UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de **Doctor en Matemática** en el campo del **Análisis Armónico**.

Continuidad de operadores en espacios de Lebesgue generalizados

Institución donde se realizó:
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET - UNL)
Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Autora:
Estefanía Dafne Dalmasso
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Directora:
Gladis Guadalupe Pradolini
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Codirectora:
Ana Lucía Bernardis
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Jurados:
Sergio José Favier
IMASL (CONICET - UNSL) - FCFMyN (UNSL)

Eleonor Ofelia Harboure
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Marta Susana Urciuolo
FaMAF (UNC)

SANTA FE - ARGENTINA
2015

Dedicado a mi familia

Agradecimientos

A mi padres, Miriam y Mario, por siempre inculcarme el amor por el estudio y por hacer hasta lo imposible para que, tanto mi hermana como yo, pudiésemos venir a Santa Fe a estudiar y a hacer lo que más nos gusta. Sin ellos, nada hubiera sido posible. Y por supuesto, a mi hermana Brenda, mi gran compañera de la vida.

A Meli, Sofi, Vale y Mili, mis amigas que me vieron partir, pero que siempre me esperan para compartir buenos momentos.

A mis directoras, Gladis y Ana, por ser mis guías, siempre entusiastas y optimistas, siempre deseando lo mejor para mí, brindándome todas las oportunidades para crecer en esta carrera y en la vida. No podría haber deseado mejores directoras, mejores personas, mejores amigas.

A Goro, Pedro y Eleonora, por lograr en muy poco tiempo transmitirme el encanto por esta profesión y por hacer de mí la matemática que soy hoy. Y cómo no mencionar nuevamente a ese par de amigos inseparables, Goro y Gladis, mis "padres matemáticos", que se animaron a iniciarme en este camino de la investigación.

A mis compañeros de las oficinas "naranja" y "verde": a Miguel, primero que a nadie, porque es mi compañerx incansable desde hace 9 años; a los correntinos Will y Quique, y a "la Jose", quienes se convirtieron rápidamente en grandes amigos y siguen siendo Imaleños a pesar de las circunstancias; a Gastón, por haber sido más que un amigo y confidente en los primeros años; a Emi, que no dudó en tenderme una mano desde el día uno en Casablanca; a Mauri por ser, junto con Will, mis hermanitos del p variable; a Conrado, mi compañero de escritorio y cursos; y a Sabri, que compartió conmigo materias, tareas y mates desde el comienzo en la LMA. Y no debo olvidarme de los demás Imaleños, con los que siempre compartimos grandes momentos dentro y fuera del IMAL: Marilina, Marce, Marisa, Edu, Pame, Mary, Bruno, Juampi y Horacio...

A CONICET, por brindarme el financiamento para la realización de esta tesis, y al IMAL, por darme la infraestructura y la calidez humana necesarias para crecer como profesional y como persona. No puedo dejar de agradecer a Marce y Betty que siempre estuvieron ahí para ayudarnos, a Miguel y a mí, con los trámites y demás yerbas.

Estefi.

Índice general

Resumen

En el Análisis Armónico nos encontramos frecuentemente con el problema de la continuidad, en diferentes contextos, de una amplia gama de operadores, que surgen en conexión con el estudio de la regularidad de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Los que aparecen más comúnmente son aquellos de tipo integral singular o fraccionaria y sus conmutadores, los que, a su vez, suelen estar controlados, en cierta forma, por operadores de tipo maximal. Muchas veces, ese control está dado en la norma del espacio donde ellos actúan, como por ejemplo, en la norma de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Por la relación existente entre el operador y su correspondiente maximal, es posible derivar condiciones de continuidad para los primeros una vez conocidas las de los últimos.

Ahora bien, suele ocurrir que los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ no siempre son el marco más favorable para describir el comportamiento de los operadores del Análisis Armónico. Unos sustitutos adecuados resultan ser los espacios de Orlicz que son, en cierta forma, espacios intermedios entre éstos.

En otros ámbitos de aplicación relacionados con el estudio de fluidos electroreológicos y los procesos de restauración de imágenes, surgen los que se conocen como espacios de Lebesgue de exponente variable, denotados por $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, que son otro tipo de generalizaciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$, siendo $p(\cdot)$ una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ a valores en $[1, \infty)$.

Éste será el contexto en el que se estudiarán propiedades de acotación de operadores en esta tesis. Analizaremos la continuidad de operadores integrales singulares y fraccionarios sobre tales espacios. Dichos operadores son de convolución con núcleos que verifican ciertas condiciones de regularidad de tipo Hörmander relacionadas con una función de Young η. Un análisis similar se hará para el caso de los conmutadores de estos operadores con símbolos en BMO. La regularidad mencionada anteriormente determina cuáles son los operadores maximales que los controlan, lo que conduce a analizar el problema de la acotación sobre espacios de Lebesgue generalizados de los operadores maximales asociados a la función η, denotados por $M_{\alpha,\eta}$, con $0 \leq \alpha < n$.

El objetivo principal será, por un lado, obtener caracterizaciones a través de condiciones de tipo Dini para la acotación sobre espacios de Orlicz del operador $M_{\alpha,\eta}$. Como caso particular, veremos que las condiciones obtenidas en esta tesis generalizan a las ya conocidas para M_α dadas en los trabajos [20] y [46]. Por otro lado, se estudiarán acota-

ciones fuertes con pesos para $M_{\alpha,\eta}$ en el contexto de espacios de Lebesgue de exponente variable, lo que dará también resultados aún no conocidos sobre los clásicos L^p, y permitirá generalizar el resultado obtenido para el operador maximal de Hardy-Littlewood en [29] y [23]. En cada caso, se derivarán propiedades similares de continuidad para los operadores que dichas maximales controlan.

En una última instancia, obtendremos desigualdades de tipo Wiener pesadas para los operadores maximales M_η, que nos darán información acerca de la integrabilidad local de éstos, y versiones fraccionarias de los mismos.

Introducción

Resulta de gran interés en el área del Análisis Armónico analizar las propiedades de continuidad de una gran variedad de operadores que surgen del estudio de la regularidad de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Muchas veces estos operadores son controlados por otros de tipo maximal y este control se da, en algunas ocasiones, en la norma de los espacios involucrados en el estudio de dicha continuidad. Una desigualdad típica que describe este comportamiento, por ejemplo, en el caso de los espacios de Lebesgue pesados definidos sobre $\mathbb{R}^n$ está dada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{\mathcal{T}}f(x)|^p w(x)dx, \quad 0 < p < \infty, \tag{1}$$

donde w es una función positiva y localmente integrable, usualmente llamada peso, que pertenece a una clase determinada, $\mathcal{T}$ es uno de los operadores mencionados y $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ es el operador de tipo maximal asociado a $\mathcal{T}$.

Diversos autores han estudiado desigualdades de este tipo para operadores clásicos. Por ejemplo, cuando $w = 1$, la desigualdad (1) fue probada en [21] para el caso en que $\mathcal{T}$ es un operador de Calderón-Zygmund y $\mathcal{M}_{\mathcal{T}} = M$, el operador maximal de Hardy-Littlewood; y en [1] para el caso en que $\mathcal{T}$ es la integral fraccionaria y $\mathcal{M}_{\mathcal{T}} = M_\alpha$, el operador maximal fraccionario, donde $0 < \alpha < n$. Los resultados contenidos en [21] y [1] fueron extendidos en [22] y en [71], respectivamente, para el caso en que el peso w pertenece a la clase A_∞ de Muckenhoupt (ver [42] para la definición de esta clase y [19], [38], [50], [1], [71] para más información respecto de los operadores mencionados).

Una herramienta esencial para la obtención de desigualdades como las de (1) es una estimación puntual que relaciona el operador maximal "sharp" compuesto con $\mathcal{T}$ con la maximal asociada $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$. Concretamente, si $0 < \delta \leq 1$, la desigualdad en cuestión es de la forma

$$M_\delta^\sharp(\mathcal{T}f)(x) \leq C_\delta \mathcal{M}_{\mathcal{T}}f(x), \tag{2}$$

donde C_δ es cierta constante positiva que depende de δ y

$$M^\sharp(g)(x) := \sup_{B \ni x} \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{1}{|B|} \int_B |g(y) - a|\, dy,$$

siendo además $M_\delta^\sharp g := M^\sharp(|g|^\delta)^{1/\delta}$. Cabe señalar que el supremo anterior se toma sobre todas las bolas B contenidas en $\mathbb{R}^n$.

Para el caso en que $\mathcal{T}$ es el conmutador de primer orden de la integral singular o de la integral fraccionaria, las desigualdades (1) y (2) fueron obtenidas en [78] y en [24], respectivamente, cuando w es un peso en la clase A_∞. Para conmutadores de mayor orden de estos mismos operadores, desigualdades similares a (1) y (2) fueron obtenidas en [80] para el conmutador de la integral singular, y en [10] para el conmutador de la integral fraccionaria. Las correspondientes maximales $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ resultan ser iteraciones del operador maximal de Hardy-Littlewood para el primer caso y composiciones de estas iteraciones con maximales fraccionarias, en el segundo. El número de iteraciones en la composición depende directamente del orden del conmutador. Más precisamente, la maximal $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ relacionada con el conmutador de orden $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de la integral singular a través de las desigualdades citadas está dada por $M^{k+1} = M \circ \cdots \circ M$, compuesta $k+1$ veces. En [79] se probó que M^{k+1} es puntualmente equivalente al operador $M_{L(\log L)^k}$ definido, para una función f localmente integrable, por

$$M_{L(\log L)^k} f(x) = \sup_{B \ni x} ||f||_{L(\log L)^k, B}$$

donde

$$||f||_{L(\log L)^k, B} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|} \int_B \frac{|f(x)|}{\lambda} \log \left(e + \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^k dx \leq 1 \right\}. \tag{3}$$

Esta equivalencia se da en el sentido de que existen dos contantes positivas C_1 y C_2 tales que la desigualdad

$$C_1 M_{L(\log L)^k} f(x) \leq M^{k+1} f(x) \leq C_2 M_{L(\log L)^k} f(x)$$

vale.

La expresión en (3) define un promedio de tipo Luxemburg que está asociado a la función $\eta(t) = t \log(e+t)^k$. Cuando $k = 0$ es el promedio usual dado por $\frac{1}{|B|} \int_B |f|$ y la maximal correspondiente es la de Hardy-Littlewood, M.

En cuanto al operador maximal que controla al conmutador de orden k de la integral fraccionaria I_α, dado por $M_\alpha(M^k)$, en [37] se prueba que es puntualmente equivalente al operador maximal definido por

$$M_{\alpha, L(\log L)^k} f(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{\alpha/n} ||f||_{L(\log L)^k, B}.$$

En particular, si $k = 0$, $M_{\alpha, L} \equiv M_\alpha$ y si $\alpha = 0$, $M_{0, L(\log L)^k} \equiv M_{L(\log L)^k}$. Además, en [11] se prueban otras equivalencias entre composiciones de maximales y maximales asociadas a funciones de Young.

Continuando con los operadores de tipo integral singular, en [67] se consideran aquellos que son la convolución con núcleos cuya regularidad viene dada a través de condiciones de tipo Hörmander que involucran promedios sobre coronas como los descritos en (3) pero asociados a una función de Young η cualquiera. Se demuestra que la función maximal que controla a este tipo de operadores en el sentido de las desigualdades (1) y (2) está dada por

$$M_{\tilde{\eta}}f(x) = \sup_{B \ni x} ||f||_{\tilde{\eta},B},$$

donde $\tilde{\eta}$ denota la función de Young complementaria de η (ver Definición 1.1.15) y

$$||f||_{\tilde{\eta},B} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B|}\int_B \tilde{\eta}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}.$$

Un resultado similar al anterior se obtiene en [66] para los conmutadores de los operadores mencionados pero la condición de tipo Hörmander depende no sólo de la función de Young que da la regularidad sino también del orden del conmutador. Las versiones fraccionarias de operadores asociados a este tipo de núcleos y sus conmutadores fueron estudiadas en [12]. Allí se muestra que, si la regularidad de tipo Hörmander del núcleo está dada en términos de una función de Young η, la maximal correspondiente es $M_{\alpha,\tilde{\eta}}$ donde

$$M_{\alpha,\tilde{\eta}}f(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{\alpha/n}||f||_{\tilde{\eta},B}. \tag{4}$$

Por lo expuesto hasta aquí, está claro que a partir de las propiedades de continuidad de los operadores maximales $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ se pueden deducir propiedades de continuidad para el correspondiente operador $\mathcal{T}$ y de allí la importancia de determinar las propiedades de acotación de los primeros.

En esta tesis se abordará particularmente el estudio del comportamiento de los operadores maximales asociados a funciones de Young, actuando en diversos espacios funcionales en los que sus propiedades de acotación no han sido demasiado exploradas, para deducir, luego, las correspondientes propiedades de los operadores que éstos controlan. En una primera instancia se analizará el problema mencionado en el contexto de espacios de Orlicz sobre subconjuntos del espacio euclídeo. Es bien conocido que muchos de los operadores clásicos del Análisis Armónico a los que nos hemos referido no poseen propiedades de continuidad cuando actúan sobre ciertos espacios de Lebesgue L^p. Por ejemplo, se sabe que M no es acotada en L^1, siendo los espacios de Orlicz sustitutos más adecuados en tal sentido. Una muestra de ello es un resultado de Stein ([88]) que establece que la integrabilidad local del operador maximal de Hardy-Littlewood M de una función localmente integrable f es equivalente a la pertenencia de la función a la clase $L\log^+ L$, el espacio de funciones definido a través de la integrabilidad de $|f|\log^+|f|$. Este espacio puede verse como el espacio de Orlicz asociado a la función $\phi(t) = t\log^+ t$. Parece natural entonces preguntarse acerca de los operadores maximales M^k, $k \in \mathbb{N}$, ya que, como se sabe, son más grandes que M por el teorema de diferenciación de Lebesgue, por lo que no resultan continuos en L^1. Esto conduce además, al estudio de versiones más generales de estas iteraciones, que ya hemos definido antes.

Hay algunos antecedentes en cuanto al problema mencionado en el ámbito de los espacios de Orlicz. Por ejemplo, en [14], [41], [53] y [91] se obtienen resultados de acotación en espacios de Orlicz para el operador maximal de Hardy-Littlewood M. Resultados relacionados para el operador maximal fraccionario M_α en este contexto se dan en [20] y [46], incluyendo, en ambos, resultados para el caso $\alpha = 0$. Por otra parte, las propiedades de continuidad de maximales asociadas a una función de Young fueron estudiadas en [54], [76] y [79] en el contexto euclídeo y en [52] en el marco más general de espacios de tipo homogéneo.

En lo que respecta al contenido de esta tesis, en el Capítulo 3, se estudia el comportamiento del operador maximal fraccionario $M_{\alpha,\eta}$, $0 < \alpha < n$, definido en (4), obteniéndose caracterizaciones vía desigualdades de tipo Dini de la acotación de este operador de $L^{\mathcal{A}}(\Omega)$ en $L^{\mathcal{B}}(\Omega)$, donde Ω es $\mathbb{R}^n$ o un subconjunto abierto y de medida finita de $\mathbb{R}^n$. Estas condiciones de tipo Dini relacionan las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de los espacios con la función de Young η interviniente en la definición del operador maximal considerado. Cuando $\eta(t) = t$, $\mathcal{A}(t) = t^p$ y $\mathcal{B}(t) = t^q$ con $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, el resultado obtenido contiene la clásica acotación $L^p - L^q$ del operador maximal fraccionario M_α. Dicho resultado generaliza, además, los correspondientes dados en [20] y [46] cuando $\eta(t) = t$. La generalización permite, posteriormente, derivar propiedades de acotación de una amplia gama de operadores, aquellos controlados por estas funciones maximales. Cabe señalar que las condiciones obtenidas en [20] son menos manipulables que las de tipo Dini antes mencionadas.

Siguiendo en esta línea, se obtuvieron caracterizaciones por medio de condiciones de tipo Dini de la acotación entre espacios de Orlicz del conmutador de orden k de la integral fraccionaria con símbolo en BMO. Para ello, fue esencial no sólo el resultado anterior correspondiente al operador maximal, sino también una desigualdad del tipo (2) entre este conmutador y $\mathcal{M}_{\mathcal{T}} = M_{\alpha,L(\log L)^k}$. Para obtener la caracterización mencionada fue necesaria también una estimación inferior de la medida de los conjuntos de nivel de los conmutadores mencionados.

Un argumento similar condujo a condiciones de tipo Dini suficientes para la acotación sobre espacios de Orlicz de operadores singulares y fraccionarios más generales como los mencionados anteriormente.

Continuando con la misma filosofía, el Capítulo 4 está dedicado al análisis de la continuidad de los operadores definidos anteriormente sobre espacios de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$. Estos espacios resultan de gran interés por ser el ámbito adecuado para describir el comportamiento de cierta clase de fluidos, denominados fluidos electroreológicos, que tienen la capacidad de modificar significativamente sus propiedades mecánicas cuando se les aplica un campo eléctrico (ver, por ejemplo, [81] y [87]). Son, además, de particular importancia para distintos problemas relacionados con ecuaciones en derivadas parciales y el cálculo de variaciones (ver [2], [40], [45], [49] y [69]), para los procesos de restauración de imágenes (ver [18], [48] y [65]) y para el estudio de otros fenómenos físicos (ver [4], [5] y [16]).

Muchos de los operadores previamente mencionados ya han sido estudiados sobre $L^{p(\cdot)}$, pudiendo citar, por ejemplo, [23], [25], [28], [32], [33], [62], [63], [61], [74], [73] y [75] para el caso de la función maximal de Hardy-Littlewood. En particular, en [23] los autores obtienen la clase de pesos que caracteriza la acotación de M en espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos. Por otra parte, en [15], [43], [44] y [55] se dan resultados de acotación para la función maximal fraccionaria, en [35] y [64] para el caso de operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores, y en [2], [24], [45] y [55] para operadores de tipo potencial (ver también [27] para el caso de otros operadores clásicos).

El trabajo de tesis en este contexto es, en una primera etapa, caracterizar los pesos involucrados en la acotación de los operadores maximales definidos a través de una función de Young η de tipo $L^\beta(\log L)^\delta$ con $\beta \geq 1$ y $\delta \geq 0$, los que resultan ser una variante de los pesos introducidos en [23]. Cuando η es una función de Young más general que satisface cierta condición de tipo Dini, se dan condiciones suficientes sobre los pesos para la acotación del operador maximal asociado sobre $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, w)$. Bajo condiciones adicionales en la función η, se prueba que las condiciones en los pesos resultan, además, necesarias. Se obtuvieron también versiones fraccionarias de estos resultados. Tal y como se ha propuesto, de estos resultados se derivan propiedades de continuidad, sobre espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos, para operadores integrales singulares y fraccionarios controlados por estas maximales.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, el operador maximal no está acotado sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$, pero se sabe que si se aplica sobre funciones f del espacio de Orlicz $L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, con $\mathcal{A}(t) = t\log(e+t)$, entonces $Mf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Concretamente, si B es una bola en $\mathbb{R}^n$, la desigualdad obtenida, denominada desigualdad de Wiener (ver [90]), es la siguiente

$$\int_B Mf(x)dx \leq 2|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\log(e+|f(x)|)dx.$$

En el contexto de espacios de Lebesgue de exponente variable, los autores en [25] dieron una generalización de la misma. Más precisamente, demostraron que dada cualquier bola B y cualquier número $\epsilon > 0$, vale la desigualdad

$$\int_B Mf(x)dx \leq 2|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\log(e+|f(x)|)^{q(x)}dx \tag{5}$$

para toda función acotada $p : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$, donde $q(x) = \max\{\epsilon^{-1}(\epsilon + 1 - p(x)), 0\}$. Claramente, cuando $p = 1$ entonces $q = 1$ y (5) es la desigualdad de Wiener. Se prueba también que, requiriendo hipótesis adicionales sobre la función p, conocida como condición de tipo log-Hölder, la integrabilidad local se puede mejorar extendiendo el conocido resultado de acotación $M : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

El interés en estudiar este tipo de desigualdades para el operador M_η se debe a que el mismo es puntualmente mayor o igual que M y, por lo tanto, tampoco está acotado en $L^1(\mathbb{R}^n)$, de allí la importancia de analizar su integrabilidad local. En esta dirección, se obtienen desigualdades de tipo Wiener que generalizan a las dadas en [25], incluyendo el caso con pesos. El espacio de salida está también relacionado con la función de Young η. Vía desigualdades de tipo Hedberg entre M_η y su versión fraccionaria, se deducen resultados de las mismas características para el operador $M_{\alpha,\eta}$.

Cabe señalar que parte de los resultados originales de esta tesis se encuentran resumidos y publicados en [9].

Capítulo 1

Funciones maximales y operadores relacionados

En este primer capítulo introduciremos los operadores maximales que nos interesan y los resultados de acotación que se sabe que éstos verifican en distintos espacios funcionales. Además, definiremos una clase de operadores integrales que son controlados, en cierto sentido, por estas funciones maximales, para los cuales también se conocen algunos resultados de continuidad. Inicialmente, describiremos las propiedades de las funciones de Young que determinan los operadores maximales estudiados, y daremos especial atención a una clase particular de funciones de Young, la clase B_p, la cual será de gran utilidad para la obtención de los resultados de acotación deseados.

1.1. Funciones de Young

Definición 1.1.1. Sea $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ una función. Decimos que η es una función de Young si $\eta(0) = 0$, $\eta(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \eta(t) = +\infty$, η es estrictamente creciente y convexa, es decir,

$$\eta(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda\eta(s) + (1 - \lambda)\eta(t), \quad \forall\, \lambda \in (0, 1), \forall\, s, t \in [0, +\infty).$$

Observación 1.1.2. Es inmediato de la convexidad que toda función de Young es continua.

Ejemplos de funciones de Young son las funciones de tipo potencia $\eta(t) = t^p$ con $p \geq 1$, las funciones de tipo $L \log L$, $\eta(t) = t^p(1 + \log^+ t)^q$ con $p \geq 1$ y $q \geq 0$ y también las funciones exponenciales $\eta(t) = e^{t^p} - e$ con $p > 0$. Consideraremos que las funciones η estrictamente crecientes y convexas tales que $\eta(0) = 0$ y $\eta(t) = +\infty$ para todo $t \geq t_0$, y cierto $t_0 \in [0, \infty)$, son también de Young.

El siguiente resultado dado en [84] provee de una representación integral para funciones de Young.

Lema 1.1.3 ([84]). *Toda función de Young η admite la siguiente representación integral*

$$\eta(t) = \int_0^t h(s)ds, \quad t \geq 0,$$

donde $h(0) = 0$, $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ es continua por izquierda, positiva en $(0, +\infty)$ y no-decreciente, y si $h(t) = +\infty$ para $t \geq u$, entonces $\eta(t) = +\infty$ para $t \geq u$. Recíprocamente, si se tiene una función h con estas propiedades, la función η definida a través de la integral de arriba resulta ser de Young.

Observación 1.1.4. El lema anterior también es cierto si h es continua por derecha, aunque no necesariamente $h(0) = 0$. En realidad, si η tiene esa representación integral, η tiene derivadas a izquierda y a derecha en toda la semirrecta $(0, +\infty)$ y son iguales excepto, quizás, en un conjunto a lo sumo numerable de puntos (ver [84]). Así, la función h del lema es la derivada a izquierda de η.

En lo sucesivo, denotaremos con $\eta' = h$ y diremos que la función η' es la *derivada* de η. Es consecuencia inmediata de la representación integral que la función η y su derivada η' se relacionan mediante la desigualdad que da el siguiente lema.

Corolario 1.1.5. *Para toda función de Young η se tiene que $\eta(t)/t$ es no-decreciente y valen las siguientes desigualdades*

$$\frac{1}{2}\eta'\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{\eta(t)}{t} \leq \eta'(t), \quad \forall\, t > 0. \tag{1.1.6}$$

Demostración. En virtud del Lema 1.1.3, sabemos que η' es no-decreciente. Luego, si $0 < s \leq t$, por medio de un cambio de variables obtenemos que

$$\frac{\eta(s)}{s} = \frac{1}{s}\int_0^s \eta'(u)du = \frac{1}{t}\int_0^t \eta'\left(\frac{s}{t}v\right)dv \leq \frac{1}{t}\int_0^t \eta'(v)\,dv = \frac{\eta(t)}{t},$$

de donde se tiene que $\eta(t)/t$ es no-decreciente.

Por otra parte, ambas desigualdades en (1.1.6) son también consecuencia de la monotonía de η'. La desigualdad de la derecha es inmediata, y la de la izquierda se sigue de la siguiente estimación

$$\frac{\eta(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \eta'(s)ds \geq \frac{1}{t}\int_{t/2}^t \eta'(s)ds \geq \frac{\eta'(t/2)}{2}. \qquad \square$$

Ahora definiremos la función complementaria de una función de Young. Para ello, introduciremos la noción de función inversa cuando se tiene una función creciente no necesariamente invertible.

Definición 1.1.7. Dada $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ una función creciente, se define su *inversa generalizada* por

$$\Phi^{-1}(t) = \text{ínf}\{s > 0 : \Phi(s) > t\}, \tag{1.1.8}$$

donde $\text{ínf}\,\emptyset = +\infty$.

Observación 1.1.9. Si Φ está acotada, digamos, $\Phi(s) \leq C$ para todo s, claramente $\Phi^{-1}(t) = +\infty$ para todo $t \geq C$. Y, si $\Phi(s) = +\infty$ para todo $s \geq s_0$, entonces $\Phi^{-1}(t) = +\infty$ para todo $t \geq s_0$.

Observación 1.1.10. Es fácil ver que, a partir de la definición de inversa generalizada, la función original Φ se puede reescribir, para $0 \leq t < +\infty$, como

$$\Phi(t) = \sup\{s > 0 : \Phi^{-1}(s) < t\}, \tag{1.1.11}$$

donde $\sup \emptyset = +\infty$ (ver [77]).

Lema 1.1.12. *Sea* $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ *una función creciente y continua por izquierda. Entonces*

(i) Φ^{-1} *es creciente y continua por derecha;*

(ii) valen las desigualdades

$$\Phi(\Phi^{-1}(t)) \leq t \leq \Phi^{-1}(\Phi(t)),\ 0 \leq t \leq +\infty; \tag{1.1.13}$$

(iii) si Φ *es estrictamente creciente,* $(\Phi^{-1})^{-1}(t) = \Phi(t)$*, esto es, las desigualdades en* (1.1.13) *son igualdades.*

Demostración. Si consideramos $0 \leq s \leq t \leq +\infty$,

$$\{u > 0 : \Phi(u) > t\} \subset \{u > 0 : \Phi(u) > s\}$$

y tomando el ínfimo de tales conjuntos, resulta que $\Phi^{-1}(s) \leq \Phi^{-1}(t)$, es decir, Φ^{-1} es creciente.

Para probar la continuidad por derecha, tomemos una sucesión $0 \leq s_n \searrow s$, esto es, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ y $s \leq s_{n+1} \leq s_n$ para cada n. Es claro, entonces, que

$$\Phi^{-1}(s_n) \geq \Phi^{-1}(s_{n+1}) \geq \Phi^{-1}(s).$$

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $u > 0$ con $\Phi(u) > s$ tal que $\Phi^{-1}(s) + \epsilon > u$. Como $s_n \geq s_{n+1} \geq s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi(u) > s_n$ para todo $n \geq m$. Entonces, para todo $n \geq m$, $u \in \{t > 0 : \Phi(t) > s_n\}$, esto es, $\Phi^{-1}(s_n) \leq u < \Phi^{-1}(s) + \epsilon$ para todo $n \geq m$. En consecuencia, $\Phi^{-1}(s_n) \searrow \Phi^{-1}(s)$.

Probemos ahora las desigualdades en (1.1.13). Supongamos primero $t < +\infty$. Por un lado, de la definición de Φ^{-1} tenemos que $\Phi^{-1}(\Phi(t)) = \inf\{s > 0 : \Phi(s) > \Phi(t)\}$, por lo que, si fuera $s \leq t$, tendríamos que $\Phi(s) \leq \Phi(t)$ por el crecimiento de Φ y no podría estar s en el conjunto. Luego, debe ser $s > t$ y, así, $\Phi^{-1}(\Phi(t)) \geq t$. Para probar la otra desigualdad, usamos el mismo argumento, esta vez teniendo en cuenta la forma (1.1.11) y el crecimiento de Φ^{-1}. En el caso en que $t = +\infty$, puede ocurrir que $\Phi(t) = M < +\infty$ o $\Phi(t) = +\infty$. En cualquier caso, de la Observación 1.1.9 resulta que $\Phi^{-1}(\Phi(t)) = +\infty = t$. Y si ahora $\Phi^{-1}(t) = M < +\infty$ o $\Phi^{-1}(t) = +\infty$, de (1.1.11) se deduce que $\Phi(\Phi^{-1}(t)) = +\infty = t$.

Probemos ahora *(iii)*. Ya vimos antes que, en caso de ser $t = +\infty$, se dan las igualdades en (1.1.13). Supongamos entonces $t < +\infty$ y que, por el contrario, $\Phi^{-1}(\Phi(t)) > t$. Entonces, como Φ es estrictamente creciente,

$$\Phi(t) < \Phi(\Phi^{-1}(\Phi(t))) \leq \Phi(t)$$

por (1.1.13), lo cual es absurdo. Luego, $\Phi^{-1}(\Phi(t)) = t$. Similarmente, se puede probar la otra igualdad, teniendo en cuenta que Φ^{-1} también es estrictamente creciente. Por lo tanto, $(\Phi^{-1})^{-1}(t) = \Phi(t)$. □

En virtud del lema anterior, las inversas de funciones de Young coinciden con las inversas usuales. A continuación, se dan algunas propiedades sobre las inversas de funciones de Young que utilizaremos en este trabajo.

Lema 1.1.14. *Sea η una función de Young y sea η^{-1} su inversa. Entonces $\eta^{-1}(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \eta^{-1}(t) = +\infty$, η^{-1} es estrictamente creciente y cóncava, esto es,*

$$\eta^{-1}(\lambda s + (1-\lambda)t) \geq \lambda\eta^{-1}(s) + (1-\lambda)\eta^{-1}(t), \quad \forall\, \lambda \in (0,1), \forall\, s,t \in [0,+\infty).$$

Demostración. Fácilmente, $\eta^{-1}(0) = \eta^{-1}(\eta(0)) = 0$. Por el Lema 1.1.12 sabemos que η^{-1} es creciente, pero queremos ver que la monotonía es estricta. Para ello, supongamos, por el contrario, que existen $0 < s < t$ tales que $\eta^{-1}(s) \geq \eta^{-1}(t)$. De la monotonía de η, $s = \eta(\eta^{-1}(s)) \geq \eta(\eta^{-1}(t)) = t$, lo cual contradice $s < t$. Luego, η^{-1} es estrictamente creciente.

Probemos la concavidad de η^{-1}. Sean $s, t > 0$ y $\lambda \in (0,1)$. Como η es convexa tenemos que

$$\eta(\lambda\eta^{-1}(s) + (1-\lambda)\eta^{-1}(t)) \leq \lambda s + (1-\lambda)t,$$

y aplicando η^{-1} en ambos lados de la desigualdad, en virtud de su crecimiento, se sigue que

$$\lambda\eta^{-1}(s) + (1-\lambda)\eta^{-1}(t) \leq \eta^{-1}(\lambda s + (1-\lambda)t),$$

lo que significa que η^{-1} es cóncava.

Finalmente, sea $M > 0$ y tomemos $t_0 = \eta(M) + 1$. Entonces, si $t \geq t_0$, vale que $\eta^{-1}(t) \geq \eta^{-1}(\eta(M)+1) > \eta^{-1}(\eta(M)) = M$, esto es, $\eta^{-1}(t) \to +\infty$ cuando $t \to \infty$. □

Definiremos a continuación lo que se conoce como función de Young complementaria.

Definición 1.1.15. Sea η una función de Young. Se define la función complementaria de η, que denotaremos por $\widetilde{\eta}$, como

$$\widetilde{\eta}(t) = \int_0^t (\eta')^{-1}(s)\, ds, \ t \geq 0.$$

donde $(\eta')^{-1}$ denota la *inversa generalizada* de η'.

Las funciones complementarias satisfacen las siguientes propiedades.

Lema 1.1.16. *Sea η una función de Young y $\widetilde{\eta}$ su función complementaria con η' estrictamente creciente. Entonces,*

(i) $\widetilde{\eta}$ *es una función de Young;*

(ii) $\widetilde{\widetilde{\eta}} = \eta$, *es decir, la operación $\sim$ es idempotente.*

Demostración. Para ver que $\widetilde{\eta}$ es de Young, utilizaremos el Lema 1.1.3, es decir, veremos que la función $(\eta')^{-1}$ satisface las propiedades requeridas en dicho lema. En realidad, consideraremos la Observación 1.1.4 dado que, como η' es creciente y continua por izquierda, por el Lema 1.1.12*(i)*, $(\eta')^{-1}$ es creciente y continua por derecha. Luego, si $(\eta')^{-1}(0) \neq 0$, no es relevante ya que no obtendremos una función continua por izquierda. Sin embargo, debemos probar que $(\eta')^{-1}$ es una función positiva en $(0, +\infty)$ pues esto dice que $\widetilde{\eta}$ es convexa. Para ello, notar que si fuera $(\eta')^{-1}(t) = 0$ para algún $t > 0$, entonces $t = \eta'((\eta')^{-1}(t)) = 0$ por el Lema 1.1.12*(iii)* y la monotonía estricta de η'. Luego, debe ser $(\eta')^{-1}$ positiva en $(0, +\infty)$. Podemos afirmar, entonces, que $\widetilde{\eta}$ es una función de Young.

Veamos ahora que $\sim$ es idempotente. Según la Definición 1.1.15, bastará ver que las funciones η' y $(\widetilde{\eta}')^{-1}$ son iguales en casi todo punto. De la fórmula para $\widetilde{\eta}$ y por las propiedades de η' probadas antes, la derivada de $\widetilde{\eta}$ es la función $(\eta')^{-1}$. Luego, $(\widetilde{\eta}')^{-1}(t) = ((\eta')^{-1})^{-1}(t)$ excepto, quizás, en un conjunto a lo sumo numerable de puntos. Pero, por el Lema 1.1.12*(iii)*, como η' es estrictamente creciente, $((\eta')^{-1})^{-1}(t) = \eta'$, y obtenemos así que $\widetilde{\widetilde{\eta}} = \eta$. □

Una propiedad muy importante que verifican las funciones η y $\widetilde{\eta}$ es la denominada *desigualdad de Young.*

Lema 1.1.17 ([84])**.** *Sea η una función de Young y supongamos que $\widetilde{\eta}$, su función complementaria, también es de Young. Entonces ambas satisfacen la* desigualdad de Young

$$st \leq \eta(s) + \widetilde{\eta}(t), \quad \forall s, t \geq 0 \tag{1.1.18}$$

con igualdad cuando $t = \eta'(s)$ o $s = (\eta')^{-1}(t)$.

Observación 1.1.19. Si $\eta(t) = t^p/p$ con $1 < p < \infty$, se puede ver que $\widetilde{\eta}(t) = t^{p'}/p'$ con $1/p + 1/p' = 1$ y se recupera la desigualdad de Young clásica

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^{p'}}{p'}, \quad \forall s, t \geq 0. \tag{1.1.20}$$

Cabe señalar que otros autores definen la función complementaria en la forma

$$\widetilde{\eta}(t) = \sup\{ts - \eta(s) : s \geq 0\}, \quad t \geq 0. \tag{1.1.21}$$

Se puede ver que, en realidad, ambas definiciones son equivalentes (ver, por ejemplo, [58]). Dependiendo del caso, trabajaremos con una u otra definición.

Por otra parte, es fácil ver que η y $\widetilde{\eta}$ satisfacen la siguiente relación.

Lema 1.1.22. *Sea η una función de Young. Si η' es estrictamente creciente, valen las siguientes desigualdades*

$$t \leq \eta^{-1}(t)\widetilde{\eta}^{-1}(t) \leq 2t, \, \forall \, t > 0. \tag{1.1.23}$$

Demostración. Observemos que, como η' es estrictamente creciente, tanto η como $\widetilde{\eta}$ son funciones de Young (por Lema 1.1.16), de donde se sigue que sus inversas son finitas y las desigualdades que queremos probar tienen sentido.

Evaluando la desigualdad de Young (1.1.18) con $\eta^{-1}(t)$ y $\widetilde{\eta}^{-1}(t)$, obtenemos inmediatamente la desigualdad de la derecha de (1.1.23). Para probar la desigualdad de la izquierda, es suficiente aplicar la siguiente relación (ver [13])

$$\frac{\widetilde{\eta}(s)}{s} \leq \eta^{-1}(\widetilde{\eta}(s)), \quad s > 0, \tag{1.1.24}$$

con $s = \widetilde{\eta}^{-1}(t)$ para obtener

$$\frac{t}{\widetilde{\eta}^{-1}(t)} = \frac{\widetilde{\eta}(s)}{s} \leq \eta^{-1}(\widetilde{\eta}(s)) = \eta^{-1}(t).$$

Resta mostrar, entonces, la validez de (1.1.24). Para ello, notemos que

$$0 \leq \widetilde{\eta}(s) = \sup\{st - \eta(t) : t \geq 0\},$$

por lo que podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que el supremo se toma sobre todos los valores de $t \geq 0$ tales que $st - \eta(t) \geq 0$. Fijemos, pues, un valor de $t > 0$ de ese tipo y tomemos $u = t - \eta(t)/s \leq \widetilde{\eta}(s)/s$. Como $0 \leq u \leq t$ y $\eta(t)/t$ es no-decreciente (ver Corolario 1.1.5),

$$\frac{\eta(u)}{u} \leq \frac{\eta(t)}{t} \leq s.$$

Luego,

$$\eta(u) \leq su = st - \eta(t) \leq \widetilde{\eta}(s).$$

Gracias a la continuidad de η, tomando el supremo sobre todos los valores de t se obtiene que

$$\eta\left(\frac{\widetilde{\eta}(s)}{s}\right) \leq \widetilde{\eta}(s)$$

y vale (1.1.24) de la monotonía de η^{-1}. □

Además de la desigualdad de Young que expusimos más arriba, es posible tener una desigualdad similar, que generaliza a aquella, para una terna de funciones de Young cuyas inversas verifiquen cierta relación. Esta generalización que mencionamos fue dada en [77] y será de gran utilidad a la hora de tener una desigualdad de Hölder en espacios de Orlicz (ver §2.1).

Lema 1.1.25 ([77]). *Si η_1, η_2 y φ son funciones de Young que verifican*

$$\eta_1^{-1}(t)\eta_2^{-1}(t) \leq \varphi^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0,$$

entonces

$$\varphi(st) \leq \eta_1(s) + \eta_2(t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

Observación 1.1.26. Claramente, si $\varphi(t) = t$, la función $\eta_2 = \widetilde{\eta_1}$ satisface la desigualdad $\eta_1^{-1}(t)\eta_2^{-1}(t) \leq \varphi^{-1}(t)$, $\forall t \geq 0$ en virtud de (1.1.23) siempre que η_1' sea estrictamente creciente. Así, el lema anterior tiene como caso particular a la desigualdad de Young dada en el Lema 1.1.17 si se tiene dicha propiedad en la derivada de η_1.

En muchos casos, supondremos que las funciones de Young con las que trataremos satisfacen la siguiente condición.

Definición 1.1.27. Diremos que una función de Young η es *submultiplicativa* si para todo par de números $s, t > 0$, se verifica que $\eta(st) \leq \eta(s)\eta(t)$.

Para funciones de Young submultiplicativas se tienen las siguientes propiedades que usaremos a lo largo de la tesis. Antes de enunciarlas, necesitaremos considerar la siguiente notación: dadas dos funciones $\eta, \varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, no necesariamente de Young, denotaremos por $\eta \approx \varphi$, y diremos que η *es equivalente a* φ, si para todo $t \geq 0$ existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1\eta(t) \leq \varphi(t) \leq C_2\eta(t)$. Si sólo vale la desigualdad de la derecha, escribimos $\varphi \lesssim \eta$ y, si sólo vale la de la izquierda, $\varphi \gtrsim \eta$.

Lema 1.1.28. *Si η es una función de Young submultiplicativa, entonces*

(i) $\eta'(t) \approx \eta(t)/t$;

(ii) η^{-1} *es una función de Young supermultiplicativa, esto es,* $\eta^{-1}(st) \geq \eta^{-1}(s)\eta^{-1}(t)$ *para todo par* $s, t > 0$.

Demostración. Notemos que la propiedad *(i)* se sigue del Corolario 1.1.5. En efecto, $\eta(t)/t \leq \eta'(t)$ y usando la submultiplicatividad de η,

$$\eta'(t) \leq \frac{\eta(2t)}{t} \leq \eta(2)\frac{\eta(t)}{t}.$$

Para ver que η^{-1} es supermultiplicativa, consideremos $s, t > 0$. Si aplicamos la propiedad de submultiplicatividad de η a $u = \eta^{-1}(s)$ y $v = \eta^{-1}(t)$, que claramente son no nulos por la monotonía de la función η, obtenemos que

$$\eta(\eta^{-1}(s)\eta^{-1}(t)) = \eta(uv) \leq \eta(u)\eta(v) = \eta(\eta^{-1}(s))\eta(\eta^{-1}(t)) = st. \tag{1.1.29}$$

Finalmente, se deduce que $\eta^{-1}(s)\eta^{-1}(t) \leq \eta^{-1}(st)$ aplicando η^{-1} a ambos lados de la desigualdad de arriba. □

Un ejemplo clásico de funciones de Young submultiplicativas, además de las funciones de tipo potencia, son las funciones de tipo $L\log L$, es decir, funciones de la forma $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\delta$, con $\beta \geq 1$ y $\delta \geq 0$, donde

$$\log^+ t = \chi_{[0,1]}(t) + \log(t)\chi_{(1,+\infty)}(t).$$

Por la forma que tienen estas funciones, es fácil obtener expresiones explícitas equivalentes a sus funciones inversas y complementarias, como se verá en el lema siguiente.

Lema 1.1.30. *Sean $\beta > 0$, $\delta \geq 0$ y $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\delta$. Entonces,*

(i) $\eta^{-1}(t) \approx t^{1/\beta}(1+\log^+ t)^{-\delta/\beta}$;

(ii) si $\beta > 1$, $\widetilde{\eta}(t) \approx t^{\beta'}(1+\log^+ t)^{-\delta/(\beta-1)}$, donde $\beta' = \beta/(\beta-1)$. Si $\beta = 1$ y $\delta > 0$, se tiene la equivalencia

$$t \approx \eta^{-1}(t)\Phi^{-1}(t), \tag{1.1.31}$$

siendo $\Phi(t) = e^{t^{1/\delta}} - e$.

Observación 1.1.32. Notar que si $\beta = 1$ y $\delta > 0$, η' no resulta estrictamente creciente en todo su dominio; sin embargo, (1.1.31) es válida puesto que la función $t(1+\log^+ t)^\delta$ es puntualmente equivalente a $t\log(e+t)^\delta$ y ésta sí tiene derivada estrictamente creciente. Es por ello que diremos que $\widetilde{\eta} = \Phi$ para este caso particular.

Demostración. Para demostrar *(i)* basta ver que, si $\varphi(t) = t^{1/\beta}(1+\log^+ t)^{-\delta/\beta}$, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1\varphi(t) \leq \eta^{-1}(t) \leq C_2\varphi(t),\ \forall t \geq 0,$$

o, equivalentemente,

$$\eta(C_1\varphi(t)) \leq t \leq \eta(C_2\varphi(t)),\ \forall t \geq 0. \tag{1.1.33}$$

Notemos primero que si $\delta = 0$ o si $0 \leq t < 1$, se tiene que $\eta(t) = t^\beta$ y, entonces, $\eta(\varphi(t)) = t$, es decir, (1.1.33) vale con $C_1 = C_2 = 1$

Supongamos ahora que $\delta > 0$ y $t \geq 1$, y tomemos $C_1 = 1/\max\{1, \beta^{-\delta}\}$. Puesto que $(1+\log t)^{\delta/\beta} \geq 1$ y $C_1 \leq 1$, resulta que $C_1\varphi(t) \leq t^{1/\beta}$ y tenemos que

$$\begin{aligned}\eta(C_1\varphi(t)) &= (C_1\varphi(t))^\beta\left[1+\log^+(C_1\varphi(t))\right]^\delta \leq \left(\frac{C_1 t^{1/\beta}}{(1+\log t)^{\delta/\beta}}\right)^\beta \left[1+\log^+\left(t^{1/\beta}\right)\right]^\delta \\ &= \frac{C_1^\beta t}{(1+\log t)^\delta}\left[1+\frac{1}{\beta}\log t\right]^\delta \leq C_1^\beta \max\{1, \beta^{-\delta}\} t = t.\end{aligned}$$

Probemos ahora que $\eta(C_2\varphi(t)) \geq t$ para alguna constante $C_2 > 0$ y todo $t \geq 1$. Es fácil ver que $(1+\log t) \leq \epsilon^{-1}t^\epsilon$ para cada $\epsilon > 0$ y para todo $t \geq 1$. Tomando $\epsilon\delta = 1$ y elevando a la δ, se sigue que $t(1+\log t)^{-\delta} \geq \delta^{-\delta}$ para todo $t \geq 1$. Luego, si $C_2 \geq \delta^{\delta/\beta}$, tenemos que $C_2\varphi(t) = C_2 t^{1/\beta}(1+\log t)^{-\delta/\beta} \geq 1$. Así, podemos escribir

$$\eta(C_2\varphi(t)) = \frac{C_2^\beta t}{(1+\log t)^\delta}\left[1+\log\left(\frac{C_2 t^{1/\beta}}{(1+\log t)^{\delta/\beta}}\right)\right]^\delta.$$

Más aún, como también vale que $(1+\log t)^\delta \leq (\delta/\epsilon)^\delta t^\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y todo $t \geq 1$, si elegimos ϵ de manera que $0 < 1-\epsilon < \beta$ y tomamos la constante $C_2 = \text{máx}\left\{\delta^{\delta/\beta}, (\delta/\epsilon)^{\delta/\beta}, \left(\frac{\beta}{1-\epsilon}\right)^{\delta/\beta}\right\} = \text{máx}\left\{(\delta/\epsilon)^{\delta/\beta}, \left(\frac{\beta}{1-\epsilon}\right)^{\delta/\beta}\right\}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \eta(C_2\varphi(t)) &\geq \frac{C_2^\beta t}{(1+\log t)^\delta}\left[1+\log\left(\frac{C_2 t^{\frac{1-\epsilon}{\beta}}}{(\delta/\epsilon)^{\delta/\beta}}\right)\right]^\delta \\ &\geq \frac{C_2^\beta t}{(1+\log t)^\delta}\left(1+\log\left(t^{\frac{1-\epsilon}{\beta}}\right)\right)^\delta \\ &\geq C_2^\beta t\left(\frac{1-\epsilon}{\beta}\right)^\delta \geq t. \end{aligned}$$

Eligiendo $\tilde{C}_1 = \text{mín}\{1, C_1\} = C_1$ y $\tilde{C}_2 = \text{máx}\{1, C_2\} = C_2$, valen las desigualdades

$$C_1\varphi(t) \leq \eta^{-1}(t) \leq C_2\varphi(t)$$

para todo $t \geq 0$.

Para demostrar *(ii)* usaremos que $\widetilde{\eta}^{-1}(t) \approx t/\eta^{-1}(t)$, para lo cual bastará ver que η' es estrictamente creciente de acuerdo al Lema 1.1.22. Para ello, notemos que

$$\eta''(t) = \begin{cases} \beta(\beta-1)t^{\beta-2} & 0 \leq t < 1 \\ t^{\beta-2}(1+\log t)^{\delta-2}\left(a\log^2(t) + b\log(t) + c\right) & t \geq 1. \end{cases}$$

donde $a = \beta(\beta-1)$, $b = 2\beta^2 + 2\beta(\delta-1) - \delta$ y $c = \beta^2 + \delta(\delta-2) + \beta(2\delta-1)$. Mediante cálculos que omitiremos, se puede deducir que $a\log^2(t) + b\log(t) + c > 0$ siempre que $\beta > 1$ y $\delta \geq 0$, que es nuestro caso. Esto implica que η' es estrictamente creciente. Por lo tanto, vale la equivalencia $\widetilde{\eta}^{-1}(t) \approx t/\eta^{-1}(t)$ en virtud de (1.1.23) y, utilizando el ítem anterior *(i)*, tenemos que

$$\widetilde{\eta}^{-1}(t) \approx t^{1-1/\beta}(1+\log^+ t)^{\delta/\beta}.$$

Como $\beta > 1$, $1 - 1/\beta = 1/\beta' > 0$. Luego, aplicando nuevamente el ítem *(i)* con $1/\beta'$ y δ/β, en lugar de β y δ respectivamente, tenemos que

$$\widetilde{\eta}(t) \approx t^{\beta'}(1+\log^+ t)^{-(\delta/\beta)\beta'} = t^{\beta'}(1+\log^+ t)^{-\delta/(\beta-1)}$$

como queríamos ver.

Ahora bien, si $\beta = 1$ y $\delta > 0$, sabemos que

$$\eta^{-1}(t) \approx t(1+\log^+ t)^{-\delta}.$$

Es bien conocido que $(1+\log^+ t) \approx \log(e+t)$, de donde se tiene que

$$\eta^{-1}(\Phi(t))t \approx \Phi(t)(\log(e^{t^{1/\delta}}))^{-\delta}t = \Phi(t)t^{-1}t = \Phi(t),$$

o, equivalentemente, como Φ es invertible,

$$t \approx \eta^{-1}(t)\Phi^{-1}(t). \qquad \square$$

Para simplificar los resultados de esta tesis, consideraremos, a menos que se indique lo contrario, funciones de Young *normalizadas*, esto es, funciones de Young η para las cuales $\eta(1) = 1$. En el siguiente lema damos dos propiedades que verifican este tipo de funciones.

Lema 1.1.34. *Sea η una función de Young normalizada. Entonces*

(i) $\eta(t) \geq t$ para todo $t \geq 1$;

(ii) η^{-1} también está normalizada y $\eta^{-1}(t) \leq t$ para todo $t \geq 1$.

Demostración. Como $\eta(1) = 1$ y η es convexa, cualquiera sea $t \geq 1$ se tiene que

$$1 = \eta(1) = \eta\left(\frac{t}{t}\right) \leq \frac{\eta(t)}{t},$$

es decir, $\eta(t) \geq t$ lo que prueba *(i)*.

Por otro lado, $\eta^{-1}(1) = \eta^{-1}(\eta(1)) = 1$. Si fuera $\eta^{-1}(t) > t$ para algún $t \geq 1$, tendríamos que $t > \eta(t)$ para algún $t \geq 1$, lo que contradice *(i)*. Así, debe ser $\eta^{-1}(t) \leq t$ para todo $t \geq 1$. □

Otras propiedades clásicas que consideraremos sobre funciones crecientes, no necesariamente de Young, son las denominadas *tipo superior* y *tipo inferior*.

Definición 1.1.35. Dada una función Φ no-negativa y creciente definida sobre $[0, +\infty)$ con $\Phi(0) = 0$, diremos que Φ es de *tipo superior* q, $0 \leq q < \infty$, si existe $C > 0$ tal que

$$\Phi(st) \leq Cs^q\Phi(t), \quad \forall\, s \geq 1, \forall\, t > 0.$$

Por otro lado, diremos que Φ es de *tipo inferior* q, $0 \leq q < \infty$, si existe $C > 0$ tal que

$$\Phi(st) \leq Cs^q\Phi(t), \quad \forall\, 0 \leq s \leq 1, \forall\, t \geq 0.$$

Si no se especifica el valor de q, simplemente diremos que Φ es de tipo superior o inferior, respectivamente.

Una clase particular que también consideraremos es la bien conocida clase Δ_2.

Definición 1.1.36. Diremos que una función Φ no-negativa y creciente definida sobre $[0, +\infty)$ satisface la condición Δ_2, y escribiremos $\Phi \in \Delta_2$, si existe una constante positiva C tal que

$$\Phi(2t) \leq C\Phi(t), \quad \forall\, t > 0.$$

Algunas propiedades que serán de utilidad acerca de estas clases se incluyen en el siguiente lema.

Lema 1.1.37. *Sea Φ una función no-negativa y creciente definida sobre $[0,+\infty)$ con $\Phi(0)=0$. Entonces,*

(i) $\Phi\in\Delta_2$ si y sólo si Φ es de tipo superior;

(ii) si Φ no es idénticamente nula y es de tipo inferior q, existe una constante $C>0$ tal que $t^q\leq C\Phi(t)$ para t suficientemente grande.

Demostración. Si Φ es de tipo superior $0\leq q<\infty$, entonces es inmediato que $\Phi\in\Delta_2$ pues $\Phi(2t)\leq C2^q\Phi(t)=\widetilde{C}\Phi(t)$. Recíprocamente, sea $\Phi\in\Delta_2$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\Phi(2t)\leq C\Phi(t)$ con constante $C>1$. Dado $s\geq 1$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $2^{k-1}\leq s<2^k$ y, para cada $t\geq 0$ tenemos que

$$\Phi(st)\leq\Phi(2^kt)\leq C^k\Phi(t)=C2^{(k-1)\log_2(C)}\Phi(t)\leq Cs^{\log_2(C)}\Phi(t),$$

por lo que Φ es de tipo superior $q=\log_2(C)\in[0,+\infty)$.

Si ahora Φ no es idénticamente nula, existe $t_0>0$ tal que $\Phi(t)>0$ para todo $t\geq t_0$ debido al crecimiento de Φ. Tomemos $t\geq\max\{1,t_0\}$. Usando que Φ es de tipo inferior q, tenemos que

$$0<\Phi(t_0)=\Phi\left(\frac{t_0}{t}t\right)\leq C\left(\frac{t_0}{t}\right)^q\Phi(t)$$

y, en consecuencia, $t^q\leq\widetilde{C}\Phi(t)$ para todo $t\geq\max\{1,t_0\}$ con $\widetilde{C}=Ct_0^q/\Phi(t_0)$. □

1.1.1. Clase B_p

Una clase particular de funciones de Young que resulta ser la adecuada para obtener propiedades de acotación sobre el operador maximal asociado, mencionado en la introducción, es la que se define a continuación.

