Universidad Nacional del Litoral

Facultad de Ingeniería Química

Desigualdades de Harnack Elíptica y Parabólica:

Un Enfoque Abstracto

Ricardo Toledano

Tesis Presentada Como Parte de los Requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la Obtención del Grado Académico de Doctor en Matemática

Director: Hugo Aimar

Co-Director: Liliana Forzani

Año de Presentación: 1999

A mi madre,
A mis abuelos Elena y Adalberto,
A mi hermano.

Quiero agradecer a mis dos directores Hugo Aimar y Liliana Forzani por su constante e incondicional apoyo durante los años que llevó terminar esta tesis. Sin lugar a dudas, el manejo y conocimiento profundo de los temas que me propusieron investigar hicieron que los obstáculos que surgieron en la concreción de este proyecto fueran superados de la mejor manera. También quiero agradecer a toda la gente del PEMA por su apoyo y por brindar un excelente ambiente de trabajo. Por último, quiero agradecer a CONICET por el apoyo económico brindado a través de su sistema de becas el cual me permitió dedicarme exclusivamente a la investigación en matemática.

Introducción

A finales de la década del 50 De Giorgi [14] establece la validez de ciertas estimaciones puntuales para las soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales en forma de divergencia

$$Lu := \operatorname{div}(A \cdot \nabla u) = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) D_j u) = 0. \tag{1}$$

Tales estimaciones le permiten probar que toda solución débil de (1) es localmente Hölder continua. Posteriormente Moser [25], a principios de la década del 60, prueba que las soluciones débiles de (1) satisfacen la llamada Desigualdad de Harnack: *sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto,* Q *y* $\tilde{Q}$ *cubos de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $Q \subset \tilde{Q} \subset \Omega$*. Existe una constante* $C > 1$*, que depende solamente de la elipticidad del operador* (1) *y de la dimensión, tal que*

$$\sup_Q u \leq C \inf_Q u \qquad \textit{(Desigualdad de Harnack)}, \tag{2}$$

para toda u *solución débil de* (1) *no negativa en* $\tilde{Q}$. Utilizando (2), mediante un argumento de tipo iterativo, Moser da una prueba alternativa del resultado de De Giorgi. La generalidad de los métodos de Moser hacen de la desigualdad de Harnack una herramienta importante para establecer resultados de regularidad Hölder de soluciones de ecuaciones diferenciales. En sucesivos trabajos de los años 79 y 80, Krylov y Safonov ([21],[22]) prueban la validez de (2) en la situación más general de las ecuaciones parabólicas en base a dos estimaciones que establecen un control del gradiente de la solución. En el caso de las ecuaciones diferenciales elípticas de segundo grado en forma no divergente, es decir, ecuaciones diferenciales de la forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij}(u) = 0, \tag{3}$$

una técnica usual para obtener (2) consiste en probar las mencionadas estimaciones de Krylov y Safonov sobre cubos y hacer uso de un proceso de descomposición de $\mathbb{R}^n$ en cubos conocido como descomposición de Calderón-Zygmund. En estas técnicas de análisis real la geometría de los cubos juega un papel fundamental en la descomposición de Calderón-Zygmund y constituye una de las principales dificultades cuando se trata de probar la validez de (2) sobre conjuntos que no son cubos de $\mathbb{R}^n$. En esta dirección, Caffarelli y Gutiérrez ([10],[11]), en dos trabajos relativos al estudio de las soluciones de la ecuación linealizada de Monge-Ampère, prueban que tales soluciones satisfacen (2) sobre ciertos conjuntos convexos denominados “secciones”. Uno de los resultados más importantes obtenidos es una variante de la descomposición de Calderón-Zygmund de conjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$ en secciones que les permite establecer, una vez probada la validez de las estimaciones de Krylov y Safonov sobre las secciones, la llamada desigualdad débil de Harnack [16] de la cual se puede derivar (2). En estos trabajos se utilizaron de manera determinante tanto la propiedad de duplicación de la medida subyacente como la geometría de los conjuntos sobre los cuales interesa probar la desigualdad de Harnack.

Todo lo anteriormente dicho conduce naturalmente a pensar que la estructura de los espacios de tipo homogéneo es adecuada para la formulación del siguiente problema que, básicamente, es de lo que trata esta tesis: *dados un espacio de tipo homogéneo y una familia de funciones reales definidas en un subconjunto abierto de dicho espacio que satisfacen las estimaciones de Krylov y Safonov sobre bolas de la casi-métrica dada, hallar condiciones necesarias y suficientes sobre el espacio y la familia de funciones que garanticen la validez de* (2) *sobre las bolas de la casi-métrica dada.* Básicamente, el trabajo de tesis tiene dos vertientes: la elíptica y la parabólica. La primera de ellas trata de responder el problema anterior en el caso estacionario y abarca los Capítulos 2 y 3, mientras que la segunda, es decir, el caso no estacionario , está abordado en el Capítulo 4. En el Capítulo 1 presentamos las definiciones, notaciones y propiedades básicas de los espacios de tipo homogéneo que serán utilizadas a lo largo de toda la tesis. Además se establecen resultados relativos a lemas de cubrimiento, principalmente variantes del lema de Besicovitch, utilizando el concepto de homogeneidad débil. El principal resultado de este capítulo es relativo a la descomposición de tipo Calderón-Zygmund de conjuntos abiertos y acotados en bolas del espacio de tipo homogéneo considerado. La validez de esta variante de descomposición de Calderón-Zygmund es fundamental para los propósitos de los Capítulos 3 y 4. Por último se prueban algunos resultados sobre densidad de funciones continuas en espacios L^p.

En el Capítulo 2 se comienza a estudiar la versión elíptica del problema en el contexto de los espacios casi-métricos. Se presenta la primera de las estimaciones de Krylov y Safonov, se definen una serie de familias funcionales que son de interés en el estudio de regularidad Hölder en ecuaciones diferenciales y se estudian relaciones entre éstas familias y la estimación de Krylov y Safonov. El principal resultado del capítulo establece que la desigualdad de Harnack es consecuencia de la estimación de Krylov y Safonov y de la oscilación uniformemente acotada. Los métodos utilizados son, principalmente, debidos a Moser [25] y a Caffarelli [8].

En el Capítulo 3 se introducen la segunda estimación de Krylov y Safonov y la desigualdad débil de Harnack en el contexto de los espacios de tipo homogéneo. Se definen nuevas familias funcionales y se estudian las relaciones entre éstas y las ya definidas en el capítulo anterior. El principal resultado establece que, bajo ciertas restricciones en la geometría y en la medida del espacio de tipo homogéneo considerado, las dos estimaciones de Krylov y Safonov son esencialmente equivalentes a la desigualdad débil de Harnack. Los métodos utilizados para probar una de las implicaciones de la equivalencia mencionada fueron desarrollados por Caffarelli y Gutiérrez

[10] y [11]. Se concluye el capítulo con un teorema que engloba los resultados de mayor interés.

Finalmente, en el Capítulo 4 se aborda el problema relativo a la vertiente parabólica a traves del concepto de mapeo de retardo en espacios de tipo homogéneo introducido por Aimar en [3]. Tal concepto es una aproximación abstracta a la dependencia temporal que caracterizan a los problemas no estacionarios. A semejanza de lo hecho en los capítulos anteriores se introducen las estimaciones de Krylov y Safonov y se definen familias funcionales pero ahora en el contexto de los espacios de tipo homogéneo con mapeos de retardo. Se estudian propiedades geométricas que deben tener los mapeos de retardo y el espacio para poder obtener resultados similares a los establecidos en los capítulos anteriores. El principal resultado obtenido es que, bajo ciertas restricciones geométricas, las estimaciones de Krylov y Safonov implican la validez de la desigualdad débil de Harnack con mapeos de retardo pero, a diferencia del caso elíptico, no son equivalentes. En este capítulo los métodos utilizados se deben, principalmente, a Moser [26] y a Huang [18].

Referencias

[1] Aimar, H., *Notas del Curso Espacios de Tipo Homogéneo I y II* , Universidad Nacional del Litoral, 1997-1998.

[2] Aimar, H., *Singular Integrals and Approximate Identities on Spaces of Homogeneous Type*, Trans. A.M.S., Vol 292, 1, 135-153, 1985.

[3] Aimar, H., *Elliptic and Parabolic BMO and Harnack's Inequality*, Trans. A.M.S., Vol 306, 265-276, 1988.

[4] Aimar, H.; Forzani, L., On the Besicovitch Property for Parabolic Balls, Preprint.

[5] Aimar, H.; Iaffei, B., *Doubling Property for the Haar measure on Quasi-metric Groups*, Preprint.

[6] Besicovitch, A., *A General Form of the Covering Principle and Relative Differentiation of Additive Functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 41, 103-110, 1945.

[7] Besicovitch, A., *A General Form of the Covering Principle and Relative Differentiation of Additive Functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 42, 1-10, 1946.

[8] Caffarelli, L., *Mẽtodos de Continuação em Equações Eliticas Não-Lineares*, CNPq-IMPA, VII Escola Lat. Am. de Mat., 1986.

[9] Caffarelli, L. ; Cabré, X., *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, A.M.S., Colloquium Publications, Vol 43, 1995.

[10] Caffarelli, L.; Gutierrez, C., *Real Analysis Related to the Monge-Ampère Equation*, Trans. A.M.S., Vol 348, 3, 1075-1092, 1996.

[11] Caffarelli, L.; Gutierrez, C., *Properties of the Solutions of the Linearized Monge-Ampère Equation*, Journal A.M.S., 1996.

[12] Coifman, R.; de Guzmán, M., *Singular Integrals and Multipliers on Homogeneous Spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina, 25, 137-144, 1970.

[13] Coifman, R.; Weiss, G., *Analyse Harmonique Non-Commutative sur certains espaces homogènes*, Lectures Notes in Math., Vol 242, Springer-Verlag, 1971.

[14] De Giorgi, E., *Sulla Differenziabilitá e L'analiticitá delle Estremali degli Integrali Multipli Regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (3), 3, 25-43, 1957.

[15] de Guzmán, M., *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lectures Notes in Math., Vol 481, Springer-Verlag, 1975.

[16] Gilbarg, D.; Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1983.

[17] Lu, G., *Covering Lemmas and BMO Estimates for Eigenfunctions on Riemmanian Surfaces*, Rev. Mat. Iber., Vol 7, 3, 221-246, 1991.

[18] Huang, Q., *Harnack Inequality for the Linearized Parabolic Monge-Ampère Equation*, Preprint.

[19] Kelley, J. L., *Topología General*, EUDEBA, 1975.

[20] Kenig, C., *Potential Theory of Non-Divergence Form Elliptic Equations*, Preprint.

[21] Krylov, N.; Safonov, M., *An Estimate of the Probability that a Diffusion Process Hits a Set of Positive Measure*, Dokl. Akad. Nauk., 245, 253-255, 1979; Traducción al inglés en Soviet Math. Dokl., 20, 253-255, 1979.

[22] Krylov, N.; Safonov, M., *Certain Properties of Solutions of Parabolic Equations with Measurable Coefficients*, Izvestia Akad. Nauk., 40, 161-175, 1980.

[23] Macías, R.; Segovia, C., *Lipschitz Functions on Spaces of Homogeneous Type*, Advances in Math., 33, 257-270, 1979.

[24] Macías, R.; Segovia, C., *A Well-Behaved Quasi-Distance for Spaces of Homogeneous Type*, Trabajos de Matemática, 32, I.A.M., 1981.

[25] Moser, J., *On Harnack's Theorem for Elliptic Differentials Equations*, Comm. in Pure Appl. Math., 13, 457-468, 1960.

[26] Moser, J., *A Harnack Inequality for Parabolic Differential Equations*, Comm. in Pure Appl. Math., 17, 101-134, 1964.

[27] Nash, J., *Continuity of Solutions of Parabolic and Elliptic Equations*, Amer. J. Math., 80, 931-954, 1958.
[28] Parthasarathy, K., *Introduction to Probability and Measure*
[29] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1974.
[30] Sawyer, E.; Wheeden, R., *Weighted Inequalities for Fractional and Poisson Integrals in Euclidean and Homogeneous Spaces*, Amer. Journal of Math.
[31] Vol'berg, A.; Konyagin, S., *There is a Homogeneous Measure on any Compact Subset in* $\mathbb{R}^n$, Soviet Math. Dokl., 2, Vol. 30, 1984.
[32] Wheeden, R.; Zygmund, A., *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, 1977.

Índice general

CAPITULO 1

Espacios de Tipo Homogéneo

1. Espacios de tipo homogéneo: algunos resultados conocidos

ESPACIOS CASI-MÉTRICOS. Sea X un conjunto. Diremos que una función real d, simétrica y no negativa definida en $X \times X$ es una casi-métrica si

a) existe una constante $\mathsf{k} \geq 1$, denominada constante casi-triangular, tal que

$$d(x, y) \leq \mathsf{k}\left(d(x, z) + d(z, y)\right),$$

para todo x, y, $z \in X$,

b)

$$d(x, y) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = y.$$

Diremos que un par ordenado (X, d) es un *espacio casi-métrico* si X es un conjunto y d es una casi-métrica definida en $X \times X$. Dadas dos casi-métricas d y d' definidas en $X \times X$ y dos constantes positivas C_1 y C_2 diremos que d es (C_1, C_2)-equivalente a d' si y sólo si

$$C_1\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2\, d(x, y)$$

para todo x, $y \in X$. Cuando no sea necesario especificar las constantes diremos simplemente que d es equivalente a d' si la desigualdad anterior es válida para ciertas constantes positivas C_1 y C_2. Dado $x \in X$ y un número $r > 0$ diremos que el conjunto $\{y \in X \,/\, d(x, y) < r\}$ es una d-bola $B_d(x, r)$, o simplemente una bola $B(x, r)$, de centro x y radio r.

Sea k un número positivo. Dada una bola $B = B(x, r)$, la notación kB significa la bola $B(x, k\, r)$.

Los conjuntos $\{(x, y) \in X \times X \;/\; d(x, y) < 1/n\,, \quad n \in \mathbb{N}\}$ forman una base de una estructura uniforme metrizable de X. La topología considerada es la generada por la uniformidad asociada a d, por lo tanto un conjunto $Y \subset X$ es abierto si y sólo si para cada $y \in Y$ existe un número $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset Y$ (Ver [**19**]). A diferencia de lo que ocurre en los espacios métricos en general las bolas en un espacio casi-métrico no son conjuntos abiertos. No obstante siempre es posible hallar una casi-métrica equivalente a la original en donde las nuevas bolas resultan abiertas. Más precisamente se tiene el siguiente resultado debido a Macías y Segovia (Ver [**23**]): *sea (X, d) un espacio casi-métrico, entonces:*

a) *existen una métrica ρ en X, un número real positivo α, constantes positivas C_1 y C_2 tales que d es (C_1, C_2)-equivalente a ρ^α para todo x, $y \in X$;*

b) *existe una casi-métrica d' equivalente a d, un número $\beta \in (0,1)$ y una constante $C > 0$ tal que para toda terna x, y, $z \in X$, para todo $r > 0$ tal que x, $y \in B_{d'}(z, r)$ vale que*

$$|d'(x,z) - d'(y,z)| \leq C\, r^{1-\beta}\big(d'(x,y)\big)^\beta;$$

c) *las d'-bolas son abiertas en la topología generada por d y también por d';*

d) *en todo espacio casi-métrico existen funciones no triviales de tipo β-Hölder continuas para algún $\beta \in (0,1)$.*

Dado un espacio casi-métrico (X,d), diremos que un conjunto $E \subset X$ es *acotado* si existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que $E \subset B(x,r)$. En particular, el espacio total X es acotado si y sólo si existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que $X = B(x,r)$. Se dice que un conjunto $E \subset X$ es *precompacto* o también *totalmente acotado* si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $F \subset E$ tal que $d(x,F) < \epsilon$ para todo $x \in E$.

Sea (X,d) un espacio casi-métrico. Dado $\epsilon > 0$ diremos que un conjunto $G \subset X$ es ϵ-disperso si $d(x,y) \geq \epsilon$ para cualesquiera $x \neq y \in G$. Una propiedad de los espacios euclídeos de dimensión finita que permite probar lemas de cubrimiento de gran importancia para el análisis es la siguiente forma cuantitativa de la acotación total de conjuntos acotados (Ver [**15**], [**12**]):

Propiedad de Homogeneidad Débil: *sea (X,d) un espacio casi-métrico. Existe una constante $N > 0$ tal que para cada $x \in X$ y cada $r > 0$ y para todo conjunto $r/2$-disperso $G \subset B(x,r)$ se tiene que*

$$\#G \leq N,$$

donde $\#G$ indica el cardinal del conjunto G. Llamaremos a N *constante de homogeneidad débil.* Cada vez que consideremos un espacio casi-métrico con la Propiedad de Homogeneidad Débil diremos que es un espacio casi-métrico débilmente homogéneo.

Los siguientes resultados están expuestos en [**23**], [**24**] y [**1**]: *sea (X,d) un espacio casi-métrico y $E \subset X$. Entonces, dado que los espacios casi-métricos son metrizables, E es compacto si y sólo si E es completo y precompacto.* Tal como en el caso métrico, en general, en espacios casi-métricos acotación y precompacidad (o total acotación) no son equivalentes, pero *en espacios casi-métricos con homogeneidad débil los conceptos de acotación y precompacidad son equivalentes*, por lo tanto, tal como en el caso euclídeo, *en los espacios casi-métricos completos débilmente homogéneos un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.* Una consecuencia notable de la homogeneidad débil es que *los espacios casi-métricos débilmente homogéneos son separables. Por lo tanto, dado que los espacios casi-métricos son metrizables tenemos que el segundo axioma de numerabilidad es válido en los espacios casi-métricos débilmente homogéneos, es decir, son espacios*

N_2. Si (X,d) es un espacio casi-métrico débilmente homogéneo con constante de homogeneidad N, entonces es válido lo siguiente: dada una bola $B(x,r)$ y un conjunto ϵ-disperso $G \subset B(x,r)$ se tiene que

$$\#G \leq \left(\frac{r}{\epsilon}\right)^{\log_2 N}. \tag{1.1}$$

Son diversas las formas de los lemas de cubrimiento, es decir, la posibilidad de extraer subcubrimientos de cubrimientos por bolas para obtener el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood. Un aspecto interesante de los espacios casi-métricos débilmente homogéneos está en la posibilidad de extender en forma sencilla e irrestricta a este contexto abstracto ciertos lemas de cubrimiento debidos a N. Wiener y H. Whitney (Ver [**12**], [**1**]):

Lema de Wiener: *sea (X,d) un espacio casi-métrico débilmente homogéneo. Sea $E \subset X$ un conjunto acotado y consideremos un cubrimiento de E por bolas $\{B(x,r_x) \,/\, x \in E\}$. Entonces existe un subconjunto a lo sumo numerable $I \subset E$ tal que*

a) $B(x,r_x) \cap B(y,r_y) = \emptyset$ para cada $x \neq y \in I$;
b) $E \subset \bigcup_{x \in I} B(x, 4\mathsf{k}\, r_x)$.

Lema de Whitney: *sea (X,d) un espacio casi-métrico débilmente homogéneo. Sea $E \subsetneq X$ un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una sucesión $\{(x_n,r_n)\}_n \subset E \times \mathbb{R}^+$ y constantes absolutas positivas y finitas C_1, C_2, M, $h > 1$ y D tales que*

a) $B(x_n,r_n) \subset E$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
b) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n,r_n)$;
c) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{B(x_n,r_n)}(x) \leq M$;
d) $B(x_n, h\, r_n) \cap (X - E) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
e) $C_1 r_n \leq d(B(x_n,r_n)\,,\, X - E) \leq C_2 r_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
f) para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in B(x_n, h\, r_n) \cap (X - E)$ tal que $B(x_n, 2\mathsf{k}\, r_n) \subset B(y_n, D r_n)$.

Espacios de Tipo Homogéneo. Siguiendo a [**12**] (ver también [**13**]) diremos que una terna (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo si (X,d) es un espacio casi-métrico y μ es una medida definida en una σ-álgebra $\mathcal{F}$ que contenga a las d-bolas con la siguiente *propiedad de duplicación* sobre bolas: existe una constante $A > 0$, denominada *constante de duplicación*, tal que

$$0 < \mu(B(x,2r)) \leq A\, \mu(B(x,r)) < \infty,$$

para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$. A veces diremos que un espacio de tipo homogéneo es un espacio casi-métrico con homogeneidad fuerte. El siguiente resultado (Ver [**13**]) justifica la denominación "homogeneidad fuerte": *sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo con constante de duplicación A. Sean $x_0 \in X$ y $R > 0$ fijos y consideremos un conjunto ϵ-disperso $E \subset B(x_0,R)$ para $0 < \epsilon < R$. Entonces existe $q \in \mathbb{N}$, que depende solamente de R, ϵ y k, tal que $\#E \leq A^q$. En particular, considerando $\epsilon = R/2$, vemos que todo* *espacio de tipo homogéneo (homogeneidad fuerte) es un espacio casi-métrico débilmente homogéneo (homogeneidad débil).* El problema inverso, es decir, si homogeneidad débil implica homogeneidad fuerte, es, en general, un problema abierto. No obstante, hay ciertos resultados positivos en tal dirección: *dado un espacio métrico (X,ρ) débilmente homogéneo existe una medida de Borel positiva en X que duplica si X es compacto (Ver* [**31**]*).* Relacionado con el problema anterior tenemos el siguiente resultado con la medida de Haar en grupos topológicos: *si $(X,d,+)$ es un grupo abeliano casi-métrico completo débilmente homogéneo tal que $(X,+)$ es un grupo topológico, entonces la medida de Haar resultante duplica* (Ver [**5**]).

Como consecuencia de que la homogeneidad fuerte implica la débil, los espacios de tipo homogéneo comparten todas las propiedades topológicas válidas para los espacios casi-métricos débilmente homogéneos.

En un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) la propiedad de duplicación de μ sobre bolas permite probar lo siguiente (Ver [**2**]): *X es acotado si y sólo si $\mu(X)<\infty$.*

Observemos que, en general, en un espacio de tipo homogéneo tener una sucesión de bolas con medida uniformemente acotada no implica que la sucesión de radios de las bolas sea acotada. Este hecho hace que debilitar la hipótesis de acotación en el Lema de Cubrimiento de Wiener no sea simple. En esta dirección, en [**2**] se prueba una variante del Lema de Wiener debilitando la hipótesis de acotación por la de medida finita: *sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea $\{B_i=B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ una familia de bolas de X tal que $E=\cup_{i\in I}B_i$ es de medida finita. Entonces existen una sucesión $\{B_j\}_{j\in J}$, con $J\subset I$ a lo sumo numerable, y una constante absoluta C tales que*

a) $B_p\cap B_q=\emptyset$ *para* $p\neq q\in J$;
b) $E\subset\bigcup_{j\in J}B(x_j,C\,r_j)$;
c) para cada $i\in I$ *existe* $j\in J$ *tal que* $B_i\subset B(x_j,C\,r_j)$.

A diferencia de la homogeneidad débil, la homogeneidad fuerte no es una propiedad hereditaria en el siguiente sentido: un subconjunto medible en un espacio de tipo homogéneo, con la medida y topología restringidas, no es, en general, un subespacio de tipo homogéneo. Más aún, tampoco es válido que las bolas de un espacio de tipo homogéneo sean subespacios de tipo homogéneo. Sin embargo (Ver [**24**]) se tiene el siguiente resultado que es de utilidad cuando el problema a estudiar es invariante por cambio de casi-métricas equivalentes: *sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Existe una casi-métrica d', equivalente a d, tal que las d'-bolas son subespacios de tipo homogéneo de (X,d,μ) y de (X,d',μ).*

Operadores Maximales. Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y denotemos con L^1_{loc} al conjunto de las funciones μ-medibles que son localmente integrables. Para $x\in X$ y $f\in L^1_{loc}$ consideramos el operador maximal centrado

$$(M_d^c f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B_d(x,r))} \int_{B_d(x,r)} f(y)\, d\mu(y),$$

y el operador maximal no-centrado

$$(M_d^{nc} f)(x) = \sup_{x \in B_d} \frac{1}{\mu(B_d)} \int_{B_d} f(y)\, d\mu(y).$$

Si ρ es una métrica en X tal que ρ^α es equivalente a d para algún $\alpha > 0$ se tiene que (Ver [**1**]) *M_ρ^c es semicontinua inferiormente y es de tipo débil $(1,1)$. Además, la duplicación de la medida y la equivalencia entre ρ^α y d muestran que los tres operadores maximales son equivalentes en el sentido de que existen constantes positivas absolutas K_1, K_2 y K_3 tales que*

$$K_1\, M_d^c \leq K_2\, M_d^{nc} \leq K_3\, M_\rho^{nc}. \tag{1.2}$$

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $f \in L^1_{loc}(X)$. Para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{D}_{d,f}(x) = \overline{\text{lím}}_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, d\mu(y).$$

Se dice que un punto $x \in X$ es un punto de Lebesgue de f si y sólo si $\mathcal{D}_{d,f}(x) = 0$. Todo punto de Lebesgue es un punto de diferenciación, es decir, si x es tal que $\mathcal{D}_{d,f}(x) = 0$ entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, d\mu = f(x).$$

Puesto que los lemas de cubrimiento de tipo Wiener permiten probar el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal, argumentando como en el caso de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, se puede probar que si las funciones continuas son densas en $L^1(\mu)$ entonces casi todo punto, con respecto a μ, es un punto de Lebesgue de cualquier función de $L^1_{loc}(\mu)$.

2. Lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch

En esta sección probaremos dos lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch en espacios casi-métricos débilmente homogéneos. El enunciado clásico de Besicovitch (Ver [**6**] y [**7**]) es el siguiente: *sea A un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Asignamos a cada $x \in A$ una bola cerrada euclídea $\overline{B}(x, r(x))$ de centro x y radio $r(x)$. Entonces existen constantes positivas θ_n y σ_n, que dependen solamente de la dimensión, y una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ tales que:*

I) *$A \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_k, r(x_k))$;*

II) *ningún punto de $\mathbb{R}^n$ está en más de θ_n bolas de la sucesión*

$$\{\overline{B}(x_k, r(x_k))\}_{k\in\mathbb{N}},$$

es decir

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\overline{B}(x_k, r(x_k))}(x) \leq \theta_n;$$

III) *la sucesión* $\{\overline{B}(x_k, r(x_k))\}_{k\in\mathbb{N}}$ *puede ser distribuida en* σ_n *familias de bolas disjuntas.*

Es sabido (Ver [**30**]) que el lema de cubrimiento de Besicovitch no siempre es válido en espacios de tipo homogéneo. Por otra parte, hay situaciones en las cuales se puede caracterizar la validez del lema de cubrimiento de Besicovitch. Un ejemplo de ello es (Ver [**4**]) donde se dan condiciones necesarias y suficientes para la validez del lema de cubrimiento de Besicovitch para familias de bolas parabólicas inducidas por una matriz cuadrada diagonalizable, es decir, bolas asociadas a métricas y casi-métricas dadas por dilataciones no-isotrópicas sobre $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, se pueden probar variantes del lema de Besicovitch para bolas en espacios casi-métricos débilmente homogéneos si, por ejemplo, se cubre por una subfamilia de bolas dilatadas y se estima el solapamiento de las bolas sin dilatar, ó, de manera equivalente, se cubre con una subfamilia de bolas sin dilatar y se estima el solapamiento de las bolas contraídas. El primer lema que presentamos ahora es una generalización a espacios casi-métricos con homogeneidad débil de un lema de cubrimiento de tipo Besicovitch probado en [**17**] en espacios de tipo homogéneo en el cual se cubre por bolas dilatadas y se estima el solapamiento de las bolas sin dilatar. Lo probaremos usando una idea de A. P. Calderón que consiste en clasificar las bolas del cubrimiento dado en familias con bolas de radios comparables y trabajar con estas familias y con bolas de distintas familias separadamente.

