

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS
DE LA INFORMACIÓN GEOGRÁFICA

Optimización de sistemas de coordenadas para modelos espaciales

Sebastián Orihuela

FICH
FACULTAD DE INGENIERIA
Y CIENCIAS HIDRICAS

Trabajo Final de Maestría **2025**



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS PARA MODELOS ESPACIALES

Sebastián Orihuela

Trabajo Final remitido al Comité Académico de la Maestría
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de
MAGÍSTER EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN GEOGRÁFICA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2025

Secretaría de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria, Paraje “El Pozo”,
S3000, Santa Fe, Argentina



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS PARA MODELOS ESPACIALES

Sebastián Orihuela

Director:

Dr. Silvio Graciani

FICH-UNL

Jurado Evaluador:

Dr. Enrique Albornoz

FICH-UNL

Dr. Diego Godoy

UG Dachary

Dr. Gabriel Cremona Parma

UNISUL, Brasil

2025

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA

En la sede de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, en la ciudad de Santa Fe, a los veinte días del mes de mayo del año dos mil veinticinco, se reúnen en forma online sincrónica los miembros del Jurado designado para la evaluación del Trabajo Final de Maestría en Tecnologías de la Información Geográfica titulado *“Optimización de Sistemas de Coordenadas para Modelos Espaciales.”*, desarrollado por el Ing. Sebastián ORIHUELA, DNI N° 23.695.394, bajo la dirección del Dr. Silvio Graciani. Ellos son: el Dr. Enrique Albornoz, el Dr. Diego Godoy, y el Dr. Gabriel Cremona Parma. -----

La Presentación oral y la defensa del Trabajo Final se efectúan bajo la modalidad online sincrónica según lo establecido por Resolución CS N° 382/21.

Luego de escuchar la Defensa Pública y de evaluar el Trabajo Final, el Jurado considera:

Que en función de la calidad del trabajo escrito presentado, la temática totalmente ajustada a la Maestría, la integración de los distintos saberes aprendidos durante el cursado de la carrera, la metodología de experimentación teórica y práctica con la cual ha desarrollado su trabajo de investigación, el grado de dificultad del tema abordado, y la defensa oral presentada, el Jurado considera aprobar la Tesis con calificación 10 Sobresaliente.

Sin más, se da por finalizado el Acto Académico con la firma de los miembros del Jurado al pie de la presente. -----

Dr. Enrique Albornoz

Dr. Diego Godoy

Dr. Gabriel Cremona Parma



Dr. JOSÉ LUIS MACOR
SECRETARIO DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas
Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional N° 168 - Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

Declaración del Autor

Esta disertación ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Magíster en Tecnologías de la Información Geográfica ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en el Repositorio Institucional de Acceso Abierto -RIAA- de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté a disponible a sus lectores bajo las condiciones estipuladas.

Citaciones breves de esta disertación son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para una citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concedidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

Sebastián Orihuela

Índice General

1. Introducción	1
1.1. El problema y estado del arte	1
1.2. Trabajos similares	2
2. Objetivos	4
2.1. Objetivo general	4
2.2. Objetivos específicos	4
2.3. Metodología	4
2.4. Esquema del trabajo final	5
3. Marco teórico	5
3.1. La superficie de referencia	5
3.2. Transformación de la superficie de referencia y alteración de escala	8
3.3. Grillas de coordenadas	12
3.4. Propiedades del sistema de coordenadas buscado	14
4. Aéreas de estudio y proyecciones cartográficas consideradas	15
4.1. Áreas de estudio	16
4.2. Proyección de Mercator. Latitudes isométrica y conforme	16
4.3. Proyección de Gauss-Schreiber	19
4.4. Proyección de Gauss-Krüger	22
4.5. Proyección cónica conforme de Lambert	24
4.6. Proyección de Lagrange	26
4.7. Proyección de Adams	28
4.7.1. Las proyecciones de Spilhaus	31
4.8. Polinomios armónicos en general	32
4.9. Polinomios armónicos en coordenadas de Mercator	34
4.10. Polinomios armónicos en coordenadas de Schreiber	35
5. Criterios de optimización	37
6. Implementación de la optimización por MMC	41
6.1. Algoritmo para el cálculo de los coeficientes	41
6.2. Descripción del cálculo de los coeficientes	41
6.2.1. Cálculo del valor óptimo de $\hat{k}_0$	43
6.2.2. Actualización de coeficientes preliminares	44

6.2.3. Inversión de coordenadas	44
7. Implementación de la optimización por AG	46
7.1. Algoritmo genético para polinomios armónicos	49
7.2. Algoritmo genético para proyecciones convencionales	50
8. Implementación, ensayos y resultados	51
8.1. Provincia de Misiones	54
8.1.1. Polinomios armónicos	55
8.1.2. Proyección de Gauss-Krüger	66
8.1.3. Proyección CCL	66
8.1.4. Resumen de resultados	68
8.2. Argentina bicontinental	74
8.2.1. Polinomios armónicos	74
8.2.2. Proyección de Gauss-Krüger	78
8.2.3. Resumen de resultados	78
8.3. Superficie de los océanos. Proyección de Adams	91
8.4. Discusión de resultados	96
8.4.1. Sobre los polinomios armónicos	96
8.4.2. Sobre las proyecciones convencionales	97
8.4.3. Elección de la proyección óptima	97
8.4.4. Comparación de trabajos	104
9. Conclusiones y trabajos futuros	105
A. Latitudes auxiliares	107
A.1. Latitud conforme	107
A.2. μ en función de χ	108
B. Coordenadas isométricas oblicuas	109
B.1. Problema directo	109
B.2. Derivadas	109
B.3. Problema inverso	110
Nomenclatura	112
Acrónimos	113
Referencias Bibliográficas	114

Índice de Figuras

1.	Representación de paralelos y meridianos	6
2.	Representación de la latitud y longitud geodésicas	6
3.	Curvatura de Gauss, secciones principales.	9
4.	Distorsión de un sector infinitesimal	10
5.	Grilla de paralelos y meridianos. Grilla triangular geodésica.	12
6.	Grilla tripolar.	13
7.	Grilla compuesta de elipses e hipérbolas confocales	13
8.	Esquema de la proyección de Mercator	17
9.	Esquema de la proyección de Schreiber, $\lambda_0 = 60^\circ W$	20
10.	Esquema de la proyección de Krüger, $\lambda_0 = 60^\circ W$	23
11.	Esquema de la proyección CCL, $\lambda_0 = 60^\circ W$, $\phi_1 = 30^\circ S$, $\phi_2 = 60^\circ S$	25
12.	Esquema de la proyección de Lagrange, $\lambda_0 = 60^\circ W$	26
13.	Esquema de la proyección de Adams I, $\lambda_0 = 60^\circ W$	28
14.	Representación del mapa de Spilhaus en el <i>software</i> ArcGIS	31
15.	Esquema de la proyección NZMG	35
16.	Esquema de la proyección de América en polinomios armónicos	36
17.	Esquema de la proyección de Eisenlohr	37
18.	Representación de la distorsión como superficie.	39
19.	Generación de puntos de polígonos respecto a $\partial\Omega$	40
20.	Generación de un individuo de un solo ancestro. Polinomios	49
21.	Generación de un individuo de dos ancestros. Polinomios	49
22.	Generación de un individuo de dos ancestros. Adams	51
23.	Generación de un individuo de dos ancestros. Adams	51
24.	Representación del contorno de Misiones	54
25.	Comparación de alteración de escala según inicialización. Misiones	56
26.	Secuencia de solución con y sin inicialización. Misiones	56
27.	Evolución de alteración de escala dentro de Ω . Misiones	57
28.	Evolución de alteración de escala dentro de Ω' . Misiones	57
29.	Evolución de alteración de escala dentro de Ψ . Misiones	57
30.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_1 . Misiones	58
31.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_1 . Misiones	59
32.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_2 . Misiones	60
33.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_2 . Misiones	61
34.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_3 . Misiones	62
35.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_3 . Misiones	63

36.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_4 . Misiones	64
37.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_4 . Misiones	65
38.	Alteración de escala según criterios. Gauss-Krüger, Misiones	66
39.	Esquema de escala, criterios C_1 a C_4 . Misiones, Gauss-Krüger	67
40.	Alteración de escala según criterios. CCL, Misiones	68
41.	Esquema de escala, criterios C_1 a C_4 . Misiones, CCL	69
42.	Representación del contorno de la Argentina bicontinental	75
43.	Comparación de alteración de escala según inicialización. Argentina	76
44.	Secuencia de solución con y sin inicialización. Argentina	76
45.	Evolución de alteración de escala dentro de Ω . Argentina	77
46.	Evolución de alteración de escala dentro de Ω' . Argentina	77
47.	Evolución de alteración de escala dentro de Ψ . Argentina	78
48.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_1 . Argentina	79
49.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_1 . Argentina	80
50.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_2 . Argentina	81
51.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_2 . Argentina	82
52.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_3 . Argentina	83
53.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_3 . Argentina	84
54.	Esquema de escala, grados 3, 4, 5 y 6, C_4 . Argentina	85
55.	Esquema de escala, grados 7, 8, 9 y 10, C_4 . Argentina	86
56.	Alteración de escala según criterios. Gauss-Krüger, Argentina	87
57.	Esquema de escala, criterios C_1 a C_4 . Argentina, Gauss-Krüger	88
58.	Representación del contorno de los océanos	92
59.	Océanos. Alteración de escala según criterios	94
60.	Esquema de escala de la representación de océanos	95
61.	Esquema de escala de Argentina, polinomio armónico grado 4	98
62.	Mapa de Misiones, polinomio armónico grado 3	101
63.	Mapa de la Argentina bicontinental, polinomio armónico grado 3	102
64.	Mapa de temperatura de los océanos	103

Índice de Tablas

1.	Armado de matrices para cálculo de coeficientes por m	45
2.	Armado de matrices para para la reversión de coordenadas	46
3.	Alteración de escala según proyección. C_1 , Misiones	70
4.	Alteración de escala según grado de polinomio. C_2 , Misiones	71
5.	Alteración de escala según grado de polinomio. C_3 , Misiones	72
6.	Alteración de escala según grado de polinomio. C_4 , Misiones	73
7.	Alteración de escala según proyección. C_1 , Argentina	89
8.	Alteración de escala según grado de polinomio. C_2 , Argentina	89
9.	Alteración de escala según grado de polinomio. C_3 , Argentina	90
10.	Alteración de escala según grado de polinomio. C_4 , Argentina	90
11.	Alteración de escala según proyecciones óptimas, Misiones	99
12.	Alteración de escala según proyecciones óptimas, Argentina	99
13.	Parámetros de proyecciones óptimas	100

Resumen

La precisión en la representación de datos espaciales es fundamental para obtener resultados confiables y útiles en la aplicación de modelos matemáticos. En el caso del espacio geográfico, los sistemas de coordenadas utilizados en estos modelos generan distorsiones que afectan la exactitud de los resultados. Estas distorsiones son producto de las inconsistencias en el posicionamiento relativo de los puntos de la superficie terrestre curva al ser proyectados sobre una geometría euclidiana.

Este trabajo aborda el problema de la distorsión en los sistemas de coordenadas optimizando los parámetros de polinomios armónicos y proyecciones convencionales, como Gauss-Krüger. A través de ensayos, se determinó que la elección del método depende de las características específicas de cada región geográfica. Los polinomios armónicos, optimizados con algoritmos genéticos según un criterio adecuado, permiten una distribución equilibrada de las alteraciones de escala dentro de la región convexa de interés. Esto garantiza trayectos euclidianos sin variaciones abruptas en la escala, lo que resulta especialmente útil en áreas con geometrías complejas. Sin embargo, en situaciones donde la mejora es marginal, las proyecciones convencionales siguen siendo una opción más eficiente.

El trabajo presenta un procedimiento sistemático que incluye la delimitación de la región de interés, la toma de muestras de puntos, y la optimización de los coeficientes de los polinomios y parámetros de las proyecciones. Este proceso se realiza mediante algoritmos genéticos, que son herramientas eficaces para minimizar las distorsiones de escala y adaptarse a las características particulares de cada problema. Además, la sencillez del diseño e implementación de los algoritmos genéticos facilita la resolución de problemas específicos sin recurrir a *software* de terceros.

Abstract

The precision in representing spatial data is essential for obtaining reliable and meaningful results when applying mathematical models. In the context of geographic space, the coordinate systems used in these models introduce distortions that affect the accuracy of the outcomes. These distortions stem from inconsistencies in the relative positioning of points on the curved surface of the Earth when projected onto a Euclidean plane.

This work addresses the issue of distortion in coordinate systems by optimizing the parameters of harmonic polynomials and conventional projections, such as Gauss-Krüger. Through experimentation, it was determined that the choice of method depends on the specific characteristics of each geographic region. Harmonic polynomials, optimized using genetic algorithms with an appropriate criterion, allow for a balanced distribution of scale distortions within the convex region of interest. This ensures Euclidean trajectories without abrupt variations in scale, which is particularly useful in areas with complex geometries. However, in cases where the improvement is marginal, conventional projections remain a more efficient alternative.

The study presents a systematic procedure that includes delineating the region of interest, sampling points, and optimizing both polynomial coefficients and projection parameters. This process is performed using genetic algorithms, which are effective tools for minimizing scale distortions and adapting to the specific characteristics of each case. Furthermore, the simplicity of designing and implementing genetic algorithms facilitates the resolution of specialized problems without relying on third-party software.

1. Introducción

1.1. El problema y estado del arte

El término «sistema de coordenadas» se utiliza para referirse al espacio reglado por un conjunto de superficies o curvas paramétricas ortogonales que en su intersección definen la posición de un punto. Si reducimos el problema a dos dimensiones, una superficie puede ser representada en otra superficie diferente a través de una transformación de coordenadas la cual, como se discutirá más adelante, altera la métrica de las curvas. Esta alteración introduce distorsiones en las propiedades de los elementos representados que afectan el resultado de cualquier función o modelo que dependa de las coordenadas de los puntos. En el caso de la Tierra, la representación de la superficie se realiza mediante proyecciones cartográficas cuyo resultado es un sistema de coordenadas plano. Una proyección cartográfica es una función de transformación de coordenadas en la que se puede calcular la distorsión en cada punto representado. Esta distorsión, o alteración de escala, siempre se busca minimizar al desarrollar las fórmulas de una proyección cartográfica óptima.

La construcción de proyecciones óptimas constituye el problema fundamental de la cartografía (Gravé, 1896). El principio de Chebyshev (1856) establece que en una región Ω la variación de escala en una proyección conforme es mínima cuando la medida de distorsión lineal $\ln \sigma$ es constante sobre el contorno $\partial\Omega$. Denotamos como σ a la alteración de escala en un punto de la proyección. Este enunciado, relacionado con el problema de Dirichlet, tiene resolución a través de la ecuación de Laplace. La función que resuelve este problema es un polinomio armónico llamado comúnmente proyección de Chebyshev o Chebyshev-Gravé. Frankich (1982), Nestorov (1997) y Bermejo y Otero (2005) utilizaron distintos métodos computacionales para resolver el principio de Chebyshev en regiones irregulares con condición de contorno $\ln \sigma = 0$. En tanto que Reilly (1973) y Tutic (2009), entre otros, aplicaron el criterio $\sum (\sigma - 1)^2 = \text{mín}$ en el interior de Ω . Minimizar la distorsión dentro de la región o utilizar las condiciones de contorno del principio de Chebyshev conducen a resultados similares. Esta solución es aplicable a todas las proyecciones conformes, es decir, aquellas donde el valor de σ sólo depende de la posición del punto donde se calcula y es independiente de la dirección.

Un modelo espacial es la descripción matemática de un fenómeno geográfico, físico o abstracto. Su formulación siempre depende de un sistema de coordenadas que en la mayoría de los casos es una proyección cartográfica. De acuerdo a lo expuesto en los párrafos anteriores la solución es simple: el sistema de coordenadas aplicado en la región a modelar debe cumplir con el principio de Chebyshev. Sin embargo, en la práctica su implementación no es sencilla. El polinomio armónico tiene inconvenientes como la inestabilidad y el aumento rápido de la variación de escala en puntos fuera de la región. Ambos problemas se incrementan con el

grado del mismo en detrimento de las ventajas que tiene la proyección de Chebyshev sobre las tradicionales. La elección adecuada del grado del polinomio es un tema difuso. Frankich (1982, p. 173) sugiere utilizar como medida la desviación de la alteración de escala sobre el contorno, o bien simplemente hacer una aproximación por «prueba y error». La desviación de $\ln \sigma$ en $\partial\Omega$ como medida para la elección del grado sólo es útil en contornos no convexos, como por ejemplo la provincia de Santa Fe. En contornos convexos sólo muestra el nivel de aproximación al contorno $\partial\Omega$ de la isolínea de alteración lineal. Cuando una serie polinómica tiende a infinito tiene un comportamiento inestable cerca del mismo contorno cuya escala debería ser constante. Por otro lado, en Bermejo y Otero (2005) no se obtiene como resultado una proyección utilizable sino el patrón de escala dentro del territorio esperable de aplicar en forma casi exacta el principio de Chebyshev como un problema de valor de contorno (BVP) con solución por el método de los elementos finitos (MEF).

La solución de la optimización de sistemas de coordenadas no cuenta con herramientas formales y exactas sino que es un problema de prueba y error donde puede existir una solución más adecuada que otras de acuerdo a un cierto criterio; pero cualquier solución óptima es discutible. La implementación del principio de Chebyshev vía polinomios armónicos, proporciona una optimización dentro de la región, pero a medida que se fuerza el cumplimiento de alteración de escala sobre el borde, la función resultante genera variaciones de escala abruptas sobre el mismo contorno. La estabilidad de una función es importante para cualquier modelo, ya que siempre es relevante el estudio del comportamiento del fenómeno en la frontera y su interacción con otras regiones.

1.2. Trabajos similares

Si bien la optimización de proyecciones tiene una amplia base de antecedentes, se consideran los trabajos que pueden ser comparables a este estudio. En la mayoría de los casos, los autores únicamente analizan la distorsión dentro de Ω sin considerar el entorno.

- Reilly (1973) resolvió el caso de optimización dentro de Ω para Nueva Zelanda, esta proyección fue adoptada oficialmente para producir cartas topográficas. Una técnica similar fue utilizada por Tutic (2009) para Croacia. El resultado es un polinomio armónico cuyos coeficientes se calculan por método de los mínimos cuadrados (MMC) en el primer caso, y el algoritmo «fminsearch» del *software* MatLab en el segundo.
- Snyder (1984) propone «encerrar» el contorno $\partial\Omega$ en un polígono regular y crear un polinomio armónico de tal manera que la curva de alteración de escala coincida con ese polígono. Los coeficientes del polinomio, que utiliza coordenadas de la proyección estereográfica, se adaptan a los vértices del polígono por MMC.

- González López (1997) sugiere la implementación de la optimización dentro de la región Ω por algoritmos genéticos, aunque en el trabajo publicado, da una idea general de su aplicación en la superficie esférica sin mostrar resultados. En este trabajo, la superficie de referencia es el elipsoide y se aplicarán criterios de optimización sobre el contorno $\partial\Omega$.
- Bermejo y Otero (2005) abordan de manera teórica el BVP de la proyección de Chebyshev. Calcularon la alteración de escala óptima utilizando el MEF para la península Ibérica, aunque no proporcionaron una solución práctica.
- Pedzich (2005) presentó un algoritmo efectivo para calcular por MMC los coeficientes de un polinomio armónico de acuerdo al principio de Chebyshev. El cálculo se realiza en forma indirecta a través de la convergencia de meridianos sobre el contorno $\partial\Omega$.
- Bouchtein y Bouchtein (2008) analizan la adaptación de modelos matemáticos terrestres a proyecciones conformes que cumplen con el principio de Chebyshev. En particular los parámetros óptimos de la proyección estereográfica.
- Orihuela (2016) calcula los coeficientes de un polinomio armónico de grado cuatro para la Argentina bicontinental adaptando el principio de Chebyshev al contorno convexo de Ω . Este es el único caso donde se analiza lo que sucede en el entorno del área de interés. La elección del contorno convexo en vez de $\partial\Omega$ está relacionado con mitigar el efecto de los polinomios armónicos de grado alto cerca de la frontera Ω .
- Habib (2022) busca adaptar una curva de igual alteración de escala en forma de elipse al contorno de un país.

En términos generales, los trabajos mencionados se centran en optimizar criterios tanto sobre $\partial\Omega$ como dentro de Ω , mediante el promedio de valores de alteración de escala, una tarea que puede resolverse eficazmente con el MMC. Este trabajo se centra en resolver problemas no lineales basados en los criterios $\max \|\nabla \ln \sigma\| = \min$ y $\max \|\ln \sigma\| = \min$ sobre $\partial\Omega$. Esto permitirá abordar dos problemas importantes:

1. Desarrollar una metodología de optimización reproducible para cualquier tipo de región al concentrar la búsqueda exclusivamente en puntos muestreados en $\partial\Omega$. En comparación, optimizar utilizando muestras dentro de Ω requiere asignar pesos individuales adecuados, lo cual puede ser difícil de aplicar en regiones extensas.
2. Dado que el contorno representa una zona de análisis relevante en cualquier modelo espacial, se previene que en su entorno no existan cambios de escala abruptos, lo que contribuye a la coherencia y precisión de los resultados.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Optimizar sistemas de coordenadas en modelos espaciales a partir de minimizar las distorsiones de escala mediante el uso de algoritmos genéticos.

2.2. Objetivos específicos

- Desarrollar algoritmos genéticos que puedan optimizar automáticamente sistemas de coordenadas para modelos espaciales para una región determinada.
- Implementar funciones de evaluación en los algoritmos genéticos que permitan cuantificar las alteraciones de escala, proporcionando una métrica clara para la optimización del sistema cartográfico de acuerdo a un determinado criterio.
- Evaluar en forma comparativa la adecuación de los parámetros calculados para cada proyección de acuerdo a varios criterios de optimización.

Como resultado de este proceso se obtendrá un método y algoritmos propuestos para la construcción de sistemas de coordenadas óptimos. En este trabajo se habla de «modelos espaciales» en general sin hacer hincapié en alguno de ellos. La influencia del sistema de coordenadas en el comportamiento de un modelo cualquiera, se puede evaluar con una métrica de calidad en común basada en la distorsión de la escala.

Para el caso local y regional no solo se evaluará el uso de polinomios armónicos sino también la proyección conforme más utilizada: Gauss-Krüger. El caso global es diferente ya que la proyección exacta de Gauss-Krüger, que permite representar la Tierra completa, no es un sistema de coordenadas convexo; en este caso se estudiará la proyección de Adams que a su vez permite una representación teselada del globo terrestre. La búsqueda de parámetros óptimos para estas proyecciones se realizará mediante algoritmos genéticos (AG). La elección de las proyecciones y el método para su optimización se justificará más adelante.

2.3. Metodología

Se revisa la literatura científica existente en el campo de las proyecciones cartográficas y la optimización. Se realizará un análisis comparativo de diferentes proyecciones cartográficas, evaluando sus ventajas y limitaciones en términos de distorsiones espaciales. Para ello se desarrollan algoritmos *ad hoc* en Python para estimar los parámetros óptimos en cada caso, utilizando técnicas de **mínimos cuadrados** y **algoritmos genéticos**. Los resultados son evaluados utilizando métricas de la alteración de escala. Teniendo en cuenta que ya existen librerías en

Python para resolver problemas de optimización con algoritmos genéticos, también se hará uso de PyGad (Gad, 2023); los mismos algoritmos se implementan en esta librería y se comparan los resultados obtenidos con ambas soluciones.

2.4. Esquema del trabajo final

Este trabajo se desarrolla en tres partes: en la primera, capítulos 3 y 4, se discuten las funciones aplicables al problema de la optimización y los métodos; en la segunda, capítulos 5, 6 y 7, la implementación en algoritmos de la solución de problemas; y la tercera, capítulos 8 y 9, los resultados y conclusiones.

En el capítulo 3 se describen la superficie de referencia y los distintos sistemas de coordenadas. En el capítulo 4, se desarrollan las fórmulas de las proyecciones cartográficas que dan lugar a los sistemas de representación, tanto a nivel global como regional. Parte de la descripción del estado del arte en estos capítulos se basa en Orihuela (2022).

En el capítulo 5 se enuncian los criterios de optimización. En el capítulo 6 la implementación de los polinomios armónicos por MMC. En el capítulo 7 la implementación de las optimizaciones de las proyecciones en general por AG.

En los capítulos finales se analizan los resultados de los algoritmos en los tres casos de estudio abordados: a escala local, regional y global.

3. Marco teórico

3.1. La superficie de referencia

Un modelo espacial no solo depende del fenómeno que describe, sino también del sistema de coordenadas en el que está definido. Un sistema de referencia terrestre, en su forma más general, se implementa en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional Earth Centered, Earth Fixed (ECEF), asociado a una superficie de referencia. Esta superficie puede ser esferopotencial (relacionada con un campo gravitatorio ideal) o equipotencial (relacionada con el campo gravitatorio real). La primera se materializa a través de un elipsoide de revolución y se utiliza como referencia para la representación geométrica de los objetos geográficos y la ubicación de puntos en coordenadas paramétricas. La segunda superficie es el geoide, que se emplea como referencia vertical para las alturas. En ambos casos, la referencia se toma de la superficie extendida de los océanos en reposo, bajo condiciones ideales y abstractas o conforme al campo gravimétrico medible de la Tierra.

Como su nombre lo indica, ECEF es un sistema terrestre con origen en el centro de masas de la Tierra donde el eje Z coincidente con el eje de rotación terrestre, el eje X pasa por

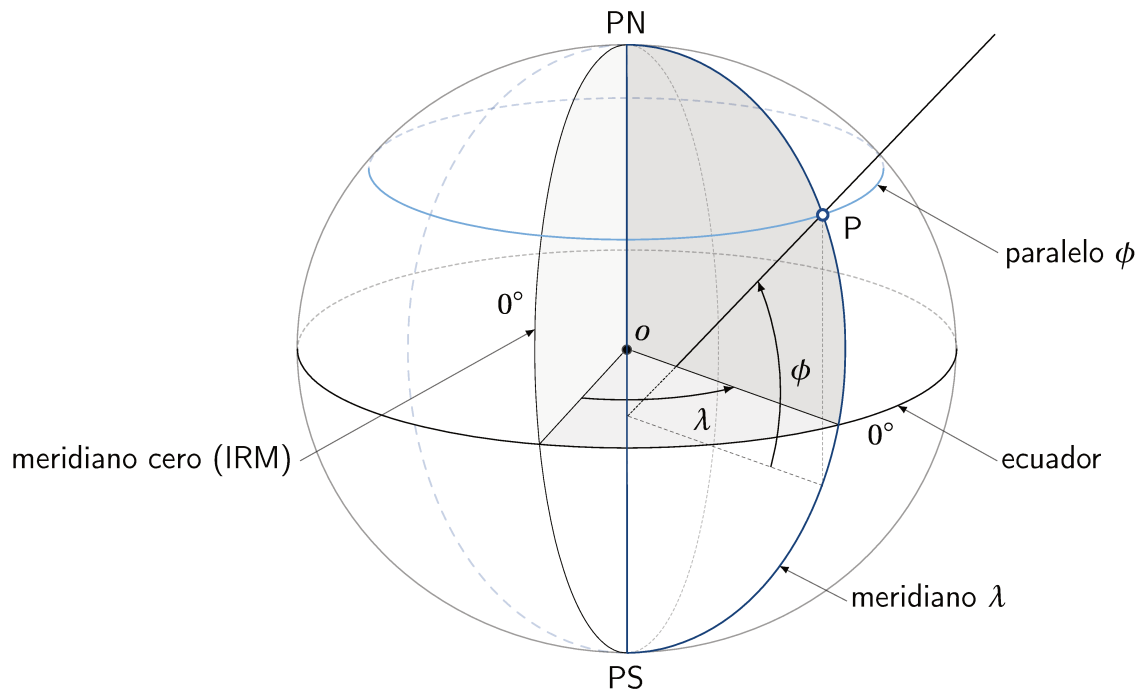


Figura 1: Representación de paralelos y meridianos sobre el elipsoide de revolución.

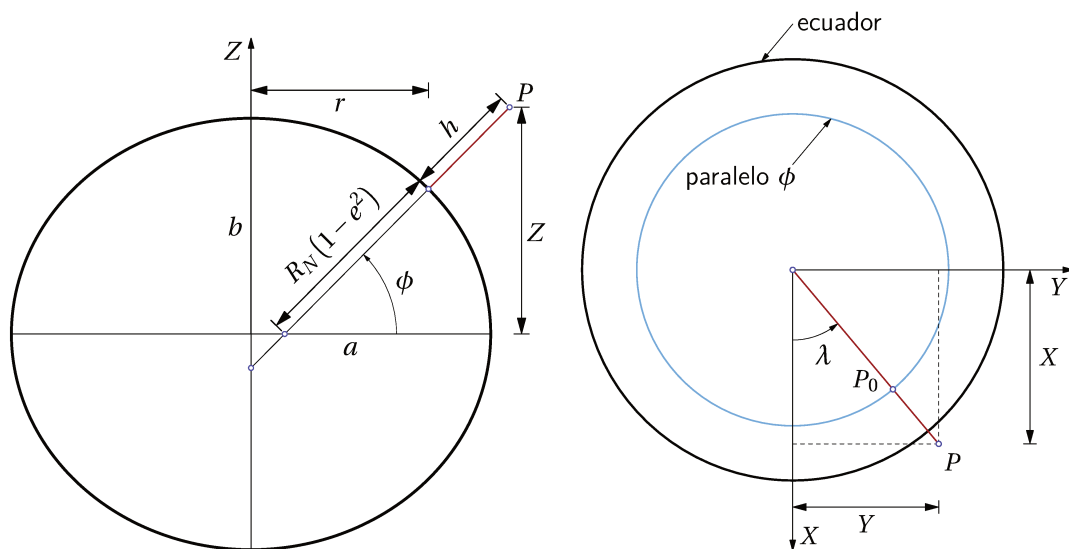


Figura 2: Representación de la latitud y longitud geodésicas en el elipsoide de revolución.

el meridiano origen y el plano XY pasa por el ecuador terrestre. El elipsoide de revolución está representado por la fórmula

$$\frac{Z^2}{b^2} + \frac{X^2 + Y^2}{a^2} = 1, \quad (1)$$

donde a es el semieje mayor y b su semieje menor. Usualmente las coordenadas utilizadas son coordenadas paramétricas geodésicas definidas tomando como referencia los elementos del elipsoide. La revolución del semieje mayor a alrededor del eje describe el ecuador terrestre. El eje de rotación determina en su intersección con el elipsoide los polos norte y sur. Se pueden derivar numerosos parámetros constantes a partir de los valores de los semiejes, las más utilizadas son:

- Aplastamiento primero: $f = (a - b) / a$
- Excentricidad primera: $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$
- Aplastamiento tercero: $n = (a - b) / (a + b)$

Las propiedades geométricas de una superficie dependen de la curvatura en cada punto de la misma. Si se intersecta a la superficie por un plano que contiene a la recta normal, se obtiene una curva cuyas propiedades en ese punto son las mismas de la superficie de referencia en una dirección determinada. Esta curva se denomina sección normal y por cada punto pasan infinitas secciones que dependen del acimut considerado.

Se define como **recta normal** a la línea que contiene un punto del espacio geográfico y es perpendicular a la superficie del elipsoide. La **latitud** geodésica (ϕ) de un punto es el ángulo entre la recta normal y el plano ecuatorial. La **longitud**, geodésica (λ) es el ángulo formado por un plano meridiano cualquiera y el plano meridiano origen. El **meridiano** es el arco de elipse que une los polos norte y sur y está formado por la intersección entre un plano que contiene al eje de rotación terrestre y la superficie del elipsoide. Este plano también se llama plano de meridiano. El **acimut** es el ángulo medido sobre un punto de una curva cualquiera respecto del meridiano que pasa por el mismo punto. El **paralelo** es la circunferencia determinada por la intersección entre la superficie del elipsoide y un plano perpendicular al eje terrestre o de rotación. La representación de estos elementos se pueden ver en las figuras 1 y 2.

La **sección normal** es una curva formada por la intersección de la superficie del elipsoide con un plano que contiene a la recta normal de un punto. La sección normal es fundamental para definir la curvatura y por tanto las propiedades de la superficie, de las infinitas secciones las dos más importantes son la que tiene mayor radio de curvatura, que se denomina **sección normal principal** y la sección de menor radio de curvatura que es la **sección meridiana**. Otro radio de curvatura relevante es el radio de curvatura del paralelo, que no es una sección normal. Las fórmulas se describen a continuación:

- Radio de curvatura de la sección normal principal:

$$R_N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}. \quad (2)$$

- Radio de curvatura de la sección meridiana:

$$R_M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad (3)$$

- Radio de curvatura del paralelo: $r = R_N \cos \phi$

En el sistema ECEF las coordenadas cartesianas se definen como

$$\begin{aligned} X &= (R_N + h) \cos \phi \cos \lambda, \\ Y &= (R_N + h) \cos \phi \sin \lambda, \\ Z &= [R_N (1 - e^2) + h] \sin \phi, \end{aligned} \quad (4)$$

donde h es la altura elipsoidal. Estas fórmulas se pueden deducir fácilmente conociendo los radios de curvatura (ver figura 2). La mayoría de los modelos suelen utilizar las coordenadas paramétricas que ubican los puntos proyectados sobre la superficie de referencia, es decir asumiendo $h = 0$, las coordenadas cartesianas resultantes son más simples,

$$\begin{aligned} X &= R_N \cos \phi \cos \lambda, \\ Y &= R_N \cos \phi \sin \lambda, \\ Z &= R_N (1 - e^2) \sin \phi, \end{aligned} \quad (5)$$

estas coordenadas son compatibles con la fórmula (1) que corresponde al elipsoide de revolución.

3.2. Transformación de la superficie de referencia y alteración de escala

No existe un sistema de coordenadas que permita representar la interacción de fenómenos geográficos respetando los caminos geodésicos y su métrica con una norma pitagórica sobre el plano. Esto es consecuencia del teorema *egregium* de Gauss (1827) que establece que la curvatura de una superficie es una propiedad intrínseca de la misma e invariante respecto del sistema de coordenadas en la que está inmersa. Para cambiar la curvatura de la superficie, esta debe ser transformada en otra superficie y sólo puede preservar su métrica si una es desarrollable en otra.

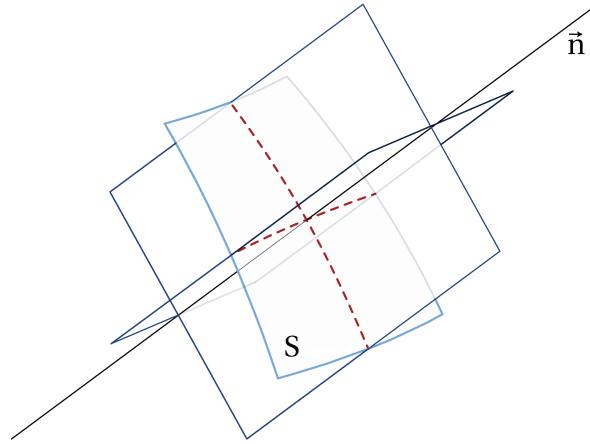


Figura 3: Cada punto en una superficie tiene asociada dos secciones normales ortogonales que determinan los radios de curvatura mínimo y máximo.

La curvatura intrínseca está dada por la fórmula

$$K = \kappa_1 \kappa_2,$$

donde κ_1 y κ_2 son las curvatura máxima y mínima en el punto. En la figura 3 se ilustran las secciones normales que generan κ_1 y κ_2 ; estas secciones son ortogonales entre sí y, como es fácil de deducir, son las que tienen un menor y mayor radio de curvatura. Sobre el elipsoide de revolución,

$$R_M = \frac{1}{\kappa_1}, \quad R_N = \frac{1}{\kappa_2},$$

donde el radio de curvatura de la sección normal principal es el mayor y el radio de curvatura del meridiano es el menor. Por lo tanto, la curvatura de Gauss sobre el elipsoide, en un punto determinado, se calcula como

$$K = \frac{1}{R_M} \cdot \frac{1}{R_N}.$$

Dos superficies son mutuamente desarrollables si tienen igual valor de curvatura gaussiana en todos sus puntos. Todos los puntos en un plano tienen un valor $K = 0$, mientras que el valor de K en el elipsoide es variable y siempre positivo y en la esfera siempre $K = \text{const}$ y también es un valor positivo. En consecuencia tanto el elipsoide como la esfera no pueden ser desarrollados sobre el plano y el elipsoide no puede ser desarrollado sobre la esfera.

Una proyección cartográfica es una función que transforma un elemento de una superficie sobre el plano. Esta función es paramétrica y tiene como argumentos la latitud y la longitud. En el elipsoide es,

$$\begin{aligned} x &= x(\phi, \lambda), \\ y &= y(\phi, \lambda). \end{aligned}$$

Para estudiar la distorsión que se produce al transformar la superficie de referencia

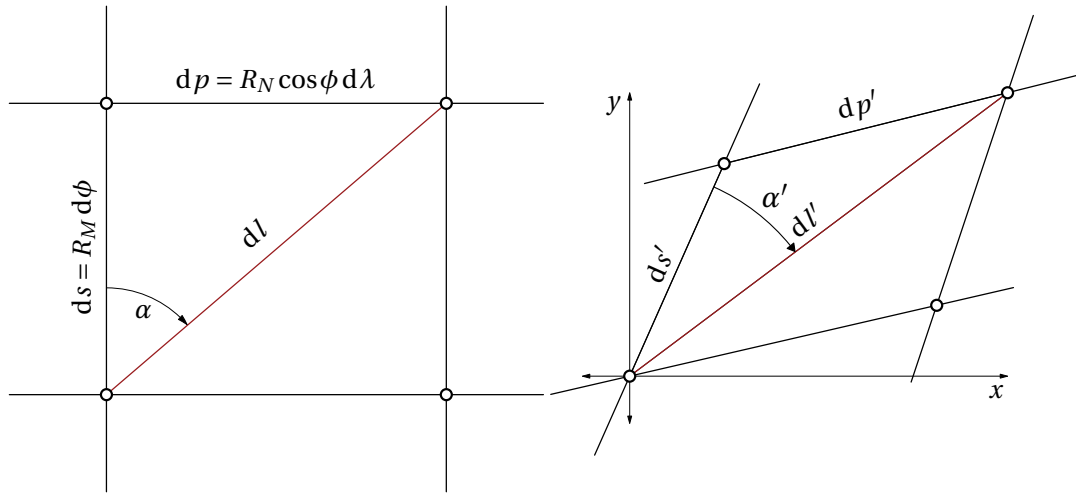


Figura 4: A la izquierda un sector infinitesimal sobre el elipsoide determinado por dos arcos de paralelo y meridiano, a la derecha su representación sobre la carta.

se considera un cuadrilátero infinitesimal (lado izquierdo de la figura 4). Este «parche» está delimitado por dos arcos diferenciales de paralelos (dp) y dos arcos diferenciales de meridiano (ds). Estos lados están representado por el producto del radio de curvatura por incremento diferencial de ángulo, es decir

$$\begin{aligned} dp &= r d\lambda = R_N \cos \phi d\lambda, \\ ds &= R_M d\phi. \end{aligned}$$

A la derecha de la figura 4 se representa el parche original deformado al ser representado en el plano. La comparación de estas figuras geométricas son la base para del estudio de la distorsión en la transformación cartográfica.

La relación entre la diagonales dl'/dl (figura 4) es la alteración de escala en alguna dirección determinada por α , dp'/dp es la alteración de escala en dirección del paralelo y ds'/ds la alteración de escala en dirección del meridiano. La comparación de estas figuras geométricas son la base para del estudio de la distorsión en la transformación cartográfica. Los diferenciales de las diagonales de los cuadriláteros se expresan como

$$\begin{aligned} dl^2 &= ds^2 + dp^2 = (R_N \cos \phi d\lambda)^2 + (R_M d\phi)^2, \\ dl'^2 &= dx^2 + dy^2, \\ \sigma_\alpha &= \sqrt{\frac{dl'^2}{dl^2}}, \end{aligned}$$

donde

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi,$$

y σ_α es la alteración de escala para un determinado acimut α ; la fórmula σ_α^2 está dada por

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{dl'^2}{dl^2} = \sigma_h^2 \cos^2 \alpha + 2\sigma_{hk} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_k^2 \sin^2 \alpha. \quad (6)$$

donde σ_h es la distorsión sobre el meridiano,

$$\sigma_h = \frac{ds'}{ds} = \frac{\sqrt{E}}{R_M}, \quad (7)$$

σ_k , la distorsión en el sentido del paralelo,

$$\sigma_k = \frac{dp'}{dp} = \frac{\sqrt{G}}{r}, \quad (8)$$

$$\sigma_{hk} = \frac{F}{r \cdot R_M}, \quad (9)$$

y los términos E, F y G son los coeficientes de Gauss:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2.$$

De todos los valores de distorsión posibles, los más importantes son

$$\sigma_a = \text{máx } \sigma_\alpha,$$

$$\sigma_b = \text{mín } \sigma_\alpha,$$

que serán los semiejes de la elipse de Tissot que además determinan las propiedades de la proyección cartográfica.

Si $\sigma_a \cdot \sigma_b = 1$, la proyección es equivalente y preserva las áreas de los elementos de la superficie original. Si $\sigma_a = \sigma_b$ la proyección es **conforme**. Este último caso es el que nos ocupa e indica que la alteración de escala en un punto es igual en todas las direcciones y por lo tanto

$$\sigma = \sigma_a = \sigma_b = \sigma_h = \sigma_k.$$

En la mayoría de los casos, para calcular la alteración de escala en las proyecciones conformes se utilizará la fórmula (8), $\sigma = \sigma_k$.

Tal como se menciona en Eisenlohr (1870) y en Bermejo y Otero (2005, p. 124), son las proyecciones conformes las más adecuadas para las representaciones cartográficas en general y serán los casos estudiados en este trabajo.

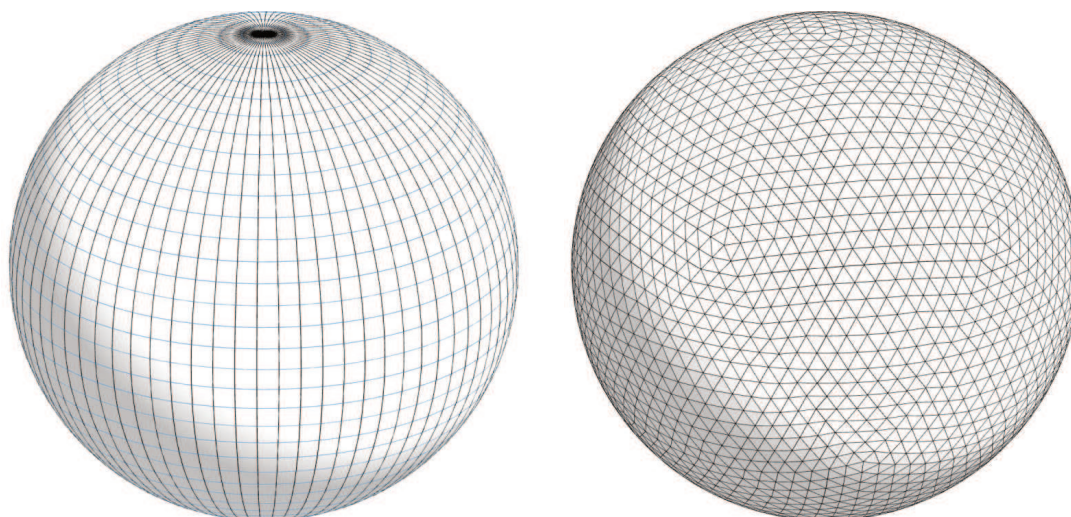


Figura 5: A la izquierda, grilla de paralelos y meridianos y a la derecha grilla geodésica triangular. Cuando la grilla se construye en base a paralelos y meridianos es visible la ubicación de los polos como una «mancha negra».

