los triángulos rectángulos.

El *sentido trigonométrico* lo definimos como la competencia de un estudiante para resolver problemas de medición indirecta o medición de distancias inaccesibles y de amplitudes de ángulos de elevación y depresión, de cálculo de trayectorias y rumbos; y de cálculo de perímetros y áreas de figuras resolubles por triangulación.

Las habilidades del *sentido trigonométrico* se organizan en las siguientes componentes:

- Representación geométrica del enunciado del problema (Bosquejo).
- Comprensión del proceso de medir y de la estimación en situaciones de medida(Dibujo a escala).
- Identificación de los elementos del triángulo rectángulo y las relaciones geométricas (Tratamiento geométrico).
- Selección de la razón trigonométrica adecuada, en función de los datos y las incógnitas del problema.
- Resolución algebraica del problema (Tratamiento algebraico).
- Interacción entre las habilidades del sentido de la medida, el geométrico y el algebraico, tanto en la resolución como en la expresión de la respuesta (Articulación Medida-Geométrico-Algebraico).

En síntesis, el *sentido trigonométrico* necesita de las habilidades o destrezas que componen el sentido de la medida, el geométrico (espacial) y el algebraico; y además, de la indispensable interacción entre ellos.

La introducción de esta idea de *sentido trigonométrico* es fundamental en el desarrollo de la tesis porque nos brinda la posibilidad de hacer alusión, de una manera sintética, a este conjunto de habilidades que consideramos pertinentes desarrollar en los estudiantes para construir un *campo semántico personal* rico de las razones trigonométricas.

Parte I

Caracterización del *Sentido Trigonométrico* en Ingresantes a la Universidad

Capítulo 4

Producciones de Ingresantes

Lo importante no es dejar de hacerse preguntas.
ALBERT EINSTEIN

4.1. Introducción

En el presente capítulo, describimos el análisis de las producciones de estudiantes que realizaron los exámenes de ingreso a la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Nos centramos en examinar cómo los estudiantes abordan y utilizan las razones trigonométricas en las actividades propuestas, con el objetivo de identificar las dificultades que enfrentan durante el proceso de resolución. Para estructurar el análisis, presentamos categorías que inspiraron la idea de sentido trigonométrico que definimos como constructo teórico en esta tesis y que se relaciona con los estudios de Ruiz Hidalgo y Flores (2022). Esta perspectiva de sentido, en sintonía con la visión de Freudenthal, considera que los conceptos matemáticos son herramientas organizativas de fenómenos para construir nuevos conceptos. En este contexto, el aprendizaje parte de experiencias con fenómenos que permiten internalizar un concepto de manera significativa y aplicarlo en diversas situaciones (Puig, 1997).

En el desarrollo de esta investigación, hemos optado por una metodología que se enmarca en un análisis documental con características descriptivas. Específicamente, hemos llevado a cabo un análisis didáctico que se centra en la identificación y comprensión de las dificultades manifestadas en los exámenes de ingreso a la universidad. Esta metodología nos permite adentrarnos en la realidad educativa, examinando tanto las evaluaciones de los estudiantes como las herramientas pedagógicas utilizadas en la enseñanza. El análisis documental nos brinda la oportunidad de identificar patrones, tendencias y desafíos en las respuestas de los estudiantes.

4.2. Interés de la indagación

Como docentes de los cursos de articulación disciplinar en matemática, constatamos de manera consistente que los estudiantes enfrentan dificultades recurrentes al abordar problemas que requieren la aplicación de razones trigonométricas. Montiel (2013) destaca que, aunque las razones trigonométricas pueden resolver problemas prácticos, su mera aplicación no garantiza un pensamiento trigonométrico profundo que involucre la comprensión del triángulo, sus elementos y las relaciones entre ellos. Además, subraya la importancia de la práctica que implica modelar una realidad concreta, cuantificar, medir y proyectar, elementos cruciales para representar situaciones cotidianas.

En el contexto de las escuelas secundarias mexicanas, Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2020) identifican una problemática común: la introducción de la trigonometría en un entorno descuidado de construcciones y operaciones geométricas significativas. Esta práctica se limita a relaciones proporcionales entre lados de triángulos rectángulos semejantes, donde la elección de una razón trigonométrica y su sustitución en la calculadora parecen suficientes. Además, en estudios con estudiantes de ingeniería, se observará la prevalencia del uso aritmético para resolver problemas, sin un respaldo visual que facilite la configuración de un contexto situacional más amplio.

Scholz (2014), al recopilar evidencia durante el diseño e implementación de una secuencia didáctica, destaca que la integración de procesos de construcción geométrica para la resignificación de la razón trigonométrica resulta en un enriquecimiento significativo. En este enfoque, la razón trigonométrica se ve acompañada por razonamientos matemáticos que le confieren un significado más profundo y contextual. La construcción geométrica no sólo proporciona un marco visual y tangible para las razones trigonométricas, sino que también facilita la comprensión de sus fundamentos y su aplicación en contextos más amplios. Este enfoque, centrado en la construcción activa de conocimiento, se revela como una estrategia efectiva para fomentar un pensamiento trigonométrico más sólido y aplicado.

Por su parte, Torres-Corrales y Montiel-Espinoza (2021) señalan que la enseñanza tradicional de las razones trigonométricas favorece aproximaciones aritméticas y algebraicas, estableciendo un modelo de referencia para dichas razones relativas a un ángulo en triángulos rectángulos semejantes. Esto crea la percepción de que lo trigonométrico es un objeto preestablecido, limitando la construcción activa de conocimiento.

> En este sentido, se considera necesario cambiar sustancialmente la actividad matemática del estudiante, no sólo para evitar que evoque de memoria a las razones trigonométricas, aún sin claridad de por qué son necesarias, sino para provocar intencionalmente la construcción de significados que le den uso y sentido, pero sobre todo desarrollen en particular su pensamiento trigonométrico. (Torres-Corrales, 2014, p.39)

A partir de los antecedentes del presente estudio, centramos el análisis de las producciones de los estudiantes en los exámenes de ingreso a la universidad, con el propósito de identificar las dificultades que enfrentan al resolver las tareas propuestas los estudiantes de la ciudad de Gálvez. Este análisis no solo nos permite detectar las dificultades, sino que también nos brinda la oportunidad de categorizarlas.

4.3. Descripción de la muestra

Con el objetivo de indagar en las dificultades de los estudiantes en la resolución de tareas que involucran el uso de las razones trigonométricas, analizamos las evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática, correspondientes al Centro Universitario Gálvez (Santa Fe-Argentina), de las distintas instancias del ingreso a la UNL de los años 2019 y 2020. Las evaluaciones están conformadas por cinco tareas, cada una de ellas con varios ítems, una de las tareas requiere la utilización de las razones trigonométricas para su resolución. En total analizamos evaluaciones correspondientes a cinco ediciones. La mayoría de los estudiantes son de la ciudad de Gálvez, y los restantes de pueblos aledaños.

A continuación, en la Tabla 4.1 presentamos la cantidad total de estudiantes que llevaron a cabo las evaluaciones en cada edición, y el número de evaluaciones que presentaron dificultades en la tarea referida al tema razones trigonométricas.

Fecha	**Total de Evaluaciones**	**Evaluaciones con Dificultades**
01/12/2018	13	5
15/12/2018	6	3
02/11/2019	15	5
06/03/2020	8	4
14/03/2020	6	3
Total	**48**	**20**

Tabla 4.1: Evaluaciones con Dificultades en cada Instancia

En la muestra recopilada, se advierte que de los 48 exámenes evaluados, aproximadamente el 42 % (20 evaluaciones) reflejan dificultades al abordar las tareas relacionadas con el tema de interés, estas producciones se encuentran en el Anexo A.1. Esto indica que un porcentaje significativo de estudiantes comete errores en la ejecución de las tareas planteadas. De esta manera, corroboramos la veracidad de la conjetura inicial acerca del cuestionamiento respecto de la verdadera comprensión de las razones trigonométricas; y aquello que en nuestra experiencia como docentes observamos como producciones de los estudiantes carentes de sentido. En la Tabla 4.2 presentamos las tareas seleccionadas de las evaluaciones, específicamente las tareas correspondientes al tema razones trigonométricas, detallando el número de temario (Tema 1 o Tema 2) y la fecha de la evaluación.

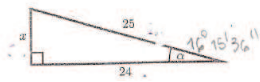
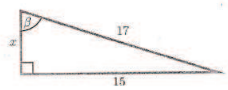
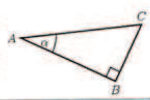
Temario	Fecha	Tarea Seleccionada de la Evaluación
1	01/12/2018	**Actividad 3: (16 puntos)** Desde un punto se ve la punta de una palmera bajo un ángulo de elevación de 45°. Si nos alejamos 6 metros hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie de la palmera, vemos la punta superior de la palmera bajo otro ángulo de elevación de 25°. Calcule la altura de la palmera. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.
2	01/12/2018	**Actividad 3: (16 puntos)** Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión y alineados, con un ángulo de depresión de 60° y 45° respectivamente. Determine la distancia entre ambos autos. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.
1	15/12/2018	**Actividad 5: (20 puntos)** Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que va desde la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme con éste un ángulo de 30°. Calcule el precio del cable si cada metro cuesta $35. Realice un gráfico ilustrativo de la situación, indicando los datos y valores a determinar.
2	15/12/2018	**Actividad 5: (20 puntos)** Calcule la altura de la torre de ventilación de una central nuclear si se sabe que su sombra mide 358 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 30° con el suelo. Realice un gráfico que ilustre la situación y consigne en él los datos y las incógnitas.
1	02/11/2019	**Actividad 3: (15 puntos)** Desde la terraza de una casa se observa un recipiente de basura situado en la vereda, con un ángulo de depresión de 56°. Calcule la altura en la que se encuentra el observador, sabiendo que el recipiente está a 6 metros de la base del edificio. Realice una figura de análisis.
2	02/11/2019	**Actividad 3: (15 puntos)** Desde un supermercado se observa la terraza de un rascacielos de 527 metros de altura bajo un ángulo de 42°. Calcule la distancia que hay desde el supermercado hasta el rascacielos. Realice una figura de análisis.
1	06/03/2020	**Actividad 5: (16 puntos)** **(a)** Con los datos indicados, halle las medidas de α y x.  **(b)** Una persona que se encuentra en la parte superior de una torre de 40 metros de altura observa un objeto situado en el suelo con un ángulo de depresión de 30°. Represente gráficamente la situación.
2	06/03/2020	**Actividad 5: (16 puntos)** **(a)** Con los datos indicados, halle las medidas de β y x.  **(b)** Una persona que se encuentra en la parte superior de una torre observa un objeto situado en el suelo, a 20 metros de la base de la misma, con un ángulo de depresión de 34°. Represente gráficamente la situación.
1	14/03/2020	**Actividad 3: (20 puntos)** **(a)** Determine la longitud del lado $\overline{BC}$ y la amplitud del ángulo α de la figura dada, sabiendo que $\overline{AB} = 15$ cm y $\overline{AC} = 17$ cm. **(b)** Un científico se transporta en un globo aerostático que está volando a 800 m de altura. Desde allí observa un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia horizontal del pueblo se halla? Realice una figura de análisis. 

Tabla 4.2: Tarea de evaluación del curso ingreso a la UNL 2019 y 2020

4.4. Categorías de análisis

Para confeccionar las categorías de análisis acerca de las dificultades observadas en las evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática en el ingreso a la UNL, retomamos la idea propuesta de Fernández-Plaza (2016) al mencionar que "las dificultades se entienden como las causas o situaciones que dan origen a los errores" (p.196). Dada la complejidad de causas por las que un error puede producirse, en esta investigación anticipamos causas generales que las clasificamos en diferentes categorías.

4.4.1. Bosquejo

En esta categoría, identificamos problemas relacionados con la interpretación del bosquejo en el contexto dado, incluimos las producciones en las que el dibujo de la situación no se corresponde con el enunciado del problema. En la Figura 4.2, presentamos un ejemplo ilustrativo de esta dificultad.

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un punto se ve la punta de una palmera bajo un ángulo de elevación de 45°. Si nos alejamos 6 metros hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie de la palmera, vemos la punta superior de la palmera bajo otro ángulo de elevación de 25°. Calcule la altura de la palmera. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura 4.1: Enunciado de la Tarea

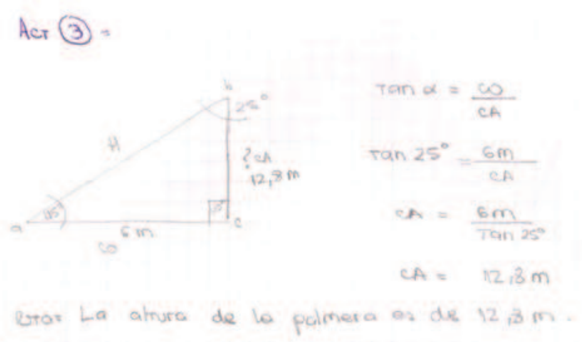


Figura 4.2: Ejemplo de dificultad en el bosquejo

En esta producción consideramos que se evidencia una incoherencia en la interpretación del enunciado del problema, ya que el esquema que ilustra la situación planteada no concuerda con el mismo. El estudiante no logra captar plenamente el contexto e interpretamos que traza un triángulo utilizando todos los datos numéricos que encuentra en el enunciado. Además, resulta interesante observar que marca el ángulo como si fuera recto en el dibujo y, sin embargo, obtiene que su amplitud es de 110° y resuelve utilizando las razones trigonométricas en un triángulo que no es rectángulo.

Siguiendo las palabras de Montiel (2005), la construcción de modelos geométricos anticipa eventos reales, logrando la matematización de fenómenos naturales y astronómicos. La práctica de modelar una realidad macro no manipulable y la creación de modelos geométricos otorgan significado a los conceptos trigonométricos (Montiel, 2013). La creación de un bosquejo es esencial, ya que amalgama relaciones métricas con geométricas, siendo útil para el desarrollo de los conceptos trigonométricos.

4.4.2. Geométricas

La complicación en el tratamiento geométrico emerge cuando los estudiantes no realizan el dibujo a escala, cuestión que favorecería la interpretación adecuada tanto en el momento de la resolución como en el análisis de la respuesta. También incluímos en esta categoría las producciones que presentan incoherencias geométricas (contradicen una propiedad geométrica o confunden elementos del triángulo rectángulo), como por ejemplo, obtienen que la longitud de la hipotenusa es menor que la de un cateto, o bien que a mayor ángulo interior no se le opone el mayor lado, confunden los catetos con la hipotenusa del triángulo rectángulo, entre otras. Un ejemplo ilustrativo de esta dificultad se exhibe en la Figura 4.4. Es decir, esta dificultad revela inconsistencias al aplicar nociones y propiedades de la geometría relacionadas con el problema en cuestión.

Actividad 5: (20 puntos)
Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que va desde la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme con éste un ángulo de 30°. Calcule el precio del cable si cada metro cuesta $35. Realice un gráfico ilustrativo de la situación, indicando los datos y valores a determinar.

Figura 4.3: Enunciado de la Tarea

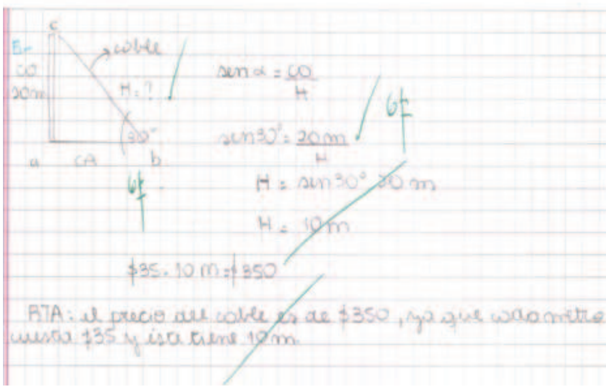


Figura 4.4: Ejemplo de dificultades geométricas

Como podemos observar en esta producción, el estudiante no reconoce la incoherencia geométrica de la respuesta que obtiene, ya que de su resolución se concluiría, de manera errónea, que a mayor lado se le opone menor ángulo en un triángulo. En relación a esta dificultad, Torres-Corrales y Montiel-

Espinosa (2021) manifiestan que, es necesario un contexto de significación geométrico que enmarque el uso de los objetos constitutivos del modelo y que doten de funcionalidad en el tránsito de lo macro a lo micro de una realidad no manipulable. Al respecto, Montiel y Jácome (2014) manifiestan que, en numerosas ocasiones en la instrucción de trigonometría en la escuela secundaria, se da una atención considerable a la realización de operaciones aritméticas para encontrar valores desconocidos, lo que da lugar a una "aritmetización de la trigonometría". Esta práctica, sin embargo, conlleva a menudo el descuido de las construcciones geométricas subyacentes. Este enfoque resulta en dificultades para que los estudiantes reconozcan la relación intrínseca entre los lados y ángulos en un triángulo, impactando en su habilidad para interpretar el significado numérico derivado de las operaciones aritméticas.

En esta dirección, se concluye que la disociación entre las nociones y procedimientos geométricos y la trigonometría tiene como consecuencia que los estudiantes se limiten a seleccionar la "fórmula trigonométrica" adecuada, insertar los valores conocidos y llevar a cabo los procedimientos aritméticos-algebraicos necesarios para calcular la información que resuelve el problema.

4.4.3. Razón

Esta dificultad se hace evidente cuando el estudiante elige incorrectamente una razón trigonométrica para resolver el problema (seno en lugar de tangente) como se muestra en la Figura 4.6.

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión y alineados, con un ángulo de depresión de 60° y 45° respectivamente. Determine la distancia entre ambos autos. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura 4.5: Enunciado de la Tarea

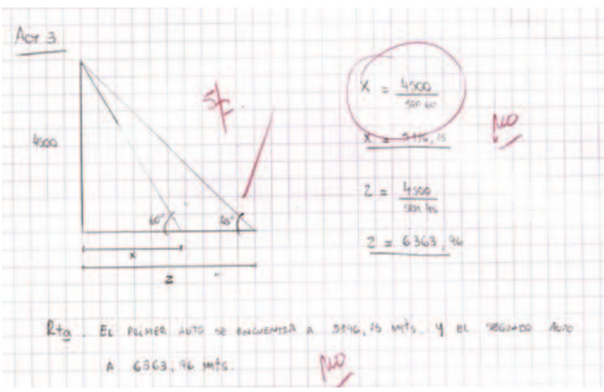


Figura 4.6: Ejemplo de dificultades con la razón

Observamos que la resolución propuesta revela una dificultad en la selección de la razón trigonométrica para abordar la situación. Aunque el bosquejo presentado es correcto, se observa que para obtener la solución correcta debería haber utilizado la razón trigonométrica tangente en lugar de la razón seno.

Asimismo, en esta categoría se incluyen las producciones de los estudiantes que seleccionan de manera incorrecta el cociente que corresponde a la razón trigonométrica elegida (por ejemplo escriben el seno del ángulo como cociente entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo), como se muestra en la Figura 4.8.

Actividad 5: (20 puntos)
Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que va desde la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme con éste un ángulo de 30°. Calcule el precio del cable si cada metro cuesta \$35. Realice un gráfico ilustrativo de la situación, indicando los datos y valores a determinar.

Figura 4.7: Enunciado de la Tarea

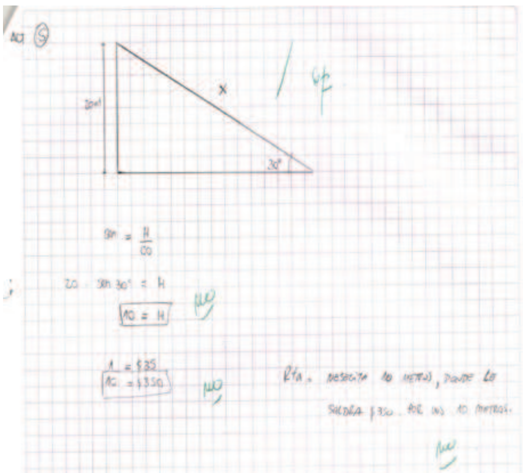


Figura 4.8: Ejemplo de dificultades con la razón

4.4.4. Algebraicas

Esta categoría refiere a las dificultades en el tratamiento algebraico del problema. Surge al manipular algebraicamente las expresiones luego de sustituir las variables. La Figura 4.10 proporciona un ejemplo concreto de esta categoría. En estas producciones aparecen inconsistencias al enfrentar el desafío de emplear herramientas algebraicas para resolver problemas trigonométricos.

En este caso, se observa que el estudiante realiza adecuadamente el análisis del modelo, plantea correctamente la razón trigonométrica para calcular el lado faltante del triángulo rectángulo. Sin embargo, luego de sustituir las variables, comete error al manipular las expresiones, utiliza de manera incorrecta las técnicas algebraicas para llegar a la solución del problema.

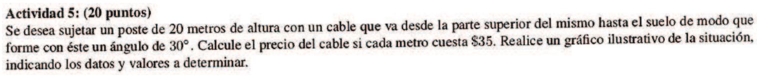

Actividad 5: (20 puntos)
Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que va desde la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme con éste un ángulo de 30°. Calcule el precio del cable si cada metro cuesta \$35. Realice un gráfico ilustrativo de la situación, indicando los datos y valores a determinar.

Figura 4.9: Enunciado de la Tarea

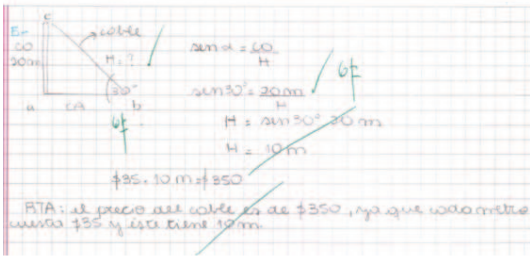


Figura 4.10: Ejemplo de dificultades algebraicas

4.4.5. Respuesta

Este tipo de dificultad se evidencia cuando el estudiante no presenta la respuesta de la situación problemática o bien, realiza todo el procedimiento de resolución pero la respuesta es incoherente.

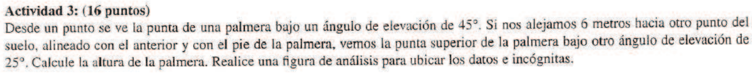

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un punto se ve la punta de una palmera bajo un ángulo de elevación de 45°. Si nos alejamos 6 metros hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie de la palmera, vemos la punta superior de la palmera bajo otro ángulo de elevación de 25°. Calcule la altura de la palmera. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura 4.11: Enunciado de la Tarea

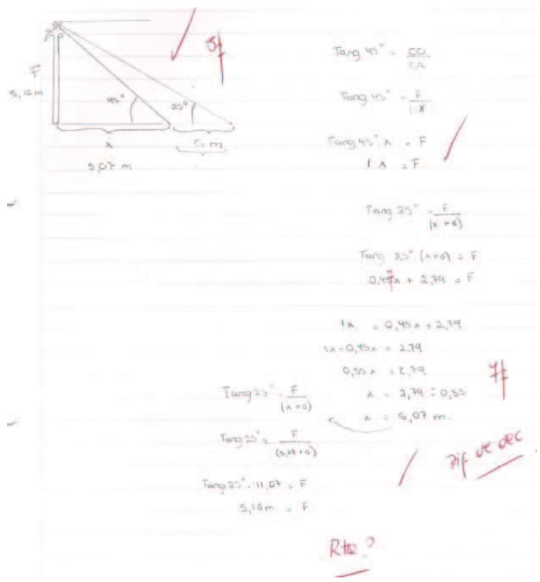


Figura 4.12: Ejemplo de dificultades con la respuesta

En la Figura 4.12, observamos que el estudiante enfrentó la situación de manera precisa y acertada en su desarrollo; no obstante, omitió proporcionar la respuesta solicitada en el problema. Es decir, a pesar de realizar adecuadamente el procedimiento, no hay conclusiones con la formulación de la respuesta al interrogante propuesto en la situación. Abonia y Miranda (2017) manifiestan que estas dificultades se presentan cuando no se contextualizan las temáticas tratadas dentro del aula, dejando estas prácticas como trabajo que sólo se puede observar en la escuela y no en el vivir diario, llevando a los estudiantes a no comprender los objetos matemáticos planteados.

4.5. Resultados

A partir de la recopilación de datos que pone de manifiesto las dificultades encontradas en las actividades que implican el manejo de razones trigonométricas, en la Tabla 4.3 presentamos los resultados derivados del análisis de las producciones.

Asimismo, en el Anexo A.1, presentamos una exposición más detallada de fragmentos de las evaluaciones que evidencian estas dificultades.

Categorías	**Frecuencia**	**Porcentajes**
Bosquejo	7	35 %
Geométricas	20	100 %
Razón	2	10 %
Algebraicas	6	30 %
Respuestas	3	15 %

Tabla 4.3: Tipos de Dificultades

Esta tabla sintetiza de manera precisa las diferentes categorías de dificultades identificadas, ofreciendo una visión integral del dominio matemático que requiere especial atención en el proceso educativo.

Es importante destacar que si bien analizamos las producciones de los estudiantes que presentaban dificultades en la resolución de la tarea referida a la resolución de triángulos rectángulos, luego del análisis observamos que las producciones consideradas correctas en la evaluación, también presentaban en el bosquejo de la situación un dibujo sin respetar la escala (cuestión que indica un tratamiento disociado con el sentido de la medida) y además carecen de articulación entre el tratamiento algebraico, el geométrico y el de la medida, tanto en la resolución del problema como en la expresión de la respuesta, presentamos un ejemplo en la Figura 4.14.

Observamos en la resolución que en el tratamiento algebraico de la resolución del problema obtiene que $x = 4500$, sin embargo no interactúa con el dibujo para analizar geométricamente esta cuestión, esto sucede debido a que el bosquejo no se realiza a escala, lo que no favorece dicha interacción. También es interesante analizar que si inicialmente el estudiante visualiza en el dibujo (en el tratamiento geométrico de la situación) que el triángulo rectángulo es isósceles, simplificaría su resolución algebraica. En definitiva, pese a entender el juego de resolución correcta de la tarea, aparecen dificultades en el tratamiento geométrico y en la interacción entre el algebraico y el geométrico.

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión y alineados, con un ángulo de depresión de 60° y 45° respectivamente. Determine la distancia entre ambos autos. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura 4.13: Enunciado de la Tarea

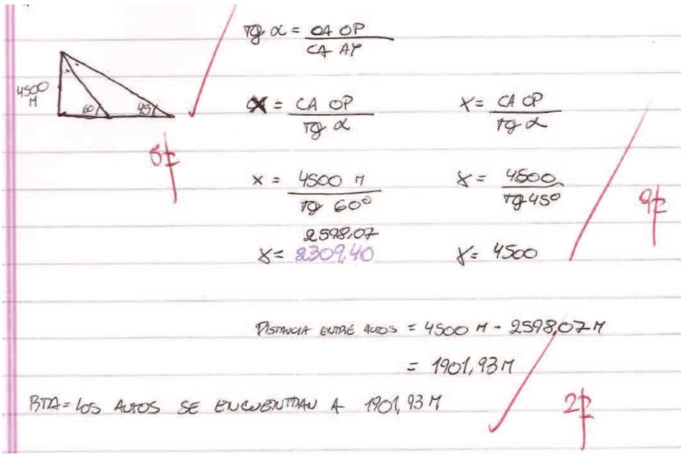


Figura 4.14: Ejemplo de evaluaciones correctas

Cabe resaltar que, al examinar los resultados de las 20 (veinte) producciones de estudiantes, encontramos más de una dificultad en algunas de ellas. Esta constatación implica que dichos desafíos no se limitan a una única categoría, sino que abarcan diversas dimensiones identificadas en el marco de esta investigación. Este hecho subraya la complejidad y diversidad de los desafíos que los estudiantes enfrentan al abordar problemas relacionados con razones trigonométricas.

A continuación, en la Figura 4.15, se presenta un gráfico de barras con los porcentajes que resumen cada tipo de dificultad, ofreciendo así un panorama de las áreas específicas que requieren atención y mejora.

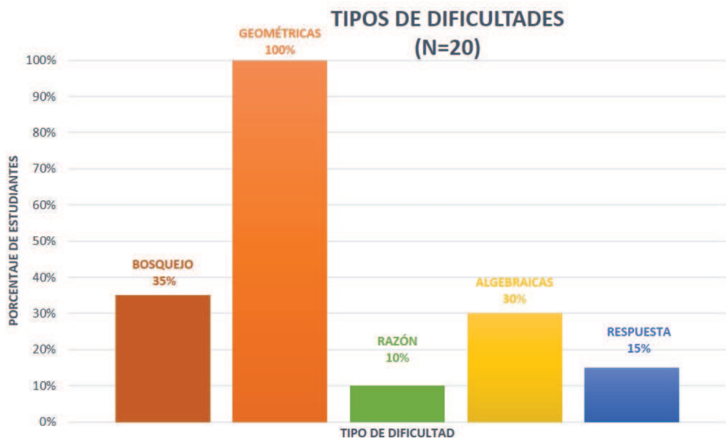


Figura 4.15: Tipos de dificultades

El gráfico presentado evidencia que todos los estudiantes enfrentan desafíos en el aspecto geométrico y en el de la medida, ya sea por la omisión de la elaboración de bosquejos a escala, la dificultad en identificar los elementos esenciales del triángulo (ya sean lados y/o ángulos), la presencia de incoherencias geométricas, el desconocimiento de la propiedad relacionada con la suma de ángulos interiores de un triángulo, la falta de reconocimiento de los ángulos alternos internos entre paralelas.

Esta diversidad de desafíos geométricos subraya la necesidad de una atención integral en la enseñanza, no sólo en términos de fórmulas y manipulaciones algebraicas, que también presentan inconsistencias, sino también en la comprensión profunda de los conceptos geométricos subyacentes.

4.6. Conclusiones

El análisis llevado a cabo de las producciones de los estudiantes en las evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática en el ingreso a la universidad para hallar evidencias sobre las dificultades que tienen los estudiantes en el tema razones trigonométricas, consideramos que ha arrojado conclusiones significativas. A través de la propuesta y análisis de cinco categorías para organizar los desaciertos que se observan en las resoluciones de las actividades, se ha logrado identificar dominios específicos que requieren atención y fortalecimiento.

Por lo tanto, encontramos evidencias en estas producciones que el *sentido trigonométrico* construído por los estudiantes presenta inconsistencias que obstruyen el abordaje adecuado de tareas de resolución de problemas de triángulos rectángulos.

A continuación resumimos las dificultades que hallamos en las evaluaciones de los ingresantes a la universidad:

- En el bosquejo de la situación, no se corresponde con el enunciado de la tarea, surgen inconvenientes para evocar los contextos propuestos en las tareas.
- En el tratamiento geométrico y el de la medida en la resolución de la tarea, no realizan el dibujo a escala (también se observa en las evaluaciones aprobadas), cuestión que podrían utilizar para encontrar una primera aproximación de la respuesta (estimación) y favorecería la interpretación y control de los procedimientos tanto en el momento de la resolución como en el análisis de la respuesta. Además, revela inconsistencias al aplicar nociones y propiedades de la geometría relacionadas con el problema en cuestión.
- En el tratamiento algebraico, en la manipulación de expresiones surgen inconsistencias en las operaciones y propiedades propias del álgebra.
- En la interacción entre lo geométrico, la medida y lo algebraico, tanto en las evaluaciones con dificultades como en aquellas que están apro-

badas, se evidencia una carencia de interrelación entre lo que obtienen desde la resolución algebraica y lo que geométricamente podrían visualizar y estimar desde el dibujo.

- En la selección correcta de la razón y en la expresión correcta para la razón seleccionada, cuestión que evidencia una memorización de las fórmulas carentes de sentido para el estudiante. En algunos casos, observamos que anotan todas las fórmulas primero antes de resolver la tarea.

- En la expresión de la respuesta con una mirada retrospectiva del proceso realizado para resolver el problema.

Capítulo 5

Análisis de Textos

Así como los objetos más fáciles de ver no son los demasiado grandes
ni los demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en
matemáticas no son las demasiado complejas ni las demasiado simples.
BERTRAND ARHUR WILLIAM RUSSELL

5.1. Introducción

En este capítulo describiremos los resultados de entrevistas a los docentes de nivel secundario de la ciudad de Gálvez (Santa Fe). El objetivo principal de la entevista es explorar los libros de texto y otros materiales bibliográficos que utilizan para abordar sus clases en la enseñanza de las razones trigonométricas. Además, formulamos preguntas adicionales destinadas a recopilar información que nos servirá como insumo para la segunda etapa de la investigación.

A partir de las respuestas obtenidas, realizamos un análisis detallado de los sentidos y los modos de uso que los textos escolares del nivel secundario atribuyen a las razones trigonométricas. Este análisis se extiende a las tareas propuestas por los materiales educativos utilizados en los cursos de articulación disciplinar de matemática para el ingreso a la Universidad Nacional del Litoral (UNL).

Para llevar a cabo dicho análisis, nos apoyamos en los aportes teóricos de Ruiz Hidalgo (2016) y Ruiz Hidalgo y Flores (2022). Estos autores proponen una acepción particular de la palabra "sentido" en el ámbito de la educación matemática, entendida como una parte intrínseca del significado de una palabra o conjunto de palabras. En el contexto matemático, sostienen que el sentido de un concepto matemático constituye una parte inherente de su significado semántico, focalizándose en los modos de uso, las situaciones, los contextos y los fenómenos que integran el significado de dicho concepto.

En el desarrollo de esta investigación, adoptamos una metodología que se enmarca en un análisis documental con características descriptivas, específicamente nuestro estudio es un análisis didáctico de tareas propuestas del tema en los textos escolares.

5.2. Entrevista a docentes

Con el objetivo de indagar acerca de los sentidos y modos de uso que priorizan las tareas en los libros de textos escolares en el tema razones trigonométricas, realizamos una entrevista a seis docentes de escuelas secundarias de la ciudad de Gálvez (Santa Fe), considerando que para responder la encuesta apelarán a las concepciones personales ya arraigadas y a los modos individuales en que tales conceptos se usan (Martín-Fernández et al., 2014).

Decidimos la metodología de entrevista dialogada, apelando a la espontaneidad de los docentes y sin perjudicar los horarios de su labor. Por ello, realizamos la grabación de la entrevista y utilizamos preguntas guías elaboradas para indagar acerca de la metodología utilizada en la enseñanza de las razones trigonométricas y además, para conocer los materiales bibliográficos que emplean para elaborar sus propuestas de clase.

A continuación presentamos el cuestionario guía para las entrevistas a los docentes.

1. En la iniciación del tema razones trigonométricas, ¿cuáles son los conocimientos previos que consideras importantes?

2. Nos interesa conocer el material que utilizas para las clases del tema:

   [**a**] Libros de texto ¿cuál/es?

   [**b**] Otros Materiales ¿Cuáles?

3. El material ¿lo utilizas en forma completa o parcial? ¿Qué tipo de tareas habitualmente seleccionas?

4. En tu propuesta para la enseñanza del tema, ¿incluyes tareas con diseños didácticos experimentales? En caso afirmativo, ¿cuáles?

5. Marca con una cruz los tipos de problemas que utilizas más frecuentemente para la aplicación de las razones trigonométricas:

   - De la vida diaria
   - De salud
   - Ingeniería
   - Ciencias
   - Sin contexto
   - Otros

6. Marca con una cruz la o las acciones que consideras primordial/es en la aplicación de las razones trigonométricas:

   - Cuantificar

- Estimar
- Calcular longitud de lados de triángulos
- Calcular amplitud de ángulos de triángulos
- Ordenar
- Posicionar
- Estructurar
- Comparar

7. ¿Cuál es tu objetivo principal al momento de la enseñanza de las razones trigonométricas?

8. ¿Utilizas herramientas tecnológicas para abordar y/o desarrollar el tema? En caso afirmativo, ¿cuáles? ¿Con qué finalidad?

9. Selecciona y transcribe dos o tres ejercicios/problemas que consideres indispensables para trabajar las razones trigonométricas.

10. ¿Consideras que este tema es más fácil, más difícil o igualmente complejo para enseñar que otros temas de matemática? ¿Por qué?

11. ¿Para qué consideras que es útil que tus estudiantes conozcan este tema?

En el Anexo B.1, se encuentran las transcripciones completas de las respuestas proporcionadas por los docentes. En este capítulo seleccionamos las preguntas 2), 4) y 8) para analizar.

5.2.1. Pregunta 2

Con respecto a los libros de textos utilizados por los docentes de Gálvez para abordar sus clases en la enseñanza de las razones trigonométrica, observamos que cinco de seis docentes consultados hacen uso del libro Matemática I de Puerto de Palos (2009). Además, al indagar sobre la utilización de otros materiales, dos de ellos mencionan la inclusión de internet como fuente de información adicional, aunque no especifican sitios web particulares o plataformas específicas de donde extraen dicho material. En la Tabla 5.2 presentamos los textos mencionados.

Primer Autor	Año	Título	Editorial
Berio, Adriana	2009	Matemática 1 Activa	Puerto de Palos
Boccioni, Mariela	2017	Nuevo Activados matemática 4	Puerto de Palos
Effenberger, Pablo	2017	Matemática 4/3	Kapelusz
Effenberger, Pablo	2012	Matemática III 2° Secundario CABA	Kapelusz
Mendoza, Juan	2018	Entre números IV	Santillana

Tabla 5.1: Textos mencionados por los docentes

5.2.2. Pregunta 4

En relación con la pregunta sobre la incorporación de tareas con diseños didácticos experimentales, todos los docentes manifiestan que actualmente no integran este tipo de actividades en sus propuestas de enseñanza. Un docente expresó la opinión de que debería considerar la inclusión de estos enfoques en su práctica pedagógica. Además, otro docente destacó que los problemas que plantean a los estudiantes están vinculados a situaciones de la vida real, específicamente relacionadas con mecánica y tornería.

Estas respuestas señalan que, si bien actualmente no se implementan tareas experimentales, hay docentes que reconocen la importancia de incluir enfoques más prácticos y contextualizados en el aprendizaje de las razones trigonométricas. La mención de problemas de mecánica y tornería destaca la intención de algunos docentes de conectar los conceptos matemáticos con aplicaciones concretas y situaciones del mundo real.

5.2.3. Pregunta 8

En relación con la pregunta sobre la integración de herramientas tecnológicas para abordar el tema, cuatro de los docentes expresaron que actualmente no utilizan herramientas tecnológicas en sus clases de razones trigonométricas. Sin embargo, dos de ellos reconocieron que existen posibilidades para la incorporación de tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Uno de los docentes mencionó que los estudiantes, al contar con netbooks, tienen la capacidad de buscar información en internet sobre razones trigonométricas. Este comentario resalta la idea de aprovechar los recursos tecnológicos disponibles para enriquecer la comprensión de los estudiantes a través de la exploración de contenidos en línea.

Otro docente señaló que la herramienta tecnológica que utiliza con regularidad es la calculadora, empleada principalmente para obtener resultados numéricos.

En general, estas respuestas sugieren una oportunidad para explorar y considerar estrategias más amplias y diversificadas que incorporan herramientas tecnológicas de manera más integral en la enseñanza de las razones trigonométricas.

Fiallo (2010) manifiesta que el empleo de herramientas tecnológicas como ser los softwares de geometría dinámica ofrecen una mayor posibilidad para visualizar, explorar y conjeturar sobre las propiedades de las razones trigonométricas, así como de manipular y observar sus distintas representaciones, favoreciendo considerablemente la interconexión entre las múltiples definiciones y relaciones.

5.3. Análisis de textos

En la Figura 5.1 presentamos las portadas de los libros y en la Tabla 5.2, los datos detallados de los textos de la muestra. Además, agregamos el libro de texto empleado en el desarrollo de los cursos de articulación disciplinar de matemática en la instancia del ingreso a la UNL.

Figura 5.1: Portada de los textos analizados

Primer Autor	Año	Título	Editorial
Berio, Adriana	2009	Matemática 1 Activa	Puerto de Palos
Boccioni, Mariela	2017	Nuevo Activados matemática 4	Puerto de Palos
Effenberger, Pablo	2017	Matemática 4/3	Kapelusz
Effenberger, Pablo	2012	Matemática III 2° Secundario CABA	Kapelusz
Mendoza, Juan	2018	Entre números IV	Santillana
Carena, Marilina	2019	Manual de Matemática Preuniversitaria	Ediciones UNL

Tabla 5.2: Datos de la muestra de textos

Los libros se caracterizan por estar divididos en capítulos que abordan diferentes contenidos matemáticos con ejemplificaciones de tareas resueltas. Posteriormente ofrecen ejercitación y problemas (en un primer momento) para, finalmente incorporar tareas de aplicación a otros campos de conocimiento o a la vida cotidiana.

La Tabla 5.3 presenta la cantidad de tareas (T) y el número de ítem (I) que analizamos y además, la posición donde se ubican en cada libro de texto, las que corresponden al desarrollo del tema y aquellas que se ubican en el apartado de integración o revisión. Es relevante destacar que el material utilizado para los cursos de ingreso a la universidad ofrece tareas una vez desarrollado los contenidos conceptuales.

Cabe mencionar que adoptamos el formato Editorial (año) para identificar los textos, tal como lo mencionaron los docentes en las entrevistas.

Posición de la Tarea	Puerto de Palos(2009)		Puerto de Palos(2017)		Kapelusz (2012)		Kapelusz (2017)		Santillana (2018)		UNL (2019)	
	T	**I**	**T**	**I**	**T**	**I**	**T**	**I**	**T**	**I**	**T**	**I**
Desarrollo	8	46	8	82	15	79	14	71	7	14	23	36
Integración	3	13	11	89	6	22	4	13	5	18	-	-
Totales	11	59	19	171	21	101	18	84	12	32	23	36
Total de ítems analizados: 483												

Tabla 5.3: Número de Tareas (T) e Ítem (I) propuestos en los textos

5.4. Interés de la indagación

La trigonometría se inicia en la escuela secundaria obligatoria con el objetivo de resolver problemas de triángulos rectángulos aplicando alguna de las tres razones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente. Previo al abordaje del tema se retoman cuestiones geométricas tales como: ángulos, clasificación de ángulos convexos, triángulos, clasificación de triángulos, suma de ángulos interiores de un triángulo, semejanza de triángulos, teorema de Thales, teorema de Pitágoras, entre otros. Coincidimos con Cruz Márquez (2018) cuando menciona que, con frecuencia los docentes utilizan mnemotecnias como ser SOHCAHTOA, la que asocia de forma acróstica las definiciones para el seno (SOH: seno-opuesto-hipotenusa), coseno (CAH: coseno-adyacente-hipotenusa) y tangente (tangente-opuesto-adyacente) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, evidenciando que las razones trigonométricas son vistas como cocientes entre las longitudes de los lados de triángulos rectángulos. En cierta manera, se utiliza una estrategia algebrizada que consiste en la resolución de una ecuación. Según Montiel (2013), el discurso trigonométrico escolar ha convertido a las razones trigonométricas en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados de un triángulo, es decir sólo una técnica para encontrar el valor faltante.

A partir de lo observado en diversas investigaciones sobre la enseñanza de la trigonometría en el nivel secundario, Montiel y Jácome (2014) llevaron a cabo un análisis del discurso Matemático Escolar (dME) en libros de texto del nivel secundario mexicano para identificar un posible origen del significado lineal construido por los profesores. Tal significado hace referencia a la interpretación errónea que consiste en suponer que a variaciones constantes de las amplitudes de los ángulos, corresponden variaciones constantes de las longitudes de los lados y viceversa. Los autores mencionan que en la trigonometría abordada desde la escuela no se presentan actividades y explicaciones que permitan reconocer e identificar que lo trigonométrico está en la naturaleza de la relación ángulo-distancia y, por lo tanto, esta característica constituye un espacio para que se manifieste la linealidad.

Además, Abonia y Miranda (2017) sostienen que, una de las problemáticas en el estudio del tema, se refleja cuando se aplican patrones de enseñanza que necesitan de un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad para los estudiantes. El presente estudio tiene como objetivo caracterizar los sentidos y modos de uso de las razones trigonométricas, en los textos escolares mencionados por los docentes de las instituciones educativas de la ciudad de Gálvez. Para ello, asumimos el enfoque teórico propuesto por Freudenthal basado en una la Educación Matemática Realista (EMR), donde uno de los objetivos de la educación escolar es la constitución de objetos mentales para la adquisición de los conceptos. "la contraposición objeto mental / concepto que plantea Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos" (Puig, 1997, p.16).