LEMA 1.1. *Sea* (X,d) *un espacio casi-métrico débilmente homogéneo. Consideremos una colección finita* $\{B_j = B(x_j, r_j)\}_{j=1}^t$ *de* d*-bolas y un número* $\delta \in (0,1)$*. Entonces existen una subcolección* $\{B_{j_i}\}_{i=1}^s$ *y una constante* $C > 0$*, que depende solamente de* k*, tales que*

a) $\bigcup_{j=1}^t B_j \subset \bigcup_{i=1}^s (\mathsf{k} + \delta) B_{j_i}$;

b) $\sum_{i=1}^s \chi_{B_{j_i}}(x) \leq C\, \delta^{-\log_2 N} \log_2(1/\delta)$,

donde $(\mathsf{k} + \delta) B_{j_i} = B(x_{j_i}, (\mathsf{k} + \delta) r_{j_i})$.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_t$. Denotemos por r_{j_1} a r_t. Sea $F_1 = \{r_j \ / \ B_j \not\subset (\mathsf{k} + \delta) B_{j_1}\}$. Si $F_1 = \emptyset$ el lema queda probado. En caso contrario sea $r_{j_1} = \sup F_1$. Habiendo elegido $r_{j_1}, \ldots, r_{j_{n-1}}$ sea

$$F_n = \{r_j \ / \ B_j \not\subset \bigcup_{i<n} (\mathsf{k} + \delta) B_{j_i}\}, \tag{1.3}$$

y

$$r_{j_n} = \sup F_n. \tag{1.4}$$

Dado que la colección de d-bolas es finita, existe $s \leq t$ tal que $F_{s+1} = \emptyset$. Entonces es claro que la subcolección $\{B_{j_i}\}_{i=0}^s$ cumple con a). Observemos que $r_{j_1} \geq r_{j_2} \geq \cdots \geq r_{j_s}$. Consideremos una subcolección arbitraria $\{B_p =$

$B(x_p, r_p)\}_{p=1}^h$ de $\{B_{j_i}\}_{i=1}^s$ tal que $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_h$. Sea $z_0 \in \bigcap_{p=1}^h B_p$, entonces, se tiene que existe $\nu > 0$ tal que

$$\sum_{p=1}^{h} \chi_{B_p}(z_0) = \sum_{m=0}^{\nu} \sum_{2^m r_h \,\leq\, r_p \,<\, 2^{m+1} r_h} \chi_{B_p}(z_0).$$

Afirmación: $2^\nu \delta \leq 2\mathsf{k}^2$.

Supongamos lo contrario, es decir, que $2^\nu \delta > 2\mathsf{k}^2$. Dado que $r_1 \geq 2^\nu r_h$ obtenemos que $r_1 \delta \geq 2^\nu r_h \delta > 2\mathsf{k}^2 r_h$, entonces si $y \in B(x_h, r_h)$ se tendría que

$$\begin{aligned} d(y, x_1) &\leq \mathsf{k}\left(\mathsf{k}\,(d(y, x_h) + d(x_h, z_0)) + d(z_0, x_1)\right) \\ &\leq \mathsf{k}\ (2\mathsf{k}\, r_h + r_1) \\ &= 2\mathsf{k}^2 r_h + \mathsf{k}\, r_1 \\ &< (\mathsf{k} + \delta) r_1. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad nos dice que $B(x_h, r_h) \subset (\mathsf{k} + \delta) B(x_1, r_1)$, lo cual contradice (1.3). Por lo tanto la Afirmación es cierta y esto implica que $\nu \leq \log_2\left(2\mathsf{k}^2 \delta^{-1}\right)$.

Sea n_m la totalidad de radios r_p que están en el intervalo $[2^m r_h\,, 2^{m+1} r_h)$. Para tal subcolección $\{B_{p_n}\}_{n=1}^{n_m}$ es válido que

$$d(x_i, x_j) > \frac{2^m r_h \delta}{\mathsf{k}} \quad \text{para } i \neq j,\ 1 \leq i,\ j \leq n_m,$$

pues en caso contrario tendríamos que, para $j > i$ y $z \in B_{p_j}$,

$$\begin{aligned} d(z, x_i) &\leq \mathsf{k}\,(d(z, x_j) + d(x_i, x_j)) \\ &\leq \mathsf{k}\left(r_{p_j} + \frac{2^m r_h \delta}{\mathsf{k}}\right) \\ &= \mathsf{k}\, r_{p_j} + 2^m r_h \delta \\ &\leq (\mathsf{k} + \delta) r_{p_j}, \end{aligned}$$

es decir que $B_{p_j} \subset (\mathsf{k} + \delta) B_{p_i}$ para $j > i$. Pero esto nuevamente contradice (1.3). Por otra parte, dado que $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{n_m} B_{p_n}$, se tiene

$$d(x_n, z_0) < r_{p_n} < 2^{m+1} r_h.$$

Entonces el conjunto $R_m = \{x_n \ / \ 2^m r_h \ \leq \ r_{p_n} \ < \ 2^{m+1} r_h\} \subset B(z_0, 2^{m+1} r_h)$ y es $2^m r_h \delta \mathsf{k}^{-1}$ - disperso, por lo tanto, debido a la homogeneidad débil de (X, d), obtenemos

$$\# R_m \leq \left(\frac{2\mathsf{k}}{\delta}\right)^{\log_2 N}.$$

Esto último implica que

$$\sum_{2^m r_h \leq r_p < 2^{m+1} r_h} \chi_{B_p}(z_0) = \sum_{n=1}^{n_m} \chi_{B_{p_n}}(z_0) \leq \#R_m \leq \left(\frac{2\mathsf{k}}{\delta}\right)^{\log_2 N},$$

con lo que queda probada la parte b) pues

$$\sum_{p=1}^{h} \chi_{B_p}(z_0) \leq \sum_{m=0}^{\nu} \#R_m \leq \left(\frac{2\mathsf{k}}{\delta}\right)^{\log_2 N} (\nu+1) \leq \left(\frac{2\mathsf{k}}{\delta}\right)^{\log_2 N} \log_2\left(\frac{4\mathsf{k}^2}{\delta}\right).$$

□

Veremos ahora que se puede mejorar la cota para el solapamiento de las bolas de un cubrimiento si en lugar de cubrir a la totalidad de las bolas consideradas cubrimos al conjunto de los centros de las bolas.

A diferencia del lema anterior, en este caso cubriremos con las bolas originales y estimaremos el solapamiento de las bolas contraidas. La formulación de esta variante del lema de Besicovitch fue probada en [**10**] para el caso de ciertos conjuntos convexos asociados a las soluciones de la linealización de la ecuación de Monge-Ampère.

LEMA 1.2. *Sean (X,d) un espacio casi-métrico débilmente homogéneo y $A \subset X$ un conjunto acotado. Supongamos que una bola $B(x,t)$ es dada para cada $x \in A$ con $t \leq M < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{B(x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{B(x,t)\}_{x\in A}$ tal que para todo $\epsilon > 0$*

a) $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,t_n)$;
b) si $1/2 \leq \epsilon < 1$, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{B_n^\epsilon}(x) \leq N$;
c) si $0 < \epsilon < 1/2$, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{B_n^\epsilon}(x) \leq 4N\log(1/\epsilon)$,

donde $B_n^\epsilon = B(x_n, \mathsf{k}^{-1}(1-\epsilon)t_n)$ y N es la constante de homogeneidad débil de (X,d).

DEMOSTRACIÓN. Sea F el conjunto de las bolas consideradas y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $M = \sup\{t \,/\, B(x,t) \in F\}$. Sea

$$F_0 = \{B(x,t) \,/\, M/2 < t \leq M\} \cap F,$$

y

$$A_0 = \{x \,/\, B(x,t) \in F_0\}.$$

Elijamos una bola $B(x_1^0,t_1^0)$ cualquiera en F_0. Entonces el conjunto $A_0 - B(x_1^0,t_1^0)$ es vacío o no. En el primer caso se detiene el proceso. Si se da el segundo caso sea

$$R_2^0 = \{t \ / \ B(x,t) \in F_0, \ x \in A_0 - B(x_1^0, t_1^0)\}.$$

Elegimos $t_2^0 \in R_2^0$ y consideremos la bola $B(x_2^0, t_2^0)$ para algún $x_2^0 \in A_0 - B(x_1^0, t_1^0)$. Entonces

$$x_2^0 \notin B(x_1^0, t_1^0),$$

y

$$M \geq t_1^0, t_2^0 > M/2.$$

Se tiene ahora que el conjunto $A_0 - \big(B(x_1^0, t_1^0) \cup B(x_2^0, t_2^0)\big)$ es vacío o no. Si se cumple el segundo caso, procedemos como en la etapa anterior. Siguiendo de esta manera obtenemos una familia de bolas $F_0^* = \{B(x_n^0, t_n^0)\}_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, tal que

I) $x_j^0 \in A_0 - \cup_{i<j} B(x_i^0, t_i^0)$,
II) $M > t_n^0 \geq M/2$ para todo n.

En general, una vez construida la familia de bolas F_{k-1}^* construimos la familia F_k^* considerando los conjuntos

$$F_k = \{B(x,t) \ / \ (M/2^{k+1}) < t \leq (M/2^k)\} \cap F,$$

y

$$A_k = \{x \in A \ / \ B(x,t) \in F_k \quad \text{y} \quad x \notin \cup_{i<k} \cup_{n=1}^{\infty} B(x_n^i, t_n^i)\}.$$

De esta manera, en la etapa k-ésima obtenemos una familia de bolas $F_k^* = \{B(x_n^k, t_n^k)\}_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, tal que

I) $x_j^k \in A_k - \cup_{i<j} B(x_i^k, t_i^k)$,
II) $(M/2^k) \geq t_n^k > (M/2^{k+1})$ para todo n,
III) $x_n^k \notin \cup_{p<k} \cup_{j=1}^{\infty} B(x_j^p, t_j^p)$ para todo n.

Veamos que la familia $\{F_k^*\}_{k \geq 1}$ es la que cumple con lo requerido. Probaremos primero que cada F_k^* tiene una cantidad finita de bolas. Esto es equivalente a probar que el conjunto de los centros de las bolas $C_k = \{x_n^k\}_{n \in I}$ es finito. En efecto, dado que A es acotado existen $y \in A$ y $R > 0$ tales que $C_k \subset B(y, R)$. Por i) y ii) anterior se tiene, para $i < j$, que $d(x_j^k, x_i^k) \geq t_i^k > (M/2^{k+1})$, es decir, C_k es un conjunto $M/2^{k+1}$- disperso en $B(y, R)$.

Puesto que cada conjunto C_k es finito, se tiene que cada conjunto A_k está cubierto por las bolas de la familia F_k^*. Dado que $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ queda probado el inciso a) del lema.

Para probar los incisos b) y c) notemos primero que en cada F_k^* hay a lo sumo N (donde N es la constante de homogeneidad del espacio) bolas que se intersecan mutuamente: sea $z \in \bigcap_{i=1}^{q} B(x_{n_i}^k, t_{n_i}^k)$. Entonces si $n_i < n_j$, se tiene que $x_{n_j}^k \notin B(x_{n_i}^k, t_{n_i}^k)$, luego

$$d(x_{n_j}^k, x_{n_i}^k) \geq t_{n_i}^k > \frac{M}{2^{k+1}}.$$

Ahora bien

$$d(x_{n_i}^k, z) < t_{n_i}^k < \frac{M}{2^k},$$

para todo $1 \leq i \leq q$, por lo tanto, tenemos que el conjunto $\{x_{n_i}^k\}_{i=1}^q$ es $(M/2^{k+1})$- disperso en la d-bola $B(z,(M/2^k))$. Esto quiere decir que $q \leq N$.

Estimaremos ahora el solapamiento de las bolas $B_n^{\epsilon,k} = B(x_n^k, \mathsf{k}^{-1}(1-\epsilon)t_n^k)$ de distintas etapas. Sean q y p enteros no negativos tales que $q < p$ y consideremos

$$B_k^\epsilon = B(x_{n_k}^k, \mathsf{k}^{-1}(1-\epsilon)t_{n_k}^k) \qquad \text{para } k = q, p. \tag{1.5}$$

Por simplicidad escribiremos

$$x_{n_k}^k = x_k \quad \text{y} \quad t_{n_k}^k = t_k, \quad k = q, p.$$

Por construcción, de ii) y iii) anteriores, tenemos que $t_p < t_q$ y que $x_p \notin B(x_q, t_q)$, por lo tanto

$$d(x_p, x_q) \geq t_q. \tag{1.6}$$

Además, es claro que si $B_q^\epsilon \cap B_p^\epsilon \neq \emptyset$ entonces

$$d(x_p, x_q) < (1-\epsilon)t_p + (1-\epsilon)t_q. \tag{1.7}$$

Afirmación 1*: si* $1/2 \leq \epsilon < 1$ *entonces* $B_q^\epsilon \cap B_p^\epsilon = \emptyset$.

Supongamos lo contrario. Entonces, teniendo en cuenta que $t_p < t_q$ y que $1/2 \leq \epsilon < 1$, de (1.7) vemos que $d(x_p, x_q) < t_q$ lo cual contradice (1.6). Por lo tanto, para $1/2 \leq \epsilon < 1$, la bolas pertenecientes a diferentes etapas son disjuntas, con lo cual queda probado b).

Afirmación 2*: si* $B_q^\epsilon \cap B_p^\epsilon \neq \emptyset$ *entonces* $t_q < \epsilon^{-1}(1-\epsilon)t_p$.

Razonamos nuevamente por contradicción. Si fuese $t_q \geq \epsilon^{-1}(1-\epsilon)t_p$, de (1.7) vemos que

$$d(x_p, x_q) < \epsilon t_q + (1-\epsilon)t_q = t_q,$$

lo cual contradice (1.6).

Entonces, como consecuencia de la Afirmación 2, tenemos que

$$2^{p-q-1} = \frac{2^p}{M}\frac{M}{2^{1+q}} \leq \frac{t_q}{t_p} < \frac{1-\epsilon}{\epsilon},$$

es decir

$$0 < p - q \leq \log_2\left(\frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon}\right), \tag{1.8}$$

siempre que $B_q^\epsilon \cap B_p^\epsilon \neq \emptyset$, para cualesquiera $q < p$. Dado que cualquier entero $p > q$ es de la forma $q + h$, con h entero no negativo, de (1.8) vemos que hay a lo sumo $1 + \log_2\left(\frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon}\right)$ bolas pertenecientes a etapas distintas que pueden intersecarse.

Por otra parte, si ponemos $\beta = 4\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$, tenemos

$$1 + \log_2\left(\frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon}\right) \leq \beta,$$

y así

$$\begin{aligned}\sum_{k,n} \chi_{B_n^{\epsilon,k}}(x) &= \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{F_{k_j}^*} \chi_{B_n^{\epsilon,k_j}}(x) \\ &\leq N\beta \\ &= 4N \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right),\end{aligned}$$

con lo cual queda probado c). □

Ahora probaremos un resultado similar al del lema anterior pero estimaremos el solapamiento de bolas contraidas por constantes que dependen de las constantes de equivalencia de una casi-métrica con potencias de una métrica.

COROLARIO 1.3. *Sean (X, d) un espacio casi-métrico débilmente homogéneo, $A \subset X$ un conjunto acotado y ρ una métrica en X tal que ρ^α sea (c_1, c_2)-equivalente a d para algún $\alpha \geq 1$. Sea $M > 0$, N la constante de homogeneidad del espacio y supongamos que una d-bola $B(x, t)$ es dada para cada $x \in A$ con $t \leq M$. Entonces existe una sucesión $\{B(x_n, t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{B(x, t)\}_{x\in A}$ tal que para todo $0 < \epsilon < 1$*

1) $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, t_n)$;
2) si $1/2 \leq \epsilon < 1$, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{B_n^\epsilon}(x) \leq N$;
3) si $0 < \epsilon < 1/2$, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{B_n^\epsilon}(x) \leq 4\alpha N \log(1/\epsilon)$,

donde $B_n^\epsilon = B(x_n, c_1c_2^{-1}(1-\epsilon)^\alpha t_n)$. Notemos que, en el caso que d fuese un múltiplo de una potencia de una métrica, tendriamos que $B_n^\epsilon = B(x_n, (1-\epsilon)^\alpha t_n)$.

DEMOSTRACIÓN. El proceso de selección es el mismo que el que se hizo en el Lema 1.2. Entonces, obtenemos una sucesión de familias finitas de d-bolas $\{F_k^*\}_{k\geq 1} = \{B_j^k\}_{j=1}^{n_k}$ con todas las propiedades probadas en el Lema 1.2. Por lo tanto queda probado 1) y lo único que resta probar es la estimación del solapamiento de las d-bolas $B_n^{\epsilon,k} = B(x_n^k, c_1c_2^{-1}(1-\epsilon)^\alpha t_n^k)$ de distintas etapas. Consideremos dos enteros no negativos $q < p$ y

$$B^{\epsilon,k} = B(x_{n_k}^k, c_1c_2^{-1}(1-\epsilon)^\alpha t_{n_k}^k) \qquad \text{para } k = q, p. \tag{1.9}$$

Similar a la prueba de los incisos b) y c) del lema anterior, para probar 2) y 3) basta con probar la validez de las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1′: si $1/2 \leq \epsilon < 1$ entonces $B^{\epsilon,q} \cap B^{\epsilon,p} = \emptyset$.

Afirmación 2′: si $B^{\epsilon,q} \cap B^{\epsilon,p} \neq \emptyset$ entonces $t_q < \epsilon^{-\alpha}(1-\epsilon)^\alpha t_p$.

Antes de probar las afirmaciones anteriores notemos que, como consecuencia de la equivalencia entre d y ρ^α tenemos que

$$B^{\epsilon,k} \subset B_\rho^{\epsilon,k}, \tag{1.10}$$

donde $B_\rho^{\epsilon,k} = B_\rho(x_{n_k}^k, (1-\epsilon)(t_{n_k}^k/c_2)^{1/\alpha})$. Además, denotando con $x_{n_p}^p$ a x_p y con $t_{n_p}^p$ a t_p, vemos que, por construcción, $x_p \notin B(x_q, t_q)$ y esto implica que

$$\rho(x_p, x_q) \geq (t_q/c_2)^{1/\alpha}. \tag{1.11}$$

Probemos ahora la Afirmación $1'$. Supongamos que no vale, entonces, de (1.10) vemos que $B_\rho^{\epsilon,q} \cap B_\rho^{\epsilon,p} \neq \emptyset$, luego, dado que $1/2 \leq \epsilon < 1$ y $t_p < t_q$ obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(x_p, x_q) &< (1-\epsilon)(t_p/c_2)^{1/\alpha} + (1-\epsilon)(t_q/c_2)^{1/\alpha} \\ &\leq (t_q/c_2)^{1/\alpha}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

lo cual contradice (1.11). Para probar la Afirmación $2'$ razonamos nuevamente por contradicción. Si fuese $t_q \geq \epsilon^{-\alpha}(1-\epsilon)^\alpha t_p$ tendriamos que $(1-\epsilon)(t_p/c_2)^{1/\alpha} \leq \epsilon(t_q/c_2)^{1/\alpha}$, lo cual, junto con la hipótesis y (1.10), implican la validez de (1.12) que es un absurdo. □

3. Descomposición de tipo Calderón-Zygmund

Siguiendo los lineamientos dados en [**2**] probamos ahora una descomposición de tipo Calderón-Zygmund de espacios de tipo homogéneo sin la hipótesis adicional de que las bolas abiertas sean conjuntos abiertos.

Teorema 1.4. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y f una función integrable no negativa. Para todo $\lambda > 0$ tal que $\frac{1}{\mu(X)} \int_X f \leq \lambda$ existe una sucesión de d-bolas $\{B_i\}_{i \in I}$, disjuntas dos a dos, tal que*

a) $\frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} f > \lambda \geq \frac{1}{\mu(\widetilde{B}_i)} \int_{\widetilde{B}_i} f$ para todo $i \in I$;

b) Para todo $x \in X - \bigcup_{i \in I} \widetilde{B}_i$ y para toda d-bola B centrada en x vale que $\frac{1}{\mu(B)} \int_B f \leq \lambda$,

donde $\widetilde{B}_i$ denota a una d-bola con el mismo centro que B_i pero con el radio dilatado por la constante $C > 1$ de la variante del Lema de Wiener enunciada en la Sección 1.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{O} = \{x \in X \ / \ \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f > \lambda \quad \text{para algún } r > 0\}.$$

Si $\mathcal{O} = \emptyset$ entonces $b)$ vale para todo $x \in X$. Supongamos entonces que $\mathcal{O} \neq \emptyset$, luego, para cada $x \in \mathcal{O}$, el conjunto

$$R(x) = \{r > 0 \ / \ \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f > \lambda\}$$

es no vacío.

Afirmación: $R(x)$ es acotado para cada $x \in \mathcal{O}$.

Es claro la validez de la Afirmación si X es acotado pues por hipótesis se tiene que $\frac{1}{\mu(X)}\int_X f \leq \lambda$. Supongamos que X no es acotado. Como consecuencia de la integrabilidad de f tenemos que

$$\mu(B(x,r)) < \frac{\|f\|_1}{\lambda}, \tag{1.13}$$

para cada $x \in \mathcal{O}$, pues

$$0 < \lambda < \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f \leq \frac{\|f\|_1}{\mu(B(x,r))}.$$

Luego, si $R(x)$ no fuera acotado, ya que $\mu(X) = \infty$, podriamos elegir $r \in R(x)$ lo suficientemente grande para que $\mu(B(x,r)) > \lambda^{-1}\|f\|_1$ lo cual contradice a (1.13).

Sea $x \in \mathcal{O}$. Entonces existe un $r_x \in R(x)$ tal que

$$\frac{1}{\mu(\widetilde{B}(x,r_x))}\int_{\widetilde{B}(x,r_x)} f \leq \lambda. \tag{1.14}$$

Sea R el conjunto de tales radios. Dado que existe una casi-métrica d' que es (C_1, C_2)-equivalente a d tal que las d'-bolas son abiertas, tenemos que para cada $B(x,r_x)$, con $r_x \in R$, existe una d'-bola abierta $B'(x, C_2^{-1}r_x) \subset B(x,r_x)$. Luego $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}' = \bigcup_{r_x \in R} B'(x, C_2^{-1}r_x)$. Como (X,d) satisface el segundo axioma de numerabilidad y $\mathcal{B}'$ es un cubrimiento por abiertos de $\mathcal{O}$, existe una sucesión $\{r_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en R tal que $\mathcal{O} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B'(x_n, \beta^{-1}r_{x_n})$. Luego $\mathcal{O}$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de d-bolas, es decir

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_{x_n}).$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es medible y además como cada $x_n \in \mathcal{O}$ tenemos que $\mathcal{B} \subset \{x \in X \ / \ M_d^{nc}(f)(x) > \lambda\}$ (donde M_d^{nc} es el operador maximal no centrado). Como tal operador es de tipo débil $(1,1)$ se deduce que $\mu(\mathcal{B}) < \infty$.

Se tiene entonces que $\mathcal{B}$ es de medida finita y contiene a $\mathcal{O}$. Podemos aplicar la variante del Lema de Wiener enunciado en la Sección 1 y obtenemos así una sucesión de d-bolas $\{B_i = B(x_{n_i}, r_{x_{n_i}})\}_{i\in\mathbb{N}}$, disjunta dos a dos, tal que $\mathcal{B} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_i$. Es claro que esta sucesión de d-bolas cumple lo pedido en *a*) pues $x_{n_i} \in \mathcal{O}$, $r_{x_{n_i}} \in R$ y vale (1.14) para cada $r_{x_{n_i}}$. Para ver que también vale *b*) observemos que $\mathcal{O} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_i$, por lo tanto si $x \in X - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_i$ tenemos que $x \notin \mathcal{O}$, luego para toda d-bola B centrada en x se debe tener que

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B f \leq \lambda.$$

□

Notemos que si en el teorema precedente f es la función caraterística de un conjunto medible E obtenemos una estimación para la densidad media $\frac{\mu(E\cap B)}{\mu(B)}$ de E en cada bola del cubrimiento. Un resultado más preciso y útil para los propósitos de los Capítulos 3 y 4 puede obtenerse en una clase especial de espacios de tipo homogéneo para conjuntos abiertos y acotados. En el contexto analítico de la linealización de la ecuación de Monge-Ampère en $\mathbb{R}^n$, este resultado fue probado por Caffarelli y Gutiérrez (Ver [**10**] y [**11**]) para el caso de los conjuntos de nivel, denominados *secciones*, de la función convexa subyacente.

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Para cada $x \in X$, arbitrario pero fijo, consideremos la aplicación

$$t \mapsto \mu(B(x,t)), \tag{1.15}$$

definida en $\mathbb{R}^+$.

DEFINICIÓN: *llamaremos $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos a los espacios de tipo homogéneo (X, d, μ) tales que para cada $x \in X$, la aplicación definida en (1.15) es continua.*

Observemos que si $E \subset X$ es un conjunto abierto, entonces, para cada $x \in X$ si la aplicación (1.15) es continua la función $\phi_{E}(t) = \mu(E \cap B(x,t))$ también es continua pues, para $r < t$ se tiene que $E \cap B(x,t) - E \cap B(x,r) \subset B(x,t) - B(x,r)$.

Diremos que una constante es *geométrica* si depende solamente de k y/o de la constante de duplicación.

La prueba del teorema que presentamos a continuación sigue algunas ideas dadas en [**20**].

TEOREMA 1.5. *Sean (X, d, μ) un $\mathfrak{C}$-espacio homogéneo no acotado, $E \subset X$ un conjunto abierto y acotado y $0 < \delta < 1$ fijo. Entonces existen una sucesión $\{(x_n, t_n)\}_{n\in I} \subset E \times \mathbb{R}^+$, $I \subset \mathbb{N}$, y una constante $0 < C(\delta) < 1$, que depende solamente de δ y constantes geométricas, tales que*

a) $E \subset \bigcup_{n\in I} B(x_n, t_n)$,
b) $\mu(E \cap B(x, t_n)) = \delta\, \mu(B(x, t_n))$ *para todo* $n \in I$,
c) $\mu(E) \leq C(\delta)\, \mu\big(\bigcup_{n\in I} B(x_n, t_n)\big)$.