3.3. Grillas de coordenadas

Se pueden utilizar directamente las coordenadas cartesianas ECEF para ubicar puntos y desarrollar un modelo geográfico en regiones pequeñas. Sin embargo, no es posible utilizar este sistema cartesiano en general, ya que la norma pitagórica en sus coordenadas no representa camino geodésico entre dos puntos. El camino geodésico en cualquier modelo terrestre, siempre depende de un modelo de campo gravitatorio. Desde el punto de vista geométrico, siempre se toma el elipsoide de revolución como referencia para la distancia geodésica, cuando la distancia relativa entre puntos geográficos es diferente a la geodésica, es consecuencia de la distorsión o alteración de escala. El elipsoide de revolución terrestre es un modelo simplificado de la superficie esferopotencial de los océanos en reposo.

Al no poder utilizar las coordenadas cartesianas geocéntricas, en muchos modelos, por ejemplo atmosféricos y oceánicos, se utilizan directamente las coordenadas paramétricas geodésicas, es decir: latitud y longitud. Sin embargo, estos modelos tampoco hacen «honor» a la distancia geodésica entre puntos ya que también utilizan la norma pitagórica como medida de distancia y la superficie de referencia se encuentra dentro de la geometría no-euclidiana. Siempre se asume dentro de la aplicación de fórmulas que incluyen coordenadas geográficas que la norma euclidiana se asemeja a la distancia geodésica a nivel local y además el espacio de coordenadas siempre pertenece a la superficie de referencia. Las «partículas» de un modelo interactúan con su entorno y no con «partículas» distantes. Esta sería la mejor solución posible a la representación de una superficie con métrica no euclidiana a un sistema de coordenadas con métrica pitagórica.

De acuerdo a Murray (1996, p. 251), la convergencia de meridianos en los polos, norte

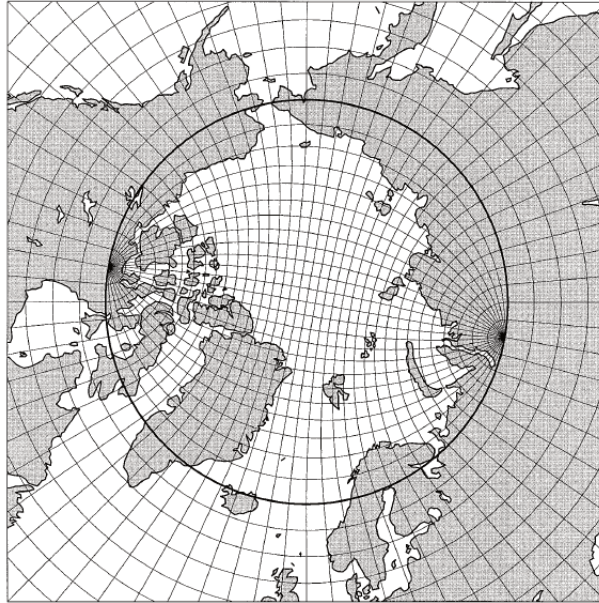


Figura 6: Composición de grillas, el objeto es trasladar los polos fuera del área de interés. Si se estudia la superficie de los océanos los polos se ubican sobre tierra. Extraído de Murray (1996, p. 259).

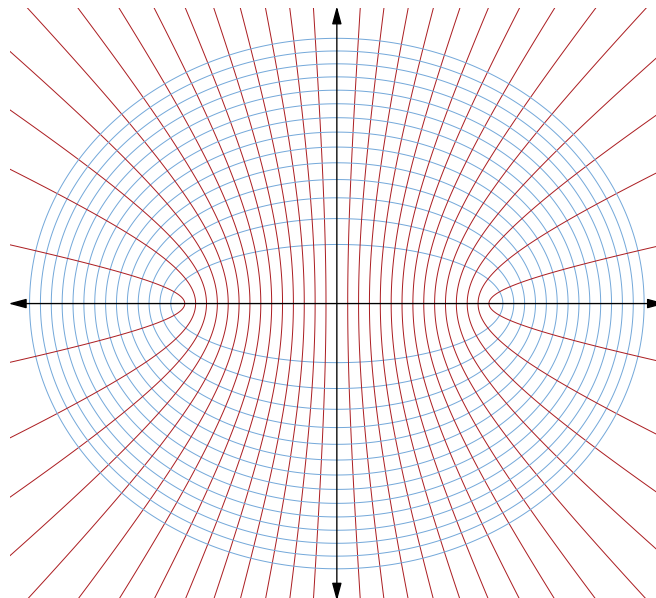


Figura 7: Grilla compuesta de elipses e hipérbolas confocales, equidistante sobre el eje x .

y sur, es fuente de inconsistencias numéricas. Estos problemas se pueden resolver quitando los polos de los modelos rotando el mallado para ubicarlos fuera de la región de interés. La única forma posible de evitar los polos es a través de un mallado discreto y asumir geometría euclidiana local. Este mallado puede ser una red geodésica de triángulos sobre una esfera auxiliar (figura 5). La principal desventaja de este método es que no existe una fórmula analítica que permita transformar las coordenadas paramétricas en coordenadas de los vértices de los triángulos y no hay continuidad entre vértice y vértice. Este método es el más indicado para modelos que se basan en el MEF pero es inviable para funciones analíticas.

Otra solución es crear un nuevo mallado en base a una transformación de coordenadas, por ejemplo cubrir la región polar en vez de paralelos y meridianos, por un conjunto de curvas paramétricas hiperbólicas que permitan continuidad con los paralelos o meridianos. Una ejemplo de esta solución es proporcionada por Murray (1996, p. 259–260) (ver figura 6) suplantando la red de paralelos y meridianos de un sector polar por una grilla que surge de una proyección cartográfica, por ejemplo la estereográfica, o bien por una red de elipses e hipérbolas confocales (ver figura 7). La primer técnica es muy utilizada en modelos oceánicos bajo el nombre de «grilla tripolar», por ejemplo en el modelo desarrollado por NEMO Consortium (2017).

3.4. Propiedades del sistema de coordenadas buscado

Todas las grillas que se basan en la latitud y la longitud no tienen una escala isométrica. Es decir que para iguales valores $\Delta\phi$ y $\Delta\lambda$ la distancia real sobre la superficie de referencia es variable y depende de la posición de los puntos. Esto sucede aún trasladando la posición de los polos. Otro problema es que la alteración de escala depende no sólo de la posición del punto sino también del acimut que se tome para comparar las distancias.

Al proveer coordenadas cartesianas ortogonales en un plano euclidiano, las proyecciones cartográficas no tienen polos; y aunque sufren de la alteración de escala, si la proyección es conforme, la distorsión es invariante respecto del acimut y sólo depende de la posición del punto. La alteración de escala es siempre calculable y puede ser utilizada para dar diferentes pesos a las observaciones dentro de la fórmula del modelo.

Bajo estas condiciones, la proyección debe proveer coordenadas isométricas, es decir ser conforme, y el valor de la distorsión debe ser un mínimo dentro de la región de interés. Como ya fue mencionado, esto se cumple cuando el valor de la alteración de escala es constante en el borde de la región de interés. Bouchtein y Bouchtein (2008) abordan este problema y llegan a una conclusión similar, proponiendo adaptar las fórmulas de los modelos, como los de mecánica de fluidos, para que dependan de coordenadas cartesianas isométricas en lugar de geodésicas.

En este trabajo, cuando se optimiza una proyección cartográfica, no se tienen en cuenta

los requerimientos de mapas impresos o la representación gráfica de la región, sino la influencia del sistema de coordenadas en los cálculos dentro del espacio geográfico. Es decir, no es un problema de **percepción** del espacio sino un problema de **análisis** geográfico. Habiendo aclarado anteriormente que se busca un sistema de coordenadas plano con métrica euclidiana local, se enumeran algunos requisitos para el mismo:

1. El sistema debe proveer un marco para la geometría de coordenadas (COGO) en el espacio geográfico.
2. Debe establecer una función, analítica y biunívoca entre el espacio de coordenadas geodésico y el espacio de coordenadas del modelo.
3. Debe ser localmente euclidiano e isométrico, es decir, debe ser una representación conforme.
4. Debe haber continuidad topológica en todo el espacio representado, es decir no debe haber «agujeros».
5. Relacionado con el punto anterior, la región de interés debe ser representada en un único sistema de coordenadas, no debe haber «fajas» diferentes.
6. Cada sector del espacio debería tener igual peso en la toma de decisiones. Como la proyección es conforme, esto no es posible cumplirlo y se asume que la alteración de escala de la región debe ser mínima.
7. El sistema de coordenadas debe ser convexo. El camino euclidiano que une dos puntos cualquiera del mismo, siempre debe estar dentro del sistema.
8. La medida de calidad está cuantificada por la distorsión de la superficie esferopotencial del espacio geográfico en la representación en la superficie del plano del modelo.

4. Áreas de estudio y proyecciones cartográficas consideradas

Se estudian tres grupos de proyecciones: las utilizadas en cartas topográficas a nivel local y regional, proyecciones especiales para el caso global y polinomios armónicos para casos locales y regionales. La proyección conforme más utilizadas por los servicios geográficos nacionales es Gauss-Krüger. Esta proyección se adapta a los distintos territorios variando los parámetros de longitud de origen λ_0 y factor de escala sobre el meridiano central k_0 . Se describen también las proyecciones de Mercator y Gauss-Schreiber cuyas variables isométricas son utilizadas en los polinomios armónicos.

Para los casos globales se emplea la proyección de Adams que envuelve el mundo en un cuadrado, la cual depende de las coordenadas de Lagrange que también se describen. Si bien esta elección parece arbitraria, las proyecciones conformes que permiten representar la superficie de la Tierra por completa son escasas; de hecho en ninguno de los casos mencionados anteriormente esto es posible. Con excepción del círculo de Lagrange, la representación completa en regiones convexas requieren de integrales elípticas siendo Adams el caso más simple de todos. Las proyecciones basadas en funciones elípticas son descritas en Lee (1976).

No se realizará el desarrollo completo de las fórmulas a utilizar ya que son conocidas. Además de transcribir las fórmulas de las proyecciones, se describe la latitud conforme necesaria para obtener las proyecciones oblicuas. En este trabajo se hace hincapié en el desarrollo de polinomios armónicos óptimos.

4.1. Áreas de estudio

Para evaluar los criterios de optimización se toman como casos de estudio: la provincia de Misiones, la República Argentina bicontinental y la superficie de los océanos como una región conexas. De las áreas de estudio se toma sobre contorno de los mismos una muestra discreta de puntos. De acuerdo al caso, la muestra se realiza en coordenadas de Mercator, Gauss-Schreiber o Adams. Esta elección es representativa del tipo de coordenadas isométricas del polinomio armónico utilizado; en el caso de Misiones, coordenadas de Mercator, en el caso de la Argentina, que debe incluir la Antártida, las coordenadas de Gauss-Schreiber que permiten representar regiones polares además de franjas delimitadas por dos meridianos (al igual que Gauss-Krüger). En el caso especial de los océanos únicamente se optimizan distintos casos oblicuos de la proyección de Adams.

4.2. Proyección de Mercator. Latitudes isométrica y conforme

En la proyección de Mercator es usualmente utilizada en navegación ya que las rutas de rumbo constante se proyectan como líneas rectas. Las coordenadas cartesianas se pueden expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}x &= a\lambda, \\ y &= aq,\end{aligned}\tag{10}$$

donde a es el semieje mayor del elipsoide de revolución, q es la latitud isométrica. La latitud isométrica surge de la comparación de dos sectores infinitamente pequeños en la superficie del

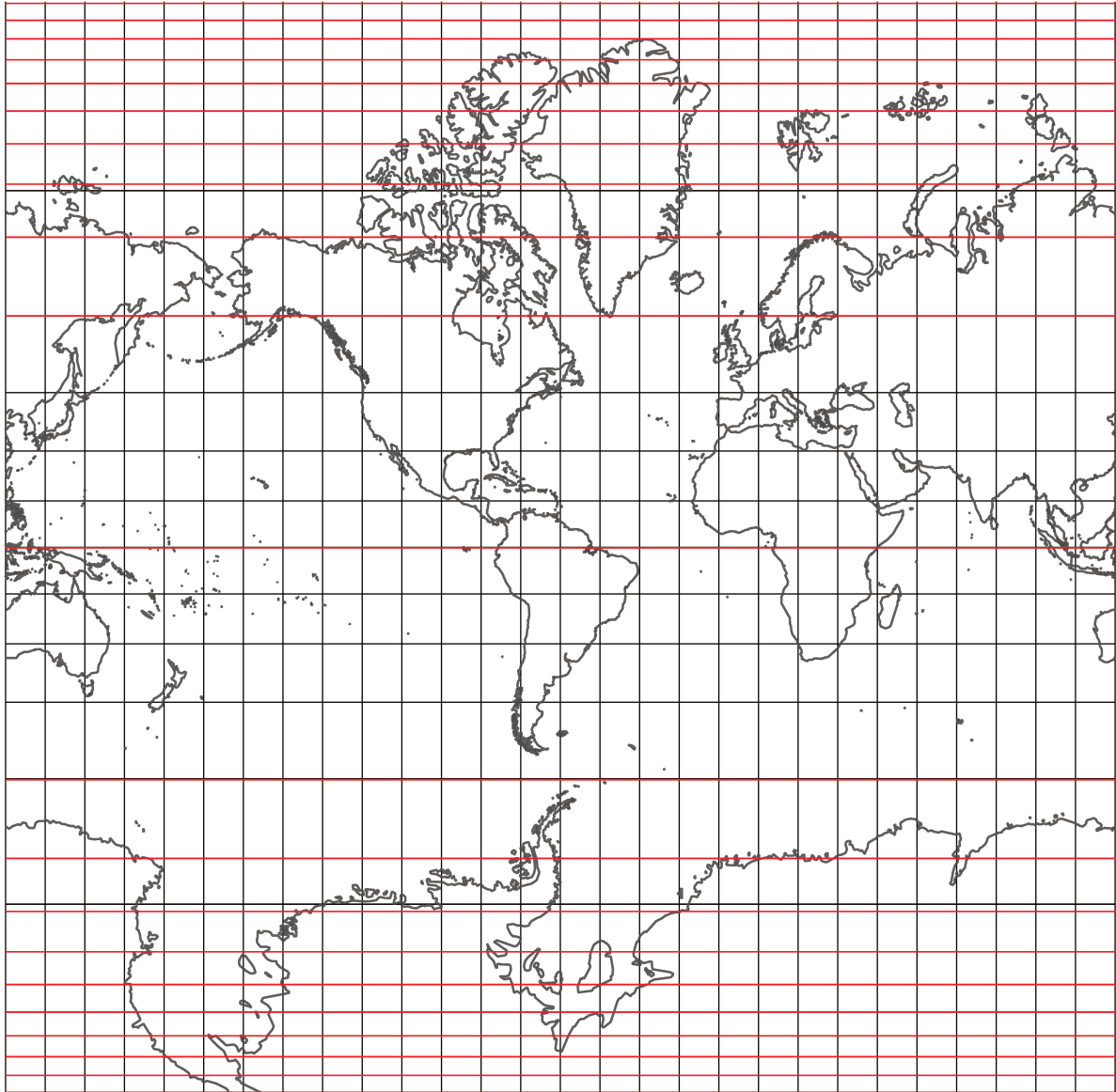


Figura 8: Esquema de la proyección de Mercator, $\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$

elipsoide y el plano de la proyección, se puede calcular mediante la integral

$$q = \int_0^{\phi} \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} d\phi,$$

$$q = \text{lam } \phi - e \operatorname{arctanh}(e \sin \phi), \quad (11)$$

donde lam es la función de Lambert,

$$\text{lam } \phi = \operatorname{arctanh} \sin \phi.$$

De este modo quedan definidas las coordenadas isométricas básicas (q, λ) también llamadas coordenadas de Mercator.

Alteración de escala

$$\sigma = \frac{a}{R_N \cos \phi},$$

donde R_N es el radio de la sección normal principal (fórmula 2).

Cerca del ecuador y en forma aproximada, la alteración se escala se puede estimar como,

$$\sigma \approx \cosh q.$$

Este valor puede utilizarse para estimar el peso de cada punto en una muestra regular sobre la proyección de Mercator, lo que permite calcular estadísticos de las medidas de distorsión dentro de una región de estudio.

Convergencia de meridianos

$$\gamma = 0.$$

Latitud conforme La latitud conforme χ se construye sobre la esfera de Gauss donde se debe cumplir la igualdad:

$$\int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\cos \chi} = \int_0^{\phi} \frac{R_M d\phi}{R_N \cos \phi},$$

$$\text{lam } \chi = \text{lam } \phi - e \operatorname{arctanh}(e \sin \phi),$$

$$\chi = \operatorname{gd} q,$$

donde gd es la función de Gudermann,

$$\operatorname{gd} q = 2 \arctan \exp\{q\} - \pi/2.$$

χ en función de ϕ Es conveniente calcular χ mediante la serie de Taylor:

$$\chi = \phi + \sum_{j=1}^{j=6} g_j \sin(2j\phi). \quad (12)$$

ϕ en función de χ Aplicando la técnica de reversión de Lagrange a la fórmula anterior, se obtiene la transformación inversa:

$$\phi = \chi + \sum_{j=1}^{j=6} g'_j \sin(2j\chi). \quad (13)$$

Los coeficientes para el problema directo e inverso se detallan en el cuadro A.1.

Reversión de coordenadas

$$\begin{aligned} \chi &= \text{gd} q, & q &= y/a, \\ \lambda &= x/a, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\phi = \chi + \sum_{j=1}^{j=6} g'_j \sin(2j\chi).$$

4.3. Proyección de Gauss-Schreiber

Es una proyección definida sobre la esfera conforme con la condición de borde sobre el meridiano central λ_0 de tal manera que este sea de longitud correcta. Aunque, en el elipsoide de revolución la alteración de escala es variable sobre el meridiano central. Fue desarrollada por Schreiber (1866), de donde se adaptan las fórmulas transcritas en este trabajo. La proyección tiene la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} y &= a\xi, \\ x &= a\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

donde las coordenadas isométricas de Schreiber, (ξ, η) , se definen en términos de las variables de Mercator:

$$\begin{aligned} \xi &= \arg(\cos \lambda, \sinh q), \\ \eta &= \text{arctanh}(\sin \lambda \text{ sech } q). \end{aligned} \quad (16)$$

También, se pueden expresar en función de la latitud conforme χ ,

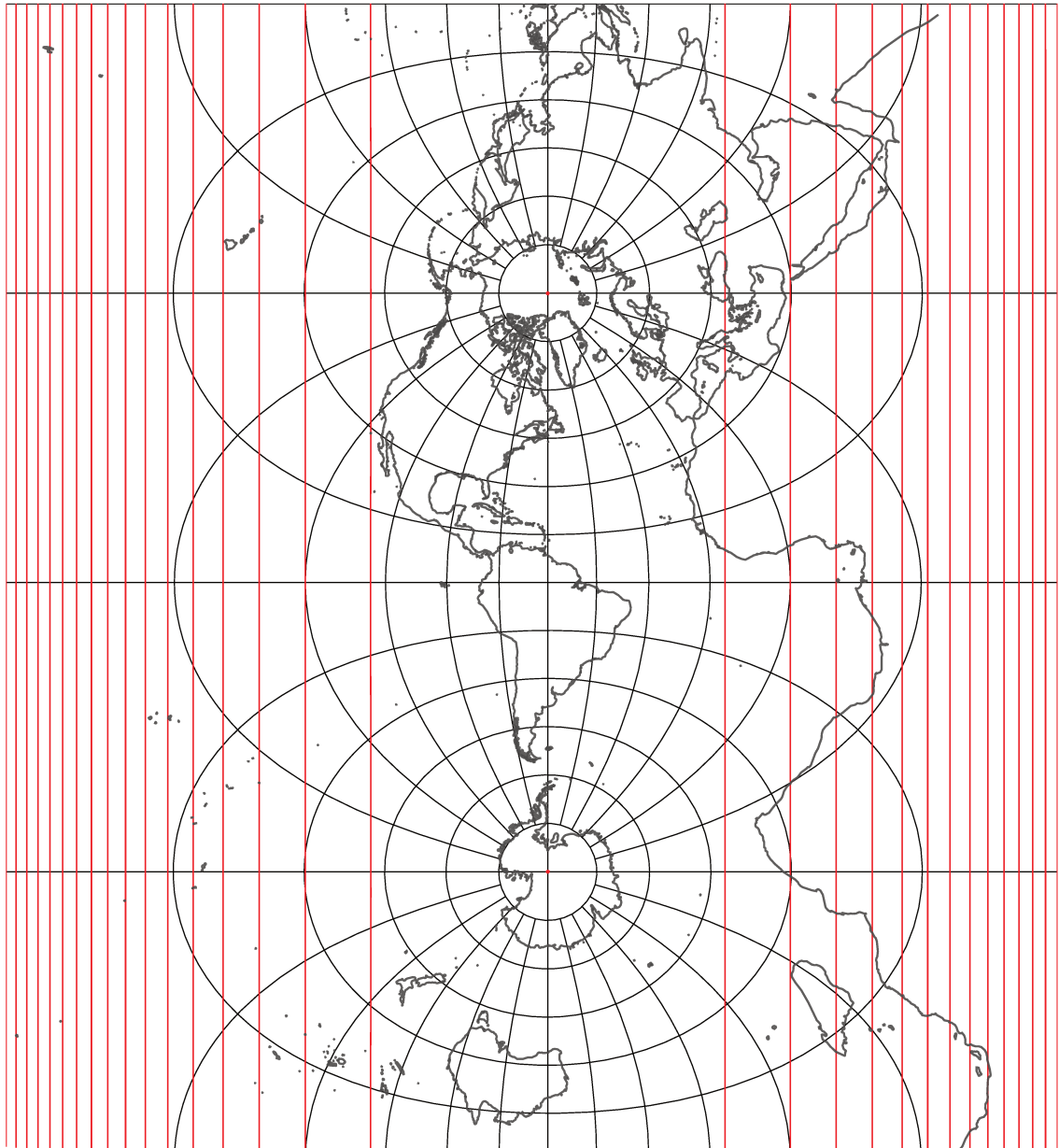


Figura 9: Esquema de la proyección de Schreiber, $\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$

$$\xi = \begin{cases} \arg(\cos \lambda, \tan \chi) & \text{si } |\chi| \neq \pi/2, \\ \chi & \text{si } |\chi| = \pi/2. \end{cases} \quad (17)$$

$$\eta = \operatorname{arctanh}(\sin \lambda \cos \chi).$$

La función $\arg(x, y)$ es equivalente a la función $\operatorname{atan2}(y, x)$ de Fortran.

Reversión de coordenadas

$$\lambda = \begin{cases} \arg(\cos \xi, \sinh \eta) & \text{si } |\xi| \neq \pi/2, \\ (\operatorname{sgn} \eta) \pi/2 & \text{si } |\xi| = \pi/2 \wedge \eta \neq 0, \\ 0 & \text{si } |\xi| = \pi/2 \wedge \eta = 0. \end{cases} \quad (18)$$

$$\chi = \arcsin(\operatorname{sech} \eta \sin \xi).$$

donde

$$\xi = y/a, \quad \eta = x/a,$$

$$\phi = \chi + \sum_{j=1}^{j=6} g'_j \sin(2\chi).$$

Los coeficientes g'_j se encuentran en el cuadro A.1.

Derivadas

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \sin \xi \sinh \eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = \cos \xi \cosh \eta. \quad (19)$$

Alteración de escala

$$\sigma = \frac{\sqrt{(\partial_\lambda y)^2 + (\partial_\lambda x)^2}}{r} = \frac{a}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}\right)^2},$$

$$\sigma = \frac{a}{r} \sqrt{\sinh^2 \eta + \cos^2 \xi}.$$

Al igual que el caso de Mercator, se utilizará para asignar pesos en las muestras de puntos el siguiente valor aproximado de distorsión:

$$\sigma \approx \cosh \eta.$$

Convergencia de meridianos

$$\tan \gamma = \frac{\partial_\lambda y}{\partial_\lambda x} = \frac{a \partial_\lambda \xi}{a \partial_\lambda \eta} = \frac{\partial_\lambda \xi}{\partial_\lambda \eta} = \frac{\sin \xi \sinh \eta}{\cos \xi \cosh \eta}.$$

4.4. Proyección de Gauss-Krüger

La proyección de Gauss-Krüger es una proyección conforme en la que el meridiano central se rectifica en una línea de longitud correcta. Es la más utilizada en cartas topográficas y se extiende su uso en sistemas de información geográfica (SIG) y procesamiento de imágenes aún cuando no exista una norma que lo exija. Probablemente se deba a una cuestión de tradición al ser la proyección con la que se implementaron las cartas topográficas por parte del Instituto Geográfico Nacional (IGN).

Las fórmulas más simples y además cercanas a la exacta es la proyección triple propuesta por Krüger (1912, pp. 11–15). Consiste en la rectificación, mediante una transformación conforme, de las coordenadas de Schreiber sobre el meridiano central. Se implementa mediante una serie de potencias en términos del aplastamiento tercero,

$$y + ix = R_\mu \left[\xi + i\eta + \sum_{j=1}^{j=6} \alpha_j \operatorname{sen}(2j(\xi + i\eta)) \right],$$

de la que surgen las variables paramétricas isométricas (v, u) ,

$$\frac{y}{R_\mu} + i \frac{x}{R_\mu} = v + iu = \xi + i\eta + \sum_{j=1}^{j=6} \alpha_j \operatorname{sen}(2j(\xi + i\eta)). \quad (20)$$

Separando la parte real e imaginaria de (20),

$$v + iu = \xi + i\eta + \sum_{j=1}^{j=6} \alpha_j \operatorname{sen}(2j\xi + i2j\eta), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} v &= \xi + \sum_{j=1}^{j=6} \alpha_j \operatorname{sen}(2j\xi) \cosh(2j\eta), \\ u &= \eta + \sum_{j=1}^{j=6} \alpha_j \cos(2j\xi) \sinh(2j\eta). \end{aligned} \quad (22)$$

Finalmente, las coordenadas cartesianas se calculan como,

$$\begin{aligned} y &= R_\mu v, \\ x &= R_\mu u, \end{aligned} \quad (23)$$

Derivadas

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, \quad (24)$$

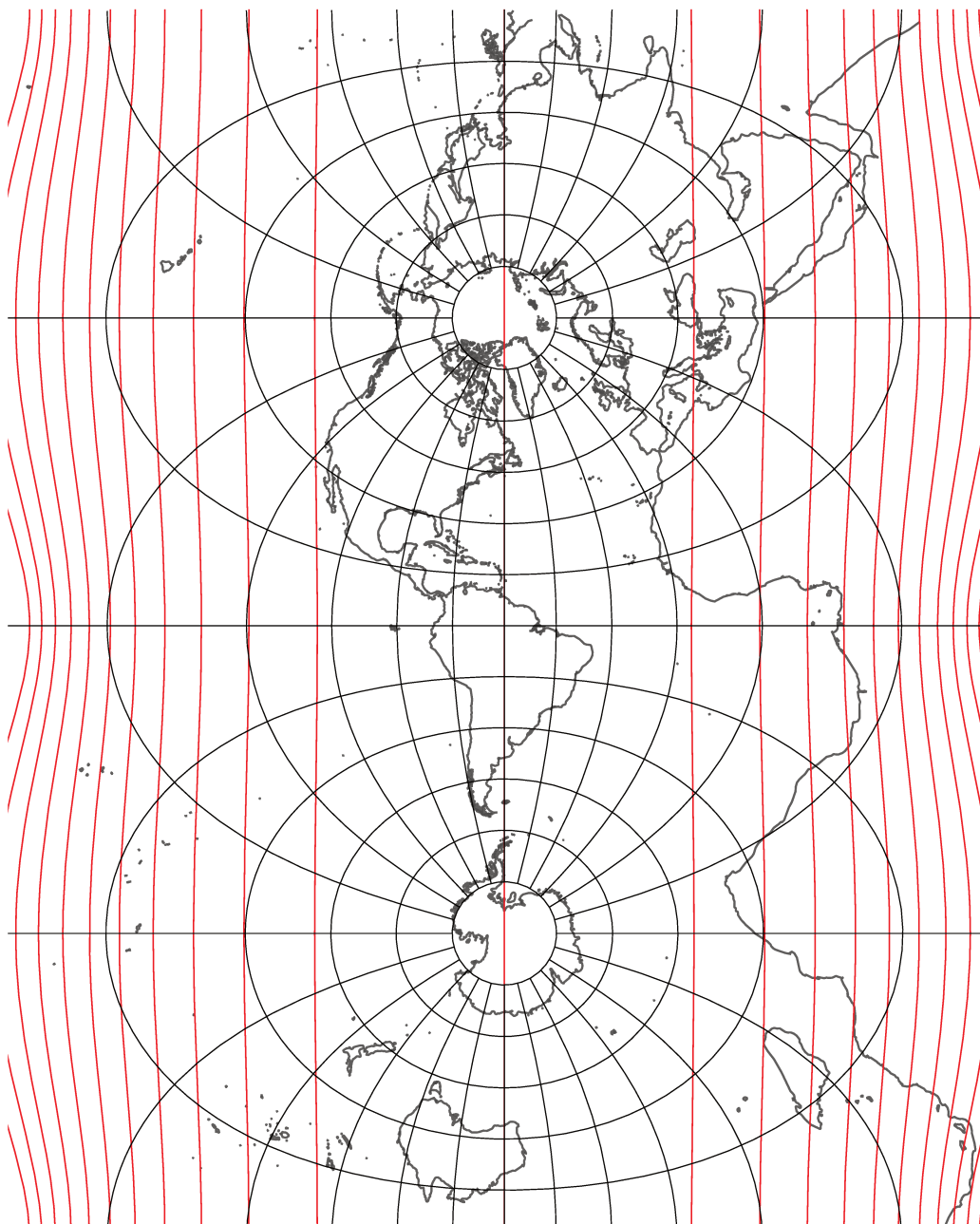


Figura 10: Esquema de la proyección de Krüger, $\lambda_0 = 60^\circ W$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} = 1 + \sum_{j=1}^{j=6} 2j\alpha_j \cos(2j\xi) \cosh(2j\eta), \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{j=6} 2j\alpha_j \sin(2j\xi) \sinh(2j\eta).\end{aligned}$$

Las derivadas se completan con las fórmulas (19). Los coeficientes α_j se encuentran en el cuadro A.2.

Alteración de escala

$$\sigma = \frac{\sqrt{(\partial_\lambda y)^2 + (\partial_\lambda x)^2}}{R_N \cos \phi} = \frac{R_\mu}{R_N \cos \phi} \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)^2},$$

de (24)

$$\sigma = \frac{R_\mu}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}\right)^2}. \quad (25)$$

El cálculo aproximado de la distorsión surge de la analogía entre la variable u y la q de Mercator,

$$\sigma \approx \cosh u.$$

Convergencia de meridianos

$$\tan \gamma = \frac{\partial_\lambda y}{\partial_\lambda x} = \frac{R_\mu \partial_\lambda v}{R_\mu \partial_\lambda u} = \frac{\partial_\lambda v}{\partial_\lambda u},$$

de (24)

$$\gamma = \arg \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \right). \quad (26)$$

4.5. Proyección cónica conforme de Lambert

La proyección cónica conforme de Lambert (CCL) (1772) es ampliamente utilizada en mapas aeronáuticos y en cartas topográficas de EEUU. En su forma secante, se caracteriza porque dos paralelos ϕ_1 y ϕ_2 , pertenecientes a un mismo hemisferio, no tienen distorsión. Todos los meridianos están representados como líneas rectas concéntricas en un ángulo menor a $\Delta\lambda$. El

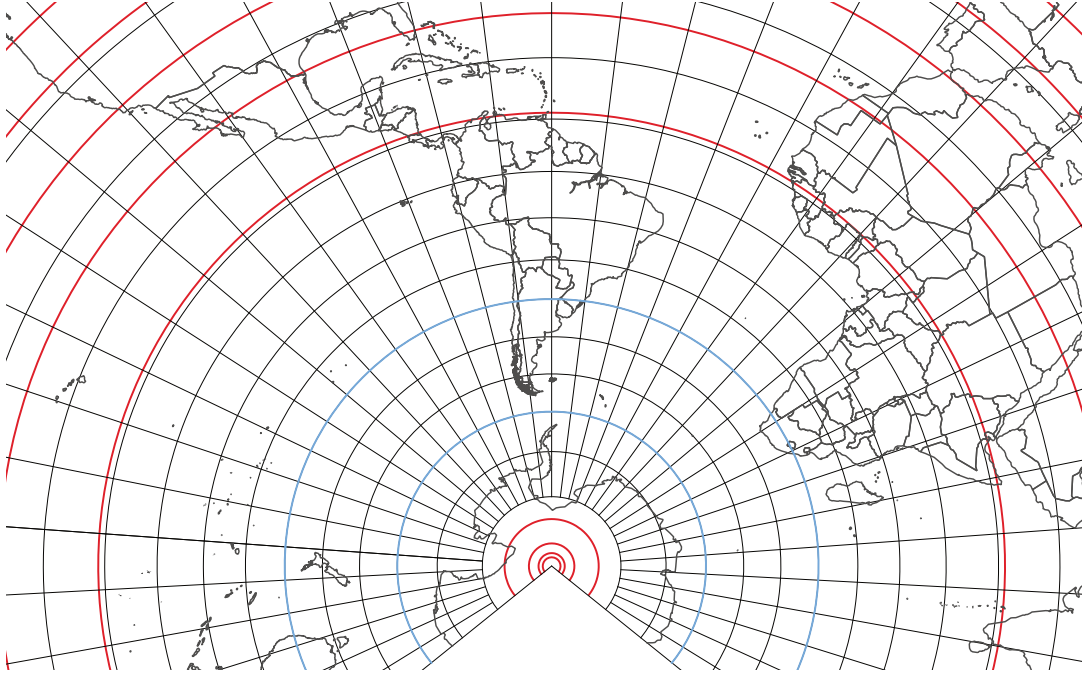


Figura 11: Esquema de la proyección CCL, $\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$, $\phi_1 = 30^\circ\text{S}$, $\phi_2 = 60^\circ\text{S}$

nuevo ángulo entre meridianos será $\ell\Delta\lambda$, donde $0 < \ell < 1$ es la **constante de cono**, que depende de ϕ_1 y de ϕ_2 . Esta constante determina el esquema de la alteración de escala en la proyección. Las fórmulas para el hemisferio sur son las siguientes:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\ell\lambda), \\ y &= \rho \cos(\ell\lambda) - \rho_1, \end{aligned} \tag{27}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \exp\{\ell(q - q_1)\}, \\ \rho_1 &= \frac{r_1}{\ell}, \quad \rho_2 = \frac{r_2}{\ell}, \\ \ell &= \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{q_2 - q_1}. \end{aligned}$$

En estas fórmulas q , q_1 y q_2 son latitudes isométricas correspondientes a cada latitud, r_1 y r_2 los radios de paralelo correspondientes a ϕ_1 y ϕ_2 y ℓ es la constante de cono.

Derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \ell \rho \cos(\ell\lambda), \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\ell \rho \sin(\ell\lambda), \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = \sin(\ell\lambda) \frac{\partial \rho}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = \cos(\ell\lambda) \frac{\partial \rho}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \phi} &= \frac{\ell \rho R_M}{R_N \cos \phi}. \end{aligned}$$

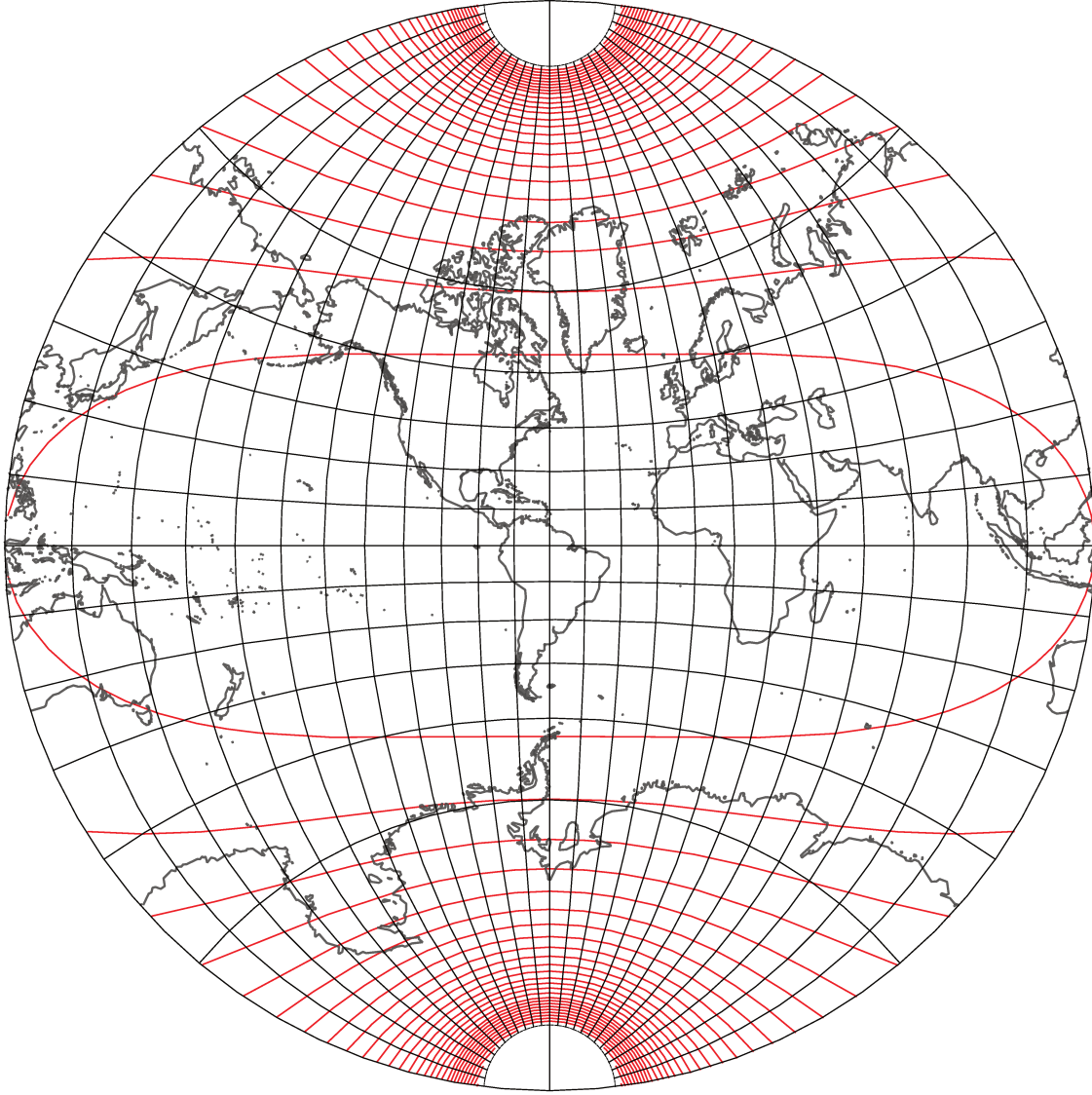


Figura 12: Esquema de la proyección de Lagrange, $\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$

Alteración de escala

$$\sigma = \frac{\sqrt{(\partial_{\lambda}y)^2 + (\partial_{\lambda}x)^2}}{R_N \cos \phi} = \frac{|\ell\rho|}{r}. \quad (28)$$

Convergencia de meridianos

$$\tan \gamma = \frac{\partial_{\lambda}y}{\partial_{\lambda}x} = -\ell\lambda.$$

4.6. Proyección de Lagrange

La proyección de Lagrange representa el globo terrestre de un modo conforme dentro de un círculo. Esto se consigue comprimiendo las coordenadas isométricas y aplicando las nuevas coordenadas a la proyección estereográfica ecuatorial (Lagrange, 1779). El mismo concepto puede generalizarse en cualquier proyección conforme, en general, esta técnica se puede

generalizar como

$$y + ix = f(\alpha(q + i\lambda)),$$

o

$$y + ix = f(\alpha(q' + i\lambda')),$$

donde α es un escalar positivo que «comprime» o «expande» las variables isométricas de Mercator (q', λ') que surgen de la rotación de la esfera conforme. Estas últimas variables, permiten acomodar los puntos de tangencia de la proyección en forma arbitraria, es decir, obtener proyecciones oblicuas. La forma de obtener las coordenadas oblicuas se explica en el apéndice B.

El círculo de Lagrange se desarrolla a partir de la proyección estereográfica ecuatorial,

$$y + ix = a \tanh\left(\frac{\alpha}{2}(q' + i\lambda')\right),$$

donde $\alpha = 1/2$. Separando parte real e imaginaria,

$$\begin{aligned} y &= a \frac{\sinh(\alpha q')}{\cos(\alpha \lambda') + \cosh(\alpha q')}, \\ x &= a \frac{\sin(\alpha \lambda')}{\cos(\alpha \lambda') + \cosh(\alpha q')}. \end{aligned} \quad (29)$$

Derivadas

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial x}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda},$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q'} &= -\frac{\partial y}{\partial \lambda'}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda'} = \frac{\partial y}{\partial q'}, \\ \frac{\partial y}{\partial q'} &= \frac{1 + \cos(\lambda'/2) \cosh(q'/2)}{D}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda'} = \frac{\sin(\lambda'/2) \sinh(q'/2)}{D}, \\ D &= 2 \cosh^2 \frac{q'}{2} + 4 \cos \frac{\lambda'}{2} \cosh \frac{q'}{2} + 2 \cos^2 \frac{\lambda'}{2}. \end{aligned}$$

Las derivadas se completan con el desarrollo expuesto en la sección B.

