

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

DOCTORADO EN INGENIERÍA

DESARROLLO DE TÉCNICAS AVANZADAS EN ANÁLISIS DE DATOS MEDIANTE HIPERGRAFOS

Dalma Bilbao

FICH
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

INTEC
INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA INDUSTRIA QUÍMICA

CIMEC
CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

sinc(i)
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES, SISTEMAS E INTELIGENCIA COMPUTACIONAL



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

DESARROLLO DE TÉCNICAS AVANZADAS EN ANÁLISIS DE DATOS MEDIANTE HIPERGRAFOS

Dalma Bilbao

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de

DOCTORA EN INGENIERÍA
Mención Inteligencia Computacional Señales y Sistemas
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2025

Secretaría de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria, Paraje “El Pozo”,
S3000, Santa Fe, Argentina



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química
Centro de Investigación de Métodos Computacionales
Instituto de Investigaciones en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

DESARROLLO DE TÉCNICAS AVANZADAS EN ANÁLISIS DE DATOS MEDIANTE HIPERGRAFOS

Dalma Bilbao

Lugar de Trabajo:

IMAL
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Director:
Diego Mateos — UADER-FCYT

Co-director:
Hugo Aimar — IMAL

Jurado Evaluador:
[Nombre y Apellido Evaluador 1 — Filiación]
[Nombre y Apellido Evaluador 2 — Filiación]
[Nombre y Apellido Evaluador 3 — Filiación]
[Nombre y Apellido Evaluador 4 — Filiación]

2025

CERTIFICACIÓN DEL JURADO DE TESIS
Y DEL DIRECTOR Y CO-DIRECTOR DE TESIS

ACTA DE DEFENSA DE TESIS DE DOCTORADO

En la sede de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, a los seis días del mes de mayo del año dos mil veintiséis, se reúnen en forma online sincrónica los miembros del Jurado designado para la evaluación de la Tesis de Doctorado en Ingeniería, Mención Inteligencia Computacional Señales y Sistemas, titulada ***"Desarrollo de técnicas avanzadas en análisis de datos mediante hipergrafos."***, desarrollada por la Lic. Dalma Anahí BILBAO, DNI: 33.257.100, bajo la dirección del Dr. Diego Mateos y la codirección del Dr. Hugo Aimar. Ellos son: el Dr. Francisco Tamarit, el Dr. Carlos Gómez Peña, y el Dr. Pablo Groisman.----------

La Presentación oral y defensa de la Tesis se efectúan bajo la modalidad online sincrónica según lo establecido por Resolución CS N° 382/21.

Luego de escuchar la Defensa Pública y de evaluar la Tesis, el Jurado considera:

Que la candidata ha realizado un trabajo de investigación de vanguardia que se ha materializado en dos publicaciones en revistas internacionales indexadas. Se destaca un desarrollo profundo de los fundamentos de señales y propone métodos innovadores para la construcción de hipergrafos y su aplicación al análisis de señales cerebrales. La Tesis tiene un valor adicional en la pertinencia social de la problemática de salud que aborda, en particular a enfermedades neuronales.
La defensa oral ha sido clara respondiendo con solvencia las preguntas del Jurado.
Por lo tanto, el Jurado aprueba la Tesis con calificación 10 (Diez) Sobresaliente.

Sin más, se da por finalizado el Acto Académico con la firma de los miembros del Jurado al pie de la presente. ----------

----------	----------	----------
Dr. Francisco Tamarit	Dr. Carlos Gómez Peña	Dr. Pablo Groisman

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS * SANTA FE *

Dr. José Luis Mator
Director de Posgrado
FICH - UNL

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional Nº 168 – Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Santa Fe, 6 de mayo de 2026

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada ***"Desarrollo de técnicas avanzadas en análisis de datos mediante hipergrafos"***, desarrollada por la Lic. Dalma Anahí BILBAO, en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas", certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de la versión digital final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

---	---	---
Dr. Francisco Tamarit	Dr. Carlos Gómez Peña	Dr. Pablo Groisman

Santa Fe, 6 de mayo de 2026

Certifico haber leído la Tesis, preparada bajo mi dirección en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas" y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

.....	.....
Dr. Hugo Aimar	Dr. Diego Mateos
Codirector de Tesis	Director de Tesis

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS • SANTA FE •

Dr. José Luis Mateos
Director de Posgrado
FICH - UNL

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional Nº 168 – Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

DECLARACIÓN LEGAL DEL AUTOR

Citaciones breves de esta tesis son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para la citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concebidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

DEDICATORIA

A mis padres, por su amor inagotable, por enseñarme el valor del esfuerzo y por acompañarme siempre con esa fe profunda que me sostuvo incluso en los momentos más difíciles.

A mis hermanas, por su presencia constante, por las risas compartidas y por recordarme, día a día, la fuerza de los lazos que nos unen más allá de todo.

A mis amigos, por caminar conmigo —aun en la distancia— en este largo trayecto, por su apoyo silencioso, su alegría sincera y su compañía que nunca faltó.

A todos ustedes, que con su amor, en sus múltiples formas, hicieron posible este sueño y le dieron sentido a cada paso del camino.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Hugo Aimar, por su dedicación, su paciencia infinita y su generosidad.
Gracias por acompañarme, por inspirar mi curiosidad y por enseñarme a mirar la matemática con asombro y profundidad.
Su guía y su ejemplo quedarán grabados en mí como una de las experiencias más valiosas y enriquecedoras de mi formación.

Al Dr. Diego Mateos, por su compromiso constante, por su apoyo en los momentos difíciles y por su claridad al orientar este trabajo.
Su disposición y su mirada crítica enriquecieron cada etapa de este camino.

A ambos, gracias por acompañarme en este proceso con tanta humanidad y entusiasmo, y por compartir, sobre todo, su conocimiento y su pasión por la ciencia.

A María, Wasfy, Micaela, Fabiola, Valeria y Beatriz.
Gracias por acompañarme con amor, paciencia y una confianza inquebrantable.
Su presencia constante, aun en la distancia, me dio fuerza en los momentos difíciles y alegría en cada logro alcanzado.
Este camino fue posible gracias a su apoyo silencioso, a los gestos cotidianos de cuidado y a la fe que siempre depositaron en mí.
Cada página de este trabajo lleva un poco de ustedes: su cariño, su ejemplo y su luz.

A mis compañeros del grupo Labra y Neuroimágenes, gracias por compartir conmigo aprendizajes, desafíos y risas.
Su compañerismo, generosidad y entusiasmo hicieron de este camino una experiencia profundamente enriquecedora y humana.

A todos ustedes, "GRACIAS TOTALES".

A Wasfy y María,

por enseñarme a ver en la quietud,
a caminar con luz en medio de la sombra,
y a encontrar paz en cada paso.

Índice general

Introducción **1**

Estado del arte **4**

1. Introducción a los fundamentos de señales y sus aplicación a EEG **6**
1.1. Introducción 6
1.2. El análisis funcional y de Fourier generalizados 7
1.2.1. Breve historia de la teoría de distribuciones 7
1.2.2. Algunos espacios funcionales y de distribuciones de Schwartz . . . 7
1.2.3. Fourier, Laurent, filtrado de señales y la transformada Z 13
1.3. Sistemas lineales invariantes por traslaciones y filtrado de señales. Respuesta a la δ y función de transferencia 17
1.4. El espacio de Paley–Wiener 18
1.5. La transformada de Hilbert 20
1.6. Fase instantánea de una señal 25
1.7. Índice de desfasaje. 28
1.8. Electroencefalografía (EEG) 31
1.8.1. Historia del electroencefalograma (EEG) 31
1.8.2. Fundamentos de la EEG 32
1.8.3. Distribución espacial de electrodos en EEG sistema internacional 10-20 35
1.9. Preprocesamiento de Señales 36
1.9.1. Creación de Épocas 36
1.9.2. Análisis de Componentes Independientes (ICA) para el análisis de señales 37
1.10. Matriz de conectividad de datos 40
1.11. Matrices de conectividad sustitutas y umbralado 45
1.12. Ejemplo de análisis de conectividad en señales de iEEG registradas en roedores durante diferentes estados de sueño 47

2. Entropías y teoría de la información **51**
2.1. Introducción 51
2.2. Probabilidad, incertidumbre y entropía 52
2.2.1. El teorema de unicidad de la familia $\mathscr{H}$ 61
2.2.2. El Laplaciano y la entropía de Jhon von Neumann 64

3. Teoría de Grafos **68**
3.1. Introducción 68
3.2. Conceptos básicos de teoría de grafos. 68
3.2.1. Presentación de los conceptos básicos a traves de IEEG 68

3.2.2. Caminos en grafos . . . 76
3.3. El Laplaciano, laplacianos fraccionarios y sus extensiones a contextos abstractos . . . 78
3.3.1. Entropía de von Neumann en grafos . . . 88
3.4. Medidas de centralidad . . . 89
3.5. Métricas y distancias entre grafos . . . 94
3.5.1. Métricas de disimilitud de grafos . . . 94
3.5.2. Ilustración del uso de las distancias en el análisis de estados sueño en Ratas a través de PLI . . . 96

4. Interacciones de alto orden **99**
4.1. Introducción . . . 99
4.2. Hipergrafos . . . 100
4.3. Cuantificadores en Hipergrafos . . . 104
4.3.1. Entropía espectral . . . 105
4.3.2. Centralidades de vértices e hiperaristas . . . 105
4.4. Distancias y métricas entre hipergrafos . . . 106
4.5. Medidas de disimilitud basadas en las representaciones equivalentes de $\mathscr{H}$ 106
4.6. Medidas de disimilitud directas sobre $\mathscr{H}$ . . . 107
4.7. Modelado con Hipergrafos . . . 108
4.7.1. Modelado explícito con hipergrafos . . . 108
4.7.2. Modelado implícitos con hipergrafos . . . 115

5. Hipergrafos Métricos **123**
5.0.1. Introducción . . . 123
5.0.2. Métricas . . . 124
5.0.3. Nociones básicas . . . 125
5.0.4. Algoritmo para construir y caracterizar los hipergrafos $\mathscr{H}(r)$ . . . 126
5.0.5. Cuantificación de las curvas $\Delta^{\mathscr{C}}(r)$ . . . 128
5.1. Aplicaciones . . . 129
5.1.1. Distribución de puntos . . . 130
5.1.2. Sistemas dinámicos . . . 140
5.1.3. Modelo de Kuramoto . . . 144
5.1.4. Detección de crisis epilépticas . . . 145
5.1.5. Conclusión . . . 150

6. Hipergrafos Multicapas **153**
6.1. Nociones básicas . . . 155
6.1.1. Algoritmo para construir hipergrafos multicapas . . . 158
6.1.2. Construcción de un hipergrafo multicapa sobre señales electrofisiológicas . . . 159
6.2. Aplicaciones . . . 165
6.2.1. Estudio de estadios de sueño en roedores . . . 165
6.2.2. Diferenciación de pacientes con distintos tipos de epilepsia . . . 171
6.2.3. Detección dinámica de crisis . . . 174
6.3. Discusión . . . 176
6.4. Conclusión . . . 178

7. Construcción de hipergrafos usando correlaciones múltiples **179**
7.0.1. Introducción . . . 179
7.1. Multicorrelación n series temporales . . . 179
7.1.1. Estandarización de series temporales . . . 179
7.1.2. Proyección ortogonal en un hiperplano de $\mathbb{R}^k$ . . . 180
7.1.3. Hiperplano óptimo asociado a vectores aleatorios . . . 182
7.2. Aplicaciones: Estudio de enfermedades neurodegenerativas . . . 188
7.2.1. Alzheimer . . . 188
7.2.2. Demencia frontotemporal . . . 189
7.2.3. Deterioro Cognitivo Leve (DCL) . . . 190
7.3. Aplicación del método de multirelación e hipergrafos k-regulares. . . . 192
7.3.1. Descripción de los datos y preprocesamiento . . . 192
7.3.2. Procedimiento para construir hipergrafos k-regulares utilizando el coeficiente de multirrelación de Drezner a partir de señales de EEG, MEG y fMRI . . . 194
7.4. Resultados EEG . . . 196
7.4.1. Entropía . . . 196
7.4.2. Centralidad de Vértices . . . 198
7.5. Resultados MEG . . . 205
7.5.1. Entropía . . . 207
7.5.2. Centralidad de vértices . . . 211
7.6. Resultado FMRI . . . 218
7.6.1. Entropías . . . 218
7.6.2. Centralidad de Vértices . . . 220

8. Hipermétricas **226**
8.1. Introducción . . . 226
8.2. El contexto general . . . 227
8.2.1. Algoritmo Multiplecorrelación de fase (MCF) . . . 232
8.2.2. Entropías . . . 233
8.2.3. Centralidad de vértices . . . 236
8.3. Conclusión . . . 248

Índice de figuras

1.1. Representacion gráfica de la ventana $\eta(\xi)$ 14
1.2. Deltas de Dirac en la grilla de puntos de paso τ 15
1.3. Representación gráfica de la función Φ 19
1.4. Representación gráfica de los núcleos P_y y Q_y para distintos valores de y . . 21
1.5. Representación gráfica de la construcción de la función analítica $F(z)$ a partir de $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ 26
1.6. Relación entre las fases de dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. En (a), la diferencia de fases es cercana a $\frac{\pi}{2}$, por lo que $e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}$ es cercano a i. En (b), ambas fases son muy similares en el instante t. 27
1.7. Visualización de señales sinusoidales y sus diferencias de fase. Panel superior izquierdo: señales en fase con diferencia de fase aproximada a cero ($\Delta\phi \approx 0$). Panel inferior izquierdo: señales desfasadas con diferencia de fase cercana a $\pi/2$ ($\Delta\phi \approx \pi/2$). Panel superior derecho: representación en el plano complejo de diferencias de fase espurias, distribuidas alrededor de cero. Panel inferior derecho: representación en el plano complejo de diferencias de fase reales, distribuidas alrededor de $\pi/2$. 28
1.8. La linea punteada en color rojo representa a la vez a la función signo y a la función compuesta signo (seno). 29
1.9. Representación esquemática de la amplitud, frecuencia y periodo. 33
1.10. Representación esquemática de una neurona junto al proceso de sinapsis (a). En (b) se muestra el gráfico característico de un potencial de acción. 35
1.11. Representación gráfica del sistema internacional 10-20 disposición estándar para la colocación de los electrodos en un EEG. (a) Vista lateral del cráneo indicando los puntos anatómicos de referencia: nasion, inion y puntos preauriculares. (b) Distribución estándar de los electrodos sobre la superficie del cuero cabelludo. 36
1.12. Separación de señales artificiales mediante el método de Análisis de Componentes Independientes (ICA). En la primera fila se observan las tres señales fuente originales (senoidal, cuadrada y ruido gaussiano), en la segunda las señales mezcladas obtenidas mediante una combinación lineal, y en la tercera las fuentes recuperadas por ICA. Se evidencia la capacidad del algoritmo para identificar y reconstruir las componentes independientes a partir de las mezclas observadas, sin conocimiento previo de la matriz de mezcla. 39
1.13. Representación de los 28 canales de EEG, medidos en segundos de registro en estado basal con los ojos cerrados. 41
1.14. Representación de las señal de EEG filtrada provista por el canal fp1 y f7 en las 5 bandas de frecuencias Delta, Theta, Alpha, Beta y Gamma. 42
1.15. Matriz PLI en la banda Gamma [30,45] Hz 43
1.16. Matriz conectividadpara la banda gamma obtenida a partir de matriz PLI Figura 1.15 tomando como valor umbral $p = 0{,}75$ 44

1.17. Gráficos de la conectividad funcional para cada una de las bandas de frecuencias, siendo el ultimo el asociado al ejemplo de las Figuras 1.15y 1.16. 44
1.18. Se parte de una señal original que se segmenta en n ventanas temporales. En cada una de estas ventanas, se generan n señales sustitutas. En este ejemplo particular, con fines ilustrativos, se considera $n = 3$ y la ventana específica $v5$, resaltada en color rosa. Para esta ventana se calcula la matriz de conectividad utilizando el índice (PLI). Además, se generan tres matrices sustitutas asociadas a esta ventana. A partir de estas matrices sustitutas, se calcula una matriz umbral promedio. Finalmente, la matriz original de PLI se compara con este umbral para obtener la matriz binarizada, que refleja las conexiones funcionales. 47
1.19. Esquema de la cabeza de un roedor con la ubicación de los siete electrodos: V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio). 48
1.20. Comparación entre la señal original y las señales filtradas en distintas bandas de frecuencia para el canal V1 durante el estado Awake. Se muestra la primera ventana de 5 segundos, asociada a la señal de EEG de la Rata 1. Las bandas de frecuencia utilizadas fueron: $\delta(1-4Hz)$, $\theta(4-8Hz)$, $\alpha(8-12Hz)$, $\beta_1(12-16Hz)$, $\beta_2(20-24Hz)$ y $\gamma(38-42Hz)$. 49
1.21. Método gráfico de como se obtiene la matriz binarizada de conectividad comparando la matriz original con la umbral junto a la red de conectividad resultante. (a) Matriz PLI. (b) Matriz umbral promedio. (c) Matriz binaria. (d) Red de conectividad. 50

2.1. Representación grafica de S_n para $n = 2$. 52
2.2. Representación grafica de S_n para $n = 3$. 53
2.3. Representación gráfica del máximo de H_n para n=2 y n=3. 55
2.4. Representación gráfica de las particiones A y B de Ω. 56
2.5. Un A_i partido por B. 57
2.6. Una partícula en dimensión 1. 65
2.7. Entropía de Von Neumann como función de K. 67

3.1. Cabeza de un roedor con la ubicación de los siete electrodos estratégicamente posicionados en distintas regiones del cerebro V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio), junto a las señales que capturan en tres estados de sueño. . 69
3.2. Grafos $\mathcal{G}_\delta$, $\mathcal{G}_\theta$, $\mathcal{G}_\alpha$, $\mathcal{G}_{\beta_1}$, $\mathcal{G}_{\beta_2}$ y $\mathcal{G}_\gamma$ por bandas para R_1 en el estado Awake. . 70
3.3. Representación de la densidad para los grafos $\mathcal{G}_\delta$, $\mathcal{G}_\theta$, $\mathcal{G}_\alpha$, $\mathcal{G}_{\beta_1}$, $\mathcal{G}_{\beta_2}$ y $\mathcal{G}_\gamma$ por bandas para la rata 1 en el estado Awake. 72
3.4. (a) $\mathcal{G}_\delta$, (b) matriz de adyacencia, (c) matriz de incidencia. 74
3.5. (a) Matriz de adyacencia en la banda δ al aplicar PLI. (b) $\mathcal{G}_\delta$ pesado. (c) Grados pesados de cada uno de los vértices. 75
3.6. Grafo $\mathcal{G}_\delta$ indicando dos caminos posibles para unir el vértice OB con el vértice Vd2, el camino mas corto indicado en color naranja mientras que el segundo camino es de mayor longitud y esta indicado en color magenta. . . 76
3.7. (a) Grafos conexos con una componente conexa para las bandas α y θ, (b) grafo no conexo con 2 componentes conexas para la banda α, (c) finalmente un grafo no conexo con tres componentes conexas para la banda β_1, analisis realizado sobre la R1 en el estado Awake. 77

3.8. Autovalores para cada uno de los grafos asociados al estado Awake, en cada una de las bandas. 87
3.9. Autovalores para cada uno de los grafos asociados al estado Awake, en cada una de las bandas. 88
3.10. Entropía asociada a cada uno de los grafos en cada una de las bandas en el estado Awake ver Figura 3.2. 89
3.11. Distintas medidas de centralidad para el estado Awake para R1 en las seis bandas de frecuencia. 93
3.12. Distintas medidas de centralidad para el estado Awake para R1 en las seis bandas de frecuencia. 94
3.13. Matrices distancia en centralidad de vértice, distancia Jaccard, distancia Hamming, para cada estado sobre la banda Delta. 97
3.14. Matriz distancia espectral para cada estado sobre la banda delta [1,4]Hz. . . 98

4.1. Representación típica de un Hipergrafo $\mathscr{H}$. Hipergrafo con 4 hiperaristas e_1, e_2, e_3, e_4 y con 5 vértices a, b, c, d, f 101
4.2. Grafo lineal pesado asociado al hipergrafo. 105
4.3. Data frame que da origen al hipergrafo $\mathscr{H}$. 110
4.4. (A) Hipergrafo $\mathscr{H}$ junto con su matriz de incidencia (B). 110
4.5. Centralidades de vértices e hiperaristas asociadas al hipergrafo $\mathscr{H}$ (ver Figura 4.4). 111
4.6. Hipergrafo explícito para pacientes femeninas con diabetes junto a su respectiva matriz de grados en hiperaristas. 112
4.7. Hipergrafo explícito para pacientes masculinos con diabetes junto a su respectiva matriz de grados en hiperaristas. 113
4.8. Comparación de la centralidad de hiperaristas asociados a los hipergrafos pertenecientes al grupo femenino versus los grados en hiperaristas del hipergrafos asociado al grupo masculino. 114
4.9. Centralidad de hiperaristas para ambos grupos. 115
4.10. Hipergrafo construido usando KNN con k=3. 116
4.11. Hipergrafo construido usando r-ball. 117
4.12. Hipergrafo construido usando KNN con $k = 3$ para rata1 en la banda δ en el estado AW. 119
4.13. Hipergrafo construido usando KNN con $k = 3$ para rata 1 en la banda δ en el estado AW. (A) matriz de incidencia,(B) matriz de adyacensia, (C) matriz de grados en hiperaristas,(D) matriz de grados de vértices. 120
4.14. Hipergrafo construido usando r-ball con $r = 0{,}25$ para la rata1 en la banda δ en el estado AW. 122

5.1. Descripción gráfica del método empleado.En (A) tenemos la representacón gráfica de como vamos generando bolas de distinto radio tomando como centros cada uno de los puntos de datos considerados, (B) computamos el número de hiperaristas en función del radio considerado, en (C) se presenta la normas de tipo Lebesgue L_1 y las seminormas discreta de tipo Sobolev $\mathscr{S}$ para la caracterización de las curvas representadas en (B). 124
5.2. Representación gráfica de las distintas bolas en las métricas empleadas. . . 125

5.3. Se presenta un ejemplo visual del método de filtrado considerando tres vértices a, b, c, que actúan como centros de circunferencias de radio variable r. Las circunferencias dibujadas alrededor de cada vértice representan las hiperaristas de nuestro hipergrafo que dependeran de cada valor del radio r considerado. Para cada valor de r, se construye la matriz de distancias entre pares de vértices y se binariza asignando un valor de 1 cuando la distancia entre ellos es menor que r, y 0 en caso contrario. A partir de esta matriz binarizada se construye la matriz de incidencia correspondiente, eliminando posteriormente las filas repetidas para obtener únicamente las hiperaristas distintas del hipergrafo. El procedimiento antes expuesto se presenta a modo de ejemplo para diferentes radios $r = 0{,}1$, $r = 0{,}2$ y $r = 0{,}8$. En los casos $r = 0{,}1$ y $r = 0{,}2$ se obtienen tres hiperaristas distintas, mientras que para $r = 0{,}8$ se generan tres hiperaristas, de las cuales dos son iguales; por lo tanto, el hipergrafo final contiene solo dos hiperaristas distintas: una que incluye al vértice c y otra que incluye a a y b. 127
5.4. Representación gráfica de 4 iteraciones para generar puntos asociados a distribuciones de Poisson. 129
5.5. Representación gráfica del los puntos en $\mathbf{R}^3$ de una distribución de Poisson. 132
5.6. Representación gráfica de los distintos conjuntos de puntos considerados. . 133
5.7. A Distribución normal generada en el espacio tridimensional. B Curva que muestra la evolución del número de hiperaristas en función del umbral r. . . 134
5.8. Ejemplo ilustrativo del procedimiento aplicado a cuatro distribuciones normales tridimensionales de media $\mu = (0{,}5, 0{,}5, 0{,}5)$ y desviación estándar $\sigma = (1{,}0, 1{,}0, 1{,}0)$ generadas de manera aleatoria. (A) En la parte superior se muestran las nubes de puntos correspondientes a cada iteración, en la parte inferior (B) se representan las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ obtenidas. También se incluye la curva promedio junto con la banda sombreada correspondiente a un desvío estándar, reflejando la variabilidad entre iteraciones. 135
5.9. Análisis del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}$ en función del parámetro r para distribuciones de puntos en $\mathbb{R}^3$. Cada subgráfico representa la métrica utilizada para obtener el hipergrafo. La línea continua corresponde al valor medio, mientras que la región sombreada representa la desviación estándar calculada a partir de 100 realizaciones. 136
5.10. Resultados gráficos de las métricas $\mathscr{S}$ y $\mathscr{L}$ sobre las distribuciones de puntos Lattice, Fractal, Normal, Poisson y Uniforme. 138
5.11. Matrices de distancia $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$ para las diferentes distribuciones de puntos evaluadas en el espacio métrico parabólico. 140
5.12. Representación gráfica de los sistemas dinámicos considerados y del ruido blanco. 141
5.13. A se muestran, a modo de ejemplo, 5 iteraciones sobre el sistema de Lorenz, cada una con 1000 puntos. B se presentan las 5 curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ asociadas a estas 5. 142

5.14. Resultados generales sobre las 100 realizaciones. **A)** Ejemplos de los tres sistemas dinámicos y del sistema estocástico utilizados en el análisis. **B)** Análisis del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}$ en función del parámetro r, para los tres sistemas dinámicos y el ruido blanco. Cada subgráfico representa la métrica de distancia utilizada para obtener el hipergrafo. La cada curva corresponde al valor medio junto a su desviación estándar calculada a partir de 100 realizaciones. **C)** Valores de la norma-L^1 ($\mathscr{L}$) y del seminorma de Sobolev ($\mathscr{S}$) para los distintos sistemas y distancias consideradas. **D)** Matriz de distancias $\mathscr{L}$ (usando la distancia de Chebyshev) y $\mathscr{S}$ (usando la distancia parabólica) entre los diferentes sistemas. 143
5.15. **A)** Serie temporal de $\sin\theta(t)$ producida por el modelo de Kuramoto para $N = 100$ osciladores. **B)** Evolución del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t)$ como función de r y el tiempo t. **C)** Análisis de la norma $\mathscr{L}$ y del seminorma de Sobolev $\mathscr{S}$ en función del tiempo. 145
5.16. (A) Representación gráfica de la epilepsia primaria, (B) representación gráfica de la epilepsia secuandaria. 147
5.17. Ejemplo representativo de la señal registrada en uno de los canales, resaltando en color rojo el cambio de la dinámica de la señal durante el período ictal. La señal del paciente 1 representa una crisis epilepsia generalizada primaria, mientras que la señal 2 se asocia a una crisis epilepsia generalizada secundaria. 148
5.18. Representación gráfica del número de hiperaristas, en función de r, t y $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t)$ en ambos pacientes estudiados. 149
5.19. Valores para $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$ 150

6.1. Mapa de la provincia del Chubut resaltando con círculos en color rojo las ciudades en W. 154
6.2. Grafos asociado a cada uno de los medios de transportes de la provincia del Chubut. 154
6.3. Hipergrafo para los medios de trasportes de la provincia del Chubut. 155
6.4. Representación gráfica del método para medios de trasportes de la provincia del Chubut. A) conexiones entre ciudades asociadas a cada medio de transporte considerado, B) matriz de incidencia asociada al hipergrafo se construye integrando las matrices de adyacencia correspondientes a cada grafo en A), C) hipergrafo resultante. 157
6.5. En la imagen se ilustran los distintos pasos para generar un hipergrafo multicapa. A) Cada capa contiene el mismo conjunto de vértices; lo que varía entre capas es su estructura de adyacencia entre pares de vértices. B) se muestran las matrices de adyacencia correspondientes a cada capa. A partir de estas matrices, se construyen los vértices del hipergrafo, que representan la adyacencia entre los distintos vértices de los grafos simples definidos en cada capa. C) Finalmente, las hiperaristas del hipergrafo se forman a partir de estas relaciones integrando así la información estructural de las distintas capas en una única representación. 159
6.6. Representacón de los 7 electrodos posicionados en las siguientes regiones cerebrales: V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio). 160
6.7. Ejemplo del procedimiento aplicado para una única banda de frecuencia, en este caso la banda θ, en la ventana uno. En el gráfico se muestra la costrucción de una de las hiperaristas del hipergrafo. 163

6.8. Pipeline para obtener una representación de hipergrafo de las interacciones de orden superior a partir de un multigrafo en registros electrofisiológicos. . 164
6.9. Representación de un caso representativo de los datos analizados, correspondiente al estado *Awake* para una de las ratas. 165
6.10. Estudio de las interacciones de orden superior (HOI) mediante análisis de hipergrafos en la dinámica de redes neuronales a lo largo de diferentes etapas del sueño en ratas. **A)** Posiciones topológicas de registro en áreas corticales de ratas (panel izquierdo) y ejemplo de datos crudos registrados en las cuatro etapas del sueño (panel derecho). **B)** Análisis de entropía espectral a lo largo de los diferentes estados del sueño. Cada diagrama de violín muestra los valores de entropía para animales individuales, calculados sobre 100 épocas por estado del sueño. Las comparaciones estadísticas entre estados se realizaron mediante la prueba de Kruskal-Wallis, con la corrección de comparaciones múltiples de Dunn indicando diferencias significativas: vigilia (AW) vs. NREM $** p = 2 \times 10^{-3}$, REM vs. QW $* p = 3 \times 10^{-2}$; REM vs. NREM $** p = 1 \times 10^{-3}$, y QW vs. NREM $** p = 9 \times 10^{-3}$. **C)** Comparación de la centralidad de hiperaristas entre diferentes bandas de frecuencia de iEEG. Los resultados del test de Kruskal-Wallis indican diferencias significativas en la banda delta: vigilia vs. NREM $**** p = 9 \times 10^{-4}$ y REM vs. NREM $**** p = 3 \times 10^{-5}$; y en la banda theta: AW vs. NREM $* p = 3 \times 10^{-2}$, basadas en la prueba de Kruskal-Wallis con corrección de Dunn para comparaciones múltiples. **D)** Centralidad de grado de vértice entre diferentes estados. Esta métrica representa las conexiones entre nodos vinculados a través de tres o más bandas de frecuencia. El grosor de las flechas indica la fuerza de la conexión. **E)** Medidas de distancia de hipergrafo aplicadas entre los estados del sueño: entropía espectral, centralidad de hiperaristas y centralidad de vértices (de izquierda a derecha). 170

6.11. Estudio del análisis de hipergrafos en pacientes con diferentes tipos de epilepsia: (INIC) datos intericticales sin crisis, (CPS) crisis parciales complejas, (ES) crisis electrográficas, y (VSNV) crisis detectadas por video sin cambios visuales en el EEG. **A)** Ejemplo de registro de datos crudos de EEG correspondiente a cada grupo. **B)** Análisis de entropía espectral entre los diferentes estados. El diagrama de violín muestra los valores promedio de entropía sobre $N_{INIC} = 3895$, $N_{CPS} = 3034$, $N_{ES} = 705$ y $N_{VSNV} = 111$ épocas. La comparación estadística entre estados se realizó mediante la prueba de Kruskal-Wallis, con las siguientes diferencias significativas según la prueba de comparaciones múltiples de Dunn: INIC vs CPS $****p = 1{,}0 \times 10^{-7}$, INIC vs ES $*p = 3{,}0 \times 10^{-6}$; CPS vs VSNV $*p = 2{,}5 \times 10^{-2}$, y ES vs VSNV $***p = 2{,}0 \times 10^{-4}$. **C)** Comparación de la centralidad de hiperaristas entre las diferentes bandas de EEG. En la banda delta (prueba de Kruskal-Wallis), se observaron diferencias significativas entre INIC vs CPS $****p = 1{,}6 \times 10^{-12}$ y CPS vs ES $****p = 5{,}0 \times 10^{-6}$; en la banda theta, INIC vs CPS $****p < 1{,}0 \times 10^{-5}$, CPS vs ES $****p = 2{,}0 \times 10^{-6}$ y CPS vs VSNV $*p = 3{,}0 \times 10^{-2}$; en la banda alfa, INIC vs CPS $*p = 3{,}0 \times 10^{-2}$ y CPS vs ES $*p = 2{,}5 \times 10^{-2}$; en la banda sigma, INIC vs CPS $**p = 1{,}3 \times 10^{-3}$; y en la banda gamma, INIC vs CPS $**p = 1{,}7 \times 10^{-2}$, todas basadas en la prueba de comparaciones múltiples de Dunn. **D)** Análisis de la centralidad de grado de vértice, que muestra la relación entre canales que, en promedio, presentan conectividad en tres o más bandas de frecuencia. **E)** Medidas de distancia utilizadas en este trabajo: entropía espectral, centralidad de hiperaristas y centralidad de vértices (de izquierda a derecha) 173