DEMOSTRACIÓN. Para E y $x \in X$ consideremos la función

$$\phi_{E}^{x}(t) = \frac{\mu(E \cap B(x,t))}{\mu(B(x,t))}.$$

Ya que estamos en un $\mathfrak{C}$-espacio homogéneo, tenemos que $\phi_{E}^{x}(t)$ es continua. Por otra parte, es claro que $\phi_{E}^{x}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ ya que $X = \bigcup_{t>0} B(x,t)$. Dado que E es abierto, para cada $x \in E$ existe t_0 tal que para todo $t < t_0$ la bola $B(x,t) \subset E$, por lo tanto, vemos también que $\phi_{E}^{x}(t) \to 1$ cuando $t \to 0$. Luego, para cada $x \in X$, la continuidad de la función $\phi_{E}^{x}(t)$, asegura, para $0 < \delta < 1$, la existencia de un t_x tal que

$$\phi_{E}^{x}(t_x) = \delta.$$

Veamos ahora que $\sup_{x\in E}\{t_x\} < \infty$ de manera que podamos usar el lema de cubrimiento 1.2: supongamos que $\sup_{x\in E}\{t_x\} = \infty$ y veamos que esto conduce a un absurdo. Dado que E es acotado existen $M > 0$ y $z_0 \in E$ tales que $E \subset B(z_0, M)$. Para $r > 0$ consideremos la bola $B(z_0, r)$. Luego, dado $z \in B(z_0, r)$, se tiene que para todo $x \in E$

$$d(z,x) \leq \mathsf{k}\,\big(d(z,z_0) + d(z_0,x)\big) \leq \mathsf{k}\,(r+M).$$

Por lo supuesto, existe $t_x > \mathsf{k}\,(r+M)$; entonces, dado cualquier $r > 0$

$$B(z_0, r) \subset B(x, t_x) \quad \text{para algún } x \in E. \tag{1.16}$$

Como X es no acotado se tiene que $\mu(B(z_0,r)) \to \infty$ cuando $r \to \infty$. De (1.16) vemos que $\sup_{x\in E} \mu(B(x,t_x)) = \infty$, pero esto implica que

$$0 < \delta = \phi_{E}^{x}(t_x) \leq \frac{\mu(E)}{\mu(B(x,t_x))} \to 0,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto $\sup_{x\in E}\{t_x\} < \infty$. Entonces el conjunto

$$\mathcal{B} = \{B(x,t_x) \; / \; x \in E\}$$

es un cubrimiento de E que está en las condiciones del Lema 1.2. Por el inciso a) del mencionado lema podemos asegurar que existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in I} = \{B(x_n, t_{x_n})\}_{n\in I} \subset \mathcal{B}$, $I \subset \mathbb{N}$, tal que

$$E \subset \bigcup_{n\in I} B_n,$$

y además, como cada $B_n \in \mathcal{B}$, vemos que quedan probados los incisos a) y b).

Veamos la parte c): sea $A_0 = \cup_{n\in I} B_n$. Como E es un conjunto acotado y la sucesión de los radios de B_n está acotada, tenemos que A_0 es un conjunto medible y acotado. Entonces $\mu(A_0) < \infty$, por lo tanto, podemos aplicar la variante del Lema de Wiener enunciada en la Sección 1, y obtenemos así una subsucesión de bolas $\{B_{n_j}\}_{j\in J} \subset \{B_n\}_{n\in I}$, disjuntas dos a dos, tal que

$$A_0 \subset \cup_{j\in J} \widetilde{B}_{n_j}, \tag{1.17}$$

donde $\widetilde{B}_{n_j}$ denota a la bola con el mismo centro que B_{n_j} pero con el radio dilatado por una constante geométrica $C > 0$. De (1.17) y por la duplicación de μ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(A_0) &\leq \sum_{j\in J} \mu(\widetilde{B}_{n_j}) \\ &\leq C^* \sum_{j\in J} \mu(B_{n_j}), \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde C^* es una constante positiva que depende de C y de la constante A de duplicación. Por otra parte

$$B_{n_j} = B_{n_j} \cap A_0 = B_{n_j} \cap ((A_0 - E) \cup E),$$

y teniendo en cuenta que vale b),

$$\begin{aligned} \mu(B_{n_j}) &= \mu\big(B_{n_j} \cap (A_0 - E)\big) + \mu\big(B_{n_j} \cap E\big) \\ &= \mu\big(B_{n_j} \cap (A_0 - E)\big) + \delta\mu(B_{n_j}), \end{aligned}$$

entonces

$$\mu\big(B_{n_j} \cap (A_0 - E)\big) = (1-\delta)\mu(B_{n_j}).$$

De esta última igualdad y recordando que las bolas B_{n_j} son disjuntas dos a dos vemos que

$$\begin{aligned}\mu(A_0 - E) &\geq \mu\big((\cup_j B_{n_j}) \cap (A_0 - E)\big)\\ &= \sum_{j\in J} \mu\big(B_{n_j} \cap (A_0 - E)\big)\\ &= (1-\delta)\sum_{j\in J}\mu(B_{n_j}).\end{aligned}$$

Esta última desigualdad y (1.18) implican la validez de c) ya que

$$\begin{aligned}\frac{\mu(A_0)}{\mu(E)} &= 1 + \frac{\mu(A_0 - E)}{\mu(E)}\\ &\geq 1 + (1-\delta)\frac{\sum_{j\in J}\mu(B_{n_j})}{\mu(A_0)}\\ &\geq 1 + (1-\delta)\frac{\sum_{j\in J}\mu(B_{n_j})}{C^*\sum_{j\in J}\mu(B_{n_j})}\\ &= 1 + \frac{1-\delta}{C^*}.\end{aligned}$$

□

Notemos que en el teorema anterior se probó que el supremo de los radios de las bolas de la descomposición es finito. Veremos a continuación que si la medida μ tiene una propiedad adicional, denominada *antiduplicación*, podemos establecer una cota efectiva para el supremo de tales radios.

Previamente damos la siguiente

DEFINICIÓN: sea (X, d, μ) un espacio casi-métrico y μ una medida en una σ-álgebra de subconjuntos de X que contiene a las bolas. Diremos que μ *antiduplica* si existe una constante $a > 1$ tal que

$$\mu(B(x, 2r)) \geq a\,\mu(B(x, r)),$$

para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$. Nos referiremos a la constante a de la desigualdad anterior como *constante de antiduplicación*.

LEMA 1.6. *Sea (X, d, μ) un espacio casi-métrico tal que la medida μ antiduplica con constante de antiduplicación a. Sean x, $y \in X$, $r > 0$ tales que $y \in B(x, r)$ y supongamos que existen $h > 0$ y $\delta \in (0, 1)$ tales que*

$$\mu\big(B(x, r) \cap B(y, h)\big) \geq \delta\mu(B(y, h)).$$

Entonces

$$h \leq \mathsf{k}\, 2^{\log_a(\delta^{-1}a^2)} r.$$

Demostración. Si $h \leq 2\mathsf{k}\,r$ no hay nada que probar. En caso contrario existe $j \geq 1$ tal que

$$2^{j+1}\mathsf{k}\,r \geq h > 2^j\mathsf{k}\,r, \tag{1.19}$$

por lo tanto, tenemos que $B(x, 2^{j-1}r) \subset B(y, h)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu(B(x,r)) &\geq \mu\big(B(x,r) \cap B(y,h)\big)\\ &\geq \delta\,\mu(B(y,h))\\ &\geq \delta\,\mu(B(x,2^{j-1}r))\\ &\geq \delta\,a^{j-1}\mu(B(x,r)).\end{aligned}$$

De esta última desigualdad vemos que

$$\delta^{-1} \geq a^{j-1},$$

luego

$$j + 1 \leq \log_a(\delta^{-1}a^2).$$

La conclusión se sigue de (1.19) □

A continuación enunciamos un resultado que será de utilidad en los Capítulos 3 y 4.

Lema 1.7. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. La medida μ antiduplica si las coronas son no vacías, es decir, si para todo $x \in X$, $r > s > 0$ se tiene que $B(x,r) - B(x,s) \neq \emptyset$.*

4. Aproximación por funciones continuas en $L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$

Diremos que $(X, \tau, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio topológico de medida si (X, τ) es un espacio topológico, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X tal que $\tau \subset \mathcal{F}$ y μ es una medida definida sobre $\mathcal{F}$. Se dice que un conjunto $A \in \mathcal{F}$ es *μ-regular* si

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(C) \mid C \subset A, \quad C \text{ cerrado}\}\\ &= \operatorname{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U, \quad U \text{ abierto}\}.\end{aligned}$$

La condición anterior es equivalente a la siguiente: para todo $\epsilon > 0$ existen conjuntos G, F, abierto y cerrado respectivamente, tales que

a) $F \subset A \subset G$;
b) $\mu(G - F) < \epsilon$.

Si cada $A \in \mathcal{F}$ es μ-regular, diremos que μ es regular.

En un espacio topológico se dice que un conjunto pertenece a la clase G_δ si tal conjunto se puede expresar como intersección numerable de abiertos. Un conjunto pertenece a la clase F_σ si tal conjunto se puede expresar como unión numerable de cerrados.

Siguiendo a [**19**] recordemos que un espacio topológico es *normal* si para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos A y B existen entornos abiertos V y V' de A y B respectivamente tales que $V \cap V' = \emptyset$. En tal caso diremos que V y V' separan a A y B. Un espacio topológico es T_1 si todo subconjunto finito es cerrado y es T_4 si es normal y T_1. Un espacio topológico es de *Lindelöf* si de todo cubrimiento por abiertos se puede extraer un subcubrimiento a lo sumo numerable.

Es sabido (Ver, por ejemplo, [**32**] y [**29**]) que si una medida es regular entonces las funciones continuas son densas en L^p para $1 \leq p < \infty$. Más aún (Ver [**1**]) se puede probar que en espacios casi-métricos con medida regular las funciones Hölder-α, para algún $0 < \alpha < 1$, son densas en L^p. En esta sección probaremos (Teorema 1.8) que en ciertos espacios topológicos de medida la densidad en L^p de las funciones continuas es válida si se tiene la siguiente condición de densidad:

Definición: *sea $(X, \tau, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio topológico de medida. Diremos que una subfamilia $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}$ es densa en $\mathcal{F}$ en medida si para todo $\epsilon > 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \infty$ existe un $E \in \mathcal{S}$ tal que*

$$\mu(A \triangle E) < \epsilon, \tag{1.20}$$

donde $\triangle$ es la diferencia simétrica de conjuntos. Notemos que la condición de densidad en medida es más débil que la condición de regularidad en medida. Enunciamos a continuación el citado teorema.

Teorema 1.8. *Sea $(X, \tau, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio topológico de medida tal que (X, τ) es T_4 y todo conjunto abierto de medida finita, considerado como subespacio topológico de X, es de Lindelöf. Supongamos que una familia de conjuntos abiertos de X es densa en $\mathcal{F}$ en medida. Entonces el conjunto $C_c(X)$ de las funciones continuas con soporte de medida finita definidas en X es denso en $L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$.*

Para demostrar el Teorema 1.8 necesitaremos probar una variante del siguiente resultado (Ver, por ejemplo, [**28**]): *en todo espacio métrico de medida finita cualquier medida de Borel es regular*. Damos a continuación el enunciado.

Teorema 1.9. *En un espacio topológico de medida $(X, \tau, \mathcal{F}, \mu)$ tal que (X, τ) es T_4 todo conjunto abierto de medida finita es μ-regular si tal abierto, considerado como subespacio topológico de X, es de Lindelöf.*

Para la demostración del Teorema 1.9 haremos uso de los siguientes resultados (Ver, por ejemplo, [**19**] y [**29**]).

Lema 1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico normal. Sean A_1 y A_2 dos subconjuntos cerrados y disjuntos. Entonces existen conjuntos abiertos de clase F_σ que separan a A_1 y a A_2. Más precisamente, si V_1 y V_2 son abiertos que separan a A_1 y a A_2 respectivamente, entonces existe abiertos disjuntos V_1' y V_2' de clase F_σ tales que $A_i \subset V_i' \subset V_i$ para $i = 1,2$.*

Demostración. Dado que (X, τ) es normal, existen conjuntos abiertos V_1 y V_2 tales que

$$A_1 \subset V_1\ ,\ A_2 \subset V_2 \quad \text{y} \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Sea $i = 1,2$. Tenemos entonces que A_i y $X - V_i$ son conjuntos cerrados y disjuntos. Luego, por el Lema de Urysohn en espacios normales, sabemos que existe una función continua $f_i : X \mapsto [0,1]$ tal que $f_i \equiv 1$ en A_i y $f_i \equiv 0$ en $X - V_i$.

Consideremos los conjuntos $C_i^n = \{x \ / \ f_i(x) \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que cada C_i^n es un conjunto cerrado tal que $A_i \subset C_i^n \subset V_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $V_i' = \{x \ / \ f_i(x) > 0\}$, entonces V_i' es abierto y esta en la clase F_σ pues $V_i' = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_i^n$. Es claro que $A_i \subset V_i' \subset V_i$ con lo cual se tiene que $V_1' \bigcap V_2' = \emptyset$. $\square$

Lema 1.11. *Sea $(X, \tau, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio topológico de medida y supongamos que (X, τ) es normal. Entonces todo conjunto cerrado contenido en un entorno de medida finita tiene un entorno abierto μ-regular de medida finita.*

Demostración. Sea K un conjunto cerrado y W un entorno de K de medida finita. Entonces K y $X - W$ son dos cerrados disjuntos. Por la normalidad, existen abiertos disjuntos W_1 y W_2 tales que $K \subset W_1$ y $X - W \subset W_2$. Luego $W_0 = W_1 \cap W$ es un entorno de K de medida finita disjunto de W_2. Por el Lema anterior sabemos que existen abiertos disjuntos V_1 y V_2 de clase F_σ tales que $K \subset V_1 \subset W_0$ y $X - W \subset V_2 \subset W_2$. Como W_0 es de medida finita, también lo es V_1. Por lo tanto, V_1 es μ-regular y es un entorno de K. $\square$

Demostración del Teorema 1.9. Sea E un subconjunto abierto de medida finita y $x \in E$. Dado que todo punto es cerrado el Lema 1.11 asegura la existencia de un entorno abierto μ-regular V_x de x tal que $V_x \subset E$. Se tiene entonces un cubrimiento por abiertos de E, luego, dado que (E, τ) es de Lindelöf, existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n}$. Pero cada V_{x_n} es μ-regular, por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado K_n tal que

$$\mu(V_{x_n} - K_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(E - K) &= \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} V_{x_n} - \cup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_{x_n} - K_n) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Notemos que el conjunto K está en la clase F_σ y es de medida finita, entonces, existe un conjunto cerrado K' tal que $\mu(K - K') < \frac{\epsilon}{2}$; luego

$$\mu(E - K') \leq \mu(E - K) + \mu(K - K') < \epsilon.$$

$\square$

Demostración del Teorema 1.8. Sea S el conjunto de las funciones simples medibles con soporte de medida finita. Sabemos que S es denso en $L^p(\mu)$, para $1 \leq p < \infty$. Sea S' el conjunto de las funciones características de conjuntos abiertos de medida finita. Sea $\chi_A \in S$, entonces, por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe un abierto V tal que $\mu(A \triangle V) < \epsilon$, luego

$$\begin{aligned}\|\chi_A - \chi_V\|_p^p &= \int_{A\cup V} |\chi_A - \chi_V|^p d\mu \\ &\leq \int_{A\triangle V} |\chi_A - \chi_V|^p d\mu \\ &\leq 2^p \mu(A\triangle V) \leq 2^p \epsilon,\end{aligned}$$

lo cual implica que S' es denso en $L^p(\mu)$. Esto quiere decir que para probar la densidad de $C_c(X)$ en $L^p(\mu)$ basta con aproximar en norma L^p a cualquier función de S' por funciones continuas.

Sea $\chi_E \in S'$ y sea $\epsilon > 0$. El Teorema 1.9 nos dice que existe un cerrado K tal que $K \subset E$ y $\mu(E-K) < \epsilon$. Dado que K y $X-E$ son conjuntos cerrados disjuntos y (X, τ) es normal, sabemos que existe una función continua ϕ definida en X tal que $\phi \equiv 1$ en K y $\phi \equiv 0$ en $X-E$. Entonces $\phi \in C_c(X)$ y

$$\begin{aligned}\|\chi_E - \phi\|_p^p &= \int_E |\chi_E - \phi|^p d\mu \\ &\leq \int_{E-K} |\chi_E - \phi|^p d\mu \\ &\leq 2^p \mu(E-K) < 2^p \epsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Dado que los espacios de tipo homogéneo son metrizables y separables tales espacios son espacios de Lindelöf, T_1 y regulares, por lo tanto, son T_4. Además, como la separabilidad se hereda en los subconjuntos abiertos, los conjuntos abiertos de un espacio de tipo homogéneo, considerados como subespacios en la casi-métrica, son de Lindelöf. Esto quiere decir que los espacios de tipo homogéneo están en las condiciones del Teorema 1.9. Por otra parte, como en los espacios de tipo homogéneo los conjuntos acotados tienen medida finita, es claro la validez del siguiente corolario al teorema anterior:

Corolario 1.12. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y supongamos que existe una familia de conjuntos abiertos que es densa en los medibles en el sentido de (1.20). Entonces las funciones continuas con soporte acotado son densas en $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$.*

5. El teorema de diferenciación de Lebesgue

En vista del Corolario 1.12, es válido el siguiente resultado.

TEOREMA 1.13. *Sean* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo,* $f \in L^1_{loc}(X)$ *y supongamos que existe una familia de abiertos que es densa en los medibles en el sentido de (1.20). Entonces, salvo un conjunto de medida* μ*-nula, todo punto de* X *es un punto de Lebesgue de* f*.*

CAPITULO 2

Regularidad de Funciones en Espacios Casi-Métricos

1. Introducción

Cuando se estudian las funciones armónicas, es decir, las soluciones de la ecuación de Laplace n-dimensional (Ver, por ejemplo, [**16**])

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} D_{ii} u = 0, \tag{2.1}$$

se prueba que en toda bola euclídea $B(x,r)$

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy, \tag{2.2}$$

donde $|\cdot|$ denota a la medida de Lebesgue n-dimensional. Una consecuencia de esta representación es la llamada Desigualdad de Harnack: *si u es una función armónica no negativa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe una constante $C > 1$, que depende solamente de la dimensión, tal que para toda bola euclídea $B(x,r)$, con $B(x,4r) \subset \Omega$, se tiene que*

$$\sup_{B(x,r)} u \le C \inf_{B(x,r)} u. \tag{2.3}$$

De Giorgi, Nash y Moser (Ver [**14**], [**27**] y [**25**] respectivamente) establecen claramente que la Desigualdad de Harnack es una estimación interior importante para el estudio de la regularidad Hölder de las soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales uniformemente elípticas en forma de divergencia, es decir, ecuaciones de la forma

$$Lu := \operatorname{div}(A \cdot \nabla u) = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) D_j u) = 0, \tag{2.4}$$

donde los coeficientes $a_{ij}(x)$ de la matriz A son medibles Lebesgue y cumplen la siguiente condición de elipticidad uniforme: existen constantes positivas λ y Λ tales que para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ vale

$$\lambda\, |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_1 \xi_j \le \Lambda\, |\xi|^2. \tag{2.5}$$

Estamos interesados en estudiar condiciones de naturaleza geométrica que garanticen la validez de (2.3) en familias de funciones en un contexto abstracto. En esta dirección, ciertas estimaciones probadas por Krylov y Safonov (Ver [**21**] y [**22**]) resultan ser adecuadas para trabajar en espacios casi-métricos, y en particular, en espacios de tipo homogéneo. Presentamos a continuación una de las estimaciones de Krylov y Safonov: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y consideremos un operador uniformemente elíptico en forma no-divergente

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_{ij} u,$$

donde la matriz de los coeficientes $A(x) = (a_{i,j}(x))_{n\times n}$ es regular. Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una supersolución regular de L, es decir, $Lu \leq 0$ en Ω en el sentido clásico. Sea $M \geq 2$ y supongamos que

1) $u \geq 1$ en $B(x_0, r)$;
2) $u \geq 0$ en $B(x_0, Mr)$;

donde $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ es tal que $B(x_0, Mr) \subset \Omega$.

Probaremos que existe una constante C positiva, que depende solamente de la elipticidad de L y del M dado, tal que

$$\inf_{B(x_0, Mr/2)} u \geq C. \tag{2.6}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r = 1$ y que $x_0 = 0$; entonces, para $p > 0$ a elegir

$$\begin{aligned}
L|x|^{-p} &= \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 |x|^{-p}}{\partial_{x_i} \partial_{x_j}} \\
&= (-p) \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial(|x|^{-p-2} x_i)}{\partial_{x_j}} \\
&= (-p) \sum_{i,j} a_{ij}(x) \left((-p-2)|x|^{-p-4} x_i x_j + |x|^{-p-2} \delta_{ij}\right) \\
&= (-p)|x|^{-p-4} \left(|x|^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x) \delta_{ij} - (p+2) \sum_{i,j} a_{ij}(x) x_i x_j \right).
\end{aligned}$$

De la condición de elipticidad de L se tiene que

$$\begin{aligned}
L|x|^{-p} &\geq (-p)|x|^{-p-4} \left(c(n)\lambda |x|^2 - (p+2)\Lambda |x|^2\right) \\
&= (-p)|x|^{-p-2} \left(c(n)\lambda - (p+2)\Lambda\right).
\end{aligned}$$

Luego, es claro que existe un $p = p(\lambda, \Lambda, n)$ tal que $|x|^{-p}$ es subsolución de L (es decir, $L|x|^{-p} \geq 0$) en un dominio que no contenga al origen, por ejemplo $B(0, M) - B(0, 1)$. Consideremos ahora la función $v(x) = |x|^{-p} - M^{-p}$. Por lo anterior, sabemos que v es subsolución de L en $B(0, M) - B(0, 1)$. Luego, como $Lv \geq Lu$ y $u \geq v$ en el borde de la corona $B(0, M) - B(0, 1)$, por el principio de comparación (Ver [**16**]), se tiene que $u \geq v$ en

$B(0, M) - B(0, 1)$. Entonces

$$\inf_{B(0,M/2)} u \geq M^{-p}(2^p - 1), \tag{2.7}$$

siempre que $u \geq 1$ en $B(0, 1)$ y $u \geq 0$ en $B(0, M)$. Obtenemos así la desigualdad (2.6).

Observemos que la familia de todas las super-soluciones de una ecuación diferencial contiene a las constantes, es cerrada bajo adición y tambien es cerrada bajo multiplicación por escalares no negativos. Entonces, una vez que el operador diferencial L está dado, la cota inferior para las super-soluciones de L obtenida en (2.7) depende solamente de M, de las constantes de elipticidad de L y de la dimensión, por lo tanto, la desigualdad (2.7) es válida para toda super-solución de L en toda bola euclídea donde se cumplan las hipótesis 1) y 2). La constante hallada en (2.7) es un ejemplo de lo que llamaremos *constante absoluta* con respecto a una familia dada de funciones. Lo que haremos ahora es formular las observaciones anteriores en el contexto de los espacios casi-métricos.

2. Definiciones

Sea (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto de X y denotemos con $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω.

DEFINICIÓN: diremos que un subconjunto $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ es un *cono funcional* en $\mathcal{H}$ si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

a) las constantes pertenecen a $\mathcal{E}$;
b) $u + v$ pertenece a $\mathcal{E}$ para todo par de funciones u, $v \in \mathcal{E}$;
c) $\alpha\, u \in \mathcal{E}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y para toda $u \in \mathcal{E}$.

Si en c) permitimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial con escalares en $\mathbb{R}$. En este caso diremos que $\mathcal{E}$ es un $\mathbb{R}$-*espacio funcional* en $\mathcal{H}$. Diremos que un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ es *localmente acotado* si para toda $u \in \mathcal{E}$ y para toda bola $B \subset \Omega$ se tiene que $\sup_B |u| < \infty$, es decir, si toda $u \in \mathcal{E}$ pertenece a L^∞_{loc}. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{L}^{loc}(\Omega)$.

Dado un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$, diremos que una constante es *absoluta con respecto a* $\mathcal{E}$, si es independiente de las funciones que conforman a $\mathcal{E}$ y de las bolas de la casi-métrica considerada. Cuando el contexto no sea ambiguo, hablaremos simplemente de constantes absolutas sin hacer referencia al cono ó $\mathbb{R}$-espacio funcional considerado. Dado un espacio casi-métrico (X, d), diremos que una constante es geométrica si depende solamente de la constante triangular de la casi-métrica d.

La siguiente definición está motivada por el interés de postular en el contexto abstracto de los espacios casi-métricos la estimación de Krylov y Safonov presentada anteriormente.

DEFINICIÓN: sean (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto de X, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω y $M > 0$.

Diremos que un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ tiene la propiedad $\mathbb{KS}_1$ si existe una constante absoluta $C > 0$, que puede depender de M, y una constante geométrica $c > 1$ tal que

$$u \geq C \quad \text{en } B(x, \frac{Mr}{c}),$$

para toda $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x, Mr) \subset \Omega$ tal que $u \geq 1$ en $B(x, r)$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C, c\big)$.

A continuación definiremos nuevas clases de conos funcionales que consideraremos en este capítulo y en los subsiguientes y que son de interés en el estudio de la regularidad Hölder de soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Definición: sean (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Un cono funcional $\mathcal{E} \in \mathbb{L}^{loc}(\Omega)$ tiene la *propiedad de oscilación* si existen una constante absoluta $0 < \theta < 1$ y una constante geométrica $c > 1$ tales que

$$\operatorname*{osc}_{B_r} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{B_{cr}} u,$$

para toda $u \in \mathcal{E}$ y para toda bola B_r, con $B_{cr} \subset \Omega$, donde $\operatorname{osc}_{B_r} u = \sup_{B_r} u - \inf_{B_r} u$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{O}\big(\Omega, \theta, c\big)$.

Definición: sean (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ pertenece a la clase de *Harnack* si existen una constante absoluta $1 < \Theta < \infty$ y una constante geométrica $c > 1$ tales que

$$\sup_{B_r} u \leq \Theta \inf_{B_r} u.$$

para toda $u \in \mathcal{E}$ no negativa en la bola $B_{cr} \subset \Omega$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, c\big)$.

Definición: sean (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto de X, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ pertenece a la clase de *De Giorgi* si existen constantes absolutas $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y una constante geométrica $c > 1$ tales que

$$|u(x) - u(y)| \leq \beta \left(\frac{d(x, y)}{r}\right)^{\alpha} \|u\|_{L^\infty(B_{cr})},$$

para toda $u \in \mathcal{E}$, para toda bola $B_{cr} \subset \Omega$ con x, $y \in B_r$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{G}\big(\Omega, \alpha, \beta, c\big)$.

3. Oscilación implica continuidad Hölder

Extenderemos al contexto de los espacios casi-métricos un resultado de Moser (Ver [**25**]) sobre continuidad Hölder local.

TEOREMA 2.1. *Sean (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Entonces $\mathbb{O}(\Omega, \theta, c) \subset \mathbb{G}(\Omega, \alpha, \beta, C)$ para $\alpha = -\log_c \theta$, $\beta = 2\theta^{-1}(2\mathsf{k})^{-\alpha}$ y $C = 3\mathsf{k}^2$. En particular, se tiene que si $\mathcal{E} \in \mathbb{O}(\Omega, \theta, c)$, entonces toda $u \in \mathcal{E}$ es localmente Hölder continua con exponente $\alpha = -\log_c \theta$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $u \in \mathcal{E}$, $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$. Por hipótesis tenemos que $\operatorname{osc}_{B_{r/c}} u \leq \theta \operatorname{osc}_{B_r} u$ para cualquier bola $B_r \subset \Omega$. Iterando esta desigualdad m veces obtenemos

$$\operatorname*{osc}_{B_{r/c^m}} u \leq \theta^m \operatorname*{osc}_{B_r} u,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Sean x, $y \in B(x_0, r)$ tales que $x \neq y$ y $B(x_0, 3\mathsf{k}^2 r) \subset \Omega$. Luego

$$d(x, y) < 2\mathsf{k}\, r,$$

y entonces existe un entero $m \geq 1$ tal que

$$\frac{2\mathsf{k}\, r}{c^m} < d(x, y) \leq \frac{2\mathsf{k}\, r}{c^{m-1}}.$$

Sea $a = 1/d(x, y)$, entonces $2a\mathsf{k}\, r \leq c^m$, es decir que $\log_c(2a\mathsf{k}\, r) \leq m$. Dado que $0 < \theta < 1$ se tiene que

$$m \log_c \theta \leq \log_c (2a\mathsf{k}\, r)^{\log_c \theta},$$

entonces

$$\theta^m \leq (2a\mathsf{k}\, r)^{\log_c \theta},$$

luego, teniendo en cuenta que $B(x, 2\mathsf{k}\, r) \subset B(x_0, 3\mathsf{k}^2 r) \subset \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \operatorname*{osc}_{B(x, \frac{2\mathsf{k}\, r}{c^{m-1}})} u \leq \theta^{m-1} \operatorname*{osc}_{B(x, 2\mathsf{k}\, r)} u \\ &\leq \theta^{-1} (2a\mathsf{k}\, r)^{\log_c \theta} \operatorname*{osc}_{B(x_0, 3\mathsf{k}^2 r)} u \\ &\leq \frac{2}{\theta\, (2\mathsf{k})^{\alpha}} \left(\frac{d(x, y)}{r} \right)^{\alpha} \|u\|_{L^\infty(B(x_0, 3\mathsf{k}^2 r))}, \end{aligned}$$

donde $\alpha = -\log_c \theta$.