Alteración de escala

$$\sigma = \frac{1}{r} \sqrt{(\partial_{\lambda} y)^2 + (\partial_{\lambda} x)^2}. \quad (30)$$

Convergencia de meridianos

$$\tan \gamma = \frac{\partial_{\lambda} y}{\partial_{\lambda} x}.$$

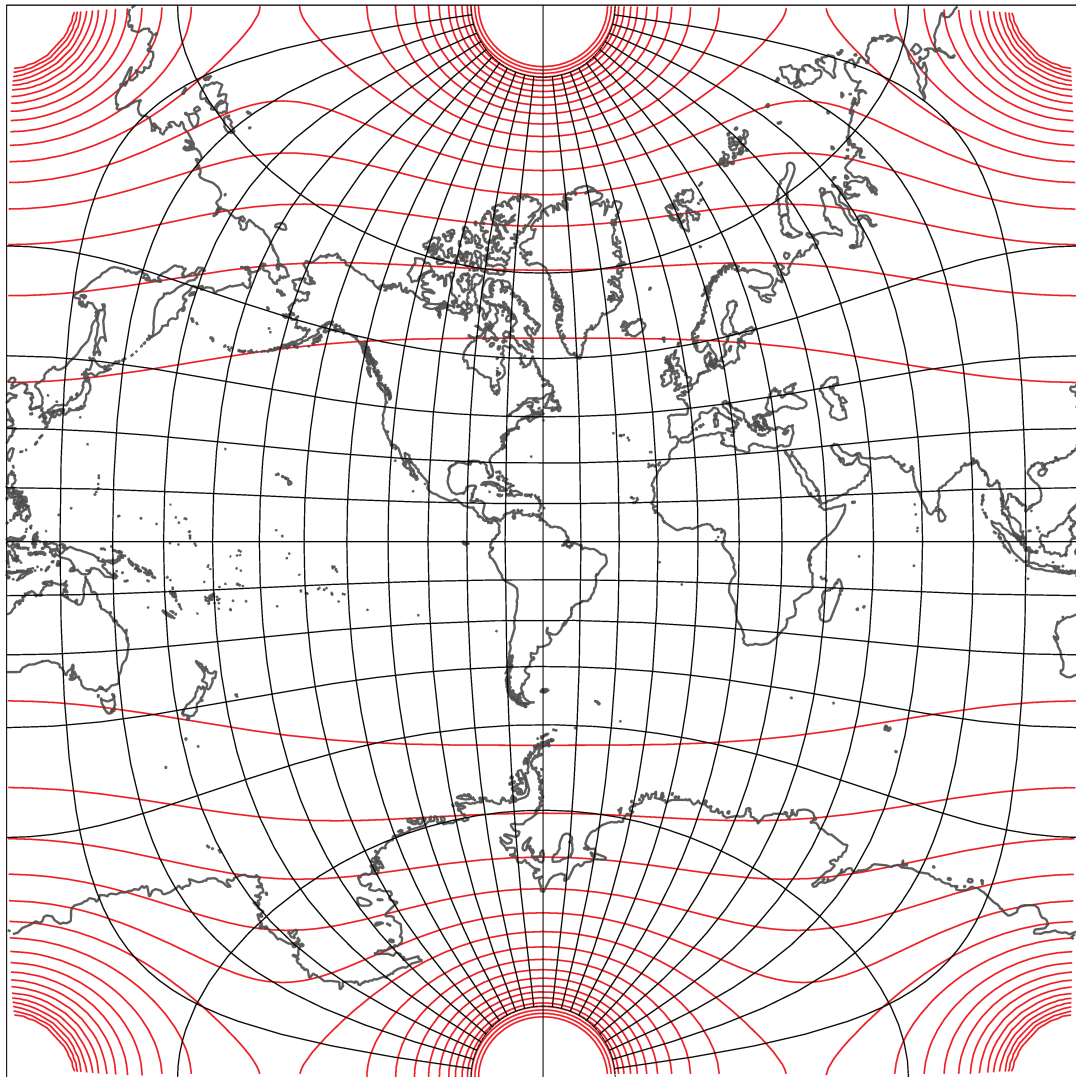


Figura 13: Esquema de la proyección de Adams I, $\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$

4.7. Proyección de Adams

La proyección de Adams representa el globo terrestre de un modo conforme dentro de un cuadrado. Fue desarrollada por Adams (1925, pp. 90–95) a partir de la proyección de Guyou (1887), en la que se comprimen las coordenadas isométricas al igual que el círculo de Lagrange. Uno de los inconvenientes de esta proyección es la presencia de regiones singulares o polos como se puede ver en la figura 13. Esto condiciona la ubicación de la región de interés, ya que no puede haber regiones singulares dentro de Ω . Si bien en la figura 13 se ven seis puntos singulares, en realidad son cuatro: dos corresponden a los polos norte y sur, el tercero corresponde a las dos esquinas del lado norte y el cuarto a las dos esquinas del lado sur. Adams desarrolló variantes de sus proyecciones conocidas como «mundo en un cuadrado de Adams I» y «mundo en un cuadrado de Adams II» que tiene forma de rombo, para una descripción general de estas proyecciones ver Snyder y Voxland (1989). Esta proyección es un caso especial

de la integral de Schwarz:

$$z' = \int_0^z (1 - z^k)^{-2/k} dz,$$

donde $z' = y' + ix'$ son las coordenadas de la proyección, $z = y + ix$ las coordenadas del círculo de Lagrange (fórmula 29) escaladas como $z = z/a$ y k es la cantidad de vértices del polígono; en el caso de la proyección de Adams $k = 4$.

Las fórmulas originales se refieren a la superficie esférica y no fueron desarrolladas para el elipsoide. La adecuación para el elipsoide es un ejercicio matemático y se basa en reemplazar la latitud geodésica sobre la esfera φ por la latitud conforme χ . Las derivadas para calcular la alteración de escala se deben hacer mediante la regla de la cadena. Estas fórmulas fueron desarrolladas para este trabajo.

Las ecuaciones de la proyección requieren de la evaluación de las integrales elípticas siguientes:

$$x = \int_0^m \frac{dm}{(1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 m)^{1/2}} = F(m, k),$$

$$y = \int_0^n \frac{dn}{(1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 n)^{1/2}} = F(n, k),$$

donde n y m son variables auxiliares, $F(., k)$ es la integral elíptica de Jacobi de primera especie con módulo k ,

$$k = 1/\sqrt{2},$$

$$\text{sen}(m) = \frac{1}{k} \text{sen } v, \quad \text{sen}(n) = \frac{1}{k} \cos u,$$

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad v = \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\cos \alpha = k \left(\tanh \frac{q'}{2} - \text{sech} \frac{q'}{2} \text{sen} \frac{\lambda'}{2} \right),$$

$$\cos \beta = k \left(\tanh \frac{q'}{2} + \text{sech} \frac{q'}{2} \text{sen} \frac{\lambda'}{2} \right),$$

donde q' y λ' son las coordenadas isométricas oblicuas, que dependen de ϕ_0 , λ_0 y un ángulo de rotación i , cuyo cálculo se detalla en el apéndice B. Finalmente,

$$N = N_0 + k_0 a \cdot y, \quad E = E_0 + k_0 a \cdot x, \quad (31)$$

Derivadas

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial x}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda},$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m}{\partial v} &= \frac{\cos v}{k \cos m}, & \frac{\partial n}{\partial u} &= \frac{-\operatorname{sen} u}{k \cos n}, \\
\frac{\partial u}{\partial \lambda} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda}, & \frac{\partial v}{\partial \lambda} &= \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda}, \\
\frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2}, & \frac{\partial u}{\partial \beta} &= \frac{1}{2}, & \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2}, & \frac{\partial v}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2}, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \alpha}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}, & \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \beta}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial q'} &= \frac{k \operatorname{sech}(q'/2) (\operatorname{sech}(q'/2) + \tanh(q'/2) \operatorname{sen}(\lambda'/2))}{2 - \operatorname{sen} \alpha}, \\
\frac{\partial \beta}{\partial q'} &= \frac{k \operatorname{sech}(q'/2) (\operatorname{sech}(q'/2) - \tanh(q'/2) \operatorname{sen}(\lambda'/2))}{2 - \operatorname{sen} \beta}, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} &= \frac{k \operatorname{sech}(q'/2) \cos(\lambda'/2)}{2 \operatorname{sen} \alpha}, & \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} &= \frac{k \operatorname{sech}(q'/2) \cos(\lambda'/2)}{2 - \operatorname{sen} \beta}.
\end{aligned}$$

Las derivadas se completan con el desarrollo expuesto en el apéndice B.

Convergencia de meridianos

$$\tan \gamma = \frac{\partial_{\lambda} y}{\partial_{\lambda} x}. \quad (32)$$

Alteración de escala

$$\sigma = \frac{a}{r} \sqrt{(\partial_{\lambda} y)^2 + (\partial_{\lambda} x)^2}. \quad (33)$$

Transformación inversa

$$\begin{aligned}
m &= \operatorname{am}(x, k), \\
n &= \operatorname{am}(y, k),
\end{aligned}$$

donde $\operatorname{am}(\cdot, k)$ es la función amplitud de Jacobi,

$$\operatorname{sen} v = k \operatorname{sen}(m), \quad \cos u = k \operatorname{sen}(n),$$

$$\alpha = u + v, \quad \beta = u - v,$$

$$\tanh \frac{q'}{2} = \frac{1}{2k} (\cos \alpha + \cos \beta),$$

$$\operatorname{sen} \frac{\lambda'}{2} = \cosh \frac{q'}{2} \left(\frac{1}{k} \cos \beta - \tanh \frac{q'}{2} \right).$$

La reversión de coordenadas se completa según lo descrito en la sección B.

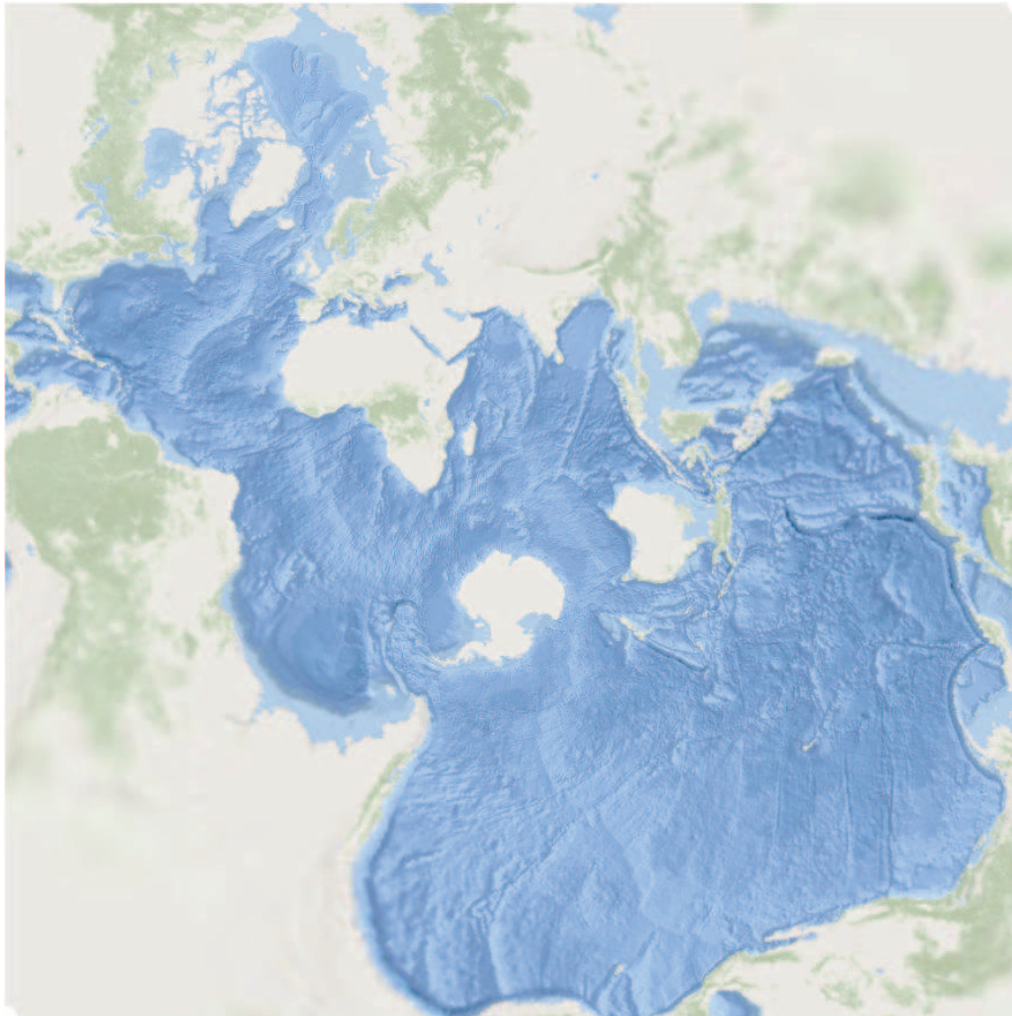


Figura 14: Representación del mapa de Spilhaus en el *software* ArcGIS

4.7.1. Las proyecciones de Spilhaus

En general, se entiende como proyecciones de Spilhaus a un conjunto de representaciones cartográficas que visualizan la superficie terrestre con los océanos en un todo continuo, cuyas ilustraciones aparecen en Spilhaus (1991). Fueron ganando popularidad en los últimos años debido a la representación del calentamiento global y su influencia en las corrientes oceánicas. En Šavrič et al. (2020) se realiza un resumen donde menciona que los primeros trabajos fueron publicados en 1942 utilizando distintas proyecciones oblicuas, entre ellas la proyección conforme de August y la proyección de Aitoff.

La más popular de estas proyecciones es la que utiliza la proyección de Adams, sin embargo Spilhaus no publica ni las fórmulas ni los parámetros de la misma. Esta proyección es reconstruida por prueba y error asignando valores a los parámetros para el centro de la proyección en latitud, longitud y rotación del acimut. Por ejemplo, Nelson (2020) desarrolló un proyecto para el *software* ArcGIS¹ de la proyección de Spilhaus. Este proyecto se puede ver en

¹ <https://nation.maps.arcgis.com/home/item.html?id=9b2ce7c8179b4744af7bf3ddb86b7804>

la figura 14, y los parámetros publicados son los siguientes:

Sistema de coordenadas	GCS WGS 1984
Proyección	Adams Square II
Falso Este	0m
Falso Norte	0m
Factor de escala	1
Acimut, i	40.178 234 82°
λ_0	66.949 701 98°E
ϕ_0	49.563 716 78°S
Rotación del plano	45°

Originalmente la representación es un rombo, no un cuadrado, luego el mapa final es rotado 45°. En nuestro caso se adaptará la representación global a la primera proyección de Adams que directamente es un cuadrado, sin rotar el mapa final.

4.8. Polinomios armónicos en general

Los polinomios armónicos también se suelen llamar **proyecciones adaptativas** ya que sus coeficientes surgen de alguna condición o criterio impuesto en la región a representar. Una proyección basada en un polinomio armónico se expresa por la serie de potencias de las variables isométricas $v + iu$:

$$y + ix = \sum_{n=1}^N (a_n + ib_n) (v + iu)^n, \quad (34)$$

donde $v + iu$ están en función de otras variables isométricas que provienen de una proyección cartográfica conforme; en nuestro caso serán las variables de Mercator y Schreiber, y se completará el desarrollo en secciones posteriores. En este contexto n es un número entero. Separando las partes real e imaginaria de la fórmula (34), los valores x e y están determinados por las expresiones bien conocidas:

$$y = \sum_{n=1}^N (a_n P_n - b_n Q_n), \quad x = \sum_{n=1}^N (a_n Q_n + b_n P_n). \quad (35)$$

Estas fórmulas están desarrolladas por ejemplo en Kaltsikis (1989, p. 22) quien da crédito a Morozow por la fórmula recursiva para encontrar los valores P_n y Q_n :

$$P_{n+1} = vP_n - uQ_n, \quad Q_{n+1} = uP_n + vQ_n,$$

donde $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_1 = v$, $Q_1 = u$.

El polinomio armónico está definido sobre un dominio Ψ conteniendo los valores posibles de (v, u) , de tal manera que abarque toda la región de interés Ω y un *buffer* alrededor de $\partial\Omega$.

Los parámetros a_n y b_n son los que determinan la distribución de los valores de alteración de escala σ y son el principal problema a resolver en este tipo de proyecciones. Las variables v y u están en función de (q, λ) o de (ξ, η) .

Transformación directa Para la transformación de coordenadas se adopta un criterio diferente al de las proyecciones convencionales, las coordenadas planas y, x están escaladas por el semieje mayor del elipsoide y k_0 es un factor de escala arbitrario que se puede utilizar en cualquier proyección conforme. Las fórmulas cartesianas están dadas por

$$N = N_0 + k_0 a \cdot y, \quad E = E_0 + k_0 a \cdot x, \quad (36)$$

donde N_0 y E_0 son el Falso Norte y Falso Este respectivamente, a el semieje mayor del elipsoide de revolución y k_0 el factor de compensación de escala; usualmente $k_0 = 1$. Los valores y, x se calculan con la fórmula (35).

Derivadas

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^N \left(a_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} - b_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} \right), \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^N \left(a_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} + b_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} \right).$$

Las derivadas se completan en las próximas secciones ya que dependen de las variables isométricas utilizadas.

Convergencia de meridianos

$$\tan \gamma = \frac{\partial_{\lambda} y}{\partial_{\lambda} x}. \quad (37)$$

Alteración de escala

$$m = k_0 \cdot \sigma, \quad (38)$$

donde:

$$\sigma = \mu / r|_{1,f}, \quad \mu = \sqrt{(\partial_{\lambda} x)^2 + (\partial_{\lambda} y)^2}, \quad r = R_N|_{1,f} \cos \phi. \quad (39)$$

La notación del radio de curvatura normal $R_N|_{1,f}$ indica que está evaluado con un valor de $a = 1$, esto es necesario al introducir el término a en las expresiones N y E en (36)

Transformación inversa La reversión de coordenadas debe hacerse por el método de Newton-Raphson. Para ello se requieren de valores aproximados del polinomio $v_0 + iu_0$ inverso a'_n y b'_n los cuales pueden ser calculados mediante MMC con puntos de muestra sobre la región

representada.

$$v_{k+1} + i u_{k+1} = v_k + i u_k - \frac{y_k + i x_k - (y + i x)}{y'_k + i x'_k}, \quad (40)$$

donde

$$y_k + i x_k = \sum_{n=1}^N (a_n + i b_n) (v_k + i u_k)^n, \quad (41)$$

$$y'_k + i x'_k = \sum_{n=1}^N n (a_n + i b_n) (v_k + i u_k)^{n-1}. \quad (42)$$

Los valores iniciales v_0, u_0 están dados por el polinomio

$$v_0 + i u_0 = \sum_{n=1}^N (a'_n + i b'_n) (y + i x)^n. \quad (43)$$

La separación de variables de las fórmulas (41) y (43) es similar a (35). La separación de variables en (42) es

$$\begin{aligned} y'_k &= \sum_{n=1}^N n (a_n P_{n-1} - b_n Q_{n-1}), \\ x'_k &= \sum_{n=1}^N n (a_n Q_{n-1} + b_n P_{n-1}). \end{aligned} \quad (44)$$

4.9. Polinomios armónicos en coordenadas de Mercator

La proyección más conocida de polinomios armónicos en base a coordenadas de Mercator fue la desarrollada por Reilly (1973) para Nueva Zelanda. Es el único caso del uso de este tipo de proyecciones utilizado en cartas topográficas a nivel oficial. Es conocida como New Zealand Map Grid (NZMG), este caso es ilustrado en la figura 15.

Transformación directa En la fórmula (34), las variables del polinomio se calculan como

$$v = \alpha (q - q_0), \quad u = \alpha (\lambda - \lambda_0),$$

siendo α un factor de normalización tal que

$$\{|v| < 1, \quad |u| < 1\}_{\Psi}.$$

Este factor de escala no es imprescindible.

Transformación inversa

$$q = v/\alpha + q_0, \quad \lambda = u/\alpha + \lambda_0.$$

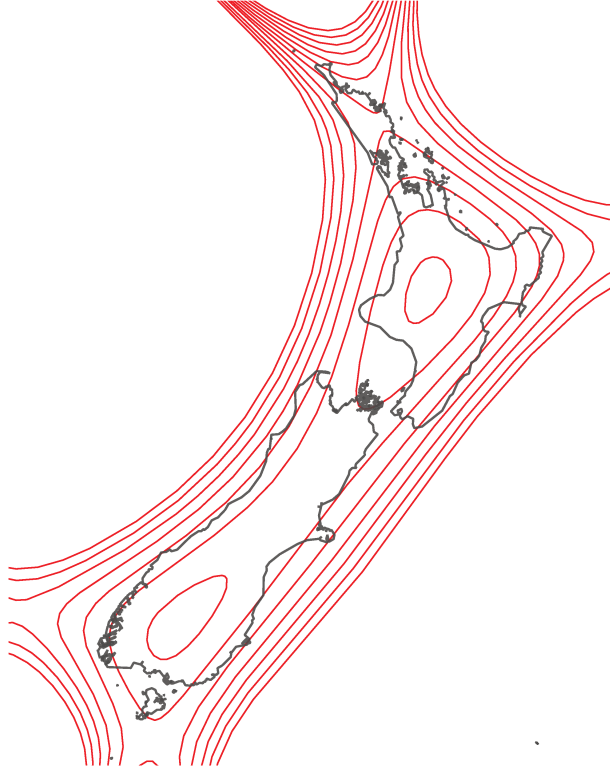


Figura 15: Esquema de la proyección NZMG basada en polinomios armónicos en coordenadas de Mercator.

$$\chi = \text{gd } q,$$

$$\phi = \chi + \sum_{j=1}^{j=6} g'_j \text{sen}(2\chi).$$

Derivadas

$$\frac{\partial P_n}{\partial q} = \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} = \alpha n P_{n-1}, \quad \frac{\partial Q_n}{\partial q} = -\frac{\partial P_n}{\partial \lambda} = \alpha n Q_{n-1}.$$

4.10. Polinomios armónicos en coordenadas de Schreiber

El uso de las variables de Schreiber en polinomios armónicos se describe en Orihuela (2017) donde se presenta como caso de estudio el continente americano, ilustrado en la figura 16.

Transformación directa En la fórmula (34), las variables del polinomio se calculan como

$$v = \alpha(\xi - \xi_0), \quad u = \alpha\eta.$$

Transformación inversa

$$\xi = v/\alpha + \xi_0, \quad \eta = u/\alpha.$$

La reversión de coordenadas continúa con las fórmulas (18).

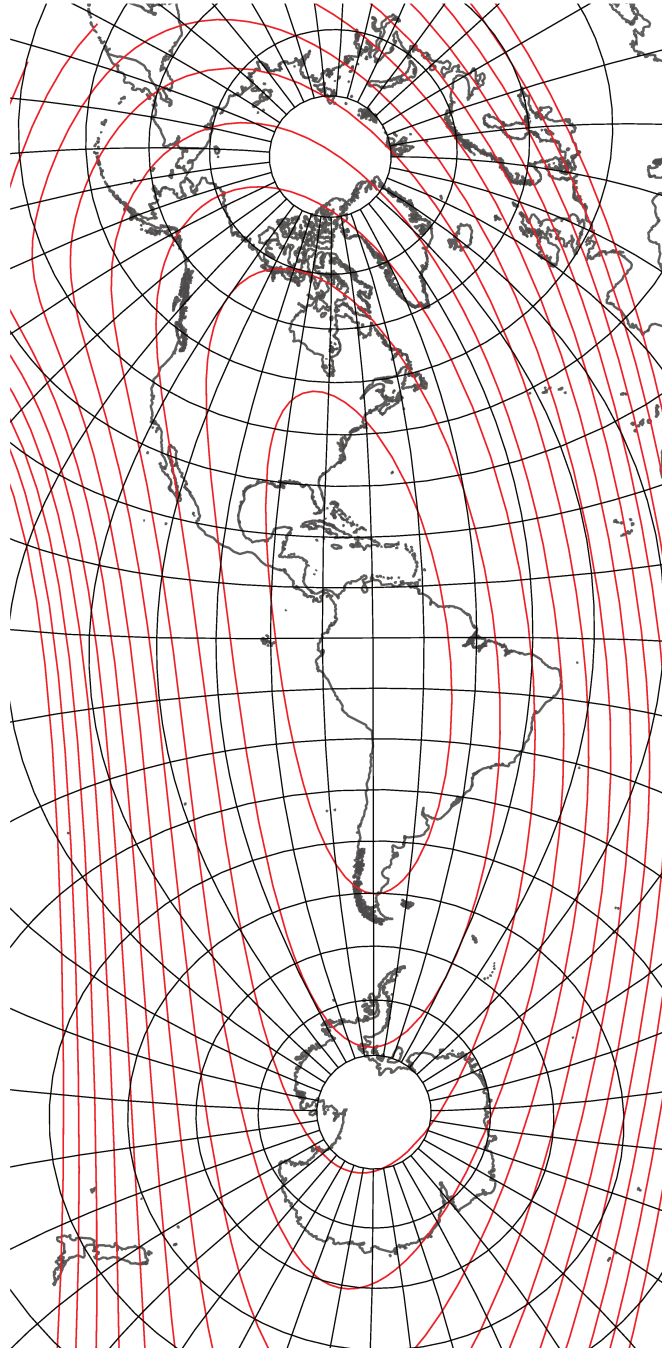


Figura 16: Esquema de la proyección del continente americano basada en polinomios armónicos en coordenadas de Schreiber.

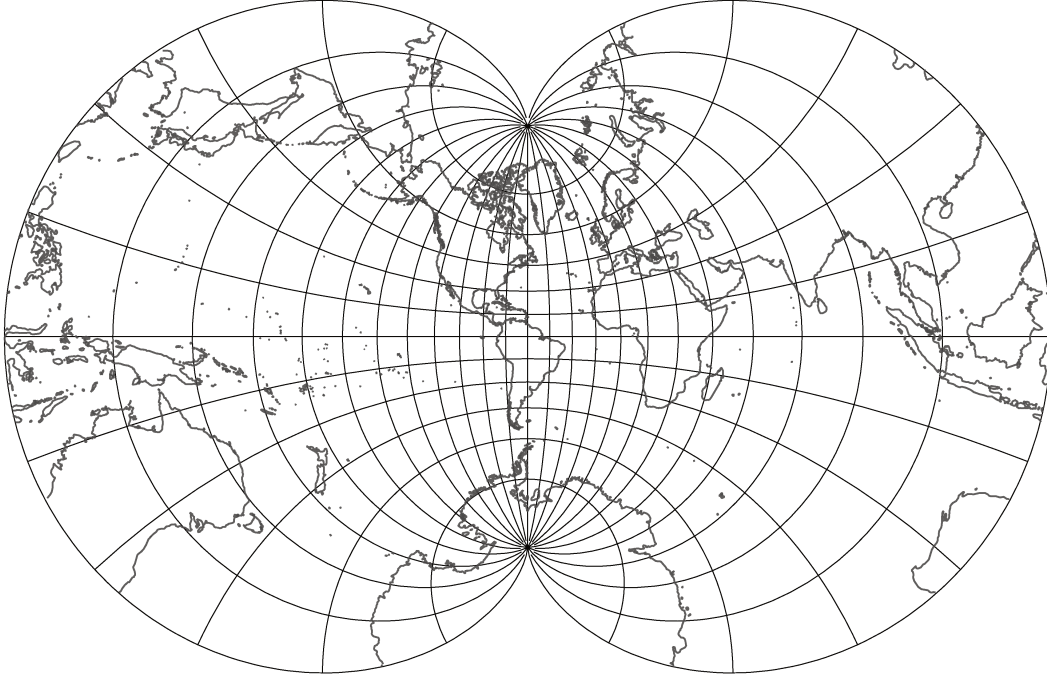


Figura 17: Esquema de la proyección de Eisenlohr

Derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_n}{\partial \lambda} &= \frac{\partial P_n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_n}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, & \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} &= \frac{\partial Q_n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q_n}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial P_n}{\partial \xi} &= \frac{\partial Q_n}{\partial \eta} = \alpha_n P_{n-1}, & \frac{\partial Q_n}{\partial \xi} &= -\frac{\partial P_n}{\partial \eta} = \alpha_n Q_{n-1}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} &= \sin \xi \sinh \eta, & \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} &= \cos \xi \cosh \eta.\end{aligned}$$

5. Criterios de optimización

Una proyección conforme es óptima si cumple con el principio de Chebyshev que establece que la variación de la alteración de escala es mínima dentro de Ω si la misma es constante sobre $\partial\Omega$. Esto se puede expresar como

$$\ln \sigma|_{\partial\Omega} = \text{const.}$$

Las funciones σ que cumplen esta condición son armónicas y cumplen con la identidad de Laplace:

$$\nabla^2 \ln \sigma = 0.$$

La proyección

$$y + ix = f(q + i\lambda),$$

que genera la función de distorsión σ , también es armónica. En todos los casos, σ se puede calcular como

$$\sigma = \frac{1}{r} |\partial_\lambda (y + ix)|,$$

esta fórmula es la misma que 25, 28, 33 y 38. Exceptuando el requisito $\ln \sigma|_{\partial\Omega} = \text{const}$, todas las proyecciones conformes pueden cumplir con las propiedades anteriores.

Las proyecciones conformes donde $\ln \sigma|_{\partial\Omega} = \text{const}$ fueron analizadas por Weber (1867), Eisenlohr (1870), Darboux (1911) y Milnor (1969) entre otros; estos estudios muestran las siguientes propiedades dentro de Ω :

- El promedio de la medida de alteración de escala $\ln^2 \sigma$ es mínimo
- El promedio de la curvatura del camino de las líneas geodésicas proyectadas es mínimo
- El promedio del gradiente de la medida de alteración de escala $\|\vec{\nabla} \ln \sigma\|$ es mínimo
- La diferencia entre los valores extremos de la alteración de escala, $\ln(\sigma_2/\sigma_1)$ es mínimo

Si se toma el globo terrestre completo como región de interés Ω , la solución al problema de optimización es la proyección de Eisenlohr (figura 17). Esta proyección cartográfica no genera un sistema de coordenadas convexo y este problema afecta a todas las regiones que ocupan una región de superficie mayor a la mitad de la superficie terrestre. Esto justifica el uso de las proyecciones de Adamas y Lagrange, que si bien no son óptimas, permiten representar en forma conforme contornos globales en un entorno cerrado y convexo.

La forma usual de construir una proyección cartográfica útil que cumpla con el principio Chebyshov, es a través de polinomios armónicos. Los coeficientes del polinomio pueden ser calculados por distintas técnicas, pero el objetivo alcanzado siempre es el mismo. Desde el punto de vista teórico el problema está resuelto, no existe otro sistema de coordenadas conforme en una región que no cumpla con el principio de Chebyshov. Los polinomios armónicos pueden tener una cantidad arbitraria de términos en la serie de potencias y adaptar los contornos de σ a $\partial\Omega$ sin importar su complejidad geométrica. Sin embargo, en la práctica los resultados no son óptimos y a medida que aumenta el orden del polinomio aumenta su inestabilidad en los bordes algo que contradice las bondades buscadas en la proyección.

De acuerdo a Eisenlohr (1870, p. 144), las líneas geodésicas proyectadas cuando son perpendiculares a una curva de igual distorsión, tienen curvatura mínima, y cuando son paralelas, tienen curvatura máxima. Minimizar la curvatura de la línea geodésica proyectada es importante desde el punto de vista de la veracidad de los resultados de un modelo, ya que la línea geodésica debería coincidir con el camino recto sobre la proyección. Esta distorsión de curvatura aumenta cuando aumenta la velocidad de cambio de la alteración de escala. La velocidad de crecimiento de la alteración de escala se puede medir como $\|\vec{\nabla} \ln \sigma\|$. Si en los bordes aparecen cambios

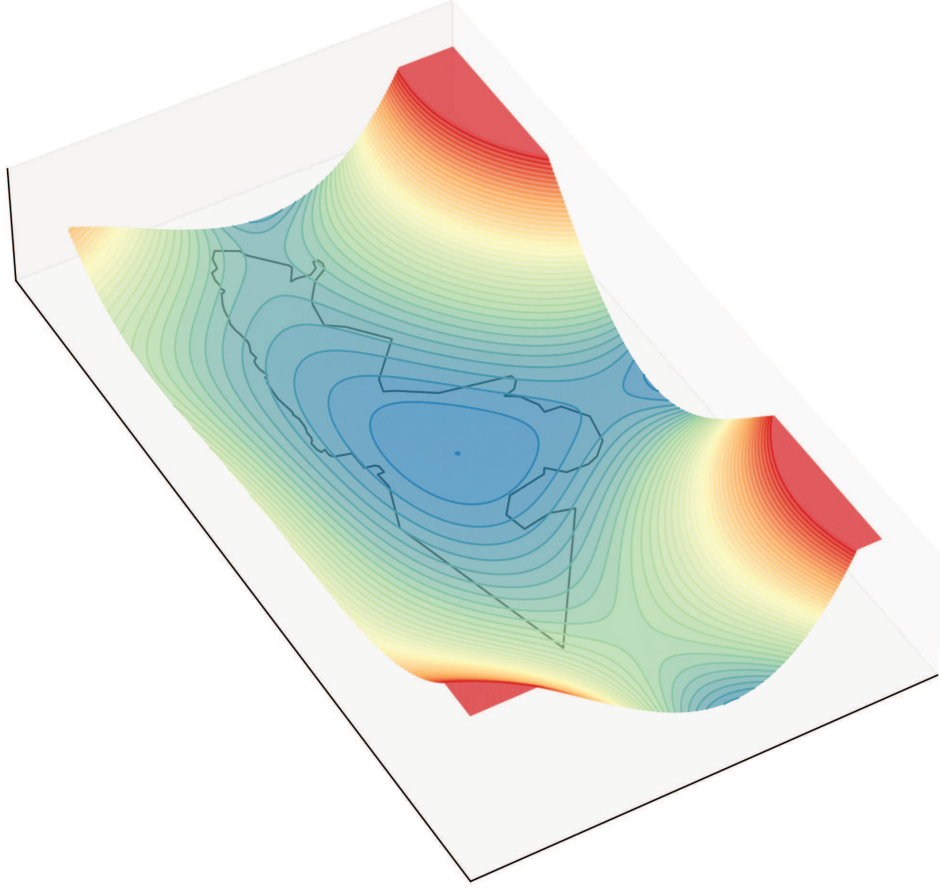


Figura 18: Representación de la distorsión de una proyección conforme como una superficie. Una proyección es óptima cuando la pendiente de esta superficie en cada punto es mínima. A medida que se fuerza el cumplimiento de este criterio para el interior de la región, empeoran los valores en los bordes.

rápidos de alteración de escala, rompe con los objetivos de optimización cerca de $\partial\Omega$ o incluso dentro de Ω . Teniendo en cuenta esto, se sugieren los criterios de optimización siguientes:

1. $\max \left\| \vec{\nabla} \ln \sigma \right\|_{\partial\Omega} = \min$
2. $\left\| \vec{\nabla} \ln \sigma \right\|_{\partial\Omega} = \min$
3. $\max \left\| \ln \sigma \right\|_{\partial\Omega} = \min$
4. $\left\| \ln \sigma \right\|_{\partial\Omega} = \min$

Debido a las propiedades de las funciones armónicas, si estos criterios se cumplen sobre el contorno $\partial\Omega$, también se cumplen para la región interior Ω , con excepción del caso de la proyección de Adams. Sin embargo hay un inconveniente: no existe un método directo para resolver el problema, ya que los valores de $\left\| \vec{\nabla} \ln \sigma \right\|_{\partial\Omega}$ son dependientes de los parámetros de la proyección y las derivadas para resolver el problema por Newton-Raphson son demasiado complejas.

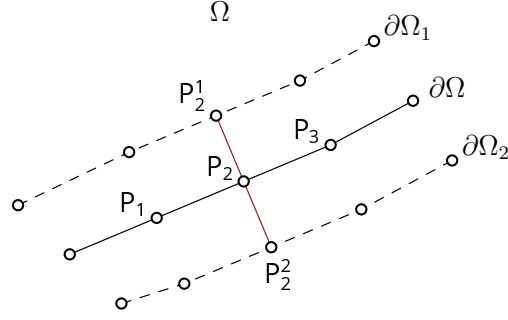


Figura 19: Generación de puntos de polígonos interior y exterior a Ω para la estimación de la pendiente de σ en $\partial\Omega$.

La minimización de la norma del gradiente puede resolverse de forma geométrica, de un modo similar al cálculo numérico de derivadas. Para ello, se propone crear dos contornos aproximadamente paralelos a $\partial\Omega$: $\partial\Omega_2$, por fuera de Ω y $\partial\Omega_1$ dentro de Ω . De este modo, se plantean las medidas numéricas siguientes:

1. $\max \ln^2 \frac{\sigma|_2}{\sigma|_1} \Big|_{\partial\Omega} = \min$
2. $\ln^2 \frac{\sigma|_2}{\sigma|_1} \Big|_{\partial\Omega} = \min$
3. $\max \ln^2 \sigma|_{\partial\Omega} = \min$
4. $\ln^2 \sigma|_{\partial\Omega} = \min$

donde $\sigma|_2$ es evaluado en $\partial\Omega_2$ y $\sigma|_1$ en $\partial\Omega_1$. Cada una de estas medidas se identificarán en forma sucesiva como criterio C_1 , C_2 , C_3 y C_4 .

Para construir los contornos $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$, se toman tres puntos consecutivos sobre $\partial\Omega$ (P_1 , P_2 y P_3) y se calcula un punto interior a Ω y un punto exterior a Ω ,

$$\begin{aligned} x_2^1 &= x_2 - d \cos \theta, & y_2^1 &= y_2 - d \sin \theta, \\ x_2^2 &= x_2 + d \cos \theta, & y_2^2 &= y_2 + d \sin \theta, \end{aligned}$$

donde

$$\theta = \arg(y_1 - y_3, x_3 - x_1),$$

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) pertenecen a $\partial\Omega$, (x_2^1, y_2^1) pertenece a $\partial\Omega_1$, (x_2^2, y_2^2) a $\partial\Omega_2$ y d es un valor de distancia al contorno original. Esta técnica no genera polígonos paralelos, pero sólo es necesario tener en forma aproximada dos puntos que sean representativos de la pendiente de la superficie generada por σ . Se ilustra la generación de puntos en los contornos en la figura 19.

6. Implementación de la optimización por MMC

La técnica de mínimos cuadrados es un método de optimización utilizado en estadística, ciencias de la Tierra y análisis numérico para encontrar parámetros de una función que minimicen la suma de los cuadrados de los residuos entre valores observados y valores teóricos. Si bien se asume que los residuos deben ser valores aleatorios según la distribución normal de Gauss, la técnica MMC también se utiliza para ajustar funciones determinísticas a un conjunto de datos o de tal manera que sea óptima de acuerdo a algún criterio.

Por mínimos cuadrados se calculan los parámetros de los polinomios armónicos de acuerdo a un valor sobre el contorno. Este problema no es lineal y se resuelve por Newton-Raphson imponiendo que la alteración de escala σ sea constante sobre $\partial\Omega$; ejemplos de este criterio se pueden ver en Snyder (1984), González López (1995) y Nestorov (1997). En ciertas ocasiones, los coeficientes del polinomio se resuelven en forma indirecta calculando primero la convergencia de meridianos con la restricción de que $\sigma = \text{const}$ sobre $\partial\Omega$ (Pedzich, 2005). También se puede obtener una proyección óptima minimizando cierta norma de energía σ dentro de la región Ω , algunos ejemplos de este caso se encuentran en Reilly (1973), Frankich (1982) y Tutic (2009). En cualquiera de los dos casos, se busca cumplir con el principio de Chebyshev.

6.1. Algoritmo para el cálculo de los coeficientes

Imponiendo el principio de Chebyshev:

$$\ln^2 \sigma|_{\partial\Omega} = \text{const},$$

se propone la siguiente secuencia de pasos para calcular los coeficientes del polinomio armónico, sea utilizando coordenadas de Mercator o utilizando coordenadas de Schreiber:

1. Transformar la región de interés Ω en coordenadas q, λ o bien ξ, η en un elipsoide $E_{1,f}$
2. Delimitar la región rectangular Ψ que envuelva Ω , $\partial\Omega_2$ y $\partial\Omega_1$
3. Hacer la muestra regular de puntos en $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1$ y Ω
4. Calcular los coeficientes del polinomio tal que $\ln^2 \sigma|_{\partial\Omega} = 0$
5. Actualizar los coeficientes con los valores $\hat{k}_0$ y $\hat{\gamma}_0$ calculados

6.2. Descripción del cálculo de los coeficientes

Los coeficientes que resultan del cálculo por MMC, no aseguran que la convergencia de meridianos sea nula en el centro de Ω y que la energía sea mínima, es decir, que la alteración de

escala en promedio sea un mínimo. La técnica descrita a continuación está extraída y adaptada de Orihuela (2017).

Teniendo en cuenta que el cálculo de los coeficientes por mínimos cuadrados es provisorio, se asigna la simbología $\hat{a}_n$ y $\hat{b}_n$ a las variables,

$$\hat{y} = \sum_{n=1}^N (\hat{a}_n P_n - \hat{b}_n Q_n), \quad \hat{x} = \sum_{n=1}^N (\hat{a}_n Q_n + \hat{b}_n P_n). \quad (45)$$

Si buscamos que el promedio de la alteración de escala sea mínima en $\partial\Omega$,

$$f = \ln^2 \sigma = 0. \quad (46)$$

Los coeficientes $\hat{a}_n$ y $\hat{b}_n$ la función (46) puede ser linealizada como

$$f_j \approx \left[\ln^2 \sigma + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{a}_n} \cdot \Delta \hat{a}_n + \frac{\partial f}{\partial \hat{b}_n} \cdot \Delta \hat{b}_n \right) \right]_j^0 \approx 0,$$

donde j indica un punto sobre $\partial\Omega$. Reordenando el sistema, separando incógnitas y términos independientes,

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{a}_1} \Delta \hat{a}_1 + \frac{\partial f}{\partial \hat{b}_1} \Delta \hat{b}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \hat{a}_n} \Delta \hat{a}_n + \frac{\partial f}{\partial \hat{b}_n} \Delta \hat{b}_n - [-\ln^2 \sigma]_0 = 0, \quad (47)$$

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{x} - \mathbf{u} = 0,$$

donde $\mathbf{J}$ es la matriz jacobiana, $\mathbf{u}$ es el vector de términos independientes, y $\Delta \mathbf{x}$ las correcciones a los coeficientes. El vector $\Delta \mathbf{x}$ se calcula en forma iterativa como

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^+ \mathbf{J}^T \mathbf{u},$$

donde $()^+$ es la pseudoinversa de Moore-Penrose. El contenido de los vectores y la matriz se detalla en el Cuadro 1. Se puede tomar $\hat{a}_n = \hat{b}_n = 1$ para comenzar la iteración.

Estos coeficientes, al pertenecer a un polinomio armónico, deben ser corregidos a través de una rotación y un cambio de escala:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \hat{k}_0 \begin{pmatrix} \cos \hat{\gamma}_0 & -\sin \hat{\gamma}_0 \\ \sin \hat{\gamma}_0 & \cos \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_n \\ \hat{b}_n \end{pmatrix}, \quad (48)$$

donde $\hat{k}_0$ es un valor que optimiza la alteración de escala en Ω y $\hat{\gamma}_0$ es la convergencia de meridianos en el centro de la proyección.

6.2.1. Cálculo del valor óptimo de $\hat{k}_0$

Se puede imponer el criterio que el promedio de σ sea mínimo dentro de Ω o que $\sigma \approx 1$ en una determinada región o contorno. En cualquiera de los dos casos se deben tener muestras de puntos en Ω o en el contorno deseado.

Los coeficientes preliminares de la fórmula (45) generan un cierto valor $\hat{\sigma}$, de acuerdo a lo ya mencionado debemos buscar un valor escalar constante tal que $\hat{k}_0 \hat{\sigma}$ tenga un valor óptimo en Ω . En un mapa conforme, dada una muestra finita de puntos sobre la superficie, el criterio

$$\frac{1}{A} \int_{\Omega} \ln^2(k\hat{\sigma}) dA = \text{mín},$$

minimiza el promedio de la alteración de escala de la región Ω con superficie A . El parámetro k es un valor constante que en este caso es simple de calcular:

$$k = \exp \left(\frac{-1}{A} \sum_{\Omega} \ln \sigma_i \Delta A_i \right), \quad (49)$$

El valor A representa el peso total de la superficie, $A = \sum_{\Omega} \Delta A_i$, y ΔA_i es el peso individual de un elemento i sobre Ω . En forma empírica, este valor está relacionado con la alteración de escala sobre el punto en las coordenadas isométricas originales de la región muestreada. Si la muestra es relativamente densa, este valor de escala se puede calcular en forma aproximada con la inversa del cuadrado del valor aproximado de distorsión en las coordenadas isométricas originales. Si son las variables isométricas de Mercator se puede calcular en función de q :

$$\Delta A_i = p_i = \text{sech}^2 q_i. \quad (50)$$

Si las variables surgen de la proyección de Gauss-Schreiber, los pesos se pueden calcular en función de η ,

$$\Delta A_i = p_i = \text{sech}^2 \eta_i. \quad (51)$$

Finalmente

$$\hat{k}_0 = k. \quad (52)$$

En forma alternativa, también se propone que la alteración de escala mínima dentro de Ω sea la unidad, es decir,

$$\text{mín}(k\hat{\sigma})|_{\Omega} = 1.$$

Este criterio resulta deseable en caso de que el modelo prevea una alteración de escala mayor a uno, similar a la aplicación de la proyección de Gauss-Krüger en Argentina.