6.12. Estudio de los cambios en la dinámica neuronal durante dos crisis epilépticas. La columna izquierda corresponde al Paciente 1, quien presenta epilepsia generalizada (tipo de crisis 1), y la columna derecha corresponde a un paciente con epilepsia generalizada (tipo de crisis 2). Cada punto en el análisis representa una ventana de 4 segundos de datos registrados. El recuadro sombreado define el inicio y el final de la crisis. **A)** Señal cruda de un solo canal de datos MEG, donde la barra roja indica el período ictal. **B)** Entropía espectral calculada sobre 120 ventanas. **C)** Distancia espectral entre la primera ventana y las ventanas subsiguientes. **D)** Similar a C, pero utilizando la distancia de centralidad de hiperaristas (HCD). **E)** Similar a C, pero utilizando la distancia de centralidad de vértices (VCD). 175

7.1. Proyección ortogonal sobre un plano. 182

7.2. Esquema básico del método para construir hipergrafos k-regulares, en este caso particular el ejemplo es de un Hipergrafo 4-regular. A) datos sin procesar, B) datos filtrados, C) cálculo de menosres de orden 4, D) cálculo de los coeficientes de Drezner, E) cálculamos las hiperaristas del hipergrafo junto a su matriz de incidencia. 186

7.3. Hipergrafo asociado a la matriz de datos D que contiene 4 variables ($n = 4$), cada una con 5 mediciones ($m = 5$). 188

7.4. Valores de entropía para las bandas [0.5,4]HZ y [13,30]HZ donde se registro diferencia significativa para las distintas combinaciones de electrodos $k = 2$, $k = 3$ y $k = 4$. 198

7.5. Diferencias entre la centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [4,8]Hz. 200

7.6. Diferencias entre la centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [8,13]Hz. 201

7.7. Diferencias entre la centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [13,30]Hz. 202

7.8. Distribución espacial de los electrodos EEG (azul) y los sensores MEG (rojo) tras la normalización y alineación de coordenadas en una esfera unitaria. La visualización permite observar la correspondencia espacial relativa entre ambos sistemas de registro. 206
7.9. Representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2$ en la banda [4,8]Hz. 208
7.10. Representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2,3$ en la banda [8,13]Hz y representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2,4$ en la banda [13,30]Hz. 209
7.11. Representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2,4$ en la banda [30,80]Hz. 210
7.12. Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [0.5,4]Hz. 212
7.13. Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [4,8]Hz. 213
7.14. Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [8,13]Hz. 214
7.15. Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [13,30]Hz. 215
7.16. Representación gráfica, de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [30,80]Hz 216
7.17. Valores de la entropía para $k = 2$ y $k = 3$. 219
7.18. Diferencias entre las centralidad de vértices para k=2 en cada par de estados. 221
7.19. Diferencias entre las centralidad de vértices para k=3 en cada par de estados. 222

8.1. El valor absoluto de $|x-y|$ visto desde el plano. 226
8.2. Representación gráfica de un tensor en $\mathbb{R}^3$. 229
8.3. Representación gráfica del método antes expuesto. A) Ejemplo de señales sin procesar.B) Aplicamos distintos filtros. C) Tomamos subconjuntos de 3 elementos de 5 canales aplicamos los items del paso 3 del método MFC. D) Aplicamos el paso 4 del algoritmo y computamos el número de hiperaristas que resultan. E) matriz de incidencia. F) hipergrafo 3-regular asociado a cada matriz de incidencia del paso E. 233
8.4. Valores de entropía para $k = 2,3,4$. 235
8.5. Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=2, entre pares de estados. 238
8.6. Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=2, entre pares de estados 239
8.7. Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=3, entre pares de estados. 240
8.8. Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=3, entre pares de estados. 241
8.9. Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=4, entre pares de estados. 242
8.10. Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=4, entre pares de estados. 243

Índice de tablas

5.1. Número de hiperaristas obtenidas para distintos valores del umbral r. 134

7.1. Comparación entre envejecimiento normal, deterioro cognitivo leve (DCL), enfermedad de Alzheimer (A) y demencia frontotemporal (DFT) 191
7.2. Correspondencia entre electrodos de EEG y sensores de MEG utilizando la distancia mínima Euclidea. 207

RESUMEN

En esta tesis recurrimos a la teoría de *hipergrafos*, como una generalización de los grafos simples, que nos permite modelar relaciones de *alto orden* entre las componentes de un sistema. Para ello, construimos distintos hipergrafos empleando diversos métodos basados en la generación de hipergrafos de manera implícita, utilizando distintas métricas adaptadas a los datos bajo análisis, como una herramienta para estudiar las *relaciones* existente entre los elementos que conforman las distintas estructuras analizadas

Nos enfocamos principalmente en el análisis de datos provenientes de señales neuronales obtenidas a través de *EEG* (electroencefalografía), *fMRI* (resonancia magnética funcional) y *MEG* (magnetoencefalografía) , en enfermedades neurodegenerativas y en distintos estados de conciencia. Presentamos cuatro métodos para la construcción de hipergrafos orientados a caracterizar y diferenciar estos estados y patologías, utilizando herramientas derivadas de la teoría de la información, en particular la entropía asociada a los hipergrafos, como medida de complejidad, interacción y orden en el sistema

Además, desarrollamos medidas de distancia entre hipergrafos basadas en sus representaciones lineales, así como distintos cuantificadores estructurales específicos propios de los hipergrafos. Los métodos propuestos se centran en la construcción de hipergrafos métricos a partir de distancias, particularmente para señales utilizamos la métrica PLI (*Phase Lag Index*), que permite estimar relaciones funcionales entre señales.

Como los distintos métodos propuestos se pueden extender a otros tipos de datos, también pudimos generar hipergrafos métricos basados en distintas distancias como la Euclidea, la de Minkowski, Chebyshev y parabólica para analizar conjuntos generales de datos. Presentamos un método de análisis por bandas usandos grafos simples para la conectividad funcional generalizandolo por medio del método de hipergrafos multicapas que permite realizar un análisis de múltiples bandas de frecuencia de forma simultánea. Tradicionalmente, este análisis se realizaba con grafos simples y por separado para cada banda. También proponemos un algoritmo de Multiplecorrelación de fase (MCF) como una extensión de la diferencia de fase entre dos señales a dimensiones más altas, lo que permite establecer relaciones conjuntas entre los elementos del sistema, generando hipergrafos k-regulares. A su vez, exploramos la noción de multicorrelación como otra vía para construir este tipo de hipergrafos. Cada uno de estos métodos demostró cumplir con el objetivo de caracterización, diferenciación e identificación de cambios relevantes en las señales estudiadas.

ABSTRACT

In this thesis, we resort to the theory of *hypergraphs*, as a generalization of simple graphs, which allows us to model *higher-order* relationships among the components of a system. To this end, we construct various hypergraphs using different methods based on the implicit generation of hypergraphs, employing metrics adapted to the data under analysis, as a tool to study the *relationships* existing among the elements that make up the different structures analyzed.

We focus primarily on the analysis of data derived from neural signals obtained through *EEG* (electroencephalography), *fMRI* (functional magnetic resonance imaging), and *MEG* (magnetoencephalography), in neurodegenerative diseases and in different states of consciousness. We present four methods for constructing hypergraphs aimed at characterizing and differentiating these states and pathologies, using tools derived from information theory, in particular the entropy associated with hypergraphs, as a measure of complexity, interaction, and order in the system.

Additionally, we develop distance measures between hypergraphs based on their linear representations, as well as various structural quantifiers specific to hypergraphs. The proposed methods focus on the construction of metric hypergraphs from distances; in particular, for signals, we use the *Phase Lag Index (PLI)* metric, which allows estimating functional relationships between signals.

Since the proposed methods can be extended to other types of data, we were also able to generate metric hypergraphs based on various distances such as Euclidean, Minkowski, Chebyshev, and parabolic distances to analyze general datasets. We present a band-wise analysis method using simple graphs for functional connectivity, generalized through the *multilayer hypergraph* method, which allows simultaneous analysis of multiple frequency bands. Traditionally, this analysis was performed using simple graphs separately for each band.

We also propose a *Multiple Phase Correlation (MCF)* algorithm as an extension of phase difference between two signals to higher dimensions, allowing the establishment of joint relationships among the elements of the system, generating k-regular hypergraphs. Furthermore, we explore the notion of multicorrelation as another approach to constructing this type of hypergraph. Each of these methods demonstrated the ability to achieve the goal of characterization, differentiation, and identification of relevant changes in the signals studied.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el crecimiento exponencial en la disponibilidad de datos provenientes de sistemas complejos ha impulsado la necesidad de desarrollar modelos matemáticos y computacionales capaces de capturar no sólo las relaciones directas entre elementos, sino también las interacciones colectivas que emergen a partir de ellas. Este desafío se hace especialmente evidente en contextos donde las dependencias no pueden describirse adecuadamente mediante relaciones binarias, como sucede en la dinámica cerebral, en los sistemas biológicos o en las redes de interacción social.

La teoría de grafos ha proporcionado durante décadas un marco sólido para representar y analizar las conexiones entre entidades. Sin embargo, su naturaleza basada en relaciones de pares limita su capacidad para describir interacciones de orden superior, en las cuales múltiples componentes participan de manera simultánea en un mismo proceso. En este escenario, la teoría de hipergrafos surge como una extensión natural que permite superar dichas limitaciones, ofreciendo una representación matemática capaz de incorporar relaciones de mayor dimensionalidad y complejidad estructural.

Esta tesis se inscribe en ese marco de generalización. Su objetivo principal es desarrollar técnicas avanzadas de análisis de datos basadas en hipergrafos, capaces de integrar información estructural, métrica y funcional en un mismo esquema formal. Para ello, se proponen distintos métodos de construcción, caracterización y comparación de hipergrafos, sustentados en fundamentos teóricos provenientes de la teoría de la información, la entropía espectral y la teoría espectral de operadores.

En particular, se introducen modelos de *hipergrafos métricos*, donde las relaciones entre vértices se definen a partir de distancias geométricas o funcionales adaptadas al dominio de los datos; *hipergrafos multicapas*, que permiten fusionar información proveniente de diferentes escalas o bandas de frecuencia; e *hipergrafos k-regulares*, generados mediante algoritmos de correlación múltiple y coherencia de fase, capaces de captar interacciones conjuntas entre más de dos señales.

Estas herramientas se aplican al estudio de señales neurofisiológicas —EEG, MEG y fMRI— obtenidas en diferentes estados de conciencia y en enfermedades neurodegenerativas, demostrando la capacidad de los hipergrafos para distinguir configuraciones funcionales y detectar transiciones dinámicas en la actividad cerebral. Así, la tesis no sólo propone una formalización matemática rigurosa del análisis de interacciones de orden superior, sino que también aporta una base metodológica y computacional para el desarrollo de nuevos marcadores en neurociencia y en otras disciplinas donde la complejidad relacional es esencial.

Esta tesis incluye en los capítulos 1, 2 y 3 los resultados teóricos que sustentan las técnicas utilizadas en los problemas concretos abordados en los capítulos siguientes. En particular, se presentan los fundamentos del análisis de señales, el cálculo de PLI, y los principios de la teoría de la información, explorando el concepto de entropía desde una axiomática probabilística. También se introduce la entropía de Von Neumann y los aspectos básicos de la teoría de grafos no dirigidos ponderados, junto con la formulación de los Laplacianos de contexto.

En el capítulo 4 se desarrolla la teoría de hipergrafos, destacando sus principales caracte-

rísticas estructurales, que constituyen una generalización natural de los conceptos expuestos en el capítulo 3. Finalmente, los capítulos 5, 6, 7 y 8 presentan distintos métodos de construcción de hipergrafos orientados al análisis de estructuras de datos complejas: el capítulo 5 aborda los hipergrafos métricos; el capítulo 6, la generación de hipergrafos multicapas; el capítulo 7, la construcción de hipergrafos k-regulares a partir de la correlación de Drezner; y el capítulo 8, los hipergrafos k-regulares basados en hipermétricas, donde se propone el uso de la *Multiple Correlación de Fase* (MCF) como estrategia para su generación.

OBJETIVOS DE LA TESIS

Objetivo general

- Desarrollar y aplicar herramientas de teoría de grafos, hipergrafos y teoría de la información para el análisis de señales multivariadas cerebrales, enfocándos en la caracterización de la conectividad funcional en diferentes estados de conciencia y distintas patologías neurologicas y neurodegenerativas.

Objetivos específicos

- Construir redes funcionales basadas en hipergrafos, que permitan capturar interacciones de orden superior entre múltiples regiones cerebrales.
- Aplicar medidas espectrales como el análisis del Laplaciano para caracterizar y comparar las redes obtenidas.
- Evaluar el desempeño de las herramientas propuestas mediante datos reales de señales cerebrales multimencionales.
- Generar nuevas herramientas matemáticas para describir y calcular interacciones múltiples y de alto orden.

ESTADO DEL ARTE

Durante los últimos años, la teoría de grafos ha demostrado ser una herramienta extremadamente útil, para resolver problemas combinatorios, en áreas tan diversas como Geometría, Álgebra, Teoría de números, Topología y Optimización.
Desde la teoría de grafos, somos capaces de modelar y comprender las relaciones existentes entre múltiples entidades del mundo real, definiéndose en función de sus conexiones mutuas. Este enfoque ha sido fundamental para analizar sistemas interconectados y complejos.
A lo largo de los años, hemos observado un aumento significativo en la generación de datos interconectados en diversos campos. Si bien la teoría de grafos tradicional se centra en comprender las relaciones entre pares de datos (nodos), no siempre es suficiente para abordar la complejidad de las interacciones en escenarios del mundo real. En numerosos casos, las interacciones son sumamente intrincadas y van más allá de las conexiones de a pares.[25], ejemplos típicos son las redes sociales, las redes de interacción proteína-proteína [26] y las redes cerebrales [27]. En las redes sociales, las características individuales de los usuarios están relacionadas con los patrones interactivos entre ellos. Los usuarios con características similares tienen más probabilidades de conectarse entre sí para formar grupos. En las redes cerebrales humanas, la corteza cerebral contiene más de 10^{11} neuronas y un grupo de neuronas con funciones y conexiones similares forma un núcleo. Los núcleos pueden dividirse a su vez en distintas regiones cerebrales, lo que da lugar a una red cerebral compleja, multinivel y multiescala.
Para estudiar estos sistemas complejos es necesario caracterizar y analizar las relaciones múltiples entre sus elementos. En los últimos años, se ha empezado a prestar gran atención al campo de los hipergrafos, aplicando distintos métodos de modelización y análisis de correlaciones de alto orden. Analizar y modelar estas conexiones entre los datos se ha convertido en una tarea importante en muchas áreas de investigación [28, 29, 30].
Las asociaciones de alto orden entre elementos son difíciles de describir mediante grafos simples, por lo que se han introducido las correspondientes expresiones matemáticas, como los sistemas de conjuntos [31]. En 1943, Prenowi ilustró por primera vez varios tipos de geometrías (proyectiva, descriptiva y esférica) como hipergrupos o multigrupos,creó geometrías en Join Spaces, un hipergrupo único que ha demostrado ser una herramienta valiosa en el estudio de una variedad de temas, incluidos grafos, relaciones binarias, conjuntos difusos y conjuntos aproximados [32]. En 1970, Claude Berge [2] propone por primera vez el concepto formal de hipergrafos en su trabajo titulado *Graphes et Hypergraphes*. En el mismo se propone un hipergrafo como una generalización de un grafo, que se extiende más allá de la noción convencional de aristas que conectan pares de nodos. En un hipergrafo, una arista, a menudo llamada *hiperarista*, puede conectar cualquier cantidad de nodos. Esta propiedad hace que los hipergrafos sean particularmente adecuados para representar relaciones de orden superior. La modelización de datos, utilizando la teoría de hipergrafos, ofrece un marco más expresivo para modelizar y analizar relaciones más complejas.
La teoría de hipergrafos se ha aplicado en diversas disciplinas, como la Biología, la Economía y la Sociología, debido a su capacidad para modelar relaciones complejas. Particular-

mente podemos destacar el análisis de redes sociales, las cuales la información de las mismas han aumentado rápidamente en las últimas décadas, y pueden proporcionar ideas a nivel de población [34] se utilizan los hipergrafos en el análisis de redes sociales para descubrir correlaciones complejas y ocultas en los datos, donde la estructura de hipergrafo se utiliza para formular correlaciones múltiples. En sistemas de recomendación, se emplean para modelar la relación usuario-elemento y prever las preferencias futuras del usuario [34], se introduce el uso de hipergrafos para describir de manera más precisa las conexiones de alto orden entre usuarios y elementos, mejorando así el filtrado colaborativo. Además, cuando usuarios y elementos tienen atributos distintos, como género o categoría, los hipergrafos también se aplican para modelar e inferir estos atributos, contribuyendo a capturar las preferencias del usuario de manera más completa. Otra área de aplicación es el análisis de sentimientos, con el objetivo de reconocer las emociones y actitudes reales de las personas en contextos de redes sociales. En [35] se hace uso de la teoría de hipergrafos para formular la evaluación entre cada muestra y llevar a cabo una predicción de sentimientos multimodales.
La aplicación de los hipergrafos también ha demostrado su ventaja en aplicaciones médicas y biológicas, donde los datos son complejos, heterogéneos y multimodales. Un ejemplo de su uso en medicina y biología, es la detección de enfermedades. Aquí los hipergrafos se han utilizado en la identificación de trastornos neurológicos a través del análisis de datos de imágenes de resonancia magnética (MRI) [36], la identificación de casos de COVID-19 a través del análisis de imágenes de tomografía computada (TC) [37], para la identificación de biomarcadores en estudios biológicos, lo que es crucial para el diagnóstico y tratamiento de enfermedades [38]. También se han utilizado para analizar las complejas interacciones entre proteínas, genes y metabolitos en biología molecular [29], para predecir interacciones entre proteínas, lo que es fundamental para comprender las redes de señalización celular [39] y para el descubrimiento de fármacos con el objetivo de identificar interacciones entre compuestos químicos y objetivos terapéuticos [40].

Capítulo 1

Introducción a los fundamentos de señales y sus aplicación a EEG

1.1. Introducción

Las técnicas de análisis de señales son diversas; muchas de ellas están bien comprendidas y se adaptan a señales temporales de distintas procedencias. Los algoritmos están altamente desarrollados, frecuentemente optimizados, y su implementación en diversos lenguajes de programación está disponible en código abierto. Tal es el caso de Python, que utilizamos a lo largo de toda la investigación asociada a esta tesis.
Es precisamente el carácter abierto del código lo que nos brinda la posibilidad de modificar, a veces levemente, otras veces más profundamente, algunos algoritmos y códigos preexistentes y disponibles. Como ya se expresó en la introducción general de esta tesis, cierta epistemología propia de la institución donde se realizó esta investigación será visible en el abordaje de algunos de los problemas que fueron surgiendo durante su desarrollo.
En muchas ocasiones, los códigos disponibles para tareas específicas actúan como cajas negras; y en algunos casos, lo son en un grado excesivo, particularmente en lo que respecta al sustento matemático de los algoritmos que implementan. Aunque casi todos los fundamentos matemáticos de las herramientas que utilizaremos en este capítulo son bien conocidos y están tratados con distintos niveles de profundidad y rigor en la bibliografía clásica del área, nos proponemos exponer brevemente, pero con precisión, aquellos fundamentos relevantes. Esto incluye el análisis de Fourier, las series de Laurent de funciones holomorfas, el filtrado de señales, el análisis de señales en el espacio de Paley-Wiener, los teoremas de muestreo, la transformada de Hilbert entendida como una integral singular y su aplicación para la definición y el cálculo del Phase Lag Index (PLI) entre dos señales, que será una técnica central en todo el desarrollo de esta tesis y en particular en las aplicaciones presentadas en los Capítulos 5, 6 , 7 y 8.
Comenzaremos con la introducción de los conceptos matemáticos fundamentales, demostrando algunos de los resultados principales. A continuación, en la Sección 1.2.2 , describiremos las características principales de las señales de EEG, así como su filtrado, tanto para la eliminación de ruidos como para la construcción de las bandas de frecuencia que constituirán los principales insumos de los algoritmos que, desde la teoría de hipergrafos, desarrollaremos en los Capítulos 5, 6 ,7 y 8.

1.2. El análisis funcional y de Fourier generalizados

El análisis matemático clásico, introducido en el siglo XVII por Newton y Leibniz, ha marcado de manera esencial todo el desarrollo de la ciencia moderna y constituye aún hoy una disciplina imprescindible del desarrollo científico.
Las funciones polinomiales, exponenciales y las series de potencia de Taylor dominaron el escenario en la modelización matemática de la física. A principio del siglo XX comenzaron a cuestionarse los procesos de medición como artilugios independientes del fenómeno observado, y surgió la idea de un instrumento de medición como una interacción con el objeto medido.
Y cuando se quieren admitir en la familia del análisis a las masas o los dipolos puntuales (Dirac), la teoría clásica de funciones cae estrepitosamente.
El objetivo de esta sección es introducir las ideas, y algunas pruebas además de las definiciones, de conceptos cruciales de la teoría de distribuciones de Schwartz como generalizaciones de las clásicas funciones. La razón para hacer este sacrificio expositivo es lograr desarrollar intuiciones, basadas en argumentos rigurosos, sobre algunos de los objetos que serán centrales en los aspectos más fundamentales de esta tésis. En particular, conviene entender por qué la transformada de Hilbert, que es un operador asociado a un objeto que no es una función pero sí una distribución, resulta un ingrediente indispensable en la definición de fase y PLI.

1.2.1. Breve historia de la teoría de distribuciones

En 1935, S. Sobolev introduce lo que llama funciones generalizadas, basado esencialmente en las fórmulas de integración por partes. Los espacios de Sobolev se han convertido, con el paso de los años, en una estructura imprescindible en la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y en particular en el desarrollo de métodos numéricos como el de Galerkin, que es la base de las aproximaciones por elementos finitos.
Un antecedente local en el desarrollo de la teoría es el matemático italiano radicado en Rosario, Beppo Levi, quien en su análisis del problema de Dirichlet tuvo que generar esta idea de funciones generalizadas. La teoría general de las distribuciones fue desarrollada esencialmente por Laurent Schwartz en la década de 1940. En 1950 recibió la Medalla Fields por estos trabajos. La teoría general de integrales singulares, que contiene a la transformada de Hilbert, fue desarrollada por A. P. Calderón y A. Zygmund en la década del 50 del siglo pasado. Alberto Calderón fue un destacado matemático argentino, nacido en Mendoza en 1920, que recibió los premios Wolf y Bocher. Antonio Zygmund fue un matemático polaco emigrado a Chicago que tuvo una gran influencia en el desarrollo del análisis armónico y, en particular, en el crecimiento del área en Argentina.

1.2.2. Algunos espacios funcionales y de distribuciones de Schwartz

La discretización de señales analógicas, que son funciones de variable continua, tiene que hacerse con criterios que garanticen la persistencia de las características fundamentales de la señal original en la nueva señal discretizada, que, como un vector, entrará en nuestros algoritmos de cálculo.
Si bien este propósito, que consiste básicamente en desechar datos sobre los valores de una señal y pretender sostener toda la información que la misma contenía, parece y es una quimera, cuando consideramos clases espaciales de funciones o de señales digitales, esta aparente imposible pretensión se materializa.
La matemática, desde hace algo más de un siglo, se ha ocupado de generar estructuras adecuadas que constituyen **esas clases especiales de funciones**. Los espacios funcionales. Las

ideas han crecido desde los casos particulares hacia la generación de estructuras abstractas como lo son los espacios de Hilbert, los espacios de Banach, los espacios vectoriales topológicos, que junto con las nociones de dualidad han conducido a la teoría de distribuciones de Schwartz como objetos matemáticos que generalizan a las funciones y engloban en un mismo ambiente las señales analógicas y sus discretizaciones. El caso paradigmático de espacio de Hilbert que no tiene dimensión finita es el de las señales analógicas de cuadrado integrable

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

Entendemos la integral en el sentido de Lebesgue, que generaliza el de Riemann clásico. $L^2(\mathbb{R})$ resulta un espacio de Hilbert ya que tiene un producto interno o escalar dado por $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ que define una norma $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dt \right)^{1/2}$ con la cual el espacio vectorial $L^2(\mathbb{R})$ es normado y completo. La completitud entendida en el sentido de que toda sucesión fundamental o de Cauchy converge a algún elemento de $L^2(\mathbb{R})$. El espacio $L^2(\mathbb{R})$ resulta así de Banach, es normado y completo. Pero $L^2(\mathbb{R})$ es solo uno, el más ilustre, si se quiere en toda la escala de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\},$$

que resulta de Banach con la norma $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$ que, salvo para $p = 2$, nunca más está asociada a un producto escalar interno. Es decir, el único espacio en nuestra escala que es de Lebesgue y de Hilbert a la vez es $L^2(\mathbb{R})$. También está bien definido el espacio de funciones esencialmente acotadas en $\mathbb{R}$, que denotamos por $L^\infty(\mathbb{R})$. Precisamente, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ está en $L^\infty(\mathbb{R})$ si existe $M > 0$ tal que el conjunto $|\{t : |f(t)| > M\}|$ tiene medida cero. El ínfimo de esos números M es la norma en $L^\infty(\mathbb{R})$, que denotamos por $\|f\|_\infty$. Con ella, $L^\infty(\mathbb{R})$ también es de Banach. Estos espacios contienen funciones muy discontinuas, muy poco suaves pero todavía no contienen otros modelos fisicos importantes como la delta de Dirac. Los espacios de Sobolev, de Besov, de Triebel-Lizorkin, de Hardy, de John-Nirenberg, etc, son espacios de **Banach** de funciones, señales e imágenes, que se han usado mucho en el desarrollo teórico tanto como en las aplicaciones de Análisis Funcional. Entre la clase de los espacios de Banach será suficiente para nuestro propósito la escala de los espacios $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, con el agregado $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ que es el espacio de todas las funciones integrables sobre intervalos compactos de $\mathbb{R}$. Notemos que, por ejemplo, $f(t) = t^2$ no está en ningún $L^p(\mathbb{R})$ pero si están en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. La otra escala de espacios funcionales relevantes para describir la generalización de funciones a distribuciones son solo espacios vectoriales topológicos (EVT), que en principio carecen de normas, pero todavía hay una **noción de convergencia**, y son espacios vectoriales de funciones en los que la compatibilidad de las dos estructuras, la topológica y la algebraica, está relacionada a través de la continuidad de la suma y del producto por escalares. Tres espacios de funciones extremadamente suaves serán importantes. El más grande, $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbb{R}) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, es el espacio vectorial de todas las funciones infinitamente diferenciables. Por ejemplo, los polinomios y las gaussianas están en $\mathscr{E}$. La noción de convergencia en $\mathscr{E}$ es la de convergencia uniforme sobre compactos de la función y de todas sus derivadas. Precisemos: si $\{\varphi_j : j > 1\} \subset \mathscr{E}$ y $\varphi \in \mathscr{E}$, entonces $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{E}} \varphi$ cuando $j \to \infty$ si y solo si, para todo $m \geq 0$ $\frac{d^m \varphi_j}{dt^m} \xrightarrow{K} \frac{d^m \varphi}{dt^m}$, $j \to 0$ uniformemente para todo compacto K en $\mathbb{R}$. Entre las funciones de $\mathscr{E}$ hay algunas que decrecen muy rápidamente en el infinito, como por ejemplo $\varphi(t) = e^{-t^2}$. La subclase de funciones de $\mathscr{E}$ con esta propiedad se llama clase de funciones de prueba (test functions) de Schwartz y se denota por $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Precisemos: $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ es el subconjunto de todas las funciones φ de $\mathscr{E}$ tales que

$$t^k \frac{d^m \varphi(t)}{dt^m}$$

está acotada para toda elección de $k \geq 0$ y $m \geq 0$. Esta clase $\mathscr{S}$ ya no contiene a los polinomios, pero todavía contiene a las gaussianas. La convergencia en $\mathscr{S}$ de una sucesión $\{\varphi_j : j \geq 1\} \subset \mathscr{S}$ a una función $\varphi \in \mathscr{S}$ está dada por la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ de $t^k \frac{d^m \varphi_j}{dt^m}$ a $t^k \frac{d^m \varphi(t)}{dt^m}$ para toda elección de $k \geq 0$ y $m \geq 0$. La más pequeña de las clases de funciones de prueba que consideraremos será la subclase de aquellas funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, y se denota por $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. En $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ ya no están los polinomios ni las gaussianas. Una función típica en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ está dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{si } |t| < 1, \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

La convergencia de una sucesión $\{\varphi_j : j \geq 1\} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a una función $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ requiere la existencia de un compacto fijo K en $\mathbb{R}$ tal que contenga los soportes de todas las φ_j y de la φ de modo que

$$\frac{d^m \varphi_j}{dt^m} \underset{j\to\infty}{\overset{K}{\rightarrow}} \frac{d^m \varphi}{dt^m}$$

uniformemente para todo $m \geq 0$.
Estos tres espacios $\mathscr{E}, \mathscr{S}, \mathscr{D}$ son espacios vectoriales topológicos y satisfacen

$$\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E}$$

con las inclusiones continuas. Esto significa que si una sucesión converge en $\mathscr{D}$, entonces también converge en $\mathscr{S}$, y también lo hace en $\mathscr{E}$.
Volvamos un instante a la escala de los espacios de Lebesgue. Ya dijimos que $L^2(\mathbb{R})$ es el único entre ellos cuya norma viene dada por un producto escalar o interno.Y este hecho, fundamentalmente, es el que produce el principal resultado analítico: **el teorema de representación de Riesz**.
Recordemos que, dado un espacio vectorial V cualquiera, su dual algebraico es el espacio

$$V^* = \{L : V \to \mathbb{C} \mid L \text{ es lineal}\}.$$

Cuando V es de dimensión finita, todos los funcionales lineales $L : V \to \mathbb{C}$ son continuos. Cuando V es de dimensión infinita, esto ya no ocurre. Cuando V, además de vectorial, es topológico, se define su dual topológico

$$V' = \{L : V \to \mathbb{C} \mid L \text{ es lineal y continua}\}.$$

Con esta noción de dualidad que incluye la continuidad, el teorema de representación de Riesz recupera el resultado unidimensional,

$$(L^2(\mathbb{R}))' = L^2(\mathbb{R}).$$

Más precisamente, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $L_f(g) = \int_{\mathbb{R}} fg\,dt$ es lineal y continua, es decir, $L_f \in (L^2(\mathbb{R}))'$. Y, por otra parte, si $L \in (L^2(\mathbb{R}))'$, entonces existe una única $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $L = L_f$.
Este notable resultado de Riesz, que por una parte muestra que el espacio de Hilbert, digamos

L^2, tiene una dualidad como la del espacio euclídeo, por otra parte resulta un poco desalentador al momento de esperar que el dual de un espacio funcional contenga objetos menos clásicos o más generales. El desaliento se diluye ya en la dualidad de la escala de Lebesgue: el dual de L^p es L^q con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1<p<\infty$. Notemos que $p=q=2$ es el caso de Riesz, pero en general las funciones que están en L^q con q grande son mejores localmente que las funciones que están en L^p con $p=1+\varepsilon$, con $\varepsilon>0$ y chico. En algún sentido, la dualidad de los espacios de Lebesgue sugiere que si estamos dispuestos a tomar espacios de funciones buenas los **objetos** de su dual podrán ser **espacios desconocidos** en el reino de las funciones. Esta idea es la que explora L.Schwartz al desarrollar la teoría de las distribuciones. De esta forma si V es $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$ o $\mathscr{D}$ podemos considerar sus duales. Asi tenemos

$$\mathscr{E}' = \{T : \mathscr{E} \to \mathbb{C} \mid \text{ lineales y continuas}\}$$

Es decir, si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $\varphi,\psi \in \mathscr{E}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha\varphi+\beta\psi) &= \langle T, \alpha\varphi+\beta\psi\rangle \\ &= \alpha\langle T,\varphi\rangle + \beta\langle T,\psi\rangle \end{aligned}$$

y si $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{E}} \varphi$, $j\to\infty$, entonces

$$\langle T,\varphi_j\rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle T,\varphi\rangle \quad j\to\infty.$$

También

$$\mathscr{S}' = \{T : \mathscr{S} \to \mathbb{C} \mid \text{ lineales y continuas}\},$$

la continuidad de T en este contexto consiste en la convergencia de la sucesión numérica $\langle T,\varphi_j\rangle$ al número $\langle T,\varphi\rangle$ cuando $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$. Finalmente,

$$\mathscr{D}' = \{T : \mathscr{D} \to \mathbb{C} \mid \text{ lineales y continuas}\}$$

Aquí la continuidad significa que si $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, entonces $\langle T,\varphi_j\rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle T,\varphi\rangle$. Como las inclusiones $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$ son continuas, tenemos que

$$\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'.$$

Los elementos más generales, los de $\mathscr{D}'$, se llaman **distribuciones**. Los elemetos de $\mathscr{S}'$ se laman **distribuciones temperadas** o **atemperadas** y los de $\mathscr{E}'$ **son distribuciones de soporte compacto**. El primer objeto nuevo de la teoría es la delta de Dirac. En efecto, sea

$$\delta_0 : \mathscr{E} \to \mathbb{R} \text{ dada por}$$

$$\langle \delta_0,\varphi\rangle = \varphi(0).$$

Es claro que δ_0 resulta lineal en $\mathscr{E}$, ya que

$$\begin{aligned} \langle \delta_0, \alpha\varphi+\beta\psi\rangle &= (\alpha\varphi+\beta\psi)(0) = \alpha\varphi(0)+\beta\psi(0) \\ &= \alpha\langle\delta_0,\varphi\rangle + \beta\langle\delta_0,\psi\rangle. \end{aligned}$$