Definición 1.1.38. Sea $1<p<\infty$. Decimos que una función de Young η satisface la condición B_p, y escribimos $\eta\in B_p$, si existe una constante positiva c tal que

$$\int_c^\infty\frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t}<\infty.$$

Como consecuencia inmediata de la definición de la clase B_p se tienen las siguientes propiedades.

Lema 1.1.39. *Sea $1<p<\infty$ y η una función de Young normalizada y finita. Entonces*

(i) $\eta\in B_p$ si y sólo si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\int_0^{C_1t}\lambda^{p-1}\eta'\left(\frac{t}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}\leq C_2t^{p-1},\quad\forall\, t>0;$$

(ii) *si $\eta \in B_p$, existe una constante positiva C_p tal que $\eta(t) \leq C_p t^p$ para todo $t \geq c$, donde c es la constante que aparece en la definición de la clase B_p;*

(iii) *si $\eta \in B_p$ y $1 < p \leq q < \infty$, entonces $\eta \in B_q$. Es decir, las clases B_p son crecientes respecto de p;*

(iv) *si $\eta^q \in B_p$ para algunos $1 < p, q < \infty$, entonces $\eta \in B_p$;*

(v) *si $\eta \in B_p$ es submultiplicativa, existe $0 < \epsilon < p$ tal que $\eta \in B_{p-\epsilon}$.*

Demostración. Veamos primero que vale la equivalencia *(i)*. Supongamos que $\eta \in B_p$, esto es, existen dos constantes positivas $C > 0$ y c tales que

$$\int_c^\infty \frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \leq C.$$

Para cada $s > 0$, hacemos el cambio de variables $t = 2s/\lambda$ y obtenemos que la expresión anterior se puede reescribir como

$$\int_0^{2s/c} \lambda^p \eta\left(\frac{2s}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \leq 2^p C s^p.$$

Puesto que $\eta(2s/\lambda) \geq (s/\lambda)\eta'(s/\lambda)$ (ver Corolario 1.1.5), la desigualdad anterior implica que

$$\int_0^{2s/c} \lambda^{p-1}\eta'\left(\frac{s}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \leq 2^p C s^{p-1},$$

cualquiera sea $s > 0$. Tomando $C_1 = 2/c$ y $C_2 = 2^p C$, se tiene la desigualdad deseada. Recíprocamente, si se verifica la condición anterior, usamos la otra relación dada en el Corolario 1.1.5, $\eta'(s/\lambda) \geq (\lambda/s)\eta(s/\lambda)$, y así tenemos que para todo $s > 0$,

$$\int_0^{C_1 s} \lambda^p \eta\left(\frac{s}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \leq C_2 s^p.$$

Haciendo el cambio de variables $\lambda = s/t$ se deduce la desigualdad

$$\int_{1/C_1}^\infty \frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \leq C_2 < \infty,$$

es decir, $\eta \in B_p$.

Demostremos ahora *(ii)*. Supongamos que no vale la desigualdad deseada. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $t_m \geq c$ tal que $\eta(t_m) > m t_m^p$. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\int_c^\infty \frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \geq \int_{t_m}^\infty \frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \geq \eta(t_m)\int_{t_m}^\infty \frac{1}{t^p}\frac{dt}{t} \geq m t_m^p \int_{t_m}^\infty \frac{1}{t^p}\frac{dt}{t} = m t_m^p \frac{1}{p t_m^p} = \frac{m}{p} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

lo que contradice que $\eta \in B_p$.

La demostración de *(iii)* es inmediata pues $p-q\leq 0$:

$$\int_c^\infty \frac{\eta(t)}{t^q}\frac{dt}{t} = \int_c^\infty t^{p-q}\frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \leq c^{p-q}\int_c^\infty \frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} < \infty.$$

Sea ahora $\eta^q \in B_p$, es decir, existe $c>0$ tal que

$$\int_c^\infty \frac{\eta(t)^q}{t^p}\frac{dt}{t} < \infty.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $c=1$. Como η está normalizada, para todo $t\geq 1$ tenemos que $\eta(t)\geq t\geq 1$, de donde se sigue que $\eta(t)\leq \eta(t)^q$ para todo $t\geq 1$. Por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \leq \int_1^\infty \frac{\eta(t)^q}{t^p}\frac{dt}{t} < \infty,$$

es decir, $\eta\in B_p$ y vale *(iv)*.

Resta probar el ítem *(v)*, el cual establece la apertura de la clase B_p. Una prueba de ello puede encontrarse en [8, Lema 5.9]; sin embargo, decidimos dar aquí una prueba diferente basada en las ideas de [6]. Para ello, usaremos que $\eta\in B_p$ es equivalente a que existan constantes positivas c y K tales que para cada $r>0$,

$$\int_{cr}^\infty \frac{dt}{\eta^{-1}(t/r)^p} \leq Kr, \tag{1.1.40}$$

lo que se sigue haciendo un cambio de variables y usando que $\eta'(t)\approx \eta(t)/t$ por ser η submultiplicativa.

Si definimos $A_k = 2^k rc$ para $k\in\mathbb{N}$, entonces para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p} = \sum_{k=n}^\infty \int_0^{2^k rc} \frac{dt}{\eta^{-1}(2^k)^p} = \sum_{k=n}^\infty \int_0^{2^n rc} \frac{dt}{\eta^{-1}(2^k)^p} + \sum_{k=n}^\infty \int_{2^n rc}^{2^k rc} \frac{dt}{\eta^{-1}(2^k)^p} = I + II.$$

Estimemos primero I. Para ello, notemos que, por ser η^{-1} supermultiplicativa, vale que $\eta^{-1}(2^k)\geq \eta^{-1}(2)^k$ y, así, la serie

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\eta^{-1}(2^k)^p} \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(\eta^{-1}(2)^p\right)^k} < \infty$$

pues $\eta^{-1}(2) > \eta^{-1}(1) = 1$.

Si denominamos $\alpha = \sum\limits_{k=0}^\infty \frac{1}{\eta^{-1}(2^k)^p} \geq \frac{1}{\eta^{-1}(1)} = 1$ y $\beta_n = \sum\limits_{k=n}^\infty \frac{1}{\eta^{-1}(2^k)^p}$ para $n\in\mathbb{N}$, se tiene que

$$\beta_n = \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{\eta^{-1}(2^{k-n}2^n)^p} \leq \frac{1}{\eta^{-1}(2^n)^p}\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{\eta^{-1}(2^j)^p} = \frac{\alpha}{\eta^{-1}(2^n)^p}.$$

Luego,

$$I=\sum_{k=n}^{\infty}\int_0^{2^n rc}\frac{dt}{\eta^{-1}(2^k)^p}=A_n\beta_n\leq\frac{\alpha A_n}{\eta^{-1}(2^n)^p}. \tag{1.1.41}$$

Ahora estimemos II. Usando las propiedades de β_n, podemos escribir

$$\begin{aligned}II&=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\eta^{-1}(2^k)^p}\sum_{j=n+1}^{k}\int_{2^{j-1}rc}^{2^j rc}dt=\sum_{j=n+1}^{\infty}\int_{2^{j-1}rc}^{2^j rc}dt\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{\eta^{-1}(2^k)^p}\\&=\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\int_{2^{j-1}rc}^{2^j rc}dt\leq\alpha\sum_{j=n+1}^{\infty}\int_{2^{j-1}rc}^{2^j rc}\frac{dt}{\eta^{-1}(2^j)^p}.\end{aligned}$$

Como η^{-1} es supermultiplicativa,

$$\eta^{-1}(2^j)\geq\eta^{-1}(2^j r/t)\eta^{-1}(t/(2^n r))\eta^{-1}(2^n)\geq\eta^{-1}(1/c)\eta^{-1}(t/(2^n r))\eta^{-1}(2^n)$$

para cada $2^{j-1}rc<t<2^j rc$. En consecuencia,

$$II\leq\frac{\alpha}{\eta^{-1}(1/c)^p\,\eta^{-1}(2^n)^p}\sum_{j=n+1}^{\infty}\int_{2^{j-1}rc}^{2^j rc}\frac{dt}{\eta^{-1}\left(\frac{t}{2^n r}\right)^p}=\frac{\alpha}{\eta^{-1}(1/c)^p\,\eta^{-1}(2^n)^p}\int_{2^n rc}^{\infty}\frac{dt}{\eta^{-1}\left(\frac{t}{2^n r}\right)^p}.$$

De la desigualdad anterior, de (1.1.41) y de (1.1.40), obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p}&\leq\frac{\alpha}{\eta^{-1}(2^n)^p}\left(A_n+\frac{1}{\eta^{-1}(1/c)^p}\int_{2^n rc}^{\infty}\frac{dt}{\eta^{-1}\left(\frac{t}{2^n r}\right)^p}\right)\\&\leq\frac{\alpha A_n}{\eta^{-1}(2^n)^p}\left(1+\frac{K}{c\eta^{-1}(1/c)^p}\right)=\frac{C\alpha A_n}{\eta^{-1}(2^n)^p}\\&=C\alpha\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p}\right).\end{aligned} \tag{1.1.42}$$

Luego,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p}\leq\frac{C\alpha-1}{C\alpha}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p}.$$

Si definimos $\gamma=\frac{C\alpha-1}{C\alpha}$, como $C>1$ y $\alpha\geq1$, $0<\gamma<1$. Haciendo inducción en $j\in\mathbb{N}$, resulta que

$$\sum_{k=j}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p}\leq\gamma^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p},$$

lo que, en particular, implica que

$$A_j\leq\gamma^j\eta^{-1}(2^j)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p}.$$

Sea ahora $0 < \epsilon < p$ a elegir. Utilizando la estimación anterior y (1.1.42), la cual se puede ver que también vale si $n = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{cr}^{\infty} \frac{dt}{\eta^{-1}(t/r)^{p-\epsilon}} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{j-1}rc}^{2^j rc} \frac{dt}{\eta^{-1}(t/r)^{p-\epsilon}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{0}^{2^j rc} \frac{dt}{\eta^{-1}(2^{j-1}c)^{p-\epsilon}} \\ &\leq \frac{1}{\eta^{-1}(c/2)^{p-\epsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{\eta^{-1}(2^j)^{p-\epsilon}} \\ &\leq \frac{1}{\eta^{-1}(c/2)^{p-\epsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j \eta^{-1}(2^j)^{\epsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_k}{\eta^{-1}(2^k)^p} \\ &\leq \frac{1}{\eta^{-1}(c/2)^{p-\epsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j \eta^{-1}(2^j)^{\epsilon} \frac{\alpha C r c}{\eta^{-1}(1)^p} = \frac{\alpha C r c}{\eta^{-1}(c/2)^{p-\epsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j \eta^{-1}(2^j)^{\epsilon}.\end{aligned}$$

Bastaría ver, pues, que existe $0 < \epsilon < p$ para el cual la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j \eta^{-1}(2^j)^{\epsilon}$$

es convergente. Para ello, notemos que, como η^{-1} es cóncava, $\eta^{-1}(2^j) \leq 2^j \eta^{-1}(1) = 2^j$. Luego, eligiendo $0 < \epsilon < \text{mín}\{\log_2(1/\gamma), p\}$, se tiene que $\gamma 2^{\epsilon} < 1$ y, así,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j \eta^{-1}(2^j)^{\epsilon} \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma 2^{\epsilon})^j < \infty.$$

En conclusión, existen $0 < \epsilon < p$ y constantes positivas c y $\widetilde{C}$ tales que

$$\int_{cr}^{\infty} \frac{dt}{\eta^{-1}(t/r)^{p-\epsilon}} \leq \widetilde{C} r$$

para todo $r > 0$, que, como vimos en (1.1.40), es equivalente a decir que $\eta \in B_{p-\epsilon}$. □

En el Capítulo 3 usaremos, en muchos casos, las siguientes equivalencias que involucran a la clase B_p.

Lema 1.1.43. *Sea $1 < p < \infty$. Sean η y ξ funciones de Young finitas tales que para algún $r > 1$*

$$\xi^{-1}(t) = t^{-1/r} \eta^{-1}(t),\ t > 0.$$

Entonces,

(i) η es submultiplicativa si y sólo si ξ lo es;

(ii) si η es submultiplicativa, $\eta^{1+p/r} \in B_p$ si y sólo si $\xi \in B_p$.

Demostración. Probemos primero *(i)*. Supongamos que η es submultiplicativa. Entonces, por el Lema 1.1.28*(ii)*, η^{-1} es supermultiplicativa. Veamos que ξ^{-1} también lo es. Sean $s, t > 0$. Luego,

$$\xi^{-1}(st) = (st)^{-1/r}\eta^{-1}(st) \geq s^{-1/r}t^{-1/r}\eta^{-1}(s)\eta^{-1}(t) = \xi^{-1}(s)\xi^{-1}(t).$$

Siguiendo las ideas de la prueba del Lema 1.1.28*(ii)*, es fácil ver que esto nos dice que ξ es submultiplicativa. Procediendo de forma similar, se demuestra la recíproca.

Ahora probemos *(ii)*. Si $\eta^{1+p/r} \in B_p$, entonces usando que $\eta'(t)/\eta(t) \approx 1/t$ por ser η submultiplicativa (ver Lema 1.1.28*(i)*) y haciendo el cambio de variables $u = \eta(t)$ se tiene que

$$\infty > \int_c^\infty \frac{\eta(t)^{1+\frac{p}{r}}}{t^p}\frac{dt}{t} \approx \int_c^\infty \frac{\eta(t)^{1+\frac{p}{r}}}{t^p}\frac{\eta'(t)dt}{\eta(t)} = \int_{\eta(c)}^\infty \frac{u^{1+\frac{p}{r}}}{\eta^{-1}(u)^p}\frac{du}{u}.$$

Reemplazando $\eta^{-1}(t)$ por $t^{1/r}\xi^{-1}(t)$, haciendo el cambio de variables $u = \xi(s)$ y usando que ξ también es submultiplicativa se sigue que

$$\infty > \int_{\eta(c)}^\infty \frac{u^{1+\frac{p}{r}}}{\eta^{-1}(u)^p}\frac{du}{u} = \int_{\eta(c)}^\infty \frac{u}{\xi^{-1}(u)^p}\frac{du}{u} = \int_{\xi^{-1}(\eta(c))}^\infty \frac{\xi(s)}{s^p}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds \approx \int_{\xi^{-1}(\eta(c))}^\infty \frac{\xi(s)}{s^p}\frac{ds}{s}.$$

Concluimos, pues, que $\xi \in B_p$ con constante $\xi^{-1}(\eta(c))$. Notar que todas las integrales que aparecen antes son, en realidad, equivalentes. Es por ello que si ahora suponemos que $\xi \in B_p$, se obtiene de igual manera la afirmación sobre η. $\square$

Para cierto tipo de funciones de Young, que incluyen a las de tipo $L \log L$, es fácil ver para qué rango de p éstas pertenecen a la clase B_p, lo que será de gran utilidad en el Capítulo 4.

Lema 1.1.44. *Sean $\beta \geq 1$ y $\delta \geq 0$. Consideremos, para $j \in \mathbb{N}$, la función de la forma $\eta_j(t) = t^\beta L_j(t)^\delta$, donde L_j se define recursivamente como*

$$L_1(t) = (1 + \log^+ t)$$
$$L_{j+1}(t) = L_j(L_1(t)).$$

Entonces, $\eta_j \in B_p$ para todo $p > \beta$ y todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como ya hemos usado anteriormente, sabemos que $L_1(t) \leq \epsilon^{-1}t^\epsilon$ para todo $t \geq 1$ y para todo $\epsilon > 0$. En particular, $L_1(t) \leq t$ para cada $t \geq 1$. Supongamos que, para $j \geq 1$, $L_j(t) \leq \epsilon^{-1}t^\epsilon$ para todo $t \geq 1$ y todo $\epsilon > 0$. Luego, como L_1 es creciente, cada L_j lo es, y así $L_{j+1}(t) = L_j(L_1(t)) \leq L_j(t) \leq \epsilon^{-1}t^\epsilon$ para todo $t \geq 1$ y todo $\epsilon > 0$. En consecuencia, $\eta_j(t) \leq \epsilon^{-1}t^{\beta+\epsilon}$ para todo $t \geq 1$ y $\epsilon > 0$.

Sea $p > \beta$. Luego, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $p > \beta + \epsilon_0$. Entonces,

$$\int_1^\infty \frac{\eta_j(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \leq \epsilon_0^{-1}\int_1^\infty \frac{1}{t^{p-\beta-\epsilon_0}}\frac{dt}{t} < \infty,$$

es decir, $\eta_j \in B_p$ para todo $p > \beta$. $\square$

1.2. El operador maximal M_η

Como mencionamos en la introducción, para obtener propiedades de acotación sobre ciertos operadores integrales singulares y fraccionarios y sus conmutadores, estudiaremos propiedades similares sobre los operadores maximales que los controlan en algún sentido, los cuales están asociados a funciones de Young. En esta sección definiremos la versión no-fraccionaria de tales operadores maximales y mostraremos algunos resultados conocidos.

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, esto es, una función medible integrable sobre conjuntos de medida finita. Dada una función de Young η se define el operador maximal generalizado M_η como sigue:

$$M_\eta f(x) = \sup_{B \ni x} ||f||_{\eta,B}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x y $|| \cdot ||_{\eta,B}$ denota el promedio generalizado definido por

$$||f||_{\eta,B} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B|}\int_B \eta\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}.$$

Cuando trabajemos con estos promedios y con el operador maximal M_η, estaremos suponiendo que las funciones de Young involucradas en sus definiciones son finitas.

Observar que, cuando η es la función identidad, $M_\eta = M$, el operador maximal de Hardy-Littlewood; cuando $\eta(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, $M_\eta f = M_p f := M(|f|^p)^{1/p}$.

Para funciones de Young cualesquiera, un primer resultado de acotación para M_η sobre espacios de Lebesgue clásicos fue probado en [79]. En dicho resultado, se caracteriza la acotación por medio de una condición B_p sobre η, y de allí la importancia de considerar este tipo de funciones de Young.

Teorema 1.2.1 ([79]). *Sean $1 < p < \infty$ y η una función de Young. Entonces equivalen:*

(i) $\eta \in B_p$;

(ii) existe una constante positiva C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\eta f(x))^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$$

para toda función medible f.

Notar que, por ejemplo, si $\eta(t) = t^r$ con $1 \leq r < \infty$, el resultado recupera la propiedad de acotación de M_r sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p > r$ gracias al Lema 1.1.44; en particular, se tiene que el operador maximal de Hardy-Littlewood M está acotado sobre cualquier $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Por otro lado, si $\eta(t) = t(1 + \log^+ t)^k$, sabemos que $M_\eta \approx M^{k+1}$, la composición de M con sí mismo $k + 1$ veces, y el Teorema 1.2.1 nos da la acotación de M^k sobre todos los $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ nuevamente en virtud del Lema 1.1.44. Este último operador tiene especial importancia porque, como se verá más adelante, controla a los conmutadores de la integrales singulares en la norma de los espacios L^p y, junto con el teorema anterior, ese control permite deducir las propiedades de continuidad de dichos conmutadores a partir de las propiedades de M^k.

El operador maximal M_η también ha sido estudiado en [7] y en [52]. En este último artículo, los autores dieron una caracterización de los espacios de Orlicz (para su definición, ver §2.1), en el contexto más general de espacios de tipo homogéneo de medida infinita, para que M_η esté acotada de un espacio de Orlicz en otro. En el Capítulo 3 expondremos dicho resultado para el caso de $\mathbb{R}^n$.

También analizaremos el caso en que M_η actúe sobre espacios de medida finita. Para ello, es conveniente considerar la siguiente versión del operador M_η cuando Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con $|\Omega| < \infty$ y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definimos M_η para f con soporte en Ω como

$$M_\eta f(x) = \sup_{B \ni x} ||f||_{\eta,B}, \quad x \in \Omega,$$

donde ahora el supremo se toma sobre todas las bolas B con centro en Ω que contienen a $x \in \Omega$ y los promedios se escriben en la forma

$$||f||_{\eta,B} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B \cap \Omega|}\int_B \eta\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \le 1\right\}. \tag{1.2.2}$$

Claramente, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, se tiene el promedio definido anteriormente.

En [52] también se estudió este operador sobre espacios de Orlicz definidos sobre espacios de tipo homogéneo de medida finita, obteniéndose resultados de caracterización similares a los dados en el caso de medida infinita.

Por último, cabe mencionar el siguiente resultado donde se da una especie de desigualdad de tipo débil para el operador M_η, el cual fue probado en [51].

Lema 1.2.3 ([51])**.** *Sea η una función de Young y w un peso, esto es, una función no-negativa y localmente integrable. Entonces, para todo subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, la desigualdad*

$$w(\{x \in \Omega : M_\eta f(x) > 2\lambda\}) \le C_n \int_{\{x\in\Omega:|f(x)|>\lambda\}} \eta\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) Mw(x)dx$$

vale para todo $\lambda > 0$ y toda función medible f, donde C_n es cierta constante positiva que sólo depende de la dimensión n.

1.3. El operador maximal fraccionario $M_{\alpha,\eta}$

En esta sección introduciremos una versión fraccionaria del operador maximal M_η, el cual permitirá controlar el comportamiento de ciertos operadores integrales fraccionarios y sus conmutadores.

Dada una función de Young η y $0 \leq \alpha < n$ se define el operador maximal fraccionario asociado $M_{\alpha,\eta}$ como

$$M_{\alpha,\eta}f(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{\alpha/n} ||f||_{\eta,B}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3.1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x.

Nuevamente, cuando η es la función identidad, $M_{\alpha,\eta} = M_\alpha$, el operador maximal fraccionario clásico; cuando $\eta(t) = t^p$ y $1 < p < n/\alpha$, $M_{\alpha,\eta}f := M_{\alpha,p}f = (M_{\alpha p}(|f|^p))^{1/p}$.

Similarmente, tenemos una versión del operador $M_{\alpha,\eta}$ definida sobre conjuntos abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de medida finita, dado, para f con soporte en Ω, por

$$M_{\alpha,\eta}f(x) = \sup_{B \ni x} |B \cap \Omega|^{\alpha/n} ||f||_{\eta,B}, \quad x \in \Omega,$$

donde ahora el supremo se toma sobre todas las bolas B con centro en Ω que contienen a x y los promedios son como en (1.2.2).

A diferencia del operador no fraccionario M_η, el operador $M_{\alpha,\eta}$ no ha sido muy estudiado. Sólo se han considerado en la literatura casos particulares de él cuando la función de Young es de la forma $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\delta$ con $\beta \geq 1$ y $\delta \geq 0$. En esos casos, en [11] se probó que si $\delta \geq 1$, $M_{\alpha,\eta}$ es puntualmente equivalente a la composición $M_{\alpha,\beta} \circ M_{\alpha,L^\beta(\log L)^{\delta-1}}$, donde $M_{L^\beta(\log L)^{\delta-1}}$ denota la maximal asociada a $\Phi(t) = t^\beta(1 + \log^+ t)^{\delta-1}$. También, en dicho artículo se recupera el resultado ya conocido que establece que, si $\beta = 1$ y $\delta = k \in \mathbb{N}$, el operador $M_{\alpha,L(\log L)^k}$ resulta equivalente a la composición del operador maximal fraccionario M_α con M^k, el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado k veces.

A pesar de la existencia de dichos resultados de descomposición, no se conocen las propiedades de acotación de $M_{\alpha,\eta}$ cuando η es una función de Young general, ni siquiera en el contexto de espacios de Lebesgue clásicos. Por tal motivo, es que estamos interesados en estudiar dicho operador en esta tesis, no sólo por sí mismo, sino también por el control que éste ejerce sobre distintos operadores del análisis armónico, como se verá en la sección siguiente.

A continuación, mostraremos dos resultados que usaremos fuertemente en el Capítulo 4. Éstos nos otorgan una herramienta muy útil a la hora de trabajar con funciones de Young: nos permiten pasar de operadores maximales asociados a ellas a otros operadores maximales ya conocidos. Más precisamente, si η_1 y η_2 son funciones de Young con $\eta_1(t) \leq C\eta_2(t)$ para t suficientemente grande y alguna constante positiva C, se puede ver que $M_{\alpha,\eta_1}f(x) \leq CM_{\alpha,\eta_2}f(x)$ para todo x. Particularmente, si η pertenece a alguna clase B_p, la maximal $M_{\alpha,p}$ mayora a $M_{\alpha,\eta}$ puntualmente, y si η es de tipo inferior p, vale la otra desigualdad. Esto es lo que establecen los siguientes resultados.

Lema 1.3.2. *Sean η_1 y η_2 funciones de Young normalizadas tales que $\eta_1(t) \leq C_0\eta_2(t)$ para todo $t \geq t_0 > 0$ y cierta constante positiva C_0, y sea $0 \leq \alpha < n$. Entonces, para toda bola B con centro en Ω y toda función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$,*

$$||f||_{\eta_1,B} \leq 2C||f||_{\eta_2,B},$$

y, así, $M_{\alpha,\eta_1}f(x) \le 2CM_{\alpha,\eta_2}f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Demostración. Fijemos una bola B con centro en Ω y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $C_0 \ge 1$ y tomemos $C = \text{máx}\{C_0, t_0\} \ge 1$. Luego, por la convexidad de η_1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B\cap\Omega|}\int_B \eta_1\left(\frac{|f(x)|}{2C||f||_{\eta_2,B}}\right)dx &\le \frac{1}{2|B\cap\Omega|}\int_{\{x\in B:|f(x)|/C||f||_{\eta_2,B}\le 1\}}\eta_1\left(\frac{|f(x)|}{C||f||_{\eta_2,B}}\right)dx\\ &+\frac{1}{2|B\cap\Omega|}\int_{\{x\in B:|f(x)|/C||f||_{\eta_2,B}> 1\}}\eta_1\left(\frac{|f(x)|}{C||f||_{\eta_2,B}}\right)dx\\ &\le \frac{1}{2}\\ &+\frac{1}{2C|B\cap\Omega|}\int_{\{x\in B:|f(x)|/||f||_{\eta_2,B}> C\}}\eta_1\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{\eta_2,B}}\right)dx.\end{aligned}$$

De la elección de C, $|f(x)|/C||f||_{\eta_2,B} > 1$ implica $|f(x)|/||f||_{\eta_2,B} > t_0$. Entonces, usando la relación entre η_1 y η_2 y que $C_0/C \le 1$, tenemos que

$$\frac{1}{|B\cap\Omega|}\int_B \eta_1\left(\frac{|f(x)|}{2C||f||_{\eta_2,B}}\right)dx \le \frac{1}{2}+\frac{1}{2|B\cap\Omega|}\int_{B\cap\Omega}\frac{C_0}{C}\eta_2\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{\eta_2,B}}\right)dx \le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Por lo tanto, $||f||_{\eta_1,B} \le 2C||f||_{\eta_2,B}$. Más aún, de dicha desigualdad es inmediato que $M_{\alpha,\eta_1}f(x) \le 2CM_{\alpha,\eta_2}f(x)$. □

Corolario 1.3.3. *Sean* η_1 *y* η_2 *funciones de Young normalizadas y* $0 \le \alpha < n$. *Entonces:*

(i) si $\eta_1 \in B_p$ *para algún* $1 < p < \infty$, *para toda bola* B *con centro en* Ω *y toda función* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *existe* $C = C(p) > 0$ *tal que*

$$||f||_{\eta_1,B} \le 2C||f||_{p,B},$$

y $M_{\alpha,\eta}f(x) \le 2C_pM_{\alpha,p}f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$*;*

(ii) si η_2 *es de tipo inferior* p *para algún* $1 \le p < n/\alpha$, *para toda bola* B *con centro en* Ω *y toda función* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *existe* $C > 0$ *tal que*

$$||f||_{p,B} \le 2C||f||_{\eta_2,B},$$

y $(M_{\alpha p}(|f|^p)(x))^{1/p} \le 2CM_{\alpha,\eta_2}f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Demostración. Si $\eta_1 \in B_p$, por el Lema 1.1.39*(ii)* existe $C_p > 0$ tal que $\eta_1(t) \le C_pt^p$ para todo $t \ge c > 0$. Luego, por el lema anterior, existe una constante $C = \text{máx}\{C_p, c\}$ tal que $||f||_{\eta_1,B} \le 2C||f||_{p,B}$ y $M_{\alpha,\eta}f(x) \le 2C_pM_{\alpha,p}f(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Análogamente, si η_2 es de tipo inferior p, del Lema 1.1.37*(ii)* existe $C > 0$ tal que $t^p \le C\eta_2(t)$ para todo $t \ge 1$. Luego, por el lema anterior, existe una constante $C > 0$ tal que $||f||_{p,B} \le 2C||f||_{\eta_2,B}$ y, así, $M_{\alpha,p}f(x) \le 2CM_{\alpha,\eta_2}f(x)$ para todo $x \in \Omega$. □

Otra propiedad muy útil que poseen estos promedios, y que se prueba siguiendo las ideas de los resultados anteriores, es una versión de la bien conocida desigualdad de Jensen.

Lema 1.3.4. *Sea η una función de Young normalizada y finita, y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cada bola $B \subset \mathbb{R}^n$ vale la desigualdad*

$$||f||_{\eta,B} \leq 2||f^p||_{\eta,B}^{1/p},$$

cualquiera sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Fijemos una bola B y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, de la convexidad de η y usando que $1/p \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B \eta\left(\frac{|f(x)|}{2||f^p||_{\eta,B}^{1/p}}\right)dx &\leq \frac{1}{2|B|}\int_B \eta\left(\left(\frac{|f(x)|^p}{||f^p||_{\eta,B}}\right)^{1/p}\right)dx\\ &\leq \frac{1}{2|B|}\int_B \eta(1)dx + \frac{1}{2|B|}\int_{\{x\in B:|f(x)|^p>||f^p||_{\eta,B}\}} \eta\left(\frac{|f(x)|^p}{||f^p||_{\eta,B}}\right)dx\\ &\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$||f||_{\eta,B} \leq 2||f^p||_{\eta,B}^{1/p}.$$

□

1.4. Operadores integrales relacionados y sus conmutadores

Como ya hemos mencionado, los operadores maximales generalizados M_η y $M_{\alpha,\eta}$ controlan a una amplia clase de operadores de tipo integral singular y fraccionaria, y a sus conmutadores. Dicho control viene dado en muchos casos a través de lo que se conoce como desigualdad de tipo Coifman

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_T f(x)|^p w(x)dx \tag{1.4.1}$$

donde T es uno de tales operadores, $\mathcal{M}_T$ es el operador maximal de control, $0 < p < \infty$ y w es un peso perteneciente a la clase A_∞ de Muckenhoupt (para la definición de esta clase de pesos ver, por ejemplo, [42]).

Para la obtención de dicha desigualdad se cuenta con desigualdades puntuales del tipo

$$M_\delta^\sharp(Tf)(x) \leq C_\delta \mathcal{M}_T f(x),\ \delta \in (0,1), \tag{1.4.2}$$

donde T y $\mathcal{M}_T$ son los operadores de (1.4.1) y

$$M^\sharp f(x) := \sup_{B\ni x}\inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-a|\,dy \approx \sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-m_B f|\,dy.$$

es el operador maximal "sharp", siendo $m_B f = \frac{1}{|B|}\int_B |f|$ y $M_\delta^\sharp f = M^\sharp(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}$ para $\delta > 0$. Por ejemplo, se conoce que si T es un operador de Calderón-Zygmund, el operador maximal de control es $\mathcal{M}_T = M$, el operador maximal de Hardy-Littlewood (ver [22]), y si T es el operador integral fraccionario I_α, $0 \leq \alpha < n$, resulta que $\mathcal{M}_T = M_\alpha$, el operador maximal fraccionario (ver [71]).

Cuando se trabaja con los conmutadores de orden k de los operadores T, la desigualdad (1.4.2) toma la forma

$$M_\delta^\sharp(T^k f)(x) \leq C\sum_{j=0}^{k-1} M_\epsilon(T^j f)(x) + C\mathcal{M}_T f(x),\ 0 < \epsilon < \delta < 1,$$

es decir, además del operador maximal de control $\mathcal{M}_T$ se tienen k términos que involucran a los conmutadores de T de menor orden.

Desigualdades de este tipo fueron obtenidas en [78] para el caso de los conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund, y en [10] para los conmutadores de I_α (ver también [37] y [24]).

Debemos destacar que en los trabajos [22] y [71] los autores prueban y utilizan (1.4.2) con $\delta = 1$, pero es recién en el artículo [78] donde se introduce el factor $\delta \in (0,1)$, el cual permite, en el caso de los conmutadores, obtener mejores operadores de control $\mathcal{M}_T$ que aquellos que surgen naturalmente a partir de la desigualdad con $\delta = 1$.

Ahora bien, si se conoce este tipo de desigualdades puntuales que involucran al operador $M_\delta^\sharp$, es posible deducir las propiedades de acotación de T a partir de las propiedades de continuidad de $\mathcal{M}_T$, incluso en otros espacios diferentes a los L^p. El siguiente lema probado por A. Lerner en [61] es una herramienta crucial para lograr ese objetivo. En los capítulos 3 y 4 mostraremos más precisamente cómo se utiliza este lema.

Lema 1.4.3 ([61]). *Existe una constante positiva C tal que para toda función localmente integrable g y toda función medible f con $|\{x : |f(x)| > \lambda\}| < \infty$ para cada $\lambda > 0$, vale la siguiente desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |fg|dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp f M g dx.$$

1.4.1. Operadores integrales singulares

En esta sección introduciremos los operadores de tipo integral singular que pueden controlarse por los operadores maximales a estudiar en esta tesis, en el sentido de (1.4.2).

Sea T un operador integral singular de tipo convolución con núcleo K, esto es, T está acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$Tf(x) = v.p.\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy, \tag{1.4.4}$$

donde K es una función medible definida fuera del origen. Con el objetivo de describir el comportamiento de T sobre los distintos espacios funcionales que consideraremos en el Capítulo 2, asumiremos cierta condición de suavidad sobre K. Una de tales condiciones es la denominada condición de Hörmander: diremos que K satisface la condición de Hörmander si existen constantes $c > 1$ y $C_1 > 0$ tales que

$$\int_{|x|>c|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq C_1, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Esta es la condición más débil con la que trabajaremos y nos referiremos a ella como la condición H_1.

La clase más fuerte que consideraremos es la clásica condición de Lipschitz, a la cual denotaremos por H_∞^*. Específicamente, diremos que $K \in H_\infty^*$ si existen constantes θ, $C > 0$ y $c > 1$ tales que

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|^\theta}{|x|^{\theta+n}}, \quad |x| > c|y|.$$

Esta condición es satisfecha, por ejemplo, por los denominados operadores de Calderón-Zygmund. Como se mencionó más arriba, Coifman mostró en [21] que estos operadores verifican una desigualdad de control como la dada en (1.4.1) con $\mathcal{M}_T = M$ y pesos $w \in A_\infty$, para lo cual utilizó, en realidad, la condición H_∞^* en los núcleos. Es fácil ver la contención $H_\infty^* \subset H_1$ pero se conoce (ver [68]) que no es posible reemplazar a la primera por la segunda y aún así obtener la desigualdad de Coifman con M como el operador de control. Es por ello que surgió el siguiente interrogante: ¿Qué condiciones intermedias, esto es, entre H_∞^* y H_1, son suficientes para obtener un desigualdad de tipo Coifman con $\mathcal{M}_T = M$? Una primera propuesta fueron las clases de Hörmander H_r, $1 \leq r \leq \infty$: se dice que $K \in H_r$ si existen constantes $c \geq 1$ y $C_r > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/r'} \left(\int_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(x)|^r dx \right)^{1/r} \leq C_r.$$

Se entiende que si $r = \infty$, la condición toma la forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \sup_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(x)| \leq C_\infty.$$

Como se verá luego, en el Lema 1.4.9, estas clases verifican $H_\infty^* \subset H_\infty \subset H_s \subset H_r \subset H_1$, para $1 \leq r < s < \infty$, por lo que efectivamente son más fuertes que H_1, pero, en principio, más débiles que H_∞^*. Para estas clases se conocen desigualdades de tipo Coifman, con pesos de A_∞, de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |M_{r'} f(x)|^p w(x) dx, 1 < r \leq \infty, \tag{1.4.5}$$

donde r' es el conjugado de Hölder de r (ver [86] y [3]). Como se puede observar, si $r = \infty$, es posible obtener del lado derecho de la desigualdad al operador maximal de Hardy-Littlewood. Sin embargo, en [68] se probó que, para $1 < r < \infty$, la desigualdad de arriba es "sharp" en el siguiente sentido: dado $1 \le r < \infty$ y $1 \le t < r'$, existe un operador integral singular T acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, con núcleo $K \in H_r$ para el cual no vale la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |M_t f(x)|^p w(x)dx$$

para toda f tal que el lado izquierdo es finito y para todo peso $w \in A_\infty$. Esto significa que no es posible mejorar la desigualdad (1.4.5) con un operador del tipo M_t puntualmente más chico que $M_{r'}$.

En vista de este resultado, los autores en [67] se preguntaron qué ocurre entre H_∞ y la intersección de todas las clases H_r, $1 \le r < \infty$. Más precisamente, estaban interesados en conocer si existía algún operador integral de convolución con núcleo $K \in \bigcap_{1\le r<\infty} H_r \setminus H_\infty$ y, de ser esto cierto, si se podía obtener alguna información que permita encontrar un operador maximal de control más adecuado, puntualmente menor que todos los $M_{r'}$.

Encontraron, pues, que existía un operador con núcleo $K \in \bigcap_{1\le r<\infty} H_r \setminus H_\infty$, el cual, además, tenía otras propiedades de regularidad que garantizaban que (1.4.1) valía con cierto operador maximal M_η para determinada función η de Young que exhibiremos luego. El operador que ejemplifica este hecho es el que se conoce como Función Cuadrado, dado por

$$Sf(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2^n} \int_x^{x+2^n} f(y)dy - \frac{1}{2^{n-1}} \int_x^{x+2^{n-1}} f(y)dy \right|^2 \right)^{1/2}$$

el cual, si bien es no-lineal, puede interpretarse como la norma en ℓ^2 (el espacio de las sucesiones de cuadrados sumables) del operador a valores vectoriales $Uf(x) = K^S * f(x)$ siendo

$$K^S(x) = \{K_n^S(x)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{2^n}\chi_{(-2^n,0)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}}\chi_{(-2^{n-1},0)}(x) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En el artículo [31] (ver también [67]) se mostraron ciertas condiciones de suavidad en K^S que prueban su pertenencia a $\bigcap_{1\le r<\infty} H_r \setminus H_\infty$.

Con el objetivo de dar un marco más adecuado para operadores con estas propiedades, se introdujeron nuevas clases del estilo de las de Hörmander ya conocidas, pero definidas en una escala de espacios más amplia que las de los espacios L^r: los espacios de Orlicz. Los autores mostraron en [67] que el operador S pertenecía a una de estas nuevas clases, la cual, efectivamente, resulta ser intermedia entre H_∞ y $\bigcap_{1\le r<\infty} H_r$. Damos la definición de dichas clases a continuación.

Definición 1.4.6. Sea Φ una función de Young finita. Diremos que un núcleo K satisface la condición de Hörmander H_Φ, y escribiremos $K \in H_\Phi$, si existen constantes $c \ge 1$ y

$C_\Phi > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \| (K(\cdot - y) - K(\cdot))\, \chi_{\{|x|\sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0,2^{m+1}R)} \leq C_\Phi. \tag{1.4.7}$$

donde $\{|x| \sim s\}$ denotará la corona $\{x : s < |x| \leq 2s\}$.

Observación 1.4.8. Cuando $\Phi(t) = t^r$ con $1 \leq r < \infty$, la condición anterior es la clase H_r antes definida. Cuando $r = \infty$, (1.4.7) se entiende como la clase H_∞.

Bajo esta definición, las funciones de Young Φ para las cuales $K^S \in H_\Phi$, como se mostró en [67], son de la forma

$$\Phi(t) = e^{t^{1/(1+\epsilon)}} - 1, \quad \epsilon > 0.$$

Siguiendo el espíritu de la desigualdad (1.4.5), en lugar de operadores maximales $M_{r'}$, los operadores maximales que surgen naturalmente son los relacionados con $\widetilde{\Phi}$ (ver (1.1.31) y Observación 1.1.32), esto es, $M_{\widetilde{\Phi}}$ con

$$\widetilde{\Phi} = t(1 + \log^+ t)^{1+\epsilon}, \epsilon > 0$$

que, como vimos en el Lema 1.3.2, están mayorados por cualquier operador maximal $M_{r'}$, para todo $r > 1$. En consecuencia, si se conoce que un determinado núcleo pertenece a una clase de Hörmander H_Φ estrictamente menor que una cierta clase H_r, entonces sí se puede mejorar puntualmente el operador maximal de control. Esto motiva el estudio de las propiedades de continuidad de los operadores M_η asociados a distintas funciones de Young η.

Antes de continuar con los resultados de acotación para los operadores integrales singulares, veremos que todas las condiciones de Hörmander antes descritas verifican las siguientes relaciones de inclusión dadas en [66], cuya prueba se hará de manera más general en el Lema 1.4.16.

Lema 1.4.9 ([66])**.** *Valen las siguientes inclusiones:*

(i) para todo $1 \leq r < s < \infty$, $H^*_\infty \subset H_\infty \subset H_s \subset H_r \subset H_1$*;*

(ii) cualquiera sea la función de Young Φ, $H_\infty \subset H_\Phi \subset H_1$*:*

(iii) si $\Phi \in B_r$ *para algún* $r > 1$*, entonces* $H_r \subset H_\Phi$*.*

En relación con la desigualdad puntual (1.4.2), en [67] los autores probaron el siguiente resultado para operadores con condiciones de regularidad como las definidas arriba. Éste muestra lo que afirmábamos antes: cuanto más suave es el núcleo, mejor será la estimación y el operador maximal de control resultante.

Teorema 1.4.10 ([67])**.** *Sea T un operador integral singular con núcleo $K \in H_\Phi$, con Φ una función de Young tal que su complementaria también sea de Young. Entonces, para cada $0 < \delta < 1$, existe una constante positiva C_δ tal que*

$$M_\delta^\sharp(Tf)(x) \leq C_\delta M_{\widetilde{\Phi}} f(x), \tag{1.4.11}$$

donde $\widetilde{\Phi}$ es la función complementaria de Φ.

También se tiene una versión del teorema anterior cuando los núcleos satisfacen la condición Lipschitz H_∞^*, que fue probada en [21]. El mismo resultado vale para el caso en que $K \in H_\infty$, como se vio en [67].

Teorema 1.4.12 ([21, 67])**.** *Sea T un operador integral singular con núcleo $K \in H_\infty^*$ o $K \in H_\infty$. Entonces, para cada $0 < \delta < 1$, existe una constante positiva C_δ tal que*

$$M_\delta^\sharp(Tf)(x) \leq C_\delta M f(x). \tag{1.4.13}$$

Antes de continuar con las propiedades de los operadores de tipo integral, damos algunos ejemplos de ellos y las correspondientes condiciones de tipo Hörmander que satisfacen sus núcleos.

Ejemplo 1.4.14. Para más información sobre los ejemplos que listaremos abajo, ver [66].

(i) *Transformadas de Riesz:* El clásico ejemplo de operador T es la transformada de Hilbert en $\mathbb{R}$

$$Tf(x) = Hf(x) = v.p. \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

y, más generalmente, las transformadas de Riesz en $\mathbb{R}^n$,

$$Tf(x) = \mathcal{R}_j f(x) = c_n v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy, \ 1 \leq j \leq n.$$

Es fácil ver que los núcleos de estos operadores satisfacen la condición H_∞^*. En efecto, si $|x| > c|y|$ para algún $c > 1$, entonces $|x| < \left(\frac{c}{c-1}\right)|x-y|$ y, para cada $1 \leq j \leq n$ se tiene que

$$\left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right| = \left| \frac{(x_j - y_j)|x|^{n+1} - x_j |x-y|^{n+1}}{|x-y|^{n+1}|x|^{n+1}} \right| \leq C \frac{|y_j|}{|x|^{n+1}} \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}.$$

En virtud de ello, (1.4.13) vale con el operador maximal de Hardy-Littlewood.

(ii) *Operadores de Calderón-Zygmund:* Más generalmente, si T es un operador de la forma (1.4.4) acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ y el núcleo satisface que $|K(x)| \leq C|x|^{-n}$ para todo $x \neq 0$ y, para algún $\theta > 0$,

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|^\theta}{|x|^{n+\theta}}, \ |x| > 2|y| > 0,$$

T se dice un operador de Calderón-Zygmund de tipo convolución y, claramente, por definición satisface la condición H_∞^*. Por lo tanto, está controlado por medio de (1.4.13) con $\mathcal{M}_T = M$.

(iii) *Operadores integrales con núcleo homogéneo:* Otro ejemplo de este tipo de operador son las integrales singulares con núcleos "rough", esto es, operadores de tipo convolución con núcleo $K(x) = \Omega(x)|x|^{-n}$ donde Ω es una función definida sobre la esfera unitaria S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ con integral nula. Extendiendo Ω a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ radialmente, y llamando, con abuso de notación, Ω a su extensión, ésta resulta ser una función homogénea de grado 0. Los autores en [66, Proposition 4.2] mostraron que el núcleo de T verifica $K \in H_\Phi$. Para ello, asumen que, para determinada función de Young Φ, la función $\Omega \in L^\Phi(S^{n-1})$ con

$$\int_0^1 \omega_\Phi(t)\frac{dt}{t} < \infty,$$

donde ω_Φ es el módulo L^Φ de continuidad definido por

$$\omega_\Phi(t) = \sup_{|y|\le t} ||\Omega(\cdot + y) - \Omega(\cdot)||_{\Phi,S^{n-1}},\ t \ge 0.$$

Luego, del Teorema 1.4.10 se sigue que este tipo de operadores está controlado por el operador maximal $M_{\tilde{\Phi}}$.

(iv) *Multiplicadores de Fourier:* Existen otras integrales singulares con núcleos menos regulares que los de las transformadas de Riesz. En [60], los autores analizan las integrales dadas en términos de un multiplicador. Específicamente, para una función m dada definida sobre $\mathbb{R}^n$, consideraron el operador multiplicador T_m definido a priori para funciones f en la clase de Schwartz por medio de la transformada de Fourier como $\widehat{T_m f}(\zeta) = m(\zeta)\hat{f}(\zeta)$. Si, para algún $1 < s \le 2$ y algún $l \in \mathbb{N}$ con $l > n/s$ las derivadas de m satisfacen que

$$\sup_{R>0}\left(R^{s|\beta|-n}\int_{\{R<|x|<2R\}} |D^\beta m(x)|^s dx\right)^{1/s} < \infty, \quad \forall\, |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n \le l$$

en [66] se probó que el operador T_m puede escribirse como el límite de operadores de convolución más simples T_m^N, $N \in \mathbb{N}$, cuyos núcleos K^N están en la clase H_r para todo $1 < r < n/(n-l)$, con constante uniforme en N. Así, cada operador T_m^N se puede controlar por el operador maximal $M_{r'}$ para todo $n/l < r' < \infty$ en virtud del Teorema 1.4.10 y, por medio de un argumento de límite, también ocurre lo mismo para el operador T_m.

Los conmutadores con símbolo en BMO para los operadores integrales singulares del tipo descrito arriba también fueron considerados en [66]. Dado T uno de tales operadores y $\mathfrak{b} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se define el conmutador de orden k de T, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por

$$T^k_{\mathfrak{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y))^k K(x-y) f(y)\, dy.$$

Para el estudio de estos operadores, los autores en [66] introdujeron las correspondientes condiciones de suavidad en el núcleo K, las que dependen de una función de Young Φ y, además, del orden de los conmutadores.

Definición 1.4.15. Sea Φ una función de Young finita y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que el núcleo K satisface la condición de Hörmander $H_{\Phi,k}$, y escribimos $K \in H_{\Phi,k}$, si existen constantes $c \geq 1$ y $C_{\Phi,k} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^k (2^m R)^n \|K(\cdot - y) - K(\cdot)\|_{\Phi,|x|\sim 2^m R} \leq C_{\Phi,k}.$$

Si $k = 0$, simplemente se tiene que $H_{\Phi,k} = H_\Phi$ (Definición 1.4.6).

Como observamos en el caso $k = 0$, cuando se considera la función $\Phi(t) = t^r$ con $1 \leq r < \infty$, la condición anterior puede escribirse de la siguiente forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^k (2^m R)^{n/r'} \left(\int_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(x)|^r dx \right)^{1/r} \leq C_r.$$

y se dice que $K \in H_{r,k}$. Cuando $r = \infty$, entendemos que el núcleo satisface la condición $H_{\infty,k}$ si

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^k (2^m R)^n \sup_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(x)| \leq C_\infty.$$

Estas clases verifican las siguientes relaciones, como se menciona en [66].

Lema 1.4.16. *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces:*

(i) para todo $1 \leq r < s < \infty$, $H_\infty^* \subset H_{\infty,k} \subset H_{s,k} \subset H_{r,k} \subset H_{1,k} \subset H_1$;

(ii) para todo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $0 \leq j \leq k$, $H_{\Phi,k} \subset H_{\Phi,j}$;

(iii) cualquiera sea la función de Young Φ, $H_{\infty,k} \subset H_{\Phi,k} \subset H_{1,k}$;

(iv) si $\Phi \in B_r$ para algún $r > 1$, entonces $H_{r,k} \subset H_{\Phi,k}$.

Demostración. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{s,B(0,2^{m+1}R)} \\
&\qquad = \left((2^{m+1}R)^{-n} \int_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(x)|^s \right)^{1/s} \\
&\qquad \leq \|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\infty,B(0,2^{m+1}R)} \left(\frac{(2^{m+1}R)^n - (2^m R)^n}{(2^{m+1}R)^n} \right)^{1/s} \\
&\qquad \leq \|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\infty,B(0,2^{m+1}R)},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $H_{\infty,k} \subset H_{s,k}$. Por otro lado, como $s/r > 1$, por la desigualdad de Hölder clásica se tiene que

$$\|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{r,B(0,2^{m+1}R)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{s,B(0,2^{m+1}R)} \frac{((2^{m+1}R)^n - (2^m R)^n)^{1/r-1/s}}{(2^{m+1}R)^{n/r-n/s}} \\
&\leq \|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{s,B(0,2^{m+1}R)},
\end{aligned}$$

y del mismo modo, tomando $r = 1$. Así, se verifican las contenciones $H_{s,k} \subset H_{r,k} \subset H_{1,k}$ para todo $1 \leq r < s < \infty$.

Para ver que $H_\infty^* \subset H_{\infty,k}$, sean $C, \theta > 0$ y $c \geq 1$ tales que, si $|x| > c|y|$,

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C\frac{|y|^\theta}{|x|^{\theta+n}}.$$

Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, si $|x| > 2^m R$, entonces $c|y| < R < 2^m R < |x|$, de donde se tiene que

$$\sup_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(y)| \leq C \sup_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} \frac{|y|^\theta}{|x|^{\theta+n}} \leq C\frac{(R/c)^\theta}{(2^m R)^{\theta+n}} = \frac{C}{c^\theta 2^{m\theta}(2^m R)^n}.$$

Luego,

$$\sum_{m=1}^\infty (2^m R)^n \sup_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(y)| \leq \frac{C}{c^\theta}\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{2^{m\theta}} < \infty.$$

Como $m \in \mathbb{N}$, $m^k \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, de donde se sigue que $H_{1,k} \subset H_1$. La prueba de *(ii)* también es inmediata pues $m^j \leq m^k$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $0 \leq j \leq k$.

Sea ahora Φ una función de Young. En virtud de la siguiente desigualdad de Hölder para los promedios Luxemburg

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_{\Phi,B}||g||_{\widetilde{\Phi},B}$$

que veremos más adelante en (2.1.16), se puede probar que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(0,2^{m+1}R)|}\int_{B(0,2^{m+1}R)} |K(x-y) - K(y)|\chi_{\{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R\}}dx \\
&\qquad \leq ||(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}||_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)}||\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}||_{\widetilde{\Phi},B(0,2^{m+1}R)} \\
&\qquad \leq \|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)}||\chi_{B(0,2^{m+1}R)}||_{\widetilde{\Phi},B(0,2^{m+1}R)}
\end{aligned}$$

Puesto que para toda bola B se tiene que

$$\begin{aligned}
||\chi_B||_{\Phi,B} &= \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B|}\int_B \Phi(1/\lambda)dx \leq 1\right\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 : 1/\lambda \leq \Phi^{-1}(1)\} = \frac{1}{\Phi^{-1}(1)}.
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\frac{1}{|B(0,2^{m+1}R)|}\int_{B(0,2^{m+1}R)} |K(x-y) - K(y)|\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}dx$$

$$\leq C\|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)},$$

lo que prueba la contención $H_{\Phi,k} \subset H_{1,k}$. Para probar la inclusión $H_{\infty,k} \subset H_{\Phi,k}$, tomemos $\lambda = \|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\infty,B(0,2^{m+1}R)}$. Así,

$$\frac{1}{|B(0,2^{m+1}R)|}\int_{B(0,2^{m+1}R)} \Phi\left(\frac{|K(x-y) - K(y)|\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}(x)}{\lambda}\right) dx$$
$$\leq \frac{1}{|B(0,2^{m+1}R)|}\int_{B(0,2^{m+1}R)} \Phi(1)dx = \Phi(1).$$

Si $\Phi(1) \leq 1$,

$$\|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)} \leq \|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\infty,B(0,2^{m+1}R)}.$$

En el caso en que $\Phi(1) > 1$, basta tomar $\lambda = \Phi(1)\|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\infty,B(0,2^{m+1}R)}$ y usar la convexidad de Φ para obtener

$$\|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)} \leq \Phi(1)\|(K(\cdot - y) - K(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\infty,B(0,2^{m+1}R)},$$

de donde se sigue la contención deseada.

Finalmente, la propiedad *(iv)* es consecuencia inmediata del Corolario 1.3.3 puesto que $\Phi \in B_r$. $\square$

En [66], los autores también demostraron las siguientes desigualdades puntuales para los conmutadores, que generalizan a las de los Teoremas 1.4.10 y 1.4.12. Para su obtención, se requiere que la función $\mathfrak{b}$ sea de variación media acotada, lo que se denota como $\mathfrak{b} \in BMO$ y significa que la cantidad

$$||\mathfrak{b}||_{BMO} := \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}_B|dx$$

es finita, donde $\mathfrak{b}_B$ denota el promedio de $\mathfrak{b}$ sobre la bola B.