6.2.2. Actualización de coeficientes preliminares

Los coeficientes del polinomio se pueden modificar para que cumpla las restricciones de que en el punto central la convergencia de meridianos sea nula

$$\tan \hat{\gamma}_0 = \left. \frac{\partial_{\lambda} \hat{y}}{\partial_{\lambda} \hat{x}} \right|_0.$$

Los coeficientes finales del polinomio se actualizan según lo mencionado en (48)

$$a_n = \hat{k}_0 (\cos \hat{\gamma}_0 \hat{a}_n - \sin \hat{\gamma}_0 \hat{b}_n), \quad b_n = \hat{k}_0 (\sin \hat{\gamma}_0 \hat{a}_n + \cos \hat{\gamma}_0 \hat{b}_n).$$

6.2.3. Inversión de coordenadas

Los coeficientes del polinomio para la transformación inversa se calcula según los descrito en el cuadro 2.

Cuadro 1: Armado de matrices para cálculo de coeficientes por mínimos cuadrados

La función f_j forma parte del sistema de ecuaciones a resolver

$$f_j \approx \left[\ln^2 \sigma + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{a}_n} \cdot \Delta \hat{a}_n + \frac{\partial f}{\partial \hat{b}_n} \cdot \Delta \hat{b}_n \right) \right]_j^0 \approx 0,$$

Las siguientes fórmulas representan la evaluación de las funciones en un punto determinado j con valores aproximados a_n^0, b_n^0

$$\ln^2 \sigma = \left(\ln \frac{\sqrt{G}}{r} \right)^2,$$

$$G = \left(\sum_{n=1}^N \left(\hat{a}_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} - \hat{b}_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} \right) \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N \left(\hat{a}_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} + \hat{b}_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} \right) \right)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{a}_n} = \frac{\partial \ln^2 \sigma}{\partial \hat{a}_n} = 2 \frac{\ln \sigma}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{a}_n}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{a}_n} = \frac{1}{2r\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial \hat{a}_n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{b}_n} = \frac{\partial \ln^2 \sigma}{\partial \hat{b}_n} = 2 \frac{\ln \sigma}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{b}_n}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{b}_n} = \frac{1}{2r\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial \hat{b}_n},$$

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{a}_n} = 2 \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} + 2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial G}{\partial \hat{b}_n} = 2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} - 2 \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda}.$$

Las derivadas se completan en las secciones 4.9 y 4.10. Finalmente el sistema matricial es

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta \hat{a}_1 \\ \Delta \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \Delta \hat{a}_N \\ \Delta \hat{b}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{b}_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{a}_N} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{b}_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{b}_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{a}_N} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{b}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_j}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial f_j}{\partial \hat{b}_1} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial \hat{a}_N} & \frac{\partial f_j}{\partial \hat{b}_N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} [\ln^2 \sigma]_1^0 \\ \vdots \\ [\ln^2 \sigma]_j^0 \end{pmatrix},$$

donde r está evaluado en un elipsoide con semieje mayor $a = 1$ y $[]^0$ indica que la función está evaluada con valores $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ de la iteración anterior al igual que $\mathbf{J}$.

Cuadro 2: Armado de matrices para para la reversión de coordenadas

$$\hat{v} + i\hat{u} = \sum_{n=1}^N (a'_n + ib'_n) (y + ix)^n,$$

$$\hat{v} = \sum_{n=1}^N (a'_n P'_n - b'_n Q'_n) = v(y, x), \quad \hat{u} = \sum_{n=1}^N (a'_n Q'_n + b'_n P'_n) = u(y, x),$$

donde

$$P'_{n+1} = yP'_n - xQ'_n, \quad Q'_{n+1} = xP'_n + yQ'_n.$$

Planteamos

$$f \approx v(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a'_n} v(y, x) \Delta a'_n + \frac{\partial}{\partial b'_n} v(y, x) \Delta b'_n \right) - \hat{v} = 0,$$

$$g \approx u(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a'_n} u(y, x) \Delta a'_n + \frac{\partial}{\partial b'_n} u(y, x) \Delta b'_n \right) - \hat{u} = 0,$$

siendo

$$\frac{\partial f}{\partial a_n} = P'_n, \quad \frac{\partial f}{\partial b_n} = -Q'_n, \quad \frac{\partial g}{\partial a_n} = Q'_n, \quad \frac{\partial g}{\partial b_n} = P'_n,$$

$$f \approx v(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N (P'_n \Delta a'_n - Q'_n \Delta b'_n) - \hat{v} = 0,$$

$$g \approx u(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N (Q'_n \Delta a'_n + P'_n \Delta b'_n) - \hat{u} = 0.$$

Las correcciones sucesivas a los coeficientes $\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^+ \mathbf{J}^T \mathbf{u}$ se desarrollan como

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta a'_1 \\ \Delta b'_1 \\ \vdots \\ \Delta a'_N \\ \Delta b'_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} P'_1|_1 & -Q'_1|_1 & \cdots & P'_N|_1 & -Q'_N|_1 \\ Q'_1|_1 & P'_1|_1 & \cdots & Q'_N|_1 & P'_N|_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P'_1|_j & -Q'_1|_j & \cdots & P'_N|_j & -Q'_N|_j \\ Q'_1|_j & P'_1|_j & \cdots & Q'_N|_j & P'_N|_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} [\hat{v} - v(y, x)|_0]_1 \\ [\hat{u} - u(y, x)|_0]_1 \\ \vdots \\ [\hat{v} - v(y, x)|_0]_j \\ [\hat{u} - u(y, x)|_0]_j \end{pmatrix}.$$

7. Implementación de la optimización por AG

La proyección cartográfica basada en polinomios armónicos es un modelo determinístico sensible a parámetros iniciales y condiciones de contorno. El cálculo de estos parámetros es de naturaleza heurística que dependiendo del criterio de optimización, no puede ser resuelta por métodos de cálculo tradicionales. Esto también se aplica a la búsqueda de parámetros

óptimos en las proyecciones convencionales. Uno de los métodos de optimización heurística más efectivos son los algoritmos genéticos (AG). Esta técnica fue sugerida por González López (1997), aunque sin dar detalles de su posible aplicación a casos de polinomios armónicos.

Los AG son una técnica de optimización y búsqueda inspirada en la evolución biológica y la genética. La idea básica detrás de los AG es simular el proceso de evolución natural mediante la aplicación de conceptos como la selección natural, la reproducción y la mutación. Estos algoritmos trabajan con una **población** de soluciones candidatas, donde cada solución es representada como un **individuo** y se le asigna un valor de **aptitud** que indica su calidad en términos de la función objetivo del problema.

La población de soluciones candidatas evoluciona a través de generaciones, aplicando operadores genéticos a los individuos para generar una nueva descendencia. Estos operadores incluyen la selección de los individuos más aptos para crear nuevos individuos, la **recombinación** de los genes de los padres (*crossover*) y la introducción de modificaciones aleatorias en los genes o **mutación**. De esta manera, se busca que la población evolucione hacia soluciones cada vez mejores a lo largo del tiempo.

El proceso de evolución continúa hasta que se cumpla un criterio de terminación, como alcanzar un número máximo de generaciones, obtener una solución lo suficientemente buena o cuando se cumpla alguna otra condición específica del problema.

La mutación es un operador genético usado para mantener la diversidad genética de una población. Es análogo a la mutación biológica. En la implementación se le asocia una cierta probabilidad de ocurrir con el objetivo de evitar el estancamiento en soluciones óptimas locales y ampliar el espacio de búsqueda.

La recombinación de cromosomas es el proceso en el cual se combinan los genes de los padres o ancestros para crear una descendencia. Para ello existen numerosas técnicas, por ejemplo seleccionar aleatoriamente cuáles genes se heredan o intercambiar genes en bloques. Un **cromosoma** es la cadena de genes de un individuo.

Los métodos de selección tienen el objeto de elegir a los individuos más aptos de acuerdo al resultado de la **evaluación** de un criterio a cumplir (*fitness*). La probabilidad de seleccionar un individuo se basa en su valor de aptitud relativa en comparación con el resto de la población. El criterio puede ser minimizar o maximizar un parámetro mensurable del problema.

El algoritmo básico de todo problema de AG se puede resumir del siguiente modo:

```
Poblar;  
 $L$  = Evaluar;  
para  $i=1:maxgen$  hacer  
| Seleccionar;  
| Recombinar;  
| Mutar;  
|  $L$  = Evaluar;  
| si ( $L < \varepsilon$  entonces  
| | break;  
| fin  
fin  
Retornar individuo más apto
```

En este caso, L es una función costo (*loss*) que puede ser un valor numérico de aptitud y ε un umbral que controla las variaciones de los valores de L de los individuos más aptos de cada generación. No es conveniente cortar ante la primera vez que L esté por debajo del umbral. Esto puede suceder entre dos generaciones aún estando muy lejos del individuo más apto. Es conveniente diseñar un criterio que detecte cuando se llega a un «nivel» de aptitud estable entre generaciones. Una buena referencia para la introducción a los AG se puede encontrar en Goldberg (1989), Holland (1992), De Jong (2002), Sheppard (2019) o Eiben y Smith (2015), entre otros.

Tradicionalmente, los algoritmos genéticos están codificados con cadenas de valores binarios que representan los parámetros del problema. Esta forma de representación permite generar un amplio conjunto de soluciones posibles sin restricciones o «prejuicios» sobre el individuo más apto. En el caso que nos ocupa, los parámetros son números reales en un conjunto infinito de valores posibles. Los genes deben estar representados también por números reales y tener cierto conocimiento previo del orden, o magnitud numérica de la solución, para que la búsqueda converja en un tiempo razonable.

Los AG son utilizados ampliamente en la inversión de problemas; algunos ejemplos de aplicación de este método y discusiones sobre su eficacia se pueden ver en Wang (1999), Delsanto et al. (2006), o Guzmán y González (2018), entre otros.

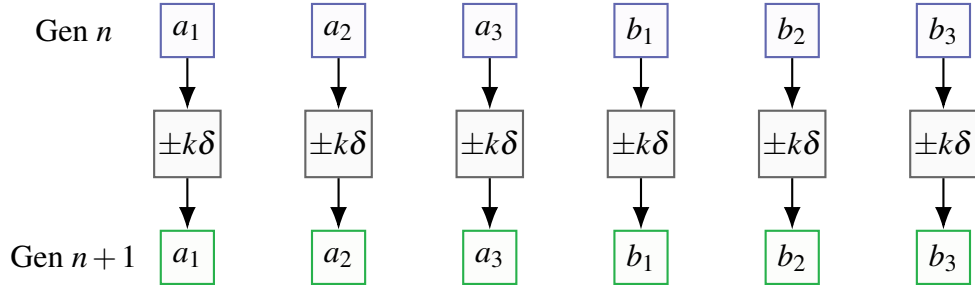


Figura 20: Generación de un individuo de cromosomas a_n, b_n a partir de un ancestro; k es un valor binario aleatorio y δ es un valor real aleatorio.

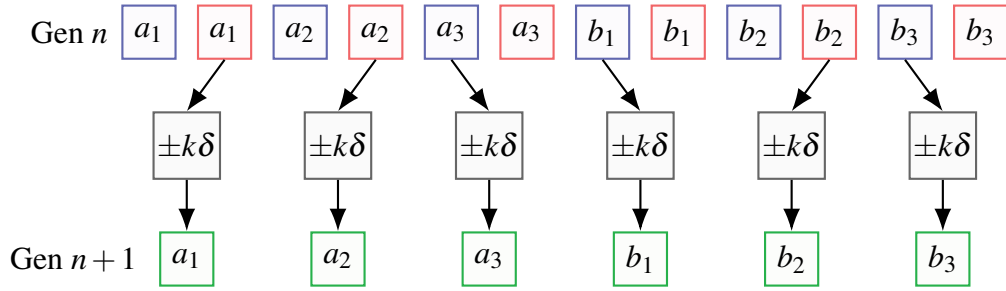


Figura 21: Generación de un individuo de cromosomas a_n, b_n a partir de dos ancestros; k es un valor binario aleatorio y δ es un valor real aleatorio.

7.1. Algoritmo genético para polinomios armónicos

En el diseño del algoritmo se debe tener en cuenta que la función que evalúa la aptitud de los individuos es compleja; requiere evaluar alguna de las fórmulas:

$$\ln^2 \frac{\sigma|_2}{\sigma|_1} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \ln^2 \sigma|_{\partial\Omega},$$

en todos los puntos de $\partial\Omega$. Esto fuerza a limitar el tamaño de la población. Se propone que cada generación tenga una población de tamaño $N = 2^t$ con $t > 2$. A continuación se describe un algoritmo para un bloque de ocho individuos:

1. En la primer generación, el primer individuo puede tener cromosomas aleatorios o inicializados con valores fijos.
2. Los siete individuos restantes tienen los genes modificados del individuo inicial.
 - a) Para la mutación, se selecciona en forma aleatoria el gen y también en forma aleatoria la amplitud de la mutación. Esto está ilustrado en la figura 20.
3. Para la segunda generación, se seleccionan los dos mejores individuos y se descartan los seis restantes. Los dos más aptos generan seis descendientes:
 - a) dos hijos por recombinación y mutación (figura 21)

- b) dos hijos por mutación (figura 20)
 - c) dos hijos por mutación, pero sin restricciones en la amplitud de la misma para no caer en un mínimo local.
4. Para cada generación $n + 1$, se repite el paso 3 hasta alcanzar el número máximo de generaciones.
 5. Se selecciona el individuo más apto de la última generación.

Cuando el valor t es mayor que tres, siempre se consideran como más aptos dos individuos y el resto de los grupos descritos en el paso 3 se distribuyen en forma proporcional con una población $N - 2$.

En las figuras 20 y 21 están ilustradas las técnicas de descendencia para un polinomio armónico de grado seis, pero exactamente la misma técnica se adapta para los casos de la proyecciones convencionales; por ejemplo, para Gauss-Krüger, el cromosoma de los individuos es el meridiano central λ_0 . La función de costo o *loss* para cada uno de los criterios C_1 a C_4 descritos en la sección 5 son:

1. $L_1 = \max \ln^2 \frac{\sigma|_2}{\sigma|_1} \Big|_{\partial\Omega},$
2. $L_2 = \text{media} \ln^2 \frac{\sigma|_2}{\sigma|_1} \Big|_{\partial\Omega},$
3. $L_3 = \max \ln^2 \sigma|_{\partial\Omega},$
4. $L_4 = \text{media} \ln^2 \sigma|_{\partial\Omega},$

cuanto menor es L_j , más apto es el individuo. Se adopta el término *loss*, propio de redes neuronales, en vez de *fitness* ya que para este trabajo siempre el individuo más apto es aquel cuyo valor L_j es el mínimo.

También se utiliza la librería PyGad (Gad, 2023) aplicando los mismos criterios. PyGad es una biblioteca para Python que facilita la implementación algoritmos genéticos. Comúnmente es utilizada para resolver problemas de ingeniería, ciencia de datos y aprendizaje automático. Una característica es la sencillez de uso como es reportado en Ramírez Solís et al. (2023) donde se hace una comparación de *frameworks* de algoritmos genéticos en Python.

7.2. Algoritmo genético para proyecciones convencionales

Para el caso de las proyecciones convencionales el algoritmo es exactamente el mismo que para el caso de los polinomios armónicos. Lo único que cambian son los cromosomas que para cada proyección son los siguientes parámetros:

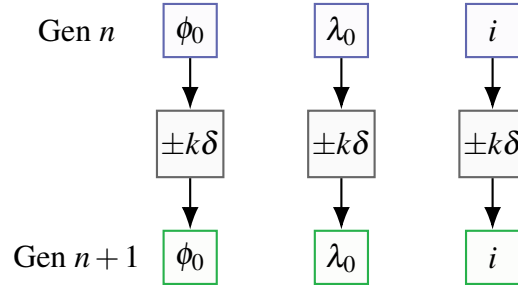


Figura 22: Generación de un individuo de cromosomas ϕ_0, λ_0, i a partir de un ancestro; k es un valor binario aleatorio y δ es un valor real aleatorio.

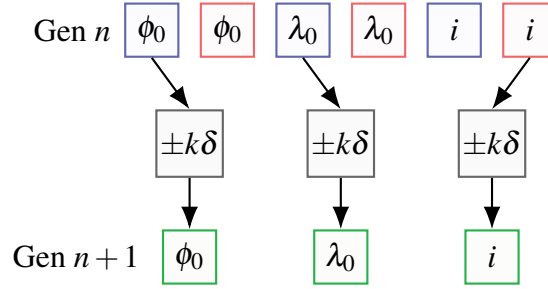


Figura 23: Generación de un individuo de cromosomas ϕ_0, λ_0, i a partir de dos ancestros; k es un valor binario aleatorio y δ es un valor real aleatorio.

- Proyección de Gauss-Krüger: λ_0
- Proyección CCL: ϕ_1, ϕ_2
- Proyección de Adams: ϕ_0, λ_0, i

Como ejemplo, se ilustran las creaciones de individuos para la proyección de Adams en las figuras 22 y 23.

8. Implementación, ensayos y resultados

Se desarrollaron en Python los algoritmos que implementan las funciones de las proyecciones descritas en las secciones 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.7 y 4.8. Cada una de estas funciones, no sólo retorna las coordenadas cartesianas de la proyección sino también la alteración de escala lo cual es imprescindible para resolver este trabajo. El desarrollo también incluye métodos para transformar archivos vectoriales y ráster al plano de las proyecciones.

En la aplicación de los criterios de la sección 5, primero se implementa la resolución del problema por el principio de Chebyshev, según lo enunciado en la sección 6, utilizando una muestra de puntos sobre $\partial\Omega$ y corrigiendo la alteración de escala y orientación del mapa con la muestra de puntos dentro de Ω . Esto permite obtener coeficientes por MMC para el criterio C_4 sin necesidad de recurrir a los AG. Es necesario implementar este algoritmo ya que estos

coeficientes pueden ser necesarios en la inicialización del cromosoma para que el algoritmo converja a una solución aceptable.

En la implementación de los AG de la sección 7 se desarrollaron las funciones que permiten crear hijos a partir de uno o dos padres y poblar una generación. Cada cromosoma es codificado como un vector de números reales donde los genes son los coeficientes o parámetros de la proyección. Finalmente, se crearon las funciones que calculan los parámetros según cada criterio de C_1 a C_4 . Estas funciones guardan el mejor cromosoma de cada generación y su valor de L_j . Del mismo modo que el caso de MMC, los coeficientes calculados se corrigen de tal modo $\gamma_0 = 0$ y la menor escala sea aproximadamente 1 dentro Ω .

Para la implementación de los algoritmos en PyGad, se reutilizan las funciones anteriores y sólo se adaptan a la función que evalúa el *fitness*. La configuración se determinó en forma empírica resolviendo sistemas de ecuaciones a través de la pseudoinversa. Estos parámetros se reproducen a continuación:

```
1  init_range_low = -100.0
2  init_range_high = 100.0
3  parent_selection_type = "sss"
4  # sss (Stochastic Universal Sampling): Selección Universal Estocástica.
5  keep_parents = 1
6  crossover_type = "uniform"
7  # For each gene, a parent out of the 2 mating parents is selected randomly
8  # and the gene is copied from it.
9  mutation_type = "random"
10 mutation_percent_genes = 50
11 ga_instance = pygad.GA(num_generations = cant_generaciones,
12                        initial_population = poblacion_inicial,
13                        sol_per_pop = tam_poblacion,
14                        num_parents_mating = num_parents_mating,
15                        fitness_func = fitness_function,
16                        num_genes = num_genes,
17                        init_range_low = init_range_low,
18                        init_range_high = init_range_high,
19                        parent_selection_type = parent_selection_type,
20                        keep_parents = keep_parents,
21                        crossover_type = crossover_type,
22                        mutation_type = mutation_type,
23                        mutation_percent_genes = mutation_percent_genes)
```

En el primer ensayo se comparó el algoritmo propio y el basado en PyGad, para ello se resolvió el caso de los polinomios armónicos para la provincia de Misiones. La muestra de puntos tomada se describe más adelante. En ambos casos se tomó un tamaño de población de 256 individuos, 100 generaciones y se retienen 8 padres. Los casos resueltos son los criterios

C_1 a C_4 y los grados del polinomio varían de 1 a 10. La corrida del algoritmo, que incluye la generación de archivos de registro y el cálculo de estadísticos para todas las regiones, Ω , Ω' y Ψ , para el caso propio tardó 292 min 18.5 s mientras que en PyGad, sólo para resolver el criterio C_1 , tardó casi 420 min, esto es debido a que la cantidad de soluciones por población es el mismo tamaño de la población. Para corregir esto se decidió modificar el tamaño de población a 16 individuos, esta vez la resolución del problema por PyGad tardó 23 min 7.6 s. Sin embargo, no se obtuvieron resultados muy diferentes al cromosoma inicial, sea que esté basado en los valores del principio de Chebyshev por MMC o en valores iniciales del tipo

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_N = 0; \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_N = 0. \quad (53)$$

Suponiendo que el problema residiera en la configuración, se modificaron varios aspectos, como el porcentaje de mutación de los genes y el rango de valores permitidos, entre otros parámetros. No obstante, a pesar de estos ajustes, no se logró obtener una solución satisfactoria. Para descartar un posible error en la función de *fitness*, se introdujeron perturbaciones en los valores de aptitud con el propósito de observar cambios en el cromosoma más apto. En efecto, al alterar los valores de aptitud, la solución también varió. Aunque no se pudo identificar la causa precisa del fallo en el algoritmo implementado con PyGad, se decidió abandonarlo, dado que no ofrecía ventajas de eficiencia, especialmente en poblaciones grandes, y considerando que se obtuvieron mejores resultados con el algoritmo propio.

En los casos donde se resolvieron polinomios armónicos, se aplicó un método consistente: una población de 256 individuos y 100 generaciones. El algoritmo se ejecutó inicializando el primer individuo tanto con el cromosoma (53) como con el cromosoma derivado de aplicar el principio de Chebyshev mediante MMC. Los resultados se compararon, y para una mejor visualización, se generaron videos que muestran la evolución óptima de la solución en función del tipo de inicialización y el grado del polinomio. En el caso de las proyecciones convencionales, el primer individuo se inicializó simplemente con parámetros aproximados, y dado que los genes eran pocos, la solución convergió sin dificultades, sin necesidad de un individuo inicial específico.

El desarrollo de las funciones en Python no tiene como objetivo crear un *software* destinado a otros usuarios, sino simplemente derivar una metodología. En muchos casos, el código no es particularmente elegante ni tolerante a errores, pero es efectivo para resolver el problema planteado. Este código se proporciona con el propósito de documentar el proceso del trabajo y permitir la revisión de algoritmos y fórmulas:

- https://geon6.com/tesis/trabajo_final_src.zip

En las secciones siguientes, se presentan los resultados obtenidos para cada caso de estudio, con especial énfasis en la comparación visual de las superficies de escala generadas. Este enfoque

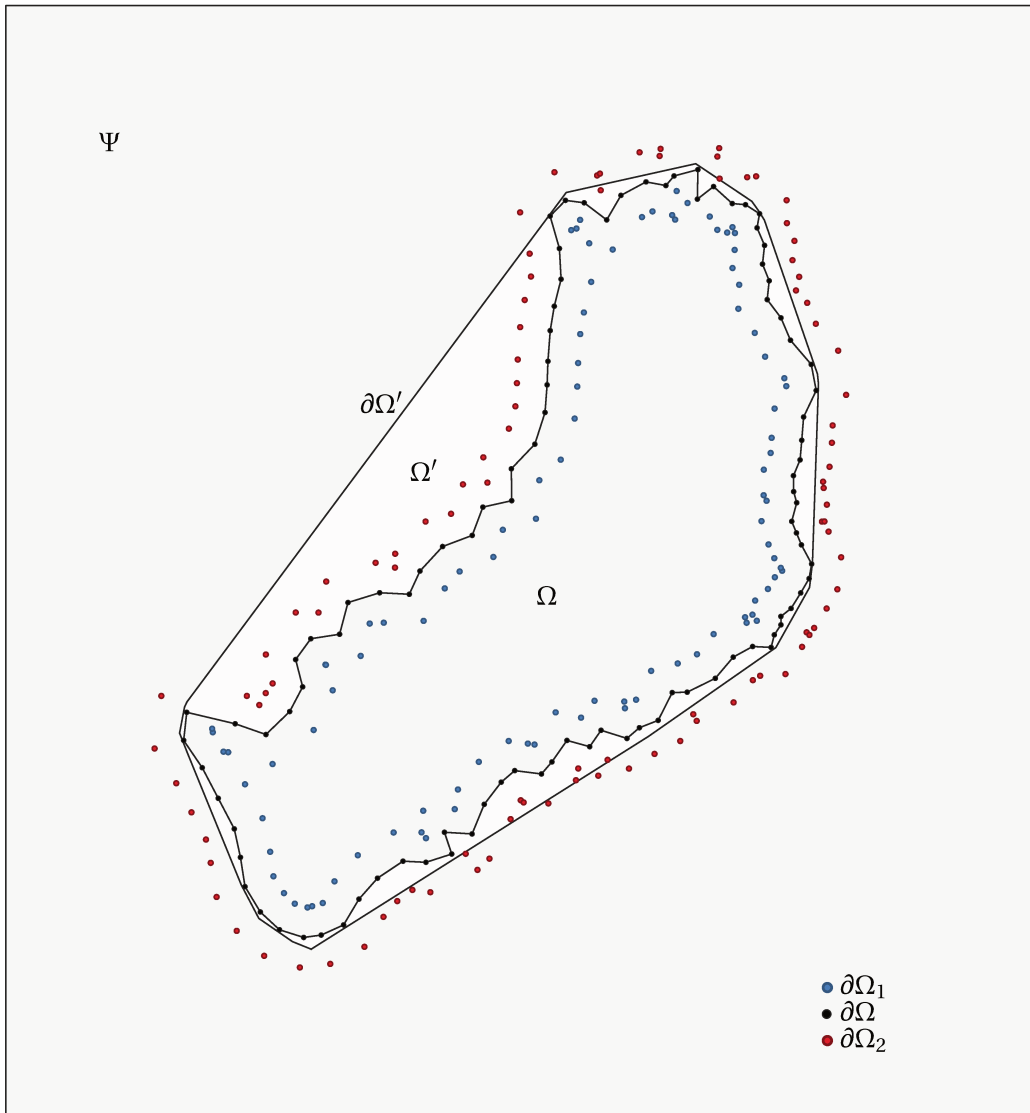


Figura 24: Representación del contorno y muestra de puntos de la provincia de Misiones en la proyección de Mercator.

facilita una mejor apreciación y comparación de la calidad de cada resultado.

8.1. Provincia de Misiones

La provincia de Misiones tiene una superficie² de 29911.4 km². En forma aproximada, los paralelos norte y sur son: 25°29'40"S y 28°10'0"S, y los meridianos este y oeste: 53°38'14"W 56°3'31"W. Se creó un rectángulo Ψ en coordenadas Mercator con los siguientes parámetros: elipsoide GRS80, $a = 1$, $\phi_0 = 27^\circ\text{S}$, $\lambda_0 = 54.5^\circ\text{W}$. Está delimitado por los valores:

- Borde Norte: 0.0396 ($0.0396 \cdot 6378137 \text{ m} = 252574.225 \text{ m}$)
- Borde Sur: -0.0339 ($-0.0339 \cdot 6378137 \text{ m} = -216218.844 \text{ m}$)

²<https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geografia/DatosArgentina/DivisionPolitica>

- Borde Este: 0.0298 ($0.0298 \cdot 6378137 \text{ m} = 190068.483 \text{ m}$)
- Borde Oeste: -0.0387 ($-0.0387 \cdot 6378137 \text{ m} = -246833.902 \text{ m}$)

En otras palabras, el rectángulo tiene 468.793 km de alto por 436.902 km de ancho. En cada región se tomaron las siguientes muestras en forma equiespaciada:

- Ψ : 20424 puntos
- Ω' : 4995 puntos
- Ω : 3690 puntos
- $\partial\Omega$: 100 puntos

Además se generaron los 100 puntos correspondientes a $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ de acuerdo a la sección 5 (ver figura 24).

Las figuras que ilustran la alteración de escala, expresan los valores en relación a la unidad en partes por cien mil (pcm):

$$(\text{ksc } \sigma - 1) \cdot 100 \times 10^3,$$

donde

$$\begin{aligned} \text{ksc } \sigma &= \sigma \quad \text{si } \sigma \geq 1, \\ \text{ksc } \sigma &= 1/\sigma \quad \text{si } \sigma < 1. \end{aligned}$$

8.1.1. Polinomios armónicos

En el caso de Misiones, al comparar los métodos de inicialización del primer cromosoma no genera diferencias significativas en los resultados obtenidos (figura 25), esto es debido a que la superficie del área de estudio es relativamente pequeña respecto de la superficie del elipsoide. El detalle de la evolución de resultados por generación se encuentra ilustrado en los videos (ver fotograma de ejemplo en figura 26)

- C_1 : https://geon6.com/tesis/misiones_videos_C1.html
- C_2 : https://geon6.com/tesis/misiones_videos_C2.html
- C_3 : https://geon6.com/tesis/misiones_videos_C3.html
- C_4 : https://geon6.com/tesis/misiones_videos_C4.html

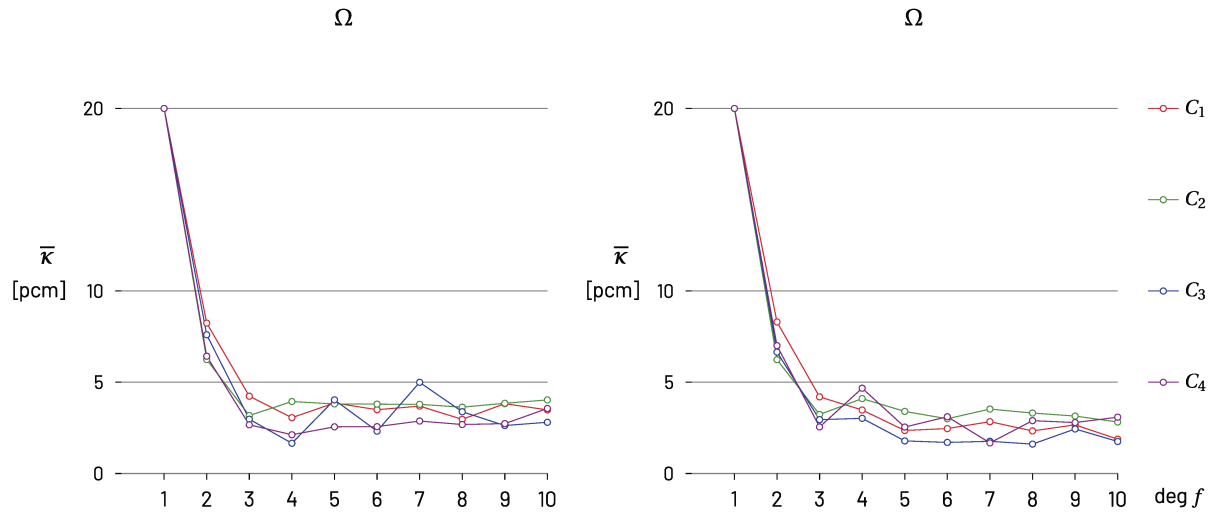


Figura 25: Provincia de Misiones. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ω . A la izquierda los resultados del algoritmo genético sin inicializar los coeficientes, a la derecha con inicialización por el principio de Chebyshov.

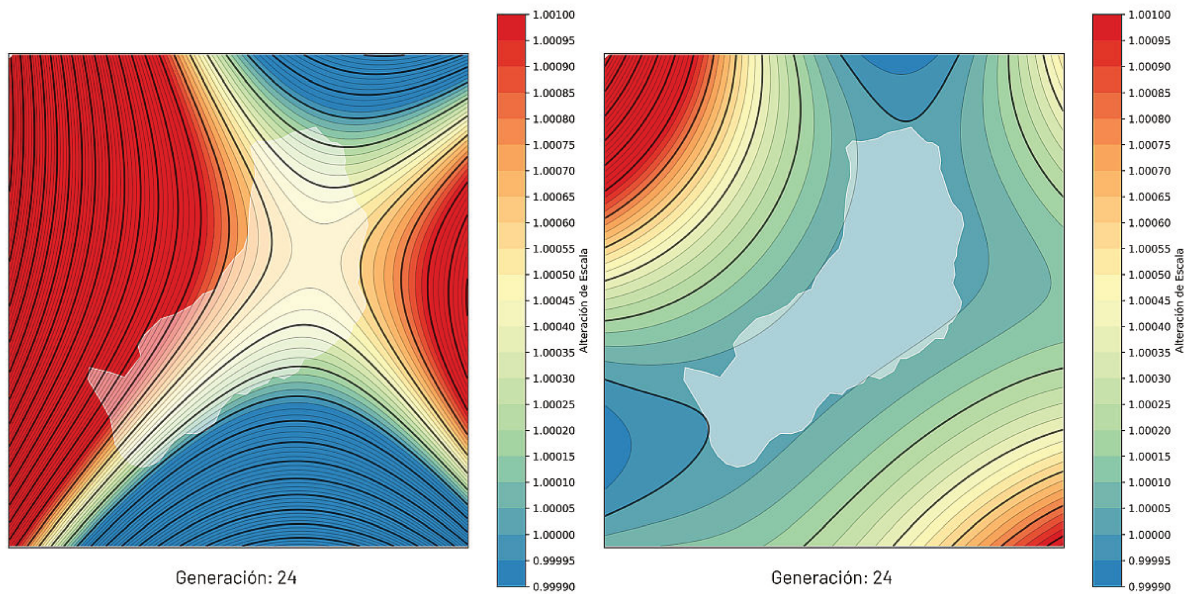


Figura 26: Provincia de Misiones. Secuencia de soluciones obtenidas por los algoritmos genéticos para el criterio C_4 y grado 9. Ejemplo de fotograma, a la izquierda sin inicializar los coeficientes, a la derecha con inicialización según principio de Chebyshov.

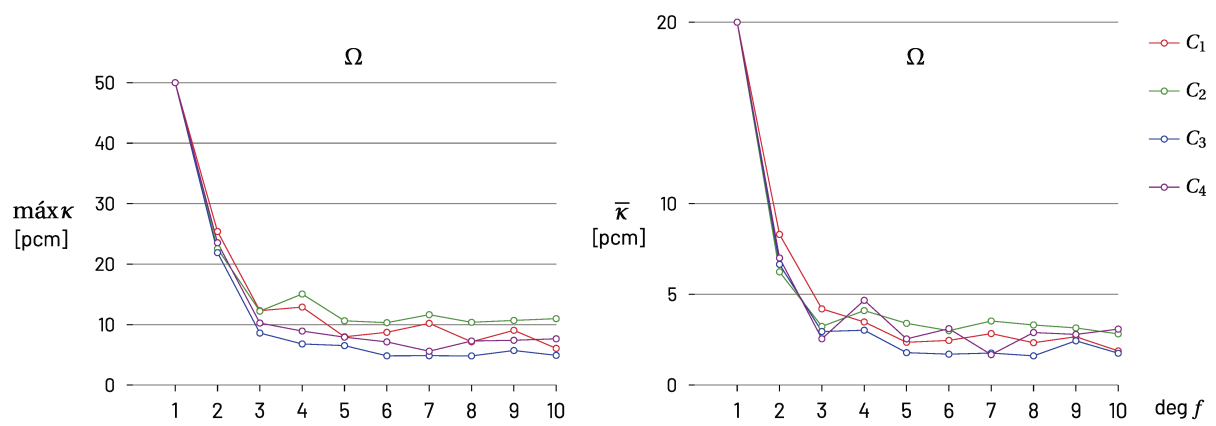


Figura 27: Provincia de Misiones. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ω . Los valores están recortados en 50 pcm (a la izquierda) y en 20 pcm (a la derecha).

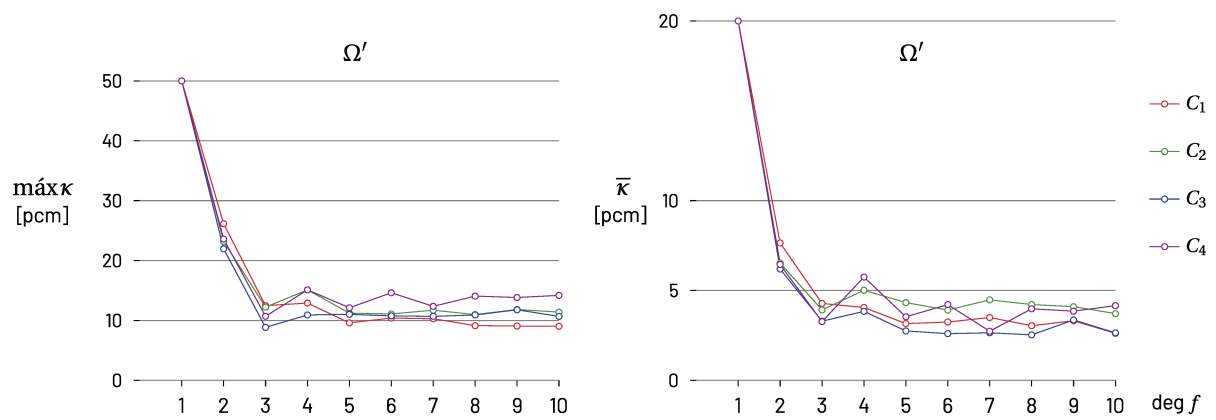


Figura 28: Provincia de Misiones. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ω' . Los valores están recortados en 50 pcm (a la izquierda) y en 20 pcm (a la derecha).

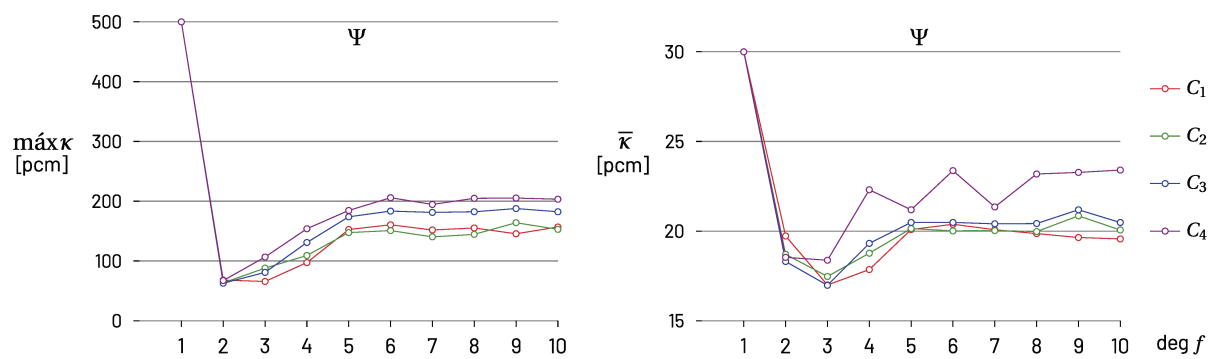


Figura 29: Provincia de Misiones. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ψ . Los valores están recortados en 500 pcm (a la izquierda) y en 30 pcm (a la derecha).

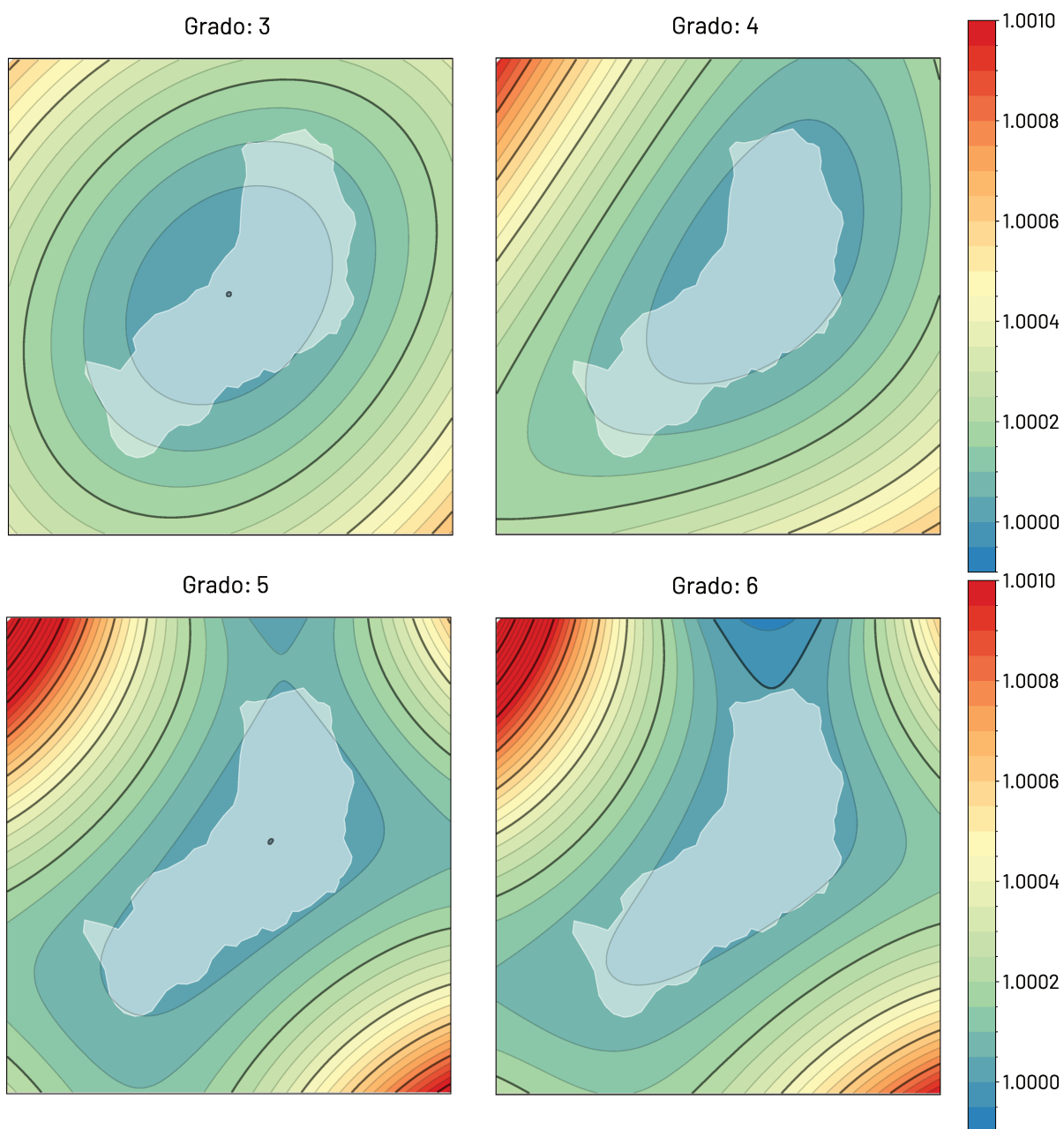


Figura 30: Provincia de Misiones. Representación de la alteración de escala para C_1 , grados 3 a 6.

