



FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

**ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA VINCULADA AL
PROCESO DE ARTICULACIÓN ENTRE LA ARITMÉTICA Y EL
ÁLGEBRA: ESTUDIO DE ECUACIONES DIOFÁNTICAS**

Tesista: Prof. Carolina Soledad Scudaletti

Directora: Dra. Fabiana Montenegro

Carrera: Especialización en Didáctica de la Matemática

Año: 2021

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Antecedentes	3
3. Marco teórico	4
3. 1. Enfoques teóricos	5
3. 2. Enfoques matemáticos	9
4. Metodología y objetivos	11
5. Presentación y fundamentación de la secuencia	11
5. 1. Sujetos de estudio y gestión de la clase	11
5. 2. Contenidos previos y concepto de ecuación	12
5. 3. Fundamentación de la propuesta de enseñanza de la TSD	13
5. 3. 1. Análisis a priori	14
5. 3. 2. Análisis a posteriori - Implementación de la propuesta de enseñanza ...	14
5. 3. 2. 1. Análisis de la primera actividad	15
5. 3. 2. 2. Presentación de producciones desde el pizarrón	20
5. 3. 2. 3. Análisis de la segunda actividad	26
5. 3. 2. 4. Presentación de producciones desde el pizarrón	29
5. 3. 2. 5. Análisis de la tercera actividad	32
5. 3. 2. 6. Presentación de producciones desde el pizarrón	33
6. Reflexión de las producciones de los alumnos y de la puesta en común	37
7. Análisis de las representaciones semióticas	45
8. Conclusión	46
9. Referencias	50

1. Introducción

Este estudio propone la implementación y análisis de una secuencia didáctica como estrategia para la articulación entre la aritmética y el álgebra mediante problemas que se modelizan a través de ecuaciones, en nuestro caso en particular ecuaciones diofánticas lineales (EDL) del tipo $ax + by = c$, donde a , b y c pertenecen a $\mathbb{Z}$. El propósito de esta propuesta es confrontar a los alumnos con posibles rupturas esenciales que surgen entre ambos dominios durante las prácticas áulicas.

El objetivo principal de este trabajo final de integración fue implementar y analizar una secuencia didáctica que fortaleciera el pensamiento aritmético-algebraico, como propuesta que genere espacios de trabajo matemático escolar (Cortés, Hitt, y Saboya, 2016). Por lo tanto, la presente investigación se centró en la articulación entre las prácticas aritméticas y algebraicas necesarias en el ámbito cotidiano de las clases de matemática al abordar actividades que involucran estos temas. A través de la implementación de este tipo de actividades, buscamos situar a los estudiantes en mejores condiciones para abordar lo algebraico, incluyendo la construcción de noción de variable y la generalización. Una pregunta que nos hemos planteado y guía este trabajo es si la implementación de estos problemas promueve que los estudiantes reconozcan cierta diferenciación entre los elementos de cada dominio o no.

Vergnaud (1988, citado en Mercado, 2016) sostiene que el docente no debe pasar por alto el hecho de que el álgebra representa una doble ruptura epistemológica. En primer lugar, una ruptura con la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de problemas que primitivamente fueron tratados intuitivamente, y en segundo lugar, con la implementación de nuevos objetos matemáticos como ecuaciones, incógnitas, variables, función, monomios y polinomios.

Este análisis se realizó mediante un estudio empírico de las producciones de alumnos de 3º año de la Educación Secundaria del Ciclo Orientado de la Provincia de Santa Fe durante el año 2023. Evocando al Diseño Curricular Jurisdiccional de la misma, se espera que el trabajo algebraico propicie que el estudiante pueda explorar, formular y validar conjeturas sobre relaciones aritméticas, apoyándose en diferentes registros de representación semiótica. Desde la perspectiva de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), analizamos las representaciones utilizadas por los alumnos, sus funciones y las posibles conversiones de registros que puedan surgir, así como su empleo “como un medio de exteriorizar las representaciones mentales para fines de comunicación, para hacer público algo que es privado” (Barrio, 2010, p. 160).

Utilizamos el modelo propuesto por Brousseau, en la Teoría de Situaciones (TSD), que llama situación “y que describe en términos de interacción entre un sujeto y un ‘medio’ resistente, al que el sujeto se adapta, produciendo conocimiento” (Sadovsky, 2003, p.9), asumiendo “que el aprendizaje se da en el contexto de interacciones sociales, de modo que el trabajo en el aula en grupos pequeños de estudiantes será una de las modalidades de trabajo predominantes” (Barreiro y Casetta, 2015, p.17). Este análisis responderá a “un esquema experimental basado en ‘realizaciones didácticas’ en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, 1995, como se citó en Carnelli y Marino, 2015).

La transición hacia las prácticas algebraica implica abandonar la búsqueda de un resultado final- característica de la práctica aritmética- para enfocarse en extraer relaciones pertinentes

a partir de la lectura de una expresión o de la transformación de una expresión en otra equivalente. Esto supone un cambio complejo de práctica que no puede ser abordado si no es en relación con aquello que los estudiantes traen de su paso por la escuela primaria: la práctica aritmética. (Borsani, Brunand y Cabalcagüé, 2021, p. 32)

Algunas de las preguntas que nos planteamos al inicio de este trabajo final integrador son las siguientes:

- Ya que el planteo de EDL con dos variables implica que los estudiantes deben definirlas, definir el dominio, decidir sobre la cantidad de soluciones y sobre el modo de expresar el conjunto solución, ¿suponen estas prácticas un grado de ruptura entre la aritmética y el álgebra?
- En esta misma línea, el trabajo con secuencias didácticas ¿favorece la apropiación y el reconocimiento de procedimientos que faciliten el trabajo con futuras situaciones similares?
- ¿Existen características del aprendizaje aritmético que favorecen la transición en el aprendizaje algebraico?
- El trabajo con EDL, ¿permite a los estudiantes reconocer cierta diferenciación o encontrar relaciones entre ambos dominios?

Creemos que este trabajo será una oportunidad para la implementación de algunos de los modelos de conocimientos didáctico-matemático de un docente que conceptualiza Shulman (1986, en Pochulu y Rodríguez, 2015), por el tipo de problemas abordados y la secuenciación pensada para tales. El *conocimiento del contenido* que se pondrán en juego para la resolución de las actividades, el *conocimiento especializado* que puede llegar a verse en el ordenamiento de las secuencias para abordar diversos aspectos de un contenido específico y, por último, *el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y a la enseñanza*. Para lograr este último conocimiento nos detendremos a analizar cómo piensan los estudiantes, qué estrategias emplean, a qué representaciones acuden, cómo trabajan sobre los errores, cómo evoluciona su razonamiento matemático ligado a la búsqueda de procesos pertinentes para tratar sus concepciones erróneas, etc.

2. Antecedentes

En este apartado se ofrece una breve descripción de investigaciones centradas en la transición entre la aritmética y el álgebra que invitan a revisar las prácticas matemáticas que se desarrollan al interior de las aulas.

En su tesis de doctorado, Patricia Sadovsky (2003) presenta el desarrollo de dos secuencias de enseñanzas con alumnos de séptimo grado de escuelas primarias de la ciudad de Buenos Aires. La segunda secuencia refiere al tratamiento de problemas que vinculan dos variables con un grado de libertad, abriendo el juego a la producción de varias o de infinitas soluciones. Sadovsky ilustra cómo se conjugan la transición de la aritmética al álgebra cuando se movilizan las estrategias básicas de problemas aritméticos, como así también cuando se enfrenta al estudiante a la necesidad de seleccionar variables, de definir su dominio, decidir sobre la cantidad de soluciones y encontrar formas de expresarlas.

En otro trabajo, en colaboración con Panizza y Sessa (1999), Sadovsky se proponen identificar las condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de la escuela media, reconociendo la complejidad inherente en el pasaje de la aritmética al álgebra. Esta complejidad, según Grimaldi e Itzcovich (2013), se traduce en tensiones propias que surgen

en la transición de la escuela primaria a la escuela media, tensiones que también serán reflejadas en el área de matemática. Los alumnos que ingresen a este nivel deben desarrollar nuevas estrategias para abordar los problemas propuestos, crear nuevas formas de representación y construir maneras de validar, “los alumnos deberán renunciar a muchas de las elaboraciones realizadas en la escuela primaria, al tiempo que tendrán que apoyarse en ellas para producir las modificaciones que los nuevos desafíos demandan” (p. 72).

Valiero (2020), en su trabajo en contexto áulico, busca realizar un aporte reflexivo acerca de propuestas didácticas que prescindan de tareas de generalización o algoritmos y representaciones correspondientes al álgebra. Observa que las prácticas de enseñanza han desplazado la actividad aritmética escolar para dar mayor exclusividad a las prácticas algebraicas. Sugiere abordar la aritmética a través de la producción de saberes significativos mediante trabajos colaborativos entre pares de estudiantes. El autor cuestiona el hecho de que muchas veces la aritmética es transmitida en forma acrítica y a-reflexiva, presentada como un área de la matemática que se vale de la aplicación de técnicas y de algoritmos. Por el contrario, considera que para superar dicha situación debería darse lugar al planteo de actividades de resolución de problemas que generen una actitud de enseñanza y aprendizajes significativos, de manipulación y comunicación de conceptos, teorías y definiciones.

Las autoras Aguirre y Cerati (2020) realizan un análisis similar al de Valeiro (2020), pero su atención se centra en la introducción del álgebra en las escuelas secundarias desde el análisis de libros de textos y la priorización de los docentes en la elección de los mismos. Los libros analizados ponen en evidencia que el modelo institucional que se observa con mayor predominancia es el de la aritmética generalizada, tomando la resolución de tareas como una mera aplicación de fórmulas, traduciendo símbolos y lectura de expresiones algebraicas, cargados de ejercicios similares que parecen apuntar a una mecanización de prácticas de adquisición de destrezas, siendo estos libros los que priorizan, en la elección, la mayoría de los docentes.

Finalmente, se consideran los aportes de Barrio et. al (2010) en relación con la implementación de EDL en edades tempranas, tanto en la escuela primaria como en la secundaria. En ambos casos, considera que estas prácticas de enseñanza facilitan la actividad matemática genuina por parte de los estudiantes.

3. Marco teórico

En este apartado, presentamos una breve descripción de las perspectivas teóricas desde las cuales abordamos nuestra investigación.

En el apartado 3.1, describimos los constructos teóricos significativos de la Teoría de Situaciones Didáctica y de la Ingeniería Didáctica, que fundamentan la propuesta de enseñanza y su implementación.

En el apartado 3.2 haremos un breve recorrido sobre las características principales del objeto de saber en nuestra práctica. Los problemas seleccionados conducen al planteo de EDL, lo cual permite trabajar con la naturaleza de las variables, la cantidad de soluciones, las regularidades alcanzadas en la búsqueda de esas soluciones y los modos en que los estudiantes adquieren ese conocimiento y eligen representarlo. En este último caso, abordaremos el marco teórico de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica para

analizar las herramientas que los estudiantes emplean en la resolución de las actividades brindadas.

3. 1. Enfoques teóricos

Como se expuso en la introducción, este trabajo se enfoca en analizar las producciones de un grupo de alumnos, poniendo especial énfasis en la articulación que se establece entre las prácticas aritméticas y algebraicas que desarrollan en el aula. Aguirre y Ceratti (2020) consideran que la introducción del álgebra en el nivel medio no debe darse de manera abrupta, dado que puede generar obstáculos en el aprendizaje. Convencidos que el trabajo entre ambos campos debe darse de manera paulatina, el marco didáctico que rige esta investigación se basa en las ideas de uno de los desarrollos teóricos más trascendentales de la corriente en Didáctica de la Matemática, como es la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), propuesta por Brousseau. En este contexto, el docente es encargado de identificar las situaciones que desea llevar al aula, permitiendo a los alumnos construir conocimientos. Aquí radica el sentido de la *situación didáctica*, replicando de algún modo la actividad científica. Se asume que el aprendizaje se da en el contexto de interacciones sociales, siendo el trabajo en pequeños grupos la modalidad que predomina dentro del aula. Desde este enfoque se nos hace imprescindible tener presente algunos aspectos de la metodología de la Ingeniería Didáctica (ID) que presenta Artigue (Carnelli y Marino, 2015).

A continuación, presentamos los constructos de la TSD y ID que empleamos en este trabajo con mayor frecuencia.

La primera teoría a la que hacemos referencia -TSD- se concibe desde un enfoque sistémico debido a que opera sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje, centrando su atención en el docente, el alumno, el conocimiento matemático y cierto *medio*. Según Barreiro y Casetta (2015) este medio “*es parte de la situación didáctica que contiene los problemas que el docente presenta a los alumnos (...) un problema o una secuencia de problemas (...) las interacciones del alumno con el problema también conforman el medio*” (p. 18).

En relación con el aprendizaje, Brousseau (1986, Barreiro y Casetta, 2015) establece que el alumno aprende matemática por *adaptación al medio*. Esta adaptación refiere al aprendizaje del estudiante luego de haberse enfrentado a contradicciones, interrogantes, dificultades o problemas, generando respuestas a estos desafíos.

En el diseño de una situación didáctica, la selección de los problemas ocupa un lugar central. Es por ello que resulta imprescindible contar con un análisis *a priori* para anticiparse a posibles acciones de los alumnos y evaluar posibles estrategias. Estas estrategias deben posibilitar a los estudiantes la puesta en juego de heurísticas variadas, factibles de ser empleadas por ellos, pero a su vez deben tender a producir dificultades que impulsen nuevas formas de adaptación de sus conocimientos, este juego constante de la búsqueda de la *adaptación al medio*.

La situación didáctica se sustenta en una intencionalidad didáctica y ha sido diseñada con el propósito de que el alumno aprenda un saber. Cuando esta intencionalidad se torna imperceptible por el alumno, la situación didáctica pasa a estar en funcionamiento *a-*

didáctico. En este escenario, el alumno actúa sobre el medio de manera independiente del docente, elabora una producción propia sin advertir la intencionalidad que se esconde en la misma (Barreiro, y Casetta, 2015).

En esta situación didáctica rige un contrato didáctico que regula las interacciones entre el docente, los alumnos y el saber. Este contrato comprende las reglas de funcionamiento que no se encuentran explícitas en un contrato pedagógico general y pueden manifestarse a través de palabras, actitudes o gestos que habilitan o deshabilitan los procesos y las formas de argumentación que el docente está dispuesto a habilitar. Al tratarse de una clase dinámica, este contrato experimentará rupturas y reajustes en sus reglas en cuanto los alumnos avancen en su *adaptación al medio*.

Cuando el alumno explora el problema, pone en marcha concepciones y conocimientos implícitos, movilizándolo y reorganizando conocimientos anteriores. Brousseau denomina *situación de acción* a este primer encuentro del alumno con el problema, la primera de tres tipos de situaciones que se dan en el escenario de las TSD. La segunda situación surge cuando el alumno comienza a formular conjeturas en función a las acciones previas sobre el problema y desea comunicarlas. Esta necesidad de hacer visible lo gestionado conlleva formular explícitamente las ideas que derivaron de la confrontación de los conocimientos implícitos y el medio, es decir, lo sucedido en la primera etapa. A este tipo de situación se la conoce como *situación de formulación* y es en esta etapa cuando el estudiante asume el papel de emisor modificando y creando un lenguaje para que el otro, ya sea un alumno o un grupo de alumnos, reciba un mensaje explícito con el fin de que sea comprendido y pueda, con ese contenido, actuar sobre el medio. Por último, se encuentra la *situación de validación* donde la comunicación entre grupos busca llegar a un acuerdo de veracidad sobre las conjeturas alcanzadas autónomamente. Es en este punto donde se pone en funcionamiento el aporte de argumentaciones con valor de pruebas de las confrontaciones de unos y otros para finalmente decidir en un proceso social y científico.

Es esencial que todo conocimiento generado por el alumno o un grupo de estudiantes sea validado, otorgando especial importancia al nexo que surge de la producción del estudiante y la formulación del saber culturalmente aceptado que tiene a cargo el docente.

En cuanto al rol del docente, este tiene una participación que antecede lo que luego sucederá en el aula, dado que es el responsable de diseñar la situación didáctica. Tendrá la responsabilidad de la elección de los problemas que serán cruciales para conformar el medio con que los estudiantes interactúen. Los problemas deben provocar las adaptaciones que el docente desee, motivo por el cual su selección se guiará mediante un análisis a priori que le permitirá al profesor hipotetizar sobre las posibles acciones y decisiones de los alumnos, así como las restricciones a las que se podrían enfrentar, dando lugar a nuevas estrategias de acción.

Una vez que el docente se encuentra en el aula con *el medio* en funcionamiento, es decir, cuando un grupo de alumnos está trabajando en un problema, su rol es el de crear una micro comunidad científica. Las autoras Barreiro y Casetta (2015) señalan que Brousseau compara este momento de la clase con el trabajo de un científico. Esta *teoría* considera preciso que se genere un espacio que simule el trabajo del científico, dado que será aquí donde las interacciones entre los alumnos hagan emerger el conocimiento.

Durante el desarrollo en el aula, el docente deberá permanecer atento al accionar de los alumnos, a las intervenciones que realicen y compartan con el resto de los integrantes de su propio grupo o del resto de la clase. El docente deberá intervenir trayendo a la escena diversas

estrategias que ha recopilado en su análisis a priori. Estas intervenciones se conocen como *devolución del problema* y se logra cuando el alumno se siente responsable único de la resolución del problema, libre de presupuestos didácticos. En este punto, el docente *devuelve* al alumno la responsabilidad sobre su producción. Esta devolución puede tener lugar en la situación de acción, formulación o validación.

Por otro lado, encontramos la *devolución del saber*, que se vincula con la *institucionalización del conocimiento*. Esta devolución está regida por un concepto culturalmente aceptado dentro del campo de la matemática. El docente irá recabando información de las distintas situaciones, siendo el encargado de trabajar con los resultados que se generaron de las producciones de los alumnos, donde se han descontextualizado los saberes en función de la situación didáctica y a-didáctica. La devolución del saber no deberá ser una exposición del saber acabado, de lo contrario, será un trabajo en conjunto con los estudiantes.

Las decisiones que se tomaron en la secuencia didáctica presentada en este TFI, tanto en la implementación de la misma como en los momentos previos al trabajo áulico (selección y análisis de problemas, secuenciación, elección del grupo de alumnos) estuvieron atravesadas por la metodología descrita anteriormente (TSD).

Como se mencionó al comienzo de nuestro marco teórico, nos referimos a las etapas del diseño de la ingeniería que plantea Artigue dado que se gestó para dar respuesta a cómo atender a las metodologías de investigación y la relación con la acción en el sistema de enseñanzas. Ambas cuestiones, según señalan Carnelli y Marino (2015), están fuertemente ligadas a la TSD dado que esta teoría necesitó de una metodología de enseñanza e investigación diferente a las que se planteaban hasta el momento, apoyándose en ID para tal fin. La teoría presentada por Artigue comprende cuatro fases:

- I. Análisis Preliminares - Diseño de la secuencia.
- II. Convención y análisis a priori de las situaciones.
- III. Experimentación.
- IV. Análisis a posteriori y validación/evaluación.