□

4. Oscilación y desigualdad de Harnack en espacios casi-métricos

En esta sección probaremos un teorema donde se establecen relaciones entre oscilación, desigualdad de Harnack y la propiedad $\mathbb{KS}_1$. La prueba de la segunda parte del teorema sigue los lineamientos dados en [**8**] para el caso clásico de cubos en $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2.2. *Sean (X, d) un espacio casi-métrico, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω.*

a) Sea $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espacio funcional en $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{E} \in \mathbb{L}^{loc}(\Omega) \cap \mathbb{H}(\Omega, \Theta, c)$. Entonces $\mathcal{E} \in \mathbb{O}(\Omega, \theta, c)$ para $\theta = (\Theta - 1)(\Theta + 1)^{-1}$.

b) $\mathbb{H}(\Omega, \Theta, c) \subset \mathbb{KS}_1(\Omega, C, c)$ *para* $C = \Theta^{-1}$.

c) $\mathbb{O}(\Omega, \theta, c) \cap \mathbb{KS}_1(\Omega, C, \bar{c}) \subset \mathbb{H}(\Omega, \Theta, c')$ *para* $\Theta = \eta^{\sup\{\log_b(2\mathsf{k}\, c^m), 2\}}$ *y* $c' = (4\mathsf{k}^3(\bar{c}+1)+1)\mathsf{k}$*, donde* $\eta = (1+\sup\{2, C^{-1}\})$*,* $b = 2\mathsf{k}$*,* $m = 2\log_a \eta$ *y* $a = \theta^{-1}$.

Demostración. a) Rehacemos la prueba hecha en [**25**] por Moser: sea $u \in \mathcal{E}$. Sean $r > 0$ y $x \in \Omega$ tales que $B(x, cr) \subset \Omega$. Para todo $t > 0$ definimos

$$M_t = \sup_{B_t} u \quad \text{y} \quad m_t = \inf_{B_t} u$$

donde $B_t = B(x, t) \subset \Omega$. Dado que $\mathcal{E}$ es un $\mathbb{R}$-espacio funcional se tiene que las funciones $u - m_{cr}$ y $M_{cr} - u$ pertenecen a $\mathcal{E}$ y son no negativas en la bola $B(x, cr)$, entonces, por hipótesis, se tiene que

$$M_r - m_{cr} = \sup_{B_r}(u - m_{cr}) \leq \Theta \inf_{B_r}(u - m_{cr}) = \Theta\,(m_r - m_{cr}), \tag{2.8}$$

y

$$M_{cr} - m_r = \sup_{B_r}(M_{cr} - u) \leq \Theta \inf_{B_r}(M_{cr} - u) = \Theta\,(M_{cr} - M_r). \tag{2.9}$$

Sumando miembro a miembro (2.8) y (2.9) obtenemos

$$\operatorname*{osc}_{B_{cr}} u + \operatorname*{osc}_{B_r} u \leq \Theta\,(\operatorname*{osc}_{B_{cr}} u - \operatorname*{osc}_{B_r} u),$$

de donde vemos que

$$\operatorname*{osc}_{B_r} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{B_{cr}} u,$$

donde $\theta = \frac{\Theta-1}{\Theta+1} \in (0,1)$.

b) Sean $M > 0$ y $u \in \mathcal{E}$ tales que $u \geq 1$ en B_r y $u \geq 0$ en $B_{Mr} \subset \Omega$. Entonces $\sup_{B_{Mr/c}} u \geq 1$, luego, por hipótesis

$$\inf_{B_{Mr/c}} u \geq \Theta^{-1} \sup_{B_{Mr/c}} u \geq \Theta^{-1},$$

es decir

$$u \geq C \qquad \text{en } B_{Mr/c},$$

donde $C = \Theta^{-1}$. Notemos que la constante C hallada no depende de M.

Para demostrar c) necesitaremos los siguientes lemas auxiliares:

Lema 2.3. *Sea* $\mathcal{E}$ *un cono funcional en* $\mathcal{H}$ *tal que* $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1(\Omega, C, c)$*. Sea* $u \in \mathcal{E}$ *no negativa en* $B(x_0, (c+1)\mathsf{k}\, r) \subset \Omega$ *y supongamos que* $u(x_0) = 1$*. Entonces existe una constante absoluta* $\eta \geq 2$*, que depende de* C *y* c*, tal que*

$$\inf_{B(x, \frac{r}{(2\mathsf{k})^n})} u \leq \eta^n, \tag{2.10}$$

para todo $n \geq 1$ *y para todo* $x \in B(x_0, r)$.

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{E} \in \mathbb{O}(\Omega, \theta, c)$. Sea η la constante del Lema 2.3. Entonces existe una constante absoluta $\beta > 1$ tal que*

$$\operatorname*{osc}_{B_{\beta r}} u \geq \eta^2 \operatorname*{osc}_{B_r} u,$$

para toda $u \in \mathcal{E}$ y $B_{\beta r} \subset \Omega$.

Lema 2.5. *Sea $\mathcal{E} \in \mathbb{O}(\Omega, \theta, c) \cap \mathbb{KS}_1(\Omega, C, \overline{c})$. Sea $x_0 \in \Omega$ y $u \in \mathcal{E}$ tal que $u(x_0) = 1$ y sea $r > 0$ tal que u es no negativa en $B(x_0, (\overline{c}+1)\mathsf{k}\, r) \subset \Omega$. Entonces existe una constante absoluta $\Theta > 1$ tal que*

$$\sup_{B(x_0, \frac{r}{2\mathsf{k}})} u \leq \Theta.$$

Asumimos por el momento la validez del Lema 2.5 y demostraremos c). Tenemos que probar que existe una constante absoluta $1 < \Theta < \infty$ y una constante geométrica $\tau > 1$ tal que

$$\sup_{B(x,r)} u \leq \Theta \inf_{B(x,r)} u,$$

para toda u no negativa en $B(x, \tau r) \subset \Omega$.

Sea $x \in \Omega$ y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x, \tau r) \subset \Omega$, donde $\tau = \big(4\mathsf{k}^3(\overline{c} + 1) + 1\big)\mathsf{k}$. Dado $\epsilon > 0$ sea $v = u + \epsilon$. Entonces tenemos que $v > 0$ en $B(x, \tau r)$. Sean x_1 y $x_2 \in B(x, r)$, entonces $w = v/v(x_1) \in \mathcal{E}$, $w(x_1) = 1$ y $B(x, r) \subset B(x_1, 2\mathsf{k}\, r)$. Aplicamos el Lema 2.5 a w en $B(x_1, \tau_1 r)$ con $\tau_1 = 4\mathsf{k}^3(\overline{c} + 1)$. Se tiene entonces que existe una constante absoluta $\Theta > 1$ tal que

$$\sup_{B(x_1, 2\mathsf{k}\, r)} w \leq \Theta.$$

Por la definición de w tenemos que

$$\sup_{B(x_1, 2\mathsf{k}\, r)} v \leq \Theta\, v(x_1).$$

Pero $x_2 \in B(x, r) \subset B(x_1, 2\mathsf{k}\, r)$, y esto implica que

$$v(x_2) \leq \Theta\, v(x_1), \quad \text{para todo } x_1 \text{ y } x_2 \in B(x, r).$$

Entonces, teniendo en cuenta que $v = u + \epsilon$, obtenemos

$$\sup_{B(x,r)} (u + \epsilon) \leq \Theta \inf_{B(x,r)} (u + \epsilon),$$

y por la arbitrariedad de ϵ finalmente se tiene que

$$\sup_{B(x,r)} u \leq \Theta \inf_{B(x,r)} u.$$

□

Demostración del Lema 2.3. Probemos el lema por inducción. Sea $n = 1$ y supongamos que (2.10) no vale, es decir, supongamos que para toda constante $\eta \geq 2$ existe $x \in B(x_0, r)$ tal que

$$u > \eta, \quad \text{en } B(x, \frac{r}{2\mathsf{k}}).$$

Entonces $\eta^{-1}u > 1$ en $B(x, \frac{r}{2\mathsf{k}})$. Dado que $\eta^{-1}u \in \mathcal{E}$ y u es no negativa en $B(x, cr) \subset B(x_0, (c+1)\mathsf{k}\, r)$, por hipótesis, para $M = 2c\mathsf{k}$, se tiene que existe una constante absoluta $C > 0$, que puede depender de M, tal que

$$u \geq C\eta \qquad \text{en } B(x, r).$$

Elegiendo $\eta > \sup\{2, C^{-1}\}$ vemos que $u > 1$ en $B(x, r)$, pero esto es un absurdo pues $x_0 \in B(x, r)$ y $u(x_0) = 1$. Por lo tanto

$$\inf_{B(x, \frac{r}{2\mathsf{k}})} u \leq \eta, \tag{2.11}$$

para todo $x \in B(x_0, r)$.

Supongamos ahora que vale (2.10) para $n = m \geq 2$ y supongamos que existe $x \in B(x_0, r)$ tal que $u > \eta^{m+1}$ en $B(x, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{m+1}})$. Nuevamente, ya que u es no negativa en $B(x, \frac{cr}{(2\mathsf{k})^m}) \subset B(x_0, (c+1)\mathsf{k}\, r)$, por hipótesis, para $M = 2c\mathsf{k}$, vemos que

$$u > \eta^{m+1}C > \eta^m \quad \text{en } B(x, \frac{r}{(2\mathsf{k})^m}),$$

donde C es la misma constante hallada en el caso $n = 1$. Pero esto contradice la hipótesis inductiva. Por lo tanto

$$\inf_{B(x, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{m+1}})} u \leq \eta^{m+1},$$

para todo $x \in B(x_0, r)$. $\square$

Demostración del Lema 2.4. Sea $u \in \mathcal{E}$. Por hipótesis existen una constante absoluta $0 < \theta < 1$ y una constante geométrica $c > 1$ tales que $\operatorname{osc}_{B_r} u \leq \theta \operatorname{osc}_{B_{cr}} u$ con $B_{cr} \subset \Omega$. Sea η la constante absoluta del Lema 2.3, entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\theta^{-m} \geq \eta^2$. Iterando m veces la desigualdad de la oscilación obtenemos

$$\operatorname*{osc}_{B_r} u \leq \theta^m \operatorname*{osc}_{B_{c^m r}} u$$

luego

$$\operatorname*{osc}_{B_{c^m r}} u \geq \theta^{-m} \operatorname*{osc}_{B_r} u \geq \eta^2 \operatorname*{osc}_{B_r} u$$

Haciendo $\beta = c^m$ se tiene lo pedido pues m depende de θ y η que son constantes absolutas. $\square$

Demostración del Lema 2.5. Sea $u \in \mathcal{E}$ tal que $u \geq 0$ en $B(x_0, (\bar{c} + 1)\mathsf{k}\, r)$ con $u(x_0) = 1$. Dada la constante absoluta β del Lema 2.4, existe $n \geq 2$ tal que

$$\frac{\beta}{(2\mathsf{k})^{n-1}} \leq 1. \tag{2.12}$$

Observemos que la elección de n solo depende de constantes absolutas. Vamos a probar que el supremo de u en la bola $B(x_0, \frac{r}{2\mathsf{k}})$ está acotado por η^{n+2}, donde η es la constante del Lema 2.3 y n está dado por (2.12). Supongamos que existe $z_0 \in B(x_0, \frac{r}{2\mathsf{k}})$ tal que $u(z_0) \geq \eta^{n+2}$. Veremos que esa suposición permitirá probar la existencia de una sucesión $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $B(x_0,r)$ tal que $\lim_{n\to\infty} u(z_k) = +\infty$, lo cual es un absurdo pues u es continua en Ω (Teorema 2.1).

Por lo tanto, se debe tener que

$$u \leq \eta^{n+2},$$

en $B(x_0, \frac{r}{2\mathsf{k}})$, que es lo que se quería probar.

Supongamos entonces que existe $z_0 \in B(x_0, \frac{r}{2\mathsf{k}})$ tal que $u(z_0) \geq \eta^{n+2}$. Probaremos que existe una sucesión de puntos $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $B(x_0,r)$ tal que

$$u(z_k) \geq \eta^{n+k+2},$$

y

$$d(z_k, \Sigma) \geq \frac{r}{(2\mathsf{k})^{k+1}},$$

donde $\Sigma = \Omega - B(x_0,r)$.

Caso $k = 1$. Por lo supuesto, se tiene que, en particular, $z_0 \in B(x_0,r)$, luego, la parte ii) del Lema 2.3 nos dice que

$$\inf_{B(z_0, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{n+1}})} u \leq \eta^{n+1}.$$

Entonces

$$\operatorname*{osc}_{B(z_0, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{n+1}})} u \geq \eta^{n+2} - \eta^{n+1} \geq \eta^{n+1},$$

y por el Lema 2.4, se tiene que

$$\operatorname*{osc}_{B(z_0, \frac{\beta r}{(2\mathsf{k})^{n+1}})} u \geq \eta^2 \operatorname*{osc}_{B(z_0, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{n+1}})} u \geq \eta^{n+3}$$

Como u es no negativa en $B(z_0, \frac{\beta r}{(2\mathsf{k})^{n+1}})$, de la última desigualdad concluimos que existe un $z_1 \in B(z_0, \frac{\beta r}{(2\mathsf{k})^{n+1}})$ tal que $u(z_1) \geq \eta^{n+3}$. Sea $\Sigma = \Omega - B(x_0,r)$, entonces

$$\begin{aligned} r &\leq d(x_0,\Sigma) \\ &\leq \mathsf{k}\ (d(x_0,z_0) + d(z_0,\Sigma)) \\ &\leq \frac{r}{2} + \mathsf{k}\ d(z_0,\Sigma)), \end{aligned}$$

por lo tanto $d(z_0,\Sigma) \geq \frac{r}{2\mathsf{k}}$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{r}{2\mathsf{k}} &\leq \mathsf{k}\ (d(z_0,z_1) + d(z_1,\Sigma)) \\ &< \mathsf{k}\ (\frac{\beta r}{(2\mathsf{k})^{n+1}} + d(z_1,\Sigma)) \\ &\leq \frac{r}{4\mathsf{k}} + \mathsf{k}\ d(z_1,\Sigma), \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $d(z_1,\Sigma) \geq \frac{r}{(2\mathsf{k})^2}$. Esto último demuestra que $z_1 \in B(x_0,r)$ y queda probado el caso $k = 1$. Supongamos ahora que vale para $k = m$, es decir

H1) existe $z_m \in B(x_0, r)$ tal que $u(z_m) \geq \eta^{n+m+2}$.
H2) $d(z_m, \Sigma) \geq \frac{r}{(2\mathsf{k})^{m+1}}$.

Tenemos que probar que existe $z_{m+1} \in B(x_0, r)$ tal que $u(z_{m+1}) \geq \eta^{n+m+3}$ y que $d(z_{m+1}, \Sigma) \geq \frac{r}{(2\mathsf{k})^{m+2}}$.

Por la hipótesis inductiva H1) y por el Lema 2.3 se tiene que

$$\inf_{B(z_m, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{n+m+1}})} u \leq \eta^{n+m+1}.$$

Puesto que $u(z_m) \geq \eta^{n+m+2}$ entonces

$$\operatorname*{osc}_{B(z_m, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{n+m+1}})} u \geq \eta^{n+m+2} - \eta^{n+m+1} \geq \eta^{n+m+1},$$

luego, por el Lema 2.4, vemos que

$$\operatorname*{osc}_{B(z_m, \frac{r\beta}{(2\mathsf{k})^{n+m+1}})} u \geq \eta^2 \operatorname*{osc}_{B(z_m, \frac{r}{(2\mathsf{k})^{n+m+1}})} u \geq \eta^{n+m+3}.$$

Dado que u es no negativa en $B(z_m, \frac{r\beta}{(2\mathsf{k})^{n+m+1}})$, existe $z_{m+1} \in B(z_m, \frac{r\beta}{(2\mathsf{k})^{n+m+1}})$ tal que $u(z_{m+1}) \geq \eta^{n+m+3}$. Por otra parte, de la hipótesis inductiva H2), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{r}{(2\mathsf{k})^{m+1}} &\leq d(z_m, \Sigma) \\
&\leq \mathsf{k}\,(d(z_m, z_{m+1}) + d(z_{m+1}, \Sigma)) \\
&< \mathsf{k}\,(\frac{r\beta}{(2\mathsf{k})^{n+m+1}} + d(z_{m+1}, \Sigma)) \\
&\leq \frac{r}{2^{m+2}\mathsf{k}^{m+1}} + \mathsf{k}\, d(z_{m+1}, \Sigma),
\end{aligned}$$

de donde vemos que $d(z_{m+1}, \Sigma) \geq \frac{r}{(2\mathsf{k})^{m+2}}$. Esto último prueba que $z_{m+1} \in B(x_0, r)$ y por lo tanto queda demostrado el caso $k = m + 1$.

$\square$

-

CAPITULO 3

Regularidad de Funciones en $\mathfrak{C}$-Espacios Homogéneos

1. Introducción

En este capítulo estudiaremos relaciones entre las estimaciones de Krylov y Safonov, mencionadas en la Introducción del Capítulo 2, y las distintas clases de conos y $\mathbb{R}$-espacios funcionales definidos en subconjuntos abiertos de $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos (Ver Capítulo 1). En el Capítulo 2 vimos que la propiedad $\mathbb{KS}_1$ y la oscilación uniforme eran necesarias para probar la validez de la Desigualdad de Harnack en conos funcionales . Veremos que si en los $\mathbb{R}$-espacios funcionales sustituimos la oscilación uniforme por una versión de la segunda estimación de Krylov y Safonov, que denominaremos $\mathbb{KS}_2$, la Desigualdad de Harnack sigue siendo válida. En la segunda sección se estudiará la relación entre desigualdades del valor medio y desigualdad de Harnack como un primer resultado que se logra al incorporar una medida duplicante a un espacio casi-métrico. La tercera sección estará dedicada al estudio de la desigualdad débil del valor medio en relación con la propiedad de oscilación. En la cuarta sección presentaremos la segunda estimación de Krylov y Safonov, que denominaremos $\mathbb{KS}_2$, y probaremos que, junto con $\mathbb{KS}_2$, implican la validez de la Desigualdad Débil de Harnack en conos funcionales definidos en $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos tales que las bolas abiertas sean conjuntos abiertos. También se probará que las dos estimaciones de Krylov y Safonov son necesarias para la validez de la desigualdad de Harnack.

2. Propiedades del valor medio

Recordemos que en el caso clásico de $\mathbb{R}^n$ las funciones armónicas cumplen con una identidad del valor medio (igualdad (2.2), Capítulo 2). De tal identidad y de la propiedad de duplicación de la medida de Lebesgue sobre bolas euclideas se deduce la validez de la Desigualdad de Harnack. En realidad, la Desigualdad de Harnack es equivalente a una desigualdad del valor medio.

Definición: sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, Ω un subconjunto abierto de X, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω y $\mathcal{E}$ un cono funcional en $\mathcal{H}$. Diremos que $\mathcal{E}$ tiene la *propiedad del valor medio* si existen constantes absolutas positivas c_1 y c_2 y una constante geométrica

$c \geq 1$ tales que

$$c_1 u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u \leq c_2 u(x),$$

para todo $r > 0$, para todo $x \in \Omega$, para toda $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x, c\, r) \subset \Omega$, donde

$$\fint_B u = \frac{1}{\mu(B)} \int_B u \, d\mu.$$

Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in IVM_m\big(\Omega, c_1, c_2, c\big)$.

Lema 3.1. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Entonces*

a) $\mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, c\big) \subset IVM_m\big(\Omega, \Theta^{-1}, \Theta, c\big)$.

b) $IVM_m\big(\Omega, c_1, c_2, c\big) \subset \mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, \overline{c}\big)$, *para* $\Theta = \frac{A^{2\eta} c_2}{c_1}$, $\eta \geq 2(1 + \log_2 \mathsf{k}\,)$ *y* $\overline{c} = 5c\mathsf{k}^{\,3}$.

Demostración. Probaremos el inciso a). Sea $\mathcal{E} \in \mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, c\big)$ y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en la bola $B(x, cr) \subset \Omega$. Entonces

$$\sup_{B(x,r)} u \leq \Theta \inf_{B(x,r)} u.$$

De esta desigualdad es claro que

$$\Theta^{-1} u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u \leq \Theta\, u(x).$$

Veamos ahora b). Sea $\mathcal{E} \in IVM_m\big(\Omega, c_1, c_2, c\big)$ y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x, \overline{c}\, r) \subset \Omega$, donde $\overline{c} = 5c\mathsf{k}^{\,3}$. Procedemos de igual manera que en la prueba de la desigualdad de Harnack para las funciones armónicas. Consideremos dos puntos cualesquiera x_1 y $x_2 \in B(x, r)$. Entonces se tiene que

i) $B(x_i, cr) \subset B(x_i, 4c\mathsf{k}^{\,2} r) \subset B(x, c^* r)$ para $i = 1, 2$;
ii) $B(x_i, r) \subset B(x, 2\mathsf{k}\, r) \subset B(x_i, 4\mathsf{k}^{\,2} r)$ para $i = 1, 2$.

Teniendo en cuenta las inclusiones dadas en i) y la hipótesis, se tiene que $u \geq 0$ en $B(x_1, c\, r)$. Luego

$$c_1 u(x_1) \leq \fint_{B(x_1,r)} u.$$

Por la primera inclusión en ii) se tiene que

$$c_1 u(x_1) \leq \frac{\mu(B(x, 2\mathsf{k}\, r))}{\mu(B(x_1, r))} \fint_{B(x,2\mathsf{k}\, r)} u,$$

y finalmente, por la segunda inclusión en *ii*)

$$c_1 u(x_1) \leq \frac{\mu(B(x_1, 4\mathsf{k}^2 r))}{\mu(B(x_1, r))} \fint_{B(x, 2\mathsf{k}\, r)} u.$$

Por otra parte, por la hipótesis y las inclusiones dadas en *i*) tenemos que u es no negativa en $B(x_2, 4c\mathsf{k}^2 r)$. De manera similar a lo hecho anteriormente vemos que

$$c_2 u(x_2) \geq \frac{\mu(B(x_2, r))}{\mu(B(x_2, 4\mathsf{k}^2 r))} \fint_{B(x, 2\mathsf{k}\, r)} u,$$

luego

$$c_1 u(x_1) \leq \frac{\mu(B(x_1, 4\mathsf{k}^2 r))}{\mu(B(x_1, r))} \frac{\mu(B(x_2, 4\mathsf{k}^2 r))}{\mu(B(x_2, r))} c_2 u(x_2).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n \geq 4\mathsf{k}^2$, es decir $n \geq 2(1 + \log_2 \mathsf{k})$. Entonces, usando la propiedad de duplicación de μ, se tiene que

$$\mu(B(x_i, 4\mathsf{k}^2 r)) \leq A^n \mu(B(x_i, r)) \quad \text{para } i = 1, 2,$$

donde A es la constante de duplicación. Por lo tanto

$$u(x_1) \leq \frac{A^{2n} c_2}{c_1} u(x_2), \quad \text{para todo } x_1,\ x_2 \in B(x, r).$$

Entonces, si $u \geq 0$ en $B(x, \bar{c}r)$ vemos que

$$\sup_{B(x,r)} u \leq \Theta \inf_{B(x,r)} u,$$

donde $\Theta = \frac{A^{2n} c_2}{c_1}$ y $n \geq 2(1 + \log_2 \mathsf{k})$.

□

3. La desigualdad débil de Harnack. Consecuencias

Siguiendo a [**16**] definimos la llamada Desigualdad Débil de Harnack de la cual, en el caso de los $\mathbb{R}$-espacios, se puede deducir la Desigualdad de Harnack.

Definición: sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Diremos que un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ pertenece a la clase de *Harnack débil* si existen constantes absolutas $p > 0$ y $\vartheta > 1$ y una constante geométrica $c > 1$ tales que

$$\left(\fint_{B_r} u^p \right)^{1/p} \leq \vartheta \inf_{B_r} u.$$

para toda bola B_r y para toda $u \in \mathcal{E}$ no negativa en B_{cr} tal que $B_{cr} \subset \Omega$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big)$.

TEOREMA 3.2. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Si $\mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega,\vartheta,p,c\big) \cap \mathbb{L}^\infty_{loc}(\Omega)$ es un $\mathbb{R}$-espacio funcional entonces $\mathcal{E} \in \mathbb{O}\big(\Omega,\theta,c\big)$ para $\theta = \frac{\mathsf{k}_p\vartheta-1}{\mathsf{k}_p\vartheta}$, donde $\mathsf{k}_p = \text{máx}\{2^{\frac{1-p}{p}},1\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathcal{E}$ y sea $M_t = \sup_{B_{tr}}$, $m_t = \text{ínf}_{B_{tr}}$ para $t = 1, c$. Dado que $\mathcal{E}$ es un $\mathbb{R}$-espacio tenemos que $M_t - u$, $u - m_t$ pertenecen a $\mathcal{E}$ para $t = 1$, c. Luego, por hipótesis, se tiene que

$$(a) \qquad \left(\fint_{B_r}(M_c-u)^p\right)^{1/p} \leq \vartheta \ \inf_{B_r}(M_c-u) = \vartheta\ (M_c - M_1);$$

y

$$(b) \qquad \left(\fint_{B_r}(u-m_c)^p\right)^{1/p} \leq \vartheta \ \inf_{B_r}(u-m_c) = \vartheta(m_1 - m_c).$$

Recordemos que $\rho(f,g) = \big(\int_{B_r}|f-g|^p\big)^{1/p}$ es una casi-métrica para $0 < p < 1$ y una métrica si $p \geq 1$. Denotemos con k_p la constante de la desigualdad triangular para ρ. Entonces, sumando miembro a miembro (a) y (b) obtenemos

$$\begin{aligned}
\big(\mu(B_r)\big)^{1/p} \operatorname*{osc}_{B_{cr}} u &= \big(\mu(B_r)\big)^{1/p}(M_c - m_c)\\
&= \rho(M_c, m_c)\\
&\leq \mathsf{k}_p\big(\rho(M_c,u) + \rho(u,m_c)\big)\\
&\leq \mathsf{k}_p\big(\mu(B_r)\big)^{1/p}\vartheta(M_c - M_1 + m_1 - m_c)\\
&= \mathsf{k}_p\big(\mu(B_r)\big)^{1/p}\big(\vartheta \ \operatorname*{osc}_{B_{cr}} u - \vartheta \ \operatorname*{osc}_{B_r} u\big),
\end{aligned}$$

luego

$$\operatorname*{osc}_{B_{cr}} u \leq \mathsf{k}_p\vartheta \ \operatorname*{osc}_{B_{cr}} u - \mathsf{k}_p\vartheta \ \operatorname*{osc}_{B_r} u,$$

por lo tanto

$$\operatorname*{osc}_{B_r} u \leq \frac{\mathsf{k}_p\vartheta - 1}{\mathsf{k}_p\vartheta} \ \operatorname*{osc}_{B_{cr}} u.$$

□

Como consecuencia directa de los Teoremas 3.2 y 2.1 tenemos el siguiente

COROLARIO 3.3. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, Ω un subconjunto abierto de X y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Si $\mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega,\vartheta,p,c\big) \cap \mathbb{L}^\infty_{loc}(\Omega)$ es un $\mathbb{R}$-espacio funcional entonces $\mathcal{E} \in \mathbb{G}\big(\Omega,\alpha,\beta,C\big)$ para $\alpha = -\log_c\theta$, $\beta = 2\theta^{-1}(2\mathsf{k})^{-\alpha}$ y $C = 3\mathsf{k}^2$, donde*

$\theta = \frac{\mathsf{k}_p\vartheta-1}{\mathsf{k}_p\vartheta}$ *y* $\mathsf{k}_p = \max\{2^{\frac{1-p}{p}}, 1\}$. *En particular, toda* $u \in \mathcal{E}$ *es localmente Hölder continua.*

Vamos a ver ahora que todo cono funcional localmente acotado en la clase de Harnack débil está en la clase de Harnack con el solo hecho de que el cono sea un $\mathbb{R}$-espacio funcional. Antes de probar lo anterior necesitaremos el siguiente lema.