Teorema 1.4.17 ([66]). *Sean Φ y Ψ funciones de Young finitas tales que para $t \geq t_0 > 1$, $\widetilde{\Phi}^{-1}(t)\Psi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t)$, siendo $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$. Si T es un operador integral singular con núcleo $K \in H_\Psi \cap H_{\Phi,k}$, para cada $\mathfrak{b} \in BMO$, $0 < \delta < \epsilon < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, existe $C = C_{\delta,\epsilon}$ tal que*

$$M_\delta^\sharp(T_\mathfrak{b}^k f)(x) \leq C\sum_{j=0}^{k-1} ||\mathfrak{b}||_{BMO}^{k-j} M_\epsilon(T_b^j f)(x) + C||\mathfrak{b}||_{BMO}^k M_{\widetilde{\Phi}} f(x)$$

Teorema 1.4.18 ([66]). *Si T es un operador integral singular con núcleo $K \in H_\infty^*$ o $K \in H_\infty \cap H_{\varphi_k^{-1},k}$ siendo $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$, para cada $\mathfrak{b} \in BMO$, $0 < \delta < \epsilon < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, existe $C = C_{\delta,\epsilon}$ tal que*

$$M_\delta^\sharp(T_\mathfrak{b}^k f)(x) \leq C\sum_{j=0}^{k-1} ||\mathfrak{b}||_{BMO}^{k-j} M_\epsilon(T_b^j f)(x) + C||\mathfrak{b}||_{BMO}^k M_{L(\log L)^k} f(x)$$

1.4.2. Operadores integrales fraccionarios

A continuación, daremos algunas definiciones sobre operadores integrales fraccionarios de tipo convolución que tienen a los operadores $M_{\alpha,\eta}$ como operadores de control en el sentido de (1.4.2).

En [12], los autores consideraron operadores integrales fraccionarios del tipo

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x-y)f(y)\,dy, \qquad 0 \leq \alpha < n, \tag{1.4.19}$$

donde el núcleo K_α satisface una condición de tamaño y una condición de suavidad de tipo Hörmander fraccionaria. La condición de tamaño se denomina S_α y diremos que $K_\alpha \in S_\alpha$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\{|x|\sim s\}} |K_\alpha(x)|\,dx \leq Cs^\alpha,$$

donde $\{|x| \sim s\}$ es, como antes, la corona $\{x : s < |x| \leq 2s\}$.

La condición de suavidad se define a continuación, la cual está dada en la escala de los espacios de Orlicz, en analogía con el caso de los operadores de tipo integral singular.

Definición 1.4.20. Dada Φ una función de Young tal que ella y su complementaria son finitas, diremos que $K_\alpha \in H_{\alpha,\Phi}$ si existen constantes $c \geq 1$ y $C_{\alpha,\Phi} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, vale la desigualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^mR)^{n-\alpha}\|(K_\alpha(\cdot - y) - K_\alpha(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^mR\}}\|_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)} \leq C_{\alpha,\Phi}. \tag{1.4.21}$$

Diremos que $K_\alpha \in H^*_{\alpha,\infty}$ si existen constantes $C > 0$ y $c > 1$ tales que

$$|K_\alpha(x-y) - K_\alpha(x)| \leq C\frac{|y|}{|x|^{n+1-\alpha}}, \quad |x| > c|y|.$$

Cuando $\Phi(t) = t^r$ con $1 \leq r < \infty$, se dice que $K_\alpha \in H_{\alpha,r}$, lo que significa que existen constantes $c \geq 1$ y $C_{\alpha,r} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, vale la desigualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^mR)^{n/r'-\alpha}\left(\int_{2^mR<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(x)|^r dx\right)^{1/r} \leq C_{\alpha,r}.$$

Cuando $r = \infty$, interpretamos la condición (1.4.21) como

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^mR)^{n-\alpha}\sup_{2^mR<|x|\leq 2^{m+1}R}|K(x-y) - K(x)| \leq C_{\alpha,\infty}.$$

Al igual que en el caso de las condiciones de tipo Hörmander no fraccionarias, se tienen las siguientes inclusiones para las clases definidas arriba, como se mencionó en [12].

Lema 1.4.22. *Sea $0 \leq \alpha < n$. Entonces:*

(i) para todo $1 \leq r < s < \infty$, $H^*_{\alpha,\infty} \subset H_{\alpha,\infty} \subset H_{\alpha,s} \subset H_{\alpha,r} \subset H_{\alpha,1}$;

(ii) cualquiera sea la función de Young Φ, $H_{\alpha,\infty} \subset H_{\alpha,\Phi} \subset H_{\alpha,1}$;

(iii) si $\Phi \in B_r$ para algún $r > 1$, entonces $H_{\alpha,r} \subset H_{\alpha,\Phi}$.

Demostración. Dado que el término que involucra a α en las condiciones no influye en los promedios de tipo Luxemburg, las pruebas de todas las inclusiones se obtienen como en el caso $\alpha = 0$. □

Bajo las condiciones de tamaño y de suavidad de tipo Hörmander en el núcleo K_α dadas, en [12] se demostraron los siguientes resultados de control análogos a los obtenidos para los operadores integrales singulares en la sección anterior. Cuando $T_\alpha = I_\alpha$, el correspondiente resultado fue dado previamente en [1].

Teorema 1.4.23 ([12])**.** *Sea T_α un operador integral fraccionario de la forma dada en* (1.4.19) *con núcleo $K_\alpha \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\Phi}$ con Φ de Young tal que ella y su complementaria son finitas. Entonces, para cada $0 < \delta < 1$, existe una constante positiva C_δ tal que*

$$M^\sharp_\delta(T_\alpha f)(x) \leq C_\delta M_{\alpha,\widetilde{\Phi}} f(x). \tag{1.4.24}$$

Teorema 1.4.25 ([12])**.** *Sea T_α un operador integral fraccionario de la forma dada en* (1.4.19) *con núcleo $K_\alpha \in S_\alpha \cap H^*_{\alpha,\infty}$ o $K \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\infty}$. Entonces, para cada $0 < \delta < 1$, existe una constante positiva C_δ tal que*

$$M^\sharp_\delta(T_\alpha f)(x) \leq C_\delta M_\alpha f(x). \tag{1.4.26}$$

Ejemplo 1.4.27. Veamos ahora algunos ejemplos de operadores que satisfacen las condiciones de tipo Hörmander fraccionarias y los correspondientes operadores maximales de control.

(i) *Operador integral fraccionario:* Un ejemplo clásico de un operador del tipo (1.4.19) es el operador integral fraccionario I_α, cuyo núcleo $K_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ satisface claramente la condición S_α pues

$$\int_{s<|x|\leq 2s} |x|^{\alpha-n} dx = \int_s^{2s} \rho^{\alpha-n}\rho^{n+1} d\rho = \frac{1}{\alpha}\left((2s)^\alpha - s^\alpha\right) \lesssim s^\alpha, \quad \forall\, s > 0,$$

y también la condición de tipo Hörmander $H^*_{\alpha,\infty}$. En efecto, en virtud del teorema del valor medio existe $z = \theta x + (1-\theta)y$ con $\theta \in (0,1)$ tal que

$$||x-y|^{\alpha-n} - |x|^{\alpha-n}| \leq C|z|^{\alpha-n-1}|x-y-x| = C|z|^{\alpha-n-1}|y|,$$

por lo que, eligiendo $|x| > c|y|$ para algún $c > 1/\theta > 1$, resulta $|z| \geq (\theta - 1/c)|x|$ y obtenemos que

$$||x-y|^{\alpha-n} - |x|^{\alpha-n}| \leq C|z|^{\alpha-n-1}|y| = C\frac{|y|}{|x|^{n+1-\alpha}}.$$

En consecuencia, por el Teorema 1.4.23, I_α está controlado por el operador maximal fraccionario clásico M_α.

(ii) *Operadores integrales con núcleo homogéneo:* Este tipo de operadores son una versión fraccionaria de aquellos dados en el Ejemplo 1.4.14(iii). Se consideran operadores de tipo integral fraccionaria con núcleo $K_\alpha(x) = \Omega(x)|x|^{\alpha-n}$ donde Ω es como en dicho ejemplo. En [12], los autores demostraron que K_α, el núcleo de T_α, verifica las condiciones S_α y $H_{\alpha,\Phi}$ siempre que $\Omega \in L^\Phi(S^{n-1})$ con

$$\int_0^1 \omega_\Phi(t)\frac{dt}{t} < \infty,$$

donde ω_Φ es el módulo L^Φ de continuidad (ver Ejemplo 1.4.14(iii)). Estos operadores fueron también considerados en [17] y [36].

(iii) *Multiplicadores de Fourier:* Versiones fraccionarias de los operadores T_m definidos en el Ejemplo 1.4.14(iv) también son ejemplos de operadores integrales fraccionarios con núcleos $K_\alpha \in S_\alpha \cap H_{\alpha,r}$, los cuales fueron introducidos en [59]. Asumiendo que $|m(x)| \lesssim |x|^{-\alpha}$ y que las derivadas de m satisfacen

$$\sup_{R>0}\left(R^{s(|\beta|-\alpha)-n}\int_{\{R<|x|<2R\}}|D^\beta m(x)|^s dx\right)^{1/s} < \infty, \quad \forall\, |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n \leq l$$

para algún $1 < s \leq 2$ y algún $l \in \mathbb{N}$ con $l > n/s$, el operador T_m puede escribirse como el límite de operadores de convolución T_m^N. Se probó en [12] que los núcleos K_α^N de estos últimos verifican $K_\alpha^N \in S_\alpha \cap H_{\alpha,r}$ para todo $1 < r < n/(n-\alpha)$, donde la constante de la condición de tipo Hörmander no depende de N. Así, como en el caso no fraccionario, resulta que T_m está controlado, en virtud de (1.4.2), por el operador maximal fraccionario $M_{\alpha,r'}$ para cada $n/l < r' < \infty$.

Si ahora consideramos una función $\mathfrak{b} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos el conmutador de T_α de orden k, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ por

$$T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{b}(x)-\mathfrak{b}(y))^k K_\alpha(x-y)f(y)\,dy, \qquad 0 \leq \alpha < n.$$

Claramente, cuando $k = 0$, $T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} = T_\alpha$. Para estos operadores, supondremos que el núcleo K_α satisface, además de la condición S_α, la siguiente condición de regularidad.

Definición 1.4.28. Sea Φ una función de Young finita y $k \in \mathbb{N}$. Diremos que $K \in H_{\alpha,\Phi,k}$ si existen constantes $c \geq 1$ y $C_{\alpha,\Phi,k} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, vale la desigualdad

$$\sum_{m=1}^\infty (2^m R)^{n-\alpha} m^k \|(K_\alpha(\cdot - y) - K_\alpha(\cdot))\chi_{\{|x|\sim 2^m R\}}\|_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)} \leq C_{\alpha,\Phi,k}.$$

Para estas clases, se tienen las siguientes propiedades, que generalizan a las dadas en los Lemas 1.4.22 y 1.4.16.

Lema 1.4.29. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces:*

(i) para todo $1 \leq r < s < \infty$, $H^*_{\alpha,\infty,k} \subset H_{\alpha,\infty,k} \subset H_{\alpha,s,k} \subset H_{\alpha,r,k} \subset H_{\alpha,1,k}$;

(ii) para todo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $0 \leq j \leq k$, $H_{\alpha,\Phi,k} \subset H_{\alpha,\Phi,j}$;

(iii) cualquiera sea la función de Young Φ, $H_{\alpha,\infty,k} \subset H_{\alpha,\Phi,k} \subset H_{\alpha,1,k}$;

(iv) si $\Phi \in B_r$ para algún $r > 1$, entonces $H_{\alpha,r,k} \subset H_{\alpha,\Phi,k}$.

Demostración. Como el número α sólo afecta a la medida de la bola en cada una de las condiciones de tipo Hörmander consideradas, todas las desigualdades probadas en el Lema 1.4.16 permiten deducir las propiedades enunciadas en este lema. □

En [12], los autores probaron también una desigualdad en el espíritu de (1.4.24) para $T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$, que damos en los siguientes resultados, cuando $\mathfrak{b} \in BMO$. En el caso en que $T_\alpha = I_\alpha$, la desigualdad de control fue demostrada en [37] y [24] para $k = 1$, y en [10] para cualquier $k \in \mathbb{N}$ en el contexto más general de espacios de tipo homogéneo.

Teorema 1.4.30 ([12])**.** *Sean Φ y Ψ funciones de Young finitas tales que $\widetilde{\Phi}^{-1}(t)\Psi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t)$ para todo $t \geq t_0 > 1$, donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$. Si T_α es un operador integral fraccionario con núcleo $K \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\Psi} \cap H_{\alpha,\Phi,k}$, para cada $\mathfrak{b} \in BMO$, $0 < \delta < \epsilon < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, existe una constante $C = C_{\delta,\epsilon}$ tal que*

$$M^\sharp_\delta(T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f)(x) \leq C \sum_{j=0}^{k-1} ||\mathfrak{b}||^{k-j}_{BMO} M_\epsilon(T^j_{\alpha,\mathfrak{b}}f)(x) + C||\mathfrak{b}||^k_{BMO} M_{\alpha,\widetilde{\Phi}}f(x).$$

Teorema 1.4.31 ([12])**.** *Si T_α es un operador integral fraccionario con núcleo $K \in S_\alpha \cap H^*_{\alpha,\infty}$ o $K \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\infty,k}$, para cada $\mathfrak{b} \in BMO$, $0 < \delta < \epsilon < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, existe una constante $C = C_{\delta,\epsilon}$ tal que*

$$M^\sharp_\delta(T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f)(x) \leq C \sum_{j=0}^{k-1} ||\mathfrak{b}||^{k-j}_{BMO} M_\epsilon(T^j_{\alpha,\mathfrak{b}}f)(x) + C||\mathfrak{b}||^k_{BMO} M_{\alpha,\varphi_k}f(x),$$

donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

Capítulo 2

Espacios funcionales

En este capítulo se darán las definiciones y propiedades básicas acerca de los espacios de Orlicz y de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$, que son los espacios de funciones que serán considerados a lo largo de esta tesis y sobre los cuales se estudiarán las propiedades de acotación de los operadores introducidos en el capítulo anterior. Más específicamente, en el Capítulo 3 se demostrará que el operador $M_{\alpha,\eta}$, definido en (1.3.1), y los operadores controlados por éste están acotados en espacios de Orlicz y un estudio similar se realizará en el Capítulo 4 respecto de los espacios $L^{p(\cdot)}$.

2.1. Espacios de Orlicz

Como mencionamos en la introducción, los espacios de Orlicz resultan, en muchos casos, ser contextos más adecuados para obtener propiedades de continuidad de diversos operadores que no resultan acotados sobre los clásicos espacios de Lebesgue. El ejemplo clásico de este tipo de comportamiento lo otorga el operador maximal de Hardy-Littlewood que no está acotado sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, Mf es integrable para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si f es idénticamente nula. Es natural entonces preguntarse sobre qué espacio de funciones que sustituya a $L^1(\mathbb{R}^n)$ resulta Mf al menos localmente integrable. Una respuesta a esta cuestión fue dada por Wiener [90] quien probó que se verifica la siguiente desigualdad

$$\int_B Mf(x)dx \leq 2|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\log(e + |f(x)|)dx$$

para toda bola B y cierta constante positiva C. Es decir, si la función f satisface que $|f|\log(e+|f|)$ es integrable, entonces Mf también lo es localmente. Si tomamos la función $\Phi(t) = t\log(e + t)$, podemos decir que la función f debe satisfacer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty.$$

La condición anterior define el conjunto que denominamos espacio de Orlicz asociado a la función Φ. Veremos ahora la definición de estos espacios de manera formal.

Definición 2.1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función tal que $\Phi(0) = 0$. Se define el *espacio de Orlicz* $L^\Phi(\Omega)$ como el conjunto de todas las funciones f medibles sobre Ω para las cuales existe un número positivo λ tal que el funcional

$$\varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda) := \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

es finito.

Observación 2.1.2. Si $\Phi(t) = t^p$ con $p \geq 1$, $L^\Phi(\Omega)$ es el espacio de Lebesgue clásico $L^p(\Omega)$.

El funcional $\varrho_{\Phi,\Omega}$ no es una norma para el espacio de Orlicz $L^\Phi(\Omega)$ ya que, en general, no saca escalares y si, por ejemplo, $\varrho_{\Phi,\Omega}(f) = 0$ y Φ es nula en un intervalo a la derecha del origen, f no necesariamente es nula en tal intervalo. Sin embargo, la definición que sigue introduce una norma para el espacio de Orlicz cuando Φ es una función de Young.

Definición 2.1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función tal que $\Phi(0) = 0$. Dada f una función medible sobre Ω, definimos el funcional

$$||f||_{L^\Phi(\Omega)} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda) \leq 1\}.$$

Antes de probar que el funcional anterior es una norma para $L^\Phi(\Omega)$ cuando Φ es de Young, requeriremos algunas propiedades que establecen relaciones entre dicho funcional y $\varrho_{\Phi,\Omega}$.

Lema 2.1.4. *Sea $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función de Young y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

(i) $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/||f||_{L^\Phi(\Omega)}) \leq 1$ *siempre que* $0 < ||f||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty$. *Si, además, Φ es submultiplicativa y está normalizada, se tiene que* $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/||f||_{L^\Phi(\Omega)}) = 1$*;*

(ii) *si* $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda) \leq 1$ *con* $\lambda > 0$*, entonces* $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq \lambda$ *y, si* $\varrho_{\Phi,\Omega}(f) \leq C$ *para alguna constante* $C > 1$*, entonces* $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq C$*;*

(iii) *si* $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq 1$*, entonces* $\varrho_{\Phi,\Omega}(f) \leq ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$*. En cambio, si* $||f||_{L^\Phi(\Omega)} > 1$*, entonces* $\varrho_{\Phi,\Omega}(f) \geq ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$.

Demostración. Para demostrar *(i)*, sea $0 < ||f||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty$. Por la definición de $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$, existe $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente a $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ que satisface $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda_n) \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de Φ y el Lema de Fatou tenemos que

$$\begin{aligned}\varrho_{\Phi,\Omega}\left(\frac{f}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) &= \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_n}\right) dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_n}\right) dx = \liminf_{n\to\infty} \varrho_{\Phi,\Omega}\left(\frac{f}{\lambda_n}\right).\end{aligned}$$

Pero, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda_n) \leq 1$, por lo que, de la desigualdad anterior obtenemos que $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/||f||_{L^\Phi(\Omega)}) \leq 1$.

Supongamos ahora que Φ es submultiplicativa y está normalizada. Luego, para todo $0 < \lambda < ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ se tiene que

$$\varrho_{\Phi,\Omega}\left(f/\lambda\right) \leq \Phi\left(\frac{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}{\lambda}\right) \varrho_{\Phi,\Omega}\left(f/||f||_{L^\Phi(\Omega)}\right).$$

Así, si fuera $\varrho_{\Phi,\Omega}\left(f/||f||_{L^\Phi(\Omega)}\right) < 1$, tendríamos que $\varrho_{\Phi,\Omega}\left(f/\lambda\right) < \Phi(||f||_{L^\Phi(\Omega)}/\lambda)$ para todos esos valores de λ. Luego, tomando límite cuando $\lambda \to ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$, de la continuidad de Φ se tiene que

$$\lim_{\lambda \to ||f||_{L^\Phi(\Omega)}} \varrho_{\Phi,\Omega}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq \lim_{\lambda \to ||f||_{L^\Phi(\Omega)}} \Phi\left(\frac{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}{\lambda}\right) = \Phi(1) = 1$$

Existiría, entonces, al menos un $\lambda < ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ para el cual $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda) \leq 1$, lo que contradice que $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ es el ínfimo. Luego, debe ser $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/||f||_{L^\Phi(\Omega)}) = 1$.

Probemos *(ii)*. Es claro que si, para algún $\lambda > 0$ se tiene que $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda) \leq 1$, por definición de $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ debe ser $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq \lambda$. Si ahora tenemos que $\varrho_{\Phi,\Omega}(f) \leq C$ para alguna constante $C > 1$, de la convexidad de Φ tenemos que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{C}\right) dx \leq \frac{1}{C}\int_\Omega \Phi(|f(x)|)dx \leq 1$$

y, por lo visto recién, $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq C$.

Para probar *(iii)*, notemos que, si $0 < ||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq 1$, usamos la convexidad de $\varrho_{\Phi,\Omega}$ y el inciso *(i)* para obtener

$$\varrho_{\Phi,\Omega}(f) \leq ||f||_{L^\Phi(\Omega)} \varrho_{\Phi,\Omega}(f/||f||_{L^\Phi(\Omega)}) \leq ||f||_{L^\Phi(\Omega)}.$$

En cambio, si $||f||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto de Ω y, por lo tanto, $\varrho_{\Phi,\Omega}(f) = 0 = ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$.

Si ahora $||f||_{L^\Phi(\Omega)} > 1$, para cada $1 < \lambda < ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ se tiene que $\varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda) > 1$ por definición del funcional $||\cdot||_{L^\Phi(\Omega)}$. Como Φ es convexa y $\lambda > 1$,

$$1 < \varrho_{\Phi,\Omega}(f/\lambda) = \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega \Phi(|f(x)|)dx.$$

Luego, $\varrho_{\Phi,\Omega}(f) > \lambda$. Haciendo $\lambda \nearrow ||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ se concluye que $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq \varrho_{\Phi,\Omega}(f)$. □

Proposición 2.1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función tal que $\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds$ donde $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua por izquierda tal que $\phi(0) = 0$. Entonces:*

(i) $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \geq 0$ *y, si* $f = 0$ *en casi todo punto, entonces* $||f||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$*. Si, además,* ϕ *es positiva en* $(0, \infty)$*, entonces* $||f||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$ *implica* $f = 0$ *en casi todo punto;*

(ii) $||cf||_{L^\Phi(\Omega)} = |c|||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ *para todo* $c \in \mathbb{R}^n$*;*

(iii) si, además, ϕ *es no-decreciente, entonces* $||f + g||_{L^\Phi(\Omega)} \leq ||f||_{L^\Phi(\Omega)} + ||g||_{L^\Phi(\Omega)}$.

Demostración. Por ser el ínfimo de números reales no-negativos, es inmediato que, para cualquier función f, $||f||_{L^\Phi(\Omega)} \geq 0$. Además, si $f = 0$ en casi todo punto, cualquiera sea $\lambda > 0$, se tiene que

$$\int_\Omega \Phi(|f(x)|/\lambda)dx = 0 \leq 1$$

así que el ínfimo $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ es nulo.

Sea ϕ positiva fuera del origen y sea f tal que $||f||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$. Supongamos, por el contrario, que para algún $c > 0$, $|f(x)| \geq c$ para todo $x \in E$ con $0 < |E| < \infty$. Luego, de la definición de $||f||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$, para cada $\lambda > 0$ se tiene que

$$1 \geq \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) \geq |E|\Phi(c/\lambda).$$

Pero de la positividad de ϕ, tenemos que $\Phi(t) \nearrow \infty$ cuando $t \nearrow \infty$, de donde se sigue que $\Phi(c/\lambda) \nearrow \infty$ para $\lambda \searrow 0$, lo que contradice que $|E|\Phi(c/\lambda) \leq 1$ para todo $\lambda > 0$. Luego, debe ser $f = 0$ en casi todo punto.

Ahora bien, dado $c \in \mathbb{R}$ es fácil ver que

$$\begin{aligned}
||cf||_{L^\Phi(\Omega)} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|cf(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda/|c|}\right) dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{|c|\mu > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\mu}\right) dx \leq 1\right\} \\
&= |c|||f||_{L^\Phi(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Resta probar la desigualdad triangular, para lo cual supondremos que la función ϕ es no-decreciente o, lo que es lo mismo, que Φ es convexa. Sean f, g funciones tales que $||f||_{L^\Phi(\Omega)}, ||g||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty$. Es claro que, si alguna de estas cantidades es nula, entonces f o g es nula en casi todo punto y resulta $||f + g||_{L^\Phi(\Omega)} = ||f||_{L^\Phi(\Omega)} + ||g||_{L^\Phi(\Omega)}$. Podemos asumir, pues, que $0 < ||f||_{L^\Phi(\Omega)}, ||g||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty$. Si definimos

$$\beta = \frac{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}{||f||_{L^\Phi(\Omega)} + ||g||_{L^\Phi(\Omega)}} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{||g||_{L^\Phi(\Omega)}}{||f||_{L^\Phi(\Omega)} + ||g||_{L^\Phi(\Omega)}},$$

entonces $\beta + \gamma = 1$. Luego, del crecimiento y la convexidad de Φ,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x) + g(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)} + ||g||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx \leq \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)} + ||g||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \Phi\left(\beta \frac{|f(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}} + \gamma \frac{g(x)|}{||g||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx \\
&\leq \beta \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx + \gamma \int_\Omega \Phi\left(\frac{g(x)|}{||g||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx \\
&\leq \beta + \gamma = 1,
\end{aligned}
$$

en virtud del Lema 2.1.4*(i)*. Finalmente, usando el Lema 2.1.4*(ii)*, tenemos probada la desigualdad triangular. □

Como consecuencia del lema anterior y del Lema 1.1.3, si Φ es de Young, $||\cdot||_{L^\Phi(\Omega)}$ resulta ser una norma para este espacio, como muestra el siguiente resultado. Más aún, $(L^\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$ resulta ser un espacio de Banach como se demostró en [58] (ver también [8] o [84]).

Teorema 2.1.6 ([58])**.** *Si Φ es una función de Young, entonces $||\cdot||_{L^\Phi(\Omega)}$ es una norma para el espacio de Orlicz $L^\Phi(\Omega)$. Más aún, $(L^\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$ es un espacio de Banach.*

Volviendo a lo que discutíamos al comienzo de esta sección, la función dada por $\Phi(t) = t\log(e+t)$ es intermedia entre $\Psi_1(t) = t$ y $\Psi_2(t) = t^2$ cuyos espacios asociados son L^1 y L^2 respectivamente. Es así que podemos pensar, de alguna manera, a los espacios de Orlicz como espacios "intermedios" entre los L^p y sustitutos de estos cuando los últimos no parecen ser el contexto más adecuado para el estudio de la continuidad de ciertos operadores del Análisis Armónico.

En lo que sigue, daremos una serie de desigualdades que satifacen las normas de Orlicz, generalizando, en cierta forma, otras desigualdades bien conocidas en el contexto de espacios de Lebesgue clásicos. La primera desigualdad que presentaremos es una generalización de la desigualdad de Hölder, probada en [89], que se sigue de la desigualdad de Young generalizada (1.1.18).

Proposición 2.1.7 ([89])**.** *Para toda función de Young Φ finita se tiene que*

$$
\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq 2||f||_{L^\Phi(\Omega)}||g||_{L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)} \tag{2.1.8}
$$

para todo par de funciones $f \in L^\Phi(\Omega)$ y $g \in L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Demostración. Basta suponer $||f||_{L^\Phi(\Omega)} > 0$ y $||g||_{L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)} > 0$ ya que, en otro caso, $f = 0$ o $g = 0$ en casi todo punto y la desigualdad es trivial.

Si, para cada $x \in \Omega$, aplicamos la desigualdad de Young (1.1.18) a $s = |f(x)|/||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ y $t = |g(x)|/||g||_{L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)}$, se tiene que

$$
\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}||g||_{L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)}} \leq \Phi\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) + \widetilde{\Phi}\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)}}\right).
$$

Luego, en virtud del Lema 2.1.4*(i)* tenemos que

$$\int_\Omega \frac{|f(x)g(x)|}{2||f||_{L^\Phi(\Omega)}||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}}dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}}\right)dx \leq 1,$$

de donde se tiene (2.1.8). □

Claramente, si $\Phi(t) = t^p/p$, entonces $\widetilde{\Phi}(t) = t^{p'}/p'$ con $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/p' = 1$, y se recupera la desigualdad de Hölder clásica, aunque la constante 2 no es óptima pues es bien sabido que dicha desigualdad vale con constante 1. Conocer las funciones Φ y $\widetilde{\Phi}$ explícitamente puede permitirnos, en muchos casos, mejorar la constante de la desigualdad de Hölder (2.1.8).

Recordemos, además, que si $1/p + 1/q = 1/r$ con $1 \leq r < \infty$, también se tiene que

$$||fg||_{L^r(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)}. \tag{2.1.9}$$

Esto es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder clásica con exponentes p/r y q/r. Pero también puede probarse aplicando la desigualdad de Young generalizada que satisfacen las funciones $\Psi(t) = t^r$, $\Phi_1(t) = t^p$ y $\Phi_2(t) = t^q$:

$$\Psi(st) \leq \Phi_1(s) + \Phi_2(t), \quad \forall s, t \geq 0,$$

que es consecuencia de la relación $t^{1/p}t^{1/q} = t^{1/r}$ para todo $t > 0$.

En virtud de la desigualdad de Young anterior para funciones Φ_1, Φ_2, Ψ más generales (Lema 1.1.25), se demostró en [77] una versión de la desigualdad de Hölder sobre espacios de Orlicz que tiene a (2.1.8) y (2.1.9) como casos particulares.

Proposición 2.1.10 ([77]). *Si Φ_1, Φ_2, Ψ son funciones de Young finitas tales que*

$$\Phi_1^{-1}(t)\Phi_2^{-1}(t) \leq \Psi^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0$$

entonces

$$||fg||_{L^\Psi(\Omega)} \leq 2||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}, \tag{2.1.11}$$

para todo par de funciones $f \in L^{\Phi_1}(\Omega)$ y $g \in L^{\Phi_2}(\Omega)$.

Demostración. Basta suponer $||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)} > 0$ y $||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)} > 0$ ya que, en otro caso, $f = 0$ o $g = 0$ en casi todo punto y la desigualdad es trivial.

Como

$$\Phi_1^{-1}(t)\Phi_2^{-1}(t) \leq \Psi^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0,$$

sabemos que vale la desigualdad de Young generalizada

$$\Psi(st) \leq \Phi_1(s) + \Phi_2(t), \quad \forall\, s, t \geq 0,$$

dada en el Lema 1.1.25. Aplicándola a $s = |f(x)|/||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}$ y $t = |g(x)|/||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}$, utilizando que Ψ es convexa y el Lema 2.1.4*(i)*, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi\left(\frac{|f(x)g(x)|}{2||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Psi\left(\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_1\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}}\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_2\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)dx\\ &\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

Finalmente, por el Lema 2.1.4*(iii)*, se obtiene la desigualdad deseada. □

Recordemos que para una función de Young Φ habíamos definido el promedio generalizado de f en el Capítulo 1. Sin embargo, no es necesario que Φ sea de Young. Basta suponer Φ finita con $\Phi(0) = 0$. Usando el funcional $\varrho_{\Phi,\Omega}$, dicho promedio se escribe de la siguiente manera

$$||f||_{\Phi,B} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B\cap\Omega|}\varrho_{\Phi,\Omega}(f\chi_B/\lambda) \leq 1\right\}, \tag{2.1.12}$$

sobre una bola $B = B(x,R)$ con centro $x \in \Omega$ y radio $R > 0$, para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Es fácil ver que si $\Phi(t) = t$, $||f||_{\Phi,B}$ es el promedio usual $\frac{1}{|B\cap\Omega|}\int_B |f|$ y si $\Phi(t) = t^p$ con $p \geq 1$, entonces $||f||_{\Phi,B} := ||f||_{p,B} = \left(\frac{1}{|B\cap\Omega|}\int_B |f|^p\right)^{1/p}$.

Para estos promedios también se tiene una desigualdad de Hölder generalizada gracias, nuevamente, al Lema 1.1.25.

Proposición 2.1.13 ([77])**.** *Si Φ_1, Φ_2, Ψ son funciones de Young finitas tales que*

$$\Phi_1^{-1}(t)\Phi_2^{-1}(t) \leq \Psi^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0$$

entonces

$$||fg||_{\Psi,B} \leq 2||f||_{\Phi_1,B}||g||_{\Phi_2,B}, \tag{2.1.14}$$

para todo par de funciones $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Observación 2.1.15. En particular, si $\Psi(t) = t$, se tiene la desigualdad

$$\frac{1}{|B\cap\Omega|}\int_B |f(x)g(x)|dx \leq 2||f||_{\Phi_1,B}||g||_{\widetilde{\Phi_1},B}, \tag{2.1.16}$$

para todo par de funciones $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Demostración. La demostración es similar a la de la Proposición 2.1.10, integrando sobre bolas B con centro en Ω y dividiendo por $|B\cap\Omega|$. □

Una propiedad que tienen los espacios L^p es que su norma puede escibirse en términos de su espacio dual $L^{p'}$ en la forma

$$||f||_{p,\Omega} = \sup_{||g||_{p',\Omega}\leq 1} \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

lo cual tiene que ver, en parte, con que $\Phi(t) = t^p/p$ y $\widetilde{\Phi}(t) = t^{p'}/p'$ satisfacen la desigualdad de Young. Veremos en el siguiente resultado que esto puede generalizarse al contexto de espacios de Orlicz.

Lema 2.1.17. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea Φ una función de Young y sea $\widetilde{\Phi}$ su función complementaria, ambas finitas. Definimos el funcional*

$$|||f|||_{L^\Phi(\Omega)} := \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega f(x)g(x).$$

Entonces, para toda $f \in L^\Phi(\Omega)$ se tienen las desigualdades

$$||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq |||f|||_{L^\Phi(\Omega)} \leq 2||f||_{L^\Phi(\Omega)}. \tag{2.1.18}$$

Más aún,

$$L^\Phi(\Omega) = \{f : |||f|||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty\}.$$

Demostración. Veamos que valen las desigualdades en (2.1.18) para toda $f \in L^\Phi(\Omega)$. Sea $g \in L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ con $||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)} \leq 1$. Entonces, por la desigualdad de Hölder (2.1.8) tenemos que

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq 2||f||_{L^\Phi(\Omega)}||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)} \leq 2||f||_{L^\Phi(\Omega)}.$$

Tomando supremo sobre todas las funciones g obtenemos la desigualdad

$$|||f|||_{L^\Phi(\Omega)} \leq 2||f||_{L^\Phi(\Omega)}.$$

En consecuencia, $L^\Phi(\Omega) \subseteq \{f : |||f|||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty\}$.

Ahora supongamos que $|||f|||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty$. Si $|||f|||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto. En efecto, si existiera algún conjunto E con $0 < |E| < \infty$ donde $f \neq 0$, entonces $g = \widetilde{\Phi}^{-1}(1/|E|)\mathrm{sgn}(f)\chi_E \in L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ con

$$\varrho_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}(g) = \int_E \Phi\left(\widetilde{\Phi}^{-1}(1/|E|)|\mathrm{sgn}(f(x))|\right) dx = \int_E \Phi\left(\widetilde{\Phi}^{-1}(1/|E|)\right) dx = 1.$$

En consecuencia,

$$|||f|||_{L^\Phi(\Omega)} \geq \int_\Omega f(x)g(x)dx = \widetilde{\Phi}^{-1}(1/|E|)\int_E |f(x)|dx > 0,$$

lo que contradice lo supuesto. Por lo tanto, $f = 0$ en casi todo punto y así $||f||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$.

Supongamos entonces que $|||f|||_{L^\Phi(\Omega)} > 0$ y que, además, f es una función simple. Luego, la función

$$g(x) = \phi\left(\frac{f(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right)$$

también es una función simple y pertenece a $L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, siendo ϕ la derivada de Φ (ver Lema 1.1.3). Luego, del Lema 1.1.17 vale la igualdad en la desigualdad de Young

$$\Phi\left(\frac{f(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) + \widetilde{\Phi}(g(x)) = \frac{f(x)g(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}$$

para cada $x \in \Omega$. Esto implica que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{f(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx + \int_\Omega \widetilde{\Phi}(g(x))dx = \left|\int_\Omega \frac{f(x)g(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}} dx\right|. \tag{2.1.19}$$

Por otro lado, de la definición de $|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}$ es fácil ver que

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq \max\left\{1, ||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}\right\} |||f|||_{L^\Phi(\Omega)},$$

por lo que el lado derecho de (2.1.19) es, a lo sumo, $\max\left\{1, ||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}\right\}$. Si $||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)} \leq 1$, por el Lema 2.1.4*(iii)* se tiene que $\int_\Omega \widetilde{\Phi}(g(x))dx \leq 1$ y, así,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{f(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx \leq 1.$$

Si fuera $||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)} > 1$, entonces $\max\left\{1, ||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}\right\} = ||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)}$ y, por el mismo lema, $||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)} \leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}(g(x))dx$, de donde se obtiene que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{f(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx = 0.$$

En cualquier caso,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{f(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx \leq 1,$$

lo que implica que

$$||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq |||f|||_{L^\Phi(\Omega)}$$

para toda función f simple. Si ahora f es una función medible con $0 < |||f|||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty$, existe una sucesión de funciones simples no-negativas $\{f_n\}$ crecientes a $|f|$ puntualmente, de donde se tiene que $|||f_n|||_{L^\Phi(\Omega)} \leq |||f|||_{L^\Phi(\Omega)}$. En consecuencia,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{f_n(x)}{|||f|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx \leq \int_\Omega \Phi\left(\frac{f_n(x)}{|||f_n|||_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dx \leq 1$$

por lo probado antes. Finalmente, haciendo $n \to \infty$, por el teorema de la convergencia monótona se sigue que

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_{L^{\Phi}(\Omega)}}\right) dx \leq 1,$$

y nuevamente obtenemos la desigualdad $||f||_{L^{\Phi}(\Omega)} \leq |||f|||_{L^{\Phi}(\Omega)}$. Esto implica la otra contención $\left\{f : |||f|||_{L^{\Phi}(\Omega)} < \infty\right\} \subseteq L^{\Phi}(\Omega)$. $\square$

A lo largo del Capítulo 3 consideraremos, además de espacios de Orlicz asociados a funciones de Young, espacios definidos a través de funciones no-negativas $\mathcal{B}$ para las cuales existe una función $b : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua por izquierda que satisface $b(0) = 0$ tal que

$$\mathcal{B}(t) = \int_0^t b(s)ds. \tag{2.1.20}$$

En general, esta función podría no ser de Young como muestra el Lema 1.1.3, ya que b puede ser, por ejemplo, decreciente en algún intervalo o nula alrededor del cero. Sin embargo, puede definirse la inversa generalizada para $\mathcal{B}$ como en (1.1.8).

Otra clase de funciones que consideraremos para definir espacios de Orlicz y que resulta ser un subconjunto de la clase de funciones de Young, es la clase de N-funciones. Damos aquí la definición correspondiente y un resultado que involucra N-funciones que será de utilidad en el estudio del control de operadores en el Capítulo 3.

Definición 2.1.21. Sea $\mathcal{A} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función de Young. Decimos que $\mathcal{A}$ es una N-función si, además,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(t)}{t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{\mathcal{A}(t)}{t} = +\infty.$$

Lema 2.1.22. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos N-funciones que satisfacen la condición Δ_2. Entonces, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ es también una N-función en la clase Δ_2.*

Demostración. Es inmediato que $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ es una función de Young ya que la composición de funciones crecientes y convexas es una función creciente y convexa, $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(0) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(t) = +\infty$. Además, de la monotonía de $\mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \in \Delta_2$.

Resta ver que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(t)}{t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(t)}{t} = +\infty.$$

Puesto que $\mathcal{B}(t)$, $\mathcal{B}(t)/t$ y $\mathcal{A}(t)/t$ tienden a 0 cuando $t \to 0^+$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(\mathcal{B}(t))}{\mathcal{B}(t)} \frac{\mathcal{B}(t)}{t} = 0.$$

Y, análogamente, como $\mathcal{B}(t)$, $\mathcal{B}(t)/t$ y $\mathcal{A}(t)/t$ tienden a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$, también $\lim\limits_{t\to+\infty} (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(t)/t = +\infty$. $\square$

2.2. Espacios de Lebesgue de exponente variable

Desde principios de los años ’90, los espacios de Lebesgue de exponente variable han adquirido gran notoriedad debido a que resultan ser el ámbito adecuado de estudio de una gran variedad de problemas relacionados con fenómenos físicos, entre los cuales se destacan el estudio de fluidos electroreológicos, que son fluidos que cambian de viscosidad ante la presencia de un campo eléctrico (ver [87]), el estudio del flujo de fluidos en medios porosos (ver [2]), magnetoestática (ver [16]) y procesos de restauración de imágenes (ver [18]). El planteo de estos problemas está íntimamente relacionado con el estudio de propiedades de regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales en el contexto de los espacios mencionados. Dichas soluciones están controladas en algún sentido por ciertos operadores del análisis armónico, cuyas propiedades de regularidad es necesario conocer para así establecer propiedades para las primeras.

Damos a continuación la definición de los espacios $L^{p(\cdot)}$ y algunas de sus características más importantes.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $p : \Omega \to [1, \infty)$ una función medible, a la que, de ahora en adelante, denominaremos *función exponente*. Dado un subconjunto medible E de Ω, escribiremos

$$p_E^- = \operatorname*{ess\,ínf}_{x\in E}\; p(x) \quad \text{y} \quad p_E^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}\; p(x)$$

y, por simplicidad, denotaremos con p^- y p^+ al ínfimo y al supremo sobre todo el espacio Ω.

Llamaremos $\mathcal{P}(\Omega)$ al conjunto de todos los exponentes definidos sobre Ω y denotaremos con $\mathcal{P}^*(\Omega)$ al conjunto de exponentes acotados, es decir, el conjunto de exponentes p con $p^+ < \infty$.

Definición 2.2.1. Dado $\mathcal{P}(\Omega)$, decimos que una función medible f pertenece a $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si el funcional

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) := \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx$$

es finito para algún $\lambda > 0$.

En realidad, a lo largo de la tesis sólo consideraremos exponentes acotados, por lo que, en ese caso, decir que $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es equivalente a que

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Es claro que si esto último ocurre, entonces $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tomando $\lambda = 1$. Recíprocamente, si existe $\lambda > 0$ tal que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) < \infty$, entonces

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \le \text{máx}\{\lambda^{-p^-}, \lambda^{-p^+}\} \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx < \infty.$$

Observación 2.2.2. Notar que si $p(x) \equiv p$, $L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^p(\Omega)$, el espacio de Lebesgue clásico.

El funcional $\varrho_{p(\cdot),\Omega}$ satisface las siguientes propiedades, que fueron probadas en [57] (ver también [26]), muchas de las cuales se saben válidas si el exponente $p(\cdot)$ es constante.

Lema 2.2.3 ([57])**.** *Sea $p \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

(i) *$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$ es no negativa para toda función f y $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$;*

(ii) *$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(-f) = \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$ para toda f;*

(iii) *$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$ es convexa en el sentido que, para todo par de funciones f y g, y para todo $\theta \in [0,1]$, $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(\theta f + (1-\theta)g) \leq \theta\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) + (1-\theta)\varrho_{p(\cdot),\Omega}(g)$;*

(iv) *$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) \leq \varrho_{p(\cdot),\Omega}(g)$ siempre que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para casi todo $x \in \Omega$;*

(v) *si $0 < \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) < \infty$, el mapeo $\lambda \mapsto \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)$ es continuo y decreciente sobre $[1,\infty)$.*

Demostración. La demostración de *(i)* es inmediata por ser $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$ la integral de una función no-negativa, y *(ii)* se tiene trivialmente de la igualdad $|f| = |-f|$.

Probemos la propiedad *(iii)*. Sea $\theta \in [0,1]$, y f, g dos funciones definidas sobre Ω. Luego, dado que $p(x) \geq 1$ para todo $x \in \Omega$, usamos la convexidad de la función $h(t) = |t|^{p(x)}$ para cada x fijo y la desigualdad triangular para obtener

$$\begin{aligned}\varrho_{p(\cdot),\Omega}(\theta f + (1-\theta)g) &= \int_\Omega |\theta f(x) + (1-\theta)g(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq \int_\Omega \theta|f(x)|^{p(x)} + (1-\theta)|g(x)|^{p(x)}dx \\ &= \theta\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) + (1-\theta)\varrho_{p(\cdot),\Omega}(g).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varrho_{p(\cdot),\Omega}$ es convexa.

Es fácil ver que vale *(iv)* pues, si $|f(x)| \geq |g(x)|$ para casi todo $x \in \Omega$, $|f(x)|^{p(x)} \geq |g(x)|^{p(x)}$ para casi todo $x \in \Omega$ y luego integramos.

Demostremos *(v)*. Veamos primero que el mapeo es decreciente. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in [1,\infty)$ con $\lambda_1 < \lambda_2$. Luego, $|f(x)/\lambda_1| \geq |f(x)/\lambda_2|$ para todo $x \in \Omega$. Como $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) < \infty$ y $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)$, por *(iv)* resulta $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) < \infty$ para todo $\lambda \in [1,\infty)$ y, entonces, $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_1) \geq \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_2)$. Es decir, la función $\lambda \mapsto \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)$ es decreciente en $[1,\infty)$.

Finalmente, probemos la continuidad del funcional $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)$ respecto de λ. Sea $\lambda_0 \in [1,\infty)$ y $\{\lambda_n\}$ una sucesión en $[1,\infty)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Definimos la sucesión de funciones $f_n(x) = |f(x)/\lambda_n|^{p(x)}$, las cuales satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left|\frac{f(x)}{\lambda_0}\right|^{p(x)}, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Además, como $\lambda_n \in [1,\infty)$, resulta que $|f_n(x)| \leq |f(x)|^{p(x)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero $|f(x)|^{p(x)}$ es integrable pues $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) < \infty$, de donde, por el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene que

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_0) = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda_0}\right|^{p(x)} dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda_n}\right|^{p(x)} dx = \lim_{n\to\infty} \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_n)$$

Por lo tanto, la función $\lambda \mapsto \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)$ es continua en $[1,\infty)$. □

Notemos que el funcional $\varrho_{p(\cdot),\Omega}$ no es una norma aún cuando satisface las propiedades *(i)* y *(ii)*, pues ni la propiedad de homogeneidad ni la desigualdad triangular son ciertas. Las propiedades del Lema 2.2.3 caracterizan a $\varrho_{p(\cdot),\Omega}$ como la modular convexa en el sentido de [72]. Sin embargo, a partir de la modular convexa se puede definir la siguiente cantidad, que resultará ser una norma para el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Definición 2.2.4. Dados $p \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, definimos el funcional

$$||f||_{p(\cdot),\Omega} := \inf\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq 1\}.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, escribiremos simplemente $||\cdot||_{p(\cdot),\mathbb{R}^n} = ||\cdot||_{p(\cdot)}$ y, cuando el exponente $p(x) \equiv p$, denotaremos al funcional por $||\cdot||_{p(\cdot),\Omega} = ||\cdot||_{p,\Omega}$.

Observemos que, a diferencia de los espacios L^p clásicos donde se tenía la relación $||f||_{p,\Omega} = \varrho_{p,\Omega}(f)^{1/p}$, esto ya no es posible cuando p no es constante. Sin embargo, se tienen las siguientes relaciones entre la modular $\varrho_{p(\cdot),\Omega}$ y el funcional $||\cdot||_{p(\cdot),\Omega}$, las cuales serán de gran utilidad para la obtención de los resultados de continuidad en el Capítulo 4.

Lema 2.2.5 ([57], [26])**.** *Sea $p \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

(i) $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 0$ *si y sólo si* $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = 0$*;*

(ii) $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/||f||_{p(\cdot),\Omega}) = 1$ *siempre que* $0 < ||f||_{p(\cdot),\Omega} < \infty$*;*

(iii) Si $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq 1$ *con* $\lambda > 0$*, entonces* $||f||_{p(\cdot),\Omega} \leq \lambda$ *y, si* $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) \leq C$ *para alguna constante* $C > 0$*, entonces* $||f||_{p(\cdot),\Omega} \leq \min\{C^{1/p^-}, C^{1/p^+}\}$.

(iv) Si $||f||_{p(\cdot),\Omega} \leq 1$*, entonces* $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) \leq ||f||_{p(\cdot),\Omega}$*. Más aún,* $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 1$ *si y sólo si* $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = 1$.

(v) Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones no-negativas tales que* $f_n \nearrow f$*, entonces* $||f_n||_{p(\cdot),\Omega} \nearrow ||f||_{p(\cdot),\Omega}$

Demostración. Como vimos, si $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)=0$, entonces $f(x)=0$ para casi todo $x\in\Omega$ y entonces $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)=0$ para todo $\lambda>0$, de donde $||f||_{p(\cdot),\Omega}=0$. Recíprocamente, si $||f||_{p(\cdot),\Omega}=0$, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $0<\lambda_n<1/n$ tal que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_n)\le 1$. Luego, para cada $n\in\mathbb{N}$ se obtiene que

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx \le \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda_n}\right)^{p(x)} dx \le 1, \tag{2.2.6}$$

es decir, $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)\le\lambda_n<1/n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Haciendo $n\to\infty$, resulta $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)=0$.

Veamos que vale *(ii)*. Primero mostraremos que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/||f||_{p(\cdot),\Omega})\le 1$. Por definición de $||f||_{p(\cdot),\Omega}$, existe $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente a $||f||_{p(\cdot),\Omega}<\infty$ tal que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_n)\le 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por el Lema de Fatou tenemos que

$$\begin{aligned}\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right) &= \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right|^{p(x)} dx = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)}{\lambda_n}\right|^{p(x)} dx\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda_n}\right|^{p(x)} dx = \liminf_{n\to\infty}\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\lambda_n}\right).\end{aligned}$$

Como para todo $n\in\mathbb{N}$, $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_n)\le 1$, se sigue que $\liminf_{n\to\infty}\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda_n)\le 1$ y, por la desigualdad anterior, obtenemos que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/||f||_{p(\cdot),\Omega})\le 1$.

Veamos ahora que dicha cantidad es exactamente 1. Para ello, notemos que cualquiera sea $0<\lambda<||f||_{p(\cdot),\Omega}$ vale

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)\le (||f||_{p(\cdot),\Omega}/\lambda)^{p^+}\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(f/||f||_{p(\cdot),\Omega}\right)$$

por ser $p^+\ge 1$. Así, si ocurriera que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(f/||f||_{p(\cdot),\Omega}\right)<1$, tendríamos para todos esos valores de λ que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)<(||f||_{p(\cdot),\Omega}/\lambda)^{p^+}$. Luego, haciendo $\lambda\to||f||_{p(\cdot),\Omega}$ se tiene que

$$\lim_{\lambda\to||f||_{p(\cdot),\Omega}}\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le\lim_{\lambda\to||f||_{p(\cdot),\Omega}}\left(\frac{||f||_{p(\cdot),\Omega}}{\lambda}\right)^{p^+}=1$$

Existiría, entonces, al menos un $\lambda<||f||_{p(\cdot),\Omega}$ que verifica $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)\le 1$, lo que contradice que $||f||_{p(\cdot),\Omega}$ es el ínfimo. Luego, debe ser $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/||f||_{p(\cdot),\Omega})=1$.

Para probar *(iii)*, notemos que, si $\lambda>0$ es tal que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)\le 1$, entonces λ interviene en el conjunto $\{\lambda>0:\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)\le 1\}$ y resulta que su ínfimo $||f||_{p(\cdot),\Omega}\le\lambda$.

Supongamos ahora que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)\le C$ para alguna constante $C>0$. Si $C\le 1$, entonces

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/C^{1/p^-})\le\frac{1}{C}\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)\le 1.$$

Si, en cambio, $C>1$,

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/C^{1/p^+})\le\frac{1}{C}\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f)\le 1.$$

Luego, de ambos casos y en virtud de lo probado antes,

$$||f||_{p(\cdot),\Omega} \leq \text{mín}\{C^{1/p^-}, C^{1/p^+}\}.$$

Por último, probemos *(iv)*. Si $||f||_{p(\cdot),\Omega} > 0$, escribiendo $f = ||f||_{p(\cdot),\Omega}(f/||f||_{p(\cdot),\Omega})$, usamos la convexidad de $\varrho_{p(\cdot),\Omega}$ con $\theta = ||f||_{p(\cdot),\Omega}$. Puesto que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(f/||f||_{p(\cdot),\Omega}\right) = 1$ por *(ii)*, se sigue que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) \leq ||f||_{p(\cdot),\Omega}$. Si $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 0$, $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = 0 = ||f||_{p(\cdot),\Omega}$ en virtud de *(i)*.

Ahora bien, de *(ii)*, $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 1$, entonces $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = \varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(f/||f||_{p(\cdot),\Omega}\right) = 1$. Recíprocamente, si $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = 1$, entonces de *(iii)* se tiene que $||f||_{p(\cdot),\Omega} \leq 1$. Si fuera que $||f||_{p(\cdot),\Omega} < 1$, entonces existe $||f||_{p(\cdot),\Omega} < \lambda < 1$ tal que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq 1$ y siguiendo las ideas de (2.2.6), resulta que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) \leq \lambda < 1$, lo cual es una contradicción. Así, debe ser $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 1$. □

En virtud de los Lemas 2.2.3 y 2.2.5, $||\cdot||_{p(\cdot),\Omega}$ es una norma para $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Lema 2.2.7 ([57]). *Sea $p \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, el funcional $||\cdot||_{p(\cdot),\Omega}$ define una norma en el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Claramente, $||f||_{p(\cdot),\Omega} \geq 0$ por ser el ínfimo de un conjunto de números reales positivos. Además, como vimos en el lema anterior, $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 0$ es equivalente a que $\varrho_{p(\cdot),\Omega}(f) = 0$, lo que equivale también a decir que $f = 0$ en casi todo punto por el Lema 2.2.3*(i)*.

Verifiquemos la homogeneidad del funcional. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Claramente, para $\alpha = 0$, se tiene $||\alpha f||_{p(\cdot),\Omega} = |\alpha|||f||_{p(\cdot),\Omega}$. Supongamos $\alpha \neq 0$. En virtud de Lema 2.2.3*(ii)* obtenemos

$$\begin{aligned}
||\alpha f||_{p(\cdot),\Omega} &= \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{\alpha f}{\lambda}\right) \leq 1\right\} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\frac{\lambda}{|\alpha|}}\right) \leq 1\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{|\alpha|\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 : \varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\frac{\lambda}{|\alpha|}}\right) \leq 1\right\} = \text{ínf}\left\{|\alpha|\beta > 0 : \varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{\beta}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| \,\text{ínf}\left\{\beta > 0 : \varrho_{p(\cdot),\Omega}(f/\beta) \leq 1\right\} = |\alpha|||f||_{p(\cdot),\Omega}.
\end{aligned}$$

Por último, veamos que vale la desigualdad triangular. Sean f y g dos funciones medibles con $||f||_{p(\cdot),\Omega}$, $||g||_{p(\cdot),\Omega} < \infty$. Notemos que si $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 0$ ó $||g||_{p(\cdot),\Omega} = 0$, vale la igualdad $||f+g||_{p(\cdot),\Omega} = ||f||_{p(\cdot),\Omega} + ||g||_{p(\cdot),\Omega}$. Supongamos, pues, que $||f||_{p(\cdot),\Omega} > 0$ y $||g||_{p(\cdot),\Omega} > 0$.