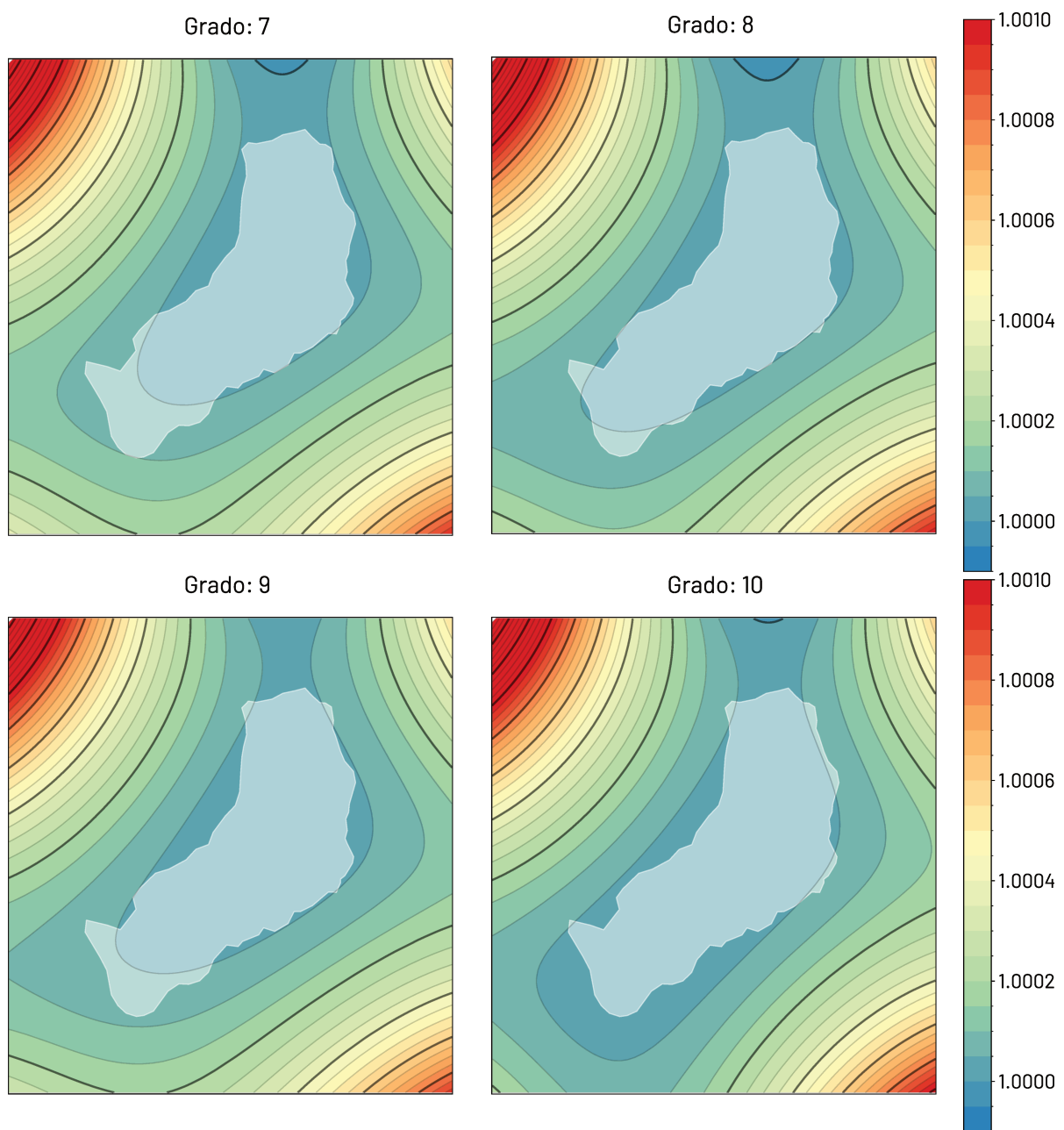


Figura 31: Provincia de Misiones. Representación de la alteración de escala para C_1 , grados 3 a 6.

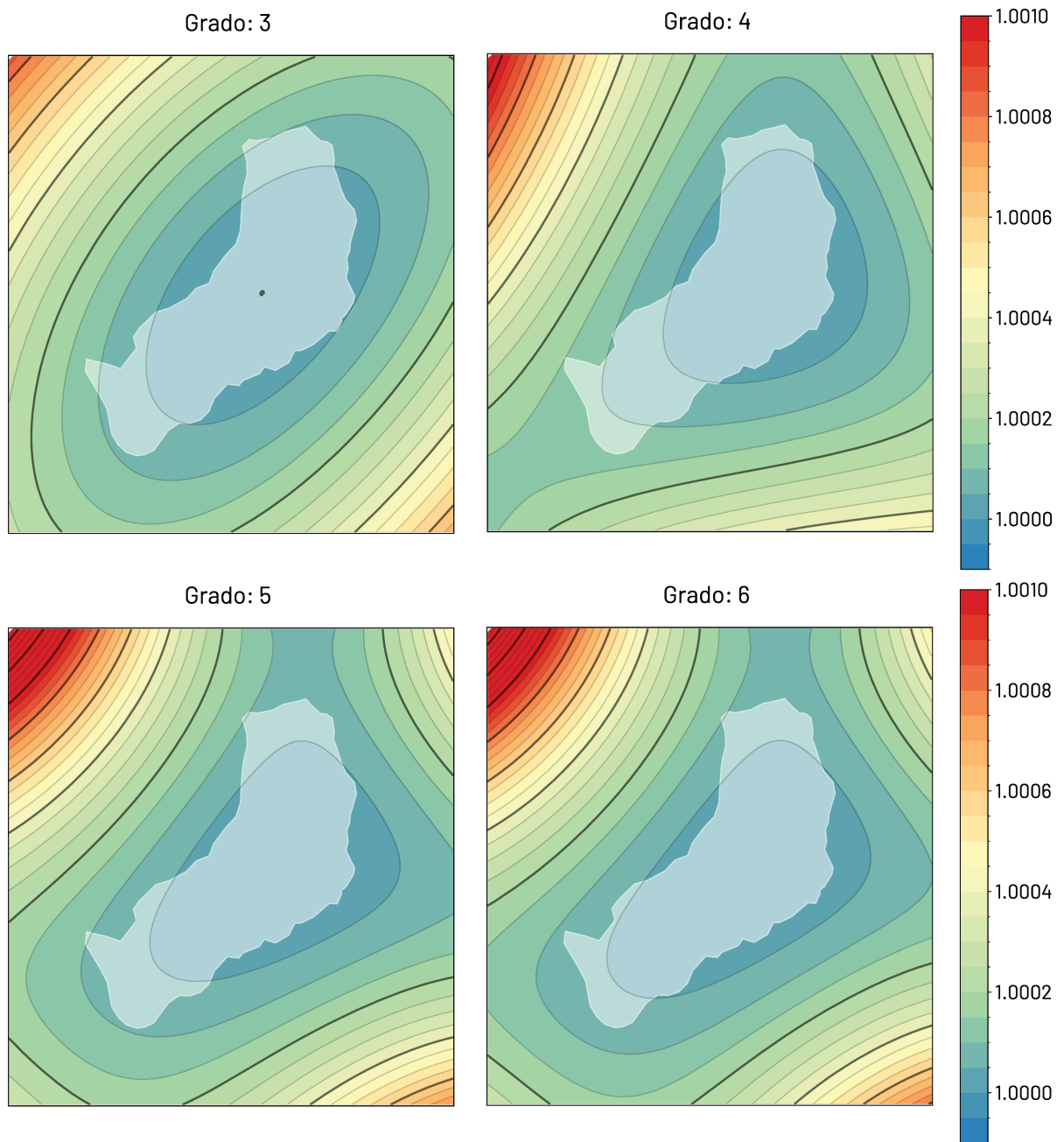


Figura 32: Provincia de Misiones. Representación de la alteración de escala para C_2 , grados 3 a 6.

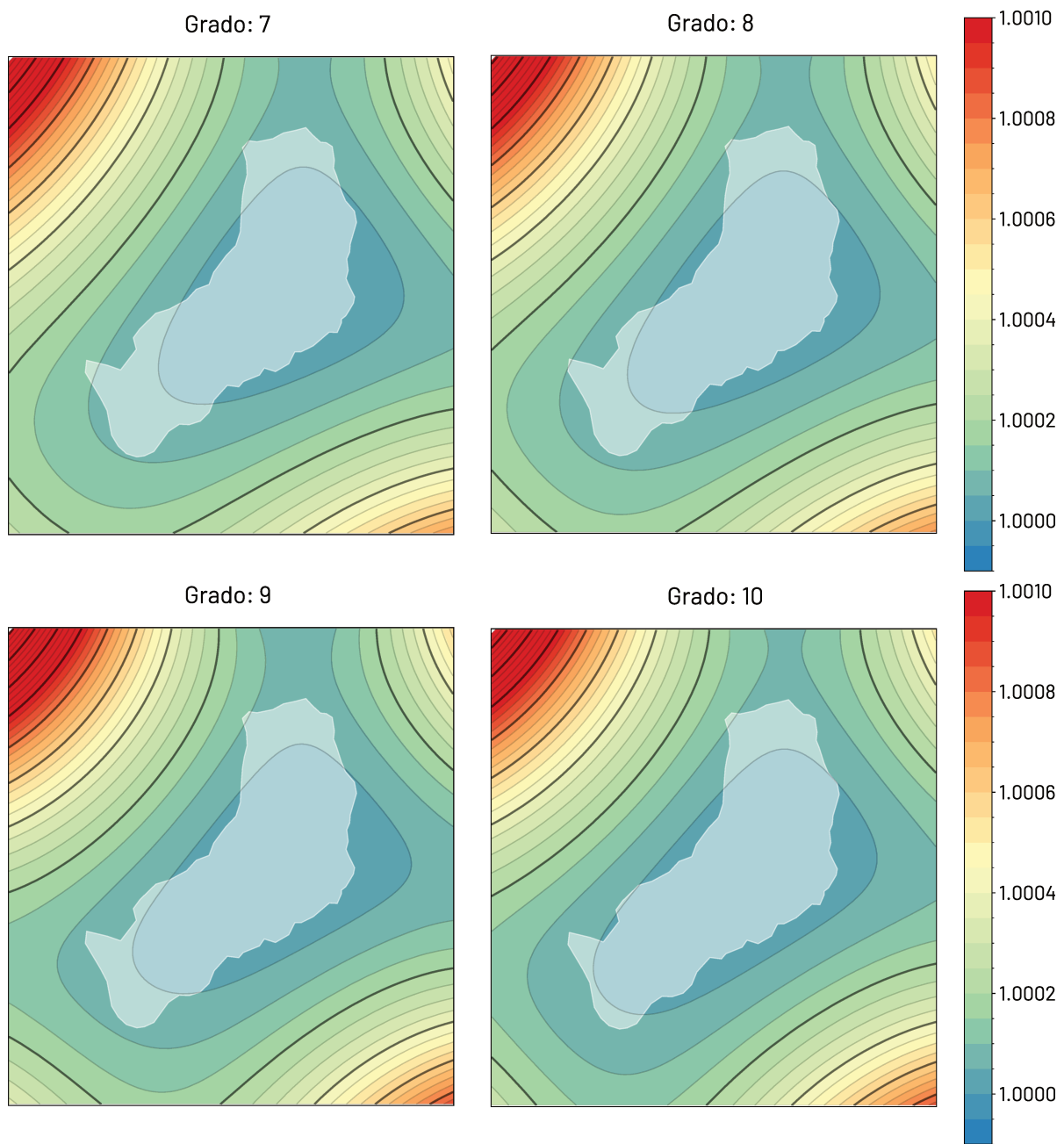


Figura 33: Provincia de Misiones. Representación de la alteración de escala para C_2 , grados 7 a 10.

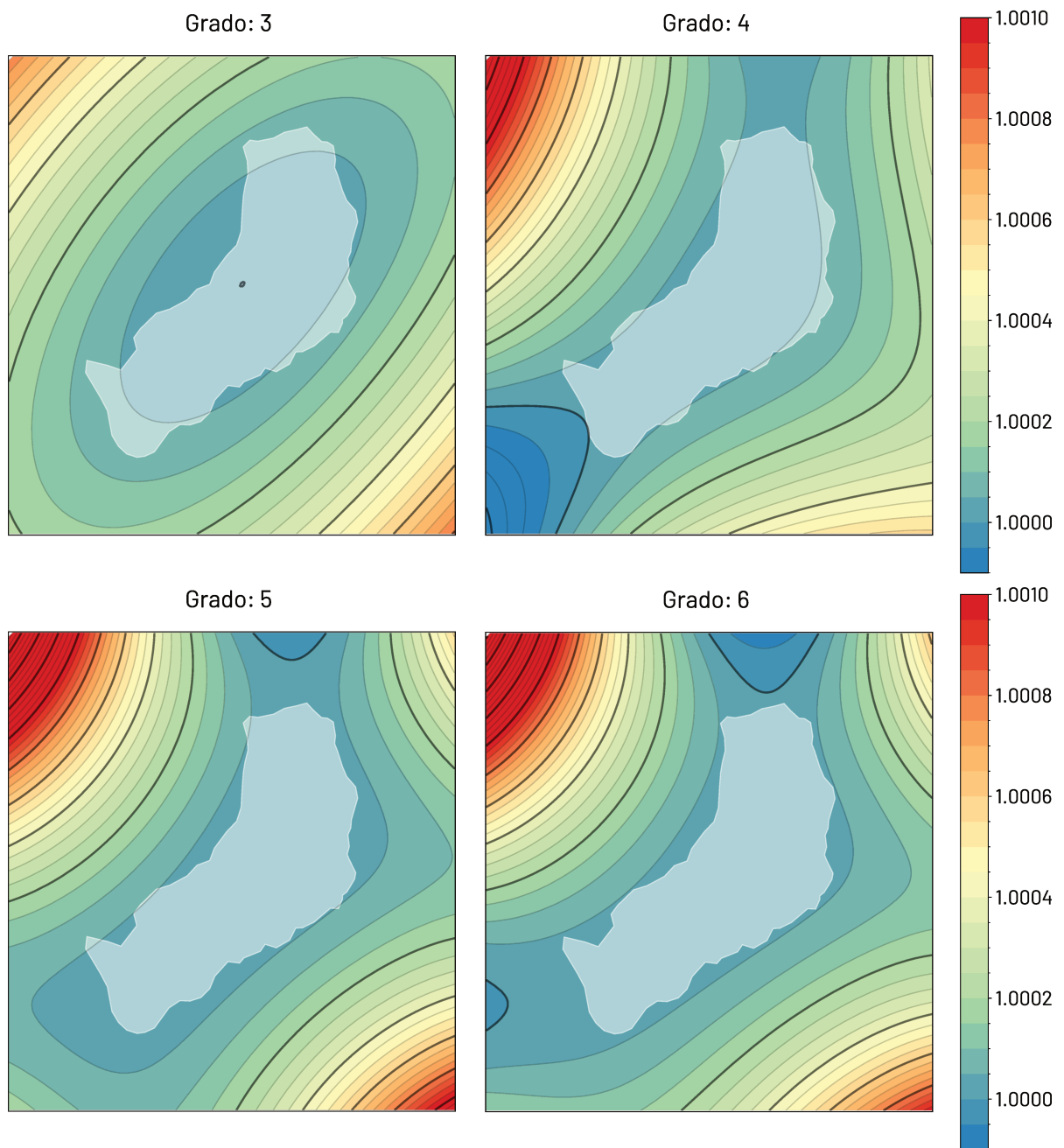


Figura 34: Provincia de Misiones. Representación de la alteración de escala para C_3 , grados 3 a 6.

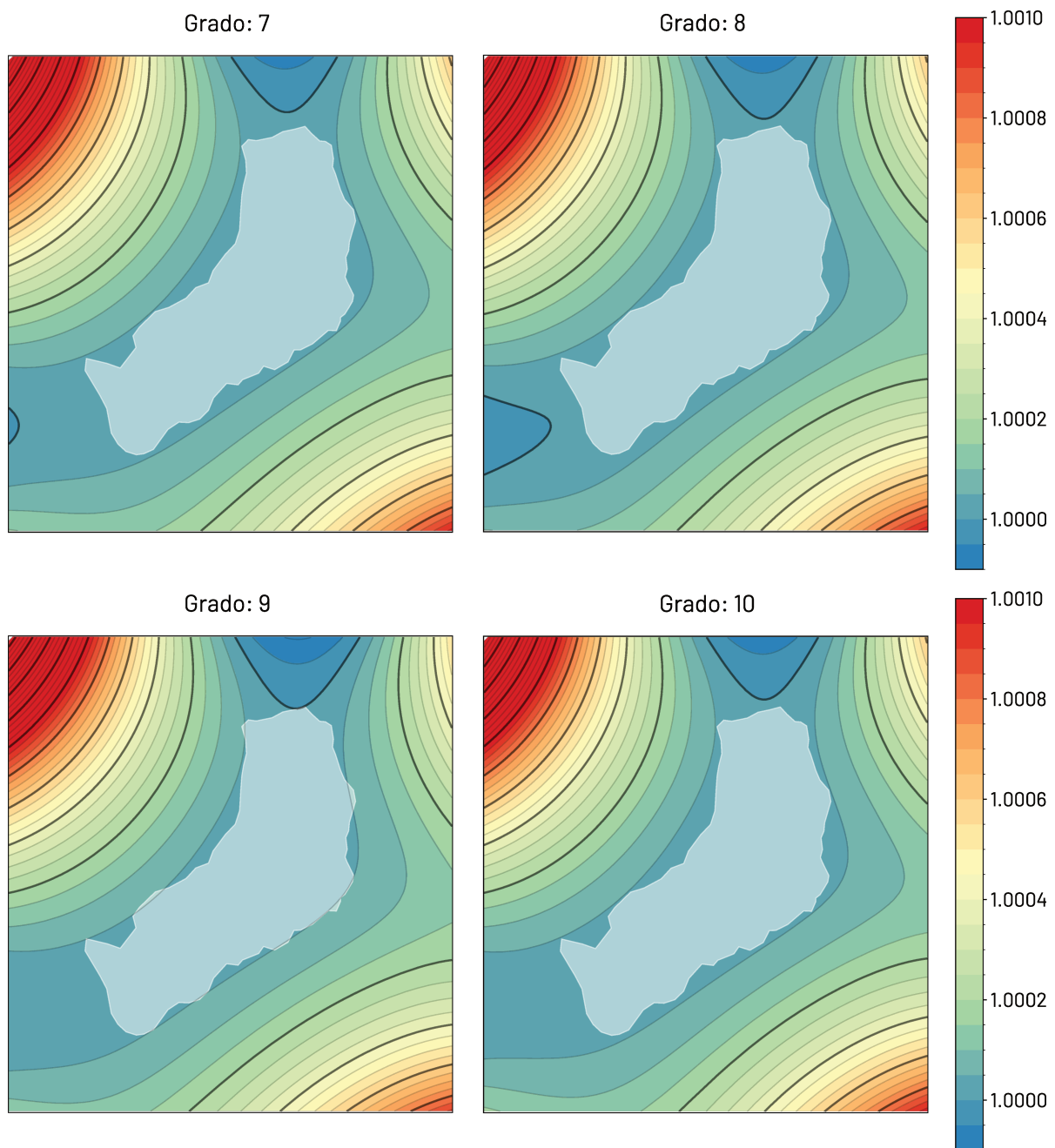


Figura 35: Provincia de Misiones. Representación de la alteración de escala para C_3 , grados 7 a 10.

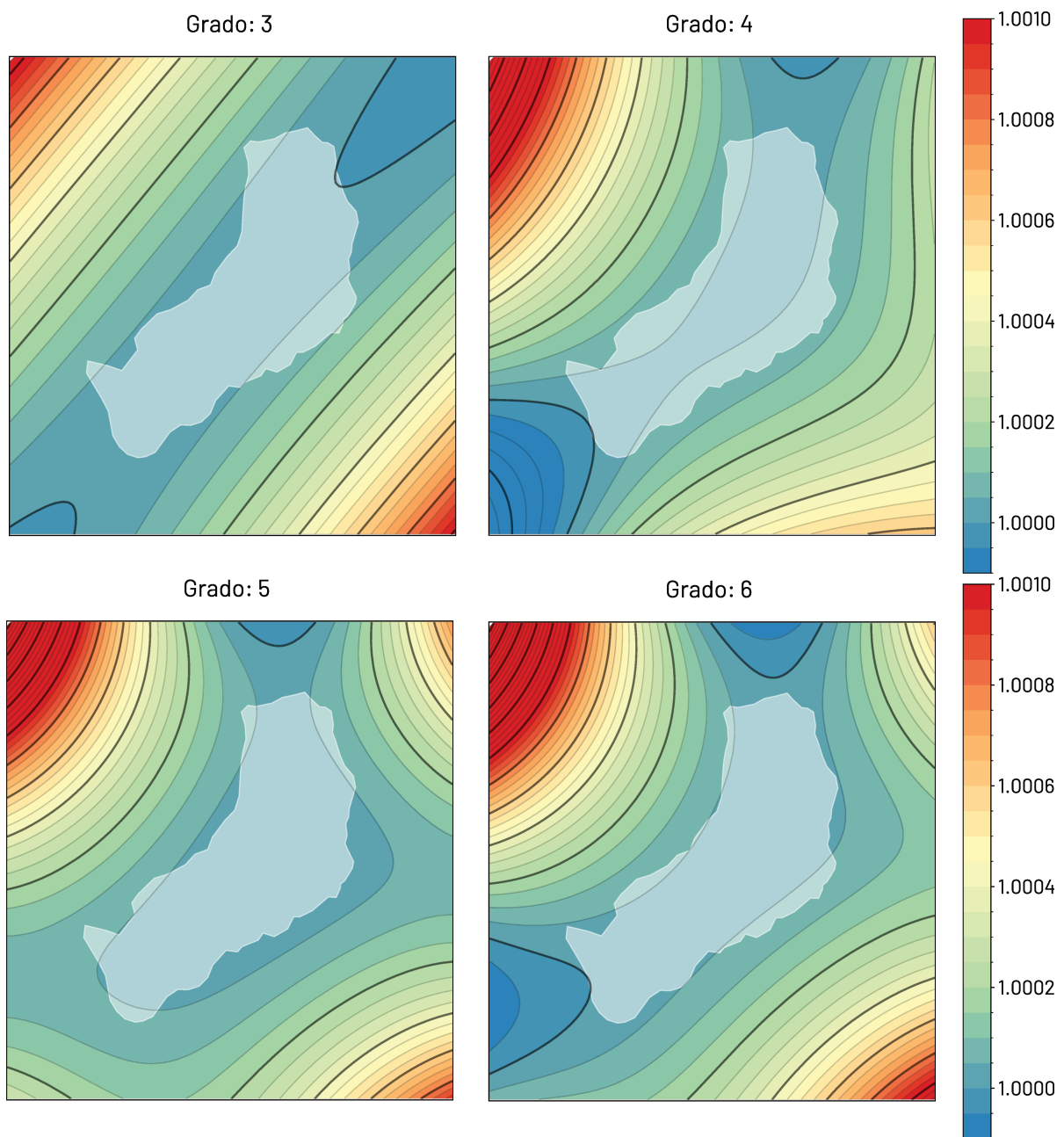


Figura 36: Provincia de Misiones. Representación de la alteración de escala para C_4 , grados 3 a 6.

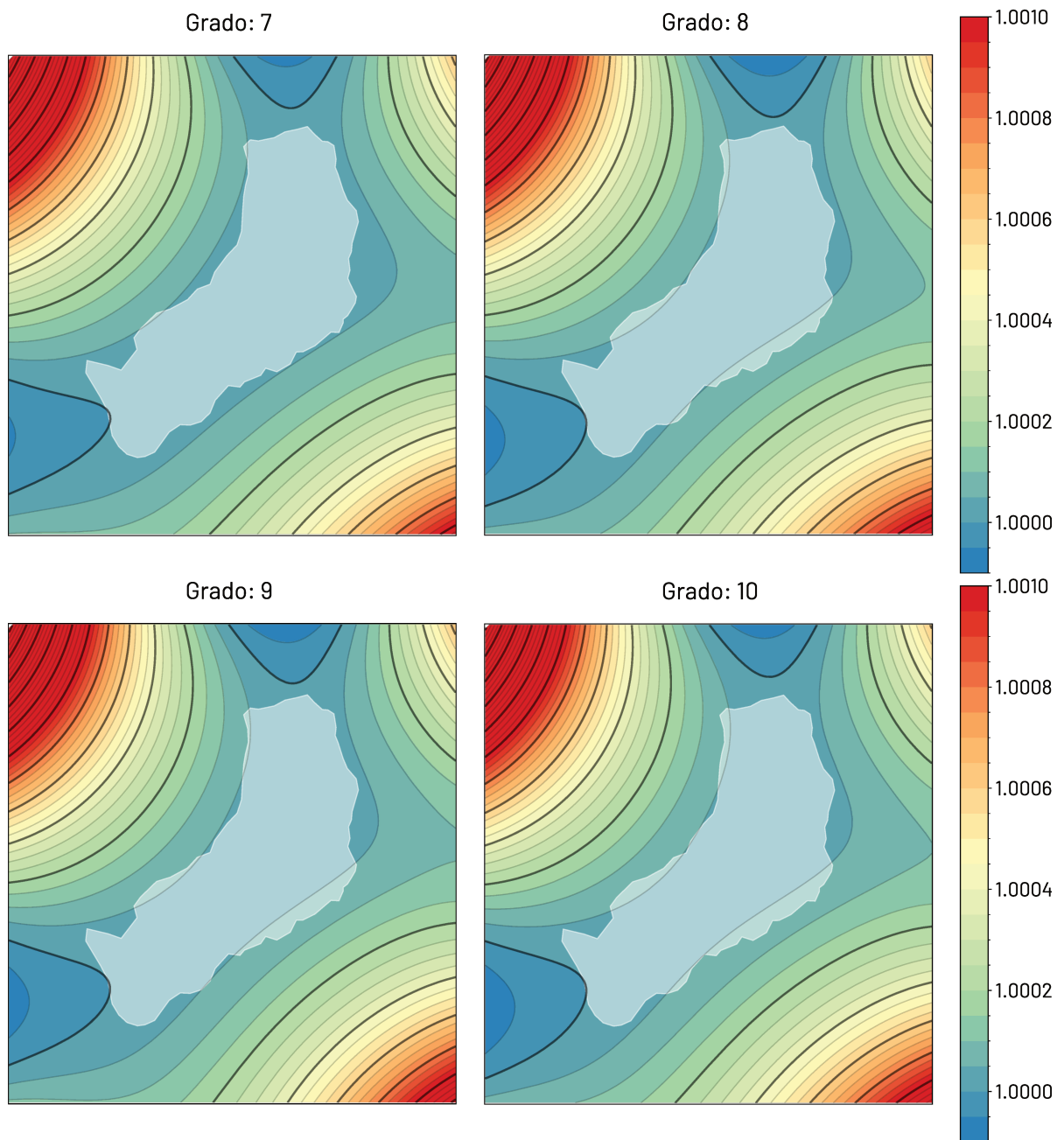


Figura 37: Provincia de Misiones. representación de la alteración de escala para C_4 , grados 7 a 10.

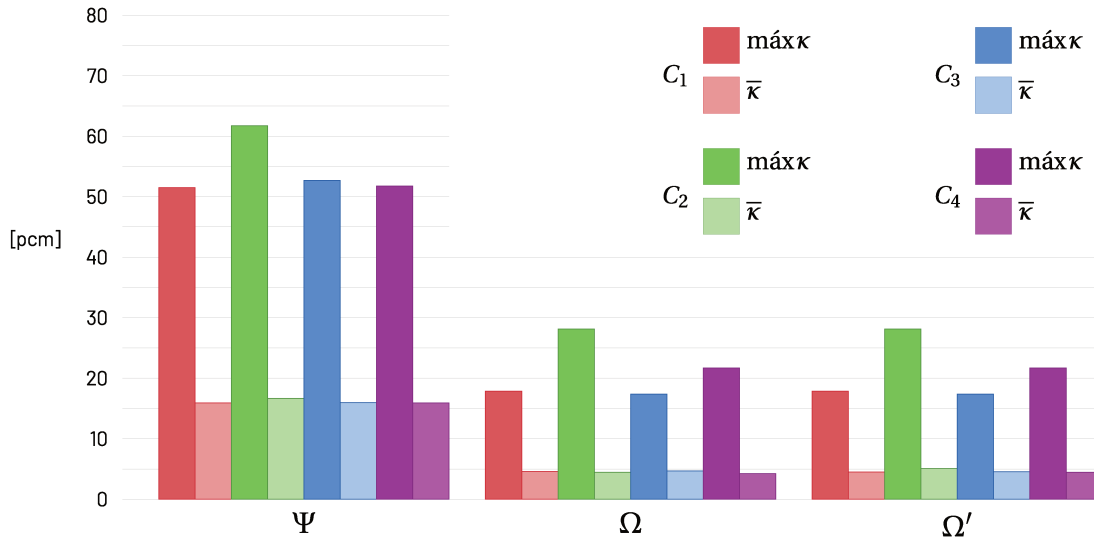


Figura 38: Provincia de Misiones. Alteración de escala por región y criterios para la proyección de Gauss-Krüger.

Los archivos de video en formato .mp4 correspondientes, se encuentran disponibles en la carpeta compartida alojada en Google Drive. En caso de ser necesario, se recomienda que los archivos sean descargados para su correcta visualización:

- <https://drive.google.com/drive/folders/1XVX8XbT7VmqaBV8NyzGsQmPw0MpF8qhj?usp=sharing>

Los resultados obtenidos con el cromosoma inicializado por MMC son marginalmente mejores y se descartan los resultados obtenidos con el cromosoma (53). Se muestra la evolución de la alteración de escala por región y grado de polinomio en las figuras 27, 28 y 29. El esquema de las superficies de alteración de escala se ilustra en las figuras 30 y 31 para el criterio C_1 ; en las figuras 32 y 33 para el criterio C_2 ; en las figuras 34 y 35 el criterio C_3 y en las figuras 36 y 37 para el criterio C_4 .

8.1.2. Proyección de Gauss-Krüger

El único gen del cromosoma se inicializa con $\lambda_0 = -54.5^\circ$. En la figura 38 se muestra la comparación de alteración de escala por criterio y región. En la figura 39 los contornos de la superficie de alteración de escala para cada criterio.

8.1.3. Proyección CCL

El cromosoma se inicializa con $\phi_1 = -26^\circ$ y $\phi_2 = -28^\circ$. En la figura 40 se muestra la comparación de alteración de escala por criterio y región. En la figura 41 los contornos de la superficie de alteración de escala para cada criterio.

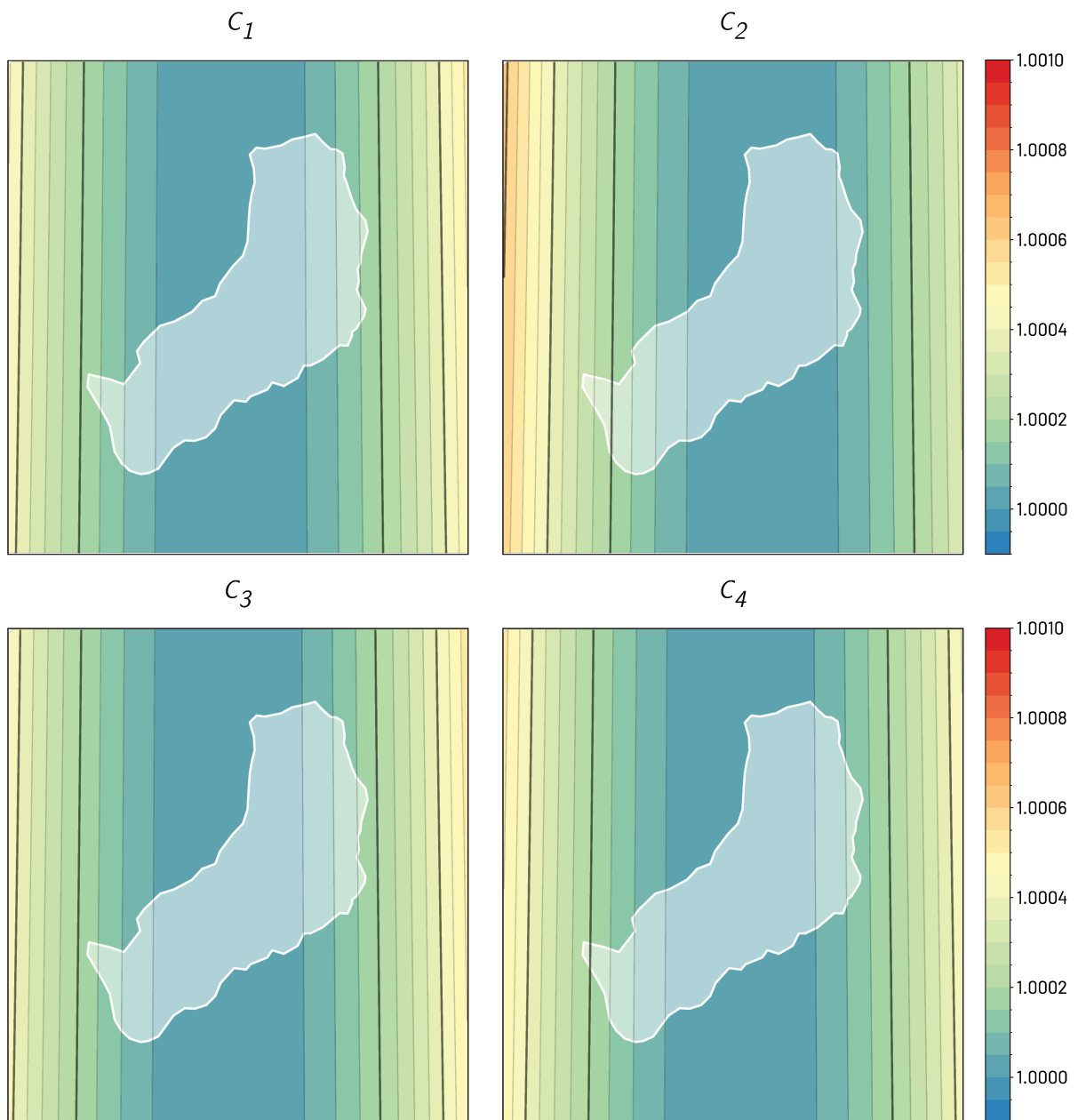


Figura 39: Provincia de Misiones, representación de la alteración de escala para criterios C_1 a C_4 , proyección de Gauss-Krüger.

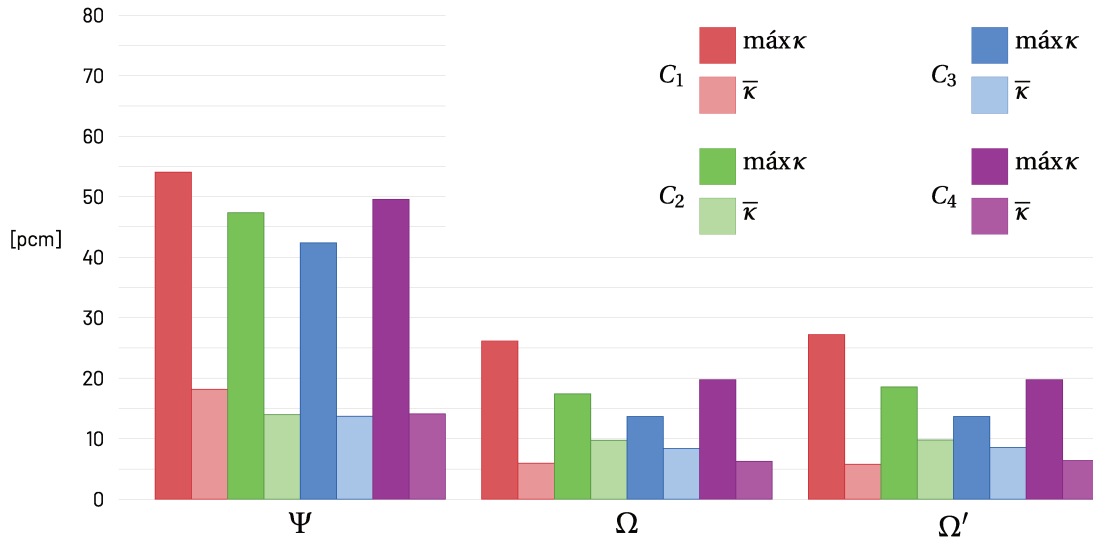


Figura 40: Provincia de Misiones. Alteración de escala por región y criterios para la proyección cónica conforme de Lambert.

8.1.4. Resumen de resultados

Se presenta un resumen de las distorsiones obtenidas de acuerdo con los valores $\sigma_2 = \max \sigma$, $\sigma_1 = \min \sigma$ y $\bar{\sigma}$ que representa una estimación promedio calculada mediante la fórmula:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum p_i \kappa \sigma_i}{\sum p_i},$$

donde p_i se calcula según la fórmula (50). Esta medida ($\bar{\sigma}$) tiene como objeto poder comparar la distorsión entre distintas proyecciones, aunque no representa con exactitud el valor «más probable» de alteración de escala.

Otra métrica clave es la relación entre σ_2 y σ_1 , esta indica la variación total de escala y siempre es deseable que sea cercana a 1, lo que implica una menor variabilidad en las distorsiones.

En los cuadros 3, 4, 5, 6 se presentan las medidas de alteración de escala obtenidas para cada sector de estudio, comparando los resultados de polinomios armónicos, Gauss-Krüger y CCL.

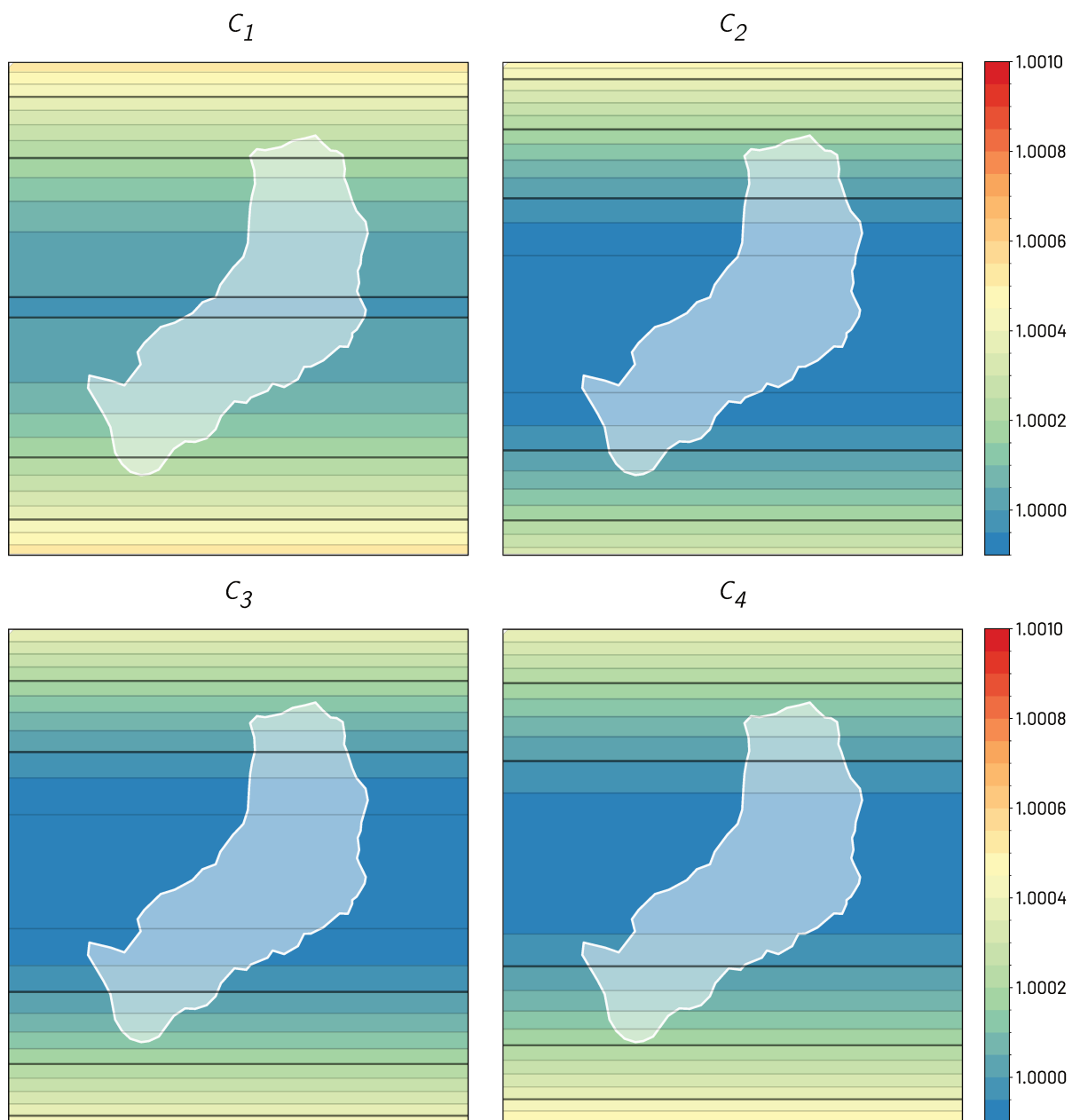


Figura 41: Provincia de Misiones, representación de la alteración de escala para criterios C_1 a C_4 , proyección cónica conforme de Lambert.