La prueba de la continuidad de δ_0 también es sencilla. En efecto, si $\{\varphi_k : k\geq 1\}$ es una sucesión en $\mathscr{E}$ tal que $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{E}} \varphi$ con $\varphi\in\mathscr{E}$, se tiene que para todo compacto K en $\mathbb{R}$ y todo

orden de derivación $m \geq 0$, $\frac{d^m \varphi_k}{dt^m} \xrightarrow{K} \frac{d^m \varphi}{dt^m}$ uniformemente sobre K. Tomando $K = \{0\}$ y $m = 0$ tenemos que $\varphi_k(0) \to \varphi(0)$ cuando $k \to \infty$. Entonces,

$$\langle \delta_0, \varphi_k \rangle = \varphi_k(0) \to \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

lo que prueba la continuidad de δ_0 como aplicación de $\mathscr{E}$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\delta_0 \in \mathscr{E}'$ es una distribución de soporte compacto.
Toda función de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ define una distribución en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ por

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\, dt.$$

Es sencillo probar que T_f es una distribución en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Dada una distribución T, se dice que T es una función si y sólo si existe $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tal que $T = T_f$, y está dada por la definición precedente. No es difícil ver que δ_0 no es una función.
Por lo tanto, en las clases $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ hay **objetos** nuevos que no son funciones, pero también están las funciones localmente integrables. Aunque las deltas de Dirac $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad a \in \mathbb{R}$, no son funciones, son las más parecidas a funciones en el sentido de que son de orden cero. Esto se relaciona con el $m = 0$ que hemos tomado al probar la continuidad de δ_0. Todas las distribuciones tienen, a diferencia de las funciones, derivadas de todos los órdenes, dadas por

$$\left\langle \frac{d^m T}{dt^m}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle T, \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Es fácil probar que si $T = T_f$ con $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, entonces la derivada de T es la clásica. Precisamente $\frac{d^m T_f}{dt^m} = T_{\frac{d^m f}{dt^m}}$. Por ejemplo, $\left\langle \frac{d\delta_a}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \delta_a, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = -\frac{d\varphi}{dt}(a)$. Esta derivada de δ_a es un buen modelo para un dipolo eléctrico puntual en a. Para nuestros propósitos centrales en esta tesis, en el momento de definir y aplicar las técnicas de Phase Lag Index, una distribución de Schwartz que no es de orden cero será central. Se trata de la distribución **valor principal de** $\frac{1}{t}$, denotada por v.p.$\frac{1}{t}$. Notemos en primer lugar que la función $g(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}$, no es localmente integrable, ya que no es integrable en ningún intervalo que contenga el origen. Sin embargo, explotando su simetría, sí define una distribución. Dada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, se tiene que $\left\langle \text{v.p.}\frac{1}{t}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$.
El papel central de esta distribución en la construcción de la cantidad que medirá la diferencia de fases entre señales provenientes de distintas regiones cerebrales medidas por medio de EEG o MEG, el PLI, y el propio papel central que tendrá el PLI en la generación de los cuantificadores centrales asociados a la construcción de grafos e hipergrafos de conectividad, hacen necesario más que conveniente comprender, aunque sea brevemente, por qué $\left\langle \text{v.p.}\left(\frac{1}{t}\right), \varphi \right\rangle$ está bien definida y por qué es una distribución. Tomemos $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Como φ es de soporte compacto, existe $R > 0$ tal que el soporte de φ, definido como la clausura del conjunto donde $\varphi(t) \neq 0$, estará contenido en $[-R, R]$. Sea, en principio, $\varepsilon > 0$ fijo y miremos la correspondiente truncación, observando que la función

$$\frac{1}{t} \cdot \chi_{\{\mathscr{E} < |t| \leq R\}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } \mathscr{E} < |t| \leq R \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

está acotada y es integrable. Pero además, es impar. Por lo tanto, $\int_{\mathscr{E}<|t|\leq R} \frac{1}{t}\,dt = 0$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt &= \int_{\varepsilon<|t|\leq R} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt - \int_{\varepsilon<|t|\leq R} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt \\ &= \int_{\varepsilon<|t|\leq R} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Si ahora usamos el criterio de Cauchy (toda sucesión de Cauchy o fundamental es convergente) y tomamos $\alpha\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|t|>\varepsilon_1} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt - \int_{|t|>\varepsilon_2} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right| \\ &= \left|\int_{\varepsilon_1<|t|\leq\varepsilon_2} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt\right| \\ &\leq \left|\int_{\varepsilon_1<|t|\leq\varepsilon_2} \frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{|t|}\,dt\right|\end{aligned}$$

Ahora usaremos el teorema del valor medio, y como $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, resulta que sus derivadas, en particular la de primer orden, está acotada. Por consiguiente
$|\varphi(t)-\varphi(0)| \leq \left\|\frac{d\varphi}{dt}\right\|_\infty |t-0| = \left\|\frac{d\varphi}{dt}\right\|_\infty |t|$ Entonces

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|t|>\varepsilon_1} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt - \int_{|t|>\varepsilon_2} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right| \\ &\leq \left\|\frac{d\varphi}{dt}\right\|_\infty \int_{\varepsilon_1<|t|\leq\varepsilon_2} \frac{|t|}{|t|}\,dt = 2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\left\|\frac{d\varphi}{dt}\right\|_\infty\end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $\varepsilon_2 \to 0$, con $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, por el Criterio de Cauchy, resulta la existencia del límite que define a $\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t}, \varphi \right\rangle$. Las propiedades básicas de límites e integrales como operaciones lineales, nos permiten ver sin dificultad que v.p. $\frac{1}{t}$ es lineal en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Es decir, si α y β son escalares y φ y ψ son funciones test, entonces

$$\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t}, \alpha\varphi+\beta\psi \right\rangle = \alpha\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t}, \varphi \right\rangle + \beta\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t}, \psi \right\rangle.$$

Por otra parte, la continuidad de la aplicación v.p. $\frac{1}{t} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ se prueba con argumentos similares a los de existencia. En efecto, sea $\{\varphi_j : j \geq 1\}$ una sucesión en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ cuando $j \to \infty$. Notemos que, para un operador lineal en un espacio vectorial topológico, basta probar su continuidad en $\varphi = 0$ para tenerla en todas partes. Entonces, existe un compacto $K \subset \mathbb{R}$, o si se quiere un intervalo de la forma $[-R,R]$, dentro del cual están contenidos todos los soportes de las φ_j, y además $\frac{d^m\varphi_j}{dt^m} \xrightarrow{K} 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t}, \varphi_j \right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi_j(t)}{t}\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|t|\leq R} \frac{\varphi_j(t)}{t} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|\leq R} \frac{\varphi_j(t)-\varphi_j(0)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Por consiguiente, usando el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t},\varphi_j\right\rangle\right| &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|\leq R}\left|\frac{\varphi_j(t)-\varphi_j(0)}{t}\right|dt\\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|\leq R}\frac{\left|\frac{d\varphi_j}{dt}(\xi_j)\right|\cdot|t-0|}{|t|}dt\\ &\leq \left\|\frac{d\varphi_j}{dt}\right\|_\infty 2R,\end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $j\to\infty$, ya que $\frac{d\varphi_j}{dt}$ converge uniformemente a cero cuando j tiende a infinito por la convergencia en $\mathscr{D}$ de la sucesión $\{\varphi_j\}$ a la función identicamente nula. Observemos que, a diferencia de lo que ocurre con la distribución de Schwartz inducida por funciones, o aun para la δ de Dirac, que en la prueba de la continuidad solo requiere la convergencia uniforme de las funciones test, para el caso de la distribución valor principal de $\frac{1}{t}$ hemos usado la convergencia uniforme de las derivadas primeras de las funciones prueba.

1.2.3. Fourier, Laurent, filtrado de señales y la transformada Z

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable, es decir, $f\in L^1(\mathbb{R})$, entonces su trasformación o transformada de Fourier es la función que en general toma valores complejos, dada por

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\xi t}\,dt.$$

La diversidad de notaciones para f y $\hat{f}$ en la literatura es enorme usaremos ésta al menos en los aspectos teóricos. La **nueva** variable ξ es la **frecuencia**. La **vieja** t es el **tiempo**, en señales del tipo EEG o MEG. Notemos que $\hat{f}(\xi)$ es continua, acotada y que tiende a cero cuando $|\xi|\to\infty$. Este resultado se conoce con el nombre de Lema de Riemann-Lebesgue, y permite probar que $\hat{f}$ también es uniformemente continua. La clase $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de funciones φ infinitamente diferenciables con decaimientos rápidos en el infinito $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|t^k\frac{d^m\varphi}{dt^m}(t)\right|\leq C_{k,m}$ para todo k y m enteros no negativos, ésta contenida en $L^1(\mathbb{R})$. Además$\widehat{\ }:\mathscr{S}(\mathbb{R})\to\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Es decir, la transformada de Fourier es un isomorfismo continuo en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Su inversa está dada por

$$\check{\varphi}(t)=\int_{\xi\in\mathbb{R}}\varphi(\xi)e^{2\pi it\xi}\,d\xi.$$

La continuidad de $\wedge$ y $\vee$ está dada en términos de la convergencia que las seminorma $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|t^k\frac{d^n\varphi}{dt^n}(t)\right|$ definen en $\mathscr{S}$. Desde el punto de vista de la aplicación de la transformada de Fourier al análisis de señales, su importancia está en su uso para limpiar y filtrar señales. Supongamos que tenemos $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ y que sabemos que está **contaminada** por señales espurias, debidas, por ejemplo, a la fuente de alimentación eléctrica y que hay un intervalo de frecuencias alrededor de $\xi=50$ ciclos por segundo que necesitamos eliminar de φ para tener una señal que represente realmente el fenómeno que pretendemos observar. Entonces tomamos una ventana $\eta(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, por ejemplo, una función $\mathscr{C}^\infty$ con soporte compacto alrededor de ξ_0. Ver Figura 1.1

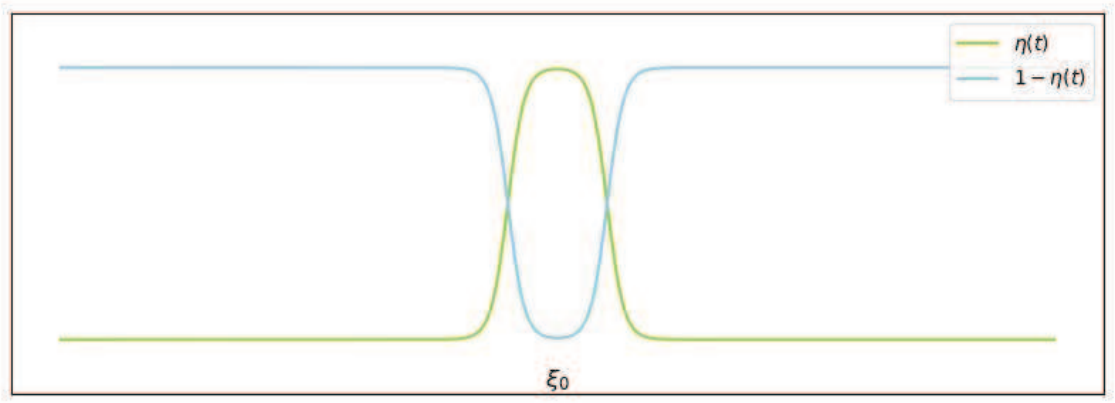


Figura 1.1: Representacion gráfica de la ventana $\eta(\xi)$

y hacemos $\tilde{\varphi}(t) = [(1-\eta(\xi))\hat{\varphi}(\xi)]^{\vee}(t)$ la nueva señal $\tilde{\varphi}$ está libre de las frecuencias alrededor de ξ_0, pero tendrá por lo demás las mismas componentes frecuenciales que la señal original $\varphi(t)$. Por otra parte, si $\eta(\xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = \{\eta \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}) : \operatorname{sop}\eta \text{ es compacto}\}$, entonces $\check{\eta}(t)$, la antitransformada de η, ésta $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ y resulta ser una función analítica. Por el teorema de la convolución para la antitransformada de Fourier, resulta que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t) &= \left((1-\eta)^{\vee} * \varphi\right)(t) \\ &= \left(\delta_0 - \eta^{\vee}\right) * \varphi(t) \\ &= \delta_0 * \varphi(t) - \check{\eta} * \varphi(t) \\ &= \varphi(t) - \eta^{\vee} * \varphi(t)\end{aligned}$$

donde δ_0 es la delta de Dirac en el origen $t = 0$, y hemos usado que $\delta_0 * \varphi = \varphi$, ya que δ_0 es la identidad para la operación de convolución. Es decir, el filtrado de φ en ese intervalo alrededor de ξ_0 consiste en sacarle a φ la función $(\check{\eta} * \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} \check{\eta}(t-s)\varphi(s)\,ds$.
Resulta claro que trabajar a nivel frecuencial es más simple, ya que solo se trata de multiplicar por una función adecuada $1-\eta$, que elimina las frecuencias que se desean sacar de la señal φ. No obstante, la versión convolutiva de la misma operación tiene sus ventajas teóricas.
Para formalizar adecuadamente el planteo de la discretización de una señal analógica y su posterior filtrado, hacemos un repaso breve de las propiedades de las deltas de Dirac, entendidas como distribuciones de Schwarz. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, la delta de Dirac δ_{t_0} es la distribución que actuando sobre una función test φ, nos devuelve su valor en t_0. Precisamente $\delta_{t_0} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ está dada $\langle \delta_{t_0}, \varphi \rangle = \varphi(t_0)$. Las distribuciones en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, como lo es cualquier delta de Dirac, tienen bien definida, como distribución en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ su transformada de Fourier. Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$. Para el caso $T = \delta_{t_0}$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\delta_{t_0}}, \varphi \rangle = \langle \delta_{t_0}, \widehat{\varphi} \rangle &= \widehat{\varphi}(t_0) \\ &= \int_{t\in\mathbb{R}} e^{-2\pi i t_0 t}\varphi(t)\,dt = \langle e^{-2\pi i t_0 \cdot}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

En otras palabras, aunque δ_{t_0} no es una función en el sentido clásico, su transformada de Fourier es una función $\mathscr{C}^{\infty}$ que toma valores sobre la circunferencia unitaria del plano complejo;

$$\widehat{\delta}_{t_0}(\xi) = e^{-2\pi i t_0 \xi}$$

si ξ es real.
Supongamos ahora que tenemos una señal analógica $\varphi(t)$, a la que estamos discretizando

con un paso temporal $\tau > 0$.
Entonces, podemos usar una suma de deltas de Dirac en la grilla de puntos de paso τ para escribir la discretización de φ con un nivel τ. Ver Figura1.2

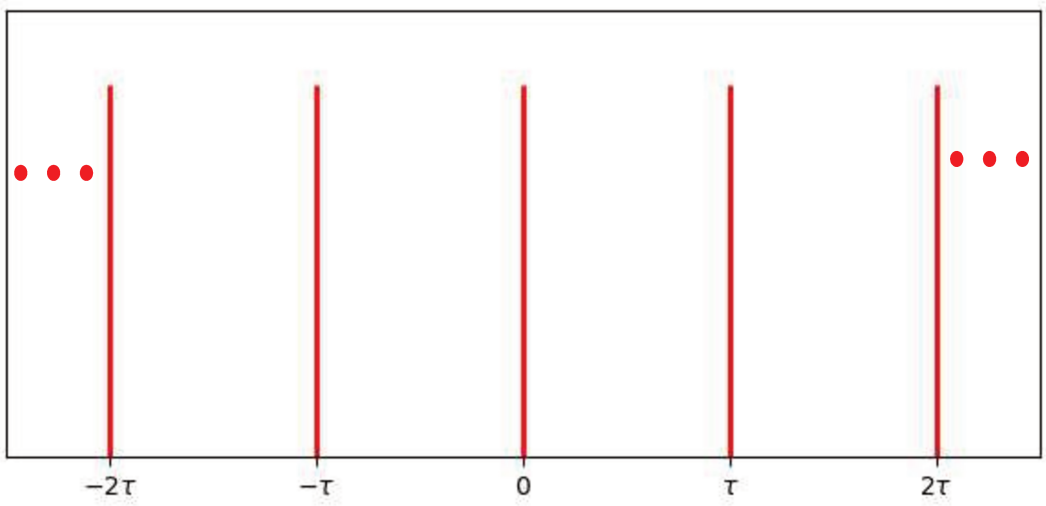


Figura 1.2: Deltas de Dirac en la grilla de puntos de paso τ

Sea $\delta^\tau = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\tau k}$. Entonces, una manera distribucional de discretizar $\varphi(t)$, sin necesidad de abandonar el continuo en el que estamos trabajando con señales que son *a priori* analógicas consiste en multiplicar δ^τ por φ. En general, dada una distribución T de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y una función test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, podemos definir una nueva distribución en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, a la que denotamos φT, dada por $\langle \varphi T, \psi\rangle = \langle T, \varphi\psi\rangle, \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Notar que, como $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, resulta que ψ puede ser más general en el sentido de su decaimiento en el infinito. Para discretizar φ en la grilla de paso τ, podemos entonces tomar $\varphi_\tau = \tau\varphi\delta^\tau = \tau\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\delta_{\tau k}$. Así, como distribución, φ_τ tiene una transformada de Fourier que se calcula por definición así, para $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\varphi_\tau}, \psi\rangle &= \langle \varphi_\tau, \widehat{\psi}\rangle \\
&= \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \varphi\delta_{\tau k}, \widehat{\psi}\rangle \\
&= \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \delta_{\tau k}, \varphi\widehat{\psi}\rangle \\
&= \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\tau_k)\langle \delta_{\tau k}, \widehat{\psi}\rangle \\
&= \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\tau_k)\langle \widehat{\delta_{\tau k}}, \psi\rangle \\
&= \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\tau_k)\left\langle e^{-2\pi i\tau k\xi}, \psi(\xi)\right\rangle \\
&= \left\langle \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\tau_k) e^{-2\pi i\tau k\xi}, \psi(\xi)\right\rangle
\end{aligned}$$

para toda $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ entonces, de la igualdad, cualquiera sea la función de prueba ψ, entre el primer y el último término en las igualdades precedentes, tenemos que $\widehat{\varphi_\tau}$ es una distribución

en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ que es una función. Más aún, esta función es

$$\widehat{\varphi_\tau}(\xi) = \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\tau_k) e^{-2\pi i \tau k \xi}$$

Recordemos que no todos los autores usan el mismo signo para el exponente en la definición de transformada de Fourier de una señal analógica. Lo mismo ocurre con la transformada y con la antitransformada de Fourier de distribuciones de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Nosotros seguiremos usando el signo menos para la trasformada de Fourier. Notemos que podemos reescribir la transformada de Fourier de la discretización φ_τ de φ, que, si bien se sale del dominio funcional para devenir en una distribución de Schwartz, no abandona el dominio continuo de $\mathbb{R}$, en el que la señal analógica φ original está definida de la siguiente manera

$$\widehat{\varphi}_\tau(\xi) = \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\tau k)(e^{-2\pi i \tau \xi})^k,$$

y que el número complejo $e^{-2\pi i \tau \xi}$ pertenece a la circunferencia unitaria del plano complejo, es decir $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La transformada Z de la discretización φ_τ de φ es la extensión de la serie (formal ya que su dominio de convergencia depende formalmente de φ_τ) que tenemos para $\widehat{\varphi}_\tau$ a todo el plano complejo

$$\mathscr{Z}(\varphi_\tau)(z) = \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\tau k)\, z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Para aportar un tributo historico, digamos que la transformada $\mathscr{Z}$ debería llamarse *transformada de Laurent*, ya que, en general, la inclusión de potencias negativas de la variable compleja z produce funciones holomorfas definidas en anillos del plano complejo, cuyo desarrollo tiene la forma $\mathscr{Z}(\varphi_\tau)(z)$, con coeficientes $\{\tau\varphi(\tau k) : k \in \mathbb{Z}\}$.
Las series de Laurent se basan en la idea de mirar dos funciones analíticas:

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k = \sum_{k\geq 0} a_k z^k + \sum_{k>0} a_k - \zeta^k, \zeta = \frac{1}{z}$$

y estudiar sus radios de convergencia con los criterios clásicos de series de Taylor de potencias. Al mismo tiempo proveen fórmulas integrales que relacionan los coeficientes a_k con la función $f(z)$. Es conveniente tener en cuenta el siguiente resultado.

Teorema 1 (Teorema de Laurent)**.** *Sea $f(z)$ una función holomorfa en el anillo $A = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$. Entonces, si*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\, d\xi, \quad \text{con } R_1 < r < R_2 \text{ y } k \in \mathbb{Z}$$

se tiene que

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$$

con convergencia absoluta y uniforme en cualquier compacto contenido en el anillo A.

Para una prueba ver por ejemplo Ahlfors (Análisis Complejo).

1.3. Sistemas lineales invariantes por traslaciones y filtrado de señales. Respuesta a la δ y función de transferencia

Recordemos que con $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ denotamos el espacio de las distribuciones. Sea V un subespacio de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tal que la delta de Dirac δ esta en V, y que tiene la propiedad de ser cerrado por traslaciones.
Precisamos esta noción: si $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y $h \in \mathbb{R}$, σ_h de T es la distribución
$\langle \sigma_h T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(\cdot - h) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Decimos que V es cerrado por traslaciones cuando se cumple que $T \in V$ si y sólo si $\sigma_h T \in V$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

Definición 1. *Un **sistema lineal invariante por traslaciones** (SLIT) es un operador $L : V \to V$ tal que*

a) L es lineal;

b) $L(\sigma_h T) = \sigma_h L(T), \forall\, h \in \mathbb{R}$.

Como la distribución δ de Dirac está en V está bien definida $L(\delta)$.
La distribución $H = L(\delta)$ es la **respuesta al impulso** o **respuesta a la** δ. La **función (o espacio distribución) de transferencia del filtro asociada a** L es la transformada de Fourier $\widehat{H}$ de H. Los operadores invariantes por traslaciones son, en general, operadores de convolución, y están dados por $L(T) = H * T$ ya que $L(\delta) = H * \delta = H$,, pues δ es la identidad para la convolución. En otras palabras un filtro es un operador L de convolución con función de trasferencia $H = L(\delta)$. El **teorema de la convolución** nos permite ver el filtrado que és la acción de un operador L, de una manera más simple,

$$(L(T))^{\wedge} = \widehat{H} \cdot \widehat{T}.$$

Que en el nivel de señales discretizadas con paso de discretización τ, puede escribirse en términos de la transformada Z. Para una señal analógica φ

$$Z(L(\varphi_\tau))(z) = Z(H_\tau)(z) \cdot Z(\varphi_\tau)(z).$$

Filtrar, desde el punto de vista práctico consiste en encontrar un operador L cuya respuesta al impulso sea H, de manera que dada T como la señal de entrada puede lograrse una salida S. La última fórmula se escribirse de manera sintética como $Z(S) = Z(H) \cdot Z(T)$ como una relación entre funciones holomorfas en alguna región del plano complejo.
En estos términos, el problema se reduce formalmente a un problema de división

$$Z(H) = \frac{Z(S)}{Z(T)}$$

y esta ecuación proverá, de resolverse, los coeficientes h en la grilla de paso τ.
La formulación del filtrado como una operación de división de funciones holomorfas en el plano complejo adquiere su dimensión operacional cuando usamos algoritmos bien conocidos de división de polinomios, que nos permiten construir filtros que atenúan ciertas frecuencias y dejan pasar, o aun enfatizan, otras.
En el desarrollo posterior de la tesis usaremos usaremos en particular dos estrategías de filtrado basadas en el análisis de Fourier. Para la eliminación del ruido eléctrico 50 ciclos por segundo aplicaremos los denominados filtros Nocht. Cuando necesitamos analizar distintos rangos de frecuencias de señales de EEG y Meg usaremos, en vez, filtros para banda como los descriptos en la subsección 1.2.3.

1.4. El espacio de Paley–Wiener

Una clase especial de funciones son las que tienen banda limitada, es decir, cuya transformada de Fourier tiene soporte compacto. En una dimensión, dado un número $\Omega > 0$, definimos el espacio de las señales analógicas PW_Ω, de Paley–Wiener con ancho de banda 2Ω, como el siguiente subconjunto de las funciones cuadrado integrable en $\mathbb{R}$

$$PW_\Omega = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) : \text{soporte}(\widehat{g}) \subseteq [-\Omega, \Omega] \right\}.$$

Recordemos que el soporte de una función es la clausura de su conjunto de no anulación,

$$\text{soporte}\widehat{g} = \overline{\{\xi \in \mathbb{R} : \widehat{g}(\xi) = 0\}},$$

donde la barra superior denota la clausura.
Cuando se trabaja con señales analógicas de banda limitada y se las debe discretizar con un paso constante, resulta importante conocer o predecir la pérdida de información que implica el proceso de discretización. Hay resultados notables, conocidos como **Teoremas de muestreo**, atribuidos a Shannon y Nyquist, con antecedentes en Paley, Wiener, Zygmund y otros, que prueban que, si se tiene cuidado en la elección del paso temporal τ en relación con el ancho de banda de la señal 2Ω, entonces no hay pérdida de información en el muestreo.

Teorema 2 (Teorema de Shannon)**.** *Sea $f \in PW_\Omega$, con $\Omega > 0$. Entonces,*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\Omega}\right) \operatorname{sinc}\pi\left(2\Omega t - k\right)$$

en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Como $f \in PW_\Omega$, entonces su transformada de Fourier $\widehat{f}$ tiene soporte compacto contenido en el intervalo $[-\Omega, \Omega]$. Por consiguiente, $\widehat{f}$ se puede desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $[-\Omega, \Omega]$. Sea

$$c_k(\widehat{f}) = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(s)\, e^{-2\pi i s \cdot \frac{k}{2\Omega}}\, ds \;\text{ el k-ésimo coeficiente de Fourier de} \widehat{f}.$$

Entonces

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\widehat{f})\, e^{2\pi i \xi \cdot \frac{k}{2\Omega}}.$$

Notemos que $c_k(\widehat{f}) = \frac{1}{2\Omega} \overset{\vee}{\hat{f}}\left(-\frac{k}{2\Omega}\right) = \frac{1}{2\Omega} f\left(-\frac{k}{2\Omega}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i t \xi}\, d\xi = \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i t \xi}\, d\xi \\
&= \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\widehat{f}) e^{2\pi i \xi \cdot \frac{k}{2\Omega}} \right) e^{2\pi i \xi t}\, d\xi \\
&= \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\Omega} f\left(-\frac{k}{2\Omega}\right) e^{2\pi i \xi \cdot \frac{k}{2\Omega}} \right) e^{2\pi i t \xi}\, d\xi \\
&= \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\Omega} f\left(\frac{k}{2\Omega}\right) e^{-2\pi i \xi \cdot \frac{k}{2\Omega}} \right) e^{2\pi i t \xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\Omega}\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i \xi \left(t - \frac{k}{2\Omega}\right) \xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\Omega}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\pi\left(2\Omega t - k\right)\right)
\end{aligned}$$

La convergencia tiene lugar en L^2, y se tiene la fórmula para la norma $L^2(\mathbb{R})$ que se deduce inmediatamente de las fórmulas explícitas para los coeficientes $c_k(\widehat{f})$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\Omega}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|f\left(\frac{k}{2\Omega}\right)\right|^2$$

□

Notemos que, como $\widehat{f}$ tiene soporte compacto, entonces $f = \overset{\vee}{\widehat{f}}$ es continua, y los valores $f\left(\frac{k}{2\Omega}\right)$ están bien definidos. El número 2Ω se llama la **tasa de muestreo de Nyquist**.
La tasa de muestreo de Nyquist es un límite para la frecuencia de muestreo. Si se toman más muestras de f que las estrictamente necesarias, la fórmula sigue valiendo y puede mejorarse obteniendo, en vez de la función $\mathrm{sinc}(x)$ en la fórmula de reconstrucción, funciones con mucho mayor decaimiento en el infinito. En términos de espacios funcionales de la teoría de distribuciones, tendremos que, en vez de la función sinc, será posible poner una función de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Veamos esta extensión del Teorema de Shannon.

Teorema 3. *Sea $\Omega > 0$ y $f \in PW_\Omega$. Sea $\widetilde{\Omega} > \Omega$. Tomemos $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que vale idénticamente uno en el intervalo $[-\Omega, \Omega]$ e idénticamente cero fuera de $(-\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega})$.*

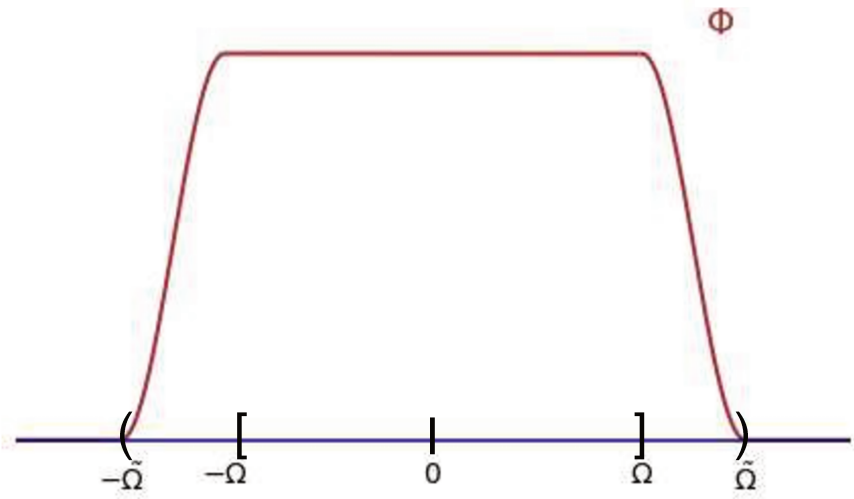


Figura 1.3: Representación gráfica de la función Φ

Entonces,

$$f(t) = \frac{1}{2\widetilde{\Omega}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\widetilde{\Omega}}\right)\overset{\vee}{\Phi}\left(t - \frac{k}{2\widetilde{\Omega}}\right)$$

Demostración. Como $\Phi \equiv 1$ sobre el soporte de $\widehat{f}$, por estar $f \in PW_\Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i t\xi}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i t\xi}\, d\xi \\
&= \int_{-\widetilde{\Omega}}^{\widetilde{\Omega}} \Phi(\xi) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\widehat{f})\, e^{2\pi i \xi \cdot \frac{k}{2\widetilde{\Omega}}} \right) e^{2\pi i t\xi}\, d\xi \\
&= \int_{-\widetilde{\Omega}}^{\widetilde{\Omega}} \Phi(\xi) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\widetilde{\Omega}} f\left(-\frac{k}{2\widetilde{\Omega}}\right) e^{2\pi i \left(t+\frac{k}{2\widetilde{\Omega}}\right)\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\widetilde{\Omega}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(-\frac{k}{2\widetilde{\Omega}}\right) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi)\, e^{2\pi i \left(t+\frac{k}{2\widetilde{\Omega}}\right)\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\widetilde{\Omega}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{j}{2\widetilde{\Omega}}\right) \overset{\vee}{\Phi}\left(t - \frac{j}{2\widetilde{\Omega}}\right)
\end{aligned}$$

Como $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, se tiene que $\overset{\vee}{\Phi}$ también está en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ y, por lo tanto, $\overset{\vee}{\Phi}$ decae, rápidamente junto con todas sus derivadas en el infinito. □

1.5. La transformada de Hilbert

En la Sección 1.2 hemos introducido una distribución de Schwartz que resultará importante para el cálculo y la definición precisa del Phase Lag Index. La distribución que consideramos es el valor principal de $\frac{1}{t}$.