Observemos que si tomamos

$$\beta = \frac{||f||_{p(\cdot),\Omega}}{||f||_{p(\cdot),\Omega} + ||g||_{p(\cdot),\Omega}} \;\text{ y }\; \gamma = \frac{||g||_{p(\cdot),\Omega}}{||f||_{p(\cdot),\Omega} + ||g||_{p(\cdot),\Omega}}$$

entonces $\beta+\gamma=1$ y

$$\frac{f+g}{||f||_{p(\cdot),\Omega}+||g||_{p(\cdot),\Omega}}=\beta\frac{f}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}+\gamma\frac{g}{||g||_{p(\cdot),\Omega}}.$$

Así, por la convexidad de $\varrho_{p(\cdot),\Omega}$ y el Lema 2.2.5*(ii)*,

$$\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f+g}{||f||_{p(\cdot),\Omega}+||g||_{p(\cdot),\Omega}}\right)\leq\beta\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{f}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)+\gamma\varrho_{p(\cdot),\Omega}\left(\frac{g}{||g||_{p(\cdot),\Omega}}\right)=\beta+\gamma=1.$$

Finalmente, del Lema 2.2.5*(iii)* se tiene que $||f+g||_{p(\cdot),\Omega}\leq||f||_{p(\cdot),\Omega}+||g||_{p(\cdot),\Omega}$. □

Con esta norma, el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ resulta ser de Banach, como se mostró en [57].

Teorema 2.2.8 ([57])**.** *Dado $p\in\mathcal{P}^*(\Omega)$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach provisto con la norma $||\cdot||_{p(\cdot),\Omega}$.*

Uno podría pensar que los espacios $L^{p(\cdot)}$ heredan muchas de las propiedades de los espacios de Lebesgue clásicos, cuando el exponente p es constante. Sin embargo, el operador traslación no es, en general, continuo sobre $L^{p(\cdot)}$. Más precisamente, dado cualquier exponente p no constante, existe $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tau_h f(\cdot)=f(\cdot+h)\notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para algún $h\in\mathbb{R}^n$ (ver [32] o [57]). En consecuencia, la convolución de funciones $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ con funciones integrables g puede no pertenecer a $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, esto es, no vale en general la desigualdad de Young $||f*g||_{p(\cdot)}\lesssim||f||_{p(\cdot)}||g||_1$. Dado que estas propiedades ya no son ciertas, muchos de los resultados que se verifican sobre los espacios de Lebesgue clásicos no son válidos en el contexto variable. A pesar de ello, muchos otros resultados se siguen verificando, pero requieren de hipótesis adicionales y de nuevas técnicas para probarlos.

A continuación, damos algunos resultados muy importantes que utilizaremos frecuentemente en el Capítulo 4, muchos de los cuales generalizan a los ya conocidos sobre espacios de Lebesgue clásicos. El primero de ellos es la generalización de la desigualdad de Hölder.

Proposición 2.2.9 ([57])**.** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p\in\mathcal{P}^*(\Omega)$ con $p^->1$. Sea $p'\in\mathcal{P}(\Omega)$ tal que $1/p(x)+1/p'(x)=1$ para todo $x\in\Omega$. Entonces, para toda $f\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y toda $g\in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ se tiene que*

$$\int_\Omega|f(x)g(x)|dx\leq c_p||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{p'(\cdot),\Omega}$$

donde $c_p=1+1/p^--1/p^+$.

Observación 2.2.10. Si $p(x)\equiv p>1$, $c_p=1$ y se recupera la clásica desigualdad de Hölder.

Demostración de la Proposición 2.2.9: Puesto que la desigualdad es trivial si $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 0$ o $||g||_{p'(\cdot),\Omega} = 0$, podemos suponer que ambas normas son no nulas.

Como $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$, vale la desigualdad de Young clásica dada en (1.1.20) para cada $x \in \Omega$ fijo. Esto es, vale la siguiente desigualdad

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{p'(\cdot),\Omega}} \leq \frac{1}{p(x)}\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)}\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{p'(\cdot),\Omega}}\right)^{p'(x)}.$$

Integrando sobre Ω y usando la propiedad *(ii)* del Lema 2.2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{f(x)g(x)}{||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{p'(\cdot),\Omega}}dx &\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(\frac{f(x)}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p'(x)}\left(\frac{g(x)}{||g||_{p'(\cdot),\Omega}}\right)^{p'(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{p^-}\int_\Omega \left(\frac{f(x)}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)} dx + \frac{1}{(p')^-}\int_\Omega \left(\frac{g(x)}{||g||_{p'(\cdot),\Omega}}\right)^{p'(x)} dx \\ &= \frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-}.\end{aligned}$$

Es fácil ver que $(p')^- = (p^+)'$, de donde se tiene que

$$\frac{1}{(p')^-} = \frac{1}{(p^+)'} = 1 - \frac{1}{p^+}.$$

Así,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq c_p||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{p'(\cdot),\Omega}$$

como queríamos probar. □

En algunos casos resultará útil usar una variante de la desigualdad anterior que involucra tres exponentes, la cual generaliza a la desigualdad (2.1.9) para exponentes constantes.

Proposición 2.2.11 ([26]). *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean $p, q \in \mathcal{P}^*(\Omega)$. Sea $r \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $1/r(x) = 1/p(x) + 1/q(x)$ para todo $x \in \Omega$ y supongamos que $r^- > 1$ y que $(p/r)^-, (q/r)^- > 1$. Entonces, para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y toda $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ se tiene que*

$$||fg||_{r(\cdot),\Omega} \leq C||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{q(\cdot),\Omega}$$

para alguna constante $C > 0$.

Demostración. Notemos que de la relación entre r, p, q se tiene que $1 = 1/(p(x)/r(x)) + 1/(q(x)/r(x))$ y como $(p/r)^-, (q/r)^- > 1$, vale la desigualdad de Young (1.1.20) con exponentes $p(x)/r(x)$ y $q(x)/r(x)$ para cada x fijo, esto es,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{q(\cdot),\Omega}} \leq \frac{1}{\frac{p(x)}{r(x)}}\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{\frac{p(x)}{r(x)}} + \frac{1}{\frac{q(x)}{r(x)}}\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{q(\cdot),\Omega}}\right)^{\frac{q(x)}{r(x)}}.$$

Elevando a la potencia $r(x)$ y usando que la función $t \mapsto |t|^{r(x)}$ es convexa para cada x fijo, tenemos que

$$\left(\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{q(\cdot),\Omega}}\right)^{r(x)} \leq \frac{1}{\frac{p(x)}{r(x)}}\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)} + \frac{1}{\frac{q(x)}{r(x)}}\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{q(\cdot),\Omega}}\right)^{q(x)}.$$

Procediendo como en la prueba de la Proposición 2.2.9 tenemos que

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{q(\cdot),\Omega}}\right)^{r(x)} dx \leq \frac{1}{(p/r)^-} + \frac{1}{(q/r)^-} = K.$$

Usando el Lema 2.2.5*(iii)* tenemos que

$$\left\|\frac{fg}{||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{q(\cdot),\Omega}}\right\|_{r(\cdot),\Omega} \leq \text{mín}\{K^{1/r^-}, K^{1/r^+}\},$$

y de la homogeneidad de la norma se sigue

$$||fg||_{r(\cdot),\Omega} \leq C||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{q(\cdot),\Omega}$$

con $C = \text{mín}\{K^{1/r^-}, K^{1/r^+}\}$. $\square$

De manera similar a como se hizo en la sección anterior sobre espacios de Orlicz, podemos generalizar a $L^{p(\cdot)}$, en cierto sentido, la siguiente identidad

$$||f||_{p,\Omega} = \sup_{||g||_{p',\Omega}\leq 1} \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

como muestra la proposición que sigue probada en [57].

Proposición 2.2.12 ([57]). *Sea $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ y*

$$|||f|||_{p(\cdot),\Omega} := \sup_{||g||_{p'(\cdot),\Omega}\leq 1} \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Entonces, para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ se tienen las desigualdades

$$||f||_{p(\cdot),\Omega} \leq |||f|||_{p(\cdot),\Omega} \leq c_p||f||_{p(\cdot),\Omega}, \tag{2.2.13}$$

donde c_p es la constante que aparece la Proposición 2.2.9. Más aún,

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f : |||f|||_{p(\cdot),\Omega} < \infty\}.$$

Demostración. Veamos que valen las desigualdades en (2.2.13) para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Sea $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ con $||g||_{p'(\cdot),\Omega} \leq 1$. Luego, por la desigualdad de Hölder generalizada tenemos que

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq c_p||f||_{p(\cdot),\Omega}||g||_{p'(\cdot),\Omega} \leq c_p||f||_{p(\cdot),\Omega}.$$

Tomando supremo sobre todas las funciones g con $||g||_{p'(\cdot),\Omega} \leq 1$, resulta

$$|||f|||_{p(\cdot),\Omega} \leq c_p ||f||_{p(\cdot),\Omega}.$$

Se obtiene así la segunda desigualdad y, en consecuencia, $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subseteq \{f : |||f|||_{p(\cdot),\Omega} < \infty\}$.

Ahora supongamos que $|||f|||_{p(\cdot),\Omega} < \infty$. Si $|||f|||_{p(\cdot),\Omega} = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto. En efecto, si existiera algún conjunto E con $0 < |E| < \infty$ donde $f \neq 0$, entonces $g = \text{mín}\{|E|^{-1/(p')^-}, |E|^{-1/(p')^+}\}\text{sgn}(f)\chi_E \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ satisface

$$\varrho_{p'(\cdot),\Omega}(g) = \int_E \left(\text{mín}\{|E|^{-1/(p')^-}, |E|^{-1/(p')^+}\}|\text{sgn}(f(x))|\right)^{p'(x)} dx \leq 1.$$

En consecuencia,

$$|||f|||_{p(\cdot),\Omega} \geq \int_\Omega f(x)g(x)dx = \text{mín}\{|E|^{-1/(p')^-}, |E|^{-1/(p')^+}\} \int_E |f(x)|dx > 0,$$

lo que contradice lo supuesto. Por lo tanto, $f = 0$ en casi todo punto y así $||f||_{p(\cdot),\Omega} = 0$.

Supongamos entonces que $|||f|||_{p(\cdot),\Omega} > 0$. Como $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $0 < ||f||_{p(\cdot),\Omega} < \infty$. Además, como $p^- > 1$, $p'(x) \leq (p')^+ = (p-)' < \infty$ para todo $x \in \Omega$. Luego, si definimos la función

$$g(x) = \left(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)-1} \text{sgn}(f(x)),\ x \in \Omega$$

tenemos que

$$\varrho_{p'(\cdot),\Omega}(g) = \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{(p(x)-1)p'(x)} dx = \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)} dx = 1,$$

lo que se traduce en que $||g||_{p'(\cdot),\Omega} = 1$ por el Lema 2.2.5*(iv)*. Así, concluimos que

$$|||f|||_{p(\cdot),\Omega} \geq \int_\Omega f(x)g(x)dx = ||f||_{p(\cdot),\Omega} \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(\cdot),\Omega}}\right)^{p(x)} dx = ||f||_{p(\cdot),\Omega}. \qquad \square$$

2.2.1. Condiciones de tipo logarítmicas

Las condiciones de tipo logarítmicas que se definirán a continuación surgen del estudio de las propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$. En primera instancia, en [32], el autor prueba que si $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ es un exponente que satisface la siguiente condición

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log(|x-y|)} \quad \text{si } |x-y| < 1/2 \tag{2.2.14}$$

y, además, es constante fuera de una bola fija centrada en el origen, entonces dicho operador está acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Posteriormente, en [28], los autores reemplazan la condición de constancia de p fuera de una bola por la siguiente condición de decaimiento en el infinito

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)} \quad \forall |y| \geq |x|, \tag{2.2.15}$$

que, junto con la condición (2.2.14), aseguran el mismo resultado. Variantes de estas condiciones fueron dadas en [73] y resultados similares en diversos contextos fueron probados en [47] y [56], entre otros.

Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, dado $p \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ diremos que p es log-Hölder continuo, y lo denotaremos por $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$, si p satisface (2.2.14) y (2.2.15) para $x, y \in \Omega$. Cabe observar que si Ω es acotado, sólo se piensa en la condición (2.2.14) ya que la segunda condición es siempre válida.

Un ejemplo de exponentes que satisfacen la condición (2.2.14) son las funciones Lipschitz ya que, si $|x - y| < 1/2$,

$$|p(x) - p(y)| \leq C|x - y| \leq \frac{C}{\log(1/|x - y|)}.$$

Si consideramos exponentes de la forma

$$p(x) = p_\infty + \frac{C}{\log(e + |x|)^a}$$

con $p_\infty, a \geq 1$ y $C > 0$, es fácil ver con la definición equivalente dada en el Lema 2.2.16 *(vi)*, el cual sigue a continuación, que p satisface la condición (2.2.15). Lo mismo ocurre con exponentes de la forma

$$p(x) = p_\infty + \frac{C}{(e + |x|)^b}$$

con $p_\infty \geq 1$ y $b, C > 0$. En éste último caso, la constante de la condición log-Hölder dependerá, en general, de la potencia b.

En el siguiente lema se dan algunas propiedades relativas a los exponentes log-Hölder continuos.

Lema 2.2.16. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Dados $p, q \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \geq 1/p^-$, valen las siguientes propiedades:*

(i) $p + q \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$;

(ii) $cp \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$;

(iii) $p.q \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ *siempre que* $p^+, q^+ < \infty$;

(iv) $1/p$ *satisface* (2.2.14) *y* (2.2.15). *Más aún, si esto ocurre y* $p^+ < \infty$, *entonces* $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$;

(v) $\min\{p, q\} \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ *y* $\max\{p, q\} \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$*;*

(vi) p *satisface* (2.2.15) *si y sólo si existen constantes positivas* C_∞ *y* p_∞ *tales que, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)};$$

(vii) si p *satisface* (2.2.14)*, entonces* p *es una función uniformemente continua;*

(viii) si $F = B \setminus B(0, |x|)$*, donde* $x \in B$ *con* B *una bola sobre* $\mathbb{R}^n$*, entonces*

$$0 \leq p(y) - p_F^- \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}, \quad \forall y \in F.$$

Demostración. Veamos primero que $p + q$ satisface la condición (2.2.14) sobre Ω, para lo cual tomemos $x, y \in \Omega$ con $|x - y| < 1/2$. Entonces, como ambos exponentes satisfacen dicha propiedad,

$$|(p + q)(x) - (p + q)(y)| \leq |p(x) - p(y)| + |q(x) - q(y)| \leq \frac{C}{-\log(|x - y|)}.$$

Del mismo modo, si $|y| \geq |x|$ y Ω es no acotado (caso contrario, (2.2.15) vale trivialmente), se obtiene la condición (2.2.15).

Si ahora tomamos $c \geq 1/p^-$, se tiene que cp es un exponente y, además, como $|cp(x) - cp(y)| = c|p(x) - p(y)|$, ambas condiciones son inmediatas.

Supongamos que $p^+, q^+ < \infty$. Entonces

$$|p.q(x) - p.q(y)| = |p(x)(q(x) - q(y)) + q(y)(p(x) - p(y))| \leq p^+|q(x) - q(y)| + q^+|p(x) - p(y)|,$$

y de esta desigualdad se siguen (2.2.14) y (2.2.15).

Por otro lado, como $p \geq 1$,

$$\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| = \left|\frac{p(y) - p(x)}{p(x)p(y)}\right| \leq |p(x) - p(y)|$$

y, en consecuencia, $1/p$ satisface ambas condiciones logarítmicas. Recíprocamente, si $1/p$ satisface (2.2.14) y (2.2.15) y $p^+ < \infty$, como

$$|p(x) - p(y)| = |p(x)p(y)| \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \leq (p^+)^2 \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right|$$

resulta $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$.

Para ver que tanto $\min\{p(\cdot), q(\cdot)\}$ como $\max\{p(\cdot), q(\cdot)\}$ pertenecen a la clase $\mathcal{P}^{\log}(\Omega)$, notemos que dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2} \text{ y } \max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
|\min\{a,b\}-\min\{c,d\}| &= \frac{|(a-c)+(b-d)+(|c-d|-|a-b|)|}{2}\\
&\le \frac{|a-c|+|b-d|}{2}+\frac{||c-d|-|a-b||}{2}\\
&\le \frac{|a-c|+|b-d|}{2}+\frac{|c-d-(a-b)|}{2}\\
&\le |a-c|+|b-d|,
\end{aligned}$$

y, similarmente,

$$|\max\{a,b\}-\max\{c,d\}|\le |a-c|+|b-d|.$$

Aplicando ambas desigualdades con $a=p(x)$, $b=q(x)$, $c=p(y)$ y $d=q(y)$ se tiene que

$$|\min\{p(x),q(x)\}-\min\{p(y),q(y)\}|\le |p(x)-p(y)|+|q(x)-q(y)|$$

y

$$|\max\{p(x),q(x)\}-\max\{p(y),q(y)\}|\le |p(x)-p(y)|+|q(x)-q(y)|,$$

y sólo resta usar las propiedades log-Hölder de p y q.

Probemos ahora la condición equivalente a (2.2.15). Supongamos que existen constantes positivas C_∞ y p_∞ tales que, para todo $x\in\mathbb{R}^n$,

$$|p(x)-p_\infty|\le \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)}. \tag{2.2.17}$$

Luego, dados $x,y\in\mathbb{R}^n$ tales que $|y|\ge|x|$,

$$|p(x)-p(y)|\le |p(x)-p_\infty|+|p(y)-p_\infty|\le \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)}+\frac{C_\infty}{\log(e+|y|)}\le\frac{2C_\infty}{\log(e+|x|)}.$$

Recíprocamente, si vale (2.2.15), veremos primero que el candidato $p_\infty=\lim\limits_{|x|\to\infty}p(x)$ y luego mostraremos que éste verifica la desigualdad (2.2.17). Para probar que p posee límite, tomemos una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_k|=k$. Sea $\epsilon>0$ y elijamos N_0 tal que $\frac{C}{\log(e+N_0)}<\epsilon$, siendo C la constante de (2.2.15). Así, si $m,k\ge N_0$,

$$|p(x_m)-p(x_k)|\le\frac{C}{\log(e+\min\{|x_k|,|x_m|\})}\le\frac{C}{\log(e+N_0)}<\epsilon,$$

lo que implica que $\{p(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por lo que tenemos que existe $p_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}p(x_k)$.

Ahora bien, sea N tal que $|p(x_N)-p_\infty|<\epsilon$ y $N\ge N_0$. Así, si $|x|\ge N$,

$$|p(x)-p_\infty|\le|p(x)-p(x_N)|+|p(x_N)-p_\infty|\le\frac{C}{\log(e+N)}+\epsilon\le\frac{C}{\log(e+N_0)}+\epsilon\le 2\epsilon.$$

Hemos probado, pues, que $p_\infty = \lim_{|x|\to\infty} p(x)$. Ahora veamos que vale (2.2.17). Para ello, fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $y_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y_k| \geq |x|$ y $|p(y_k) - p_\infty| < \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$|p(x) - p_\infty| \leq |p(x) - p(y_k)| + |p(y_k) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)} + \frac{1}{k}.$$

Haciendo $k \to \infty$ obtenemos la desigualdad deseada para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $C_\infty = C$.

Probemos ahora que p es uniformemente continua, lo cual se sigue de la condición (2.2.14). En efecto, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\{1/2, e^{-C/\epsilon}\}$ donde C es la constante de la condición (2.2.14). Entonces, si $x, y \in \Omega$ con $0 < |x - y| < \delta \leq 1/2$,

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|} < \frac{C}{-\log\delta} \leq \frac{C}{\log(e^{C/\epsilon})} = \epsilon.$$

Finalmente, sea $F = B \setminus B(0, |x|)$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in B$. Supongamos que p satisface la condición (2.2.15). Luego, para todo par $y, z \in F$, tenemos que

$$|p(y) - p(z)| \leq |p(y) - p(x)| + |p(x) - p(z)| \leq \frac{2C}{\log(e + |x|)}$$

de donde se sigue, en virtud de la continuidad uniforme, que

$$0 \leq p(y) - p_F^- \leq p_F^+ - p_F^- \leq \frac{2C}{\log(e + |x|)}. \qquad \square$$

Como mencionábamos antes, si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, ambas condiciones logarítmicas son suficientes para que el operador maximal de Hardy-Littlewood M esté acotado sobre $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ como muestra el siguiente resultado de [28]. Sólo damos el resultado sobre $\mathbb{R}^n$ pues estamos interesados únicamente en el estudio de la continuidad de los operadores integrales dados en el Capítulo 1 sobre ese contexto.

Teorema 2.2.18 ([28])**.** *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood M está acotado sobre $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Más aún, Pick and Růžička ([82]) dieron un ejemplo de espacio $L^{p(\cdot)}$, con un exponente p que verifica condiciones un poco más débiles que las logarítmicas, y para el cual M no está acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. En cierto sentido, ese ejemplo indica que las condiciones de tipo logarítmicas son condiciones puntuales óptimas sobre p, aunque se sabe que no son necesarias. En [34] los autores dieron una condición necesaria y suficiente que tiene implicaciones teóricas muy importantes pero que no es muy útil en la práctica, lo que justifica considerar aquí $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Cabe señalar que muchos autores requieren que el exponente $1/p(\cdot)$ sea log-Hölder continuo ya que esto permite incluir exponentes no acotados, pero no trataremos con este tipo de exponentes en esta tesis. Sin embargo, del Lema 2.2.16*(iv)* $1/p$ es log-Hölder continuo si y sólo si p también lo es, por lo que consideraremos simplemente $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$.

Por otra parte, en [32], se demostró que la condición log-Hölder local (2.2.14) se puede caracterizar a través de una condición geométrica que involucra al tamaño de las bolas como muestra el siguiente lema. Esta caracterización es una herramienta muy útil para obtener resultados de acotación en espacios de Lebesgue de exponente variable, cuando dicha condición logarítmica es supuesta (ver Capítulo 4).

Lema 2.2.19 ([32])**.** *Un exponente $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ satisface la condición* (2.2.14) *si y sólo si existe una constante positiva C tal que, para toda bola B, $|B|^{p_B^- - p_B^+} \leq C$.*

Demostración. Supongamos que p satisface la condición (2.2.14) con constante C_0 y sea $B = B(x,R)$, $R > 0$. Como $w_n = |B(0,1)| \leq 2^n$, existe $0 < R_0 < 1/2$ tal que

$$\frac{n}{2} \leq \frac{\log(|B|)}{\log(2R)} = \frac{\log(w_n R^n)}{\log(2R)} \leq n$$

para todo $0 < R < R_0$. Luego, si $0 < R < R_0 < 1/2$, tenemos que

$$|B| \leq |B(x, R_0)| = w_n R_0^n < 2^n (1/2)^n = 1$$

y, por la continuidad uniforme de p (ver Lema 2.2.16*(vii)*), existen $x, y \in B$ tales que

$$|p_B^- - p_B^+| = |p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\log(|x-y|)} \leq \frac{C_0}{-\log(2R)}.$$

En consecuencia,

$$|B|^{p_B^- - p_B^+} \leq |B|^{\frac{C_0}{\log(2R)}} = e^{\frac{C_0 \log(|B|)}{2R}} \leq e^{2C_0 n}.$$

Si ahora $R \geq R_0$,

$$|B|^{p_B^- - p_B^+} \leq |B(x, R_0)|^{p^- - p^+} = (w_n R_0^n)^{p^- - p^+} = K.$$

Tomando $K = \min\{e^{2C_0 n}, K\}$, se tiene que para toda bola B, $|B|^{p_B^- - p_B^+} \leq C$.

Recíprocamente, supongamos que $|B|^{p_B^- - p_B^+} \leq C$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ distintos tales que $|x - y| < 1/2$. Luego, existen $R > 0$ y $z \in \mathbb{R}^n$ tales que $x, y \in B = B(z, R)$ y

$$|x-y|/2 < R < |x-y|.$$

Como $|B| \leq (2R)^n \leq 1$ y $|p(x) - p(y)| \leq p_B^+ - p_B^-$,

$$(2|x-y|)^{-|p(x)-p(y)|} \leq (2R)^{-|p(x)-p(y)|} \leq |B|^{\frac{-|p(x)-p(y)|}{n}} \leq |B|^{\frac{p_B^- - p_B^+}{n}} \leq C^{1/n}.$$

Puesto que $p^+ < \infty$, $|x-y|^{-|p(x)-p(y)|} \leq C^{1/n} 4^{p^+} \leq K$ con $K > 1$. Aplicando la función logaritmo a ambos lados de esta desigualdad tenemos que para todo $0 < |x-y| < 1/2$,

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{\log(K)}{-\log(|x-y|)}. \qquad \square$$

2.2.2. Clases de pesos involucradas

En correlación con la definición de $L^p(w)$ cuando p es constante y w un peso, es decir, una función medible no-negativa y localmente integrable, se puede definir el espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}(\sigma)$ con peso σ y $p \in \mathcal{P}^*(\Omega)$, como el conjunto de las funciones medibles f para las cuales

$$\varrho_{p(\cdot),\sigma,\Omega}(f/\lambda) := \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} \sigma(x)dx < \infty$$

para algún $\lambda > 0$.

En realidad, se considerarán espacios de funciones donde el peso σ es de la forma $\sigma(x) = w(x)^{p(x)}$, con w un peso, esto es, $f \in L^{p(\cdot)}(\sigma)$ si y sólo si $fw \in L^{p(\cdot)}$. Comúnmente, se dice que, en este caso, w es un multiplicador.

Si bien este tratamiento no es el usual en el estudio de acotaciones con pesos, ha sido utilizado para obtener desigualdades con pesos para operadores integrales (ver [71]) o desigualdades con dos pesos (ver [30]). Sin embargo, puede ocurrir que el espacio $L^{p(\cdot)}(w^p) := L_w^{p(\cdot)}$ no sea un espacio de Banach de funciones ya que las funciones simples no necesariamente pertenecen a él. De todas formas, si $w \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, entonces las características de bolas están en $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, para cada bola B, $L_w^{p(\cdot)}(B)$ resulta ser un espacio de Banach de funciones. Pidiendo que w esté en una cierta clase de pesos, la propiedad anterior quedará garantizada.

Además, se puede ver que si $w \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, la siguiente equivalencia vale

$$||fw||_{p(\cdot)} \approx \sup_{||g||_{p'(\cdot),w^{-1}} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx,$$

aún cuando $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ no sea un espacio de Banach de funciones. Dicha equivalencia se obtiene de aplicar la Proposición 2.2.12 a la función $fw \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

En esta sección introduciremos las clases de pesos con las que trabajaremos, que surgen de la acotación del operador maximal fraccionario sobre espacios de Lebesgue de exponente variable. Estas clases son una generalización al contexto variable de las clases $A_{p,q}$ introducidas en [71].

Definición 2.2.20. Sea $0 \leq \alpha < n$ y $p, q \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ tales que $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$ y $p^+ < n/\alpha$. Diremos que un peso $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ si existe una constante positiva C tal que para toda bola B se verifica la desigualdad

$$||w\chi_B||_{q(\cdot)}||w^{-1}\chi_B||_{p'(\cdot)} \leq C|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}.$$

Cuando $\alpha = 0$, simplemente escribiremos $w \in A_{p(\cdot)}$.

La clase $A_{p(\cdot)}$ fue definida, paralelamente, en [23] y [29]. En ambos artículos se prueba, bajo diferentes técnicas, que dicha clase caracteriza la acotación de M. Antes de enunciar este resultado, daremos algunas propiedades de las clases $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ que utilizaremos a lo largo del Capítulo 4.

Lema 2.2.21. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $0 < \delta < 1$ y w un peso. Sean $p, q, s \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ tales que $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$ y $s(x) = (1 - \alpha/n)q(x)$ con $1 < p^- \leq p^+ < n/\alpha$. Entonces:*

(i) para todo $1 \leq \beta \leq p^-$,

$$w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}} \Leftrightarrow w^{\frac{\beta n}{n-\alpha\beta}} \in A_{q(\cdot)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{n}\right)}.$$

En particular, cuando $\beta = 1$,

$$w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)} \Leftrightarrow w^{\frac{n}{n-\alpha}} \in A_{s(\cdot)};$$

(ii) si $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, entonces $w^\delta \in A_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}$;

(iii) sea $1 \leq r \leq q^-$. Si $w^r \in A_{\frac{q(\cdot)}{r}}$, entonces $w^\delta \in A_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}$.

Observación 2.2.22. Notando que $q(\cdot)/s(\cdot) = n/(n - \alpha)$, se sigue que *(i)* es una generalización del resultado probado por Muckenhoupt y Wheeden en [71] para el caso $\beta = 1$.

Demostración de Lema 2.2.21. Probemos *(i)*. Dado que $\beta \leq p^- \leq q^-$, se tiene entonces que $0 < \frac{n-\alpha\beta}{n} \leq q^-\left(\frac{n-\alpha\beta}{n\beta}\right)$. Luego,

$$||w^{\frac{n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||_{q(\cdot)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{n}\right)} = ||w^\beta\chi_B||^{\frac{n}{n-\alpha\beta}}_{q(\cdot)\left(\frac{n-\alpha\beta}{n\beta}\right)\left(\frac{n}{n-\alpha\beta}\right)} = ||w^\beta\chi_B||^{\frac{n}{n-\alpha\beta}}_{\frac{q(\cdot)}{\beta}}. \tag{2.2.23}$$

Por otro lado, como $q(\cdot)n/(q(\cdot)(n - \alpha\beta) - n\beta) = (p(\cdot)/\beta)'$, obtenemos que

$$||w^{\frac{-n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)(n-\alpha\beta)}{q(\cdot)(n-\alpha\beta)-n\beta}} = ||w^{-\beta}\chi_B||^{\frac{n}{n-\alpha\beta}}_{\frac{q(\cdot)n}{q(\cdot)(n-\alpha\beta)-n\beta}} = ||w^{-\beta}\chi_B||^{\frac{n}{n-\alpha\beta}}_{\left(\frac{p(\cdot)}{\beta}\right)'}. \tag{2.2.24}$$

Ahora bien, si $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$, de (2.2.23) y (2.2.24) tenemos que

$$\begin{aligned}||w^{\frac{n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||_{q(\cdot)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{n}\right)}||w^{\frac{-n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)(n-\alpha\beta)}{q(\cdot)(n-\alpha\beta)-n\beta}} &= ||w^\beta\chi_B||^{\frac{n}{n-\alpha\beta}}_{\frac{q(\cdot)}{\beta}}||w^{-\beta}\chi_B||^{\frac{n}{n-\alpha\beta}}_{\left(\frac{p(\cdot)}{\beta}\right)'} \\ &\lesssim |B|^{\left(1-\frac{\alpha\beta}{n}\right)\frac{n}{n-\alpha\beta}} = |B|.\end{aligned}$$

Recíprocamente, si suponemos ahora que $w^{\frac{\beta n}{n-\alpha\beta}} \in A_{q(\cdot)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{n}\right)}$, usando nuevamente (2.2.23) y (2.2.24), se deduce que

$$\begin{aligned}||w^\beta\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{\beta}}||w^{-\beta}\chi_B||_{\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-\beta}} &= ||w^{\frac{n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||^{1-\frac{\alpha\beta}{n}}_{q(\cdot)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{n}\right)}||w^{\frac{-n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||^{1-\frac{\alpha\beta}{n}}_{\frac{q(\cdot)(n-\alpha\beta)}{q(\cdot)(n-\alpha\beta)-n\beta}} \\ &= ||w^{\frac{n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||^{1-\frac{\alpha\beta}{n}}_{q(\cdot)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{n}\right)}||w^{\frac{-n\beta}{n-\alpha\beta}}\chi_B||^{1-\frac{\alpha\beta}{n}}_{\left(q(\cdot)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{n}\right)\right)'} \lesssim |B|^{1-\frac{\alpha\beta}{n}}.\end{aligned}$$

Ahora procedemos con la prueba de *(ii)*. Puesto que $0<\delta<1<q^-$, se tiene que

$$||w^\delta\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}||w^{-\delta}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-\delta}}=||w\chi_B||_{q(\cdot)}^\delta||w^{-\delta}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-\delta}}.$$

Si $u(\cdot)=q(\cdot)/(q(\cdot)-\delta)$, entonces $1/u(\cdot)=(n-n\delta+\alpha\delta)/n+\delta/p'(\cdot)$ en virtud de la relación entre $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$.

Así, por la desigualdad de Hölder generalizada y la condición sobre w, concluimos que

$$\begin{aligned}||w^\delta\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}||w^{-\delta}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-\delta}} &\leq ||w\chi_B||_{q(\cdot)}^\delta||w^{-1}\chi_B||_{p'(\cdot)}^\delta||\chi_B||_{\frac{n}{n-n\delta+\alpha\delta}}\\ &\lesssim |B|^{\delta(1-\frac{\alpha}{n})}|B|^{1-\delta(1-\frac{\alpha}{n})}=|B|.\end{aligned}$$

Para demostrar *(iii)*, tomemos r y δ como en las hipótesis. Sea $0<\delta<1\leq r\leq q^-$, entonces tenemos la siguiente igualdad

$$||w^\delta\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}||w^{-\delta}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-\delta}}=||w^r\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{r}}^{\frac{\delta}{r}}||w^{-\delta}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-\delta}}. \tag{2.2.25}$$

Sea $u(\cdot)$ como en la prueba de *(ii)*. Del hecho que $1/u(\cdot)=1/((r/\delta)(\frac{q(\cdot)}{r})')+(r-\delta)/r$, (2.2.25) y las propiedades de w, obtenemos que

$$||w^\delta\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}||w^{-\delta}\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-\delta}}\leq ||w^r\chi_B||_{\frac{q(\cdot)}{r}}^{\frac{\delta}{r}}||w^{-r}\chi_B||_{(\frac{q(\cdot)}{r})'}^{\frac{\delta}{r}}||\chi_B||_{\frac{r}{r-\delta}}\leq |B|^{\frac{\delta}{r}}|B|^{1-\frac{\delta}{r}}=|B|. \quad \square$$

Como mencionamos antes, los autores de [23] y [29] demostraron que la clase de pesos $A_{p(\cdot)}$ caracteriza la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood M. Si bien en ambos artículos se considera la clase de pesos definida sobre cubos en lugar de bolas, se puede ver que todos los resultados que involucran a esta clase son ciertos cuando en la definición está dada sobre bolas.

Teorema 2.2.26 ([23],[29])**.** *Sean $p\in\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $1<p^-\leq p^+<\infty$ y w un peso. Entonces, $M:L_w^{p(\cdot)}\hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}$, es decir,*

$$||wMf||_{p(\cdot)}\lesssim ||wf||_{p(\cdot)}$$

para toda $f\in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $w\in A_{p(\cdot)}$.

En [23], los autores se valieron de definiciones equivalentes a $A_{p(\cdot)}$ cuando el exponente p es log-Hölder continuo. Esta clase equivalente permite dar una prueba inmediata de la necesidad de la condición sobre w y resulta útil, además, en el marco más general de espacios de Musielak-Orlicz. Damos, a continuación, la definición citada y el resultado acerca de la equivalencia entre las clases probado en [34].

Definición 2.2.27 ([34])**.** Dado $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ y w un peso, sea $\Psi : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $\Psi(x,t) = (tw(x))^{p(x)}$. Se dice que la función $\Psi \in \mathscr{A}$ si la desigualdad

$$\left\| w \sum_{B \in \mathcal{B}} \chi_B \frac{1}{|B|} \int_B |f| \right\|_{p(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}$$

vale para cualquier familia $\mathcal{B}$ de bolas disjuntas B y para toda función $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Si $w \equiv 1$, decimos simplemente que $p \in \mathscr{A}$.

Cuando $p(x) \equiv p > 1$, se tiene que $\Psi \in \mathscr{A}$ si y sólo si $w^p \in A_p$. En efecto, si $w^p \in A_p$, por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(w(x) \sum_{B \in \mathcal{B}} \chi_B(x) \frac{1}{|B|} \int_B |f| \right)^p dx &= \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_B w(x)^p dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x)| dx \right)^p \\
&\leq \sum_{B \in \mathcal{B}} |B|^{-p} \int_B w(x)^p dx \left(\int_B w^{-p'} \right)^{p/p'} \\
&\quad \times \left(\int_B |f(x)w(x)|^p dx \right) \\
&\leq C \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_B |f(x)w(x)|^p dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)w(x)|^p dx
\end{aligned}$$

para toda familia $\mathcal{B}$ de bolas disjuntas B y toda $f \in L_w^p(\mathbb{R}^n)$. Recíprocamente, para cada bola B, si consideramos $\mathcal{B} = \{B\}$,

$$\begin{aligned}
\left(\fint_B w^p \right)^{1/p} \left(\fint_B w^{-p'} \right)^{1/p'} &= \frac{1}{|B|} \left(\int_B w^p \right)^{1/p} \sup_{||g||_p \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)^{-1} g(x) \chi_B(x) dx \\
&= \sup_{||g||_p \leq 1} \left(\int_B w(x)^p \left(\fint_B w^{-1} g \right)^p dx \right)^{1/p} \\
&= \sup_{||g||_p \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(w(x) \chi_B(x) \fint_B w^{-1} g \right)^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \sup_{||g||_p \leq 1} ||w(w^{-1}g||_p) \leq C.
\end{aligned}$$

En el contexto variable tenemos el siguiente resultado al respecto.

Teorema 2.2.28 ([34])**.** *Si $\Psi \in \mathscr{A}$, entonces $w \in A_{p(\cdot)}$. Más aún, si $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, la recíproca también vale.*

Una propiedad muy utilizada en la teoría de acotación con pesos es la apertura de la clase de pesos. En el caso de $A_{p(\cdot)}$, valiéndonos de la clase $\mathscr{A}$, es posible probar una especie de apertura. La prueba es muy técnica, por lo que decidimos omitirla y remitirnos a [34, Teorema 5.4.15].

Teorema 2.2.29 ([34]). *Sea* $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ *con* $p^- > 1$ *y supongamos que* $\Psi \in \mathscr{A}$. *Entonces existe* $1 < s < p^-$ *tal que* $\Psi(\cdot, t^{1/s}) \in \mathscr{A}$.

Es inmediato de los dos teoremas anteriores que la clase $A_{p(\cdot)}$ es abierta en el siguiente sentido.

Corolario 2.2.30 ([23]). *Si* $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ *y* $w \in A_{p(\cdot)}$, *existe* $1 < s < p^-$ *tal que* $w^s \in A_{\frac{p(\cdot)}{s}}$.

Capítulo 3

Continuidad de operadores en espacios de Orlicz

Este capítulo está dedicado al estudio de las propiedades de acotación del operador maximal fraccionario generalizado $M_{\alpha,\eta}$ en espacios de Orlicz. En tal sentido, daremos condiciones necesarias y suficientes sobre las funciones $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y η de manera que se verifique que $M_{\alpha,\eta} : L^{\mathcal{A}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\mathcal{B}}(\Omega)$, para subconjuntos abiertos Ω de $\mathbb{R}^n$. Como se mencionó en la introducción, interesa dar una condición de tipo Dini que se corresponda con la obtenida en [54], [52] y [79] en el caso no fraccionario, y con la de [46] para M_α. Más aún, se debilitarán las propiedades de las funciones que definen los espacios de Orlicz con el objeto de incluir más espacios que los considerados en los artículos citados. En el caso $\eta(t) = t$ se verá que la condición de tipo Dini obtenida es, bajo ciertas condiciones, equivalente a la desigualdad dada en [20] que caracteriza la acotación del operador M_α en espacios de Orlicz. Si bien esto se deriva directamente del resultado en [20] y el contenido en este capítulo, la prueba de dicha equivalencia se hará en forma directa sin emplear estos resultados. De esta manera, quedarán expuestas las propiedades de las funciones involucradas. Por otra parte, como consecuencia de los resultados obtenidos para $M_{\alpha,\eta}$, caracterizaremos la acotación del conmutador de orden $k \in \mathbb{N}$ del operador integral fraccionario I_α en espacios de Orlicz, mediante una condición de tipo Dini derivada del correspondiente operador maximal que lo controla. Se obtendrán además condiciones suficientes que garanticen la acotación en estos espacios de diversos operadores integrales fraccionarios de convolución y sus conmutadores, cuyos núcleos satisfacen ciertas condiciones de tipo Hörmander asociadas a funciones de Young y son menos regulares que el núcleo de I_α.

3.1. Resultados de acotación conocidos para M_η

Recordemos que en [79] el autor prueba que la acotación del operador maximal M_η sobre espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, es equivalente a que la función η pertenezca a la clase

B_p siempre que ésta fuera submultiplicativa (ver Teorema 1.2.1). Tal condición B_p puede escribirse en la forma

$$\int_0^{C_1 t} \lambda^{p-1}\eta'\left(\frac{t}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \le C_2 t^{p-1},$$

para todo $t > 0$ y ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$ (ver Lema 1.1.39*(i)*). Si tomamos $a(t) = b(t) = t^{p-1}$, la desigualdad anterior puede reescribirse como sigue

$$\int_0^{C_1 t} b(\lambda)\eta'\left(\frac{t}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \le C_2 a(t). \tag{3.1.1}$$

Se dice que una expresión como ésta es una condición de tipo Dini, asociada a las funciones a, b y η.

Supongamos ahora que a y b son funciones más generales que las potencias anteriores y satisfacen $a(0) = b(0) = 0$, son continuas por izquierda, a es no-decreciente, y las funciones

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \mathcal{B}(t) = \int_0^t b(s)ds$$

son finitas. Teniendo presente el Teorema 1.2.1, sería razonable esperar que el operador M_η esté acotado del espacio de Orlicz $L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ en el espacio de Orlicz $L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ cuando la condición (3.1.1) se verifica. En realidad, esa condición caracteriza dicha acotación y el resultado correspondiente fue probado en [52] en el contexto más general de espacios de tipo homogéneo.

Teorema 3.1.2 ([52]). *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como antes. Si η es una función de Young submultiplicativa, equivalen:*

(i) existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\int_0^{C_1 t} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\eta'\left(\frac{t}{\lambda}\right)d\lambda \le C_2 a(C_2 t), \quad \forall t > 0; \tag{3.1.3}$$

(ii) existe una constante positiva C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}(M_\eta f(x))dx \le C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(C|f(x)|)dx$$

para toda función medible f;

(iii) existe una constante positiva C tal que

$$||M_\eta f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \le ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función medible f.

Observación 3.1.4. Si $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t) = t^p$ con $1 < p < \infty$ y $\eta(t) = t(1 + \log^+ t)^k$ para $k \in \mathbb{N}$, el resultado anterior fue probado previamente en [54], bajo hipótesis adicionales sobre las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Por otra parte, es claro de (3.1.1) que este teorema generaliza el Teorema 1.2.1 dado en [79].

En el teorema anterior se pueden debilitar las hipótesis sobre las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ para obtener el siguiente teorema, el cual será de mucha utilidad para demostrar los resultados correspondientes al operador maximal fraccionario generalizado $M_{\alpha,\eta}$.

Teorema 3.1.5. *Sean $\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds$ y $\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds$ con ψ, ϕ dos funciones no-negativas. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que ξ es una función de Young submultiplicativa tal que la desigualdad*

$$\int_{t_0}^t \frac{\phi(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda \leq \psi(t), \tag{3.1.6}$$

vale para todo $t \geq t_0$, siendo $t_0 = 0$ si $|\Omega| = +\infty$ y $t_0 = 1$ si $|\Omega| < \infty$. Entonces, existe una constante positiva D tal que

$$\int_\Omega \Phi(M_\xi f(x))dx \leq D_0 + D\int_\Omega \Psi(D|f(x)|)dx$$

para toda función medible f, donde $D_0 = 0$ si $|\Omega| = +\infty$ y $D_0 = \Phi(1)|\Omega|$ si $|\Omega| < \infty$.

Demostración. Para demostrar este resultado, usaremos la siguiente estimación, que fue probada en el [52, Lema 3.2]: para toda función de Young ξ, existe una constante positiva K tal que

$$|\{x \in \Omega : M_\xi f(x) > \lambda\}| \leq K \int_{1/4}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda s\}|\xi'(s)ds, \tag{3.1.7}$$

para toda función medible f y todo $\lambda > 0$.

Notar que basta probar el teorema para $f \in L^\Psi(\Omega)$ ya que, en caso contrario, vale trivialmente.

Consideremos primero el caso en que Ω es de medida infinita. Así, por hipótesis tenemos que

$$\int_0^t \frac{\phi(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda \leq \psi(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Usando (3.1.7), un cambio de variables, el teorema de Tonelli y la desigualdad anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(M_\xi f(x))dx &= \int_\Omega \int_0^{M_\xi f(x)} \phi(\lambda)d\lambda dx \\
&= \int_0^\infty \phi(\lambda)|\{x \in \Omega : M_\xi f(x) > \lambda\}|\, d\lambda \\
&\leq K \int_0^\infty \phi(\lambda) \int_{1/4}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda s\}|\xi'(s)\, dsd\lambda \\
&= K \int_0^\infty \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} \int_{\lambda/4}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}|\xi'\left(\frac{u}{\lambda}\right) dud\lambda
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= K \int_0^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}| \left(\int_0^{4u} \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} \xi' \left(\frac{u}{\lambda} \right) d\lambda \right) du \\
&\leq K \int_0^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}| \left(\int_0^{4u} \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} \xi' \left(\frac{4u}{\lambda} \right) d\lambda \right) du \\
&\leq K \int_0^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}| \psi(4u) du \\
&= \frac{K}{4} \int_\Omega \Psi(4|f(x)|) dx \leq D \int_\Omega \Psi(D|f(x)|) dx,
\end{aligned}
$$

siendo $D = \text{máx}\{K/4, 4\}$. Se tiene, entonces, la desigualdad deseada puesto que, en este caso, $D_0 = 0$.

Ahora bien, si $|\Omega| < \infty$, sabemos que

$$
\int_1^t \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} \, \xi' \left(\frac{t}{\lambda} \right) d\lambda \leq \psi(t), \quad \forall \, t \geq 1. \tag{3.1.8}
$$

Luego, escribiendo

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(M_\xi f(x)) dx &= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \phi(\lambda) |\{x \in \Omega : M_\xi f(x) > \lambda\}| \, d\lambda \\
&\leq \Phi(1)|\Omega| + \int_1^\infty \phi(\lambda) |\{x \in \Omega : M_\xi f(x) > \lambda\}| \, d\lambda = D_0 + I,
\end{aligned}
$$

podemos repetir el argumento del caso de medida infinita para estimar I usando, en este caso, la condición (3.1.8). En efecto,

$$
\begin{aligned}
I &\leq K \int_1^\infty \phi(\lambda) \int_{1/4}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda s\}| \xi'(s) \, ds d\lambda \\
&= K \int_1^\infty \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} \int_{\lambda/4u}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}| \xi' \left(\frac{u}{\lambda} \right) du d\lambda \\
&= K \int_{1/4}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}| \left(\int_1^{4u} \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} \xi' \left(\frac{u}{\lambda} \right) d\lambda \right) du \\
&\leq K \int_{1/4}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}| \left(\int_1^{4u} \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} \xi' \left(\frac{4u}{\lambda} \right) d\lambda \right) du \\
&\leq K \int_{1/4}^\infty |\{x \in \Omega : |f(x)| > u\}| \psi(4u) du \\
&= \frac{K}{4} \int_\Omega \Psi(4|f(x)|) dx \leq D \int_\Omega \Psi(D|f(x)|) dx,
\end{aligned}
$$

donde D es como antes. Por lo tanto,

$$
\int_\Omega \Phi(M_\xi f(x)) dx \leq D_0 + D \int_\Omega \Psi(D|f(x)|) dx. \qquad \square
$$

En la siguiente sección nos dedicaremos a analizar las propiedades de continuidad del operador maximal fraccionario $M_{\alpha,\eta}$ cuando $0 < \alpha < n$.

3.2. Resultados de acotación para el operador maximal fraccionario $M_{\alpha,\eta}$

Sobre las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que definen a los espacios de Orlicz que se considerarán de ahora en adelante, supondremos que

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \mathcal{B}(t) = \int_0^t b(s)ds$$

donde $a, b : [0, \infty) \to [0, \infty)$ son continuas por izquierda, $a(0) = b(0) = 0$, a es no-decreciente y positiva sobre $(0, \infty)$. Esto es, en virtud del Lema 1.1.3, $\mathcal{A}$ es una función de Young, aunque $\mathcal{B}$ puede no serlo. Asumiremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son finitas.

Respecto de la función de Young η que define al operador maximal fraccionario, se supondrá submultiplicativa y normalizada.

A continuación, se enunciarán los resultados principales respecto de la acotación en espacios de Orlicz del operador $M_{\alpha,\eta}$ considerando primero el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.1. *Sea $0 < \alpha < n$, y sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y η como definimos antes. Sea ξ una función de Young tal que $\xi^{-1}(t) = \eta^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha}{n}}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que*

$$\int_0^{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\alpha/n}}{\lambda}\right) d\lambda \leq C_2 \frac{\mathcal{A}(t)^{1+\alpha/n}}{t}, \tag{3.2.2}$$

para todo $t > 0$;

(ii) $M_{\alpha,\eta} : L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$, *esto es, existe una constante positiva K tal que la desigualdad*

$$||M_{\alpha,\eta} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq K||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$$

vale para toda $f \in L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 3.2.3. El caso $\alpha = 0$ del teorema anterior es el Teorema 3.1.2 y fue probado en [52]. Versiones previas del resultado de [52] fueron dadas en [54] para iteraciones del operador maximal de Hardy-Littlewood que, según se sabe, son equivalentes a operadores maximales asociados a funciones de Young de la forma $\eta(t) = t(1 + \log^+ t)^k$ (ver [78] y [79]). En el caso especial del operador maximal fraccionario, esto es, cuando $\eta(t) = t$, en [20] se obtuvieron otro tipo de condiciones necesarias y suficientes para la acotación de M_α cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ambas funciones de Young. En la §3.4 se verá que, para ese tipo de funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, las de [20] y la de tipo Dini *(i)* del teorema anterior resultan equivalentes, siendo la última más fácil de manipular que las primeras, que involucran el cálculo de funciones complementarias e inversas. Si bien se tiene de los resultados que las condiciones son equivalentes, la prueba se hará de manera directa.

Cuando las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son de tipo potencia, el Teorema 3.2.1 permite caracterizar las funciones de Young η para las cuales $M_{\alpha,\eta}$ está acotado sobre espacios de Lebesgue. Esto es lo que establece el siguiente corolario, que es la versión fraccionaria del Teorema 1.2.1 probado en [79].

Corolario 3.2.4. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$. Dada η una función de Young submultiplicativa, equivalen:*

(i) $\eta^{q/p} \in B_q$;

(ii) *existe una constante positiva C tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_{\alpha,\eta} f(x)^q dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Si bien el objetivo de esta tesis es dar propiedades de acotación sobre espacios de Orlicz en $\mathbb{R}^n$, puesto que se siguieron principalmente las ideas de [46] para la prueba del resultado anterior, intentamos generalizar el resultado para M_α dado en dicho artículo sobre conjuntos de medida finita. Es decir, daremos a continuación una versión del Teorema 3.2.1 cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto de medida finita que tiene al resultado de [46] como caso particular.

Teorema 3.2.5. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con $|\Omega| < \infty$. Sean $0 < \alpha < n$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, η y ξ como en el Teorema 3.2.1 tales que $t^{1-\alpha/n} a(t)^{-\alpha/n}$ y $\eta^{-1}(\mathcal{A}(t))/t$ son funciones crecientes que tienden a infinito cuando $t \to \infty$, y $\mathcal{B}$ es de tipo inferior. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que*

$$\int_1^{C_1 t^{1-\alpha/n} a(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{C_1 t^{1-\alpha/n} a(t)^{-\alpha/n}}{\lambda}\right) d\lambda \leq C_2 t^{\alpha/n} a(t)^{1+\alpha/n},$$

para todo $t \geq 1$;

(ii) $M_{\alpha,\eta} : L^{\mathcal{A}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\mathcal{B}}(\Omega)$.

Observación 3.2.6. Si bien el Teorema 3.2.5 se probará para el operador maximal fraccionario no-centrado, un resultado similar puede obtenerse para su versión centrada, digamos $M^c_{\alpha,\eta}$, como será obvio de la prueba del teorema de arriba y del hecho que $M^c_{\alpha,\eta} f(x) \leq M_{\alpha,\eta} f(x)$, aún cuando ambas no son equivalentes.

Así, en el caso particular del operador maximal fracccionario M_α, esto es, cuando $\eta(t) = t$, habremos probado que, bajo las correspondientes hipótesis sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, M_α o M^c_α está acotada entre los espacios de Orlicz asociados si y sólo si existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\int_1^{C_1 t^{1-\alpha/n} a(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{n-\alpha}}}\, d\lambda \leq C_2 a(t)^{\frac{n}{n-\alpha}} \tag{3.2.7}$$

para todo $t \geq 1$. Esto fue probado en [46] para M^c_α y, en consecuencia, el Teorema 3.2.5 es una generalización de dicho resultado. Notemos que, si $\eta(t) = t$, $\eta^{-1}(\mathcal{A}(t))/t = \mathcal{A}(t)/t$ y de las relaciones $a(t/2)/2 \leq \mathcal{A}(t)/t \leq a(t)$, las hipótesis de Teorema 3.2.5 equivalen a las de [46].

A continuación se darán las demostraciones de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.5.