Cuadro 3: Provincia de Misiones. Alteración de escala según grado de polinomio armónico y proyecciones de Gauss-Krüger y CCL. Criterio C_1 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.000123	1.000000	1.000042	1.000123	1.000125	1.000000	1.000043	1.000125	1.000657	1.000000	1.000170	1.000657
4	1.000129	1.000000	1.000035	1.000129	1.000129	1.000000	1.000041	1.000129	1.000973	1.000000	1.000179	1.000973
5	1.000080	1.000000	1.000024	1.000080	1.000096	1.000000	1.000032	1.000096	1.001526	1.000000	1.000201	1.001526
6	1.000087	1.000000	1.000025	1.000087	1.000104	1.000000	1.000032	1.000104	1.001606	0.999932	1.000204	1.001674
7	1.000102	1.000000	1.000028	1.000102	1.000103	1.000000	1.000035	1.000103	1.001518	0.999985	1.000201	1.001534
8	1.000072	1.000000	1.000023	1.000072	1.000091	1.000000	1.000030	1.000091	1.001552	0.999976	1.000199	1.001576
9	1.000091	1.000000	1.000027	1.000091	1.000091	1.000000	1.000033	1.000091	1.001455	1.000000	1.000196	1.001455
10	1.000061	1.000000	1.000019	1.000061	1.000090	1.000000	1.000026	1.000090	1.001568	0.999995	1.000196	1.001573
G-K	1.000178	1.000000	1.000046	1.000178	1.000178	1.000000	1.000045	1.000178	1.000515	1.000000	1.000159	1.000515
CCL	1.000262	0.999999	1.000060	1.000263	1.000272	0.999999	1.000058	1.000273	1.000540	0.999999	1.000182	1.000541

Cuadro 4: Provincia de Misiones. Alteración de escala según grado de polinomio armónico y proyecciones de Gauss-Krüger y CCL. Criterio C_2 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.000122	1.000000	1.000032	1.000122	1.000122	1.000000	1.000039	1.000122	1.000880	1.000000	1.000175	1.000880
4	1.000151	1.000000	1.000041	1.000151	1.000151	1.000000	1.000050	1.000151	1.001091	1.000000	1.000188	1.001091
5	1.000106	1.000000	1.000034	1.000106	1.000112	1.000000	1.000043	1.000112	1.001475	1.000000	1.000201	1.001475
6	1.000103	1.000000	1.000030	1.000103	1.000111	1.000000	1.000039	1.000111	1.001508	1.000000	1.000200	1.001508
7	1.000116	1.000000	1.000035	1.000116	1.000117	1.000000	1.000045	1.000117	1.001403	1.000000	1.000200	1.001403
8	1.000104	1.000000	1.000033	1.000104	1.000110	1.000000	1.000042	1.000110	1.001445	1.000000	1.000200	1.001445
9	1.000107	1.000000	1.000031	1.000107	1.000118	1.000000	1.000041	1.000118	1.001640	1.000000	1.000209	1.001640
10	1.000110	1.000000	1.000028	1.000110	1.000114	1.000000	1.000037	1.000114	1.001529	1.000000	1.000201	1.001529
G-K	1.000281	1.000000	1.000044	1.000281	1.000281	1.000000	1.000051	1.000281	1.000617	1.000000	1.000166	1.000617
CCL	1.000174	0.999858	1.000097	1.000316	1.000186	0.999858	1.000098	1.000328	1.000473	0.999858	1.000140	1.000616

Cuadro 5: Provincia de Misiones. Alteración de escala según grado de polinomio armónico y proyecciones de Gauss-Krüger y CCL. Criterio C_3 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.000086	1.000000	1.000030	1.000086	1.000088	1.000000	1.000033	1.000088	1.000809	1.000000	1.000170	1.000809
4	1.000068	1.000000	1.000030	1.000068	1.000109	0.999999	1.000038	1.000110	1.001309	0.999782	1.000193	1.001527
5	1.000065	1.000000	1.000018	1.000065	1.000110	1.000000	1.000027	1.000110	1.001739	0.999969	1.000205	1.001770
6	1.000048	1.000000	1.000017	1.000048	1.000108	1.000000	1.000026	1.000108	1.001834	0.999921	1.000205	1.001913
7	1.000049	1.000000	1.000018	1.000049	1.000107	1.000000	1.000026	1.000107	1.001813	0.999926	1.000204	1.001886
8	1.000048	1.000000	1.000016	1.000048	1.000109	1.000000	1.000025	1.000109	1.001824	0.999917	1.000204	1.001907
9	1.000057	1.000000	1.000024	1.000057	1.000118	0.999998	1.000034	1.000119	1.001877	0.999894	1.000212	1.001983
10	1.000049	1.000000	1.000018	1.000049	1.000107	1.000000	1.000026	1.000107	1.001823	0.999917	1.000205	1.001906
G-K	1.000173	1.000000	1.000047	1.000173	1.000173	1.000000	1.000045	1.000173	1.000527	1.000000	1.000160	1.000527
CCL	1.000137	0.999871	1.000084	1.000266	1.000137	0.999871	1.000085	1.000266	1.000424	0.999871	1.000137	1.000553

Cuadro 6: Provincia de Misiones. Alteración de escala según grado de polinomio armónico y proyecciones de Gauss-Krüger y CCL. Criterio C_4 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.000103	1.000000	1.000026	1.000103	1.000107	0.999999	1.000033	1.000108	1.001066	0.999975	1.000184	1.001091
4	1.000089	1.000000	1.000047	1.000089	1.000151	0.999999	1.000057	1.000152	1.001539	0.999711	1.000223	1.001828
5	1.000079	1.000000	1.000025	1.000079	1.000121	1.000000	1.000035	1.000121	1.001845	0.999959	1.000212	1.001886
6	1.000071	1.000000	1.000031	1.000071	1.000146	0.999997	1.000042	1.000149	1.002058	0.999911	1.000234	1.002148
7	1.000056	1.000000	1.000017	1.000056	1.000124	0.999998	1.000027	1.000125	1.001946	0.999930	1.000213	1.002017
8	1.000073	1.000000	1.000029	1.000073	1.000141	0.999998	1.000040	1.000143	1.002048	0.999908	1.000232	1.002141
9	1.000074	1.000000	1.000028	1.000074	1.000138	0.999998	1.000039	1.000141	1.002053	0.999912	1.000233	1.002141
10	1.000077	1.000000	1.000031	1.000077	1.000142	0.999997	1.000042	1.000145	1.002033	0.999914	1.000234	1.002119
G-K	1.000217	1.000000	1.000042	1.000217	1.000217	1.000000	1.000044	1.000217	1.000517	1.000000	1.000159	1.000517
CCL	1.000197	0.999905	1.000063	1.000292	1.000197	0.999905	1.000064	1.000292	1.000496	0.999905	1.000141	1.000590

8.2. Argentina bicontinental

La superficie³ total de la Argentina es de 3 669 711 km², de los cuales 2 780 085 km² corresponden a la Argentina continental, 873 718 km² continente Antártico, y 15 908 km² a las islas del Atlántico Sur. El uso de mapas de la Argentina Bicontinental es obligatorio de acuerdo a la Ley N° 26.651⁴⁵.

Los puntos extremos norte y sur son 21°46'52"S y 90°S, los extremos este y oeste, en forma aproximada, está dada por los meridianos de 20°W y 74°W que corresponden al sector antártico.

En coordenadas Schreiber, con los siguientes parámetros: elipsoide GRS80, $a = 1$, $\phi_0 = 50^\circ\text{S}$, $\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$, se creó un rectángulo Ψ delimitado por los valores:

El sector Ψ tiene 10 173.128 km de alto por 5644.651 km de ancho. Para tomar la muestra de datos se construye en forma aproximada el contorno indicado en los archivos vectoriales producidos por el IGN⁶. En cada región se tomaron las siguientes muestras en forma equiespaciada:

- Ψ : 56960 puntos
- Ω' : 15183 puntos
- Ω : 11447 puntos
- $\partial\Omega$: 200 puntos

Se crearon también los 200 puntos correspondientes a $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ de acuerdo a la sección 5 (ver figura 42).

Las figuras que ilustran la alteración de escala, expresan los valores en relación a la unidad en partes por mil (ppt):

$$(\text{ksc } \sigma - 1) \cdot 1 \times 10^3.$$

8.2.1. Polinomios armónicos

Al correr los AG sin inicialización y usando los parámetros surgidos del principio de Chebyshev, aún tras las 100 generaciones, hay diferencias significativas en los resultados (figura 43), con excepción de los criterios C_1 y C_2 , lo cual es un indicio de que las condiciones de borde con gradiente tienen una mejor convergencia. La evolución de los resultados por generación de grados 3 a 10 y criterios C_1 a C_4 comparando soluciones con y sin inicialización por principio de Chebyshev está ilustrado en los siguientes videos:

³<https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geografia/DatosArgentina/LimitesSuperficiesyPuntosExtremos>

⁴<http://servicios.infoleg.gob.ar/infolegInternet/anexos/175000-179999/175020/norma.htm>

⁵<https://www.ign.gob.ar/node/51>

⁶<https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/InformacionGeoespacial/CapasSIG>

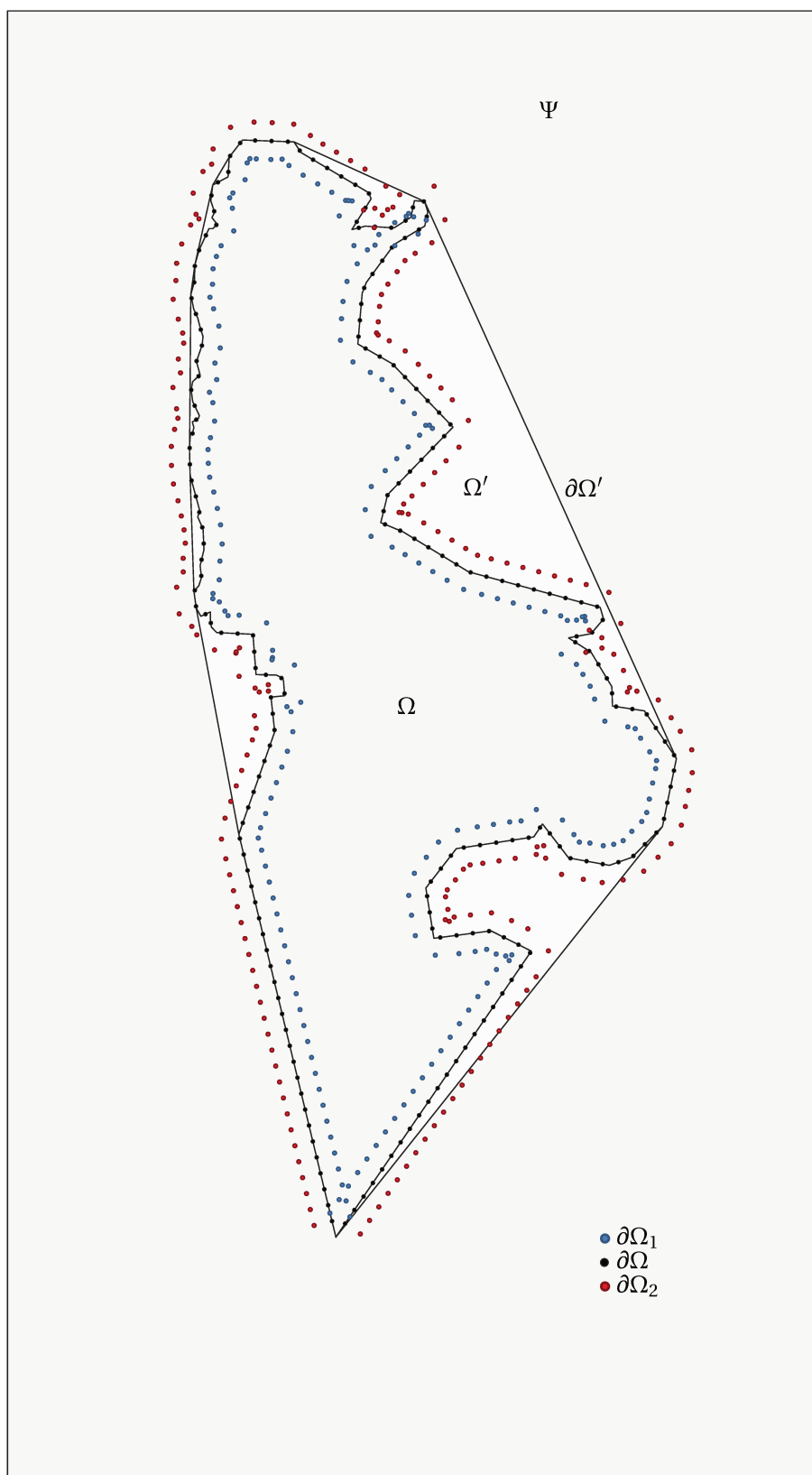


Figura 42: Representación del contorno y muestra de puntos de la Argentina bicontinental en la proyección de Schreiber.

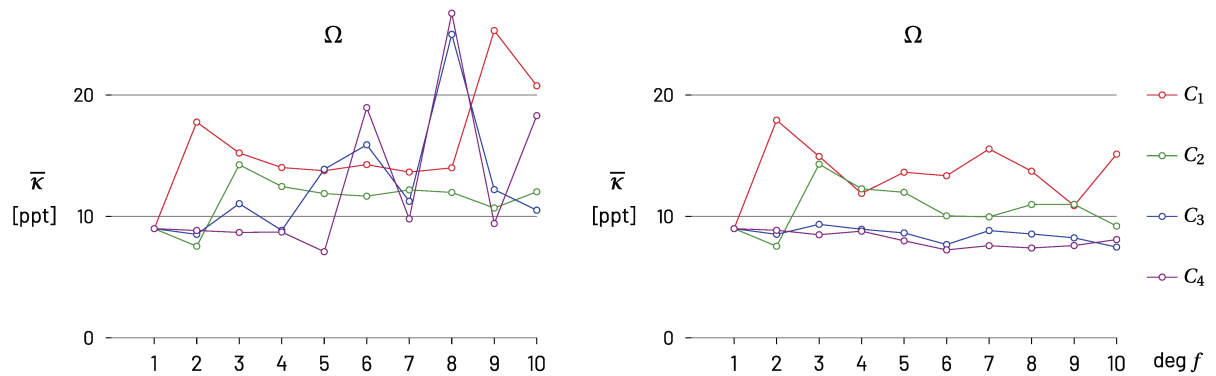


Figura 43: Argentina bicontinental. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ω . A la izquierda los resultados del algoritmo genético sin inicializar los coeficientes, a la derecha con inicialización por el principio de Chebyshev.

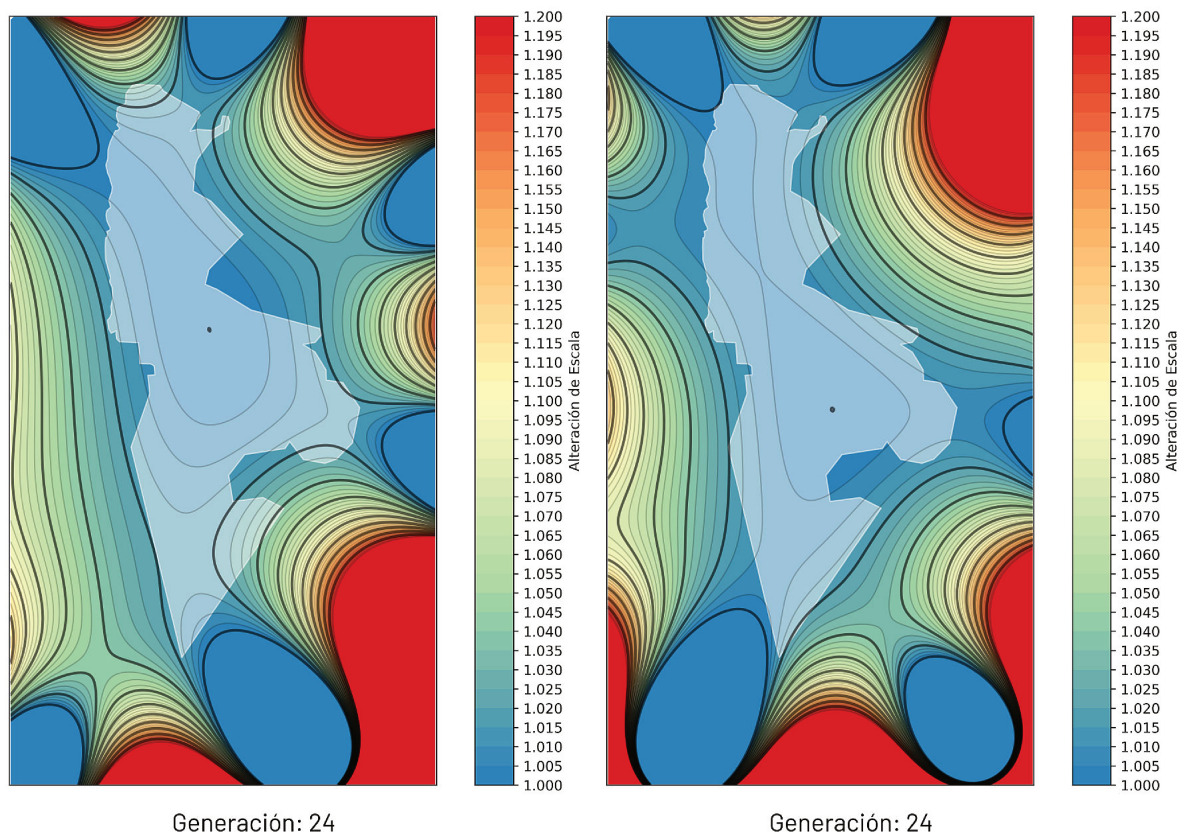


Figura 44: Argentina bicontinental. Secuencia de soluciones obtenidas por los algoritmos genéticos para el criterio C_4 y grado 9. Ejemplo de fotograma, a la izquierda sin inicializar los coeficientes, a la derecha con inicialización según el principio de Chebyshev.

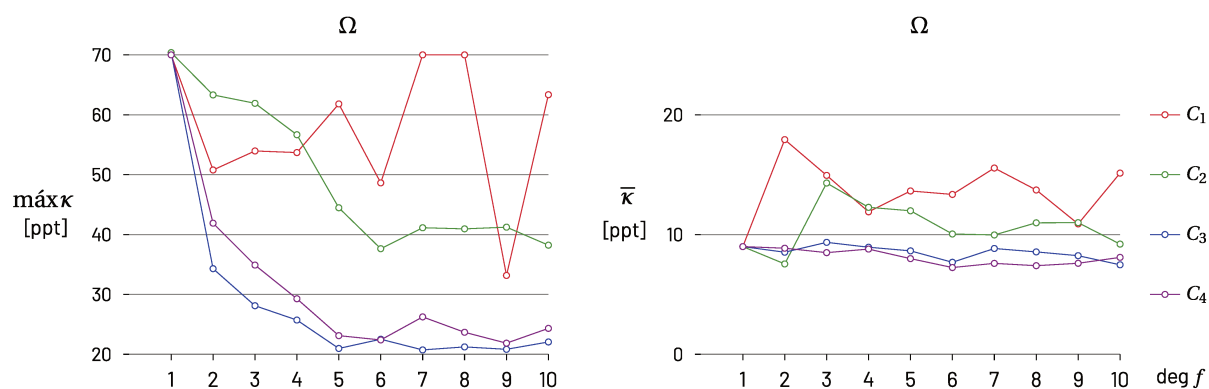


Figura 45: Argentina bicontinental. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ω . Los valores están recortados en 70 ppt.

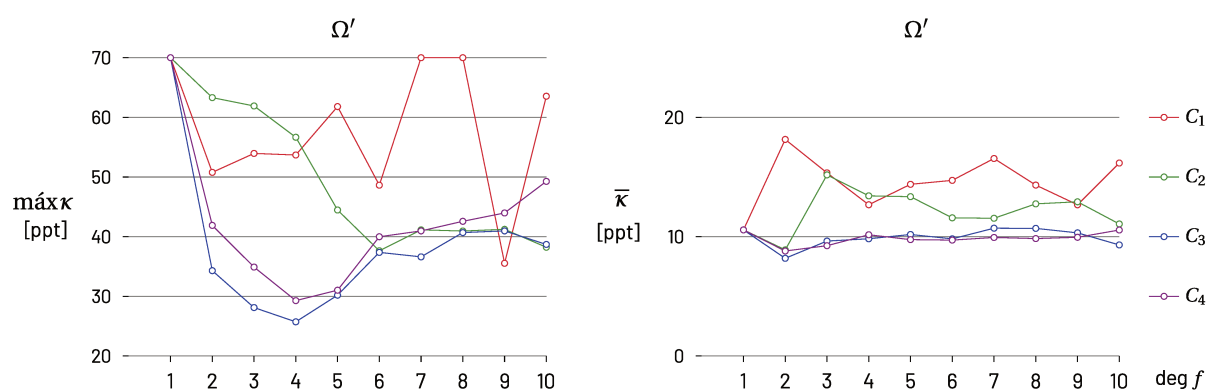


Figura 46: Argentina bicontinental. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ω' . Los valores están recortados en 70 ppt.

- C_1 : https://geon6.com/tesis/bicontinental_videos_C1.html
- C_2 : https://geon6.com/tesis/bicontinental_videos_C2.html
- C_3 : https://geon6.com/tesis/bicontinental_videos_C3.html
- C_4 : https://geon6.com/tesis/bicontinental_videos_C4.html

Se mantienen los resultados obtenidos por MMC de los que se muestra la evolución de la alteración de escala por región y grado de polinomio en las figuras 45, 46 y 47. La representación de las superficies de distorsión se ve en las figuras 48 y 49 para el criterio C_1 ; en las figuras 50, 51 para el criterio C_2 ; en las figuras 52, 53 el criterio C_3 y en las figuras 54 y 55 para el criterio C_4 .

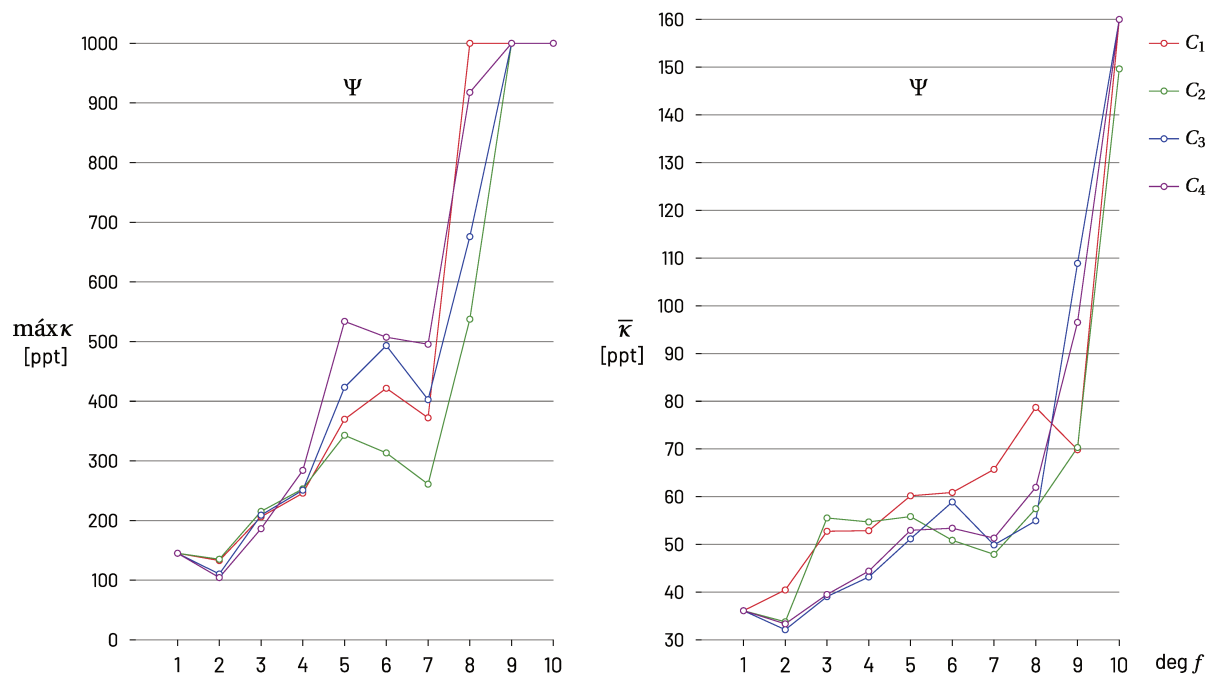


Figura 47: Argentina bicontinental. Evolución de la alteración de escala por grado y criterio dentro de Ψ . Los valores están recortados en 1000ppt (a la izquierda) y en 160ppt (a la derecha).

8.2.2. Proyección de Gauss-Krüger

El cromosoma inicial es $\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$. La representación de los valores de alteración de escala por región se ilustra en la figura 56. La representación de curvas de nivel de la distorsión en la figura 57.

8.2.3. Resumen de resultados

El resumen de los valores obtenidos se calcula en forma similar que en la sección 8.1.4, con excepción del peso,

$$p_i = \text{sech}^2 \eta_i.$$

En el cuadros 7, 8, 9 y 10 se presentan las medidas de alteración de escala obtenidas para cada sector de estudio, comparando los resultados de polinomios armónicos y Gauss-Krüger.

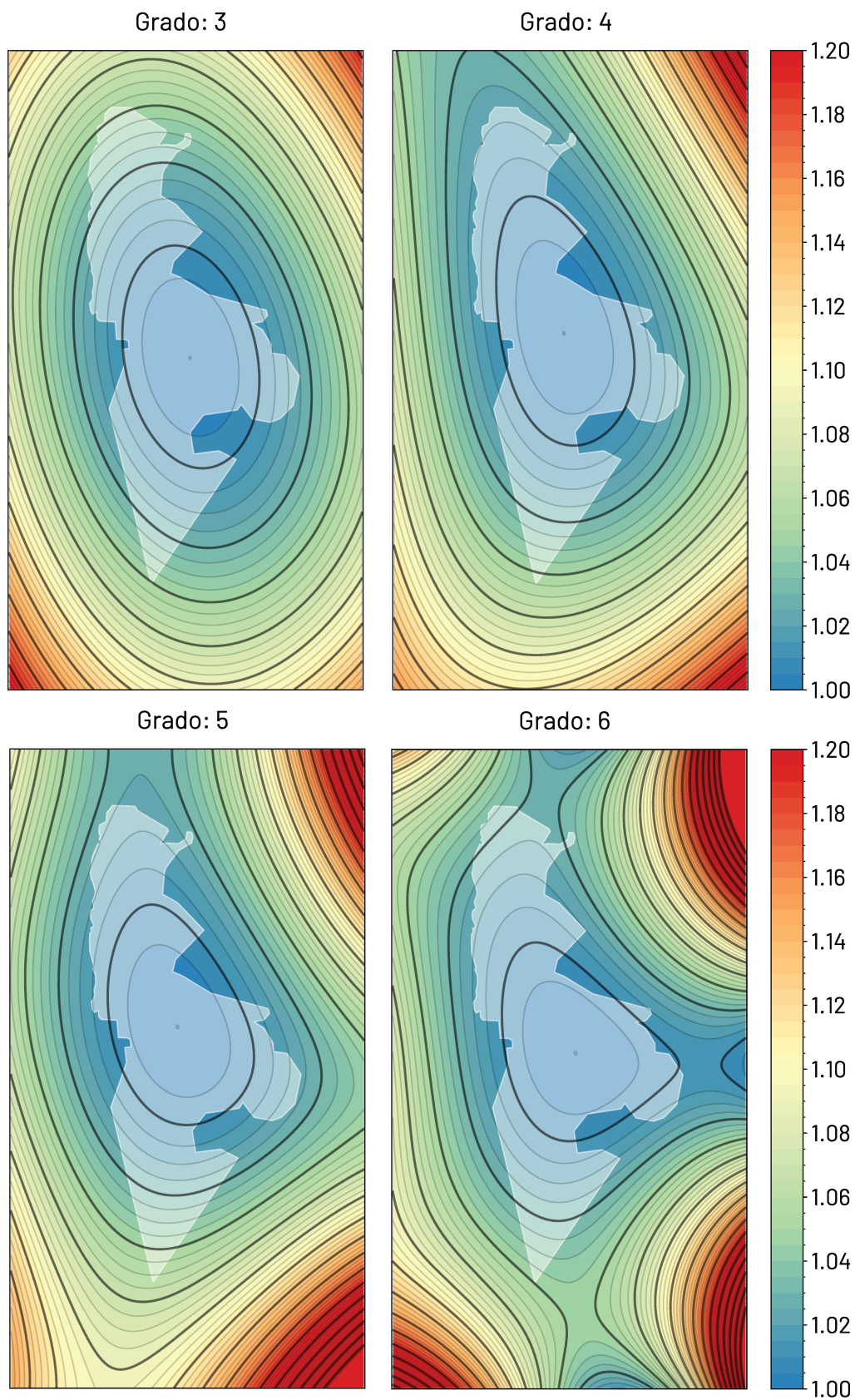


Figura 48: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_1 , grados 3 a 6.

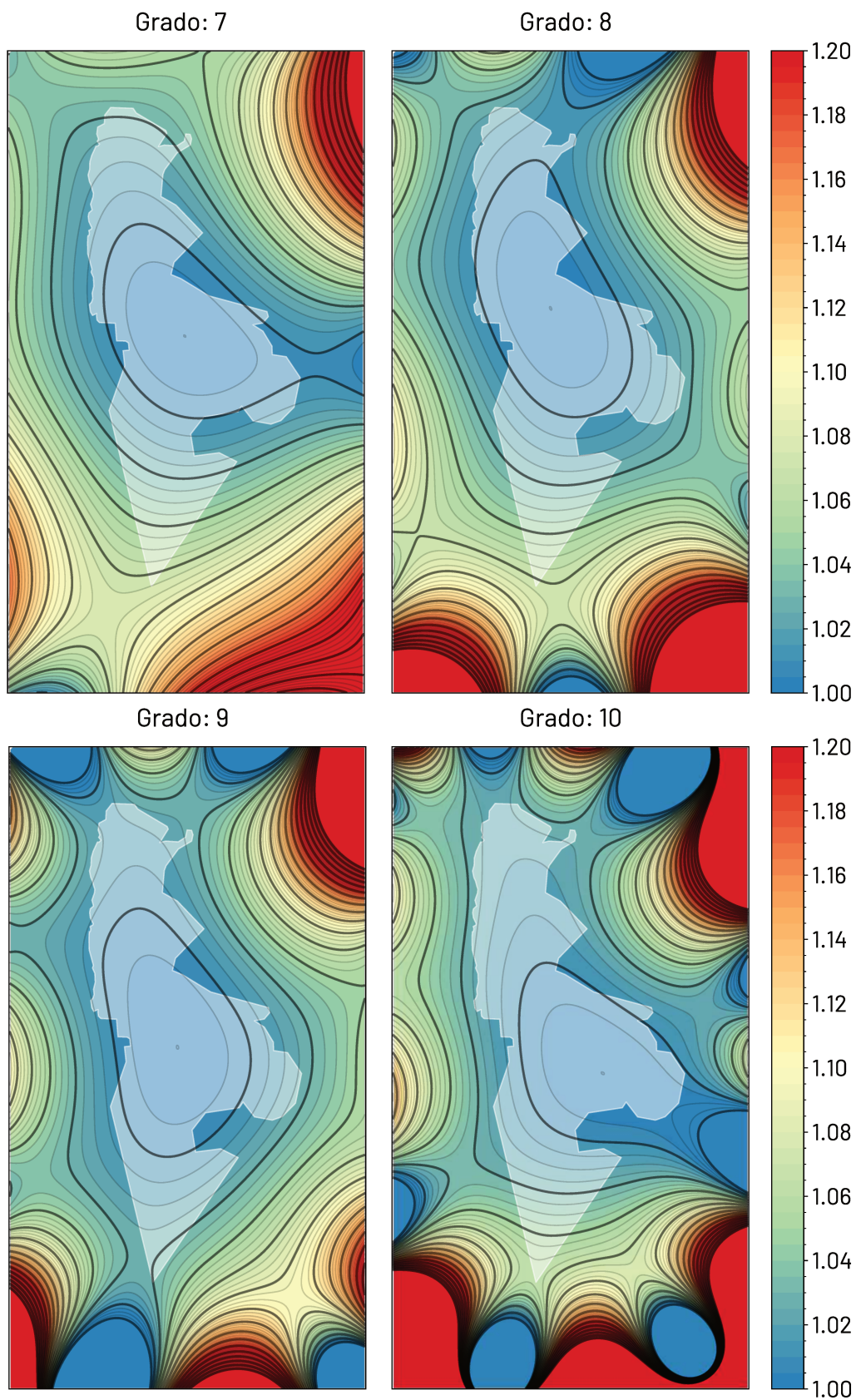


Figura 49: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_1 , grados 7 a 10.

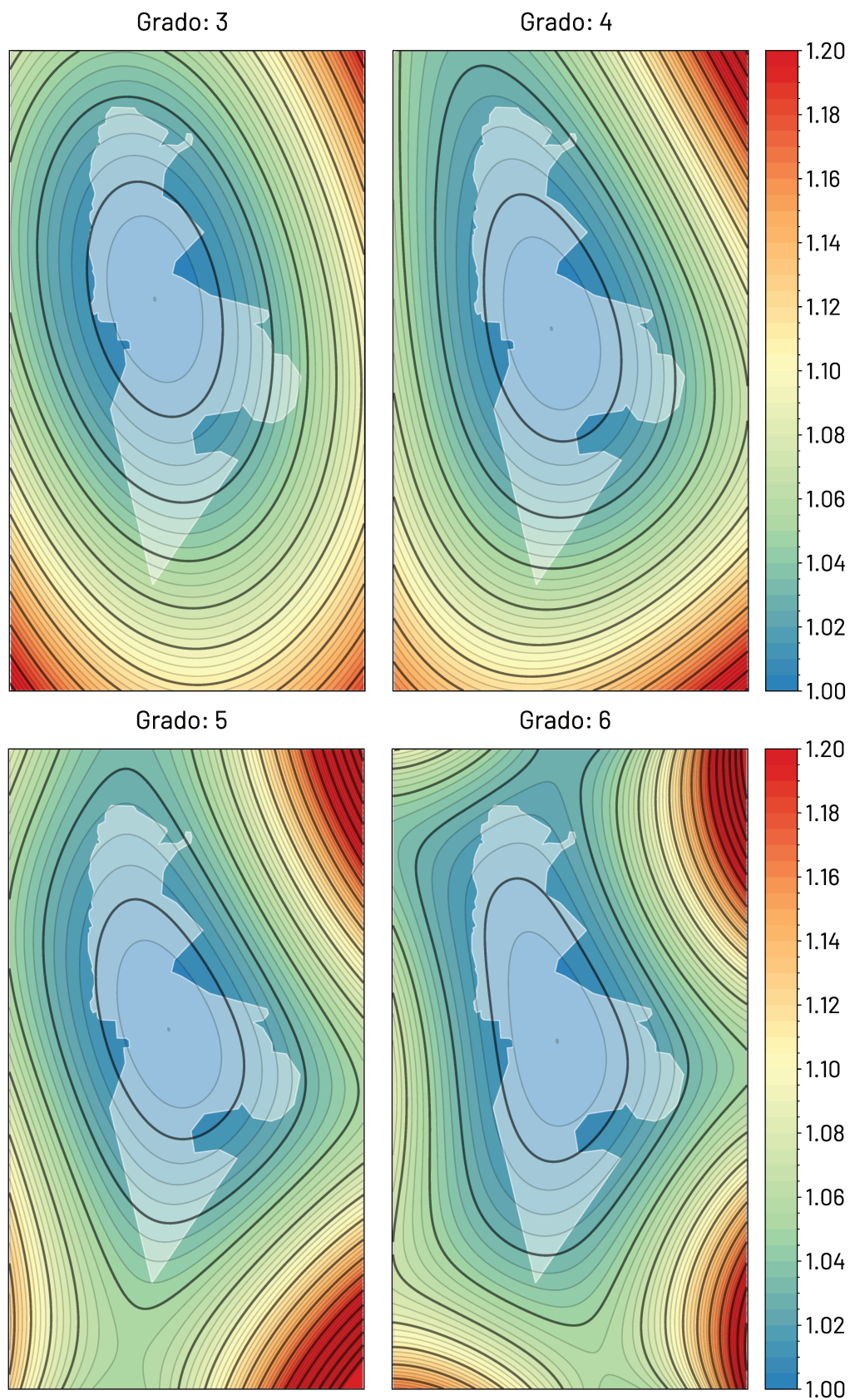


Figura 50: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_2 , grados 3 a 6.

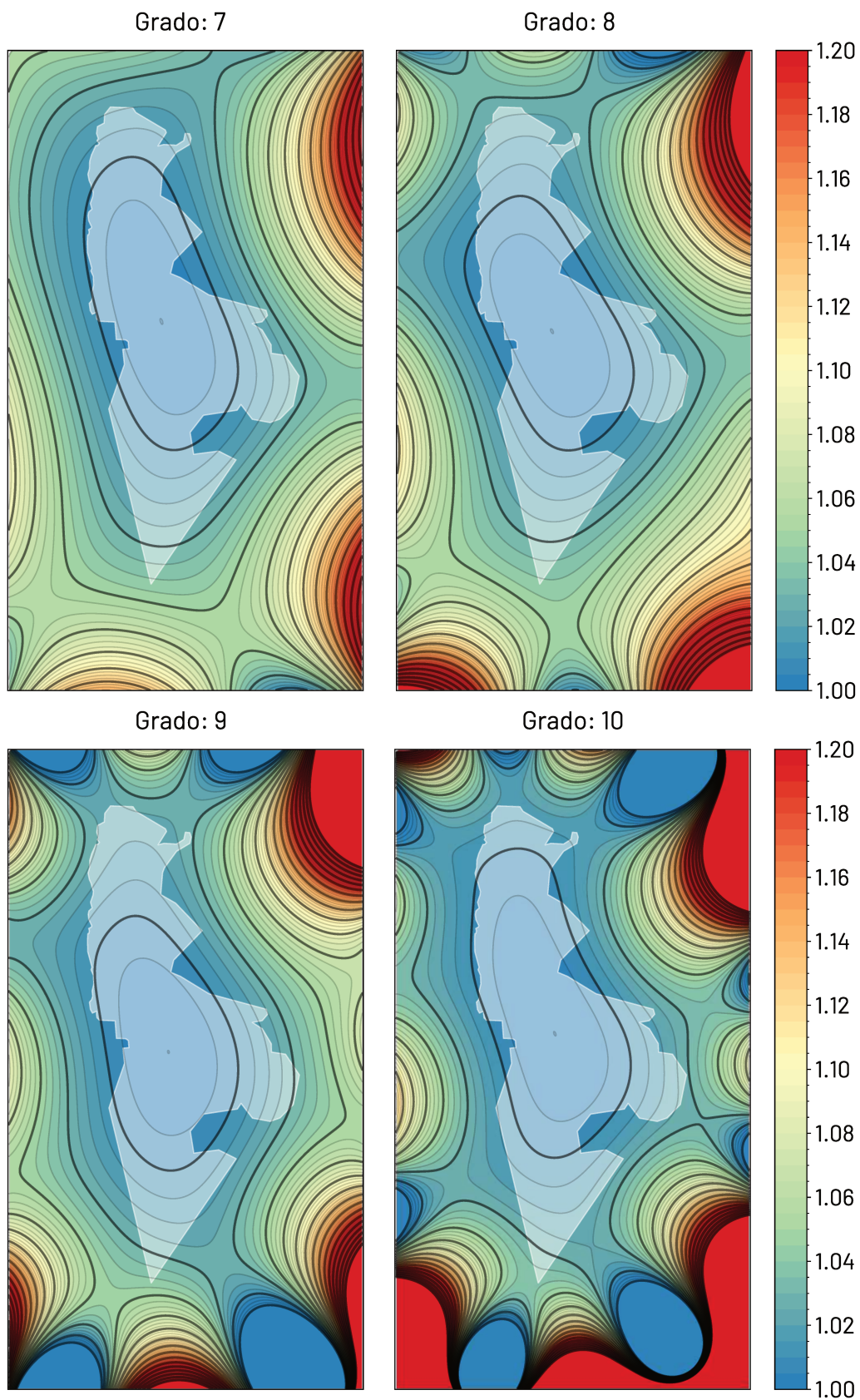


Figura 51: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_2 , grados 7 a 10.

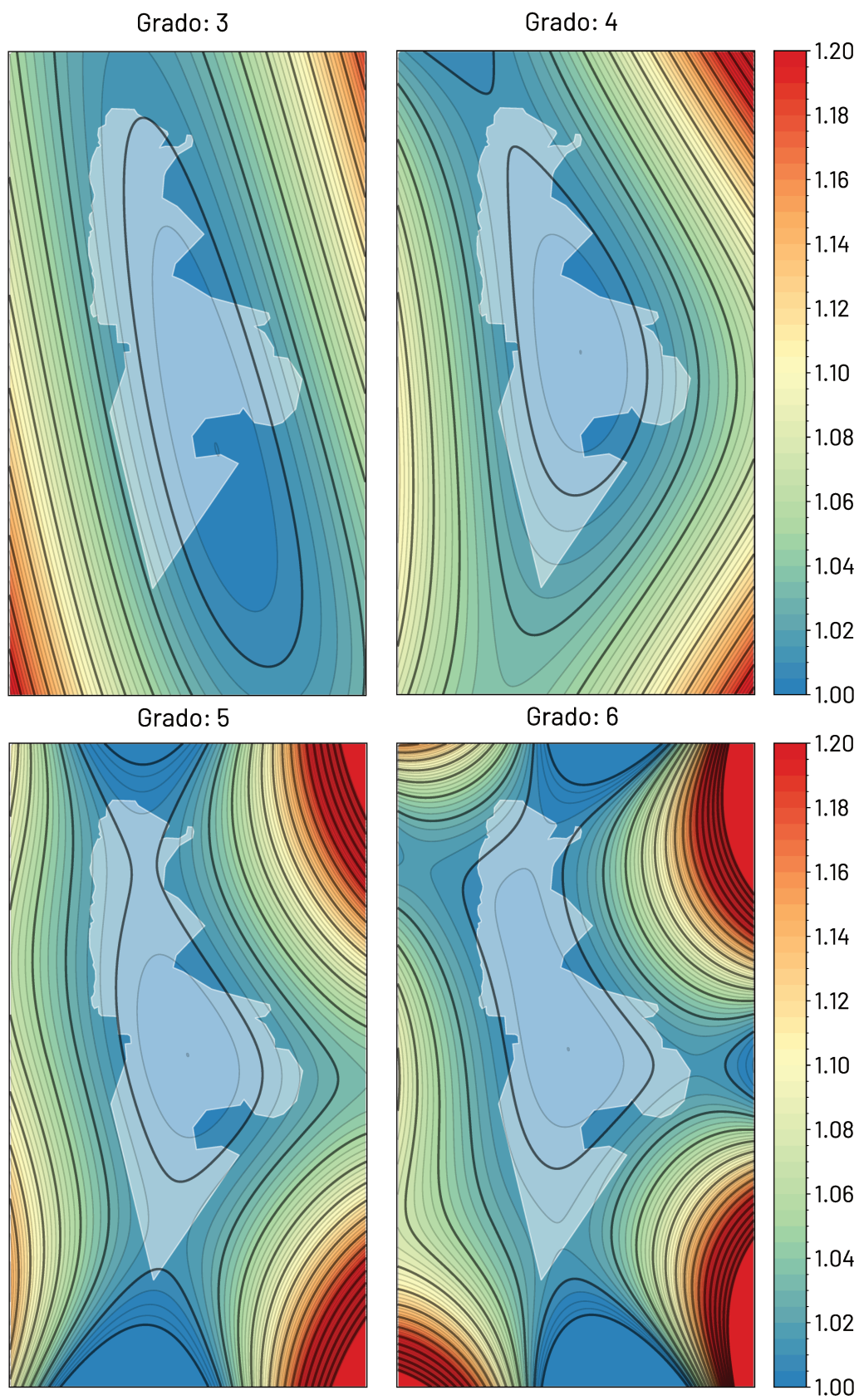


Figura 52: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_3 , grados 3 a 6.