Nuestro trabajo no pretende realizar un recorrido exhaustivo por cada una de las fases establecidas, dada la naturaleza de nuestro alcance. Sin embargo, encontramos pertinente ampliar, en el porqué de la selección de los problemas y en el análisis a priori. Realizaremos un análisis más detallado en la fase a posteriori y en la puesta en escena, buscando responder a algunas de las preguntas planteadas.

Entendemos por *fase a priori* el momento donde el investigador formula hipótesis en función de la secuencia preestablecida, analizando la acción, selección, decisión, control y validación en el momento que el alumno se encuentre con la situación (Carnelli y Marino, 2015). La fase *a posteriori* y de *validación* comienza luego de la *fase de experimentación*, es decir, luego de que se implemente la secuencia diseñada. Durante la experimentación se harán visibles las distintas fases que componen las etapas del aprendizaje de la TSD: acción, formulación, validación e institucionalización. En este trabajo no desarrollaremos la etapa de institucionalización, siendo que no estuvo dentro del recorrido planteado.

La *fase de análisis a posteriori* se basa principalmente en la reconstrucción de los hechos vividos en la clase, así como en las observaciones que surgen durante la puesta en marcha de la secuencia, las producciones personales de los estudiantes y las producciones grupales en el pizarrón.

La *validación* que se propone en esta teoría se realiza desde la confrontación entre la fase a priori y el análisis a posteriori. Creemos que es conveniente aclarar que para la ID el término validación responde más a una evaluación interna por parte del docente, a través de los resultados obtenidos entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, a diferencia del propuesto para la TSD, donde la validación recae en los estudiantes mediante las conjeturas y argumentaciones, concebidas como un proceso social y científico.

En línea con estas perspectivas, Borsani, Brunand y Cabalcabué (2021) aportan una mirada enriquecedora sobre el aprendizaje matemático al destacar el valor del análisis colectivo en el aula. Según las autoras, el intercambio de diferentes procedimientos y relaciones matemáticas crea condiciones favorables para que los estudiantes no solo relacionen y confronten ideas, sino que también cuestionen y se apropien de estrategias propuestas por sus pares. En este contexto, la circulación de estrategias diversas amplía las oportunidades para que los estudiantes exploren nuevas relaciones matemáticas, descubran patrones y propiedades no evidentes, y generen conjeturas basadas en observaciones colectivas.

En otras palabras, las autoras sostienen que no se trata simplemente de una puesta en común, sino que esta práctica trasciende al invitar a un análisis más profundo, generando espacios para diálogos críticos entre diversas perspectivas. Esto enriquece el aprendizaje compartido y fomentando la construcción del conocimiento matemático de manera colaborativa, permitiendo a los alumnos desarrollar habilidades de argumentación y validación esenciales para el aprendizaje algebraico.

En este sentido, Sadovsky (2003) aporta una reflexión fundamental al destacar cómo la puesta en común permite transitar entre lo particular y lo general, un aspecto clave en el aprendizaje matemático. La autora reflexiona sobre esto al señalar que:

cuando los alumnos trabajan con una fórmula para producir soluciones, se encuentran frente a un ‘objeto’ que es al mismo tiempo, un algoritmo de cálculo que les permite obtener soluciones particulares, una representación de las relaciones entre las variables del problema, y una representación del conjunto de las soluciones. Estos cambios de centración que exigen ‘ver’ la misma expresión de modos diferentes, contribuyen con el proceso de generalización. (p. 59)

Así, la puesta en común no solo facilita la confrontación de ideas y procedimientos, sino que promueve un aprendizaje más profundo al conectar lo concreto con lo abstracto, y lo individual con lo colectivo.

En consonancia con estas reflexiones, Arcavi (1994, 2005 y 2007 en Mercado, 2016) realiza aporte significativos sobre el álgebra escolar, enfatizando la importancia del significado y el sentido de los símbolos en la actividad matemática. El autor observa que muchos estudiantes no emplean el lenguaje simbólico como una herramienta para comprender, generalizar, relacionar o demostrar producciones matemáticas.

Para abordar esta problemática, Arcavi destaca una serie de componentes fundamentales en el aprendizaje del álgebra que van desde la amigabilidad de los símbolos como recurso

accesibles, hasta la capacidad de diseñar y seleccionar representaciones simbólicas adecuadas para expresar información dada o deseada.

3. 2. Enfoques matemáticos

En este apartado se abordarán dos marcos teórico que guiarán el análisis de esta investigación. Por un lado, se trabajará con EDL vinculadas a las estructuras aditivas y multiplicativas descritas por Vergnaud y Riccò (1985). Este marco permitirá explorar cómo los estudiantes resuelven problemas que implican relaciones proporcionales y composiciones de magnitudes. Por otro lado, se empleará la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas (TRRS), que analiza los distintos registros que los estudiante emplean a la hora de representar y comunicar conceptos matemáticos.

A continuación, se desarrollará cada uno de estos marcos teóricos, estableciendo su relevancia y aportes al análisis de los datos de esta investigación.

El abordaje de problemas que conducen al planteo de EDL presenta un mayor nivel de complejidad en comparación con el que involucran simultáneamente estructuras aditivas y multiplicativas. En este sentido, resulta conveniente basarse en el análisis propuesto por Vergnaud y Riccò (1985, Barrio *et al.*, 2010), quienes identifican dos grandes estructuras *relacionales multiplicativas*. Una de ellas es el isomorfismo de medidas o también llamado proporción simple entre dos espacios de medidas (M_1 y M_2) que miden magnitudes proporcionales. Esta estructura aborda problemas basados en una proporcionalidad simple directa, como reparto equitativo, precios constantes, movimiento uniforme o densidades constantes a lo largo de una línea, en superficies o en volúmenes.

La segunda estructura refiere al producto de dos espacios de medidas (M_1 y M_2) que se componen para dar un tercer espacio (M_3). Ejemplos de este tipo de problemas incluyen situaciones donde se conocen las medidas iniciales, como el número de integrantes femeninos y masculinos para armar diferentes parejas de baile.

Asimismo, Vergnaud (1981, Barrio *et al.*, 2010) distingue seis relaciones de *estructura aditiva* de base. Considerando los problemas con dos variables abordados en este estudio, nos centraremos exclusivamente en las relaciones de composición de dos medidas en una tercera, en la relación de comparación de una medida inicial en una final y en la transformación de una medida inicial en una final.

En el contexto de la resolución de EDL el tipo $ax + by = c$, encontrarnos procedimientos que implican *estrategias sistemáticas* para producir soluciones, las cuales Sadovsky (2003) denomina *procedimientos sistemáticos algebraicos*. La autora menciona dos modos de establecer la variación de las variables que intervienen en estos problemas, los cuales requieren del empleo de EDL para su resolución. Uno de ellos es el que permite tomar conciencia de la *relación de dependencia entre las variables*, asignando valores a una de ellas y obteniendo la otra mediante la inversión de operaciones, método conocido como ‘despeje’. Esta variación sistemática permite establecer que las variables no pueden tomar cualquier valor. Por otro lado, considera el empleo de procedimientos que denomina de *covariación*. Estas técnicas se basan en encontrar maneras de conservar el coeficiente c , probando valores de la variable a través de pasos mínimos que permitan pasar de una solución a otra, siguiendo un orden establecido en alguna de las variables.

En contraposición con los procedimientos *sistemáticos algebraicos*, Sadovsky describe un criterio en el que los estudiantes obtienen soluciones aisladas sin establecer relaciones entre ellas ni analizar criterios sobre si se han buscado o no todas las posibles soluciones. A estos enfoques, los denomina *procesamientos no sistemáticos del orden aritmético*.

El álgebra es un área de la matemática que se centra en el estudio de las estructuras y propiedades de las operaciones aritméticas y las relaciones numéricas. Su objetivo principal es resolver ecuaciones y expresar relaciones matemáticas en términos generales sin ocuparse de casos particulares, como sí lo hace la aritmética. El álgebra proporciona herramientas y técnicas para resolver una amplia gama de problemas matemáticos y prácticos. Estas herramientas requieren habilidades de razonamiento lógico y pensamiento abstracto. Y estas habilidades son valiosas no solo en matemáticas, sino también en la vida cotidiana.

En cuanto a las representaciones, nos apoyaremos en el marco teórico de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) para analizar las herramientas que los estudiantes emplean espontáneamente al abordar las actividades. Estas representaciones se utilizan "como un medio de exteriorizar las representaciones mentales para fines de comunicación, para hacer público algo que es privado" (Barrio, 2010, p. 160).

A su vez, según Duval, estas representaciones, que pueden darse en diferentes tipos de registros semióticos tales como: la lengua natural (oral, escrita), representaciones numéricas (enteras, fraccionarias, decimal); representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales) y representaciones alfanuméricas (algebraicas). Éstas no solo cumplen una función comunicativa, sino que también fomentan la actividad cognitiva del pensamiento, ya que "permiten el desarrollo de representaciones mentales por la interiorización de representaciones semióticas. Cumplen diferentes funciones cognitivas como la comunicación, la objetivación y el tratamiento [...]" (Barrio, 2010, p. 160).

Las actividades cognitivas promovidas por estos registros y que serán consideradas para un futuro análisis son:

- La formación de una representación.
- El tratamiento de una representación.
- La conversión.

La formación de una representación estriba en la representación de un registro dado: enunciación de una frase, dibujo de una figura geométrica, elaboración de un esquema, escritura de una fórmula. Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido a representar. La selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. Bajo este aspecto, la formación de una representación podría compararse a la realización de una tarea de descripción.

El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro. El cálculo es una forma de tratamiento propio de las escrituras simbólicas (cálculo numérico, algebraico, proposicional, etc). La reconfiguración es una de las numerosas operaciones que otorga al registro de las figuras su rol heurístico. Existen reglas de tratamiento de cada registro.

La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Es una transformación externa al registro de partida.

4. Metodología y objetivos

Con la finalidad de encontrar evidencias de distintos tipos de razonamientos o dificultades, analizamos, con carácter empírico, las producciones de los estudiantes que inician el 3° año de una escuela media de Educación Pública de gestión Privada de la ciudad de Santa Fe ante el diseño de una propuesta didáctica con EDL.

Para llevar a cabo este análisis, utilizamos una metodología de investigación cualitativa interactiva (McMillan y Schumacher, 2005) de estudio de caso. Recopilamos datos en situaciones reales mediante la interacción con alumnos en su propio entorno -investigación de campo- dado que buscamos describir y analizar las conductas sociales, colectivas e individuales de los alumnos, las opiniones, los pensamientos y las percepciones. De aquí se desprende la importancia de hacerlo a la luz de la ID.

Los objetivos que persigue este trabajo son los siguientes:

Objetivo general:

- Investigar la articulación entre la aritmética y el álgebra al establecer conexiones entre dos variables a través del planteo de problemas en alumnos de 3° Año de la educación secundaria.

Objetivos específicos:

- Implementar y analizar una secuencia didáctica como estrategia para la articulación entre la aritmética y el álgebra mediante problemas que se modelicen a través de EDL, con el fin de enfrentar a los alumnos a rupturas esenciales entre ambos dominios.
- Analizar el impacto de una secuencia didáctica en el desarrollo de habilidades algebraicas en los estudiantes tales como el empleo de algoritmos para la solución de ecuaciones, el uso de herramientas en dicha resolución, etc.
- Promover la modelización de situaciones, la argumentación y validación de las soluciones, tanto aquellas basadas en el conteo como las que utilizan ecuaciones con variables y la construcción de expresiones algebraicas con sentido.

5. Presentación y fundamentación de la secuencia

5. 1. Sujetos de estudio y gestión de la clase

En este apartado analizaremos las producciones de estudiantes de 3° año de un colegio de gestión privada, de una secuencia que tiene por objetivo los mencionados recientemente.

La secuencia de tres problemas se aplicó durante cuatro clases consecutivas de 80 minutos cada una, al inicio del ciclo lectivo 2023. No se les entregó a los grupos la totalidad de las actividades a realizar, sino que era la docente quien habilitaba el acceso a los problemas siguientes, luego de que se generará el debate en el pizarrón correspondiente al problema 1 la docente habilitaba el problema 2 y de igual manera con la situación 3. Esta modalidad pretendía evitar que los estudiantes realicen una lectura de consignas posteriores e induzcan la resolución de una consigna anterior.

El número de alumnos varió entre 40 y 38 estudiantes según la asistencia a clases en los distintos días que se implementó la secuencia. Cada grupo estaba conformado por 4 integrantes, dando así un total de 10 grupos por clase. Se les solicitó, en lo posible, que mantengan la conformación de los grupos durante todas los encuentros que insumió el desarrollo del tema.

Los problemas seleccionados fueron extraídos del trabajo de Barrio (2010) teniendo en cuenta la jerarquía de los mismos en cuanto a su grado de dificultad creciente en relación con la cantidad de soluciones y a la limitación del dominio de sus variables.

La implementación de la secuencia se realizó de la siguiente manera:

Primer día: Se le pidió a la clase que formen grupos de 4 alumnos. Se les solicitó que dejen registrado los procedimientos realizado, tanto los que llevaran a la solución deseada como los que no, y que justifiquen sus respuestas, pese a que no siempre cumplieron con estos requisitos. Se les hizo entrega de la primera actividad. La docente monitoreó cada grupo respondiendo de manera orientativa a las preguntas que le realizaban. El trabajo en grupo les llevó aproximadamente 80 minutos, por lo que la puesta en común se llevó a cabo en la próxima clase.

Segundo día: Se realizó la puesta en común de la primera tarea. Integrantes de diversos grupos pasaron al frente y desarrollaron en el pizarrón sus producciones. El resto de los alumnos iban haciendo preguntas y/o aportes en función de las presentaciones. Una vez finalizada esta etapa, se dio lugar a la realización de la segunda tarea que les llevó el resto de la hora.

Tercer día: Se comenzó nuevamente con la sociabilización de las producciones de la segunda tarea, de igual manera que se realizó con la primera. Una vez finalizada la misma se comenzó a trabajar con el problema 3.

Cuarto día: Se emplearon los primeros 15 minutos de la clase para que organicen la información recopilada de la clase anterior. Luego, se procedió con la puesta en común de la actividad 3, como se venía haciendo para los otros problemas. En esta clase se dio cierre a la secuencia presentada.

5. 2. Contenidos previos y concepto de ecuación

La elección del curso para la implementación de la secuencia se debió a que, en el transcurso del ciclo básico, se contemplaron los siguientes tópicos:

En el transcurso de 1° año trabajaron:

- Transformación de expresiones algebraicas en otras equivalentes a partir de las definiciones y propiedades de las operaciones.
- Ecuación lineal con una variable: transformación en otras equivalentes a partir del uso de las propiedades de las operaciones aritméticas y de la igualdad. Análisis del conjunto solución.
- Empleo del lenguaje coloquial y simbólico.
- Problemas que se resuelven planteando ecuaciones.

En el transcurso de 2° año trabajaron con:

- Funciones lineales y no lineales. Modelización a partir de distintos modos de representación: coloquial, tablas, gráficas y fórmulas.
- Representación de puntos en el plano. Interpretación de gráficos.

- Ecuaciones de primer y segundo grado con una variable. Interpretación y verificación del conjunto solución.

La propuesta áulica que hemos elegido está integrada por problemas que remiten al planteo de EDL que vinculan dos variables. Los alumnos deberán definirlas, como así también deberán establecer su dominio de validez, decidir sobre la cantidad de soluciones y la manera de expresarlas, lo que conlleva el uso de una fórmula y ‘generalización explícita’ del álgebra. Tomamos este término a la luz del trabajo de Sadovsky (2003) para diferenciar las prácticas aritméticas usuales que también suponen algún nivel de generalización.

A su vez, nos cuestionamos cómo abordarán los alumnos la búsqueda de más de una solución, el uso de dos valores para su representación, situaciones donde trabajan con variables en lugar de incógnitas.

5. 3. Fundamentación de la propuesta de enseñanza desde la TSD

Como se mencionó anteriormente, los problemas seleccionados se organizaron atendiendo a una jerarquía basada en las dificultades que éstos podían llegar a presentar a los estudiantes. Estas dificultades varían desde el aumento del número de soluciones hasta la consideración de infinitas, más aún cuando el término infinito no alude a cualquier par de números, sino que está sujeto a regularidades propias de cada problema. Además, se estuvo pendiente del tipo de representaciones que se emplearían para expresar el conjunto solución de cada problema.

El objetivo del orden de esta estructura fue la de proporcionar a los estudiantes una variedad de situaciones que requerirían diferentes estrategias para resolverlas. Esto les permitió modificar sus enfoques y adaptar sus conocimientos a nuevas circunstancias, fomentando así una constante búsqueda de *adaptación al medio*.

Los problemas seleccionados son:

Problema 1: Se tiene dos paredes rectangulares, de 6 y de 8 columnas de azulejos. Entre las dos se cuentan 90 azulejos. ¿Cuántas filas de azulejos puede tener cada pared?

Problema 2: Pedro construye una pared rectangular con 6 ladrillos en la base. Juan construye otra pared rectangular con 8 ladrillos en la base. ¿Cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si la de Pedro tiene 40 ladrillos más que la de Juan?

Problema 3: Pedro y Juan compran ladrillos para construir paredes. Si Pedro comprase 8 ladrillos más, duplicaría la cantidad de ladrillos que compró Juan. ¿Cuántos ladrillos pudo haber comprado cada uno?

Los problemas se vinculan a contextos cotidianos de enunciados verbales que resultan familiares a los alumnos y requieren de operaciones aritméticas para su resolución, pero permiten, al mismo tiempo, explorar en la selección de variables, definir el dominio de las mismas, analizar la cantidad de soluciones que admiten y cómo expresarlas.

El primer problema se enmarca dentro del *producto de medidas* y requiere de una organización rectangular donde 6 y 8 representan una medida (M1) - el número de columnas - y x e y representan otra medida (M2) - el número de filas. En este problema la composición de M1 y M2 dan lugar a una nueva medida (M3) que representará el número de azulejos de cada pared.

El segundo problema refiere al *producto de medidas*, es un ejemplo de *relación de comparación entre dos medidas*. En cambio, el último problema responde a un *isomorfismo* mediante una *estructura aditiva de transformación de una medida inicial en una final*. En este problema, la transformación originada por la compra de 8 ladrillos más provoca una modificación entre las cantidades de ladrillos de Pedro y Juan. Esta situación también generó dificultades en el planteo de la ecuación por parte de algunos alumnos.