Demostración de Teorema 3.2.1: Primero mostraremos que *(i)* implica *(ii)*. Por la homogeneidad de la norma, es suficiente considerar una función $f \in L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ con $||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)} = 1$. Para tal función, necesitamos encontrar una constante positiva C, independiente de f, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right) dx \leq 1.$$

Escribamos $|f(x)| = g(x)h(x)$ donde

$$g(x) = |f(x)|\mathcal{A}(|f(x)|)^{-\alpha/n}\chi_{\{|f(x)|>0\}}(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \mathcal{A}(|f(x)|)^{\alpha/n}\chi_{\{|f(x)|>0\}}(x).$$

Dado que $\eta^{-1}(t) = \xi^{-1}(t)t^{\alpha/n}$, de la desigualdad de Hölder generalizada (2.1.14) tenemos que

$$M_{\alpha,\eta}f(x) \leq 2M_\xi(g)(x)||h||_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq 2M_\xi(g)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.8}$$

ya que

$$||h||^{n/\alpha}_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\{|f(x)|>0\}} \left(\mathcal{A}(|f(x)|)^{\alpha/n}\right)^{n/\alpha} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(|f(x)|)dx \leq 1.$$

Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{M_\xi g(x)}{C/2}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(M_\xi(2g/C)(x)\right) dx. \tag{3.2.9}$$

Consideremos ahora la función

$$c_\xi(t) = \int_0^t \frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda, \tag{3.2.10}$$

que está bien definida en $[0, \infty)$. En efecto, de la condición *(i)*, $c_\xi(t_1) < \infty$ para algún $t_1 > 0$, y así, $c_\xi(t) < \infty$ para cada $0 \leq t \leq t_1$ puesto que ξ' es creciente. Además, como η es submultiplicativa, también lo es ξ (ver Lema 1.1.43*(i)*) lo que conduce a que $\xi'(st) \leq 2\xi'(2s)\xi'(t)$. Entonces, si $t \geq t_1$

$$\begin{aligned} c_\xi(t) &= \int_0^{t_1} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda + \int_{t_1}^t \frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda \\ &\leq 2\xi'\left(\frac{2t}{t_1}\right) c_\xi(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda < \infty, \end{aligned}$$

donde el último término es finito en virtud de la continuidad del integrando.

Entonces, tomando $\mathcal{C}_\xi(t) = \int_0^t c_\xi(s)ds$, la condición (3.1.6) del Teorema 3.1.5 vale trivialmente con $\phi = b$ y $\psi = c_\xi$ y cualesquiera constantes $D_1 > 1$ y $D_2 \geq D_1$. Así, de dicho teorema, existe $D > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(M_\xi(2g/C)(x)\right) dx \leq D \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{C}_\xi(2Dg(x)/C)dx. \tag{3.2.11}$$

Sea $C = \text{máx}\{2D/C_1, 2D^2C_2\}$, donde C_1 y C_2 son las constantes de la condición de Dini *(i)*. Luego, de (3.2.9), (3.2.11) y usando que $\mathcal{C}_\xi(t) \leq tc_\xi(t)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right) dx &\leq D \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{C}_\xi(2Dg(x)/C)dx \\ &\leq D \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2Dg(x)}{C} c_\xi\left(\frac{2Dg(x)}{C}\right) dx \\ &\leq \frac{2D^2}{C} \int_{\{|f(x)|>0\}} g(x)c_\xi\left(C_1 g(x)\right) dx.\end{aligned}$$

Notemos que, en virtud de la condición *(i)* y de (3.2.10),

$$c_\xi(C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\alpha/n}) \leq C_2 \frac{\mathcal{A}(t)^{1+\alpha/n}}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Luego, de la definición de la función g y aplicando esta desigualdad a $t = |f(x)| > 0$,

$$\begin{aligned}g(x)c_\xi\left(C_1 g(x)\right) &= |f(x)|\mathcal{A}(|f(x)|)^{-\alpha/n} c_\xi\left(C_1|f(x)|\mathcal{A}(|f(x)|)^{-\alpha/n}\right) \\ &\leq |f(x)|\mathcal{A}(|f(x)|)^{-\alpha/n} \frac{\mathcal{A}(|f(x)|)^{1+\alpha/n}}{|f(x)|} = C_2\mathcal{A}(|f(x)|).\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Así, de estas estimaciones y de la definición de la constante C obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right) dx \leq \frac{2D^2C_2}{C} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(|f(x)|)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(|f(x)|)dx \leq 1,$$

como queríamos probar.

Para demostrar la recíproca, consideremos $\delta > 0$ y sea $f_\delta = \chi_{B(0,\delta)}$. Entonces, es fácil ver de la definición de $||\cdot||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}$ que $||f_\delta||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)} = 1/\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})$, donde $\omega = |B(0,1)|$.

A continuación, estimaremos la medida del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,\eta}f_\delta(x) > s\}$ para ciertos valores de $s > 0$. Observemos primero que si $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| > \delta$, entonces $B(0,\delta) \subset B(x, 2|x|)$. Así,

$$1 \geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} \eta\left(\frac{|f_\delta(y)|}{\lambda}\right) dy = \frac{|B(0,\delta)|}{|B(x,2|x|)|}\eta(1/\lambda) = \left(\frac{\delta}{2|x|}\right)^n \eta(1/\lambda),$$

de donde se sigue que $||f_\delta||_{\eta,B(x,2|x|)} = 1/\eta^{-1}\left((2|x|/\delta)^n\right)$.

Luego, de la definición de $M_{\alpha,\eta}$ y de la relación $\xi^{-1}(t) = \eta^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,\eta} f_\delta(x) > s\}| &\geq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \delta < |x| \text{ y } |B(x, 2|x|)|^{\alpha/n} ||f_\delta||_{\eta, B(x,2|x|)} > s\right\}\right| \\
&= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \delta < |x| \text{ y } \frac{\omega^{\alpha/n}(2|x|)^\alpha}{\eta^{-1}((2|x|/\delta)^n)} > s\right\}\right| \\
&= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \delta < |x| \text{ y } \frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{\xi^{-1}((2|x|/\delta)^n)} > s\right\}\right| \\
&= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \delta < |x| < \frac{\delta}{2}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}\right|.
\end{aligned}$$

Sea $0 < s < \omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\xi^{-1}(2^{n+1})$. En virtud del crecimiento de ξ^{-1}, se tiene que $s < \omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\xi^{-1}(2^n)$ o, equivalentemente,

$$1 < \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Entonces, para cada $\delta > 0$, el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \delta < |x| < \frac{\delta}{2}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ es no vacío y vale la siguiente estimación

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,\eta} f_\delta(x) > s\}| \geq \frac{\omega\delta^n}{2^n}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right) - \omega\delta^n.$$

Usando nuevamente que $s < \omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\xi^{-1}(2^{n+1})$, se tiene que

$$\frac{1}{2^n}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right) - 1 \geq \frac{1}{2^{n+1}}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right),$$

y, por lo tanto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,\eta} f_\delta(x) > s\}| \geq \frac{\omega\delta^n}{2^{n+1}}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right) \geq \frac{\omega^{1+\frac{\alpha}{n}}\delta^{n+\alpha}}{2^{n+2}s}\xi'\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{2s}\right), \tag{3.2.13}$$

donde, en la última desigualdad, se utilizó la relación $\xi'(t/2)/2 \leq \xi(t)/t$ dada en (1.1.6).

Ahora bien, de la hipótesis *(ii)* y de (3.2.13),

$$\begin{aligned}
1 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta} f_\delta(x)}{K||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}}\right) dx \qquad (3.2.14) \\
&= \int_0^\infty b(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,\eta} f_\delta(x) > \lambda K ||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}\}| d\lambda \\
&\geq \frac{\omega^{1+\frac{\alpha}{n}}\delta^{n+\alpha}}{2^{n+2}K||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}} \int_0^{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/K\xi^{-1}(2^{n+1})||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{2\lambda K||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}}\right) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{\omega^{1+\frac{\alpha}{n}}\delta^{n+\alpha}\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})}{2^{n+2}K}\int_0^{C_1\omega^{\alpha/n}\delta^{\alpha}\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})}\frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{C_1\omega^{\alpha/n}\delta^{\alpha}\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})}{\lambda}\right)d\lambda,$$

donde la constante $C_1 = \text{mín}\{1/(K\xi^{-1}(2^{n+1})), 1/(2K)\} = 1/(K\xi^{-1}(2^{n+1}))$, ya que ξ está normalizada por estarlo η.

Eligiendo $t = \mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})$, de (3.2.14) tenemos que

$$\int_0^{C_1t\mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}}\frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{C_1t\mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}}{\lambda}\right)d\lambda \leq C_2\frac{\mathcal{A}(t)^{1+\frac{\alpha}{n}}}{t},$$

para todo $t > 0$ y para algunas constantes positivas C_1 y C_2, obteniendo así la condición de tipo Dini *(i)*. □

Demostración del Corolario 3.2.4: En virtud del Teorema 3.2.1, bastará ver que, si consideramos las funciones $\mathcal{A}(t) = t^p$ y $\mathcal{B}(t) = t^q$ con $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, la condición de tipo Dini Teorema 3.2.1*(i)* es equivalente a que la función $\eta^{q/p}$ pertenezca a la clase B_q, esto es, que exista $c > 0$ tal que

$$\int_c^{\infty}\frac{\eta(t)^{q/p}}{t^q}\frac{dt}{t} < \infty.$$

Reemplacemos entonces las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ por las potencias correspondientes en la condición Teorema 3.2.1*(i)* de donde se tiene que $M_{\alpha,\eta} : L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\int_0^{C_1t^{1-\frac{\alpha p}{n}}} q\lambda^{q-1}\xi'\left(\frac{C_1t^{1-\frac{\alpha p}{n}}}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \leq C_2t^{p(1+\frac{\alpha}{n})-1} = C_2t^{p-\left(1-\frac{\alpha p}{n}\right)},$$

para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$ y para todo $t > 0$, siendo $\xi^{-1}(t) = \eta^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$. Como ξ es submultiplicativa por el Lema 1.1.43*(i)*, sabemos del Lema 1.1.28*(i)* que $\xi'(t) \approx \xi(t)/t$ de donde tenemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\int_0^{C_1t^{1-\frac{\alpha p}{n}}} \lambda^q\xi\left(\frac{C_1t^{1-\frac{\alpha p}{n}}}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \leq Ct^p$$

para todo $t > 0$. Realizando un cambio de variables se puede reescribir la desigualdad anterior como

$$\int_1^{\infty}\frac{\xi(s)}{s^q}\frac{ds}{s} \leq Ct^{p-q\left(1-\frac{\alpha p}{n}\right)}.$$

De la relación entre p y q tenemos que el exponente $p-q\left(1-\frac{\alpha p}{n}\right)$ que aparece a la derecha es nulo, por lo que resulta que la condición *(i)* del Teorema 3.2.1 equivale a decir que la función ξ está en la clase B_q. Del Lema 1.1.43*(ii)* con $r = n/\alpha > 1$ esto es lo mismo que decir que $\eta^{1+\frac{\alpha q}{n}} \in B_q$. Pero $1 + \alpha q/n = p/q$, obteniendo así la condición deseada sobre η. □

Demostración de Teorema 3.2.5: Probemos primero *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Consideremos $f \in L^{\mathcal{A}}(\Omega)$ con $||f||_{L^{\mathcal{A}}(\Omega)} = 1$. Luego, basta probar que existe una constante positiva C, independiente de f, tal que

$$\int_\Omega \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right) dx \leq 1.$$

Dividamos a $|f(x)| = f_1 + f_2$ donde $f_1(x) = |f(x)|\chi_{\{|f|>1\}}(x)$ y $f_2(x) = |f(x)|\chi_{\{|f|\leq 1\}}(x)$. Entonces, $M_{\alpha,\eta}f \leq M_{\alpha,\eta}f_1 + M_{\alpha,\eta}f_2$. Estimemos cada sumando separadamente.

Para el caso de f_2, escribimos $f_2(x) = g(x)h(x)$ donde $g(x) = |f(x)|\chi_{\{|f|\leq 1\}}(x)$ y $h(x) = \chi_{\{|f|\leq 1\}}(x)$. De la relación $\eta^{-1}(t) = \xi^{-1}(t)t^{\alpha/n}$, podemos aplicar la desigualdad de Hölder generalizada (2.1.14) y obtener

$$M_{\alpha,\eta}f_2(x) \leq 2M_\xi g(x)||h||_{L^{n/\alpha}(\Omega)} \leq 2|\Omega|^{\alpha/n} = 2K_1.$$

Por otra parte, si consideramos las funciones $g_1(x) = |f(x)|\mathcal{A}(|f(x)|)^{-\alpha/n}\chi_{\{|f|>1\}}(x)$ y $h_1(x) = \mathcal{A}(|f(x)|)^{\alpha/n}\chi_{\{|f|>1\}}(x)$, tenemos que $f_1(x) = g_1(x)h_1(x)$. Usando nuevamente la desigualdad de Hölder (2.1.14) tenemos que

$$M_{\alpha,\eta}f_1(x) \leq 2M_\xi(g_1)(x)||h_1||_{L^{n/\alpha}(\Omega)} \leq 2M_\xi(g_1)(x),$$

ya que $||h_1||_{L^{n/\alpha}(\Omega)} \leq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right) dx &\leq \int_\Omega \mathcal{B}\left(\frac{2M_\xi g_1(x) + 2K_1}{C}\right) dx \\
&\leq \int_\Omega \mathcal{B}\left(4C^{-1}\,\text{máx}\left\{M_\xi g_1(x), K_1\right\}\right) dx \\
&\leq \int_\Omega \mathcal{B}\left(M_\xi(4C^{-1}g_1)(x)\right) dx + \int_\Omega \mathcal{B}(4C^{-1}K_1)dx.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Consideremos ahora la función

$$c_\xi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ \int_1^t \frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda & t \geq 1. \end{cases} \tag{3.2.16}$$

que está claramente bien definida sobre $[0, \infty)$. De esta definición se sigue inmediatamente que la condición (3.1.6) del Teorema 3.1.5 vale con $\phi = b$ y $\psi = c_\xi$, para cualesquiera constantes $D_1 > 1$ y $D_2 \geq D_1$. Luego, tomando $\mathcal{C}_\xi(t) = \int_0^t c_\xi(s)ds$, por dicho teorema se tiene que

$$\int_\Omega \mathcal{B}\left(M_\xi(4C^{-1}g_1)(x)\right) dx \leq |\Omega|\mathcal{B}(1) + D\int_\Omega \mathcal{C}_\xi(4C^{-1}Dg_1(x))dx. \tag{3.2.17}$$

Sea $K_2 = |\Omega|(\mathcal{B}(1) + \mathcal{B}(4C^{-1}K_1))$ y elijamos $C \geq 4D/C_1$ donde C_1 es la constante de *(i)*. Luego, de (3.2.15), (3.2.17) y usando que $\mathcal{C}_\xi(t) \leq tc_\xi(t)$, se sigue que

$$\int_\Omega \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right) dx \leq K_2 + D\int_\Omega \mathcal{C}_\xi(4C^{-1}Dg_1(x))dx$$

$$\leq K_2 + D \int_\Omega 4C^{-1}Dg_1(x)c_\xi\left(4C^{-1}Dg_1(x)\right)dx$$
$$\leq K_2 + C_1 \int_\Omega g_1(x)c_\xi\left(C_1 g_1(x)\right)dx.$$

Notemos que, en virtud de la condición de Dini *(i)* y de (3.2.16), se tiene, como en (3.2.12), que

$$g_1(x)c_\xi\left(C_1 g_1(x)\right) \leq C_2\mathcal{A}(|f(x)|).$$

Así, obtenemos que

$$\int_\Omega \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right)dx \leq K_2 + C_1C_2\int_\Omega \mathcal{A}(|f(x)|)dx \leq K_2 + C_1C_2.$$

Finalmente, si $K_2 + C_1C_2 \leq 1$, queda probada la suficiencia de la condición de tipo Dini. En caso contrario, como $\mathcal{B}$ es de tipo inferior, esto es, existen constantes positivas c, q tales que $\mathcal{B}(st) \leq cs^q\mathcal{B}(t)$ para todo $s \in [0,1]$ y todo $t \geq 0$, podemos estimar

$$\int_\Omega \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C[c(K_2+C_1C_2)]^{1/q}}\right)dx \leq c\left(\frac{1}{[c(K_2+C_1C_2)]^{1/q}}\right)^q \int_\Omega \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta}f(x)}{C}\right)dx \leq 1.$$

lo que prueba *(ii)* con $K = [c(K_2 + C_1C_2)]^{1/q}$.

Para demostrar la recíproca, supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe algún $x_0 \in \Omega$ tal que la bola $B(x_0, 1)$ está contenida en Ω. Consideremos $f_\delta = \chi_{B(x_0,\delta)}$ para $0 < \delta \leq 2^{-1/n}$ y, como antes, mediremos el conjunto de nivel de $M_{\alpha,\eta}(f_\delta)$, $E_s := \{x \in \Omega : M_{\alpha,\eta}(f_\delta)(x) > s\}$.

Sea $\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\xi^{-1}((2/\delta)^n) < s < \omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\xi^{-1}(2^{n+1})$. Entonces, siguiendo los mismos argumentos que en la prueba del Teorema 3.2.1, obtenemos que

$$|E_s| \geq \left|\left\{x \in \Omega : \delta < |x - x_0| < 1/4 \text{ y } |B(x, 2|x-x_0|)|^{\alpha/n}||f_\delta||_{\eta,B(x,2|x-x_0|)} > s\right\}\right|$$
$$= \left|\left\{x \in \Omega : \delta < |x - x_0| < \frac{\delta}{2}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}\right|.$$

Además, para los valores de s considerados se tiene que

$$\delta < \frac{\delta}{2}\xi\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right)^{1/n} < 1.$$

Esto garantiza que la corona anterior es no vacía y se encuentra completamente contenida en Ω. Entonces, de este hecho y de la estimación de la medida del conjunto de nivel de más arriba se obtiene que

$$|\{x \in \Omega : M_{\alpha,\eta}f_\delta(x) > s\}| \geq \frac{\omega^{1+\frac{\alpha}{n}}\delta^{n+\alpha}}{2^{n+2}s}\xi'\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{2s}\right),$$

usando argumentos similares a los del caso en que $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Luego, siguiendo los lineamientos de (3.2.14) y suponiendo que *(ii)* vale, tenemos que

$$
\begin{aligned}
1 &\geq \int_{\Omega} \mathcal{B}\left(\frac{M_{\alpha,\eta} f_\delta(x)}{K||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\Omega)}}\right) dx \\
&= \int_0^\infty b(\lambda)|\{x \in \Omega : M_{\alpha,\eta} f_\delta(x) > \lambda K||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\Omega)}\}| d\lambda \\
&\geq \frac{\omega^{1+\frac{\alpha}{n}}\delta^{n+\alpha}}{2^{n+2}K||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}} \int_{\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{K\xi^{-1}((2/\delta)^n)||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}}}^{\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{K\xi^{-1}(2^{n+1})||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\Omega)}}} \frac{b(\lambda)}{\lambda} \xi'\left(\frac{\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{2\lambda K||f_\delta||_{L^{\mathcal{A}}(\Omega)}}\right) d\lambda \\
&\geq \frac{\omega^{1+\frac{\alpha}{n}}\delta^{n+\alpha}\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})}{2^{n+2}K} \int_{\frac{2^\alpha\omega^{\alpha/n}\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})}{K\eta^{-1}(2^n\delta^{-n})}}^{C_1\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\xi'\left(\frac{C_1\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})}{\lambda}\right) d\lambda,
\end{aligned}
$$

donde $C_1 = 1/(K\xi^{-1}(2^{n+1}))$, la constante definida en la demostración del Teorema 3.2.1. Luego, si tomamos $t = \mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})$, se tiene la siguiente condición

$$
\int_{\frac{2^\alpha\omega^{\alpha/n}t}{K\eta^{-1}(2^n\omega\mathcal{A}(t))}}^{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\alpha/n}}{\lambda}\right)\, d\lambda \leq C_2\frac{\mathcal{A}(t)^{1+\alpha/n}}{t},
$$

para cada $t \geq t_1 = \mathcal{A}^{-1}(2\omega^{-1})$.

Sea ahora

$$
h(t) := \frac{2^\alpha\omega^{\alpha/n}t}{K\eta^{-1}(2^n\omega\mathcal{A}(t))}.
$$

En virtud de la supermultiplicatividad de η^{-1} es fácil ver que

$$
h(t) \leq \frac{2^\alpha\omega^{\alpha/n}}{K\eta^{-1}(2^n\omega)}\frac{t}{\eta^{-1}(\mathcal{A}(t))}.
$$

Por la hipótesis sobre $\eta^{-1}(\mathcal{A}(t))/t$, tenemos que $h(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Por otra parte, también sabemos que $t^{1-\alpha/n}a(t)^{-\alpha/n} \to \infty$ cuando $t \to +\infty$. En consecuencia, podemos afirmar que existe $t_0 > 0$ tal que si $t \geq t_0$, entonces $h(t) \leq 1$ y $C_1 t^{1-\alpha/n}a(t)^{-\alpha/n} > 1$. Para tales valores de t, usando que $\mathcal{A}(t) \leq ta(t)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_1^{C_1 t^{1-\alpha/n}a(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{C_1 t^{1-\alpha/n}a(t)^{-\alpha/n}}{\lambda}\right)\, d\lambda& \\
&\leq \int_1^{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\alpha/n}}{\lambda}\right)\, d\lambda \\
&\leq C_2\frac{\mathcal{A}(t)^{1+\alpha/n}}{t} \leq C_2 t^{\alpha/n}a(t)^{1+\alpha/n}.
\end{aligned}
$$

Si $t_0 \leq 1$, entonces obtenemos que para todo $t \geq 1$ vale la condición de Dini deseada. Si $t_0 > 1$, queremos ver que la desigualdad anterior puede extenderse a todo $1 \leq t < t_0$. Como $t^{1-\alpha/n}a(t)^{-\alpha/n}$ y $a(t)$ son crecientes y la desigualdad anterior vale para $t = t_0$, si $1 \leq t < t_0$, se sigue que

$$
\int_1^{C_1 t^{1-\alpha/n}a(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi'\left(\frac{C_1 t^{1-\alpha/n}a(t)^{-\alpha/n}}{\lambda}\right)\, d\lambda
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_1^{C_1 t_0^{1-\alpha/n} a(t_0)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi' \left(\frac{C_1 t_0^{1-\alpha/n} a(t_0)^{-\alpha/n}}{\lambda} \right) d\lambda \\
&\leq C_2 t_0^{\alpha/n} a(t_0)^{1+\alpha/n} = K_0 \\
&\leq \frac{K_0}{a(1)^{1+\alpha/n}} t^{\alpha/n} a(t)^{1+\alpha/n}.
\end{aligned}$$

Tomando $\tilde{C}_2 = \text{máx}\{C_2, K_0 a(1)^{-1-\alpha/n}\}$, obtenemos que

$$\int_1^{C_1 t^{1-\alpha/n} a(t)^{-\alpha/n}} \frac{b(\lambda)}{\lambda}\, \xi' \left(\frac{C_1 t^{1-\alpha/n} a(t)^{-\alpha/n}}{\lambda} \right) d\lambda \leq \tilde{C}_2 t^{\alpha/n} a(t)^{1+\alpha/n}$$

para todo $t \geq 1$. □

Como consecuencia del Teorema 3.2.1, obtenemos la siguiente caracterización para la acotación de $M_{\alpha,\eta}$ sobre $\mathbb{R}^n$ en términos de las propiedades de continuidad del operador maximal fraccionario clásico con pesos.

Teorema 3.2.18. *Sea $0 < \alpha < n$ y sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, η y ξ como en el Teorema 3.2.1. Supongamos además que η y $\tilde{\eta}$ son ambas funciones de Young. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $M_{\alpha,\eta} : L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) existe una constante positiva C tal que

$$\left\| \frac{M_\alpha f}{M_{\tilde{\eta}} u} \right\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| \frac{f}{u} \right\|_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.2.19}$$

para toda $f \geq 0$ y para todo peso u.

El teorema anterior generaliza al caso fraccionario un resultado probado en [52] para M_η. Cuando $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t) = t^p$, $1 < p < \infty$ y $\alpha = 0$, el resultado correspondiente fue probado en [80]. En ese mismo artículo, el autor utiliza este tipo de estimación para obtener una versión dual de la siguiente desigualdad de tipo Fefferman-Stein

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x) dx.$$

Desigualdades del estilo de (3.2.19) fueron también estudiadas en [85] para $0 \leq \alpha < n$ y η cierta función de tipo potencia.

Demostración del Teorema 3.2.18: De la desigualdad de Hölder dada en (2.1.14) se tiene

$$|B|^{\alpha/n} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \leq 2|B|^{\alpha/n} ||f/u||_{\eta,B} ||u||_{\tilde{\eta},B} \leq 2M_{\alpha,\eta}(f/u)(x) M_{\tilde{\eta}} u(x),$$

para toda bola B tal que $x \in B$. Tomando el supremo sobre tales bolas, se tiene la siguiente desigualdad puntual

$$M_\alpha f(x) \leq 2M_{\alpha,\eta}(f/u)(x)M_{\widetilde{\eta}}u(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

de la cual se deduce inmediatamente que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

En virtud del Teorema 3.2.1, la recíproca vale si mostramos que *(ii)* implica la condición de tipo Dini *(i)* del Teorema 3.2.1. Estimaremos, para determinados valores de $s > 0$, la medida del conjunto $E_s := \{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > sM_{\widetilde{\eta}}u(x)\}$.

Dado $\delta > 0$, sean $f = u = \chi_{B(0,\delta)}$. Entonces, $||f/u||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)} = 1/\mathcal{A}^{-1}(\omega^{-1}\delta^{-n})$, donde $\omega = |B(0,1)|$. Afirmamos que, para $|x| > 2\delta$, se cumple la siguiente estimación

$$M_{\widetilde{\eta}}u(x) = M_{\widetilde{\eta}}\chi_{B(0,\delta)}(x) \leq 1/\widetilde{\eta}^{-1}((|x|/4\delta)^n).$$

Supongamos, por el momento, que la afirmación es válida.

Sea $0 < s < 6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\xi^{-1}(1/(2^n-1))$. Usando que $B(0,\delta) \subset B(x,3|x|/2)$ si $|x| > 2\delta$, y que

$$\frac{1}{\widetilde{\eta}^{-1}(t)} \leq \frac{\eta^{-1}(t)}{t} = \xi^{-1}(t)t^{\alpha/n-1},\ t > 0,$$

se tienen las siguientes estimaciones.

$$\begin{aligned}
|E_s| &\geq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\delta \text{ y } |B(x,3|x|/2)|^{\alpha/n-1} \int_{B(x,3|x|/2)} f_\delta > s/\widetilde{\eta}^{-1}((|x|/4\delta)^n) \right\} \right| \\
&\geq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\delta \text{ y } \omega^{\alpha/n-1}(3|x|/2)^{\alpha-n}\omega\delta^n > s\xi^{-1}((|x|/4\delta)^n)(|x|/4\delta)^{\alpha-n} \right\} \right| \\
&= \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\delta \text{ y } \frac{6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s} > \xi^{-1}((|x|/4\delta)^n) \right\} \right| \\
&= \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2\delta < |x| < 4\delta\xi\left(\frac{6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right)^{1/n} \right\} \right|
\end{aligned}$$

Por la elección de s,

$$\xi(6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/s) > 1/(2^n-1) > 2^{-n} \tag{3.2.20}$$

por lo que el conjunto anterior es una corona no vacía. Así,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > sM_{\widetilde{\eta}}u(x)\}| \geq \omega(4\delta)^n\xi\left(\frac{6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right) - \omega(2\delta)^n.$$

Por otra parte, multiplicando la primer desigualdad en (3.2.20) por $\omega(2\delta)^n$, resulta que

$$\omega(4\delta)^n\xi\left(\frac{6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{s}\right) - \omega(2\delta)^n > \omega(2\delta)^n\xi(6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/s).$$

Luego, del hecho que $\xi'(t/2)/2 \leq \xi(t)/t$, concluimos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > sM_{\widetilde{\eta}}u(x)\}| \geq \frac{2^{n-1}6^{\alpha-n}\omega^{1+\alpha/n}\delta^{n+\alpha}}{s}\xi'\left(\frac{6^{\alpha-n}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{2s}\right).$$

Salvo constantes, la desigualdad anterior es de la forma de la ecuación (3.2.13) obtenida en la prueba del Teorema 3.2.1. Por ello, es claro que se pueden seguir los lineamientos de dicha demostración a fin de obtener la condición de tipo Dini deseada.

Ahora se dará la prueba de la afirmación. De la definición de $M_{\widetilde{\eta}}$,

$$M_{\widetilde{\eta}}\chi_{B(0,\delta)}(x) = \sup_{B\ni x: B\cap B(0,\delta)\neq\emptyset} \frac{1}{\widetilde{\eta}^{-1}\left(\frac{|B|}{|B\cap B(0,\delta)|}\right)} \leq \sup_{B\ni x: B\cap B(0,\delta)\neq\emptyset} \frac{1}{\widetilde{\eta}^{-1}\left(\frac{|B|}{\omega\delta^n}\right)}.$$

Si $B = B(y,R)$ es una bola tal que $x \in B$ y $B \cap B(0,\delta) \neq \emptyset$, y $|x| > 2\delta$ entonces $2R > |x| - \delta > |x|/2$. En efecto, si $|x| > 2\delta$ entonces $|x| - \delta > |x|/2$. Ahora, si B es una bola con las propiedades anteriores, y $z \in B \cap B(0,\delta)$, entonces

$$|x| \leq |x-y| + |y-z| + |z| \leq R + R + \delta = 2R + \delta.$$

Combinando ambas estimaciones se tiene la relación deseada. Así, $R > |x|/4$ y

$$M_{\widetilde{\eta}}\chi_{B(0,\delta)}(x) \leq \sup_{B\ni x: B\cap B(0,\delta)\neq\emptyset} \frac{1}{\widetilde{\eta}^{-1}((R/\delta)^n)} \leq \frac{1}{\widetilde{\eta}^{-1}((|x|/4\delta)^n)},$$

lo que demuestra la afirmación. □

3.3. Aplicaciones a operadores de tipo integral y sus conmutadores

Para $0 < \alpha < n$, el operador integral fraccionario de orden α, I_α, se define por

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

siempre que la integral anterior sea finita en casi todo punto.

Las propiedades de acotación sobre espacios de Orlicz de este operador han sido estudiadas por diversos autores, entre los que podemos citar a [20], [46], [39] y [83]. Por ejemplo, en [46] los autores probaron que I_α está acotado entre espacios de Orlicz $L^{\mathcal{A}}(\Omega)$ y $L^{\mathcal{B}}(\Omega)$, cuando Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida finita, si y sólo si las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ satisfacen la condición de tipo Dini (3.2.7). Por otro lado, en [20] el autor deduce ciertas condiciones para la acotación de I_α a partir de la caracterización de la acotación de M_α, las cuales involucran el cálculo de funciones inversas y complementarias de funciones relacionadas con aquella que definen los espacios de Orlicz, siendo estas condiciones menos manejables que las de tipo Dini.

Sin embargo, es escaso el material disponible en relación a las propiedades de acotación en espacios de Orlicz de los conmutadores de diversos órdenes de I_α con símbolos en BMO.

Recordemos que estos conmutadores se definen formalmente, para $\mathfrak{b} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $k \in \mathbb{N}$, por

$$I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y))^k \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

En relación a ellos, se caracterizará su acotación en espacios de Orlicz por medio de una condición de tipo Dini asociada a la función $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$. Se sabe que este tipo de conmutadores están controlados, en cierto sentido, por el operador maximal fraccionario M_{α,φ_k}, tal como se probó en [10] (ver Teorema 1.4.31). Gracias a este control, el Teorema 3.2.1 nos proveerá de la condición de tipo Dini suficiente para la continuidad de $I^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$ que, como se verá en el Teorema 3.3.2, es también una condición necesaria.

En los resultados de esta sección será de gran utilidad el siguiente teorema, donde se da una caracterización de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre espacios de Orlicz. Esta caracterización fue dada en [41]. En [14] los autores prueban caracterizaciones de dicha acotación mediante condiciones de tipo Dini en la función que define al espacio, viendo además que dichas condiciones son equivalentes a que la función complementaria correspondiente posea la condición Δ_2. Resultados similares se obtuvieron en [91].

Teorema 3.3.1 ([41])**.** *Sea Φ una N-función (ver Definición 2.1.21). Son equivalentes:*

(i) el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado sobre $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\widetilde{\Phi}$, la función complementaria de Φ, pertenece a la clase Δ_2.

3.3.1. El conmutador del operador integral fraccionario I_α

Para el conmutador de orden k de I_α con símbolo $\mathfrak{b} \in BMO$ tenemos, pues, la siguiente caracterización sobre espacios de Orlicz. En dicho resultado, diremos que $\mathcal{B} \in \Delta_2^c$ si ambas $\mathcal{B}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}$ son N-funciones en la clase Δ_2.

Teorema 3.3.2. *Sean α y $\mathcal{A}$ como en el Teorema 3.2.1, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una N-función que satisface la condición Δ_2 si $k = 0$ y la condición Δ_2^c si $k > 0$, y que además es de tipo inferior $q > n/(n-\alpha)$. Entonces, equivalen:*

(i) existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\int_0^{C_1 t \mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}} \frac{b(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{n-\alpha}}} \left(1 + \log^+ \left(\frac{C_1 t \mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}}{\lambda}\right)\right)^{\frac{kn}{n-\alpha}} d\lambda \le C_2 \left(\frac{\mathcal{A}(t)}{t}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

vale para todo $t > 0$;

(ii) existe una constante positiva K tal que la desigualdad

$$||I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \le K ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$$

vale para toda función $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ y todo $\mathfrak{b} \in BMO$, donde $K = K(||\mathfrak{b}||_{BMO})$.

Observación 3.3.3. La condición Δ_2 sobre $\mathcal{B}$ no es realmente necesaria para la implicación *(ii)* $\Rightarrow$*(i)* en el teorema anterior. Esto quedará claro en la demostración del teorema.

Observación 3.3.4. Las funciones de la forma $\mathcal{B}(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma$ con $\beta > 1$ y $\gamma \geq 0$ verifican la condición Δ_2^c ya que ambas, $\mathcal{B}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}(t) \approx t^{\frac{\beta}{\beta-1}}/(1+\log^+ t)^{\frac{\gamma}{\beta-1}}$, son N-funciones de tipo $L\log L$ por lo que satisfacen trivialmente la condición Δ_2.

Observación 3.3.5. La condición *(i)* del Teorema 3.3.2 es la condición *(i)* del Teorema 3.2.1 correspondiente a la función $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$ que, como ya se mencionó, proviene del control que ejerce la maximal fraccionaria M_{α,φ_k} sobre el conmutador $I^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$ para cualquier símbolo $\mathfrak{b} \in BMO$. Este control nos habilita a aplicar el Teorema 3.2.1 para obtener una de las implicaciones en la demostración del resultado anterior.

En la prueba del Teorema 3.3.2 realizaremos un argumento inductivo. Es por ello que necesitaremos el siguiente resultado correspondiente al operador I_α, el cual es una versión para el caso de $\mathbb{R}^n$ del resultado dado en [46] para conjuntos de medida finita.

Teorema 3.3.6. *Sean α, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como en el Teorema 3.3.2. Entonces, equivalen:*

(i) existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\int_0^{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}} \frac{b(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{n-\alpha}}}d\lambda \leq C_2\left(\frac{\mathcal{A}(t)}{t}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

vale para todo $t > 0$;

(ii) existe una constante positiva K tal que la desigualdad

$$||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda función $f \in L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, siempre que el lado izquierdo sea finito.

Demostración. Para ver que *(i)* es necesaria, notemos que para $f \geq 0$,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{B\ni x}|B|^{\alpha/n-1}\int_B f(y)dy \leq \sup_{B\ni x}|B(0,1)|^{\alpha/n-1}\int_B \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \lesssim I_\alpha f(x),$$

de donde se sigue que $||M_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$ para toda $f \in L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$. En virtud del Teorema 3.2.1 con $\eta(t) = t$, vale la condición de tipo Dini *(i)*.

Probemos ahora *(i)* $\Rightarrow$*(ii)*. Consideremos una función $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ y $\mathfrak{b} \in BMO$ con $||\mathfrak{b}||_{BMO} = 1$. Probaremos que $||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ para poder aplicar el Lema 2.1.17. Notemos que podemos suponer que $f = C\chi_{B(0,R)}$ para algún $R > 0$ ya que, por ser f de soporte compacto, éste está contenido en alguna bola de la forma $B(0,R)$ y por ser f acotada, $|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\chi_{B(0,R)}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{B}(|I_\alpha f(x)|)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{B}\left(C\int_{B(0,R)}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy\right)dx$$

$$= \left(\int_{|x|\leq 2R} + \int_{|x|>2R}\right) \mathcal{B}\left(C\int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy\right) dx = I + II.$$

Si $|x| \leq 2R$, para $y \in B(0,R)$ se tiene que $y \in B(x,3R)$. Así,

$$I \leq \int_{|x|\leq 2R} \mathcal{B}\left(C\int_{B(x,3R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy\right) dx \leq \int_{|x|\leq 2R} \mathcal{B}\left(C(3R)^{\alpha}\right) dx < \infty.$$

Por otro lado, si $|x| > 2R$, $|x-y| > |x|/2$. Utilizando que $\mathcal{B}$ es de tipo inferior $q > n/(n-\alpha)$ tenemos que

$$\begin{aligned} II &\leq \int_{|x|>2R} \mathcal{B}\left(\frac{2^{n-\alpha}\omega_n R^n}{|x|^{n-\alpha}}\right) dx \leq \mathcal{B}(C_n R^{\alpha}) \int_{|x|>2R} \left(\frac{2R}{|x|}\right)^{q(n-\alpha)} dx \\ &= \mathcal{B}(C_n R^{\alpha}) 2R^{q(n-\alpha)} \int_{2R}^{\infty} \rho^{n-q(n-\alpha)} \frac{d\rho}{\rho} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Luego, si $\mathcal{B}_\delta(t) = \mathcal{B}(t^{1/\delta})$ para $0 < \delta < 1$, por el Lema 2.1.17 podemos escribir

$$\begin{aligned} ||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} &= |||I_\alpha f|^{\delta}||^{1/\delta}_{L^{\mathcal{B}_\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2 \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^{\delta} g(x) dx\right)^{1/\delta} \\ &\leq 2 \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^{\delta} |g(x)| dx\right)^{1/\delta}. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Como es bien conocido que I_α es de tipo débil $(1, n/(n-\alpha))$, para toda función $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| < \infty$ para todo $\lambda > 0$. En efecto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \lesssim \left(\frac{||f||_\infty |\mathrm{sop}(f)|}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} < \infty.$$

Además, toda función g que interviene en el supremo de arriba resulta ser localmente integrable en virtud de que $||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ pues, si B es una bola,

$$\begin{aligned} \int_B |g(x)| dx &\leq \int_{\{x\in B: |g(x)|\leq 1\}} dx + \int_{\{x\in B: |g(x)|>1\}} \frac{|g(x)|\widetilde{\mathcal{B}_\delta}(1)}{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}(1)} dx \\ &\leq |B| + \frac{1}{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}(1)} \int_{\{x\in B: |g(x)|>1\}} \widetilde{\mathcal{B}_\delta}(|g(x)|) dx < \infty, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó que $\widetilde{\mathcal{B}_\delta}$ es de Young.

Luego, es posible aplicar en la desigualdad (3.3.7) el Lema 1.4.3 con $|I_\alpha f|^\delta$ y $|g|$ respectivamente. Por lo tanto, usando dicho lema, la desigualdad generalizada de Hölder

(2.1.9) y la desigualdad puntual (1.4.26), obtenemos que

$$\begin{aligned}
||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|I_\alpha f|^\delta)(x) Mg(x)dx \right)^{1/\delta} \\
&\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M^\sharp(|I_\alpha f|^\delta)\|^{1/\delta}_{L^{\mathcal{B}_\delta}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \\
&= C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M^\sharp_\delta(|I_\alpha f|)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M_\alpha f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{B}$ es una N-función en la clase Δ_2, $\mathcal{B}_\delta$ también lo es (ver Lema 2.1.22). Luego, por el Teorema 3.3.1 se tiene que $||Mg||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}$. Usando ahora el Teorema 3.2.1 con $\eta(t) = t$ concluimos que

$$||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M_\alpha f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|M_\alpha f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)},$$

cualquiera sea $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.

Ahora bien, si $0 \leq f \in L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, definimos $f_m(x) = \text{mín}\{f(x), m\}\chi_{B(0,m)}(x)$, $m \in \mathbb{N}$. Claramente, $f_m \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ y $0 \leq f_m(x) \nearrow f(x)$, de donde que $||f_m||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)} \nearrow ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$. Además, como $0 \leq f_m(y)|x-y|^{\alpha-n} \nearrow f(y)|x-y|^{\alpha-n}$, se sigue del Teorema de Convergencia Monótona que $I_\alpha f_m(x) \nearrow I_\alpha f(x)$ cuando $m \to \infty$ para casi todo x. En consecuencia, $||I_\alpha f_m||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \nearrow ||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}$. Luego,

$$||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} = \lim_{m\to\infty} ||I_\alpha f_m||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lim_{m\to\infty} ||f_m||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Dada ahora una función $f \in L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ cualquiera, $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ = f\chi_{\{f\geq 0\}}$ y $f^- = f\chi_{\{f<0\}}$, y el resultado vale para cada una de ellas, de donde se sigue que también vale para f. □

Demostración de Teorema 3.3.2: Veamos primero que la condición *(i)* es suficiente. Si $k = 0$, el resultado es el Teorema 3.3.6 ya que $L^\infty_c(\mathbb{R}^n) \subset L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que vale para cada $0 \leq j \leq k-1 \in \mathbb{N}$; se probará el resultado para k.

Sin pérdida de generalidad, sea $||\mathfrak{b}||_{BMO} = 1$ y supongamos primero que $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tomemos una función $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Luego, como en la prueba del Teorema 3.3.6, tenemos que $||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Veamos que también $||I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Utilizando la fórmula

$$I^j_{\alpha,\mathfrak{b}} f(x) = \sum_{m=0}^{j} C_{m,j}\mathfrak{b}(x)^{j-m} I_\alpha(\mathfrak{b}^m f)(x), \tag{3.3.8}$$

y el hecho que $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \sum_{m=0}^{k} C_{m,k} \mathfrak{b}^{k-m} I_\alpha(\mathfrak{b}^m f) \right\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.3.9)\\
&\leq \sum_{m=0}^{k} C_{m,k} ||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{k-m} ||I_\alpha(\mathfrak{b}^m f)||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \sum_{m=0}^{k} C_{m,k} ||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{k} ||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{k} ||I_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty.
\end{aligned}$$

Así, por el Lema 2.1.17, tenemos que

$$||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f|^\delta |g(x)| dx \right)^{1/\delta}. \qquad (3.3.10)$$

Por otro lado, por la desigualdad de Chebyshev, usando que $1 \leq t \leq \mathcal{B}(t)/\mathcal{B}(1)$ y que $\mathcal{B}$ es de tipo superior q para algún $0 < q < \infty$ (ver Lema 1.1.37*(i)*), para cada $\lambda > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f(x)| > \lambda\}| &\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f(x)|>\lambda\}} \frac{|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f(x)|}{\lambda} dx \qquad (3.3.11)\\
&\leq \frac{1}{\mathcal{B}(1)} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f(x)|>\lambda\}} \mathcal{B}\left(\frac{|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f(x)|}{||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}} \frac{||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda} \right) dx\\
&\leq \frac{1}{\mathcal{B}(1)} \min\left\{ 1, \frac{||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}^q}{\lambda^q} \right\} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f(x)|}{||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}} \right) dx\\
&\leq \frac{||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}^q}{\mathcal{B}(1)\lambda^q} < \infty.
\end{aligned}$$

Así, para cada $0 < \delta < 1$ se puede aplicar en (3.3.10) el Lema 1.4.3 y usar que $\mathcal{B}_\delta$ es una N-función que satisface la condición Δ_2, tal como se hizo en la demostración del Teorema 3.3.6, para obtener de este modo

$$\begin{aligned}
||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f|^\delta)(x) Mg(x) dx \right)^{1/\delta}\\
&\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|M^\sharp(|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f|^\delta)\|_{L^{\mathcal{B}_\delta}(\mathbb{R}^n)}^{1/\delta} \|Mg\|_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}^{1/\delta}\\
&= C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|M_\delta^\sharp(|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f|)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}^{1/\delta}\\
&\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|M_\delta^\sharp(|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f|)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}^{1/\delta}
\end{aligned}$$

$$\leq C\|M_\delta^\sharp(|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f|)\|_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ahora bien, aplicando el Teorema 1.4.31 cuando $T_\alpha = I_\alpha$ (ver también [10, Lema 5.1]) se sigue que

$$||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \leq C\sum_{j=0}^{k-1}\|M_\epsilon(I_{\alpha,\mathfrak{b}}^j f)\|_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} + C\|M_{\alpha,\varphi_k} f\|_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.3.12}$$

donde $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$. Observemos que la función ξ_k del Teorema 3.2.1 definida como $\xi_k^{-1}(t) = t^{-\alpha/n}\varphi_k^{-1}(t)$ satisface $\xi_k(t) \approx t^{\frac{n}{n-\alpha}}(1+\log^+ t)^{\frac{kn}{n-\alpha}}$ (ver Lema 1.1.30) y la condición de tipo Dini de dicho teorema no es más que la condición *(i)* que tenemos por hipótesis. Luego, de ese teorema sabemos que M_{α,φ_k} está acotada de $L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ en $L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ por lo que el último término de (3.3.12) está acotado por $||f||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}$. Ahora bien, los términos restantes de la suma se pueden reescribir de la siguiente manera

$$\|M_\epsilon(I_{\alpha,\mathfrak{b}}^j f)\|_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = \|M(|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^j f|^\epsilon)\|_{L^{\mathcal{B}_\epsilon}(\mathbb{R}^n)}.$$

En virtud del Teorema 3.3.1 por ser $\widetilde{\mathcal{B}_\epsilon} \in \Delta_2$ para todo $0 < \epsilon < 1$ se tiene que

$$\|M(|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^j f|^\epsilon)\|_{L^{\mathcal{B}_\epsilon}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^j f|^\epsilon\|_{L^{\mathcal{B}_\epsilon}(\mathbb{R}^n)} = \|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^j f\|_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}$$

pues la condición de tipo Dini *(i)* implica la misma condición con j en lugar de k, para cada $0 \leq j \leq k-1$. Por lo tanto,

$$||I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f||_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)},$$

con constante independiente de $||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Ahora extendamos este resultado a $\mathfrak{b} \in BMO$. Definimos para cada $N \in \mathbb{N}$ la función $\mathfrak{b}_N$ como sigue

$$\mathfrak{b}_N(x) = \begin{cases} \mathfrak{b} & \text{si } -N \leq \mathfrak{b}(x) < N, \\ N & \text{si } \mathfrak{b}(x) > N, \\ -N & \text{si } \mathfrak{b}(x) < -N. \end{cases}$$

Es fácil ver que $|\mathfrak{b}_N(x) - \mathfrak{b}_N(y)| \leq |\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y)|$, de donde $||\mathfrak{b}_N||_{BMO} \leq 2||\mathfrak{b}||_{BMO} = 2$. Además, como $f \in L_c^\infty$, $(\mathfrak{b}_N)^m f \to \mathfrak{b}^m f$ cuando $N \to \infty$ sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $1 < p < \infty$. Como I_α está acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ cuando $1/q = 1/p - \alpha/n$ y $1 < p < n/\alpha$, se tiene que $I_\alpha((\mathfrak{b}_N)^m f) \to I_\alpha(\mathfrak{b}^m f)$ cuando $N \to \infty$ sobre $L^q(\mathbb{R}^n)$. Así, existe una subsucesión tal que las convergencias anteriores se verifican en casi todo punto y, usando nuevamente (3.3.8), se tiene que $I_{\alpha,\mathfrak{b}_{N_l}}^k f \to I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f$ cuando $l \to \infty$ en casi todo punto. Por lo tanto, de la continuidad de la función $\mathcal{B}$, del Lema de Fatou y del hecho que $||I_{\alpha,\mathfrak{b}_{N_l}}^k f||_{L^\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \leq 2C||f||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}$ obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{|I_{\alpha,\mathfrak{b}}^k f(x)|}{2C||f||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{l\to\infty} \mathcal{B}\left(\frac{|I_{\alpha,\mathfrak{b}_{N_l}}^k f(x)|}{2C||f||_{L^\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}}\right) dx \tag{3.3.13}$$

$$\leq \liminf_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}\left(\frac{|I^k_{\alpha,\mathfrak{b}_{N_l}} f(x)|}{2C||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}} \right) dx \leq 1,$$

esto es, $||I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq 2C||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Finalmente, por la homogeneidad de la norma, $||I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq 2||\mathfrak{b}||^k_{BMO}||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$.

Para ver que la condición de tipo Dini *(i)* es necesaria, realizaremos una estimación puntual del conmutador $I^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$, para el símbolo particular $\mathfrak{b}(x) = \log|x| \in BMO$ y para $f_\delta = \chi_{B(0,\delta)} \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, siendo $\delta > 0$.

Supongamos que $|x| > 2\delta$. Entonces, para $y \in B(0,\delta)$, resulta que $|x - y| < 3|x|/2$, de donde se tiene que

$$\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y) \geq \log(|x|/\delta) = \log 2 + \log(|x|/2\delta) \geq \log 2(1 + \log^+(|x|/2\delta)).$$

Luego, para tales x,

$$\begin{aligned} I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f_\delta(x) &= \int_{B(0,\delta)} \frac{(\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y))^k}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \geq C^k (1 + \log^+(|x|/2\delta))^k \frac{\omega\delta^n}{(3|x|/2)^{n-\alpha}} \\ &= C(\alpha, n, k)\, \omega^{\alpha/n} \delta^\alpha \frac{(1 + \log^+(|x|/2\delta))^k}{(|x|/2\delta)^{n-\alpha}}, \end{aligned}$$

donde $C(\alpha, n, k) = C^k \omega^{1-\alpha/n} 3^{\alpha-n}$.

Por el Lema 1.1.30*(i)*, si $\varphi(t) = t^{1/(n-\alpha)}(1 + \log^+ t)^{k/(n-\alpha)}$, entonces existe una constante $D > 1$ tal que

$$D^{-1}\varphi^{-1}(t) \leq t^{n-\alpha}(1 + \log^+ t)^{-k} \leq D\varphi^{-1}(t),$$

por lo que se tiene

$$I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f_\delta(x) \geq C(\alpha, n, k)\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha / D\varphi^{-1}(|x|/2\delta) := \tilde{C}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\varphi^{-1}(|x|/2\delta)$$

para $|x| > 2\delta$. Entonces, tomando $0 < \lambda < \tilde{C}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\varphi^{-1}(2^{1/n})$ y $\xi_k(t) = \varphi(t)^n = t^{\frac{n}{n-\alpha}}(1 + \log^+ t)^{\frac{kn}{n-\alpha}}$,

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f_\delta(x)| > \lambda\}| &\geq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\delta \text{ y } \tilde{C}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha/\varphi^{-1}(|x|/2\delta) > \lambda \right\} \right| \\ &\geq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2\delta < |x| < 2\delta\varphi\left(\frac{\tilde{C}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{\lambda} \right) \right\} \right| \\ &= \omega 2^n \delta^n \varphi\left(\frac{\tilde{C}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{\lambda} \right)^n - \omega 2^n \delta^n \geq \omega 2^{n-1}\delta^n \varphi\left(\frac{\tilde{C}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{\lambda} \right)^n \\ &= \omega 2^{n-1}\delta^n \xi\left(\frac{\tilde{C}\omega^{\alpha/n}\delta^\alpha}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la estimación anterior obtenemos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f_\delta(x)| > \lambda\}| \geq \frac{\tilde{C} 2^{n-2} \omega^{1+\alpha/n} \delta^{n+\alpha}}{\lambda} \xi' \left(\frac{\tilde{C} \omega^{\alpha/n} \delta^\alpha}{2\lambda} \right).$$

Siguiendo los mismos lineamientos que en (3.2.14), se puede deducir la condición

$$\int_0^{C_1 t \mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}} \frac{b(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{n-\alpha}}} \left(1 + \log^+ \left(\frac{C_1 t \mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}}{\lambda} \right)\right)^{\frac{kn}{n-\alpha}} d\lambda \leq C_2 \left(\frac{\mathcal{A}(t)}{t} \right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

para todo $t > 0$, que es la condición de tipo Dini *(i)* del Teorema 3.2.1 para la función ξ_k. □

3.3.2. Operadores integrales fraccionarios y sus conmutadores

Esta sección está dedicada a estudiar las propiedades de acotación sobre espacios de Orlicz de los operadores de convolución de tipo fraccionario T_α y sus conmutadores, tales como los definidos en la §1.4.2, cuyos núcleos satisfacen condiciones de tipo Hörmander asociadas a una función de Young dada. Puesto que los núcleos que definen a estos nuevos operadores son bien generales y menos regulares que el núcleo de I_α, las condiciones obtenidas serán, en principio, suficientes y se podrán deducir de aquellas que garantizan la acotación del operador maximal de control $M_{\alpha,\eta}$, donde la función η está íntimamente relacionada con la condición de Hörmander que verifica el núcleo.

Antes de establecer el resultado correspondiente, recordemos la definición de T_α, para $0 \leq \alpha < n$,

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x-y) f(y)\, dy, \tag{3.3.14}$$

donde el núcleo K_α verificará las siguientes condiciones:

(i) la condición de tamaño S_α que establece que

$$\int_{\{|x| \sim s\}} |K_\alpha(x)|\, dx \leq C s^\alpha,$$

para alguna constante positiva C, donde $\{|x| \sim s\} = \{x : s < |x| \leq 2s\}$;

(ii) la condición de regularidad $H_{\alpha,\Phi}$ asociada a una función Φ de Young. Concretamente, $K_\alpha \in H_{\alpha,\Phi}$ si existen constantes $c \geq 1$ y $C_\Phi > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, vale la desigualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n-\alpha} \| \left(K_\alpha(\cdot - y) - K_\alpha(\cdot)\right) \chi_{\{|x| \sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0, 2^{m+1} R)} \leq C_\Phi.$$

En el siguiente teorema se establece el resultado de acotación antes mencionado.