Recordemos que $\langle \text{v.p.}\frac{1}{t}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$, donde φ es una función test que puede tomarse en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. La transformada de Hilbert de una señal $\psi(t)$ es la convolución v.p. $\frac{1}{t} * \psi$. Precisemos esto. Definamos

$$\begin{aligned}
H\psi(t) &= (\text{v.p.}\frac{1}{t} * \psi)(t) \\
&= \left\langle \text{v.p.}\frac{1}{s}, \psi(t+s) \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|s|>\varepsilon} \frac{\psi(t+s)}{s}\, ds = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|\sigma-t|>\varepsilon} \frac{\varphi(\sigma)}{t-\sigma}\, d\sigma
\end{aligned}$$

Con este formato para la transformada de Hilbert de una señal φ, es difícil interpretar el significado del operador H. Hay muchas maneras de determinar la acción de H en una señal φ. Dos de ellas nos interesan especialmente. Una por el significado analítico de H y la otra por su versatilidad computacional. La primera tiene que ver con la conjugación de una función armónica para obtener la armónica conjugada que satisface el sistema de Cauchy-Riemann, y con ella una función analítica en el semiplano complejo $\{z \in \mathbb{C} : z = x+iy,\, y > 0\}$. La segunda se basa en la fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier de una convolución en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

La función $\frac{i}{\pi}\frac{1}{z} = g(z)$ es analítica en el semiplano superior $\{z : y > 0\}$. Puesto que $g(z) = \frac{i}{\pi}\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2} =: P_y(x) + iQ_y(x)$. Notemos que para $y > 0$ fijo, tenemos

$$\int_{x\in\mathbb{R}} P_y(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\frac{x}{y})^2 + 1}\, dx = 1.$$

y, como Q_y es impar como función de x, tenemos que $\int_{\mathbb{R}} Q_y(x)\,dx = 0$.
$P_y(x)$ es el núcleo de Poisson y $Q_y(x)$ es su conjugado. Si φ es una señal dada en $\mathbb{R}$, su extensión armónica al semiplano $\{z : y > 0\}$ está dada por $(P_y * \varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{z\in\mathbb{R}} \frac{y}{(x-z)^2+y^2}\,\varphi(z)dz = u(x,y)$. La función $v(x,y) = (Q_y * \varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{z\in\mathbb{R}} \frac{x-z}{(x-z)^2+y^2}\,\varphi(z)\,dz$ es armónica conjugada de u,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

y entonces $F(z) = F(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica. Notemos que cuando y tiende a 0, se tiene que $u(x,y) \to \varphi(x)$ porque, $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} \to \delta_0$, $y \to 0$. Nos preguntamos si $v(x,y)$ converge a algo cuando $y \to 0^+$. Observemos que $Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2} \to \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x}$ si $y \to 0^+$. Por consiguiente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Si $u(x,y) = (P_y * \varphi)(x)$ y $v(x,y) = (Q_y * \varphi)(x)$, se tiene que $v(x,y) \to \frac{1}{\pi} H\varphi(x)$ cuando $y \to 0^+$, y $u(x,y) \to \varphi(x)$ cuando $y \to 0^+$.*

En otras palabras, la transformada de Hilbert de φ es el valor de borde de la conjugada armónica de la función armónica cuyo valor de borde es φ. Los núcleos P_y y Q_y tienen los siguientes aspectos

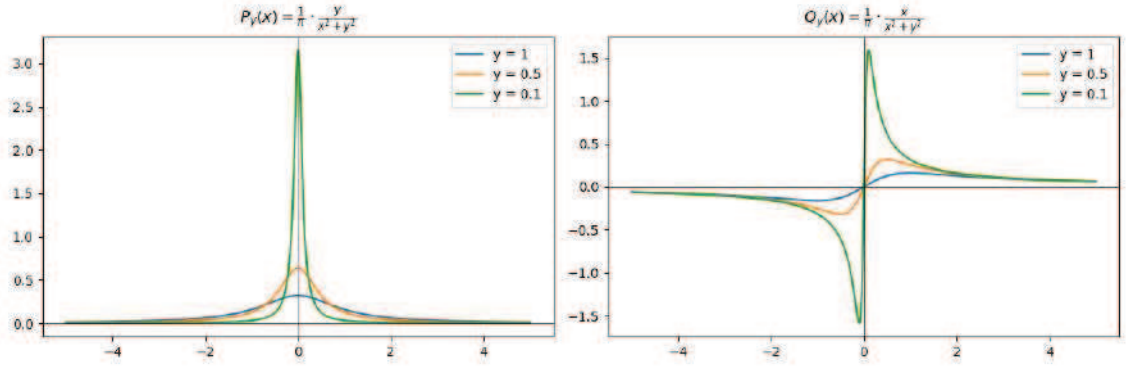


Figura 1.4: Representación gráfica de los núcleos P_y y Q_y para distintos valores de y

mientras que P_y converge a la delta de Dirac en cero, Q_y converge a $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x}$. Podríamos resumir el resultado de una manera un poco imprecisa pero ilustrativa, diciendo que, dada una función analítica $F(z)$ en el semiplano abierto $\mathrm{Im}(z) > 0$, el valor de borde de la parte imaginaria $\mathrm{Im}(z) = 0$ es la transformada de Hilbert del valor de borde de la parte real de $F(z)$.
Un ejemplo simple de esta situación, que nos permite entender la acción del operador de Hilbert H en funciones trigonométricas, es el siguiente. La función $F(z) = e^{iz}$ es entera. Es decir, es analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$. De modo que también es analítica en el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ y está definida en $\mathrm{Im}(z) = 0$. Notemos que

$$F(z) = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x),$$

por lo tanto, la restricción de $F(z) = F(x+iy)$ al eje x consiste en tomar $y = 0$ en esta fórmula

$$F(x+i0) = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x.$$

El valor de borde de la parte real de F es la función $\varphi(x) = \cos x$, y el valor de borde de la parte imaginaria de F es la función $\psi(x) = \operatorname{sen} x$. Por las consideraciones anteriores, aunque la función $\varphi(x) = \cos x$ no está en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ porque no decae en el infinito, resulta plausible que $\psi = H\varphi$. Es decir,

$$H(\cos)(t) = \operatorname{sen} t.$$

Si observamos que

$$\frac{H(\cos)(t)}{\cos t} = \operatorname{tg} t,$$

tenemos que $t = \operatorname{arctg} \frac{H(\cos)(t)}{\cos t}$. Este es un punto de partida para definir una fase instantánea de una señal.

Así, dada una función analítica $F(z) = F(t+iy)$, tendremos que la fase de $\operatorname{Re} F(t+i0) = \operatorname{Re} F(t)$ podremos definir su fase instantánea en el instante t como

$$\phi(t) = \operatorname{arctag} \frac{\operatorname{Im} F(t)}{\operatorname{Re} F(t)}.$$

Habíamos mencionado que entre varias maneras de interpretar y calcular $H\varphi$, nos referíamos especialmente a dos de ellas. Una es la mirada desde las funciones analíticas de variable compleja que acabamos de formular.

La otra, que será un insumo en el algoritmo de cálculo que usaremos en capítulos siguientes, se basa en el teorema de convolución para la transformada de Fourier. Ya que vimos que $H\varphi$ es una convolución, el hecho no estándar es que esa convolución involucra una distribución que no es función. Precisamente v.p. $\frac{1}{t}$.

Recordemos que, si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $T * \varphi$ es una función dada por

$$(T * \varphi)(t) = \langle T_s, \varphi(t-s) \rangle,$$

T_s significa que, para t fijo, la distribucion T actúa sobre la función de s dada por $\varphi(t-s)$. Entonces, si formalmente calculamos la transformada de Fourier de

$$(T * \varphi)(t)$$

y usamos propiedades sutiles de continuidad, podemos escribir

$$\begin{aligned}
(T*\varphi)^\wedge(\xi) &= \int_{t\in\mathbb{R}} (T*\varphi)(t)\, e^{-2\pi i t\xi}\, dt \\
&= \int_{t\in\mathbb{R}} \langle T_s, \varphi(t-s)\rangle\, e^{-2\pi i t\xi}\, dt \\
&= \left\langle T_s, \int_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t-s)\, e^{-2\pi i t\xi}\, dt \right\rangle \\
&= \left\langle T_s, \int_{u\in\mathbb{R}} \varphi(u)\, e^{-2\pi i (s+u)\xi}\, dk \right\rangle \\
&= \left\langle T_s, e^{-2\pi i s\xi} \right\rangle \widehat{\varphi}(\xi) \\
&= \widehat{T}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi).
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos el teorema que relaciona la transformada de Fourier con la convolución, aún para distribuciones. Entonces tendremos que

$$\begin{aligned}
\widehat{H\varphi}(\xi) &= (\text{v.p.}\, \tfrac{1}{t} * \varphi)^\wedge(\xi) \\
&= (\text{v.p.}\, \tfrac{1}{t})^\wedge(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi),
\end{aligned}$$

es decir, en el nivel de las frecuencias el operador $H\varphi$ es sencillo, consiste en multiplicar por $(\text{v.p.}\, 1/t)^\wedge(\xi)$. Hallemos entonces de esta trasformada de Fourier.

Proposición 2.

$$(\text{v.p.}\,\frac{1}{t})^\wedge(\xi) = -\frac{i}{\pi}\operatorname{sign}(\xi), \quad \xi \neq 0$$

Demostración. Observemos antes que v.p. $\frac{1}{t}$ es una distribución que no es una función. No obstante, el enunciado de la proposición incluye una afirmación implícita importante: la transformada de Fourier de v.p. $\frac{1}{t}$ sí, es una función y resulta una función de una estructura muy sencilla.
Está acotada, pero no es continua ni tiende a cero en el infinito. Esto es un reflejo del carácter no funcional de la distribución v.p. $\frac{1}{t}$.
Probar el enunciado consiste, entonces, en demostrar que para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ vale la igualdad

$$\left\langle \left(\text{v.p.}\,\frac{-i}{t}\right)^\wedge, \varphi \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\operatorname{sign}(x)\,dx.$$

Recordemos una fórmula que será útil en el cálculo. Se trata del valor de la integral impropia

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen} s}{s}\,ds = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\varepsilon<|s|<R} \frac{\operatorname{sen} s}{s}\,ds = \frac{1}{\pi}.$$

Usando la definición $\wedge$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, tomamos la integral para poder aplicar el teorema de Fubini y luego, usando la fórmula precedente y el hecho de que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, tenemos, usando también la imparidad de $\frac{1}{t}$, que

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)^\wedge, \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t}, \widehat{\varphi} \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\widehat{\varphi}(t)}{t}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\frac{1}{\varepsilon}>|t|>\varepsilon} \frac{\widehat{\varphi}(t)}{t}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\frac{1}{\varepsilon}>|t|>\varepsilon} \frac{1}{t}\left(\int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi i x t}\,dx\right)dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\left(\int_{\varepsilon<|t|<1/\varepsilon} \frac{\cos(2\pi x t)}{t} - i\frac{\sin(2\pi x t)}{t}\,dt\right)dx \\
&= -i \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\left(\int_{\varepsilon<|t|<1/\varepsilon} \frac{\sin(2\pi x t)}{2\pi x t}\cdot 2\pi x\,dt\right)dx \\
&= -i \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \int_{x\in\mathbb{R}^+} \varphi(x)\left(\int_{\varepsilon<|t|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin(2\pi x t)}{2\pi x t}\cdot 2\pi x\,dt\right)dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{x\in\mathbb{R}^-} \varphi(x)\left(\int_{\varepsilon<|t|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin(2\pi|x|t)}{2\pi|x|t}\cdot 2\pi|x|\,dt\right)dx \right\} \\
&= -i \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\left(\int_{2\pi|x|\varepsilon<s<\frac{2\pi|x|}{\varepsilon}} \frac{\sin s}{s}\,ds\right)\operatorname{sign}(x)\,dx \\
&= -\frac{i}{\pi}\int_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\operatorname{sign}(x)\,dx \\
&= \int \left(-\frac{i}{\pi}\operatorname{sign}(x)\right)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Por consiguiente, $(\text{v.p.}\,\frac{1}{t})^\wedge$ es la función $-\frac{i}{\pi}$signo.
Así escribimos

$$(\text{v.p.}\,\tfrac{1}{t})^\wedge(\xi) = -\frac{i}{\pi}\operatorname{sign}(\xi).$$

□

Habíamos visto que aplicar la transformada de Fourier a la transformada de Hilbert consiste en multiplicar $(\text{v.p.}\,\frac{1}{t})^\wedge(\xi)$ por la transformada de Fourier de la señal $\varphi(t)$, precisamente

$$\begin{aligned}\widehat{H\varphi}(\xi) &= \left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)^\wedge(\xi)\cdot\widehat{\varphi}(\xi)\\ &= -\frac{i}{\pi}\operatorname{signo}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

Resulta sorprendente la simplicidad de la acción de H vista desde las funciones, en comparación con la definición de H como valor principal de una integral. Pero además de dar un método sencillo de cálculo, la fórmula anterior revela algunas propiedades de H que son casi invisibles desde la definición.
Un ejemplo de esta situacion es el siguiente resultado

Proposición 3. *H se puede extender a un operador lineal y continuo de $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo. Más aún,*

$$\pi\|H\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2,$$

además, $\pi^2 H\circ H = -I$, donde I denota el operador identidad.

Demostración. Para $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi^2\|H\varphi\|_2^2 &= \pi^2\int_{\mathbb{R}}|H\varphi(x)|^2\,dx = \pi^2\int_{\mathbb{R}}|\widehat{H\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\\ &= \pi^2\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\left|\frac{-i}{\pi}\right|^2|\operatorname{sign}(\xi)|\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}}|\varphi(x)|^2\,dx = \|\varphi\|_2^2.\end{aligned}$$

Como $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ y H es lineal y continuo en el denso, admite una única extensión a $L^2(\mathbb{R})$, que sigue satisfaciendo las fórmulas $\pi\|H\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$ y $\widehat{H\varphi}(\xi) = -\frac{i}{\pi}\operatorname{sign}(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)$. Por lo tanto, $H^2 = H\circ H$ está bien definida en $L^2(\mathbb{R})$, y si transformamos Fourier, tendremos

$$\begin{aligned}\widehat{H\circ H\varphi}(\xi) &= -\frac{i}{\pi}\operatorname{sign}(\xi)\widehat{H\varphi}(\xi)\\ &= \left(-\frac{i}{\pi}\operatorname{sign}(\xi)\right)^2\widehat{\varphi}(\xi)\\ &= -\frac{1}{\pi^2}\widehat{\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

Pero, como la transformada de Fourier es inversible en $L^2(\mathbb{R})$, esta última fórmula implica que

$$H\circ H\,\varphi = \frac{1}{\pi^2}\varphi,$$

que es la tesis de la proposición. □

1.6. Fase instantánea de una señal

Supongamos, como ya hicimos en la sección anterior, que $F(z)$ es una función analítica en el semiplano complejo superior $\mathrm{Im}(z) > 0$. Supongamos también que, aun sin ser analítica, está también definida en el eje real $\mathrm{Im}(z) = 0$. Entonces, en cada punto del semiplano $\mathrm{Im}(z) > 0$, la función $F(z)$ está bien definida: $F(z) = \mathrm{Re}\,F(z) + i\,\mathrm{Im}\,F(z)$. En el abierto $\mathrm{Im}(z) > 0$, la analiticidad de $F(z)$, que implica la validez de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (CR), nos muestra inmediatamente que $\mathrm{Re}\,F(z)$ e $\mathrm{Im}\,F(z)$ están estrechamente vinculadas por

$$(CR)\begin{cases}\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,F}{\partial x} = \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,F}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,F}{\partial y} = -\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,F}{\partial x}\end{cases}$$

Si bien estas ecuaciones ya no valen ni tienen sentido en el eje x (esto es, cuando $\mathrm{Im}(z) = 0$), de todos modos existe una dependencia esencial entre $\mathrm{Re}\,F$ e $\mathrm{Im}\,F$. Justamente, $\mathrm{Im}\,F(x + i0) = H(\mathrm{Re}\,F(x + i0))$. Es decir, la transformada de Hilbert es el operador que las conecta. Una descripción polar de la función analítica $F(z)$ está dada por $F(z) = r(z)e^{i\phi(z)}$. La fórmula de cambio entre coordenadas cartesianas y polares nos permite obtener $r(z)$ y $\phi(z)$ de la manera usual

$$\begin{aligned} r(z) &= \sqrt{(\mathrm{Re}\,F(z))^2 + (\mathrm{Im}\,F(z))^2};\\ \phi(z) &= \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,F(z)}{\mathrm{Re}\,F(z)}\right). \end{aligned}$$

Cuando restringimos z a $\mathrm{Im}(z) = 0$, tenemos, con $z = t + i0$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A(t) &= r(t + i0),\\ \phi(t) &= \phi(t + i0) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,F(t)}{\mathrm{Re}\,F(t)}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, como ya vimos, dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, podemos construir una función analítica $F(z)$ tal que $\mathrm{Re}\,F(t) = \varphi(t)$. $\mathrm{Im}\,F(t) = H\varphi(t)$. De modo que la función $\phi(t)$ tiene una característica intrínseca de la señal original $\varphi(t)$: su fase en el instante t. Con notaciones más usuales en las aplicaciones a series temporales, escribiendo $x(t)$ en lugar de $\varphi(t)$, tenemos la siguiente definición

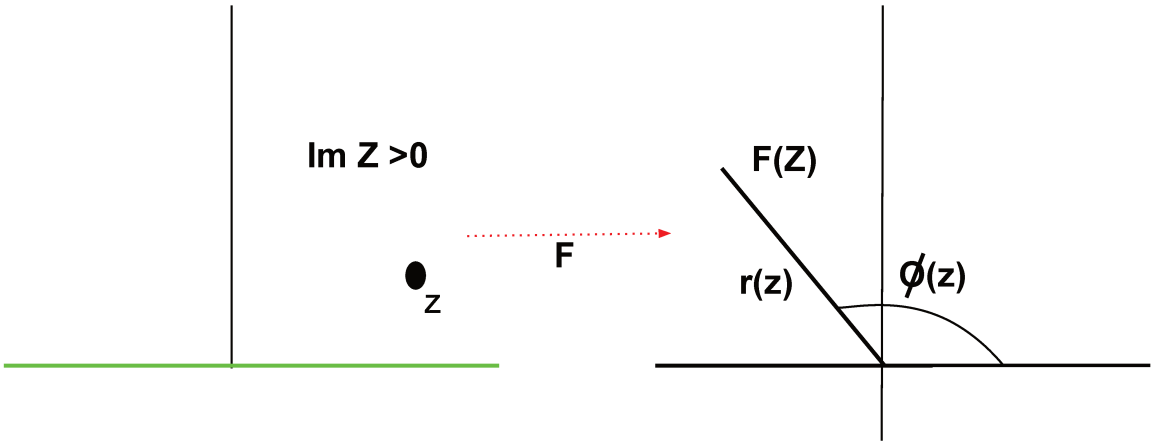


Figura 1.5: Representación gráfica de la construcción de la función analítica $F(z)$ a partir de $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$

Definición 2. *Si $x(t)$ es una señal en $L^2(\mathbb{R})$, la fase instantánea $\phi(t)$ de $x(t)$ está dada por*

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{Hx(t)}{x(t)}\right)$$

Observemos que la fase está bien definida, aunque $\frac{Hx(t)}{x(t)}$ sea infinito o menos infinito. La linealidad del operador de Hilbert hace que dos señales que solo difieran en su amplitud tengan la misma fase instantánea en todo instante. En efecto, si $x(t)$ es una señal dada y Θ es un número real no nulo, y tomamos $y(t) = \Theta x(t)$, entonces $\phi_x(t) = \phi_y(t)$, ya que

$$\phi_y(t) = \arctan\frac{Hy(t)}{y(t)} = \arctan\frac{\Theta Hx(t)}{\Theta x(t)} = \phi_x(t).$$

Esto permite comparar de manera esencial señales que tienen diferentes intensidades pero que guardan relaciones untrisecas importantes. El cálculo concreto que implementaremos nosotros cuando tengamos que calcular la fase instantánea de una señal $x(t)$ estará basado en la fórmula simple dada por la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert. El algoritmo consiste entonces, dada una señal $x(t)$, en calcular $\hat{x}(\xi)$, luego multiplicar $\hat{x}(\xi)$ por $-i\,\text{signo}(\xi)$, y luego aplicar la antitransformada de Fourier. Finalmente, dividir ese resultado por $x(t)$ y calcular el arcotangente. Dadas dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, podemos compararlas en relación con sus fases instantáneas.

Definición 3. *Sean x_1 y x_2 dos señales, funciones en $L^2(\mathbb{R})$. Sea $\phi_i(t)$ la fase instantánea de $x_i(t)$, $i = 1,2$, con $t \in \mathbb{R}$. La fase relativa instantánea de $x_1(t)$ con respecto a $x_2(t)$ es la diferencia*

$$\triangle(\phi_1,\phi_2)(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t).$$

Notemos que $\triangle(\phi_1,\phi_2)(t) = -\triangle(\phi_2,\phi_1)(t)$, y justamente la alternancia de los signos será una medida de comparación de x_1 y x_2 en intervalos temporales. Una representación útil y frecuentemente usada en las aplicaciones para la fase relativa instantánea entre dos señales analógicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se obtiene usando la exponencial compleja

$$E(\triangle(\phi_1,\phi_2))(t) = e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}$$

que devuelve la imagen angular para la diferencia de fases entre dos señales. En efecto, cuando en un instante t las dos señales están en fase o con fases muy cercanas, tendremos que $\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)$ será un número positivo o negativo, pero de valor absoluto muy pequeño, y por lo tanto el número complejo $e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}$ estará dentro de la circunferencia unitaria del plano complejo y muy cerca del número real 1. La figura 1.6 (b) muestra esta situación. Las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen fases muy parecidas en el instante t. Por otra parte, si la diferencia de fases $\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)$ fuera muy cercana a $\frac{\pi}{2}$, entonces $e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}$ será un número complejo cercano a la unidad imaginaria $i \in \mathbb{C}$. Esta situación se ilustra en la figura 1.6(a).

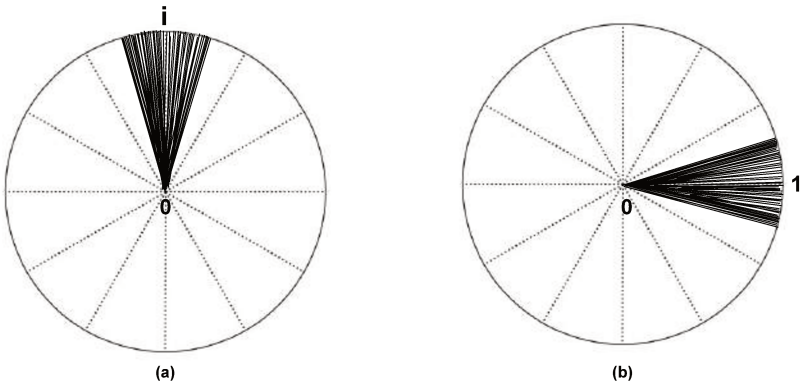


Figura 1.6: Relación entre las fases de dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. En (a), la diferencia de fases es cercana a $\frac{\pi}{2}$, por lo que $e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}$ es cercano a i. En (b), ambas fases son muy similares en el instante t.

La Figura 1.7 muestra un ejemplo particular de la situación expuesta para dos señales en fase y para dos señales en desfase

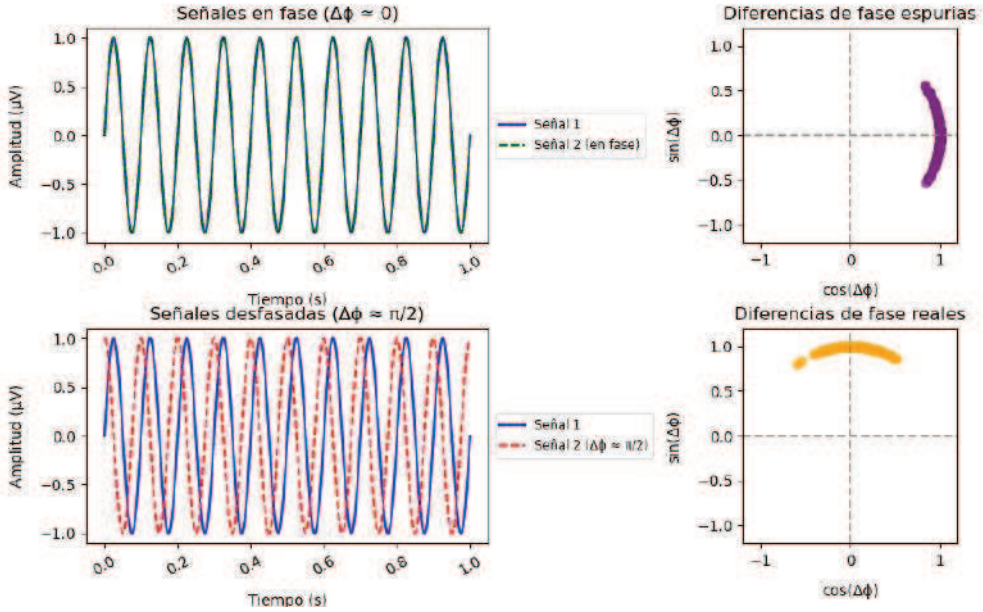


Figura 1.7: Visualización de señales sinusoidales y sus diferencias de fase. Panel superior izquierdo: señales en fase con diferencia de fase aproximada a cero ($\Delta\phi \approx 0$). Panel inferior izquierdo: señales desfasadas con diferencia de fase cercana a $\pi/2$ ($\Delta\phi \approx \pi/2$). Panel superior derecho: representación en el plano complejo de diferencias de fase espurias, distribuidas alrededor de cero. Panel inferior derecho: representación en el plano complejo de diferencias de fase reales, distribuidas alrededor de $\pi/2$.

Con este punto de vista, la comparación de dos señales para todos los instantes t de sus dominios temporales comunes puede usarse como una dinámica que transcurre en la circunferencia unitaria $|z| = 1$ del plano complejo. Cuando dos señales sean muy similares, esta dinámica tendrá lugar en los alrededores de $z = 1$.

1.7. Índice de desfasaje.

En inglés, PLI (*phase lag index*), en castellano ibérico *desfase*, en nuestro vocabulario técnico cotidiano *desfasaje*, refiere a la diferencia de fases entre dos señales [46, 47].Ya sabemos que esto es simple cuando se tienen señales trigonométricas puras, pero que requiere de la teoría de la transformada de Hilbert desarrollada hasta aquí para definir un concepto fino de fase de una señal en cada instante y, a partir de él, un concepto de fase relativa instantánea Entre dos señales. La fase de una señal analógica $x(t)$ en el instante t la denotamos con $\phi(t)$, y dadas dos señales $x_i(t)$, $i = 1, 2$, su fase relativa instantánea es $\triangle(\phi_1, \phi_2)(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$, con $\phi_i(t)$ la fase de $x_i(t)$. Estas magnitudes instantáneas son usadas para producir un índice global, no instantáneo, que mide las diferencias de fases de dos señales en intervalos temporales representativos de la dinámica global bajo análisis.

Definición 4. *Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales analógicas definidas en el intervalo I. El índice de desfasaje(ID) o Phase Lag Index (PLI) entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el intervalo temporal I esta dado por*

$$PLI_{1,2} = \left| \frac{1}{|I|} \int_I signo\Delta(\phi_1, \phi_1)(t)dt \right|.$$

Este promedio detecta si la fase de la señal x_1 y la fase de la señal x_2 muestran diferencias significativas y globales en el intervalo I. En la fórmula que define PLI_{12}, debemos entender que signo$\triangle$ es 1 si $\triangle$ es positivo, -1 si $\triangle$ es negativo y que signo $0 = 0$.
En la sección anterior habíamos visto que una manera útil visual y analítica de representar la fase relativa instantánea entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} E(\triangle(\phi_1,\phi_2))(t) &= e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)} \\ &= \cos\triangle(\phi_1,\phi_2)(t) + i\,\mathrm{sen}\,\triangle(\phi_1,\phi_2)(t) \\ &= \mathrm{Re}\; e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)} + i\,\mathrm{Im}\, e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}. \end{aligned}$$

En la gráfica de la Figura 1.8 se muestra la relación entre la función signo$(\triangle(\phi_1,\phi_2)(t))$ y la función signo $\mathrm{Im}\; e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}$.

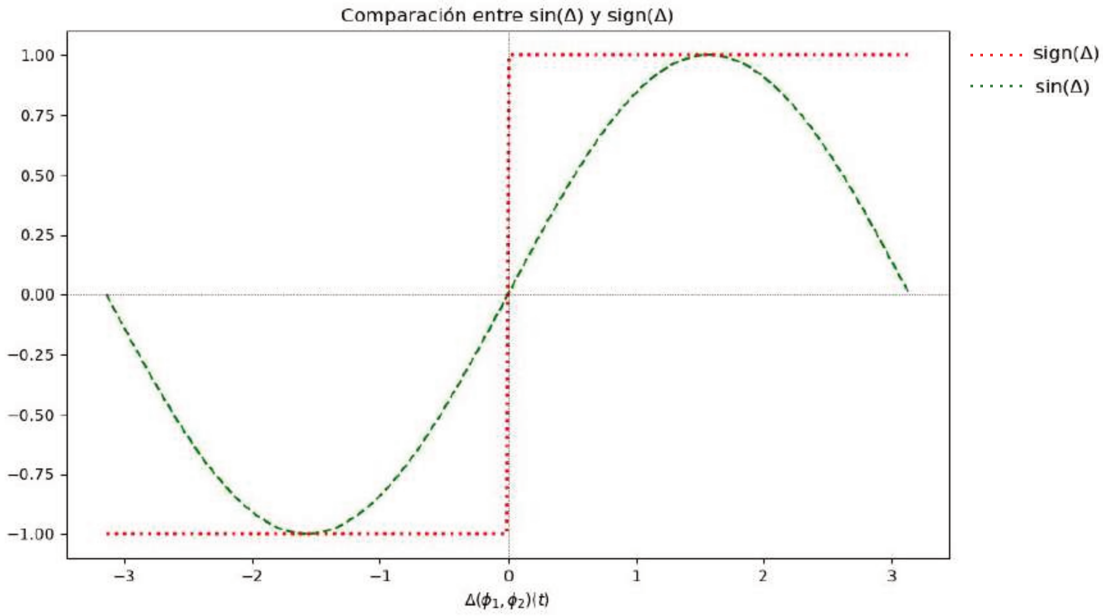


Figura 1.8: La linea punteada en color rojo representa a la vez a la función signo y a la función compuesta signo (seno).

La linea punteada representa a la vez a la función signo y a la función compuesta signo del seno. Entonces, tenemos la siguiente fórmula de cálculo de PLI_{12}

$$\mathrm{PLI}_{12} = \left| \frac{1}{|I|} \int_I \mathrm{signo}\,\mathrm{Im}\, e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}\, dt \right|$$

El cálculo aproximado e implementable computacionalmente consiste en discretizar la inte-

gral tomando N puntos $\{t_1,\ldots,t_N\}$ equiespaciados en el intervalo I y calcular

$$\begin{aligned}\mathrm{PLI}_{12} &= \left|\frac{1}{|I|}\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}\operatorname{signo}\operatorname{Im}e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t)}dt\right| \\ &\cong \left|\frac{1}{|I|}\sum_{j=1}^{N}\operatorname{signo}\operatorname{Im}e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t_j)}\frac{|I|}{N}\right| \\ &= \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\operatorname{signo}\operatorname{Im}e^{i\triangle(\phi_1,\phi_2)(t_j)}\right|\end{aligned}$$

donde $I=\bigcup_{j=1}^{N}I_j$, con $|I_j|=\frac{|I|}{N}$ y $t_j\in I_j$.
La noción de la sincronización de las señales resulta claramente formulable desde el concepto de la fase relativa instantánea entre esas señales. Dadas dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el mismo intervalo temporal I, si construimos las funciones analíticas $F_1(z)$ y $F_2(z)$ que ellas generan en el semiplano $\operatorname{Im}z>0$, y luego tomamos sus valores de borde para $\operatorname{Im}z=0$, sabemos que ellas estarán dadas por

$$\begin{aligned}F_1(t) &= x_1(t)+iHx_1(t) \quad \text{y} \\ F_2(t) &= x_2(t)+iHx_2(t)\end{aligned}$$

Donde H es la transformada de Hilbert. Si escribimos ambas en forma polar

$$\begin{aligned}F_1(t) &= A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \quad \text{y} \\ F_2(t) &= A_2(t)e^{i\phi_2(t)}\end{aligned}$$

y las normalizamos en amplitud, tenemos las dos partes angulares $\frac{F_j(t)}{A_j(t)}=e^{i\phi_j(t)}$, $j=1,2$, que son las que definen las fases como funciones definidas en el intervalo temporal I, que toman valores en la circunferencia unitaria S^1 del plano complejo $\mathbb{C}$. Recordemos que S^1 es un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}$, tenemos que es cerrado por potencias enteras, por lo tanto $(e^{i\phi_1(t)})^m$ y $(e^{i\phi_2(t)})^n$ también están en $\mathbb{S}^1$. Las señales están sincronizadas si existen m y n enteros tales que $m\phi_1(t)=n\phi_2(t)+c$, donde c es una constante independiente del tiempo. Por cierto, el caso más simple ocurre cuando $\phi_1=\phi_2$ para todo $t\in I$.
El índice de desfasaje entre dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ fue introducido por Stam et al. en [12] con el objetivo de detectar aspectos esenciales de conectividad entre ellas.
Cuando, en vez de dos señales, se tienen n señales $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ definidas en un mismo intervalo temporal I por ejemplo, las $x_j(t)$ podrían ser voltajes eléctricos en distintas regiones cerebrales de un mismo sistema bajo análisis, pueden calcularse las fases instantáneas $\phi_j(t)$ de cada $x_j(t)$, luego las fases relativas instantáneas $\Delta(\phi_j,\phi_k)(t)$ entre las señales $x_j(t)$ y $x_k(t)$, y finalmente el índice de desfasaje PLI_{jk} entre dichas señales x_j y x_k. Por otra parte, aunque $\Delta(\phi_j,\phi_k)(t)=-\Delta(\phi_k,\phi_j)(t)$, tenemos que

$$\frac{1}{|I|}\int_I\operatorname{signo}\Delta(\phi_j,\phi_k)(t)\,dt=-\frac{1}{|I|}\int_I\operatorname{signo}\Delta(\phi_k,\phi_j)(t)\,dt,$$

y entonces el valor absoluto será el mismo. Por lo tanto,$\mathrm{PLI}_{jk}=\mathrm{PLI}_{kj}$, es decir, la matriz PLI_{jk} es **simétrica**, y en su diagonal se cumple $\mathrm{PLI}_{jj}=0$.
La matriz PLI_{jk} registra la conectividad global del sistema, considerando las interacciones entre todos los pares de señales disponibles. Asi la matriz PLI_{jk} puede verse como un grafo simple no dirigido y ponderado. La ponderación de cada arista $\{j,k\}$ estará dada por el correspondiente PLI_{jk}.
Estas interacciones de a pares detectadas por el PLI será generalizada a interacciones de orden superior en los capitulos siguientes de esta tesis.