Para lograr la constitución de los objetos mentales es necesaria la identificación del sentido de los conceptos matemáticos. Puig (2001) sostiene que para una noción matemática determinada, la totalidad de usos de esa noción en todos los contextos constituye el campo semántico de la noción, su significado enciclopédico. Un sujeto particular, cuando realiza una actividad (en la clase de matemática o en la vida cotidiana) que pone en juego esa noción no se desenvuelve en la totalidad de los usos producidos en la cultura, sino en su campo semántico personal, que ha ido elaborando produciendo sentido en situaciones o contextos que le exigían nuevos usos para la misma. Estos sentidos producidos se convierten en significados si la interpretación es afortunada.

Rico (2016) menciona que el significado de un concepto matemático escolar viene dado por los siguientes componentes: una estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso. Para esta investigación, nos centramos en el último componente y adaptaremos al tema en estudio los aportes de Ruiz Hidalgo (2016) y Ruiz Hidalgo et al. (2022), quienes consideran el sentido de un concepto matemático como elemento central que organiza la enseñanza del conocimiento escolar.

Tomando en consideración este marco teórico, investigaremos acerca de los sentidos y modos de uso que le conceden los libros de textos utilizados por los docentes de Gálvez a las razones trigonométricas. Montiel (2005) menciona que el libro de texto constituye para el profesor una fuente de recursos tanto para las explicaciones de clase como para el conjunto de ejercicios a resolver en el salón, para llevar tarea o para usarse en la evaluación (p.30). Fiallo (2010) agrega que los libros de texto suelen adoptar posiciones tradicionales, centrados en enseñar conceptos, propiedades y aplicaciones al cálculo de elementos de triángulos o de distancias inaccesibles y, en contadas ocasiones, hacen uso de las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías. Por otra parte, Montes et al. (2022) mencionan que un gran mediador del aprendizaje con sentido es el libro de texto, debido a que su propia organización suele conducir a una visión estática y acabada del contenido y a una secuencia parcelada de temas y tareas. Además, hace referencia a que no ofrecen una visión holística que el docente ha de tener del currículo, promoviendo así una construcción reduccionista y fragmentada del conocimiento matemático.

5.5. Categorías y resultados

A continuación, describimos las categorías y los resultados obtenidos. Las mismas fueron adaptadas y reformuladas por Ruiz Hidalgo (2016) para el tema que nos proponemos analizar.

5.5.1. Los términos

En esta categoría incluimos las palabras que aparecen en el enunciado de los ítems, aquella cuestión que solicita hallar la tarea. Ya sea en referencia directa a las razones trigonométricas o bien a objetos, nociones u otras cuestiones en las que están involucradas indirectamente.

En el análisis de los textos localizamos dieciséis términos que hacen referencia a la aplicación de las razones trigonométricas en las tareas que proponen los libros de textos, ellos son: ángulos, lados (altura, distancia, longitud), razón, razones, relación, variación, perímetro, área, resolver, calcular, encontrar el valor faltante, verificar igualdades y calcular expresiones.

El gráfico de barras de la Figura 5.1 , resume los porcentajes en los que aparecen los términos identificados en cada uno de los ítems, que proporcionan diferentes acepciones que delimitan y constituyen la descripción semántica de las razones trigonométricas. Los datos son extraídos de las tareas propuestas en cada uno de los textos. Cabe aclarar que agrupamos términos afines, dado que en el enunciado de la tarea evocaba al mismo cálculo y además, que los porcentajes se refieren al total de ítems analizados en cada libro. Por ejemplo: en el libro Puerto de Palos (2009) el 11,9 % de los ítems requiere hallar la amplitud de un ángulo.

Como observamos, los términos que más aparecen en las tareas de los libros de textos utilizados en el nivel secundario son: completar el valor faltante, ángulo, lado y razón. Los términos mencionados hacen referencia a tareas de cálculo de la razón, de la longitud de un lado del triángulo rectángulo o la amplitud de sus ángulos agudos (o todos los elementos que faltan).

Es importante mencionar que el libro utilizado en los cursos de articulación disciplinar no presenta tareas destinadas solamente a resolver, calcular o hallar el valor faltante; pero sí propone una cantidad considerable de tareas donde solicitan el cálculo del lado o de la amplitud del ángulo.

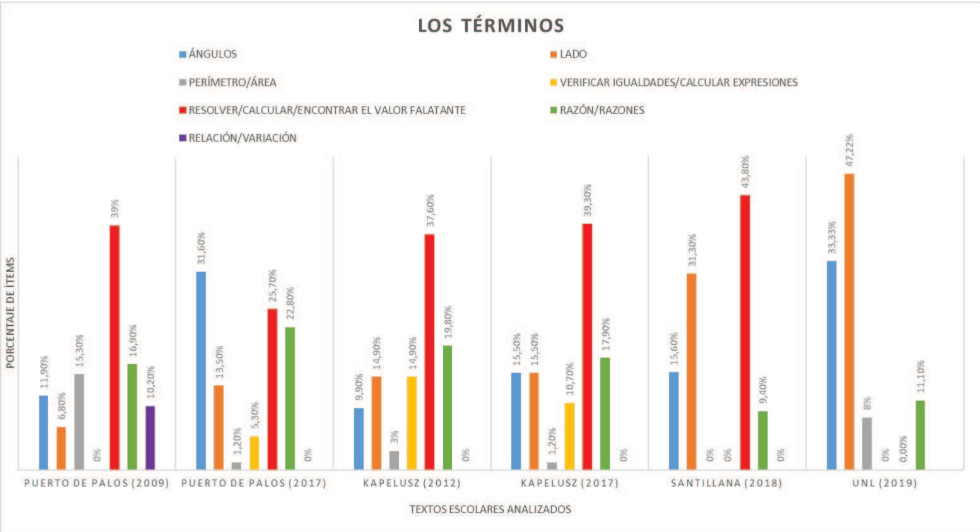


Figura 5.2: Los términos

5.5.2. Los contextos

Este aspecto se trata de ver que la tarea se enmarca dentro de algún campo de aplicación del objeto matemático, es decir, el dominio en el que se plantea la tarea. Los conceptos, nociones, propiedades, relaciones, herramientas y reglas propias del dominio se utilizan en su resolución. Los contextos los categorizamos en: matemáticos y extramatemáticos.

Contextos matemáticos

En este tipo se contexto, encontramos las siguientes subcategorías en la solución de cada una de las tareas propuestas.

- **Numérico**: ítems planteados para utilizar herramientas aritméticas en su resolución, como por ejemplo: el cálculo del valor de la razón dados las medidas de los tres lados. Como se muestra por ejemplo en la Figura 5.3.

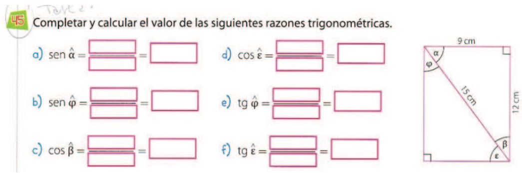


Figura 5.3: Contexto matemático: numérico

- **Algebraico**: ítems planteados para utilizar herramientas algebraicas, reemplazan los valores y la incógnita en una fórmula para el cálculo del valor faltante (longitud del lado o amplitud del ángulo), en algunos casos, los datos y el valor faltante están explicitados en el enunciado, en otros en la figura geométrica representada, como se muestra en la Figura 5.4.

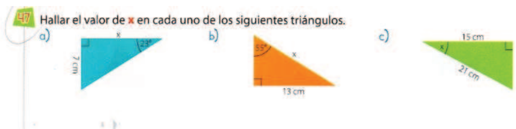
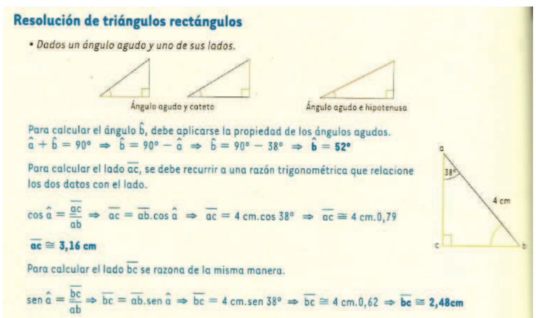


Figura 5.4: Contexto matemático: algebraico

El libro de texto más mencionado por los docentes de Gálvez, además de priorizar este tipo de tareas, expresa claramente los pasos algebraicos para obtener el valor deseado, ya sea la longitud del lado faltante o la amplitud de un ángulo agudo.



Resolución de triángulos rectángulos

• *Dados un ángulo agudo y uno de sus lados.*

Ángulo agudo y cateto — Ángulo agudo e hipotenusa

Para calcular el ángulo $\hat{b}$, debe aplicarse la propiedad de los ángulos agudos.
$\hat{a} + \hat{b} = 90° \Rightarrow \hat{b} = 90° - \hat{a} \Rightarrow \hat{b} = 90° - 38° \Rightarrow \mathbf{\hat{b} = 52°}$

Para calcular el lado $\overline{ac}$, se debe recurrir a una razón trigonométrica que relacione los dos datos con el lado.

$\cos \hat{a} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{ab}.\cos \hat{a} \Rightarrow \overline{ac} = 4\text{ cm}.\cos 38° \Rightarrow \overline{ac} \cong 4\text{ cm}.0{,}79$

$\overline{ac} \cong 3{,}16$ **cm**

Para calcular el lado $\overline{bc}$ se razona de la misma manera.

$\text{sen}\, \hat{a} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{bc} = \overline{ab}.\text{sen}\, \hat{a} \Rightarrow \overline{bc} = 4\text{ cm}.\text{sen}\, 38° \Rightarrow \overline{bc} \cong 4\text{ cm}.0{,}62 \Rightarrow \overline{bc} \cong 2{,}48$**cm**

Figura 5.5: Resolución propuesta en Puerto de Palos (2009)

- **Geométrico**: ítems planteados en el que los estudiantes deben utilizar nociones y conceptos geométricos en su resolución, como por ejemplo, la tarea que se muestra en la Figura 5.6.

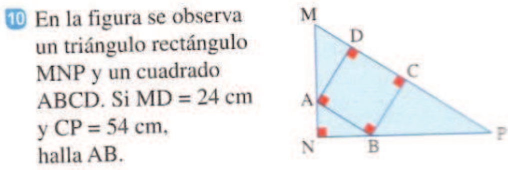


Figura 5.6: Contexto Matemático: Geométrico

Contextos extramatemáticos

Para las subcategorías de esta clasificación adaptamos la propuesta de Martínez (2003), quién los distingue en las que mencionamos a continuación.

- **Contexto real**: en caso de que en el ítem plantee en un contexto aplicado a una práctica real que se lleva a cabo en el lugar sociocultural donde se produce la situación. Por ejemplo, que la tarea sea hallar la altura del edificio escolar, será necesario modelar la situación, relevar los datos mediante tareas de medición, hacer un bosquejo a escala, resolver el problema y verificar en el bosquejo el resultado obtenido.

- **Contexto simulado**: ítem planteado en un contexto aplicado que tiene su origen en un contexto real y reproduce alguna característica del mismo. Por ejemplo, cuando la tarea consiste en elaborar un bosquejo a escala de la situación para luego resolverla, es decir, implica una parte del proceso de modelar la situación, en este caso los datos son explicitados en el enunciado.

- **Contexto evocado**: ítem planteado en un contexto aplicado propuestos por los autores y que permite imaginar una situación donde se da ese hecho, como por ejemplo la tarea de la Figura 5.7.

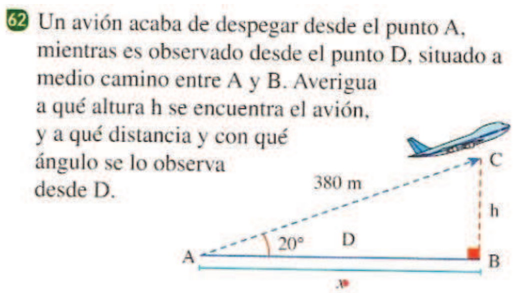


Figura 5.7: Contexto extra-matemático: evocado

El gráfico de barras que presentamos en la Figura 5.8, resume los porcentajes de los distintos tipos de contextos que encontramos en los ítems propuestos en los textos escolares analizados.

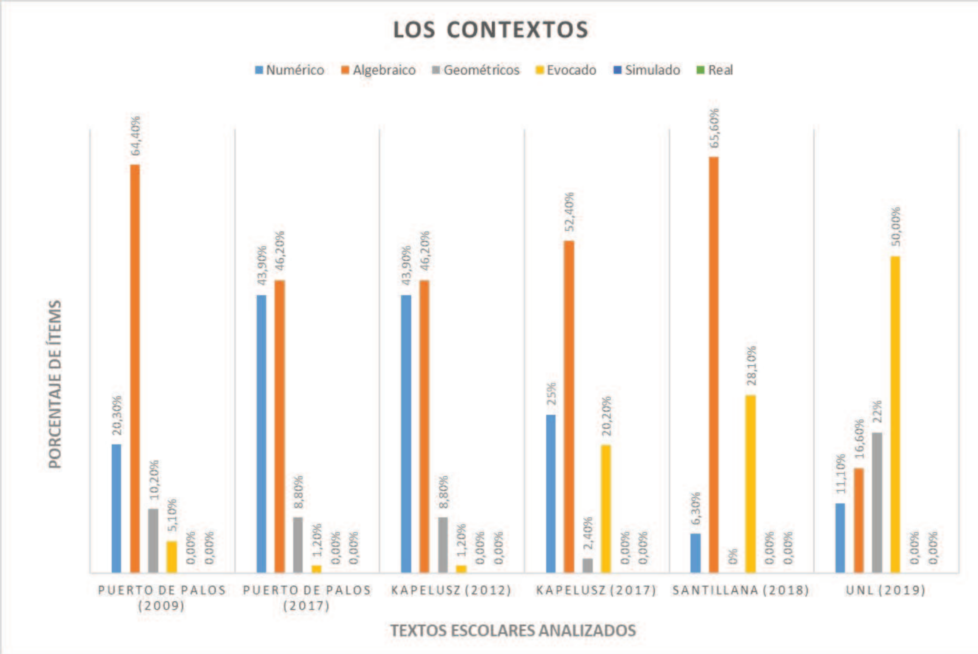


Figura 5.8: Los contextos

El contexto priorizado en los libros propuestos por los docentes de Gálvez es matemático y, más específicamente el contexto algebraico, como podemos observar en la Figura 5.8. En algunos textos, como Puerto de Palos (2017) y Kapelusz (2012), el contexto numérico es utilizado prácticamente en la misma cantidad de ítems que el contexto algebraico. El texto de la editorial Santillana es el que propone más tareas en el contexto aplicado. En los cinco libros los problemas en el contexto aplicado se presentan al finalizar el tema. Una cuestión importante a destacar es que el contexto geométrico es el menos frecuente en todas las propuestas de los autores.

Es relevante destacar que el libro utilizado en los cursos de ingreso a la universidad, prioriza las tareas donde priman los contextos evocados, dejando en tercer lugar los contextos algebraicos lo que marca una diferencia en el sentido de los conceptos matemáticos que persigue el autor.

Como podemos observar en el relevo de datos, en los seis libros de textos hay una ausencia de tareas que evoquen el trabajo en contextos simulados o reales y, como reporta Tavera (2013), hay una carencia en el pensamiento variacional a causa de que para la resolución de las tareas se requiere una interpretación estática del concepto. Montiel (2005) al trabajo en contextos de naturaleza estática los denomina "matematización de la astronomía" porque los estudiantes hipotéticamente deben medir y calcular un dato y ello se reduce a la forma de hallar valores de una incógnita. Estos hallazgos ponen de relieve la necesidad de establecer nuevas relaciones, en las cuales los conceptos se observen de una manera dinámica para que los estudiantes puedan observar, interpretar, conjeturar, validar, modelar y formalizar situaciones de la vida cotidiana.

5.5.3. Los fenómenos

Esta componente se relaciona con el análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal, consiste, por un lado, en identificar las razones que dieron origen al concepto y, por otro, a qué otros usos se extendió a lo largo de la historia de la humanidad. En los textos encontramos los siguientes fenómenos:

- **Cálculo de distancias accesibles e inaccesibles.**
- **Cálculo de amplitudes de ángulos.**
- **Cálculo de la razón.**
- **Cálculo de trayectorias y rumbos**.
- **Cálculo de perímetros y áreas de figuras resolubles por triangulación.**

A continuación, en la Figuras 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 y 5.14, ejemplificamos con tareas de los libros donde observamos los diferentes fenómenos mencionados.

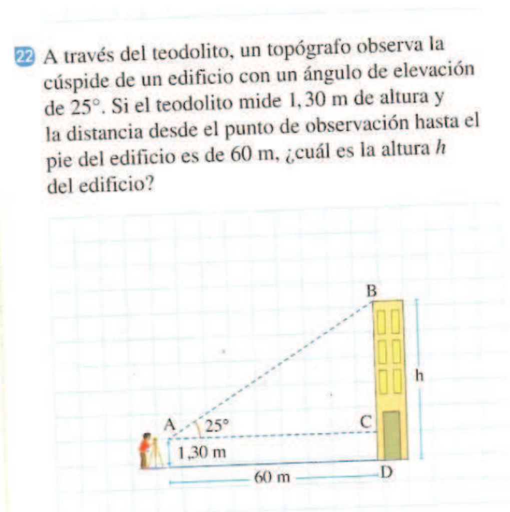


Figura 5.9: Cálculo de distancias

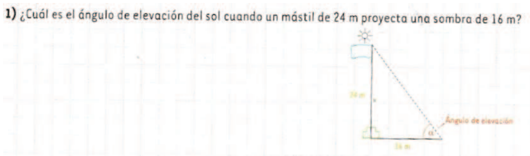


Figura 5.10: Cálculo de amplitudes de ángulos

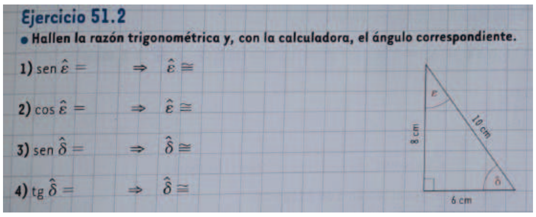


Figura 5.11: Cálculo de la razón

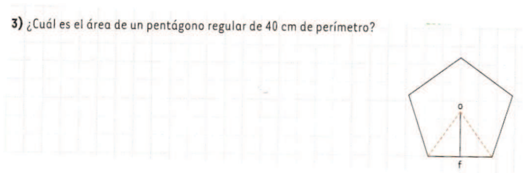


Figura 5.12: Cálculo de áreas

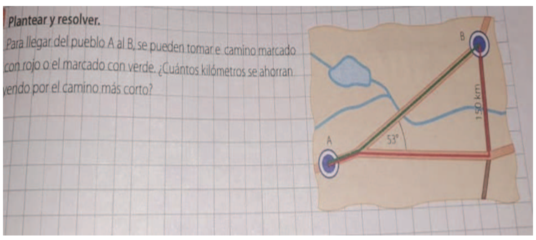


Figura 5.13: Cálculo de trayectorias y rumbos

En la Figura 5.14, presentamos el porcentaje de cada uno de los fenómenos detectados en los ítems propuestos por los textos.

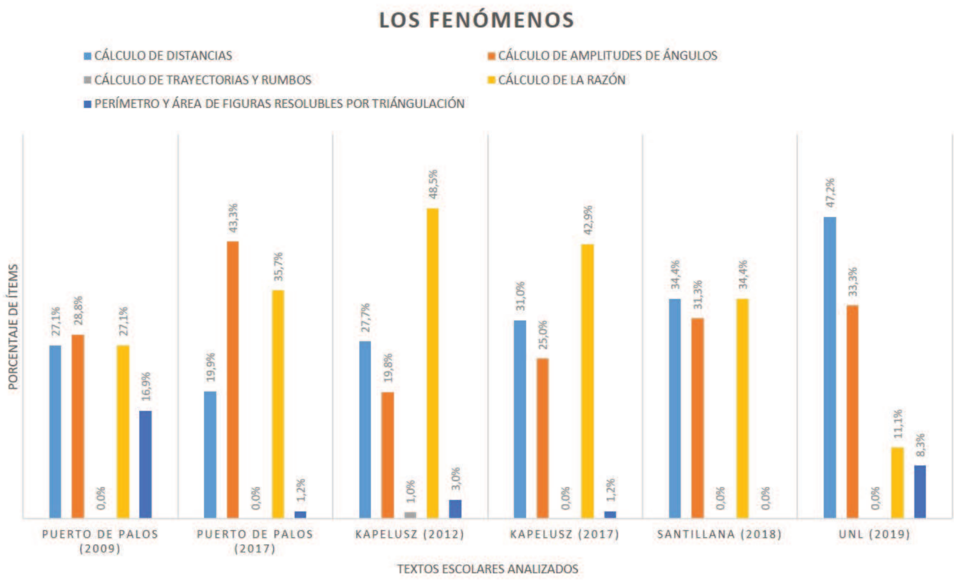


Figura 5.14: Los fenómenos

Los fenómenos más frecuentemente detectados son: el cálculo de distancias y de amplitudes de ángulos; y el cálculo de la razón. La mayoría de las tareas que proponen los libros de textos se basan en estos cálculos. El fenómeno de cálculo de orientación de trayectorias y rumbos, se encuentra ausente en la mayoría de las propuestas, solamente Kapelusz (2012) evoca una tarea que corresponde a este fenómeno. Con respecto al fenómeno de medición de perímetros y áreas de figuras resolubles por triangulación se aborda en el libro de Puerto de Palos (2009) y en el libro de texto utilizado en los cursos de articulación disciplinar; en los demás libros que emplean en el nivel secundario, se encuentra prácticamente ausente este fenómeno.

Es oportuno destacar que, solamente Kapelusz (2012) aborda las razones trigonométricas desde estos cuatro fenómenos, siendo Santillana (2018) el libro que utiliza la menor cantidad de estos fenómenos en la propuesta de sus tareas.

5.5.4. Las situaciones

Para categorizar las situaciones, adoptamos el marco del estudio PISA (OCDE, 2012) donde se define que una situación es una tarea matemática ligada al mundo del estudiante en la cual se aplica un concepto matemático. Se definen las siguientes cuatro categorías.

- **Situaciones personales**: cuando la tarea está relacionada con actividades diarias que realizan los estudiantes, por ejemplo, los juegos, los deportes, la comida o la economía personal.

- **Situaciones laborales o escolares**: que son situaciones propias del entorno de trabajo o del propio centro escolar como, por ejemplo: las acciones de medir, ordenar, diseñar inventarios, planos, entre otras.

- **Situaciones públicas o sociales**: se refieren a aquellas en las que se observan aspectos de su entorno social, referidas a la comunidad como, por ejemplo: transporte público, problemáticas demográficas, políticas gubernamentales, medios de comunicación, entre otras. Los problemas ponen el acento en la perspectiva comunitaria.

- **Situaciones científicas**: se refieren a aquellas situaciones donde la matemática se aplica a cuestiones del mundo natural y también, a cuestiones y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Por ejemplo, se podrían incluir áreas como astronomía, arquitectura, agrimensura, aeronáutica, navegación, cartografía, ingeniería y también, el propio mundo de la matemática. En esta categoría incluimos las de tipo científicas matemáticas (Figura 5.15) y las científicas extramatemáticas, como ejemplificamos en la Figura 5.16.

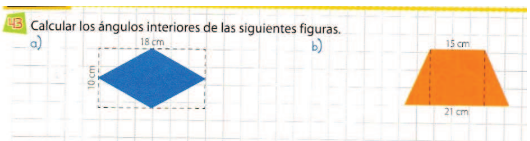


Figura 5.15: Científicas-matemáticas

Figura 5.16: Científicas-extramatemáticas

A continuación, en la Figura 5.17, presentamos los porcentajes de cada tipo de situación que encontramos en los ítems propuestos de los textos analizados.

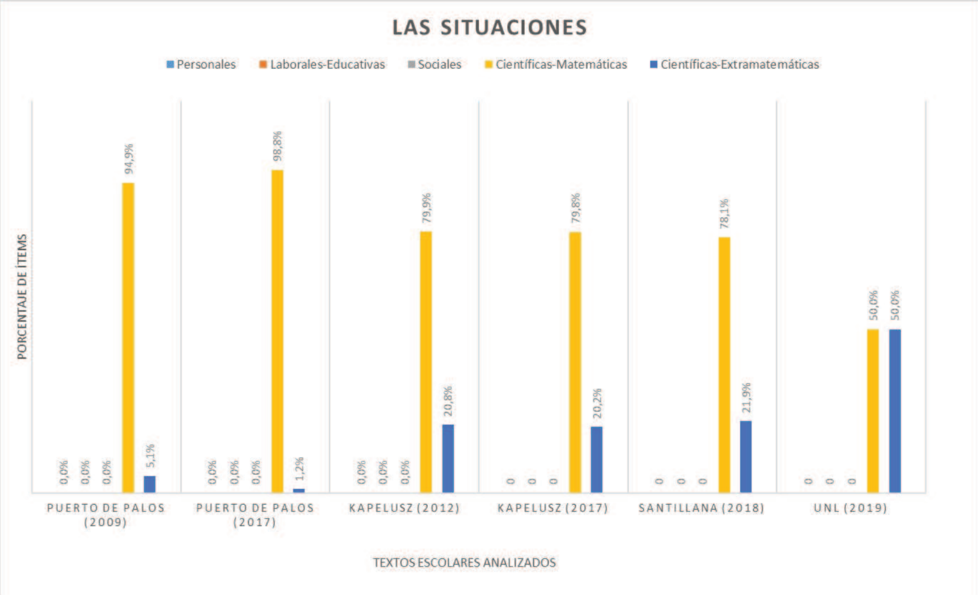


Figura 5.17: Las situaciones

A partir de esta revisión, encontramos que los libros de textos analizados priorizan un solo tipo de situación, la científica, ya sea matemática o extra-matemática, como observamos en la 5.17. Cabe mencionar que los textos de Kapelusz (2012), Kapeluz (2017) y Santillana (2018) son los que proponen más tareas del tipo científicas extramatemáticas, alrededor del 20 % de los ítems son de ese tipo. Además, el material utilizado en los cursos de ingreso a la universidad proponen la misma cantidad de tareas para los contextos matemáticos y extramatemáticos.

5.5.5. Los recursos

Los recursos son medios que contribuyen a mejorar el aprendizaje, en este caso identificamos si el texto menciona las herramientas o recursos que los estudiantes utilizarían en la resolución de la tarea.

- **Dinámicos**: si el enunciado refiere algún software de geometría dinámica, alguna aplicación o página web para abordar la resolución de la tarea.
- **Geométricos**: si menciona instrumentos de medición de ángulos o de distancias que podría utilizar para la resolución de la tarea.
- **Estáticos**: si menciona que utilice calculadora o calculadora científica para resolver la tarea.

A partir de la revisión de los libros de textos empleados por los docentes de nivel secundario, encontramos que todos utilizan el recurso estático de la calculadora científica. No hay propuestas de utilización de instrumentos de medición y ni de software de geometría dinámica.

Como podemos observar en la Figura 5.18, en el recorte del libro de Puerto de Palos (2009), los autores, en este caso, presentan una explicación respecto del uso de la calculadora científica.

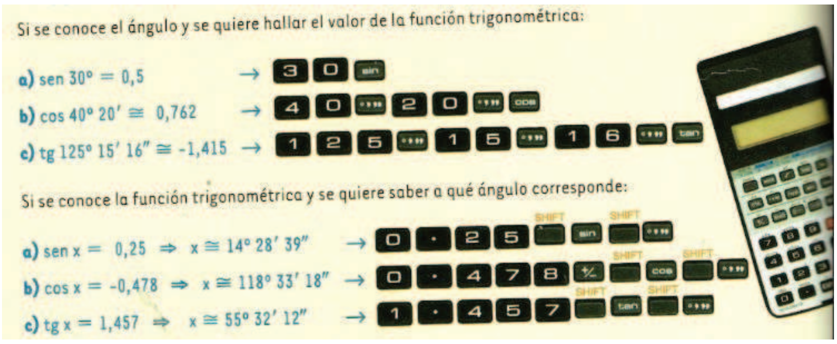
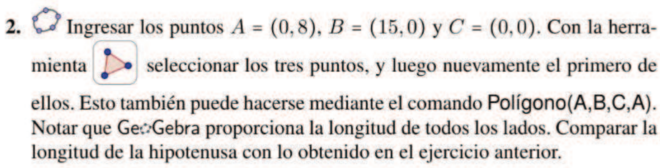


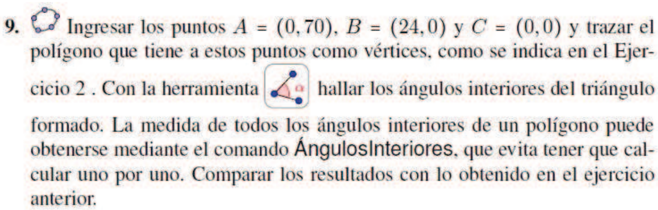
Figura 5.18: Uso de la calculadora Puerto de Palos (2009)

Por otro lado, el material utilizado en los cursos de ingreso a la universidad propone dos tareas que para su resolución los estudiantes deben utilizar el software de geometría dinámica GeoGebra. En la Figuras 5.19 y 5.20 podemos observar las mismas:



2. Ingresar los puntos $A = (0, 8)$, $B = (15, 0)$ y $C = (0, 0)$. Con la herramienta seleccionar los tres puntos, y luego nuevamente el primero de ellos. Esto también puede hacerse mediante el comando Polígono(A,B,C,A). Notar que GeoGebra proporciona la longitud de todos los lados. Comparar la longitud de la hipotenusa con lo obtenido en el ejercicio anterior.

Figura 5.19: Tareas que utilizan Geogebra del Manual del Ingreso



9. Ingresar los puntos $A = (0, 70)$, $B = (24, 0)$ y $C = (0, 0)$ y trazar el polígono que tiene a estos puntos como vértices, como se indica en el Ejercicio 2 . Con la herramienta hallar los ángulos interiores del triángulo formado. La medida de todos los ángulos interiores de un polígono puede obtenerse mediante el comando ÁngulosInteriores, que evita tener que calcular uno por uno. Comparar los resultados con lo obtenido en el ejercicio anterior.

Figura 5.20: Tareas que utilizan Geogebra del Manual del Ingreso

Estas tareas proponen la utilización del SGD para comprobar datos numéricos obtenidos en el ejercicio anterior, pero no brindan propuestas para que los estudiantes evidencien de manera experimental los conceptos y propiedades de las variaciones entre las magnitudes intervinientes. En conclusión, se está utilizando un software de geometría dinámica para trabajar en forma estática.

5.5.6. La estructura

Otro aspecto de las tareas considerado en el análisis es la estructura, es decir, si es abierta o cerrada (Moreno y Ramírez, 2016).

- **Cerrada**: si en la tarea se concreta claramente aquello que se solicita y la información dada;
- **Abierta**: en caso de que haya incertidumbre en algunos de los dos aspectos, lo que se solicita y los datos.

Todas las tareas contenidas en los libros de texto son de estructura cerrada. No hay propuestas de tipo abierta, donde los estudiantes generan los datos o bien las preguntas a partir de una situación.

5.6. Conclusiones

A partir del análisis llevado a cabo en los libros de textos seleccionados por los docentes de Gálvez para el tratamiento del tema razones trigonométricas, entendemos que los cinco libros siguen una tendencia bastante similar en cuanto a la disposición conceptual, a las tareas propuestas para ejercitar el tema y a la inclusión al finalizar el capítulo, de tareas de aplicación.

En relación a los términos, notamos que en todos ellos mencionan con mayor frecuencia: ángulos, razón, valor del lado desconocido, altura, distancia y longitud. Los demás términos, no son utilizados en todos los materiales, tal es el caso de variación o relación. Además, respecto de los recursos, proponen como herramienta el uso de la calculadora científica pero no encontramos propuestas de tareas que para su resolución requieran el uso de instrumentos de medición y/o recursos tecnológicos como programas de geometría dinámica. A partir de ello, interpretamos que ofrecen una *visión estática* de las razones trigonométricas.

En cuanto a los contextos, priorizan el algebraico y algunos de ellos también el numérico; y prácticamente está ausente el contexto geométrico. Según Fiallo (2010), las tareas que priorizan se resuelven mediante la utilización de expresiones algebraicas para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo rectángulo promoviendo un proceso memorístico, rutinario y mecánico, lo que dificulta el establecimiento de relaciones y conexiones entre los conceptos y sus representaciones gráficas. Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021) mencionan que las tareas ofrecidas en los libros de texto con respecto a las razones trigonométricas se enmarcan en un contexto de proporcionalidad y cálculo del valor faltante, que no hace diferencia con el contexto de las tareas de proporcionalidad. Además, muestran que hay una consideración de nociones geométricas (triángulos rectángulos, ángulos, semejanza, proporcionalidad, entre otras), pero no incluyen actividades de construcción, medición o modelación de una situación real, ni estudio de las relaciones entre los elementos del triángulo rectángulo. Por lo que consideramos que priorizan un *tratamiento algebraico* de las razones trigonométricas.

Las propuestas están disociadas de las nociones y procedimientos geométricos y de la medida, tales como utilizar instrumentos de medición de distancias y ángulos, el dibujo a escala, el comprobar en el dibujo el resultado obtenido, discusiones respecto de la aproximación, las unidades de medidas, las características y las relaciones entre los objetos geométricos que surgen, entre otras. Fiallo (2010) menciona que la utilización del GeoGebra permite establecer una mayor conexión entre los contenidos algebraicos y los geométricos, facilitando la adquisición de los conceptos trigonométricos. A esta cuestión consideramos pertinente mencionar también los contenidos relativos a la medida.

Los fenómenos presentados en el desarrollo de este trabajo priorizan las tareas como el cálculo de longitudes y ángulos, pero en realidad no se lleva a cabo la acción práctica, la experiencia con la medición, sino que se enfatiza el cálculo numérico-algebraico para la obtención del valor deseado.

En síntesis, las tareas propuestas por los textos del nivel secundario analizados ofrecen:

- Una visión estática de las razones trigonométricas.
- Una prioridad del tratamiento algebraico de las mismas.
- Una disociación con el tratamiento geométrico y las cuestiones de la medida en lo trigonométrico.
- Situaciones que se encuentran alejadas de la realidad de los estudiantes, lejos de las cuestiones personales, educativas y de la comunidad.

Respecto de los materiales para la enseñanza de las razones trigonométricas correspondientes al curso de articulación disciplinar de matemática de la UNL, observamos, en la mayoría de las tareas propuestas, lo siguiente:

- Los términos corresponden a distancias y amplitudes de ángulos.
- Los contextos son reales evocados.
- El tratamiento de los problemas es algebraico, se encuentra disociado del geométrico y de las cuestiones propias de la medida.

- Los fenómenos corresponden al cálculo de distancias o amplitudes de ángulos.
- Las situaciones son extramatemáticas.

Por lo tanto, las tareas propuestas en las evaluaciones se corresponden con aquellas que la mayoría de los textos analizados presenta, sin embargo generan las dificultades que describimos en la Sección 4.5.

Finalmente, interpretamos que en el análisis realizado encontramos evidencias de que las restricciones y limitaciones que hallamos en el tratamiento escolar y del curso de articulación disciplinar del ingreso (con la correspondiente salvedad en cuanto a la limitación en el tiempo en que se destina al tema en el desarrollo del curso), impactan en las dificultades para construir el *sentido trigonométrico* en los estudiantes, es decir, para que desarrollen habilidades para modelar situaciones de la vida cotidiana o de otras áreas del conocimiento en las que está involucrada la resolución de problemas de triángulos rectángulos.

Parte II

Experimento de Diseño Realista

Capítulo 6

Preparación del experimento

> No hay que empezar siempre por la noción primera de las cosas que se estudian, sino por aquello que puede facilitar el aprendizaje.
> ARISTÓTELES

6.1. Introducción

En el presente capítulo desarrollamos, en primer lugar, los fundamentos metodológicos adoptados para el abordaje de esta segunda etapa del trabajo; para ello, seleccionamos un enfoque de tipo cualitativo de investigación, dado que éste tiene como objetivo el análisis del aprendizaje en un determinado contexto mediado por el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) dirigido por una conjetura.

La investigación se basa en la metodología de experimentos de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008) y en su ejecución se incluyen tres fases: preparación del experimento, experimentación en contextos de clase y análisis retrospectivos de los datos generados con el propósito de extraer información sobre el diseño, permitiendo su mejora. En este capítulo nos centramos en la primera fase donde se consideran cuatro aspectos propuestos por Cobb y Gravemeijer (2008): clarificar los puntos finales de instrucción, documentar los puntos iniciales de instrucción, delimitar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) y por último, situar el experimento en un contexto teórico.

6.2. Metodología

La presente investigación toma elementos del enfoque de Investigación Basada en el Diseño (IBD), un método que se caracteriza por la formulación de un experimento de enseñanza guiado por una conjetura. Esta perspectiva encuentra sus raíces en las propuestas de Freudenthal, quien abogó por una educación matemática realista y la necesidad de transformaciones educativas, según mencionan Cobb y Gravemeijer (2008).

Dentro de las IBD, más específicamente se trata de un experimento de enseñanza guiado por una conjetura (Confrey y Lachance, 2000).

Cobb y Gravemeijer (2008), proponen tres fases para este tipo de investigaciones. Ellas son: preparación del diseño, implementación y análisis retrospectivo. En este capítulo, desarrollamos la primer fase y, siguiendo la propuesta de los autores, consideramos que esta etapa involucra las siguientes pautas a seguir:

- **Clarificar los puntos finales de instrucción**: a pesar de que los objetivos instruccionales están delineados por las directrices curriculares vigentes, no los aceptamos de manera incuestionada. En lugar de eso, adoptamos un enfoque crítico, analizando y problematizando estos objetivos desde una perspectiva disciplinaria. Nuestra intención es identificar las ideas organizadoras centrales que subyacen a dichos objetivos, cuestionando y profundizando en su sentido y relevancia dentro del marco de la educación matemática realista.

- **Documentar los puntos iniciales de instrucción**: esto implica que analizamos detalladamente las experiencias y comprensiones matemáticas que los estudiantes traen consigo. Además, consideramos las restricciones instruccionales existentes, comprendiendo los límites y desafíos que podrían influir en la efectividad de nuestra propuesta educativa. Este enfoque nos permitirá adaptar la instrucción de manera precisa y abordar las necesidades específicas de los estudiantes, optimizando así el proceso de aprendizaje.

- **Delimitar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA)**: formulamos conjeturas sobre los cambios significativos que esperamos que ocurran en el aprendizaje de los estudiantes respecto al concepto matemático específico que abordamos. Además, identificamos los medios que pondremos a disposición para respaldar y organizar estos cambios. Esta materialización se llevará a cabo a través de una secuencia de enseñanza cuidadosamente diseñada. Detallamos el modo en que implementaremos las tareas y las herramientas en el aula, reconociendo las normas y la naturaleza del discurso de la clase como factores clave que condicionarán los aprendizajes. Este enfoque nos permitirá anticiparnos y adaptarnos a las necesidades de los estudiantes, optimizando así el proceso de aprendizaje.

- **Situar el experimento en un contexto teórico**: enmarcándolo en el enfoque propuesto por la Educación Matemática Realista (EMR). Este marco teórico guia nuestro diseño a partir del principio de matematización progresiva. Esta característica orienta todo el proceso, asegurando que la enseñanza no sólo sea efectiva, sino también contextualizada y con sentido para los estudiantes.

En síntesis, esta fase tiene como objetivo principal explicitar los criterios que respaldan las decisiones de diseño antes de llevar a cabo el experimento. A continuación, proporcionamos en detalle cada uno de los puntos que constituyen la etapa de preparación del experimento de enseñanza. Estos aspectos se fundamentan en los datos recopilados en la primera etapa de la tesis, que aborda el *sentido trigonométrico* de los ingresantes a la universidad.

6.2.1. Sujetos y instrumentos de recolección de datos

Los estudiantes que participan de esta experiencia se encuentran en una etapa de transición de la escuela secundaria a la universidad, dado que están cursando el 5to. año (17-18 años) de la escuela secundaria y la mayoría de los alumnos del curso están inscriptos como ingresantes a la universidad realizando en el Centro Universitario Gálvez (CUG), el curso de articulación disciplinar de matemática en la instancia adelantada del mes de octubre que brinda la Universidad Nacional del Litoral.

En esta experiencia, tendré a cargo además del rol de investigadora, el de docente que llevó a cabo la gestión de la clase y de profesora de ambos cursos (de la escuela secundaria y del ingreso).

En cuanto a los instrumentos de recolección de datos, utilizamos grabaciones de audio, videos, notas de clase y producciones de los estudiantes (escritas, imágenes, archivos de Geogebra, videos).

6.2.2. Fines instruccionales

Revisión literaria

En la revisión de antecedentes, encontramos que Torres-Corrales (2014) destaca la necesidad imperativa de transformar significativamente la actividad matemática de los estudiantes. Este cambio no solo busca evitar que memoricen las razones trigonométricas de manera mecánica, sin comprender claramente su utilidad, sino que también aspira a provocar de manera intencional la construcción de significados que les otorguen un propósito y sentido. Más aún, se enfoca en el desarrollo específico del pensamiento trigonométrico, buscando que los estudiantes no solo comprendan los conceptos, sino que también sean capaces de aplicarlos de manera efectiva y contextualizada.

Montiel-Espinosa (2005) resalta las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando se introduce la trigonometría a través del estudio del triángulo rectángulo, ya que esto desconecta a las razones trigonométricas de su contexto original, despojándolas de su esencia, sentido y significado. En otras palabras, se produce una pérdida del proceso geométrico que subyace en la construcción de los conceptos trigonométricos. Además, la autora señala que el discurso trigonométrico escolar tiende a simplificar las razones trigonométricas a un proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, convirtiéndolas en una técnica algebraica para encontrar valores faltantes. Agrega que el uso de triángulos rectángulos se limita a un carácter puramente ilustrativo, ya que no se consideran construcciones geométricas, lo que podría llevar a una percepción superficial de lo trigonométrico, centrada únicamente en la relación entre ángulos y catetos, sin explorar la verdadera naturaleza de esta relación (2013).

Montiel-Espinosa (2014) expone que como resultado de la disociación entre las nociones y procedimientos geométricos y la trigonometría, se limita la labor del estudiante a la mera selección de la "fórmula trigonométrica" adecuada. Este enfoque reduce el proceso educativo a la elección de la fórmula, la sustitución de los valores conocidos y la ejecución de los procedimientos aritmético-algebraicos pertinentes para calcular la información que resuelve el problema.

Además, Montiel y Jácome (2014), reportan que en una experiencia con profesores, el triángulo rectángulo, como modelo geométrico, no se considera una construcción geométrica real, ya que no guarda una relación proporcional con la realidad modelada. En este contexto, la construcción geométrica se percibe como innecesaria, y la actividad matemática se concentra en la operación aritmética para obtener el valor faltante. Esta aritmetización trigonométrica, junto con la falta de atención o reconocimiento de lo que es verdaderamente trigonométrico en la relación ángulo-lado del triángulo, se identifica como el fenómeno predominante.

Villa-Ochoa y Tavera (2019) destacan en su investigación las aportaciones de Tall (2009) y Carlson et al. (2002), quienes subrayan que el núcleo del análisis trigonométrico radica en las relaciones de variación. Estos investigadores señalan que la literatura documentada, cada vez más son las dificultades que enfrentan los estudiantes en la matemática universitaria, especialmente en conceptos como función, límite, derivada e integrales. Según estos autores, estas dificultades están vinculadas a habilidades de razonamiento covariacional empobrecidas.