5. 3. 1. Análisis a priori

En relación con el primer problema, se espera que los alumnos desarrollen esquemas gráficos representando las dos paredes, y que, en función de las variaciones en el número de filas, se busquen posibles soluciones que, en este caso, son los pares (3; 9), (7; 6), (11; 3) y (15; 0). Es posible que este último par, donde una de las variables toma el valor 0 no se llegue a considerar como solución en el contexto de la situación, por de tratarse de azulejos. También es posible que para la resolución del problema busquen múltiplos comunes entre 6 y 8 o empleen métodos de prueba y error para aproximarse a las soluciones. Se espera que registren las posibles soluciones de manera coloquial, logrando hallar al menos tres de ellas.

En el contexto de la segunda situación, es posible que los estudiantes nuevamente opten por utilizar registros gráficos o buscar múltiplos comunes entre el número de filas como estrategia de resolución. Se espera que algún grupo opte por el planteo de una ecuación que modele el problema. Aquí pueden presentarse dificultades en cuanto al excedente de 40 ladrillos, al pasar esta expresión al lenguaje simbólico. En caso de que empleen este recurso, deberán considerar establecer las restricciones de las variables dentro del campo de los naturales para que se ajusten a los parámetros del problema. Posiblemente, aparezca la noción de infinitas soluciones sujetas a alguna regularidad, y los estudiantes podrán expresar alguna de ellas coloquialmente o emplar algún tipo de registro simbólico.

Por último, en la tercera situación, si los estudiantes ya han empleado ecuaciones para la resolución de los problemas anteriores, es probable que opten por utilizar registros en el lenguaje simbólico nuevamente. Sin embargo, podrían enfrentar dificultades al intentar crear expresiones donde el aumento de una variable duplique la otra, específicamente, en la situación donde Pedro compra 8 ladrillos más, duplicando la cantidad de ladrillos de Juan. En caso de no emplear el recurso algebraico podrán partir de la base de 8 ladrillos para Juan y así obtener la cantidad de ladrillos de Pedro, que duplicaría a la de Juan.

5. 3. 2. Análisis a posteriori - Implementación de la propuesta de enseñanza

Se solicitó a toda la clase el registro de todas y cada una de las producciones, ya sea porque sean consideradas correctas o no y que fundamenten sus respuestas, aunque no todos los grupos cumplieron con este cometido. El desarrollo de toda la secuencia se llevó a cabo en 4 clases.

El trabajo con cada situación problemática constaba de dos partes. La primera, en grupo reducido de alumnos, y la segunda, donde se realizaba un trabajo colectivo con las producciones desde las pizarras. Este espacio de socialización buscó generar instancias de validación de criterios a partir de la confrontación entre las diversas producciones. En un primer momento, se trabajó únicamente con el primer problema, con el propósito de que todos los grupos se concentraran en el desarrollo de la misma situación. Dado un tiempo prudente para la resolución de la primera situación, se generó un espacio de socialización de las producciones grupales desde el pizarrón, el resto de la clase podía realizar sus aportes,

preguntas o presentar otra forma de resolución. De igual manera sucedió con el problema 2 y 3.

La docente fue quien indicó qué grupo pasaría primero al pizarrón en cada oportunidad, permitiendo así la presentación de las resoluciones desde los métodos de resolución más aritméticos a los más algebraicos. De este modo se evitó, que la primera resolución que se presentase tuviera como solución la fórmula, en caso de que algún grupo así lo haya resuelto. Es importante aclarar que, una vez finalizada la presentación del pizarrón, la docente indicó a los estudiantes que registren aquellos aportes que se construyeron como producto del trabajo colectivo. Es por ello, que en algunas producciones de los alumnos, podrá observarse al cierre de cada actividad, el planteo de las ecuaciones a las que se arribaron de forma conjunta.

Para el análisis empleamos el registro de los 10 grupos y, a su vez, de un solo alumno de cada grupo, excepto del grupo 4 que hay variaciones en algunos registros. Acotamos el análisis del resto de los integrantes de cada grupo, dado que las resoluciones planteadas coinciden en gran medida con el resto de sus compañeros. También empleamos como recurso de análisis los registros del pizarrón.

5. 3. 2. 1. Análisis de la primera actividad

→ Primer día.

Recordemos primeramente que el problema pedía hallar la cantidad de filas de azulejos que se podían emplear en dos paredes rectangulares de 6 y 8 columnas si se disponía de 90 azulejos. Todos los grupos crearon un diagrama con 6 y 8 columnas, ajustándose a esas dimensiones. Si bien algunos grupos desarrollaron un mayor número de filas que otros, todos comenzaron utilizando esta representación inicial, tal como se observa a modo de ejemplo en la siguiente imagen.

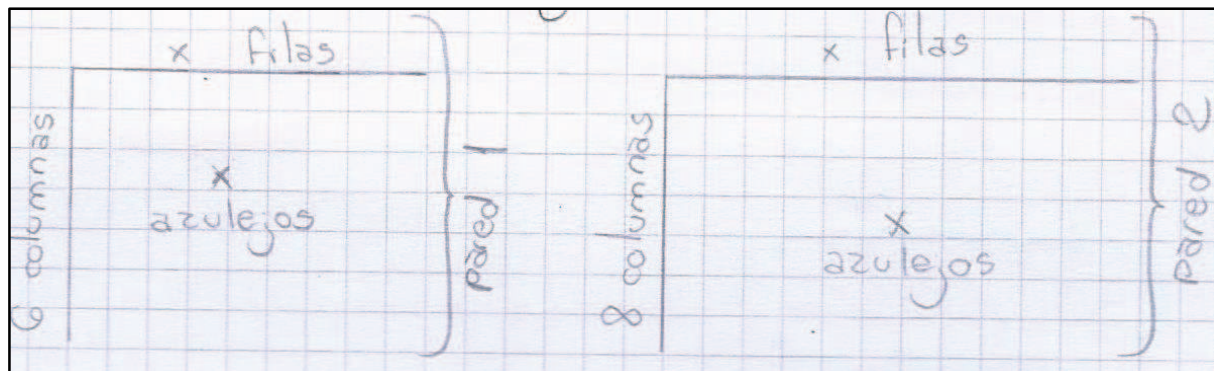


Imagen 1 - Producción del grupo 1

En este caso, el grupo 1 buscó ‘descomponer’ el 90 en dos números tales que sean múltiplos de 6 y/o de 8 y luego, mediante la división, obtener el número de filas. Obsérvese que la expresión descomponer no refiere a factores -no se observa el proceso en la hoja-, sino que escribieron 90 obteniendo primero un valor y luego, por diferencia, el otro.

Obtuvieron 48 en primer lugar y luego 42. Observaron que 48 es múltiplo de ambos números, pero el 42 es solo del 6, condicionando la elección para la pared de 6 columnas y dando más libertad a la otra pared. Concluyeron que la pared 1 tiene 7 filas de azulejos y la pared 2 tiene 6. Realizaron posteriormente un procedimiento similar para hallar dos soluciones más.

En este desarrollo, podemos inducir que los alumnos tienen, al menos implícitamente, la idea de la expresión $ax + by = c$, donde se ‘rompe’ a c en dos grupos y se divide a estos números obtenidos por 6 y 8, entendiendo que los valores hallados deben ser múltiplos de éstos. Podemos observar que este grupo inicia con *procesos del tipo aritmético*, pero al notar que la cantidad de azulejos debe ser múltiplo de la cantidad de columnas de cada pared, comienzan a establecer comparaciones entre valores que llegarán a ser útiles o no.

El grupo 5 arribó también a tres soluciones realizando sólo los gráficos, dibujando el número de columnas de cada pared y el número exacto de filas para cada situación, permitiendo así el conteo de los azulejos. No realizó ningún tipo de cálculo ni explícito ningún tipo de procedimiento por el cual deciden el número de filas. Los gráficos son adecuados, pero no se observa el procedimiento que permitió elegir el número de filas ni se explicita, como respuesta, la cantidad de azulejos que da solución al problema, dado que solo se puede observar números que representan filas, columnas y azulejos. Podemos inferir que han sumado la cantidad de azulejos verificando que su suma da 90. En este caso, los gráficos funcionan como un elemento de control para hallar las soluciones.

Los grupos 2, 6 y 7 emplearon múltiplos comunes y hallaron también tres soluciones para este problema, dejando expresados los cálculos numéricos como solución del problema o las expresaron en lenguaje coloquial.

Se puede observar, en la imagen 2, que el grupo 2 parte de un estado inicial para cada pared basándose en los coeficientes que responde al número de columnas en cada caso. Resaltan pares de valores de cada hilera de números con iguales colores siendo que la suma de ellos dan por resultado 90. En el caso de la hilera de los múltiplos de 6 se observa el 90, pero no se considera como solución.

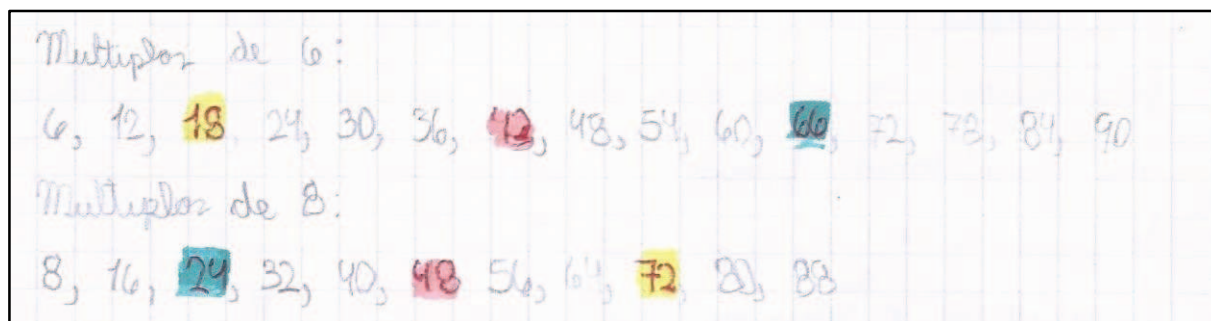


Imagen 2 - Producción del grupo 2

Las producciones de los grupos 8, 9 y 10 denotan un empleo de técnicas aritméticas con *procedimientos no sistemáticos del orden aritmético* (Sadovsky, 2003) que solo les permite hallar una solución al problema.

En el caso del grupo 10 suman el número de columnas de ambas paredes obteniendo 14, entendiendo que este valor es el máximo posible en la distribución ‘horizontal’ de azulejos, el máximo que se emplea de azulejos a medida que se agreguen filas, en simultáneo, a cada pared. Luego al 14 lo van multiplicando por distintos valores - procedimiento aritmético-buscando un número cercano a 90, pero menor que éste. Trabajaron con los factores 14 y 6, entendiendo que con 6 filas en cada pared llegan al empleo de 84 azulejos, faltándoles una fila más de 6 azulejos. En esta ocasión se deslizó un procedimiento que encierra una covariación dado que buscan la manera de conservar el valor total de azulejos (90) ‘acomodando’ los azulejos que sobran en la fila correspondiente, pero no expresan el número final de filas para cada pared.

El grupo 8 dividió 90 a la mitad, entendiendo que el número que obtienen no es múltiplo de 6 ni de 8 y que deberán buscar variantes mayores o menores, cercanas a 45. A su vez, multiplican a 6 y 8 por 7 obteniendo 42 y 56, respectivamente. Al sumarlos, superaron los 90 azulejos por 8 y realizaron la diferencia entre 90 y 42 obteniendo 48, hallando la solución de 7 filas para la pared de 6 columnas y 6 filas para la pared de 8 columnas. Podemos ver que, en este procedimiento, se multiplicó azarosamente por 7 el número de columnas descartando los valores obtenidos por excederse en el número total de azulejos sin notar la dependencia entre variables.

Por último, el grupo 9 estableció la letra x e y para indicar dos elementos distintos como lo son las paredes en cuanto al número de columnas, 8 y 6 respectivamente, reconociendo que una letra arrojará un número mayor de azulejos que la otra por contar con un número mayor de columnas. Bajo esta premisa, al generar una condición adicional al problema, se descarta la posibilidad de que la pared de 8 columnas tenga un número menor de azulejos que la pared de 6 columnas. Este análisis muestra que se emplea un criterio empírico en lugar de un fundamento teórico.

Podemos identificar que en estos grupos las estrategias empleadas llevan a la obtención de soluciones sueltas y no logran relacionarlas entre sí, impidiendo analizar si se han agotado la búsqueda de todas.

En el resto de los grupos analizados hasta aquí, que emplearon múltiplos de 6 y de 8, se detecta la idea de covarianza. Los alumnos intervinieron sobre ambas variables en simultáneo, sobre la cantidad de azulejos para la pared de 6 columnas y la cantidad de azulejos para la pared de 8 columnas y verifican que la suma de los múltiplos de 6 y de 8 den el total de 90 azulejos.

En cambio, a diferencia del resto, los grupos 3 y 4 utilizaron la EDL como herramienta para la resolución del problema, mostrando estrategias sistemáticas que evidencian los primeros procedimientos para generar soluciones. Estos grupos lograron interpretar correctamente el enunciado del problema, transformándolos de una formulación de verbal a una expresión algebraica, lo que implicó una descontextualización de la situación.

El grupo 4 comenzó por plantear una ecuación que responde al problema y define correctamente las variables que intervienen, entendiendo ‘altura’ como cantidad de filas. Las variables se indicaron en la hoja luego que la docente se acercó al grupo a observar lo que estaban realizando. Los alumnos expresan que ‘crearon una ecuación’ y ante la pregunta de la docente sobre qué significaban las letras que intervienen en la ecuación, una alumna explicó que ‘6 son la cantidad de columnas y x es la cantidad de filas que se usan’, de igual manera lo comunica para la variable y donde 8 refiere a la cantidad de columnas para esta pared.

En la imagen 3 se puede leer como la alumna pone de relieve la idea de la dependencia entre variables cuando genera la búsqueda de un valor en función del otro. Este procedimiento favoreció la inversión de las operaciones, la noción de dominio de variación y la producción de argumentos deductivos ligados a propiedades numéricas para justificar el dominio de una variable, más precisamente cuando expresa que ‘el resultado debe ser un número entero’, situación similar se observa en la imagen 4.

lo que nosotros hicimos
 fue crear una ecuación
 la cual consistía en que al ingresar la altura
 de la pared de 6 azulejos (x) este nos dará el resul-
 tado de y (la altura de la pared de 8 azulejos); el
 resultado debe ser un número entero.

$y =$ altura de la
pared 8

Imagen 3 - Producción del grupo 4

En la imagen 4 se observa que los alumnos comienzan a dar valores a la variable x , asignándole el valor 1.

Mediante el tratamiento algebraico de la ecuación llegan a la expresión $8y = 84$ indicando que 84 debe ser divisible por 8 porque la cantidad de filas debe ser un número entero.

$$6x + 8y = 90$$

Incorrecta

$$6 \cdot 1 + 8y = 90$$

$$6 + 8y = 90$$

$$8y = 90 - 6$$

$$8y = 84$$

$$y = 84:8$$

$$y = 10,5$$

este resultado
debe ser
divisible por 8

Imagen 4 - Producción del grupo 4

Luego prueban con el valor $x = 3$ llegando a la expresión $8y = 72$, donde 72 es divisible por 8 y obtienen 9 filas para la altura de la pared. En este caso se observa que anticipan nuevamente una condición para obtener un valor posible de la variable y .

$$\begin{aligned}
 6 \cdot 3 + 8y &= 90 \\
 18 + 8y &= 90 \\
 8y &= 90 - 18 \\
 8y &= 72 \rightarrow \text{este resultado debe ser divisible por 8.} \\
 y &= 72 : 8 \\
 y &= 9
 \end{aligned}$$

correcta $6 \cdot 3 + 8 \cdot 9 = 90$

Imagen 5 - Producción del grupo 4

Podemos observar que el grupo 4 produjo una fórmula en la que se despejó una de las variables, previamente dándole un valor a la otra. Esto muestra que se trabaja con una noción de relación de dependencia entre las mismas, pero no lograron hallar más que una solución, como se observa en la imagen 5. No se cuestionaron si podía existir otros múltiplos posibles distintos a 72, que debe ser múltiplo de 8 por haber despejado y (filas de la pared de 8 columnas) lo cual les permitiría hallar el resto de las soluciones.

El grupo 3 comenzó trabajando con múltiplos comunes de 6 y 8 formando sumas de pares que den entre sí 90 como resultado, lo que muestra un comienzo de procedimientos del estilo aritmético. Pero, en función de estos datos, los organiza en operaciones que permiten observar la traza del problema y que se asemejan a lo que sería la ecuación que lo modeliza. Esta organización facilitó a los alumnos distinguir los valores que varían de los que son fijos como el número de columnas, conduciendo a la fórmula $(x \cdot 8) + (y \cdot 6) = 90$ (imagen 6). Este grupo definió las variables sin la intervención de la docente y, tras un tratamiento algebraico, llegó a la expresión $x \cdot 8 = 90 - y \cdot 6$, la cual, de trabajarla así, arrojaría el número de azulejos en lugar del número de filas.

Realizaron una tabla de valores variando sistemáticamente el valor de x hasta 10, marcando con puntos suspensivos la intención de seguir con más valores. Probaron para $x = 1$, observaron que el valor de y era un número no entero. Luego emplearon la fórmula solo para aquellos valores de x que arrojaron resultados enteros de y y verificaron que los pares hallados sean soluciones válidas. Podemos observar que en este procedimiento se toma conciencia de la relación de dependencia entre las variables, realizan comprobaciones numéricas, visualizando las relaciones entre las variables del problema para descartar aquellas que no son solución o para aceptar las que sí lo son. Los alumnos usan la verificación como una manera de controlar la veracidad de sus resultados.

Los estudiantes de este grupo explicitaron que el problema tendría infinitas soluciones si se tuvieran en cuenta los 'números decimales' pero al ser los azulejos una variable discreta, descartan estas posibilidades.

$$\begin{aligned}
 (3 \times 8) + (11 \times 6) &= 90 \\
 24 + 66 &= 90 \\
 (6 \times 8) + (7 \times 6) &= 90 \\
 48 + 42 &= 90 \\
 (9 \times 8) + (3 \times 6) &= 90 \\
 72 + 18 &= 90 \\
 (x \times 8) + (y \times 6) &= 90 \\
 x8 + y6 &= 90 \\
 x8 &= 90 - y6
 \end{aligned}$$

Imagen 6 - Producción del grupo 3

Por un lado, como se observa en la imagen 7, concluyeron coloquialmente que este problema presenta tres soluciones enteras, y, por otro lado, emplearon nuevamente expresiones del tipo algebraicas numéricas, pero no se observó que hagan referencia a soluciones que impliquen pares de números.