1.8. Electroencefalografía (EEG)

1.8.1. Historia del electroencefalograma (EEG)

La historia de la electroencefalografía (EEG) comenzó a finales del siglo XIX, cuando científicos como **Carlo Matteucci** y **Emil Du Bois-Reymond**, pioneros en el estudio de las señales eléctricas emitidas por los nervios musculares, sentaron las bases de la neurofisiología [48]. Sin embargo, el verdadero hito en la historia de la electroencefalografía se produjo en 1875, cuando **Richard Caton**, científico inglés, colocó electrodos sobre el cuero cabelludo en animales, registrando por primera vez la actividad eléctrica del cerebro [49].
Este experimento permitió captar la primera evidencia conocida sobre las oscilaciones eléctricas en el cerebro. Del análisis realizado sobre modelos animales reportó: *"Existen corrientes débiles de direcciones variables que pasan a través del multiplicador cuando los electrodos se colocan en dos puntos de la superficie externa, o un electrodo en la materia gris y otro en la superficie del cráneo. Además, la corriente por lo general está en constante fluctuación; el índice de oscilación es generalmente pequeño... En ocasiones, se observan grandes fluctuaciones, que en algunos casos coinciden con los movimientos musculares o cambios en el estado mental del animal."*
No fue sino hasta principios del siglo XX que estos estudios se realizaron en humanos, cuando en 1924 **Hans Berger** inició sus investigaciones sobre la actividad eléctrica cerebral, utilizando la técnica del EEG. Por medio de un galvanómetro de doble bobina, Berger pudo registrar las primeras señales EEG humanas y observar lo que hoy llamamos el ritmo alfa [50]. Sus investigaciones también incluyeron el análisis de trastornos cerebrales y el estudio del sueño, abriendo así el camino para el uso clínico y científico del EEG. En la década de 1930, el trabajo de Berger continuó desarrollándose, y fue pionero en el estudio de las alteraciones en el EEG asociadas con la hipoxia, el coma y la epilepsia [50].
Estos avances en el estudio de distintos procesos cognitivos le permitieron ser reconocido como el descubridor de las señales cerebrales humanas registradas mediante electroencefalografía.
En paralelo, otros investigadores como **Kornmüller** en Berlín mejoraron la precisión de las grabaciones de EEG, y se introdujeron nuevas herramientas como los amplificadores biológicos para registrar de manera más efectiva las señales eléctricas del cerebro [52].
En Inglaterra, **W. Gray Walter** contribuyó enormemente al avance de la electroencefalografía clínica, al descubrir los focos de actividad cerebral lenta, como las ondas delta, que fueron fundamentales para la comprensión de los trastornos neurológicos y el diagnóstico de anomalías cerebrales [51].
Por su parte, en Bruselas, **Frédéric Bremer** demostró cómo las señales aferentes (impulsos nerviosos que van desde los órganos sensoriales hacia el sistema nervioso central) influían en el estado de vigilia, profundizando el conocimiento sobre la relación entre la actividad cerebral y los estados de conciencia [53].
Hoy en día, el EEG sigue siendo una herramienta esencial tanto en la investigación como en la práctica clínica. Su capacidad para registrar la actividad eléctrica del cerebro con alta resolución temporal ha permitido avances en el diagnóstico de trastornos neurológicos como la epilepsia, los trastornos del sueño y diversas enfermedades neurodegenerativas [50].
A medida que las tecnologías y técnicas complementarias, como la magnetoencefalografía (MEG) y la resonancia magnética funcional (fMRI), continúan avanzando, el EEG mantiene su relevancia como una de las principales herramientas para la comprensión de la actividad cerebral y sus alteraciones.

1.8.2. Fundamentos de la EEG

La **electroencefalografía (EEG)** es una técnica no invasiva de alta resolucion temporal utilizada para estudiar **procesos cognitivos** como los procesos perceptivos, lingüísticos, emocionales, motores, entre otros, los cuales se caracterizan por ser rapidos, es decir la mayoría de ellos ocurren en decenas o cientos de milisegundos. Por lo que el EEG nos permite medir la actividad eléctrica involucrada en cada uno de estos procesos mediante la colocación de electrodos en el cuero cabelludo, permitiendo de esta manera capturar la dinámica cognitiva en la escala temporal correspondiente.[54, 47]. La unidad de medida de cada electrodo del EEG es volts(tipicamente microvolts o μV), el poténcial eléctrico es un valor relativo, de modo que el microvoltio registrado desde un electrodo es en realidad el cambio en el potencial eléctrico medido entre ese electrodo y un electrodo de referencia colocado en otro lugar de la cabeza. La información registrada refleja la actividad rítmica del cerebro, es decir, las oscilaciones, que corresponden a fluctuaciones en la excitabilidad de grupos de neuronas, más especificamente son una medida de las fluctuaciones en la actividad eléctrica dendrítica de poblaciones de neuronas, cuando cientos de miles de ellas están activas de manera sincronizada dentro de una poblacón total del orden de 100.000.000 neuronas. Algunas de estas oscilaciones son rápidas, otras lentas, y otras incluso muy lentas. Las oscilaciones simples se describen por la frecuencia, la potencia y la fase. La frecuencia es la velocidad de la oscilación y su unidad es el hertz (Hz), que indica cuántos ciclos por segundo ocurren y es la recíproca del período de tiempo que tarda una oscilación en completarse $f = \frac{1}{T}$ donde f es la frecuencia medida en Hertz (Hz) y T es el período de la oscilación, expresado en segundos. La potencia es la cantidad de energía presente en una banda de frecuencia específica, está relacionada con la amplitud de la oscilación, ya que se calcula como el cuadrado de la amplitud. Es decir, a mayor amplitud, mayor potencia. Si la señal oscilatoria es sensilla (movimiento armonico simple)se representa como una función seno de la forma

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi f t + \phi), \text{ medido en} \mu V$$

donde:

- $x(t)$ es el valor de la señal en el instante t,
- A es la amplitud de la oscilación,
- f es la frecuencia,
- t es el tiempo, y
- ϕ es la fase de la señal.

Entonces la potencia instantánea está dada por

$$P(t) = x(t)^2 = A^2 \cdot \text{sen}^2(2\pi f t + \phi)$$

En la siguiente Figura podemos ver cada una de los componentes que componene una señal sencilla oscilatoria

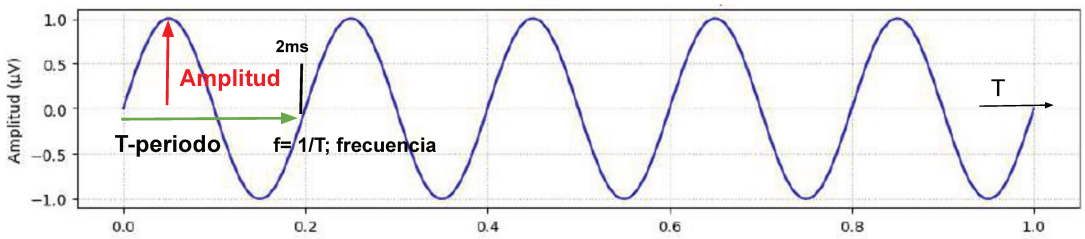


Figura 1.9: Representación esquemática de la amplitud, frecuencia y periodo.

La fase ϕ permite identificar en qué punto del ciclo se encuentra la oscilación. Por ejemplo, si $\phi = 0$, la oscilación comienza en cero cuando t=0; si $\phi = \frac{\pi}{2}$, la señal inicia en su valor máximo. Como sabemos, el análisis de Fourier nos permite descomponer cualquier señal como una serie de osciladores simples. Generalmente, las señales de EEG no tienen una frecuencia fija. Las aplicaciones de diagnóstico generalmente se centran en el contenido espectral del EEG, es decir, en las oscilaciones cerebrales o ritmos cerebrales, que se conocen comúnmente como ondas cerebrales [54]. La actividad rítmica cerebral contiene simultáneamente múltiples frecuencias que pueden ser separadas por diferentes técnicas de procesamiento de señales como el filtrado de señales.
Los ritmos cerebrales se agrupan dentro de bandas que se definen por frecuencias centrales y anchos de banda que aumentan apromimadamente en forma logarítmica. Las bandas de frecuencias de los ritmos cerebrales incluyen la banda Delta δ $[0{,}5-4]$ Hz, Theta θ $[4,8]$ Hz, Alpha α $[8,13]$ Hz, Beta β $[13,30]$ Hz, Gamma γ baja $[30,80]$ Hz y Gamma γ alta $[80,150]$ Hz. Estas no son las únicas bandas de frecuencias que pueden registrarse, pero las bandas de frecuencia que se asocian más típicamente con los procesos cognitivos y van entre 2 Hz y 150 Hz. Cabe mencionar que no existen límites precisos que definan las bandas: es posible encontrar que θ va de $3-9$ Hz, $3-7$ Hz o $4-7$ Hz. Por lo tanto, la elección de las bandas suele depender del objetivo del análisis, del tipo de datos y del fenómeno neurofisiológico de interés. A continuación, describimos las características principales de las diferentes ondas cerebrales en las bandas estándar en el análisis de señales de EEG, que se obtienen con los métodos de filtrado expuestos en la Sección 1.2 a partir de la señal de EEG que nos encontramos en los datos concretos que usaremos.
Delta (0,5 a 4 Hz; amplitud, hasta $100-200$ μ**V)**
El ritmo delta es dominante en las etapas 3 y 4 del sueño y no se observa en un adulto consciente. Se caracteriza por tener la mayor amplitud entre las ondas del EEG. Su aparición en estado de vigilia puede ser indicativa de alguna patología. En la infancia, la presencia del ritmo delta es común y se considera un signo del grado de madurez de la corteza cerebral. Es importante señalar que los artefactos causados por movimientos musculares también pueden generar ondas en esta banda de frecuencia.
Theta (4 a 8 Hz; amplitud $>$ **30** μ**V)**
El ritmo theta se registra principalmente durante el sueño, especialmente en la fase REM (Movimientos Oculares Rápidos). En adultos despiertos, este ritmo no es común, aunque en niños es normal y puede persistir hasta la adolescencia. La actividad theta se localiza preferentemente en los lóbulos temporales. Algunos investigadores dividen esta banda de frecuencias en dos componentes: la *theta baja* (4-6 Hz), asociada con un estado de vigilia disminuida o somnolencia, y la *theta alta* (6-8 Hz), que se incrementa durante tareas que implican procesos de memoria.
Alfa (8 a 13 Hz; amplitud , entre 30 y 50 μ**V)**

El ritmo alfa se observa cuando el sujeto está relajado en estado de vigilia y con los ojos cerrados. Este ritmo es bloqueado o atenuado al abrir los ojos o al realizar esfuerzos mentales, como hacer cálculos o concentrarse en una idea. Cuanto mayor es la activación cerebral, menor es la actividad alfa. Las ondas alfa tienen mayor expresión en las regiones occipital y frontal, con una distribución que también alcanza zonas parietales y temporales posteriores. En la mayoría de los sujetos normales, se observa una asimetría en el ritmo alfa, con amplitudes más altas en el hemisferio derecho. Este ritmo comienza a registrarse en niños a partir de los 6 años, pero se establece completamente hacia los 10 años.

Beta (13 a 30 Hz; amplitud $< 20\ \mu$V)

El ritmo beta se observa en individuos despiertos, alertas y con los ojos abiertos. Este ritmo es predominante cuando hay actividad mental intensa, como concentración o resolución de problemas, y se localiza principalmente en las regiones frontales del cerebro. La distribución de las ondas beta es fronto-central y puede presentar reactividad ante estímulos táctiles o actividad motora de las extremidades. Su amplitud puede estar disminuida en áreas con daño cortical y aumentada por el uso de drogas hipnóticas o sedantes.

Gamma (30 a 80 Hz; amplitud entre 20 y 50 μV)

El ritmo gamma se asocia con actividades mentales de mayor nivel, como la percepción y la conciencia. Se ha sugerido que las ondas gamma reflejan la actividad cerebral involucrada en la integración de diversos aspectos de un objeto (color, forma, movimiento, etc.) para formar una imagen coherente. Este ritmo desaparece bajo anestesia general y se considera relevante en tareas cognitivas compleja [55].

Como mencionamos en la sección anterior, el electroencefalograma (EEG) es el resultado de la suma de los potenciales eléctricos locales generados por grupos de neuronas. Estos potenciales son la suma de los *potenciales postsinápticos excitatorios* (PPE) e *inhibitorios* (PPI) que ocurren en la membrana celular de las neuronas y se prolongan a través de las ramificaciones que caracterizan a estas células y que reciben el nombre de *dendritas*. Los PPE son cambios eléctricos en el potencial natural de la membrana neuronal que en reposo es de aproximadamente -70 milivoltios (mV) que aumentan la probabilidad de que la neurona genere un *potencial de acción*. Para que esto ocurra, el potencial de membrana debe alcanzar un umbral cercano a los -55 mV. Si este umbral es superado, se desencadena un potencial de acción: una señal eléctrica breve que se propaga a lo largo del *axón*, y que constituye el principal mecanismo de comunicación entre neuronas. En contraste, los PPI alejan el potencial de membrana del umbral, disminuyendo así la probabilidad de disparo. Estos cambios de potencial se producen por el *flujo e intercambio de iones a través de la membrana neuronal*, generado por la apertura de canales iónicos activados por neurotransmisores. Cuando muchas neuronas corticales reciben entradas sinápticas sincronizadas, la suma espacial y temporal de estos potenciales puede detectarse como actividad eléctrica por medio de un EEG Figura 1.10

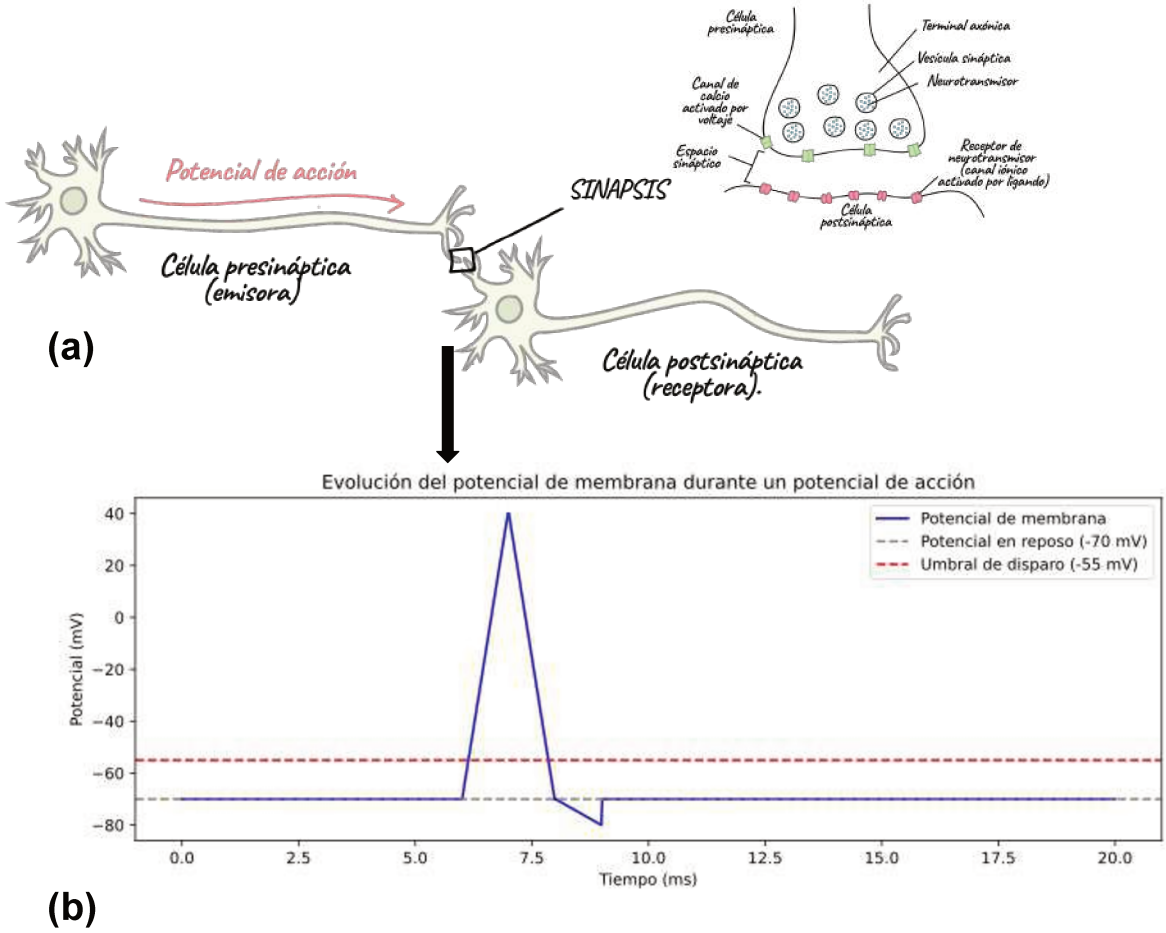


Figura 1.10: Representación esquemática de una neurona junto al proceso de sinapsis (a). En (b) se muestra el gráfico característico de un potencial de acción.

1.8.3. Distribución espacial de electrodos en EEG sistema internacional 10-20

En un EEG, los electrodos se colocan en lugares estándares siguiendo el sistema internacional 10-20. Ver Figura1.11 [56]. Los electrodos se colocan a un 10 % o 20 % de la distancia entre puntos anatómicos claves del cráneo (**nasion, inion y puntos preauriculares**). El Nasion es el punto ubicado en la unión entre los huesos frontal y nasal, justo por encima del puente de la nariz, Inion es una prominencia ósea en la parte posterior del cráneo, en la base del hueso occipital, finalmente los puntos preauriculares son las pequeñas depresiones que se encuentran justo delante de cada oreja, en la articulación temporomandibular [56].
Existen también EEG de alta densidad, que utilizan entre 68 y 120 electrodos para proporcionar una mayor resolución espacial en la medición de la actividad cerebral.
Los electrodos se identifican con una etiqueta alfanumérica en la que los números indican el hemisferio (impares para el izquierdo y pares para el derecho), y las letras representan las regiones del cerebro donde se colocan los electrodos (**Fp**= Frontal polar, **F**= Frontal, **C**= Central, **P**= Parietal, **T**= Temporal, **O**= Occipital, **FC**= Fronto-central, **CP**= Centro-parietal). Cuando en lugar de un dígito numérico aparece la letra **Z**, el electrodo se encuentra en la línea media entre los dos hemisferios.

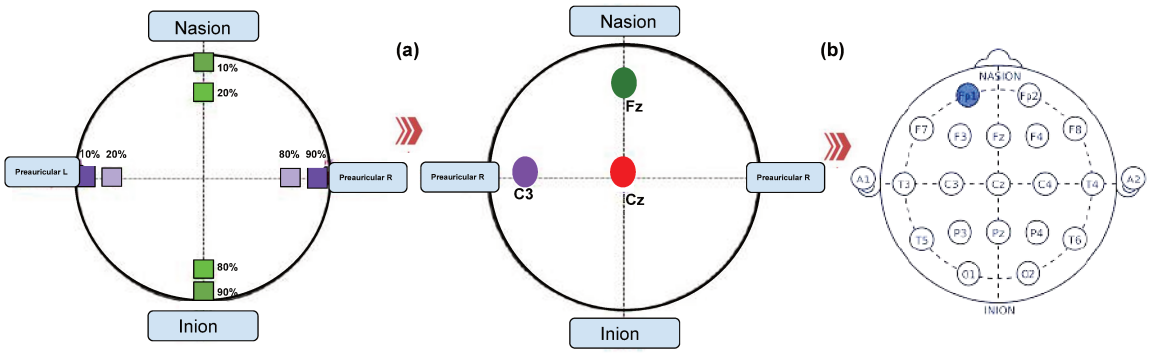


Figura 1.11: Representación gráfica del sistema internacional 10-20 disposición estándar para la colocación de los electrodos en un EEG. (a) Vista lateral del cráneo indicando los puntos anatómicos de referencia: nasion, inion y puntos preauriculares. (b) Distribución estándar de los electrodos sobre la superficie del cuero cabelludo.

1.9. Preprocesamiento de Señales

A lo largo de esta tesis, utilizaremos la teoría de hipergrafos para el desarrollo de nuevos métodos enfocados en el análisis de distintos conjuntos de datos. En particular, trabajaremos como mencionamos en las secciones anteriores con señales provenientes de diversos estudios: MEG, EEG y fMRI. Por esta razón, es necesario revisar y analizar las técnicas básicas de procesamiento de señales utilizadas en este tipo de análisis.
Al recibir la señal cruda obtenida de los distintos estudios realizados, es fundamental llevar a cabo un preprocesamiento adecuado sobre dicha señal.
Algunos pasos del preprocesamiento consisten simplemente en organizar los datos para facilitar su análisis, sin modificar ninguno de ellos; por ejemplo, la extracción de épocas que describiremos en la proxima sección a partir de datos continuos, extraer algunos puntos de interés sin realizar modificaciones adicionales. También un preprocesammiento puede consistir en la remoción de ciertos elementos, señales que provienen de electrodos con mala calidad. Por otro lado, otras técnicas de procesamiento implican la aplicación de distintos métodos de filtrado o transformaciones espaciales, que derivan en una modificación directa de la señal. Todas estas transformaciones o reorganizaciones tienen como objetivo principal facilitar el análisis posterior de nuestras señales. La razón detrás del preprocesamiento radica en que toda señal está acompañada por distintos tipos de ruido que pueden interferir y dificultar su análisis. Cuando nos enfrentamos al analisis de distintos tipos de señal el principal desafío radica en balancear la señal y el ruido para obtener un preprocesamiento adecuado, lo cual depende del objetivo del estudio a realizar. Lo que para una investigación es ruido, para otra puede ser una señal valiosa, dependiendo de los ritmos cerebrales que se quieran estudiar.

1.9.1. Creación de Épocas

Uno de los primeros pasos habituales en el preprocesamiento de señales neurofisiológicas es la creación de *épocas*. Este proceso consiste en segmentar la señal completa en ventanas temporales más pequeñas, que generalmente están sincronizadas con algún evento de interés (por ejemplo, un estímulo sensorial, un cambio de estado, o un marcador experimental). La principal razón para crear épocas es facilitar el análisis temporal de la señal, trabajar con segmentos más cortos permite reducir la complejidad del análisis, y en muchos casos, mejora

la relación señal-ruido, ya que se pueden promediar o comparar distintos ensayos correspondientes a un mismo tipo de evento y permite a extraer patrones que no serían fácilmente detectables en una señal continua. La duracion de las epocas depende del experimento, las epocas deben ser al menos tan largas como la duracion del ensayo. Si por ejemplo se quiere detectar potenciales relacionados con eventos ERP, (*event-related potentials*), que son respuestas eléctricas del cerebro que se generan como reacción a un evento específico, como un estímulo sensorial (ej: una luz, un sonido, una imagen), un evento cognitivo (ej: tomar una decisión), o una respuesta motora (ej: presionar un botón), las epocas pueden ser tan largas como el periodo que se desea analizar mas un periodo de referencia. Si se desea realizar un analisis basado en tiempo-frecuencia (observar cómo cambian las amplitudes de frecuencias cerebrales a lo largo del tiempo) las epocas deben ser mas largas con el objetivo de evitar alterar los resultados con artefactos de borde (distorsiones o efectos no deseados que aparecen en los extremos, de una señal) que son el resultado de la aplicacion de filtros temporales sobre la señal. Los artefactos de borde suelen durar dos o tres ciclos. Por ejemplo si se quisiera analizar el periodo de tiempo de 0 a 1000 ms se deberian tomar epocas de -1500 ms a 2500 ms, 1500 ms adicionales en cada extremo. Esta zona de amortiguación extra depende de la frecuencia que se desee extraer de los datos. Mientras menor sea la banda de frecuencia que se necesita extraer de los datos, mayor tiene que ser la zona de amortiguamiento. Como regla general siguiendo la idea que plantea Cohen que se describe en su libro Analyzing Neural Time Series Data para realizar análisis en tiempo-frecuencia de una senal tenemos que tener en cuenta la relación existente entre la frecuencia que se desea analizar y la duración mínima que debe tener la ventana temporal, se requiere que la ventana sea lo suficientemente larga como para contener, al menos, tres ciclos de la frecuencia más baja que se quiera detectar. Esto se debe a que las frecuencias bajas oscilan lentamente, por lo que necesitan más tiempo para ser representadas adecuadamente.[47]

1.9.2. Análisis de Componentes Independientes (ICA) para el análisis de señales

El **Análisis de Componentes Independientes (ICA, por sus siglas en inglés: Independent Component Analysis)** es una técnica estadística cuyo objetivo es separar señales mezcladas en un conjunto de componentes que sean *estadísticamente independientes* entre sí [57].
A diferencia del **Análisis de Componentes Principales (PCA)**, que busca maximizar la varianza y eliminar correlaciones lineales, el ICA se centra en eliminar dependencias de orden superior, buscando fuentes latentes no gaussianas e independientes. En el contexto del análisis de señales, como EEG, MEG, EMG o audio, el ICA resulta fundamental para aislar fuentes de distinto origen, por ejemplo:

- Actividad cerebral frente a ruido muscular.
- Señales cardíacas mezcladas con artefactos oculares.
- Voces o instrumentos superpuestos en grabaciones de audio.

Fundamento Teórico

Supóngase que se observan n señales mezcladas $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$, que son combinaciones lineales de n señales fuente independientes $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t)]^T$:

$$\mathbf{x}(t) = A\,\mathbf{s}(t)$$

donde:

- A es la *matriz de mezcla* desconocida.
- El objetivo del ICA es estimar una *matriz de separación* W tal que:

$$\mathbf{y}(t) = W\,\mathbf{x}(t)$$

  donde $\mathbf{y}(t)$ son las estimaciones de las fuentes independientes $\mathbf{s}(t)$.

Para lograr la independencia estadística, el ICA maximiza una medida de *no gaussianidad*, como la curtosis o la negentropía.
El método de ICA permite recuperar señales fuente originales a partir de mezclas lineales desconocidas. Veamos lo anterior con un caso particular de **señales artificiales mezcladas linealmente**. En este contexto, se generan tres señales independientes una senoidal, una cuadrada y una de ruido gaussiano que representan fuentes estadísticas no correlacionadas. Estas señales se combinan mediante una *matriz de mezcla* A, dando lugar a las observaciones registradas por distintos canales o sensores. La relación entre las señales fuente $\mathbf{s}(t)$ y las señales observadas $\mathbf{x}(t)$ puede expresarse como:

$$\mathbf{x}(t) = A\,\mathbf{s}(t)$$

donde la matriz de mezcla A utilizada en el experimento es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 2 & 1 \\ 1{,}5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Posteriormente, se aplica el algoritmo de *Análisis de Componentes Independientes (ICA)*, el cual estima una *matriz de separación* W que permite desmezclar las observaciones y recuperar las señales fuente originales. El proceso inverso puede expresarse como:

$$\mathbf{y}(t) = W\,\mathbf{x}(t)$$

donde $\mathbf{y}(t)$ representa las señales independientes estimadas. A partir de la aplicación del algoritmo `FastICA` del paquete `scikit-learn`, se obtiene una matriz W aproximada de la forma:

$$W \approx \begin{bmatrix} 1{,}25 & -0{,}32 & 0{,}10 \\ -0{,}17 & 0{,}67 & -0{,}21 \\ 0{,}30 & -0{,}25 & 0{,}72 \end{bmatrix}$$

La matriz W actúa como el operador de desmezcla que, al multiplicarse por las señales observadas, recupera las componentes independientes subyacentes, reproduciendo con buena precisión las señales fuente originales. Ver Figura 1.12.
El resultado muestra que el método es capaz de reconstruir las fuentes iniciales con alta fidelidad, incluso sin conocer la matriz de mezcla original.

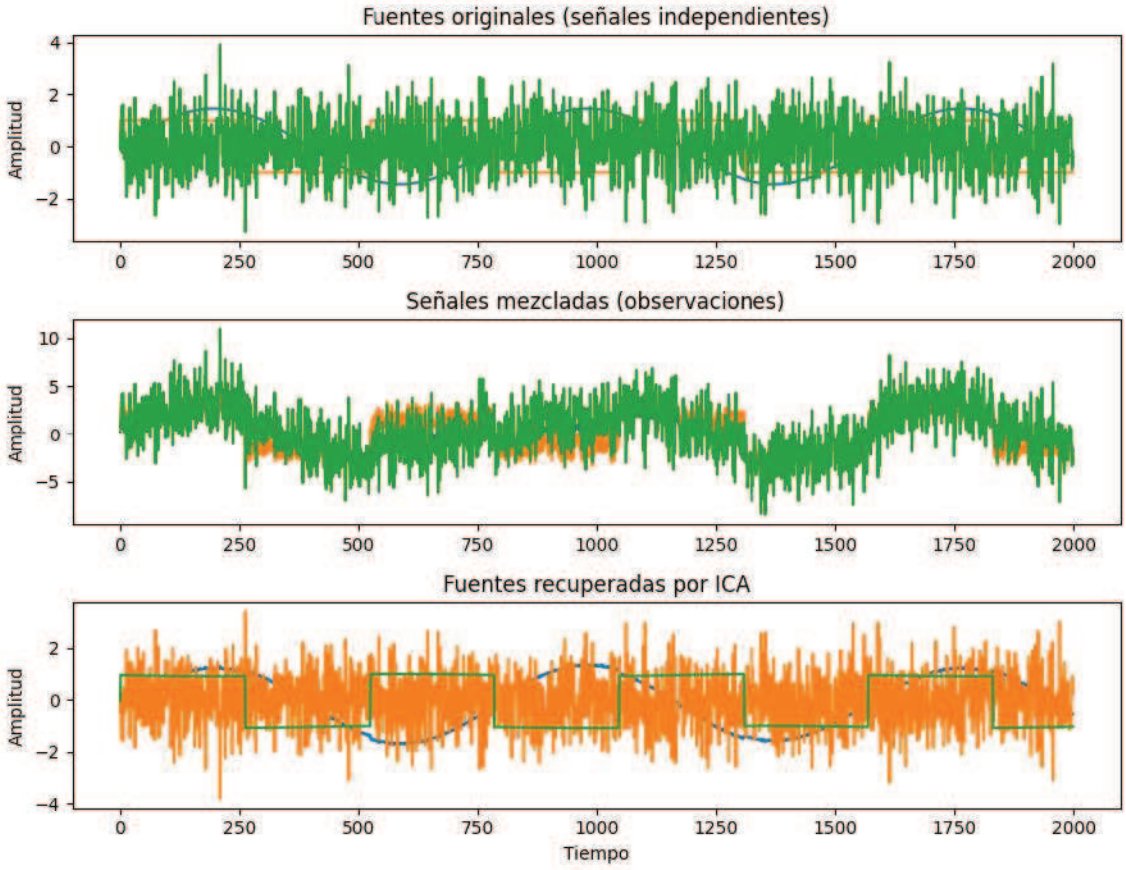


Figura 1.12: Separación de señales artificiales mediante el método de Análisis de Componentes Independientes (ICA). En la primera fila se observan las tres señales fuente originales (senoidal, cuadrada y ruido gaussiano), en la segunda las señales mezcladas obtenidas mediante una combinación lineal, y en la tercera las fuentes recuperadas por ICA. Se evidencia la capacidad del algoritmo para identificar y reconstruir las componentes independientes a partir de las mezclas observadas, sin conocimiento previo de la matriz de mezcla.

Esto demuestra la capacidad del ICA para identificar fuentes subyacentes en sistemas lineales donde las observaciones son combinaciones de señales independientes.
En el procesamiento de señales electroencefalográficas (EEG), el ICA se emplea de manera habitual para eliminar artefactos fisiológicos, como los producidos por parpadeos, movimientos o actividad muscular, que se superponen a la señal cerebral de interés. El procedimiento general consiste en:

1. Obtener la señal EEG multicanal.
2. Aplicar ICA para descomponer la señal en componentes independientes.
3. Identificar los componentes artefactuales mediante su morfología temporal o topografía espacial.
4. Eliminar las componentes no deseadas y reconstruir la señal EEG limpia.