Fiallo (2010) destaca la relevancia de incorporar la tecnología en el abordaje de los conceptos trigonométricos. Según su perspectiva, esta integración no solo despierta el interés de los estudiantes, sino que también aporta coherencia a los conceptos, fortalece la autoconfianza al validar resultados mediante la manipulación, y facilita demostraciones geométricas dinámicas para resignificar la noción de razón trigonométrica. Esta visión, resalta la importancia de aprovechar las herramientas tecnológicas como recursos pedagógicos que enriquecen y dinamizan el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

En la Sección 4.5, en el análisis de las evaluaciones del curso de articulación disciplinar en matemática del ingreso a la universidad y coincidiendo con las observaciones de los autores mencionados, encontramos inconsistencias en las producciones de los estudiantes, tales como deficiencias en el tratamiento geométrico, en las cuestiones de la medida, en el tratamiento algebraico y en la necesaria interacción entre ellos que otorga sentido a las decisiones en cada momento del proceso de resolución y a la solución propuesta.

Como síntesis de este apartado, destacamos que en contrapartida a aquellas propuestas clásicas para la enseñanza de las razones trigonométricas centradas en la resolución de problemas de triángulos rectángulos con un tratamiento algebrizado que consiste en sustituir variables en una fórmula y encontrar el valor faltante, como una técnica impuesta por el docente y carente de sentido, los estudios aquí mencionados evidencian la necesidad de repensar la enseñanza de este tema y mejorar las propuestas a través de un trabajo reflexivo de resolución de problemas que requiere de interpretar la situación, realizar un dibujo a escala, estimar, realizar un tratamiento geométrico y un tratamiento algebraico en la resolución y el análisis de la respuesta. Además, proponen utilizar nuevos recursos y modos de abordaje del tema, tales como los software de geometría dinámica.

Objetivos Instruccionales y Objetivos de Aprendizaje

El diseño curricular de la educación secundaria orientada en la provincia de Santa Fe (2014) adopta una metodología de enseñanza que refleja similitudes con la propuesta de Freudenthal en la Educación Matemática Realista (EMR). Este enfoque curricular aboga por la presentación de situaciones que ofrecen respuestas a problemas provenientes de diversos contextos, ya sea la vida cotidiana de los estudiantes o áreas interconectadas con otras disciplinas científicas. Además, destaca la importancia de la modelización como un componente esencial en la resolución de problemas, proporcionando a los alumnos una perspectiva integradora y significativa de la actividad matemática. El diseño curricular también enfatiza la necesidad de fomentar la actividad de investigación en el aula, permitiendo la producción de conocimientos por parte de los estudiantes.

En cuanto a la validación de los conocimientos, el diseño curricular provincial establece que durante los primeros años de la educación secundaria, las argumentaciones de los estudiantes pueden ser imprecisas y sus escrituras poco formales. Sin embargo, se espera que evolucionen hacia pruebas intelectuales que generalicen las relaciones propuestas en una situación dada. En este contexto, el docente desempeña un papel crucial al gestionar las clases, proporcionando las reglas para el debate matemático y facilitando la institucionalización de los saberes a través de procesos reflexivos.

Desde esta perspectiva, la enseñanza no se centra únicamente en transmitir contenidos, sino en involucrar a los estudiantes en una actividad genuina de producción matemática, enfocada en la resolución de problemas. Estos problemas deben plantear desafíos abiertos que motiven a los estudiantes y los impulsen a aprender. Al reconocer que los conocimientos matemáticos actuales no son suficientes para alcanzar el objetivo, el docente asume la responsabilidad de guiar a los estudiantes en la construcción de nuevos conceptos. En el ciclo orientado, se busca desarrollar habilidades para interpretar enunciados de problemas de manera efectiva.

En el marco del diseño curricular de matemática escolar, se destacan cuatro ejes conceptuales esenciales: números y operaciones, geometría y medidas, álgebra y funciones, y probabilidad y estadística. En este contexto, el docente asume el papel crucial de seleccionar, secuenciar y vincular los contenidos propuestos, siendo un arquitecto del proceso educativo.

En relación con el eje de geometría, que es fundamental para esta investigación, el diseño curricular sugiere que, en el ciclo orientado, se profundice en comparación con el ciclo básico. Se enfoca en potenciar la actividad de justificar las producciones mediante razonamientos deductivos, subrayando que la validación en geometría no se basa en enfoques empíricos, sino en argumentos fundamentados en conceptos y propiedades matemáticas.

Este énfasis en la justificación lógica se ve respaldado por la utilización de herramientas como el software GeoGebra. La integración de esta tecnología fortalece el trabajo de modelización, proporcionando un entorno interactivo que permite explorar y visualizar conceptos geométricos de manera dinámica. Además, se destaca la importancia de incorporar la historia de los conceptos en la enseñanza de la matemática, enriqueciendo la comprensión y apreciación de los estudiantes hacia la disciplina.

Dentro del eje de geometría y medida, se busca que la enseñanza se adquiera a través de la presentación de "situaciones problemáticas intra y extra matemáticas que permiten a los alumnos explorar, construir, analizar y modelizar" (1994, p.142). En consonancia con esta perspectiva, la producción de los contenidos a investigar se enfoca en trabajar las semejanzas de triángulos rectángulos, proporcionando un terreno fértil para la exploración y análisis de las razones trigonométricas fundamentales: seno, coseno y tangente, así como para comprender las relaciones entre ángulos complementarios.

Esta elección se justifica al ofrecer a los estudiantes la oportunidad de enfrentarse a desafíos matemáticos que trascienden el ámbito puramente teórico, permitiéndoles construir activamente su conocimiento.

En la Sección 5.1, en las entrevistas a los docentes y en el análisis de los materiales que utilizan, encontramos evidencias de la brecha que existe entre los objetivos instruccionales delineados por las directrices curriculares de la provincia de Santa Fe y la realidad de las propuestas docentes en las aulas. Compartimos la inquietud expresada por los autores mencionados en el apartado anterior. Identificamos una desconexión entre las nociones fundamentales que dieron origen a estos conceptos y la forma en que se abordan en el ámbito escolar. En las encuestas realizadas a los docentes de Gálvez (Santa Fe) encargados de la enseñanza de las razones trigonométricas, se evidencia que ninguno de ellos incorpora tareas con diseños experimentales, no utilizan herramientas tecnológicas, a excepción de la calculadora, en la planificación y gestión de sus clases. Como consecuencia de ello, los estudiantes no están familiarizados con estas cuestiones.

En el análisis de los materiales utilizados por los docentes de la escuela secundaria y el curso de ingreso a la universidad encontramos que las tareas propuestas por los textos analizados ofrecen: una visión estática de las razones trigonométricas, una prioridad del tratamiento algebraico de las mismas, una disociación con el tratamiento geométrico y el de la medida, además, las situaciones que presentan se encuentran alejadas de la realidad de los estudiantes, lejos de las cuestiones personales, educativas y de la comunidad.

En la THA que diseñamos nos proponemos generar un espacio en el que los grupos de estudiantes vivencien una experiencia en un contexto realista, en la que participen como investigadores activos del contenido, guiándolos desde sus conocimientos informales hacia el conocimiento matemático formal, a través de un proceso de matematización progresiva.

Con el fin de transformar esta realidad, hemos elaborado una trayectoria hipotética de aprendizaje que busca superar las restricciones mencionadas en el tratamiento del tema. El objetivo es propiciar que los estudiantes construyan modelos para las nuevas relaciones matemáticas propuestas, teniendo en cuenta los principios fundamentales de la Educación Matemática Realista (EMR).

Los objetivos específicos que nos proponemos alcanzar para lograr que los estudiantes construyan el *sentido trigonométrico* son los siguientes:

- Identificar elementos teóricos y metodológicos para una trayectoria hipotética de aprendizaje relacionada con la modelización de triángulos rectángulos, enmarcada en el enfoque de la EMR.

- Diseñar una trayectoria hipotética de aprendizaje que desarticule el abordaje convencional de la resolución de triángulos rectángulos y promueva la conexión con situaciones realistas.

- Formular conjeturas sobre las intervenciones en el aula, anticipando posibles reacciones y desafíos que puedan surgir durante el proceso de enseñanza.

- Gestionar un plan de clases que propicie la reflexión de los estudiantes sobre las situaciones planteadas y fomente el uso de recursos tecnológicos, tales como el software Geogebra.

- Identificar, caracterizar y analizar los niveles de matematización horizontal y vertical por los que transitan los estudiantes en el trabajo con las tareas diseñadas, evaluando la profundidad y amplitud de su comprensión matemática.

En síntesis, esperamos por medio de la THA que los estudiantes:

- matematicen un contexto realista para organizar un fenómeno en el que las razones trigonométricas se constituyen en el medio de organización;
- analicen y discutan sobre las preguntas que surgen del contexto, las herramientas de medida a utilizar, los bosquejos y dibujos a escala que surjan, las estrategias de resolución, las propuestas de solución de cada grupo de estudiantes y las justificaciones de sus procesos;
- utilicen el software Geogebra, para realizar el dibujo a escala, en la exploración de las relaciones, en la resolución geométrica, en la interacción entre lo geométrico y lo algebraico y en el análisis de la solución propuesta;
- se apropien de las razones trigonométricas como una herramienta más para organizar estos fenómenos y propongan nuevos problemas.

6.2.3. Puntos instruccionales iniciales

La trigonometría escolar inicia su abordaje en el ciclo orientado, dirigido a estudiantes de 15 a 18 años. En el ciclo básico, se exploran temas como proporciones, clasificación de triángulos, propiedades de lados y ángulos, teorema de Pitágoras, teorema de Thales y semejanza de triángulos que, además, algunos de ellos son contenidos que los estudiantes han trabajo durante su educación primaria (triángulos y ángulos). Además, la escuela secundaria en el ciclo básico aborda los contenidos de álgebra.

Por lo tanto, uno de los pilares de partida es la siguiente premisa, los estudiantes tienen una larga tradición de trabajo geométrico y algebraico desarrollado durante toda su escolaridad, y por tanto al comenzar el estudio de las razones trigonométricas traen consigo las nociones y objetos que usaban en la geometría y en el álgebra. Es decir, asumimos que los conocimientos geométricos y algebraicos con los que cuentan los estudiantes son insumos para sus primeros aprendizajes de la trigonometría, tanto en lo referido a las nociones matemáticas, como también al tipo de práctica desarrollada.

Consideramos que la inclusión de proporciones y semejanza de triángulos en el ciclo básico, seguida por la enseñanza de razones trigonométricas en el ciclo orientado, evidencia una desconexión respecto a las nociones originales que dieron origen a estos conceptos. Montiel (2005) destaca que los estudiantes, en este proceso, tienden a percibir las razones trigonométricas como un mero procedimiento algebraico, donde se dividen las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo para establecer el seno o coseno de un ángulo. Esta simplificación conlleva a la pérdida del sentido geométrico asociado a las razones trigonométricas.

Como mencionamos en el apartado anterior, la falta de incorporación de herramientas tecnológicas en la enseñanza de la geometría y la trigonometría, por parte de los docentes, contribuye a una visión estática de las relaciones entre las magnitudes involucradas. Por lo tanto, será necesario introducir tecnología en el aula, ya que es crucial para dinamizar el proceso, permitiendo una exploración más activa y significativa de los conceptos trigonométricos, rescatando así su riqueza geométrica. Además, para favorecer la interrelación entre el tratamiento geométrico, el de la medida y el algebraico tanto en la resolución como en el análisis de la solución del problema.

Consideramos que la incorporación de tareas abiertas en contextos realistas, propicia un proceso de matematización por parte de los estudiantes y contribuye a la construcción del *sentido trigonométrico*.

En este estudio nos proponemos diseñar un enfoque de trabajo abierto, donde los estudiantes identifiquen las problemáticas para su investigación, para que resulte relevante, permitiendo a los estudiantes modelar situaciones mediante diversas estrategias metodológicas. El objetivo no es simplemente presentar un diseño didáctico para aprender las razones trigonométricas, sino ofrecer tareas que proporcionen coherencia al uso de múltiples nociones matemáticas relacionadas con ellas, sin perder la esencia de las ideas que les dieron origen.

A partir del análisis de los conocimientos previos mencionados, como así también de sus restricciones instruccionales, a continuación presentamos la elaboración de la THA.

6.2.4. Delimitación de una trayectoria de aprendizaje

Cobb y Gravemeijer (2008) resaltan la importancia de desarrollar una teoría de instrucción local al tener la capacidad de definir tanto los puntos de inicio como los objetivos finales de la instrucción. Esta teoría conjetural implica formular hipótesis sobre el proceso de aprendizaje probable y los medios posibles para respaldar ese proceso. Estos medios incluyen actividades de instrucción potencialmente efectivas, herramientas informáticas, la cultura anticipada en el aula y el papel activo del maestro. La anticipación de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes pueden evolucionar con las actividades de instrucción planificadas y revisables en el aula, busca equilibrar la necesidad de planificación anticipada con la flexibilidad requerida según el conocimiento actual de los estudiantes durante la implementación del diseño experimental.

En este contexto, la formulación de una trayectoria de aprendizaje conlleva la creación de hipótesis verificables sobre los cambios sustanciales en el pensamiento de los estudiantes y los medios para respaldar y organizar esos cambios. Estos medios abarcan elementos considerados por los desarrolladores de materiales, como tareas instruccionales y recursos asociados, que pueden ser manipulativos y/o basados en tecnología. Es esencial anticipar la implementación de estas tareas y herramientas en el aula, reconociendo las normas y la naturaleza del discurso de la clase como factores determinantes de los procesos de aprendizaje. Este enfoque facilita la planificación detallada y los ajustes continuos basados en la interacción real en el aula.

La trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) sirve como un valioso instrumento de diseño e investigación, para reconstruir la pedagogía matemática desde una perspectiva constructivista.

Simon y Tzur (2004 como se citó en Gómez y Lupiañez, 2007) identifican las principales características de la THA:

> Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995).

Mientras que el objetivo del profesor para el aprendizaje de los estudiantes proporciona una dirección para las otras componentes, la selección de las tareas de aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes son interdependientes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas.

Como destaca Simon (2014), las tareas de aprendizaje se originan sobre procesos de aprendizaje anticipado, los cuales están intrínsecamente ligados a la naturaleza de las tareas planificadas y al proceso de aprendizaje hipotético. Este enfoque reconoce la importancia de diseñar tareas que alinean de manera efectiva los procesos cognitivos de los estudiantes con los objetivos específicos de aprendizaje. Además, la afirmación de Simon sobre la posibilidad de que los estudiantes sigan trayectorias de comprensión similares al participar en tareas específicas resalta la flexibilidad y la adaptabilidad necesarias para abordar las diversas formas en que los estudiantes construyen su conocimiento.

En esta dirección, el diseño de tareas de aprendizaje no solo se trata de presentar información, sino de crear experiencias educativas que estimulen y guíen el pensamiento de los estudiantes de manera estratégica. La selección cuidadosa de tareas, alineada con las conjeturas sobre el proceso de aprendizaje, se convierte en un elemento clave para promover un avance coherente hacia los objetivos de aprendizaje deseados. La idea central es proporcionar a los estudiantes vías significativas y accesibles que les permitan construir su comprensión de un concepto particular de manera activa y participativa.

En el marco de la Educación Matemática Realista (EMR), se establece como principio fundamental que la fase inicial de cualquier secuencia instructiva debe ser auténtica y con sentido desde la perspectiva de la experiencia de los estudiantes. Específicamente, el principio clave de diseño de la “reinvención guiada” sostiene que los alumnos deben contar con la oportunidad de redescubrir o reinventar aspectos de las matemáticas de manera análoga a su creación original. Este enfoque busca proporcionar a los estudiantes una conexión directa con la construcción y comprensión de los objetos matemáticos a través de experiencias prácticas y situaciones contextualmente relevantes.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) que proponemos se centra específicamente en construir el *sentido trigonométrico* de los estudiantes, a partir de la observación de situaciones problemáticas reales en un contexto familiar para los estudiantes, para luego construir modelos a escala, facilitando de esta manera una transición gradual de lo macro a lo micro, haciendo hincapié en el principio de proporcionalidad.

Siguiendo la perspectiva de Montiel (2013), en este proceso las razones trigonométricas se conciben como la abstracción inmediata de la proporción. Esta conexión intrínseca entre conceptos matemáticos es esencial para una comprensión profunda y con sentido. Las producciones grupales se fundamentarán en rutas flexibles de aprendizaje, permitiendo adaptaciones continuas a medida que los estudiantes avancen en la comprensión de la situación. Este enfoque dinámico promueve la participación activa y la construcción colaborativa del conocimiento, maximizando la efectividad del proceso educativo.

El diseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) con estas particularidades es llevado a cabo considerando los principios fundamentales de la modelización (matematización) en el marco de la Educación Matemática Realista. El objetivo central es fomentar que los estudiantes desarrollen un espacio de investigación en un contexto real, transitando a través de los diversos niveles de comprensión y formalización.

El rol que asume el profesor investigador, es una participación activa durante cada ciclo donde su función es la construcción y revisión permanente de la THA. A él le corresponde "establecer la cultura de clase apropiada, elegir e introducir las tareas de aprendizaje, organizar el trabajo en grupo, seleccionar los posibles temas de discusión y orquestarlos" (Gravemeijer, 2004a).

El rol del docente es crucial en la generación de espacios de reflexión que actúan como mediadores entre las situaciones problemáticas y los estudiantes, así como entre las producciones de los estudiantes y las herramientas formales establecidas por la disciplina. Su posición protagónica implica proporcionar un ambiente de aprendizaje propicio para la construcción activa de conocimientos matemáticos y el desarrollo de niveles más avanzados de comprensión.

El docente debe anticipar las producciones de los estudiantes y utilizarlas como base para mejorar sus habilidades matemáticas. Además, es esencial que la clase funcione como una unidad cohesionada, organizada en grupos heterogéneos. Esto permite que emerjan diversas soluciones desde distintos niveles de formalización, sin que ello justifique la clasificación de los estudiantes. En este enfoque, se valora que los estudiantes sigan sus propias trayectorias de aprendizaje, reconociendo y respetando sus ritmos individuales.

Asimismo, el profesor asume la responsabilidad de conjeturar posibles rutas de aprendizaje, planificar intervenciones adecuadas y abordar las actividades seleccionadas. Su participación activa contribuye a crear un entorno dinámico y enriquecedor donde los estudiantes pueden explorar, cuestionar y construir significado en el proceso de aprendizaje matemático.

Como menciona Molina (2006), la fase de intervención en el aula es clave, ya que aquí es donde las teorías y conjeturas se enfrentan a la realidad del proceso de aprendizaje. Durante estas interacciones, el investigador-docente debe despojarse de sus hipótesis preconcebidas y enfocarse en observar cómo los estudiantes interactúan con los conceptos, brindándoles sentido a través de sus acciones. Además, es esencial que cuente con conocimientos previos sólidos sobre los temas abordados y esté atento a las contribuciones de los alumnos, la evolución de la interacción y todos los acontecimientos en el aula. Esta atención constante permite ajustar y refinar las hipótesis, adaptándolas a la realidad observada y promoviendo un ciclo continuo de mejora y desarrollo del modelo de actividad.

El fenómeno que seleccionamos para abordar en la THA es la medición indirecta de distancias inaccesibles. La experiencia comienza con la visita al Centro Universitario Gálvez (CUG), que es el lugar donde asisten al curso de articulación disciplinar de matemática para el ingreso a la UNL. Inicialmente, la propuesta de trabajo para los grupos de estudiantes es detectar en el predio del CUG problemáticas de los espacios sin sombra. Una aclaración importante, que originó la propuesta y para comprender mejor el escenario en el que nos encontramos, es que en la ciudad de Gálvez en la provincia de Santa Fe, las personas utilizan habitualmente como medio de movilidad la bicicleta, además, que los bicicleteros en el predio del CUG se encuentran ubicados a pleno sol en una cancha de fútbol.

A continuación, presentamos en las Tablas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4, las tareas que realizarán los grupos de estudiantes con la guía del docente, los objetivos específicos y las conjeturas que consideramos viables para la realización de la actividad.

Tarea	**Objetivos**	**Conjetura de la ruta de aprendizaje**
Tarea 1: Fotografiar en el CUG problemáticas con los espacios sin sombra.	Propiciar que el contexto se convierta en un marco propicio para la investigación.	Los estudiantes toman fotografías del CUG, exploran el entorno en busca de inconvenientes relacionados con los espacios sin sombra.

Tabla 6.1: Tareas, objetivos y conjeturas de la THA

Tarea	**Objetivos**	**Conjetura de la ruta de aprendizaje**
Tarea 2: Formular y registrar interrogantes acerca de las cuestiones identificadas en las fotografías.	Problematizar, formular preguntas relacionadas con las situaciones observadas.	En grupos, los estudiantes generan preguntas acerca de las situaciones irregulares que identifican en las imágenes fotográficas. Durante esta instancia, es crucial la interacción entre los estudiantes del grupo.
Tarea 3: Discutir en una puesta en común de los grupos y seleccionar las preguntas con mayor frecuencia.	Compartir opiniones fundamentadas sobre las situaciones observadas.	Los estudiantes presentan una serie de preguntas en relación con la problemática del contexto. El docente recopila y sintetiza las preguntas generadas por los estudiantes, elige la más frecuente y plantea la consigna: "Uno de los bicicleteros se encuentra en la cancha de fútbol del CUG lejos del resguardo de las condiciones climáticas adversas. ¿Cómo podríamos reubicarlos para proteger las bicicletas del sol?"
Tarea 4: Explorar posibles herramientas metodológicas para la resolución.	Elaborar un plan de acción para abordar la medición indirecta de distancias inaccesibles.	Los estudiantes investigan herramientas adecuadas para relevar los datos y llevar a cabo los cálculos necesarios en la resolución de la situación problemática. Entre las posibles herramientas se incluyen instrumentos de medición física como cintas métricas, teodolitos, transportadores, reglas; así como aplicaciones móviles como telémetro, medición, CanToPlan, RULER, angulus. Además, se exploran softwares interactivos como GeoGebra, Cabri, Geometers Sketchpad, Cinderella, etc.
Tarea 5: Diseñar bosquejos de análisis.	Elaborar un diseño plano de la situción.	Los estudiantes confeccionan un bosquejo detallado de los aspectos más relevantes de la problemática.
Tarea 6: Seleccionar herramientas apropiadas para el relevamiento de datos en el terreno.	Priorizar y organizar posibles instrumentos de medición para lograr una solución precisa.	Los estudiantes examinan las opciones planteadas para el cálculo de distancias y efectúan estimaciones.

Tabla 6.2: Tareas, objetivos y conjeturas de la THA

Tarea	**Objetivos**	**Conjetura de la ruta de aprendizaje**
Tarea 7: Relevar los datos necesarios para la resolución.	Conjeturar estrategias viables para el cálculo analítico.	Los estudiantes examinan las opciones planteadas para el cálculo de distancias y efectúan estimaciones en posibles sectores de reubicación en el CUG.
Tarea 8: Construir modelos a escala.	Evaluar la concordancia entre sus bocetos y la realidad.	En el entorno del CUG, los estudiantes emplean los elementos seleccionados para confeccionar un modelo realista que incorpora las características que han identificado como relevantes para alcanzar una solución viable al problema. En esta etapa, los alumnos efectúan una transición de lo macro a lo micro, aspecto distintivo en la construcción del sentido trigonométrico.
Tarea 9: Construir un modelo con herramientas digitales.	Reconstruir el contexto con herramientas digitales que consideren convenientes.	Los estudiantes retoman los conceptos de semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras, logrando así una resignificación y comprensión más profunda de los mismos.
Tarea 10: Presentación y discusión del modelo y de las nociones y conceptos matemáticos utilizados.	Presentar el modelo y fundamentar los conceptos matemáticos trabajados.	Los estudiantes trasladan los datos obtenidos en las tareas anteriores a la/s herramienta/s digital/es seleccionada/s para construir un modelo que les posibilite observar y contrastar los cálculos obtenidos.
Tarea 11: Producir un video que refleje una síntesis de todo el trabajo realizado.	Realizar una revisión retrospectiva de todo el trabajo en formato audiovisual.	Los estudiantes consolidan todo el trabajo generado en un video, proporcionando fundamentos sobre los conocimientos y procesos empleados.
Tarea 12: Presentar el video y validar las conclusiones con los demás grupos.	Proyectar los videos al grupo clase y analizar todas las variantes propuestas.	Los grupos de trabajo presentan las conclusiones obtenidas a través de un video que documenta toda la secuencia de tareas realizadas en sus exploraciones. Este proceso culmina en una generalización y formalización de las razones trigonométricas.

Tabla 6.3: Tareas, objetivos y conjeturas de la THA

Tarea	Objetivos	Conjetura de la ruta de aprendizaje
Tarea 13: Presentar la resolución analítica en una puesta en común en el grupo clase.	Desarrollar y respaldar la metodología analítica empleada para la resolución de la situación.	Cada grupo de estudiantes presenta su trabajo de investigación y explica la metodología analítica utilizada para obtener las soluciones de la situación contextual.
Tarea 14: Proponer una nueva situación problemática.	Diseñar un problema en contexto que requiera la utilización de las razones trigonométricas para su resolución.	Los estudiantes idean una situación problemática basada en su entorno, donde la aplicación de las razones trigonométricas sea esencial para resolverla.

Tabla 6.4: Tareas, objetivos y conjeturas de la THA

La Figura 6.1 muestra los momentos en el desarrollo para completar la THA:

Figura 6.1: Trayectoria hipotética de aprendizaje (THA)

6.2.5. Contexto teórico del experimento

El siguiente análisis de la THA elaborada se fundamenta desde los principios de la EMR.

Principio de Actividad

En esta THA las razones trigonométricas, no se aborda como sistema preconstruido. Sino que surge como actividad para organizar la situación inicial real que se estudia (la medición indirecta de distancias inaccesibles). Esto es, mediante esta THA las razones trigonométricas se aprenden matematizando el contexto realista.

Principio de Realidad

El contexto en el que se enmarca la situación inicial es de carácter realista dado que puede ser razonable, realizable e imaginable para los estudiantes. Pero además, su uso no se presenta como dominio de aplicación, sino funciona como punto de partida y base de organización para la actividad de medición indirecta de distancias. Asimismo, el contexto admite estrategias variadas y posibilita el uso de estrategias y procedimientos informales por parte de los estudiantes, pero a la vez les ofrece oportunidades para desarrollar un lenguaje formal que tenga sentido para ellos y que a la vez propicien el desarrollo de la comprensión de los objetos matemáticos específicos.

En el marco de la EMR, los contextos se perciben como un elemento inherente al problema, en tanto permiten a los alumnos imaginar la situación planteada, representarla esquemáticamente mediante un modelo y a través de esta modelización, llegar a una solución del problema (Bressan et al. 2006). Las situaciones presentadas en un contexto real o a través de imágenes, fotografías, dibujos, gráficos, entre otros, adquieren gran relevancia al ayudar a los estudiantes en la comprensión de qué implica un contexto, el arte de preguntar con pertinencia y el proceso de razonamiento respaldado visualmente (Bressan et al., 2006).

> En la línea de la Educación Matemática Realista, el trabajo de los estudiantes en torno a imágenes (formular y abordar preguntas de índole matemática, medir, calcular y estimar, comparar y contrastar, reproducir y recrear), desarrolla en ellos el hábito de matematizar la realidad: preguntar y preguntarse con pertinencia, razonar con apoyatura visual y reflexionar críticamente acerca de los usos (y abusos) de la matemática como herramienta organizadora y controladora de nuestra realidad social (Pérez y Bressan, s.f, p.1).

La utilización de preguntas relacionadas con situaciones observadas en el contexto cercano de los estudiantes contrasta con la práctica común de presentar problemas de manera verbal o acompañados por imágenes. Esto puede generar una variedad de preguntas de diversos índoles, aunque no todas necesariamente vinculadas al ámbito matemático o al contenido que se pretende abordar. En este contexto, el docente desempeña un papel crucial al realizar una selección adecuada que esté en sintonía con el contenido que se busca matematizar.

Principio de Reinvención Guiada

Mediante la propuesta, los alumnos tienen oportunidades para experimentar la "reinvención" de la resolución de triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas, elaborar las ideas y herramientas geométricas y algebraicas para su organización, implicándose en procesos similares a los que realizan los matemáticos. Los alumnos se involucran de forma activa y expresan, explican, justifican, comparan, acuerdan, discuten, cuestionan y reflexionan sobre los triángulos rectángulos y sus procedimientos de resolución. Esta reinvención se sostiene en interacción con los pares y bajo la guía del docente.

El docente tiene un papel importante en este escenario. En una primera instancia es quien selecciona el contexto de forma tal que ofrezcan la posibilidad de generar y usar diversas estrategias de soluciones informales. Luego, guía y organiza los momentos de interacción de modo de hacer avanzar a los alumnos en torno a sus conocimientos, permitiendo la reinvención de las razones trigonométricas. Para ello, toma el papel de mediador entre los estudiantes y la tarea, entre los estudiantes entre sí, entre las producciones informales que producen los estudiantes y los objetos y herramientas formales ya institucionalizadas de la matemática.

Principio de Interacción

En la THA el aula funciona como espacio de acción y reflexión tanto individual como grupal y colectiva. La interacción posibilita el estudio y la discusión de las producciones, tanto la propia como la de los demás, desde el punto de vista de su sentido, eficacia, elegancia, economía, generalización, etc. Además, en palabras de Sadovsky (2005), al elaborar conocimiento en colaboración con otros se posibilita un intercambio que permite profundizar las ideas que están en juego en un cierto momento. De esta forma, se permite al alumno reflexionar sobre las actividades matematizadoras llevadas a cabo y elevar su nivel de matematización, al considerar las ventajas de los distintos modelos y las formas de simbolización.

Por otro lado, el trabajo con el software Geogebra, propicia el proceso de expresar, de modo simbólico y geométrico la situación, además de encontrar una solución aproximada. Mediante la interacción con esta herramienta se invita a los alumnos a la generalización, se propicia el proceso de matematización progresiva y se incentiva la necesaria interacción entre lo algebraico, las cuestiones de la medida y lo geométrico del problema.

Principio de Interrelación

Por un lado, mediante la THA se logra una fuerte interrelación entre el eje curricular de geometría y medida con el eje curricular de álgebra: se ofrece la posibilidad de movilizar estrategias informales provenientes de ambos ejes, pero a la vez se toma distancia con respecto a los problemas específicos de origen geométrico y de origen algebraico. Esto brinda una mayor coherencia a la enseñanza y posibilita diferentes modos de matematizar las situaciones presentadas.

En el trabajo mediado por el software GeoGebra se potencian estas relaciones entre lo geométrico, la medida y lo algebraico para abordar la resolución del problema y para el análisis de las soluciones.

Principio de Niveles

La THA planteada establece una secuenciación de tareas donde la finalidad es que los estudiantes transiten por los distintos niveles de comprensión caracterizados por diferentes tipos de actividades mentales ligadas al uso de estrategias, modelos y diversos tipos de lenguajes.

Desde esta perspectiva, en el marco del proceso de matematización horizontal, se espera que descubran relaciones y regularidades con el fin de abordar la situación problemática real identificada.

En concordancia con Santamaria (2006), compartimos la perspectiva de que el proceso de matematización vertical que buscamos alcanzar con esta THA, implica una reorganización interna del mismo sistema matemático. En este proceso, los estudiantes exploran regularidades, mejoran, ajustan, combinan e integran modelos, formulando así un modelo matemático logrando una generalización para alcanzar la formalización. Por esta razón se dice que la matemática vertical es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción.

A partir de la caracterización de los procesos de matematización, procuramos con la THA que los estudiantes transiten los diferentes niveles de comprensión. El primer nivel, asociado con las actividades de la vida cotidiana (nivel situacional), consideramos que los estudiantes, apoyándose en sus conocimientos informales, lograrán identificar y describir la matemática que observan, formulando preguntas relativas a los espacios sin sombra.

En el segundo nivel (referencial), interpretamos que alcanzará cuando surjan representaciones o modelos gráficos, así como descripciones y procedimientos personales que esquematizan el problema. Establecerán sus modelos particulares (modelos de) de la situación basados en la perspectiva de las imágenes obtenidas.

En el tercer nivel (general), explorarán, reflexionarán y generalizarán lo observado el nivel anterior, a partir de utilizar el software Geogebra para realizar el dibujo a escala y explorar las relaciones entre las variables (modelo para). Los estudiantes pueden inferir qué herramientas son utilizables a partir de las ya trabajadas durante su trayectoria escolar y abandonan la dependencia a las imágenes obtenidas del contexto.

Finalmente, en el cuarto nivel (formal), trabajarán con procedimientos y notaciones propios de la rama de la matemática que se desea abordar, desvinculándolas con las nociones que le adjudicaron su significado inicial. En este nivel, los estudiantes establecerán conexiones entre las definiciones, representaciones y propiedades presentadas en la situación problemática, demostrando además su habilidad para aplicarlas en situaciones similares, al proponer un problema nuevo y su resolución.

McClain y Cobb (1998, como se citó en Cárcamo, 2017) manifiestan que a pesar de que los cuatro tipos de actividades suponen claramente una progresión evolutiva, ello no involucra una jerarquía estrictamente ordenada. En la práctica, las discusiones sobre la actividad general y el razonamiento matemático con símbolos convencionales a menudo se relacionan con la actividad referencial e incluso con la situacional.

En la Figura 6.2, presentamos de manera simplificada el proceso de matematización progresiva asociado con la THA.

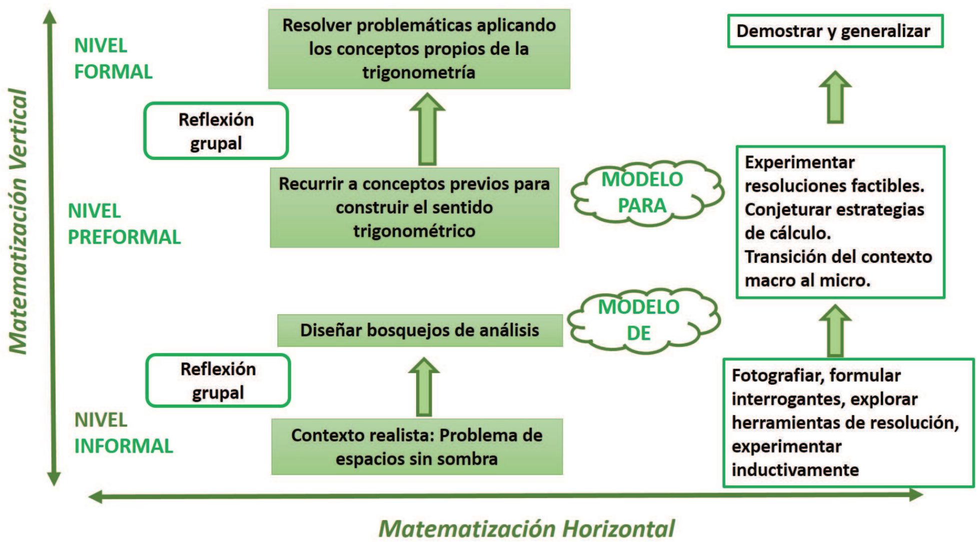


Figura 6.2: Proceso de Matematización Progresiva de la THA

El análisis predictivo realizado en la preparación de la THA es relevante para fundamentar el contexto de las tareas y, posibilita comprender el proceso de modelización matemática reconociendo que, las componentes horizontal y vertical, se entrelazan continuamente. La tabla que presentamos a continuación es una síntesis del proceso de matematización progresiva.

Síntesis de la THA

Matematización Horizontal	Nivel situacional	• Visualizan el problema desde diferentes puntos de vista. • Buscan irregularidades que ocasionen problemas en los espacios sin sombras. • Aparecen los primeros bosquejos no matemáticos, ligados al contexto.	MATEMATIZACIÓN PROGRESIVA
Matematización Vertical	Nivel Referencial	• Conjeturan planes de acción para resolver la problemática. • Exploran herramientas de medición convencionales y no convencionales según sus planes de acción. • Mediante el lenguaje natural, se expresan las relaciones entre las variables. • Emergen diferentes modelos asociados a valoraciones particulares.	
	Nivel General	• Trabajo con notaciones matemáticas y con el software GeoGebra para la obtención de modelos generales. • Desprendimiento del contexto. • Proponen relaciones que dan cuenta de la relación entre las variables involucradas. • Construcción de un modelo que valide la situación planteada.	
	Nivel Formal	• Reconocen los conceptos centrales implicados en la situación problemática hallada. • Validan el modelo matemático encontrado. • Reconocen la aplicación del modelo a diferentes escenarios cotidianos.	

Figura 6.3: Adaptado de Henao y Vanegas (2012, p.144)

Capítulo 7

Implementación

Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza de la naturaleza. Si quieres apreciarla, es necesario aprender el lenguaje en el que habla.
RICHARD FEYNMAN

7.1. Introducción

En el presente capítulo, desarrollamos la puesta en escena de la trayectoria hipotética de aprendizaje detallada en el capítulo anterior. El propósito es validar y perfeccionar la teoría de instrucción local conjeturada, formulada en la fase preliminar del experimento y desarrollar una comprensión de cómo funciona (Gravemeijer y Cobb, 2013).

Además, presentamos el marco conceptual que empleamos para interpretar el discurso, la comunicación en el aula, enmarcados en la teoría de instrucción específica que utilizamos como soporte conceptual para interpretar la actividad de los estudiantes en términos del aprendizaje de la matemática.

7.2. Perspectiva emergente

Un elemento clave en la fase experimental consiste en analizar tanto el razonamiento y el aprendizaje de los estudiantes como de los medios por los cuales se apoya y organiza ese aprendizaje. Sostenemos la importancia de ser claros en cuanto a la metodología utilizada para interpretar lo que sucede en el aula.

El marco que empleamos para interpretar el discurso y la comunicación en el aula es la perspectiva emergente propuesta por Yackel y Cobb (1996). La intención de esta propuesta es sugerir una forma de interpretar lo que sucede en el aula para dar cuenta cómo los estudiantes desarrollan creencias y valores matemáticos específicos y, por consiguiente, cómo se vuelven intelectualmente autónomos hasta llegar a desarrollar un conocimiento matemático. El análisis de la heurística de reinvención guiada que proponemos para esta investigación se fundamenta con los principios teóricos y metodológicos de la educación matemática realista, de manera que los niveles de matematización guían la producción de un modelo emergente producido y desarrollado por los estudiantes participantes.

Desde esta perspectiva, la implementación del conjunto de tareas pretende esencialmente dar cuenta de la necesidad de la utilización de las razones trigonométricas en contextos reales para dar sentido a las variables y relaciones involucradas. El estudio predictivo de las posibles conjeturas de modelos que podrían surgir de las tareas, sirven para identificar la actividad matematizadora de algunos estudiantes y sus procesos de reflexión. Las producciones que emergieron durante el desarrollo de las tareas, dejan entrever el potencial del contexto seleccionado para generar procesos de matematización progresiva.

Para el análisis de esta fase, llevamos a cabo el registro y organización de los datos a partir de la caracterización de cada una de las consideraciones sociales que proponen Yackel y Cobb (1996).

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Normas sociales del salón de clases	Creencias sobre nuestro propio rol, los roles de los demás y la naturaleza general de la actividad matemática
Normas sociomatemáticas	Creencias y valores específicamente matemáticos
Prácticas matemáticas en el aula	Concepciones y actividad matemática

Tabla 7.1: Perspectiva emergente (Gravemeijer y Cobb, 2013, p.87)

El marco puede considerarse como una solución al desafío de comprender el aprendizaje matemático en el contexto social del aula. En cuanto a los detalles, los encabezados de las columnas “Perspectiva social” y “Perspectiva psicológica” implican un enfoque en la comunidad del aula y en el razonamiento de los estudiantes a nivel individual, respectivamente (Gravemeijer y Cobb, 2013). Los autores caracterizan las perspectivas de la siguiente manera:

- Las normas sociales se refieren a las conductas y explicaciones esperadas que se materializan a través de un proceso de negociación mutua entre el profesor y los estudiantes. Estas normas pueden variar significativamente entre aulas que siguen enfoques tradicionales y reformados de la enseñanza de las matemáticas. En entornos de matemáticas tradicionales, el profesor desempeña un papel predominante en la explicación y evaluación, mientras que las normas sociales dictan que los alumnos deben esforzarse por comprender la intención del profesor y actuar en consecuencia.

- Las normas sociomatemáticas abordan las maneras de explicar y comportarse durante los debates en toda la clase. Las creencias personales de los estudiantes acerca de lo que constituye una contribución aceptable, diferente, sofisticada o eficiente engloban su correlato psicológico. Estas normas sociomatemáticas se negocian y redefinen constantemente a medida que el docente y los estudiantes participan en las discusiones. Además, permiten que los estudiantes emitan juicios independientes que contribuyan a la agenda de instrucción.

- "Una práctica matemática puede describirse como las formas normativas de actuar, comunicarse y simbolizar matemáticamente en un momento dado" (Gravemeijer y Cobb, 2013, p.89). Son ideas o conceptos matemáticos particulares que evolucionan en el transcurso de un experimento.

7.3. Microciclos de diseño y análisis

Al mencionar la idea de microciclos de diseño, nos referimos a anticipar cuáles serán las actividades mentales de los estudiantes cuando participen de las tareas, y luego se tratará de averiguar hasta qué punto los procesos mentales de los alumnos coinciden con la THA prevista, para finalmente reflexionar, revisar y refinar las tareas propuestas. El ciclo de enseñanza que propone Simon (1995) puede describirse con las siguientes acciones: conjeturar, representar y revisar trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Además, los microciclos de diseño requieren que el equipo de investigación participe en un análisis continuo de la actividad de los estudiantes y de los procesos sociales del aula para informar nuevos experimentos anticipatorios, el diseño o la revisión de las actividades de instrucción (Gravemeijer y Cobb, 2013).

El diseño de la THA y su posterior ejecución, proporcionan las bases para comprender el proceso de construcción del *sentido trigonométrico* desarrollado en la Sección 3.3.5. A lo largo de la misma identificamos los diferentes momentos de matematización progresiva propuestos por Freudenthal, los cuales nos ofrecen información sobre del proceso de construcción de sentidos dando lugar a la reinvención de la matemática implícita en el contexto planteado.

La secuencia de tareas propuestas, tienen como propósito introducir las razones trigonométricas desde un contexto de construcciones geométricas que devuelva el sentido a lo trigonométrico según su fenomenología lo indica. Además, uno de los objetivos de la THA considera que los estudiantes pasen de lo macro no manipulable a lo micro del diseño del boceto; modelicen el contexto utilizando elementos de medida, geométricos y tecnológicos; y la realización de modelos a escala, manteniendo la proporcionalidad.

Al finalizar cada clase, elaboramos un microciclo de análisis sobre el proceso real que transitaron los alumnos. A partir de allí, tomamos las decisiones acerca de la pertinencia de las actividades de instrucción y de las posibles modificaciones que consideramos necesarias para ajustar el diseño de la THA. Freudenthal (1991, citado en Gravemeijer y Cobb, 2006) sostiene que "el experimento de diseño consiste de procesos cíclicos de experimentos mentales y experimentos de instrucción" (p.25).

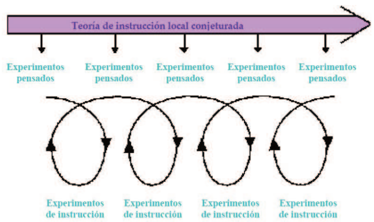


Figura 7.1: Adoptado de Santamaria (2006)

7.4. Recogida de datos

Durante la implementación de este diseño, la recopilación de datos es llevada a cabo por la docente investigadora y colaboradores externos a esta investigación. Se tomaron notas de lo acontecido, se recopilaron hojas de trabajo de los estudiantes, se tomaron fotografías de las sesiones y se realizaron grabaciones en video. Esta amplia colección de datos nos proporciona la oportunidad de investigar el razonamiento matemático desarrollado por los estudiantes (matematización progresiva) y además, nos ha permitido capturar en detalle las interacciones que los estudiantes han tenido para abordar la problemática propuesta."Los datos deben hacer posible que los investigadores aborden los problemas que se identificaron como la intención teórica al comienzo del experimento de diseño" (Cobb y Gravemeijer, 2013, p. 86).