- 3 filas en la pared de 8 columnas y 11 filas en la pared de 6 columnas: $(8 \cdot 3) + (11 \cdot 6) = 90$
- 6 filas en la pared de 8 columnas y 7 filas en la pared de 6 columnas: $(6 \cdot 8) + (7 \cdot 6) = 90$
- 9 filas en la pared de 8 columnas y 3 filas en la pared de 6 columnas: $(9 \cdot 8) + (3 \cdot 6) = 90$

Imagen 7 - Producción del grupo 3

5. 3. 2. 2. Presentación de producciones desde el pizarrón

→ Segundo día.

Como ya mencionamos anteriormente, la docente es quien selecciona los grupos que pasan al pizarrón, permitiendo así que se socialicen las producciones desde los métodos de resolución

aritméticos a los algebraicos, evitando que la primera resolución presente la fórmula, a la que arribaron los grupos 3 y 4. En su mayoría, las anotaciones de las pizarras que figuran en las imágenes en color rojo corresponden a las anotaciones que realiza la docente mediada por las acotaciones que los alumnos van realizando a lo ya expuesto por el grupo encargado de la presentación. Es importante aclarar que tanto la imagen 8 como la imagen 9 se fueron completando a medida que se presentan interrogantes o aportes de otros grupos.

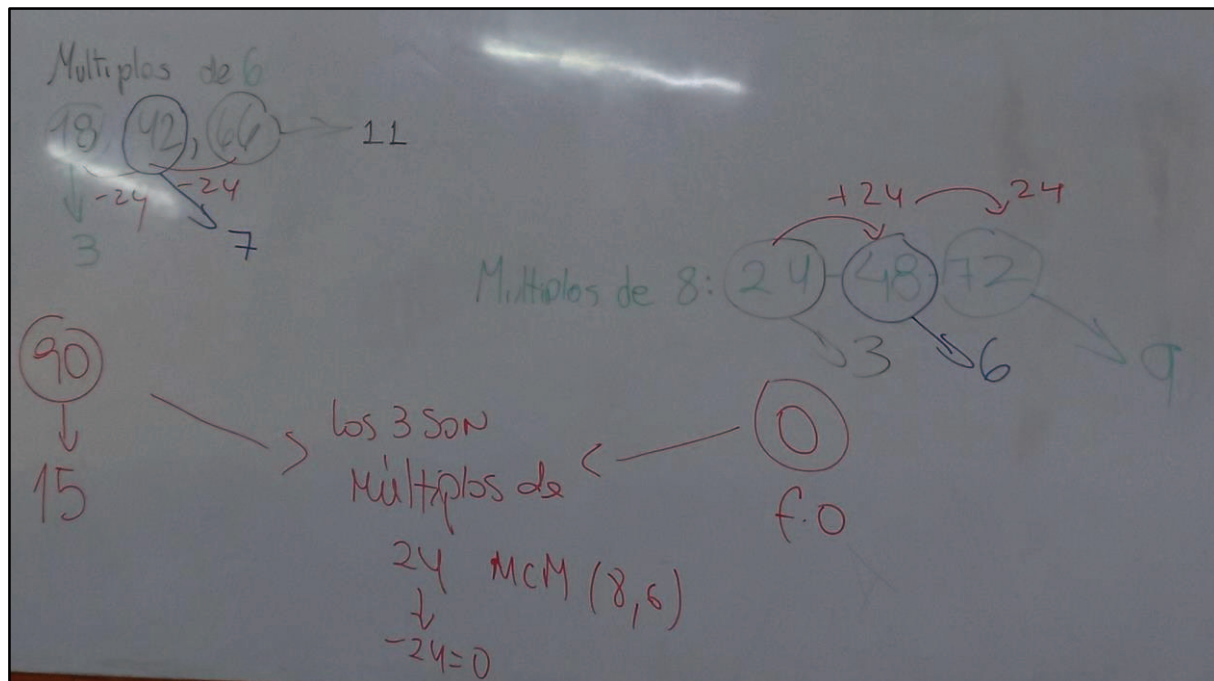


Imagen 8 - Corresponde al grupo 2

La docente hizo pasar al grupo 2 a una de las pizarras. Registraron los múltiplos de 6 y de 8 que respondían a la cantidad de azulejos. La explicación la realizaron de forma oral, leyendo lo que habían redactado en sus hojas. La docente, en función de lo que los alumnos expresan, indicó con círculos y flechas la cantidad de filas que correspondían a cada número de azulejos, concluyendo con las tres soluciones que ya habían sido analizadas en el interior de este grupo.

En simultáneo, el grupo 5 en la otra pizarra realizó un esquema de columnas y filas y colocó la expresión $6 \times 3 + 8 \times 9$; $18 + 72$. Luego expresó de manera oral que realizaron el mismo esquema para $42 (6 \times 7) + 48 (8 \times 6)$ y para $66 (6 \times 11) + 24 (8 \times 3)$, pero que no representaron en la pizarra por falta de espacio.

La docente preguntó si podían relacionar las producciones de ambos grupos. Un alumno de la clase respondió que el esquema de columnas y filas realizado por el grupo 5 correspondía a una de las soluciones que presenta el grupo 2.

La docente interrogó sobre cómo llegar al resto de las soluciones planteadas por el grupo 2. El mismo alumno indicó que los azulejos que se le 'saca' a una pared se le deben 'agregar' a la otra, pero para completar el número de filas deben respetar una cantidad.

Como se observa en la imagen 9, la docente va realizando cruces de modo de representar las expresiones 'saca' y 'agrega' que expresó el alumno. Por cada 6 azulejos (cruces) que se descuentan en la pared de 8 columnas, se le suman a la pared de 6 columnas, pero con la condición de que se complete la fila de azulejos en cada pared.

Un grupo de alumnos notó que deben tomar 3 filas de 8 azulejos que equivalen a 4 filas de 6, es decir, toman 24 azulejos de la pared de 8 columnas y los colocan en la pared de 6 columnas. Esto se puede observar en la imagen 9 como $-3f$ y $+4f$ y en la imagen 8 cómo $+24$ entre los múltiplos expresados.

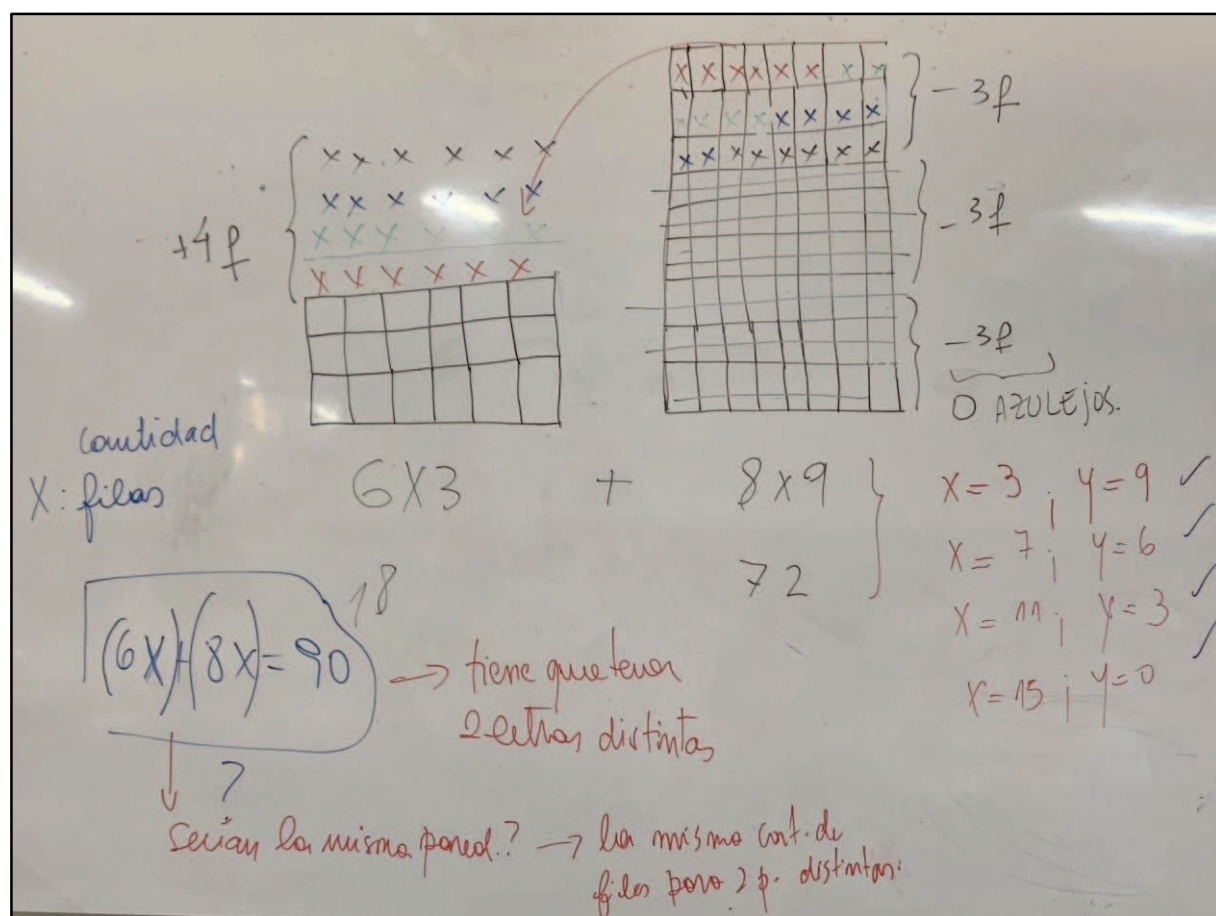


Imagen 9 - Corresponde al grupo 5

En este momento, un alumno del grupo 2 indicó que el múltiplo común menor entre 6 y 8, es 24. Hasta el momento solo habían considerado los múltiplos de 6 y de 8, pero no el común. La docente escribe el aporte del alumno en rojo.

Volviendo a la imagen 9, puede visualizarse que en el movimiento que realiza la docente, al ir restando de a 3 filas en la pared de 8 columnas, llega a la expresión '0 azulejos'. Ante la pregunta si existe otra solución, aparte de las tres que se indicaron de manera oral, todos los alumnos coincidieron en que solo son esas tres. La profesora plantea la posibilidad de que la pared de 8 columnas tenga 0 filas. Algunos alumnos asientan con la cabeza, pero expresaron no haber considerado esa opción por entender que el problema plantea la necesidad de construir ambas paredes.

La docente preguntó si algún grupo realizó otro planteo distinto a los considerados hasta el momento. Un integrante del grupo 4 indica que ellos elaboraron una fórmula. La docente le pregunta a los integrantes de los grupos 2 y 5 si podrían elaborar una fórmula, similar a la que realizaron sus compañeros. Un alumno le dicta a la docente la ecuación $6x + 8x = 90$, que se puede observar en la imagen 9. El alumno expresa que x representa la cantidad de filas, pero no restringe a qué pared pertenece ese valor. La pregunta que se observa en color rojo la realiza la docente a toda la clase: ¿serían la misma pared? El alumno indica que coloque

paréntesis para diferenciar una pared de la otra. El mismo alumno del grupo 4, que propuso la idea de realizar una fórmula, respondió que serían dos paredes distintas con el mismo número de filas, lo cual es imposible porque no existe esa solución y, por lo tanto, deberían emplearse 2 letras distintas para registrar el número de filas.

$$(x \cdot 8) + (y \cdot 6) = 90$$

$$x \cdot 8 = 90 - y \cdot 6$$

X: CANTIDAD DE FILAS de PARED (8)
 // // // // // // // 6 //
 Y: // // // // // // // //
 X: AZULEJOS QUE VAN EN LA PARED DE 8 ... (80)
 $x + y = 90$

Imagen 10 - Corresponde al grupo 3

A continuación un alumno presentó la producción del grupo 3, en la imagen 10 se puede observar su producción. Nuevamente, lo registrado en color rojo es lo que la docente anota como conclusión de lo que iban expresando los alumnos.

Este grupo registró la fórmula en el pizarrón y despejó la expresión $x \cdot 8$. La docente preguntó qué representaban las letras x e y . Un integrante del mismo grupo respondió que x e y refieren la cantidad de filas de la pared de 8 y 6, respectivamente.

Otro alumno (A) de la clase expresó que x podría ser la cantidad de azulejos de la pared de 8. Se lo observó dubitativo luego de su aporte. En este caso, la docente hace lectura de la fórmula $(x \cdot 8) + (y \cdot 6) = 90$ considerando la variable indicada por el estudiante (A). El alumno reconoció que $x \cdot 8$ representa la cantidad de azulejos, por lo tanto, desestima su aporte. Indica que su confusión se generó de la expresión $x \cdot 8 = 90 - y \cdot 6$. Igualmente, la docente lo alentó a formular una ecuación desde la variable 'cantidad de azulejos'. En la imagen 10 se puede observar que planteó la ecuación $x + y = 90$. Terminamos descartando esta posibilidad dado que no responde a la pregunta planteada.

A continuación, el alumno (A), en función a la ecuación correcta, indicó que x valdrá 9 e y valdrá 3, por ejemplo. La docente vuelve al registro en el pizarrón del grupo 5 - imagen 9 - y anota los posibles valores de x e y , compartiendo con el grupo clase la distinción que $x = 3$ e $y = 9$, dado que las variables han sido definidas de manera inversa. Esto se observa en el lateral derecho de la imagen. A su vez, la docente, va escribiendo los pares de soluciones, recordando la estrategia que habían expresado como $+4f$ y $-3f$, incluyendo esta vez el par $x = 15$ e $y = 0$. Verificaron cada par solución en la ecuación presentada y la tildaron como correcta, una vez comprobada la igualdad.

Antes de borrar las producciones del pizarrón para dar lugar al grupo 4, la docente observó la pizarra de la imagen 8 y se detuvo en la expresión $+24$. En esta oportunidad, interrogó al alumno (A), que en un primer momento tuvo el intento de realizar una ecuación teniendo en cuenta la variable 'cantidad de azulejos'. Le preguntó si podía diferenciar las expresiones $+24$, $-3f$ y $+4f$. El alumno se detuvo a mirar las imágenes, otro compañero levantó la mano. La docente le dio a entender con un gesto de su mano que espere a la respuesta del compañero (A). Retomó la palabra el alumno (A) e indicó que la diferencia entre ambas anotaciones es que en una 'se mueven' las filas y en la otra 'la cantidad de azulejos'. En la pizarra de la imagen 8 se puede identificar claramente la cantidad de azulejos de cada pared, pero se necesitó del dato que arrojan las flechas para indicar la cantidad de filas. El alumno que había levantado la mano anteriormente expresó que si a 66 le suma 24 llega a 90. Concluyó diciendo que dentro de esta posibilidad estaríamos con una pared de 90 azulejos y la otra con 0, pero que el enunciado decía que se cuentan con dos paredes. La docente completó, según el aporte del alumno, $90 \rightarrow 15$ y $0 \rightarrow f.0$.

Probaron $\rightarrow x = 1 \rightarrow$ dist con conca. $y = 10,5$

$$6 \cdot 3 + 8y = 90$$

$$18 + 8y = 90$$

$$8y = 90 - 18$$

Divisible por 8

$$8y = 72$$

$$y = 72 : 8$$

$$y = 9$$

Es la única solución

$$6 \cdot 3 + 8 \cdot 9 = 90$$

$$6x + 8y = 90 \quad \checkmark$$

X: altura de la pared $\checkmark$
de 6 columnas

y: altura de la p. de 8c. $\checkmark$
 $\downarrow$
cantidad de filas

Imagen 11- Corresponde al grupo 4

Por último, se observa en la imagen 11 el registro del grupo 4. Comenzaron presentando el planteo de la solución correcta, para $x = 3$, trabajando en una ecuación con una incógnita. La docente preguntó, en función de lo observado en el paso por cada grupo, si habían probado con otro valor para x . Expresaron que primero habían probado con el valor $x = 1$, pero lo descartaron dado que el número de filas de la pared de 8 les “da con coma” (es el registro que se ve con rojo, realizado por la docente). Indicaron que el resultado de $90 - 18$ debía ser divisible por 8 para que el valor de y tenga solución entera. Finalizaron la resolución encontrando el valor para la variable y .

Realizaron la verificación correspondiente y concluyeron que y vale 9 para $x = 3$, como única solución. Finalmente, por pedido de la docente, expresaron la ecuación y definieron las variables, tal como lo tenían en las hojas de sus carpetas. Se socializó con el resto de la clase que ‘altura’ equivalía al número de filas.

Una vez finalizadas las exposiciones, cerramos la clase registrando en la carpeta aquellos aportes que consideramos importantes para las próximas producciones. Es por ello que puede observarse en las hojas de cada alumno, al cierre de cada problema, expresiones que no fueron analizadas como propias, sino que resultan de las anotaciones del pizarrón. Aquí se tuvo en cuenta la definición de variables, las fórmulas (aquellos grupos que no habían trabajado con este recurso), las regularidades que se hallaron y las condiciones que se debían cumplir dentro del contexto del problema, por ejemplo, que la cantidad de azulejos siempre sea 90, que ninguna fila quede incompleta y que existan ambas paredes o no (según el criterio de cada grupo).

En un material escrito por Borsani, Brunand y Cabalcabué (2021), los autores consideran que el análisis colectivo, donde se ponen de manifiesto los diferentes procedimientos y las relaciones matemáticas que cada grupo realiza “ofrece buenas condiciones para que los estudiantes relacionen, confronten, cuestionen o se apropien de la estrategia de un compañero”(p. 22). A su vez, sostienen que será fundamental que no solo se quede en una puesta en común de procedimientos, sino que se trascienda a un análisis y puesta en diálogo de los mismos.

En nuestro caso podemos observar que se logra superar el estado de puesta en común a lo largo de toda la presentación. Es un gran aporte, por parte de la docente, haber seleccionado dos producciones en simultáneo, siendo que ambos grupos presentaban resoluciones similares. Esto fue de gran ayuda para revisar y concientizar cómo se obtuvieron dichos procesos, cada producción permitió la ampliación de la otra, se pudo hacer un juego de ‘ida y vuelta’ nutriendo con nuevos aportes, resignificando los procedimientos elegidos por los alumnos. Por ejemplo, cuando un alumno identifica que la resolución del grupo 5 (imagen 9) presenta en su esquema una de las soluciones que muestra el grupo 2 (imagen 8), en función de este aporte se llega a la regularidad entre los valores de cada variable. También permitió debatir sobre las representaciones de las letras en una ecuación, la importancia de definir las variables.

Creemos que una de las cuestiones más importantes surgidas en la puesta en común ha sido la relación entre lo particular - ejemplos concretos, soluciones puntuales- y lo general. Sadovsky (2003) reflexiona sobre esto al señalar que cuando los estudiantes trabajan con fórmulas para producir soluciones, éstas actúan como algoritmos de cálculo para obtener respuestas específicas, representan las relaciones entre las variables del problema y abarcan el conjunto de soluciones posibles.