La señal resultante presentara una reducción notable de ruido, preservando la información neuronal relevante. Este enfoque mejora significativamente la calidad de los datos antes de su análisis posterior (por ejemplo, en estudios de conectividad o análisis de frecuencia).
El ICA constituye una herramienta poderosa para la desmezcla de señales y la identificación

de fuentes independientes, especialmente útil cuando las señales tienen diferentes orígenes físicos o fisiológicos.
En neurociencia, telecomunicaciones y procesamiento de audio, su aplicación permite mejorar la interpretación y limpieza de los datos.
Aunque no garantiza un orden o una escala específicos de las componentes, su principal fortaleza radica en la independencia estadística, diferenciándose así de técnicas lineales como el PCA.
En síntesis, el ICA es un método clave para el análisis avanzado de señales, capaz de revelar estructuras latentes y eliminar interferencias no deseadas, aportando una visión más clara de los procesos subyacentes en los datos observados.

1.10. Matriz de conectividad de datos

Una matriz de conectividad es una representación matemática utilizada en diversos campos, como el análisis de redes sociales, los sistemas biológicos y las redes de transporte. Su propósito principal es mostrar cómo se conectan entre sí los elementos de un sistema, proporcionando un marco visual y analítico para comprender redes complejas.
En el análisis de redes sociales, por ejemplo, una matriz de conectividad puede ayudar a identificar individuos o grupos influyentes mediante el análisis de las conexiones entre ellos. En biología, se utiliza para estudiar las interacciones entre diferentes especies o genes, mientras que, en el ámbito del transporte, permite visualizar las conexiones o rutas entre distintas ubicaciones, facilitando una mejor planificación y optimización. En el área de la neurociencia nos permite capturar la **conectividad neuronal**, es decir, el conjunto de **relaciones y vínculos temporales** entre diferentes grupos de neuronas y regiones del cerebro. Estas conexiones, aunque pueden estar distribuidas anatómicamente a lo largo de distintas áreas, funcionan de manera integrada para intercambiar información. Este proceso genera correlaciones que reflejan cómo las áreas cerebrales trabajan juntas para facilitar funciones cognitivas, emocionales y comportamentales. Existen diferentes tipos de matrices de conectividad. Una muy popular en el area de la neurociencia es el analisis de conectividad basado PLI, con la idea de que cuando las poblaciones neuronales están acopladas funcionalmente, sus procesos oscilatorios, medidos a través de la fase, se sincronizan.
Estas matrices de conectividad son generalmente ponderadas, asignando valores numéricos a las conexiones que reflejan la magnitud de la interacción. Sin embargo, por comodidad, pueden ser binarizadas, tomando sus elementos únicamente los valores 1 y 0.
Con el objetivo de ilustrar un caso particular de la matriz de conectividad PLI, consideramos una prueba de rutina de EEG en un individuo. El registro se realizó bajo una condición experimental que alterna entre apertura y cierre de ojos, con el objetivo de analizar la conectividad funcional entre diferentes regiones cerebrales. Los datos utilizados para este análisis están disponibles en el repositorio https://github.com/RezaSaadatyar/EEG-phase-lag-index. Para este ejemplo usamos señales de ojos cerrados.
El equipo consta de de 28 electrodos (canales) que registran 512 muestras por segundos para cada canal. El tiempo total es de alrededor de tres segundos. Los electrodos estan dispuestos de la forma en se muestraen la Figura 1.11(b).
Los 28 canales registran, en esos 3 segundos (ojos cerrados), la siguiente sucesión de series temporales ver Figura 1.13.

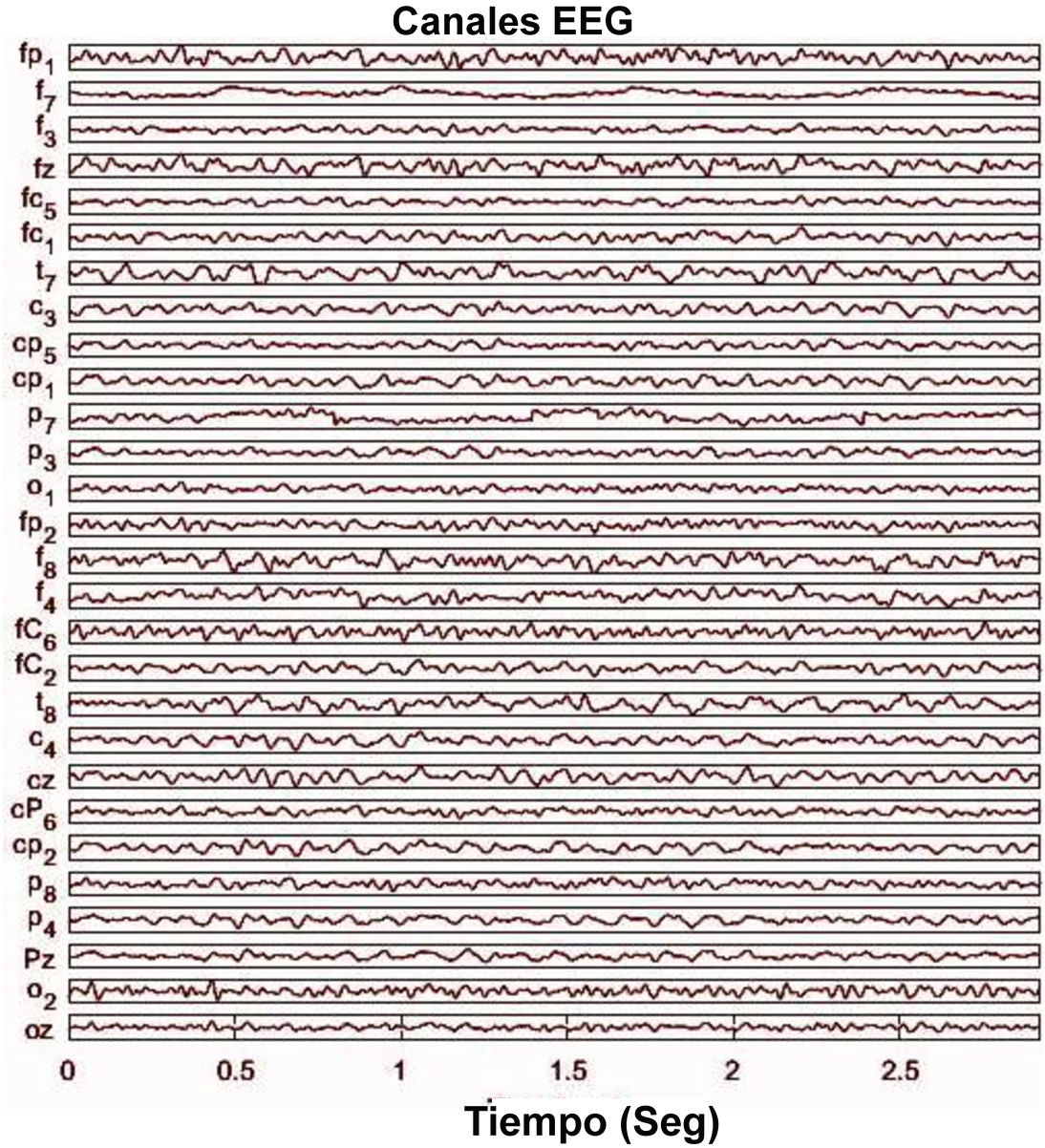


Figura 1.13: Representación de los 28 canales de EEG, medidos en segundos de registro en estado basal con los ojos cerrados.

Cada una de las 28 señales se filtra en las bandas de frecuencia **Delta**, **Theta**, **Alpha**, **Beta** y **Gamma**, previamente descritas. De este modo, se obtienen cinco señales filtradas para cada canal. A modo de ejemplo, en la Figura 1.14 se muestra el resultado del filtrado de las señales de los canales *Fp1* y *F7* en las cinco bandas de frecuencia mencionadas.

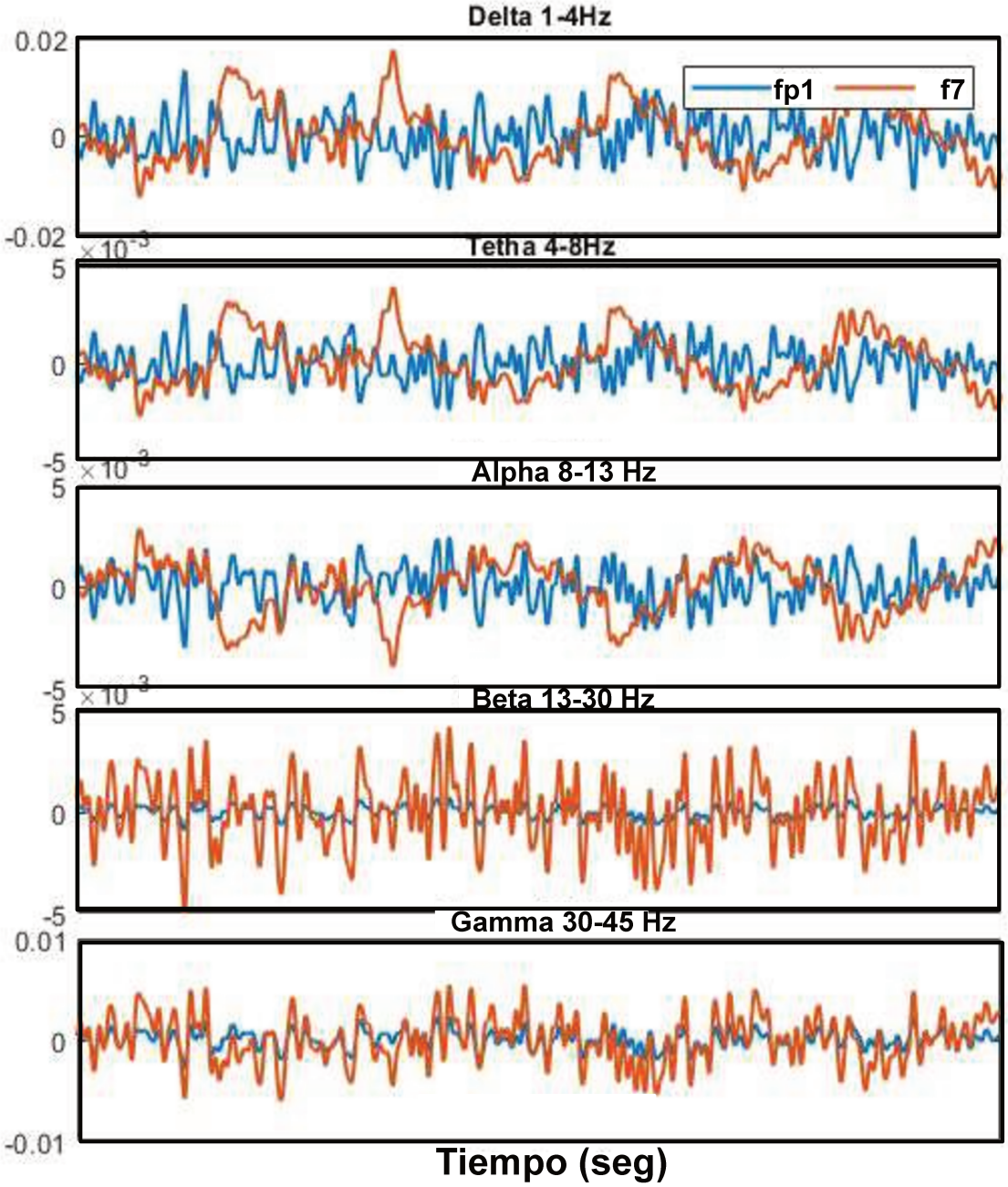


Figura 1.14: Representación de las señal de EEG filtrada provista por el canal fp1 y f7 en las 5 bandas de frecuencias Delta, Theta, Alpha, Beta y Gamma.

Luego, tomamos cada una de las 5 bandas antes definidas y, para cualquier par i, j de los 28 canales, aplicamos el $PLI_{i,j}$ correspondiente a las señales de los electrodos i-ésimo y j-ésimo en esas bandas. Como resultado, obtenemos matrices con entradas reales no negativas. El coeficiente (i, j) en cualquiera de estas matrices indica el grado de conectividad entre los electrodos i y j en esa banda de frecuencia. El uso de magnitudes continuas como PLI continuos nos plantea el desafío de definir cuándo dos electrodos están conectados o no. Esto nos lleva al problema de establecer un **umbral** al que llamaremor **Th** a partir del cual se considera que dos electrodos están conectados. Una forma sencilla de abordar esto es fijar un valor **Th** y postular que los electrodos i y j están conectados en una banda si el valor $PLI_{i,j}$

en esa banda supera o es igual a **Th** por lo que en la posición (i, j) de cualquiera de estas matrices hay un valor de 1, en caso contrario si $PLI_{i,j} <$ **Th** habrán 0 en las entradas i, j. En nuestro ejemplo se toma **Th=0.75**, en la Figura 1.15 se muestra la matriz PLI (28×28) que se obtiene en la banda Gamma .

0.0	0.6	0.6	0.61	0.6	0.64	0.64	0.65	0.72	0.75	0.77	0.79	0.78	0.77	0.78	0.79	0.72	0.52	0.52	0.55	0.57	0.59	0.61	0.68	0.77	0.78	0.79	0.79
0.6	0.0	0.73	0.75	0.6	0.74	0.72	0.6	0.53	0.64	0.69	0.71	0.7	0.7	0.72	0.71	0.64	0.05	0.2	0.33	0.38	0.41	0.45	0.56	0.7	0.71	0.71	0.71
0.6	0.73	0.0	0.47	0.4	0.7	0.71	0.58	0.52	0.67	0.72	0.74	0.73	0.73	0.73	0.73	0.66	0.02	0.14	0.3	0.37	0.41	0.46	0.58	0.72	0.73	0.73	0.73
0.61	0.75	0.47	0.0	0.19	0.74	0.74	0.58	0.51	0.66	0.72	0.73	0.72	0.72	0.72	0.71	0.63	0.05	0.15	0.29	0.35	0.38	0.44	0.56	0.71	0.72	0.72	0.72
0.6	0.6	0.4	0.19	0.0	0.39	0.52	0.43	0.46	0.65	0.7	0.71	0.7	0.7	0.7	0.69	0.61	0.08	0.09	0.26	0.33	0.36	0.4	0.54	0.7	0.71	0.71	0.71
0.64	0.74	0.7	0.74	0.39	0.0	0.72	0.49	0.49	0.67	0.71	0.73	0.72	0.71	0.72	0.71	0.61	0.11	0.05	0.26	0.32	0.35	0.43	0.55	0.72	0.72	0.73	0.72
0.64	0.72	0.71	0.74	0.52	0.72	0.0	0.34	0.46	0.66	0.72	0.74	0.73	0.72	0.73	0.7	0.62	0.17	0.01	0.23	0.31	0.35	0.42	0.55	0.72	0.73	0.73	0.73
0.65	0.6	0.58	0.58	0.43	0.49	0.34	0.0	0.53	0.7	0.75	0.75	0.75	0.74	0.74	0.72	0.64	0.22	0.04	0.22	0.32	0.36	0.42	0.56	0.75	0.75	0.75	0.75
0.72	0.53	0.52	0.51	0.46	0.49	0.46	0.53	0.0	0.71	0.76	0.76	0.76	0.75	0.75	0.72	0.63	0.33	0.17	0.09	0.2	0.29	0.34	0.5	0.76	0.77	0.77	0.77
0.75	0.64	0.67	0.66	0.65	0.67	0.66	0.7	0.71	0.0	0.5	0.48	0.5	0.47	0.46	0.4	0.24	0.57	0.5	0.35	0.28	0.21	0.15	0.01	0.45	0.52	0.52	0.52
0.77	0.69	0.72	0.72	0.7	0.71	0.72	0.75	0.76	0.5	0.0	0.18	0.42	0.23	0.21	0.17	0.01	0.61	0.57	0.44	0.39	0.34	0.3	0.22	0.04	0.08	0.23	0.34
0.79	0.71	0.74	0.73	0.71	0.73	0.74	0.75	0.76	0.48	0.18	0.0	0.17	0.32	0.22	0.15	0.01	0.62	0.59	0.45	0.39	0.35	0.31	0.21	0.05	0.02	0.11	0.17
0.78	0.7	0.73	0.72	0.7	0.72	0.73	0.75	0.76	0.5	0.42	0.17	0.0	0.08	0.11	0.08	0.01	0.61	0.58	0.44	0.39	0.35	0.31	0.21	0.06	0.04	0.08	0.16
0.77	0.7	0.73	0.72	0.7	0.71	0.72	0.74	0.75	0.47	0.23	0.32	0.08	0.0	0.15	0.09	0.0	0.61	0.57	0.44	0.38	0.34	0.3	0.19	0.06	0.04	0.02	0.04
0.78	0.72	0.73	0.72	0.7	0.72	0.73	0.74	0.75	0.46	0.21	0.22	0.11	0.15	0.0	0.07	0.02	0.62	0.58	0.45	0.39	0.35	0.31	0.21	0.08	0.06	0.04	0.04
0.79	0.71	0.73	0.71	0.69	0.71	0.7	0.72	0.72	0.4	0.17	0.15	0.08	0.09	0.07	0.0	0.01	0.6	0.57	0.43	0.38	0.33	0.29	0.2	0.06	0.05	0.04	0.03
0.72	0.64	0.66	0.63	0.61	0.61	0.62	0.64	0.63	0.24	0.01	0.01	0.01	0.0	0.02	0.01	0.0	0.52	0.5	0.36	0.3	0.26	0.22	0.12	0.03	0.03	0.04	0.04
0.52	0.05	0.02	0.05	0.08	0.11	0.17	0.22	0.33	0.57	0.61	0.62	0.61	0.61	0.62	0.6	0.52	0.0	0.08	0.23	0.28	0.32	0.37	0.46	0.61	0.61	0.62	0.62
0.52	0.2	0.14	0.15	0.09	0.05	0.01	0.04	0.17	0.5	0.57	0.59	0.58	0.57	0.58	0.57	0.5	0.08	0.0	0.2	0.25	0.29	0.34	0.44	0.58	0.58	0.59	0.58
0.55	0.33	0.3	0.29	0.26	0.26	0.23	0.22	0.09	0.35	0.44	0.45	0.44	0.44	0.45	0.43	0.36	0.23	0.2	0.0	0.12	0.15	0.21	0.32	0.44	0.45	0.45	0.45
0.57	0.38	0.37	0.35	0.33	0.32	0.31	0.32	0.2	0.28	0.39	0.39	0.39	0.38	0.39	0.38	0.3	0.28	0.25	0.12	0.0	0.1	0.16	0.27	0.38	0.39	0.4	0.4
0.59	0.41	0.41	0.38	0.36	0.35	0.35	0.36	0.29	0.21	0.34	0.35	0.35	0.34	0.35	0.33	0.26	0.32	0.29	0.15	0.1	0.0	0.12	0.23	0.36	0.36	0.37	0.37
0.61	0.45	0.46	0.44	0.4	0.43	0.42	0.42	0.34	0.15	0.3	0.31	0.31	0.3	0.31	0.29	0.22	0.37	0.34	0.21	0.16	0.12	0.0	0.19	0.31	0.32	0.33	0.33
0.68	0.56	0.58	0.56	0.54	0.55	0.55	0.56	0.5	0.01	0.22	0.21	0.21	0.19	0.21	0.2	0.12	0.46	0.44	0.32	0.27	0.23	0.19	0.0	0.22	0.23	0.23	0.23
0.77	0.7	0.72	0.71	0.7	0.72	0.72	0.75	0.76	0.45	0.04	0.05	0.06	0.06	0.08	0.06	0.03	0.61	0.58	0.44	0.38	0.36	0.31	0.22	0.0	0.08	0.1	0.1
0.78	0.71	0.73	0.72	0.71	0.72	0.73	0.75	0.77	0.52	0.08	0.02	0.04	0.04	0.06	0.05	0.03	0.61	0.58	0.45	0.39	0.36	0.32	0.23	0.08	0.0	0.09	0.09
0.79	0.71	0.73	0.72	0.71	0.73	0.73	0.75	0.77	0.52	0.23	0.11	0.08	0.02	0.04	0.04	0.04	0.62	0.59	0.45	0.4	0.37	0.33	0.23	0.1	0.09	0.0	0.08
0.79	0.71	0.73	0.72	0.71	0.72	0.73	0.75	0.77	0.52	0.34	0.17	0.16	0.04	0.04	0.03	0.04	0.62	0.58	0.45	0.4	0.37	0.33	0.23	0.1	0.09	0.08	0.0

Figura 1.15: Matriz PLI en la banda Gamma [30,45] Hz

Mientras que en la Figura 1.16 se presenta la matriz binarizada producto de umbralar los valores de la matriz PLI con respecto a este valor de Th sobre la misma banda.

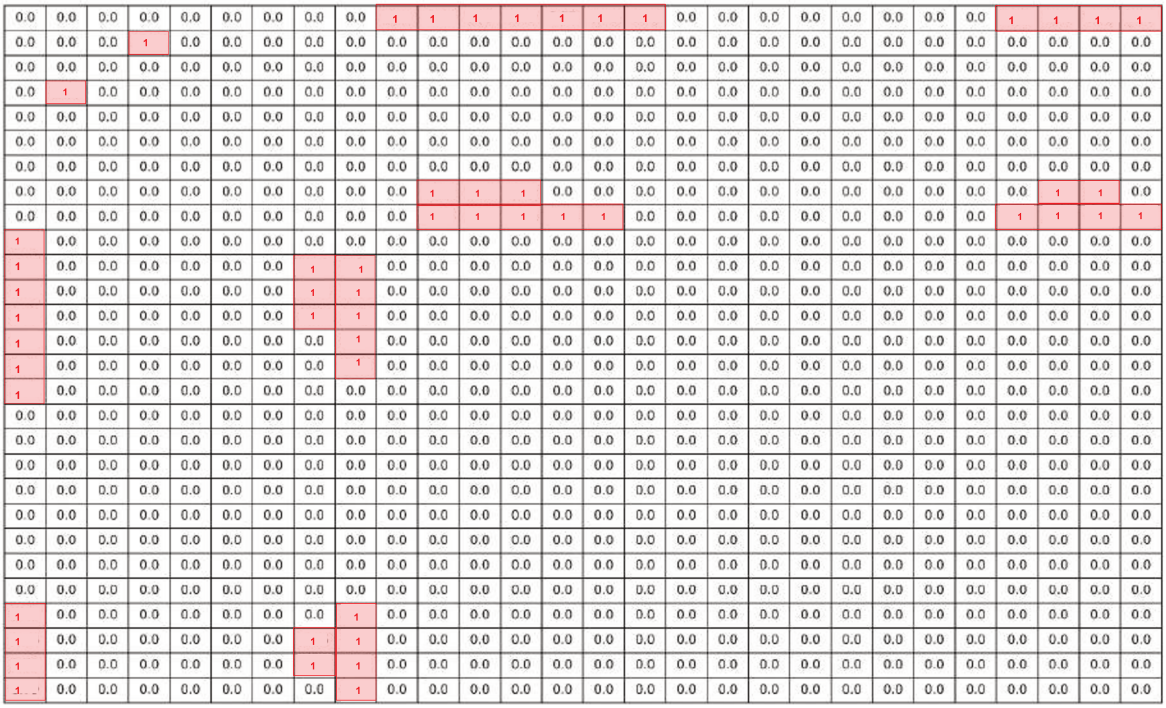


Figura 1.16: Matriz conectividadpara la banda gamma obtenida a partir de matriz PLI Figura 1.15 tomando como valor umbral $p = 0{,}75$

En la Figura1.17 se presenta graficamente la red de conectividad entre los pares de electrodos para cada una de las bandas de frecuencias. El ultimo grafico corresponde a la matriz calculada en la Figura 1.16.

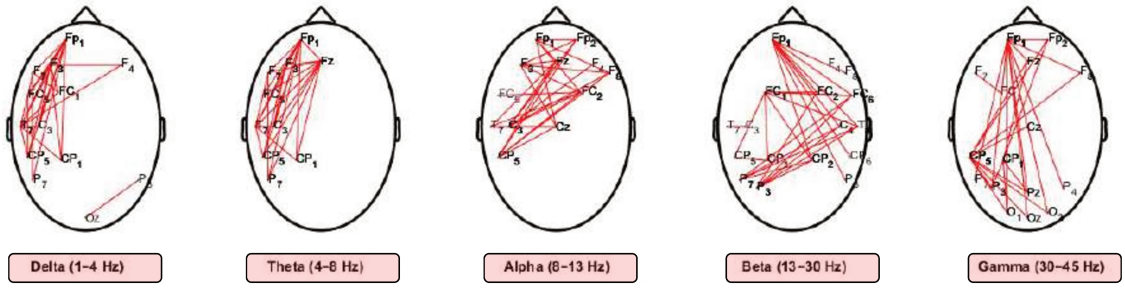


Figura 1.17: Gráficos de la conectividad funcional para cada una de las bandas de frecuencias, siendo el ultimo el asociado al ejemplo de las Figuras 1.15y 1.16.

Existen varios métodos para el cálculo del valor umbral. En neurociencias, los más comunes (i) son el valor medio de los elementos de la matriz de correlación,(ii) el valor medio más n desviaciones estándar de la matriz de correlación,(iii) tomar el valor de un estado particular como referencia y (iv) el análisis de datos sustitutos (subrrogancia), siendo este último la técnica sobre la cual se basa la generación de las matrices binarizadas que se presentarán en los capítulos posteriores. A continuación, presentaremos dos técnicas de sustitución (subrrogados) y umbralado (thresholding).

1.11. Matrices de conectividad sustitutas y umbralado

En el artículo "Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data"de Theiler et al. (1992) [58], se introduce el concepto de **datos sustitutos (subrrogados)** para evaluar la no linealidad en series temporales. Es una herramienta poderosa en el análisis de series temporales para evaluar hipótesis nulas, como la linealidad o la aleatoriedad en los datos. En esencia, los datos sustitutos se generan preservando ciertas propiedades estadísticas de una serie temporal original y produciendo nuevas señales con mayor robustez.
Existen varios mecanismos de sustitución de una serie temporal por otra utilizados en distintas aplicaciones. Un caso particular es el de las permutaciones aleatorias de los valores de la señal y las fases aleatorias. En esta tesis, utilizamos únicamente el segundo mecanismo. A continuación, describimos los aspectos básicos del mismo, el cual se basa en la forma polar de la transformada de Fourier de una serie temporal. El procedimiento (algoritmo) constiste en mezclar temporalmente los valores de las fases y luego reconstruir la señal.
Dada una señal $x(t)$, los pasos son los siguientes.

- **Paso 1:** Calculamos la transformada de Fourier de $x(t)$ y la escribimos en coordenadas polares
$$\hat{x}(\xi) = A(\xi)e^{i\phi(\xi)}$$
- **Paso 2:** Sumamos a la $\phi(\xi)$ una variable aleatoria con momentos finitos $\Delta\phi(\xi)$ cuyos valores están en el intervalo $[0, 2\pi)$:
$$\tilde{\phi}(\xi) = \phi(\xi) + \Delta\phi(\xi)$$
- **Paso 3:** Construimos una señal aleatoria $\tilde{x}$ cuya transformada de Fourier tiene la misma amplitud que $\hat{x}$, pero su fase es ahora $\tilde{\phi}$:
$$\hat{\tilde{x}}(\xi) = A(\xi)e^{i\tilde{\phi}(\xi)}$$
- **Paso 4:** Invertimos la transformada de Fourier y obtenemos:
$$\tilde{x}(t) = \mathscr{F}^{-1}(Ae^{i\tilde{\phi}})(t)$$

Cuando tenemos n canales de EEG, podemos calcular las $\tilde{x}_i(t)$ señales subrrogadas correspondientes a cada $x_i(t)$ (medidas), con $i = 1, \ldots, n$. A partir de estas señales, construimos la matriz $\widetilde{PLI}$ utilizando las nuevas señales $\tilde{x}_i(t)$ para algún t dentro de un intervalo I. Esta nueva matriz $\widetilde{PLI}$ actúa como una "sustituta"de la matriz original PLI.
A continuación, definimos el **umbral (threshold)** que utilizaremos para binarizar la matriz original PLI. Se generan N matrices sustitutas $\widetilde{PLI}^{(1)}, \ldots, \widetilde{PLI}^{(N)}$. El umbral correspondiente para la matriz PLI se calcula como el promedio de estas matrices sustitutas
$$\overline{\widetilde{PLI}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \widetilde{PLI}^{(j)}$$
Este valor medio $\overline{\widetilde{PLI}}$ se utiliza como umbral $Th = \overline{\widetilde{PLI}}$ para binarizar la matriz PLI, comparando cada entrada de PLI con el valor correspondiente en $\overline{\widetilde{PLI}}$. Esta nueva matriz resume características propias de las interacciones entre los pares de electrodos.

Definición 5. *La matriz* $\overline{\widetilde{PLI}}$ *se llama* ***matriz umbral*** *y, siguiendo su notación en inglés, escribimos* $Th = \overline{\widetilde{PLI}}$

Con esta matriz de umbral estamos en condición de definir la versión binarizada de la conectividad de las señales.

Definición 6. *La binarización de las interacciones entre las n señales originales se define como*

$$PLI_{bin}(i,j) = \begin{cases} 1 & si\ PLI(i,j) > \overline{\widetilde{PLI}}(i,j) \\ 0 & si\ PLI(i,j) \leq \overline{\widetilde{PLI}}(i,j) \end{cases} \tag{1.1}$$

donde PLI es la matriz de conectividad calculada a partir de los datos reales y $\overline{\widetilde{PLI}}$ *es el promedio de las n matrices PLI generadas a partir de datos sustitutos*

$$Th = \overline{\widetilde{PLI}} = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} \widetilde{PLI}$$

Resulta de interes observar que dadas las n señales que provienen de cada electrodo el método puede aplicarse a cualquier ventana o época del conjunto de esas n señales. Por ejemplo podemos tomar k-épocas y en cada una de ellas aplicamos el umbralado descripto para obtener

$$Th(l) = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} \widetilde{PLI}^{(l,s)}, l = 1, ..., k$$

y definir en consecuencia PLI^{l}_{bin} para cada ventana aplicando la definición 6. En la Figura 1.18 se presenta un esquema gráfico del método de matrices sustitutas de conectividad con umbralado.

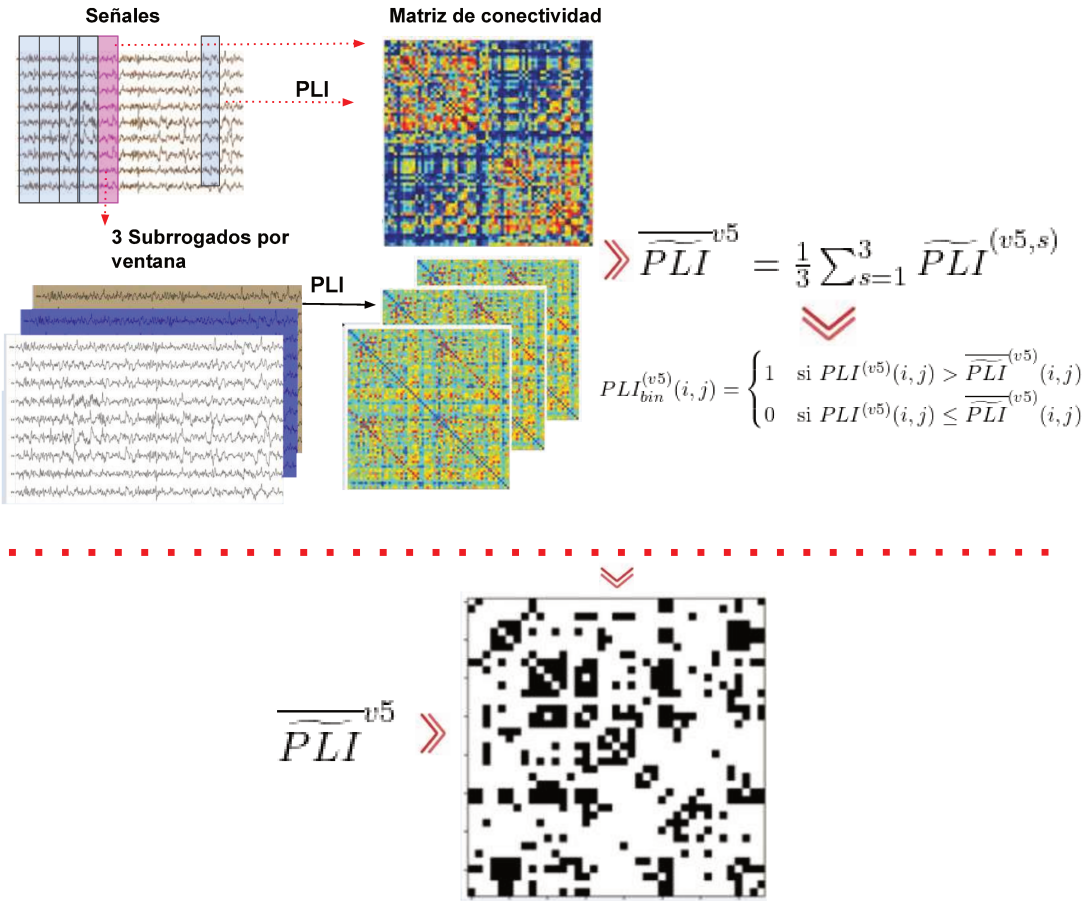


Figura 1.18: Se parte de una señal original que se segmenta en n ventanas temporales. En cada una de estas ventanas, se generan n señales sustitutas. En este ejemplo particular, con fines ilustrativos, se considera $n = 3$ y la ventana específica $v5$, resaltada en color rosa. Para esta ventana se calcula la matriz de conectividad utilizando el índice (PLI). Además, se generan tres matrices sustitutas asociadas a esta ventana. A partir de estas matrices sustitutas, se calcula una matriz umbral promedio. Finalmente, la matriz original de PLI se compara con este umbral para obtener la matriz binarizada, que refleja las conexiones funcionales.