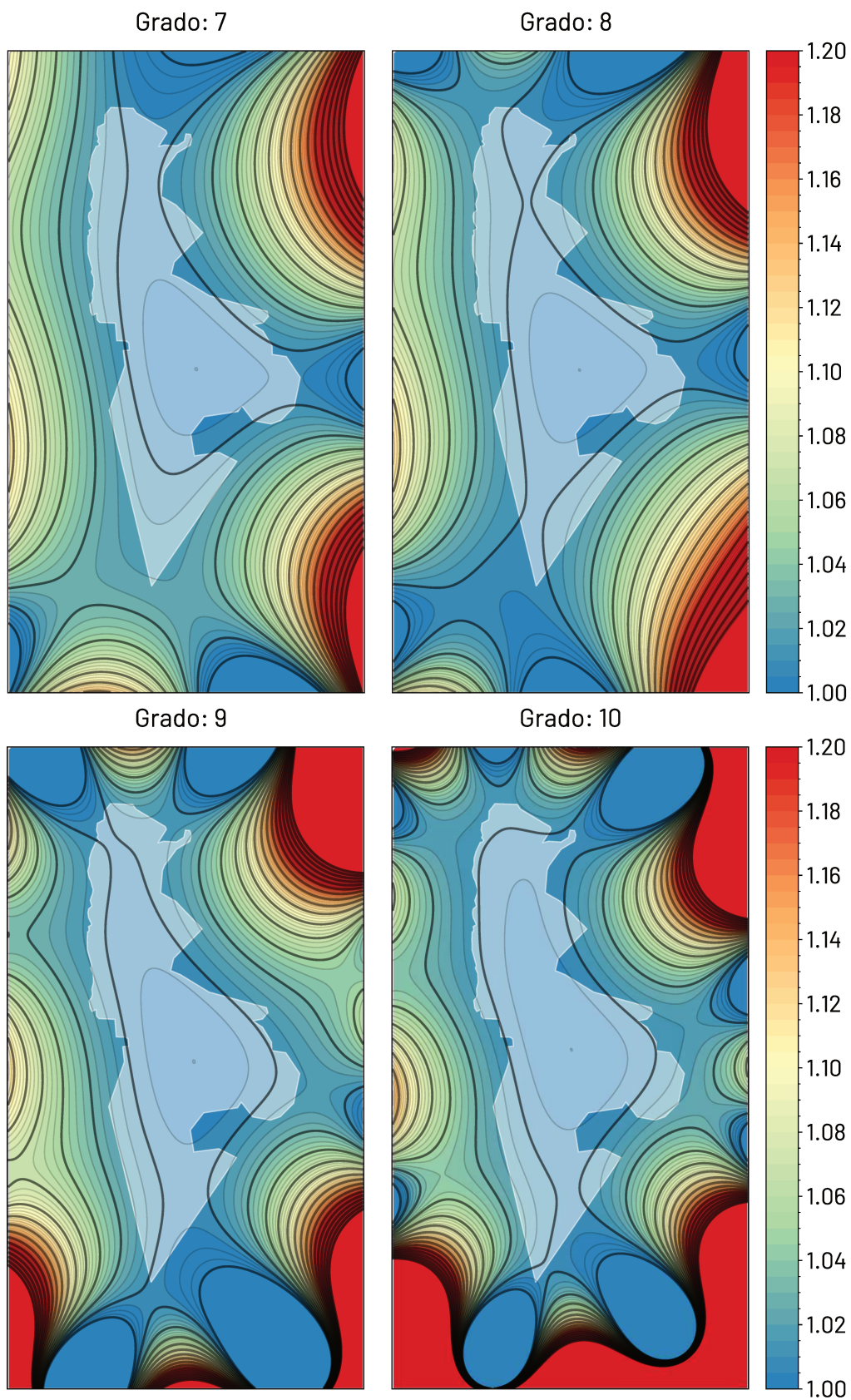


Figura 53: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_3 , grados 7 a 10.

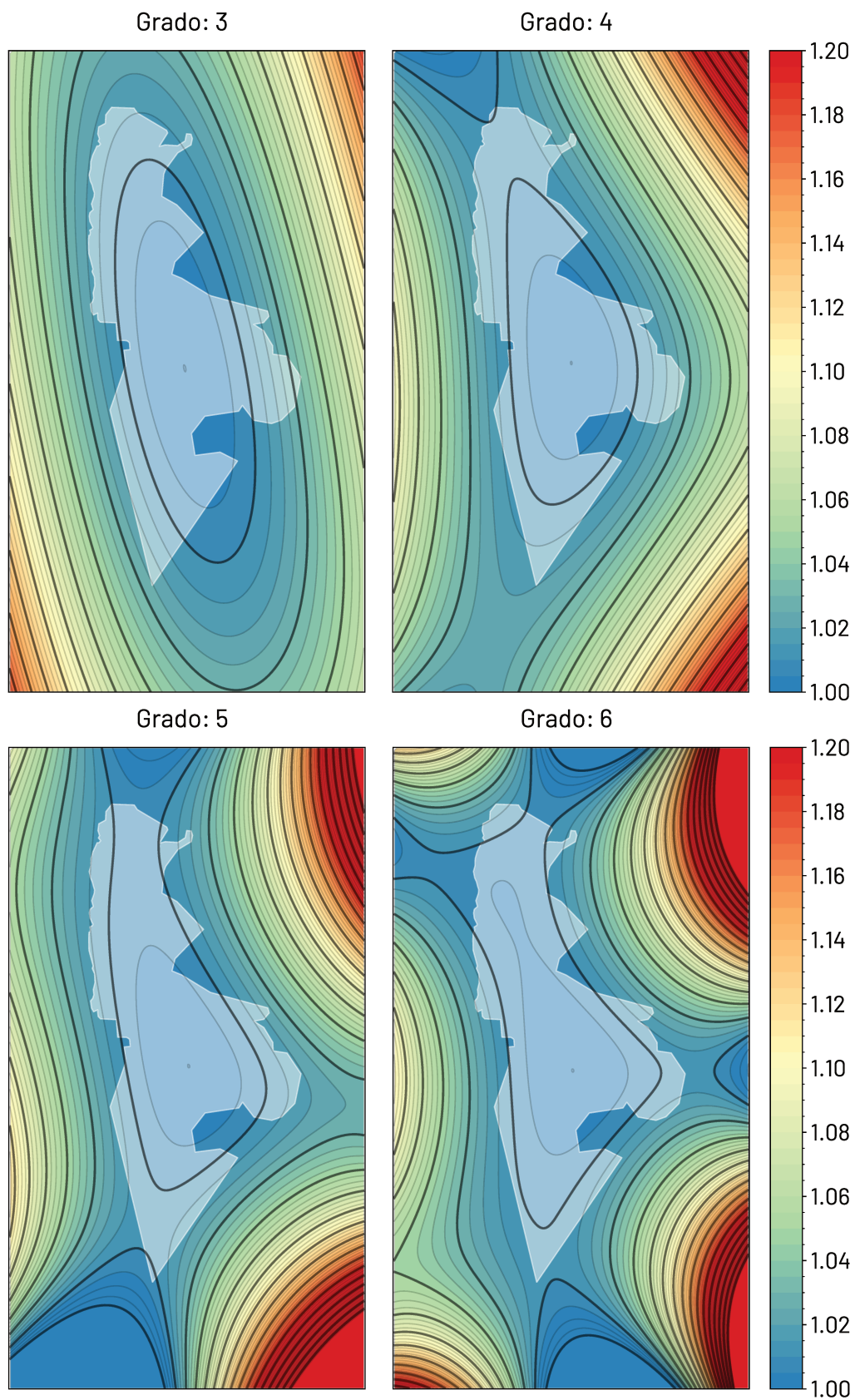


Figura 54: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_4 , grados 3 a 6.

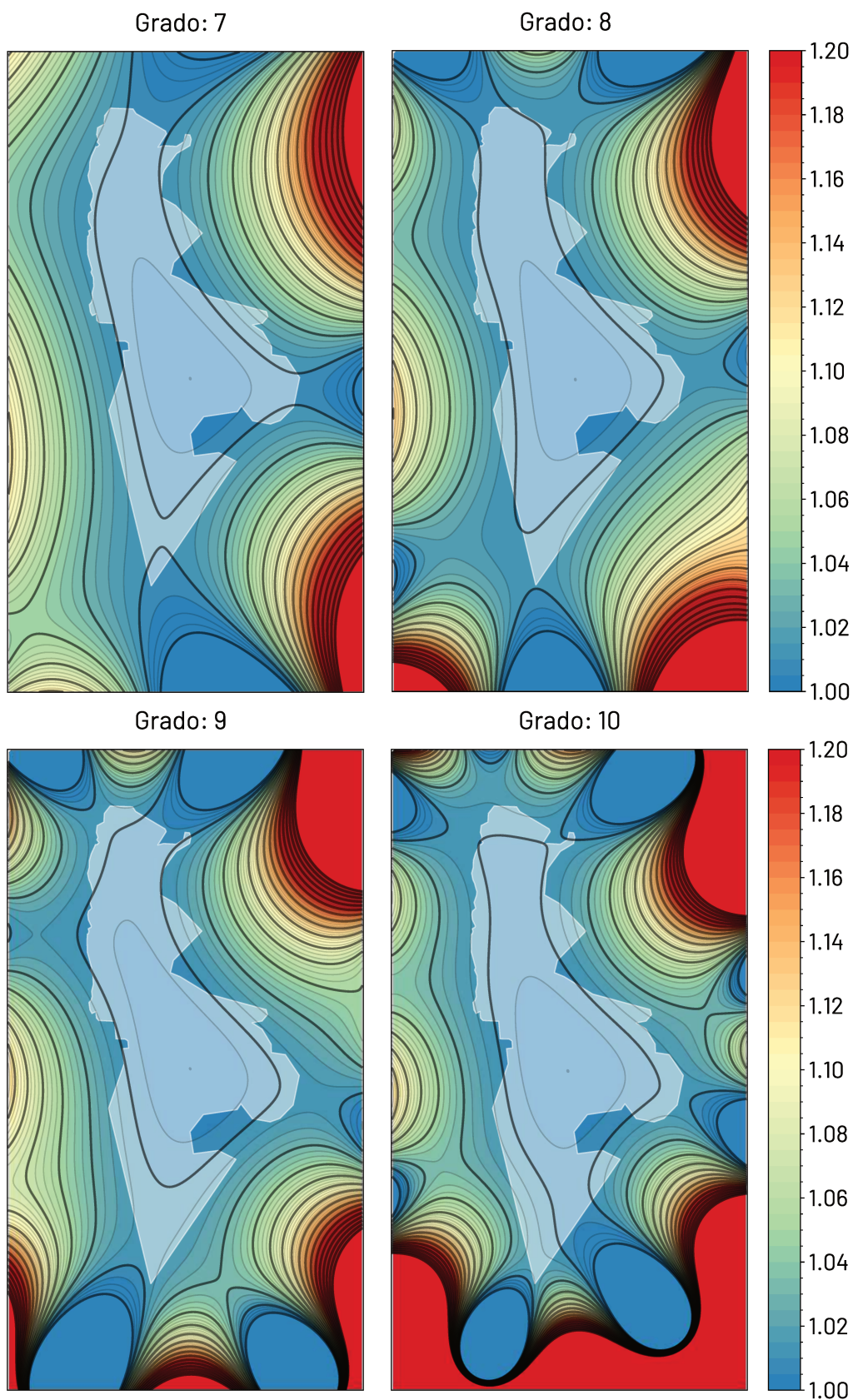


Figura 55: Argentina bicontinental. Representación de la alteración de escala para C_4 , grados 7 a 10.

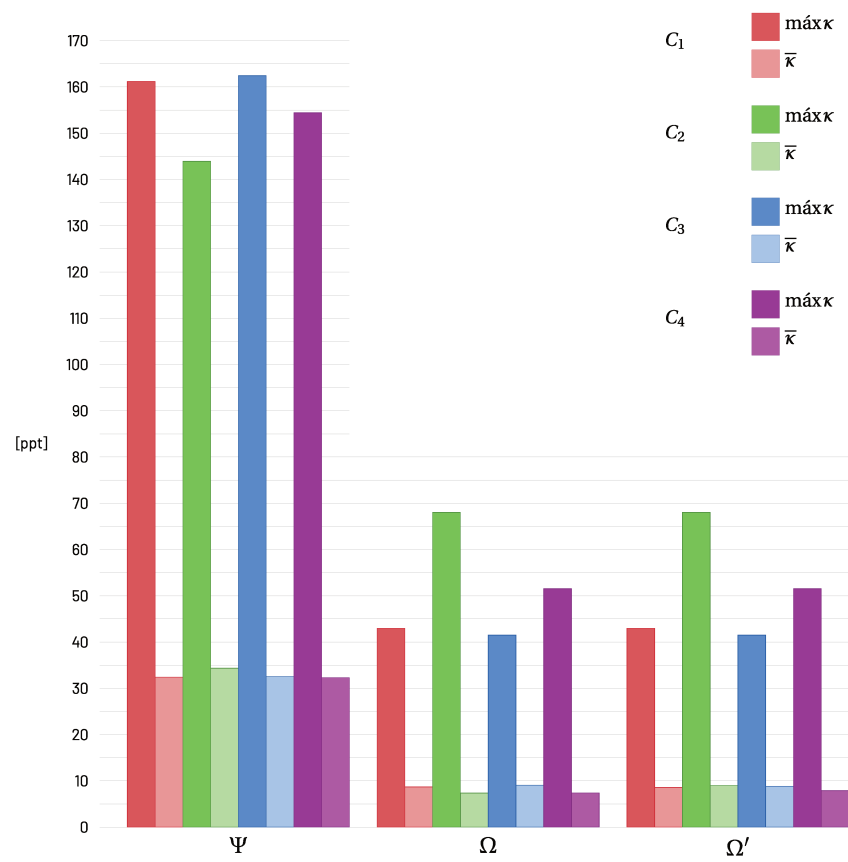


Figura 56: Argentina bicontinental. Alteración de escala por región y criterios para la proyección Gauss-Krüger.

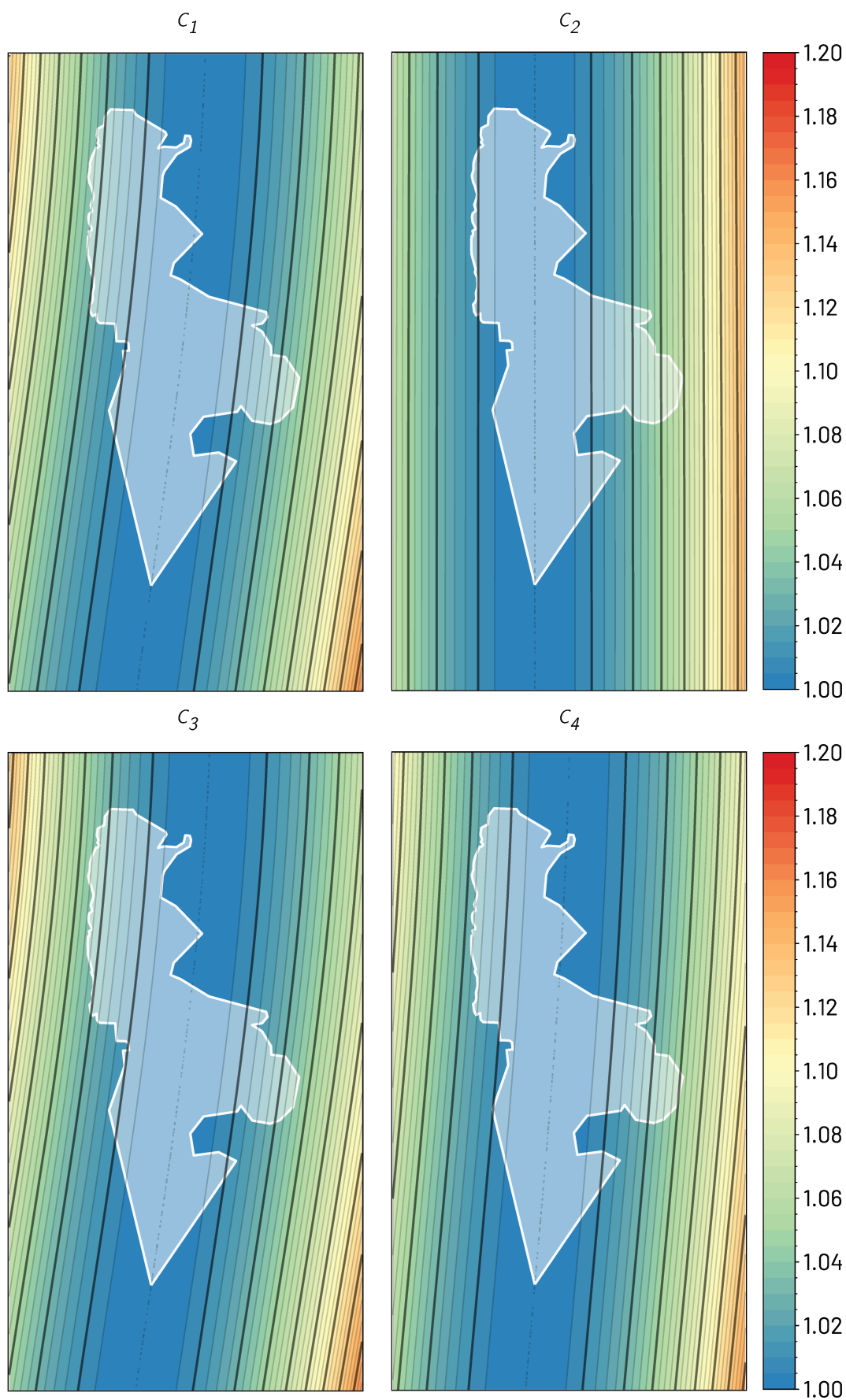


Figura 57: Argentina bicontinental, representación de la alteración de escala para criterios C_1 a C_4 , proyección de Gauss-Krüger.

Cuadro 7: Argentina bicontinental. Alteración de escala según grado de polinomio armónico y proyección Gauss-Krüger. Criterio C_1 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.053955	0.999999	1.014940	1.053956	1.053955	0.999999	1.015349	1.053956	1.206223	0.999999	1.052758	1.206224
4	1.053688	0.999999	1.011898	1.053690	1.053688	0.999999	1.012673	1.053690	1.245856	0.999999	1.052878	1.245857
5	1.061805	0.999999	1.013637	1.061806	1.061805	0.999999	1.014387	1.061806	1.369731	0.999999	1.060184	1.369733
6	1.048629	0.999999	1.013349	1.048630	1.048629	0.999999	1.014719	1.048630	1.421761	0.999999	1.060880	1.421763
7	1.074367	0.999999	1.015551	1.074368	1.074367	0.999999	1.016551	1.074368	1.372189	0.999999	1.065720	1.372191
8	1.071829	0.999999	1.013721	1.071830	1.071829	0.999999	1.014324	1.071830	2.378450	0.927494	1.078704	2.564382
9	1.033169	0.999999	1.010888	1.033171	1.035537	0.999999	1.012672	1.035538	2.146359	0.412436	1.069837	5.204097
10	1.063348	0.999999	1.015130	1.063350	1.063543	0.999999	1.016172	1.063544	6.030471	0.020493	1.160415	294.266421
G-K	1.042981	1.000000	1.008685	1.042981	1.042981	1.000000	1.008564	1.042981	1.161165	1.000000	1.032413	1.161165

Cuadro 8: Argentina bicontinental. Alteración de escala según grado de polinomio. Criterio C_2 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.061910	0.999999	1.014301	1.061911	1.061910	0.999999	1.015177	1.061911	1.215310	0.999999	1.055540	1.215311
4	1.056663	0.999999	1.012272	1.056664	1.056663	0.999999	1.013420	1.056664	1.253137	0.999999	1.054711	1.253138
5	1.044468	0.999999	1.011985	1.044469	1.044468	0.999999	1.013352	1.044469	1.342888	0.999999	1.055833	1.342889
6	1.037634	0.999999	1.010046	1.037635	1.037634	0.999999	1.011580	1.037635	1.313350	0.999999	1.050867	1.313351
7	1.041135	0.999999	1.009964	1.041137	1.041135	0.999999	1.011541	1.041137	1.260988	0.999999	1.047914	1.260990
8	1.040949	0.999999	1.010979	1.040950	1.040949	0.999999	1.012751	1.040950	1.537511	0.972874	1.057480	1.580380
9	1.041231	0.999999	1.010990	1.041232	1.041231	0.999999	1.012922	1.041232	2.199479	0.189157	1.070299	11.627805
10	1.038226	0.999999	1.009202	1.038227	1.038226	0.999999	1.011065	1.038227	6.844735	0.021923	1.149641	312.214125
G-K	1.068038	1.000001	1.007359	1.068037	1.068038	1.000001	1.008995	1.068037	1.143918	1.000001	1.034356	1.143917

Cuadro 9: Argentina bicontinental. Alteración de escala según grado de polinomio. Criterio C_3 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.028113	0.999999	1.009348	1.028114	1.028113	0.999994	1.009632	1.028119	1.209024	0.999994	1.039057	1.209030
4	1.025721	0.999999	1.008941	1.025722	1.025721	0.999999	1.009823	1.025722	1.250956	0.999999	1.043172	1.250958
5	1.020976	0.999999	1.008638	1.020977	1.030188	0.999999	1.010183	1.030189	1.423359	0.933097	1.051165	1.525413
6	1.022517	0.999999	1.007683	1.022518	1.037366	0.999999	1.009816	1.037367	1.493287	0.851705	1.058888	1.753291
7	1.020732	0.999999	1.008834	1.020733	1.036613	0.999999	1.010710	1.036614	1.402628	0.897356	1.049892	1.563068
8	1.021234	0.999999	1.008550	1.021235	1.040683	0.999999	1.010694	1.040685	1.675925	0.884866	1.054949	1.893988
9	1.020836	0.999999	1.008235	1.020837	1.040964	0.999999	1.010319	1.040965	3.275627	0.025488	1.108893	128.514137
10	1.022060	0.999999	1.007475	1.022061	1.038696	0.999999	1.009307	1.038697	10.252691	0.018701	1.221827	548.238804
G-K	1.041511	1.000000	1.009065	1.041511	1.041511	1.000000	1.008828	1.041511	1.162445	1.000000	1.032549	1.162445

Cuadro 10: Argentina bicontinental. Alteración de escala según grado de polinomio. Criterio C_4 .

deg	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
3	1.034899	0.999999	1.008490	1.034900	1.034899	0.999999	1.009243	1.034900	1.186333	0.999999	1.039510	1.186334
4	1.029279	0.999999	1.008784	1.029280	1.029279	0.999999	1.010159	1.029280	1.284128	0.999148	1.044400	1.285223
5	1.023116	0.999999	1.007990	1.023117	1.031027	0.999999	1.009752	1.031028	1.533839	0.889801	1.052951	1.723800
6	1.022402	0.999999	1.007243	1.022403	1.039986	0.999999	1.009713	1.039987	1.507330	0.911974	1.053394	1.652820
7	1.026244	0.999999	1.007592	1.026245	1.040964	0.999999	1.009932	1.040965	1.495513	0.896463	1.051318	1.668238
8	1.023680	0.999999	1.007398	1.023681	1.042574	0.999999	1.009839	1.042575	1.917718	0.848313	1.061949	2.260624
9	1.021862	0.999999	1.007600	1.021863	1.043974	0.999999	1.009947	1.043975	3.127212	0.008538	1.096523	366.270046
10	1.024329	0.999999	1.008093	1.024330	1.049267	0.999999	1.010556	1.049268	13.685416	0.017774	1.273822	769.951174
G-K	1.051534	1.000000	1.007393	1.051534	1.051534	1.000000	1.007869	1.051534	1.154429	1.000000	1.032306	1.154429

8.3. Superficie de los océanos. Proyección de Adams

Este caso es particular ya que la representación de regiones globales no pueden ser optimizadas según el principio de Chebyshev. Como se mencionó con anterioridad, la proyección de Eisenlohr, que representa en forma óptima el globo terrestre, no genera un sistema de coordenadas convexo. En otras palabras, existen al menos dos puntos dentro de Ω donde en parte o en totalidad, el camino euclidiano que los une cae fuera del sistema de coordenadas. El cuadrado de Adams, por su parte, presenta la ventaja de generar un sistema convexo y permitir la teselación, es decir, la continuidad de la representación mediante la unión de los bordes de la representación.

El objetivo de la representación es que la región de interés Ω sea continua y esté libre de puntos singulares en su interior. Esto se puede lograr de manera heurística, seleccionando apropiadamente los parámetros ϕ_0 , λ_0 y i apropiados. Un posible conjunto de parámetros que cumplan esta condición para representar la superficie de los océanos en forma continua en la proyección de Adams oblicua, son los siguientes:

$$\phi_0 = -60^\circ, \quad \lambda_0 = 70^\circ, \quad i = -40^\circ.$$

Estos parámetros se etiquetan como criterio C_5 para luego compararlos con los resultados obtenidos con los criterios C_1 a C_4 y el caso de Spilhaus. Los parámetros de la representación de Spilhaus se adaptan a la proyección de Adams I:

$$\phi_0 = -49.56371678^\circ, \quad \lambda_0 = 66.94970198^\circ, \quad i = 180^\circ - 40.17823482^\circ.$$

La muestra puntos en cada región se realiza en coordenadas de Adams, con los siguientes parámetros: elipsoide GRS80, $a = 6378137$, $\phi_0 = 60^\circ\text{S}$, $\lambda_0 = 70^\circ\text{E}$ y $i = -40^\circ$. Los valores extremos de la muestra de puntos en Ψ son los siguientes:

- Borde Norte: 11 825 542 m
- Borde Sur: -11 824 458 m
- Borde Este: 11 824 458 m
- Borde Oeste: -11 825 542 m

Los datos para delimitar cada polígono de interés provienen de Natural Earth⁷, un sitio que ofrece datos ráster y vectoriales de dominio público. En cada región, se tomaron muestras equiespaciadas de la siguiente manera

⁷<https://www.naturalearthdata.com/downloads/>

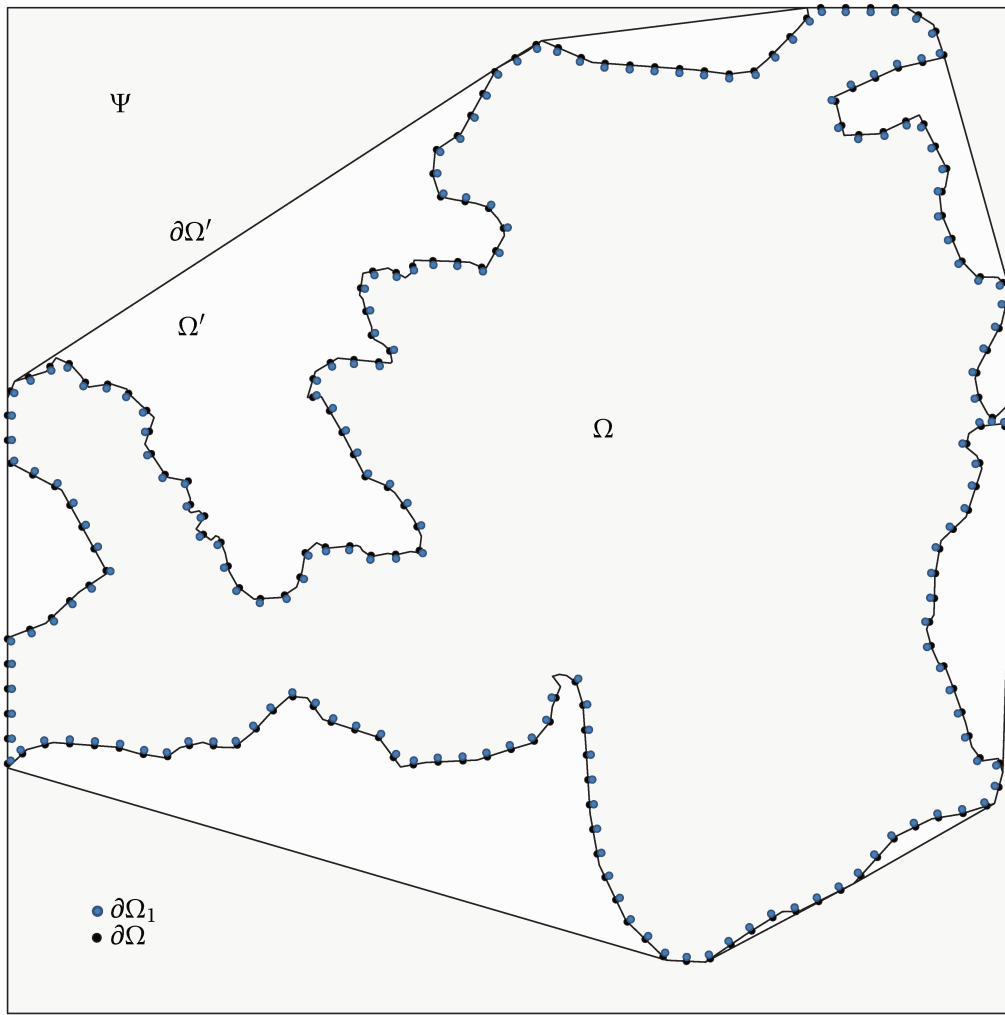


Figura 58: Representación del contorno y muestra de puntos de los océanos en la proyección de Adams.

- Ψ : 224676 puntos
- Ω' : 163999 puntos
- Ω : 116192 puntos
- $\partial\Omega$: 200 puntos

Además se generaron los 200 puntos correspondientes a $\partial\Omega_1$ de acuerdo a la sección 5. En la figura 58 se ilustra cada región muestreada.

El cromosoma inicial está determinado por el criterio C_5 . La representación de los valores de alteración de escala por región se ilustra en la figura 59. La representación de curvas de nivel de la distorsión en la figura 60. Las figuras que ilustran la alteración de escala, expresan los valores en relación a la unidad en por ciento (%):

$$(\text{ksc } \sigma - 1) \cdot 1 \times 10^2.$$

Es muy difícil interpretar los valores estadísticos de la alteración de escala en el caso de regiones globales. La presencia de puntos singulares dentro de Ω distorsiona cualquier tipo de promedio. En este contexto, una proyección es mejor que otra si la primera está libre de puntos singulares dentro de la zona de interés y que la misma esté representada en forma continua. Los tres criterios que cumplen estas condiciones son C_1 , C_5 y Spilhaus y por lo tanto los únicos que permiten comparar resultados de distorsión dentro de Ω .

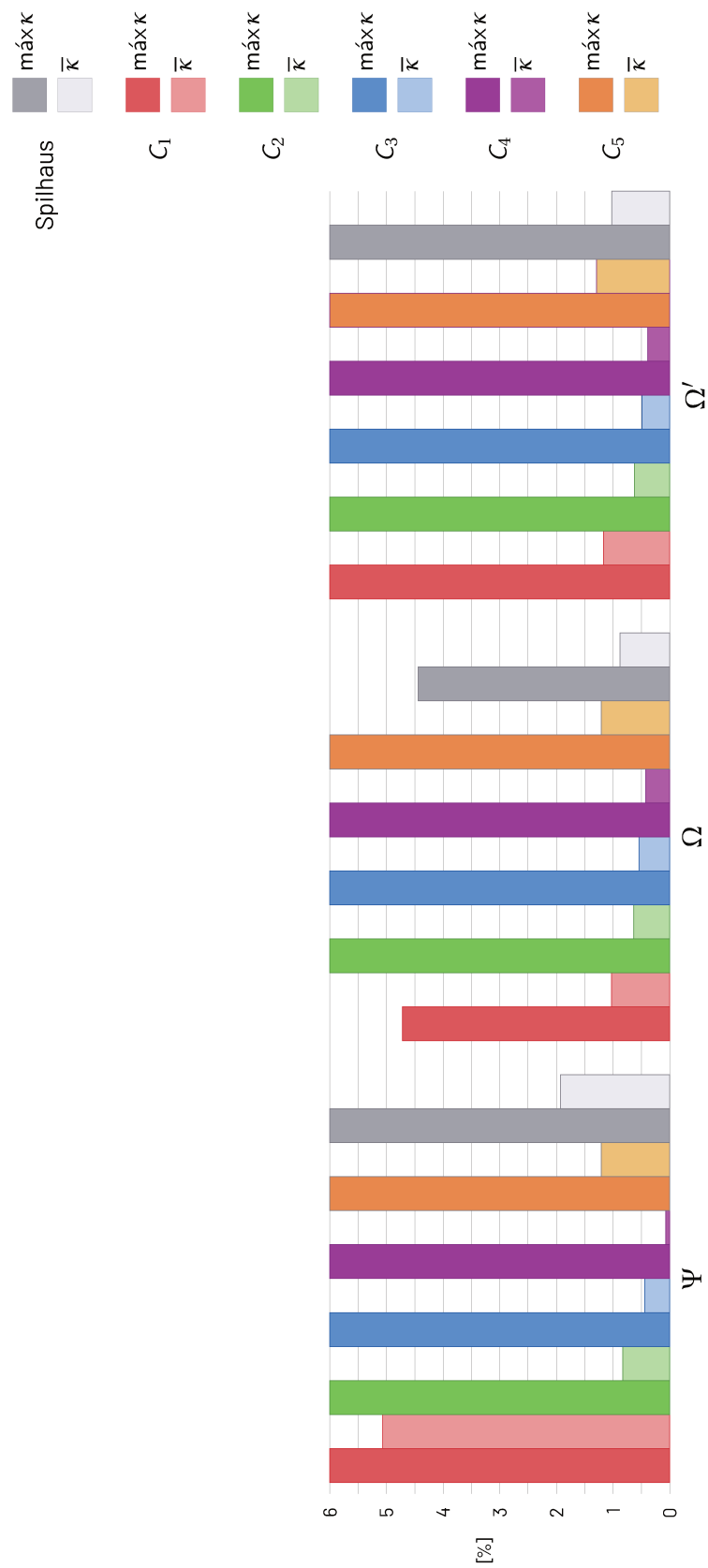


Figura 59: Representación del contorno y muestra de puntos de los océanos en la proyección de Adams. Los valores están recortados en 6%.

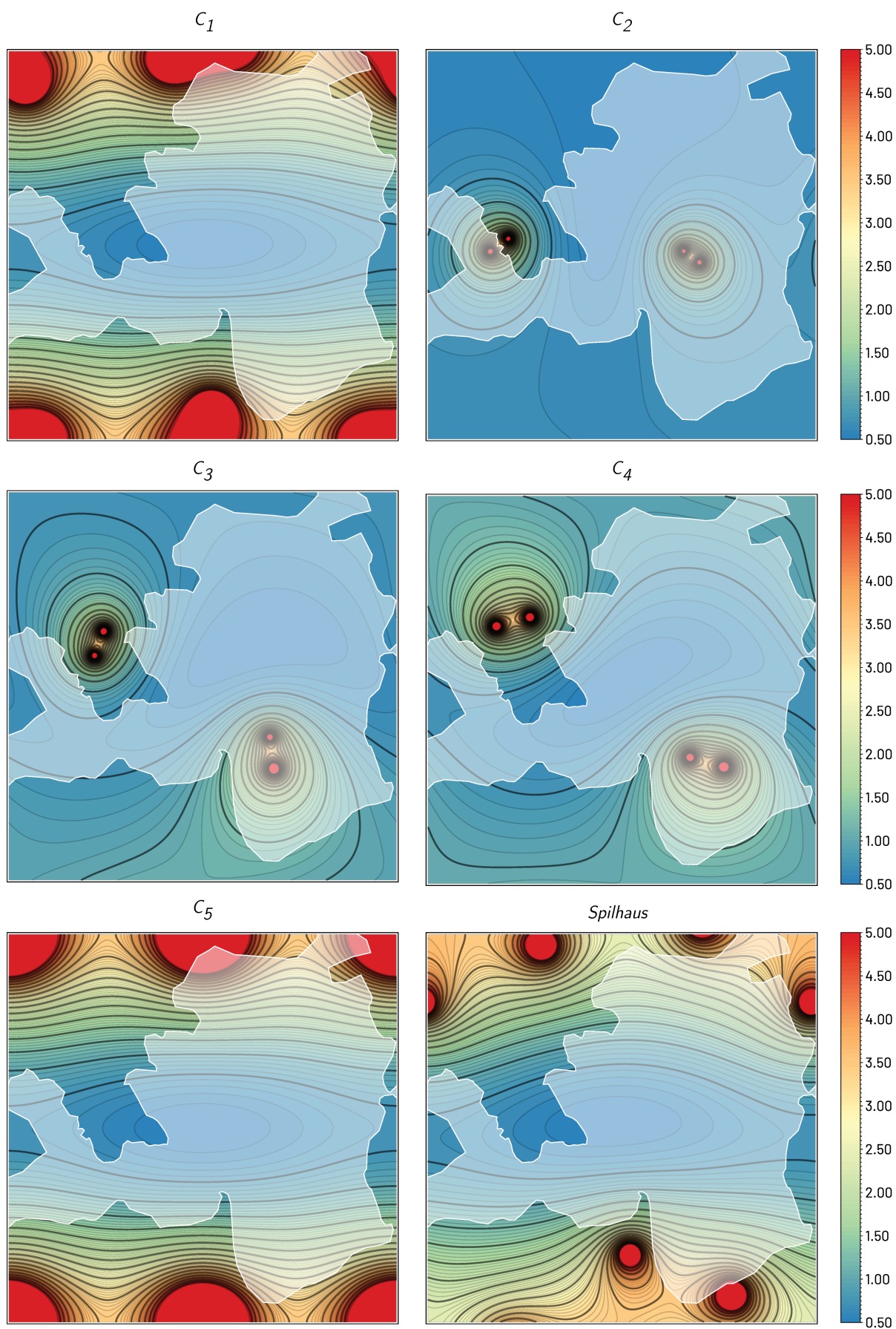


Figura 60: Esquema de escala de la representación de océanos en la proyección de Adams bajo distintos criterios

8.4. Discusión de resultados

8.4.1. Sobre los polinomios armónicos

Al inicio del desarrollo de este trabajo, se consideró que el criterio C_1 , $\max \left\| \vec{\nabla} \ln \sigma \right\|_{\partial \Omega} = \min$ podía ser el más adecuado para aplicar a polinomios armónicos, ya que una curvatura mínima en el borde ayudaría a evitar variaciones bruscas de escala en la frontera. Sin embargo, este criterio también presenta dificultades en las proximidades de los bordes cuando el grado del polinomio es alto. Esto se puede observar principalmente para regiones grandes como el caso de la Argentina comparando la figura 49 que corresponde a C_1 con, por ejemplo, la figura 55 que corresponde al principio de Chebyshev (C_4); en ambos casos, cerca de la frontera el cambio de gradiente de la escala es muy brusco y contradice los objetivos del sistema de coordenadas propuesto.

La única forma eficaz de evitar este inconveniente es limitando el grado del polinomio, por ejemplo, de 3 a 6 (ver figuras 48, 50, 52 y 54). En este caso se observa que los criterios C_1 y C_2 , que optimizan el gradiente, ofrecen una solución más segura y con menos variaciones que C_3 y C_4 que minimizan el valor de la distorsión. Pero también se observa que todos los polinomios de grado 3 tienen esta propiedad independientemente del criterio. La evolución de la escala en las figuras 45, 46 y 47 permite inferir que, aún limitando el grado del polinomio a 3, los criterios C_3 y C_4 tienen mejores valores de alteración de escala que los criterios C_1 y C_2 , con excepción de la región exterior Ψ . En particular, el criterio C_3 , $\max \left\| \ln \sigma \right\|_{\partial \Omega} = \min$ es el que ofrece valores de alteración de escala más equilibrados en Ω y Ω' sin generar cambios bruscos en Ψ .

La misma observación se puede hacer con respecto a la provincia de Misiones (figuras 27, 28 y 29), si bien no hay grandes diferencias entre los criterios por el tamaño de la región, el criterio C_3 es el que ofrece valores de alteración de escala más equilibrados en Ω y Ω' para el grado 3.

Con respecto a la inicialización del primer individuo en el AG, como se describió en la sección 8.2.1 los criterios que optimizan el gradiente (C_1 y C_2) tienen una mejor convergencia y no requieren de resolver primero el principio de Chebyshev. Aunque, nuevamente, cuando se resuelve un polinomio de grado 3 o 4 esta observación es válida para todos los criterios y mucho antes de que se alcancen las 100 generaciones se llega a una solución estable. En caso de ser necesario valores iniciales para el cromosoma del primer individuo, se podrían obtener resolviendo primero el criterio C_2 y el resultado obtenido utilizarlo en los otros criterios. Esto evita la necesidad de armar complejas matrices para poder resolver el principio de Chebyshev por MMC.

8.4.2. Sobre las proyecciones convencionales

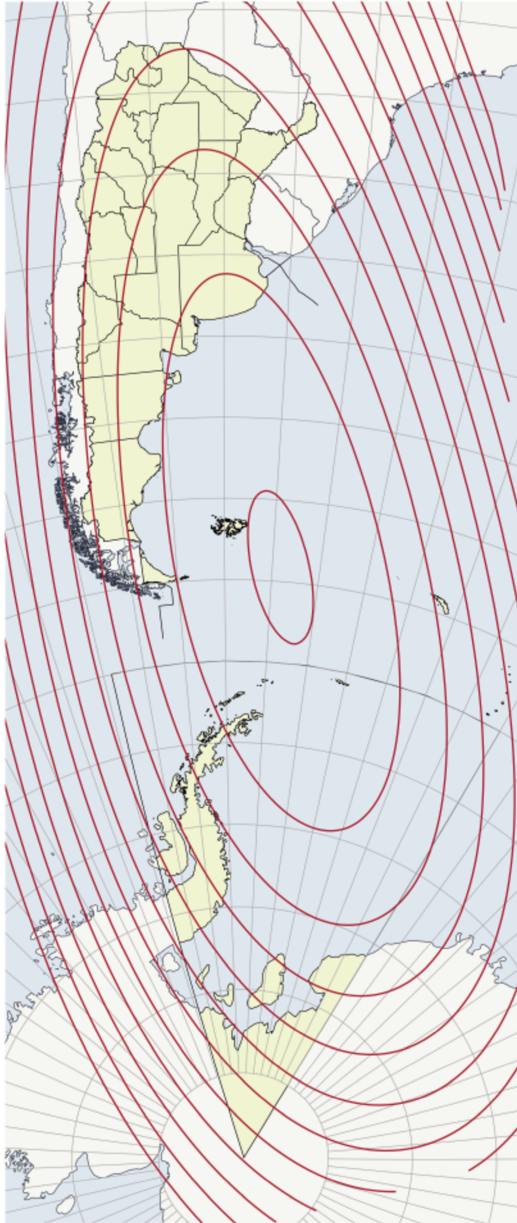
De manera consistente, el criterio C_1 ha generado buenos resultados en los tres casos de estudio. En el caso de la superficie oceánica, C_1 fue el único criterio que logró una solución aceptable (figura 60). Las proyecciones convencionales no presentan grandes problemas de variación de escala cerca de los bordes, excepto en la proyección de Adams, donde es necesario alejar lo más posible los puntos singulares.

8.4.3. Elección de la proyección óptima

De acuerdo al análisis realizado se elige el criterio C_3 para polinomios armónicos grado 3 y el criterio C_1 para Gauss-Krüger, CCL y Adams. Teniendo en cuenta que la única solución para la Argentina bicontinental usando polinomios armónicos es la publicada en Orihuela (2016) se agrega esa solución reproducida en la figura 61 y se le asigna la etiqueta A_1 . Con la misma muestra de puntos utilizada para los criterios anteriores, se calcularon los resúmenes de alteración de escala para A_1 . Este resumen de casos seleccionados se expresa en el cuadro 11 para el caso de Misiones y en el cuadro 12 para el caso de Argentina.

El parámetro más relevante a observar es la variación total de escala σ_2/σ_1 . Aún teniendo en cuenta que el grado del polinomio es bajo siempre ofrece mejores resultados que las proyecciones convencionales G-K, y CCL. Aunque, dependiendo de los requisitos, la mejora es marginal y puede no justificar la adopción de un polinomio armónico como proyección. Sin embargo esto no implica que para todos los casos sea así. Cada región de estudio tiene formas y superficies particulares, por lo que no se puede generalizar esta afirmación.

Para el caso de Misiones, la proyección de Gauss-Krüger es superior a la de CCL. La proyección CCL es más adecuada para regiones que se extienden de este a oeste y tienen un desarrollo norte-sur limitado. Sin embargo, en el caso de Misiones, esta característica no resulta evidente a simple vista.