Dentro del trabajo de cada grupo, se observa que 6 de ellos presentaron tres pares solución, 2 presentaron solo una y el grupo 10 llevó a cabo el proceso de resolución para dar con una

solución, pero no expresó los valores de cada pared, quedando la solución sujeta al proceso. Podemos considerar que llegaron a una solución de manera incompleta.

En el trabajo colectivo, surgió una cuarta solución (15; 0). Esta solución deriva de la regularidad mencionada por un alumno para ir ‘sacando’ azulejos de una pared e ir ‘agregando’ a la otra. En este tipo de problemas, que responde a la ecuación $ax + by = c$, donde para mantener el número de azulejos, una variable debe disminuir mientras que la otra aumenta, la cantidad de soluciones serán acotadas. Observamos que si los estudiantes encuentran una solución, junto a la regularidad hallada, podrían generar los otros pares de soluciones. Es probable que, al tratarse de una situación que arroja 3 o 4 soluciones (dependiendo de cómo se consideren las condiciones dentro del contexto del problema), una cantidad finita y considerablemente pequeña, no hayan necesitado utilizar esta regularidad en la búsqueda de las mismas.

De los 9 grupos que arriban a algún número de solución, siete la expresan en lenguaje coloquial, uno lo hace dentro de la ecuación, sujeto al proceso de resolución (grupo 4) y el grupo 3 emplea una representación numérica.

Arcavi (1994, 2005 y 2007, en Mercado, 2016) observa que gran parte de los alumnos no emplean el lenguaje simbólico como una herramienta para comprender, generalizar, relacionar o demostrar sus producciones. El autor indica una serie de sentidos para los símbolos, entre ellos la amigabilidad donde el docente no debe optar por entregar al estudiante una simbología, sino que sea el alumno quien pueda comprender la elección y recurrir a su uso. En nuestro análisis podemos observar que al cierre de la presentación colectiva la docente indica un modo de comunicar las soluciones, a través de un registro simbólico. Podría analizarse si en los siguientes problemas, los estudiantes optan por tal formato. Por el momento, dentro de las posibles funciones que menciona Duval sobre las representaciones, han empleado el lenguaje coloquial como una función comunicativa.

5. 3. 2. 3. Análisis de la segunda actividad

→ Segundo día

La segunda actividad consiste en construir dos paredes rectangulares similares a la del problema 1. Una con 6 ladrillos en la base, mientras que la otra tiene 8 ladrillos en la base, pero la pared con base 6 tiene 40 ladrillos más que la pared de base 8.

Al iniciar esta actividad, se les recordó a los alumnos que podían hacer uso de lo trabajado en el problema anterior.

El grupo 5, al igual que en el problema anterior, realizó una representación gráfica de las paredes, pero en esta oportunidad representó sólo una posibilidad. Dibujó una pared de 6 por 12 y la otra de 8 por 4. A la izquierda de las representaciones, expresó la resta $6 \times 12 - 8 \times 4$ de manera vertical. En lenguaje coloquial explicó que cada 4 filas de ladrillos que le sumen a la pared de Pedro (de 6 columnas) y cada 3 filas a la pared de Juan (de 8 columnas), mantendrán la diferencia deseada de 40 ladrillos. Este grupo empleó procedimientos de covariación basándose en maneras de conservar la diferencia de 40 ladrillos, lo que da lugar a pensar que pueden estar considerando una relación entre los pares de soluciones y no ver soluciones como números aislados, pese a que no lo planteen en la hoja.

En primer lugar, podemos deducir que la representación gráfica solo de una solución puede deberse al hecho de encontrarse con infinitas soluciones, situación que dejan inconclusa en lo expresado en el lenguaje coloquial. Partieron de una situación base que genera una diferencia

de 40 ladrillos a favor de Pedro. Luego, agregaron 24 ladrillos a cada pared, manteniendo así la diferencia establecida. Aquí se observa que aplican la propiedad uniforme, suman 24 ladrillos a cada pared, miembro a miembro, siendo este número el múltiplo común menor entre 6 y 8, presentando en esta acción la regularidad que les permitirá hallar las soluciones.

El grupo 6 inició el problema planteando la ecuación ‘Pedro=Juan+40’, seguida de un diagrama rectangular que simula las paredes. Representaron en azul 6×8 y 8×1 , y en rojo, sobre la misma representación, añadieron 6×4 y 8×3 , respectivamente. Este recurso de colores se empleó en el pizarrón durante la resolución del primer problema. Claramente, muestra los movimientos que se realizan simultáneamente en ambas paredes, revelando una regularidad que el grupo identifica como la posibilidad de obtener infinitas soluciones. En lugar de plantear la variación en el número de filas, indican la cantidad de ladrillos que varían en cada pared, siempre que se mantenga la diferencia de 40.

La ecuación planteada permitió trabajar con la cantidad de ladrillos en lugar del número de filas. En lenguaje coloquial, partieron de una posibilidad inicial con ‘Juan=8’ y al saber que la pared de Pedro debe tener 48 -por la condición establecida en el problema- y ser divisible por 6, esta opción se convirtió en una posibilidad. Plantearon que al contar con infinitas soluciones, buscaron el múltiplo común menor entre 6 y 8, obteniendo 24. Interpretaron que siempre que se suma esa cantidad a ambas paredes, mantendrán la diferencia de 40 y arrojará otra posibilidad. Trabajaron siempre sobre el número de ladrillos y no sobre la cantidad de filas. Esto puede deberse a que para este grupo ha sido determinante la condición del enunciado de ‘40 ladrillos más’ sin reparar en la pregunta y cumplir con la condición solicitada. En la producción escrita, se observa que, en la ecuación original, asignan a P la expresión $6x$ y a J la expresión $8x$, situación que se comparte luego de la puesta en común.

El grupo 1 no repitió el mismo procedimiento que empleó en la situación 1. Al igual que el grupo 6, identificaron que el problema presenta infinitas soluciones al no tener un límite en la cantidad de ladrillos que se deben emplear y reconocen que hay un caso mínimo. Expresaron todo en lenguaje coloquial. Comenzaron con una fila para ambas paredes y sumaron 2 ladrillos a la pared de Pedro para igualar la cantidad de ladrillos de ambos. Luego, agregaron 40 ladrillos más a Pedro para que su pared tenga por resultado 48, es decir, $P(6) + 2 + 40 = 48$. Hasta este punto, la pared de Juan no ha sufrido ningún incremento, por lo que dividen a cada pared por el número de columnas, concluyendo en lenguaje natural que Pedro tiene un total de 8 filas, mientras que Juan tiene 1 fila.

No expresaron cuál es la condición que existe entre el número de ladrillos de ambas paredes que permite hallar el resto de las soluciones, como sí lo hizo el grupo 5.

En cambio, el grupo 2 volvió a hacer el planteo de los múltiplos de 6 y de 8. Buscaron aquellos múltiplos de 6 que, al restarle 40, permitan llegar a un múltiplo de 8, nuevamente se puede observar la idea de covarianza al intentar mantener la diferencia. Indicaron que existen ‘varios distintos resultados’, determinaron un ‘patrón’ entre la variación de las filas de cada pared y establecieron que por cada 4 múltiplos de 6 y 3 múltiplos de 8, existe una ‘alternativa’. Señalaron una serie de soluciones de manera coloquial, y aunque una presenta un error (confunden número de filas con el de columnas, posible error de transcripción), se observa que los resultados indicados son correctos. Esta regularidad también se da en el grupo 6, que lo registraron mediante una gráfica.

Nuevamente, el grupo 4 estableció una ecuación, en este caso $6y = 8x + 40$, y definió las variables de manera correcta. Reemplaza a la variable x (cantidad de filas de Juan) por distintos valores, obteniendo valores negativos y decimales para y , indicando que es

incorrecta la solución obtenida. Establecieron que $x = 4$ es una solución posible dado que hallaron un valor entero positivo para y , aquí se puede observar la idea de dependencia entre variables. No lograron plantear una regularidad para los valores de x que generen valores admisibles para y , pero sí volvieron a indicar, como en la actividad 1, una condición sobre $8x + 40$, donde se observa que este resultado debe ser igual a un múltiplo de 6. Esta condición deja ver que los alumnos piensan en la posibilidad de más soluciones, pero no sabemos si llegan a reconocer que este problema admite infinitas soluciones.

El grupo 3 realizó anotaciones que reflejan un trabajo preliminar. Definieron las variables y , a diferencia del grupo 4, establecieron la ecuación $(x \cdot 6) - (y \cdot 8) = 40$. Al operar sobre la ecuación cometieron un error en los signos y plantearon $x \cdot 6 = 40 - y \cdot 8$ (imagen 12). Emplearon ambas fórmulas en simultáneo; en algunos procesos vuelven a tener errores de signos y en otros encuentran un par de soluciones. La conclusión que expresaron se torna confusa, dado que no queda claro a qué momento del proceso hacen referencia, sumado a que una parte de lo escrito es ilegible.

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. At the top right, the number '40' is written. Below it, there is a table with two columns. The first column is labeled 'A' and contains the value '40'. The second column is labeled 'x' and contains the value '1'. To the right of the table, the equation $(x \cdot 6) - (y \cdot 8) = 40$ is written. Below this, the equation $x \cdot 6 = 40 - y \cdot 8$ is written. Further down, the equation $x \cdot 6 = 40 + y \cdot 8$ is written. At the bottom, the equation $x \cdot 6 = 40 + y \cdot 8$ is written again. The handwriting is somewhat messy and includes some corrections.

Imagen 12 - Producción del grupo 3

El grupo 7 entendió que al superar la pared de Pedro a la de Juan, siempre por 40 ladrillos, este proceso será infinito. Reconocieron una condición que ellos llaman ‘seguir el patrón’ de ‘multiplicaciones lineales’. Organizaron en una tabla dos columnas, donde en la primera colocaron multiplicaciones en función de la pared de Juan, y en la otra explicaron que el patrón consta de ir sumando 3 filas (1, 4, 7, 10, 13, etc.) infinitamente para mantener a Juan 40 ladrillos por debajo de Pedro.

De igual manera realizaron una tabla para Pedro donde registraron multiplicaciones en función de la pared de 8 columnas y explicaron que el patrón, en este caso, es ir sumando 4 filas (8, 12, 16, 20, 24, etc.) infinitamente para mantener a Pedro 40 ladrillos por encima de Juan. Claramente, trabajaron con el m.c.m. de 6 y 8, pero no lo establecen en la hoja.

El grupo 8 simuló dos paredes de 6×8 y 8×4 y comenzaron a establecer variantes. Una fue que la búsqueda de soluciones les dé siempre paredes ‘completas’ y la otra fue encontrar un múltiplo de 8 que luego sumen a 40. Llegaron a establecer que Pedro tiene 72 ladrillos y Juan 32.

El grupo 9 identificó que la cantidad de ladrillos de Pedro debía ser un múltiplo de 6 que supere el valor 40 y que, a su vez, sea divisible por 8. Aquí están reconociendo correctamente

que la diferencia entre la cantidad de ladrillos de Pedro y 40 dará por resultado los ladrillos de Juan. Pero luego cometen un error al considerar que ese valor sea divisible por 8. A continuación escribe $[(6 \cdot 8) : 8] - 40$. No expresa ninguna solución al problema.

Por último, el grupo 10, al igual que el grupo 1 y 6, estableció un punto de partida mínimo. Realizó un diagrama de 6×8 y otro de 8×1 . Explicaron que estos valores arrojaron una diferencia de 40 haciendo $48 - 40 = 8$, pareciendo que su interpretación se basa en que los números de ladrillos son estáticos como lo fue en el primer problema el número de azulejos.

5. 3. 2. 4. Presentación de producciones desde el pizarrón

→ Tercer día

En esta presentación, al igual que en la del problema 1, nos encontramos que la mayoría de los alumnos, al momento de realizar la exposición oral frente al resto de la clase, presentan sus resoluciones optando por usar el lenguaje natural, sobre todo cuando se les solicita que fundamenten sus producciones. Seguido a esto, por pedido de la docente, realizan registros en el pizarrón de expresiones como sumas, diagramas y ecuaciones.

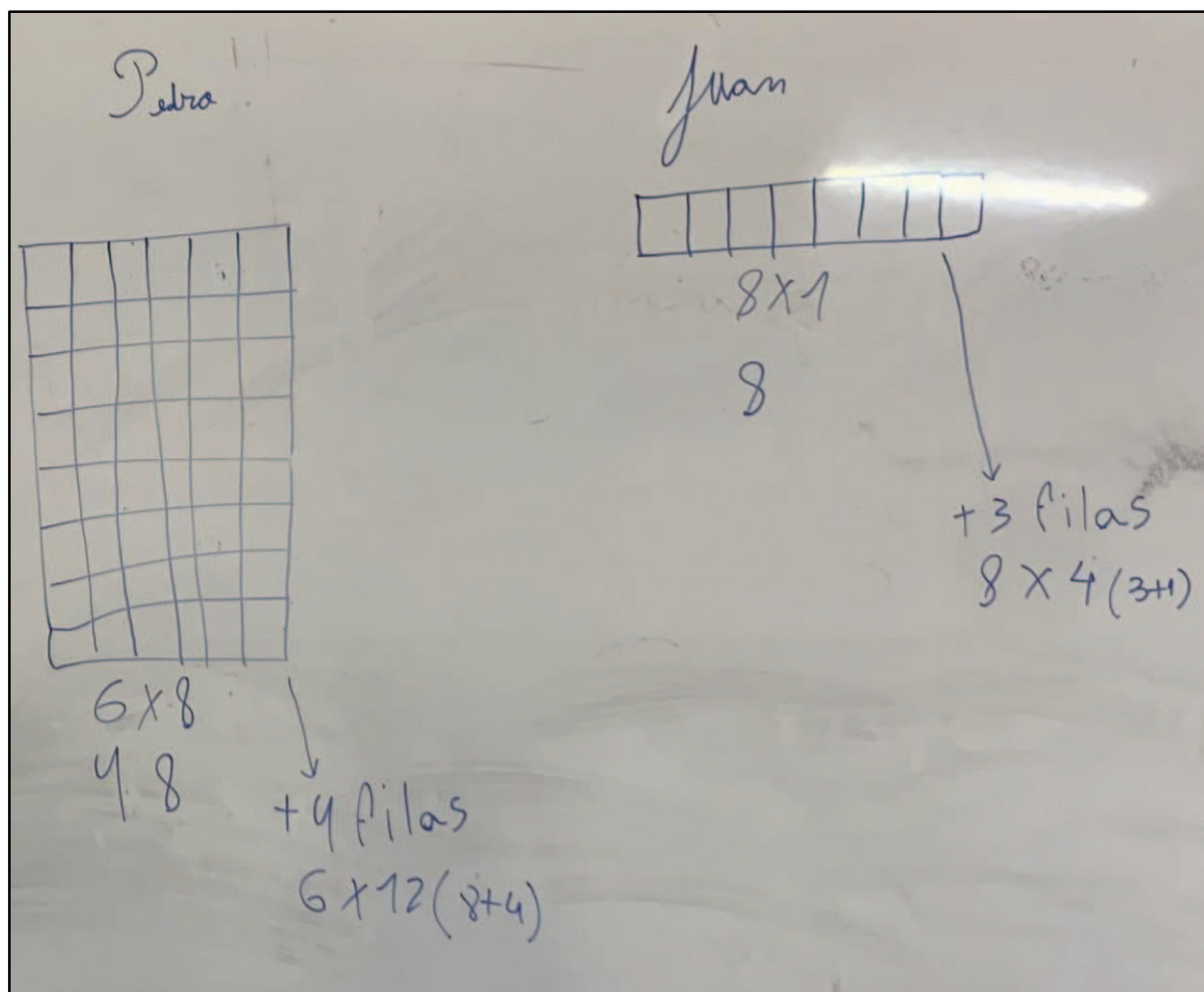


Imagen 13 - Corresponde al grupo 5

La docente le solicitó al grupo 5 que pase primero. Un alumno registró paredes de 6×8 y 8×1 , como se visualiza en la imagen 13. Indicó que de 6×8 a 6×12 existe una diferencia de 4 filas,

escribiendo a 12 como la suma entre 8 y 4. Luego, para la otra pared indicaron que de 8×1 a 8×4 existe una diferencia de 3 filas escribiendo a 4 como la suma entre 3 y 1. En esta oportunidad la profesora no hizo ninguna acotación a la anotación que realizó el compañero donde descompone el 12 y el 4, quedando a la espera de que surja por parte de los alumnos algún aporte que complemente lo aquí trabajado. Oralmente, concluyeron diciendo que si realizaban la resta entre 48 y 8 o entre 72 y 32 obtendrían siempre la diferencia buscada de 40 ladrillos. Escribieron la resta a continuación, por pedido de la docente como se observa en la imagen 14. Un alumno del grupo 3 levantó la mano, la docente le dio la palabra.

El alumno expresó que su grupo planteó una ‘ecuación similar’ a la de los compañeros, haciendo referencia a la igualdad $6 \times 8 - 8 \times 1 = 40$, situación que se observa en la imagen 14, pero reemplazaron el valor de y por 1 y, despejando x , hallaron el valor de $x = 8$, proceso que se desarrolló en color verde a continuación de la resta que plantea el grupo 5. Aquí podemos observar que el alumno del grupo 3, en función al planteo establecido por el grupo 5, logra trabajar correctamente con una de las dos soluciones planteadas dentro de su grupo, no comete errores en el despeje de la variable x , como sí había sucedido en las producciones individuales a las que se hizo referencia en la imagen 12.

$$6 \times 8 - 8 \times 1 = 40$$

$$8 \cdot 1 + 40 = 6x$$

$$8 + 40 = 6x$$

$$48 = 6x$$

$$48 : 6 = x$$

$$8 = x$$

$$x = \text{LAS 8 FILAS de LA PARED DE PEDRO}$$

Imagen 14 - Corresponde al grupo 3 y 5

A continuación, pidió pasar el grupo 2 y realizó el planteo al que ya se hizo mención anteriormente en su trabajo grupal. En esta oportunidad, se agregó el valor 0 como posible solución. Mientras expresaban oralmente su fundamentación, la docente tomó nota en el pizarrón, como se visualiza con color rojo en la imagen 15. Se observa la regularidad para hallar las soluciones, por cada 4 múltiplos de 6, tendremos 3 múltiplos de 8. Sobre los múltiplos de 6 se indicó la diferencia de 40 ladrillos.