1.12. Ejemplo de análisis de conectividad en señales de iEEG registradas en roedores durante diferentes estados de sueño

Para ilustrar los conceptos desarrollados en las Secciones 1.10 y 1.11, presentamos un caso de estudio basado en un conjunto de señales obtenidas mediante electroencefalografía intracraneal (iEEG) en roedores. Las señales fueron adquieridos y procesados en el Laboratorio de Neurobiología del Sueño del Departamento de Fisiología de la Facultad de Medicina de la Universidad de la República (UdelaR), bajo la dirección del Dr. Pablo Torterolo. La adquisición de datos se realizó utilizando siete electrodos posicionados estratégicamente en diferentes regiones cerebrales: V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio). La Figura 1.19 muestra un esquema de la cabeza del roedor con la ubicación de los electrodos utilizados.

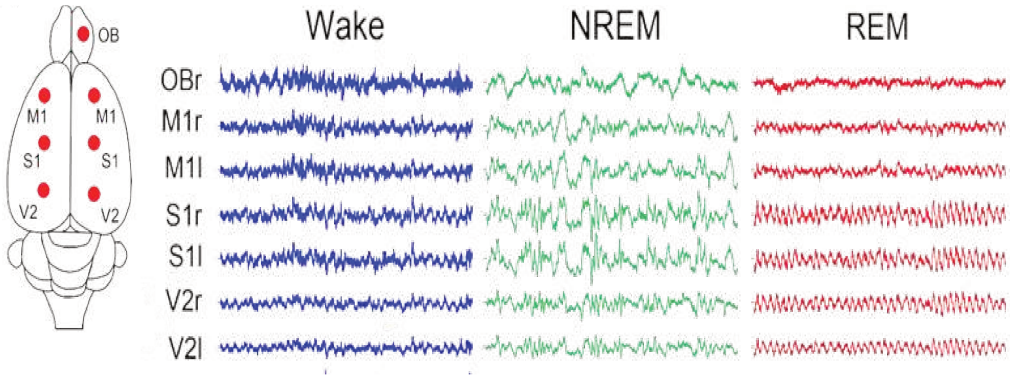


Figura 1.19: Esquema de la cabeza de un roedor con la ubicación de los siete electrodos: V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio).

Los datos se registraron durante distintas fases del ciclo de sueño: AWAKE (vigilia activa), REM (Rapid Eye Movement), QW (Quiet Wakefulness o vigilia tranquila) y NREM (sueño profundo).
Las señales originales poseen una longitud total de 6,942,720 muestras, adquiridas a una frecuencia de muestreo de $f_s = 400$ Hz. Las señales se segmentaron en ventanas de 2000 muestras (equivalente a 5 segundos), resultando en un total de 3471 ventanas.

$$\text{longitud de ventana} = f_s \times 5 = 400 \times 5 = 2000 \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor \frac{6{,}942{,}720}{\text{Ventana}} \right\rfloor = 3471 \text{ ventanas}$$

Para ejemplificar los distintos conceptos descriptos y desarrollados en las secciones 1.10 y 1.11 consideramos únicamente la **primera ventana**.
Posteriormente, cada señal se filtró en las diferentes bandas de frecuencia

$$\mathscr{B} = \{\delta\ (1-4\text{ Hz}),\ \theta\ (4-8\text{ Hz}),\ \alpha\ (8-12\text{ Hz}),\ \beta_1\ (12-16\text{ Hz}),\ \beta_2\ (20-24\text{ Hz}),\ \gamma\ (38-42\text{ Hz})\}$$

En la Figura 1.20 se ilustran las señales correspondientes a la **rata 1 en estado Despierto**, mostrando la señal original y sus versiones filtradas en las distintas bandas. Esta visualización corresponde a la **ventana 1** y al **canal 1 (electrodo V1)**.

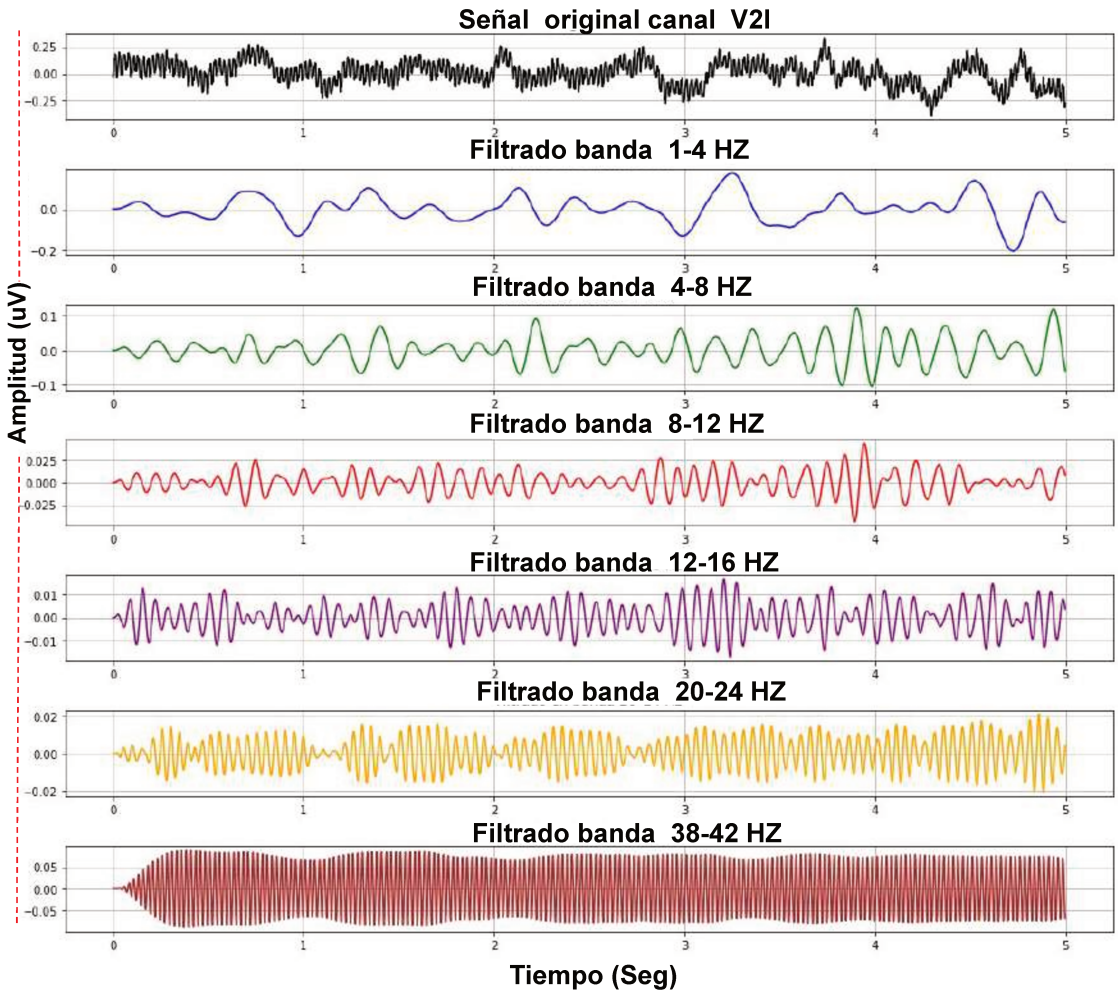


Figura 1.20: Comparación entre la señal original y las señales filtradas en distintas bandas de frecuencia para el canal V1 durante el estado Awake. Se muestra la primera ventana de 5 segundos, asociada a la señal de EEG de la Rata 1. Las bandas de frecuencia utilizadas fueron: $\delta(1-4Hz)$, $\theta(4-8Hz)$, $\alpha(8-12Hz)$, $\beta_1(12-16Hz)$, $\beta_2(20-24Hz)$ y $\gamma(38-42Hz)$.

El proceso descrito se repite para cada una de las señales correspondientes a los siete electrodos: V2r, V2l, S1l, S2r, M1l, M2r y OB.
A partir de las señales filtradas, se calcula la conectividad funcional entre todos los pares de electrodos utilizando el índice de **PLI** (Phase Lag Index). Para cada combinación de ventana $w \in \{0,1,\ldots,W-1\}$ y banda $b \in \mathscr{B}$, se genera una matriz de conectividad

$$\mathrm{PLI}_b(w) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$$

Para binarizar estas matrices, se aplica el procedimiento descripto en la Sección 1.11. Se generan 30 matrices sustitutas $\{\widetilde{\mathrm{PLI}}_b^{(s)}(w)\}_{s=1}^{30}$ por permutación de fases o aleatorización temporal, y se calcula la matriz umbral promedio, para nuestro caso particular

$$\overline{\widetilde{\mathrm{PLI}}}_b = \frac{1}{30}\sum_{s=1}^{30} \widetilde{\mathrm{PLI}}_b^{(s)}$$

Finalmente, se obtiene la matriz binarizada de conectividad comparando la matriz original con la umbral:

$$\mathrm{PLI}_{b,\mathrm{bin}}(w)(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathrm{PLI}_b(w)(i,j) > \overline{\widetilde{\mathrm{PLI}}}_b(w)[i,j] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A continuación, se presentan las matrices PLI_δ, $\overline{\widetilde{\mathrm{PLI}}}_\delta$ y $\mathrm{PLI}_{\delta,\mathrm{bin}}$ correspondientes a la banda de frecuencia δ y a la ventana $w = 1$, como ejemplo representativo del procedimiento.

$$PLI_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3645 & 0{,}222 & 0{,}1485 & 0{,}1875 & 0{,}231 & 0{,}1655 \\ 0{,}3645 & 0 & 0{,}335 & 0{,}462 & 0{,}2715 & 0{,}2475 & 0{,}247 \\ 0{,}222 & 0{,}335 & 0 & 0{,}1425 & 0{,}243 & 0{,}1995 & 0{,}283 \\ 0{,}1485 & 0{,}462 & 0{,}1425 & 0 & 0{,}187 & 0{,}1505 & 0{,}267 \\ 0{,}1875 & 0{,}2715 & 0{,}243 & 0{,}187 & 0 & 0{,}2315 & 0{,}443 \\ 0{,}231 & 0{,}2475 & 0{,}1995 & 0{,}1505 & 0{,}2315 & 0 & 0{,}483 \\ 0{,}1655 & 0{,}247 & 0{,}283 & 0{,}267 & 0{,}443 & 0{,}483 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\widetilde{PLI}}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}208 & 0{,}208 & 0{,}085 & 0{,}1125 & 0{,}1615 & 0{,}1735 \\ 0{,}208 & 0 & 0{,}1715 & 0{,}091 & 0{,}157 & 0{,}084 & 0{,}0875 \\ 0{,}208 & 0{,}1715 & 0 & 0{,}1865 & 0{,}1775 & 0{,}289 & 0{,}215 \\ 0{,}085 & 0{,}091 & 0{,}1865 & 0 & 0{,}172 & 0{,}1605 & 0{,}1375 \\ 0{,}1125 & 0{,}157 & 0{,}1775 & 0{,}172 & 0 & 0{,}1405 & 0{,}1805 \\ 0{,}1615 & 0{,}084 & 0{,}289 & 0{,}1605 & 0{,}1405 & 0 & 0{,}1435 \\ 0{,}1735 & 0{,}0875 & 0{,}215 & 0{,}1375 & 0{,}1805 & 0{,}1435 & 0 \end{bmatrix}$$

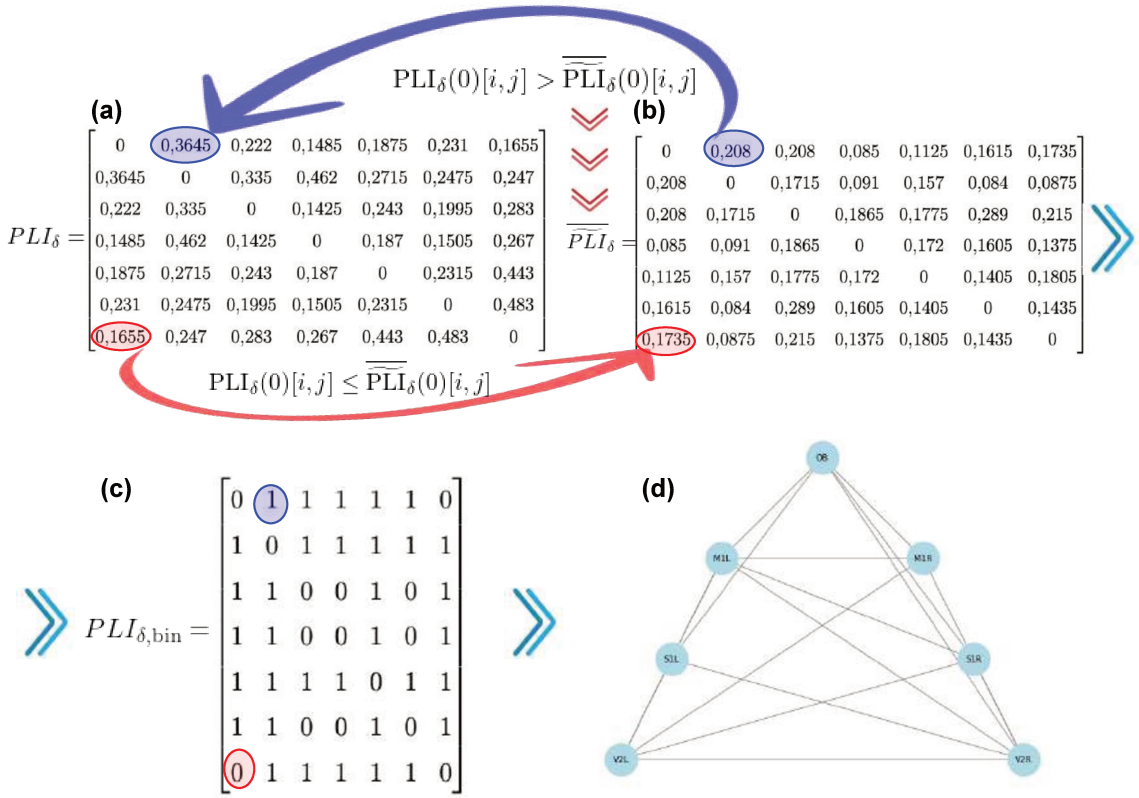


Figura 1.21: Método gráfico de como se obtiene la matriz binarizada de conectividad comparando la matriz original con la umbral junto a la red de conectividad resultante. (a) Matriz PLI. (b) Matriz umbral promedio. (c) Matriz binaria. (d) Red de conectividad.

Capítulo 2

Entropías y teoría de la información

2.1. Introducción

La Teoría de la Información surge como un campo fundamental de las ciencias aplicadas gracias al trabajo pionero de Claude E. Shannon en 1948, quien sentó las bases de lo que hoy se conoce como **la teoría moderna de la información**. En su artículo, titulado *A Mathematical Theory of Communication*, Shannon formalizó un enfoque matemático para cuantificar la incertidumbre que tenemos acerca del resultado de un experimento o la información asociada a un dado proceso.

En este trabajo, Shannon presentó una afirmación clave que ha resonado a lo largo del tiempo: "**El problema fundamental de la comunicación es el de reproducir en un punto exacto o aproximadamente un mensaje seleccionado en otro punto. Frecuentemente los mensajes tienen significado; esto es, ellos refieren o están correlacionados de acuerdo a algún sistema con ciertas entidades físicas o conceptuales. Estos aspectos semánticos de la comunicación son irrelevantes para el problema de ingeniería. El aspecto significativo es que el mensaje de hecho es uno seleccionado a partir de un conjunto de posibles mensajes. El sistema debe ser diseñado para operar para cada posible selección, no sólo para aquella que será seleccionada de hecho, dado que es desconocida al momento del diseño.**" (Shannon 1948).

Este enfoque revolucionario desligó el contenido del mensaje de su forma de transmisión, permitiendo que la Teoría de la Información se aplicara a una amplia variedad de sistemas de comunicación, sus aplicaciones se extienden a campos diversos, entre ellos la física, la química, la biología, la inferencia estadística, la robótica, la criptografía, la computación, la lingüística, el reconocimiento de patrones y la teoría de la comunicación. Centrándose exclusivamente en la eficiencia y precisión de la transmisión de datos. Para sorpresa de algunos, la medida propuesta por Shannon tenía la misma forma que la entropía de Gibbs-Boltzmann. Sin embargo, la gran diferencia radica en que la entropía de Shannon es una teoría de carácter general que va más allá de la física, y es aplicable a cualquier sistema basado en probabilidades. Este enfoque tan amplio generó ciertas dudas en cuanto a su denominación. En palabras del propio Shannon "Mi mayor preocupación era cómo llamarla".Pensé en llamarla información, pero la palabra estaba demasiado usada, así que decidí llamarla ïncertidumbre". Cuando lo discutí con John von Neumann, él tuvo una idea mejor. Von Neumann me dijo: "Deberías llamarla entropía", por dos razones. En primer lugar, tu función de incertidumbre ha sido usada en la mecánica estadística bajo ese nombre, por lo que ya tiene un nombre. Y en segundo lugar, y más importante, nadie sabe realmente qué es la entropía, así que en un debate siempre tendrás ventaja."

De este modo, Shannon aprovechó esta coincidencia entre su medida y la entropía en física, y

adoptó un nombre que le permitía mantener cierta ambigüedad útil en discusiones científicas. Con un concepto tan central en el desarrollo de la ciemcia es poco lo que se puede agregar a lo muy conocido. No obstante , como ya explicitamos en el Capítulo 1, este capítulo téndra también una componente matemática destinada a argumentar porqué la función básica para la entropía natural. Estos argumentos son basicamente los de Khinchin.[]

2.2. Probabilidad, incertidumbre y entropía

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\{A_i : i = 1, \ldots, n\}$ una partición finita de Ω, es decir, una sucesión finita de subconjuntos de Ω en $\mathscr{F}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, que satisface las siguientes condiciones

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

La propiedad a) refleja que los eventos A_i son mutuamente excluyentes y la propiedad b) que el sistema es completo. Puesto que usando b) y a), tenemos

$$1 = \mathscr{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}(A_i),$$

Denotando por simplicidad con p_i a $\mathscr{P}(A_i)$, cada vez que tengamos una partición en n subconjuntos de Ω, es decir, $\{A_i : i = 1, \ldots, n\}$, también tendremos un vector en $\mathbb{R}^n$ dado por $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, que se mueve en el simplex $(n-1)$ dimensional dado por

$$S_n = \left\{ p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}.$$

Por ejemplo

$$S_2 = \left\{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1 \right\}.$$

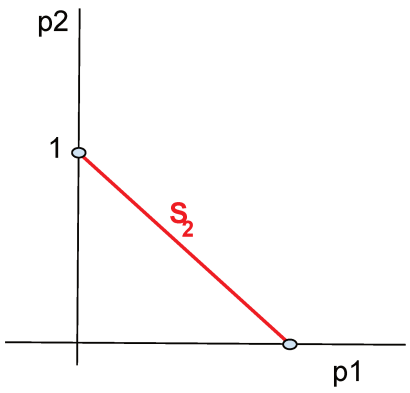


Figura 2.1: Representación grafica de S_n para $n = 2$.

y

$$S_3 = \left\{ (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_i \geq 0, p_1 + p_2 + p_3 = 1 \right\}.$$

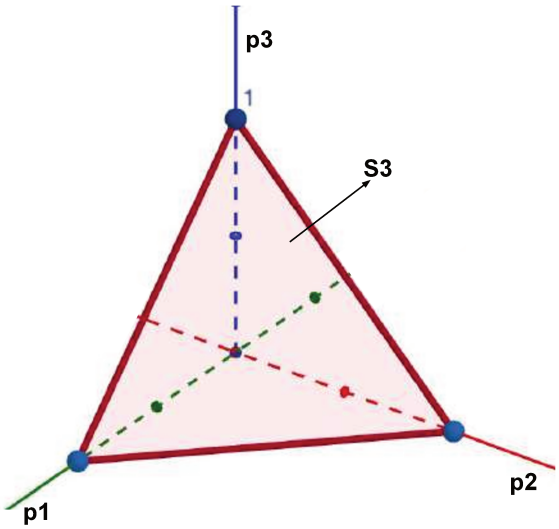


Figura 2.2: Representación grafica de S_n para $n = 3$.

Así como resulta claro que las aristas de S_3 son del tipo S_2, las caras de tipo S_3 son fronteras de S_4. En general, para $1 \leq k \leq n$, la anulación de $n-k$ componentes de los vectores de S_n producirá puntos típicos de algún S_{n-k}.
Por extensión, diremos que la partición finita $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω pertenece a S_n, ya que se cumple la condición $\sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, con $p_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. El experimento aleatorio más simple de todos es aquel en el que, a priori, se desconoce el resultado del lanzamiento de una moneda. Solo dos resultados son posibles para el lado que muestra la moneda al caer.
Si la moneda es de cinco pesos argentinos, solo se observará uno de los elementos del conjunto $\{n, a\}$, donde n representa el número 5 y a corresponde al arrayán que el relieve muestra en su reverso.
Una moneda equilibrada será aquella en la que ambos lados tengan la misma probabilidad de ocurrencia. Como el espacio muestral $\Omega = \{n, a\}$ tiene dos elementos, la única asignación de probabilidades equilibrada será aquella en la que $P(a)$ y $P(n)$ satisfagan las ecuaciones de exhaustividad y equilibrio, El sistema de ecuaciones

$$(1) \begin{cases} p(n) + p(a) = 1, \\ p(n) - p(a) = 0 \end{cases}$$

tiene una única solución $p(n) = p(a) = \frac{1}{2}$. Una moneda cargada será, por ejemplo, aquella que resuelva el siguiente sistema

$$(2) \begin{cases} p(n) + p(a) = 1, \\ 2p(n) - p(a) = 0 \end{cases}$$

que tiene la como única solución $p(n) = \frac{1}{3}, \quad p(a) = \frac{2}{3}$. El resultado del experimento (1) tiene más incertidumbre que el resultado del experimento (2). Por esta razón, un jugador tramposo preferirá una moneda cargada en lugar de una equilibrada.
El concepto de **entropía** busca cuantificar esta **incertidumbre**.

La axiomatización de A. I. Khinchin, que pretendemos introducir aquí (ver $[K]$), muestra que hay una sola forma funcional para este concepto.
De este modo, el concepto introducido por C. Shannon ($[S]$) en teoría de la información no es arbitraria, sino que es la única posible para satisfacer los requisitos básicos de incerteza sin vulnerar los conceptos centrales de la teoría de la probabilidad. Buscamos alguna sucesion $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde H_n tiene como dominio el conjunto de todas las particiones $\mathscr{F}$-medibles, de n-partes, del espacio muestral Ω en el espacio de las probabilidades $(\Omega, \mathscr{P}, \mathscr{F})$. Como ya dijimos una partición $A = \{A_1, A_2, .., A_n\}$ de Ω trendrá probabilidades asociadas $\{p_1, p_2, .., p_n\}$ y por lo tanto A puede considerarse un elemento de S_n. Es decir, un vector $n-$dimensional en el simplex $n-1$ dimensional S_n.
Notemos sin embargo que esta asociacion no es inyectiva ya que muchas particiones diferentes de A pueden tener el mismo vector de probabilidades $\{p_1, p_2, .., p_n\}$. Entonces, si consideramos la relación de equivalencia en las particiones $\mathscr{F}-$medibles de Ω de n partes dada por $A \sim A' = \{A_1', A_2', .., A_n'\}$ si y sólo si $\mathscr{P}(A_i') = \mathscr{P}(A_i)$ y si π_n denota el cociente del conjunto de las particiones $\mathscr{F}-$ medibles de n elementos por esta relación de equivalencia, podremos definir , sin mal entendidos, $\{H_n : n \geq 1\}$ como funciones con dominio π_n e imágenes en los números reales $\mathbb{R}$. Puesto que π_n si se identifica, uno a uno, con el correspondiente simplex S_n, nuestra busqueda de $\mathscr{H} = \{H_n : n \geq 1\}$ toma ahora un caracter cuantitativo mejor adaptado a la teoría clásica de funciones de variables independientes y valores reales, usualmente llamados **campos escalares**.

La entropía como sucesión de campos escalares

Las consideraciones precedentes nos permiten formalizar con precisión el objeto que tenemos que construir para obtener una cuantificación fehaciente de la incertidumbre en contextos probabilisticos discretos. La entropía será una sucesión $\mathscr{H} = \{H_n : n \geq 2\}$ de funciones continuas

$$H_n : S_N \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ : n \geq 2$$

con

$$S_n = \left\{ \bar{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

De esta manera tendremos también la posibilidad de pensar $H_n : \pi_n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ y escribir $H_n(A) = H_n(\bar{p})$ si $\mathscr{P}(A_i) = p_i$

El Axioma de máxima incertidumbre

La observación introductoria sobre la moneda equilibrada vs la cargada, que se extiende sencillamente a cualquier $n \geq 2$, piense en un dado (n=6), sugiere que la máxima incertidumbre y por consiguiente el máximo de la función entropía $H_n \in \mathscr{H}$ correspondiente tendrá que ocurrir cuando todas las probabilidades sean las mismas $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$. Formalmente el primer axioma se escribe

$$\text{máx}_{\bar{p} \in S} H_n(\bar{p}) = \text{máx}_{A \in \pi_n} H_n(A) = H_n(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$$

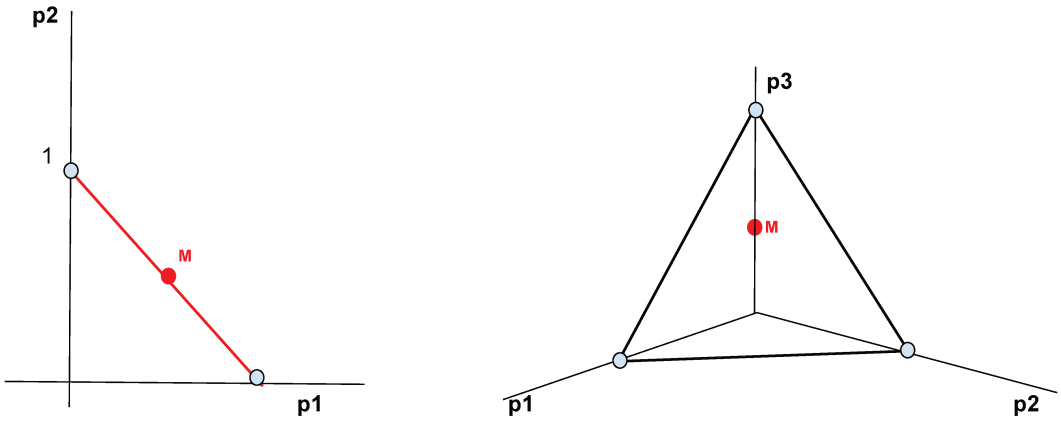


Figura 2.3: Representación gráfica del máximo de H_n para n=2 y n=3.

El axioma de transición dimensional Ya observamos que S_2 puede ser visto de tres maneras como subconjuntos de S_3 En efecto

$$\{(p_1,p_2,0) : p_i \geq 0, p_1+p_2=1\} \subset S_3$$
$$\{(p_1,0,p_3) : p_i \geq 0, p_1+p_3=1\} \subset S_3$$

y

$$\{(0,p_2,p_3) : p_i \geq 0, p_2+p_3=1\} \subset S_3$$

Por consiguiente, como nuestra familia **entropía** $\mathscr{H}$ tiene funciones H_n definidas en todos los S_n, en el ejemplo precedente si restringimos H_3 a S_2 sobre S_2 tendremos dos funciones: una es H_2 y otra es la restricción de H_3 a S_2. El axioma de transición dimensional requerirá, razonablemente , que esas dos funcones coincidan.
Pero tiene que valer

$$H_n(p_1,....,p_n) = H_{m+1}(p_1,....,p_n,0)$$

Es necesario observar la razonable trivialidad de esta propiedad para una medida de incertidumbre. En efecto si $A=\{A_1,A_2,..,A_n\}$ y $A^{'}=\{A_1^{'},A_2^{'},..,A_n^{'},A_{n+1}^{'}\}$ con $\mathscr{P}(A_i)=\mathscr{P}(A_i^{'})$, $i=1,....n$ y $\mathscr{P}(A_{n+1}^{'})=0$, la incertidumbre de la partición $A^{'}$ debe ser la misma que la incertidumbre de la partición A
El axioma de aditividad de la incertidumbre
Sean como antes $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A=\{A_1,A_2,..,A_n\}$ y $B=\{B_1,B_2,..,B_m\}$ dos particiones de Ω.

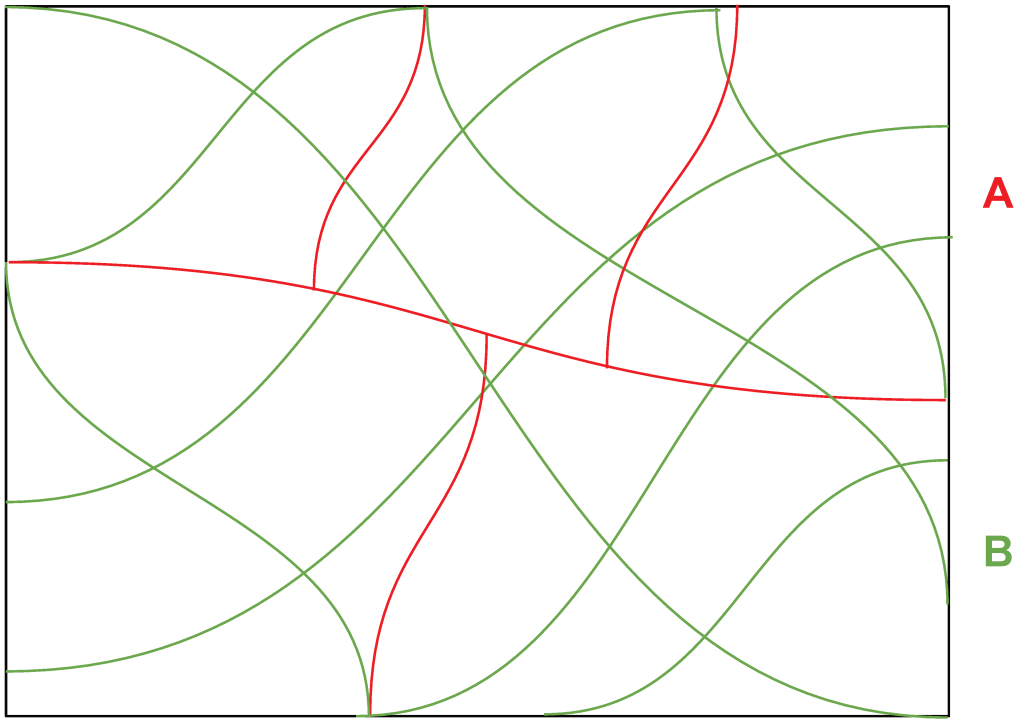


Figura 2.4: Representación gráfica de las particiones A y B de Ω.