Las anotaciones realizadas por la docente investigadora, son fundamentales para las decisiones tomadas con la directora de este trabajo. Por medio de encuentros virtuales se relizaron los análisis y se tomaron determinaciones acerca de los cambios y/o mejoras en la THA.

A continuación, detallamos la ejecución del experimento de diseño instruccional. En este estudio trabajamos, como en toda investigación basada en el diseño, con el mismo grupo de estudiantes a lo largo de seis sesiones de recolección de datos, distribuidas a lo largo del segundo cuatrimestre del año escolar.

La investigación se llevó a cabo con estudiantes de quinto año de educación secundaria obligatoria, pertenecientes al Colegio Nuestra Señora del Calvario situado en la ciudad de Gálvez, Santa Fe, Argentina. La mayoría de ellos se encontraba inscripto a la universidad y realizando el curso de articulación disciplinar de matemática de la UNL, o bien asistiendo a academias para prepararse para el ingreso a la Universidad Nacional de Rosario (UNR), es por ello que consideramos a los sujetos de estudio en doble dependencia, se encuentran claramente en la transición de la escuela secundaria a la universidad.

En el contexto de la implementación, los estudiantes se organizaron en grupos heterogéneos de trabajo, conformando siete grupos en total con un rango de cinco a ocho integrantes cada uno. Es relevante señalar que, debido a cuestiones sanitarias (COVID-19), este grupo de estudiantes en el año 2020 no concurrió al Colegio y además, sólo tuvieron clases virtuales reducidas a partir de agosto sin seguimientos por parte de los docentes que den cuenta de los saberes adquiridos en el transcurso del ciclo lectivo; solamente presentaban trabajos que los profesores les facilitaban por classroom. En 2021, en la Institución cumplen un horario semi-normal (los módulos por materias se encuentran más limitados) y también concurren todos los días, ya que hasta septiembre del año 2020, estaban divididos por burbujas y sólo asistían semana por medio.

7.5. Día 1

En el primer día de la ejecución del diseño, llevamos a cabo las primeras tres tareas propuestas en la THA (Tarea 1, 2 y 3). Para dar inicio al trabajo, nos dirigimos con los estudiantes, junto con preceptores del colegio y personas ajenas a la Institución como observadores, al Centro Universitario Gálvez (CUG) ubicado a 8 cuadras aproximadamente del Colegio Nuestra Señora del Calvario.

La visita se llevó a cabo en el horario de $14:15$ horas a $15:25$ horas. Una vez reunidos en las inmediaciones del lugar, propusimos a los alumnos que, en grupos, releven problemáticas en los espacios sin sombra y fotografíen esos lugares que podrían generar problemas de diversa índole.

A partir de la tarea sugerida y considerando que ese día la temperatura alcanzaba los $37°C$, los estudiantes tomaron fotografías de diversos sectores, como por ejemplo, el estacionamiento de autos, paredes con aires acondicionados, bicicleteros, cancha de fútbol, sector frontal de entrada, espacio donde se encuentra el cajero automático para extracción de dinero, así como la sombra que producen los árboles y la estructura edilicia del CUG.

Figura 7.2: Estudiantes en el CUG

En base a las fotografías tomadas, solicitamos que cada grupo elabore una serie de preguntas o problemáticas acerca de irregularidades que detectaron. Para ello, se les entregó un afiche donde transcribieron sus reflexiones acerca de la propuesta, como se muestra en la 7.3.

Figura 7.3: Estudiantes en el colegio

A medida que avanzaba la deliberación, la docente investigadora se acercó a los grupos de trabajo para orientarlos en caso de que surgieran dudas. Muchos expresaron la dificultad de plasmar la problemática en forma de preguntas, por lo que se aconsejó la redacción de un breve párrafo del problema detectado.

Las problemáticas propuestas por los estudiantes se muestran en la Figura 7.4.

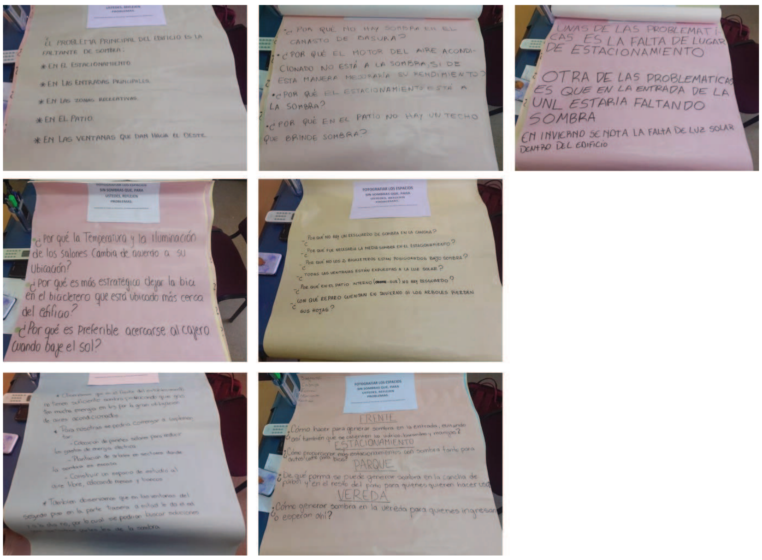


Figura 7.4: Problemáticas propuestas por los grupos

Transcribimos a continuación cada una de las problemáticas detectadas por los distintos grupos de estudiantes.

- ¿Por qué la temperatura y la iluminación de los salones cambia de acuerdo a su ubicación?
- ¿Por qué es más estratégico dejar la bici en el bicicletero que está ubicado más cerca del edificio?
- ¿Por qué es preferible acercarse al cajero cuando baje el sol?
- Una de las problemáticas es la falta de lugar de estacionamiento.
- Otra es que en la entrada de la UNL estaría faltando sombra.
- En invierno se nota la falta de luz solar dentro del edificio.
- ¿Cómo hacer para generar sombra en la entrada, evitando así que se calienten los vidrios, barandas y manijas?
- ¿Cómo proporcionar más estacionamientos con sombra tanto para autos como para bicis?
- ¿De qué forma se puede generar sombra en la cancha de fútbol y en el resto del patio para quienes quieran hacer uso?
- ¿Cómo generar sombra en la vereda para quienes ingresan o esperan ahí?
- El problema principal del edificio es la falta de sombra en el estacionamiento, las entradas principales, en las zonas recreativas, en el patio y en las ventanas que dan hacia el oeste.
- ¿Por qué no hay sombra en el canasto de la basura?
- ¿Por qué el motor del aire acondicionado no está a la sombra, si de esta manera mejoraría su rendimiento?
- ¿Por qué en el patio no hay un techo que brinde sombra? item Observamos que en el frente del establecimiento no tienen suficiente sombra provocando que gasten mucha energía en luz por la gran utilización de aires acondicionados. Para nosotras, se podría comenzar a implementar: colocación de paneles solares para reducir los gastos de energía eléctrica, plantación de árboles en sectores donde la sombra es escasa, construir un espacio de estudio al aire libre colocando mesas y bancos. También observamos que en las ventanas del segundo piso en la parte trasera a la mitad le da el sol y a la otra no, por lo cual se podrían buscar soluciones para que ambas partes les de la sombra.
- ¿Por qué no hay un resguardo de sombra en la cancha?
- ¿Por qué fue necesaria la media sombra en el estacionamiento?

- ¿Por qué no los dos bicicleteros están posicionados bajo sombra?
- ¿Todas las ventanas están expuestas a la luz solar?
- ¿Por qué en el patio interno no hay resguardo?
- ¿Con qué reparo cuentan en invierno si los árboles pierden sus hojas?

En el plenario 1, la docente sugirió que cada grupo expusiera las problemáticas observadas al resto de la clase. En el Anexo C.1 presentamos la trascripción del video de los diálogos con los estudiantes.

Luego de recoger las sugerencias de los estudiantes, se llegó a un consenso sobre una situación que se repetía en varios grupos y que podría representar un problema para aquellos que cursan el ingreso a la UNL en el Centro Universitario Gálvez o simplemente para las personas que visitan las instalaciones por alguna razón específica, y se relaciona con la ubicación de los bicicleteros. Basándose en este consenso, la docente formuló la siguiente situación problemática.

Uno de los bicicleteros se encuentra en la cancha de fútbol del CUG lejos del resguardo de condiciones climáticas adversas. ¿Cómo podríamos reubicarlos para proteger las bicicletas del sol?

7.5.1. Microciclo de análisis

Tras el primer acercamiento de los alumnos a una situación problemática matemática real, se evidencia que las conjeturas sobre cómo abordar las tareas están alineadas con los objetivos establecidos en la THA. El entorno se convirtió en un escenario propicio para la investigación, donde los estudiantes examinaron críticamente la situación problemática, intercambiaron opiniones y llegaron a consensos. Sin embargo, la duración de la actividad no resultó adecuada. Como respuesta a esta observación, proponemos un rediseño que incluye una segunda visita al CUG, específicamente dedicado a llevar a cabo las tareas de medición y esbozar los planos que los estudiantes consideren relevantes para la ubicación de los bicicleteros. En las siguientes etapas detallaremos cómo este rediseño no sólo aborda la limitación temporal, sino que también introduciremos herramientas beneficiosas que no fueron inicialmente contempladas.

7.5.2. Análisis desde la perspectiva emergente

Normas sociales del salón de clases (Tarea 1,2 y 3)

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Para dar inicio a las tareas propuestas en la THA, la profesora junto con los estudiantes se dirigieron al CUG, con el objetivo de capturar fotografías de los espacios sin sombra que podrían dar origen a problemas. A partir de esta actividad, generaron preguntas sobre las problemáticas identificadas. Posteriormente, se llevaron a cabo debates grupales, y seleccionaron las preguntas que surgieron con mayor frecuencia debido a su relevancia para la mayoría de los estudiantes. Durante este proceso, la profesora adoptó una postura de orientación y apoyo para la escritura de las conjeturas sobre las problemáticas detectadas.	La situación generó un ambiente de interés en torno a la propuesta de trabajo, especialmente al tratarse de un contexto diferente al habitual. Además, las condiciones climáticas excepcionalmente cálidas, fomentaron la identificación de las problemáticas. Durante la sesión de intercambio entre los grupos, se observaron coincidencias en las irregularidades relacionadas con la disposición de ciertos objetos, especialmente en situaciones expuestas a fenómenos climáticos.

Tabla 7.2: Normas sociales del salón de clase

Prácticas matemáticas en el aula

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Se generan prácticas en torno a formular conjeturas y estimaciones de distancias, algunas de las cuales resultan inaccesibles para los estudiantes.	Los estudiantes conjeturan acerca de las diferentes posiciones en las que podrían ubicarse los bicicleteros, calculando por estimaciones y además, percepciones personales.

Tabla 7.3: Prácticas matemáticas en el aula

Normas Sociomatemáticas

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
El propósito de esta actividad tuvo la intención de que el estudiante reconociera la relevancia de las longitudes de las sombras proyectadas por distintos objetos.	Seis grupos de estudiantes identifican la necesidad de emplear las longitudes de las sombras proyectadas por los objetos para proporcionar resguardo a vehículos y personas en días soleados, como el que estaban experimentando. Tres grupos manifestaron la desfavorable posición de los bicicleteros por quedar fuera de toda protección.

Tabla 7.4: Normas sociomatemáticas

7.6. Día 2

En el segundo día de trabajo, que constaba en un módulo de 70 minutos, nos enfocamos en abordar las tareas 4, 5, 6 y 7 en las instalaciones del colegio. Sin embargo, la cantidad de alumnos presentes fue reducida debido a la ausencia de un grupo de estudiantes de otra localidad (Coronda) que se encontraba de viaje de egresados y también, varios alumnos de Gálvez estaban afectados por el virus de COVID-19.

Se retomó la propuesta sugerida en el CUG, donde los alumnos, nuevamente agrupados, reflexionaron sobre las herramientas necesarias para realizar las mediciones en las instalaciones edilicias y/o de parquización del CUG. El objetivo era investigar posibles lugares estratégicos para la colocación de los bicicleteros. En función de esto, el curso completo propuso el uso de cintas métricas (Anexo 3), mientras que tres grupos sugirieron la utilización de celulares y calculadoras. Un grupo planteó la posibilidad de utilizar sogas y/o palos como herramientas de medidas no convencionales; otro sugirió el uso de un medidor láser y un único grupo propuso valerse del google earth.

Una vez seleccionadas las herramientas de medición, se sugirió a los estudiantes diseñar un bosquejo de la situación. El objetivo era predecir y estimar el lugar más probable para la instalación de los bicicletos, destacando los detalles más significativos para la toma de decisiones.

Las conjeturas respecto de la reubicación propuesta por los grupos de estudiantes son las siguientes:

[1] Pondríamos los bicicleteros entre los árboles que se encuentran atrás. Hacia el oeste que cubriría el bicicletero por la mañana, los que se encuentran en el centro lo harían al mediodía y los árboles que se encuentran más hacia el este lo cubrirán a la tarde.

[**2**] Agregaríamos la misma cantidad de árboles del lado de la cancha de fútbol para que cumplan la misma función que los otros y así poder agregar más bicicleteros en el caso de que se necesite.

[**3**] Otra de las soluciones no tan económicas y ecológicas es agrandar la media sombra del estacionamiento de autos y hacerlo sólo para bicicleteros.

[**4**] Colocar árboles a unos metros hacia el este así a la mañana da sombra, pero por la tarde y mediodía no funcionaría.

[**5**] Para nosotros la mejor posición del bicicletero sería por la entrada trasera de la institución del lado izquierdo, ubicándolo entre la pared y los árboles.

[**6**] Un lugar estratégico sería del lado oeste por el horario de la mañana o por el lado este a la hora de la tarde. Para esto se necesitarían dos bicicleteros en donde cada uno elige dónde poner su bicicleta. Esto funcionaría ya que el edificio tiene dos pisos y su altura ayuda a reflejar una gran sombra en el lado equivalente al horario que sea.

7.6.1. Microciclo de análisis

En la jornada del segundo día de implementación, las tareas abordadas continuaron alineadas con los objetivos fijados en la THA, aunque con la particularidad de que todo el trabajo propuesto se desarrolló íntegramente en las instalaciones del Colegio. Este cambio de ubicación se debió a las limitaciones temporales que enfrentamos durante nuestra primera visita al CUG.

Una observación valiosa para futuras instancias de esta actividad es la necesidad de refinamiento en la fase de elaboración de bocetos. Sería aconsejable instar a los estudiantes a ajustar aún más sus representaciones de la realidad del contexto, incorporando estimaciones de las longitudes necesarias para llevar a cabo las mediciones pertinentes.

Además, la experiencia de llevar a cabo todas las tareas en las instalaciones del colegio proporciona información valiosa sobre la viabilidad y practicidad de realizar este tipo de actividades en un entorno escolar. Este conocimiento puede influir en decisiones futuras sobre la planificación y ejecución de actividades similares, permitiendo ajustes y mejoras significativas.

En resumen, la adaptación de la actividad al entorno del colegio reveló la importancia de la flexibilidad y la capacidad de adaptación de la THA. La sugerencia de perfeccionar la elaboración de bocetos subraya la necesidad de alinear aún más las representaciones matemáticas con la realidad del contexto.

7.6.2. Análisis de la THA

Normas sociales del salón de clases (Tarea 4, 5, 6 y 7)

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
En estas tareas, los estudiantes continuaron trabajando en los mismos grupos y, aquellos que quedaron sin compañeros, debido a ausencias, se integraron a alguno de ellos. Este enfoque de trabajo les brindó a los estudiantes la oportunidad de explorar y discutir posibles herramientas de medición de longitudes en el contexto presentado, así como diseñar bocetos de análisis y construir modelos para, posteriormente llevarlos a escala. La postura del docente fue acompañar a los grupos de estudiantes en sus decisiones sobre la elección de las herramientas de medición a utilizar.	Se generó en los estudiantes una disposición para la exploración e investigación de herramientas de medición, al encontrarse en una situación donde algunas longitudes a mensurar eran inaccesibles para ellos. Confeccionaron bocetos de análisis para examinar e identificar posibles áreas en las instalaciones del CUG adecuadas para la colocación de los bicicleteros.

Tabla 7.5: Normas sociales del salón de clase

Prácticas matemáticas en el aula

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Se logran prácticas de investigación, de diseño, estrategias de medición, de comparación, de relación. Se analizan estrategias metodológicas para la mensura, se evalúan objetos de medición y se examinan lugares adecuados para la colocación de los bicicleteros.	Los estudiantes lograron abordar las tareas propuestas en este trayecto, seleccionando herramientas para tomar medidas luego de una deliberación grupal. Sin embargo, los diseños de los bocetos de análisis son limitados y se presentan incompletos en relación con el contexto presentado.

Tabla 7.6: Prácticas matemáticas en el aula

Normas Sociomatemáticas

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
El diseño y la organización de estas tareas, buscaron el reconocimiento por parte de los estudiantes de la inaccesibilidad de algunas mediciones con herramientas utilizadas o reconocidas por ellos. Al plasmar sus bocetos, efectuaron una transición de lo macro no manipulable a lo micro del diseño del bosquejo. El empleo de estos modelos permitió avanzar en sus procesos de matematización.	Los estudiantes investigan herramientas de medición convencionales y estrategias no convencionales para la medición de distancias accesibles e inaccesibles para los estudiantes. Además, emplearon bocetos de análisis para estimar longitudes que consideraron necesarias, para abordar la situación problemática.

Tabla 7.7: Normas sociomatemáticas

7.7. Día 3

Con los bocetos producidos por los estudiantes, nos trasladamos nuevamente al CUG para comparar, constatar y/o corregir los mismos respecto del contexto real. Para validar sus argumentos, se pretendió que definieran las características que consideraban relevantes para dar inicio a la solución de la problemática planteada: imaginando, estimando, reconociendo, conjeturando, computando.

En el tercer día de encuentro, llevamos a cabo la tarea 8 propuesta en la THA y para ello, solicitamos las últimas dos horas de cátedras de cursado (17:05 hs a 18:05 hs) a la profesora de contabilidad, era un día de gran calor en la provincia de Santa Fe en esa época del año.

Al llegar a destino, los estudiantes comenzaron a observar que el contexto no se presentaba de la misma manera que un principio. A sorpresa de ellos, el panorama del entorno había cambiado completamente respecto de la primera visita que realizamos. En ese momento, comenzaron a plantear distintas opiniones referidas a los cambios en las sombras, en relación a los relevamientos realizados en la primera visita. Los diálogos se encuentran en el Anexo C.1.

A partir de los interrogantes que surgieron, los estudiantes comenzaron a trabajar rápidamente organizados nuevamente en grupos. Iniciaron las mediciones con los elementos que seleccionaron, descartando aquellos que no podían utilizar debido al cambio en el contexto real que mencionamos.

Uno de los grupos, midió la altura del edificio y la sombra proyectada a través del análisis de una fotografía. Para ello, una de las alumnas se paró apoyada a la pared del lado este del edificio y, al saber la medida exacta de su altura, la trasladaron (con una aplicación en el celular) tantas veces fue necesario para alcanzar la altura deseada.

Figura 7.5: Grupo 1

Este mismo grupo de alumnas, en un primer momento advirtieron la posibilidad de calcular la altura aproximada de la pared utilizando el ángulo que forman los ojos al mirar hacia arriba y la distancia a la que se encuentra posicionada la persona. Tal es así, que tomaron como ángulo inicial de 0° la vista horizontal y, al mirar el punto más alto de la pared midieron el ángulo de elevación del párpado, llamándolo ángulo final. Para lograr lo planteado, llamaron a su preceptor para retratar a través de fotografías sus distintas miradas y obtuvieron las siguientes imágenes.

Figura 7.6: Grupo 1

A partir del análisis de las mismas, repararon que con los conocimientos que ellos disponían de años anteriores, no era posible calcular la altura de la pared del CUG y por lo tanto, descartaron la hipótesis sobre el cálculo de alturas tomando como referencia la amplitud de ángulos de los ojos del preceptor.

Otro grupo, utilizó el teorema de Thales para hallar la altura de un árbol que ellos consideraron la mejor opción para posicionar los bicicleteros, por la espesura de sus ramas. Para la concreción de los cálculos, midieron la sombra proyectada por el árbol con una cinta métrica, luego una de las alumnas se posicionó paralela al árbol y tomaron como datos su altura y la sombra que ella misma proyectaba. A partir de los datos recolectados, llevaron a cabo la aplicación del teorema de thales (contenido abordado en segundo año de sus trayectorias escolares).

Figura 7.7: Grupo 2

Un tercer grupo de alumnas, recordando experiencias abordadas en física años anteriores, utilizaron la fórmula de caída libre de un cuerpo ($h = 0,5 \cdot g \cdot t^2$) para calcular la altura del edificio. A partir de esta propuesta, arrojaron un objeto (pelota) verticalmente hacia arriba, filmaron todo el trayecto y tomaron el tiempo que demoró el objeto en caer. Para lograr exactitud en sus cálculos, utilizaron una aplicación en el celular en la cual se puede observar en cámara lenta todo el recorrido y a partir de ello, lograron obtener el tiempo lo más preciso posible para su cálculo.

Figura 7.8: Grupo 3

Un cuarto grupo, midió la sombra proyectada por el edificio con sus pies, es decir caminaron el trayecto a consideración, colocando un pie tras otro en forma consecutiva. Luego, midieron el pie de la alumna, expresaron la longitud en metros y la multiplicaron tantas veces como pasos efectuados realizó para cubrir la longitud deseada. Luego fotografiaron el perfil que forma el paredón delantero y lateral del CUG y la longitud de la sombra provocada por cada pared. Así, plantearon que la estrategia para calcular la altura sería a través de alguna aplicación en el celular, ya que teniendo la medición exacta de la sombra proyectada, podían reflejar dicha longitud en forma vertical y, estimar o cortar dicha medida teniendo en cuenta la escala trabajada.

Figura 7.9: Grupo 4

El quinto grupo decidió abordar la tarea a partir de la medición de la sombra producida por el edificio del CUG con la medida de la longitud de los pasos de uno de los estudiantes. A partir de ello, un alumno recorrió el trayecto sin sol caminando (tratando en gran medida de que todos los pasos sean iguales) y sus compañeros contaban los pasos necesarios para cubrir toda la ruta deseada. Luego, midieron con la cinta métrica la longitud de su paso y la multiplicaron por la cantidad de pasos necesarios para cubrir la trayectoria. También, otros integrantes de este mismo grupo decidieron que para medir la altura de la pared podían contar las hileras de ladrillos que conforman el paredón y luego multiplicar por la altura del ladrillo, sabiendo que estaban estimando la altura debido a la posible variación de centímetros con la medida real.

Figura 7.10: Grupo 5

7.7.1. Microciclo de análisis

En la reconfiguración de la THA para la ejecución de las actividades planteadas para el primer día, advertimos que una única visita para llevar a cabo el estudio propuesto, no resulta suficiente para dar coherencia al contenido a investigar. Al regresar al CUG, los estudiantes repararon inmediatamente el cambio en el contexto a investigar, al percatarse de que las longitudes de las sombras generadas por el edificio y/o los árboles, estaban intrínsecamente vinculadas con la inclinación del sol según la franja horaria a estudiar. Este reconocimiento suscitó nuevos interrogantes acerca del momento del día más apropiado para ubicar los bicicleteros, así como cuestionamientos sobre la comprensión de las relaciones entre ángulos y longitudes adquiridas durante sus trayectorias escolares.

En el rediseño de la THA para el abordaje de las actividades propuestas para el primer día, advertimos que solamente con dirigirse una vez a efectuar el estudio propuesto, no basta, ya que al regresar al CUG, los estudiantes repararon inmediatamente en el cambio del contexto a investigar notando que las longitudes de las sombras producidas por el edificio y/o los árboles, dependían íntegramente de la inclinación que tiene el sol según la franja horaria a estudiar.

En función de ello, surgieron nuevos interrogantes sobre el momento del día que debían colocarse los bicicleteros y también, cuestionamientos sobre los saberes adquiridos durante sus trayectorias escolares al no recordar relaciones entre ángulos y longitudes.

Además, es relevante resaltar que un grupo de estudiantes abordó la situación problemática empleando estrategias desarrolladas en el ámbito de la física, cuestión que nos sorprendió y evidencia una conexión con otros campos del conocimiento interesante para desarrollar en pos de la integración de contenidos.

Asimismo, no podemos pasar por alto la relevancia del problema de la búsqueda de sombras, debido al calor inusual experimentado en la época del año que se realiza la implementación. A partir de esta observación, nos surgió el siguiente interrogante: ¿cómo hubieran afectado las condiciones climáticas si las tareas se hubieran llevado a cabo en un día templado o extremadamente frío, donde la búsqueda de la calidez del sol, en lugar de los espacios con sombra, podría haber sido un factor determinante?

7.7.2. Análisis del la THA

Normas sociales del salón de clases (Tarea 8)

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
En esta tarea los estudiantes continuaron el trabajo en grupos, lo que facilitó la discusión de sus propuestas de medición y la realización de un trabajo cooperativo y colaborativo de la actividad. La posición asumida por el profesor fue la de observador, evitando proporcionar respuestas que pudieran dirigir a los estudiantes arribar hacia posibles soluciones de la tarea en cuestión.	Al regresar al CUG, se generó una actitud de asombro y, en algunos estudiantes, de preocupación en otros al encontrarse con un escenario con características diferentes al observado el primer día que concurrieron. Esto aconteció dado que en la primera visita concurrieron a las 14 hs mientras que esta ocasión regresaron al lugar a las 17 hs. En ese momento, se plantearon si la propuesta abordada en el salón de clases, serviría para este nuevo contexto. Los estudiantes reconocieron que las longitudes de las sombras proyectadas por los objetos (edificio y árboles) seleccionados para su análisis, dependía de la posición (inclinación) del sol y, que para la colocación de los bicicleteros, debían buscar una estrategia (cambiarla o no a la ya propuesta) en base a la franja horaria diurna. Durante esta tarea se llevó a cabo la manipulación de distintos materiales relacionados con la medición de longitudes.

Tabla 7.8: Normas sociales del salón de clase

Normas Sociomatemáticas

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
El diseño e implementación de esta actividad buscaron reconocer que las medidas de las longitudes de las sombras, dependen de la posición del sol, favoreciendo de esta manera la relación variacional entre los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos.	Esta actividad propició que los estudiantes experimentaran mediciones no accesibles para ellos, con distintos instrumentos de medición y también con la utilización de herramientas matemáticas abordadas años anteriores. Reconocieron que para calcular distintas posiciones de los bicicleteros, debían relacionar los lados y ángulos de triángulos rectángulos. Por este motivo, realizaron estimaciones de lugares factibles a utilizar.

Tabla 7.9: Normas sociomatemáticas

Prácticas matemáticas en el aula

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Se lograron prácticas de investigación, estimación, experimentación, medición, y comparación. Se efectuaron los siguientes cálculos matemáticos: teorema de Pitágoras, proporcionalidad, equivalencias, teorema de Thales.	Los estudiantes llevaron a cabo mediciones de sombras y de alturas del edificio y de árboles. Algunos utilizaron una aplicación en el celular para medir longitudes, mientras que otros midieron ángulos de apertura de ojos fotografiándolos (aunque descartaron la idea al no encontrar una relación satisfactoria). Otros aplicaron el teorema de Thales para comparar alturas y longitudes de las sombras proyectadas por el árbol y tomaron las medidas con una cinta métrica. Otro grupo de estudiantes midieron longitudes con pies y trasladaron las medidas a una aplicación del celular y otros, utilizaron pasos y estimaciones midiendo la altura en ladrillos que conforman el paredón del CUG.

Tabla 7.10: Prácticas matemáticas en el aula

7.8. Día 4

En la cuarta jornada, nos centramos en la tarea 9 dentro de las instalaciones del Colegio. Si bien en la preparación del experimento esperábamos que los estudiantes sugieran las herramientas digitales adecuadas para representar el modelo de la situación, en la práctica del aula fue necesaria la sugerencia del software GeoGebra por parte de la docente. De esta manera, los estudiantes reunidos nuevamente en grupos, dieron comienzo a la transferencia de los datos recolectados en el CUG al GeoGebra. Recordamos que en la trayectoria escolar por la que transitaron los alumnos, atravesaron un cuarto año de educación secundaria sin cursar presencialmente. Entendemos que una de las consecuencias que trajo aparejada la pandemia en este aspecto es la ausencia de la utilización del software GeoGebra. Los conocimientos que tenían los alumnos sobre el manejo del mismo eran escasos debido a que años anteriores no lo emplearon para el trabajo matemático áulico; pero aún así, para esta investigación se realizaron las aclaraciones necesarias y el manejo del software cumplió con las expectativas.

La mayoría de los grupos optaron por representar gráficamente los datos recolectados a través de triángulos rectángulos, simulando la estructura del edificio y/o los árboles junto con sus respectivas sombras. Un grupo de estudiantes exploró la posibilidad de simular la estructura del edificio en 3D, aunque no lograron encontrar estrategias efectivas para obtener respuestas válidas, por lo que decidieron continuar trabajando en el plano.

Para transferir los datos al software, los estudiantes seleccionaron escalas adecuadas basadas en las mediciones propias, de manera que al desplazar el vértice de la base del triángulo (el ángulo no recto), pudieron replicar lo observado en el CUG. Todos los grupos reconocieron, al visitar el edificio en diferentes momentos del día, que las sombras proyectadas por el edificio y/o los árboles dependían directamente de la posición del sol en la franja horaria correspondiente. Por tal motivo, al utilizar GeoGebra y mover el vértice de la base del triángulo rectángulo, los estudiantes estimaron la mejor posición para ubicar los bicicleteros. En las Figuras 7.11 y 7.12, podemos apreciar las conjeturas obtenidas por los estudiantes según el horario en que ellos recolectaron los datos.

Figura 7.11: Trabajo con Geogebra

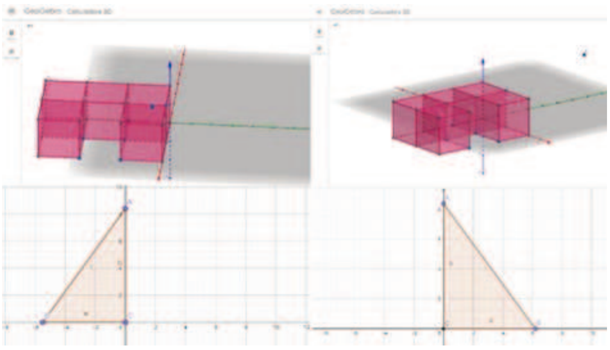


Figura 7.12: Trabajo con Geogebra

7.8.1. Microciclo de análisis

Consideramos que esta tarea satisface el objetivo propuesto en la THA al abordar la reconstrucción del contexto real mediante herramientas digitales y el usos de escalas adecuadas para obtener los valores esperados. Sin embargo, hemos notado que debido a la escasa familiaridad con el manejo del software, las producciones resultantes presentan restricciones en la aplicación de escalas más realistas respecto de los lados de los triángulos. A pesar de esto, los estudiantes han reconocido que al desplazar el vértice de la base para simular la proyección de sombras, el ángulo superior (rayos solares) experimenta cambios en su amplitud a medida que transcurren las horas del día.

Identificamos como área de mejora previa a la THA, la necesidad de que los estudiantes adquieran un manejo más fluido del software GeoGebra. Esto les permitirá construir imágenes aún más reales a las diseñadas y potenciará su capacidad para trabajar con escalas.

7.8.2. Análisis del la THA

Normas sociales del salón de clases (Tarea 9)

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
En esta tarea se planteó a cada grupo transferir los datos obtenidos al GeoGebra. El trabajo implicó un constante intercambio de ideas y opiniones entre los miembros de cada grupo.	Los estudiantes mostraron un interés notable y una participación dinámica durante toda la tarea, analizando detalladamente el significado real de cada lado y ángulo del triángulo rectángulo en el contexto abordado.

Tabla 7.11: Normas sociales del salón de clase

Prácticas matemáticas en el aula

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Se logran prácticas de geometrización, al matematizar la problemática mediante el contexto proporcional del triángulo, haciendo uso del software GeoGebra. Asimismo, se generaron prácticas de anticipación y aproximación de la longitud de los catetos del triángulo rectángulo al variar la amplitud de sus ángulos.	Los estudiantes lograron determinar una matematización geométrica del contexto, interpretando cada una de las variables involucradas, como las longitudes de los lados del triángulo rectángulo y los ángulos internos del mismo. Además comprendieron el sentido de la relación variacional de las amplitudes de los ángulos y las longitudes de los lados.

Tabla 7.12: Prácticas matemáticas en el aula

Normas Sociomatemáticas

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Esta tarea tuvo la intención de que los estudiantes, al transferir los datos al GeoGebra, reconocieran que el bosquejo que habían diseñado corresponde a un triángulo rectángulo donde la base representa la longitud de la sombra proyectada por el objeto seleccionado. Además se enfocó en que comprendieran que las variables que afectan al tamaño del triángulo son el ángulo formado por los rayos del sol y la altura del objeto escogido.	Se identifica en los estudiantes un progreso en el lenguaje matemático y el adecuado uso de la proporción en la construcción geométrica del triángulo rectángulo. Reconocen el tipo de triángulo construido y también, reconocen la variación en las amplitudes de los ángulos, al modificar la longitud del cateto de la base del triángulo.

Tabla 7.13: Normas sociomatemáticas

7.9. Día 5

En el quinto día de encuentro, se abordaron las tareas 10 y 11 de la THA.

Cada grupo de estudiantes explicó a su docente las conjeturas realizadas hasta el momento, fundamentadas con los conceptos matemáticos que estimaron ser la mejor opción para emprender la tarea.

A continuación describimos las conjeturas y las herramientas utilizadas por los distintos grupos de estudiantes, en detalle del plenario se encuentra en el Anexo C.1.

- Utilización de la proporción para el cálculo de distancias.
- Utilización del teorema de Thales para el cálculo de alturas inaccesibles para los estudiantes.
- Utilización del pie como medida no convencional.
- Utilización de la fórmula de caída libre de un cuerpo para el cálculo de la altura del edificio.
- Utilización de pasos como patrón de medida no convencional y recuento de hileras de ladrillos para el cálculo de la altura del edificio.
- Utilización de la proporcionalidad para el cálculo de altura y proyección de la sombra.

Una vez que todos los grupos finalizaron el relato de lo abordado en la realización de la tarea, el docente les solicitó la elaboración de un video que refleje una síntesis de lo trabajado. Así, ese mismo día, los estudiantes buscaron un lugar tranquilo en el colegio (salón de actos, SUM, patio trasera, salón de clases, patio techado) para lograr la filmación de la explicación que ellos consideran adecuada, acerca de todos los datos recolectados y también, de sus conclusiones finales.

Los videos producidos se encuentran disponibles en: Enlace a los Videos, la transcripción de los mismos se encuentra en el Anexo C.1.

7.9.1. Microciclo de análisis

En la presentación de los videos elaborados por los estudiantes, podemos apreciar una síntesis del trabajo realizado. Una recomendación para futuros proyectos consiste en que la consigna que involucre la creación de un video que documente la trayectoria de los estudiantes debería ser más detallada. Es decir, sería beneficioso especificar que el video debe incluir una revisión integral de los eventos que transcurrieron, fundamentando la propuesta a partir de las hipótesis formuladas inicialmente, abordando la validación o refutación de estas hipótesis, describiendo posibles cambios en las estrategias metodológicas empleadas para respaldar y fundamentar, entre otros aspectos.

Esta sugerencia la consideramos de gran relevancia ya que, al revisar los videos, se observa una síntesis limitada de todo el trabajo realizado por los estudiantes. No se evidencian los procesos que condujeron a la elección de estrategias en respuesta a la propuesta.

7.9.2. Análisis del la THA

Normas sociales del salón de clases (Tarea 10 y 11)

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
En la tarea 10, los estudiantes compartieron de manera grupal con el docente, los modelos que elaboraron para abordar la situación presentada, fundamentando con los conceptos matemáticos aplicados. En la siguiente tarea, elaboraron un video en el que explicaron de forma oral, las estrategias de medición que emplearon, los conceptos matemáticos que utilizaron y las conclusiones a las que llegaron en relación con la ubicación del bicicletero.	Los estudiantes se involucraron activamente en las tareas, participando en un intercambio dinámico hasta generar un modelo que les permitió concluir con la situación propuesta. Reconocieron la necesidad de emplear cálculos matemáticos para medir distancias inaccesibles, interpretando que la inclinación del sol afectaba directamente la longitud de las sombras, aunque no lograron establecer una relación explícita con sus conocimientos previos y es por este motivo que estimaron sus cálculos considerando los dos momentos en que visitaron al CUG.

Tabla 7.14: Normas sociales del salón de clase

Prácticas matemáticas en el aula

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Se logran prácticas de argumentación y justificación de las estrategias metodológicas utilizadas para la medición de la longitud del cateto del triángulo rectángulo diseñado como figura de análisis del contexto. Además se alcanzan prácticas de fundamentación del modelo obtenido, empleando estrategias y conceptos matemáticos que dieron origen a la iniciación de la trigonometría.	Los estudiantes generaron y argumentaron casos de los posibles modelos de ubicación del bicicletero y realizaron aproximaciones según los cálculos que obtuvieron del contexto y del software utilizado. Fundamentan sus posturas con diversos conceptos matemáticos como por ejemplo: teorema de Thales, escalas y proporcionalidad, reconociendo la relación variacional de dependencia entre la inclinación del sol y la longitud de la sombra proyectada, pero aún sin herramientas matemáticas sólidas para justificar la misma. Solamente exponen un recorte para una franja horaria y estiman, a partir de lo trabajado en el GeoGebra, la mejor ubicación.

Tabla 7.15: Prácticas matemáticas en el aula

Normas Sociomatemáticas

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
La intencionalidad de estas tareas fue la explicación fundamentada del proceso de matematización progresiva por el que transitaron los estudiantes. De esta manera buscamos determinar si lograron atribuir sentido a las razones trigonométricas, culminando con la obtención de un “modelo para” y así, argumentar sus decisiones sobre la ubicación del bicicletero mediante la validación de sus conjeturas con el software empleado.	Los estudiantes aludieron a diversos conceptos matemáticos para fundamentar cuál sería la mejor posición para ubicar los bicicleteros. Un grupo, abordó el cálculo de las longitudes del cateto del triángulo rectángulo a partir del teorema de Thales, mientras que dos grupos emplearon la proporcionalidad a partir de una longitud conocida. Por otro lado, dos grupos emplearon técnicas de medidas no convencionales como la longitud de los pasos y de los pies, para estimar distancias no accesibles. En los videos producidos por cada grupo, podemos apreciar la explicación de los modelos desarrollados por los estudiantes y la utilización de un lenguaje matemático en la construcción geométrica del contexto presentado. Sin embargo, a pesar de reconocer la influencia de la amplitud de los ángulos en la longitud de las sombras proyectadas, ninguno de los grupos propuso algún modelo, aunque sea incompleto, para respaldar sus conjeturas.

Tabla 7.16: Normas sociomatemáticas

7.10. Día 6

El último día, cada grupo de estudiantes proyectó su video con las explicaciones pertinentes de cómo arribaron a un lugar estratégico para la colocación de los bicicleteros y por qué decidieron colocarlo allí, la transcripción de las intervenciones en el plenario se encuentran en el Anexo C.1

Para la formalización del concepto “razones trigonométricas” se recolectaron todos los datos aportados por los estudiantes A partir del diálogo llevado a cabo con los estudiantes, la docente comenzó a explicarles brevemente el surgimiento histórico de las razones trigonométricas, para poner en evidencia que las hipótesis y las justificaciones que realizaron, no estaban tan alejadas de los trabajos de investigación de los matemáticos de la antigüedad. Luego, inició la institucionalización y formalización de las tres razones trigonométricas elementales (seno, coseno y tangente). Para ello, recupera en una primera instancia el contexto del CUG, grafica el edificio, la sombra proyectada y el sol.

Un momento clave a destacar en esta oportunidad, es cuando los estudiantes interpelaron a la docente sobre el bosquejo gráfico que estaba presentando en el pizarrón, como se muestra en la Figura 7.13.

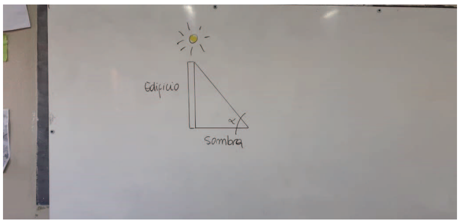


Figura 7.13: Bosquejo del docente

Varios alumnos, manifestaron que el dibujo esbozado en el pizarrón estaba mal, porque al dibujarlo de esa manera con el sol tan arriba del edificio, habría muy poca sombra o nada. Para que la sombra delineada coincidiera mínimamente con la realidad, el sol debería estar pasando el edificio del lado izquierdo. A partir de esta sugerencia, la docente invitó a pasar a uno de los alumnos a que dibuje el sol donde ellos lo consideren.

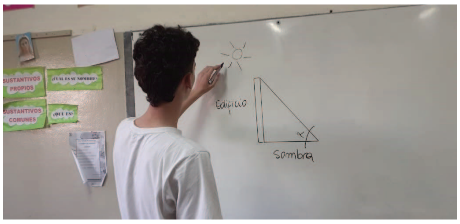


Figura 7.14: Corrección del bosquejo

La corrección por parte de los estudiantes, dió un puntapié inicial para introducir las razones trigonométricas y las relaciones entre las variables que están involucradas. Por este motivo, la docente les presentó las tres razones trigonométricas elementales, analizando las variaciones de las relaciones entre los cocientes de las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos.

A partir de ello, los estudiantes reunidos nuevamente en grupos fueron estimando distintos ángulos de inclinación, según la trayectoria del sol para obtener las longitudes de las sombras proyectadas por el edificio. Sabiendo que la altura del CUG es un valor constante, los alumnos fueron variando el ángulo según la trayectoria del sol, comenzando desde el mediodía donde los estudiantes manifestaron que en dicho momento no hay ninguna sombra y por lo tanto los rayos de sol formaban un ángulo de 0° con respecto al edificio o bien, 90° con respecto al suelo. En todas las variaciones que se realizaron (de 5° y 10°, según el grupo), comprobaron (aproximadamente) las longitudes de las mediciones obtenidas en las dos veces que fueron al CUG, a través de la aplicación de la razón trigonométrica tangente. Sólo un grupo utilizó la longitud de la sombra medida por ellos y los valores que obtuvieron de la altura del edificio lo constataron con los datos de otros grupos. También, hubo grupos que utilizaron los datos que obtuvieron en el GeoGebra para facilitar y simplificar la adquisición del resultado esperado. A continuación presentamos algunas producciones de los grupos en las Figuras 7.15, 7.16 y 7.17.