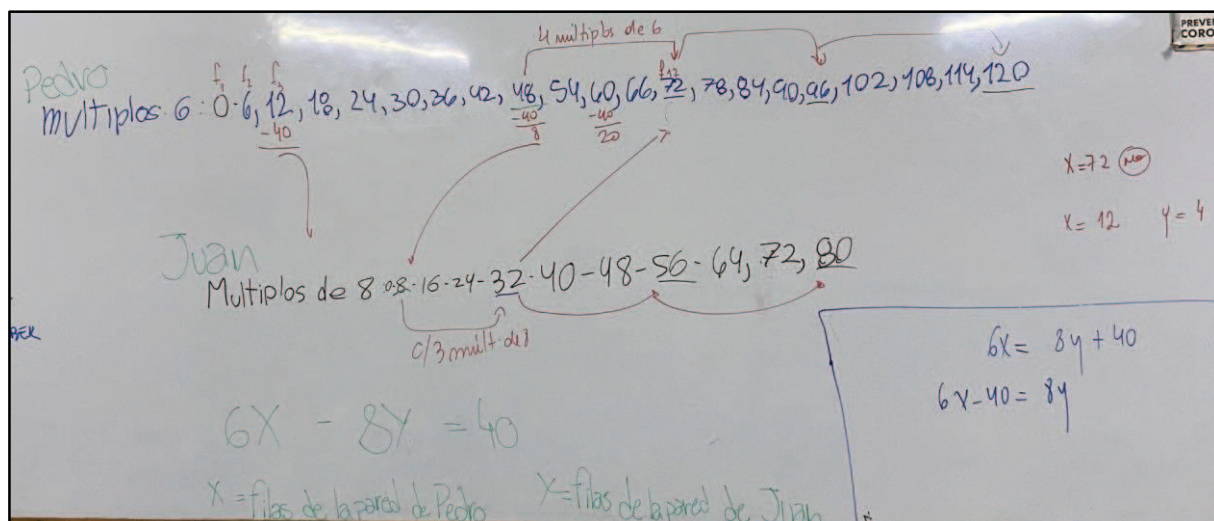


Imagen 15 - Corresponde al grupo 3

Luego la docente solicitó a un alumno del grupo 3 que registre la fórmula a la que su grupo había llegado. Es la expresión que se observa con color verde. A su vez, la docente anotó a un costado las otras dos expresiones equivalentes que se desprenden de la establecida por el alumno donde $6x = 8y + 40$ había sido trabajado por su grupo.

Por otro lado, la profesora preguntó a los integrantes del grupo 6 qué interpretación podían hacer de esta fórmula y a qué solución habían llegado ellos. Un alumno expresó que habían encontrado, por ejemplo, que la pared de 6 columnas tendría 72 ladrillos, mientras que la de 8 tendría 32. La docente preguntó, leyendo el problema, ¿cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si la de Pedro tiene 40 ladrillos más que la de Juan? Los alumnos indicaron que trabajaron con el m.c.m., donde advirtieron que, una vez que encuentren la 'base' para la pared de 8 columnas, van a poder encontrar infinitas soluciones sumando 24 a cada pared. Si querían saber cuántas filas tenían en cada pared, debían dividir el número de ladrillos por 6 u 8, según la cantidad de columnas, y así encontrar la solución, que serían números enteros por haber trabajado con un múltiplo en común. Mientras los alumnos argumentaban, la profesora iba registrando en rojo la correspondencia de las filas con la cantidad de ladrillos. Registró que ' $x = 72$ no', haciendo alusión a que no es solución, y completó con $x = 12$ e $y = 4$. Este grupo, al haberse centrado en el número de ladrillos, identificó los datos desconocidos, empleando la misma letra para el número de ladrillos de Juan y de Pedro.

En esta oportunidad, la docente mencionó el registro realizado por los alumnos del grupo 5 donde expresan al $12 = 8 + 4$ y $4 = 3 + 1$ (imagen 13), dado que ningún grupo lo trajo a colación, y lo relacionó con la representación gráfica que el grupo 6 realizó en sus producciones personales. Recordemos que este grupo dibuja en azul 8 filas para la pared de 6 columnas y 1 fila para la pared de 8 columnas y luego suma en rojo 4 y 3 filas más, referenciando la suma de 24 ladrillos. La docente, por último solicita a un integrante del grupo 7 que comparta lo que habían expresado en sus registros. Un alumno de este grupo indica que ellos concluyeron que la pared de Juan presentaba un patrón que constaba de ir sumando 3 filas sucesivamente y la pared de Pedro registraba un patrón de 4 filas.

Aquí se hace referencia a que este 'patrón' que indican los compañeros es la regularidad que muchos han podido reconocer durante el proceso de resolución de este problema y que es el que nos permitirá hallar los infinitos pares de soluciones.

Nuevamente, se dio lugar a registrar el trabajo que se había realizado en el pizarrón.

5. 3. 2. 5. Análisis de la tercera actividad

→ Tercer día

La última actividad relaciona la cantidad de ladrillos entre la pared de Pedro y Juan, siendo que si Pedro comprase 8 ladrillos más duplicaría la cantidad que compró Juan.

Para la interpretación de este problema, varios grupos solicitaron la presencia de la docente, ya que les generó confusión la expresión 8 ladrillos más y el hecho de que cada pared no esté condicionada por un número de columnas. No lograban identificar cuál era el número inicial de ladrillos de Pedro, es decir, si debían considerar los ladrillos de Pedro antes o después de la compra de los 8 ladrillos para duplicar la cantidad de Juan. Esta situación se vio contemplada en el análisis a priori.

El grupo 6 comenzó igualando la cantidad de ladrillos entre Juan y Pedro; por eso, a ambos los designaron con la letra x . Aquí puede observarse la confusión que surge de la expresión ‘8 ladrillos más’ al sumar 8 a P y duplicar la cantidad de J , concluyendo que este último siempre será par. Al comparar ambas ecuaciones, se puede observar que no son equivalentes; no existe propiedad uniforme que nos permita derivar una de la otra.

Handwritten student work on grid paper. The equations shown are:

$$3 - \overset{x}{P} + 8 = \overset{x}{J} \cdot 2 \quad P = J$$
$$8 + 8 = 8 \cdot 2$$
$$16 = 16$$

Below the equations, the student writes: "Si o si tiene que ser par porque se multiplica por 2".

Imagen 16 - Producción del grupo 6

En la imagen 16 se observa que, en un primer momento, el grupo condiciona la cantidad de ladrillos igualando las variables, lo que los llevó a considerar una única solución. Realizaron pruebas con casos particulares partiendo de un número menor o mayor de ladrillos. En la imagen 17 se puede observar que al sumar 8 a un miembro y multiplicar por dos en el otro, no conserva la igualdad, error que los llevó a afirmar que solo existe una posibilidad.

Handwritten student work on grid paper. The text and equations shown are:

Es la única posibilidad ya que si el n° de ladrillos que compra es menor, no llega a igualar ej: $6 + 8 = 6 \cdot 2$

$$14 \neq 12$$

y si es mayor pasa lo mismo ej: $10 + 8 = 10 \cdot 2$

$$18 \neq 20$$

Below these, a red bracket spans the two examples, and the student writes: "NO, este sí".

Imagen 17 - Producción del grupo 6

Después de este análisis, plantearon una serie de ejemplos donde encontraron una regularidad. Sin embargo, en esta oportunidad no partieron de la igualdad de ladrillos entre Pedro y Juan, definiendo cada variable como la cantidad de ladrillos de cada individuo. Consideraron cada letra como una variable distinta y observaron que por cada 2 ladrillos que agregaban a Pedro, Juan debía agregar uno para mantener la igualdad.

El grupo 7 y el grupo 9 plantearon la misma ecuación que el grupo anterior. El grupo 7 hallaron dos pares de soluciones dando valores particulares a x y concluyendo que el problema tiene infinitas soluciones.

En cambio, el grupo 9 expresó la solución en lenguaje coloquial, lo cual no se condice con la ecuación planteada, dado que en algunos momentos trabajaron con la variable ‘cantidad de ladrillos de cada individuo’ y en otros como ‘el total del doble’ o e ‘la suma de 8’. Nuevamente, este grupo cometió errores entre lo que expresaron en el lenguaje coloquial y lo que representaron algebraicamente.

El grupo 4 realizó una serie de operaciones donde puede observarse la confusión que le plantearon a la docente al comienzo del trabajo con este problema.

Luego realizaron pruebas dándole valores a la cantidad de ladrillos de Pedro (x) y a la cantidad de ladrillos de Juan (y). En una ocasión probaron en la ecuación $x + 8 = y \cdot 2$ con $x = 8$, y obtuvieron $y = 8$, y con $x = 23$ y hallaron $y = 15,5$. De aquí derivaron en que x deberá ser par dado que se le suma un número par (8) y este resultado será dividido por 2 al despejar y . En este caso podemos notar que existe una noción de variables al dar distintas posibilidades a x e y , entendiendo que las soluciones responden al mismo modelo algebraico.

Tanto el grupo 1, 8 y 10 obtuvieron una sola solución. El grupo 10 realizó un esquema de dos paredes de 8×2 y otra de 4×2 , en cambio, los otros dos grupos establecieron la misma ecuación que el resto dándole a y el valor 50 y hallando $x = 29$, donde a x la definen como la cantidad de ladrillos de Juan. Para estos dos grupos la ecuación fue un medio para hallar una sola solución, no se observa que vinculen a ésta con la posibilidad de hallar infinitas posibilidades.

El grupo 5 también generó un esquema de puntos que representa ambas paredes. Emplearon algoritmos donde obtuvieron, por medio de la división, un cociente igual a 2. Establecieron que por cada 8 ladrillos que se le sume a la pared de Pedro y 4 a la pared de Juan, se mantendrá la igualdad, pero no establecieron los valores desde los que se deben partir para que se cumpla esa igualdad. Podemos observar que en su planteo solo mantienen la condición del doble de ladrillos.

El grupo 2 y 3 plantearon la ecuación $\frac{x+8}{2} = y$, definieron las variables e indicaron que este problema tiene infinitas soluciones. El primer grupo directamente planteó la fórmula e indicó que ‘las soluciones son infinitas, ya que podemos probar cualquier número en una de las incógnitas y nos dará como resultado la otra’ sin realizar ninguna condición sobre la variable x , estableciendo una relación de dependencia. En cambio, el grupo 3 nuevamente trabajó con cálculos al estilo borrador, prueba y error. Llegó a la fórmula, le dio valores pares a x , obteniendo los respectivos valores para y . Al igual que el grupo 2 no presentó condiciones para la variable x .

5. 3. 2. 6. Presentación de producciones desde el pizarrón

→ Cuarto día

En esta ocasión se da paso al pizarrón al grupo 1 (imagen 18). Presentó la fórmula, definió las variables, determinó un valor para x , halló el valor correspondiente para y e identificó la solución. En ese instante intervino el grupo 9 indicando que ellos no habían podido realizar la fórmula, pero sí habían redactado el proceso que los llevó a la obtención de las soluciones. En el pizarrón realizaron lo que se observa en la imagen 19.

ejemplo

$$2x = y + 8$$

$$2x = 50 + 8$$

$$x = 58 : 2$$

$$x = 29$$

$x = \text{Ladrillos de Juan}$

$y = \text{Ladrillos de Pedro}$

Juan = 29

Pedro = 50

anman directamente la fórmula.

Imagen 18 - Corresponde al grupo 1

$x = \text{LADRILLOS DE JUAN}$

$y = \text{LADRILLOS DE PEDRO ANTES DE COMPRAR B}$

31

↑

$2x - 8 = y + 8$ Duplica el valor de Juan

$2 \cdot 20 - 8 = y + 8$

$40 - 8 = y + 8$

$32 = y + 8$

$y = 32 - 8$

$y = 24$

$x = 20$

$2x = y + 16$

$2 \cdot 20 = y + 16$

$40 = y + 16$

$y = 40 - 16$

$y = 24$

$2x - 8 = y$

Imagen 19 - Corresponde al grupo 9

La dificultad de este grupo se presentó cuando quisieron expresar la cantidad de ladrillos de Pedro y de Juan. No podían definir si sus variables respondían al comienzo del problema ‘Pedro y Juan compran ladrillos’ o a lo que refiere luego, ‘Si Pedro comprase 8 ladrillos más, duplicaría la cantidad de ladrillos que compró Juan’. En la imagen 19 se observa que definen y como ladrillos de Pedro antes de comprar 8, es por ello que al miembro izquierdo, donde se refleja el ‘movimiento de Juan’, le restan 8. En el renglón quinto se puede ver que terminan sumando a 32, 8 ladrillos, obteniendo $y = 40$, si hubiesen trabajado según la fórmula planteada hubiesen obtenido $y = 24$. En ninguno de los dos casos cumplen con la relación establecida entre los ladrillos de Pedro y Juan.

Se puede observar que la docente reescribe en rojo la fórmula $2x = y + 16$, planteada en un comienzo y junto con el grupo establecen que la ecuación $2x - 8 = y$ es válida para la resolución del problema.

Una situación similar planteó el grupo 3, al pasar el pizarrón (imagen 20), cuando tuvieron que determinar la expresión ‘el doble’ y escribieron $y:2$, para la variable ‘ y : cantidad de ladrillos de Juan’. Esto no se observa dentro del registro del grupo, pero recordemos que este grupo ha trabajado en la hoja con el método prueba y error, puede que este planteo lo hayan realizado en otra hoja y luego haya sido descartado viendo que no era correcto.

Handwritten mathematical work on a whiteboard. At the top right, "ejemplo" is written in red with a red arrow pointing down to the equation $\frac{x+8}{2} = y$. On the left, the equation $x+8 = y:2$ is written in blue, with a red bracket under "y:2" and the red text "quinta la mitad" below it. On the right, a definition is written in blue: "x = lod. de Pedro" and "y = \" \" Juan".

Imagen 20 - Corresponde al grupo 3

Finalmente, se le da lugar al grupo 4. En la imagen 21 se observa que representan lo mismo que en la carpeta.

En esta ocasión, la docente amplía el diálogo sobre la condición que registró el grupo en relación con la variable x . La alumna que pasó al frente explicó que x tiene que ser par porque todo lo que está ‘de ese lado del igual’-haciendo referencia al miembro izquierdo de la igualdad-, debe ser par, dado que será dividido por 2 cuando quieran hallar el valor de y .

Un alumno del grupo 6 aporta que ellos pudieron encontrar una 'regla'. Indicó que para que la igualdad se conserve debían sumar dos ladrillos a Pedro y uno a Juan y así obtendrían infinitas posibilidades. Esto se puede observar en la imagen 22.

tiene que ser Par

$$(X) + 8 = y \cdot 2$$

$$8 + 8 = y \cdot 2$$

$$16 : 2 = y$$

$$8 = y$$

$$16 + 8 = y \cdot 2$$

$$24 = y \cdot 2$$

$$24 : 2 = y$$

$$12 = y$$

$X = \text{ladrillos de Pedro}$
 $y = \text{ladrillos de Juan}$

Imagen 21 - Corresponde al grupo 4

$$P + 8 = J \cdot 2$$

$$+2 \left\{ \begin{array}{l} 2 + 8 = 5 \cdot 2 \\ 10 = 10 \end{array} \right\} +1$$

$$4 + 8 = 6 \cdot 2$$

$$12 = 12$$

$$6 + 8 = 7 \cdot 2$$

Imagen 22 - Corresponde al grupo 6

$$8 + 8 + 8 = 12 \cdot 2$$

$$8 + 8 = 8 \cdot 2$$

$$P + 8 = J \cdot 2$$

4

Imagen 23 - Corresponde al grupo 5

La docente invita al grupo 5 a compartir su producción. Un estudiante de este grupo indicó que ellos, a diferencia de sus compañeros, plantearon la condición de sumar ocho ladrillos a

Pedro y cuatro a Juan para mantener la igualdad de que Pedro tenga el doble que Juan. La profesora preguntó si dicha condición se puede establecer sobre la ecuación que presentó el grupo 6.

Un alumno del grupo 5 pidió pasar al pizarrón realizando en azul lo que se observa en la imagen 23. Explica que ambos grupos realizaron lo mismo, solo que el grupo 5 emplea un ‘crecimiento’ mayor al que realiza su grupo. Es decir, un grupo estableció que se mantendrá la condición si por cada ocho ladrillos que se le suma a la pared de Pedro se le suman cuatro a la pared de Juan y el otro grupo estableció que por cada dos ladrillos que agregan a Pedro, Juan deberá agregar uno para que se conserve la igualdad. Si al incremento que realiza el grupo 6 lo multiplicamos por cuatro, obtenemos la variación del grupo 5. Es decir, que el grupo 6 reconoce el menor ‘patrón’ de crecimiento, luego cualquier variación que se haga sobre este factor mantendrá la igualdad.

En lo referente a la discusión de este problema, observamos que surgieron dificultades al intentar establecer la relación entre la cantidad de ladrillos que tenía cada individuo. La condición que establece esta actividad, junto con la falta de un número fijo de columnas para cada pared, generó un nuevo escenario que no se había dado en los problemas previos. Esto ocasionó que la atención se concentrará en determinar un modelo que les permitiera encontrar soluciones o, al menos, determinar una solución mínima, como los fueron ocho y dieciséis ladrillos. Una vez que lograron esto, la mayoría de los grupos consideró finalizada la búsqueda de soluciones, a diferencia de lo ocurrido en el problema 1, donde pudieron identificar regularidades mediante las presentaciones en el pizarrón y utilizarlas en el trabajo interno de cada grupo en el problema 2.

Los grupos 1, 7 y 8, avanzaron en el planteo de una ecuación que modelice el problema, definieron correctamente las variables, pero no pudieron determinar más que una solución. Situación similar observamos en el grupo 2 y 3 donde aclararon que las soluciones serían infinitas, pero no condicionaron la variable x (ladrillos que compra Pedro). El grupo 9 planteó una ecuación que no condice con el razonamiento previo.

El grupo 4 estableció la misma forma de trabajo para los tres problemas planteando ecuaciones, no hallaron regularidades, pero sí condiciones sobre las variables para que tenga soluciones admisibles dentro del contexto del problema.

Los grupos 10 y 5 trabajaron con producciones concisas, sin embargo, este último, aun así, logró el reconocimiento de regularidades que les permitió establecer en los dos últimos problemas la existencia de infinitas soluciones.

En cambio, los alumnos del grupo 6 lograron hallar una ecuación definiendo las variables y a su vez pudieron encontrar una regularidad para la variación de las mismas, sin establecer la condición mínima para el valor de J (ladrillos de Juan) que debía superar los cinco ladrillos para que el valor de P (ladrillos de Pedro) tenga sentido en el problema.

6. Reflexión de las producciones de los alumnos y de la puesta en común

Tras finalizar las clases asignadas a la resolución de la secuencia presentada, consideramos oportuno revisar las producciones de los grupos en relación con cada problema, así como también las discusiones generadas durante la puesta en común de las resoluciones planteadas en el pizarrón.

Para este análisis, confeccionamos una tabla que sintetiza algunos puntos clave que consideramos relevantes para analizar a la luz de los objetivos planteados.