Teorema 3.3.15. *Sea $0<\alpha<n$, η una función de Young y sea T_α un operador fraccionario como en* (3.3.14) *con núcleo $K_\alpha \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\tilde{\eta}}$. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y ξ como en el Teorema 3.2.1 con $\mathcal{B}$ una N-función en la clase Δ_2, y supongamos que la condición de tipo Dini del Teorema 3.2.1 vale. Entonces,*

$$||T_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda función $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que el lado izquierdo es finito.

Observación 3.3.16. El teorema anterior también vale si cambiamos la condición de Hörmander $H_{\alpha,\tilde{\eta}}$ por la condición de tipo Lipschitz $H^*_{\alpha,\infty}$, y la condición de tipo Dini *(i)* del Teorema 3.2.1 por la condición (3.2.7). Este cambio se debe a que los operadores T_α con núcleos en $S_\alpha \cap H^*_{\alpha,\infty}$ están controlados por la maximal fraccionaria clásica M_α, como establece el Teorema 1.4.25. Así, se puede realizar una prueba similar para obtener la acotación para dichos operadores de $L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ para funciones acotadas de soporte compacto.

Demostración del Teorema 3.3.15: Para $0<\delta<1$, sea $\mathcal{B}_\delta(t)=\mathcal{B}(t^{1/\delta})$. Entonces, como $||T_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}<\infty$, podemos escribir

$$||T_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} = |||T_\alpha f|^\delta||^{1/\delta}_{L^{\mathcal{B}_\delta}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f|^\delta |g| dx\right)^{1/\delta}.$$

Procediendo como en (3.3.11), se sigue de la desigualdad de Chebyshev y de las hipótesis sobre $\mathcal{B}$ que para todo $\lambda>0$, $|\{x\in\mathbb{R}^n : |T_\alpha f(x)|>\lambda\}|<\infty$. Luego, resulta válido el Lema 1.4.3 para $|T_\alpha f|^\delta$. De este hecho, de la desigualdad generalizada de Hölder (2.1.9) y de la desigualdad puntual (1.4.24) se obtiene

$$\begin{aligned}
||T_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|T_\alpha f|^\delta)(x) Mg(x) dx\right)^{1/\delta} \\
&\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M^\sharp(|T_\alpha f|^\delta)\|^{1/\delta}_{L^{\mathcal{B}_\delta}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \\
&= C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M^\sharp_\delta(|T_\alpha f|)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M_{\alpha,\eta} f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, por el Lema 2.1.22 se tiene que $\mathcal{B}_\delta$ es una N-función en Δ_2 para todo $0<\delta<1$, por lo que del Teorema 3.3.1 se sabe que $||Mg||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}$. Luego, usando el Teorema 3.2.1 y la condición de tipo Dini concluimos que

$$||T_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \|M_{\alpha,\eta} f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|M_{\alpha,\eta} f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}. \quad \square$$

Propiedades similares a las anteriores pueden obtenerse para los conmutadores de orden $k \in \mathbb{N}$ de T_α con símbolo $\mathfrak{b} \in BMO$ y $0 \leq \alpha < n$, definidos por

$$T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y))^k K_\alpha(x-y) f(y)\, dy,$$

bajo el supuesto de que el núcleo $K_\alpha \in S_\alpha$ y verifique, además, la siguiente condición de regularidad de tipo Hörmander, dependiente del orden k, $H_{\alpha,\Phi,k}$: existen constantes $c \geq 1$ y $C_{\alpha,\Phi,k} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, vale la desigualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n-\alpha} m^k \| \left(K_\alpha(\cdot - y) - K_\alpha(\cdot)\right) \chi_{\{|x| \sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0,2^{m+1}R)} \leq C_{\alpha,\Phi,k}.$$

Con estas propiedades y mediante la aplicación del Teorema 1.4.30 y un argumento inductivo se tiene el siguiente resultado de acotación para $T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$.

Teorema 3.3.17. *Sean $0 < \alpha < n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y η y Φ dos funciones de Young tales que $\eta^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t)$ siendo $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y ξ como en el Teorema 3.2.1, con $\mathcal{B}$ una N-función en la clase Δ_2 si $k=0$ y en la clase Δ_2^c si $k > 0$. Sea T_α un operador fraccionario como en (1.4.19) con núcleo $K \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\Phi,k}$ y supongamos que T_α está acotado de $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$, $p_0, q_0 > 1$. Si se verifica la condición de tipo Dini del Teorema 3.2.1, entonces para toda $\mathfrak{b} \in BMO$,*

$$||T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C ||\mathfrak{b}||^k_{BMO} ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda función $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $||T_\alpha f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Observación 3.3.18. Si $k=0$ y tomamos $\Phi \approx \widetilde{\eta}$ en este último teorema obtenemos una generalización del Teorema 3.3.15.

Observación 3.3.19. Como en el caso $k=0$, el teorema anterior también vale si cambiamos la condición de Hörmander $H_{\alpha,\Phi,k}$ por la condición de tipo Lipschitz $H^*_{\alpha,\infty,k}$ o por la condición $H_{\alpha,\infty,k}$. Como se mostró en el Teorema 1.4.31, estos operadores están controlados por la maximal fraccionaria M_{α,φ_k} con $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$. Siguiendo las ideas del Teorema 3.3.2 para el conmutador $I^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$ se puede probar que una condición de tipo Dini suficiente para los operadores mencionados es la dada en dicho teorema.

Demostración del Teorema 3.3.17: Realizaremos la demostración por inducción. Si $k=0$, el resultado vale en virtud del Teorema 3.3.15 y la Observación 3.3.18. Supongamos que el teorema se verifica para todo $0 \leq j \leq k-1$, veremos que es cierto para k. Sea $||\mathfrak{b}||_{BMO} = 1$ y $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Consideremos primero el caso en que $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Siguiendo los lineamientos de la prueba del Teorema 3.3.2 correspondiente al conmutador de orden k de I_α, es fácil ver de las hipótesis sobre f y de la condición Δ_2 en $\mathcal{B}$ que $||T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ y que el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n : |T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f(x)| > \lambda\}$ tiene medida finita para cada $\lambda > 0$. Luego, podemos aplicar los Lemas 2.1.17 y 1.4.3, y el hecho que $\mathcal{B}_\delta \in \Delta_2$ para obtener que

$$||T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|M^\sharp_\delta(|T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f|)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=0}^{k-1} \|M_\epsilon(T^j_{\alpha,\mathfrak{b}} f)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} + \|M_{\alpha,\eta} f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)},$$

donde en la última desigualdad hemos usado el Teorema 1.4.30. De las hipótesis sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, el último sumando está acotado por $||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$. Por otra parte, cada uno de los demás sumandos están acotados por $||T^j_{\alpha,\mathfrak{b}}f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}$ respectivamente, en virtud del hecho que $\widetilde{\mathcal{B}}_\epsilon \in \Delta_2$ para todo $0 < \epsilon < 1$ y el Teorema 3.3.1.

Ahora bien, notemos que para todo $0 \leq j \leq k-1$, $\varphi_j(t) \leq \varphi_k(t)$, por lo que

$$\eta^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t) \leq \varphi_j^{-1}(t)$$

y $K \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\Phi,k} \subset S_\alpha \cap H_{\alpha,\Phi,j}$ en virtud del Lema 1.4.29. Es decir, para cada $0 \leq j \leq k-1$, por la hipótesis inductiva, se tiene que

$$||T^j_{\alpha,\mathfrak{b}}f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.3.20}$$

Entonces, $||T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$ para todo $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, con C independiente de $||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Resta extender este resultado a $\mathfrak{b} \in BMO$. Para ello definimos $\mathfrak{b}_N$ como en la prueba del Teorema 3.3.2 y seguimos los argumentos dados allí, usando la hipótesis de acotación de T_α de $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ para mostrar la convergencia $T^k_{\alpha,\mathfrak{b}_N}f \to T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f$ cuando $N \to \infty$ en casi todo punto. La prueba concluye procediendo de manera similar a (3.3.13). $\square$

3.3.3. Operadores integrales singulares y sus conmutadores

Si bien el problema de la acotación sobre espacios de Orlicz del operador maximal generalizado M_η fue resuelto en [52] (ver Teorema 3.1.2), no ocurre lo mismo con el problema de acotación sobre dichos espacios de operadores integrales singulares de tipo convolución cuyos núcleos satisfacen condiciones de tipo Hörmander asociada a la función $\widetilde{\eta}$. Con las técnicas de la sección anterior es posible derivar propiedades de continuidad para tales operadores a partir del control que ejerce M_η sobre ellos. Recordemos que un operador T de estas características es un operador acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la forma

$$Tf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy, \tag{3.3.21}$$

donde K es una función medible definida fuera del origen que satisface una condición de tipo Hörmander H_Φ asociada a una función de Young Φ. Más precisamente, $K \in H_\Phi$ si existen constantes $c \geq 1$ y $C_\Phi > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \| \left(K(\cdot - y) - K(\cdot)\right) \chi_{\{|x|\sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0,2^{m+1}R)} \leq C_\Phi.$$

Para más detalles, ver §1.4.1. Siguiendo el espíritu del Teorema 3.3.15, es posible probar el siguiente resultado para los operadores mencionados, como consecuencia del Teorema 1.4.10 y el correspondiente resultado de acotación para el operador maximal M_η dado en el Teorema 3.1.2.

Teorema 3.3.22. *Sea η una función de Young y sea T un operador integral singular como en* (3.3.21) *con núcleo $K \in H_{\widetilde{\eta}}$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como en el Teorema 3.1.2 de manera que verifiquen la desigualdad* (3.1.3) *respecto de η, con $\mathcal{B}$ una N-función que satisface la condición Δ_2. Entonces,*

$$||Tf||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, siempre que el lado izquierdo sea finito.

Observación 3.3.23. El teorema anterior también vale si cambiamos la condición de Hörmander $H_{\widetilde{\eta}}$ por la condición de tipo Lipschitz H_∞^* o la condición H_∞, y pedimos la condición de tipo Dini (3.1.3) para $\eta(t) = t$. Esto tiene que ver con que los operadores que poseen ese tipo de núcleos están controlados por la maximal de Hardy-Littlewood como se mostró en el Teorema 1.4.12. La prueba de este resultado es análoga a la que damos a continuación.

Demostración del Teorema 3.3.22: Seguiremos los lineamientos del Teorema 3.3.15. Como $\mathcal{B} \in \Delta_2$, una estimación similar a la dada en (3.3.11) permite probar que la medida $|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}|$ es finita para todo $\lambda > 0$ y toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para la cual la cantidad $||Tf||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Luego, para cada $0 < \delta < 1$, si $\mathcal{B}_\delta$ es como en el Teorema 3.3.15, podemos aplicar el Lema 1.4.3 y el Teorema 1.4.10 para obtener

$$\begin{aligned}
||Tf||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} = |||Tf|^\delta||^{1/\delta}_{L^{\mathcal{B}_\delta}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \le 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^\delta |g| dx\right)^{1/\delta} \\
&\le C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \le 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|Tf|^\delta)(x) Mg(x) dx\right)^{1/\delta} \\
&\le C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \le 1} \|M^\sharp(|Tf|^\delta)\|^{1/\delta}_{L^{\mathcal{B}_\delta}(\mathbb{R}^n)} \|Mg\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C \sup_{||g||_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \le 1} \|M_\eta f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{1/\delta}_{L^{\widetilde{\mathcal{B}_\delta}}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema 3.3.1 por ser $\mathcal{B}_\delta \in \Delta_2$ y la acotación de M_η dada en el Teorema 3.1.2. $\square$

Un resultado similar se obtiene para los conmutadores de mayor orden del operador T con símbolo $\mathfrak{b} \in BMO$ que, recordemos, se definen formalmente, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por

$$T_{\mathfrak{b}}^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y))^k K(x-y) f(y)\, dy,$$

donde el núcleo $K \in H_{\Phi,k}$, es decir, existen constantes $c \ge 1$ y $C_{\Phi,k} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \| \left(K(\cdot - y) - K(\cdot)\right) \chi_{\{|x| \sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0, 2^{m+1}R)} \le C_{\Phi,k}.$$

Con estas propiedades, estos conmutadores están acotados sobre espacios de Orlicz en el siguiente sentido.

Teorema 3.3.24. *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sean η y Φ dos funciones de Young tales que $\widetilde{\eta}^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t)$ para $t \geq t_0 > 0$ siendo $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como en el Teorema 3.1.2 de manera que verifiquen la desigualdad* (3.1.3) *respecto de la función η, con $\mathcal{B}$ una N-función que satisface la condición Δ_2 si $k = 0$ y la condición Δ_2^c si $k > 0$. Sea T un operador integral singular con núcleo $K \in H_\Phi \cap H_{\tilde{\eta},k}$. Entonces, para todo $\mathfrak{b} \in BMO$*

$$||T_{\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||\mathfrak{b}||_{BMO}^k ||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $||Tf||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Observación 3.3.25. El teorema anterior también se verifica para los conmutadores $T_{\mathfrak{b}}^k$ cuando el operador integral singular T tiene un núcleo $K \in H_\infty^*$ o $K \in H_{\infty,k}$ pues éstos están controlados por la maximal de Hardy-Littlewood iterada $k+1$ veces, o lo que es equivalente, por el operador maximal M_{φ_k} con $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$ (ver Teorema 1.4.18). La condición de Dini suficiente es aquella que surge de considerar φ_k en lugar de η en la condición (3.1.3).

Demostración del Teorema 3.3.24: Realizaremos la demostración por inducción. Si $k = 0$, el resultado vale en virtud del Teorema 3.3.22 ya que $L_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que el teorema se verifica para todo $0 \leq j \leq k-1$, veremos que es cierto para k.

Sean $||\mathfrak{b}||_{BMO} = 1$ y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $||Tf||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Consideraremos primero el caso en que $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por las propiedades sobre f y $\mathcal{B}$, procediendo como en (3.3.9) y (3.3.11), para cada $\lambda > 0$ se tiene que $||T_{\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ y $|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\mathfrak{b}}^k f(x)| > \lambda\}| < \infty$ y estamos en condiciones de aplicar los Lemas 2.1.17 y 1.4.3, usando que $\mathcal{B}_\delta \in \Delta_2$, para así obtener que

$$||T_{\mathfrak{b}}^k f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|M_\delta^\sharp(|T_{\mathfrak{b}}^k f|)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\sum_{j=0}^{k-1}\|M_\epsilon(T_{\mathfrak{b}}^j f)\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} + \|M_\eta f\|_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.3.26)$$

como consecuencia del Teorema 1.4.17. Sabemos que el último sumando está acotado por $||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$ gracias a la condición de tipo Dini que verifican $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y η y el Teorema 3.1.2. Por otra parte, en virtud de que $\widetilde{\mathcal{B}}_\epsilon \in \Delta_2$ para todo $0 < \epsilon < 1$, cada uno de los primeros k sumandos está acotado por $||T_{\mathfrak{b}}^j f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}$ respectivamente. Además, observemos que del Lema 1.4.16, para todo $0 \leq j \leq k-1$, $K \in H_\Phi \cap H_{\widetilde{\eta},k} \subset H_\Phi \cap H_{\widetilde{\eta},j}$ y, como $\varphi_j(t) \leq \varphi_k(t)$,

$$\widetilde{\eta}^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t) \leq \varphi_j^{-1}(t).$$

Luego, para cada $0 \leq j \leq k-1$ se tiene que

$$||T_{\mathfrak{b}}^j f||_{L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.3.27)$$

Para extender el resultado a $\mathfrak{b} \in BMO$, basta considerar la sucesión de funciones $\{\mathfrak{b}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ definida en la demostración del Teorema 3.3.2 y probar que $T_{\mathfrak{b}_N}^k f \to T_{\mathfrak{b}}^k f$ cuando $N \to \infty$ usando, en este caso, la acotación de T sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, se procede como en (3.3.13) y se obtiene el resultado deseado. $\square$

3.4. Algunas observaciones sobre la condición de A. Cianchi

En esta sección haremos una comparación entre las condiciones necesarias y suficientes para la acotación de la maximal fraccionaria M_α dadas por A. Cianchi en [20] y las obtenidas en esta tesis en el Teorema 3.2.1. De este resultado es inmediato que las condiciones mencionadas son equivalentes. Sin embargo, veremos a continuación una prueba directa que involucra a ambas condiciones sin utilizar los resultados mencionados. Para ello, necesitaremos la siguiente definición.

Definición 3.4.1. Sean $\Phi, \Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dos funciones. Se dice que Φ *mayora globalmente* a Ψ si existe una constante positiva C tal que $\Psi(t) \leq C\Phi(Ct)$ para todo $t \geq 0$.

Para demostrar la equivalencia entre las condiciones, consideraremos funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ finitas tales que

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t a(s)\,ds \ \text{ y } \ \mathcal{B}(t) = \int_0^t b(s)\,ds, \tag{3.4.2}$$

donde $a, b : [0,\infty) \to [0,\infty)$ son no-decrecientes y continuas por izquierda con $a(0) = b(0) = 0$ y a positiva sobre $(0,\infty)$. Esto es, $\mathcal{A}$ es de Young por el Lema 1.1.3, aunque $\mathcal{B}$ podría no serlo.

A. Cianchi probó en [20] el siguiente teorema de acotación de M_α cuando la función a no es necesariamente positiva sobre $(0,\infty)$.

Teorema 3.4.3 ([20])**.** *Sea $0 < \alpha < n$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ funciones finitas tales que*

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t a(s)\,ds \ \text{ y } \ \mathcal{B}(t) = \int_0^t b(s)\,ds,$$

donde a y b son no-decrecientes y continuas por izquierda con $a(0) = b(0) = 0$. El operador M_α está acotado de $L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si la función

$$\Psi_{n/\alpha}(t) = \int_0^t \frac{\mathcal{B}(s)}{s^{\frac{n}{n-\alpha}+1}}\,ds$$

es finita para todo $t > 0$ y $\mathcal{A}$ mayora globalmente a $\mathcal{B}_{n/\alpha}$, donde $\mathcal{B}_{n/\alpha}$ es una función de Young que se define a través de su función complementaria por

$$\widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}(t) = \int_0^t r^{\frac{\alpha}{n-\alpha}} \left(\Psi_{n/\alpha}^{-1}\left(r^{\frac{n}{n-\alpha}}\right)\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\,dr,$$

entendiendo así que el integrando es la función $(\mathcal{B}'_{n/\alpha})^{-1}$.

Observación 3.4.4. Como vemos, el Teorema 3.4.3 permite, en principio, que la función $\mathcal{A}$ sea nula en algún intervalo, a diferencia de nuestro Teorema 3.2.1 donde sí se requiere la positividad de la función $\mathcal{A}$. Para realizar la comparación entre los dos tipos de condiciones debemos hacer notar que, en realidad, la acotación del operador maximal fraccionario M_α de $L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ es trivial cuando la función $\mathcal{A}$ no es positiva sobre todo el conjunto $(0,\infty)$. En efecto, sea $\mathcal{A}(t)=0$ sobre algún intervalo de la forma $[0,t_0]$. Observemos primero que toda función constante no nula está en $L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ pues si $f(x)=c\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{A}\left(\frac{|f(x)|}{|c|t_0^{-1}}\right)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{A}(t_0)dx=0\leq 1$$

y así $||f||_{L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)}\leq |c|/t_0<\infty$. Sin embargo,

$$M_\alpha f(x)=|c|\sup_{B\ni x}|B|^{\alpha/n-1}\geq |c|\sup_{R>0}|B(x,R)|^{\alpha/n-1}\geq |c||B(0,1)|^{\alpha/n-1}\sup_{0<R\leq 1}R^{\alpha-n}=\infty$$

para cada $x\in\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $M_\alpha f\notin L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ a menos que $\mathcal{B}\equiv 0$ y, en tal caso, la acotación es trivial. Por lo tanto, se puede reformular el teorema anterior pidiendo que $\mathcal{A}$ sea de Young, lo que permitirá realizar la comparación deseada entre las condiciones dadas allí y la de tipo Dini dada en el Teorema 3.2.1.

Proposición 3.4.5. *Sean $0<\alpha<n$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como en (3.4.2) y $\mathcal{B}_{n/\alpha}$ y $\Psi_{n/\alpha}$ como en el Teorema 3.4.3. Entonces equivalen:*

(i) existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\int_0^{C_1 t\mathcal{A}(t)^{-\frac{\alpha}{n}}}\frac{b(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{n-\alpha}}}\,d\lambda\leq C_2\left(\frac{\mathcal{A}(t)}{t}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \tag{3.4.6}$$

para todo $t>0$;

(ii) $\Psi_{n/\alpha}(t)<\infty$ para todo $t>0$ y $\mathcal{A}$ mayora globalmente a $\mathcal{B}_{n/\alpha}$.

Para probar la proposición, usaremos el siguiente lema.

Lema 3.4.7. *Sean Φ y Ψ funciones de Young tales que Φ mayora globalmente a Ψ. Entonces, $\widetilde{\Psi}$ mayora globalmente a $\widetilde{\Phi}$.*

Demostración: Supongamos que Φ mayora globalmente a Ψ, esto es, $\Psi(t)\leq C\Phi(Ct)$ para todo $t\geq 0$ y para alguna constante $C>0$.

Sea $s>0$. Luego, para cada $t\geq 0$, de la definición (1.1.21) de $\widetilde{\Psi}$

$$st-C\Phi(Ct)\leq st-\Psi(t)\leq\widetilde{\Psi}(s).$$

Podemos reescribir el lado izquierdo como

$$st-C\Phi(Ct)=C\left(\frac{s}{C^2}(Ct)-\Phi(Ct)\right).$$

Puesto que $C>0$, tomando supremo en $t\geq 0$ se obtiene que

$$C\widetilde{\Phi}(s/C^2)\leq\widetilde{\Psi}(s),\ \forall\, s\geq 0,$$

de donde

$$\widetilde{\Phi}(s) \leq \frac{\widetilde{\Psi}(C^2 s)}{C} \leq K\widetilde{\Psi}(Ks)$$

tomando $K = \max\{1/C, C^2\}$. □

Demostración de la Proposición 3.4.5: Supongamos que vale *(ii)*. Luego, como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}_{n/\alpha}$ son de Young, del Lema 3.4.7, tenemos que $\widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}$ mayora globalmente a $\widetilde{\mathcal{A}}$. Como $\Psi_{n/\alpha}$ está bien definida y es no-decreciente, tiene inversa generalizada no-decreciente. Además, como la función potencia $r^{\alpha/(n-\alpha)}$ es estrictamente creciente, $(\mathcal{B}'_{n/\alpha})^{-1}$ resulta estrictamente creciente, por lo que para cada $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}(t) \leq C\widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}(Ct) &= C\int_0^{Ct} r^{\frac{\alpha}{n-\alpha}}\left(\Psi_{n/\alpha}^{-1}\left(r^{\frac{n}{n-\alpha}}\right)\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} dr \\ &\leq \tilde{C}\left(\Psi_{n/\alpha}^{-1}\left((Ct)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right)\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} t^{\frac{n}{n-\alpha}}.\end{aligned}$$

Esto es,

$$\frac{\widetilde{\mathcal{A}}(t)^{1-\alpha/n}}{\tilde{C}^{1-\alpha/n}t} \leq \Psi_{n/\alpha}^{-1}\left((Ct)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right), \forall\, t > 0.$$

Ahora bien, del crecimiento de $\Psi_{n/\alpha}$ y del Lema 1.1.12*(ii)*, se sigue que

$$\Psi_{n/\alpha}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{A}}(t)^{1-\alpha/n}}{\tilde{C}t}\right) \leq (Ct)^{\frac{n}{n-\alpha}}, \forall\, t > 0.$$

Dado $s > 0$ y tomando $t = \frac{2\mathcal{A}(s)}{s}$ que es positivo por ser $\mathcal{A}$ de Young, tenemos que

$$\Psi_{n/\alpha}\left(\frac{s\widetilde{\mathcal{A}}\left(\frac{2\mathcal{A}(s)}{s}\right)^{1-\alpha/n}}{2\tilde{C}\mathcal{A}(s)}\right) \leq C_2\left(\frac{\mathcal{A}(s)}{s}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}. \tag{3.4.8}$$

Por otra parte, observemos que para cada $s > 0$

$$\widetilde{\mathcal{A}}\left(\frac{2\mathcal{A}(s)}{s}\right) = \sup_{u\geq 0}\left\{u\frac{2\mathcal{A}(s)}{s} - \mathcal{A}(u)\right\} \geq s\frac{2\mathcal{A}(s)}{s} - \mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(s). \tag{3.4.9}$$

Luego,

$$\frac{s\widetilde{\mathcal{A}}\left(\frac{2\mathcal{A}(s)}{s}\right)^{1-\alpha/n}}{\mathcal{A}(s)} \geq s\mathcal{A}(s)^{-\alpha/n}.$$

Claramente, de (3.4.8) se sigue que

$$\Psi_{n/\alpha}\left(C_1 s\mathcal{A}(s)^{-\alpha/n}\right) = \int_0^{C_1 s\mathcal{A}(s)^{-\alpha/n}} \frac{\mathcal{B}(u)}{u^{\frac{n}{n-\alpha}+1}}du \leq C_2\left(\frac{\mathcal{A}(s)}{s}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}},$$

con $C_1 = 1/(2\tilde{C})$. Usando que $2\mathcal{B}(u) \geq ub(u/2)$ y haciendo un cambio de variables se obtiene la condición *(i)*.

Recíprocamente, supongamos que se tiene la condición de tipo Dini *(i)*. Por un lado, como

$$\Psi_{n/\alpha}(t) \leq \int_0^t \frac{b(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{n-\alpha}}} d\lambda,$$

la condición de tipo Dini implica que $\Psi_{n/\alpha}(t_0) < \infty$ para algún $t_0 > 0$ y para todo $0 \leq t \leq t_0$. De la continuidad de $b(\lambda)/\lambda^{n/(n-\alpha)}$ en $[t_0, t]$ se tiene la buena definición de $\Psi_{n/\alpha}$ para todo $t \geq 0$.

Probemos ahora que $\mathcal{A}$ mayora globalmente a $\mathcal{B}_{n/\alpha}$. De la condición de Dini y del hecho que $\mathcal{A}(t) \leq ta(t)$ tenemos que

$$\Psi_{n/\alpha}(C_1 t^{1-\alpha/n} a(t)^{-\alpha/n}) \leq C_2 a(t)^{\frac{n}{n-\alpha}}, \, \forall\, t > 0.$$

Tomando $t = a^{-1}(s)$ con $s > 0$ resulta que

$$\Psi_{n/\alpha}(C_1 (a^{-1}(s))^{1-\alpha/n} s^{-\alpha/n}) \leq C_2 s^{\frac{n}{n-\alpha}} = (C_2^{1-\alpha/n} s)^{\frac{n}{n-\alpha}}, \, \forall\, s > 0,$$

usando el Lema 1.1.12*(ii)* con a y a^{-1}. Poniendo $u = C_2^{1-\alpha/n} s > 0$ y aplicando $\Psi_{n/\alpha}^{-1}$, se sigue que

$$K(a^{-1}(uC_2^{\alpha/n-1}))^{1-\alpha/n} u^{-\alpha/n} \leq \Psi_{n/\alpha}^{-1}(u^{\frac{n}{n-\alpha}}), \, \forall\, u > 0,$$

o equivalentemente,

$$K(a^{-1}(uC_2^{\alpha/n-1})) \leq u^{\frac{\alpha}{n-\alpha}} \Psi_{n/\alpha}^{-1}(u^{\frac{n}{n-\alpha}})^{\frac{n}{n-\alpha}}, \, \forall\, u > 0.$$

Integrando entre 0 y $z > 0$, y realizando un cambio de variables en la integral del lado izquierdo de la desigualdad se obtiene que

$$\widetilde{\mathcal{A}}(z) \leq (C_2^{\alpha/n-1}/K) \widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}(C_2^{1-\alpha/n} z), \, \forall\, z > 0.$$

Tomando la mayor de las constantes entre $C_2^{\alpha/n-1}/K$ y $C_2^{1-\alpha/n}$, se tiene que $\widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}$ mayora globalmente a $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Veamos que $\mathcal{A}$ mayora globalmente a $\mathcal{B}_{n/\alpha}$. Para ello, notemos que

$$st - \mathcal{A}(t) \leq \widetilde{\mathcal{A}}(s) \leq K\widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}(Ks), \quad \forall s, t \geq 0.$$

Es decir,

$$K\widetilde{\widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}}(Kt) = \sup_{s \geq 0} K\left(\frac{s}{K^2} Kt - \widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}(Ks)\right) \leq \mathcal{A}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Finalmente, dado que $(\mathcal{B}'_{n/\alpha})^{-1}$ es estrictamente creciente, también lo es $\mathcal{B}'_{n/\alpha}$, por lo que $\widetilde{\widetilde{\mathcal{B}_{n/\alpha}}} = \mathcal{B}_{n/\alpha}$ (ver Lema 1.1.16*(ii)*), y obtenemos que $\mathcal{A}$ mayora globalmente a $\mathcal{B}_{n/\alpha}$. $\square$

Capítulo 4

Continuidad de operadores en espacios de Lebesgue de exponente variable

El objetivo de este capítulo es extender los resultados de acotación con pesos que se conocen para M y M_α sobre espacios de Lebesgue clásicos. Por un lado, considerando los operadores maximales generalizados $M_{\alpha,\eta}$, siendo η una función de Young, y por otro, aumentando el espectro a espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos. El estudio se centrará en obtener clases de pesos adecuadas, que resultarán ser de tipo Muckenhoupt, para garantizar la acotación de los operadores maximales en cuestión, para luego hallar condiciones suficientes sobre los pesos cuando se analizan las propiedades de continuidad de los operadores que son controlados por ellos, en el sentido en el que nos hemos referido en el Capítulo 1. Es importante destacar que muchos de los resultados obtenidos son aún novedosos en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente constante.

Específicamente, en la primera sección se estudiará el caso no fraccionario, es decir, se darán condiciones en los pesos que caractericen la acotación del operador maximal generalizado M_η sobre espacios de Lebesgue de exponente variable pesados. En la segunda sección, se analizará el caso del operador $M_{\alpha,\eta}$ para $0 < \alpha < n$, comenzando con el caso particular de $\eta(t) = t$, la maximal fraccionaria clásica. Posteriormente, se obtendrán condiciones suficientes para la acotación de una amplia gama de operadores de tipo integral singular y fraccionaria (ver §1.4).

En el mismo contexto, analizaremos también la integrabilidad local, con pesos, de los operadores maximales generalizados, extendiendo la bien conocida desigualdad de Wiener para M, y siguiendo el espíritu de [25].

4.1. Resultados de acotación conocidos

Como es ampliamente conocido, dado un peso w, en [70] Muckenhoupt probó que el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado sobre $L^p(wdx, \mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

si y sólo si el peso w está en la clase de Muckenhoupt A_p definida por

$$\sup_B \left(\fint_B w(x)dx \right)^{1/p} \left(\fint_B w^{-p'/p}(x)dx \right)^{1/p'} < \infty,$$

donde $1/p + 1/p' = 1$ y el supremo se toma sobre todas las bolas $B \subset \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, cuando se considera el operador M_α con $0 < \alpha < n$, en [71] Muckenhoupt y Wheeden probaron que si $1 < p < n/\alpha$ y $1/p - 1/q = \alpha/n$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_\alpha f(x)^q w(x)^q dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^p dx$$

si y sólo si $w \in A_{p,q}$, esto es,

$$\sup_B \left(\fint_B w^q(x)dx \right)^{1/q} \left(\fint_B w^{-p'}(x)dx \right)^{1/p'} < \infty.$$

Observemos que, si $p = q$, es decir, si $\alpha = 0$, entonces $w \in A_{p,q}$ es equivalente a $w^p \in A_p$.

Esta forma de ver a los pesos en el caso fraccionario, como multiplicadores y no como medida, resultó ser una clave muy importante para comprender el comportamiento de los pesos en el caso de espacios de Lebesgue con exponentes variables, y conseguir así una versión adecuada de la clase de pesos de Muckenhoupt, y de Muckenhoupt y Wheeden, en este ambiente. La definición de la clase A_p con exponente p variable fue dada, paralelamente, en [23] y [29] y la generalización de $A_{p,q}$ es la que hemos introducido en la §2.2.2. A continuación, exponemos el resultado de acotación de M sobre $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.1.1 ([23],[29]). *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ y w un peso. Entonces, M está acotada sobre $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si w satisface la condición $A_{p(\cdot)}$:*

$$\sup_B |B|^{-1} ||w\chi_B||_{p(\cdot)} ||w^{-1}\chi_B||_{p'(\cdot)} < \infty, \tag{4.1.2}$$

donde $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$ y el supremo se toma sobre todas las bolas B de $\mathbb{R}^n$.

Recordar que $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ significa que p es log-Hölder continuo, es decir, verifica las propiedades (2.2.14) y (2.2.15) definidas en el Capítulo 2.

4.2. Resultados de acotación para el operador maximal M_η

En esta sección estudiaremos la acotación del operador M_η en espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos. Los resultados obtenidos son nuevos aún en el caso en que el exponente es constante.

Para probar la acotación de M_η, consideraremos primero el caso en que η es una función de tipo $L\log L$; concretamente, $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma$ para $\beta \geq 1$ y $\gamma \geq 0$. La importancia del estudio de las propiedades de acotación de la maximal asociada a este tipo de funciones radica en que la misma está en íntima relación con los conmutadores de diversos órdenes de integrales singulares. Para este tipo de funciones de Young probamos que los pesos involucrados en la acotación de M_η son variantes de los pesos dados en (4.1.2), lo que es de esperar debido a que el aporte de la parte logarítmica no es significativo. Logramos, pues, establecer la siguiente caracterización.

Teorema 4.2.1. *Sea w un peso y $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $p^- > 1$. Sea η la función de Young definida por $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma$ donde $1 \leq \beta < p^-$ y $\gamma \geq 0$. Entonces, M_η está acotada sobre $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $w^\beta \in A_{p(\cdot)/\beta}$.*

Observación 4.2.2. Cuando $\beta = 1$ y $\gamma = k \in \mathbb{N}$, en [78] y [79] se probó que M_η es puntualmente equivalente a $M^{k+1} = M \circ \cdots \circ M$, el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado $k+1$ veces, por lo que el resultado del teorema anterior es el esperado en vista de (4.1.2). Por otra parte, si $\gamma = 0$, $M_\eta f = M(|f|^\beta)^{1/\beta}$ y entonces el resultado anterior también es un corolario de (4.1.2). En efecto, usando que

$$||g||_{p(\cdot)} = ||g^\beta||_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}} \tag{4.2.3}$$

obtenemos que

$$||wM_\eta f||_{p(\cdot)} = ||w^\beta M(|f|^\beta)||_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}}. \tag{4.2.4}$$

Además, por el Lema 2.2.16, $p(\cdot)/\beta \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Luego, si $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$, de (4.2.4) y (4.1.2) se tiene que

$$||wM_\eta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||w^\beta|f|^\beta||_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}} = ||wf||_{p(\cdot)}$$

donde hemos usado nuevamente (4.2.3) en la última igualdad.

Recíprocamente, si M_η está acotada sobre $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$||wM_\eta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}$$

que, según (4.2.3), es equivalente a

$$||w^\beta M(|f|^\beta)||_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}} \lesssim ||w^\beta|f|^\beta||_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}}.$$

En vista del Teorema 4.1.1, la desigualdad anterior implica que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$. Finalmente, si $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, el teorema anterior es el Teorema 4.1.1.

Observación 4.2.5. Supongamos que queremos hallar los pesos para los cuales vale la acotación siguiente

$$||\mathcal{S}f||_{L^{p(\cdot)}(w)} \lesssim ||f||_{L^{p(\cdot)}(w)}, \tag{4.2.6}$$

para cierto operador $\mathcal{S}$, esto es, la acotación en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ con peso w entendido como medida, siendo

$$||g||_{L^{p(\cdot)}(w)} = \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{g(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} w(x)dx \leq 1\right\}.$$

Asumamos que para tal operador sí conocemos que la acotación con pesos como multiplicadores

$$||(\mathcal{S}f)w||_{p(\cdot)} \lesssim ||fw||_{p(\cdot)} \tag{4.2.7}$$

está caracterizada por una condición del tipo $w \in A_{s(\cdot)}$ para algún exponente $s \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ (que dependerá de $p(\cdot)$ y de $\mathcal{S}$). Entonces, podemos obtener también una caracterización de los pesos que verifican (4.2.6). En efecto, primero debemos notar que vale la siguiente identidad

$$||g||_{L^{p(\cdot)}(w)} = ||gw^{1/p(\cdot)}||_{p(\cdot)}$$

la cual se deduce inmediatamente de la definición de la norma

$$\begin{aligned} ||g||_{L^{p(\cdot)}(w)} &= \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{g(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} w(x)dx \leq 1\right\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{g(x)w(x)^{1/p(x)}}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\right\} = ||gw^{1/p(\cdot)}||_{p(\cdot)}. \end{aligned}$$

Luego, que valga la desigualdad (4.2.6) es equivalente a que valga (4.2.7) con peso $w(\cdot)^{1/p(\cdot)}$. Así, por lo supuesto, el peso debe satisfacer $w(\cdot)^{1/p(\cdot)} \in A_{s(\cdot)}$, es decir,

$$||w(\cdot)^{1/p(\cdot)}\chi_Q||_{s(\cdot)}||w(\cdot)^{-1/p(\cdot)}\chi_Q||_{s'(\cdot)} \lesssim |Q|$$

para todo cubo Q. Empleando nuevamente la definición de la norma, es fácil ver que

$$||w(\cdot)^{1/p(\cdot)}\chi_Q||_{s(\cdot)} = ||\chi_Q||_{L^{s(\cdot)}(v)}$$

y

$$||w(\cdot)^{-1/p(\cdot)}\chi_Q||_{s'(\cdot)} = ||\chi_Q||_{L^{s'(\cdot)}(\sigma)}$$

donde $v(x) = w(x)^{s(x)/p(x)}$ y $\sigma(x) = v(x)^{-s'(x)/s(x)}$. En consecuencia, los pesos que caracterizan (4.2.6) son aquellos que satisfacen

$$||\chi_Q||_{L^{s(\cdot)}(v)}||\chi_Q||_{L^{s'(\cdot)}(\sigma)} \lesssim |Q|$$

para todo cubo Q. En el caso de exponentes constantes $p(x) \equiv p$ y $s(x) \equiv s$, esto no es más que decir que $v = w^{s/p} \in A_s$, la clase de pesos de Muckenhoupt clásica.

Así, en virtud de la observación anterior y del Teorema 4.2.1, se deduce el siguiente corolario para exponentes $p(\cdot)$ constantes.

Corolario 4.2.8. *Sea w un peso, $1 < p < \infty$, y $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma$ donde $1 \leq \beta < p$ y $\gamma \geq 0$. Entonces, $M_\eta : L^p(\mathbb{R}^n, wdx) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, wdx)$ si y sólo si $w^{1/\beta} \in A_{p/\beta}$.*

Demostración. Del Teorema 4.2.1 tenemos que $s = p/\beta$, de donde $w^{s/p} = w^{1/\beta}$ y así, por la Observación 4.2.5 la acotación $M_\eta : L^p(\mathbb{R}^n, wdx) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, wdx)$ es equivalente a $w^{1/\beta} \in A_{p/\beta}$. □

Ahora bien, si se consideran funciones de Young η más generales que las de tipo $L\log L$, se obtiene el siguiente resultado de acotación para M_η sobre $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.2.9. *Sea w un peso y $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $p^- > 1$. Sea $1 \leq \beta < p^-$ tal que $w^\beta \in A_{p(\cdot)/\beta}$ y supongamos, además, que η es una función de Young tal que $\eta \in B_\rho$ para todo $\rho > \beta$. Entonces M_η está acotada sobre $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, si η es de tipo inferior β, entonces vale la recíproca.*

Observación 4.2.10. Si consideramos $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma$ con $\beta \geq 1$ y $\gamma \geq 0$, por el Lema 1.1.44 se sigue que $\eta \in B_\rho$ para todo $\rho > \beta$. Además, si $s \in [0,1]$ y $t > 0$,

$$\eta(st) = (st)^\beta(1+\log^+(st))^\gamma \leq s^\beta t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma = s^\beta\eta(t),$$

esto es, η es de tipo inferior β. Esto implica que para este tipo de funciones η, el teorema anterior no es otro que el Teorema 4.2.1.

Similarmente, todas las funciones de Young de la forma $\eta_j(t) = t^\beta L_j(t)^\gamma$, donde $L_1(t) = (1+\log^+ t)$ y $L_{j+1}(t) = L_j(L_1(t))$, para $j \in \mathbb{N}$, pertenecen a B_ρ para todo $\rho > \beta$ (por el Lema 1.1.44) y son de tipo inferior β.

Cuando el exponente $p(\cdot)$ es constante, se tiene el siguiente corolario con pesos en el sentido de medidas, siguiendo las mismas ideas dadas en la Observación 4.2.5.

Corolario 4.2.11. *Sea w un peso, $1 < p < \infty$, y η una función de Young tal que $\eta \in B_\rho$ para todo $\rho > \beta$ y algún $1 \leq \beta < p$. Entonces, si $w^{1/\beta} \in A_{p/\beta}$, vale la acotación $M_\eta : L^p(\mathbb{R}^n, wdx) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, wdx)$. Si, además, η es de tipo inferior β, vale la recíproca.*

4.3. Resultado de acotación para el operador maximal fraccionario $M_{\alpha,\eta}$

4.3.1. El caso $\eta(t) = t$

En primera instancia, se da una caracterización de la clase de pesos relacionada con la acotación del operador maximal fraccionario clásico M_α sobre espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos. Para ello, recordemos que un peso w pertenece a la clase $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, cuando $0 \leq \alpha < n$, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ y $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$, si

$$\sup_B |B|^{\alpha/n-1} ||w\chi_B||_{q(\cdot)} ||w^{-1}\chi_B||_{p'(\cdot)} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas $B \subset \mathbb{R}^n$. Cuando $p(x) \equiv p$ y $q(x) \equiv q$, siendo $1/q = 1/p - \alpha/n$ y $1 < p < \infty$, el supremo anterior no es más que

$$\sup_B |B|^{\alpha/n-1} \left(\int_B w(x)^q dx\right)^{1/q} \left(\int_B w(x)^{-p'} dx\right)^{1/p'} < \infty,$$

esto es, $w \in A_{p,q}$, la clase definida en [71]. Veremos que, en el contexto variable, $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ es la clase adecuada para la acotación de M_α de $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en $L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, en el sentido que caracteriza dicha acotación. Esto generaliza el correspondiente resultado probado en [71] sobre espacios de Lebesgue clásicos y el de [23] y [29] para el caso $\alpha = 0$.

Teorema 4.3.1. *Sea $0 < \alpha < n$, w un peso y $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < n/\alpha$. Sea q el exponente definido por $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. Entonces, M_α está acotada de $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en $L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$.*

4.3.2. El caso general

A continuación se estudiará el operador $M_{\alpha,\eta}$ actuando sobre espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos, con la intención de generalizar el teorema anterior sobre M_α y los Teoremas 4.2.1 y 4.2.9. Recordemos que este operador se define, para $0 \leq \alpha < n$, por

$$M_{\alpha,\eta} f(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{\alpha/n} ||f||_{\eta,B}.$$

Tal y como lo hicimos en el caso $\alpha = 0$, comenzaremos considerando $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma$ con $\beta \geq 1$ y $\gamma \geq 0$. Se sabe que este operador controla a los conmutadores de la integral fraccionaria y a los de otros operadores fraccionarios menos regulares que I_α cuando $\beta = 1$ y $\gamma \in \mathbb{N}$. En este caso, se obtiene una caracterización de la clase de pesos relacionada con su acotación, como establece el siguiente teorema.

Teorema 4.3.2. *Sean $0 < \alpha < n$, w un peso, p y q exponentes definidos como en el Teorema 4.3.1. Sea $\eta(t) = t^\beta(1 + \log^+ t)^\gamma$ donde $1 \leq \beta < p^-$ y $\gamma \geq 0$. Entonces, $M_{\alpha,\eta}$ está acotada de $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en $L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$.*

Como en el caso no fraccionario, podemos obtener un corolario para exponentes $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ constantes. Puesto que la clase $A_{p,q}$ de Muckenhoupt y Wheeden está definida con pesos de tipo multiplicador, no haremos una interpretación del resultado con pesos actuando como medidas.

Corolario 4.3.3. *Sean $0 < \alpha < n$, w un peso, p y q exponentes tales que $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$. Sea $\eta(t) = t^\beta(1 + \log^+ t)^\gamma$ donde $1 \leq \beta < p$ y $\gamma \geq 0$. Entonces, $M_{\alpha,\eta}$ está acotada de $L^p(w^p, \mathbb{R}^n)$ en $L^q(w^q, \mathbb{R}^n)$ si y sólo si $w^\beta \in A_{\frac{p}{\beta},\frac{q}{\beta}}$.*

Cuando se consideran funciones de Young más generales, se obtiene el siguiente teorema, el cual es la versión fraccionaria del Teorema 4.2.9.

Teorema 4.3.4. *Sean $0 < \alpha < n$, w un peso, p y q exponentes definidos como en el Teorema 4.3.1. Sea $1 \leq \beta < p^-$ tal que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$. Supongamos que η es una función de Young que satisface $\eta^{1+\frac{\rho\alpha}{n}} \in B_\rho$ para todo $\rho > n\beta/(n-\alpha\beta)$ y que la función $t^{-\alpha/n}\eta^{-1}(t)$ es la inversa de una función de Young finita. Entonces $M_{\alpha,\eta}$ está acotada de $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$. Más aún, si η es de tipo inferior β, vale la recíproca.*

Observación 4.3.5. Consideremos las funciones de Young de la forma $\eta_j(t) = t^\beta L_j(t)^\gamma$ con $\beta \geq 1$ y $\gamma \geq 0$, donde $L_1(t) = (1 + \log^+ t)$ y $L_{j+1}(t) = L_j(L_1(t))$ para $j \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\eta_j^{1+\frac{\rho\alpha}{n}}$ pertenece a la clase B_ρ para todo $\rho > \beta + \frac{\beta\rho\alpha}{n}$, esto es, para todo $\rho > n\beta/(n-\alpha\beta)$, en virtud del Lema 1.1.44. Además, como vimos antes, son de tipo inferior β, por lo que satisfacen las hipótesis del Teorema 4.3.4 y se tiene una caracterización para las funciones maximales asociadas.

Para exponentes constantes, se tiene el siguiente resultado que extiende al dado en el Corolario 4.3.3.

Corolario 4.3.6. *Sean α, w, p y q como en el Corolario 4.3.3. Sea $1 \leq \beta < p$ tal que $w^\beta \in A_{\frac{p}{\beta},\frac{q}{\beta}}$ y supongamos que η es una función de Young que satisface $\eta^{1+\frac{\rho\alpha}{n}} \in B_\rho$ para todo $\rho > n\beta/(n-\alpha\beta)$ y que la función $t^{-\alpha/n}\eta^{-1}(t)$ es la inversa de una función de Young finita. Entonces $M_{\alpha,\eta}$ está acotada de $L^p(w^p, \mathbb{R}^n)$ en $L^q(w^q, \mathbb{R}^n)$. Más aún, si η es de tipo inferior β, vale la recíproca.*

4.4. Demostraciones de los resultados de las secciones 4.2 y 4.3

Para la demostración del Teorema 4.2.1, recordemos la Definición 2.2.27 y los Teoremas 2.2.28 y 2.2.29, dados en la §2.2.2. Dados $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ y w un peso, decimos que la función $\Psi(x,t) = (tw(x))^{p(x)}$ pertenece a la clase $\mathscr{A}$ si se verifica la desigualdad

$$\left\| w \sum_{B\in\mathcal{B}} \chi_B \frac{1}{|B|} \int_B |f| \right\|_{p(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}$$

para cualquier familia $\mathcal{B}$ de bolas disjuntas B y para toda función $f \in L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$.

Por el Teorema 2.2.28 se sabe que si $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\Psi \in \mathscr{A}$ equivale a decir que $w \in A_{p(\cdot)}$. Además, del Teorema 2.2.29, la clase $\mathscr{A}$ es abierta en el sentido que, si $\Psi \in \mathscr{A}$ y p es log-Hölder continuo con $p^- > 1$, entonces existe un número $1 < s < p^-$ tal que $\Psi^{1/s} \in \mathscr{A}$. En virtud de la equivalencia dada en el Teorema 2.2.28, se tiene la apertura de la clase $A_{p(\cdot)}$ dada en el Corolario 2.2.30: Si $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ y $w \in A_{p(\cdot)}$, existe $1 < s < p^-$ tal que $w^s \in A_{\frac{p(\cdot)}{s}}$.

Estamos ahora en posición de dar la demostración del Teorema 4.2.1.

Demostración del Teorema 4.2.1. Supongamos, primero, que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$. Puesto que sabemos que $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, por el Lema 2.2.16 también lo está p/β. Luego, por el Corolario 2.2.30 existe $0 < \epsilon_0 < p^- - \beta$ tal que $w^{\beta+\epsilon_0} \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta+\epsilon_0}}$.

Ahora bien, dado que $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma \leq C_{\epsilon_0} t^{\beta+\epsilon_0}$ para todo $t \geq 1$, se sigue que $M_\eta(f) \leq CM_{\beta+\epsilon_0}(f) = CM(f^{\beta+\epsilon_0})^{\frac{1}{\beta+\epsilon_0}}$ en virtud del Lema 1.3.3. Entonces, dada $f \in L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$, se sigue que

$$||wM_\eta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||wM_{\beta+\epsilon_0} f||_{p(\cdot)} = ||w^{\beta+\epsilon_0} M(f^{\beta+\epsilon_0})||^{\frac{1}{\beta+\epsilon_0}}_{\frac{p(\cdot)}{\beta+\epsilon_0}}. \tag{4.4.1}$$

Además, $||w^{\beta+\epsilon_0} f^{\beta+\epsilon_0}||_{\frac{p(\cdot)}{\beta+\epsilon_0}} = ||wf||^{\beta+\epsilon_0}_{p(\cdot)} < \infty$, y así resulta que $f^{\beta+\epsilon_0} \in L^{\frac{p(\cdot)}{\beta+\epsilon_0}}_{w^{\beta+\epsilon_0}}(\mathbb{R}^n)$.

Dado que $w^{\beta+\epsilon_0} \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta+\epsilon_0}}$, sabemos del Teorema 4.1.1 que el operador maximal M está acotado sobre $L^{\frac{p(\cdot)}{\beta+\epsilon_0}}_{w^{\beta+\epsilon_0}}(\mathbb{R}^n)$. Luego, de (4.4.1) obtenemos que

$$||wM_\eta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||w^{\beta+\epsilon_0} f^{\beta+\epsilon_0}||^{\frac{1}{\beta+\epsilon_0}}_{\frac{p(\cdot)}{\beta+\epsilon_0}} = ||wf||_{p(\cdot)}.$$

Recíprocamente, si M_η está acotada sobre $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$, puesto que $t^\beta \leq \eta(t)$ para todo $t \geq 0$, se tiene que $M_\beta f \leq M_\eta f$ por el Lema 1.3.3, de donde se sigue que

$$||w^\beta M(f^\beta)||^{\frac{1}{\beta}}_{\frac{p(\cdot)}{\beta}} = ||wM_\beta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||wM_\eta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)} = ||w^\beta f^\beta||^{\frac{1}{\beta}}_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}.$$

Finalmente, la condición $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$ se deduce de forma inmediata a partir del Teorema 2.2.26. □

Observación 4.4.2. En la demostración de la segunda implicación del teorema anterior es importante el hecho de que la función $\eta(t) \geq t^\beta$ para t suficientemente grande. Por el Lema 1.3.3 es posible tener esta propiedad para funciones de Young más generales, esto es, funciones η que son de tipo inferior β.

Demostración del Teorema 4.2.9: Procediendo como en el Teorema 4.2.1, sabemos que existe $\beta < r < p^-$ tal que $w^r \in A_{\frac{p(\cdot)}{r}}$. Como $\eta \in B_\rho$ para todo $\rho > \beta$, tomando $\rho = r$ se tiene que $\eta(t) \leq C_r t^r$ para todo $t \geq t_r > 0$, de donde se sigue que $M_\eta \leq C(r, t_r)M_r$. Luego,

$$||wM_\eta f||_{p(\cdot)} \leq C||wM_r f||_{p(\cdot)} = C||w^r M(f^r)||^{\frac{1}{r}}_{\frac{p(\cdot)}{r}}.$$

Por otra parte, si $f \in L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$, entonces $f^r \in L^{\frac{p(\cdot)}{r}}_{w^r}(\mathbb{R}^n)$ y de las propiedades de acotación de M, concluimos que

$$||wM_\eta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||w^r f^r||^{\frac{1}{r}}_{\frac{p(\cdot)}{r}} = ||wf||_{p(\cdot)}.$$

Si sabemos, además, que η es de tipo inferior β, por el Corolario 1.3.3 tenemos que $M_\beta \leq CM_\eta$. Luego, si M_η está acotada sobre $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$, también lo está M_β. Es decir,

$$||wM_\beta f||_{p(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}.$$

En virtud de la Observación 4.2.2, se sigue que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$. □

El siguiente lema será de gran utilidad para las demostraciones de los resultados de la §4.3. Éste da una desigualdad puntual de tipo Hedberg que involucra exponentes variables y permite controlar al operador maximal $M_{\alpha,\eta}$ por medio de una versión no fraccionaria del mismo, M_ξ, bajo cierta relación entre las funciones de Young η y ξ. En el caso particular $\eta(t) = t$, la desigualdad relaciona al operador maximal fraccionario M_α con el operador maximal de Hardy-Littlewood M, resultado ya probado en [43], y previamente en [44] con $w = 1$.