Cuadro 5: Coeficientes del polinomio armónico de grado 4

gr.	Pol. directo		Pol. inverso	
	$a_n \times 10^6$	$b_n \times 10^6$	$a'_n \times 10^6$	$b'_n \times 10^6$
1	1409525	0	709485	-8
2	27489	13181	-9502	-5088
3	57742	-75303	-13893	20567
4	-16465	-6813	5034	4710

Figura 61: Argentina bicontinental, representación de la alteración de escala de la proyección de polinomios armónicos de grado 4. Este conjunto de parámetros se etiqueta como A_1 . Extraído de Orihuela (2016)

Cuadro 11: Provincia de Misiones. Alteración de escala según proyecciones óptimas: polinomio armónico, Gauss-Krüger y CCL.

Proy.	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
deg 3, C_3	1.000086	1.000000	1.000030	1.000086	1.000088	1.000000	1.000033	1.000088	1.000809	1.000000	1.000170	1.000809
G-K, C_1	1.000178	1.000000	1.000046	1.000178	1.000178	1.000000	1.000045	1.000178	1.000515	1.000000	1.000159	1.000515
CCL, C_1	1.000262	0.999999	1.000060	1.000263	1.000272	0.999999	1.000058	1.000273	1.000540	0.999999	1.000182	1.000541

Cuadro 12: Argentina bicontinental. Alteración de escala según proyecciones óptimas: polinomio armónico y Gauss-Krüger.

Proy.	Ω				Ω'				Ψ			
	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1	σ_2	σ_1	$\bar{\sigma}$	σ_2/σ_1
deg 3, C_3	1.028113	0.999999	1.009348	1.028114	1.028113	0.999994	1.009632	1.028119	1.209024	0.999994	1.039057	1.209030
G-K, C_1	1.042981	1.000000	1.008685	1.042981	1.042981	1.000000	1.008564	1.042981	1.161165	1.000000	1.032413	1.161165
deg 4, A_1	1.023366	0.984580	1.008074	1.039394	1.023366	0.984580	1.007344	1.039394	1.180429	0.984580	1.032046	1.198916

Cuadro 13: Parámetros de las proyecciones óptimas elegidas.

(a) Provincia de Misiones.		(b) Argentina bicontinental.		(c) Océanos.	
Polinomio armónico, C_3		Polinomio armónico, C_3		Adams, C_1	
coordenadas de Mercator		coordenadas de Schreiber		ϕ_0	60.6°S
a_1	0.8916295	a_1	1.0031221	λ_0	75.4°E
a_2	0.2013594	a_2	-0.0005056	i	-34.6°
a_3	-0.0352275	a_3	0.0107592		
b_1	0.0	b_1	0.0		
b_2	-0.0010483	b_2	0.0360472		
b_3	0.0358757	b_3	-0.0337609		
ϕ_0	27.0°S	ϕ_0	50.0°S		
λ_0	54.5°W	λ_0	60.0°W		
α	1.0	α	1.0		
Gauss-Krüger, C_1		Gauss-Krüger, C_1			
λ_0	54.8°W	λ_0	52°W		

Se proporcionan ejemplos de cartas y mapas para cada caso de estudio en la proyecciones elegidas cuyos parámetros se resumen en el cuadro 13.

En la figura 62 se representa la provincia de Misiones en una proyección polinómica. Los datos de hidrografía fueron tomados del producto SIG 250 del IGN⁸. La imagen satelital corresponde al producto World Imagery (Clarity) de ArcGIS⁹.

En la figura 63 se ilustra el caso de la Argentina bicontinental. Los datos de límites políticos surgen del IGN. El relieve sombreado es la capa 1:50m Bathymetry publicada por Natural Earth¹⁰.

Para el caso de los océanos se representa las temperaturas de su superficie registradas por el sistema OSTIA (Donlon et al., 2012). Los datos están alojados en el servicio Copernicus Marine Data Store¹¹ y tienen una resolución de $0.05^\circ \times 0.05^\circ$. Se tomaron temperaturas superficiales diarias desde 1/6/2022 a 17/8/2024 y se armó un video tomando un *frame* cada dos días a 10 *frames* por segundo. En la figura 64 se puede ver un fotograma de ejemplo del siguiente video:

- https://geon6.com/tesis/oceanos_temp_adams.html

⁸<https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/InformacionGeoespacial/CapasSIG>

⁹<https://www.arcgis.com/home/item.html?id=ab399b847323487dba26809bf11ea91a>

¹⁰<https://www.naturalearthdata.com/downloads/50m-raster-data/50m-bathymetry/>

¹¹<https://data.marine.copernicus.eu/products>

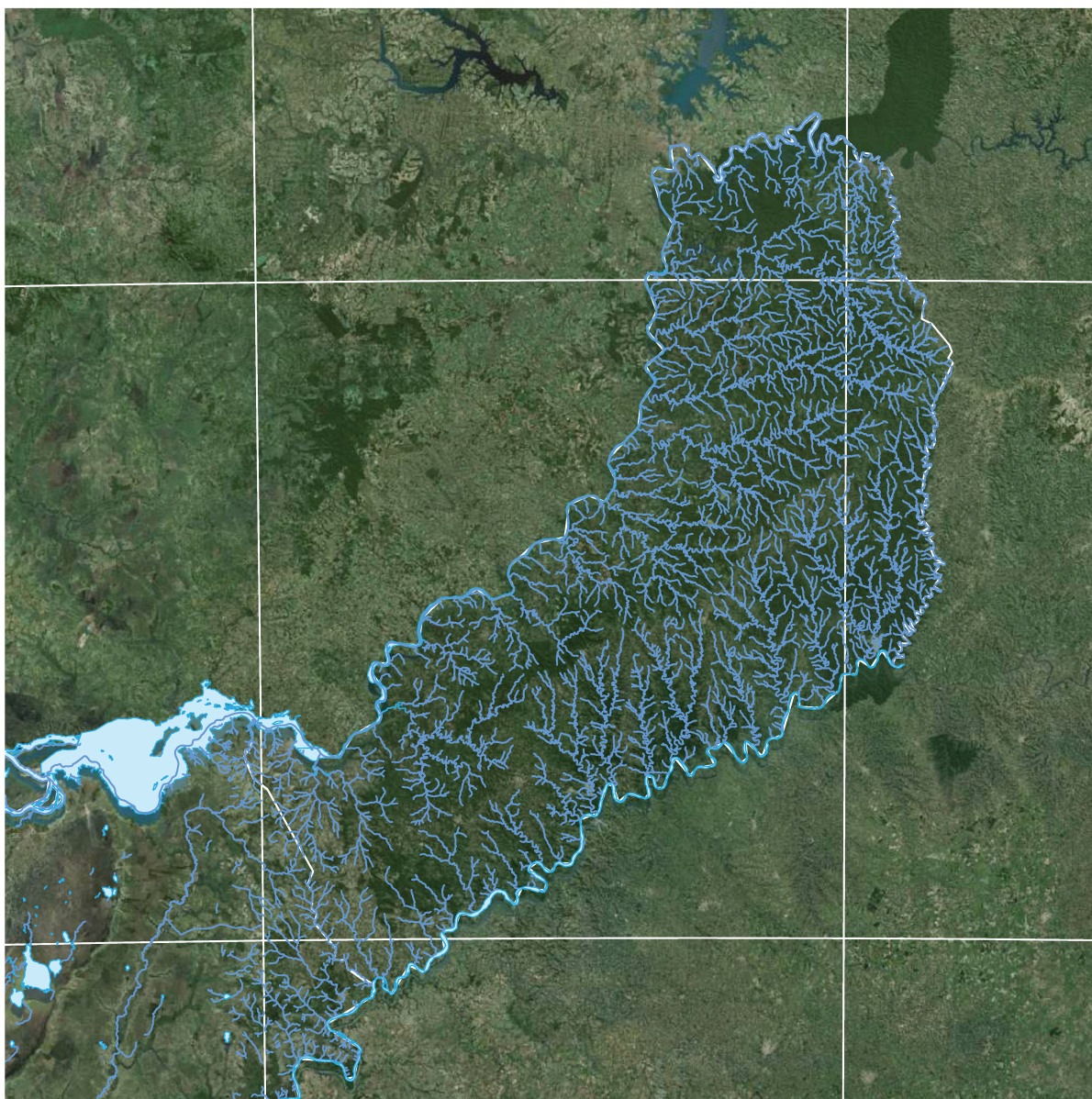


Figura 62: Mapa de la provincia de Misiones proyectada en un polinomio armónico en coordenadas de Mercator de grado 3, según criterio C_3 .

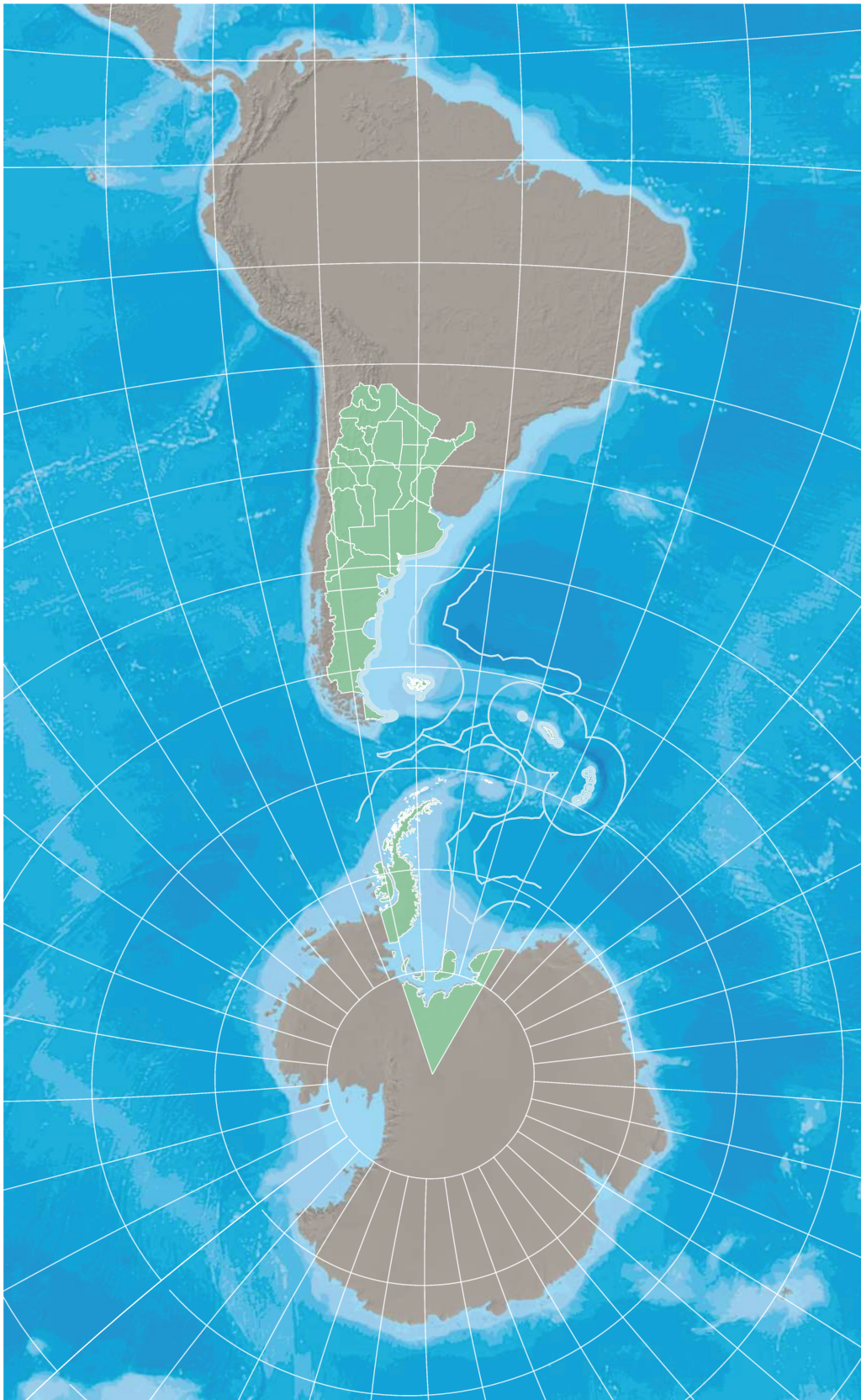


Figura 63: Mapa de la Argentina bicontinental proyectada en un polinomio armónico de grado 3 en coordenadas de Schreiber, según criterio C_3 . Una de las ventajas del polinomio de grado 3 es que permite la representación de regiones fuera del dominio de Ψ sin distorsionarlas en forma severa. En este caso se consigue representar en forma completa América del Sur y el continente Antártico.

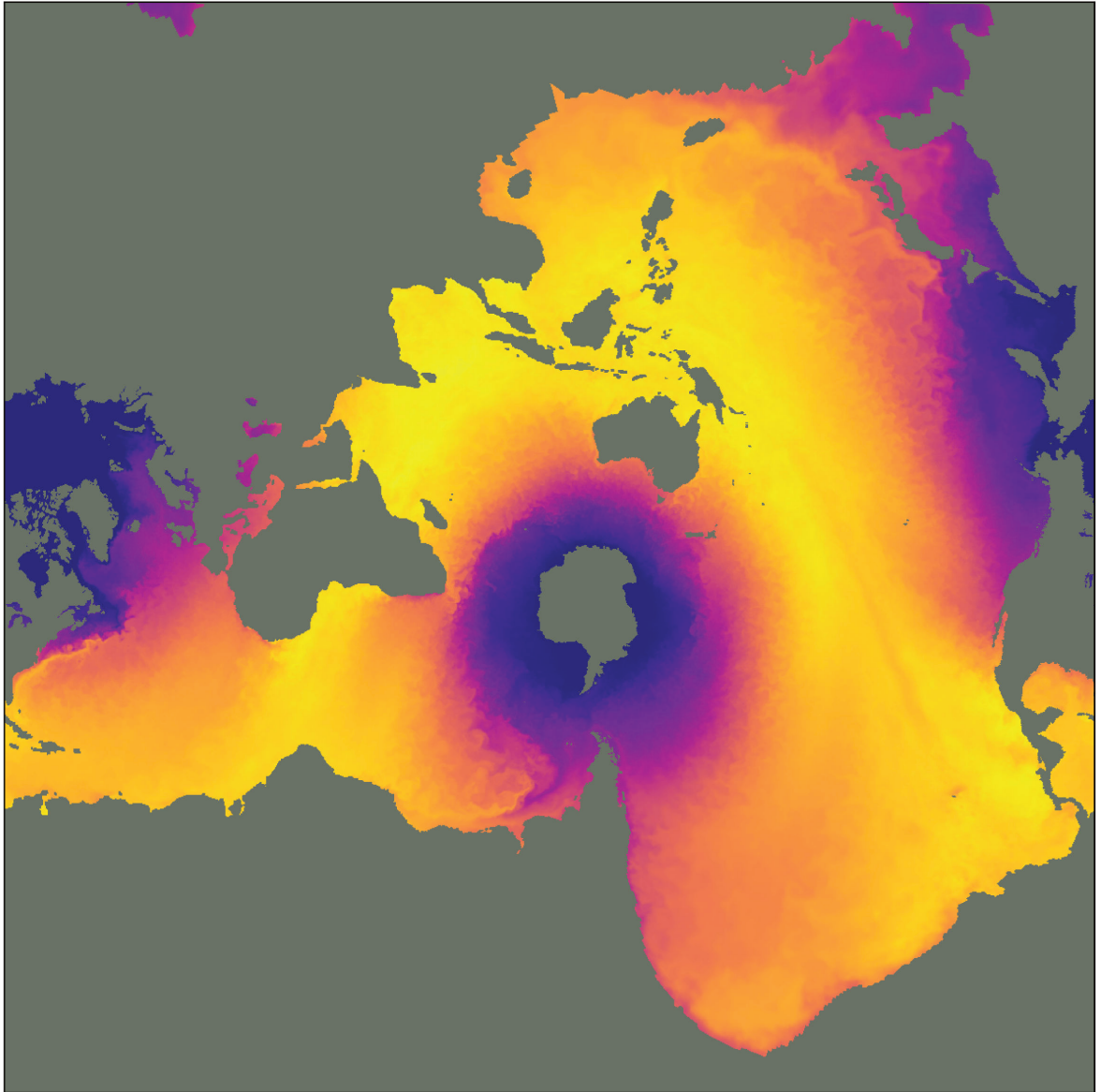


Figura 64: Fotograma de una secuencia de la representación de las temperaturas de los océanos en la proyección de Adams que surge del criterio C_1 .

8.4.4. Comparación de trabajos

Todos los trabajos citados en la sección 1.2 utilizan el principio de Chebyshev, incluso aquellos que minimizan la alteración de escala dentro de Ω como Reilly (1973) y Tutić (2009). Esto ya fue notado por Weber (1867) que concluye que para que la variación de escala sea mínima en Ω , esta debe ser constante en $\partial\Omega$. Exceptuando el trabajo de Orihuela (2016) (etiquetado como A_1 para la Argentina), los estudios no consideran lo que ocurre en las proximidades de Ω , sin garantizar la ausencia de variaciones de escala a lo largo de todos los caminos euclidianos entre cualquier par de puntos dentro de Ω . Los coeficientes del polinomio de grado 4 utilizados en el trabajo A_1 fueron calculados siguiendo el principio de Chebyshev sobre $\partial\Omega'$, en lugar de $\partial\Omega$, con el fin de prevenir estas variaciones cerca de los bordes. Sin embargo, según se observa en el cuadro 12, los resultados son inferiores a los del polinomio de grado 3 utilizado en este trabajo, lo que demuestra que no es necesario modificar la forma del contorno para lograr una optimización adecuada.

En su tesis, Tutić (2009) señala que el grado del polinomio influye en la calidad de la representación de las regiones adyacentes a Ω , y sugiere que se podría obtener una mejor evaluación analizando las deformaciones en la mayor área convexa inscrita dentro del área de interés, una propuesta que plantea para futuras investigaciones sobre proyecciones óptimas para Croacia. En este trabajo, se ha implementado dicho análisis evaluando la distorsión en Ω' y Ψ .

Habib (2022) propone adaptar la forma de una elipse al contorno, una idea que ya había sido abordada por Chebyshev en 1856, y que puede resolverse fácilmente mediante un polinomio de grado 3. Pedzich (2005), por su parte, también aplica el principio de Chebyshev sobre $\partial\Omega$, adaptando el contorno de un país a una elipse mediante un polinomio de grado superior a 3, aunque no especifica su grado ni publica los coeficientes. Reporta una distorsión de 35 cm/km frente a los 50 cm/km de la proyección estereográfica para Polonia sin ofrecer detalles sobre la optimización. También sugiere la adaptación de una curva elíptica que envuelva los contornos de España, Portugal y Turquía. Bourchtein y Bourchtein (2008) examinan la optimización de la proyección estereográfica, buscando adaptar una circunferencia al contorno de un país. No obstante, adaptar un polinomio de grado 3, que siempre ajusta una elipse, ofrece mejores resultados.

Existe un consenso general en que, al buscar un sistema de coordenadas óptimo, la tendencia intuitiva es ajustar un contorno elíptico con igual alteración de escala a la región de interés. Como se ha demostrado en este trabajo, esto puede lograrse de manera sencilla con un polinomio de grado 3, siguiendo el criterio C_3 para calcular sus coeficientes que es el que ofrece los valores más equilibrados de alteración de escala tanto en Ω como en la región convexa Ω' .

9. Conclusiones y trabajos futuros

Al construir sistemas de coordenadas mediante proyecciones adaptativas, aplicar de forma directa el principio de Chebyshev no siempre representa la solución más adecuada. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que el criterio C_3 es el más eficaz cuando se utilizan polinomios armónicos, mientras que en las proyecciones convencionales, donde se optimizan parámetros, el criterio C_1 resulta más apropiado. Aunque la limitación en el grado del polinomio puede afectar negativamente la optimización dentro de Ω , permite garantizar una distribución equilibrada de las alteraciones de escala en toda la región convexa Ω' y en las proximidades de $\partial\Omega$. Esto evita la necesidad de explorar criterios adicionales o grados superiores que podrían aumentar la complejidad del problema y requerir un mayor tiempo de procesamiento. Además, asegura que cualquier trayecto euclidiano entre puntos dentro de Ω no esté sujeto a variaciones abruptas en la escala.

La elección entre utilizar un polinomio armónico o una proyección convencional depende de los requisitos específicos del problema. Si la mejora es marginal, generalmente es preferible optar por una proyección convencional, como la de Gauss-Krüger. Sin embargo, esto no se puede determinar *a priori*, ya que cada región geográfica presenta características únicas. Por ello, se recomienda seguir el siguiente procedimiento:

1. Delimitar la región de interés Ω y su entorno Ψ en coordenadas isométricas de Schreiber o Mercator.
2. Tomar muestras de puntos en Ψ , Ω' , Ω , $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$.
3. Utilizar AG para encontrar los coeficientes del polinomio de grado 3 de tal modo que $\max \ln^2 \sigma|_{\partial\Omega} = \min$.
4. Determinar mediante AG los parámetros de la proyección convencional seleccionada con $\max \ln^2 \frac{\sigma|_2}{\sigma|_1} \Big|_{\partial\Omega} = \min$.
5. Comparar los resultados calculando los estadísticos de la distorsión obtenida.

Los algoritmos genéticos se destacan como una herramienta eficaz y flexible para resolver este tipo de problemas. Su simplicidad facilita el desarrollo de soluciones específicas sin necesidad de conocimientos avanzados en programación. Aunque librerías como PyGad pueden ser útiles para entrenar redes neuronales y asignar pesos, presentan dificultades para adaptarse a problemas tan particulares como el aquí tratado. A pesar de ello, implementar un algoritmo genético *ad hoc* es un proceso sencillo, lo que hace innecesario recurrir a software de terceros. Estos algoritmos ofrecen una mayor efectividad que los métodos tradicionales, como por ejemplo MMC, al permitir la personalización y adaptación a las características particulares de cada situación.

Quedan aún por explorar más escenarios de optimización, como la incorporación de restricciones adicionales. Un ejemplo sería limitar el valor máximo del gradiente de alteración de escala dentro de Ω para evitar la aparición de puntos singulares y mejorar la convergencia del algoritmo. Otra posibilidad para mejorar la convergencia, es la combinación de criterios según la generación. También se pueden desarrollar algoritmos híbridos que combinen la selección genética con métodos de gradiente descendente que mejoren la eficiencia. Si bien estas propuestas están dentro del alcance de este trabajo, el tiempo para su implementación y ensayos en casos de estudio superan lo previsto, por lo que se plantean como líneas de investigación futura.

Apéndice

A. Latitudes auxiliares

A.1. Latitud conforme

$$\text{A.1.1} \quad \chi = \phi + \sum_{j=1}^{j=6} g_j \sin(2j\phi),$$

$$g_1 = -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{4}{3}n^3 - \frac{82}{45}n^4 + \frac{32}{45}n^5 + \frac{4642}{4725}n^6,$$

$$\text{A.1.2} \quad g_2 = \frac{5}{3}n^2 - \frac{16}{15}n^3 - \frac{13}{9}n^4 + \frac{904}{315}n^5 - \frac{1522}{945}n^6,$$

$$g_3 = -\frac{26}{15}n^3 + \frac{34}{21}n^4 + \frac{8}{5}n^5 - \frac{12686}{2835}n^6,$$

$$g_4 = \frac{1237}{630}n^4 - \frac{12}{5}n^5 - \frac{24832}{14175}n^6,$$

$$g_5 = -\frac{734}{315}n^5 + \frac{109598}{31185}n^6,$$

$$g_6 = \frac{444337}{155925}n^6.$$

$$\text{A.1.3} \quad \phi = \chi + \sum_{j=1}^{j=6} g'_j \sin(2j\chi),$$

$$g'_1 = 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \frac{26}{45}n^5 - \frac{2854}{675}n^6,$$

$$\text{A.1.4} \quad g'_2 = \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \frac{2704}{315}n^5 + \frac{2323}{945}n^6,$$

$$g'_3 = \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 - \frac{1262}{105}n^5 + \frac{73814}{2835}n^6,$$

$$g'_4 = \frac{4279}{630}n^4 - \frac{332}{35}n^5 - \frac{399572}{14175}n^6,$$

$$g'_5 = \frac{4174}{315}n^5 - \frac{144838}{6237}n^6,$$

$$g'_6 = \frac{601676}{22275}n^6.$$

A.2. μ en función de χ

$$\text{A.2.5} \quad \mu = \chi + \sum_{j=1}^{j=6} \alpha_j \operatorname{sen}(2j\chi),$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 - \frac{127}{288}n^5 + \frac{7891}{37800}n^6,$$

$$\text{A.2.6} \quad \alpha_2 = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 + \frac{281}{630}n^5 - \frac{1983433}{1935360}n^6,$$

$$\alpha_3 = \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 + \frac{15061}{26880}n^5 + \frac{167603}{181440}n^6,$$

$$\alpha_4 = \frac{49561}{161280}n^4 - \frac{179}{168}n^5 + \frac{6601661}{7257600}n^6,$$

$$\alpha_5 = \frac{34729}{80640}n^5 - \frac{3418889}{1995840}n^6,$$

$$\alpha_6 = \frac{212378941}{319334400}n^6.$$

$$\text{A.2.7} \quad \chi = \mu + \sum_{j=1}^{j=6} \alpha'_j \operatorname{sen}(2j\mu),$$

$$\alpha'_1 = -\frac{1}{2}n + \frac{2}{3}n^2 - \frac{37}{96}n^3 + \frac{1}{360}n^4 + \frac{81}{512}n^5 - \frac{96199}{604800}n^6,$$

$$\text{A.2.8} \quad \alpha'_2 = -\frac{1}{48}n^2 - \frac{1}{15}n^3 + \frac{437}{1440}n^4 - \frac{46}{105}n^5 + \frac{1118711}{3870720}n^6,$$

$$\alpha'_3 = -\frac{17}{480}n^3 + \frac{37}{840}n^4 + \frac{209}{4480}n^5 - \frac{5569}{90720}n^6,$$

$$\alpha'_4 = -\frac{4397}{161280}n^4 + \frac{11}{504}n^5 + \frac{830251}{7257600}n^6,$$

$$\alpha'_5 = -\frac{4583}{161280}n^5 + \frac{108847}{3991680}n^6,$$

$$\alpha'_6 = -\frac{20648693}{638668800}n^6.$$

B. Coordenadas isométricas oblicuas

B.1. Problema directo

El objeto es obtener las coordenadas isométricas q' , λ' que corresponde a la rotación del sistema de coordenadas en la esfera conforme. Estas variables se calcula como

$$q' = \text{lam } \chi', \quad \lambda' = \arg(X', Y'),$$

donde χ' , X' , Y' surgen de la rotación de las coordenadas cartesianas de la esfera auxiliar. En primer lugar se deben calcular las variables χ y χ_0 en términos de ϕ y ϕ_0 de acuerdo a las fórmulas de cuadro A.1

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{\chi_0} = \begin{bmatrix} \cos \chi_0 & 0 & \text{sen } \chi_0 \\ -\text{sen}(i) \text{sen } \chi_0 & \cos(i) & \text{sen}(i) \cos \chi_0 \\ -\cos(i) \text{sen } \chi_0 & -\text{sen}(i) & \cos(i) \cos \chi_0 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \chi_0 & 0 & \text{sen } \chi_0 \\ -\text{sen}(i) \text{sen } \chi_0 & \cos(i) & \text{sen}(i) \cos \chi_0 \\ -\cos(i) \text{sen } \chi_0 & -\text{sen}(i) & \cos(i) \cos \chi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \chi \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \cos \chi \text{sen}(\lambda - \lambda_0) \\ \text{sen } \chi \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \chi \text{sen } \chi_0 + \cos(\lambda - \lambda_0) \cos \chi \cos \chi_0 \\ \text{sen}(i) \text{sen } \chi \cos \chi_0 + \text{sen}(\lambda - \lambda_0) \cos(i) \cos \chi - \cos(\lambda - \lambda_0) \text{sen}(i) \cos \chi \text{sen } \chi_0 \\ \cos(i) \text{sen } \chi \cos \chi_0 - \text{sen}(\lambda - \lambda_0) \text{sen}(i) \cos \chi - \cos(\lambda - \lambda_0) \cos(i) \cos \chi \text{sen } \chi_0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{sen } \chi' = Z',$$

$$Z' = \cos(i) \text{sen } \chi \cos \chi_0 - \text{sen}(\lambda - \lambda_0) \text{sen}(i) \cos \chi - \cos(\lambda - \lambda_0) \cos(i) \cos \chi \text{sen } \chi_0,$$

$$\tan \lambda' = \frac{Y'}{X'},$$

$$Y' = \text{sen}(i) \text{sen } \chi \cos \chi_0 + \text{sen}(\lambda - \lambda_0) \cos(i) \cos \chi - \cos(\lambda - \lambda_0) \text{sen}(i) \cos \chi \text{sen } \chi_0,$$

$$X' = \text{sen } \chi \text{sen } \chi_0 + \cos(\lambda - \lambda_0) \cos \chi \cos \chi_0.$$

B.2. Derivadas

Las derivadas con respecto a λ se calculan por la regla de la cadena,

$$\cos \chi' \frac{d\chi'}{d\lambda} = \frac{\partial Z'}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial \chi'}{\partial \lambda} = \frac{\partial Z'}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{1 - Z'^2}},$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial \lambda} = \sin(\lambda - \lambda_0) \cos(i) \cos \chi \sin \chi_0 - \cos(\lambda - \lambda_0) \sin(i) \cos \chi,$$

$$\sec^2 \lambda' \frac{d\lambda'}{d\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{Y'}{X'} \right),$$

$$\sec^2 \lambda' \frac{d\lambda'}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{Y'}{X'} \right),$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} = \frac{1}{1 + (Y'/X')^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{Y'}{X'} \right),$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{Y'}{X'} \right) = \frac{\partial}{\partial Y'} \left(\frac{Y'}{X'} \right) \frac{\partial Y'}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial X'} \left(\frac{Y'}{X'} \right) \frac{\partial X'}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial}{\partial Y'} \left(\frac{Y'}{X'} \right) = \frac{1}{X'}, \quad \frac{\partial}{\partial X'} \left(\frac{Y'}{X'} \right) = \frac{-Y'}{X'^2},$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial \lambda} = \sin(\lambda - \lambda_0) \sin(i) \cos \chi \sin \chi_0 + \cos(\lambda - \lambda_0) \cos(i) \cos \chi,$$

$$\frac{\partial X'}{\partial \lambda} = -\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \chi \cos \chi_0.$$

B.3. Problema inverso

El objeto es obtener las coordenadas isométricas q, λ que corresponde a la reversión rotación del sistema de coordenadas en la esfera conforme a partir de q, λ .

$$\chi' = \text{gd } q', \quad q = \text{lam } \chi, \quad \lambda = \arg(X, Y) + \lambda_0,$$

donde χ, X, Y surgen de la rotación de las coordenadas cartesianas de la esfera auxiliar. Tomando la matriz inversa de la fórmula (54),

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \chi_0 & -\sin(i) \sin \chi_0 & -\cos(i) \sin \chi_0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ \sin \chi_0 & \sin(i) \cos \chi_0 & \cos(i) \cos \chi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \chi' \cos \lambda' \\ \cos \chi' \sin \lambda' \\ \sin \chi' \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(i) \sin \chi' \sin \chi_0 - \sin \lambda' \sin(i) \cos \chi' \sin \chi_0 + \cos \lambda' \cos \chi' \cos \chi_0 \\ \sin \lambda' \cos(i) \cos \chi' - \sin(i) \sin \chi' \\ \cos \lambda' \cos \chi' \sin \chi_0 + \cos(i) \sin \chi' \cos \chi_0 + \sin \lambda' \sin(i) \cos \chi' \cos \chi_0 \end{bmatrix}.$$

$$\sin \chi = Z,$$

$$Z = \cos \lambda' \cos \chi' \sin \chi_0 + \cos(i) \sin \chi' \cos \chi_0 + \sin \lambda' \sin(i) \cos \chi' \cos \chi_0,$$

$$\tan(\lambda - \lambda_0) = \frac{Y}{X},$$

$$Y = \sin \lambda' \cos(i) \cos \chi' - \sin(i) \sin \chi',$$

$$X = \cos \lambda' \cos \chi' \cos \chi_0 - \cos(i) \sin \chi' \sin \chi_0 - \sin \lambda' \sin(i) \cos \chi' \sin \chi_0.$$

Nomenclatura

ϕ	latitud geodésica.
λ	longitud geodésica.
λ_0	longitud origen o meridiano central.
χ	latitud conforme.
μ	latitud rectificada o equidistante.
q	latitud isométrica.
a	semieje mayor del elipsoide de revolución.
b	semieje menor del elipsoide de revolución.
f	aplastamiento primero del elipsoide de revolución.
$E_{a,f}$	elipsoide de revolución terrestre con semieje mayor a y aplastamiento f .
n	aplastamiento tercero del elipsoide de revolución.
e	excentricidad primera del elipsoide de revolución.
R_N	radio de curvatura principal en el elipsoide de revolución.
R_M	radio de curvatura meridiano en el elipsoide de revolución.
r	radio de paralelo en el elipsoide de revolución.
s	arco de meridiano; línea geodésica cuando se indique.
p	arco de paralelo.
σ	alteración de escala local; parámetro de línea geodésica.
k_0	factor de escala aplicado en el origen de la proyección conforme.
j	número entero.
i	número imaginario, $i^2 = -1$.
ξ, η	variables de Gauss-Schreiber.

Acrónimos

AG Algoritmos Genéticos 4, 5, 47, 48, 51, 52, 74, 96, 105

BVP Boundary value problem. Problema de valor de contorno 2, 3

CCL Cónica Conforme de Lambert 24, 51

COGO Coordinate Geometry. Geometría de coordenadas 15

ECEF Earth Centered, Earth Fixed. Sistema de coordenadas centrado en Tierra, fijo en Tierra
5, 8, 12

IGN Instituto Geográfico Nacional 22, 74, 100

MEF Método de los Elementos Finitos 2, 3, 14

MMC Método de los Mínimos Cuadrados 2, 3, 5, 33, 41, 51–53, 66, 77, 96, 105

NZMG New Zealand Map Grid 34

SIG Sistemas de Información Geográfica 22

Referencias Bibliográficas

- ADAMS, Oscar S. (1925). *Elliptic functions applied to conformal world maps*, vol. 112. U.S. Coast and Geodetic Survey.
- BERMEJO, M., y J. OTERO (2005). «Minimum conformal mapping distortion according to Chebyshev's principle: a case study over peninsular Spain.» *Journal of Geodesy*, 79, pp. 124–134.
- BOURCHTEIN, Ludmila, y Andrei BOURCHTEIN (2008). «On grid generation for numerical models of geophysical fluid dynamics.» *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218(2), 317–328. The Proceedings of the Twelfth International Congress on Computational and Applied Mathematics. En línea: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042707000854>>. Accedido el 25/3/2024.
- CHEBYSHOV, Pafnuti L. (1856). «Sur la construction des cartes géographiques.» En A. Markoff, y N. Sonin (Eds.) *Oeuvres de P. L. Tchebychef (1899)*, vol. 1, (pp. 233–236, 239–247). l'Academie Imperiale des Sciences de St. Pétersbourg.
- DARBOUX, Gaston (1911). «Sur la construction des cartes géographiques.» *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 35, 23–28.
- DE JONG, Kenneth A. (2002). *Evolutionary Computation - A Unified Approach*. The MIT Press, 1ª edición.
- DELSANTO, Silvia, Michele GRIFFA, y Lia MORRA (2006). *Inverse Problems and Genetic Algorithms*, (pp. 349–366). New York, NY: Springer New York. En línea: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-35851-2_22>. Accedido el 25/3/2024.
- DONLON, Craig J., Matthew MARTIN, John STARK, Jonah ROBERTS-JONES, Emma FIEDLER, y Werenfrid WIMMER (2012). «The Operational Sea Surface Temperature and Sea Ice Analysis (OSTIA) system.» *Remote Sensing of Environment*, 116, 140–158. Advanced Along Track Scanning Radiometer(AATSR) Special Issue. En línea: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0034425711002197>>. Accedido el 15/4/2024.
- EIBEN, A.E, y J.E. SMITH (2015). *Introduction to Evolutionary Computing*. Springer, 2ª edición.
- EISENLOHR, Friedrich (1870). «Ueber Flächenabbildung.» *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72(2), 143–151.
- FRANKICH, Kresho (1982). *Optimization of geographic map projections for Canadian territory*. Ph.D. thesis, Simon Fraser University.
- GAD, Ahmed Fawzy (2023). «Pygad: An intuitive genetic algorithm python library.» *Multimedia Tools and Applications*, (pp. 1–14).
- GAUSS, C. F. (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Commentationes

Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis.

- GOLDBERG, David E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Professional, 1ª edición.
- GONZÁLEZ LÓPEZ, Sergio (1995). «Conformal map projections by least squares adjustment with conditions between parameters.» En *17th International Cartographic Conference, Barcelona, Spain, 3–9 September*, (pp. 776–780).
- GONZÁLEZ LÓPEZ, Sergio (1997). «Map projections optimization using real coded genetic algorithms.» En *XVIII International Cartographic Conference, Stockholm, 23-27 June*. ICA.
- GRAVÉ, Dmitri A. (1896). «De la meilleure représentation d'une contrée donnée.» En *Association Francaise pour l'avancement des sciences, Compte rendu de la 25e session*, vol. 2, (pp. 106–115).
- GUYOU, Émile (1887). «Nouveau système de projection de la sphère: Généralisation de la projection de Mercator.» En *Annales Hydrographiques*, vol. 9 de 2, (pp. 16–35).
- GUZMÁN, F. S., y J. A. GONZÁLEZ (2018). «Use of Genetic Algorithms to solve Inverse Problems in Relativistic Hydrodynamics.» *Journal of Physics: Conference Series*, 1010(1), 012003. En línea: <<https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1010/1/012003>>. Accedido el 26/3/2024.
- HABIB, Maan (2022). «Fit-for-purpose conformal mapping for sustainable land administration in war-ravaged Syria.» *Heliyon*, 8(5), e09384. En línea: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844022006727>>. Accedido el 10/5/2024.
- HOLLAND, John H. (1992). *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology*. The MIT Press.
- KALTSIKIS, C. J. (1989). «Numerical treatment of conformal map projections.» *Cartographic Journal*, 26(1), 22–23.
- KRÜGER, Johann H. L. (1912). «Konforme Abbildung des Erdellipsoides in der Ebene.» Neue Folge n° 52, Königlich Preussischen Geodätischen Institutes, Postdam. En línea: <<http://dx.doi.org/10.2312/GFZ.b103-krueger28>>. Accedido el 25/1/2012.
- LAGRANGE, Joseph L. (1779). «Sur La Construction Des Cartes Géographiques.» En *Ouvres de Lagrange*, vol. 4, (pp. 637–692). Gauthier-Villars.
- LAMBERT, Johann. H. (1772). «Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.» Traducido al inglés por Waldo R. Tobler como *Notes and comments on the composition of terrestrial and celestial maps*, Ann Arbor, Univ. Michigan (1972).
- LEE, Laurence P. (1976). «Conformal projections based on elliptic functions.» *Cartographica*, 13(1, Monograph 16), pp. 1–128.
- MILNOR, John (1969). «A Problem In Cartography.» *American Mathematical Monthly*, 76(10),

1101–1112.

- MURRAY, Ross J. (1996). «Explicit Generation of Orthogonal Grids for Ocean Models.» *Journal of Computational Physics*, 126(2), 251–273. En línea: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999196901369>>. Accedido el 2/6/2024.
- NELSON, John (2020). «Spilhaus ArcGIS Pro Project.» En línea: <<https://nation.maps.arcgis.com/home/item.html?id=9b2ce7c8179b4744af7bf3ddb86b7804>>. Accedido el 25/3/2024.
- NEMO CONSORTIUM (2017). «ORCA family: global ocean with tripolar grid.» En línea: <<https://www.nemo-ocean.eu/doc/node108.html>>. Accedido el 25/2/2023.
- NESTOROV, Ivan G. (1997). «CAMPREL: A New Adaptive Conformal Cartographic Projection.» *Cartography & Geographic Information Systems*, 24(4), 221–227.
- ORIHUELA, Sebastián (2016). «Proyecciones conformes óptimas en polinomios armónicos en términos de coordenadas Gauss-Schreiber.» En *Segundo encuentro de investigadores de Agrimensura, Santa Fe, 2 y 3 de junio*.
- ORIHUELA, Sebastián (2017). «Optimal conformal map projections in harmonic polynomials in terms of Gauss-Schreiber coordinates.» *Survey Review*, 49(354), 227–236. En línea: <<http://dx.doi.org/10.1179/1752270615Y.0000000042>>. Accedido el 20/11/2020.
- ORIHUELA, Sebastián (2022). «Curso de Cartografía. Apuntes de la cátedra Representaciones cartográficas. Ing. en Agrimensura.» En línea: <https://geon6.com/representaciones/apuntes/apuntes_cartografia.pdf>. Accedido el 30/6/2024.
- PEDZICH, Pawel (2005). «Conformal Projection With Minimal Distortions.» En *XXII International Cartographic Conference, La Coruña, 9-16 julio*. ICA.
- RAMÍREZ SOLÍS, Guillermo, Felipe TRUJILLO-ROMERO, y Carlos Hugo GARCÍA CAPULÍN (2023). «Comparativa de frameworks para cómputo evolutivo implementados en Python.» En *Congreso Internacional de Mecatrónica, Control e Inteligencia Artificial. Estado de México*. UNAM, FESC.
- REILLY, William I. (1973). «A conformal mapping projection with minimum scale error (Part 1).» *Survey Review*, 22(168), pp. 57–71.
- SCHREIBER, Oskar (1866). *Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landsvermessung*. Hahn'sche Hofbuchhandlung, Hannover.
- SHEPPARD, Clinton (2019). *Genetic Algorithms with Python*. Clinton Sheppard.
- SNYDER, John P. (1984). «Minimum-error Map Projections bounded by polygons.» *The Cartographic Journal*, 21(2), pp. 112–120.
- SNYDER, John P., y Philip M. VOXLAND (1989). «An album of map projections.» Professional Paper 1453, U. S. Geological Survey.
- SPIILHAUS, Athelstan (1991). *Atlas of the World with Geophysical Boundaries: Showing Oceans*,

Continents and Tectonic Plates in Their Entirety. Memoirs of the American Philosophical Society.

TUTIC, Drazen (2009). «Optimal Conformal Polynomial Projections for Croatia According to the Airy/Jordan Criterion.» *Cartography and Geoinformation*, 8(11), 48–67.

TUTIĆ, Dražen (2009). «Stereografska i druge konformne projekcije za Hrvatsku.» PhD thesis, Geodetski fakultet, Zagreb.

WANG, Q. J. (1999). «Using Genetic Algorithms To Solve Inverse Problems.» 19(4).

WEBER, Heinrich (1867). «Ueber ein Princip der Abbildung der Theile einer krummen Oberfläche auf einer Ebene.» *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 67(3), 229–247.

ŠAVRIČ, Bojan, David BURROWS, y Melita KENNEDY (2020). «The Spilhaus World Ocean Map in a Square.» En línea: <<https://storymaps.arcgis.com/stories/756bcae18d304a1eac140f19f4d5cb3d>>. Accedido el 25/3/2024.

**Maestría en
Tecnologías de la Información Geográfica**

Título de la obra:
**Optimización de sistemas de
coordenadas para modelos espaciales**

Autor: Sebastián Orihuela

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

modelos espaciales
sistemas de coordenadas
optimización
Chebyshov