La tabla incluye diversas categorías para cada uno de los problemas. Una de ellas aborda la cantidad de soluciones halladas por cada grupo. En esta categoría, empleamos los números 1, 2 y 3 para indicar la cantidad de soluciones halladas, mientras que la expresión ‘infinitas soluciones’ se utilizó cuando correspondía. También analizamos cómo los estudiantes expresaron dichas soluciones. Además, consideramos analizar si identificaron regularidades o se establecieron condiciones sobre alguna de las variables involucradas. Por último, observamos si los estudiantes plantearon ecuaciones y evaluamos si los procedimientos utilizados responden a enfoques aritmético-algebraicos o de dependencia-covarianza.

En la categoría ‘Cantidad de soluciones’, analizamos la cantidad de soluciones halladas y en los casos de problemas que generen ecuaciones del tipo $ax - by = c$, analizaremos si los estudiantes expresan las infinitas soluciones o infieren esta posibilidad dado las posibles regularidades identificadas.

La columna ‘Respuesta’ se refiere al modo en que los alumnos expresaron las soluciones, ya sea mediante un enunciado algebraico, numérico o si emplean ambos recursos. En algunos casos, la respuesta queda sujeta en el proceso de resolución de una ecuación y no se expresa al finalizar dicho proceso.

En la categoría ‘Regularidad/Condición sobre la variable’, analizamos si los alumnos logran identificar regularidades en la búsqueda de soluciones o si establecieron condiciones relacionadas con las variables que intervienen en los problemas.

En cuanto a la columna ‘Procedimientos’, consideramos dos subcategorías:

1. Resolución por covarianza (C) o dependencia de variables (D), donde, en algunos casos, se hace referencia al empleo de dibujos como apoyo.
2. – Procedimientos aritméticos o algebraicos, dependiendo del enfoque utilizado por los estudiantes.

Cabe destacar que algunas producciones resultaron incompletas o no fueron expresadas con claridad, por lo que no se puede inferir con precisión el procedimiento empleado.

Tabla N° 1. Resumen del trabajo de los diez grupos. Se presentan los tres problemas

Grupo	Probl	Cantidad de soluciones	Respuesta	Regularidad/Condición sobre la variable	Ecuación/define variables	Procedimiento	
						D/C	Arit/Algeb
1	1	3	Coloquial	NO	NO	C	Aritmético
	2	Infinitas	Coloquial	NO	NO	C	Aritmético
	3	1	Coloquial	NO	SI/SI	D	Algebraico
2	1	3	Coloquial	NO	NO	C	Aritmético
	2	Infinitas	Coloquial	SI	NO	C	Aritmético
	3	Infinitas	Coloquial	NO	SI/SI	D	Algebraico
3	1	3	Coloquial/numérica	NO	SI/SI	C/D	Arit./algeb.
	2	Infinitas	Coloquial/	SI (condición)	SI/SI	D	Algebraico

			numérica				
	3	Infinitas	Coloquial	NO	SI/SI	D	Algebraico
4	1	1	dentro de la expresión/resolución	SI (condición)	SI/SI	D	Algebraico
	2	1	dentro de la expresión/resolución	SI (condición)	SI/SI	D	Algebraico
	3	2	dentro de la expresión/resolución	SI (condición)	SI/SI	D	Algebraico
5	1	3 Según gráfica	Numérica	NO	NO	Dibujo	Aritmético
	2	Induce a infinitas	coloquial	SI (regular.)	NO	C/Dibujo	Aritmético
	3	Induce a infinitas	coloquial	SI (regular.)	NO	Dibujo	Aritmético
6	1	3	coloquial	NO	NO	C	Aritmético
	2	Infinitas	Pares	SI (regular.)	SI (Con error)	C	-
	3	Infinitas	dentro de la expresión/resolución	SI (regular.)	SI/SI	C	Algebraico
7	1	3	Coloquial/numérica	NO	NO	C	Aritmético
	2	Infinitas	Coloquial/numérica	SI (regular.)	NO	C	Aritmético
	3	Infinitas	Coloquial/dentro de la resolución	NO	SI/SI	D	Algebraico
8	1	1	Coloquial/numérica	NO	NO	C	Aritmético
	2	1	Coloquial	NO	NO	Dibujo	-
	3	1	Pares	NO	SI/SI	D	Algebraico
9	1	1	Coloquial	NO	NO	C	Aritmético
	2	-	Coloquial	NO	NO	C	Aritmético
	3	-	Coloquial	NO	NO	C	Aritmético

10	1	Se estima que sí	Coloquial	NO	NO	C	Aritmético
	2	1	Coloquial	NO	NO	-	-
	3	1	Coloquial	NO	NO	-	-

El grupo 1 empleó gráficos en la resolución del primer problema para hallar dos de las tres soluciones. En el problema 2 solo hizo una representación de 6 y 8 espacios, referenciando a las paredes de cada sujeto. En el último problema no empleó el recurso de la gráfica. Podemos observar cómo el uso de la ecuación en este último problema fue un factor en el hecho de perder soluciones y no interpretarlas en el contexto del problema.

El grupo 2 trabajó en los dos primeros problemas empleando un procedimiento de resolución similar en ambos. En cambio, en el tercer problema se observa el planteo de una ecuación seguido a un fundamento que refiere a un procedimiento por dependencia, donde se definen las variables. Creemos que en este caso el uso de la ecuación de manera directa no permitió considerar la existencia de una regularidad en la búsqueda de soluciones, como sí lo hicieron en el problema anterior que trabajaron con procedimientos aritméticos.

En la producción del grupo 3 se puede observar que en el primer problema comenzó empleando recursos aritméticos con procedimientos por covarianza, apoyándose en los múltiplos comunes entre 8 y 6 y en representaciones gráficas. Seguido a esto, trabajó con valores numéricos en lo que luego resulta el planteo de una ecuación. Realizó una tabla donde trabajó con procedimientos de dependencia y en la justificación de la fórmula empleada indicó la expresión “ingresando valores a x ”. Ante estos dos tipos de procedimientos empleados, las soluciones las definen mediante un lenguaje coloquial y numérico.

Ya en el problema 2 se concentraron en el planteo de una ecuación, probaron distintos valores de x obteniendo valores de y y definieron las variables. En la fundamentación se puede observar que dieron indicios de una regularidad que no terminan de desarrollar. Expresan que al considerar sólo los valores enteros que ‘salen’ de y notan que son múltiplos de cuatro. La solución también la expresan mediante un lenguaje coloquial y numérico. Hasta aquí este grupo emplea para expresar la solución, en ambos problemas, un *enunciado algebraico numérico* (Frege, 1892, en Barrio, 2010) utilizando una conversión de una representación lingüística en lengua natural a una representación en escritura numérica.

En cambio, en el problema 3 el procedimiento respondió a una dependencia con el planteo de la ecuación. Dejaron de lado las gráficas, definieron las variables y expresaron coloquialmente la posibilidad de infinitas soluciones. No determinaron ningún tipo de condición para la variable x ni hicieron referencia a una regularidad al trabajar con las variables, pero podemos intuir que, pese a que no lo dejan por escrito, sí lo tuvieron presente dado que los valores por los cuales reemplazan x son todos pares.

En el caso del grupo 4, para los tres problemas usaron el mismo procedimiento. Plantearon la ecuación, definieron las variables y comenzaron a probar con algunos valores para x descartando aquellos que generaban valores no enteros para y . No expresaron la solución hallada en cada caso, solo la dejaron sujeta al proceso de resolución. En este caso, al igual que el grupo 1, podemos inferir que el uso de la ecuación fue un factor en el hecho de perder soluciones.

El grupo 5 trabajó desde la representación gráfica, realizó escasas conclusiones en la elaboración de sus respuestas. Para la resolución del problema 1 se apoyaron en las representaciones gráficas ‘construyendo paredes’ con el número exacto de filas, generando la cantidad de ‘azulejos’ en la hoja. En el problema 2 y 3, solo realizaron una representación de las posibles soluciones que admitían, pero en esta oportunidad, lograron plantear un ‘comienzo’ en el trabajo de regularidades en el problema, lo cual permitió ver que infirieron en infinitas soluciones. Es claro que los procedimientos de conteo que emplearon para hallar el número de ladrillos responden a procedimientos del tipo aritmético. Pero, así mismo, al notar que la cantidad de ladrillos de cada pared estaban sujetos a una variación constantes, dieron cuenta del trabajo que supone una posición de generalización y una posible búsqueda sistemática de soluciones, pese a que no lo realizaron en la hoja.

El grupo 6 resuelve el problema 1 como lo hace la mayoría de los grupos, con el m.c.m. empleando procedimientos de covarianza, verificando que la suma entre ambas cantidades suman 90.

En cambio, en los siguientes problemas empleó el uso de ecuaciones. Este recurso puede haber sido adoptado por el grupo luego de la resolución que se realizó con el problema 1 desde el pizarrón. El planteo de una ecuación en la segunda situación les permitiría hallar la cantidad de ladrillos y no las filas de cada pared, pero no hacen uso de esta. Es decir, las soluciones las hallan nuevamente con el m.c.m. encontrando una regularidad de 24 ladrillos en los siguientes pares de soluciones. En el tercer problema plantearon la ecuación, luego de varios intentos fallidos, pero nuevamente no la emplearon como un recurso de dependencia para hallar un dato en función de otro, sino que probaron en simultáneo valores para x y y que permitan mantener la igualdad.

El grupo 7 distinguió en el problema 2 un ‘patrón’ en la variación de las filas de ambas paredes e indicó algunas posibles soluciones. No sucedió así en el tercer problema, donde solo lo enunció de manera coloquial, haciendo hincapié en la expresión ‘dupliche’. Plantearon una ecuación y los valores que probaron para x fueron 8 en una primera ocasión y 16 en una segunda, dejando entrever que solo podían darse soluciones bajo esta condición.

En la resolución del grupo 8 no se observó una elaboración acorde a lo solicitado, como tampoco sucedió en el grupo 5. Podemos concluir que en el tercer problema optaron por el uso de la ecuación, dado que se trabajó en el pizarrón para los otros dos problemas previos. En los tres problemas solo indicaron una solución sin observarse la idea de la existencia de más soluciones.

Particularmente, el grupo 9 presentó errores en los planteos o estos llegaron a ser confusos. Solo en el primer problema presentó una solución que, como en el resto de los otros dos problemas, procedió mediante un razonamiento de covariación.

Finalmente, el grupo 10 presentó característica similar a la de los grupos 5 y 8 en cuanto a los procesos de resolución que debían dejar expresados en sus hojas. Se observa poco compromiso en su producción.

De la tabla también podemos analizar resultados generales por problemas. Para la resolución del problema 1, como ya mencionamos anteriormente, todos los grupos emplearon algún tipo de representación auxiliar de las paredes, algunos más completos que otros. El procedimiento por covarianza fue empleado por cinco grupos en el primer problema. Los grupos 2 y 3 describen los múltiplos de 6 y 8 indicando las parejas que suman 90 de manera simultánea para ambas paredes. En cambio, los grupos 1, 6 y 7, si bien trabajan con los múltiplos

comunes, lo hacen desde una estructura coloquial donde describen los pasos que realizan y muestran directamente los pares que suman 90. Solo los grupos 2 y 7 resuelven el problema 2 manteniendo procesos de covarianza respetando cada uno el mismo paso a paso que en el problema primero.

En cambio, en la primera situación, los grupos 3 y 4 procedieron por dependencia. Estos dos grupos plantearon ecuaciones y definieron las variables del problema. Solo el grupo 4 mencionó una condición de divisibilidad en el proceso de ‘despeje’ de la variable y .

En el caso particular del grupo 3 empleó, primero, procedimientos de covarianza y luego resolvió por dependencia. Ambos caminos responden a los que Sadovsky (2003) indica como procedimientos sistemáticos, dado que realizan dos tipos de registros similares al funcionamiento de una tabla. En la primera parte se observa (imagen 6) una variación simultánea de ambas variables con el objetivo de conservar el valor 90 mediante un movimiento mínimo que permite pasar de una solución a otra, siguiendo un orden en ambas variables. Se puede apreciar que el factor que multiplica a ocho aumenta de tres en tres y el factor de seis disminuye de cuatro en cuatro.

Claramente, en la imagen 24 se puede ver que dan valores a una de las variables y obtienen la otra mediante la inversión de operaciones. En esta situación se observa que el grupo toma noción de dependencia y logran establecer que las variables no pueden tomar cualquier valor.

Ningún grupo consideró la solución (0,15), esta posibilidad se desprende del análisis grupal cuando hallan la regularidad entre los azulejos que mantienen la constante de 90, donde por cada tres filas que descontaban de la pared de ocho columnas, sumaban cuatro filas en la pared de seis columnas.

El grupo 1, en el problema 2 plantea un estado inicial donde parte igualando el número de ladrillos que tiene Juan y Pedro, y en función de esta igualdad comienza a realizar variaciones. En cambio, los grupos 5, 8 y 10 se apoyan en el dibujo de las paredes para dar respuesta el problema. Los grupos 8 y 10 parecen quedarse solo con una solución, pero el grupo 5 plantea la gráfica como una de las soluciones posibles y amplían el campo de las soluciones a infinitas, basándose en la regularidad de que cada cuatro filas de ladrillos que se le suma a Pedro y cada tres que se le suma a Juan, la diferencia entre los ladrillos de ambos será de cuarenta. Creemos que esta regularidad parte de la solución que se observa en la imagen 25, donde la pared de Pedro cuenta con doce filas y la de Juan con cuatro. Este planteo, al partir de una situación inicial, pierde pares de valores que también dan solución al problema.

X	$x \cdot 8 = 90 - y \cdot 6$	Y	Rta
1	$(1 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$ $8 = 90 - y \cdot 6$ $y \cdot 6 = 90 - 8$ $y \cdot 6 = 82$ $y = 82 : 6$ $y = 13,666...$ $y = 13,7$	13,7	$(8 \cdot 1) + (13,7 \cdot 6) = 90$ $8 + 82,2 = 90$ $90,2 = 90$ $90 = 90$
2	$(2 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$		
3	$(3 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$ $24 = 90 - y \cdot 6$ $y \cdot 6 = 90 - 24$ $y \cdot 6 = 66$ $y = 66 : 6$ $y = 11$	11	$(8 \cdot 3) + (11 \cdot 6) = 90$ $24 + 66 = 90$ $90 = 90$
4	$(4 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$		
5	$(5 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$		
6	$(6 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$ $48 = 90 - y \cdot 6$ $y \cdot 6 = 90 - 48$ $y \cdot 6 = 42$ $y = 42 : 6$ $y = 7$	7	$(6 \cdot 8) + (7 \cdot 6) = 90$ $48 + 42 = 90$ $90 = 90$
7	$(7 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$		
8	$(8 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$		
9	$(9 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$ $72 = 90 - y \cdot 6$ $y \cdot 6 = 90 - 72$ $y \cdot 6 = 18$ $y = 18 : 6$ $y = 3$	3	$(9 \cdot 8) + (3 \cdot 6) = 90$ $72 + 18 = 90$ $90 = 90$
10	$(10 \cdot 8) = 90 - y \cdot 6$		

Imagen 24 - Producción del grupo 3

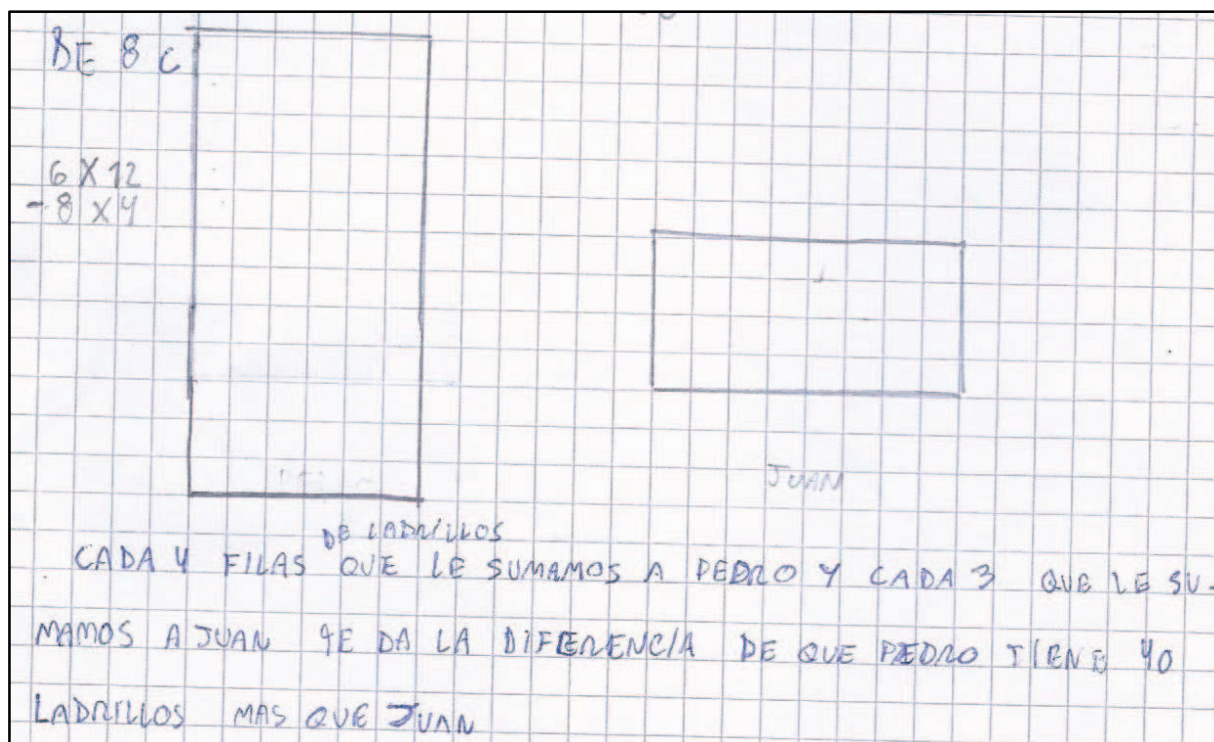


Imagen 25 - Producción del grupo 5

Los grupos 6, 7, 8, 9 y 10, para el problema 3, se ven condicionados por el estado relativo de que Pedro ‘tendría’ el doble de ladrillos que Juan.

El grupo 7 plantea una ecuación, no condiciona la variable x (que debe ser par) reemplazándola con dos valores donde uno es el doble del otro. Situación similar realiza el grupo 10, sin el planteo de una ecuación, pero indica que si Pedro compra dieciséis ladrillos y Juan ocho, uno tendrá el doble que el otro.