LEMA 3.4. *Sean* (X, d, μ) *un espacio de tipo homgéneo,* Ω *un subconjunto abierto de* X *y* $\mathcal{H}$ *un conjunto de funciones reales definidas en* Ω*. Entonces*

$$\mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big) \subset \mathbb{KS}\big(\Omega, C, c\big),$$

para

$$C = \frac{1}{\vartheta\, A^{(1/p)\log_2 \frac{2M}{c}}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $u \in \mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big)$, $M > c$ y $r > 0$ y supongamos que $u \geq 1$ en $B(x, r)$ y $u \geq 0$ en $B(x, Mr) \subset \Omega$. Entonces

$$\vartheta \inf_{B(x,Mr/c)} u \geq \left(\fint_{B(x,Mr/c)} u^p \right)^{1/p}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{B(x,Mr/c)} u^p \, d\mu \geq \mu(B(x, r)),$$

vemos que

$$\begin{aligned} \left(\fint_{B(x,Mr/c)} u^p \right)^{1/p} &\geq \left(\frac{\mu(B(x, r))}{\mu(B(x, Mr/c))} \right)^{1/p} \\ &\geq A^{-(1/p)\log_2 \frac{2M}{c}}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\inf_{B(x,Mr/c)} u \geq \frac{1}{\vartheta\, A^{(1/p)\log_2 \frac{2M}{c}}}.$$

□

TEOREMA 3.5. *Sean* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo,* Ω *un subconjunto abierto de* X *y* $\mathcal{H}$ *un conjunto de funciones reales definidas en* Ω*. Entonces*

a) Si $\mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big) \cap \mathbb{L}^\infty_{loc}(\Omega)$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio funcional entonces* $\mathcal{E} \in \mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, c^*\big)$*, para* $\Theta = \eta^{\sup\{\log_b(2\mathsf{k}\, c^m), 2\}}$ *y* $c^* = \big(4\mathsf{k}^3(c+1)+1\big)\mathsf{k}$*,*
donde $\eta = (1 + \sup\{2, \vartheta\, A^{(1/p)\log_2 \frac{2M}{c}}\})$*,* $b = 2\mathsf{k}$*,* $m = 2\log_a \eta$*,* $a = \frac{\mathsf{k}_p\vartheta}{\mathsf{k}_p\vartheta-1}$ *y* $\mathsf{k}_p = \max\{2^{\frac{1-p}{p}}, 1\}$*.*

b) $\mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, c\big) \subset \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big)$*, para* $\vartheta = \Theta$ *y para todo* $p > 0$*.*

Demostración. a) El Teorema 3.2 y el Lema 3.4 nos dicen que si $\mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big) \cap \mathbb{L}_{loc}(\Omega)$ entonces $\mathcal{E} \in \mathbb{O}\big(\Omega, \theta, c\big) \cap \mathbb{KS}\big(\Omega, C, c\big)$ para $\theta = \frac{\mathsf{k}_p \vartheta - 1}{\mathsf{k}_p \vartheta}$ y $C = \frac{1}{\vartheta\, A^{(1/p)\log_2 \frac{2M}{c}}}$. La conclusión se sigue del inciso c) del Teorema 2.2.

b) Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, c\big)$, B_r una bola de radio r y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B_{cr} \subset \Omega$, entonces

$$\left(\fint_{B_r} u^p\right)^{1/p} \leq \sup_{B_r} u \leq \Theta \inf_{B_r} u.$$

□

Una consecuencia interesante de la Desigualdad Débil de Harnack (Ver [**16**]) es el llamado principio fuerte del mínimo. Veremos ahora que en el contexto abstracto de los espacios de tipo homogéneo también sigue siendo válido bajo ciertas restricciones de caracter topológicas.

Teorema 3.6 (Principio fuerte del mínimo). *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas son conjuntos abiertos, Ω un subconjunto abierto de X arco-conexo y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big)$, $u \in \mathcal{E}$ y supongamos que existe una bola B_r tal que $B_{cr} \subset \Omega$ y $\inf_\Omega u = \inf_{B_r} u$. Entonces u es constante en Ω*

Demostración. Sea $m = \inf_\Omega u$. Por hipótesis, la función $u - m \in \mathcal{E}$ y es no negativa en $B(x_0, c\,r) = B_{cr}$, luego, se tiene que

$$0 \leq \fint_{B_r} (u - m) \leq \vartheta \inf_{B_r} (u - m) = 0,$$

es decir, $u \equiv m$ en B_r.

Sea $x \in \Omega$. Por hipótesis existe una función continua ϕ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $\phi([a, b]) \subset \Omega$, $\phi(a) = x_0$ y $\phi(b) = x$. Dado que la curva $\phi([a, b])$ es un conjunto compacto en Ω, podemos cubrirla por una cantidad finita de bolas $B_j = B(x_j, r_j)$ tales que $B(x_j, c\,r_j) \subset \Omega$. Dado que $x_0 \in \phi([a, b])$ tenemos que existe una bola del cubrimiento, digamos B_1, tal que $B_r \cap B_1 \neq \emptyset$. Puesto que las bolas son abiertas y que $u \equiv m$ en B_r se tiene que $u \equiv m$ en un subconjunto de B_1 de medida positiva, por lo tanto, $\inf_{B_1} = m = \inf_\Omega u$, entonces, $u \equiv m$ en B_1. Procediendo de esta manera concluimos que x pertenece a una bola B_j tal que $u \equiv m$ en B_j. La conclusión se sigue del hecho de que Ω es separable. □

4. La propiedad $\mathbb{KS}_2$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo y consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u, \tag{3.1}$$

donde a_{ij} son los elementos de una matriz simétrica, suave y uniformemente elíptica en el sentido que existe una constante $\lambda > 0$, independiente de $x \in \Omega$, tal que

$$\lambda\,|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y para todo $x \in \Omega$.

Sea u una solución suave de la ecuación $Lu = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Siguiendo los lineamientos dados en ([**8**]) probaremos que existen constantes $0 < \gamma < 1$ y $C > 0$, que dependen solamente de λ y n, tales que si u es no negativa en $B(x_0, r) \subset \Omega$ entonces

$$u \geq C \quad \text{en } B(x_0, r/2) \qquad \text{si} \qquad \frac{|\{u > 1\} \cap B(x_0, r)|}{|B(x_0, r)|} \geq \gamma. \tag{3.2}$$

Observemos que si el resultado es cierto para $r = 1$ entonces es cierto para todo $r > 0$, pues si u es solución de $Lu(x) = 0$ en Ω entonces $\overline{u}(x) = u(rx)$ es solución de $L_r\overline{u}(x) = 0$ en Ω_r donde

$$L_r\overline{u}(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^r(x)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i x_j}(x),$$

con

$$a_{ij}^r(x) = a_{ij}(rx),$$

y

$$\Omega_r = \{r^{-1}x \;/\; x \in \Omega\}.$$

Entonces si tenemos que $|\{u > 1\} \cap B(x_0, r)| \geq \gamma\,|B(x_0, r)|$ tambien tendremos que

$$\frac{|\{\overline{u} > 1\} \cap B(x_0, 1)|}{|B(x_0, 1)|} \geq \gamma.$$

Luego $\overline{u} \geq C$ en $B(x_0, 1/2)$ lo cual implica que $u \geq C$ en $B(x_0, r/2)$.

Necesitaremos la siguiente estimación de Aleksandrov-Bakelman-Pucci (A-B-P) (Ver [**16**]): *sea u una solución suave en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de la ecuación*

$$Lu = f,$$

con $f \in L^n(\Omega)$. Entonces existe una constante $C = C(\lambda)$, que depende solamente de λ, tal que

$$C\,\|f^+\|_{L^n} + \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u, \tag{3.3}$$

donde f^+ denota la parte positiva de f.

Consideremos la función $h(x) = 1/2(1 - |x - x_0|^2)$ y sea $g(x)$ una función suave que aproxime superiormente a χ_Γ (donde $\Gamma = \{x \in B(x_0, 1) \;/\; u(x) \leq 1\}$), es decir

$$0 \leq \chi_\Gamma(x) \leq g(x) \leq 1,$$

y

$$\int g \leq |\Gamma| + \epsilon, \qquad (\epsilon \text{ pequeño})\;. \tag{3.4}$$

Sea v una solución suave del problema

$$\begin{cases} Lv &= C\,g & \text{en } B(x_0,1) \\ v &= 0 & \text{en } \partial B(x_0,1) \end{cases} \tag{3.5}$$

donde $C > \lambda^{-1}n$ es una constante absoluta. Probaremos que $h+v-u \leq 0$ en la bola $B(x_0,1)$: por el principio del máximo (Ver [**16**]) sabemos que $v \leq 0$ en $B(x_0,1)$. Supongamos que existe un $x \in B(x_0,1)$ tal que $(h+v-u)(x) > 0$, entonces, se tiene que $g(x) = 1$ pues $u(x) \leq 1/2$. Por otra parte, notemos que $h+v-u \leq 0$ en $\partial B(x_0,1)$. Luego, dado que $h+v-u$ es continua, existe un entorno V de x tal que

$$h+v-u > 0 \quad \text{en } V \qquad \text{y} \qquad h+v-u = 0 \quad \text{en } \partial V.$$

Por lo tanto, para todo $z \in V$ tenemos que $g(z) = 1$, entonces

$$L(h+v)(z) = Lh(z) + Lv(z) = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(z) + C \geq \lambda^{-1}n + C > 0 = Lu(z).$$

Es decir que $L(h+v-u) > 0$ en V, y esto implica que el Hessiano de $h+v-u$ es definido positivo en V, lo cual es un absurdo. Luego $u \geq h+v$ en $B(x_0,1)$.

Dado que v es solución suave del sistema (3.5), es válida la estimación (3.3) de A-B-P, por lo tanto, teniendo en cuenta (3.4), que $g \leq 1$ y que $v = 0$ en $\partial B(x_0,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \inf_{B(x_0,1)} v &\geq -C\,\|g\|_{L^n\left(B(x_0,1)\right)} \\ &\geq -C\left(\int_{B(x_0,1)} g\right)^{1/n} \geq -C\,\left(|\Gamma| + \epsilon\right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Notemos que podemos estimar inferiormente el último término de la desigualdad anterior si $u \geq 1$ en una porción suficientemente grande de $B(x_0,1)$. En efecto, si

$$\frac{|\{u > 1\} \cap B(x_0,1)|}{|B(x_0,1)|} \geq \gamma,$$

entonces $|\Gamma| = |B(x_0,1)| - |\{u > 1\}| \leq (1-\gamma)|B(x_0,1)| = (1-\gamma)C_n$, luego

$$\inf_{B(x_0,1)} v \geq -C\big((1-\gamma)C_n + \epsilon\big)^{1/n},$$

y elegimos $\gamma > 0$ de tal manera que $C\big((1-\gamma)C_n+\epsilon\big)^{1/n} \leq 1/8$. Notemos que en la elección del γ adecuado intervienen constantes que dependen solamente de λ y n. Una vez elegido γ tenemos que $\inf_{B(x_0,1/2)} v \geq -1/8$ y como $\inf_{B(x_0,1/2)} h \geq 1/4$ obtenemos finalmente que

$$\inf_{B(x_0,1/2)} u \geq \inf_{B(x_0,1/2)} (h+v) \geq \frac{1}{8},$$

con lo cual queda probado (3.2)

Tal como lo hicimos para la primera estimación **??** tenemos ahora la siguiente

Definición: sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales definidas en Ω. Diremos que un cono $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ tiene la *propiedad de densidad crítica* si existen constantes absolutas $0 < \gamma < 1$ y $C > 0$ y una constante geométrica $c > 1$ tales que para toda $u \in \mathcal{E}$ y para toda bola B_r tal que u es no negativa en $B_{cr} \subset \Omega$, si

$$\frac{\mu(\Gamma_t \cap B_r)}{\mu(B_r)} \geq \gamma$$

entonces

$$\inf_{B_{r/2}} u \geq C\, t,$$

donde Γ_t denota al conjunto de nivel $\{x \in \Omega \;/\; u(x) > t\}$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c\big)$.

Dados un cono funcional $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c\big)$, $u \in \mathcal{E}$ y una bola $B \subset \Omega$, diremos que u tiene *densidad crítica en* B si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\mu(\Gamma_t \cap B)}{\mu(B)} \geq \gamma.$$

En la sección anterior vimos que los conos funcionales que están en la clase de Harnack débil tienen la propiedad $\mathbb{KS}_1$. Veamos ahora que los conos funcionales pertenecientes a la clase de Harnack débil también tienen la propiedad $\mathbb{KS}_2$:

Lema 3.7. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas son conjuntos abiertos, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales definidas en Ω. Entonces*

$$\mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big) \subset \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c\big),$$

para $C = \vartheta^{-1}\gamma^{1/p}$ y para todo $\gamma \in (0\,, 1)$.

Demostración. Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big)$, $\gamma \in (0\,, 1)$ y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en una bola $B_{cr} \subset \Omega$ tal que

$$\mu(\Gamma_t \cap B_r) \geq \gamma \mu(B_r).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\vartheta \inf_{B_r} u &\geq \left(\fint_{B_r} u^p \right)^{1/p} \\
&\geq \left(\frac{\mu(\Gamma_t \cap B_r)}{\mu(B_r)} \right)^{1/p} t \\
&\geq \gamma^{1/p} t,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\inf_{B_{r/2}} u \geq \vartheta^{-1}\gamma^{1/p} t.$$

□

Veremos ahora que los conos funcionales con las propiedades $\mathbb{KS}_1$ y $\mathbb{KS}_2$ pertenecen a la clase de Harnack débil si los conos funcionales están definidos en los $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos (Ver Capítulo 1, Sección 3). Previamente probamos el siguiente

Lema 3.8. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales definidas en Ω. Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C_1, c\big) \cap \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C_2, c^*\big)$, $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x, ar) \subset \Omega$, con $a = \max\{4c\mathsf{k}^2 + \mathsf{k}, 2c^*\mathsf{k}^2 + \mathsf{k}\}$, y supongamos que*

$$\inf_{B(x,r)} u \leq 1.$$

Existen constantes absolutas $\delta > 0$ y $C > 0$ tales que si $y \in B(x, r)$, con $h < 2\mathsf{k}r$ y

$$\mu(\Gamma_t \cap B(y, h)) \geq \gamma\, \mu(B(y, h)), \tag{3.6}$$

entonces

$$h \leq 2\mathsf{k}r(C/t)^{1/\delta}.$$

Demostración. Sean $y \in B(x, r)$, $h < 2\mathsf{k}r$ y supongamos que vale (3.6). Por la desigualdad triangular es claro que $B(x, r) \subset B(y, 2\mathsf{k}r)$. Por otra parte existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{n-1}h < 2\mathsf{k}r \leq 2^n h$$

entonces

$$n + 1 \leq \log_2\left(\frac{8\mathsf{k}r}{h}\right).$$

De (3.6) vemos que u tiene densidad crítica en $B(y, h)$, por lo tanto, dado que u es no negativa en $B(y, c^*h) \subset \Omega$, concluimos que

$$u \geq C_2 t \quad \text{en } B(y, h/2),$$

luego, dado que u es no negativa en $B(x, (4c\mathsf{k}^2 + \mathsf{k})r)$, aplicando $(n + 1)$ veces la propiedad $\mathbb{KS}_1$ para $M = 2c$, obtenemos

$$u \geq C_2(C_1)^{n+1}t \quad \text{en } B(y, 2^n h).$$

Por otra parte, si $\delta = -\log_2 C_1$

$$\begin{aligned}(C_1)^{n+1} &= 2^{-\delta(n+1)}\\ &\geq 2^{\log_2\left(\frac{8\mathsf{k}r}{h}\right)^{-\delta}}\\ &= \left(\frac{h}{8\mathsf{k}r}\right)^{\delta},\end{aligned}$$

entonces, puesto que $B(x, r) \subset B(y, 2^n h)$, tenemos que

$$u \geq C_2 t\left(\frac{h}{8\mathsf{k}r}\right)^{\delta} \quad \text{en } B(x, r).$$

Pero $\inf_{B(x,r)} \leq 1$, luego

$$1 \geq C_2 t \left(\frac{h}{8\mathsf{k}\, r}\right)^{\delta}.$$

□

Enunciamos el siguiente lema que, aunque de trivial demostración, será usado con frecuencia en el próximo teorema.

LEMA 3.9. *Sea $0 < t < s$. Para todo $z \in B(x,t)$ y para todo $r \leq s - t$ se tiene que*

$$B(z,r) \subset B(x, \mathsf{k}\, s).$$

Estamos ahora en posición de probar uno de los resultados más importantes de esta sección que es fundamental para demostrar que en los $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos, bajo ciertas restricciones en la geometría del espacio, las estimaciones de Krylov y Safonov son necesarias para que un cono funcional $\mathcal{E}$ pertenezca a la clase de Harnack débil. La demostración en $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos se basa en lo hecho en [**11**] para el caso de la ecuación de Monge-Ampère.

TEOREMA 3.10. *Sea (X, d, μ) un $\mathfrak{C}$-espacio homogéneo no acotado tal que las bolas son conjuntos abiertos y las coronas son no vacías. Sean $\Omega \subset X$ un conjunto abierto, $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales semicontinuas inferiormente definidas en Ω y $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1(\Omega, C_1, c_1) \cap \mathbb{KS}_2(\Omega, \gamma, C_2, c_2)$. Supongamos que se tiene una $u \in \mathcal{E}$, no negativa en la bola $B(x, c_3 r) \subset \Omega$, tal que*

$$\inf_{B(x,r)} u \leq 1,$$

donde c_3 es una constante positiva que depende de la constante de antiduplicación de μ, de k, de c_1 y de γ. Entonces existen constantes absolutas $\tau \in (0,1)$, $C > 0$ y $\beta > 0$ tales que para todo $t > 0$ suficientemente grande

$$\mu(\Gamma_t \cap B(x, \tau r)) \leq C t^{-\beta} \mu(B(x,r)).$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{L}_n = \Gamma_{PZ^n}$, donde P y Z son constantes absolutas que serán determinadas más adelante. Construiremos una sucesión decreciente $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $t_n \geq \mathsf{k}^{-1} \tau r$ y

$$\mu(B_n \cap \mathcal{L}_{n+1}) \leq C(\gamma) \mu(B_{n-1} \cap \mathcal{L}_n), \tag{3.7}$$

donde $B_n = B(x, \mathsf{k}\, t_n)$ y $\tau \in (0,1)$ es una constante absoluta a determinar.

Sea $t_0 > 0$ tal que $r = \mathsf{k}\, t_0$ y denotemos $B_0 = B(x,r)$. Probaremos que existe $t_1 < t_0$ tal que

$$\mu(B_1 \cap \mathcal{L}_2) \leq C(\gamma) \mu(B_0 \cap \mathcal{L}_1). \tag{3.8}$$

Sea $t_1 < t_0$. Podemos aplicar la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 1.5) al conjunto $B_1 \cap \mathcal{L}_2$ a nivel γ pues por hipótesis las bolas y los conjuntos de nivel Γ_t son conjuntos abiertos. De esta manera obtenemos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1 \cap \mathcal{L}_2$ y $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tales que

a) $B_1 \cap \mathcal{L}_2 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n)$;
b) $\mu\big(B_1 \cap \mathcal{L}_2 \cap B(x_n, r_n)\big) = \gamma\mu(B(x_n, r_n))$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
c) $\mu(B_1 \cap \mathcal{L}_2) \leq C(\gamma)\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n)\big)$ con $0 < C(\gamma) < 1$.

Notemos que, dado que las coronas son no vacías, los Lemas 1.6 y 1.7 nos dicen que

$$r_n \leq 2^{\log_a(a^2\gamma^{-1})} r \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

donde a es la constante de antiduplicación de μ. Por lo tanto

$$B(x_n, c_1 r_n) \subset B(x, c_3 r) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

si tomamos

$$c_3 \geq 1 + c_1 \mathsf{k}\, 2^{\log_a(a^2\gamma^{-1})}. \tag{3.10}$$

Vamos a probar que

$$\bigcup_n B(x_n, r_n) \subset B_0 \cap \mathcal{L}_1. \tag{3.11}$$

De b) vemos que u tiene densidad crítica en cada $B(x_n, r_n)$, mientras que (3.9) asegura que u es no negativa en cada $B(x_n, r_n)$ pues $c_1 \geq 1$. Entonces, puesto que $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C_2, c_2\big)$, se tiene que

$$u \geq C_2 P Z^2, \quad \text{en } B(x_n, r_n/c_2).$$

Luego, ya que $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C_1, c_1\big)$ y que $u \geq 0$ en $B(x_n, c_1 r_n)$, para $M = c_1 c_2$ obtenemos

$$u \geq C_1 C_2 P Z^2, \quad \text{en } B(x_n, r_n).$$

Si elegimos $Z > \text{máx}\big((C_1C_2)^{-1}, P^{-1}, 1\big)$ vemos que

$$u \geq PZ, \quad \text{en } B(x_n, r_n),$$

por lo tanto

$$B(x_n, r_n) \subset \mathcal{L}_1. \tag{3.12}$$

Veamos ahora que $r_n \leq 2\mathsf{k}\, r$. Si fuese $r_n > 2\mathsf{k}$, dado que $x_n \in B_1 \subset B(x, r)$, tendríamos que

$$B(x, r) \subset B(x_n, 2\mathsf{k}\, r) \subset B(x_n, r_n),$$

y como $u \geq PM > 1$ en $B(x_n, r_n)$ se tendría que $\text{ínf}_{B(x,r)} u > 1$ lo cual es un absurdo. Por otra parte el Lema 3.8 nos dice que existen constantes absolutas $1 > \delta > 0$ y $C > 0$ tales que

$$\begin{aligned} r_n &\leq 2\mathsf{k}\, r \left(\frac{C}{PZ^2}\right)^{1/\delta} \\ &= 2\mathsf{k}^2 t_0 \left(\frac{C}{PZ^2}\right)^{1/\delta}. \end{aligned}$$

Sea t_1 tal que $t_0 - t_1 = 2\mathsf{k}^2 t_0 \left(\frac{C}{PZ^2}\right)^{1/\delta}$. Observemos que $t_1 = t_0\big(1 - 2\mathsf{k}^2\big(\frac{C}{PZ^2}\big)^{1/\delta}\big)$, con lo cual $t_1 < t_0$ si elegimos P y Z suficientemente grandes. Por el Lema 3.9, dado que $r_n \leq t_0 - t_1$, se tiene que para todo n

$$B(x_n, r_n) \subset B(x, \mathsf{k}\, t_0) = B_0.$$

De esto último y de (3.12), vemos la validez de 3.11. Por lo tanto, de c) y (3.11), concluimos que

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \cap \mathcal{L}_2) &\leq C(\gamma)\mu(\cup_n B(x_n, r_n)) \\ &\leq C(\gamma)\mu(B_0 \cap \mathcal{L}_1), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. Supongamos que hemos probado que existe $t_n < t_{n-1}$ tal que

I) $\mu(B_n \cap \mathcal{L}_{n+1}) \leq C(\gamma)\mu(B_{n-1} \cap \mathcal{L}_n)$;
II) $t_n = t_0\big(1 - 2\mathsf{k}^2\big(\frac{C}{P}\big)^{1/\delta} \sum_{j=2}^{n+1} M^{-j/\delta}\big)$.

Para construir t_{n+1} procedemos de manera similar al caso $n = 1$: sea $0 < t_{n+1} < t_n$ un número a determinar luego. Aplicamos la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 1.5) al conjunto $B_{n+1} \cap \mathcal{L}_{n+2}$ a nivel γ y obtenemos de esta manera dos sucesiones $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{n+1} \cap \mathcal{L}_{n+2}$ y $\{r_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tales que

a') $B_{n+1} \cap \mathcal{L}_{n+2} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k)$;
b') $\mu(B_{n+1} \cap \mathcal{L}_{n+2} \cap B(x_k, r_k)) = \gamma\mu(B(x_k, r_k))$;
c') $\mu(B_{n+1} \cap \mathcal{L}_{n+2}) \leq C(\gamma)\mu\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r_k)\big)$.

Tal como lo hicimos en el caso $n = 1$ vamos a probar primero que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k) \subset B_n \cap \mathcal{L}_{n+1}. \tag{3.13}$$

Notemos que como $t_{n+1} < t_n < \cdots < t_1$, se tiene que la sucesión $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_1$, por lo tanto, nuevamente se cumple (3.9) para cada bola $B(x_k, r_k)$ lo cual nos asegura que u es no negativa en cada $B(x_k, r_k)$. De b') vemos que u tiene densidad crítica en cada $B(x_k, r_k)$, entonces, dado que $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C_2, c_2\big)$ se tiene que

$$u \geq C_2 P Z^{n+2} \quad \text{en } B(x_k, r_k/c_2),$$

luego, puesto que también $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C_1, c_1\big)$ y u es no negativa en $B(x_k, c_1 r_k)$, obtenemos

$$u \geq C_2 C_1 P Z^{n+2} \quad \text{en } B(x_k, r_k).$$

Por la elección que se hizo de Z tenemos que $u \geq PZ^{n+1}$ en $B(x_k, r_k)$, lo que implica que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r_k) \subset \mathcal{L}_{n+1}. \tag{3.14}$$

Razonando como en el caso $n = 1$ vemos nuevamente que $r_k \leq 2\mathsf{k}\, r$, por tanto (Lema 3.8) existen constantes absolutas $1 > \delta > 0$ y $C > 0$ tales que

$$r_k \leq 2\mathsf{k}^2 t_0 \left(\frac{C}{PZ^{n+2}}\right)^{1/\delta}.$$

Sea $t_{n+1} < t_n$ tal que

$$t_n - t_{n+1} = 2\mathsf{k}^2 t_0 \left(\frac{C}{PM^{n+2}}\right)^{1/\delta}.$$

Por el Lema 3.9, dado que $r_k \leq t_n - t_{n+1}$, se tiene que

$$B(x_k, r_k) \subset B(x, \mathsf{k}\, t_n) = B_n.$$

Esto último, junto con (3.14) nos dice que (3.13) es válido. Por lo tanto, teniendo en cuenta c'), obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(B_{n+1} \cap \mathcal{L}_{n+2}) &\leq C(\gamma)\, \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k)\Big) \\ &\leq C(\gamma)\, \mu\big(B_n \cap \mathcal{L}_{n+1}\big), \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n - 2\mathsf{k}^2 t_0 \left(\frac{C}{PZ^{n+2}}\right)^{1/\delta} \\ &= t_0 \left(1 - 2\mathsf{k}^2 \left(\frac{C}{P}\right)^{1/\delta} \sum_{j=1}^{n+1} Z^{-j/\delta}\right) - 2\mathsf{k}^2 t_0 \left(\frac{C}{PZ^{n+2}}\right)^{1/\delta} \\ &= t_0 \left(1 - 2\mathsf{k}^2 \left(\frac{C}{P}\right)^{1/\delta} \sum_{j=1}^{n+2} Z^{-j/\delta}\right), \end{aligned}$$

con lo cual queda probado la validez de (3.7) para todo n.