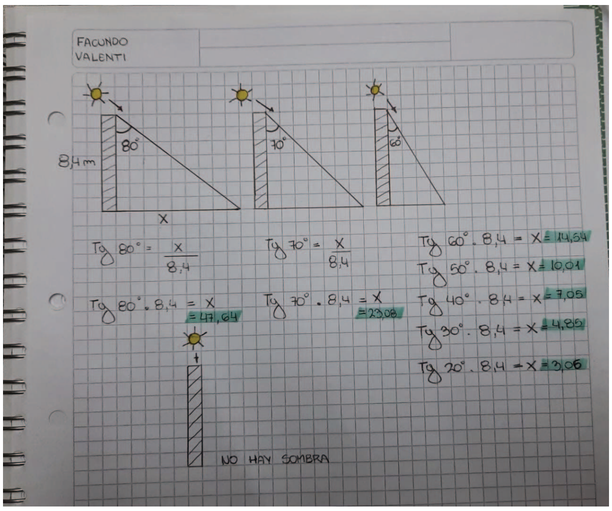


Figura 7.15: Producción del Grupo 1

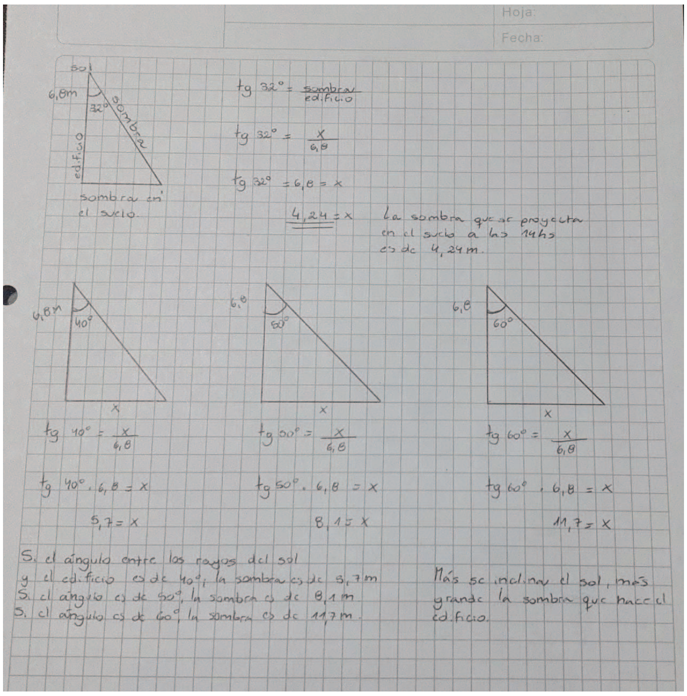


Figura 7.16: Producción del Grupo 2

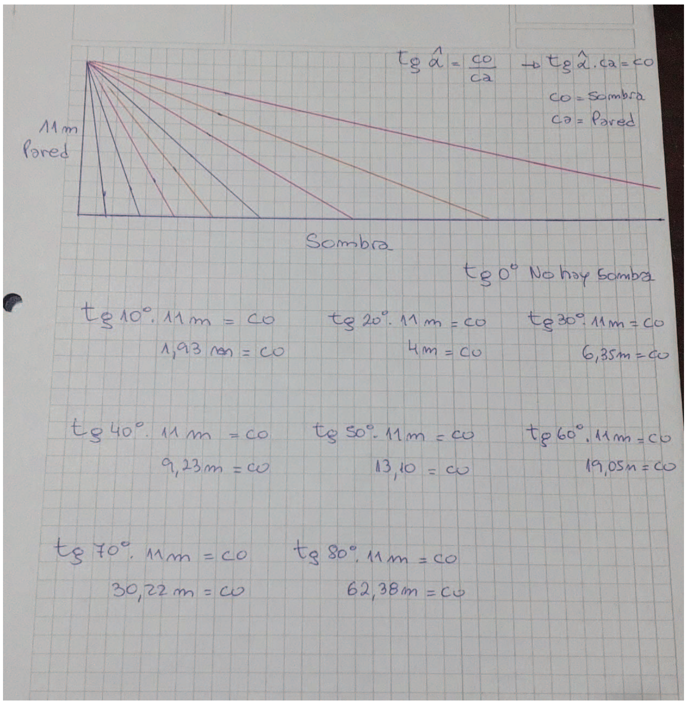


Figura 7.17: Producción del Grupo 3

La docente propuso para aquellos grupos que aún no lo habían realizado, volcar todos los datos en GeoGebra para constatar si las medidas conseguidas en forma analítica, coincidían o no con los datos reales obtenidos en sus resoluciones.

Con respecto al desarrollo de la tarea 14 propuesta en la THA, no se logró concretar la exposición de cada uno de los trabajos de investigación y la metodología analítica de resolución por parte de los estudiantes por falta de tiempo. Por este motivo, se concluyó con el grupo clase que cuando se trasladaron al CUG a las 14 hs el sol tenía una inclinación con respecto a la vertical de 20° aproximadamente y al regresar a los dos días, pero en este caso a las cinco de la tarde, la inclinación era de 55° aproximadamente.

El trabajo con GeoGebra fue fundamental desde el inicio de la actividad. La utilización del software permitió a los estudiantes constatar los datos obtenidos a través de mediciones obtenidas por ellos, con los datos analíticos generados por la utilización de las razones trigonométricas.

Antes de finalizar la clase (última del año lectivo), la docente les solicitó que reflexionen sobre lo trabajado en las jornadas y propongan una situación problemática, donde la utilización de las razones trigonométricas sea indispensable para su resolución.

Debido a la finalización del ciclo lectivo, las situaciones problemáticas fueron recibidas por whatsapp; pero sólo algunos grupos enviaron sus trabajos, en las Figuras 7.18 y 7.19.

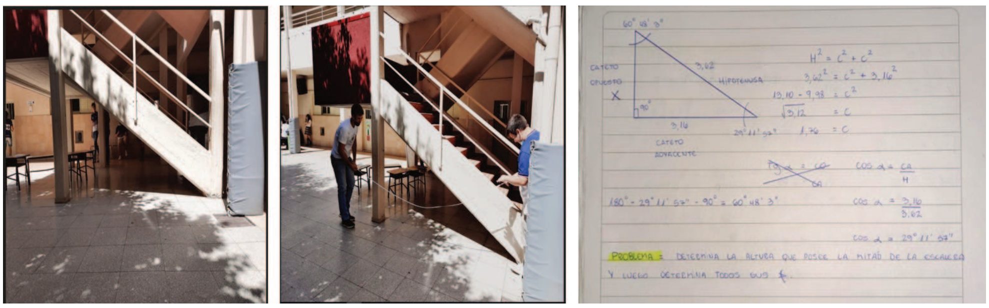


Figura 7.18: Producción del Grupo 1

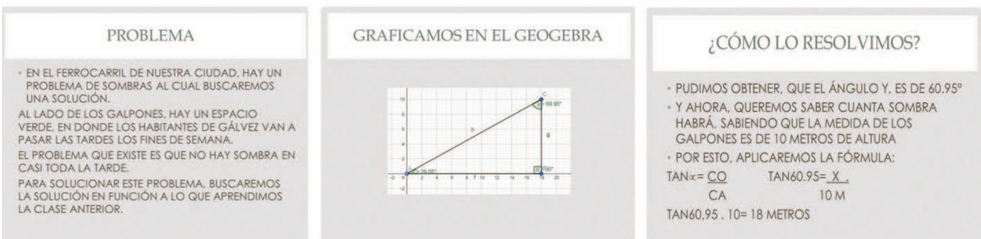


Figura 7.19: Producción del Grupo 2

7.10.1. Microciclo de análisis

Una de las cuestiones prioritarias a tener en cuenta, es la consideración de una amplitud considerable de clases para abordar de manera minuciosa todos los puntos considerados en cada una de las tareas propuestas con sus rediseños. Esto garantizaría una recolección de datos sea más rica en información para cualquier persona que no esté familiarizada con la implementación. En nuestro caso, al contar con grabaciones, filmaciones, toma de notas, entre otros; la recopilación de datos logró demostrar toda la trayectoria por la que transitaron los estudiantes para la formalización del contenido, como resultado del análisis minucioso de cada una de las tareas propuestas.

A pesar de haber logrado la institucionalización de los conceptos trabajados en la última clase, es importante señalar que la falta de tiempo para aplicar las razones trigonométricas a diversas situaciones cotidianas, diferentes a las inicialmente planteadas, es un factor importante que influye en las reflexiones que puedan realizar los estudiantes acerca de la utilización de las mismas.

7.10.2. Análisis del la THA

Normas sociales del salón de clases (Tarea 12, 13 y 14)

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
La tarea 12 tuvo la intención de socializar las diferentes estrategias utilizadas para las mediciones de distancias inaccesibles, destacando la necesidad de desarrollar un modelo matemático para abordar la situación. Por otro lado en la tarea 13 los estudiantes formalizaron los datos recopilados en sus mediciones, aplicando las razones trigonométricas correspondientes a los bosquejos propuestos, reconociendo la necesidad y el sentido de su aplicación. En la tarea 14, a cada grupo de estudiantes le fue asignada una consigna para reflexionar sobre la necesidad de la utilización de las razones trigonométricas en su entorno social.	Los estudiantes mostraron un alto nivel de participación y compromiso durante estas tareas. Cada grupo elaboró un bosquejo, siguiendo la estructura planteada en sus investigaciones, con el objetivo de formalizar de manera analítica las longitudes que tienen las sombras conforme cambia el ángulo de inclinación respecto a la vertical u horizontal en un triángulo rectángulo. Los estudiantes trabajaron en grupos analizando, reflexionando y confeccionando una situación problemática que identifican en su entorno social. Posteriormente, compartieron con su docente el resultado de la investigación.

Tabla 7.17: Normas sociales del salón de clase

Normas Sociomatemáticas

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
La tarea 12 tuvo la intención de socializar las diferentes estrategias utilizadas para las mediciones de distancias inaccesibles, destacando la necesidad de desarrollar un modelo matemático para abordar la situación. Por otro lado en la tarea 13 los estudiantes formalizaron los datos recopilados en sus mediciones, aplicando las razones trigonométricas correspondientes a los bosquejos propuestos, reconociendo la necesidad y el sentido de su aplicación. La tarea 14 tuvo la intención de que los estudiantes comprendieran el sentido y la importancia de la utilización de las razones trigonométricas en la vida diaria.	Algunos grupos lograron establecer una explicación matemática aceptable, utilizando conceptos para demostrar la validez de su propuesta para un momento específico del día. Analizaron la proporcionalidad dentro del triángulo rectángulo al variar uno de sus lados. Es decir, al extender, por ejemplo, la base del triángulo rectángulo, observaron que el ángulo inferior reducía su amplitud y el ángulo con respecto a la vertical aumentaba. Posteriormente, llevaron a cabo un análisis detallado de sus bosquejos, incorporando datos obtenidos en las mediciones. Generaron casos posibles, a medida que el sol cambiaba su inclinación, comprobando si los cálculos análiticos coincidían o no con los propuestos por ellos. Para esta actividad, eligieron de forma conveniente la razón trigonométrica según sus datos. Los estudiantes reconocieron situaciones de la vida cotidiana donde es necesario evocar lo trigonométrico para dar solución a la situación. Relacionaron los conceptos abordados para diseñar una nueva problemática.

Tabla 7.18: Normas sociomatemáticas

Prácticas matemáticas en el aula

Perspectiva Social	Perspectiva Psicológica
Se generaron prácticas de geometrización, comparación y aproximación, al matematizar la situación en contexto, reconociendo la necesidad de la utilización de las razones trigonométricas para abordar la misma. Se logran prácticas de exploración, reflexión, geometrización y diseño de situaciones problemáticas próximas a su entorno.	La mayoría de los estudiantes hacen uso del conocimiento proporcional para referirse a la medición y geometrización del triángulo rectángulo. Luego, manipulan las razones trigonométricas a partir de ángulos, que simulan ser la inclinación que tiene el sol a medida que transcurren las horas del día y así, calcularon la longitud de la sombra proyectada por los objetos del contexto seleccionado por ellos. Los estudiantes generaron situaciones problemáticas observadas en su entorno social. Geometrizaron el contexto seleccionado para la utilización con sentido de la razones trigonométricas.

Tabla 7.19: Prácticas matemáticas en el aula

Capítulo 8

Análisis Retrospectivo

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a fenómenos del mundo real.
NIKOLÁI LOBACHEVSKI

8.1. Introducción

Para la elaboración del presente capítulo, recopilamos los datos derivados de la preparación y la implementación de cada tarea propuesta en la THA. Para el análisis privilegiamos aquella información relevante en función a los distintos niveles de matematización por los que transitan los estudiantes y aquella que ofreció elementos significativos para el análisis, razón por la cual no se consideraron las respuestas y producciones dadas a la totalidad de las tareas.

El estudio predictivo de las posibles conjeturas de modelos que podrían surgir de las tareas, sirven para identificar la actividad matematizadora de algunos estudiantes y sus procesos de reflexión. Las producciones que emergieron durante el desarrollo de las tareas, dejan entrever el potencial del contexto seleccionado para generar procesos de matematización progresiva. La THA permitió establecer el nivel de comprensión alcanzado por los alumnos frente a la presentación de las tareas y es, de esta manera, que logramos identificar el progreso en la matematización respecto a los niveles de comprensión que precisaba cada una de las tareas y el sentido para completar el dominio de su significado.

8.2. Modificaciones a la THA propuesta

En la implementación de la THA con este grupo de estudiantes, surgieron modificaciones que se mencionan en los microciclos de diseño y análisis, a continuación las presentamos en un cuadro comparativo.

THA	Modificaciones a la THA
Acompañar a los alumnos al CUG con el propósito de que capturen fotografías que representen problemas en áreas desprovistas de sombra.	Acompañar a los alumnos al CUG con el propósito de que capturen fotografías que representen problemas en áreas desprovistas de sombra.
Transcribir en forma de preguntas algunas problemáticas que observan.	Transcribir en forma de preguntas algunas problemáticas que observan o también, redactar un breve párrafo del problema detectado.
Presentar y debatir, en forma grupal, las diversas propuestas relacionadas con las situaciones problemáticas .	En plenario, presentar las problemáticas, seleccionar en consenso con el grupo de estudiantes las preguntas más frecuentes y formular el problema.
Explorar herramientas potenciales que puedan emplearse para su resolución.	Explorar herramientas potenciales que puedan emplearse para su resolución.
Diseñar bocetos para el análisis.	Visitar nuevamente el CUG, relevar los datos necesarios para elaborar un boceto de la situación que contenga detalles significativos del contexto.
Seleccionar herramientas adecuadas y relevamiento de datos en el terreno.	Seleccionar herramientas adecuadas y relevamiento de datos en el terreno.
Relevar los datos necesarios en terreno para la resolución.	Relevar los datos necesarios en terreno para la resolución.
Construir modelos a escala.	Construir modelos a escala lo más realistas posibles. Visitar nuevamente el CUG en un horario diferente al anterior, comparar sus bocetos y conjeturas en relación al nuevo escenario.
Construir un modelo con herramientas digitales.	Reconstruir el contexto con herramientas digitales que consideren convenientes, explorar y reproducir las situaciones observadas en las distintas visitas.

Tabla 8.1: Modificaciones de la THA

THA	Modificaciones a la THA
Exponer y debatir el modelo, como así las nociones y conceptos matemáticos.	Presentar el modelo y fundamentar los conceptos matemáticos trabajados a partir de la producción de un video que refleje en forma integral toda la trayectoria que transitaron.
Producir un video que refleje una síntesis de todo el trabajo abordado.	Producir un video que refleje en forma integral toda la trayectoria que transitaron.
Presentar el video y validar las conclusiones con los demás grupos. Exponer la resolución analítica en una puesta en común con el grupo clase.	Presentar el video y validar las conclusiones con los demás grupos. El docente Institucionaliza las razones trigonométricas y los invita a utilizarlas en la resolución analítica y la exploración de lo sucedido en las distintas visitas.
Diseñar un problema en contexto que refleje la necesidad de utilizar las razones trigonométricas para su resolución	Diseñar un problema en contexto que requiera la utilización de las razones trigonométricas para su resolución, con características diferentes al abordado durante estas clases.

Tabla 8.2: Modificaciones de la THA

8.3. Análisis desde el marco teórico

En la preparación de la THA fundamentamos desde los principios de la EMR cada momento del diseño, luego de la implementación para este análisis retrospectivo de lo sucedido nos proponemos retomar dichos principios y contrastarlos con lo ocurrido, luego de la puesta en escena del experimento.

El análisis predictivo propuesto en la THA es relevante para fundamentar el contexto de las tareas y, posibilita comprender el proceso de modelización matemática reconociendo que, las componentes horizontal y vertical, se entrelazan continuamente. La tabla que presentamos a continuación es una síntesis del proceso de matematización progresiva que hemos propuesto en la THA, siendo la misma clave para esta etapa de análisis. Como sintetizamos en la 6.3.

8.3.1. Principio de actividad

En la implementación de la THA las razones trigonométricas, surgen como una herramienta más para la medición indirecta de distancias inaccesibles, es decir, surgen como otra forma de organizar la situación inicial real que se estudia. Mediante esta THA las razones trigonométricas se aprenden matematizando y no como un conjunto de fórmulas preconstruídas. Las relaciones surgen de la exploración y experimentación mediada por el software de geometría dinámica.

La actividad transita entre la utilización de herramientas y habilidades de medición, estimaciones, visualización y manejo de objetos geométricos y generalizaciones de relaciones, todas ellas actividades en interacción continua a lo largo de la THA.

8.3.2. Principio de realidad

El contexto en el que se propone el experimento es realista, resultó imaginable para los estudiantes. Se constituyó en el punto de partida para la matematización y también en generador de significado, siempre a disposición para que los estudiantes lo recuperen cuando perdían el sentido de lo que estaban haciendo. Además, el contexto propició el surgimiento de distintas estrategias informales por parte de los estudiantes y oportunidades para desarrollar su lenguaje matemático.

La propuesta inicial de una situación abierta, para la generación de preguntas relacionadas con las situación, además de ser un contexto cercano a los estudiantes, debido a las condiciones climáticas adquirió especial relevancia. El docente, en su rol de guía, desempeñó un papel crucial para consensuar en el plenario, la selección adecuada de la problemática.

8.3.3. Principio de reinvención guiada

Los estudiantes se involucraron de manera activa, en interacción con los pares y bajo la guía del docente. Transitaron un proceso de reinvención guiada de las razones trigonométricas, experimentando la necesidad del surgimiento de estos conceptos como herramientas para organizar el fenómeno de la medición indirecta.

El docente tomó el rol de mediador entre los estudiantes y la tarea, entre los estudiantes entre sí, entre las producciones informales que producen los estudiantes y los objetos y herramientas formales ya institucionalizadas de la matemática.

8.3.4. Principio de interacción

En la THA el aula funcionó como espacio de acción y reflexión tanto individual como grupal y colectiva. Tanto las discusiones internas del grupo, los plenarios de discusión, los intercambios entre docentes y estudiantes en los grupos pequeños resultaron esenciales para la evolución de los modelos emergentes y del lenguaje de los estudiantes.

El trabajo con el software Geogebra, propició el progreso en la forma de expresar, de modo simbólico y geométrico la situación, además de encontrar una primera solución aproximada. En definitiva, mediante la interacción con esta herramienta los estudiantes experimentaron y generalizaron, consideramos que fue fundamental en el proceso de matematización progresiva.

8.3.5. Principio de interrelación

La THA resultó propicia para la interrelación entre cuestiones geometricas, de la medida y del álgebra. En constante interacción los estudiantes vivenciaron la necesidad de utilizar herramientas de medición, desarrollaron estrategias para las medición de distancias inaccesibles y una vez que tuvieron disponible esta nuevas herramientas (las razones trigonométricas), las utilizaron para profundizar el análisis realizado de la situación realista abordada.

El trabajo mediado por el Software GeoGebra claramente potenció la exploración y las experiencias de interacción entre lo geométrico, la medida y lo algebraico para abordar la resolución del problema y para el análisis de las soluciones.

8.3.6. Principio de niveles

Día 1

El el Día 1, cuando abordaron las tareas 1, 2 y 3 de la THA, surgen las primeras aproximaciones de los estudiantes a un contexto realista, donde procuramos que evidencien relaciones entre las variables intervinientes en la situación.

Constatamos, un primer acercamiento a un modelo asociado con el nivel de matematización horizontal, donde el conocimiento informal alcanzó para que los estudiantes reconozcan la importancia de las longitudes de las sombras proyectadas por diferentes objetos, para el resguardo de medios de transporte de uso habitual en la ciudad, como son las bicicletas.

Cada grupo formuló conjeturas sobre las problemáticas observadas en el contexto, y varios coincidieron en señalar la ubicación desfavorable de uno de los bicicleteros.

Día 2

El reconocimiento de una problemática contextual real, impulsó a los estudiantes a la búsqueda de posibles herramientas de medición y a esquematizar el contexto para registrar los datos relevantes.

Como se evidencia en la Figura 8.11, se destaca el reconocimiento de las sombras proyectadas por el edificio del CUG y los árboles que se encuentran en la parquización. Sin embargo, aún no existe un mecanismo que valide matemáticamente la funcionalidad del modelo conjeturado por ellos.

Es importante señalar que el bosquejo del contexto, no satisface en su totalidad con la THA, y ello se debe a la falta de detalles en sus representaciones y descripciones.

Estas observaciones las asociamos con el hecho que, al no encontrarse en el CUG y trabajar con datos certeros sobre ciertas longitudes, las imágenes del escenario delineadas se hallaron desprovistas de detalles significativos. Además, algunos estudiantes era la primera vez que acudían al mismo y por ello la omisión de éstos.

En este sentido, los modelos emergentes están arraigados a la propia situación que les dio origen y es por esto que, los objetos matemáticos no se presentan de manera explícita.

Más allá de las cuestiones mencionadas, todos los estudiantes seleccionaron lugares viables para la colocación de los bicicleteros según lo vivenciado el primer día. En este proceso, cada grupo estimó la posición de los bicicleteros en relación a las franjas horarias, considerando la posición del sol según la hora del día. Es evidente en este caso que, al lenguaje informal que venían utilizando, le están incorporando características matemáticas implícitas como ser el ángulo de inclinación y longitud de las sombras.

Estas acciones de los estudiantes corresponde a un *nivel situacional*, donde sus conjeturas sirven como un puente para que los conocimientos no matemáticos guían la emergencia de modelos que explicitan la relación entre las longitudes objeto-sombra y objeto-ángulo de inclinación del sol-sombra. Además, observamos que el lenguaje utilizado para responder la propuesta de trabajo es principalmente verbal, evidenciando que aún no han incorporado elementos matemáticos en sus expresiones.

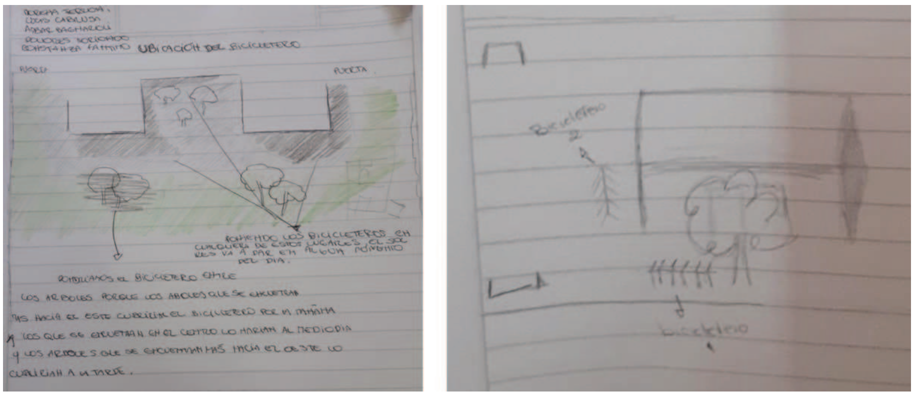


Figura 8.1: Nivel Situacional

En síntesis, destacamos que en esta primera etapa de la THA, encontramos producciones de los estudiantes con las siguientes características:

- **Modelo**: el dibujo se refiere totalmente al contexto.

- **Lenguaje**: predomina el lenguaje verbal.
- **Nivel de comprensión**: situacional.
- **Construcción del Sentido Trigonométrico**: representación geométrica del enunciado del problema (Bosquejo).

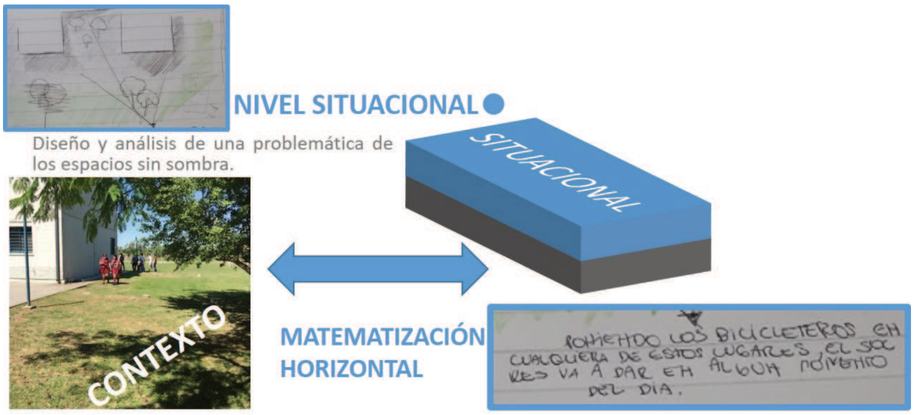


Figura 8.2: Nivel Situacional

Día 3

En el momento que arribamos en la segunda visita al CUG, se logró evidenciar en los estudiantes el reconocimiento del cambio en las longitudes de las sombras a medida que varía la posición del sol, resultado del cambio de horario en la visita debido al calor intenso. Los diálogos dan cuenta de este proceso (ver Anexo C.1).

Los estudiantes continuaron con el trabajo en grupos para comenzar con sus mediciones. Destacaremos las producciones de aquellos equipos de trabajo que emplearon conceptos matemáticos relevantes para abordar la situación.

Es importante destacar que los modelos anticipados, ponen de manifiesto la manera en que el contexto permite el trabajo en diferentes niveles de conceptualización, de acuerdo a las posibilidades de los estudiantes.

Los conocimientos informales se enriquecen al integrar elementos de la matemática, particularmente de la geometría, para abordar la situación.

Los equipos de trabajo han avanzado en su lenguaje al incorporar conceptos como ángulos y longitudes en su análisis. Este proceso refleja un desarrollo cognitivo donde los estudiantes, partiendo de su comprensión inicial, integran gradualmente herramientas y conceptos matemáticos más formales para resolver el problema planteado. Es relevante destacar cómo la aplicación de estos elementos matemáticos contribuye a una mayor precisión y profundidad en sus aproximaciones y soluciones.

De este modo, se reconoce dentro de la matematización vertical, el *nivel referencial*, relacionado con la construcción de un *modelo de* la situación, que no se desprende del contexto pero incorpora objetos matemáticos.

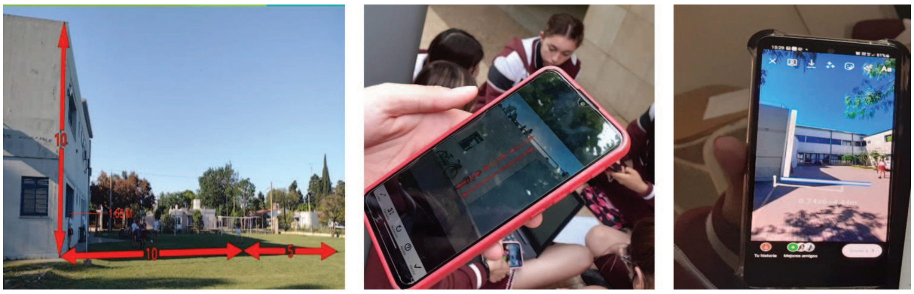


Figura 8.3: Nivel Referencial

En síntesis, destacamos que en esta segunda etapa de la THA, encontramos producciones de los estudiantes con las siguientes características:

- **Modelo**: surge el "Modelo de" la situación, sigue dependiendo del contexto e incorpora objetos matemáticos.
- **Lenguaje**: surgen referencias a objetos geométricos.
- **Nivel de comprensión**: referencial.
- **Construcción del Sentido Trigonométrico**: comprensión del proceso de medir y de la estimación en situaciones de medida(Dibujo a escala), interacción entre las habilidades del sentido de la medida, el geométrico (Articulación Medida-Geométrico).

Figura 8.4: Nivel Referencial

Día 4

Los estudiantes tenían escasos conocimientos con respecto al manejo del software debido a la falta de experiencia previa en años anteriores, sin embargo lograron rápidamente utilizarlo para diseñar el dibujo a escala de la situación.

La mayoría de los grupos representaron los datos mediante triángulos rectángulos simulando la estructura del edificio y/o árboles, así como la sombra proyectada por éstos. Un grupo de estudiantes intentó simular la estructura del edificio en 3D pero al no encontrar una estrategia efectiva, decidieron trabajar en el plano.

Consideramos que fue clave la interacción con esta herramienta digital para descontextualizar, explorar y experimentar las relaciones entre los elementos del triángulo, los estudiantes seleccionaron escalas apropiadas según sus mediciones. Al desplazar el vértice de la base del triángulo (el que corresponde al ángulo agudo), observaron que la misma variación de la sombra que experimentaron en el CUG.

A medida que el docente recorría los grupos para observar cómo evolucionaban sus trabajos, uno de ellos compartió su producción en GeoGebra y destacó que al arrastrar el vértice de la base alejándolo del ángulo recto, la longitud del lado se extendía y el ángulo con respecto a la vertical se ampliaba, imitando así el cambio que experimentaban las sombras a medida que transcurrían las horas siguiendo el movimiento del sol.

La totalidad de los grupos de estudiantes, al visitar el lugar en diferentes horarios, advirtieron que las sombras proyectadas por el edificio y/o los árboles, dependían directamente de la posición del sol según la franja horaria que estaban analizando. Por este motivo, al ingresar sus datos en GeoGebra, los estudiantes estimaron y concluyeron respecto de la mejor posición para ubicar los bicicleteros.

Los estudiantes trasladaron las mediciones recolectadas en el CUG al GeoGebra utilizando las escalas que consideraron proporcionales, lo que les permitió crear un *modelo para* analizar situaciones de este tipo. Observamos a partir de incorporar esta herramienta una generalización que se condice con evidencias de un *nivel general* en el proceso de matematización progresiva. Además, en el lenguaje se detecta la inclusión progresiva de objetos, propiedades nociones matemáticas para fundamentar las decisiones.

Figura 8.5: Nivel General

Día 5

Cada grupo presentó sus conjeturas a partir del modelo producido derivado de los datos recolectados, argumentando su utilización con conceptos matemáticos que estimaron los más adecuados para el abordaje de la situación.

Estos modelos evidencian el proceso de matematización progresiva experimentado por los estudiantes, donde la identificación de las relaciones entre las magnitudes desempeña un papel fundamental para dar sentido a la relación variacional entre las magnitudes involucradas. Este proceso se evidencia cuando algunos grupos expresan inquietudes sobre cómo la inclinación del sol afecta las longitudes de las sombras. Estas manifestaciones dan cuenta que los estudiantes reconocen las limitaciones de sus modelos iniciales y reconocen la necesidad de incorporar elementos adicionales para abordar la situación desde una perspectiva más completa.

De esta manera, los integrantes de cinco grupos elaboraron el bosquejo de un modelo matemático que emplea herramientas propias de la disciplina y se distancia del contexto inicial presentado. Esto les permitió establecer la relación entre las magnitudes involucradas, lo que indica que los estudiantes se encuentran asociados a un nivel de comprensión *general*, observamos en la presentación del video la evolución en el lenguaje matemático, como se evidencia en plenario del Día 5 (ver Anexo C.1)

Candela: *con eso que hicimos allá, volcamos esos valores en el GeoGebra y unimos el punto donde termina la sombra con el eje "y" porque sabemos que nos queda un triángulo rectángulo. Porque la pared del edificio forma un ángulo de* 90° *con el piso.*

<u>Milena</u>: *después medimos con una cinta métrica la sombra que había en ese lugar y para obtener el perímetro del triángulo rectángulo que nos quedó, aplicamos el teorema de Pitágoras que dice: hipotenusa es igual a la raíz de un lado al cuadrado más el otro lado al cuadrado.*

Las producciones de los videos demuestran que, el abordaje de una problemática contextual, la elaboración de un boceto con medidas aproximadas cuantificadas según sus planes de acción y el empleo del software para volcar el conjunto de información extraída, fueron pasos necesarios para que los estudiantes identifiquen la vinculación existente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y la amplitud de alguno de sus ángulos agudos. La dinámica que presentó el software al mover el vértice inferior del triángulo, añadió más realismo a sus bocetos donde la gran mayoría de los grupos comentó a la docente que al desplazar el vértice simulaba ser el movimiento que tenía el sol a medida que transcurrían las horas del día. Es decir, cuanto más pequeña es la longitud del cateto de la base más cerca del mediodía se encontraba el sol y a medida que crecía el largo reproducía el paso de las horas.

En síntesis, destacamos que en esta tercera etapa de la THA, encontramos producciones de los estudiantes con las siguientes características:

- **Modelo**: "Modelo para" situaciones de este tipo, el modelo se desprende del contexto .
- **Lenguaje**: fundamentan procedimientos con teoremas que vinculan los objetos geométricos.
- **Nivel de comprensión**: general.
- **Construcción del Sentido Trigonométrico**: identificación de los elementos del triángulo rectángulo y las relaciones geométricas (Tratamiento geométrico), interacción entre las habilidades del sentido de la medida, el geométrico y el algebraico (Articulación Medida-Geométrico-Algebraico).

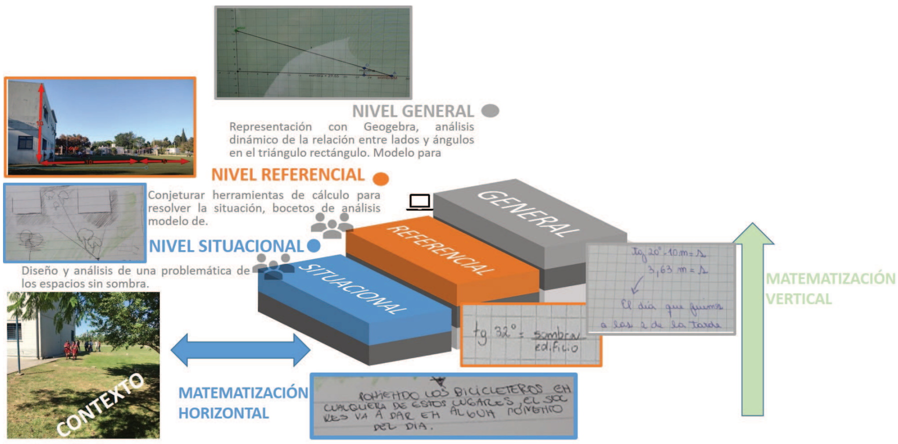


Figura 8.6: Nivel General

Día 6

Luego de la puesta en común de los videos en el plenario y la presentación formal de las razones trigonométrica, se les solicita a los estudiantes que corroboren los resultados obtenidos en las mediciones, mediante el uso del GeoGebra y las estimaciones realizadas estos días, utilizando ahora como herramienta las razones trigonométricas.

En este contexto, advertimos que cada grupo de estudiantes construye nuevamente un modelo del entorno, donde el empleo de símbolos y notaciones matemáticas es adecuado, situándolos en un *nivel formal*. Esto se debe a su capacidad para abstraer y situar en un contexto puramente matemático los elementos trabajados a lo largo de las tareas propuestas.

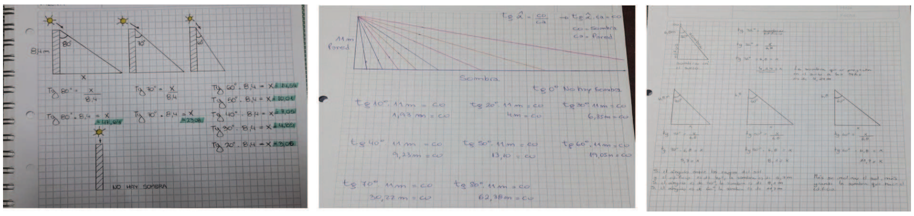


Figura 8.7: Nivel Formal

Las propuestas de nuevos problemas resultó interesante respecto de cómo encontraron problemas reales donde utilizar como herramientas las razones trigonométricas para su resolución.

Problema 1: La heladería nueva de la ciudad quiere colocar un toldo para que sus clientes puedan consumir helado a la sombra. La pared mide 5m pero el toldo está ubicado en los 2m superiores y su diagonal mide 3m. ¿Cuántos metros de sombra dará?¿Qué ángulo forma el toldo con la pared?

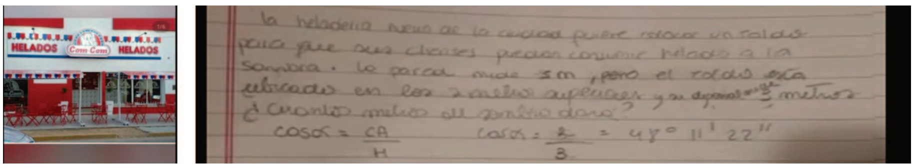


Figura 8.8: Problema propuesto por el Grupo 1

Problema 2: Determina la altura que posee la mitad de la escalera y luego determina todos sus ángulos.

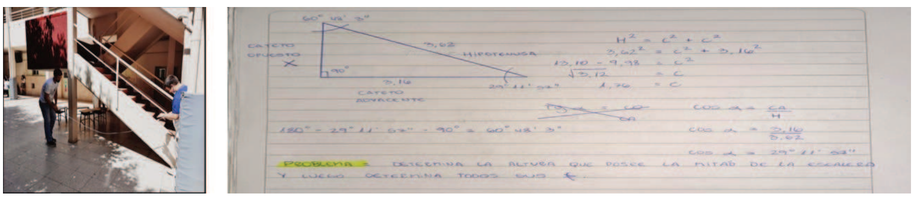


Figura 8.9: Problema propuesto por el Grupo 2

Problema 3: En el ferrocarril de nuestra ciudad hay un problema de sombras al cuál buscaremos una solución al lado de los galpones hay un espacio verde en donde los habitantes de Gálvez van a pasar la tarde los fines de semana. El problema que existe es que no hay sombra en casi toda la tarde. Para solucionar este problema buscaremos la solución en función a lo que aprendimos la clase anterior.

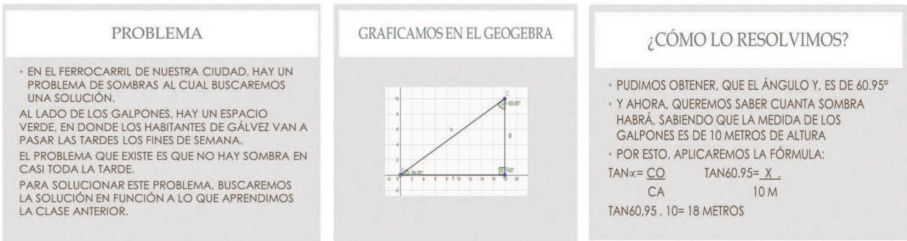


Figura 8.10: Problema propuesto por el Grupo 3

En síntesis, destacamos que en esta cuarta etapa de la THA, encontramos producciones de los estudiantes con las siguientes características:

- **Modelo**: los modelos son matemáticos.

- **Lenguaje**: emplean símbolos y notaciones matemáticas convencionales.

- **Nivel de comprensión**: formal.

- **Construcción del Sentido Trigonométrico**: Selección de la razón trigonométrica adecuada, en función de los datos y las incógnitas del problema, resolución algebraica del problema (Tratamiento algebraico), interacción entre las habilidades del sentido de la medida, el geométrico y el algebraico (Articulación Medida-Geométrico-Algebraico).

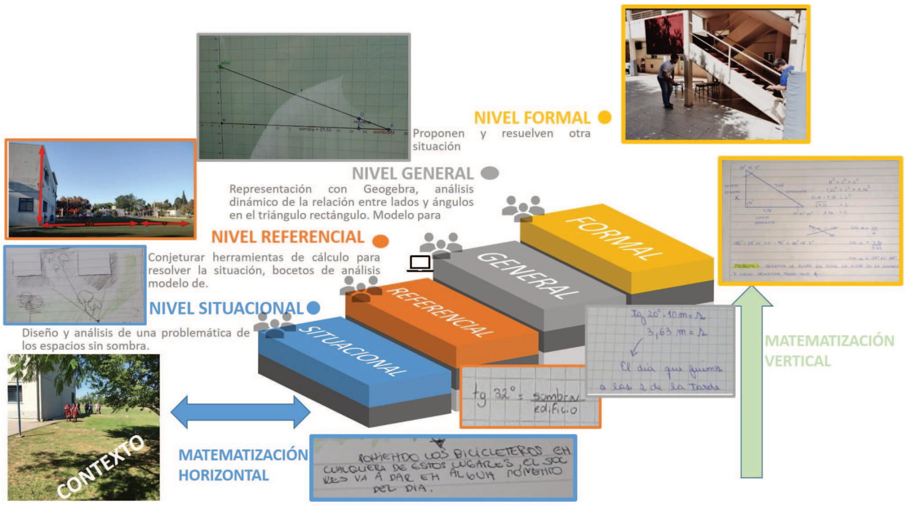


Figura 8.11: Análisis Retrospectivo

En definitiva, consideramos que la THA implementada contribuye al pasaje de los estudiantes del conocimiento informal al formal a través de un proceso de matematización progresiva, siguiendo los principios de la EMR, esto se evidencia tanto en la evolución del modelo, como en el lenguaje y en los niveles de comprensión. En este último aspecto, es importante destacar que la evolución en los niveles de comprensión no es lineal para todos los estudiantes; la experiencia de cada grupo es diferente. Los momentos de discusión al igual que la incorporación del trabajo con el software y la guía del docente propiciando la interacción entre las cuestiones de medida, las geométricas y las algebraicas resultaron fundamentales para favorecer dicha evolución.

En cuanto al *sentido trigonométrico*, interpretamos que la experiencia como la diseñada en la THA resulta propicia para desarrollar el conjunto de habilidades pertinentes en los estudiantes para matematizar contextos realistas en las que está involucrada la resolución de triángulos rectángulos, utilizando las razones trigonométricas.

Capítulo 9

Conclusiones

. . . todo es según el cristal con que se mira.
RAMÓN DE CAMPOAMOR

9.1. Introducción

En este capítulo, revisamos minuciosamente los resultados presentados en los capítulos anteriores, enfocándonos especialmente en las hipótesis de la Sección 1.2.6, establecidas al comienzo de la investigación. Al llegar al cierre de este capítulo, compartimos conclusiones y reflexiones generales que abordan tanto los hallazgos obtenidos como las implicaciones de la propuesta para el desarrollo del sentido trigonométrico en los estudiantes.

Además, exploramos las conexiones entre los resultados encontrados y las hipótesis de la investigación, resaltando los puntos claves que surgen del análisis. También, consideramos cómo las observaciones pueden influir en futuras investigaciones y contribuir al avance del conocimiento en el campo de la enseñanza de la matemática. Este proceso de reflexión nos permite evaluar la solidez de las hipótesis originales y proporcionar una visión integral de la contribución del presente trabajo al ámbito educativo.

9.2. Primera Parte

9.2.1. Dificultades en las producciones de ingresantes

En coherencia con la primer hipótesis de la investigación, en la Sección 4.5, presentamos los resultados del análisis de las producciones de los estudiantes dentro del contexto de las evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). En particular, nos enfocamos en identificar evidencias relacionadas con las dificultades que los estudiantes enfrentan en el tema de razones trigonométricas, obteniendo resultados significativos.

Para este propósito, establecimos categorías de análisis con el fin de organizar las dificultades evidenciadas en la resolución de ejercicios o problemas relacionados con triángulos rectángulos. De esta manera, buscamos identificar los dominios específicos que exigen atención y fortalecimiento. En este proceso, nos apoyamos principalmente en la acepción de *sentido trigonométrico* establecida en el capítulo 3.3.5. La introducción de esta definición en el trabajo se constituyó en una guía esencial en nuestra búsqueda, debido a que posibilitó resaltar de manera clara las inconsistencias presentes en las producciones de los estudiantes al abordar las tareas de resolución de problemas de triángulos rectángulos.

La muestra recogida consistió en 48 exámenes realizados en el CUG en cinco ediciones diferentes, obtuvimos como resultado que un 42 % de los exámenes evidencian dificultades en la resolución de problemas de triángulos rectángulos. Acordamos con Martín-Fernández (2019), quién menciona que estas dificultades influyen en el dominio matemático universitario al impedir el establecimiento de ciertas relaciones, como la variación lado-ángulo, cuestión que afecta directamente el aprendizaje de funciones, límites, derivadas e integrales.

Las dificultades identificadas las clasificamos en las siguientes categorías: bosquejo, geométricas, razón, algebraicas y respuestas. Las evidencias revelan que todos los estudiantes presentan dificultades en el tratamiento geométrico y de la medida, ya sea por omisión de la elaboración de bosquejos a escala, la dificultad en identificar los elementos del triángulo, la presencia de incoherencias geométricas, el desconocimiento de propiedades geométricas relacionadas con la suma de los ángulos interiores y la falta de reconocimiento de los ángulos alternos internos entre paralelas. Además, destacamos que el abordaje de los triángulos rectángulos a partir de elaboración de bosquejos a escalas, podría ser una buena estrategia para obtener una primera aproximación a la respuesta (estimación), lo que favorecería la interpretación y control de los procedimientos tanto en la resolución como en el análisis de las respuestas.