Lema 4.4.3. *Sean $0 \leq \alpha < n$ y $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ con $p^+ < n/\alpha$. Sea $q(\cdot)$ el exponente definido por $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. Si η y ξ son funciones de Young que verifican $t^{\alpha/n}\xi^{-1}(t) \lesssim \eta^{-1}(t)$ para todo $t > 0$, entonces para toda función medible f y para toda función positiva w vale la siguiente desigualdad*

$$M_{\alpha,\eta}(f/w)(x) \lesssim M_\xi\left(|f|^{p(\cdot)/q(\cdot)}/w\right)(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p(y)}\,dy\right)^{\alpha/n}.$$

Demostración. Sea $g(x) = |f(x)|^{p(x)/q(x)}/w(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$|f(x)|/w(x) = g(x)|f(x)|^{1-\frac{p(x)}{q(x)}} = g(x)|f(x)|^{p(x)\frac{\alpha}{n}}.$$

Fijemos una bola B tal que $x \in B$. Por la desigualdad de Hölder generalizada (2.1.14) tenemos que

$$\begin{aligned}
|B|^{\alpha/n}\,\|f/w\|_{\eta,B} &\leq C|B|^{\alpha/n}\|g\|_{\xi,B}\,\||f(\cdot)|^{p(\cdot)\frac{\alpha}{n}}\|_{n/\alpha,B} \\
&= C\|g\|_{\xi,B}|B|^{\alpha/n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^{p(y)}dy\right)^{\alpha/n} \\
&\lesssim M_\xi g(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\right)^{\alpha/n}.
\end{aligned}$$

Por último, tomando el supremo sobre todas las bolas que contienen a x, se tiene la desigualdad deseada. □

Observación 4.4.4. Particularmente, cuando $\eta(t) = t^\beta(1+\log^+ t)^\gamma$, con $1 \leq \beta < n/\alpha$ y $\gamma \geq 0$, el Lema 4.4.3 vale con $\xi(t) = t^{\frac{\beta n}{n-\alpha\beta}}(1+\log^+ t)^{\frac{n\gamma}{n-\alpha\beta}} = \eta(t)^{\frac{n}{n-\alpha\beta}}$ ya que, del Lema 1.1.30*(i)* se puede probar fácilmente que

$$\xi^{-1}(t) \approx \frac{t^{1/\beta-\alpha/n}}{(1+\log^+ t)^{\gamma/\beta}}.$$

Luego,

$$t^{\alpha/n}\xi^{-1}(t) \approx \frac{t^{1/\beta}}{(1+\log^+ t)^{\gamma/\beta}} \approx \eta^{-1}(t).$$

Demostración del Teorema 4.3.1: Sólo mostraremos que $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ es una condición necesaria para la acotación de M_α. La demostración de que también es suficiente se deduce como un caso particular del Teorema 4.3.2 que demostraremos después. No ocurre lo mismo con la necesidad de la condición pues en la prueba de dicho teorema haremos uso del resultado para M_α que probamos aquí.

Supongamos que M_α está acotada de $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$, siendo p y q como en las hipótesis. Fijemos una bola B y consideremos los conjuntos $S_m = \{x \in B : w(x) > 1/m\}$ para $m \in \mathbb{N}$. De esta forma, $w^{-1}(x) \leq m$ para cada $x \in S_m$ y

$$||w^{-1}\chi_{S_m}||_{p'(\cdot)} < \infty.$$

Por otro lado, notemos que, por ser $p^- > 1$, $(p')^+ = (p^-)' < \infty$, por lo que podemos aplicar el Lema 2.2.12 para estimar el término $||w^{-1}\chi_{S_m}||_{p'(\cdot)}$, obteniéndose así la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}
||w\chi_B||_{q(\cdot)}||w^{-1}\chi_{S_m}||_{p'(\cdot)} &\leq ||w\chi_B||_{q(\cdot)} \sup_{||g||_{p(\cdot)}\leq 1} \int_{S_m} g(x)w^{-1}(x)dx \\
&\leq ||w\chi_B||_{q(\cdot)} \sup_{||g||_{p(\cdot)}\leq 1} \int_B |g(x)|w^{-1}(x)dx \\
&= \sup_{||g||_{p(\cdot)}\leq 1} \left\| w\chi_B \int_B |g|w^{-1} \right\|_{q(\cdot)} \\
&= |B|^{1-\frac{\alpha}{n}} \sup_{||g||_{p(\cdot)}\leq 1} \left\| w\chi_B \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_B |g|w^{-1} \right\|_{q(\cdot)} \\
&\leq |B|^{1-\frac{\alpha}{n}} \sup_{||g||_{p(\cdot)}\leq 1} \left\| wM_\alpha(gw^{-1}) \right\|_{q(\cdot)} \\
&\leq C|B|^{1-\frac{\alpha}{n}} \sup_{||g||_{p(\cdot)}\leq 1} ||g||_{p(\cdot)} \leq C|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}
\end{aligned}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, como $w^{-1}\chi_{S_m} \nearrow w^{-1}\chi_B$, $||w^{-1}\chi_{S_m}||_{p'(\cdot)} \nearrow ||w^{-1}\chi_B||_{p'(\cdot)}$ y tenemos que

$$||w\chi_B||_{q(\cdot)}||w^{-1}\chi_B||_{p'(\cdot)} \leq C|B|^{1-\frac{\alpha}{n}},$$

es decir, $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$. □

Demostración del Teorema 4.3.2: Supongamos primero que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$. Queremos ver que la desigualdad $||wM_{\alpha,\eta}f||_{q(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}$ vale para toda función $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, lo que equivale a probar que vale $||wM_{\alpha,\eta}(f/w)||_{q(\cdot)} \lesssim ||f||_{p(\cdot)}$ para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Tomemos $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ que, por la homogeneidad de la norma, podemos suponer con $||f||_{p(\cdot)} = 1$. En vista de la Observación 4.4.4, se sigue del Teorema 4.4.3 y del Lema 2.2.5*(iv)* que

$$M_{\alpha,\eta}(f/w) \lesssim M_\xi(g),$$

donde $g(x) = |f(x)|^{p(x)/q(x)}w^{-1}(x)$ y $\xi(t) \approx t^{\beta n/(n-\alpha\beta)}(1+\log^+ t)^{\gamma n/(n-\alpha\beta)}$. Así,

$$||wM_{\alpha,\eta}(f/w)||_{q(\cdot)} \lesssim ||wM_\xi g||_{q(\cdot)}.$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{q(x)}w(x)^{q(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}dx = 1,$$

de donde se obtiene que $g \in L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ con $\|gw\|_{q(\cdot)} = 1$. En virtud de ello, si probamos que la condición sobre el peso w implica que el operador maximal M_ξ está acotado sobre $L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, tendremos que

$$||wM_{\alpha,\eta}(f/w)||_{q(\cdot)} \lesssim ||wM_\xi g||_{q(\cdot)} \lesssim ||wg||_{q(\cdot)} = 1 = ||f||_{p(\cdot)} \tag{4.4.5}$$

y habremos probado que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$ es suficiente para la acotación de $M_{\alpha,\eta}$.

Probemos entonces que $M_\xi : L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Puesto que

$$\xi(t) \approx t^\tau(1+\log^+ t)^{\gamma n/(n-\alpha\beta)}$$

con $\tau = \frac{n\beta}{n-\alpha\beta}$, sabemos por el Teorema 4.2.1 que basta probar que $1 \leq \tau < q^-$ y que $w^\tau \in A_{\frac{q(\cdot)}{\tau}}$. Pero como $1 \leq \beta < p^-$, se sigue que $1 \leq \tau < \frac{np^-}{n-\alpha p^-} = q^-$ y, además, por el Lema 2.2.21*(i)*, $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$ es equivalente a $w^\tau \in A_{\frac{q(\cdot)}{\tau}}$. Por lo tanto, M_ξ está acotado sobre $L_w^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y vale (4.4.5).

Observemos que, en particular, cuando $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, la prueba anterior demuestra la suficiencia del Teorema 4.3.1.

Asumamos ahora que para toda $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, se verifica la desigualdad

$$||wM_{\alpha,\eta}f||_{q(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}. \tag{4.4.6}$$

Como $t^\beta \leq \eta(t)$ para cada $t > 0$, vale que $M_{\alpha,\beta}f \leq M_{\alpha,\eta}f$ por el Lema 1.3.2. Luego, de (4.4.6) se obtiene que

$$||w^\beta f^\beta||_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}} = ||wf||_{p(\cdot)} \gtrsim ||wM_{\alpha,\beta}(f)||_{q(\cdot)} = ||w^\beta M_{\alpha\beta}(f^\beta)||_{\frac{q(\cdot)}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Notar que, por el Lema 2.2.16, $p(\cdot)/\beta \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Además, se verifica la relación

$$\frac{1}{q(x)/\beta} = \frac{1}{p(x)/\beta} - \frac{\alpha}{n/\beta}$$

y

$$1 < \frac{p^-}{\beta} = \left(\frac{p(\cdot)}{\beta}\right)^- \leq \left(\frac{p(\cdot)}{\beta}\right)^+ = \frac{p^+}{\beta} < \frac{n}{\alpha\beta}.$$

De estas propiedades, podemos concluir que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$ en virtud del resultado de acotación para el operador maximal fraccionario, el Teorema 4.3.1. $\square$

Demostración del Teorema 4.3.4: Al igual que en la prueba del Teorema 4.3.2, mostraremos que

$$||wM_{\alpha,\eta}(f/w)||_{q(\cdot)} \lesssim ||f||_{p(\cdot)}$$

vale para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ con $||f||_{p(\cdot)} = 1$ y $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$.

Sea ξ la función de Young definida por $\xi^{-1}(t) = t^{-\alpha/n}\eta^{-1}(t)$, que existe por hipótesis. Luego, del Teorema 4.4.3 y del Lema 2.2.5*(iv)* obtenemos la siguiente desigualdad puntual

$$M_{\alpha,\eta}(f/w)(x) \lesssim M_\xi(g)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.7}$$

siendo $g(x) = |f(x)|^{p(x)/q(x)}w^{-1}(x)$.

Considerando $r = n/\alpha > 1$ en el Lema 1.1.43*(ii)*, tenemos que la hipótesis $\eta^{1+\rho/r} \in B_\rho$ para todo $\rho > \tau = \frac{n\beta}{n-\alpha\beta}$ equivale a decir que la función ξ está en la clase B_ρ para los mismos valores de ρ.

Por otro lado, como $1 \leq \beta < p^-$ implica que $1 \leq \tau < q^-$ (ver prueba del Teorema 4.3.2), de Lema 2.2.21*(i)* se tiene que las condiciones $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$ y $w^\tau \in A_{\frac{q(\cdot)}{\tau}}$ son equivalentes. Además, como probamos en el Teorema 4.3.2, $g \in L^{q(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ con $\|wg\|_{q(\cdot)} = 1$. Por lo tanto, aplicando (4.4.7) y el Teorema 4.2.9 concluimos que

$$||wM_{\alpha,\eta}(f/w)||_{q(\cdot)} \lesssim ||wM_\xi g||_{q(\cdot)} \lesssim ||wg||_{q(\cdot)} = 1 = ||f||_{p(\cdot)}.$$

Si ahora tenemos que η es de tipo inferior β, como $1 \leq \beta < p^- \leq p^+ < n/\alpha$, por el Corolario 1.3.3 tenemos que $M_{\alpha,\eta}f \geq CM_{\alpha\beta}(|f|^\beta)^{1/\beta}$. Luego, si $M_{\alpha,\eta}$ está acotada de $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$,

$$||w^\beta M_{\alpha\beta}(|f|^\beta)||^{1/\beta}_{\frac{q(\cdot)}{\beta}} = ||wM_{\alpha\beta}(|f|^\beta)^{1/\beta}||_{q(\cdot)} \lesssim ||wM_{\alpha,\eta}f||_{q(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)} = ||w^\beta f^\beta||^{1/\beta}_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}.$$

Como vimos en la demostración anterior, los exponentes p y q satisfacen las hipótesis del Teorema 4.3.1, por lo que podemos afirmar que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$. $\square$

4.5. Aplicaciones a operadores de tipo integral y sus conmutadores

4.5.1. Operadores integrales singulares y sus conmutadores

En esta subsección mostraremos resultados de acotación sobre $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para operadores integrales singulares y sus conmutadores, definidos en §1.4.1. Estos resultados se derivarán como consecuencia del control que los operadores maximales asociados a funciones de Young ejercen sobre los mismos (Teoremas 1.4.10 y 1.4.17) y de los resultados de acotación probados para los operadores maximales (Teoremas 4.2.1 y 4.2.9).

Recordemos que un operador T de tipo integral singular es un operador acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la forma

$$Tf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\, dy,$$

donde K es una función medible definida fuera del origen que satisface una condición de tipo Hörmander H_Φ asociada a una función de Young Φ. Específicamente, existen constantes $c \geq 1$ y $C_\Phi > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \| \left(K(\cdot - y) - K(\cdot)\right) \chi_{\{|x|\sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0,2^{m+1}R)} \leq C_\Phi,$$

donde $\{|x| \sim 2^m R\} = \{x : 2^m R < |x| \leq 2^{m+1} R\}$. Denotamos esta propiedad como $K \in H_\Phi$.

Dada una función $\mathfrak{b} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, el conmutador de orden $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de T con símbolo $\mathfrak{b}$ se define formalmente a través de la integral

$$T^k_{\mathfrak{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y))^k K(x-y) f(y)\, dy,$$

y las propiedades que se requieren sobre el núcleo K son las condiciones de tipo Hörmander $H_{\Phi,k}$, esto es, que existan constantes $c \geq 1$ y $C_{\Phi,k} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \| \left(K(\cdot - y) - K(\cdot)\right) \chi_{\{|x|\sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0,2^{m+1}R)} \leq C_{\Phi,k}.$$

Teorema 4.5.1. *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $p^- > 1$ y η una función de Young. Supongamos que existe $1 \leq \beta < p^-$ tal que $\widetilde{\eta} \in B_\rho$ para cada $\rho > \beta$. Si T un operador integral singular con núcleo $K \in H_\eta$ y w un peso tal que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$ entonces*

$$||wTf||_{p(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}$$

para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, siempre que el lado izquierdo sea finito.

Observación 4.5.2. Notemos que si $K \in H_\infty^*$ o $K \in H_\infty$ podemos tomar $w \in A_{p(\cdot)}$ en el Teorema 4.5.1 ya que es bien sabido que, en este caso

$$M^\sharp(Tf)(x) \leq CMf(x)$$

como se mostró en [22].

En relación con los conmutadores de orden k, $T_{\mathfrak{b}}^k$, se obtiene el siguiente resultado de acotación cuando $\mathfrak{b} \in BMO$.

Teorema 4.5.3. *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $p^- > 1$. Sean η y Φ funciones de Young que verifican $\widetilde{\eta}^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t)$ para $t \geq t_0 > 1, k \in \mathbb{N}$, siendo $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$. Supongamos que existe $1 \leq \beta < p^-$ tal que $\widetilde{\eta} \in B_\rho$ para cada $\rho > \beta$. Sea $\mathfrak{b} \in BMO$ y $T_{\mathfrak{b}}^k$ el conmutador de orden k del operador integral singular T con núcleo $K \in H_\Phi \cap H_{\eta,k}$. Si w es un peso tal que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$, entonces*

$$||wT_{\mathfrak{b}}^k f||_{p(\cdot)} \lesssim \|wf\|_{p(\cdot)}$$

para toda función $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $||wTf||_{p(\cdot)} < \infty$.

Observación 4.5.4. Cuando $k = 0$ en el teorema anterior, si elegimos $\Phi(t) = \eta(t/2)$, se tiene que $\Phi^{-1}(t) = \eta^{-1}(t)/2$ y se verifica la desigualdad $\widetilde{\eta}^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq t$. Tenemos, así, que este teorema es una generalización del Teorema 4.5.1.

Observación 4.5.5. Si $K \in H_\infty^*$ o $K \in H_\infty \cap H_{\varphi_k^{-1},k} \subset H_{\infty,k}$ donde $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$, entonces el teorema anterior también vale pidiendo que $w \in A_{p(\cdot)}$ en virtud del control de este tipo de operadores por medio del operador maximal $M_{\varphi_k} \approx M^{k+1}$ dado en el Lema 1.4.18.

4.5.2. Operadores integrales fraccionarios y sus conmutadores

En esta subsección, enunciaremos los resultados de continuidad sobre espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos para los operadores maximales fraccionarios de tipo convolución y sus conmutadores, definidos en §1.4.2. Cabe recordar que los operadores mencionados, T_α, para $0 \leq \alpha < n$, están dados formalmente por la integral

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x-y)f(y)\,dy,$$

donde el núcleo K_α verifica las condiciones S_α:

$$\int_{\{|x|\sim s\}} |K_\alpha(x)|\,dx \leq Cs^\alpha$$

para alguna constante positiva C; y la condición de regularidad $H_{\alpha,\Phi}$ asociada a una función Φ de Young: existen constantes $c \geq 1$ y $C_\Phi > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, vale la desigualdad

$$\sum_{m=1}^\infty (2^m R)^{n-\alpha} \| \left(K_\alpha(\cdot - y) - K_\alpha(\cdot)\right) \chi_{\{|x|\sim 2^m R\}} \|_{\Phi,B(0,2^{m+1}R)} \leq C_\Phi.$$

Cuando $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\mathfrak{b} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, los conmutadores correspondientes a T_α se definen por medio de la expresión

$$T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y))^k K_\alpha(x-y) f(y)\, dy,$$

y se asume que el núcleo $K_\alpha \in S_\alpha$ y pertenece a la clase de Hörmander $H_{\alpha,\Phi,k}$: existen constantes $c \geq 1$ y $C_{\alpha,\Phi,k} > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, vale la desigualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n-\alpha} m^k \| \left(K_\alpha(\cdot - y) - K_\alpha(\cdot)\right) \chi_{\{|x|\sim 2^m R\}} \|_{\Phi, B(0,2^{m+1}R)} \leq C_{\alpha,\Phi,k}.$$

Los teoremas de acotación para este tipo de operadores son los siguientes.

Teorema 4.5.6. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < n/\alpha$ y q dado por $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. Sea η una función de Young que satisface $\widetilde{\eta}^{1+\frac{\rho\alpha}{n}} \in B_\rho$ para cada $\rho > \beta n/(n-\alpha\beta)$, para algún $1 \leq \beta < p^-$. Sea T_α un operador integral fraccionario con núcleo $K \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\eta}$. Si w es un peso tal que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$, entonces*

$$||wT_\alpha f||_{q(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}$$

para toda función $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\alpha f(x)| > \lambda\}| < \infty$ para cada $\lambda > 0$ y siempre que el lado izquierdo sea finito.

Observación 4.5.7. Si $T_\alpha f \in L^\rho(\mathbb{R}^n)$ para algún $\rho > n\beta/(n-\alpha\beta)$, la hipótesis de que $|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\alpha f(x)| > \lambda\}| < \infty$ para todo $\lambda > 0$ es superflua. En efecto, si lo anterior vale para alguno de tales ρ, de [12, Teorema 3.4] se tiene que para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^\rho dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |M_{\alpha,\widetilde{\eta}} f(x)|^\rho dx,$$

gracias a las propiedades sobre el núcleo K_α. Ahora bien, si definimos $\tau = n\rho/(n+\alpha\rho)$ tenemos que $1 < \tau < n/\alpha$ por ser $\beta > 1$ y $\widetilde{\eta}^{\rho/\tau} \in B_\rho$ por la hipótesis sobre $\widetilde{\eta}$. Luego, por el Lema 3.2.4,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^\rho dx\right)^{1/\rho} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^\tau dx\right)^{1/\tau}$$

y, en particular,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^\rho} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^\tau dx\right)^{\rho/\tau} < \infty$$

para todo $\lambda > 0$ y toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.

Con argumentos similares a los del teorema anterior y en el caso de los conmutadores de integrales singulares (Teorema 4.5.3), se puede deducir el siguiente resultado de acotación para $T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$.

Teorema 4.5.8. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < n/\alpha$ y q dado por $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. Sea η una función de Young que satisface $\widetilde{\eta}^{1+\frac{\rho\alpha}{n}} \in B_\rho$ para cada $\rho > \beta n/(n-\alpha\beta)$ y algún $1 \leq \beta < p^-$. Sea Φ otra función de Young para la cual $\widetilde{\eta}^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t)$ para todo $t > 0$ siendo $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$. Sea $\mathfrak{b} \in BMO$ y $T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$ el conmutador de orden k del operador integral fraccionario T_α con núcleo $K \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\Phi,k}$ y supongamos que T_α está acotado de $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ con $p_0, q_0 > 1$. Si w es un peso tal que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$, entonces*

$$||wT^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f||_{q(\cdot)} \lesssim \|wf\|_{p(\cdot)}$$

para toda función $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $||wT_\alpha f||_{q(\cdot)} < \infty$.

Observación 4.5.9. Si $k = 0$ y tomamos $\Phi(t) = \eta(t/2)$ en el teorema anterior obtenemos que éste es una generalización del Teorema 4.5.6.

Observación 4.5.10. Notar que, de la hipótesis de acotación de $T_\alpha : L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$, en particular T_α es de tipo débil (p_0, q_0) y eso garantiza que $|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\alpha f(x)| > \lambda\}| < \infty$ para todo $\lambda > 0$, propiedad que se pedía en el caso $k = 0$.

Observación 4.5.11. Los dos teoremas anteriores tienen versiones análogas para el caso de operadores integrales fraccionarios con núcleos $K \in H^*_{\alpha,\infty}$ o $K \in H_{\alpha,\infty,k}$ pues, como se mostró en los Lemas 1.4.25 y 1.4.31, ellos y sus conmutadores están controlados por el operador maximal fraccionario $M_{\alpha,\varphi_k} \approx M_\alpha \circ M^k$ con $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$. En este caso, los pesos que garantizan la acotación de los operadores y sus conmutadores son los pertenecientes a la clase $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$.

4.6. Demostraciones de los resultados de la §4.5

Demostración del Teorema 4.5.1. Sea $0 < \delta < 1$ y $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Si definimos el exponente $r(\cdot) = p(\cdot)/\delta$, entonces $r^- = p^-/\delta > 1/\delta > 1$ y $|Tf|^\delta \in L^{r(\cdot)}_{w^\delta}(\mathbb{R}^n)$ por hipótesis. Así, por el Lema 2.2.12 tenemos que

$$||wTf||_{p(\cdot)} = ||w^\delta|Tf|^\delta||^{1/\delta}_{r(\cdot)} \leq \sup_{||w^{-\delta}g||_{r'(\cdot)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^\delta|g|dx\right)^{1/\delta}.$$

En virtud de que T es un operador acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, es de tipo débil $(2, 2)$ por lo que se deduce que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2dx < \infty$$

para todo $\lambda > 0$ y $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Luego, podemos aplicar el Lema 1.4.3 con f reemplazada por $|Tf|^\delta \geq 0$ y la desigualdad de Hölder dada en el Lema 2.2.9 con $r(\cdot)$ y $r'(\cdot)$, para obtener que

$$\|wTf\|_{p(\cdot)} \lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|Tf|^\delta)(x)Mg(x)dx\right)^{1/\delta}$$

$$\leq \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \|w^\delta M^\sharp(|Tf|^\delta)\|_{r(\cdot)}^{1/\delta}\|w^{-\delta}Mg\|_{r'(\cdot)}^{1/\delta}$$
$$= \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \|wM_\delta^\sharp(|Tf|)\|_{p(\cdot)}\|w^{-\delta}Mg\|_{r'(\cdot)}^{1/\delta}.$$

Además, del Lema 2.2.21*(iii)*, la condición $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$ implica que $w^\delta \in A_{r(\cdot)}$, lo cual es equivalente a que $w^{-\delta} \in A_{r'(\cdot)}$. Por el Teorema 4.1.1 se sigue que

$$\|w^{-\delta}Mg\|_{r'(\cdot)}^{1/\delta} \lesssim \|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}^{1/\delta}.$$

Luego, aplicando los Teoremas 1.4.10 y 4.2.9 concluimos que

$$\|wTf\|_{p(\cdot)} \lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \|wM_\delta^\sharp(|Tf|)\|_{p(\cdot)}\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}^{1/\delta} \lesssim \|wM_{\tilde{\eta}}f\|_{p(\cdot)} \lesssim \|wf\|_{p(\cdot)}. \qquad \square$$

Demostración del Teorema 4.5.3: Usaremos un argumento inductivo. En virtud del Teorema 4.5.1 y de la Observación 4.5.4, el resultado vale para $k=0$, por lo que podemos asumir que es cierto para cada $0 \leq j \leq k-1$.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\|\mathfrak{b}\|_{BMO} = 1$ y consideraremos primero el caso en que $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tomemos $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $||wTf||_{p(\cdot)} < \infty$. Utilizando que

$$T_{\mathfrak{b}}^k f(x) = \sum_{m=0}^{k} C_{m,k}\mathfrak{b}(x)^{k-m}T(\mathfrak{b}^m f)(x) \tag{4.6.1}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} ||wT_{\mathfrak{b}}^k f||_{p(\cdot)} &= \left\| \sum_{m=0}^{k} C_{m,k}\mathfrak{b}^{k-m}wT(\mathfrak{b}^m f)\right\|_{p(\cdot)} \qquad (4.6.2)\\ &\leq \sum_{m=0}^{k} C_{m,k}||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{k-m}||wT(\mathfrak{b}^m f)||_{p(\cdot)}\\ &\leq \sum_{m=0}^{k} C_{m,k}||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{k}||wTf||_{p(\cdot)} \lesssim ||\mathfrak{b}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{k}||wTf||_{p(\cdot)} < \infty. \end{aligned}$$

Además, como T está acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, $|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \lambda\}| < \infty$ para todo $\lambda > 0$ y toda función $g \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En particular, vale para $g(x) = \mathfrak{b}(x)^m f(x)$. Así, es inmediato de la fórmula (4.6.1) que $|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\mathfrak{b}}^k f(x)| > \lambda\}| < \infty$ para todo $\lambda > 0$.

Sea $0 < \delta < 1$ y $r(\cdot) = p(\cdot)/\delta$. En virtud de lo que hemos probado antes, podemos proceder como en la demostración del Teorema 4.5.1, aplicando los Lemas 2.2.12 y 1.4.3 en conjunto con el Teorema 4.1.1 en virtud de la propiedad de que $w^{-\delta} \in A_{r'(\cdot)}$ para obtener que

$$\|wT_{\mathfrak{b}}^k f\|_{p(\cdot)} \lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|T_{\mathfrak{b}}^k f|^\delta)(x)Mg(x)dx\right)^{1/\delta}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \|wM^{\sharp}_{\delta}(|T^k_{\mathfrak{b}}f|)\|_{p(\cdot)}\|w^{-\delta}g\|^{1/\delta}_{r'(\cdot)} \\
&\lesssim \|wM^{\sharp}_{\delta}(|T^k_{\mathfrak{b}}f|)\|_{p(\cdot)}.
\end{aligned}
$$

Luego, utilizando el Teorema 1.4.17 acerca del control de $T^k_{\mathfrak{b}}$ tenemos la estimación

$$
\|wT^k_{\mathfrak{b}}f\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{j=0}^{k-1} \|wM_{\epsilon}(T^j_{\mathfrak{b}}f)\|_{p(\cdot)} + \|wM_{\widetilde{\eta}}f\|_{p(\cdot)}. \tag{4.6.3}
$$

Como $\widetilde{\eta} \in B_{\rho}$ para todo $\rho > \beta$, el último sumando de (4.6.3) se acota por $||wf||_{p(\cdot)}$ gracias al Teorema 4.2.9.

Por otro lado, notemos que si η y Φ son como en las hipótesis, para cada $0 \leq j \leq k-1$ y para todo $t \geq t_0 > 1$, por ser $\varphi_k(t) \geq \varphi_j(t)$, se tiene que

$$
\widetilde{\eta}^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \varphi_k^{-1}(t) \leq \varphi_j^{-1}(t),
$$

y, además, el núcleo $K \in H_{\Phi} \cap H_{\eta,k} \subset H_{\Phi} \cap H_{\eta,j}$ en virtud del Lema 1.4.16. Usando nuevamente la condición en w, sabemos por Lema 2.2.21 *(iii)* que $w^{\epsilon} \in A_{\frac{p(\cdot)}{\epsilon}}$ para cualquier $0 < \epsilon < 1$. Por ello, cada uno de los términos de la sumatoria anterior se estiman por

$$
\|wM_{\epsilon}(T^j_{\mathfrak{b}}f)\|_{p(\cdot)} \lesssim \|wT^j_{\mathfrak{b}}f\|_{p(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}, \quad 0 \leq j \leq k-1
$$

gracias al Teorema 4.1.1 y la hipótesis inductiva. Así, resulta que

$$
\|wT^k_{\mathfrak{b}}f\|_{p(\cdot)} \lesssim \|wf\|_{p(\cdot)}
$$

para todo $\mathfrak{b} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora extendamos el resultado a $\mathfrak{b} \in BMO$. Definimos para cada $N \in \mathbb{N}$ la función $\mathfrak{b}_N$ como

$$
\mathfrak{b}_N(x) = \begin{cases} \mathfrak{b} & \text{si } -N \leq \mathfrak{b}(x) < N, \\ N & \text{si } \mathfrak{b}(x) > N, \\ -N & \text{si } \mathfrak{b}(x) < -N, \end{cases}
$$

la cual pertenece a $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y satisface $|\mathfrak{b}_N(x) - \mathfrak{b}_N(y)| \leq |\mathfrak{b}(x) - \mathfrak{b}(y)|$, de donde se sigue que $||\mathfrak{b}_N||_{BMO} \leq 2||\mathfrak{b}||_{BMO} = 2$. Además, como $f \in L^{\infty}_c$, $(\mathfrak{b}_N)^m f \to \mathfrak{b}^m f$ cuando $N \to \infty$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como T está acotado también se tiene que $T((\mathfrak{b}_N)^m f) \to T(\mathfrak{b}^m f)$ cuando $N \to \infty$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, existe una subsucesión $\{\mathfrak{b}_{N_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ para la cual $(\mathfrak{b}_{N_l})^m f \to \mathfrak{b}^m f$ y $T((\mathfrak{b}_{N_l})^m f) \to T(\mathfrak{b}^m f)$ valen en casi todo punto. Utilizando nuevamente (4.6.1) se sigue que $T^k_{\mathfrak{b}_{N_l}}f \to T^k_{\mathfrak{b}}f$ cuando $l \to \infty$ en casi todo punto. De esta forma, aplicando el Lema de Fatou y el hecho que $||wT^k_{\mathfrak{b}_{N_l}}f||_{p(\cdot)} \leq 2C||wf||_{p(\cdot)}$ obtenemos que

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|T^k_{\mathfrak{b}}f(x)|w(x)}{2C||wf||_{p(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{l\to\infty} \left(\frac{|T^k_{\mathfrak{b}_{N_l}}f(x)|w(x)}{2C||wf||_{p(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx \tag{4.6.4}
$$

$$\leq \liminf_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|T^k_{\mathfrak{b}_{N_l}} f(x)|w(x)}{2C||wf||_{p(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx \leq 1,$$

esto es, $||wT^k_{\mathfrak{b}} f||_{p(\cdot)} \leq 2C||wf||_{p(\cdot)} < \infty$. Finalmente, por la homogeneidad de la norma, $||wT^k_{\mathfrak{b}} f||_{p(\cdot)} \leq 2||\mathfrak{b}||^k_{BMO}||wf||_{p(\cdot)}$. □

Demostración del Teorema 4.5.6: Tomemos $r(\cdot) = q(\cdot)/\delta$ para $0 < \delta < 1$. Por las hipótesis sobre f, T_α verifica el Lema 1.4.3 y podemos utilizar el Lema 2.2.12 y la desigualdad de Hölder generalizada para obtener la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|wT_\alpha f\|_{q(\cdot)} &\lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|T_\alpha f|^\delta)(x) Mg(x)dx \right)^{1/\delta} \\ &\lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \|w^\delta M^\sharp(|T_\alpha f|^\delta)\|^{1/\delta}_{r(\cdot)} \|w^{-\delta}Mg\|^{1/\delta}_{r'(\cdot)}. \end{aligned}$$

Dado que, en virtud del Lema 2.2.21*(i)*, $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$ es equivalente a $w^\gamma \in A_{\frac{q(\cdot)}{\tau}}$ para $\tau = \frac{\beta n}{n-\alpha\beta}$, y como además las hipótesis en β aseguran que $1 \leq \tau < q^-$, por el ítem *(iii)* del mismo Lema, podemos afirmar que $w^\delta \in A_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}$. Por lo tanto, también $w^{-\delta} \in A_{r'(\cdot)}$. Así, por el Teorema 4.1.1 y el Lema 1.4.23 se sigue que

$$\|wT_\alpha f\|_{q(\cdot)} \lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1} \|wM^\sharp_\delta(|T_\alpha f|)\|_{q(\cdot)} \|w^{-\delta}g\|^{1/\delta}_{r'(\cdot)} \leq \|wM_{\alpha,\widetilde{\eta}} f\|_{q(\cdot)}.$$

Finalmente, como $\widetilde{\eta}^{1+\frac{\rho\alpha}{n}} \in B_\rho$ para todo $\rho > n\beta/(n-\alpha\beta)$, de la relación entre $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ concluimos del Teorema 4.3.4 que

$$\|wT_\alpha f\|_{q(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}.$$ □

Demostración del Teorema 4.5.8: Procederemos a demostrar la acotación de $T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}$ por inducción en k. Claramente, en virtud del Teorema 4.5.6 y de las Observaciones 4.5.9 y 4.5.10, el caso $k = 0$ se verifica. Supongamos que vale para todo $0 \leq j \leq k-1$ y probémoslo para k.

Sin pérdida de generalidad, sea $\|\mathfrak{b}\|_{BMO} = 1$ y consideremos primero el caso en que $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tomemos $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ con $||wT_\alpha f||_{q(\cdot)} < \infty$. Luego, procediendo de manera similar a (4.6.2), de la descomposición

$$T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f(x) = \sum_{m=0}^{k} C_{m,k}\mathfrak{b}(x)^{k-m} T_\alpha(\mathfrak{b}^m f)(x),$$

se tiene que también $||wT^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f||_{q(\cdot)} < \infty$. Además, de la Observación 4.5.10 sabemos que $|\{x \in \mathbb{R}^n : |T^k_{\alpha,\mathfrak{b}} f(x)| > \lambda\}| < \infty$ para todo $\lambda > 0$.

Luego, si tomamos $0 < \delta < 1$ y $r(\cdot) = q(\cdot)/\delta$, se pueden aplicar los Lemas 2.2.12 y 1.4.3 para tener que

$$\begin{aligned}\|wT^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f\|_{q(\cdot)} &\lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp(|T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f|^\delta)(x)Mg(x)dx\right)^{1/\delta}\\ &= \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1}\|wM^\sharp_\delta(|T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f|)\|_{q(\cdot)}\|M(w^{-\delta}g)\|^{1/\delta}_{r'(\cdot)}.\end{aligned}$$

Como vimos en la prueba del caso $k = 0$, del Lema 2.2.21 se tiene que $w^\beta \in A_{\frac{p(\cdot)}{\beta},\frac{q(\cdot)}{\beta}}$ es equivalente a $w^\gamma \in A_{\frac{q(\cdot)}{\tau}}$ para $\tau = \frac{\beta n}{n-\alpha\beta}$, y ello implica que $w^\delta \in A_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}$. Así, del Teorema 4.1.1 y usando luego el Teorema 1.4.30 tenemos que

$$\begin{aligned}\|wT^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f\|_{q(\cdot)} &\lesssim \sup_{\|w^{-\delta}g\|_{r'(\cdot)}\leq 1}\|wM^\sharp_\delta(|T^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f|)\|_{q(\cdot)}\|w^{-\delta}g\|^{1/\delta}_{r'(\cdot)}\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{k-1}\|wM_\epsilon(T^j_{\alpha,\mathfrak{b}}f)\|_{q(\cdot)} + \|wM_{\alpha,\widetilde{\eta}}f\|_{q(\cdot)}.\end{aligned}$$

Como $\widetilde{\eta}^{1+\frac{\rho\alpha}{n}} \in B_\rho$ para todo $\rho > n\beta/(n-\alpha\beta)$, el último sumando se acota por $||wf||_{p(\cdot)}$ gracias al Teorema 4.3.4. Por otro lado, de la relación entre η y Φ, para cada $0 \leq j \leq k-1$, $K \in H_\Phi \cap H_{\eta,k} \subset H_\Phi \cap H_{\eta,j}$ en virtud del Lema 1.4.29. Usando nuevamente la condición en w, sabemos por el Lema 2.2.21*(iii)* que $w^\epsilon \in A_{\frac{q(\cdot)}{\epsilon}}$ para cualquier $0 < \epsilon < 1$. Por ello, del Teorema 4.1.1 cada uno de los términos de la sumatoria anterior se estiman por

$$\|wM_\epsilon(T^j_{\alpha,\mathfrak{b}}f)\|_{q(\cdot)} \lesssim \|wT^j_{\alpha,\mathfrak{b}}f\|_{q(\cdot)} \lesssim ||wf||_{p(\cdot)}, \quad 0 \leq j \leq k-1$$

debido a la hipótesis inductiva. En consecuencia,

$$\|wT^k_{\alpha,\mathfrak{b}}f\|_{q(\cdot)} \lesssim \|wf\|_{p(\cdot)}$$

para todo $\mathfrak{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, si $\mathfrak{b} \in BMO$, aproximamos a $\mathfrak{b}$ tal y como lo hicimos en la prueba del Teorema 4.5.3 utilizando la acotación de T_α que tenemos por hipótesis, y el teorema queda probado para todo símbolo $\mathfrak{b} \in BMO$. □

4.7. Desigualdades de tipo Wiener

En esta sección, trataremos con un espacio particular de funciones que definiremos a continuación. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, para una función $\Phi : E \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ y una función no negativa v denotamos con

$$||f||_{\Phi(\cdot,L)(E,v)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_E \Phi\left(x, \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) v(x)dx \leq 1\right\},$$

y decimos que $f \in \Phi(\cdot, L)(E, v)$.

Cuando la función Φ es de la forma

$$\Phi(x,t) = t^{p(x)}(1+\log^+ t)^{q(x)},\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

para cierto exponente $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ y una función no negativa q, denotaremos al espacio como $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n, v)$. Particularmente, cuando $q \equiv 0$ y v un peso, el espacio anterior coincide con el espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, v)$.

A continuación, se procederá a describir los antecedentes que motivaron el estudio de desigualdades de tipo Wiener en el contexto de espacios de Lebesgue de exponente variable, las cuales dan origen a los espacios arriba definidos.

Recordemos que, como es bien conocido, dada una función no nula $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, el operador maximal de Hardy-Littlewood de f, Mf, no pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$, por lo que resulta interesante estudiar para qué funciones f se puede asegurar al menos la integrabilidad local de Mf. Al respecto, Wiener probó en [90] la siguiente desigualdad para M, donde se ve que basta tomar funciones f para las cuales $|f|\log(e+|f|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si se desea obtener la mencionada integrabilidad local.

Teorema 4.7.1 ([90])**.** *Sea B una bola en $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante positiva C tal que*

$$\int_B Mf(x)dx \leq 2|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\log(e+|f(x)|)dx.$$

Los autores en [25] dieron una extensión de la desigualdad anterior al contexto variable. Más precisamente, mostraron que si ahora se consideran funciones f en el espacio $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, entonces Mf también es localmente integrable. Esto es lo que establece el siguiente resultado.

Teorema 4.7.2 ([25])**.** *Sea B una bola en $\mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_B Mf(x)dx \leq 2|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\log(e+|f(x)|)^{q(x)}dx \tag{4.7.3}$$

se verifica para todo exponente $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ siendo $q(x) = \text{máx}\{\epsilon^{-1}(\epsilon+1-p(x)), 0\}$.

Observación 4.7.4. Si $p(x) \equiv 1$, entonces $q(x) \equiv 1$ y el anterior es el resultado de Wiener.

Observemos que esta desigualdad vale para cualquier exponente $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$, no necesariamente log-Hölder continuo. Sin embargo, en el mismo artículo los autores demostraron que bajo esa continuidad, se puede tener mayor integrabilidad de M para exponentes variables tan cercanos a 1 como se desee.

Teorema 4.7.5 ([25])**.** *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Dado $0 < \epsilon < 1$, existen funciones $r, q \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ tales que:*

(i) *$r(x) = p(x)$ siempre que $p(\cdot)$ toma valores fuera del intervalo $(1, 1+\epsilon)$, y $1 < r(x) < p(x)$ si $p(\cdot)$ toma valores en $(1, 1+\epsilon)$;*

(ii) $0 \leq q(x) \leq 1$, $q(x) = 1$ *si* $p(x) = 1$ *y* $q(x) = 0$ *si* $p(x) \geq 1 + \epsilon$*;*

(iii) Dada una bola B*, existe una constante* $C = C(\epsilon, p, B)$ *tal que*

$$||Mf||_{L^{r(\cdot)}(B)} \leq C||f||_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.7.6}$$

Observación 4.7.7. En el caso en que $p^- > 1$, se puede elegir ϵ suficientemente pequeño de manera que $r(x) = p(x)$ y $q(x) = 0$ en todo $x \in \mathbb{R}^n$, obteniéndose la acotación de M de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{p(\cdot)}(B)$ que ya se conoce por el Teorema 2.2.18.

Observación 4.7.8. Cabe señalar que, si bien el enunciado del teorema anterior establece una desigualdad en norma, los autores dan en la prueba una desigualdad previa de tipo modular, es decir, una desigualdad de la forma

$$\int_B Mf(x)^{r(x)}dx \leq C|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} \log(e + |f(x)|)^{q(x)}dx.$$

Así, la desigualdad (4.7.6) del Teorema 4.7.5 puede reemplazarse por esta desigualdad modular que la implica.

Ahora bien, puesto que el operador maximal generalizado M_η mayora puntualmente a M (salvo una constante), claramente esto implica que no está acotado sobre $L^{p(\cdot)}$ cuando $p^- = 1$. Por ello, resulta interesante estudiar la integrabilidad local de dicho operador maximal. A continuación se dan resultados en esta dirección.

Primero, expondremos un resultado para exponentes generales y η cualquier función de Young. Posteriormente, veremos que es posible obtener una mejor integrabilidad local para exponentes $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ y funciones η en alguna clase de tipo B_s. En ambos resultados introduciremos pesos, mostrando, de esta forma, que también los resultados de [25] y [90] son válidos con pesos.

Teorema 4.7.9. *Sea* $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$*,* w *un peso y* η *una función de Young. Entonces, para todo* $\epsilon > 0$*, existe una constante positiva* $C = C(\epsilon, p)$ *tal que para toda bola* B*,*

$$\int_B M_\eta f(x)w(x)dx \leq 2w(B) + C\int_B |f(x)|^{p(x)-1}\eta(|f(x)|) \log(e + |f(x)|)^{q(x)}Mw(x)dx,$$

donde q *es como en el Teorema 4.7.2. Más aún, si* $\Phi(x,t) = t^{p(x)-1}\eta(t)(1 + \log^+ t)^{q(x)}$ *y* $w(B) \leq 1$*, se tiene que*

$$||M_\eta f||_{L^1(B,w)} \leq (2 + C)||f||_{\Phi(\cdot,L)(B,Mw)},$$

para toda $f \in \Phi(\cdot, L)(B, Mw)$*.*

Observación 4.7.10. Notar que las desigualdades que aparecen en el teorema de arriba conservan a la bola B del lado derecho, a diferencia de las obtenidas en los Teoremas 4.7.1, 4.7.2 y 4.7.5. Esto será de mucha utilidad para probar el Teorema 4.7.11 que sigue.

El próximo teorema establece que, bajo hipótesis de continuidad de tipo logarítmicas sobre el exponente p, esto es, si $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, se obtiene una mayor integrabilidad para el operador M_η en el contexto de espacios de Lebesgue de exponente variable.

Teorema 4.7.11. *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ y w un peso. Sea η una función de Young submultiplicativa tal que $\eta \in B_{p^-}$ si $p^- > 1$ o $\eta \in B_s$ para todo $1 < s < \infty$ si $p^- = 1$. Entonces, dado $0 < \epsilon < 1$, existen funciones $r, q \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ tales que para toda función f con $\int_{\{|f|>1\}} \eta(|f(x)|^{p(x)})dx \leq 1$ y toda bola B se verifica la desigualdad*

$$\int_B M_\eta f(x)^{r(x)} w(x)dx \leq 2w(B) + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)-r(x)} \eta(|f(x)|^{r(x)}) \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)dx$$

y se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) *$r(x) = p(x)$ si $p(\cdot)$ toma valores fuera del intervalo $(1, 1+\epsilon)$, y $1 < r(x) < p(x)$ si $p(\cdot)$ toma valores en $(1, 1+\epsilon)$;*

(ii) *$0 \leq q(x) \leq 1$, $q(x) = 1$ si $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$ si $p(x) \geq 1 + \epsilon$.*

Más aún, si $\Phi(x,t) = t^{p(x)-r(x)} \eta(t^{r(x)})(1 + \log^+ t)^{q(x)}$ y $w(B) \leq 1$, se tiene que

$$||M_\eta f||_{L^{r(\cdot)}(B,w)} \leq (2 + C)||f||_{\Phi(\cdot,L)(\mathbb{R}^n,Mw)},$$

para toda $f \in \Phi(\cdot, L)(\mathbb{R}^n, Mw)$.

Observación 4.7.12. Los Teoremas 4.7.9 and 4.7.11 tienen a los Teoremas 4.7.2 y Teorema 4.7.5 como casos particulares cuando $w \equiv 1$ y $\eta(t) = t$, en vista de la Observación 4.7.8.

Similarmente a lo que ocurre con M, es bien conocido que el operador maximal fraccionario M_α no es de tipo fuerte $(1, n/(n-\alpha))$ pero sí de tipo débil. Es natural, entonces, estudiar su integrabilidad local sobre $L^{\frac{n}{n-\alpha}}(\mathbb{R}^n)$. Al respecto, y por medio de la desigualdad de tipo Hedberg dada en el Teorema 4.4.3, obtuvimos el siguiente resultado.

Teorema 4.7.13. *Sea $0 < \alpha < n$ y w un peso. Sean $p, q \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ tales que $p^+ < n/\alpha$ y $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. Entonces, dada $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ con $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$, para todo $\epsilon > 0$ existe una constante positiva $C = C(\epsilon, p)$ tal que para toda bola B*

$$\int_B M_\alpha f(x)^{\frac{n}{n-\alpha}} w(x)dx \leq C \left(w(B) + \int_B |f(x)|^{p(x)} \log(e + |f(x)|)^{s_\alpha(x)} Mw(x)dx \right),$$

donde $s_\alpha(x) = \max\{\epsilon^{-1}(\epsilon + 1 - q(x)(1 - \alpha/n)), 0\}$.

Más aún, si $w(B) \leq 1$, se obtiene

$$||M_\alpha f||_{L^{\frac{n}{n-\alpha}}(B,w)} \leq C||f||_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{s_\alpha(\cdot)}(B,Mw)},$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\log L)^{s_\alpha(\cdot)}(B, Mw)$.

Como una generalización del teorema anterior, y dado que el operador $M_{\alpha,\eta}$ tampoco es de tipo fuerte $(1, n/(n-\alpha))$, se tiene el siguiente resultado. Sólo daremos la prueba de éste último, puesto que incluye al primero cuando $\eta(t) = t$.

Teorema 4.7.14. *Sea $0 < \alpha < n$ y w un peso. Sean $p, q \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ tales que $p^+ < n/\alpha$ y $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$ y sean η y ξ funciones de Young tales que $\xi^{-1}(t)t^{\alpha/n} \lesssim \eta^{-1}(t)$. Supongamos, además, que $\bar{\xi}(t) = \xi(t^{1-\alpha/n})$ es una función de Young. Entonces, dada $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ con $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$ y tal que $\int_{\{|f|>1\}} \bar{\xi}(|f(x)|^{q(x)})dx \leq 1$ para todo $\epsilon > 0$, existe una constante positiva $C = C(\epsilon, p)$ tal que para toda bola B*

$$\int_B M_{\alpha,\eta} f(x)^{\frac{n}{n-\alpha}} w(x)dx$$
$$\leq C \left(w(B) + \int_B |f(x)|^{p(x)-p_\alpha(x)} \bar{\xi}(|f(x)|^{p_\alpha(x)}) \log(e + |f(x)|)^{s_\alpha(x)} Mw(x)dx \right),$$

donde $p_\alpha(x) = \frac{n-\alpha p(x)}{n-\alpha}$ y $s_\alpha(x) = \text{máx}\{\epsilon^{-1}(\epsilon + 1 - q(x)(1 - \alpha/n)), 0\}$.

Más aún, si $\Phi(x,t) = t^{p(x)-p_\alpha(x)} \bar{\xi}(t^{p_\alpha(x)}) \log(e + t)^{s_\alpha(x)}$ y $w(B) \leq 1$, se obtiene que

$$||M_{\alpha,\eta} f||_{L^{\frac{n}{n-\alpha}}(B,w)} \leq C||f||_{\Phi(\cdot,L)(B,Mw)},$$

para toda $f \in \Phi(\cdot, L)(B, Mw)$.

4.8. Demostraciones de los resultados de la §4.7

Para demostrar el Teorema 4.7.9, haremos uso del siguiente lema, probado en [24], que involucra funciones log-convexas, esto es, funciones $\Psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tales que $\log(\Psi)$ es una función convexa.

Lema 4.8.1 ([24]). *Para cualquier $a > 1$, la función*

$$\Psi(y) = \frac{a^y - 1}{y} \chi_{(0,1]}(y) + \log a \; \chi_{\{y=0\}}(y)$$

es log-convexa. Más aún, dado $0 < \epsilon \leq 1$, la siguiente desigualdad

$$\Psi(y) \leq \frac{1}{\epsilon} a^y (\log a)^{1-\frac{y}{\epsilon}}$$

vale para todo $0 \leq y \leq \epsilon$.

Demostración del Teorema 4.7.9: Fijemos $\epsilon > 0$. Definimos el exponente $\bar{p} : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ como

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} \frac{p(x)+1}{2} & \text{si } 1 \leq p(x) < 1 + \epsilon, \\ p(x) & \text{si } p(x) \geq 1 + \epsilon. \end{cases}$$

Notemos que $p(x)/2 \leq \bar{p}(x) \leq p(x)$ y que $\bar{p}(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado,

$$\int_B M_\eta f(x)w(x)dx = \int_0^\infty w(\{x \in B : M_\eta f(x) > t\})dt$$

$$\leq 2w(B) + 2\int_1^\infty w(\{x \in B : M_\eta f(x) > 2t\})dt := 2(w(B) + I).$$

Utilizando el Lema 1.2.3 y un cambio de variables, la integral I puede estimarse como

$$\begin{aligned}
I &\leq C\int_1^\infty \int_{\{x\in B:|f(x)|>t\}} \eta\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) Mw(x)\,dx\,dt \\
&= C\int_{\{x\in B:|f(x)|>1\}} Mw(x)\int_1^{|f(x)|} \eta\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\,dt\,dx \\
&= C\int_{\{x\in B:|f(x)|>1\}} Mw(x)\int_1^{|f(x)|} |f(x)|\frac{\eta(u)}{u^2}\,du\,dx.
\end{aligned}$$

Como $\eta(u)/u$ es no-decreciente (ver Corolario 1.1.5), obtenemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq C\int_{\{x\in B:|f(x)|>1\}} \frac{\eta(|f(x)|)}{|f(x)|}Mw(x)\int_1^{|f(x)|} \frac{|f(x)|}{u}\,du\,dx \qquad (4.8.2)\\
&\leq C\int_{\{x\in B:|f(x)|>1\}} \frac{\eta(|f(x)|)}{|f(x)|}Mw(x)\int_1^{|f(x)|} \left(\frac{|f(x)|}{u}\right)^{\bar{p}(x)}\,du\,dx \\
&= C\int_{\{x\in B:|f(x)|>1\}} |f(x)|^{\bar{p}(x)-1}\eta(|f(x)|)Mw(x)\int_1^{|f(x)|} u^{-\bar{p}(x)}\,du\,dx.
\end{aligned}$$

Estudiemos la cantidad $\int_1^{|f(x)|} u^{-\bar{p}(x)}\,du$ para los diferentes valores de $\bar{p}$.

Si $\bar{p}(x) = 1$, entonces $q(x) = 1$. Luego, es claro que

$$\int_1^{|f(x)|} u^{-\bar{p}(x)}\,du = \log(|f(x)|) \leq \log(e + |f(x)|)^{q(x)}.$$

Si $\bar{p}(x) \geq 1 + \epsilon$, tenemos que $q(x) = 0$ y, por lo tanto,

$$\int_1^{|f(x)|} u^{-\bar{p}(x)}\,du = \frac{1 - |f(x)|^{1-\bar{p}(x)}}{\bar{p}(x) - 1} \leq \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\log(e + |f(x)|)^{q(x)}.$$

Ahora bien, si $1 < \bar{p}(x) < 1+\epsilon$, resulta que $1 < p(x) < 1+\epsilon$. Además, por definición,

$$q(x) = \epsilon^{-1}(\epsilon + 1 - p(x)) \quad \text{y} \quad \bar{p}(x) - 1 = (p(x) - 1)/2,$$

y de la última relación se tiene que $1 < \bar{p}(x) < 1+(1+\epsilon-1)/2 = 1+\frac{\epsilon}{2}$. Así, si $|f(x)| > 1$, tomando $a = |f(x)|$ en el Lema 4.8.1, obtenemos que

$$\Psi(y) \leq \frac{2}{\epsilon}|f(x)|^y \log(|f(x)|)^{1-\frac{2y}{\epsilon}}$$

para todo $0 \leq y \leq \frac{\epsilon}{2}$, donde

$$\Psi(y) = \frac{|f(x)|^y - 1}{y} \chi_{(0,1]}(y) + \log(|f(x)|)\ \chi_{\{y=0\}}(y).$$

Tomando $y = \bar{p}(x) - 1 \in (0, \epsilon/2)$, como

$$1 - \frac{2y}{\epsilon} = 1 - \frac{2(\bar{p}(x)-1)}{\epsilon} = 1 - \frac{p(x)-1}{\epsilon} = \frac{\epsilon + 1 - p(x)}{\epsilon} = q(x),$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\int_1^{|f(x)|} u^{-\bar{p}(x)}\, du &= |f(x)|^{1-\bar{p}(x)} \frac{|f(x)|^{\bar{p}(x)-1} - 1}{\bar{p}(x) - 1} \leq \frac{|f(x)|^{\bar{p}(x)-1} - 1}{\bar{p}(x) - 1} \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} |f(x)|^{\bar{p}(x)-1} \log(|f(x)|)^{q(x)} \leq \frac{2}{\epsilon} |f(x)|^{(p(x)-1)/2} \log(e + |f(x)|)^{q(x)}.\end{aligned}$$

Finalmente, si dividimos la última integral en (4.8.2) teniendo en cuenta los tres casos analizados, podemos concluir que

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_{\{|f|>1,\ \bar{p}=1\}} |f(x)|^{\bar{p}(x)-1} \eta(|f(x)|) \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)\, dx \\ &\quad + \frac{C}{\epsilon} \int_{\{|f|>1,\ \bar{p}\geq 1+\epsilon\}} |f(x)|^{p(x)} \eta(|f(x)|) \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)\, dx \\ &\quad + \frac{C}{\epsilon} \int_{\{|f|>1,\ 1<\bar{p}<1+\epsilon\}} |f(x)|^{\frac{p(x)+1}{2}} \eta(|f(x)|) |f(x)|^{\frac{p(x)-1}{2}} \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)\, dx \\ &\leq \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^{p(x)-1} \eta(|f(x)|) \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_B M_\eta f(x) w(x) \leq 2w(B) + \frac{2C}{\epsilon} \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^{p(x)-1} \eta(|f(x)|) \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)\, dx.$$

Es fácil ver que la desigualdad en norma puede obtenerse considerando pesos w con $w(B) \leq 1$. En efecto, sea f tal que

$$||f||_{\Phi(\cdot,L)(B,Mw)} = 1.$$

Luego, si $\lambda = 2(1 + C/\epsilon)$ y $w(B) \leq 1$, de la desigualdad modular probada arriba se sigue que

$$\int_B \frac{M_\eta f(x)}{\lambda} w(x) dx \leq \frac{1}{\lambda} \left(2 + \frac{2C}{\epsilon} \right) = 1,$$

de donde se tiene la desigualdad en norma

$$||M_\eta f||_{L^1(B,Mw)} \leq 2(1 + C/\epsilon).$$

Finalmente, usando la homogeneidad de la norma, se sigue el resultado para cualquier f con $||f||_{\Phi(\cdot,L)(B,Mw)} < \infty$. □

Antes de proceder con la demostración del Teorema 4.7.11, daremos algunos lemas técnicos, que luego probaremos. Los dos primeros establecen que, para funciones no-negativas $r(\cdot)$ y $s(\cdot)$ cuya diferencia satisface cierto decaimiento logarítmico, es posible estimar promedios de Luxemburg de la función $|f|^{r(\cdot)}$ por medio de promedios de Luxemburg de la función $|f|^{s(\cdot)}$ con un cierto error.