A su vez, los grupos 8 y 9 emplea el término ‘más 8’ como ‘el doble’. Esta interpretación errónea se observa en el grupo 9 en el relato que realizan de manera coloquial, sin poder fundamentar correctamente la respuesta. En el grupo 8, reemplazan el número de ladrillos de Pedro por 50, obteniendo 29 ladrillos para Juan, sin relacionar la premisa de la que parten, donde se observa la expresión ‘el doble’ como sinónimos de ‘8 ladrillos más’.

En el caso de los grupos 6 y 7 la confusión puede deberse a la comprensión del enunciado, como ya se hizo referencia anteriormente, dado que no presentaron dificultades en los dos problemas previos. En el caso del grupo 6, esto se puede observar más claramente ya que, primero, intenta resolver la actividad desde la igualdad que contempla ambas condiciones, la de que se supere la cantidad entre una pared y otra por ocho ladrillos y que una sea el doble que la otra. Ambas variables las reemplaza por el mismo valor (imagen 16). Luego, salva la dificultad entendiendo que la cantidad de ladrillos de Juan y de Pedro no debían de ser iguales. Este grupo logra indicar una regularidad para ambas variables.

La confusión que parte de la interpretación del enunciado se observó en el comienzo del trabajo en grupo, con las consultas que le realizaban a la docente, y también se hizo presente en la puesta en común en el pizarrón.

En el caso del grupo 4, que resolvió los tres problemas por dependencia, determina en cada uno de ellos una condición sobre la variable dependiente, por ejemplo en el caso del problema 3 no condicionan a $y \geq 4$.

7. Análisis de las representaciones semióticas

Luego del análisis de las producciones de cada grupo y de las presentaciones y defensas que se realizaron en la puesta en común, las representaciones semióticas fueron empleadas, en su mayoría, para comunicar al resto de la clase lo trabajado dentro de los grupos, permitiendo a los estudiantes apropiarse de las estrategias que fueron implementadas y para pensar en la resolución de los problemas planteados. El registro semiótico predominante ha sido la lengua natural. El debate generado en la discusión colectiva contribuyó a que una producción enriquezca a otra, ofreciendo un escenario óptimo para fortalecer el trabajo de argumentación, “atendiendo tanto al análisis de la validez de las afirmaciones como al de la generalidad de las respuestas” (Borsani, Brunand y Cabalcagüé, 2021, p. 49).

En la primera actividad, solo dos grupos emplearon la conversión como una codificación del lenguaje coloquial, en el que estaba presentado el problema, logrando una representación en el lenguaje algebraico, tras la presentación de las fórmulas que modelizaban la actividad. A su vez, el otro grupo logró realizar el tratamiento dentro del registro algebraico mediante transformaciones, controlando lo que se preguntaba en el registro coloquial a través de la codificación. Este grupo realizó un dibujo, a modo de organización de datos, de ambas paredes: una primera figura donde se observa una representación de una columna para las paredes de 6 y de 8 filas, y una segunda figura donde se observa una pared de 3 columnas para la de 6 filas y de 9 columnas para la de 8 filas. Aquí, la asociación del enunciado con el esquema gráfico planteado de las paredes funciona como una heurística que les permitió encontrar la expresión algebraica.

En el primer problema, el esquema gráfico de las paredes ha sido un recurso ampliamente empleado, principalmente como economizador de la memoria, para tener en cuenta los elementos que se relacionan. Esta ilustración permitió contabilizar y observar variaciones concretas que se dan en diversos momentos del problema, facilitando el reconocimiento y trabajo con los múltiplos comunes.

Como se ha logrado observar, a medida que transcurría la secuencia, los estudiantes emplearon en menor medida el recurso de graficar.

En el tercer problema se pudo notar que se ha logrado trabajar con la conversión del lenguaje natural (oral, escrito) al lenguaje algebraico, situación que no se observó con mayor frecuencia en los problemas previos.

Sadovsky (2003) señala la importancia de la coordinación que los alumnos establecen entre distintas formas de representar las soluciones de un problema, como en los casos trabajados en esta investigación, que presentan varias o infinitas soluciones. Esta coordinación ofrece a los estudiantes la oportunidad de establecer relaciones entre cada solución particular y el conjunto de todas las soluciones posibles, lo cual se evidencia en la conexión entre las fórmulas propuestas y otros modos de representarlas, como gráficos y tablas. Entendemos aquí que las representaciones semióticas han sido utilizadas como un medio para exteriorizar las representaciones mentales con el fin de hacer público lo privado - lo particular- y, por otro lado, han sido esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento - lo general. (Barrio, 2010, p. 160)

En la formación de representaciones hemos notado que, al realizar las tareas, los estudiantes han empleado diferentes sistemas de representación. Entre ellos, se destacan registros de representaciones alfanuméricas, como esquemas de números que indican parejas de múltiplos comunes, tablas y escrituras de fórmulas, así como registros de representación verbal, incluyendo el uso del lenguaje coloquial.

Por otro lado, dada la formación de las actividades en el lenguaje coloquial los estudiantes han logrado realizar conversiones cambiando de registro al lenguaje simbólico. Esta conversión se fue gestando con mayor recepción a medida se iba avanzando en las resoluciones de las actividades. También pudimos observar que algunos grupos plantearon la resolución de los problemas apoyados en una representación gráfica y llevándola al registro algebraico, ampliando el contenido que el registro de origen brindaba. En este registro es donde se han dado transformaciones internas respetando reglas del propio registro.

8. Conclusión

Este trabajo surgió de la inquietud de analizar la transición de la aritmética al álgebra en una clase tradicional de matemática de un 3er año del ciclo orientado de la Escuela Secundaria actual. Esta transición se entiende como un proceso cuidadoso que permite a los alumnos apropiarse de conceptos más complejos y abstractos, evitando generar obstáculos en su aprendizaje. Retomando el aporte de Vergnaud (1988, Mercado, 2016) reconocemos la doble ruptura epistemológica que implica este proceso. Por un lado, un enfoque más formal y abstracto en la resolución de problemas que antes se abordaban de manera intuitiva y, por otro lado, la introducción de nuevos objetos matemáticos para el grupo clase.

Existen diversos caminos para introducir el álgebra en la escuela secundaria. Por ejemplo, Carmen Sessa (2005) propone una introducción al álgebra desde la generalización llevada a cabo por el planteo de fórmulas en actividades aritméticas y geométricas, pero a su vez reconoce que la enseñanza tradicional y privilegiada para este ingreso ha sido mediante el uso de las ecuaciones.

Nuestra propuesta presenta problemas que se modelizan mediante EDL del tipo $ax + by = c$. Dada la naturaleza de estos problemas, los estudiantes se enfrentan al planteo de ecuaciones con dos variables, y según el tipo de problemas, pueden obtenerse infinitas soluciones al encontrar regularidades en los pares solución. Creemos que estas condiciones favorecen la transición deseada entre ambos dominios, situando a los estudiantes en mejores condiciones para abordar lo algebraico.

Los problemas que se trabajaron en el interior de esta práctica fueron analizados a priori de su presentación al grupo clase. Se pudo observar que los alumnos emplearon diversas heurísticas en las resoluciones, propias de la herencia del nivel primario y del ciclo básico de la escuela secundaria, pero estas actividades propiciaron que surgieran las dificultades necesarias para que los estudiantes estén en continua adaptación al medio. Esta adaptación, propia de la irrupción de prácticas que conducen a “*procesos de algebrización*” (Bolea, Bosch y Gastón, 2001, como se citó en Sadovsky, 2003), se dio en un juego constante entre las prácticas anteriores, vinculadas a la aritmética, con la posibilidad de indagar en “*lo viejo*” con las nuevas herramientas que se fueron generando a medida que se iba avanzando con el trabajo en pequeños grupos y con el grupo clase.

En el caso del primer problema, algunos grupos identificaron la medida M3 entendiendo que era el resultado de la composición de dos medidas (M1 y M2) que derivaban del producto de ellas. Claramente, lograron identificar los valores 6 y 8 para M1 entendiendo que mediante una división hallaban el valor de M2. El proceso empleando lo realizaron de manera inversa, desarmaron el resultado final para dar con el resto de las componentes.

En cambio, otros grupos trabajaron dentro del producto de medidas, hallando primero los valores para M3 con el empleo de los múltiplos comunes y luego por medio de la división hallan los posibles valores de M2.

El segundo problema refirió al producto de dos medidas que relacionaba la comparación entre ellas. A diferencia del primer problema, donde se podían mencionar los pares de soluciones sin la necesidad de plantear una regularidad, dado que no eran muchas las posibilidades, aquí fue necesario el planteo de una regularidad para poder expresar todos los pares solución.

En la puesta en común, en el trabajo entre ambas pizarras (imagen 8 y 9) se presentaron las primeras resoluciones a través de expresiones numéricas, donde se relacionaron números y operaciones, argumentando la equivalencia entre ambas producciones. Paulatinamente, con la intervención de los estudiantes se logró avanzar en nuevas expresiones y conclusiones. Cambriglia, Sadovsky y Sessa (2010, en Borsani, Brunand y Cabalcagué, 2021) entienden a las interacciones en las clases de matemática como un medio potente de construcción de conocimientos tanto personales como colectivos. En estas interacciones se pusieron en juego el límite de lo público y de lo privado, se transformaron expresiones que en algún punto fueron las primitivas, mediante propiedades que permitieron leer información que pudo ser nueva o no. Una de las cuestiones que consideramos importante aquí es que “la transformación de una expresión en otra es producto de una toma de decisiones sobre qué ‘objeto’ transformar, por qué es necesario transformarlo y qué tipo de transformación se necesita hacer” (Borsani, Brunand y Cabalcagué, 2021, p. 30)

Podemos concluir que algunos grupos emplearon modos formales desde un primer momento. En cambio, otros mostraron los primeros pasos en la transición de métodos informales a formales en la representación y resolución de problemas. Esta elección de métodos más formales se da luego del proceso de socialización de resoluciones en la puesta en común, el cual fue adoptado por seis grupos. Algunos comenzaron a utilizar métodos formales a partir del segundo problema, mientras que otros emplearon el recurso de la fórmula sólo en el tercero. Si bien estos grupos plantearon la expresión algebraica, algunos con errores, al hacerlo dejaron de lado el análisis del conjunto solución, no buscaron regularidades y no interpretaron las soluciones en el contexto de los problemas, situación que sí se dio en el trabajo en el pizarrón. Para comunicar las soluciones halladas casi todos los grupos emplean enunciados en el lenguaje natural “Pedro tiene un total de 8 filas...”, enunciados del tipo numérico $3.8 + 11.6 = 90$, otros mediante tablas.

El espacio colectivo de discusión que se generó en función de producciones individuales o de pequeños de grupos, a la que hace mención Patricia Sadovsky (2003), permitió adquirir mayor relevancia cuando, por ejemplo, la fórmula fue aceptada a través del producto de las discusiones entre la docente y los estudiantes. Esta aceptación fue fruto de eventuales correcciones y pruebas ‘haciéndola funcionar’, “se valida entonces la función comunicativa de cada fórmula a través de la eficacia que “los otros” (los que no la produjeron) pueden atribuirle para “generar” las soluciones” (p.193).

El intercambio y la visualización entre las correspondencias de las distintas resoluciones que se generaron en la puesta en común de los tres problemas fueron propicias para que, paulatinamente, se negocien cuestiones como:

- establecer la cantidad de soluciones dentro del contexto del problema, esto lo vimos por ejemplo en sí se debía considerar el par (0,15) en el problema 1;
- al presentar las producciones, algunos estudiantes confundieron elementos como coeficientes/variables, hallaron el número de azulejos/ladrillos en lugar de filas. Estas discrepancias dieron lugar a la interpretación de cada caso planteado y amplió el debate para fundamentar, tanto la elección de las respuestas correctas como las

erróneas. Un ejemplo de esta situación es el empleo de la misma letra para variables diferentes;

- el pensar en la cantidad de soluciones dio lugar a cuestionar sobre las infinitas soluciones que admitían los dos últimos problemas. La respuesta al cuestionamiento si podían ser solución cualquier par de puntos potenció el trabajo con las regularidades halladas y las condiciones a las que quedaban sujetas las variables. Se puede observar que, en la socialización del primer problema, se tuvo presente la idea de ‘regularidad’ sujeta a la expresión ‘patrón’ dado que, luego, trasciende en el trabajo grupal y en la puesta en común del segundo problema;
- determinar criterios para validar los resultados mediante el empleo de tablas, mediante métodos por covariación o por dependencias de las variables;
- las diferentes representaciones semióticas, en el campo de lo público, permitieron la interpretación del conjunto solución reconociendo cuáles son más óptimas según el problema en cuestión.

En relación con este último punto todos los grupos emplearon la representación gráfica en el primer problema. Sin embargo, en el avance de las otras actividades, se fueron utilizando otros tipos de representaciones simbólicas. Los modos de acomodar los datos responde a una representación visual cuya sintaxis depende de las reglas de composición y modos de interpretación. En cambio, las representaciones simbólicas tienen una sintaxis descrita mediante reglas de procedimientos (Barrio, 2010). Estas prácticas favorecen la construcción de nociones de variable y generalización, y mejoran las condiciones de los estudiantes para abordar lo algebraico.

El uso de las representaciones semióticas referido a las expresiones algebraicas permitió que algunos grupos logren plantear la ecuación que modelice el problema. Otros grupos, que previamente realizaron un análisis de la situación, en la última actividad plantean sólo la ecuación, producto del trabajo previo compartido en la puesta en común generando la pérdida de soluciones y la búsqueda de regularidades. Es decir, emplearon la ecuación como herramienta para la resolución de la situación, pero no definieron rangos de variabilidad ni establecieron generalizaciones que permitieran trabajar con las infinitas soluciones.

Entendemos que el empleo de ecuaciones para la resolución de los problemas seleccionados, que requieren el uso de EDL, debe darse de manera paulatina. Esta práctica se desarrolló en cuatro encuentros, y se comprende que debe seguirse trabajando en la misma línea, brindando espacios de construcción de saberes a cada alumno. En función de esto, podemos observar que algunos grupos registraron errores tanto en el planteo de la ecuación como en la inversión de operaciones, respondiendo desde una representación coloquial. Claramente, puede observarse que la fórmula, para algunos grupos, aún no representaba una herramienta para resolver el problema; por el contrario, fue una respuesta del tipo escolar, donde siguieron el modelo de lo que se estaba desarrollando en la puesta en común.

Se pudo observar que algunos grupos han realizado avances en lo que refiere a la transición del campo aritmético al algebraico, otros comenzaron a realizar procesos de algebrización y un menor número de alumnos mantuvieron los mismos procesos de carácter aritmético o no se mostraron comprometidos con la actividad. Por otro lado, se detectó que la habilidad de algunos estudiantes para describir verbalmente -durante las exposiciones- o en lenguaje coloquial un método matemático no implicó necesariamente la habilidad para simbolizarlo.

Harper (1981, en Kieran y Filloy Yagüe, 1989) señala que los alumnos suelen usar términos literales antes de ser capaces de conceptualizarlos como variables. En este sentido, al analizar el empleo de las letras en las expresiones simbólicas, se observó que, en un comienzo, un grupo de alumnos las considera como incógnitas específicas, empleando la misma letra para variables distintas. Sin embargo, en las sucesivas clases, pudimos observar cómo el resto de los grupos fueron adquiriendo la noción de la letra como un número generalizado, aporte que se debió al explorar la búsqueda de soluciones infinitas y regularidades en los dos últimos problemas. Este proceso permitió que la implementación del álgebra favoreciera la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de los problemas, incluyendo la construcción de la noción de variable y la generalización.

Por ello, la planificación de los docentes de la transición de la aritmética al álgebra durante la escolaridad secundaria exige una planificación que: integre representaciones múltiples, fomente el pensamiento abstracto, construya sobre conocimientos previos, promueva el razonamiento lógico y que de la posibilidad de crear un entorno de aprendizaje colaborativo.

En conclusión, la planificación de las prácticas algebraicas deben ser cuidadosas, pensadas para facilitar la transición deseada. Esta planificación no solo mejora la comprensión matemática de los estudiantes, sino que también permite desarrollar habilidades de pensamiento crítico y lógico.

9. Referencias

- Aguirre, A. y Cerati, E. (2020). Sentidos del Álgebra que priorizan textos escolares. Un trabajo de campo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16 (59), 252-274. Recuperado a partir de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/106>
- Barreiro, P. y Casetta, I. (2015). Teoría de Situaciones Didácticas. En: M. Pochulu y M. Rodríguez, (Comps.), *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 15-38). Buenos Aires: Eduvim y Ediciones UNGS. <http://repositorio.ungs.edu.ar:8080/xmlui/bitstream/handle/UNGS/780/9789876301169-completo.pdf?sequence=4&isAllowed=y>
- Barrio, E., Lalanne, L. y Petich, A. (2010). Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario: investigaciones y aportes. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Novedades Educativas.
- Borsani, V., Brunand, M. y Cabalcabué, C. (2021). Números y letras: lectura y transformación de expresiones numéricas y algebraicas. En M. Agrasar y G. Chemello (eds. de contenidos), *Entre docentes I. Matemática para el aula de ciclo básico de secundaria* (p. 17-59). Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria.
- Carnelli, G. y Marino, T. (2015). Ingeniería Didáctica. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (p. 39-62). Buenos Aires: Eduvim y Ediciones UNGS.
- Cortés, J. C., Hitt, F., & Saboya, M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 240-264. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/8wwWZs9z7HGtjqwLVsBYcXb/?format=pdf&lang=es>
- Grimaldi, V., Itzcovich, H. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática. En: Broitman, C. (Comp.), *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Kieran, C. y Filloy Yagüe, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. Vol. 7, n.º 3, pp. 229-240 <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51268>
- Mcmillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. 5º edición. Madrid: Pearson Addison Wesley.
- Mercado, L. (2016). Introducción al trabajo algebraico en la escuela secundaria: ¿qué actividades eligen los docentes? Tesina para la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, Universidad Tecnológica Nacional. <https://ria.utn.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/20.500.12272/1431/tesinaLilianaMercado.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Ministerio de educación de la provincia de Santa Fe (2014). *Diseño curricular de Educación secundaria Básica*. Santa Fe, Argentina. Disponible en: <https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/191119/931924/file/noname.pdf>
- Panizza, M.; Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 17 (3), pp. 453-461, <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21603>.
- Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.) (2015). *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires: Edivim y Ediciones UNGS. <http://repositorio.ungs.edu.ar:8080/xmlui/bitstream/handle/UNGS/780/9789876301169-completo.pdf?sequence=4&isAllowed=y>
- Sadovsky, P. (2003). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas* (tesis de doctorado). Argentina: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras.
- Valiero, E. (2020). Álgebra vs. Aritmética. Una propuesta didáctica que posibilita la construcción problematizada de un espacio matemático de trabajo constructivista en el aula. *Educación matemática*, 32(1), 178-192. Epub 06 de diciembre de 2021. <https://doi.org/10.24844/em3201.08>