Además, evidenciamos que un 35 % de exámenes analizados presentan dificultades con la interpretación del bosquejo de la situación en el contexto dado, siendo esta una característica esencial para la práctica de modelar una realidad macro no manipulable (Montiel, 2013) y la creación de modelos geométricos que otorgan sentido a los conceptos trigonométricos.

En relación con las dificultades algebraicas, evidenciamos que un 40 % de las producciones de los estudiantes presentan este tipo de desaciertos en la manipulación de las expresiones propias del álgebra. Estas inconsistencias surgen al enfrentar el desafío de emplear herramientas algebraicas al momento de la resolución analítica de los problemas trigonométricos.

En cuanto a la selección correcta de la razón y en la correcta expresión de la razón seleccionada, evidenciamos que un 10 % de los estudiantes presentan dificultades. Esto sugiere que existe una memorización de fórmulas carentes de sentido para el estudiante. En algunos casos, notamos que los estudiantes registran todas las fórmulas antes de abordar la resolución de la tarea, indicando una falta de conexión entre la selección de la razón y su aplicación efectiva en el contexto del problema. Este patrón de comportamiento destaca la necesidad de promover una comprensión más sólida de los conceptos trigonométricos, ayudando a los estudiantes a comprender su sentido y aplicabilidad en situaciones específicas.

En lo que refiere a las dificultades en el tratamiento de las respuestas, destacamos que un 15 % de los estudiantes presentan inconsistencias al realizar una visión retrospectiva del proceso empleado para resolver el problema. Sostenemos que este tipo de dificultad surge cuando las prácticas matemáticas no se contextualizan adecuadamente, especialmente en el ámbito de las prácticas trigonométricas. Esto conduce a una falta de comprensión de los objetos matemáticos inherentes a la trigonometría y a una desconexión entre los procedimientos empleados y el sentido de los resultados obtenidos. Estos hallazgos resaltan la importancia de no sólo enfocarse en la resolución de problemas, sino también en la reflexión sobre el proceso, integrando así la comprensión conceptual de la trigonometría en la práctica matemática.

Es relevante mencionar que en la interacción entre los aspectos geométricos, los de medición y los algebraico, tanto en las evaluaciones con dificultades como en aquellas que están aprobadas, se evidencia una ausencia de conexión entre lo obtenido a través de la resolución algebraica y lo que los estudiantes podrían visualizar y estimar geométricamente a partir del dibujo. Esta desconexión sugiere una separación entre los procesos algebraicos, los de medición y las representaciones geométricas, indicando una brecha en la comprensión integral de los problemas trigonométricos. Esta atención de interrelación destaca la importancia de fomentar estrategias que promuevan la integración de dichos procesos en el abordaje de los problemas trigonométricos, contribuyendo a una comprensión holística de los conceptos involucrados. En síntesis del análisis de las producciones de los estudiantes tenemos indicios de la validez de la hipótesis 1, recordémosla:

- *Hipótesis 1*: en las producciones de los ingresantes a la universidad de la muestra se evidencian dificultades en la resolución de triángulos rectángulos ligadas a la práctica de modelar situaciones de la vida cotidiana o de otras áreas del conocimiento.

El proceso de identificación de las dificultades presentes en las producciones de los estudiantes que ingresan a la universidad, el estudio de la fenomenología didáctica de las razones trigonométricas y la indagación en los sentidos de los contenidos matemáticos escolares nos brindó herramientas esenciales para indagar en los aspectos específicos que requieren atención en el desarrollo del *sentido trigonométrico* en los estudiantes (ver Figura 9.1), es decir, aquellas habilidades que serán fundamentales para el dominio matemático universitario.

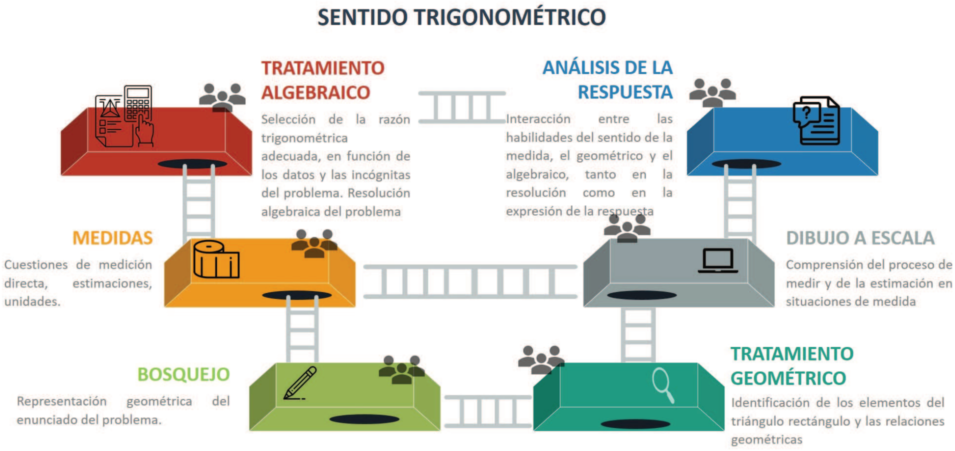


Figura 9.1: Sentido trigonométrico

9.2.2. Sentidos y modo de uso en los materiales

Para abordar la segunda y tercera hipótesis de trabajo, llevamos a cabo entrevistas con docentes de Gálvez (Santa Fe) con el objetivo de indagar acerca de los libros de textos que emplean para el tratamiento del tema razones trigonométricas en sus clases. A partir de sus respuestas, conformamos la muestra de libros de texto. Además, agregamos a dicha muestra, el material propuesto en el curso de articulación disciplinar de matemática y realizamos el análisis de estos recursos. Para ello, definimos categorías reformuladas de la propuesta de Ruiz-Hidalgo (2016).

En relación a la categoría términos, observamos que en todos los libros, enfatizan con mayor frecuencia los conceptos: ángulos, razón, valor del lado desconocido, altura, distancia y longitud. Sin embargo, otros términos como variación o relación, no son empleados de manera consistente en todos los materiales. Además, en cuanto a los recursos recomendados, destacamos el énfasis en el uso de la calculadora científica, sin embargo no encontramos propuestas de tareas que requieran el uso de instrumentos de medición y/o recursos tecnológicos como programas de geometría dinámica para su resolución. A partir de esta observación, interpretamos que estos materiales ofrecen una visión estática de las razones trigonométricas.

En cuanto a los contextos abordados en los libros de textos, observamos una preferencia por el enfoque algebraico en la mayoría de los casos, con algunos incluyendo también el numérico, mientras que el contexto geométrico está ausente. En este aspecto, encontramos coincidencia con otros investigadores en educación matemática, tales como Fiallo (2010), Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021). De acuerdo con Fiallo (2010), las tareas enfocadas en estos libros suelen resolverse mediante el uso de expresiones algebraicas para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo rectángulo promoviendo así un proceso memorístico, rutinario y mecánico. Esto dificulta el establecimiento de relaciones y conexiones entre los conceptos y sus representaciones gráficas.

Además, observamos que las propuestas presentadas en libros de texto están disociadas de las nociones y procedimientos geométricos y de la medida, tales como el uso de instrumentos de medición para distancias y ángulos, el dibujo a escala, la verificación gráfica de los resultados obtenidos, discusiones sobre la aproximación, las unidades de medidas, las características y las relaciones entre los objetos geométricos que surgen, entre otras consideraciones relevantes.

Asimismo, detectamos que todos los libros de textos dan prioridad al contexto evocado, dejando al margen tanto el contexto simulado y como el real. Estos hallazgos resaltan la necesidad de establecer nuevas relaciones en las cuales los conceptos se presentan de manera dinámica, permitiendo que los estudiantes observen, interpreten, conjeturen, validen, modelen y formalicen situaciones de la vida cotidiana.

Los fenómenos analizados en los libros destacan principalmente las tareas relacionadas con el cálculo de longitudes y ángulos. Sin embargo, consideramos importante señalar que, en la práctica, estas tareas no se traducen necesariamente en acciones concretas o experiencias directas de medición. En cambio, se enfatiza más el tratamiento numérico-algebraico como método principal para obtener los valores deseados. Es fundamental reconocer esta desconexión entre la aplicación práctica y la resolución algebraica, ya que influye en la adquisición del sentido trigonométrico por parte de los estudiantes.

En relación con las situaciones priorizadas por los libros de texto analizados, se destaca una preferencia por aquellas de naturaleza científica, ya sea en el ámbito matemático o en contextos extramatemáticos. Es decir, se priorizan situaciones donde las aplicaciones de la matemática se extienden a cuestiones del mundo natural y, además, a temas vinculados con la ciencia y la tecnología (extramatemáticas). También se da importancia a la resolución de ejercicios que requieren la aplicación de las razones trigonométricas para su solución, destacándose así las situaciones de carácter matemático. No hemos identificado situaciones personales, laborales o escolares ni públicas o sociales en las propuestas de los libros de texto analizados, lo que destaca la notable desconexión entre los contenidos matemáticos presentados y la aplicación práctica en la vida cotidiana del estudiante En síntesis, las tareas propuestas en los libros de textos ofrecen:

- Una visión estática de las razones trigonométricas.
- Una prioridad del tratamiento algebraico de las mismas.
- Una disociación con el tratamiento geométrico y las cuestiones de la medida en lo trigonométrico.

- Situaciones que se encuentran alejadas de la realidad de los estudiantes, lejos de las cuestiones personales, educativas y de la comunidad.

El análisis de los textos escolares se presenta como una herramienta valiosa para los docentes, proporcionándoles un marco sólido de interpretación que les permite revisar y seleccionar con criterio los materiales de trabajo. Esta sección de la investigación cobra especial relevancia al instar a cada docente a realizar una revisión crítica de los libros de texto utilizados en sus clases.

Consideramos que el libro de texto debe ser un recurso de apoyo para el docente en sus clases, evitando su uso excesivo para no privar a los estudiantes de la riqueza del tratamiento geométrico y de la medida asociadas a las razones trigonométricas. Además, es esencial que los docentes incorporen diversos materiales, utilizando las categorías mencionadas, para proporcionar a los estudiantes una visión integral del concepto trabajado.

En función al análisis de los materiales destinados a la enseñanza de las razones trigonométricas y en la mayoría de las tareas propuestas en las evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática, observamos que se priorizan:

- Con respecto a los términos: distancias y amplitudes de ángulos.
- Con respecto a los contextos: reales evocados.
- Con respecto al tratamiento de los problemas: algebraico (disociación del contexto geométrico y de las cuestiones propias de la medida).
- Con respecto a los fenómenos: cálculo de distancias o amplitudes de ángulos.
- Con respecto a las situaciones: extramatemáticas.

En consecuencia, las tareas planteadas en las evaluaciones reflejan aquellas presentes en la mayoría de los textos analizados, sin embargo generan las dificultades que describimos en el capítulo 4.1. Finalmente, interpretamos que en el análisis realizado encontramos evidencias de las restricciones y limitaciones presentes en el tratamiento escolar y del curso de articulación disciplinar del ingreso, con la correspondiente salvedad en cuanto a la limitación en el tiempo en que se destina al tema en el desarrollo del curso, inciden en las dificultades para construir el sentido trigonométrico en los estudiantes. Es decir, se dificulta el desarrollo de habilidades para modelar situaciones de la vida cotidiana o de otras áreas del conocimiento en las que está involucrada la resolución de problemas de triángulos rectángulos.

Por lo tanto, recordemos las hipótesis 2 y 3, que entendemos resultaron válidas a la luz de los resultados y con más elementos de los que habíamos conjeturado, recordémoslas:

- *Hipótesis 2*: las tareas escolares propuestas del tema por los textos analizados, si bien se presentan en contextos, situaciones y fenómenos diversos, hacen hincapié en el proceso algebraico más que en el geométrico en la construcción del sentido trigonométrico.

- *Hipótesis 3*: las experiencias con situaciones reales están ausentes en las propuestas escolares del tema en los materiales analizados.

Consideramos que no sólo encontramos evidencias de la veracidad de la hipótesis 2, sino que las tareas escolares propuestas se encuentran disociadas del tratamiento geométrico y de las cuestiones relacionadas con la medida, así como también, la necesaria interacción entre lo algebraico, lo geométrico y las cuestiones de la medida.

Asimismo, de las respuestas de los docentes destacamos que la ausencia de experiencias reales y también del uso de las herramientas digitales como recurso que aporta dinamismo, posibilidad de exploración y resolución geométrica del problema mediante los dibujos a escala.

En definitiva en esta primera etapa encontramos un tratamiento algebrizado de los problemas de triángulos rectángulos, y como consecuencia de estas restricciones y limitaciones, los estudiantes construyen un *campo semántico personal* pobre de las razones trigonométricas.

Figura 9.2: Tratamiento escolar del tema

9.3. Segunda Parte

La indagación en las producciones de los ingresantes y el análisis de los materiales utilizados por los docentes en sus clases, se constituyeron en un valioso recurso, ya que proporcionaron una base fundamental para la formulación de las tareas dentro de la THA. El diseño del experimento de enseñanza, su implementación y posterior análisis presentado para este trabajo de investigación, permitió a los estudiantes la construcción del *sentido trigonométrico* a partir de propiciar habilidades en un contexto realista. A continuación analizamos los datos obtenidos en el proceso de matematización progresiva por el que transitaron los estudiantes.

- En la THA las razones trigonométricas emergen como una herramienta adicional para llevar a cabo mediciones indirectas de distancias inaccesibles. En otras palabras, se presentan como una alternativa para organizar la situación inicial real que se está investigando.
- El contexto seleccionado para el experimento se caracterizó por su realismo, lo que facilitó a los estudiantes la visualización y comprensión de las tareas. En este escenario, los estudiantes no sólo fueron capaces de emplear diversas estrategias informales, sino que también se vieron inmersos en situaciones que promovieron el desarrollo de su lenguaje matemático.
- Dentro de esta exploración del contexto, resaltamos el papel que cumplieron las imágenes como catalizadoras de la actividad matematizadora, lo que facilitó la transición del conocimiento informal al formal. Las imágenes actuaron como un recurso fundamental para el desarrollo y aplicación de diversos conceptos matemáticos debido a su conexión directa con la vida cotidiana de los estudiantes.
- Los estudiantes se involucraron de manera activa, en interacción con los pares y bajo la guía del docente. Transitaron un proceso de reinvención guiado de las razones trigonométricas, experimentando la necesidad del surgimiento de estos conceptos como herramientas para organizar el fenómeno de la medición indirecta.
- El aula funcionó como espacio de acción y reflexión tanto individual como grupal y colectiva.
- Al enfrentar a los estudiantes a una situación real, constatamos un primer acercamiento a un modelo asociado con el nivel de matematización horizontal, donde el conocimiento informal alcanzó para que los estudiantes reconozcan la importancia de las longitudes de las sombras proyectadas por diferentes objetos, para el resguardo de las bicicletas.
- El reconocimiento de una problemática contextual real, impulsó a los estudiantes a la búsqueda de posibles herramientas de medición y a esquematizar el contexto para registrar los datos relevantes. No obstante, aún no habían establecido un mecanismo que validara matemáticamente la funcionalidad del modelo conjeturado. En este sentido, los modelos emergentes estaban arraigados a la propia situación que les

dio origen y es por esto que, los objetos matemáticos no se presentaban de manera explícita. A medida que incorporaban características matemáticas implícitas, como el ángulo de inclinación y longitud de las sombras, enriquecieron su lenguaje incorporando algunas cuestiones del lenguaje matemático.

- Estas acciones de los estudiantes corresponde a un nivel situacional, donde sus conjeturas sirven como un puente para que los conocimientos no matemáticos guíen la emergencia de modelos que explicitan la relación entre las longitudes objeto-sombra y objeto-ángulo de inclinación del sol-sombra. Además, observamos que el lenguaje utilizado para responder la propuesta de trabajo era principalmente verbal, evidenciando que aún no habían incorporado elementos matemáticos en sus expresiones.

- En esta primera parte, logramos identificar una de las habilidades que organiza el *sentido trigonométrico* y se corresponde a la representación geométrica del enunciado, en este caso a partir de un bosquejo de la situación.

- Los modelos anticipados pusieron de manifiesto la manera en que el contexto permitió el trabajo en diferentes niveles de conceptualización, de acuerdo a las posibilidades de los estudiantes. Los conocimientos informales se enriquecieron al integrar elementos de la matemática, particularmente de la geometría, para abordar la situación. De este modo, se reconoció dentro de la matematización vertical, el nivel referencial, relacionado con la construcción de un modelo de la situación, pero aún no se desprendió del contexto aunque incorpora objetos matemáticos. En este punto podemos destacar como características que constituyen el *sentido trigonométrico* el proceso la medición y la estimación en situaciones de medida, como el dibujo a escala. Es decir, se produjo una interacción entre las habilidades del sentido de la medida y las habilidades geométricas.

- Los estudiantes trasladaron las mediciones realizadas en el contexto real al GeoGebra utilizando escalas que consideraron proporcionales. Esto les permitió crear un modelo para analizar situaciones similares. A partir de la incorporación de esta herramienta, observamos una generalización alineada con evidencias de un nivel general en el proceso de matematización progresiva. Además, en el lenguaje utilizado se detectó la inclusión progresiva de objetos, propiedades y nociones matemáticas para fundamentar sus decisiones.

- Los modelos presentados por los estudiantes evidenciaron el proceso de matematización progresiva, donde la identificación de las relaciones entre las magnitudes desempeñó un papel fundamental para dar sentido a la relación variacional entre las magnitudes involucradas. En este punto destacamos la evolución del *sentido trigonométrico* al establecerse interacciones entre las habilidades del sentido de la medida, el geométrico y el algebraico.

- En la revisión de los resultados obtenidos, advertimos que cada grupo de estudiantes construyó nuevamente un modelo de la situación, donde el empleo de símbolos y notaciones matemáticas es adecuado, situándolos en un nivel formal. Esto se debe a su capacidad para abstraer y situar en un contexto puramente matemático los elementos trabajados a lo largo de las tareas propuestas.

- La formulación de nuevas situaciones problemáticas por parte de los estudiantes, nos da indicios de una construcción del *sentido trigonométrico*. En efecto, se evidenciaron en esta tarea habilidades notables al seleccionar la razón trigonométrica apropiada en función de los datos y las incógnitas del problema. Además, la resolución algebraica del problema evidencia la interacción efectiva entre las habilidades del sentido de la medida, el geométrico y el algebraico, los que destaca una articulación integral de estos aspectos.

En definitiva, en cuanto a la hipótesis 4, que recordamos a continuación, interpretamos que el análisis retrospectivo realizado en el Capítulo 8.1, refleja que es viable y, además, acorde a este tipo de metodología, consideramos que requiere de nuevas implementaciones para continuar retroalimentando y mejorando el diseño.

- *Hipótesis 4*: para superar las restricciones caracterizadas en el tratamiento del tema es viable el diseño de un experimento realista, que propicie la matematización progresiva y la construcción del *sentido trigonométrico*.

La propuesta del experimento realista diseñado consideramos que facilita la transición de los estudiantes desde el conocimiento informal al formal a través de un proceso de matematización progresiva, siguiendo los principios de la EMR. Esta evolución se refleja tanto en la evolución del modelo, como en el lenguaje y en los niveles de comprensión alcanzados. En relación con el *sentido trigonométrico*, interpretamos que experiencias de este tipo resultan propicias para que los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para matematizar contextos realistas que involucran la resolución de triángulos rectángulos mediante el uso de las razones trigonométricas.

Creemos relevante el estudio en la medida en que contribuirá, teórica y metodológicamente, a realizar aportes para mejorar la construcción con sentido de las razones trigonométricas en estudiantes de nivel secundario, cuestión que redundará en la superación de las dificultades evidenciadas en torno al tema en los ingresantes a la universidad.

9.4. Tercera Parte

Finalmente, consideramos que todo lo estudiado en esta tesis nos orienta a continuar debido a que surgen a partir de estas indagaciones inquietudes que pueden convertirse en líneas de futuras investigaciones en torno a este tema, plantearemos a continuación algunas de ellas.

En la THA diseñamos tareas que brindan experiencias con el fenómeno de la medición indirecta de distancias inaccesibles, en futuras investigaciones podríamos abocarnos a los demás fenómenos que describimos en la sección 3.2.4.

Una nueva implementación de la THA consideramos que sería muy interesante, por ejemplo, en el marco del curso de articulación de matemática para el ingreso a la universidad. Otra cuestión que resultaría pertinente, luego de dicha implementación, sería analizar las producciones de los estudiantes y comparlas con los resultados de las evaluaciones que informamos en la Sección 4.1.

En el análisis de los textos escolares, detectamos falencia, la ausencia de un tratamiento completo del tema en todos sus aspectos por lo que consideramos fundamental la producción de un material destinado a docentes y a estudiantes para su abordaje.

Parte III

Anexos

Capítulo A

Anexo A

A.1. Producciones de Estudiantes

En este anexo presentamos las producciones de los 20 estudiantes en el marco de las evaluaciones del curso de articulación disciplinar de matemática de las instancias correspondientes al ingreso 2019 y 2020.

Estudiante 1

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un punto se ve la punta de una palmera bajo un ángulo de elevación de 45°. Si nos alejamos 6 metros hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie de la palmera, vemos la punta superior de la palmera bajo otro ángulo de elevación de 25°. Calcule la altura de la palmera. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura A.1: Tarea del Tema 1

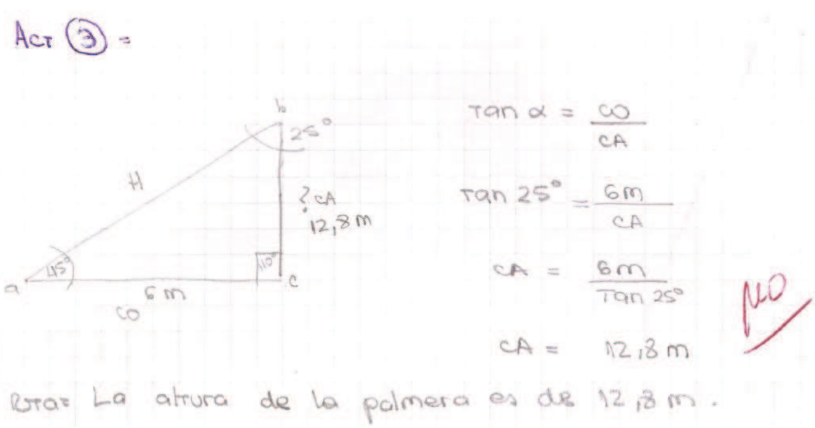


Figura A.2: Resolución de la tarea del Estudiante 1

- Evaluación del 01/12/2018.
- Tema 1.

- Categorización: Bosquejo y tratamiento geométrico.

- Justificación: El bosquejo no se corresponde con el enunciado del problema y no se realiza el dibujo a escala (el ángulo de 45° se presenta de menor amplitud que el de 25°), encuentra el ángulo de 110° (usando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo) y considera que es un triángulo rectángulo.

Estudiante 2

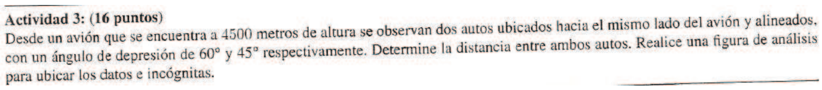

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión y alineados, con un ángulo de depresión de 60° y 45° respectivamente. Determine la distancia entre ambos autos. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura A.3: Tarea del Tema 2

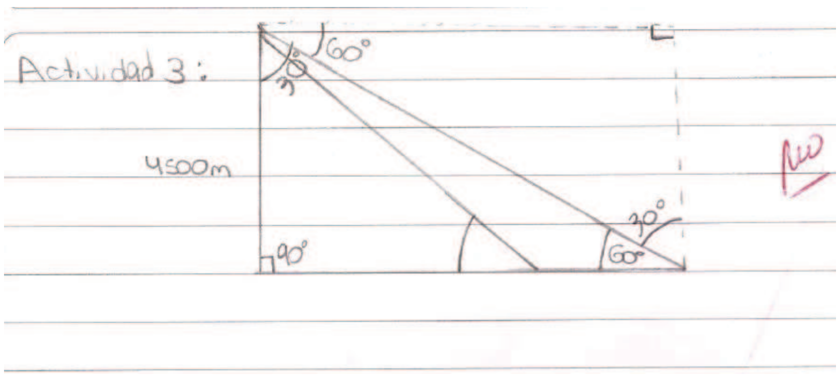


Figura A.4: Resolución de la tarea del Estudiante 2

- Evaluación del 01/12/2018.

- Tema 2.

- Categorización: bosquejo, tratamiento geométrico y respuesta.

- Justificación: El bosquejo no se corresponde con el enunciado del problema, ubica incorrectamente el ángulo de depresión del 2do. auto. No se realiza a escala, según su modelo el ángulo de 45° es mayor que el ángulo de 60°. No resuelve y no responde a lo que solicita la tarea.

Estudiante 3

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión y alineados, con un ángulo de depresión de 60° y 45° respectivamente. Determine la distancia entre ambos autos. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura A.5: Tarea del Tema 2

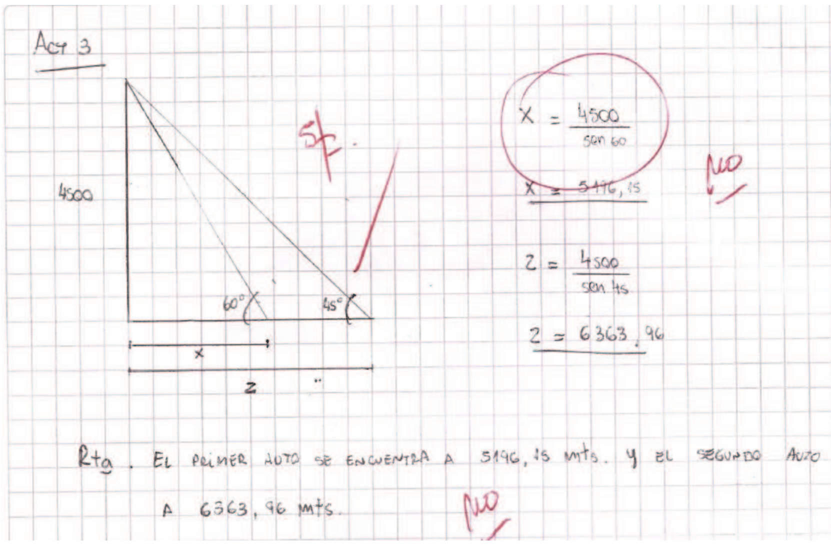


Figura A.6: Resolución de la tarea del Estudiante 3

- Evaluación del 01/12/2018.
- Tema 2.
- Categorización: razón y tratamiento geométrico.
- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, no considera el triángulo isósceles para hallar la medida solicitada, plantea la igualdad algebraica pero no visualiza su significado geométrico. Elige incorrectamente el cociente que corresponde a la razón trigonométrica.

Estudiante 4

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión y alineados, con un ángulo de depresión de 60° y 45° respectivamente. Determine la distancia entre ambos autos. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura A.7: Tarea del Tema 2

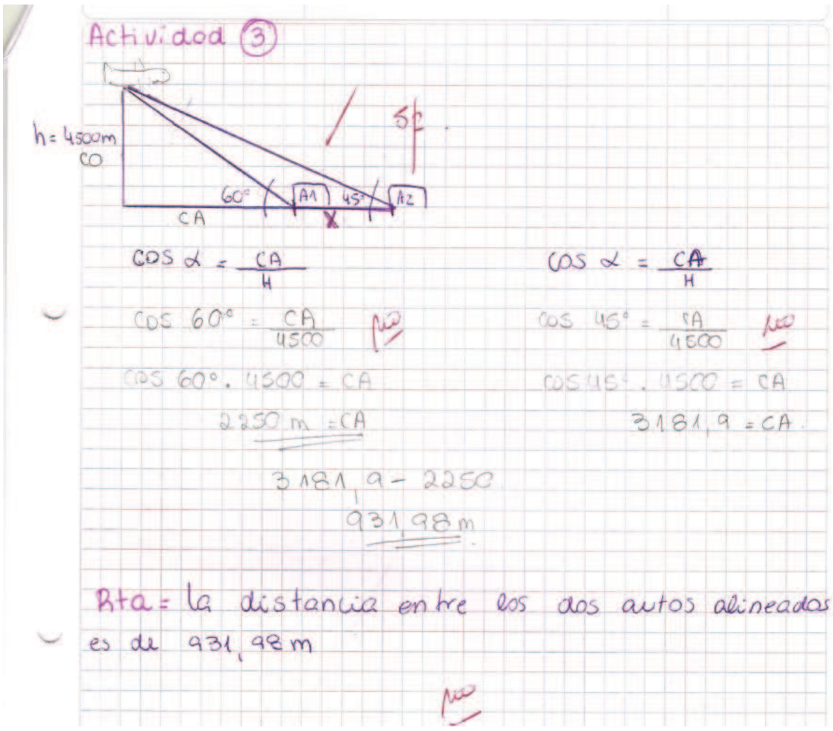


Figura A.8: Resolución de la tarea del Estudiante 4

- Evaluación del 01/12/2018.
- Tema 2.
- Categorización: tratamiento geométrico.
- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, no considera el triángulo isósceles para hallar la medida solicitada y utiliza de manera incorrecta las variables, confunde la hipotenusa con el cateto opuesto al ángulo de 60° en un caso y de 45° en el otro triángulo rectángulo.

Estudiante 5

Actividad 3: (16 puntos)
Desde un punto se ve la punta de una palmera bajo un ángulo de elevación de 45°. Si nos alejamos 6 metros hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie de la palmera, vemos la punta superior de la palmera bajo otro ángulo de elevación de 25°. Calcule la altura de la palmera. Realice una figura de análisis para ubicar los datos e incógnitas.

Figura A.9: Tarea del Tema 1

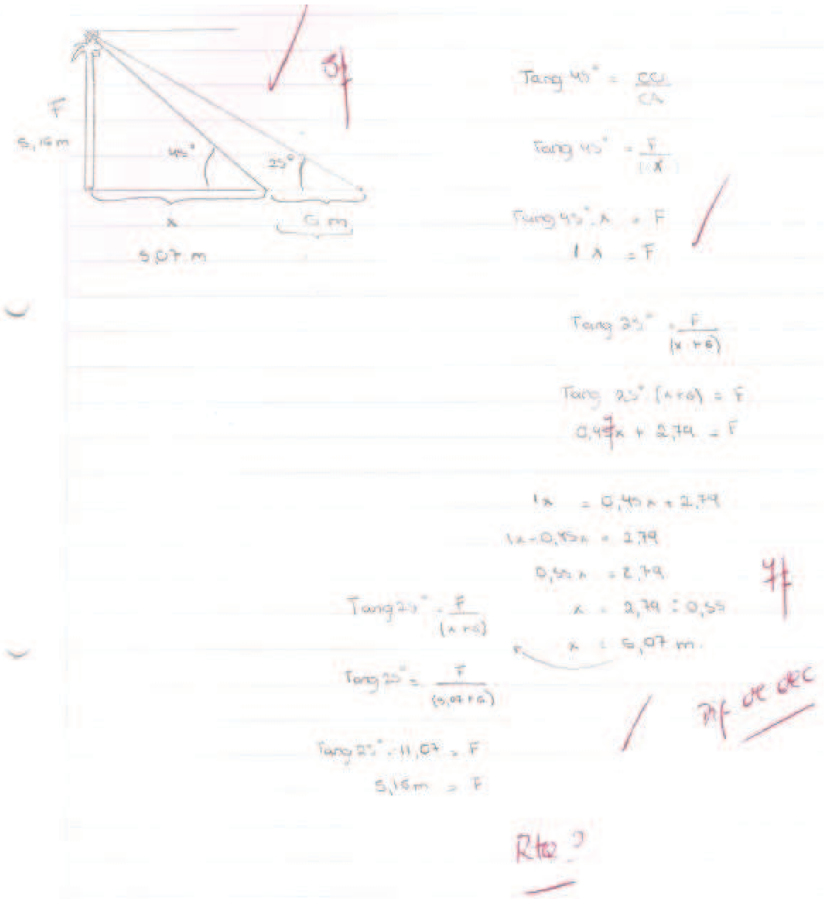
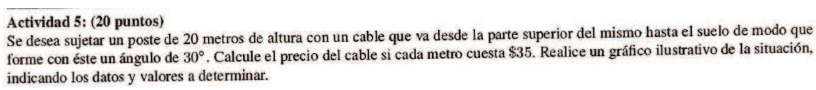


Figura A.10: Resolución de la tarea del Estudiante 5

- Evaluación del 01/12/2018.
- Tema 1.
- Categorización: tratamiento geométrico y respuesta.
- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, no considera el triángulo isósceles para hallar la medida solicitada. No responde a lo que solicita la tarea.

Estudiante 6



Actividad 5: (20 puntos)
Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que va desde la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme con éste un ángulo de 30°. Calcule el precio del cable si cada metro cuesta $35. Realice un gráfico ilustrativo de la situación, indicando los datos y valores a determinar.

Figura A.11: Tarea del Tema 1

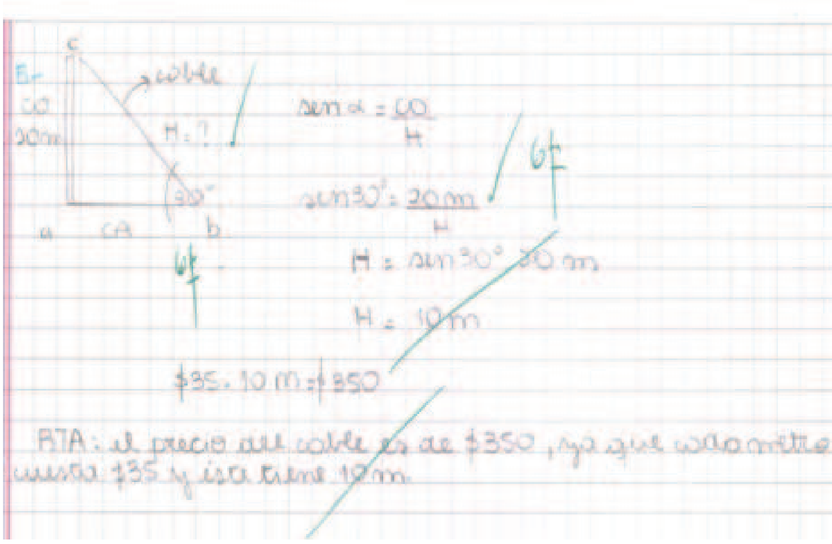


Figura A.12: Resolución de la tarea del Estudiante 6

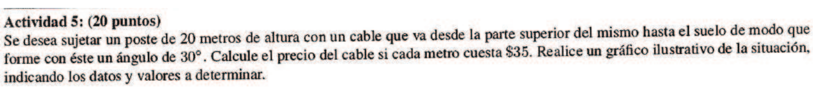
- Evaluación del 15/12/2018.

- Tema 1.

- Categorización: tratamiento geométrico y tratamiento algebraico.

- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, obtiene que la longitud de la hipotenusa es menor que la del cateto en un triángulo rectángulo. En la resolución presenta error algebraico.

Estudiante 7



Actividad 5: (20 puntos)
Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que va desde la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme con éste un ángulo de 30°. Calcule el precio del cable si cada metro cuesta $35. Realice un gráfico ilustrativo de la situación, indicando los datos y valores a determinar.

Figura A.13: Tarea del Tema 1

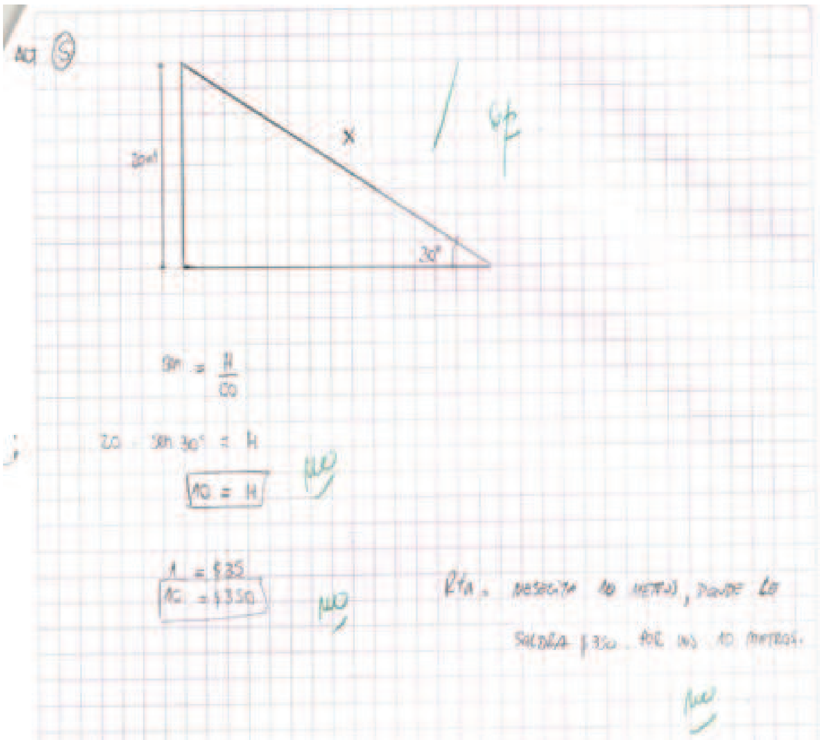


Figura A.14: Resolución de la tarea del Estudiante 7

- Evaluación del 15/12/2018.
- Tema 1.
- Categorización: tratamiento geométrico y razón.
- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, obtiene que la longitud de la hipotenusa es menor que la del cateto en un triángulo rectángulo. En la resolución elige de manera incorrecta el cociente que corresponde a la razón trigonométrica (confunde la razón correspondiente al seno con la de la tangente).

Estudiante 8

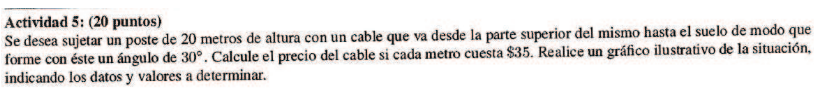

Actividad 5: (20 puntos)
Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que va desde la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme con éste un ángulo de 30°. Calcule el precio del cable si cada metro cuesta $35. Realice un gráfico ilustrativo de la situación, indicando los datos y valores a determinar.

Figura A.15: Tarea del Tema 1

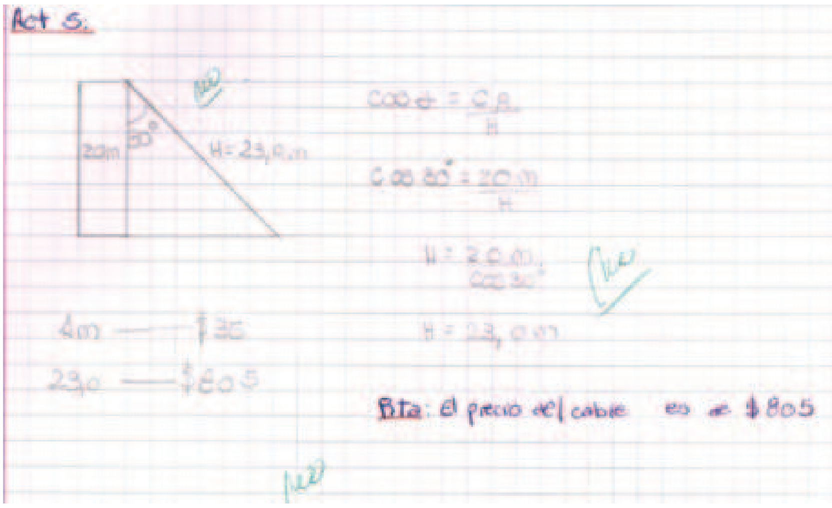


Figura A.16: Resolución de la tarea del Estudiante 8

- Evaluación del 15/12/2018.

- Tema 1.

- Categorización: bosquejo y tratamiento geométrico.

- Justificación: El bosquejo no se corresponde con el enunciado del problema y no se realiza el dibujo a escala.

Estudiante 9

Actividad 3: (15 puntos) Desde un supermercado se observa la terraza de un rascacielos de 527 metros de altura bajo un ángulo de 42°. Calcule la distancia que hay desde el supermercado hasta el rascacielos. Realice una figura de análisis.

Figura A.17: Tarea del Tema 2

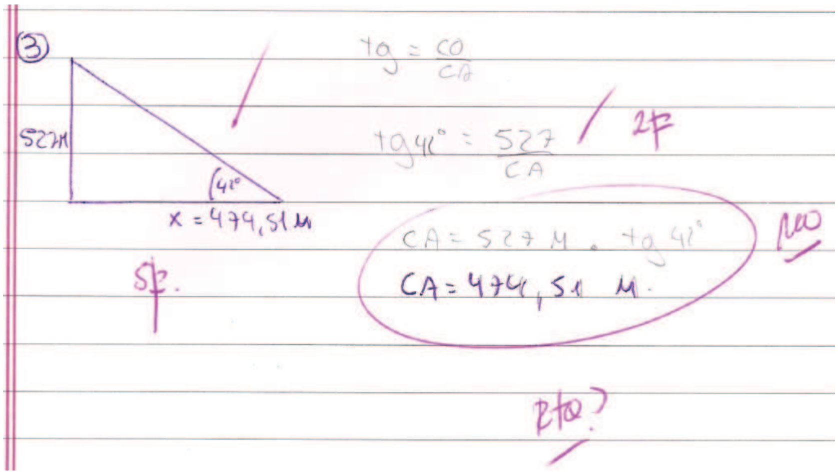


Figura A.18: Resolución de la tarea del Estudiante 9

- Evaluación del 02/11/2019.
- Tema 2.
- Categorización: tratamiento geométrico y tratamiento algebraico.
- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, obtiene que a mayor lado se le opone menor ángulo en un triángulo. En la resolución presenta error algebraico.

Estudiante 10

Actividad 3: (15 puntos) Desde un supermercado se observa la terraza de un rascacielos de 527 metros de altura bajo un ángulo de 42°. Calcule la distancia que hay desde el supermercado hasta el rascacielos. Realice una figura de análisis.

Figura A.19: Tarea del Tema 2

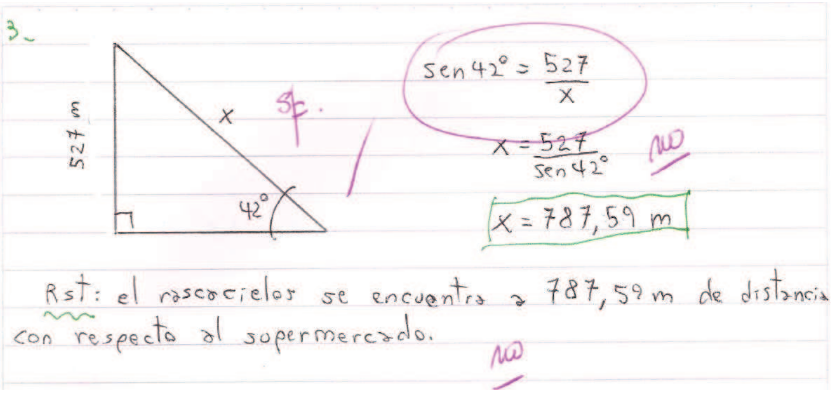


Figura A.20: Resolución de la tarea del Estudiante 10

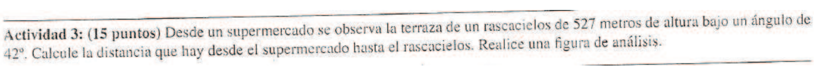
- Evaluación del 02/11/2019.

- Tema 2.

- Categorización: bosquejo y tratamiento geométrico.

- Justificación: El bosquejo no se corresponde con el enunciado del problema, específicamente a lo que solicita hallar la tarea, no se realiza el dibujo a escala.

Estudiante 11



Actividad 3: (15 puntos) Desde un supermercado se observa la terraza de un rascacielos de 527 metros de altura bajo un ángulo de 42°. Calcule la distancia que hay desde el supermercado hasta el rascacielos. Realice una figura de análisis.