Para Z y P suficientemente grandes la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} Z^{-j/\delta},$$

es convergente y además

$$2\left(\frac{C}{P}\right)^{1/\delta} \sum_{j=1}^{\infty} Z^{-j/\delta} < 1.$$

Por lo tanto, si tomamos

$$\tau = 1 - 2\mathsf{k}^2 \left(\frac{C}{P}\right)^{1/\delta} \sum_{j=1}^{\infty} Z^{-j/\delta}$$

se tiene que

$$\tau r = \tau \mathsf{k}\, t_0 < \mathsf{k}\, t_n, \quad \text{para todo } n > 1.$$

Sea $t > PZ$, entonces existe $n \geq 1$ tal que $PZ^{n+1} \geq t > PZ^n$, luego, como $\tau r \leq t_{n-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(\Gamma_t \cap B(x, \tau r)) &\leq \mu(\mathcal{L}_n \cap B_{n-1}) \\
&\leq C(\gamma)\, \mu(\mathcal{L}_{n-1} \cap B_{n-2}) \\
&\leq C(\gamma)^2\, \mu(\mathcal{L}_{n-2} \cap B_{n-3}) \\
&\qquad \vdots \\
&\leq C(\gamma)^{n-1}\, \mu(\mathcal{L}_1 \cap B_0) \\
&\leq C(\gamma)^{n-1}\, \mu(B(x, r)) \\
&\leq C t^{-\beta} \mu(B(x, r)),
\end{aligned}$$

donde $\beta = \log_Z C(\gamma)^{-1}$ y C es una constante que depende de k y de la constante de duplicación de μ. $\square$

Notemos que en el teorema precedente podemos evitar que la constante c_3 dependa de la constante γ de la propiedad $\mathbb{KS}_2$. Más precisamente podemos considerar

$$c_3 \geq 1 + c_1 \mathsf{k}\, 2^{\log_a(2a^2)}. \tag{3.15}$$

En efecto, si $1 > \gamma \geq 1/2$ tenemos que (3.10) es consecuencia de (3.15). Por otra parte, dado que la clase $\mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c\big)$ es monótona creciente en γ, si $1/2 > \gamma > 0$ tenemos que $\mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c\big) \subset \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \frac{1}{2}, C, c\big)$ lo cual nos dice que podemos tomar c_3 como en (3.15).

El Teorema 3.10 permite probar la desigualdad de Harnack débil (ver [**16**] para el caso euclideo) en el contexto de los $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos cuyas bolas son conjuntos abiertos y las coronas son no vacías.

Teorema 3.11 (Desigualdad de Harnack Débil). *Sean (X, d, μ) un $\mathfrak{C}$-espacio homogéneo no acotado tal que las bolas son conjuntos abiertos y las coronas son no vacías. Sean $\Omega \subset X$ un conjunto abierto, $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales semicontinuas inferiormente definidas en Ω y $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C_1, c_1\big) \cap \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C_2, c_2\big)$. Existen constantes absolutas $p_0 > 0$, $1 > \tau > 0$ y $\overline{C} > 1$ tales que*

$$\left(\fint_{B(x,\tau r)} u^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq \overline{C} \inf_{B(x,r)} u,$$

para toda $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x, c\, r) \subset \Omega$, donde $c > 1$ es una constante que depende de la constante de antiduplicación de μ, de c_1 y de k.

Demostración. Sean β, P, Z, τ y c_3 las constantes absolutas halladas en el teorema anterior. Sean $p_0 = \beta/2$ y $B = B(x, r)$ tal que $B(x, c_3 r) \subset \Omega$. Dado $\epsilon > 0$ consideremos la función

$$v = \frac{u + \epsilon}{\inf_B (u + \epsilon)}$$

entonces $v \in \mathcal{E}$ y además $\operatorname{ínf}_B v = 1$, entonces v está en las condiciones pedidas en el Teorema 3.10, luego

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^{p_0}(B(x,\tau r))}^{p_0} &= p_0 \int_0^\infty t^{p_0-1}\mu\big(\Gamma_t \cap B(x,\tau r)\big)dt \\
&= p_0 \int_0^{PZ} t^{p_0-1}\mu\big(\Gamma_t \cap B(x,\tau r)\big)dt + \int_{PZ}^\infty t^{p_0-1}\mu\big(\Gamma_t \cap B(x,\tau r)\big)dt \\
&\leq p_0\mu(B(x,\tau r)) \int_0^{PZ} t^{p_0-1}dt + Cp_0\mu(B(x,\tau r)) \int_{PZ}^\infty t^{p_0-1-\beta}dt \\
&= \mu\big(\tau B\big)\big(PZ\big)^{\beta/2} + \frac{2C\mu\big(\tau B\big)}{\beta\big(PZ\big)^{\beta/2}} \\
&= \overline{C}\mu\big(B(x,\tau r)\big),
\end{aligned}$$

donde $\overline{C} = \big(PZ\big)^{\beta/2} + \frac{2C}{\beta\big(PZ\big)^{\beta/2}}$.

Por lo tanto

$$\|u+\epsilon\|_{L^{p_0}(B(x,\tau r))}^{p_0} \leq \big(\operatorname*{ínf}_B(u+\epsilon)\big)^{p_0}\overline{C}\mu\big(B(x,\tau r)\big),$$

de donde, por la arbitrariedad de ϵ, concluimos

$$\|u\|_{L^{p_0}(B(x,\tau r))}^{p_0} \leq \overline{C}\mu\big(B(x,\tau r)\big)\big(\operatorname*{ínf}_B u\big)^{p_0}.$$

□

Consecuencia del teorema anterior es el siguiente

Teorema 3.12. *Sean $p_0 > 0$, $1 > \tau > 0$, $\overline{C} > 1$ y $c > 1$ las constantes absolutas del Teorema 3.11. En las condiciones del Teorema 3.11 tenemos que*

$$\mathbb{KS}_1\big(\Omega, C_1, c_1\big) \cap \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C_2, c_2\big) \subset \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c^*\big),$$

para $\vartheta = \overline{C}$, $p = p_0$ y $c^* = \tau^{-1}c$.

Demostración. Sea $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C_1, c_1\big) \cap \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C_2, c_2\big)$ y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x, \tau^{-1}cr) \subset \Omega$. Del teorema anterior y teniendo en cuenta que $0 < \tau < 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B(x,r)} u^{p_0}\right)^{1/p_0} &\leq \overline{C} \operatorname*{ínf}_{B(x,\tau^{-1}r)} u \\
&\leq \overline{C} \operatorname*{ínf}_{B(x,r)} u.
\end{aligned}$$

□

Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales semicontinuas superiormente definidas en Ω. Definimos las clases

$$\mathbf{H}^w = \bigcup \{\, \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big) \,/\, \vartheta > 1,\ p > 0,\ c \geq 1 \,\}.$$

$$\mathbf{KS}_1 = \bigcup \{\, \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C, c\big) \,/\, C \in (0,1),\ c \geq 1\,\}.$$

$$\mathbf{KS}_2 = \bigcup \{\, \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c\big) \,/\, \gamma, C \in (0,1),\ c \geq 1\,\}.$$

Denotando con $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ la clase los $\mathbb{R}$-espacios funcionales en $\mathcal{H}$ localmente acotados definimos

$$\tilde{\mathbf{H}} = \bigcup \Big\{\, \mathbb{H}\big(\Omega, \Theta, c\big) \cap \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \,/\, \Theta > 1,\ c \geq 1\,\Big\}\,.$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^w = \bigcup \{\, \mathbb{H}^w\big(\Omega, \vartheta, p, c\big) \cap \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \,/\, \vartheta > 1,\ p > 0,\ c \geq 1\,\}.$$

$$\tilde{\mathbf{KS}}_1 = \bigcup \{\, \mathbb{KS}_1\big(\Omega, C, c\big) \cap \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \,/\, C \in (0,1),\ c \geq 1\,\}.$$

$$\tilde{\mathbf{KS}}_{\mathbf{2}} = \bigcup \{\, \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c\big) \cap \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \,/\, \gamma, C \in (0,1),\ c \geq 1\,\}.$$

De los Teoremas 3.4, 3.5, 3.7 y 3.12 y con la notación anterior concluimos

Teorema 3.13. *Sean (X, d, μ) un $\mathfrak{C}$-espacio homogéneo no acotado tal que las bolas son conjuntos abiertos y las coronas son no vacías. Sean $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales semicontinuas superiormente definidas en Ω. Entonces*

a) $\mathbf{H}^w = \mathbf{KS}_1 \cap \mathbf{KS}_2$.

b) $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{KS}}_1 \cap \tilde{\mathbf{KS}}_2 = \tilde{\mathbf{H}}^w$.

CAPITULO 4

Regularidad de Funciones en $\mathfrak{R}_T$-Espacios Homogéneos

1. Introducción

De manera similar a lo realizado en los capítulos (2) y (3) en este capítulo haremos un estudio de las relaciones entre desigualdad de Harnack, propiedades de oscilación y del valor medio y las estimaciones Krylov y Safanov en el contexto de los espacios de tipo homogéneo con mapeos de retardo. El concepto de mapeo de retardo fué introducido por Aimar en [**3**] y representa, en un contexto abstracto, la noción de traslación que aparece cuando se estudian problemas relacionados a las ecuaciones diferenciales parabólicas.

2. Definiciones

Sea (X, d, μ) un espacio casi-métrico de medida. Diremos que una aplicación

$$T : X \times \mathbb{R}^+ \to X \times \mathbb{R}^+,$$

con componentes $T = (\xi, \eta)$, es un mapeo de retardo si existen constantes no negativas K_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tales que las siguientes desigualdades

a) $K_1 r \leq d(x, \xi(x, r)) \leq K_2 r$;
b) $K_3\, \eta(x, r) \leq r \leq K_4\, \eta(x, r)$,

son válidas para todo $x \in X$ y para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

Dada una bola $B = B(x, r)$ y un mapeo de retardo T denotaremos con $T(B)$ a la bola $B(\xi(x, r), \eta(x, r))$. Podemos aplicar nuevamente T a $T(B)$, es decir hacer $T(T(B))$ y como resultado obtenemos la bola

$$B(\xi(\xi(x, r), \eta(x, r)), \eta(\xi(x, r), \eta(x, r))),$$

que denotaremos con $T^2(B)$. En general, por $T^n(B)$ entenderemos al resultado de aplicar sucesivamente un número n de veces el mapeo T a la bola B, es decir, $T(T^{n-1}(B)) = T^n(B)$. Considerando la notación $\xi(x, r) = x_1$ y $\eta(x, r) = r_1$, escribiremos $\xi(\xi(x, r), \eta(x, r)) = \xi(x_1, r_1) = x_2$ y de igual manera escribiremos $\eta(\xi(x, r), \eta(x, r)) = r_2$. En consecuencia $T^n(B)$ será la bola $B(x_n, r_n)$ donde $x_n = \xi(x_{n-1}, r_{n-1})$ y $r_n = \eta(x_{n-1}, r_{n-1})$. Por conveniencia de notación escribiremos $B = T^0(B)$.

Con la notación anterior, dada una bola $B = B(x,r)$, un mapeo de retardo T y $n \in \mathbb{N}$, escribiremos

$$B^n = \cup_{j=1}^n T^j(B),$$

y

$$\overline{B^m} = \cup_{j=0}^n T^j(B).$$

Definición: sean (X, d, μ) un espacio casi-métrico de medida y T un mapeo de retardo. Diremos que T genera flujos divergentes si y sólo si existe una constante positiva c tal que

$$\mu\big(B_j - \cup_{i\neq j}\overline{B_i^m}\big) \leq c\,\mu\big(T^k(B_j) - \cup_{i\neq j}\overline{B_i^m}\big)$$

para cualquier sucesión finita de bolas $B_1, \ldots B_n$, para todo $m \geq 0$ y para algún $1 \leq j \leq n$ que puede depender de m.

Definición: sean (X, d, μ) un espacio casi-métrico de medida y T un mapeo de retardo. Diremos que T preserva medida si existe una constante positiva c tal que

$$\mu(B) \leq c\,\mu(T^j(B)),$$

para toda bola B y $j \geq 1$.

3. Descomposición de tipo Calderón-Zygmund

Comenzamos con el siguiente lema de teoría de la medida que es una adaptación al contexto de los espacios casi-métricos de medida con mapeos de retardo de lo hecho en [**18**].

Lema 4.1. *Sean (X, d, μ) un espacio casi-métrico de medida, T un mapeo de retardo que preserva medida y que genera flujos divergentes y n bolas $B_1, \ldots B_n$ en X. Supongamos que para cualquier bola B en X se tiene que $T^i(B) \cap T^j(B) = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces*

$$\mu\big(\cup_{j=1}^n \overline{B_j^m}\big) \leq \frac{m+c}{m}\,\mu\big(\cup_{j=1}^n B_j^m\big), \tag{4.1}$$

para todo $m \geq 1$, donde c es una constante que depende solamente de T y μ.

Demostración. Demostraremos el lema por inducción sobre la cantidad de bolas. Sea $m \geq 1$ y consideremos una bola B. Entonces, es claro que $B = \overline{B^m} - B^m$. Por lo tanto

$$\mu(\overline{B^m} - B^m) = \mu(B).$$

Por otra parte, dado que T preserva medida y que, por hipótesis, la sucesión $\{T^j(B)\}_{J\geq 0}$ es disjunta dos a dos, vemos que existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$\mu(B^m) = \sum_{j=1}^m \mu(T^j(B)) \geq \frac{m}{c_1}\,\mu(B),$$

por lo tanto
$$\mu(B) \leq \frac{c_1}{m}\, \mu(B^m),$$
entonces
$$\begin{aligned}\mu(\overline{B^m}) - \mu(B^m) &= \mu(B)\\ &\leq \frac{c_1}{m}\, \mu(B^m).\end{aligned}$$
De esta última desigualdad obtenemos
$$\mu(\overline{B^m}) \leq \frac{m+c_1}{m}\, \mu(B^m),$$
que es (4.1) para el caso de una bola B.

Supongamos ahora que (4.1) es válido para cualquier sucesión de $n-1$ bolas en X. Consideremos n bolas $B_1, \ldots B_n$ en X, entonces, por hipótesis inductiva, se tiene que
$$\begin{aligned}\mu\big(\cup_{j=1}^n \overline{B_j^m}\big) &= \mu\big(\overline{B_1^m} - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) + \mu\big(\cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big)\\ &\leq \mu\big(\overline{B_1^m} - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) + \frac{m+c}{m}\, \mu\big(\cup_{j=2}^n B_j^m\big).\end{aligned} \tag{4.2}$$
Observemos que
$$\overline{B_1^m} - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m} = \big(B_1 - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) \cup \big(B_1^m - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big), \tag{4.3}$$
y como T genera flujos divergentes, existe una constante $c_2 > 0$ tal que para todo $1 \leq k \leq m$
$$\mu\big(B_1 - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) \leq c_2\, \mu\big(T^k(B_1) - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big). \tag{4.4}$$
Sumando en (4.4) desde 1 hasta m obtenemos
$$\begin{aligned}m\, \mu\big(B_1 - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) &\leq c_2 \sum_{k=1}^m \mu\big(T^k(B_1) - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big)\\ &= c_2\, \mu\big(B_1^m - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big).\end{aligned} \tag{4.5}$$
De (4.3) y (4.5) se tiene que
$$\begin{aligned}\mu\big(\overline{B_1^m} - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) &= \mu\big(B_1 - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) + \mu\big(B_1^m - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big)\\ &\leq \frac{c_2}{m}\, \mu\big(B_1^m - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) + \mu\big(B_1^m - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big)\\ &= \frac{m+c_2}{m}\, \mu\big(B_1^m - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big).\end{aligned} \tag{4.6}$$
Reemplazando (4.6) en (4.2) con $c_3 = \max c, c_2$, obtenemos finalmente
$$\begin{aligned}\mu\big(\cup_{j=1}^n \overline{B_j^m}\big) &\leq \frac{m+c_3}{m}\, \Big(\mu\big(B_1^m - \cup_{j=2}^n \overline{B_j^m}\big) + \mu\big(\cup_{j=2}^n B_j^m\big)\Big)\\ &\leq \frac{m+c_3}{m}\, \big(\mu\big(B_1^m - \cup_{j=2}^n B_j^m\big) + \mu\big(\cup_{j=2}^n B_j^m\big)\big)\\ &= \frac{m+c_3}{m}\, \mu\big(\cup_{j=1}^n B_j^m\big),\end{aligned} \tag{4.7}$$
que es la desigualdad (4.1) para n bolas. □

Como consecuencia del lema anterior tenemos la siguiente descomposición de tipo Calderón-Zygmund de conjuntos acotados y abiertos en $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos no acotados con mapeos de retardo.

TEOREMA 4.2. *Sean (X, d, μ) un $\mathfrak{C}$-espacio homogéneo no acotado, T un mapeo de retardo en las condiciones del Lema 4.1, $E \subset X$ un conjunto abierto y acotado, $0 < \delta < 1$ fijo y m un entero no negativo. Entonces existen una sucesión $\{(x_n, t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E \times \mathbb{R}^+$, una constante $c > 0$ que depende de T y μ y una constante $0 < C(\delta) < 1$, que depende solamente de constantes absolutas y de δ, tales que*

i) $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, t_n)$,
ii) $\mu\big(E \cap B(x_n, t_n)\big) = \delta\, \mu\big(B(x_n, t_n)\big)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,
iii) $\mu(E) \le C(\delta)\, \frac{m+c}{m}\, \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^m(x_n, t_n)\big)$.

DEMOSTRACIÓN. El Lema 1.5 nos dice que los incisos i) y ii) son válidos. El inciso c) del mencionado lema asegura la existencia de una constante $C(\delta) \in (0, 1)$, que depende de constantes absolutas y de δ, tal que

$$\mu(E) \le C(\delta)\, \mu\big(\cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, t_n)\big). \tag{4.8}$$

Observando que $\cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, t_n) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B^m}(x_n, t_n)$, del Lema 4.1 obtenemos

$$\mu\big(\cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, t_n)\big) \le \frac{m+c}{m}\, \mu\big(\cup_{n\in\mathbb{N}} B^m(x_n, t_n)\big).$$

El inciso iii) queda probado reemplazando esta última desigualdad en (4.8). □

4. Retardos geodésicos. Oscilación y continuidad Hölder

Sea (X, d) un espacio casi-métrico. Diremos que una función

$$\tau : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$$

es una isometría, si para todo t_1 y $t_2 \in [a, b]$ se tiene que

$$d(\tau(t_1), \tau(t_2)) = |t_1 - t_2|.$$

Observemos que $\tau(\mathbb{R})$ representa a una "línea recta" en X en el sentido siguiente: si $r \le s \le t$ entonces

$$\begin{aligned} d(\tau(t), \tau(r)) &= |t - r| \\ &= |t - s| + |s - r| \\ &= d(\tau(t), \tau(s)) + d(\tau(s), \tau(r)). \end{aligned}$$

En general, si $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$ entonces

$$d(\tau(t_n), \tau(t_1)) = d(\tau(t_n), \tau(t_{n-1})) + \ldots + d(\tau(t_2), \tau(t_1)).$$

DEFINICIÓN: diremos que un mapeo de retardo S es geodésico si y sólo si se cumplen la siguientes condiciones:

L1) para cada $x \in \Omega$ y $r > 0$ la sucesión $\{S^n(x,r)\}_{n\geq 0}$ pertenece a la imagen de alguna isometría, es decir
$$\{S^n(x,r)\,/\,n \geq 0\} \subset \tau([a,b]),$$
donde $\tau : [a,b] \to \Omega$ es una isometría.

L2) $K_1 = K_2 = \overline{\kappa}$ y $K_3 = K_4 = 1$, con $0 < \overline{\kappa} \leq \mathsf{k}^{-2}$.

L3) si $z \in B(x,r)$ y $(z_n, s) = S^n(z,s)$, $(x_m, h) = S^m(x,h)$ son tales que $d(z_n, z) = d(x_m, x)$ entonces $d(z_n, x_m) < r$.

L4) para cada $x \in \Omega$ y $r > 0$ existe $z \in \Omega$ tal que $S(z,r) = (x,r)$.

Observación. Sean (X,d) un espacio casi-métrico y S un mapeo de retardo geodésico. Consideremos h, s dos números reales positivos, $x \in X$ y sean $(x_n, s) = S^n(x,s)$ y $(x_m, h) = S^m(x,h)$ tales que $d(x_n, x) = d(x_m, x)$, entonces $x_n = x_m$. En efecto, si en $L3)$ de la definición anterior consideramos $z = x$, entonces, para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $z \in B(x,\epsilon)$, luego, por hipótesis y por $L3)$ vemos que $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Esto implica que $x_n = x_m$.

Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto, T un mapeo de retardo y $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales definidas en Ω. Dada la familia $\mathcal{H}$ denotaremos con $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ a la clase de todos los $\mathbb{R}$-espacios funcionales en $\mathcal{H}$. A continuación definiremos clases de conos funcionales similares a los definidos en los Capítulos 2 y 3.

Definición: diremos que un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$, localmente acotado, tiene la propiedad de *oscilación con retardo* si existen una constante absoluta $\theta \in (0,1)$ y una constante geométrica $c \geq 1$ tales que
$$\operatorname*{osc}_{T(B)} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{\widetilde{B}} u,$$
para toda bola $B = B(x,r)$ y para toda $u \in \mathcal{E}$, donde $\widetilde{B} = B(x,c\,r) \subset \Omega$ es una bola que contiene a $B \cup T^{\sigma}(B)$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{O}_P\big(\Omega,\theta,c\big)$.

Definición: diremos que un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ pertenece a la clase de *Harnack con retardo* si existen constantes absolutas $\Theta > 1$ y una constante geométrica $c \geq 1$ tales que
$$\sup_{B(x,r)} u \leq \Theta \inf_{T(B(x,r))} u,$$
para toda $u \in \mathcal{E}$, para toda bola $B(x,r)$ con $u \geq 0$ en $B(x,c\,r) \subset \Omega$ y $T(B(x,r)) \subset \Omega$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{H}_P\big(\Omega,\Theta,c\big)$.

Definición: diremos que un cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ pertenece a la clase de *Harnack débil con retardo* si existen constantes absolutas $q > 0$, y $\vartheta > 0$ y una constante geométrica $c \geq 1$ tales que
$$\left(\fint_{B(x,r)} u^q\right)^{1/q} \leq \vartheta \inf_{T(B(x,r))} u,$$

para toda $u \in \mathcal{E}$, para toda bola $B(x,r)$ con $u \geq 0$ en $B(x,c\,r) \subset \Omega$ y $T(B(x,r)) \subset \Omega$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{H}_P^w\big(\Omega,\vartheta,q,c\big)$.

A continuación probaremos en el contexto abstracto de los espacios de tipo homogéneo con retardos dos resultados, que en el caso parabólico euclideo son debidos a Moser [**26**], que establecen relaciones entre la desigualdad de Harnack, oscilación uniforme y continuidad Hölder.

TEOREMA 4.3. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω y T un mapeo de retardo. Entonces*

$$\mathbb{H}_P\big(\Omega,\Theta,c\big) \cap \mathbb{L}^\infty_{loc} \cap \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{O}_P\big(\Omega,\theta,\tilde{c}\big),$$

para $\theta = 1 - \Theta^{-1}$ y $\tilde{c} = \max\{\,(K_4+K_2)\mathsf{k}\,,c\,\}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{H}_P\big(\Omega,\Theta,\sigma,c\big)$ un $\mathbb{R}$-espacio funcional y $u \in \mathcal{E}$. Sea $B = B(x,r)$ tal que $B(x, r\max\{\,(K_4+K_2)\mathsf{k}\,),c\,\}) \subset \Omega$. Dado que T es un mapeo de retardo, tenemos que

$$T(B) = B(\overline{x}, r_1),$$

con $K_1 r \leq d(\overline{x},x) \leq K_2 r$ y $K_3 r \leq r_1 \leq K_4 r$. Entonces, si $z \in T(B)$

$$\begin{aligned} d(z,x) &\leq \mathsf{k}\,\big(d(z,\overline{x}) + d(\overline{x},x)\big) \\ &< \mathsf{k}\,r_1 + \mathsf{k}\,K_2 r \\ &< (K_4+K_2)\mathsf{k}\,r, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$B \cup T(B) \subset B(x,(K_4+K_2)\mathsf{k}\,r). \tag{4.9}$$

Si denotamos con $\widetilde{B}$ a la bola $B(x, r\max\{\,(K_4+K_2)\mathsf{k}\,,c\,\})$ tenemos que $T(B(x,r)) \subset \Omega$.

Sea $u \geq 0$ en $B(x,c\,r)$, entonces

$$\sup_B u \leq \Theta \inf_{T(B)} u,$$

luego

$$\begin{aligned} \inf_{T(B)} u &\geq \Theta^{-1} \sup_B u \\ &\geq \Theta^{-1} \fint_B u. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Sea

$$\begin{aligned} M &= \sup_{\widetilde{B}} u, & m &= \inf_{\widetilde{B}} u, \\ M^+ &= \sup_{T(B)} u, & m^- &= \inf_{T(B)} u. \end{aligned}$$

De lo anterior y de la definición de $\widetilde{B}$ tenemos que las funciones $M-u$ y $u-m$ pertenecen a $\mathcal{E}$ y son no negativas en $B(x,c\,r)$, por lo tanto, de (4.10), vemos que

$$\inf_{T(B)}(M-u) \geq \Theta^{-1} \fint_B (M-u),$$

es decir

$$M - M^+ \geq \Theta^{-1}\big(M - \fint_B u\big). \tag{4.11}$$

De igual manera

$$m^+ - m \geq \Theta^{-1}\Big(\fint_B u - m\Big). \tag{4.12}$$

Sumando (4.11) y (4.12) obtenemos

$$\begin{aligned} M - M^+ + m^+ - m &\geq \Theta^{-1}\Big(M - \fint_B u\Big) + \Theta^{-1}\Big(\fint_B u - m\Big) \\ &= \Theta^{-1}\big(M-m\big), \end{aligned}$$

es decir

$$(1-\Theta^{-1}) \operatorname*{osc}_{\widetilde{B}} u \geq \operatorname*{osc}_{T(B)} u,$$

con $B \cup T^\sigma(B) \subset \widetilde{B} \subset \Omega$ □

Teorema 4.4. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω y T un mapeo de retardo con la propiedad L4 de la definición de retardo geodésico. Entonces*

$$\mathbb{O}_P\big(\Omega,\theta,c\big) \subset \mathbb{G}\big(\Omega,\alpha,\beta,C\big),$$

para $\alpha = -\log_a \theta$, $\beta = 2(2\mathsf{k})^{-\alpha}$, $C = 2\mathsf{k}^2 + \mathsf{k}$, donde $a = 2(K_4+K_2)\mathsf{k}^2$. En particular, se tiene que si $\mathcal{E} \in \mathbb{O}_P\big(\Omega,\theta,c\big)$, entonces toda $u \in \mathcal{E}$ es localmente Hölder continua con exponente $\alpha = -\log_a \theta$.