Lema 4.8.3. *Dado un conjunto medible* $A \subset \mathbb{R}^n$ *con* $0 < |A| < \infty$ *y dos funciones* $r, s : A \to [0, \infty)$*, supongamos que, para cada* $y \in A$*,*

$$0 \leq s(y) - r(y) \leq \frac{C}{\log(e + |z(y)|)},$$

donde $z : A \to \mathbb{R}^n$*. Entonces, para todo conjunto medible* D *y para cada* $t > 0$ *existe una constante positiva* C_t *tal que cualquiera sea la función* f*,*

$$|||f(\cdot)|^{r(\cdot)}\chi_D||_{\eta,A} \leq 2C_t|||f(\cdot)|^{s(\cdot)}\chi_D||_{\eta,A} + 2||S_t(z(\cdot))^{r_A^-}\chi_D||_{\eta,A},$$

siendo $S_t(x) = (e + |x|)^{-tn}$*.*

Lema 4.8.4. *Dado un conjunto medible* $A \subset \mathbb{R}^n$ *con* $0 < |A| < \infty$ *y dos funciones* $r, s : A \to [0, \infty)$*, supongamos que, para cada* $y \in A$*,*

$$|s(y) - r(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |y|)}.$$

Entonces, para todo conjunto medible D *y para cada* $t > 0$ *existe una constante positiva* C_t *tal que cualquiera sea la función* f *con* $|f(x)| \leq 1$*, para todo* $y \in A$*,*

$$|||f(\cdot)|^{r(\cdot)}\chi_D||_{\eta,A} \leq 2C_t|||f(\cdot)|^{s(\cdot)}\chi_D||_{\eta,A} + 2||S_t(\cdot)^{r_A^-}\chi_D||_{\eta,A},$$

siendo $S_t(x) = (e + |x|)^{-tn}$*.*

Observación 4.8.5. Particularmente, tomando $\eta(t) = t$, en [15] se probó la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{|A|}\int_{A\cap D} |f(x)|^{r(x)}dx \leq \frac{2C_t}{|A|}\int_{A\cap D} |f(x)|^{s(x)}dx + \frac{2}{|A|}\int_{A\cap D} S_t(z(x))^{r_A^-}dx. \tag{4.8.6}$$

bajo las hipótesis del Lema 4.8.3. Considerando las hipótesis del Lema 4.8.4, en el mismo artículo se mostró la desigualdad de arriba con $z(y) = y$.

Los dos lemas anteriores son una herramienta útil para obtener el resultado que sigue, el que a su vez es esencial en la prueba del Teorema 4.7.11. En [32] (y posteriormente en [15] para una clase más amplia de exponentes), los autores demostraron que, si el exponente $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, vale la siguiente desigualdad

$$(Mf(x))^{\frac{p(x)}{\gamma}} \lesssim M(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\gamma}})(x) + S_{\frac{p^-}{\gamma}}(x), \tag{4.8.7}$$

con $1 < \gamma < p^-$, la cual permite trasladar el problema de la acotación del operador maximal M sobre $L^{p(\cdot)}$ a la acotación del mismo operador sobre espacios de Lebesgue de exponente constante ya que el término de error $S_{p^-/\gamma}$ está en L^γ para todo $\gamma \geq 1$. A diferencia del caso en que $p(x) \equiv p$, en el cual la desigualdad anterior se obtiene como consecuencia de la clásica desigualdad de Jensen sin el término de error, la prueba de (4.8.7) no es inmediata en el contexto variable. En el espíritu de [15], veremos en el siguiente lema que, bajo ciertas condiciones sobre las funciones de Young η, el operador M_η también verifica una relación como la de (4.8.7). En realidad, cuando $p^- > 1$, puede mejorarse la desigualdad obteniendo el operador maximal de Hardy-Littlewood M en el lado derecho.

Lema 4.8.8. *Sea $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ y η una función de Young. Sea $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por $S(x) = (e + |x|)^{-n}$. Entonces:*

(i) si $p^- > 1$ y $\eta \in B_{p^-}$, entonces la desigualdad

$$(M_\eta f(x))^{p(x)} \lesssim M\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right)(x) + S(x)^{p^-}$$

vale para toda función f con $\int_{\{|f|\geq 1\}} |f(x)|^{p(x)}dx \leq 1$;

(ii) si $p^- = 1$ y $\eta \in B_s$ para algún $s > 1$, entonces la desigualdad

$$(M_\eta f(x))^{p(x)} \lesssim M_\eta\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right)(x) + S(x)$$

vale para toda función f con $\int_{\{|f|\geq 1\}} \eta(|f(x)|^{p(x)})dx \leq 1$.

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar el Teorema 4.7.11. Pospondremos la demostración de los Lemas 4.8.3, 4.8.4 y 4.8.8 hasta el final de esta sección.

Demostración del Teorema 4.7.11: Fijemos $0 < \epsilon < 1$. Sea $R(\cdot)$ la función dada por

$$R(x) = p(x) + (p(x) - 1)(p(x) - (1 + \epsilon)) = (p(x) - 1)(p(x) - \epsilon) + 1.$$

En virtud del Lema 2.2.16, como $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ y toda función constante también pertenece a $\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot) - 1$ y $p(\cdot) - \epsilon$ son log-Hölder continuos. Además, como $p^+ < \infty$, el exponente $(p(\cdot) - 1)(p(\cdot) - \epsilon) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, $R(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$.

Definimos ahora $r(x) = \text{mín}\{p(x), R(x)\}$, el cual también es log-Hölder continuo por el Lema 2.2.16. Es fácil ver que, cuando $p(x) = 1$, $R(x) = 1$ y cuando $p(x) \geq 1 + \epsilon$, $R(x) \geq p(x)$ por lo que, en ambos casos, se tiene la igualdad $r(x) = p(x)$. Por otra parte, para $1 < p(x) < 1 + \epsilon$ tenemos que $1 < R(x) < p(x)$ lo que implica que $r(x) = R(x)$ y así $1 < r(x) < p(x)$.

Para definir $q(\cdot)$, sea $F = \{x : p(x) \leq 1 + \epsilon/3\}$ y

$$r^* = \begin{cases} \sup\limits_{x\in F} r(x) & \text{si } F \neq \emptyset, \\ 1 + \epsilon/3 & \text{si } F = \emptyset. \end{cases}$$

que satisface la condición (2.2.14). Tomando $\widetilde{r}(x) = \text{mín}\{r(x), r^*\}$, definimos finalmente

$$q(x) = \text{máx}\left\{\frac{3}{\epsilon}\left(1 + \frac{\epsilon}{3} - \frac{p(x)}{\widetilde{r}(x)}\right), 0\right\}. \tag{4.8.9}$$

Del Lema 2.2.16 sabemos que $\widetilde{r}(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Además, como $p^+ < \infty$ y $\widetilde{r}^+ \leq r^* < \infty$, $p/\widetilde{r} \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ por dicho lema, y se sigue que también $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, dado que $\widetilde{r}(x) \leq r(x) \leq p(x)$, se tiene que $\frac{3}{\epsilon}\left(1 + \frac{\epsilon}{3} - \frac{p(x)}{\widetilde{r}(x)}\right) \leq 1$, es decir, $0 \leq q(x) \leq 1$. Más aún, cuando $p(x) = 1$, obtenemos que $\widetilde{r}(x) = 1$ y $q(x) = 1$. Y, cuando $p(x) \geq 1 + \epsilon$, $\frac{p(x)}{\widetilde{r}(x)} \geq 1 + \frac{\epsilon}{3}$ lo que significa que $q(x) = 0$.

Fijemos ahora un peso w y una función f como en las hipótesis. Primeramente, descomponiendo $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f\chi_{\{|f|>1\}}$, usando que $r^+ \leq p^+ < \infty$ y que $M_\eta f_2(x) \leq 1$, tenemos que

$$\int_B M_\eta f(x)^{r(x)} w(x)dx \lesssim \int_B M_\eta f_1(x)^{r(x)} w(x)dx + w(B).$$

Así, bastará ver que

$$\int_B M_\eta f_1(x)^{r(x)} w(x)dx \lesssim w(B) + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)-r(x)} \eta\left(|f(x)|^{r(x)}\right) \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)dx.$$

Consideremos primero el caso en que $p^- > 1$ y $\eta \in B_{p^-}$. Luego, de la submultiplicatividad de η, existe $1 < \tau < p^-$ tal que $\eta \in B_{\frac{p^-}{\tau}} \subset B_{\frac{p_B^-}{\tau}}$ por el Lema 1.1.39. En consecuencia, para cada $x \in B$, del Lema 4.8.8*(i)* sabemos que

$$M_\eta f_1(x)^{p(x)} \lesssim \left(S(x)^{\frac{p_B^-}{\tau}} + M\left(|f_1(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\tau}}\right)(x)\right)^\tau \lesssim S(x)^{p_B^-} + \left[M\left(|f_1(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\tau}}\right)(x)\right]^\tau,$$

Puesto que $r(x) \leq p(x)$ y $M_\eta f_1(x) \geq 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_B M_\eta f_1(x)^{r(x)} w(x)\,dx &\leq \int_B M_\eta f(x)^{p(x)} w(x)\,dx \\ &\lesssim \int_B S(x)^{p_B^-} w(x)\,dx + \int_B \left[M\left(|f_1(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\tau}}\right)(x)\right]^\tau w(x)\,dx \\ &\lesssim w(B) + \int_{\mathbb{R}^n} \left[M\left(|f_1(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\tau}}\right)\right]^\tau (x) w(x)\,dx.\end{aligned}$$

Dado que $\tau > 1$, es bien conocido (ver, por ejemplo, [38, Teorema 2.16]) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[M\left(|f_1(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{\tau}}\right)\right]^\tau (x) w(x)\,dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^{p(x)} Mw(x)\,dx.$$

Por último, del Lema 1.1.34 y del hecho que $q(x) \geq 0$, obtenemos que

$$\int_B M_\eta f_1(x)^{r(x)} w(x)dx \lesssim w(B) + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)-r(x)} \eta(|f(x)|^{r(x)}) \log(e + |f(x)|)^{q(x)} Mw(x)\,dx.$$

Para el caso en que $p^- = 1$ y $\eta \in B_s$ para todo $s > 1$, dividimos la bola $B = B_1 \cup B_2$, siendo $B_1 = \{x \in B : p(x) > 1 + \epsilon/3\}$ y $B_2 = B \setminus B_1$. Como $p_{B_1}^- \geq 1 + \epsilon/3$, resulta que $p_{B_1}^-/(1+\epsilon/6) > 1$ y así $\eta \in B_{p_{B_1}^-/(1+\epsilon/6)}$. Luego, para $x \in B_1$ podemos proceder como en el caso anterior usando el Lema 4.8.8*(i)* con p_B^- y τ reemplazados por $p_{B_1}^-$ y $1+\epsilon/6$, respectivamente.

Ahora bien, si $x \in B_2$, como $r(x) = \tilde{r}(x)$ allí y $\eta \in B_s$ para todo $s > 1$, podemos aplicar el Lema 4.8.8*(ii)* con exponente $\tilde{r}$ pues éste satisface $\tilde{r}^- = 1$ por ser $\tilde{r}(x) \leq p(x)$. Es decir, tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\int_{B_2} M_\eta f_1(x)^{r(x)} w(x)\,dx &\lesssim \int_{B_2} S(x)w(x) + \int_{B_2} M_\eta\left(|f_1(\cdot)|^{\tilde{r}(\cdot)}\right)(x)w(x)\,dx \\ &\leq w(B) + \int_{B_2} M_\eta\left(|f_1(\cdot)|^{\tilde{r}(\cdot)}\right)(x)w(x)\,dx.\end{aligned}$$

Luego, utilizando el Lema 4.7.9 con $\epsilon/3$ y exponente $p(\cdot)/\tilde{r}(\cdot)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_2} M_\eta f_1(x)^{r(x)} w(x)\,dx &\lesssim w(B) \\ &\quad + \int_{B_2} |f_1(x)|^{p(x)-\tilde{r}(x)}\eta\left(|f(x)|^{\tilde{r}(x)}\right)\log(e+|f(x)|^{\tilde{r}(x)})^{q(x)} Mw(x)\,dx \\ &\leq w(B) \\ &\quad + \int_B |f(x)|^{p(x)-r(x)}\eta\left(|f(x)|^{r(x)}\right)\log(e+|f(x)|)^{q(x)} Mw(x)\,dx.\end{aligned}$$

Combinando todos los casos se obtiene la desigualdad deseada. Por último, procediendo como en la prueba del Teorema 4.7.9, es fácil ver que si $w(B) \leq 1$, vale la desigualdad en norma. $\square$

Demostración del Teorema 4.7.14: Observemos primero que del Teorema 4.4.3 y de las condiciones sobre f, vale la siguiente desigualdad

$$M_{\alpha,\eta} f(x)^{\frac{n}{n-\alpha}} \leq 2\left[M_\xi\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)/q(\cdot)}\right)(x)\right]^{\frac{n}{n-\alpha}} = 2M_{\bar{\xi}} g(x)$$

donde $\bar{\xi}(t) = \xi(t^{1-\alpha/n})$ y $g(x) = |f(x)|^{\frac{np(x)}{(n-\alpha)q(x)}} = |f(x)|^{\frac{n-\alpha p(x)}{n-\alpha}}$.

Entonces, si $s_\alpha(x) = \text{máx}\{\epsilon^{-1}(1+\epsilon - q(x)(1-\alpha/n)), 0\}$, aplicando el Teorema 4.7.9 para $\bar{\xi}$, que es de Young por hipótesis, con exponente $h(\cdot) = q(\cdot)(1-\alpha/n)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_B M_{\alpha,\eta} f(x)^{\frac{n}{n-\alpha}} w(x)dx &\leq 2\int_B M_{\bar{\xi}} g(x)w(x)dx \\ &\lesssim w(B) + \int_B g(x)^{h(x)-1}\bar{\xi}(g(x))\log(e+g(x))^{s_\alpha(x)} Mw(x)dx.\end{aligned}$$

Si $p_\alpha(x) = \frac{n-\alpha p(x)}{n-\alpha}$, usando que $q(x) = \frac{np(x)}{n-\alpha p(x)}$, tenemos que

$$\frac{np(x)}{(n-\alpha)q(x)}(h(x)-1) = p(x) - \frac{np(x)}{(n-\alpha)q(x)} = p(x) - \frac{n-\alpha p(x)}{n-\alpha} = p(x) - p_\alpha(x).$$

Como, además, $p_\alpha(x) = \frac{n-\alpha p(x)}{n-\alpha} \leq \frac{n-\alpha p^-}{n-\alpha} \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_B M_{\alpha,\eta}f(x)^{\frac{n}{n-\alpha}} w(x)dx &\lesssim w(B) \\ &+ \int_B |f(x)|^{p(x)-p_\alpha(x)} \bar{\xi}\left(|f(x)|^{p_\alpha(x)}\right) \log(e+|f(x)|)^{s_\alpha(x)} Mw(x)dx.\end{aligned}$$

Notar que, si $\eta(t) = t$, entonces $\xi(t) = t^{\frac{n}{n-\alpha}}$ y $\bar{\xi}(t) = t$ que es de Young. Luego, hemos demostrado también el Teorema 4.7.13 para M_α, obteniendo en ese caso la desigualdad

$$\int_B M_\alpha f(x)^{\frac{n}{n-\alpha}} w(x)dx \lesssim w(B) + \int_B |f(x)|^{p(x)} \log(e+|f(x)|)^{s_\alpha(x)} Mw(x)dx. \qquad \square$$

Ahora daremos las pruebas de los lemas utilizados.

Demostración del Lema 4.8.3: Sea

$$\lambda = 2C_t||f^{s(\cdot)}\chi_D||_{\eta,A} + 2||S_t(z)^{r_A^-}\chi_D||_{\eta,A} > 0$$

con $C_t > 0$ a determinar. Sin pérdida de generalidad, supondremos que los conjuntos $D \cap A$ y $K = \text{sop}(f) \cap (D \cap A)$ tienen medida positiva ya que, de lo contrario, no hay nada que demostrar.

Definamos $D_1 = \{x \in K : |f(x)| \geq S_t(z(x))\}$. Notemos primero que de las hipótesis sobre $s(\cdot)$ y $r(\cdot)$ obtenemos que para todo $x \in D_1$,

$$\begin{aligned}|f(x)|^{r(x)} &= |f(x)|^{s(x)}|f(x)|^{r(x)-s(x)} \leq |f(x)|^{s(x)}(S_t(z(x)))^{r(x)-s(x)} \\ &\leq |f(x)|^{s(x)}(e+|z(x)|)^{tnC/\log(e+|z(x)|)} = e^{tnC}|f(x)|^{s(x)} := C_t|f(x)|^{s(x)}. \quad (4.8.10)\end{aligned}$$

Por otra parte, para $x \in K \setminus D_1$, dado que $S_t(z(x)) \leq 1$, se tiene que

$$|f(x)|^{r(x)} \leq (S_t(z(x)))^{r(x)} \leq (S_t(z(x)))^{r_A^-}. \qquad (4.8.11)$$

Luego, usando ambas desigualdades (4.8.10) y (4.8.11), y la convexidad de la función η, deducimos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|A|}\int_A \eta\left(\frac{|f(x)|^{r(x)}\chi_D(x)}{\lambda}\right)dx \\ &\qquad \leq \frac{1}{|A|}\int_{D_1} \eta\left(\frac{|f(x)|^{r(x)}}{2C_t||f^s\chi_D||_{\eta,A}}\right)dx + \frac{1}{|A|}\int_{K\setminus D_1} \eta\left(\frac{|f(x)|^{r(x)}}{2||S_t(z(\cdot))^{r_A^-}\chi_D||_{\eta,A}}\right)dx\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{|A|}\int_{D_1}\eta\left(\frac{|f(x)|^{s(x)}}{2||f^s\chi_D||_{\eta,A}}\right)dx+\frac{1}{|A|}\int_{K\setminus D_1}\eta\left(\frac{(S_t(z(x)))^{r_A^-}}{2||S_t(z(\cdot))^{r_A^-}\chi_D||_{\eta,A}}\right)dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\frac{1}{|A|}\int_{A}\eta\left(\frac{|f(x)|^{s(x)}\chi_D(x)}{||f^s\chi_D||_{\eta,A}}\right)dx+\frac{1}{2}\frac{1}{|A|}\int_{A}\eta\left(\frac{(S_t(z(x)))^{r_A^-}\chi_D(x)}{||S_t(z(\cdot))^{r_A^-}\chi_D||_{\eta,A}}\right)dx$$
$$\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

y, en consecuencia, de la definición de $||\cdot||_{\eta,A}$

$$|||f(\cdot)|^{r(\cdot)}\chi_D||_{\eta,A}\leq 2C_t|||f(\cdot)|^{s(\cdot)}\chi_D||_{\eta,A}+2||S_t(z(\cdot))^{r_A^-}\chi_D||_{\eta,A}. \qquad \square$$

Demostración del Lema 4.8.4. Consideremos $\lambda>0$ y los conjuntos D_1 y K como en la prueba del lema anterior. Supongamos, como antes, que $D\cap A$ y K tienen medida positiva.

Sea $x\in D_1$. Si $r(x)-s(x)\leq 0$, entonces $r(x)-s(x)=-|r(x)-s(x)|$ y podemos proceder como en (4.8.10), de donde obtenemos $|f(x)|^{r(x)}\leq C_t|f(x)|^{s(x)}$ con $C_t=e^{tnC}$. En caso contrario, usando que $|f(x)|\leq 1$ sobre A y que $S_t(x)\leq 1$, tenemos que

$$|f(x)|^{r(x)}=|f(x)|^{s(x)}|f(x)|^{|r(x)-s(x)|}\leq |f(x)|^{s(x)}\leq |f(x)|^{s(x)}S_t(x)^{-|r(x)-s(x)|}$$

y se sigue la misma estimación. Es decir, en cualquier caso, $|f(x)|^{r(x)}\leq C_t|f(x)|^{s(x)}$ para todo $x\in D_1$. Si $x\in K\setminus D_1$, se tiene la misma desigualdad que en (4.8.11).

Para finalizar la demostración, basta seguir la prueba del lema anterior. $\square$

Demostración de Lema 4.8.8. Para probar *(i)*, sea $p^->1$ y $\eta\in B_{p^-}$. Luego, es suficiente demostrar que $\|f\|_{\eta,B}^{p(x)}\lesssim M(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x)+S(x)^{p^-}$ para cada bola $B=B(x_0,R)$ tal que $x\in B$.

Fijemos una de tales bolas B y sean $f_1=f\chi_{\{|f|>1\}}$ y $f_2=f-f_1$. Estimemos primero $\|f_1\|_{\eta,B}^{p(x)}$. Usando el Lema 1.1.39, por ser $\eta\in B_{p^-}$ tenemos que $\eta(t)\leq C_{p^-}t^{p^-}$ para todo $t\geq c>0$ y, en consecuencia, $||g||_{\eta,B}\leq C(p^-,c)||g||_{p^-,B}$ para toda $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Luego,

$$\|f_1\|_{\eta,B}^{p(x)}\leq C^{p^+}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f_1(y)|^{p^-}dy\right)^{\frac{p(x)}{p^-}}.$$

Ahora bien, como $p_B^-\geq p^-$, por la desigualdad de Jensen con p_B^-/p^-, y dado que $|f_1|\geq$ y$\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(y)|^{p(y)}dy\leq 1$ tenemos que

$$\|f_1\|_{\eta,B}^{p(x)}\leq C^{p^+}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f_1(y)|^{p_B^-}dy\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}}$$
$$\lesssim\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f_1(y)|^{p(y)}dy\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f_1(y)|^{p(y)}dy\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}-1}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^{p(y)}dy\right) \\
&\le |B|^{\frac{p_B^- - p(x)}{p_B^-}} M(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x).
\end{aligned}$$

Si $|B| > 1$, como el exponente $(p_B^- - p(x))/p_B^- \le 0$, se sigue que $|B|^{(p_B^- - p(x))/p_B^-} \le 1$. En caso contrario, es decir, si $|B| \le 1$, de la condición log-Hölder local sobre p y del Lema 2.2.19 obtenemos que $|B|^{(p_B^- - p(x))/p_B^-} \le |B|^{p_B^- - p_B^+} \le C$ con C independiente de B. En cualquier caso, $\|f_1\|_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim M(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x)$.

Estimemos ahora el promedio $\|f_2\|_{\eta,B}^{p(x)}$. Consideremos los conjuntos $E = B \cap B(0, |x|)$ y $F = B \setminus B(0, |x|)$. Dividamos la función como $f_2 = f_2^E + f_2^F = f_2\chi_E + f_2\chi_F$. Entonces, $\|f_2\|_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim \|f_2^E\|_{\eta,B}^{p(x)} + \|f_2^F\|_{\eta,B}^{p(x)}$.

Para estimar $\|f_2^E\|_{\eta,B}^{p(x)}$, usaremos nuevamente la hipótesis en η y la desigualdad de Jensen con $p(x)/p^-$ para obtener

$$\|f_2^E\|_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f_2^E(y)|^{p^-}dy\right)^{\frac{p(x)}{p^-}} \le \frac{1}{|B|}\int_B |f_2^E(y)|^{p(x)}dy.$$

Por otra parte, la condición de decaimiento log-Hölder en el infinito sobre p nos dice que si $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ con $|z_1| \ge |z_2|$,

$$|p(z_1) - p(z_2)| \le \frac{C}{\log(e + |z_2|)}.$$

Como para todo $y \in E$ vale que $|x| \ge |y|$, entonces

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\log(e + |y|)}.$$

Luego, podemos aplicar la desigualdad (4.8.6) con $r(y) \equiv p(x)$, $s(y) = p(y)$, $z(y) = y$ y $t = 1$ para obtener

$$\begin{aligned}
\|f_2^E\|_{\eta,B}^{p(x)} &\lesssim \frac{1}{|B|}\int_B |f_2^E(y)|^{p(y)}dy + \frac{1}{|B|}\int_E (e+|y|)^{-np(x)}dy \\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^{p(y)}dy + \frac{1}{|B|}\int_E (e+|y|)^{-np_B^-}dy \\
&\le M(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x) + \frac{1}{|B|}\int_E (e+|y|)^{-np_B^-}dy.
\end{aligned}$$

Si $R < |x|/4$, es fácil ver que $|x| < 2|y|$ para todo $y \in E$. En efecto, si $R < |x|/4$ e $y \in E = B(x_0, R) \cap B(0, |x|)$,

$$|x| \le |x - x_0| + |x_0 - y| + |y| \le 2R + |y| < \frac{|x|}{2} + |y|,$$

de donde se obtiene $|x| < 2|y|$. Así, tenemos que

$$\frac{1}{|B|}\int_E (e+|y|)^{-np_B^-}dy \leq 2^{-np^-}\frac{1}{|B|}\int_E (e+|x|)^{-np_B^-} \lesssim (e+|x|)^{-np_B^-} \leq S(x)^{p^-}. \quad (4.8.12)$$

Por otro lado, si $R \geq |x|/4$ y $|x| < 1$, entonces

$$e+|x| < e+1 \leq \frac{e+1}{e}(e+|y|)$$

y procedemos como en (4.8.12).

Finalmente, si $R \geq |x|/4$ y $|x| \geq 1$, entonces $|B(0,|x|)| \leq |B(0,4R)| = 4^n|B(x_0,R)|$ y $e+|x| \leq (e+1)|x|$. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_E (e+|y|)^{-np_B^-}dy &\lesssim \frac{1}{|B(0,|x|)|}\int_{B(0,|x|)} (e+|y|)^{-np_B^-}dy \qquad (4.8.13)\\ &\lesssim |x|^{-n}\int_{B(0,|x|)} (e+|y|)^{-np_B^-}dy\\ &\lesssim (e+|x|)^{-n}\int_{B(0,|x|)} (e+|y|)^{-np_B^-}dy.\end{aligned}$$

Puesto que

$$\int_{B(0,|x|)} (e+|y|)^{-np_B^-}dy \leq \int_{B(0,|x|)} |y|^{-np_B^-}dy = C|x|^{n-np_B^-} \lesssim (e+|x|)^{n-np_B^-}$$

tenemos que

$$\frac{1}{|B|}\int_E (e+|y|)^{-np_B^-}dy \lesssim (e+|x|)^{-np_B^-} \leq S(x)^{p^-}.$$

Concluimos, de esta manera, con la estimación para f_2^E.

Estimemos ahora $\|f_2^F\|_{\eta,B}^{p(x)}$. Primeramente, usando que $\eta \in B_{p^-}$, la desigualdad de Jensen con p_B^-/p^- y que $|f_2^F| \leq 1$ tenemos que

$$\|f_2^F\|_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f_2^F(y)|^{p^-}dy\right)^{\frac{p(x)}{p^-}} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f_2^F(y)|^{p_B^-}dy\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} \leq \frac{1}{|B|}\int_B |f_2^F(y)|^{p_B^-}dy.$$

Notemos que para todo $y \in F$, tenemos, en virtud del Lema 2.2.16*(viii)*, que

$$0 \leq p(y) - p_B^- \leq p(y) - p_F^- \leq \frac{C}{\log(e+|x|)}.$$

Luego, podemos utilizar la desigualdad (4.8.6) con $r(y) \equiv p_B^-$, $s(y) = p(y)$, $z(y) = x$ y $t = 1$, para tener que

$$\|f_2^F\|_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim \frac{1}{|B|}\int_F |f_2(y)|^{p(y)}dy + \frac{1}{|B|}\int_F (e+|x|)^{-np_B^-}dy$$

$$\leq \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^{p(y)}dy + (e+|x|)^{-np^-}\frac{|F|}{|B|} \leq M(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x) + S(x)^{p^-}.$$

Por lo tanto, combinando todos los casos, resulta que

$$\|f\|_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim M(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x) + S(x)^{p^-}$$

para cualquier bola $B \ni x$.

A continuación, demostraremos *(ii)*, por lo que supondremos que $p^- = 1$ y $\eta \in B_s$ para algún $s > 1$. Bastará ver entonces que $\|f\|_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim M_\eta(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x) + S(x)$ para toda bola $B = B(x_0, R)$ que contiene a x.

Escribamos $f = f_1 + f_2$ como antes de donde $||f||_{\eta,B}^{p(x)} \lesssim ||f_1||_{\eta,B}^{p(x)} + ||f_2||_{\eta,B}^{p(x)}$.

En primera instancia, estimaremos $||f_1||_{\eta,B}^{p(x)}$. Si $|B| > 1$, de las hipótesis sobre f obtenemos que

$$\frac{1}{|B|}\int_B \eta\left(|f_1(y)|\right)dy \leq \int_{\{|f|>1\}} \eta\left(|f(y)|^{p(y)}\right)dy \leq 1.$$

Luego,

$$||f_1||_{\eta,B}^{p(x)} \leq ||f_1||_{\eta,B} \leq ||f^{p(\cdot)}||_{\eta,B} \leq M_\eta(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x).$$

Si $|B| \leq 1$, notemos que, por la convexidad de η

$$\frac{1}{|B|}\int_B \eta\left(|B||f_1(y)|^{p(y)}\right)dy \leq \int_{\{|f|>1\}} \eta\left(|f(y)|^{p(y)}\right)dy \leq 1$$

y así $||f_1^{p(\cdot)}||_{\eta,B} \leq 1/|B|$. Entonces, usando la desigualdad de Jensen generalizada dada en el Lema 1.3.4 con exponente $p_B^- \geq 1$ y el hecho que $f_1 \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} ||f_1||_{\eta,B}^{p(x)} &\leq 2^{p^+}||f_1^{p_B^-}||_{\eta,B}^{\frac{p(x)}{p_B^-}} \leq 2^{p^+}||f_1^{p(\cdot)}||_{\eta,B}^{\frac{p(x)}{p_B^-}} \leq 2^{p^+}||f_1^{p(\cdot)}||_{\eta,B}^{\frac{p(x)}{p_B^-}-1}||f^{p(\cdot)}||_{\eta,B} \\ &\leq 2^{p^+}|B|^{\frac{p_B^- - p(x)}{p_B^-}} M_\eta\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right)(x) \lesssim M_\eta\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right)(x) \end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se utilizó el Lema 2.2.19.

Estimemos ahora $||f_2||_{\eta,B}^{p(x)}$, dividiendo a f_2 como antes en f_2^E y f_2^F. Usando nuevamente la desigualdad de Jensen generalizada y que $|f_2^F| \leq 1$, tenemos que

$$||f_2^F||_{\eta,B}^{p(x)} \leq 2^{p^+}||(f_2^F)^{p_B^-}||_{\eta,B}^{\frac{p(x)}{p_B^-}} \leq 2^{p^+}||(f_2^F)^{p_B^-}||_{\eta,B}.$$

Ahora bien, como para todo $y \in F$

$$0 \leq p(y) - p_B^- \leq p(y) - p_F^- \leq \frac{C}{\log(e+|x|)},$$

en virtud del Lema 2.2.16*(viii)*, podemos aplicar el Lema 4.8.3 con $r(y) \equiv p_B^-$, $s(y) = p(y)$, $z(y) = x$ y $t = 1$ para obtener

$$||f_2^F||_{\eta,B}^{p(x)} \leq 2^{p^+ +1} C_1 ||(f_2^F)^{p(\cdot)}||_{\eta,B} + 2^{p^+ +1} ||S(x)\chi_F||_{\eta,B} \lesssim M_\eta(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}) + S(x).$$

En el caso de f_2^E, utilizamos la desigualdad de Jensen generalizada con $p(x)$, de donde se sigue que

$$||f_2^E||_{\eta,B}^{p(x)} \leq 2^{p^+} ||(f_2^E)^{p(x)}||_{\eta,B}.$$

En este caso, en virtud de la condición log-Hölder y del hecho que $|f_2^E| \leq 1$, usamos el Lema 4.8.4 con $r(y) \equiv p(x)$, $s(y) = p(y)$ y $t = 1$ de donde

$$||f_2^E||_{\eta,B}^{p(x)} \leq 2^{p^+ +1} C_1 ||(f_2^E)^{p(\cdot)}||_{\eta,B} + 2^{p^+ +1} ||S\chi_E^{p(x)}||_{\eta,B} \lesssim M_\eta \left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right) + ||S\chi_E||_{\eta,B}.$$

Si probamos que $||S\chi_E||_{\eta,B} \lesssim S(x)$, podremos concluir con la estimación. En efecto, recordemos que si $R < |x|/4$, o si $R \geq |x|/4$ y $|x| \leq 1$, teníamos que $S(y) \lesssim S(x)$. Entonces, en tales casos, $||S\chi_E||_{\eta,B} \lesssim ||S(x)\chi_E||_{\eta,B} \leq S(x)$.

Si no se da ninguno de esos casos, esto es, si $R \geq |x|/4$ y $|x| > 1$, sabemos que $4^n|B| \geq |B(0,|x|)|$ y $|x|^{-n} \lesssim S(x) < S(y)$. Sea $s > 1$ tal que $\eta \in B_s$ el cual existe por hipótesis. Luego, $\eta(t) \leq C_s t^s$ para todo $t \geq t_0 \geq 1$ y cierta constante $C_s \geq 1$ y, por el Corolario 1.3.3, $||S\chi_E||_{\eta,B} \leq C(s,t_0)||S\chi_E||_{s,B}$. Luego, procediendo como en (4.8.13) con s en lugar de p_B^- se tiene que $||S\chi_E||_{\eta,B} \lesssim S(x)$ como queríamos. $\square$

Conclusiones

En esta tesis se han obtenido distintos resultados de continuidad para los operadores maximales $M_{\alpha,\eta}$ con $0 \leq \alpha < n$ y η una función de Young, como así también para los operadores integrales singulares y fraccionarios, y sus conmutadores, que estos operadores maximales controlan. Muchos de los resultados son aún nuevos cuando se particulariza a los espacios de Lebesgue clásicos L^p.

En el primer capítulo se introdujeron las funciones de Young que definen a los operadores maximales y se probaron una amplia gama de propiedades que éstos verifican, las que fueron utilizadas a lo largo de toda la tesis. Se definieron los mencionados operadores maximales mostrando, además, cómo se podían controlar otros operadores de convolución por medio de éstos de manera puntual. Específicamente, se describieron las condiciones de tipo Hörmander sobre los núcleos de los operadores integrales dadas en [12], [66] y [67], las cuales determinan el operador maximal de control, y se analizaron las relaciones entre ellas.

El capítulo 2 se centró en definir y estudiar diferentes propiedades acerca de los espacios funcionales donde se analizaron los distintos problemas de continuidad. Se consideró primero el caso de los espacios de Orlicz, dando las distintas clases de funciones que los definen y cómo se relacionan entre ellas. Posteriormente, se expusieron las propiedades de los espacios de Lebesgue de exponente variable, tanto las relacionadas con las funciones exponente, como aquellas que surgen al generalizar las clases de pesos de tipo Muckenhoupt. Respecto de éstas últimas, se extendieron muchas de las propiedades de las clases $A_{p,q}$ de [71] a las clases $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ que no se conocen en la literatura disponible.

El capítulo 3 estuvo dedicado al estudio de las propiedades de continuidad de $M_{\alpha,\eta}$ y de los operadores relacionados sobre espacios de Orlicz. Se probó que, bajo ciertas condiciones sobre las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, el operador maximal fraccionario asociado a una función de Young η está acotado de $L^{\mathcal{A}}(\Omega)$ en $L^{\mathcal{B}}(\Omega)$, para $\Omega = \mathbb{R}^n$ y Ω de medida finita, si y sólo si las funciones $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y η se relacionan por medio de una condición de tipo Dini, que generaliza a aquellas dadas en [52] para el operador M_η, y a las introducidas en [46] y [20] para el operador maximal fraccionario clásico M_α. Para obtener dicho resultado, se utilizó una desigualdad de tipo Hedberg que vincula al operador fraccionario $M_{\alpha,\eta}$ con una versión no fraccionaria M_ξ bajo cierta relación entre las funciones de Young η y ξ. Por medio de dicha desigualdad, el problema de acotación de $M_{\alpha,\eta}$ se redujo a conocer el correspondiente resultado para M_ξ. Como consecuencia del resultado de acotación para estos operadores maximales fraccionarios, se caracterizó la continuidad sobre $\mathbb{R}^n$ de los conmutadores con símbolo en BMO de la integral fraccionaria I_α a través de una condición de tipo Dini. Para operadores fraccionarios menos regulares que I_α con núcleos en una determinada clase de Hörmander, y sus conmutadores, se dieron condiciones suficientes sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ para que los mismos estén acotados de $L^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$. Por otra parte, usando los resultados ya conocidos para M_η dados en [52], se obtuvieron propiedades similares para los operadores de tipo integral singular y sus conmutadores controlados por dicha maximal.

Finalmente, en el capítulo 4 se estudió el comportamiento de $M_{\alpha,\eta}$ actuando sobre espacios de Lebesgue de exponente variable cuando las funciones exponente son acotadas y log-Hölder continuas. En primera instancia, se caracterizaron los pesos que garantizan la acotación de M_η cuando η es una función de Young de tipo $L\log L$, los cuales son variantes de los pesos de la clase $A_{p(\cdot)}$ definidos en [23] y [29]. Para funciones de Young más generales, que satisfacen una propiedad de tipo B_q, se hallaron condiciones suficientes en los pesos w para la continuidad sobre $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, si η es de tipo inferior, las condiciones resultan también necesarias. Cabe señalar que estos resultados son nuevos aún cuando el exponente p es una función constante y las clases de pesos obtenidas resultan ser modificaciones de las clásicas A_p de Muckenhoupt. Luego, se definió la clase de pesos $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ que generaliza a $A_{p(\cdot)}$ y a $A_{p,q}$, y se probó que es la clase adecuada en el contexto variable para la acotación de M_α de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ cuando los exponentes p y q verifican la identidad de Sobolev $1/p(x) - 1/q(x) = \alpha/n$. Para probarlo, una desigualdad de tipo Hedberg sobre espacios $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ que relaciona a M_α con M resultó ser una herramienta muy útil. Este tipo de desigualdad se extendió al caso de operadores más generales $M_{\alpha,\eta}$ y M_ξ, de manera similar a como se hizo en espacios de Orlicz. Esto permitió caracterizar los pesos para la acotación de $M_{\alpha,\eta}$ cuando η es de tipo $L\log L$ y dar condiciones suficientes y necesarias para η en cierta clase B_q con tipo inferior positivo. En vista del control puntual que ejercen M_η y $M_{\alpha,\eta}$ sobre los operadores integrales y fraccionarios de convolución considerados en esta tesis, se derivaron propiedades de continuidad para los mismos bajo condiciones en los pesos que vienen dadas por aquellas que surgen de las correspondientes propiedades de los operadores maximales de control. Por último, se estudiaron desigualdades de tipo Wiener en este contexto y se mostró que bajo ciertas condiciones en los exponentes, el operador maximal M_η es localmente integrable sobre $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n, w)$ cuando las funciones de salida pertenecen a cierto espacio $\Psi(\cdot, L)(\mathbb{R}^n, Mw)$. Vía la desigualdad de tipo Hedberg, se obtuvieron estimaciones similares para $M_{\alpha,\eta}$.

A partir de los resultados obtenidos en esta tesis, surgieron algunos interrogantes para su posterior estudio. Por ejemplo, hallar las clases de pesos para la acotación de $M_{\alpha,\eta}$ sobre espacios de Orlicz, caracterizar las funciones η en el contexto de espacios $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ cuando su acotación es conocida o bien estudiar qué tipo de exponentes variables son más adecuados para dicha acotación. Siguiendo esta línea, otro problema interesante sería dar condiciones sobre las funciones $\Psi(x,t)$ para que $M_{\alpha,\eta}$ esté acotada sobre el espacio de Musielak-Orlicz $\Psi(\cdot, L)(\mathbb{R}^n)$, el cual generaliza tanto a los espacios de Orlicz como a los espacios $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, para lo cual parece ser necesario conocer una especie de apertura para condiciones de tipo Dini. Como consecuencia de estos resultados, se tendría un mejor conocimiento de los operadores integrales que se relacionan con dichas maximales.

Bibliografía

[1] D. R. Adams. A note on Riesz potentials. *Duke Math. J.*, 42(4):765–778, 1975.

[2] A. Almeida and S. Samko. Characterization of Riesz and Bessel potentials on variable Lebesgue spaces. *J. Funct. Spaces Appl.*, 4(2):113–144, 2006.

[3] J. Alvarez and C. Pérez. Estimates with A_∞ weights for various singular integral operators. *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, 8(1):123–133, 1994.

[4] B. Amaziane, L. Pankratov, and A. Piatnitski. Nonlinear flow through double porosity media in variable exponent sobolev spaces. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 10(4):2521–2530, 2009.

[5] S. N. Antontsev and S. I. Shmarev. A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions. *Nonlinear Anal.*, 60(3):515–545, 2005.

[6] M. A. Ariño and B. Muckenhoupt. Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 320(2):727–735, 1990.

[7] R. J. Bagby and J. D. Parsons. Orlicz spaces and rearranged maximal functions. *Math. Nachr.*, 132:15–27, 1987.

[8] N. K. Bari and S. B. Stečkin. Best approximation and differential properties of two conjugate functions. *Trudy Moskov. Math. Obshch.*, 5:483–522, 1956. (in Russian).

[9] A. Bernardis, E. Dalmasso, and G. Pradolini. Generalized maximal functions and related operators on weighted Musielak-Orlicz spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 39:23–50, 2014.

[10] A. Bernardis, S. Hartzstein, and G. Pradolini. Weighted inequalities for commutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(2):825–846, 2006.

[11] A. L. Bernardis, M. Lorente, G. Pradolini, and M. S. Riveros. Composition of fractional Orlicz maximal operators and A_1-weights on spaces of homogeneous type. *Acta Math. Sin.*, 26(8):1509–1518, 2010.

[12] A. L. Bernardis, M. Lorente, and M. S. Riveros. Weighted inequalities for fractional integral operators with kernel satisfying Hörmander type conditions. *Math. Inequal. Appl.*, 14(4):881–895, 2011.

[13] S. Bloom and R. Kerman. Weighted L_ϕ integral inequalities for operators of Hardy type. *Studia Math.*, 110(1):35–52, 1994.

[14] S. Bloom and R. Kerman. Weighted Orlicz space integral inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator. *Studia Math.*, 110(2):149–167, 1994.

[15] C. Capone, D. Cruz-Uribe, and A. Fiorenza. The fractional maximal operator and fractional integrals on variable L^p spaces. *Rev. Mat. Iberoam.*, 23(3):743–770, 2007.

[16] B. Çekiç, A. V. Kalinin, R. A. Mashiyev, and M. Avci. $\ell^{p(x)}(\omega)$-estimates for vector fields and some applications to magnetostatics problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 389(2):838–851, 2012.

[17] S. Chanillo, D. K. Watson, and R. L. Wheeden. Some integral and maximal operators related to starlike sets. *Studia Math.*, 107(3):223–255, 1993.

[18] Y. Chen, S. Levine, and M. Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(4):1383–1406, 2006. (electronic).

[19] M. Christ. *Lectures on singular integral operators*, volume 77 of *Reg. Conferences Series in Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[20] A. Cianchi. Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces. *J. London Math. Soc. (2)*, 60:187–202, 1999.

[21] R. R. Coifman. Distribution function inequalities for singular integrals. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 69(10):2838–2839, 1972.

[22] R. R. Coifman and C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, 51:241–250, 1974.

[23] D. Cruz-Uribe, L. Diening, and P. Hästö. The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 14(3):361–374, 2011.

[24] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integrals. *Publ. Math.*, 47(1):103–131, 2003.

[25] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. $L \log L$ results for the maximal operator in variable L^p spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(5):2631–2647, 2009.

[26] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. *Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.

[27] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell, and C. Pérez. The boudedness of classical operators on variable L^p spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31(1):239–264, 2006.

[28] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, and C. J. Neugebauer. The maximal function on variable L^p spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 28(1):223–238, 2003.

[29] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, and C. J. Neugebauer. Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 394(2):744–760, 2012.

[30] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell, and C. Pérez. Sharp two-weight inequalities for singular integrals, with applications to the Hilbert transform and the Sarason conjecture. *Adv. Math.*, 216(2):647–676, 2007.

[31] A. De la Torre and J. L. Torrea. One-sided discrete square function. *Studia Math.*, 156(3):243–260, 2003.

[32] L. Diening. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):245–254, 2004.

[33] L. Diening. Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces. *Bull. Sci. Math.*, 129(8):657–700, 2005.

[34] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Růžička. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, volume 2017 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Heidelberg, 2011.

[35] L. Diening and M. Růžička. Calderón-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics. *J. Reine Angew. Math.*, 563:197–220, 2003.

[36] Y. Ding and S. Z. Lu. Weighted norm inequalities for fractional integral operators with rough kernel. *Canad. J. Math.*, 50(1):29–39, 1998.

[37] Y. Ding, S. Z. Lu, and P. Zhang. Weak estimates for commutators of fractional integral operators. *Sci. China Math. (Ser. A)*, 44(7):877–888, 2001.

[38] J. Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Grad. Stud. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[39] D. E. Edmunds, P. Gurka, and B. Opic. Double exponential integrability of convolution operators in generalized Lorentz-Zygmund spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(1):19–43, 1995.

[40] X. Fan. $p(x)$-Laplacian equations. In *Topological methods, variational methods and their applications (Taiyuan, 2002)*, pages 117–123. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003.

[41] D. Gallardo. Orlicz spaces for which the Hardy-Littlewood maximal operator is bounded. *Publ. Mat.*, 32:261–266, 1988.

[42] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[43] O. Gorosito, G. Pradolini, and O. Salinas. Boundedness of fractional operators in weighted variable exponent spaces with non doubling measures. *Czechoslovak Math. J.*, 60(135):1007–1023, 2010.

[44] O. Gorosito, G. Pradolini, and O. Salinas. Boundedness of the fractional maximal operator on variable exponent Lebesgue spaces: A short proof. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 53(1):25–27, 2012.

[45] P. Gurka, P. Harjulehto, and A. Nekvinda. Bessel potential spaces with variable exponent. *Math. Inequal. Appl.*, 10(3):661–676, 2007.

[46] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Orlicz boundedness for certain classical operators. *Colloq. Math.*, 91(2):263–282, 2002.

[47] P. Harjulehto, P. Hästö, and V. Latvala. Sobolev embeddings in metric measure spaces with variable dimension. *Math. Z.*, 254:591–609, 2006.

[48] P. Harjulehto, P. Hästö, V. Latvala, and O. Toivanen. Critical variable exponent functionals in image restoration. *Appl. Math. Let.*, 26(1):56–60, 2013.

[49] P. Harjulehto, P. Hästö, Ú. V. Lê, and M. Nuortio. Overview of differential equations with non-standard growth. *Nonlinear Anal.*, 72(12):4551–4574, 2010.

[50] J. L. Journé. *Calderón-Zygmund operators, pseudodifferential operators, and the Cauchy integral of Calderón*, volume 994 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Berlag, Berlin, 1983.

[51] A. Kanashiro. Acotaciones con pesos del operador maximal generalizado M_η en espacios de tipo homogéneo. Master's thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2009.

[52] A. Kanashiro, G. Pradolini, and O. Salinas. Weighted modular estimates for a generalized maximal operator on spaces of homogeneous type. *Collect. Math.*, 63(2):147–164, 2010.

[53] H. Kita. On maximal functions in Orlicz spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(10):3019–3025, 1996.

[54] H. Kita. Weighted inequalities for iterated maximal functions in Orlicz spaces. *Math. Nachr.*, 278(10):1180–1189, 2005.

[55] V. Kokilashvili and S. Samko. Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces. *Rev. Mat. Iberoam.*, 20(2):493–515, 2004.

[56] V. Kokilashvili and S. Samko. The maximal operator in weighted variable spaces on metric measure spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 144:137–144, 2007.

[57] O. Kováčik and J. Rákosník. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.*, 41(4):592–618, 1991.

[58] M. A. Krasnosel'skiĭ and J. B. Rutickiĭ. *Convex functions and Orlicz spaces.* P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961. Translated by Leo F. Boron.

[59] D. S. Kurtz. Sharp function estimates for fractional integrals and related operators. *J. Austral. Math. Soc. A*, 49:129–137, 1990.

[60] D. S. Kurtz and R. L. Wheeden. Results on weighted norm inequalities for multipliers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 255:343–362, 1979.

[61] A. Lerner. Weighted norm inequalities for the local sharp maximal function. *J. Fourier Anal. Appl.*, 10(5):465–474, 2004.

[62] A. Lerner. On modular inequalities in variable L^p spaces. *Arch. Math. (Basel)*, 85(6):538–543, 2005.

[63] A. Lerner. On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(8):4229–4242, 2010.

[64] A. Lerner and A. Karlovich. Commutators of singular integrals on generalized L^p spaces with variable exponent. *Publ. Math.*, 49(1):111–125, 2005.

[65] F. Li, Z. Li, and L. Pi. Variable exponent functionals in image restoration. *Appl. Math. Comput.*, 216(3):870–882, 2010.

[66] M. Lorente, J. M. Martell, M. S. Riveros, and A. De la Torre. Generalized Hörmander's conditions, commutators and weights. *J. Math. Anal. Appl.*, 342(2):1399–1425, 2008.

[67] M. Lorente, M. S. Riveros, and A. De la Torre. Weighted estimates for singular integral operators satisfying Hörmander's conditions of Young type. *J. Fourier Anal. Appl.*, 11(5):497–509, 2005.

[68] J. M. Martell, C. Pérez, and R. Trujillo-González. Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(1):385–396, 2005. (electronic).

[69] G. Mingione. Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations. *Appl. Math.*, 51(4):355–426, 2006.

[70] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226, 1972.

[71] B. Muckenhoupt and R. Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192:261–274, 1974.

[72] J. Musielak. *Orlicz spaces and modular spaces*, volume 1034 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[73] A. Nekvinda. Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):255–265, 2004.

[74] A. Nekvinda. A note on maximal operator on $\ell^{\{p_n\}}$ and $L^{p(x)}(\mathbb{R})$. *J. Funct. Spaces Appl.*, 5(1):49–88, 2007.

[75] A. Nekvinda. Maximal operator on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial exponent. *J. Math. Anal. Appl.*, 337(2):1345–1365, 2008.

[76] C. J. Neugebauer. Orlicz-type integral inequalities for operators. *J. Korean Math. Soc.*, 38(1):163–176, 2001.

[77] R. O'Neil. Fractional integration in Orlicz spaces. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 115(2):300–328, 1965.

[78] C. Pérez. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. *J. Funct. Anal.*, 128(1):163–185, 1995.

[79] C. Pérez. On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 71:135–157, 1995.

[80] C. Pérez. Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3(6):743–756, 1997.

[81] C. Pfeiffer, C. Mavroidis, Y. Bar-Cohen, and B. Dolgin. Electrorheological fluids based force feedback device. *Proc. of the 1999 SPIE Telemanipulator and Telepresence Technologies VI Conference (Boston)*, 3840:88–99, 1999.

[82] L. Pick and M. Růžička. An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded. *Exp. Math.*, 19(4):369–371, 2001.

[83] G. Pradolini and O. Salinas. The fractional integral between weighted Orlicz and BMO_ϕ spaces on spaces of homogeneous type. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 44(3):469–487, 2003.

[84] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[85] J. Recchi. Mixed $A_1 - A_\infty$ bounds for fractional integrals. *J. Math. Anal. Appl.*, 403(1):283–296, 2013.

[86] José L. Rubio de Francia, Francisco J. Ruiz, and José L. Torrea. Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels. *Adv. in Math.*, 62(1):7–48, 1986.

[87] M. Růžička. *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, volume 1748 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[88] E. M. Stein. Note on the class $L \log L$. *Studia Math.*, 32:305–310, 1969.

[89] G. Weiss. A note on Orlicz spaces. *Portugal. Math.*, 15:35–47, 1956.

[90] N. Wiener. The ergodic theorem. *Duke Math. J.*, 5(1):1–18, 1939.

[91] Y. J. Yoo. Hardy-Littlewood maximal functions in Orlicz spaces. *Bull. Korean Math. Soc.*, 36(2):225–231, 1999.