Figura A.21: Tarea del Tema 2

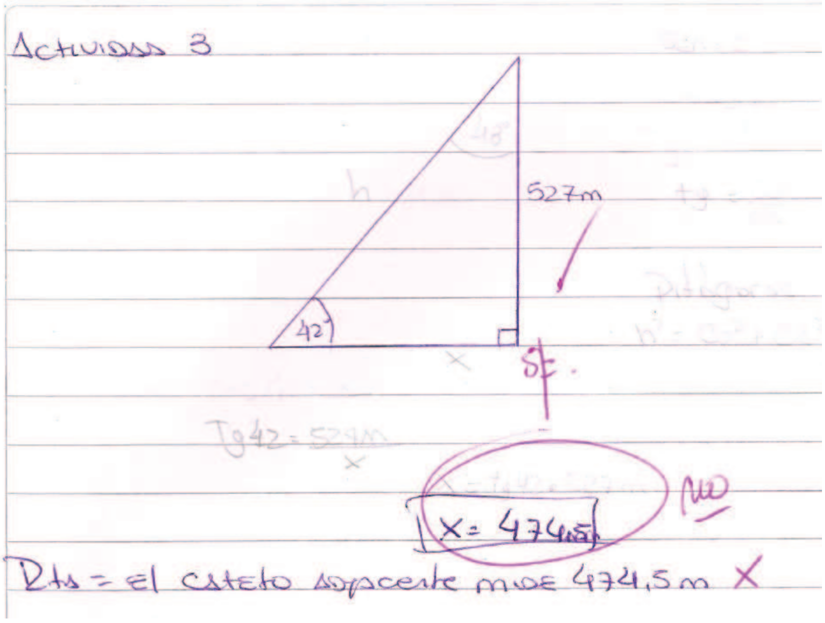


Figura A.22: Resolución de la tarea del Estudiante 11

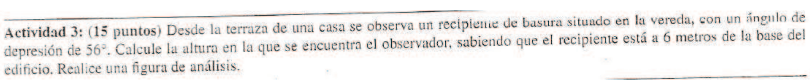
- Evaluación del 02/11/2019.

- Tema 2.

- Categorización: tratamiento geométrico y tratamiento algebraico.

- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, obtiene que a mayor lado se le opone menor ángulo en un triángulo. En la resolución presenta error algebraico.

Estudiante 12



Actividad 3: (15 puntos) Desde la terraza de una casa se observa un recipiente de basura situado en la vereda, con un ángulo de depresión de 56°. Calcule la altura en la que se encuentra el observador, sabiendo que el recipiente está a 6 metros de la base del edificio. Realice una figura de análisis.

Figura A.23: Tarea del Tema 1

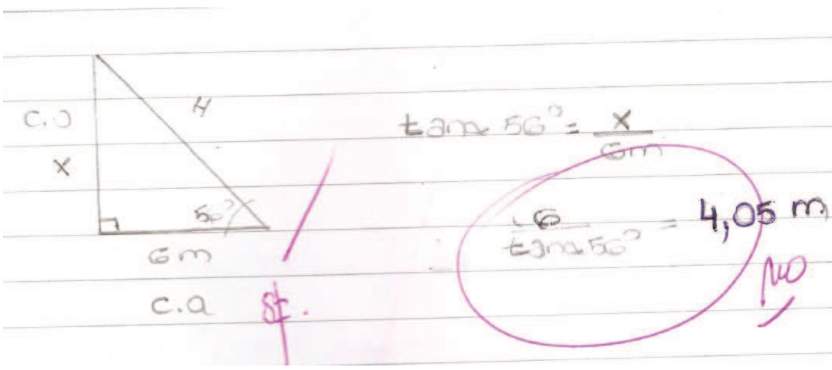


Figura A.24: Resolución de la tarea del Estudiante 12

- Evaluación del 02/11/2019.
- Tema 1.
- Categorización: tratamiento geométrico y tratamiento algebraico.
- Justificación: El dibujo no se realiza a escala, obtiene que a mayor lado se le opone menor ángulo en un triángulo. En la resolución presenta error algebraico.

Estudiante 13

Actividad 3: (15 puntos) Desde un supermercado se observa la terraza de un rascacielos de 527 metros de altura bajo un ángulo de 42°. Calcule la distancia que hay desde el supermercado hasta el rascacielos. Realice una figura de análisis.

Figura A.25: Tarea del Tema 2

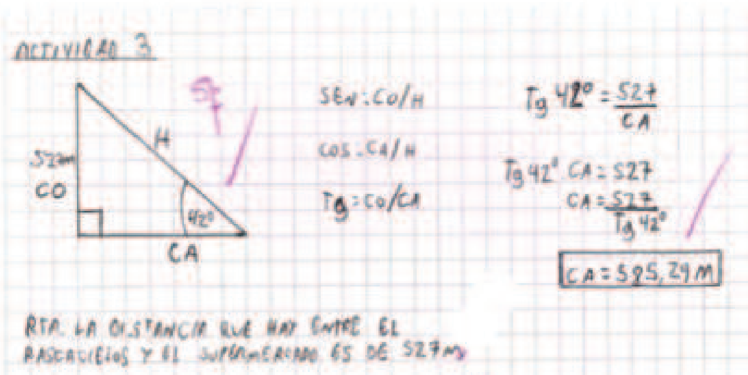
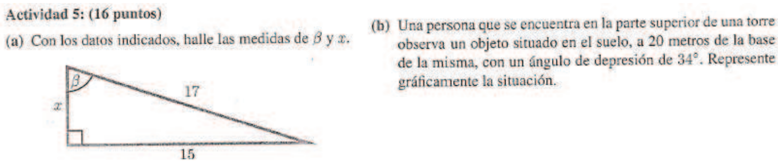


Figura A.26: Resolución de la tarea del Estudiante 13

- Evaluación del 02/11/2019.

- Tema 2.
- Categorización: tratamiento geométrico y respuesta.
- Justificación: El dibujo no se realiza a escala y presenta una respuesta incorrecta siendo que la resolución es correcta.

Estudiante 14


Actividad 5: (16 puntos)

(a) Con los datos indicados, halle las medidas de β y x.

(b) Una persona que se encuentra en la parte superior de una torre observa un objeto situado en el suelo, a 20 metros de la base de la misma, con un ángulo de depresión de 34°. Represente gráficamente la situación.

Figura A.27: Tarea del Tema 2

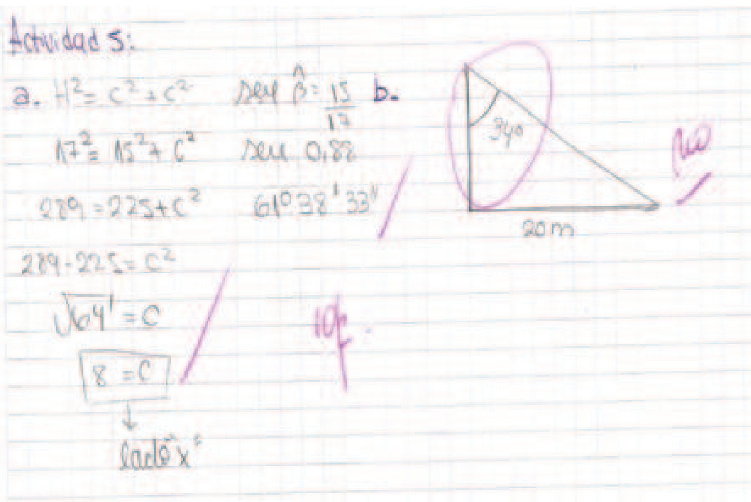


Figura A.28: Resolución de la tarea del Estudiante 14

- Evaluación del 06/03/2020.
- Tema 2.
- Categorización: bosquejo y tratamiento geométrico.
- Justificación: en la parte b) del problema: el bosquejo no se corresponde con el enunciado del problema, no se realiza el dibujo a escala y no presenta un análisis geométrico del ángulo de depresión.

Estudiante 15

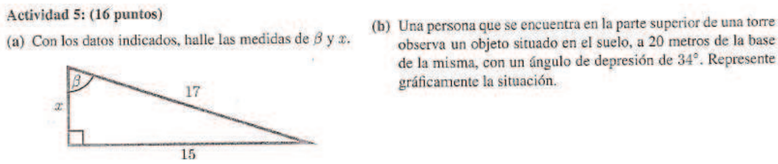
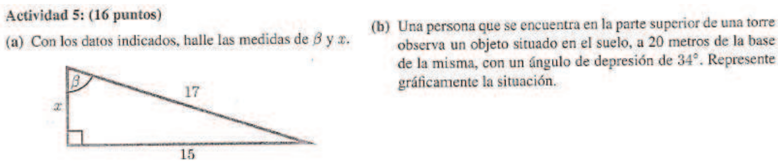


Figura A.29: Tarea del Tema 2

Figura A.30: Resolución de la tarea del Estudiante 15

- Evaluación del 06/03/2020.
- Tema 2.
- Categorización: tratamiento geométrico.
- Justificación: en la parte a) del problema: confunde los elementos del triángulo (cateto opuesto y cateto adyacente al ángulo), al sustituir los valores en la expresión de la razón trigonométrica; en la parte b) del problema: el dibujo no se realiza a escala y no presenta un análisis geométrico del ángulo de depresión.

Estudiante 16



Actividad 5: (16 puntos)

(a) Con los datos indicados, halle las medidas de β y x.

(b) Una persona que se encuentra en la parte superior de una torre observa un objeto situado en el suelo, a 20 metros de la base de la misma, con un ángulo de depresión de 34°. Represente gráficamente la situación.

Figura A.31: Tarea del Tema 2

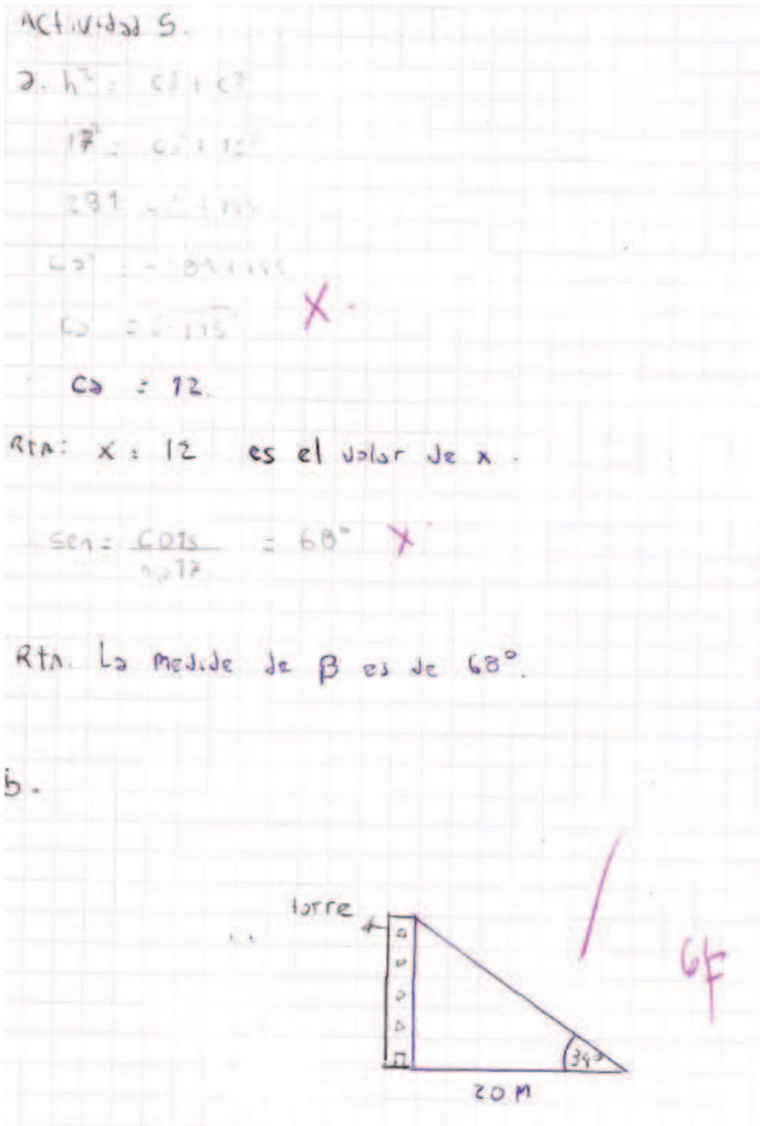


Figura A.32: Resolución de la tarea del Estudiante 16

- Evaluación del 06/03/2020.
- Tema 2.
- Categorización: tratamiento geométrico y tratamiento algebraico.
- Justificación: en la parte a) del problema: presenta error algebraico en la resolución; en la parte b) del problema: el dibujo no se realiza a escala y no presenta un análisis geométrico del ángulo de depresión.

Estudiante 17

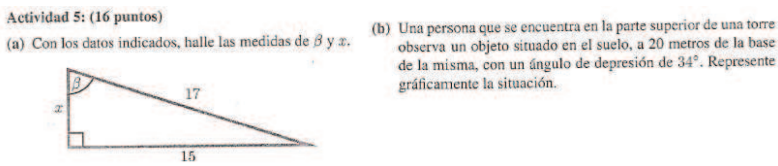


Figura A.33: Tarea del Tema 2

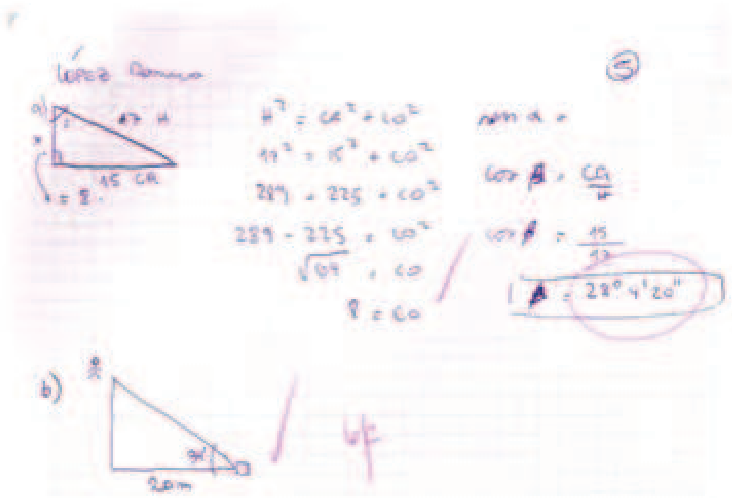
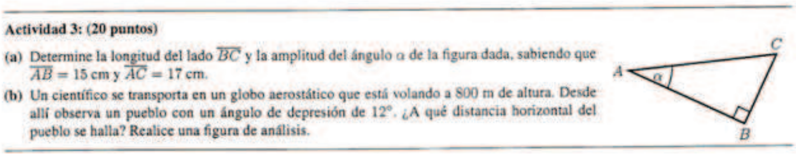


Figura A.34: Resolución de la tarea del Estudiante 17

- Evaluación del 06/03/2020.
- Tema 2.
- Categorización: tratamiento geométrico.

- Justificación: en la parte a) del problema: confunde los elementos del triángulo (cateto opuesto y cateto adyacente al ángulo), al sustituir los valores en la expresión de la razón trigonométrica; en la parte b) del problema: el dibujo no se realiza a escala y no presenta un análisis geométrico del ángulo de depresión.

Estudiante 18



Actividad 3: (20 puntos)

(a) Determine la longitud del lado $\overline{BC}$ y la amplitud del ángulo α de la figura dada, sabiendo que $\overline{AB} = 15$ cm y $\overline{AC} = 17$ cm.

(b) Un científico se transporta en un globo aerostático que está volando a 800 m de altura. Desde allí observa un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia horizontal del pueblo se halla? Realice una figura de análisis.

Figura A.35: Tarea del Tema 1

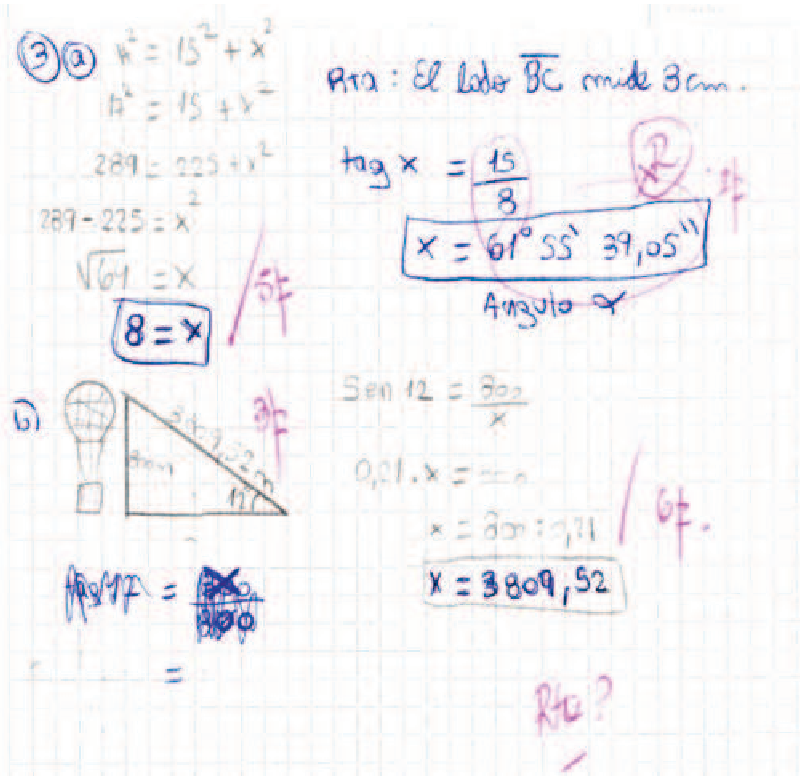
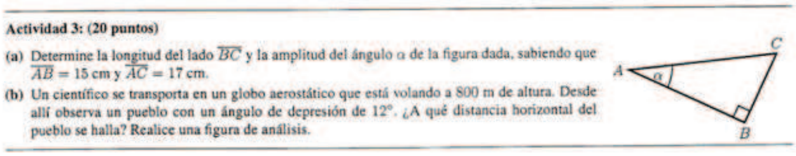


Figura A.36: Resolución de la tarea del Estudiante 18

- Evaluación del 14/03/2020.
- Tema 1.

- Categorización: bosquejo y tratamiento geométrico.
- Justificación: en la parte a) del problema: confunde los elementos del triángulo (cateto opuesto y cateto adyacente al ángulo), al sustituir los valores en la expresión de la razón trigonométrica; en la parte b) del problema: el dibujo no se realiza a escala, no presenta un análisis geométrico del ángulo de depresión, lo hallado no es lo solicitado en la tarea ya que el bosquejo no responde completamente al enunciado del problema.

Estudiante 19



Actividad 3: (20 puntos)

(a) Determine la longitud del lado $\overline{BC}$ y la amplitud del ángulo α de la figura dada, sabiendo que $\overline{AB} = 15$ cm y $\overline{AC} = 17$ cm.

(b) Un científico se transporta en un globo aerostático que está volando a 800 m de altura. Desde allí observa un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia horizontal del pueblo se halla? Realice una figura de análisis.

Figura A.37: Tarea del Tema 1

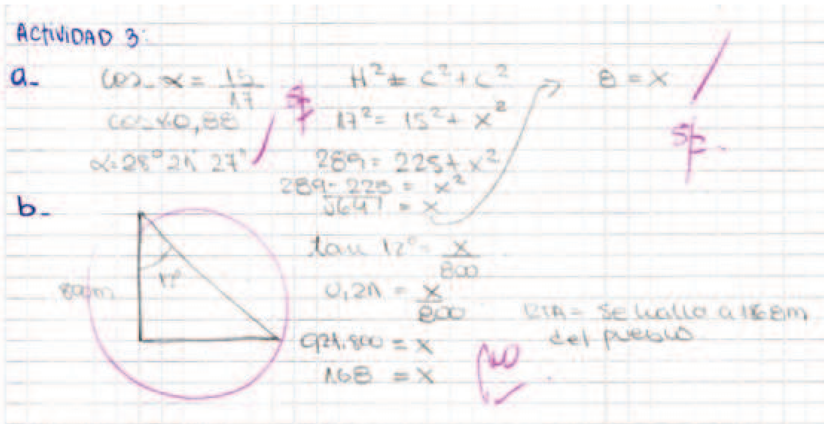
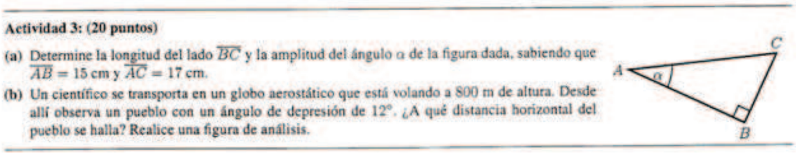


Figura A.38: Resolución de la tarea del Estudiante 19

- Evaluación del 14/03/2020.
- Tema 1.
- Categorización: bosquejo y tratamiento geométrico.
- Justificación: en la parte b) del problema el bosquejo no se corresponde con el enunciado del problema, el dibujo no se realiza a escala y ubica de forma errónea el ángulo de depresión.

Estudiante 20



Actividad 3: (20 puntos)

(a) Determine la longitud del lado $\overline{BC}$ y la amplitud del ángulo α de la figura dada, sabiendo que $\overline{AB} = 15$ cm y $\overline{AC} = 17$ cm.

(b) Un científico se transporta en un globo aerostático que está volando a 800 m de altura. Desde allí observa un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia horizontal del pueblo se halla? Realice una figura de análisis.

Figura A.39: Tarea del Tema 1

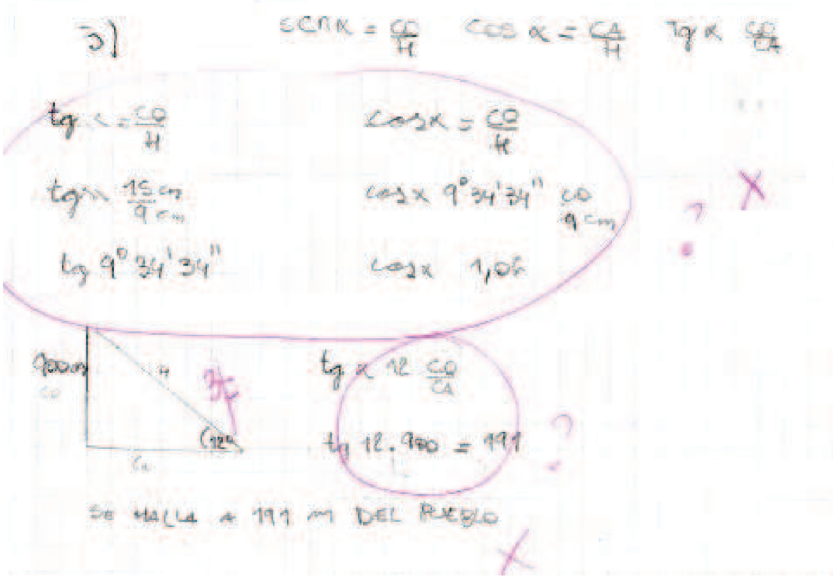


Figura A.40: Resolución de la tarea del Estudiante 20

- Evaluación del 14/03/2020.
- Tema 1.
- Categorización: tratamiento geométrico y tratamiento algebraico.
- Justificación: en la parte a) del problema: confunde los elementos del triángulo, al sustituir los valores en la expresión de la razón trigonométrica; en la parte b) del problema: el dibujo no se realiza a escala, no presenta un análisis geométrico del ángulo de depresión y en la resolución presenta error algebraico.

Capítulo B

Anexo B

B.1. Entrevistas a los Docentes

A continuación transcribimos las entrevistas a seis docentes de las escuelas secundarias de Gálvez que desarrollan el tema razones trigonométricas en el 5to. año.

Docente 1

1. En la iniciación del tema razones trigonométricas, ¿cuáles son los conocimientos previos que consideras importantes?

   Respuesta: Primero empezamos con conocimientos básicos de geometría, clasificación de triángulos, después clasificación de los ángulos, los trazamos para después ayudarnos en la interpretación de los problemas.

2. Nos interesa conocer el material que utilizas para las clases del tema:

   [a] Libros de texto ¿cuál/es?

   [b] Otros Materiales ¿Cuáles?

   Respuesta: Parte del material es Matemática 1 de Puerto de Palos.

3. El material ¿lo utilizas en forma completa o parcial? ¿Qué tipo de tareas habitualmente seleccionas?

   Respuesta: Se utiliza el material en forma completa pero también se agregan otro tipo de material buscado a veces en redes sociales o en cualquier otro lugar.

4. En tu propuesta para la enseñanza del tema, ¿incluyes tareas con diseños didácticos experimentales? En caso afirmativo, ¿cuáles?

   Respuesta: No tenemos nada de eso. Solamente la teoría en clase y el desarrollo de problemas.

5. Marca con una cruz los tipos de problemas que utilizas más frecuentemente para la aplicación de las razones trigonométricas:

- De la vida diaria
- De salud
- Ingeniería
- Ciencias
- Sin contexto
- Otros

Respuesta: De la vida diaria. Lo adaptamos a lo que ellos ven en la parte de talleres de construcción. Por ejemplo, el cálculo de una inclinación de un techo a dos aguas. Todo ello, es lo que después aplican.

6. Marca con una cruz la o las acciones que consideras primordial/es en la aplicación de las razones trigonométricas:

   - Cuantificar
   - Estimar
   - Calcular longitud de lados de triángulos
   - Calcular amplitud de ángulos de triángulos
   - Ordenar
   - Posicionar
   - Estructurar
   - Comparar

   Respuesta: Cuantificar. Calcular longitud de lados de triángulos. Calcular amplitud de ángulos de triángulos. Estructurar. Comparar. Aclara: Razonar si el resultado que nos da un problema corresponde al análisis del mismo.

7. ¿Cuál es tu objetivo principal al momento de la enseñanza de las razones trigonométricas?

   Respuesta: Acá vuelvo con la insistencia de que este curso es construcciones así que el objetivo principal es darles herramientas para que después ellos puedan llegar a resolver problemas de índole más importante.

8. ¿Utilizas herramientas tecnológicas para abordar y/o desarrollar el tema? En caso afirmativo, ¿cuáles? ¿Con qué finalidad?

   Respuesta: Generalmente ellos en el aula tienen sus computadoras donde pueden investigar, pueden buscar, pueden buscar problemas.

9. Selecciona y transcribe dos o tres ejercicios/problemas que consideres indispensables para trabajar las razones trigonométricas.

   Respuesta: Primero sería la parte, nada más que estructural, que es la parte del cálculo para poder aplicar las razones trigonométricas y después problemas. Un problema por ejemplo, tenés que apoyar una escalera en una pared entonces de acuerdo a los datos que les puedo dar, calculamos a qué altura está la escalera o cuál es el ángulo que tiene que formar la escalera con la pared. Siempre trato de relacionárselos con la parte de construcciones. Otro . . . por ahí . . . el despegue de un avión, a qué altura se puede encontrar el avión a ciertos metros recorridos.

10. ¿Consideras que este tema es más fácil, más difícil o igualmente complejo para enseñar que otros temas de matemática? ¿Por qué?

    Respuesta: Al principio les cuesta porque es la primera vez que lo ven. No tienen ningún tipo de contenido anterior relacionado a esto. Les cuesta mucho reconocer los triángulos, les cuesta muchísimo trazar ángulos, no saben trazar ángulos. Es decir que la geometría en primer y segundo está muy floja y el trazado de ángulos es importante, la clasificación de triángulos también porque a ellos les da lo mismo el triángulo rectángulo, el oblicuángulo, lo que fuera. No tienen la idea, no diferencian y al principio es un tema totalmente nuevo pero después lleva su tiempo el poder engancharse hasta que después es algo . . . un conocimiento habitual como cualquier otro.

11. ¿Para qué consideras que es útil que tus estudiantes conozcan este tema?

    Respuesta: Insisto, estos estudiantes son del curso de construcciones entonces considero que es muy importante para los cursos superiores para ello sobre todo, en sus prácticas profesionalizantes donde tengan que aplicar esto porque primero tenemos que tener el conocimiento, la práctica del conocimiento y después la aplicación del conocimiento.

Docente 2

1. En la iniciación del tema razones trigonométricas, ¿cuáles son los conocimientos previos que consideras importantes?

   Respuesta: Todo lo de triángulo que acá no sabían nada. Tuve que dar todo. Todas las propiedades de triángulos, teorema de Pitágoras, todo eso. No tenían ni idea de nada.

2. Nos interesa conocer el material que utilizas para las clases del tema:

   [a] Libros de texto ¿cuál/es?

[b] Otros Materiales ¿Cuáles?

Respuesta: Puerto de Palos 1. Internet a veces.

3. El material ¿lo utilizas en forma completa o parcial? ¿Qué tipo de tareas habitualmente seleccionas?

   Respuesta: Parcial. Voy buscando o voy modificando de acuerdo a como veo que van trabajando ellos.

4. En tu propuesta para la enseñanza del tema, ¿incluyes tareas con diseños didácticos experimentales? En caso afirmativo, ¿cuáles?

   Respuesta: No, en este no hemos hecho nada. Le he traído problemas por ejemplo calcular la altura de un árbol, de un edificio, de una torre, pero no lo hicimos experimentalmente.

5. Marca con una cruz los tipos de problemas que utilizas más frecuentemente para la aplicación de las razones trigonométricas:

   - De la vida diaria
   - De salud
   - Ingeniería
   - Ciencias
   - Sin contexto
   - Otros

   Respuesta: De la vida diaria. Sin contexto (Aclara en forma de práctica).

6. Marca con una cruz la o las acciones que consideras primordial/es en la aplicación de las razones trigonométricas:

   - Cuantificar
   - Estimar
   - Calcular longitud de lados de triángulos
   - Calcular amplitud de ángulos de triángulos
   - Ordenar
   - Posicionar
   - Estructurar
   - Comparar

   Respuesta: Estimar (Aclara que le dice a sus alumnos que piensen que la hipotenusa debe ser el lado más largo cuando sacan los cálculos, que se den cuentan . . . o ahh me equivoqué). Calcular longitud de lados de triángulos. Calcular amplitud de ángulos de triángulos.

7. ¿Cuál es tu objetivo principal al momento de la enseñanza de las razones trigonométricas?

   Respuesta: Que les sirva para poder aplicarlas en algo.

8. ¿Utilizas herramientas tecnológicas para abordar y/o desarrollar el tema? En caso afirmativo, ¿cuáles? ¿Con qué finalidad?

   Respuesta: No, lo que usamos solamente es la calculadora.

9. Selecciona y transcribe dos o tres ejercicios/problemas que consideres indispensables para trabajar las razones trigonométricas.

   Respuesta: Yo creo que cuando empecé que hice mucho hincapié era que marcaran en un triángulo donde estaba la hipotenusa y que marcaran un ángulo y que de ahí se ubicaran cuál era el cateto opuesto y el cateto adyacente. De eso hicimos un montón con diferentes o sea para que después pudieran aplicar lo otro. Problema: el que apoya la escalera que les hago sacar hasta donde llega la escalera en la pared, a cuánto está separada de la pared.

10. ¿Consideras que este tema es más fácil, más difícil o igualmente complejo para enseñar que otros temas de matemática? ¿Por qué?

    Respuesta: No sé ... depende por ahí del grupo. No me parece tan difícil lo que pasa es que depende del grupo que te toque.

11. ¿Para qué consideras que es útil que tus estudiantes conozcan este tema?

    Respuesta: Les puede servir según lo que sigan estudiando, creo que es un tema que se pide mucho en los ingresos si siguen estudiando, sino para la vida cotidiana también les puede servir para hacer algún cálculo.

Docente 3

1. En la iniciación del tema razones trigonométricas, ¿cuáles son los conocimientos previos que consideras importantes?

   Respuesta: Tienen que trabajar ángulos y parte de lo que es triángulos.

2. Nos interesa conocer el material que utilizas para las clases del tema:

   [**a**] Libros de texto ¿cuál/es?

   [**b**] Otros Materiales ¿Cuáles?

   Respuesta: Si y no. Porque si te tengo que decir cuál es ahora te miento pero normalmente utilizo puerto de palos 1 para llegar a lo que es la parte de los triángulos, la iniciación a la trigonometría con explicaciones muy básicas y usaba uno que de tres personas.

3. El material ¿lo utilizas en forma completa o parcial? ¿Qué tipo de tareas habitualmente seleccionas?

   Respuesta: Parcial. Normalmente busco mucho la parte de los problemas para saber que las resoluciones son concretas porque sino es un problemón.

4. En tu propuesta para la enseñanza del tema, ¿incluyes tareas con diseños didácticos experimentales? En caso afirmativo, ¿cuáles?

   Respuesta: No, pero me baso mucho en representarles problemas reales, sobre todo a los chicos de mecánica en la parte de tornería.

5. Marca con una cruz los tipos de problemas que utilizas más frecuentemente para la aplicación de las razones trigonométricas:

   - De la vida diaria
   - De salud
   - Ingeniería
   - Ciencias
   - Sin contexto
   - Otros

   Respuesta: De la vida diaria. Ingeniería.

6. Marca con una cruz la o las acciones que consideras primordial/es en la aplicación de las razones trigonométricas:

   - Cuantificar
   - Estimar
   - Calcular longitud de lados de triángulos
   - Calcular amplitud de ángulos de triángulos
   - Ordenar
   - Posicionar
   - Estructurar
   - Comparar

   Respuesta: Cuantificar. Calcular longitud de lados de triángulos. Calcular amplitud de ángulos de triángulos.

7. ¿Cuál es tu objetivo principal al momento de la enseñanza de las razones trigonométricas?

   Respuesta: Que puedan aprenderlo y usarlo. Que les sea relevante en la utilización en el torno porque se utiliza mucho.

8. ¿Utilizas herramientas tecnológicas para abordar y/o desarrollar el tema? En caso afirmativo, ¿cuáles? ¿Con qué finalidad?

   Respuesta: No. Sólo pizarrón y fibrón.

9. Selecciona y transcribe dos o tres ejercicios/problemas que consideres indispensables para trabajar las razones trigonométricas.

   Respuesta: El cálculo del lado opuesto porque es el que normalmente buscamos. Calcular el lado opuesto para hacer la conicidad de un eje.

10. ¿Consideras que este tema es más fácil, más difícil o igualmente complejo para enseñar que otros temas de matemática? ¿Por qué?

    Respuesta: No es de los más difíciles pero tampoco el más fácil. A mi entender toda la parte de polinomios se les complica muchísimo más pero les cuesta ver de donde vienen porque no tienen una razón práctica de donde salen.

11. ¿Para qué consideras que es útil que tus estudiantes conozcan este tema?

    Respuesta: Porque te ayuda a resolver problemas de todo tipo, no solamente de la mecánica. El hecho de poder resolver con triángulos, medidas y ángulos te permite ir avanzando con cualquier figura trigonométrica.

Docente 4

1. En la iniciación del tema razones trigonométricas, ¿cuáles son los conocimientos previos que consideras importantes?

   Respuesta: Ángulos, triángulos, teorema de Pitágoras.

2. Nos interesa conocer el material que utilizas para las clases del tema:

   [a] Libros de texto ¿cuál/es?

   [b] Otros Materiales ¿Cuáles?

   Respuesta: Uso libros de textos y mucha información de internet. Puerto de Palos I, Entre números y hay otro Puerto de palos nuevo, una edición nueva.

3. El material ¿lo utilizas en forma completa o parcial? ¿Qué tipo de tareas habitualmente seleccionas?

   Respuesta: Parcial. Y . . . para calcular lados, ángulos de un triángulo, las razones trigonométricas . . . y nada más . . . hasta ahí.

4. En tu propuesta para la enseñanza del tema, ¿incluyes tareas con diseños didácticos experimentales? En caso afirmativo, ¿cuáles?

   Respuesta: No.

5. Marca con una cruz los tipos de problemas que utilizas más frecuentemente para la aplicación de las razones trigonométricas:

   - De la vida diaria
   - De salud
   - Ingeniería
   - Ciencias
   - Sin contexto
   - Otros

   Respuesta: De la vida diaria. Sin contexto.

6. Marca con una cruz la o las acciones que consideras primordial/es en la aplicación de las razones trigonométricas:

   - Cuantificar
   - Estimar
   - Calcular longitud de lados de triángulos
   - Calcular amplitud de ángulos de triángulos
   - Ordenar
   - Posicionar
   - Estructurar
   - Comparar

   Respuesta: Calcular longitud de lados de triángulos. Calcular amplitud de ángulos de triángulos.

7. ¿Cuál es tu objetivo principal al momento de la enseñanza de las razones trigonométricas?

   Respuesta: Que identifiquen lo que es un ángulo, un lado de una figura.

8. ¿Utilizas herramientas tecnológicas para abordar y/o desarrollar el tema? En caso afirmativo, ¿cuáles? ¿Con qué finalidad?

   Respuesta: No.

9. Selecciona y transcribe dos o tres ejercicios/problemas que consideres indispensables para trabajar las razones trigonométricas.

   Respuesta: Más de todo cuando doy Pitágoras, el tema de la escalera... Por ejemplo, calcular la longitud de la escalera, teniendo en *cuenta la longitud de la pared y la distancia que hay desde la base de la escalera a la pared.*

10. ¿Consideras que este tema es más fácil, más difícil o igualmente complejo para enseñar que otros temas de matemática? ¿Por qué?

    Respuesta: No... bien... no es complejo.

11. ¿Para qué consideras que es útil que tus estudiantes conozcan este tema?

    Respuesta: Para el ingreso en las carreras universitarias.

Docente 5

1. En la iniciación del tema razones trigonométricas, ¿cuáles son los conocimientos previos que consideras importantes?

   Respuesta: Considero importante como conocimiento previo, conceptos geométricos como ángulos, polígonos, triángulo, clasificación de los triángulos según lados y ángulos y el teorema de Pitágoras.

2. Nos interesa conocer el material que utilizas para las clases del tema:

   [**a**] Libros de texto ¿cuál/es?

   [**b**] Otros Materiales ¿Cuáles?

   Respuesta: Libros de texto: Matemática 4/3 y matemática III de Pablo Effenberger.

3. El material ¿lo utilizas en forma completa o parcial? ¿Qué tipo de tareas habitualmente seleccionas?

   Respuesta: Lo utilizo de forma completa, combinando actividades o agregando otras.

4. En tu propuesta para la enseñanza del tema, ¿incluyes tareas con diseños didácticos experimentales? En caso afirmativo, ¿cuáles?

   Respuesta: No incluí tareas con diseños experimentales.

5. Marca con una cruz los tipos de problemas que utilizas más frecuentemente para la aplicación de las razones trigonométricas:

   - De la vida diaria
   - De salud
   - Ingeniería
   - Ciencias
   - Sin contexto

- Otros

Respuesta: De la vida diaria. Sin contexto.

6. Marca con una cruz la o las acciones que consideras primordial/es en la aplicación de las razones trigonométricas:

   - Cuantificar
   - Estimar
   - Calcular longitud de lados de triángulos
   - Calcular amplitud de ángulos de triángulos
   - Ordenar
   - Posicionar
   - Estructurar
   - Comparar

   Respuesta: Calcular longitud de lados de triángulos. Calcular amplitud de ángulos de triángulos. Ordenar.

7. ¿Cuál es tu objetivo principal al momento de la enseñanza de las razones trigonométricas?

   Respuesta: Mi objetivo al momento de la enseñanza es que conozcan las relaciones en los triángulos y las leyes de comportamiento de las funciones trigonométricas.

8. ¿Utilizas herramientas tecnológicas para abordar y/o desarrollar el tema? En caso afirmativo, ¿cuáles? ¿Con qué finalidad?

   Respuesta: No utilicé herramientas tecnológicas.

9. Selecciona y transcribe dos o tres ejercicios/problemas que consideres indispensables para trabajar las razones trigonométricas.

   Respuesta: En este momento no me acuerdo alguno en específico, pero por ejemplo calcular la longitud de una sombra dado un lado y el ángulo, o la longitud de una escalera.

10. ¿Consideras que este tema es más fácil, más difícil o igualmente complejo para enseñar que otros temas de matemática? ¿Por qué?

    Respuesta: Considero que es un tema que puede resultar más o menos difícil de enseñar dependiendo del curso.

11. ¿Para qué consideras que es útil que tus estudiantes conozcan este tema?

    Respuesta: Considero que es útil para que puedan entrar en contacto con ese conocimiento, sobre todo para estudios posteriores ya que son de gran importancia en física, astronomía y cartografía.

Docente 6

1. En la iniciación del tema razones trigonométricas, ¿cuáles son los conocimientos previos que consideras importantes?

   Respuesta: Para que los estudiantes tengan una base sólida para abordar el tema de razones trigonométricas considero que es importante que cuenten con distintos conocimientos previos por ejemplo, la propiedad fundamental de las proporciones, que sepan despejar variables, conocimiento de las razones trigonométricas y sus inversas, un poco de geometría básica, ángulos, triángulos, la suma de los ángulos interiores de un triángulo, entender la noción de la medida de los ángulos, entender la relación entre la medida de un lado opuesto a un ángulo, entre otras cosas.

2. Nos interesa conocer el material que utilizas para las clases del tema:

   [**a**] Libros de texto ¿cuál/es?

   [**b**] Otros Materiales ¿Cuáles?

   Respuesta: El libro que uso es Matemática I Activa de Puerto de Palos.

3. El material ¿lo utilizas en forma completa o parcial? ¿Qué tipo de tareas habitualmente seleccionas?

   Respuesta: El material lo utilizo como punto de apoyo, diría que lo uso de forma parcial para una mejor organización de la clase. Generalmente una vez que explico el tema, les armo una guía práctica con actividades simples y otra con situaciones problemáticas.

4. En tu propuesta para la enseñanza del tema, ¿incluyes tareas con diseños didácticos experimentales? En caso afirmativo, ¿cuáles?

   Respuesta: No, pero tendría que incluirlos.

5. Marca con una cruz los tipos de problemas que utilizas más frecuentemente para la aplicación de las razones trigonométricas:

   - De la vida diaria
   - De salud
   - Ingeniería
   - Ciencias
   - Sin contexto
   - Otros

   Respuesta: De la vida diaria. Sin contexto (agrega: para fijación del tema).

6. Marca con una cruz la o las acciones que consideras primordial/es en la aplicación de las razones trigonométricas:

    - Cuantificar
    - Estimar
    - Calcular longitud de lados de triángulos
    - Calcular amplitud de ángulos de triángulos
    - Ordenar
    - Posicionar
    - Estructurar
    - Comparar

    Respuesta: Calcular longitud de lados de triángulos. Calcular amplitud de ángulos de triángulos. Comparar.

7. ¿Cuál es tu objetivo principal al momento de la enseñanza de las razones trigonométricas?

    Respuesta: Mi objetivo principal en la enseñanza de las razones trigonométricas es asegurarme de que los alumnos comprendan los conceptos fundamentales y puedan ser capaces de aplicar estas razones de manera efectiva en una variedad de situaciones, o sea que logren una comprensión conceptual. Quiero que entiendan qué son las razones trigonométricas, cómo se derivan, y por qué son útiles en matemática y en la vida cotidiana. Esto implica poder mostrarle la relación entre razones trigonométricas y las propiedades de los triángulos. Además quiero que adquieran habilidades sólidas en el campo de las razones trigonométricas para un ángulo específico como para ángulos generales; esto implica saber cómo usar calculadora y tablas trigonométricas de manera efectiva.

8. ¿Utilizas herramientas tecnológicas para abordar y/o desarrollar el tema? En caso afirmativo, ¿cuáles? ¿Con qué finalidad?

    Respuesta: Utilizo la calculadora con la finalidad de poder resolver.

9. Selecciona y transcribe dos o tres ejercicios/problemas que consideres indispensables para trabajar las razones trigonométricas.

    Respuesta: Guía.

10. ¿Consideras que este tema es más fácil, más difícil o igualmente complejo para enseñar que otros temas de matemática? ¿Por qué?

    Respuesta: Considero que es un tema fácil y llevadero en el cual la mayoría de los estudiantes comprenden con facilidad y les gusta.

11. ¿Para qué consideras que es útil que tus estudiantes conozcan este tema?