Demostración. Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{O}_P\big(\Omega,\theta,c\big)$, $x \in \Omega$, $r > 0$, tales que

$$B(x,c\,r) \subset \Omega.$$

Consideremos

$$s_1 = \big((K_4+K_2)2\mathsf{k}^2\big)^{-1} r. \tag{4.13}$$

Dado que T tiene la propiedad $L4$, tenemos que existe $x_1 \in \Omega$, que depende de s_1, tal que $T(x_1,s_1) = (x,s_1)$ con $d(x_1,x) = K_2 s_1$. De (4.13) vemos que $(K_4+K_2)\mathsf{k}\,s_1 = (2\mathsf{k})^{-1} r$ y que $d(x_1,x) < (2\mathsf{k})^{-1} r$, entonces $B(x_1,(K_4+K_2)\mathsf{k}\,s_1) \subset B(x,r)$. Por otra parte, como vimos en (4.9) del teorema anterior

$$T(B(x_1,s_1)) \cup B(x_1,s_1) \subset B(x_1,(K_4+K_2)\mathsf{k}\,s_1) = \widetilde{B}_1$$

y como $\widetilde{B}_1 \subset \Omega$, por hipótesis, tenemos que

$$\operatorname*{osc}_{T(B(x_1,s_1))} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{\widetilde{B}_1} u,$$

para toda $u \in \mathcal{E}$. Teniendo en cuenta que $T(B(x_1,s_1)) = B(x,s_1)$ y que $\widetilde{B}_1 \subset B(x,r)$ obtenemos

$$\operatorname*{osc}_{B(x,s_1)} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{B(x,r)} u.$$

Consideremos $s_2 = \left((K_4+K_2)2\mathsf{k}^2\right)^{-1} s_1$. Nuevamente, por la propiedad $L4$, se tiene que existe $x_2 \in \Omega$, que depende de s_2, tal que $T(x_2,s_2) = (x,s_1)$ con $d(x_2,x) = K_2 s_2$. Entonces, dado que la relación entre s_2 y s_1 es la misma que la dada en (4.13), para s_1 y r obtenemos

$$\operatorname*{osc}_{T(B(x_2,s_2))} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{\widetilde{B}_2} u,$$

donde

$$B(x,s_1) \supset \widetilde{B}_2 = B(x_2,(K_4+K_2)\mathsf{k}\, s_2) \supset T(B(x_2,s_2)) \cup B(x_2,s_2).$$

Es decir que

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{B(x,s_2)} u &\leq \theta \operatorname*{osc}_{B(x,s_1)} u \\ &\leq \theta^2 \operatorname*{osc}_{B(x,r)} u,\end{aligned}$$

y ademas

$$\begin{aligned} s_2 &= \left((K_4+K_2)2\mathsf{k}^2\right)^{-1} s_1 \\ &= \left((K_4+K_2)2\mathsf{k}^2\right)^{-2} r.\end{aligned}$$

Continuando de esta manera, vemos que existe una sucesión de números $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$s_j = \left((K_4+K_2)2\mathsf{k}^2\right)^{-j} r, \tag{4.14}$$

y

$$\operatorname*{osc}_{B(x,s_j)} u \leq \theta^j \operatorname*{osc}_{B(x,r)} u, \tag{4.15}$$

para toda $u \in \mathcal{E}$.

Sea $y \in \Omega$ tal que $0 < d(x,y) < r$, entonces, existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$\frac{r}{\left((K_4+K_2)2\mathsf{k}^2\right)^{j+1}} \leq d(x,y) < \frac{r}{\left((K_4+K_2)2\mathsf{k}^2\right)^{j}}. \tag{4.16}$$

Tomando $a = (K_4+K_2)2\mathsf{k}^2$, de (4.16) vemos que

$$j < \log_a \frac{r}{d(x,y)}.$$

De (4.14) y (4.16) se tiene que $y \in B(x, s_k)$, entonces, haciendo $b = \frac{r}{d(x,y)}$ y usando (4.15), obtenemos

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \operatorname*{osc}_{B(x,s_k)} u \\ &\leq \theta^j \operatorname*{osc}_{B(x,r)} u \\ &\leq a^{(\log_a \theta)(\log_a b)} \operatorname*{osc}_{B(x,r)} u \\ &= \left(\frac{r}{d(x,y)}\right)^{\log_a \theta} \operatorname*{osc}_{B(x,r)} u. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = -\log_a \theta$ en la desigualdad anterior nos queda

$$|u(x) - u(y)| \leq \big(d(x,y)\big)^{\alpha} \frac{\operatorname{osc}_{B(x,r)} u}{r^{\alpha}}, \tag{4.17}$$

para todo $y \in \Omega$ tal que $0 < d(x,y) < r$. Por último, para una bola $B(x_0, r_0)$, tal que $B(x_0, (2\mathsf{k}^2 + \mathsf{k})r_0) \subset \Omega$, tenemos que $d(x,y) < 2\mathsf{k}\, r_0$ para todo x, $y \in B(x_0, r_0)$, entonces, de (4.17) concluimos finalmente que

$$|u(x) - u(y)| \leq \beta \left(d(x,y)\right)^{\alpha} \|u\|_{L^\infty(B(x_0, 2\mathsf{k}\, r_0))},$$

donde $\beta = 2(2\mathsf{k})^{-\alpha}$. □

Ahora veremos que los $\mathbb{R}$-espacios funcionales en la clase de Harnack débil también tienen la propiedad de oscilación.

TEOREMA 4.5. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en $\Omega \subset X$ abierto y T un mapeo de retardo. Entonces*

$$\mathbb{H}^w_P\big(\Omega, \vartheta, q, c\big) \cap \mathbb{L}^\infty_{loc} \cap \mathcal{H}_\mathbb{R} \subset \mathbb{O}_P\big(\Omega, \theta, \tilde{c}\big),$$

para $\theta = \frac{k_q \vartheta - 1}{k_q \vartheta}$ y $\tilde{c} = \text{máx}\{\, (K_4 + K_2)\mathsf{k}\,, c\,\}$. Como consecuencia del teorema anterior, toda $u \in \mathbb{H}^w_P\big(\Omega, \vartheta, q, c\big) \cap \mathbb{L}^\infty_{loc} \cap \mathcal{H}_\mathbb{R}$ es localmente Hölder continua con exponente $\alpha = -\log_a \theta$ donde $a = 2(K_4 + K_2)\mathsf{k}^2$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $B = B(x,r)$ tal que $\widetilde{B} = B(x, r\, \text{máx}\{\, (K_4 + K_2)\mathsf{k}\,, c\,\}) \subset \Omega$. Recordemos que

$$\varrho(u,v) = \left(\fint_{B(x,r)} (u-v)^q \right)^{1/q},$$

es una casi-métrica en $\mathcal{E}$ para cada bola B y cada $q > 0$, con constante casi-triangular $k_q \geq 1$. Consideremos

$$M = \sup_{B(x,c\,r)} u, \qquad m = \inf_{B(x,c\,r)} u,$$

entonces, por hipótesis, ya que las funciones $M-u$ y $u-m$ pertenecen a $\mathcal{E}$ y son no negativas en $B_c = B(x, c\,r)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{B_c} u &= M - m \\ &= \varrho(M-m) \\ &\leq k_q \big(\varrho(M-u) + \varrho(u-m)\big) \\ &\leq k_q\,\vartheta\big(\inf_{T(B)} (M-u) + \inf_{T(B)} (u-m)\big) \\ &= k_q\,\vartheta\big(M - \sup_{T(B)} u + m - \inf_{T(B)} u\big) \\ &= k_q\,\vartheta\big(\operatorname*{osc}_{B_c} u - \operatorname*{osc}_{T(B)} u\big),\end{aligned}$$

de donde, considerando

$$\theta = \frac{k_q\,\vartheta - 1}{k_q\,\vartheta},$$

vemos que

$$\operatorname*{osc}_{T(B)} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{(B_c)} u \leq \theta \operatorname*{osc}_{\widetilde{B}} u.$$

□

Como consecuencia directa de los teoremas 4.5 y 4.4 tenemos el siguiente

COROLARIO 4.6. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω y T un mapeo de retardo geodésico. Todo $\mathbb{R}$-espacio funcional localmente finito de Harnack débil uniforme es α-localmente Hölder continuo.*

5. La propiedad $\mathbb{KS}^1_P$

Ahora presentamos en el contexto de los espacios de tipo homogéneos con mapeos de retardo una estimación de características similares a la propiedad $\mathbb{KS}^1$ mencionada en los Capítulos 2 y 3.

Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, S un mapeo de retardo geodésico y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω.

DEFINICIÓN: diremos que un cono $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ tiene la propiedad $\mathbb{KS}^1_P$ si para todo $\epsilon \in (0,1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen constantes absolutas $L > 1$, $M > 0$ y una constante $c > 1$, que depende de n, tales que para toda $u \in \mathcal{E}$ y para toda bola $B(x,r)$ con $u \geq 1$ en $B(x, \epsilon\,r)$ y no negativa en $B(x, c\,r) \subset \Omega$ se tiene que

$$u \geq \frac{\epsilon^M}{L^\eta}$$

en $B(x, \epsilon\,r/2) \cup \big((2S)B(x, \epsilon\,r/2)\big) \cup \ldots \cup \big((2S)^n B(x, \epsilon\,r/2)\big) \subset B(x, c\,r)$, donde $(2S)^n B(x,r) = 2^n (S^n(B(x,r))$. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}^1_P\big(\Omega, L, M, c\big)$.

Probaremos dos lemas auxiliares que serán utilizados en la siguiente sección.

LEMA 4.7. *Sean* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo,* $\mathcal{H}$ *un conjunto de funciones reales definidas en* $\Omega \subset X$ *abierto,* $\sigma \geq \overline{\kappa}^{-1}$*,* S *un mapeo de retardo geodésico. Sea* $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_P^1\big(\Omega, L, M, c_1\big) \cap \mathbb{KS}_2\big(\Omega, \gamma, C, c_2\big)$ *y* $u \in \mathcal{E}$ *no negativa en* $B(x, c\,r) \subset \Omega$ *tal que*

$$\inf_{T(B)} u \leq 1,$$

donde $B = B(x, r)$*,* $T = S^\sigma$*,* $T(B) \subset \Omega$ *y* $c = \text{máx}\{\, 1 + 3(\mathsf{k} + \mathsf{k}^{-1})\sigma, (c_2\sigma + 1)\mathsf{k}\, \}$*. Supongamos que existen* $z \in B$ *y* $h > 0$ *tales que*

$$\mu\big(\{u > N\} \cap B(z, h)\big) \geq \gamma\, \mu(B(z, h)),$$

donde N *es una constante positiva. Entonces existen constantes absolutas positivas* ν *y* M_2 *tales que*

I) *si* $h < \sigma r$ *entonces* $h \leq 10\sigma r \left((CN)^{-1} 2^M\right)^{1/\nu}$ *;*
II) *si* $N > M_2$ *entonces* $h < \sigma r$*.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos *i*). Por hipótesis $u \geq 0$ en $B(z, c_2 h)$ y tiene densidad crítica en $B(z, h)$ entonces

$$u \geq CN,$$

en $B(z, h/2)$. Por lo tanto la función $(CN)^{-1}u \geq 1$ en $B(z, h/2)$ y pertenece a $\mathcal{E}$. Por la propiedad $\mathbb{KS}_P$ para $\epsilon = 1/2$ se tiene que existen constantes absolutas L y M tales que

$$u \geq \frac{CN}{L^n 2^M},$$

en $B(z, h/4) \cup \big((2S)B(z, h/4)\big) \cup \ldots \cup \big((2S)^n B(z, h/4)\big) \subset B(z, c_1 h)$, donde $c_1 > 1$ depende de n. La condición $L2$) sobre S nos dice que

$$T(B(x, r)) = B(\overline{x}, r) \quad \text{con} \quad d(\overline{x}, x) = \sigma\overline{\kappa}r,$$

y además

$$(2S)^i(B(z, h/4)) = B(z_i, 2^{i-2}h) \quad \text{con} \quad d(z_i, z_{i-1}) = 2^{i-3}\overline{\kappa}h,$$

y

$$S^j(x, h/4)) = (x_j, h/4) \quad \text{con} \quad d(x_j, x_{j-1}) = \overline{\kappa}h/4.$$

Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^i < \frac{9\sigma r}{h} + 1 \leq 2^{i+1}.$$

entonces, para j de la forma $2^i - 1$, tenemos que

$$j < \frac{9\sigma r}{h} \leq 2j + 1,$$

luego, dado que $h < \sigma r$, obtenemos

$$\frac{hj}{4} > \sigma r. \tag{4.18}$$

Por otra parte, de la condición $L1)$ sobre S, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_j, x) &= d(x_j, x_{j-1}) + d(x_{j-1}, x) \\ &= d(x_j, x_{j-1}) + \ldots + d(x_2, x_1) + d(x_1, x) \\ &= j\,\frac{\overline{\kappa}h}{4}. \end{aligned}$$

De (4.18) y de la igualdad anterior vemos que

$$d(x_j, x) \geq \sigma\overline{\kappa}r = d(\overline{x}, x).$$

Por lo tanto $\overline{x}$ está entre x y x_j, entonces

$$\begin{aligned} d(x_j, \overline{x}) &= d(x_j, x) - d(\overline{x}, x) \\ &= j\,\frac{\overline{\kappa}h}{4} - \sigma\overline{\kappa}r. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Usaremos ahora la condición $L3)$ sobre S para estimar la distancia entre z_i y x_j: nuevamente, dado que S es geodésico se tiene que

$$\begin{aligned} d(z_i, z) &= d(z_i, z_{i-1}) + d(z_{i-1}, z) \\ &= d(z_i, z_{i-1}) + \ldots + d(z_2, z_1) + d(z_1, z) \\ &= \sum_{p=1}^{i} 2^{p-3}\overline{\kappa}h = \frac{\overline{\kappa}h}{8} \sum_{p=1}^{i} 2^p \\ &= \frac{\overline{\kappa}h}{4}\,(2^i - 1) \\ &= j\,\frac{\overline{\kappa}h}{4} = d(x_j, x), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$d(z_i, x_j) < r. \tag{4.20}$$

Sea $y \in T(B(x,r)) = B(\overline{x}, r)$, entonces de (4.19), de (4.20) y teniendo en cuenta que $0 < \overline{\kappa} \leq \mathsf{k}^{-2}$ y $\overline{\kappa}\sigma \geq 1$, vemos que

$$\begin{aligned} d(y, z_i) &\leq \mathsf{k}\,\left(d(y, \overline{x}) + d(\overline{x}, z_i)\right) \\ &\leq \mathsf{k}\,\big(d(y, \overline{x}) + \mathsf{k}\,\big(d(\overline{x}, x_j) + d(x_j, z_i)\big)\big) \\ &< \mathsf{k}\,r + \mathsf{k}^2\big(j\,\frac{\overline{\kappa}h}{4} - \sigma\overline{\kappa}r\big) + \mathsf{k}^2 r \\ &\leq (\mathsf{k} + \mathsf{k}^2)r + j\,\frac{h}{4} - 2\mathsf{k}^2 r \\ &\leq j\,\frac{h}{4} = (2^i - 1)\,\frac{h}{4} < 2^{i-2}h, \end{aligned}$$

lo cual dice que $T(B(x,r)) \subset B(z_i, 2^{i-2}h) = (2T)^i(B(z, h/4)$. De la hipótesis, tenemos que

$$1 \geq \inf_{T(B(x,r))} u \geq \frac{CN}{M_0 L^i 2^M}. \tag{4.21}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} 2^i &< \frac{9\sigma r}{h} + 1 \\ &< \frac{9\sigma r}{h} + \frac{\sigma r}{h} \\ &= \frac{10\sigma r}{h}, \end{aligned}$$

entonces

$$i < \log_2(10\sigma r h^{-1}).$$

Luego, haciendo $\nu = \log_2 L$, obtenemos

$$\begin{aligned} L^i &= 2^{i\nu} \\ &< 2^{\left(\log_2(10\sigma r h^{-1})\right)\nu} \\ &= (10\sigma r h^{-1})^{\nu}. \end{aligned}$$

Reemplazando esta última desigualdad en (4.21) vemos que

$$1 \geq \frac{CN}{L^i 2^M} > \frac{CN}{2^M}\left(\frac{h}{10\sigma r}\right)^{\nu},$$

de donde obtenemos

$$h < 10\sigma r \left(\frac{2^M}{CN}\right)^{1/\nu},$$

como se deseaba.

Veamos ahora *ii*). Sean $M_2 = M_0 L 2^M$, $N > M_2$ y supongamos que $h \geq \sigma r$. Con las mismas notaciones hechas en *i*) tenemos que $j = 7$ para $i = 3$. Entonces

$$\frac{hj}{4} = \frac{7}{4}h > h \geq \sigma r. \tag{4.22}$$

Estamos ahora en las mismas condiciones que en (4.18) del inciso *i*) anterior. Procediendo de igual manera, concluimos que $T^{\sigma}(B(x,r)) \subset (2T)^3(B(z,h/4)$, por lo tanto, de la propiedad $\mathbb{KS}_P^1$ tenemos que

$$\operatorname*{ínf}_{T(B(x,r))} u \geq \frac{CN}{L^3 2^M} = \frac{N}{M_2} > 1,$$

que contradice la hipótesis del lema. $\square$

Probaremos ahora un lema auxiliar que es consecuencia de las propiedades $\mathbb{KS}_P^1$ y $\mathbb{KS}_2$

Lema 4.8. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en $\Omega \subset X$ abierto, S un retardo geodésico y $\overline{\kappa}\sigma \geq 1$. Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_P^1\big(\Omega, L, M, c_1\big) \cap \mathbb{KS}_2\big(\Omega,\gamma,C,c_2\big)$ y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en la bola $B(x,c\,r) \subset \Omega$ con $c = \text{máx}\{\,(2\sigma+1)(\mathsf{k}+\mathsf{k}^{-1}), 2c_2\,\}$. Existe una constante absoluta $M_1 > 0$, que depende de σ, tal que si*

$$\operatorname*{ínf}_{T(B)} u \leq 1, \tag{4.23}$$

entonces

$$\mu\big(\{u < M_1\} \cap 2B\big) > (1-\gamma)\,\mu(2B). \tag{4.24}$$

y además

$$\mu\big(\{u < M_1\} \cap B\big) > (1-\gamma)\,\mu(B), \tag{4.25}$$

donde $B = B(x,r)$ *y* $T = S^\sigma$*.*

Demostración. Probemos primero (4.24). Supongamos que para todo $M_1 > 0$ se tuviese que

$$\mu\big(\{u < M_1\} \cap 2B\big) \le (1-\gamma)\,\mu(2B).$$

Entonces

$$\mu\big(\{(CM_1)^{-1}u < C^{-1}\} \cap 2B\big) \le (1-\gamma)\mu(2B),$$

por lo tanto, dado que $u \ge 0$ en $B(x, 2c_2r)$, la función $(CM_1)^{-1}u \in \mathcal{E}$ tiene densidad crítica en $2B$. Por la propiedad $\mathbb{KS}_2$ concluimos que

$$\inf_{B(x,r)} u \ge CM_1.$$

Entonces, por la propiedad $\mathbb{KS}_P^1$ para $\epsilon = 1$, vemos que

$$u \ge \frac{CM_1}{L^n 2^M},$$

en $B(x, r/2) \cup \big((2S)B(x, r/2)\big) \cup \ldots \cup \big((2S)^n B(x, r/2)\big) \subset B(x, c_1 r)$. Por otra parte, tenemos que

$$T(B(x,r)) = B(\overline{x}, r) \quad \text{con} \quad d(\overline{x}, x) = \sigma\overline{\kappa}r,$$

y además

$$(2S)^i(B(x, r/2)) = B(x_i, 2^{i-1}r) \quad \text{con} \quad d(x_i, x_{i-1}) = 2^{i-2}\overline{\kappa}r.$$

Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{i-1} < 2\sigma + 1 \le 2^i.$$

Entonces

$$\frac{2^{i-1}-1}{2} < \sigma \le \frac{2^i - 1}{2}. \tag{4.26}$$

Dado que T es geodésico tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_i, x) &= d(x_i, x_{i-1}) + \cdots + d(x_1, x) \\ &= \overline{\kappa}r \sum_{p=1}^{i} 2^{p-2} \\ &= \overline{\kappa}r\,\frac{2^i - 1}{2}. \end{aligned}$$

De esta igualdad y (4.26) vemos que

$$d(x_i, x) \ge d(\overline{x}, x),$$

lo cual dice que $\overline{x}$ está entre x_i y x. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, x_i) &= d(x_i, x) - d(\overline{x}, x) \\ &= \overline{\kappa} r \left(\frac{2^i - 1}{2} - \sigma\right) \\ &< \frac{r}{\mathsf{k}^2} \frac{2^i - 1}{2} - r \\ &< \overline{\kappa} r 2^{i-2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $z \in T(B)$, entonces

$$\begin{aligned} d(z, x_i) &\leq \mathsf{k} \left(d(z, \overline{x}) + d(\overline{x}, x_i)\right) \\ &< \mathsf{k}\, r + \frac{2^{i-1} r}{\mathsf{k}} - \mathsf{k}\, r \\ &< 2^{i-1} r. \end{aligned}$$

Así vemos que $T^\sigma(B) \subset B(x_i, 2^{i-1} r) = (2S)^i(B(x, r/2))$. Esto quiere decir que

$$\inf_{T^\sigma(B)} u \geq \frac{M_1}{M_0 L^i 2^M}.$$

Dado que $2^{i-1} < 2\sigma + 1$ tenemos que

$$L^i < L^a,$$

donde $\beta = \log_2(8\sigma + 2) > 2$. Eligiendo $M_1 > M_0 L^\beta 2^M$ concluimos que

$$\inf_{T(B)} u > 1,$$

que contradice (4.23). El caso (4.25) se prueba de igual manera: suponemos que para la constante M_1 elegida en el caso anterior se tuviese que

$$\mu\big(\{u < M_1\} \cap B\big) \leq (1 - \gamma)\, \mu(B).$$

Procedemos de manera similar se ve que

$$T(B) \subset 2\mathsf{k}^3 (2T)^i (B(x, r/4))$$

Entonces

$$\inf_{T(B)} u \geq \frac{M_1}{M_0 L^2 2^M}.$$

La conclusión se sigue del hecho de que $\beta > 2$.

$\square$

6. Desigualdad débil de Harnack con mapeos de retardo

En esta sección probaremos que las propiedades $\mathbb{KS}_P^1$ y $\mathbb{KS}_2$ implican la validez de la desigualdad débil de Harnack si se trabaja en la siguiente clase de espacio de tipo homogéneo:

Definición: diremos que un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) es un $\mathfrak{R}$-espacio homogéneo si:

H1) existen constantes $C > 0$ y $q > 0$ tales que para todo $(x, r) \in X \times \mathbb{R}^+$ y para todo $\epsilon > 0$ se cumple que

$$\mu\big(B(x,(1+\epsilon)r)\big) - \mu\big(B(x,r)\big) \leq C\,\epsilon^q \mu\big(B(x,r)\big).$$

H2) existe una constante $\overline{c} > 0$ tal que para todo x, y, $z \in X$ y $r > s > 0$ con $y \in B(x,s)$ y $z \in X - B(x,r)$ se tiene que

$$d(z,y) \geq \overline{c}(r-s).$$

Estamos ahora en condiciones de probar un resultado similar al dado en el Teorema 3.10 del Capítulo 3. Es de fundamental importancia para demostrar que, bajo ciertas condiciones, un cono funcional $\mathcal{E}$ es de tipo Harnack débil uniforme con retardo. La prueba de esta desigualdad en $\mathfrak{R}$-espacios homogéneos sigue los lineamientos dados en [**18**].

TEOREMA 4.9. *Sean (X, d, μ) un $\mathfrak{R}$-espacio homogéneo no acotado, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en $\Omega \subset X$ abierto, $\mathcal{E}$ un cono funcional con las propiedades $\mathbb{KS}^1_P$ y $\mathbb{KS}_2$, $\sigma \geq 2$ y T un retardo geodésico. Sean $u \in \mathcal{E}$ no negativa, $x \in \Omega$ y $r > 0$. Supongamos que*

$$\inf_{T^\sigma(B)} u \leq 1, \tag{4.27}$$

donde $B = B(x,r)$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\big(\{u > PZ^n\} \cap B\big) \leq \gamma^n \mu(2B), \tag{4.28}$$

donde $\gamma \in (0,1)$, $P > 1$ y $Z > 1$ son constantes absolutas.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$t_n = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad n = 1, \\ \big(1 - \sum_{j=2}^n C(PZ^j)^{-\nu}\big) & \text{si} \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{4.29}$$

Probaremos por inducción sobre n que

$$\mu\big(\{u > PZ^n\} \cap B(x, t_n r)\big) \leq \gamma^n \mu(2B), \tag{4.30}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que si vale (4.30) entonces vale (4.28) pues $1 \leq t_n \leq 2$ eligiendo P y Z suficientemente grande.

Para $\lambda = 1 - \epsilon_0$ sea $0 < C(\lambda) < 1$ la constante de *iii*) del Teorema 4.2. Elegimos m y γ tales que

$$\gamma_1 = \frac{m+1}{m}\,C(\lambda) < \gamma < 1,$$

y

$$\lambda < \gamma.$$

Dado que vale (4.27), usando (4.24) del Lema 4.8, se tiene que existe una constante absoluta M_1 tal que

$$\mu\big(\{u < M_1\} \cap 2B\big) > \epsilon_0\,\mu(2B),$$

es decir

$$\mu\big(\{u \geq M_1\} \cap 2B\big) \leq \lambda\,\mu(2B).$$

Considerando $PZ \geq M_1$ y dado que se eligió $\beta > \gamma$ tenemos probado (4.30) para el caso $n = 1$.

Supongamos que (4.30) vale para $n = h$. Sea $n = h + 1$ y escribamos

$$E_{h+1} = \{u > PZ^{h+1}\} \cap t_{h+1}B.$$

Aplicando la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 4.2) a E_{h+1} a nivel λ, se tiene que existe una sucesión de bolas $\{B_i\} = \{B(x_i, r_i)\}$, con $x_i \in E_{h+1}$, tal que

a) $E_{h+1} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$,
b) $\mu(E_{h+1} \cap B_i) = \lambda\, \mu(B_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$,
c) $\mu(E_{h+1}) \leq \lambda_1\, \mu\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i^m\big)$.