    Respuesta: Son útiles y aplicables en una variedad de áreas tanto como en el ámbito académico o en situaciones cotidianas y profesionales. Se puede usar en la resolución de problemas geométricos. Son esenciales para resolver problemas relacionados con la geométrica de los triángulos. También, para utilizarlos en la navegación, para calcular distancia y direcciones. También lo podemos usar en la física y las ciencias naturales. También los campos de la ingeniería civil, la ingeniería mecánica, entre otras cosas.

Capítulo C

Anexo C

C.1. Trasncripciones de la Implementación

A continuación transcribimos los diálogos de las grabaciones de los plenarios y los videos propuestos por los grupos en la implementación del experimento.

Día 1: Plenario

Docente: *cuenten un poquito cuáles fueron las problemáticas que ustedes pudieron ver con respecto a las sombras, al sol ... En este caso yo se los pedía en forma de preguntas pero a algunos se les complicó, entonces les pedí que transfieran qué situaciones problemáticas veían. ¿Qué grupo quiere empezar?*

Grupo 1: Constanza, Ambar, Dolores, Morena, Luca.

Constanza: *nosotros hablamos primero del frente este (señala la entrada principal del CUG) vimos por ahí que hace falta un techo o un toldo o algo para que no se calienten ni las barandas, ni los vidrios y para la gente que por ahí tiene que esperar afuera o algo para que tampoco le dé el sol.*

Ambar: *y también por la lluvia.*

Constanza: *Claro, también lo pensamos por ese lado.*

Constanza: *después hablamos del estacionamiento que tanto los bibicleteros como bueno allá hay estacionamiento para autos, pero sólo entran cuatro y haría falta más, o sombra en las calles para poder estacionar y los bicicleteros más a la sombra o más árboles. Después la parte del parque hicimos referencia a todo lo que es el exterior de la universidad, que la cancha de fútbol, por ejemplo, está al rayo del sol y la gente que por ahí quiere verlo también queda al sol, entonces por ahí, rodearlo con árboles para que haya un poco de sombra en la cancha y para la gente que quiere sentarse afuera; y también en esta parte del parque (señala el costado este del CUG) y poner una mesa en la sombra, para el que se quiera sentar en la sombra. Y por último, la vereda. Agregar en la vereda de acá (señala el costado oeste del CUG) que hay un caminito para entrar ... más árboles para que hagan* *sombra y la gente que espera afuera o entra caminando por ahí, no esté bajo el sol.*

Docente: *excelente observación.*

Grupo 2: Facundo, Tomás, Jaime, Agustín, Valentino, Mateo, Lucio.

Docente: *cuando se repite alguna problemática la dicen igual, no hay problema.*

Jaime: *nosotros planteamos los problemas principales del edificio. Lo que nos llamó más la atención es que las ventanas que dan hacia el oeste le da mucho sol a tarde y se calienta demasiado el edificio; y los aires por más que estén todo el día prendidos nunca terminan de enfriar. Después, en las zonas recreativas notamos que hay demasiado sol y ningún espacio de comodidad para estar. En el estacionamiento, como planteó el grupo anterior, también que hay un solo estacionamiento para cuatro autos nomás y que con una media sombra el estacionamiento ataja más sol para los autos. En el patio, también que hay mucho sol, nos referimos al patio con todo el edificio y en la entrada principal.*

Docente: *muy bien, muy bien.*

Grupo 3: Tomás, Máximo, Ismael, Valentino, Bautista.

Tomás: *eh... también vimos la problemática del estacionamiento, de que había poco lugar para los autos y también nos referimos a la entrada, que faltaba sombra a la entrada para la gente que tenga que esperar afuera.*

Ismael: *y también dentro del edificio en invierno se notaría la falta de luz.*

Docente: *muy bien, muy bien.*

Grupo 4: Lucía, Priscila, Julieta, Milena, Guadalupe, Candela, Bárbara.

Lucía: *la primera problemática que vimos fue (lee el afiche) ¿por qué la temperatura y la iluminación de los salones cambia de acuerdo a su ubicación? En los salones de acá (señala el costado oeste) vimos que a algunos salones los cubría la sombra del árbol son más frescos y otros que no les daba la sombra del árbol y le daba el sol de lleno van a ser más calientes y van a tener una luz más natural.*

Bárbara: *y con eso nos pusimos a pensar en las estaciones del año que no solamente ahora porque le da el sol sino porque también estamos en primavera y el árbol está lleno pero cuando empiece el otoño además de sin luz, no se como va cambiando el clima por las hojas y todo ...*

Julieta: *claro, no va a tener hojas.*

Bárbara: *entonces esa es una problemática.*

Milena: *y en la segunda que habíamos pensado en los bicicleteros de acá que había dos uno acá al lado de esta puerta (señala el costado este) que no le da el sol y otro que está allá en la cancha que si por eso decíamos que es preferible ponerlo en este lado (señala a la cercanía del otro bicicletero) porque si lo ponemos al sol se calienta el asiento y me queda incómodo.*

Candela: *O poner más árboles allá (señala el costado este) o pasar el bicicletero acá (señala la cercanía del bicicletero que se encuentra a la som-*

bra). Y, por último, los cajeros. Que generalmente es preferible venir a la tarde por la hora y si hay cola van a estar al rayo del sol.

Julieta: *haría falta un techo que cubra esa parte porque si no la gente no va a venir, no quiere esperar al rayo del sol.*

Guadalupe: *la estructura del edificio hace que pase el rayo (sol) poque hay barreras entonces no cubre toda la cola que hay (de gente se refiere)*

Docente: perfecto.

Grupo 5: Paulina, Daiana, Guillermina, Denise, Virginia, Avril.

Paulina: *nosotras dimos cuenta que no hay resguardo de sombra en la cancha (fútbol) y vimos que está muy expuesta al sol, o sea que si la quieren usar o estar en el pasto siempre le va a dar el sol a menos que caiga el sol y ahí le va a dar la sombra del edificio (Lee) ¿Por qué fue necesario la sombra en el estacionamiento? Vimos que los árboles no llegaban a dar la sombra necesaria para poner los autos y como que están dispersos por todos los lugares y ahí no. (Lee) ¿Por qué no los dos bicicleteros están posicionados bajo la sombra? Porque uno está acá (señala el costado este) y el otro está en la cancha de fútbol. Ellas dijeron (señala a dos compañeras) Todas las ventanas están expuestas a la luz solar. Vimos que a muchas no les da la sombra y tienen que utilizar mucha energía y otras no tienen iluminación que venga de afuera. (Lee) ¿Por qué en el patio interno no hay resguardo? Está muy al aire... no tiene un toldo.*

Guillermina: *si como para que... (señala con la mano que haga sombra)*

Paulina: *para que ellos puedan salir y además para que no dé tanto el sol. (Lee) ¿Con qué resguardo queda en invierno si los árboles no tienen hojas? Un lugar que hay árboles pero que en invierno no van a tener hojas.*

Docente: *muy bien.*

Grupo 6: Lucía y Martina.

Lucía: *A nosotras, la mayoría de las preguntas se repiten comenzamos con una que el cesto de basura está al rayo del sol y si uno pone la basura y tiene cosas que se puedan descomponer, hacen mal olor. Después, lo de los aires acondicionados, también, que están al rayo del sol y eso genera que los aires pierdan rendimiento. Después, pusimos también lo de los estacionamientos que hay solamente lugar para cuatro autos y nada más. Y después que en el patio (interno) faltaría un toldo o un techo.*

Docente: *perfecto.*

Grupo 7: Natalina, Juliana, Valentina, Julieta, Candela, Giuliana, Celeste.

Valentina: *nosotras también vimos que en el frente de la institución da mucho el sol y eso genera que se gaste más luz con los aires acondicionados y que tendrían que colocar paneles solares para reducir la energía eléctrica.*

Julieta: *más plantación de árboles para que haya más sombra y también construir unos espacios con mesas para que los chicos puedan estudiar al aire libre. También vimos que en el segundo piso, acá en la parte de atrás (señala el patio interno) da el sol en las ventanas y se podrían poner unas cortinas* *o vidrios que protejan del sol así no ingresa tanto calor y no consume tanta energía también.*

Día 3: Diálogo en la llegada

Jaime: *¡nada que ver las sombras de cuando vinimos el martes!*

Juli: h*uy, son re grandes las sombras ¡nos va a llevar un montón de tiempo medirlas!*

Mile: *profe... para qué momento del día buscamos posicionar los bicicleteros porque va a depender de cómo esté el sol.*

Luci: *profe, todo depende de los rayos del sol, ¿cómo hacemos?*

Tomás: *profe, ¿hacemos el diseño para esta hora del día y después calculamos más o menos?*

Guada: *nosotras habíamos elegido este lugar y ahora no hay nada de sol... ¿cómo calculamos?*

More: *profe... nos vamos a tener que apurar a medir porque ¡en un ratito no hay más sol!*

Lucas: *profe... le conté el trabajo a mi mamá de lo que estamos haciendo para pedirle ayuda de cómo calcular y me dijo que ella usaba algo en la escuela ahora no me acuerdo bien el nombre puede ser tangente (algo así) y no sé qué más le dije que deje que ni idea qué es eso... y me puse a buscar en internet porque me quedó la duda... y trabaja con los ángulos... ¿tendríamos que hacer eso ahora? No entendí nada cuando miré el video en YouTube de como lo hacía.*

Día 5: Plenario

Con Proporcionalidad

Lucía: *para sacar la longitud de la sombra que da el paredón del CUG, Martu se paró apoyada en la pared, me fui más lejos y tomé varias fotos con el celu. Como sé la altura de Martu exactamente, la trasladé tantas veces hasta llegar a la altura de la pared y de la sombra.*

Figura C.1: Utilización de la proporción para el cálculo de distancias.

<u>Martina</u>: *entonces, nos pareció que el mejor lugar para poner los bicicleteros es el que vemos en la foto porque desde el mediodía en adelante cerca de la pared comienza a proyectarse la sombra y es donde el sol está más fuerte y nos puede arruinar las bicicletas.*

<u>Lucía</u>: *también, en el GeoGebra vimos que si vamos moviendo el vértice del triángulo, la sombra se agranda o se achica. Eso es lo que hace el sol cuando se va moviendo. Por eso, nos pareció que a la tarde hay mucha sombra ahí y el sol está menos fuerte a la mañana que no les hace mucho a las bicicletas.*

Con Teorema de Thales

Para calcular la altura de una ceiba speciosa (comúnmente llamado palo borracho), considerado como la mejor opción al momento de colocar los bicicleteros por su frondosidad, un grupo de estudiantes utilizó el teorema de Thales para abordar la tarea.

Figura C.2: Con Teorema de Thales.

Constanza: *para medir la sombra que hace el palo borracho, usamos una cinta métrica. More, se paró frente al palo borracho bastante lejos porque era muy grande la sombra que hacía (forma paralela) y nosotros medimos la altura de More y también la de la sombra que ella hacía en el piso. Después de medir todo, usamos el teorema de Thales que dimos en segundo año para calcular la altura del palo borracho.*

Ámbar: *por ello creemos que la mejor ubicación de los bicicleteros en los diferentes horarios es: colocar uno del lado de la calle larrechea cerca del portón por donde ingresan los autos, porque a la mañana la sombra la da el palo borracho y por la tarde, la sombra la da los árboles que se encuentran en el vivero municipal que está frente. (Nota: frente al costado oeste del CUG se encuentra el vivero municipal que con árboles de gran altura)*

Constanza: *después cuando lo graficamos en GeoGebra vimos mejor que al moverse el sol, la sombra o se hace más grande o más chica. Y también vimos que, lo que hicimos está bien porque coincide con los datos que sacamos nosotros.*

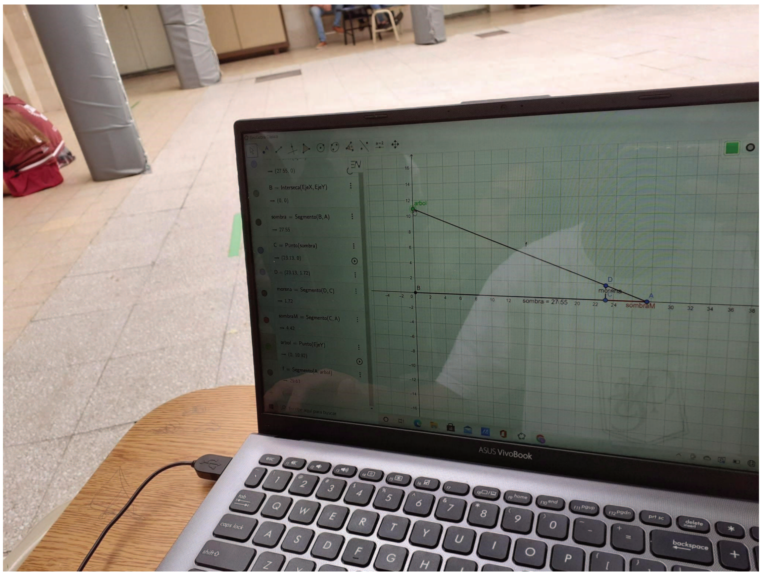


Figura C.3: Con Geogebra.

Pie como patrón de medida no convencional

Julieta: *para medir la sombra que hace la pared, Cande caminó desde donde empieza la pared hasta donde termina la sombra. Pero no hizo pasos, sino que puso un pie tras otro ¿se entiende? como cuando jugábamos al pan y queso en la primaria. Después, le medimos con una cinta métrica el pie, después lo multiplicamos por la cantidad de pies que usó para llegar hasta el final de la sombra y después a esa medida la pasamos a metros.*

Figura C.4: Pie como patrón de medida.

Candela: *con eso que hicimos allá, volcamos esos valores en el GeoGebra y unimos el punto donde termina la sombra con el eje "y" porque sabemos que nos queda un triángulo rectángulo. Porque la pared del edificio forma un ángulo de* 90° *con el piso.*

Figura C.5: Con Geogebra.

Nota: este grupo no menciona la mejor ubicación de los bicicleteros, solamente calcularon distancias pero no contestaron la consigna planteada. Al preguntarles la conclusión, se miraron entre sí y dieron cuenta que no habían buscado un lugar estratégico de colocación. En dicho momento, conjeturaron que un lugar posible es el lado este del CUG porque el gran tamaño del paredón ofrecía una amplia sombra en el momento de la tarde.

Con caída libre de un cuerpo

Lucía: *en primer lugar quisimos medir la altura de la pared que está en el patio interno. Para ello usamos la fórmula de caída libre de un cuerpo que vimos en física en tercero que decía que la altura es igual a un medio por* *la gravedad por el tiempo al cuadrado. Entonces, tiramos una pelota para arriba hasta que llegue donde termina la pared y la filmamos. Después con el celular medimos el tiempo que tardó en caer y aplicamos la fórmula.*

Milena: *después medimos con una cinta métrica la sombra que había en ese lugar y para obtener el perímetro del triángulo rectángulo que nos quedó, aplicamos el teorema de Pitágoras que dice: hipotenusa es igual a la raíz de un lado al cuadrado más el otro lado al cuadrado.*

Guadalupe: *después llevamos todos los datos al Geogebra y calculamos el perímetro y el área del triángulo ya que es toda la sombra que da. Entonces para nosotras el mejor lugar para colocar los bicicleteros es en el patio interno, ya que hay mucha sombra casi siempre.*

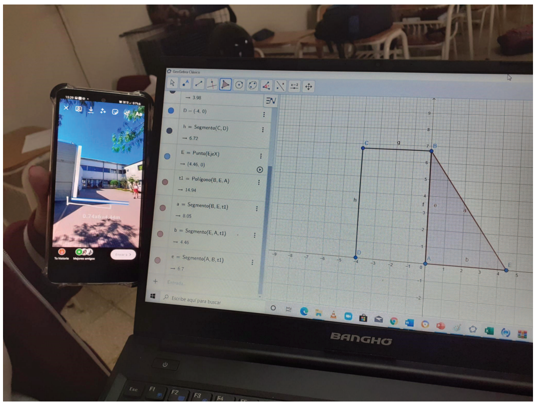


Figura C.6: Con Geogebra.

Patrones no convencionales: Pasos y altura del ladrillo

Jaime: *para calcular la altura del edificio lo que hicimos primero fue medir la altura del ladrillo de la pared (pared este del CUG), después contamos los ladrillos y multiplicamos los ladrillos por ese número que nos dió. Eso para calcular la altura de la pared.*

Tomás: *después lo que hice fue caminar desde la pared hasta donde termina la sombra y los chicos contaron los pasos. Después Bauti me midió lo que vale mi paso y lo multiplicamos por la cantidad de pasos que dí. No sé si se entiende lo que digo.*

Figura C.7: Patrones no convencionales: pasos y altura del labrillo.

Facundo: *después lo que hicimos fue tratar de hacer un plano en tres dimensiones de la Universidad Lo hicimos pero no pudimos ponerle las medidas que habíamos sacado no se no sabemos cómo se hace, parecía más fácil. Entonces, lo hicimos en dos dimensiones y nos quedó un triángulo rectángulo y vimos que la base es la sombra del edificio y la altura es el edificio y que si movemos este vértice (señala el vértice inferior del ángulo no recto) el triángulo se mueve como se mueve el sol. Al mediodía queda re corta la base y a la tardecita larguísima.*

Valentino: *entonces para nosotros hay que colocar un bicicletero en un lado y el otro en otro lado, así las bicis van tener sombra siempre. En lado oeste porque no habría sol por la mañana y del lado este por la tarde. El único inconveniente es al mediodía, donde el sol se encuentra por arriba y no hay sombra en casi ningún lugar del edificio.*

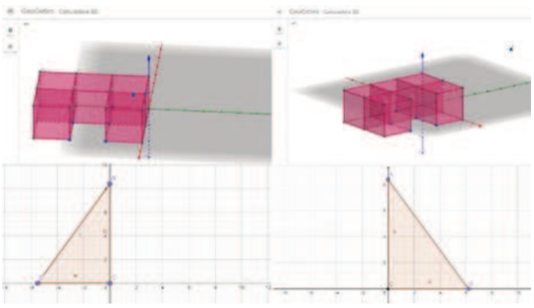


Figura C.8: Patrones no convencionales: pasos y altura del labrillo.

Con Proporcionalidad

Candela: *para calcular la altura del edificio y la sombra que proyecta, lo que hicimos fue sacarle una foto a Pauli que se paró apoyada en la pared que queríamos sacar la altura. Después, trasladamos la foto a Instagram, porque hay una opción que coloca una línea simulando ser la altura de la persona. Y después trasladamos la línea tantas veces como era necesario porque total ya sabíamos la longitud porque es la altura de Pauli y sabemos cuál es su altura exacta.*

Daiana: *también hicimos lo mismo con la longitud de la sombra. Porque pusimos acostada la línea y la fuimos multiplicando hasta llegar a cubrir la sombra del edificio.*

Figura C.9: Con Proporcionalidad.

Paulina: *después pusimos en el GeoGebra los datos y vimos que al deslizar el vértice de la base del triángulo rectángulo (conservando el ángulo de* 90°*), la base se va moviendo como las sombras a medida que pasan las horas. Por este motivo, consideramos que la mejor opción para colocar los bicicleteros es el patio interno porque en el lado contrario al laboratorio (oeste) es donde hay menos exposición al sol la mayor parte del tiempo.*

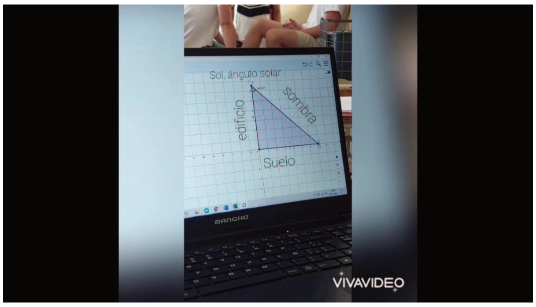


Figura C.10: Con Proporcionalidad.

Día 6

Transcripción de los videos

Grupo 1: Caída libre como forma de calcular la altura del edificio

Guadalupe: *El lugar que elegimos para poner el bicicletero fue el patio trasero de la universidad ubicándolo entre los dos edificios laterales de la misma, para que así éstos lo cubran la mayor parte del tiempo del sol. Al analizar el lugar nos dimos cuenta que la proyección de la sombra era triangular con un ángulo de noventa grados, por lo que estábamos en presencia de un triángulo rectángulo y fué así cuando decidimos medir el perímetro de* *la sombra. Para medir la altura de nuestro triángulo rectángulo utilizamos la misma forma que para medir la altura del edificio de la escuela:* $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$.

Guadalupe: *el resultado del tiempo que obtuvimos fue de 1,5 y al plasmar este resultado en la fórmula nuestro resultado final fue que la altura es de 11,025 m.*

Lucía: *la base, es decir el ancho de la sombra la medimos con una cinta métrica en nuestra segunda ida a la institución y nos dió un resultado de 3 m. Para sacar el perímetro del triángulo, aún nos faltaba conocer el lado c, para lo que utilizamos la siguiente fórmula:* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ *(Teorema de Pitágoras); y descubrimos que el lado c era equivalente a 11,4. Para finalizar calculamos el perímetro y la superficie de nuestra sombra. El perímetro nos dió igual a 31,4 y la superficie a 16,5. La siguiente consigna era calcular nuestras medidas en GeoGebra y para esta marcamos los puntos 11 m y 3 m y al unirlos nos quedó recubierto de rojo lo que vendría a ser nuestra sombra para el lugar elegido.*

Grupo 2: Pasos y recuento de ladrillos

Facundo: *bueno, nosotros elegimos dos partes del edificio para poner dos bicicleteros distintos según la hora en la que va a dar el sol.*

Jaime: *esos lugares serían del lado oeste y este. Del lado este no se podría a la mañana ya que sol sale del lado este y el sol pegaría toda la mañana a las bicicletas hasta las doce del mediodía y del lado oeste sería la forma la forma más factible donde poner los bicicleteros ya que tiene los árboles en un lado de la calle y la sombra que proporciona el edificio mismo sobre la vereda donde se podrían ubicar los bicicleteros.*

Valentino: *bueno... y hay que tener en cuenta que el único horario que se va a ver afectado todo alrededor del edificio es cerca de las doce del mediodía ya que el sol se encuentra por arriba y no va a generar sombra... es el único horario que se va a ver afectado.*

Grupo 3: el pie como patrón no convencional

Giuliana: *nosotros el día jueves visitamos la universidad de Gálvez para concluir con un proyecto el cual consistía buscar un lugar en la universidad donde los bicicleteros se encuentren la mayor parte del día con sombra. Nuestra idea fue medir la altura del edificio o sea, donde daba la sombra con los pies de una compañera desde la punta del edificio desde la pared del edificio hasta donde terminaba la sombra con pasos uno tras otro. Esa medida la multiplicamos por la medida de los pies de mi compañera y a ese resultado lo dividimos por 100 y lo pasamos a metros. Así pudimos sacar la altura de la sombra que daba el edificio.*

Valentina: *con las medidas que sacaron el otro día, las pasamos al geogebra que utilizamos en la compu para hacer las medidas y los gráficos todos en escala.*

Grupo 4: Proporcionalidad

Lucía: *como primera instancia fuimos al centro universitario de la ciudad, para tomar fotos y hallar problemáticas con respecto a las sombras que* *había allí. Luego de un rato encontramos varias problemáticas tales como: ¿por qué el cesto de basura se encuentra en el sol? o ¿por qué el estacionamiento es demasiado pequeño y se encuentra en el sol? También, ¿por qué los motores de los aires acondicionados se encuentran en el sol, sabiendo que así disminuye su rendimiento? Y también, ¿por qué en el patio interno no hay un techo o toldo que lo cubra del sol? Aquí dejamos asentado con fotos las problemáticas anteriormente mencionadas. Como segunda instancia, le contamos a nuestros compañeros las problemáticas que nosotras encontramos y también pudimos observar y escuchar otras problemáticas que plantearon ellos tales como: ¿por qué los bicicleteros se encuentran en el medio de la cancha de fútbol donde hay mucho sol? o ¿por qué en el cajero no hay un techo que proteja al cliente del sol? Como tercera instancia, la profe nos asignó la tarea de encontrar la solución a esta problemática: ¿por qué los bicicleteros se encuentran en el medio de la cancha de fútbol donde hay mucho sol? Ella nos pidió que busquemos un nuevo lugar en donde ubicarlo para que tenga la mayor horas de sombra posible. Tratamos de resolverlo desde el colegio, con la información que tomamos pero fue necesario volver al centro universitario para buscar más material para resolver el problema planteado. Para ello, tomamos más fotos y buscamos nuevas formas de tomar medidas sin la necesidad de utilizar instrumentos de medición. Como pudimos observar anteriormente la foto de la pared este del centro universitario y se puede ver bien la sombra que proyecta el edificio. En esta foto, podemos observar las medidas que tomamos y de qué forma lo hicimos. Como sexta instancia, graficamos en el geogebra luego de haber sacado las medidas y los ángulos. Luego de conversar con mi compañera, llegamos a la conclusión de que de ese lado del centro universitario es la mejor opción para ubicar los bicicleteros, ya que la sombra se sitúa por mayor tiempo allí. Por último y para finalizar, creemos que la mejor solución al problema planteado es definitivamente mover el bicicletero hacia ese lugar del centro universitario.*

Grupo 5: Proporcionalidad 2

Paulina: *en este proyecto se nos planteó encontrar la posición adecuada para colocar los bicicleteros de la universidad. Después de recorrer toda la institución llegamos a la conclusión que el lugar correcto para ubicar el bicicletero era en el patio interno contra la pared contraria al laboratorio (lado oeste). Para verificar si era el lugar indicado necesitábamos medir dicha pared y su sombra producida para verificar que el bicicletero esté siempre resguardado. Utilizamos nuestro método de medición del primer proyecto, sacar una foto de una persona al lado del objeto a medir, cuya medida era de 1,63 y con instagram utilizamos una línea que asemejara la altura de nuestra compañera. Copiamos y pegamos la barra tantas fue necesario hasta cubrir el alto del edificio, multiplicamos la cantidad de barras por el número de altura de la persona y así obtuvimos el resultado. Y para la sombra utilizamos estas mismas barras de forma horizontal por encima de la sombra y multiplicamos cual era su longitud. Así veríamos si la sombra haría efecto* *para la protección del bicicletero. En el geogebra lo graficamos uniendo vértices, creando un rectángulo asemejando el edificio con las medidas obtenidas y de un lado del rectángulo con un polígono formamos lo que vendría a ser la respectiva sombra que da la pared a utilizar. Para nosotros lo indicado sería que el bicicletero sea colocado ahí, ya que es un lugar donde predomina la sombra durante el día a medida que se va moviendo el sol.*

Grupo 6: Teorema de Thales

Constanza: b*ueno, nosotros en nuestro trabajo seguimos trabajando con el teorema de Thales y usamos el geogebra utilizando una recta representando a la sombra en general, tanto de Morena como del árbol que medimos; otra recta vertical para representar a Morena y otra recta vertical para el árbol. Esto nos dió que en el lugar donde elegimos poner el bicicletero había sombra a la mañana.*

Morena: *entonces optamos poner el bicicletero entre el portón de la calle Larrechea, al costado de la universidad, y el estacionamiento que tiene media sombra, sin utilizar la media sombra porque en ese lugar a la mañana le daba la sombra del palo borracho que medimos la altura y a la tarde los pinos de la calle de enfrente.*

Plenario

Docente: *muchos de ustedes para hacer toda esta recolección de datos, todas estas mediciones y este trabajo en GeoGebra; muchos grupos trabajaron con diferentes conceptos matemáticos. Con conceptos que han trabajado anteriormente en otros años o en la primaria. Por ejemplo, hay un grupo que están sentadas allá, que trabajaron ¿con qué tema?*

Grupo de alumnas: *con el teorema de Pitágoras.*

Docente: *bien, trabajaron con el teorema de Pitágoras. Más allá de trabajar con el teorema de Pitágoras, también ¿qué conceptos matemáticos trabajaron?*

Grupo de alumnas: *superficie y perímetro.*

Docente: *¿Quieren presentar el video con las explicaciones a sus compañeros?*

Grupo de alumnas: *si, si.* (Proyectan el video)

Al finalizar la docente agradeció y continuó: después otros grupos han trabajado con otros conceptos matemáticos, ¿cómo cuáles?

Grupo de alumnos: *nosotros con el teorema de Thales.*

Docente: *¿se acuerdan cuál es el teorema de Thales?* (le pregunta al grupo completo de estudiantes)

Grupo clase: *no, no.*

Docente: *bien, bien. ¿Quieren presentar su video así les explican a sus compañeros qué trataba el teorema de Thales?*

Grupo de alumnos: *si, si. Así entienden.* (proyectan el video)

Constanza: *nosotros usamos el teorema de Thales, porque estuvimos buscando en internet cómo resolver lo que nos pidió Sabi (docente) entonces vimos que la altura y la sombra de More iba a ser proporcional a la altura y la sombra del palo borracho. Por eso lo usamos. Pero siempre va a depender también de la hora del día porque si el sol está muy inclinado la sombra es mucho más larga... como la segunda vez que fuimos.*

Docente: *Muchas gracias chicos.*

Docente: *otros grupos trabajaron con otras cosas también, con otros conceptos ¿qué conceptos trabajaron?*

Grupo clase: *¿con la velocidad de caída de un objeto? ¿función cuadrática?*

Docente: *trabajaron, vuelvo a repetir*

Valentino: *ahhh... trabajamos con... una ecuación... cómo se llama... ¡regla de tres simple!*

Docente: *bien, trabajaron con regla de tres simple. Y la regla de tres simple ¿dónde la trabajaron ustedes? En una ecuación, pero ¿Para qué hicieron esa regla de tres simple? La mayoría de los grupos lo hizo.*

Jaime: *para sacar una incógnita.*

Docente: *si, lógico. Pero ¿por qué teníamos esa incógnita?*

Valentino: *porque no podíamos medir.*

Docente: *bien, no podíamos medir. Y cómo no podíamos medir ustedes lo que hicieron fue una regla de tres simple para poder hacer ¿qué?* (como no hay respuesta por parte de los alumnos, sólo murmullos y miradas entre ellos, la docente continua). *Casi todos los grupos me dijeron que tenía que hacer eso: por ejemplo tenía que hacer 2,11 m en la compu...*

Valentino: *Pasaje!!*

Morena: *una escala!!*

Docente: *exacto. Ustedes lo que hicieron, que generalmente lo que hacemos en estos casos es trabajar con escalas, ¿para qué? ¿Para qué se trabaja con escalas?*

Constanza: *para que sea más fácil.*

Docente: *Para qué sea más fácil ¿qué? ¿el traspaso de qué?*

Jaime: *para reducir el tamaño de un lugar.*

Docente: *bien... para reducir el tamaño de un lugar... o sea... para pasar algo super grande es decir... algo macro a algo micro... ya que estamos en la modalidad economía y trabajan mucho esos conceptos. En realidad, nosotros lo utilizamos ahora acá para pasar algo que no podemos acceder para medir a algo que sí podemos acceder y medir, en este caso dentro del contexto.*

Entonces, a partir de este trabajo en escalas, van a presentar los videos el grupo de Jaime, el de Julieta y el de Lucía. También, el grupo de Milena va a presentar, que utilizó escalas para pasar al GeoGebra pero la metodología que realizaron para calcular la altura del edificio es otra.

Cada grupo de alumnos expone su video. Luego, la docente retoma la discusión en plenario.

Docente: *Ustedes estuvieron viendo donde podían colocar los bicicleteros y vieron que fuimos dos días distintos al centro universitario. Un día ¿a qué hora fuimos?*

Grupo clase: *a las dos de la tarde.*

Docente: *¿con?*

Grupo clase: *con 40 grados de calor* (risas)

Docente: *perfecto.. a los dos días fuimos¿a qué hora?*

Grupo clase: *a las 5 también con 40 grados*

Docente: *bien... con 40 grados de calor pero con más humedad (risas). Ahora bien, ¿qué pasó cuando ustedes llegaron al centro universitario primero a las dos de la tarde y luego a las cinco de la tarde con el tema que habíamos planteado desde el principio?*

Constanza: *cambiaron las sombras.*

Docente: *perfecto... cambiaron las sombras y cambiaron mucho.*

Jaime: *porque cambió la posición del sol.*

Docente: *exactamente, porque cambió la posición del sol ¿qué significa esto de que cambió la posición del sol?*

Grupo clase: *que hay mucho más sombra.*

Docente: *exacto, de que había mucho más sombra cuando fuimos a las cinco de la tarde que cuando fuimos a las dos de la tarde.*

Valentino: *pero el problema sigue estando.*

Docente: *el problema sigue estando. Pero si yo tengo en cuenta ese recorrido que hace el sol, al fin y al cabo ¿qué voy a tener en cuenta?*

Mile: *que a las cinco de la tarde hay más sombra.*

Docente: *¿y por qué será eso de que a las cinco de la tarde tenemos más sombra? Varios alumnos: porque el sol cambia.* (hacen un movimiento con la mano de un recorrido semicircular)

Docente: *bien, el sol cambia de posición. Y eso que ustedes me están haciendo con la mano Valentino: a parte de un lado del edificio hay muchos árboles y del otro no.*

Docente: *ese cambio que hace el sol, esa trayectoria nos indica que, ¿qué tenemos que tener en cuenta?*

Valentino y Constanza: *¡el ángulo!*

Docente: *el ángulo, bien. Debemos tener en cuenta el ángulo con el cuál, por así decirlo se mueve el sol para poder trabajar aún más el tema de las sombras que proyectan los árboles y el edificio. ¿Pero qué pasa? Hay un grupo que lo había planteado a esto del ángulo. Nosotros nunca trabajamos con ángulo, si trabajamos con el teorema de Thales, si trabajamos con el teorema de Pitágoras, pero no trabajamos con los ángulos. Por eso, hoy comenzamos a trabajar con ello. El otro día, vos Lucas me dijiste que tu mamá te había dicho algo de ¿cómo se llamaba?*

Lucas: *no me acuerdo... pero que había que sacar el ángulo que proyectaba la sombra con el piso...*

Docente: *la mamá le dijo que había que saber el ángulo que proyecta la sombra, el tema es que no sabemos buscar un ángulo, entonces lo que vamos a plantear ahora es cómo trabajamos con ángulos y longitudes.*

Referencias

Abonia, L. y Miranda, W. (2017). *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula.* [Tesis de Grado, Universidad del Valle]. http://funes.uniandes.edu.co/11099/1/Abonia2017Un.pdf

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. y Gomez, P. (2012). Razones Trigonométricas. En P. Gomez, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 342-414). Universidad de los Andes.

Berio, A., Colombo, M. L., D´Albano, C., Sardella, O. y Zapico, I. (2009). *Matemática 1 Activa*. Puerto de Palos.

Boccioni, M., Strahman, M., Tabaj, A. y Vigione, Y. (2017). *Nuevo Activados matemática 4*. Puerto de Palos.

Bravo, M., Gonzalez, N. y Charria, A. (2014). *Secuencias didácticas para el aprendizaje de las razones trigonométricas.* [Título de Grado, Universidad Católica de Manizales]. https://repositorio.ucm.edu.co/jspui/bitstream/10839/845/1/Martha%20Piedad%20Bravo%20Pineda.pdf

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, M. F. (2004). *La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta*. Chiapa: Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.

Bressan, A., Pérez, S. y Zolkower, B. (2006). Las imágenes y las preguntas en la escuela. *Novedades Educativas, 182*, 22-26.https://www.academia.edu/6044730/LAS_IM%C3%81GENES_Y_LAS_PREGUNTAS_EN_LA_ESCUELA

Bressan, A. y Gallego, M.F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del maestro, 168*, 5-21. https://new.gpdmatematica.ar/wp-content/uploads/2021/03/corre_maestro__matematizacion_progresiva.pdf

Bressan, A., Gallego, M.F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista Bases teóricas. *Educación, 63*, 111. https://new.gpdmatematica.ar/wp-content/uploads/2021/02/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). From history to research in mathematics education: Socio-epistemological elements for trigonometric functions. En V. Katz C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education*(pp. 67-82). Mathematical Association of America.

Cárcamo Bahamonde, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*. [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona]. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/458629/acb1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Carena, M. (2019). *Manual de matemática preuniversitaria*. Ediciones UNL.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.) *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly, y R. A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education*. Laurence Erlbaum Associates.

Cruz Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas*. [Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Zacatenco]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1012

David Chico, J. (2016). *Sistema de ejercicios para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas de trigonometría de los estudiantes de secundaria de II ciclo*. [Tesis de Maestría, Universidad de las Tunas]. http://hdl.handle.net/123456789/3574

Effenberger, P. (2012). *Matemática 4/3*. Kapelusz.

Effenberger, P. (2017). *Matemática III* 2° *Secundario CABA*. Kapelusz.

Escalante Godoy, D. (2018). *El uso comprensivo de las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas*. [Tesis de Grado, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/64218/1117497676.2018.pdf.

Escobar Rodríguez, M. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/20036/01186567.2012.pdf?sequence=1

Fernández Medina, F. J. (2011). *Unidad Didáctica: Trigonometría*. Trabajo de Máster en formación al profesorado de enseñanza secundaria. Universidad de Granada.

Fernández Plaza, J.A. (2016). Errores y dificultades. En L.Rico y A. Moreno

(Coord.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 195-207). Ediciones Pirámide.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. https://www.educacion.gob.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?idFichero=yuWxCrIh1Kc%3D

Fonseca Montero, E. (2016). *La resolución de triángulos y sus aplicaciones. Una unidad didáctica para estudiantes de grado décimo.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59308

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Reidel Publis. Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.*. Reidel. Traducción de Luis Puig (2001), publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. CINVESTAV.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer.

Gómez Ramírez, H. (2013). *Resolución de triángulos rectángulos y problemas en contexto.* [Tesis de Grado, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/74973/70904184.2014.pdf?isAllowed=y&sequence=1

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1*(2), 79-98.

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 105- 128.

Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. En J. van den Akker, N., K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieven (Eds.) *Educational Design Research* (17-51). Routledge.

Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2013). Design Research from the Learning Design Perspective. In T. Plomp N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 72-113). SLO.

Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796. https://www.researchgate.net/publication/46606480_Gravemeijer_Terwel_2000_Hans_Freudenthal_a_mathematician_on_didactics_and_curriculum_theory_Journal_of_Curriculum_Studies_32_no_6_777-796

Gutiérrez, A. y Fiallo, J. (2009). Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. En T. Recio (Ed.), *Geometría dinámica*, 147-171.

Henao, S. y Vanegas, J. (2012). *La modelación matemática en la educación* *matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos.* [Tesis de licenciatura inédita, Universidad del Valle: Santiago de Cali].

Hertel, J. y Cullen, C. (2011). Enseñanza de trigonometría: un enfoque de longitud dirigida. En LR, Wiest y T. Lamberg (Eds.), *Actas de la 33a reunión anual del capítulo norteamericano del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática* (págs.1400-1407). Universidad de Nevada.

Jácome, G. (2011). *Estudio Socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor* [Tesis de maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional].

Kendal, M. y Stacey, K. (1996). Trigonometry: comparing ratio and unit circle methods. En P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education. Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp.322-329). MERGA. https://cutt.ly/hjOWr2s

Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio.* [Trabajo de investigación, Universidad de Granada]. Repositorio de Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2014). Concepciones del seno y del coseno puestas de manifiesto por estudiantes de Bachillerato. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). SEIEM.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias, 34* (3), 51-71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Martin-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Rico, L. (2019). Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15* (12), artículo n°: em1782. https://doi.org/10.29333/ejmste/110490

Martínez Silva, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado.* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. http://hdl.handle.net/10803/4703

Mateus Vargas, K. (2013). *Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21905/01186836.2013.pdf?sequence=1

Mendoza, J., Valenzuela, R., Palermo, P., Ríos, A., Mendiola, L., Palacios, D., Leyton, N., Montoya, P., Torres, C., Arce, S. y Martínez, P. (2018). *Entre números IV*. Santillana.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014). *Orientaciones Curriculares. Educación Secundaria. Ciclo Orientado.*

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. http://funes.uniandes.edu.co/544/1/MolinaM06-2822.PDF

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29* (1),75-88.

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L.C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En L. Blanco, N. Rodríguez, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez, C. Castro y C. Jimenez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 55-79). Universidad de Granada.

Montiel-Espinosa, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* [Tesis de Doctorado, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Digital Institucional (RDI). https://repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11653/1/montiel_2005.pdf

Montiel, G. (2007). Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de matemática educativa, 20*, 590-595.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico.* Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico.* México, Secretaría de Educación Pública.

Montiel, G. (2014). El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27* (pp. 1771-1779). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel-Espinosa, G. y Jácome-Cortés, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática, 28* (50), 1193-1216. https://bit.ly/2zSLuWv

Montiel-Espinosa, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del Pensamiento Funcional-Trigonométrico. En: M. Ferrari; G. Martínez y G. Buendía (Coords.). *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (pp.169-205). Ediciones Díaz de Santos.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L.Rico y A. Moreno (Coord.), *Elementos de didáctica de* *la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 197-207). Ediciones Pirámide.

OCDE (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Santillana.

Peña Medina, C. y Vargas González, J.C. (2015). *Unidad didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en la educación media utilizando el modelo de Van Hiele*. [Título de Grado, Universidad de los Llanos]. https://repositorio.unillanos.edu.co/bitstream/handle/001/346/TESIS%20JULIAN.pdfsequence=1

Pérez, S. y Bressan, A. (s.f). *Imágenes como buenos contextos*. https://new.gpdmatematica.ar/wp-content/uploads/2021/02/imagenes_como_buenosconceptos.pdf

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (pp. 61-94). Horsori.

Puig, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal, en *Fenomenología Didáctica de las estructuras matemáticas (textos seleccionados)*, Trad. de L. Puig. Cinvestav IPM.

Rico, L. (2016). Significados de los contenidos matemáticos escolares. En L.Rico y A. Moreno (Coord.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 153-174). Ediciones Pirámide.

Rueda Upegui, G. A. (2012). *Aproximación a la enseñanza de las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas en el grado décimo.* [Trabajo de grado, Universidad del Valle]. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/bitstream/handle/10893/4729/CB-0473327.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ruiz-Hidalgo, J.F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L.Rico y A. Moreno (Coord.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Ediciones Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J.F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L. Blanco, N. Rodríguez, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez, C. Castro y C. Jimenez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 55-79). Universidad de Granada.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Libros del Zorzal.

Santamaria, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda.* [Tesis de maestría, Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Comahue]. http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/tesis_%20final_santamaria/1.pdf

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo* [Tesis de maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional].

Serrano Quevedo, B. (2019). *Análisis de usos del conocimiento trigo-*

nométrico en el discurso escolar de Ingeniería Mecatrónica. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].https://repositorio.cinvestav.mx/bitstream/handle/cinvestav/972/SSIT0016143.pdf

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective in *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M. A. (2014). Hypothetical learning trajectories in Mathematics Education. In S. Leman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-275). Springer.

Tavera Acevedo, F. (2013). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas.* [Tesis de Maestría, Universidad de Medellín].

Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería.* [Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Sonora]. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2993.5603/1

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2020). La desarticulación matemática en ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la matemática educativa. *Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, 29* (58), 24-55. http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación Matemática, 33*, 202-232.

Thompson, P. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, pp. 4564). Cinvestav UMSNH.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 458-477.

Valderrama Ramírez, N. (2013). *Construcción de las funciones trigonométricas haciendo un contraste entre la utilización y ausencia de TIC´s.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21847/01186815.2013.pdf

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 935.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: un recorrido guiado. *Correo del maestro, (149)*, 23-54. http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm

Villa Ochoa, J. y Tavera Acevedo, F. (2019). La covariación en las tareas de los libros universitarios de precálculo: el caso de las razones trigonométricas. *Bolema, Rio Claro (SP), 33* (65), 1379-1399. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a19

Weber, K. (2005). Students understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 7*(3), 91-112.

Wenthworth, G. A. (1883). *Plane and Spherical Trigonometry.* Ginn, Heath Co.

Zamora Cintas, P. (2013). *La contextualización de las matemáticas.*[Trabajo de Grado, Universidad de Almería].https://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2323/Trabajo.pdf