De b) concluimos que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\mu\big(\{u > PZ^{h+1}\} \cap B_i\big) \geq \lambda\, \mu(B_i),$$

por lo tanto

$$\mu\big(\{u \leq PZ^{h+1}\} \cap B_i\big) \leq \epsilon_0\, \mu(B_i)$$

y esto último, usando (4.25) del Lema 4.8, implica que

$$\inf_{T(B_i)} u \geq \frac{PZ^{h+1}}{M_1},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mu\big(\{u \geq \frac{PZ^{h+1}}{M_1}\} \cap T(B_i)\big) = \mu(T(B_i)) \geq \lambda\, \mu(T(B_i)),$$

es decir que

$$\mu\big(\{u < \frac{PZ^{h+1}}{M_1}\} \cap T(B_i)\big) \leq \epsilon_0\, \mu(T(B_i)).$$

Una nueva aplicación de (4.25) del Lema 4.8 nos dice que

$$\inf_{T^2(B_i)} u \geq \frac{PZ^{h+1}}{(M_1)^2}.$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Continuando de esta manera obtenemos finalmente que

$$\inf_{\Gamma^m} u \geq \frac{PZ^{h+1}}{(M_1)^m}, \tag{4.31}$$

donde $\Gamma^m = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i^m$. Supongamos ahora que

$$\mu(E_{h+1}) > \gamma^{h+1}\, \mu(2B), \tag{4.32}$$

y sea

$$Y = \{u \geq \frac{PZ^{h+1}}{(M_1)^m}\} \cap t_h B.$$

De (4.31) vemos que

$$\Gamma^m \subset \{u \geq \frac{PZ^{h+1}}{(M_1)^m}\}.$$

Si elegimos $Z \geq (M_1)^m$ es claro que

$$\{u \geq \frac{PZ^{h+1}}{(M_1)^m}\} \subset \{u \geq PZ^h\},$$

por lo tanto, de lo anterior y de la validez de (4.30) para el caso $n = h$, vemos que

$$\begin{aligned} \mu(Y) &\leq \mu\big(\{u \geq PZ^h\} \cap t_h B\}\big) \\ &\leq \gamma^h \, \mu(2B). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Luego, de (4.32) y (4.33) concluimos que

$$\mu(E_{h+1}) > \gamma \, \mu(Y). \tag{4.34}$$

Teniendo en cuenta c) de la descomposición de Calderón-Zygmund, que $\Gamma^m \cap t_h B \subset Y$, (4.34) y (4.32), obtenemos

$$\begin{aligned} \mu\big(\Gamma^m \cap (\Omega - t_h B)\big) &\geq \mu(\Gamma^m) - \mu(\Gamma^m \cap t_h B) \\ &\geq \frac{1}{\gamma_1}\mu(E_{h+1}) - \mu(Y) \\ &> \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\right)\mu(E_{h+1}) \\ &> \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\right)\gamma^{h+1}\mu(2B) \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\right)\gamma^{h+1}\mu(t_h B). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Sea

$$\eta = \sup\{d(z,x) \,/\, z \in \Gamma^m \cap (\Omega - t_h B)\}.$$

Entonces, para todo $\delta > 0$ tenemos que

$$\Gamma^m \cap (\Omega - t_h B) \subset B(x, \eta + \delta) - t_h B,$$

luego, de (4.35) se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(B(x,\eta+\delta)) - \mu(t_h B) &= \mu(B(x,\eta+\delta) - t_h B) \\ &\geq \mu\big(\Gamma^m \cap (\Omega - t_h B)\big) \\ &> \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\right)\gamma^{h+1}\mu(t_h B). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Sea $\epsilon = \frac{\eta+\delta-t_h r}{t_h r}$, entonces, tenemos que $\epsilon > 0$ y $\eta + \delta = (1+\epsilon)t_h r$. Dado que (X, d, μ) es un $\mathfrak{R}$-espacio homogéneo se tiene que existen constantes absolutas $p > 0$ y $\tilde{C} > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \mu(B(x,\eta+\delta)) - \mu(t_h B) &= \mu(B(x,(1+\epsilon)t_h r)) - \mu(t_h B) \\ &\leq \tilde{C}\,\epsilon^p \mu(t_h B) \\ &= \tilde{C}\left(\frac{\eta+\delta-t_h r}{t_h r}\right)^p \mu(t_h B). \end{aligned}$$

Reemplazando esta última desigualdad en (4.36) y escribiendo

$$\xi = \tilde{C}^{-1}\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\right),$$

obtenemos que

$$\left(\frac{\eta + \delta - t_h r}{t_h r}\right)^p > \xi\,\gamma^{h+1}.$$

Luego, vemos que

$$\eta + \delta > t_h r(\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} + 1)$$

para δ positivo y arbitrario. Por lo tanto

$$\eta > t_h r(\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} + 1). \tag{4.37}$$

De esta última desigualdad vemos que existe $z_0 \in \Gamma^m \cap (\Omega - t_h B)$ tal que

$$d(z_0, x) \geq t_h r(\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} + 1), \tag{4.38}$$

es decir que $z_0 \notin B\big(x, t_h r(\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} + 1)\big)$. Por otra parte, dado que cada $x_i \in t_{h+1}B \subset t_h B$, tenemos que existe una constante absoluta $\overline{c} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} d(z_0, x_i) &\geq \overline{c}\,\big(t_h r(\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} + 1) - t_h r\big) \\ &= \overline{c}\,\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} t_h r. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Notemos también que $z_0 \in T^k(B_i)$ para algún $1 \leq k \leq m$ y alguna bola $B_i = B(x_i, r_i)$. Dado que T es geodésico, se tiene que para todo $j \geq 0$

$$T^j(B_i) = B(x_i^j, r_i),$$

con $d(x_i^{j+1}, x_i^j) = \sigma\overline{\kappa}\, r_i$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(z_0, x_i) &\leq d(z_0, x_i^k) + d(x_i^k, x_i) \\ &= d(z_0, x_i^k) + d(x_i^k, x_i^{k-1}) + \ldots + d(x_i^1, x_i) \\ &< r_i + k\overline{\kappa}\, r_i) \\ &\leq 2(m+1)\overline{\kappa} r_i. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Finalmente, de (4.38), (4.39) y (4.40) obtenemos

$$\begin{aligned} 2(m+1)\overline{\kappa} r_i &> d(z_0, x_i) \\ &\geq \overline{c}\,\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} t_h\, r \\ &\geq \overline{c}\,\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p} r, \end{aligned}$$

pues $t_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$r_i > \frac{\overline{c}\,\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p}}{2(m+1)\overline{\kappa}}\, r. \tag{4.41}$$

Sea M_2 la constante absoluta del Lema 4.7. Entonces, de $ii)$ del citado lema, si elegimos $P > 1$ y $Z > \text{máx}\{M_2, 1\}$ concluimos que

$$r_i < \sigma t_{h+1} r,$$

pues para cada $i \in \mathbb{N}$ se tenía que $\mu\big(\{u > PZ^{h+1}\} \cap B_i\big) \geq \lambda\,\mu(B_i)$, con $\lambda = 1-\epsilon_0$. Teniendo en cuenta el inciso i) del mismo lema, de la desigualdad anterior vemos que

$$r_i \leq 6\sigma t_{h+1} r \left(\frac{2^M M_0}{PZ^{h+1}}\right)^{1/\nu},$$

donde M_0, M y ν son constantes absolutas.

Reemplazando esta última desigualdad en (4.41) y recordando que $t_{h+1} \leq 2$, obtenemos

$$12\sigma \left(\frac{2^M M_0}{PZ^{h+1}}\right)^{1/\nu} > \frac{\overline{c}\,\xi^{1/p}\gamma^{(h+1)/p}}{2(m+1)\overline{\kappa}}. \tag{4.42}$$

Si elgimos P y Z tales que

$$\left(\frac{24(m+1)\sigma\overline{\kappa}}{\overline{c}\,\xi^{1/p}}\right)^{\nu} 2^M M_0 \leq P,$$

y

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{p/\nu} \leq Z,$$

vemos que la desigualdad (4.42) no puede ser válida. Por lo tanto, para tal elección de P y Z, elección que depende solamente de constantes absolutas y de σ, concluimos que la suposición (4.32) conduce a una contradicción. Esto implica la validez de (4.30) para el caso $n = h+1$. □

Ahora estamos en condiciones de probar la desigualdad débil de Harnack en $\mathfrak{R}$-espacios homogéneos con mapeos de retardo geodésicos.

Teorema 4.10. *Sean (X, d, μ) un $\mathfrak{R}$-espacio homogéneo no acotado, $\sigma \geq 2$, T un retardo geodésico y $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω. Todo cono funcional $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$ con las propiedades $\mathbb{KS}^1_P$ y $\mathbb{KS}_2$ es de tipo Harnack débil uniforme con retardo.*

Demostración. Sea $u \in \mathcal{E}$ tal que $\inf_{T^\sigma(B)} u \leq 1$ para $B = B(x,r)$. Por el teorema anterior, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\mu\big(\{u > PZ^n\} \cap B(x, t_n r)\big) \leq \gamma^n\, \mu(B(x, 2r)), \tag{4.43}$$

donde $P > 1$, $Z > 1$ y $\gamma \in (0,1)$ son constantes absolutas y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales en el intervalo cerrado $[1,2]$. Sea $t \geq PZ$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$PZ^n \leq t < PZ^{n+1},$$

luego

$$n \leq \log_Z(tP^{-1}),$$

y entonces

$$\gamma^n \leq (tP^{-1})^{\log_Z \gamma} = C\,t^{-\beta},$$

donde $\beta = \log_Z \gamma^{-1}$ y C es una constante que depende solamente de P, Z y γ. Reemplazando esta última desigualdad en (4.43) vemos que

$$\begin{aligned} \mu\big(\{u > t\} \cap B\big) &\leq \mu\big(\{u > PZ^n\} \cap B\big) \\ &\leq \mu\big(\{u > PZ^n\} \cap B(x, t_n r)\big) \\ &\leq C\, t^{-\beta} \mu(B), \end{aligned} \tag{4.44}$$

donde ahora C depende también de la constante de duplicación de μ. Sea $q = \beta/2$, entonces, de (4.44) obtenemos

$$\begin{aligned} \|u\|^q_{L^q(B)} &= q \int_0^\infty t^{q-1} \mu\big(\{u > t\} \cap B\big)\, dt \\ &\leq (PZ)^q \mu(B) + q \int_{PZ}^\infty t^{q-1} \mu\big(\{u > t\} \cap B\big)\, dt \\ &\leq (PZ)^q \mu(B) + \tilde{C}_1 \mu(B) \int_{PZ}^\infty t^{q-1-\gamma} dt \\ &\leq \big((PZ)^q + \tilde{C}_1 (PZ)^{-q}\big) \mu(B) \\ &= \Theta\, \mu(B). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Consideremos ahora $u \in \mathcal{E}$ tal que $u \geq 0$ en $B(x, c\,r)$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ la función

$$w = \frac{u + \epsilon}{\inf_{T(B)}(u + \epsilon)},$$

está bien definida, pertenece a $\mathcal{E}$ y además

$$\inf_{T(B)} w = 1.$$

Por lo tanto, de (4.45), vemos que

$$\|u + \epsilon\|^q_{L^q(B)} \leq \Theta\, \mu(B) \big(\inf_{T(B)} (u + \epsilon)\big)^q,$$

es decir

$$\left(\fint_B u^q\right)^{1/q} \leq \Theta(\epsilon + \inf_{T(B)} u).$$

La conclusión se sigue de la arbitrariedad de ϵ. □

7. Desigualdad de Harnack con mapeos de retardo

Veremos ahora que en los $\mathbb{R}$-espacios funcionales con las propiedades $\mathbb{KS}^1_P$ y $\mathbb{KS}_2$ podemos obtener la desigualdad de Harnack como consecuencia de la Desigualdad Débil de Harnack. Previamente probaremos unos lemas auxiliares.

Lema 4.11. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω y $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espacio funcional en $\mathcal{H}$ con la* *propiedad* $\mathbb{KS}_2$*. Sean* $u \in \mathcal{E}$*,* $q > 0$*,* $C_0 > 0$*, tales que* $u \geq 0$ *en* $B = B(x, 2\mathsf{k}\, r)$ *y*

$$\fint_B u^q \leq C_0. \tag{4.46}$$

Sea $v = (2M_0 - 1)^{-1} M_0$*, donde* M_0 *es una constante de la propiedad* $\mathbb{KS}_2$*. Entonces existen constantes positivas* C_1*,* δ *y* N_0*, que dependen solamente de* C_0*,* q*,* M_0*,* ϵ_0 *y* k*, tales que para todo* $y \in B(x, r)$ *y* $n \geq N_0$ *si*

$$u(y) \geq v^{n-1} M_0, \tag{4.47}$$

entonces

$$\sup_{B(y,s)} u > v^n M_0, \tag{4.48}$$

para $s = C_1 v^{-\delta\, n} r$ *y* $B(y, s) \subset B$*.*

Demostración. Dado que $v > 1$ tenemos que existe N_0, que depende de C_1, M_0, y δ, tal que $C_1 v^{-\delta\, n} < 1$ para $n \geq N_0$. Para tal N_0, tenemos que $s < r$, y por lo tanto $B(y, s) \subset B$. Supongamos que (4.48) no vale, es decir que

$$\sup_{B(y,s)} u \leq v^n M_0, \tag{4.49}$$

y consideremos la función

$$\phi(z) = \frac{v^n M_0 - u(z)}{v^{n-1}(v - 1) M_0}.$$

Dado que $v > 1$ y que $\mathcal{E}$ es un $\mathbb{R}$-espacio, tenemos que ϕ está bien definida y que pertenece a $\mathcal{E}$. De (4.49) vemos que $\phi \geq 0$ en $B(y, s)$ y de (4.47) concluimos que $\phi(y) \leq 1$ pues

$$\phi(y) = \frac{v^n M_0 - u(y)}{v^{n-1}(v - 1) M_0} \leq \frac{v^n M_0 - v^{n-1} M_0}{v^{n-1}(v - 1) M_0} = 1.$$

Entonces

$$\operatorname*{inf}_{B(y,s)} \phi \leq 1.$$

Pero esto último, dado que vale la propiedad $\mathbb{KS}_2$ y $B(y, 2c\, s) \subset B$, implica que

$$\mu\big(\{\phi < M_0\} \cap B(y, 2s)\big) > (1 - \gamma)\, \mu(B(y, 2s)).$$

Por otra parte, si $\phi(z) < M_0$ entonces

$$\begin{aligned} u(z) &> v^n M_0 - v^{n-1}(v - 1) M_0^2 \\ &= v^n M_0 \big(1 - \frac{v - 1}{v}\, M_0\big) \\ &= v^n M_0 \big(1 - M_0 + v^{-1}\, M_0\big) \\ &= \frac{v^n M_0}{2}, \end{aligned}$$

pues $v^{-1} M_0 = M_0 - 1/2$ y $M_0 > 1$. Por lo tanto

$$\{\phi < M_0\} \subset \{u > \frac{v^n M_0}{2}\},$$

y entonces

$$\mu\big(\{u > \frac{v^n M_0}{2}\} \cap B(y,2s)\big) > (1-\gamma)\,\mu(B(y,2s)).$$

Teniendo en cuenta esta última desigualdad, que $B_s = B(y,2s) \subset B$ y que $u \geq 0$ en B, de (4.46) obtenemos

$$\begin{aligned} C_0\,\mu(B) &\geq \int_B u^q \\ &\geq \int_{\{u>\frac{v^n M_0}{2}\}\cap B_s} u^q \\ &> \left(\frac{v^n M_0}{2}\right)^q \mu\big(\{u > \frac{v^n M_0}{2}\} \cap B_s\big) \\ &> \left(\frac{v^n M_0}{2}\right)^q (1-\gamma)\,\mu(B_s). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Dado que $y \in B(x,r)$, tenemos que $B \subset B(y,(2c+2)\mathsf{k}^2 r)$. Luego

$$\mu(B) \leq \left(\frac{(2c+2)\mathsf{k}^2 r}{2s}\right)^b \mu(B_s), \tag{4.51}$$

donde $b = \log_2 A$ y A es la constante de duplicación de μ. Reemplazando (4.51) en (4.50) concluimos que

$$C_0 \left(\frac{(2c+2)\mathsf{k}^2 r}{2s}\right)^b > \left(\frac{v^n M_0}{2}\right)^q (1-\gamma).$$

Tomando

$$\delta = \frac{q}{b},$$

y

$$C_1 = \left(\frac{C_0}{1-\gamma}\right)^{1/b} \left(\frac{M_0}{2}\right)^\delta (c+1)\mathsf{k}^2,$$

vemos que

$$C_1\, v^{-\delta\, n} r > s,$$

lo que contradice la hipótesis. $\square$

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente

LEMA 4.12. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω, $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espacio funcional en $\mathcal{H}$ con la propiedad $\mathbb{KS}_2$ y ρ una métrica en X tal que ρ^α es (c_1,c_2)-equivalente a d*

para algún $\alpha > 1$. Sean $u \in \mathcal{E}$, $q > 0$, $C_0 > 0$, tales que $u \geq 0$ en $B = B_\rho(x,)$ y

$$\fint_B u^q \leq C_0. \tag{4.52}$$

Sea $v = (2M_0 - 1)^{-1}M_0$ donde M_0 es una constante de la propiedad $\mathbb{KS}_2$. Entonces existen constantes positivas C_1, δ y N_0, que dependen solamente de C_0, q, ϵ_0 y k tales que para todo $y \in B(x,r)$ y $n \geq N_0$ si

$$u(y) \geq v^{n-1}M_0, \tag{4.53}$$

entonces

$$\sup_{B(y,s)} u > v^n M_0, \tag{4.54}$$

para $s = C_1 v^{-\delta} r$ y $B(y,s) \subset B$.

Como consecuencia del lema anterior tenemos la siguiente estimación para el $\sup u$:

Teorema 4.13. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales continuas definidas en $\Omega \subset X$ abierto y $\mathcal{E} \in \mathbb{KS}_2(\Omega, \gamma, C, c)$ un $\mathbb{R}$-espacio funcional. Sean $u \in \mathcal{E}$, C_0 y q constantes positivas y sea v como en el lema anterior. Existen constantes $c^* > 1$, $\beta > 1$ y $c_1^* < c^*$ tales que si $u \geq 0$ en $B(x, c^*r) \subset \Omega$ y (4.46) vale en $B(x, c^*r)$, entonces existe una constante $\beta > 1$, que depende solamente de C_0, q y v, tal que*

$$\sup_{B(x,c_1^*r)} u \leq v^{\beta-1}M_0. \tag{4.55}$$

Demostración. Sean δ, N_0 y v como en el lema anterior. Entonces, dado que $\delta > 0$ y $v > 1$, tenemos que existe una constante $\eta > N_0$, que depende de C_1, δ y v, tal que

$$\sum_{j \geq \eta} \frac{C_1}{v^{\delta j}} < \frac{1}{2}. \tag{4.56}$$

Supongamos que (4.55) no vale. Probaremos por inducción que existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset B(x,r)$ tal que

$$u(z_n) > v^{\eta+n-2}M_0, \quad \text{y} \quad z_n \in B(z_{n-1}, C_1 v^{-\delta(\eta+n-2)r}), \tag{4.57}$$

para todo $n \geq 2$. Esto dice que existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset B(x,r)$ tal que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} u(z_n) = \infty,$$

lo cual es un absurdo, pues u es continua (Corolario 4.6).

Sea $n = 2$. Ya que (4.55) no vale, existe $z_1 \in B(x, r/2) \subset B(x,r)$ tal que

$$u(z_1) > v^{\eta-1}M_0.$$

Del Lema 4.11 vemos que

$$\sup_{B(z_1,s_1)} u > v^{\eta} M_0,$$

para $s_1 = C_1 v^{-\delta\eta} r$. Luego, existe $z_2 \in B(z_1, s_1)$ tal que $u(z_2) \geq v^{\eta} M_0$. Veamos ahora que $z_2 \in B(x,r)$: de (4.56) se tiene que $s_1 < 1/2$, entonces

$$\begin{aligned} d(z_2, x) &\leq d(z_2, z_1) + d(z_1, x) \\ &< s_1 + r/2 < r, \end{aligned}$$

y queda probado (4.57) para $n = 2$.

Supongamos ahora que (4.57) vale para $2 \leq n \leq h$, entonces, dado que $z_h \in B(x,r)$, del Lema 4.11 tenemos que

$$\sup_{B(z_h,s_h)} u > v^{\eta+h-1} M_0, \tag{4.58}$$

donde $s_h = C_1 v^{-\delta(\eta+h-1)} r$. Esto último dice que

$$z_n \in B(z_{n-1}, s_{n-1}),$$

para $2 \leq n \leq h$. De (4.58) vemos que existe $z_{h+1} \in B(z_h, s_h)$ tal que

$$u(z_{h+1} > v^{\eta+h-1} M_0.$$

Veamos ahora que $z_{h+1} \in B(x,r)$: de (4.56) vemos que

$$\begin{aligned} d(z_{h+1}, x) &\leq d(z_{h+1}, z_h) + d(z_h, x) \\ &\leq d(z_{h+1}, z_h) + d(z_h, z_{h-1}) + \ldots + d(z_1, x) \\ &< s_h + \ldots + s_1 + r/2 \\ &= C_1 v^{-\delta(\eta+h-1)} r + \ldots + C_1 v^{-\delta\eta} r + r/2 \\ &< \sum_{j \geq \eta} \frac{C_1}{v^{\delta j}}\, r + r/2 \\ &< r \end{aligned}$$

con lo cual queda probado (4.57) para $n = h+1$. □

TEOREMA 4.14. *Sean (X, d, μ) un $\mathfrak{R}$-espacio homogéneo no acotado, $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones reales definidas en Ω, $\sigma \geq 2$ y T un retardo geodésico. Todo $\mathbb{R}$-espacio funcional con las propiedades $\mathbb{KS}_P^1$ y $\mathbb{KS}_2$ es de tipo Harnack uniforme con retardo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in \Omega$ y $u \in \mathcal{E}$ no negativa en $B(x,r)$. Dado $\epsilon > 0$ consideramos la función

$$w = \frac{u + \epsilon}{\inf_{T^{\sigma}(B)}(u + \epsilon)},$$

donde $B = B(x,r)$. Tenemos que w está bien definida, que $w \in \mathcal{E}$ y también que $\inf_{T^{\sigma}(B)} w = 1$. Del Teorema 4.10 tenemos que existen constantes absolutas $q > 0$ y $\Theta > 1$ tales que

$$\left(\fint_{\widetilde{B}} w^q \right)^{1/q} \leq \Theta \inf_{T^\sigma(B)} w = \Theta.$$

Por lo tanto, tomando $C_0 = \Theta^q$, vemos que (4.46) vale en B, entonces, el Teorema 4.13 nos dice que existe uns constante C absoluta y positiva tal que

$$\sup_B w \leq C,$$

es decir

$$\sup_B (u + \epsilon) \leq C \inf_{T^\sigma(B)} (u + \epsilon).$$

Dado que ϵ es arbitrario, concluimos finalmente que

$$\sup_B u \leq C \inf_{T^\sigma(B)} u,$$

para toda bola B y toda $u \in \mathcal{E}$ no negativa en B. □

Bibliografía

[1] Aimar, H., *Notas del Curso Espacios de Tipo Homogéneo I y II* , Universidad Nacional del Litoral, 1997-1998.

[2] Aimar, H., *Singular Integrals and Approximate Identities on Spaces of Homogeneous Type*, Trans. A.M.S., Vol 292, 1, 135-153, 1985.

[3] Aimar, H., *Elliptic and Parabolic BMO and Harnack's Inequality*, Trans. A.M.S., Vol 306, 265-276, 1988.

[4] Aimar, H.; Forzani, L., On the Besicovitch Property for Parabolic Balls, Preprint.

[5] Aimar, H.; Iaffei, B., *Doubling Property for the Haar measure on Quasi-metric Groups*, Preprint.

[6] Besicovitch, A., *A General Form of the Covering Principle and Relative Differentiation of Additive Functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 41, 103-110, 1945.

[7] Besicovitch, A., *A General Form of the Covering Principle and Relative Differentiation of Additive Functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 42, 1-10, 1946.

[8] Caffarelli, L., *Mẽtodos de Continuação em Equações Eliticas Não-Lineares*, CNPq-IMPA, VII Escola Lat. Am. de Mat., 1986.

[9] Caffarelli, L. ; Cabré, X., *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, A.M.S., Colloquium Publications, Vol 43, 1995.

[10] Caffarelli, L.; Gutierrez, C., *Real Analysis Related to the Monge-Ampère Equation*, Trans. A.M.S., Vol 348, 3, 1075-1092, 1996.

[11] Caffarelli, L.; Gutierrez, C., *Properties of the Solutions of the Linearized Monge-Ampère Equation*, Journal A.M.S., 1996.

[12] Coifman, R.; de Guzmán, M., *Singular Integrals and Multipliers on Homogeneous Spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina, 25, 137-144, 1970.

[13] Coifman, R.; Weiss, G., *Analyse Harmonique Non-Commutative sur certains espaces homogènes*, Lectures Notes in Math., Vol 242, Springer-Verlag, 1971.

[14] De Giorgi, E., *Sulla Differenziabilitá e L'analiticitá delle Estremali degli Integrali Multipli Regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (3), 3, 25-43, 1957.

[15] de Guzmán, M., *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lectures Notes in Math., Vol 481, Springer-Verlag, 1975.

[16] Gilbarg, D.; Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1983.

[17] Lu, G., *Covering Lemmas and BMO Estimates for Eigenfunctions on Riemmanian Surfaces*, Rev. Mat. Iber., Vol 7, 3, 221-246, 1991.

[18] Huang, Q., *Harnack Inequality for the Linearized Parabolic Monge-Ampère Equation*, Preprint.

[19] Kelley, J. L., *Topología General*, EUDEBA, 1975.

[20] Kenig, C., *Potential Theory of Non-Divergence Form Elliptic Equations*, Preprint.

[21] Krylov, N.; Safonov, M., *An Estimate of the Probability that a Diffusion Process Hits a Set of Positive Measure*, Dokl. Akad. Nauk., 245, 253-255, 1979; Traducción al inglés en Soviet Math. Dokl., 20, 253-255, 1979.

[22] Krylov, N.; Safonov, M., *Certain Properties of Solutions of Parabolic Equations with Measurable Coefficients*, Izvestia Akad. Nauk., 40, 161-175, 1980.

[23] Macías, R.; Segovia, C., *Lipschitz Functions on Spaces of Homogeneous Type*, Advances in Math., 33, 257-270, 1979.

[24] Macías, R.; Segovia, C., *A Well-Behaved Quasi-Distance for Spaces of Homogeneous Type*, Trabajos de Matemática, 32, I.A.M., 1981.

[25] Moser, J., *On Harnack's Theorem for Elliptic Differentials Equations*, Comm. in Pure Appl. Math., 13, 457-468, 1960.

[26] Moser, J., *A Harnack Inequality for Parabolic Differential Equations*, Comm. in Pure Appl. Math., 17, 101-134, 1964.

[27] Nash, J., *Continuity of Solutions of Parabolic and Elliptic Equations*, Amer. J. Math., 80, 931-954, 1958.

[28] Parthasarathy, K., *Introduction to Probability and Measure*

[29] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1974.

[30] Sawyer, E.; Wheeden, R., *Weighted Inequalities for Fractional and Poisson Integrals in Euclidean and Homogeneous Spaces*, Amer. Journal of Math.

[31] Vol'berg, A.; Konyagin, S., *There is a Homogeneous Measure on any Compact Subset in* $\mathbb{R}^n$, Soviet Math. Dokl., 2, Vol. 30, 1984.

[32] Wheeden, R.; Zygmund, A., *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, 1977.