Sea $p_i = \mathscr{P}(A_i)$ y $q_j = \mathscr{P}(B_j)$ $i = 1,...,n$ y $j = 1,...,m$. Para cada una de estas particiones, tendremos definidas una incertidumbre dentro de la familia $\mathscr{H}$, $H_n(A)$ y $H_m(B)$ o bien, usando el dominio vectorial $H_n(\bar{p})$ y $H_m(\bar{q})$, $\bar{p} = (p_1,...,p_n) \in S_n$ y $\bar{q} = (q_1,...,q_m) \in S_m$. Ahora bien, estas dos particiones tienen un refinamiento en común $C = C(A,B)$, al que Khinchin llama AB dado por

$$C = \{A_i \cap B_j : i = 1,...,n, j = 1,...,m\}$$

que tiene ahora $n.m$ partes y como tal, habrá de tener bien definida una icertidumbre (entropía) en la familia $\mathscr{H}$, $H_{n.m}(C)$. Menos sencillo es saber como se obtiene el vector (matriz) $\bar{\pi}(\pi_{i,j} : i = 1,..,n, j = 1,..,m) \in S_{n.m}$ que representa a $C = C(A,B)$ en términos de $\bar{p}$ y $\bar{q}$. Un caso especial es siemple cuando las particiones son estados fisicamentemente independientes en el sentido que $\mathscr{P}(A_i \cap B_j) = \mathscr{P}(A_i).\mathscr{P}(B_j)$ o bien $\pi_{ij} = p_i.q_j$ para toda elección de $i = 1,..,n$ y $j = 1,..,m$, tendremos que $C(A,B)$ se identifican con el punto $\bar{\pi} \in S_{n.m}$ y su $H_{n.m}$ estará bien definida.
Resumiendo, dadas dos particiones independientes A y B, tenemos el refinamiento inducido $C = C(A,B)$ y tres números $H_n(A)$, $H_n(B)$ y $H_{n.m}(C)$. Resulta heurísticamente claro que el refinamiento comun C de A y B , que tiene más partes que A y B tendrá mayor incertidumbre que cualquiera de las dos A y B individualente. Resulta, entonces, razonable proponer que la familia $\mathscr{H}$ que buscamos cumpla, bajo el supuesto de independencia de las particiones A y B , la siguiente fórmula de aditividad

$$H_{n.m}(C(A,B)) = H_n(A) + H_m(B)$$

No obstante la situación de independencia de las particiones A y B es demasiado particular y tendremos que postular una fórmula para $H_{n.m}(C(A,B))$ al caso en que las particiones no

sean independientes.
Fijemos por un momento $i \in \{i_1, i_2, ...i_n\}$ sea $J(i) = \{j = 1, ..., m : \mathscr{P}(B_j \cap A_i) > 0\}$. Entonces $\mathscr{B}^i = \{A_i \cap B_j : j \in J(i)\}$ es una partición del espacio de probabilidad $(A_i, \mathscr{F}_i, \mathscr{P}_i)$ donde $\mathscr{F}_i = \{E = F \cap A_i, F \in \mathscr{F}\}$ y $\mathscr{P}^i(E) = \frac{1}{p_i}\mathscr{P}(E)$. Es claro que $\mathscr{B}^i$ es un cubrimiento disjunto de A_i y que también

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J(i)} \mathscr{P}^i(A_i \cap B_j) &= \sum_{j\in J(i)} \frac{1}{p_i}\mathscr{P}(A_i \cap B_j) \\ &= \frac{1}{p_i}\sum_{j\in J(i)} \mathscr{P}(A_i \cap B_j) = \frac{1}{p_i}\mathscr{P}(A_i) = 1\end{aligned}$$

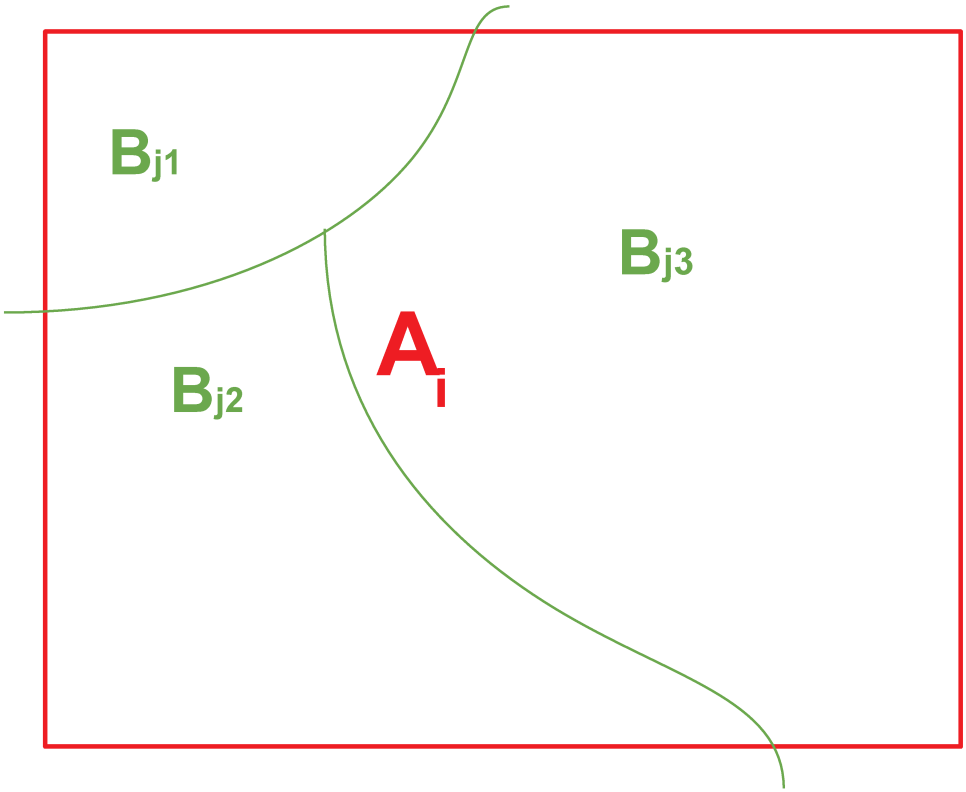


Figura 2.5: Un A_i partido por B.

Entonces $\mathscr{B}^i$ se identifica con un punto del simplex $l_i - 1$ dimensional en $\mathbb{R}^{l_i}$ dado por

$$\begin{aligned}&(\mathscr{P}^i(A_i \cap B_j) : j \in J(i)) \\ &= \frac{1}{p_i}(\mathscr{P}(A_i \cap B_j) : j \in J(i)) \\ &= \frac{1}{p_i}(\pi_{i,j} : j \in J(i))\end{aligned}$$

Como estamos buscando una definición de incertidumbren (entropía) simultáneamente en todos los esquemas de particiones finitas de cualquier espacio de probabilidad, tendrá que estar bien definida en $\mathscr{H}$ todas $\mathscr{H}_{l_i}(\mathscr{B}^i)$.
Con un criterio heurístico de razonabilidad o verosimilitud estamos en condiciones de formular explícitamente el tercer axioma para la familia $\mathscr{H}$. En palabras a la incertidumbre del refinaminto común de las particiones A y B de Ω, la escribimos en términos de $H_n(A)$ y de a la fracción p_i de cada una de las $H_{l_i}(\mathscr{B}^i)$. En términos precisos

$$H_{mn}(C(A,B)) = H_n(A) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_{l_i}(\mathscr{B}^i) \tag{2.1}$$

Con la notación de Khinchin

$$H_{nm}(C(A,B)) = H_n(A) + H_A(B)$$

con $H_A(B) = \sum_{i=1}^{n} p_i H_{l_i}(\mathscr{B}^i)$ la fórmula (2-1) puede reescribirse en otros términos.

Lema 1. *Sea $X_{AB} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aleatoria*

$$X_{AB}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} H_{l_i}(\mathscr{B}^i)\mathbb{I}_{A_i}(\omega)$$

, donde $\mathbb{I}_{A_i}$ denota la función característica que indica la pertenencia de ω a A_i. Entonces

$$H_{nm}(C(A,B)) = H_n(A) + \mathscr{E}(X_{AB})$$

donde $\mathscr{E}(X_{AB})$ denota la esperanza o valor medio de la variable aleatoria X_{AB}

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(X_{AB}) &= \int_{\Omega} X_{AB} d\mathscr{P} \\
&= \sum_{i=1}^{n} H_{l_i}(\mathscr{B}^i) \int_{\Omega} \mathbb{I}_{A_i} d\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{n} H_{l_i}(\mathscr{B}^i)\mathscr{P}(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} H_{l_i}(\mathscr{B}^i) p_i = H_A(B)
\end{aligned}$$

Resumiendo las condiciones precedentes, estamos buscando una sucesión $\mathscr{H} = \{H_n : n \geq 1\}$ de campos escalares con

$$H_n : S_n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

tales que :
a) $S_1 = \{1\}$, $H_1 = 0$;
b) cada H_n es continuo;
c) cada H_n es simétrico $H_n(p_1, ..., p_n) = H_n((p_{\tau(1)}, ..., p_{\tau(n)})$ para toda permutación τ de $\{1, ..., n\}$;
d) para cada $n \geq 1$,

$$máx_{p \in S_n} H_n(\bar{p}) = H_n(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n});$$

e) $H_n(p_1, ..., p_n) = H_{n+1}(p_1, ..., p_n, 0)$ para todo $n \geq 1$;
f) si $A = \{A_1, .., A_n\}$ y $B = \{B_1, .., B_m\}$ son dos particiones independientes de Ω y en $C(A,B) = \{A_i \cap B_j : i = 1, ..., n, j = 1, .., m\}$ es un refinamiento común, entonces

$$H_{n.m}(C(A,B)) = H_n(A) + H_m(B)$$

o en términos de las definiciones sobre simplex S_e, $H_{n.m}(p_iq_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) = H_n(p1,..,p_n) + H_m(q1,...,q_m)$ donde $p_i = \mathscr{P}(A_i)$ y $q_i = \mathscr{P}(B_i)$ y, por la supuesta independencia de las particiones A y B , $\mathscr{P}(A_i \cap B_j) = p_iq_j$;
g) Si A y B son dos particiones de Ω no necesariamentes independientes y C(A,B) es su refinamiento comun entonces

$$H_{n.m}C(A,B) = H_n(A) + \sum_{i=1}^{m} p_i H_{l_i}(\mathscr{B}^i)$$

donde

$$\mathscr{B}^i = \{A_i \cap B_j : j \in J(i), J(i) = \{j : \mathscr{P}(B_j \cup A_i) > 0\}$$

y H_{l_i} será la enropía en el espacio de probabilidad $(A_i, \mathscr{F}_i, \mathscr{B}^i)$ con $\mathscr{F}_i = \{E = F \in A_i : F \in \mathscr{F}\}$ y $p_i = \frac{1}{p_i}\mathscr{P}$ □

Teorema 4 (**Teorema de Existencia**). *Sea $\lambda > 0$ una constante y denotamos con log a la función logaritmo natural (i.e $logx = \int_1^x \frac{dt}{t}$). Entonces la familia $\mathscr{H} = \{H_n : n \geq 1\}$ con*

$$H_1(1) = 0,\ H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i,$$

satisface las propiedades a), b), c), d), f) y g) precedentes.

Observaciones
1) La función $p\ log\ p$ debe entenderse extendida por continuidad a p=0, es decir $0\ log\ 0 = 0$.
2) La constante λ permite reescribir $H_n(p_1,...,p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i\ log_b\ p_i$ para cualquier base $b > 1$.

Demostración. La propiedad a) es la definicion de H_1 y es compatible con $1\ log\ 1 = 0$.
La propiedad b) es clara con la observación 1) precedente. La propiedad c) se deduce de la acumulatividad de la suma.

$$H_n(p_{\tau(1)}, p_{\tau(2)}, \ldots, p_{\tau(n)}) = -\lambda \sum_{i=1}^{n} p_{\tau(i)} \log p_{\tau(i)}$$

$$= -\lambda \sum_{j=1}^{n} p_j\ log\ p_j = H_n(p_1, ..., p_n)$$

Para probar d) observamos que como el dominio de H_n es compacto, $H_n \geq 0$, H_n es continua y H_n tiene el mínimo valor cero en cada vértice de S_n, $e_i = (0,...,1...,0)$, también tendrá máximo en S_n. Veamos que el máximo de H_n tiene lugar en el punto $(\frac{1}{n},..,\frac{1}{n})$ de S_n. Una desigualdad central en el análisis lo es también en teoráa de la información ver[]. Se trata de la desigualdad de Jensen: si φ es una función escalar convexa, y si f es una función (variable aleatoria) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ cualquiera entonces

$$\varphi(\int_\Omega f d\mu) \leq \int_\Omega \varphi f d\mu$$

o en otros terminos $\varphi(\mathscr{E}(f)) \leq \mathscr{E}(\varphi(f))$, donde $\mathscr{E}$ denota el valor esperado o media. Notemos primero que la función dada por $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por $\varphi(t) = t\log t$, $\varphi(0) = 0$, es convexa. En efecto $\varphi'(t) = 1 + \log t$ y $\varphi''(t) = \frac{1}{t} > 0$.

Por consiguiente la desigualdad de Jensen con $\Omega = (1,...,n)$, $\mathscr{F}$ las partes de Ω y μ la medida que a cada punto de Ω le asigna el peso $\frac{1}{n}$, tomando $f(k) = p_k, k = 1,...,n$, con $p_n \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} log \frac{1}{n} &= \varphi(\frac{1}{n}) = \varphi(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k) = \varphi(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{n}) \\ &= \varphi(\int_{\Omega} f d\mu) \leq \int_{\Omega} \varphi f d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{n} \varphi(f(k)) \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \; log \; p_k\end{aligned}$$

para cualquier $(p_1,...,p_n) \in S_n$.
Entonces, como para $\lambda > 0$ tenemos la desigualdad

$$-\lambda log \frac{1}{n} \geq -\lambda \sum_{k=1}^{n} p_k \; log \; p_k$$

que se rescribe en términos de H_n así $H_n(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}) \geq H_n(p_1,....,p_k)$ para toda elección de $(p_1,...,p_n)$ en S_n. Lo que prueba la propiedad d).
La propiedad e) es clara

$$\begin{aligned}H_{n+1}(p_1,p_2,\ldots,p_n,0) &= -\lambda \sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k - \lambda \; 0 \; log \; p_k \\ = -\lambda \sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k &= H_n(p_1,p_2,\ldots,p_n)\end{aligned}$$

Probemos f) Sean $A = \{A_i : i = 1,...,n\}$ y $B = \{B_j : j = 1,...,m\}$ estocásticamente independientes con $p_i = \mathscr{P}(A_i)$ y $q_j = \mathscr{P}(B_i)$ entonces

$$C(A,B) = \{A_i \cap B_j : i = 1,...,n, j = 1,...m\}$$

con $\pi_{ij} = \mathscr{P}(A_i \cap B_j) = p_i q_j$ por la independencia de eventos A_i y B_j. Calculemos $H_{nm}C(A,B)$,

$$\begin{aligned}H_{nm}(C(AB)) &= -\lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} \log \pi_{ij} \\ &= -\lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j (\log p_i + \log q_j) \\ &= -\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i (\sum_{j=1}^{m} q_j) - \lambda \sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j (\sum_{i=1}^{n} p_i) \\ &= H_n(A) + H_m(B),\end{aligned}$$

ya que $\sum_{j=1}^{m} q_j = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Demostraremos finalmente g) Sean A y B dos particiones, no necesariamente independientes de Ω. Sea $p_i = \mathscr{P}(A_i), 1 \leq i \leq n$. Para una parte fija de A_i la partición B de Ω induce la partición $\mathscr{B}^i = \{A_i \cap B_j : j \; tales \; que \;\; \mathscr{P}(A_i \cap B_j) > 0\}$ de A_i que,

como ya vimos es un espacio de probabilidad con $\mathscr{F}_i$ y $p_i = \frac{1}{p_i}\mathscr{P}$. Sea $q_{ij} = \mathscr{P}_i(A_i \cap B_j)$. Entonces $\pi_{ij} = \mathscr{P}(A_i \cap B_j) = p_i q_j$. Entonces

$$H_{\#\mathscr{B}^i}(\mathscr{B}^i) = -\lambda \sum_{\{j:\mathscr{P}(A_i\cap B_j)>0\}} q_{ij} \log q_{ij} \text{ y,}$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned}
H_{nm}(C(AB)) &= -\lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} \log \pi_{ij} \\
&= -\lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_{ij} \log(p_i q_{ij}) \\
&= -\lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_{ij} (\log p_i + \log q_{ij}) \\
&= -\lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{j:q_{ij}>0\}} p_i q_{ij} \log p_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{j:q_{ij}>0\}} p_i q_{ij} \log q_{ij} \\
&= -\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \ log \ p(\sum_{\{j:q_{ij}>0\}} q_{ij}) - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i (\sum_{\{j:q_{ij}>0\}} q_{ij} \ log \ q_{ij}) \\
&= H_n(A) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_{\#\mathscr{B}^i}(\mathscr{B}^i),
\end{aligned}$$

ya que $\sum_{\{j:q_{ij}>0\}} q_{ij} = 1$, para todo $i = 1, ..., n$. □

2.2.1. El teorema de unicidad de la familia $\mathscr{H}$

El objetivo de esta sección es probar que si una familia $\mathscr{H}$ de funciones satisface los axiomas a), b), c), d), e), f) y g), entonces las funciones que componen la familia $\mathscr{H}$ son de la forma $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ para algúna constante $\lambda > 0$.
Observamos que este conjunto de axiomas no es minimal, pero resultará conveniente a la exposición mantenerlos a todos ya que, como el Teorema de Existencia muestra, no son contradictorios.

Lema 2. *Sea $\mathscr{H} = \{H_n : n \geq 1\}$ una suscesión de funciones con $H_n : S_n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que satisfacen los Axiomas a), b), c), d), e) y f). Entonces existe $\lambda > 0$ tal que*

$$M(n) = máx_{\bar{p}\in S_n} H_n(\bar{p}) = \lambda \ log \ n = -\lambda \ log \ \frac{1}{n}$$

Demostración. Por los axiomas d) y e) tenemos
$M(n) = H_n(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) = H_{n+1}(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0)$ usando de nuevo el axioma d) pero ahora para H_{n+1}, tenemos que $H_n(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0) \leq H_{n+1}(\frac{1}{n+1}, ..., \frac{1}{n+1}) = M(n+1)$. Por consiguiente la función $M : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, es monótona no decreciente $M(n) \leq M(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Notemos ahora que el axioma f) se extiende a más de dos particiones independientes de Ω. En efecto, si $A^1 = \{A_1^1, .., A_{j_1}^1\}, A^2 = \{A_1^2, .., A_{j_2}^2\}, ..., A^m = \{A_1^m, .., A_{j_m}^m\}$ son m particiones independientes de Ω, por interación de f) se tiene que si

$$C(A^1, ..., A^m) = \{\cap_{l=1}^{m} A_{i(l)}^l : i(l) = 1, ..., j_l\},$$

entonces

$$H_{j_1,\ldots,j_m}(C(A^1,\ldots,A^m)) = \sum_{i=1}^{m} H_{j_i}(A^i).$$

Ocurre cuando las m particiones $\{A^i : i = 1,\ldots,m\}$ de Ω tienen, además, el mismo número de elementos. Supongamos que $\#(A^i) = k$ para todo $i = 1,\ldots,m$ supongamos además que todos los eventos de cada una de las particiones A^i tiene la misma probabilidad que necesariamente será $\frac{1}{k}$, entonces las fórmulas precedentes se simplifican a

$$\begin{aligned} H_{k^m}(C(A^1,\ldots,A^m)) &= \sum_{i=1}^{m} H_k(A^i) \\ &= m\, H_k(\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k}) \\ &= m\, M(k) \end{aligned}$$

Por otra parte, como los eventos en $C(A^1,\ldots,A^m)$ tiene probabilidad dada por el producto de las probabilidades de los intersecandos, se tiene que todos tienen la misma probabilidad $\frac{1}{k^m}$. Entonces la útima fórmula se reescribe asi

$$H_{k^m}(\frac{1}{k^m},\ldots,\frac{1}{k^m}) = m\, M(k).$$

Pero, por el axioma d) nuevamente tenemos

$$M(k^m) = m\, M(k)$$

para todos m y k enteros.
Sean ahora k, l y n enteros mayores que 1. Entonces existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $k^m \leq l^n \leq k^{m+1}$. Claro que $m\ log\ k \leq n\ log\ l \leq (m+1)\ log\ k$ y por lo tanto

$$\frac{m}{n} \leq \frac{log\ l}{log\ k} \leq \frac{m+1}{n}.$$

Pero esto también ocurre para la función $M(.)$, en efecto $M(m^k) = m\, M(k)$ y $M(l^m) = n\, M(l)$ y por otra parte, como vimos, que $M(.)$ es decreciente también tendremos

$$M(k^m) \leq M(l^n) \leq M(k^{m+1}).$$

Entonces

$$m\, M(k) \leq n\, M(l) \leq (m+1)\, M(k),$$

por lo tanto

$$\frac{m}{n} \leq \frac{M(l)}{M(k)} \leq \frac{m+1}{n}.$$

Así tenemos que $\frac{M(l)}{M(k)}$ y $\frac{log\ l}{log\ k}$ son dos números reales en el intervalo $[\frac{m}{n}, \frac{m}{n} + \frac{1}{n}]$. Por consiguiente, no pueden estar a distancia mayor que $\frac{1}{n}$. En otras palabras

$$\left|\frac{M(l)}{M(k)} - \frac{\log l}{\log k}\right| < \frac{1}{n}$$

para todo n. Esto implica que $\frac{M(l)}{M(k)} = \frac{log\ l}{log\ k}$ o lo que es lo mismo $\frac{M(k)}{log\ k} = \frac{M(l)}{log\ l}$ para todo par de enteros mayores que uno. Como las variables l y k son independientes, esto sólo puede ocurrir si ambos cocientes son constantes es decir $\frac{M(k)}{log\ k} = \lambda$. Por lo tanto $M(k) = \lambda\, log\ k = -\lambda log\ \frac{1}{k}$. □

Para probar el terorema de unicidad usaremos el siguiente resultado simple para el caso en que las particiones tengan probabilidades racionales.

Lema 3. *Sea* $\{p_1,\ldots,p_n\}$ *un conjunto de n números racionales no negativos tales que* $(p_1,\ldots,p_n)\in S_n$, *i.e.* $\sum_{i=1}^n p_i=1$. *Entonces, existen* $n+1$ *números enteros positivos* $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *y* α *tales que:*

a) $p_i=\dfrac{\alpha_i}{\alpha}$ *y*

b) $\alpha=\sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Demostración. Como $p_i\in\mathbb{Q}^+$ entonces podemos escribir $p_i=\dfrac{\mu_i}{\nu_i}$, donde $\mu_i\in\mathbb{N}_0$ y $\nu_i\in\mathbb{N}$. Sean $\alpha=\prod_{j=1}^n \nu_j$ y $\alpha_i=\mu_i\cdot(\prod_{j\neq i}\nu_j)$. Es claro que α y todos los α_i son enteros no negativos. También es claro que a)se cumple. Para probar b), observemos que

$$\begin{aligned}1=\sum_{i=1}^n p_i=\sum_{i=1}^n\frac{\mu_i}{\nu_i}=\sum_{i=1}^n\frac{\mu_i\cdot(\prod_{j\neq i}\nu_j)}{\prod_{j=1}^n\nu_j}\\ =\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\mu_i\cdot(\prod_{j\neq i}\nu_j)=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\alpha_i,\end{aligned}$$

de donde $\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i$. □

Teorema 5 (Teorema de unicidad de $\mathscr{H}$(Salvo constantes multiplicativas)). *Sea* $\mathscr{H}=\{H_n\geq 1\}$ *una sucesión de funciones con dominio* S_n *e imagen* $\mathbb{R}_0^+$ *que satisface los axiomas a), b), c), d), e), f) y g). Entonces, existe una constante* $\lambda>0$ *tal que:*

$$H_n(p_1,p_2,\ldots,p_n)=-\lambda\sum_{k=1}^n p_i\log p_i$$

para todo $n\geq 1$ *y para todo* $(p_1,\ldots,p_n)\in S_n$.

Demostración. Supongamos primero que $p_1,\ldots,p_n$ son racionales.
Entonces podemos aplicar el lema precedente para escribir $p_i=\dfrac{\alpha_i}{\alpha}$ con α_i y α enteros y $\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i$. Vamos a tomar dos particiones A y B de Ω, no necesariamente independientes. La primera es $A=\{A_1,\ldots,A_n\}$ con probabilidades $p_i=\mathscr{P}(A_i)$. La segunda, B, con $\#(B)=\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned}B=\{B_1,B_2,\ldots,B_{\alpha_1};B_{\alpha_1+1},\ldots,B_{\alpha_1+\alpha_2};B_{\alpha_1+\alpha_2+1}\ldots,B_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3};\ldots;B_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+1},\ldots,B_\alpha\}\\ =\bigcup_{l=1}^n B^l,\end{aligned}$$

con $B^1=\{B_1,\ldots,B_{\alpha_1}\}$, $B^2=\{B_{\alpha_1+1},\ldots,B_{\alpha_1+\alpha_2}\}$,..., $B^n=\{B_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+1},\ldots,B_\alpha\}$ y cada $B^{(i)}$ es una partición del A_i correspondiente en partes igualmente probables. Es decir, la probabilidad de $\mathscr{P}(B)=\dfrac{1}{\alpha_i}$ si $B\in B^{(i)}$. Entonces, por el lema, tendremos que

$$\begin{aligned}H_{\alpha_i}(B^{(i)})=H_{\alpha_i}\left(\frac{1}{\alpha_i},\ldots,\frac{1}{\alpha_i}\right)\\ =\lambda\log\alpha_i.\end{aligned}$$

Sea, como antes, $C(A,B)$ el refinamiento común de A y B, entonces por el axioma g)

$$\begin{aligned} H_\alpha(C(A,B)) &= H_n(A) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_{\alpha_i}(B^{(i)}) \\ &= H_n(A) + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log \alpha_i \\ &= H_n(A) + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log \alpha \ p_i \\ &= H_n(A) + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right) \log \alpha \\ &= H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \lambda \log \alpha. \end{aligned}$$

Ahora calculemos de otra forma $H_\alpha C(A,B)$. Notemos que un evento cualquiera en $C(A,B)$ es de la forma $A_i \cap B_j$ y entonces su probabilidad es $p_i \frac{1}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha}$. Por consiguiente $H_\alpha(C(A,B)) = H_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}\right)$ que por el lema es igual a $\lambda \log \ \alpha$. De aquí que

$$\lambda \log \alpha = H_n(p_1, \ldots, p_n) + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \lambda \log \alpha$$

y finalmente

$$H_n(p_1, \ldots, p_n) = -\lambda \sum_{i=0}^{n} p_i \log p_i$$

□

2.2.2. El Laplaciano y la entropía de Jhon von Neumann

El operador de Laplace en la formulación de Schrödinger de la mecánica cuántica.

En esta sección introducimos brevemente una noción de entropía espectral asociada a los autovalores de operador de Laplace que será de utilidad en el análisis en grafos e hipergrafos. Hace cien años se estaba iniciando la construcción de una de las estructuras teóricas más relevantes de la ciencia moderna: la mecánica cuántica. Heisenberg, Schrödinger y Bohr son los grandes nombres en este desarrollo inicial. Cuando consideramos el operador de Laplace en grafos e hipergrafos y la entropía definida por los autovalores de este operador, será importante entender, o al menos vislumbrar, la importancia que el mismo tiene en la definición de entropía de Von Neumann.
El modelo para la dinámica de una partícula cuántica de masa m y sometida a un potencial externo $V(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en alguna región del espacio $\mathbb{R}^3$, es totalmente diferente al modelo de Newton. Este nos manda a buscar soluciones $\overline{\gamma}$ de la ecuación diferencial ordinaria

$$M \ \ddot{\overline{\gamma}} = -\overline{\nabla}(\overline{\gamma}(t)).$$

La imposibilidad determinista para la existencia de una curva en $\mathbb{R}^3$ que provee completamente, conocidas posición y velocidad iniciales, la trayectoria de la partícula, adquiere ahora una connotación aleatoria intrínseca. Lo más notable es, tal vez, que esa aleatoriedad tenga

un modelo dado por una ecuación diferencial, que ahora es en derivadas parciales. La probabilidad de que la partícula se encuentre en el instante t, en la región E del espacio $\mathbb{R}^3$, está dada por

$$\iiint_E |\psi(x,t)|^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \mathscr{P}\{\text{partícula en } E \text{ en el instante } t\}.$$

La función de cuatro variables reales $\psi(\mathbf{x},t)$ satisface la ecuación de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x},t)$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ y $h > 0$ es la llamada constante de Planck, y Δ denota el operador de Laplace o Laplaciano espacial

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

La razón por la cual el operador $-\Delta$ aparece en la ecuación de Schrödinger admite una analogía clásica sencilla. Si $\bar{p} = m\bar{v}$ es el momento lineal, la energía de la partícula es $E = \frac{1}{2}m\,\bar{v}\cdot\bar{v} = \frac{\bar{p}\cdot\bar{p}}{2m}$. Como el operador momento lineal de una partícula cuántica está dado, a través de su función de onda $\psi(\mathbf{x},t)$, por $\bar{p} = -i\hbar\overline{\nabla}$ donde ∇ (nabla) denota el gradiente espacial, tenemos que $E = \frac{\bar{p}\cdot\bar{p}}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m}$ div grad $= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$. Es importante notar el signo negativo, ya que, en un sentido que precisaremos, el operador Δ es negativo. El signo menos lo convierte en positivo.

En el caso que estamos considerando, de un potencial $V(\mathbf{x})$ independiente del tiempo, un método muy clásico como la separación de variables permite reducir el problema a hallar todos los números reales E (niveles de energía) y todas las funciones $\phi(\mathbf{x})$ tales que resuelvan la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\phi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) = E\phi(\mathbf{x})$$

Notar que si ϕ resuelve este problema con autovalor E y λ es un escalar cualquiera $\lambda\phi$ también resuelve la ecuación con el mismo valor de E. Uno de los primeros desafíos del modelo matemático de la mecánica cuántica fue el de explicar los experimentos de Planck, que ya tenían más de veinte años. En particular, la pérdida de continuidad de las energías observadas la cuantización de la energía.

En el modelo de Schrödinger, esto se traduce en encontrar todos los valores de E (y las correspondientes funciones ϕ) que satisfacen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Un caso simple, paradigmático e ilustrativo es el de una partícula que vive en una dimensión espacial y está confinada a permanecer en un intervalo de longitud $L > 0$.

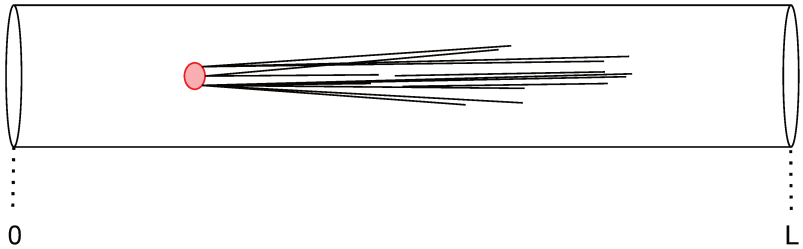


Figura 2.6: Una partícula en dimensión 1.

Esta simplificación reduce el modelo a una dimensión: $\mathbf{x} = (x_1, 0, 0)$, con $\Delta\phi = \frac{d^2}{dx_1}\phi$, y V es infinito a la izquierda de cero y a la derecha de L, y V que se anula en el intervalo $[0, L]$. En este caso, el problema de resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo resulta en encontrar todos los E posibles, con sus respectivas $\phi(x_1)$, de modo que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x_1)}{dx_1^2} = E\phi(x_1), \quad \text{para} x_1 \in [0, L]$$

y adémas $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Puesto que la solución general de la ecuación diferencial es

$$\phi(x_1) = Ae^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}x_1} + Be^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}x_1},$$

para que se cumplan las condiciones de borde $\phi(0) = \phi(L) = 0$, necesariamente debe cumplirse

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}L\right) = 0.$$

Recordando que m, $\hbar$ y L son datos y nos preguntamos por los valores de $E > 0$ que resuelvan esta última ecuación. Resulta claro que eso sólo puede ocurrir cuando $\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L = k\pi, \quad k \geq 1$. En definitiva, sólo el conjunto numerable y discreto de valores de E dados por

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}k^2, \quad k \geq 0$$

provee soluciones.Y, en ese caso, $\phi(x_1) = \phi_k(x_1) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x_1\right)$. Los E_k son los autovalores del operador Laplaciano con el factor $-\frac{\hbar^2}{2m}$, y las ϕ_k son las correspondientes autofunciones. Notemos que, dado que $\hbar$ es muy pequeño, y tambieén si m y L son relativamente grandes los E_k se distancian poco unos de los otros y en algún sentido impreciso pero intuitivo la sucesión E_k, para valores bajos de k luce parecida al continuo pero no lo es.
No iremos aquí a la introducción de las matrices de densidad de la mecánica cuántica. Solo diremos que mucha de la información relevante del sistema físico está contenida en la sucesión $\{E_k : k \geq 1\}$ de energías posibles del sistema.
Si suponemos que el sistema vive en niveles bajos de energía, digamos $\{E_k : 1 \leq k \leq K\}$, entonces podemos normalizar a probabilidades esa lista de autovalores para obtener

$$\tilde{E}_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K} E_k}E_j, \quad \text{para } j = 1, \ldots, K$$

y asociarle al sistema una entropía, pensando en que $\tilde{E}_j$ representa la probabilidad de que el sistema está, en los niveles energéticos menores o iguales a E_k, está precisamente en el estado cuya función de onda es ϕ_j.
Es decir,

$$S_{\text{vN}} = -\sum_{j=1}^{K} \tilde{E}_j \log \tilde{E}_j,$$

que no es otra cosa que la entropía de Shannon construida sobre el espectro del Laplaciano.
En nuestro ejemplo sencillo precedente, como $E_k = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}k^2$, tenemos que
$\sum_{k=1}^{K} E_k = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}\sum_{k=1}^{K} k^2 = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2} \cdot \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$. Entonces
$\tilde{E}_j = \frac{E_j}{\sum_{k=1}^{K} E_k} = \frac{6j^2}{K(K+1)(2K+1)}$ y $S_{vN} = \frac{6}{K(K+1)(2K+1)}\sum_{j=1}^{K} j^2\left(\log\left(K(K+1)(2K+1)\right) - 2\log j\right)$.

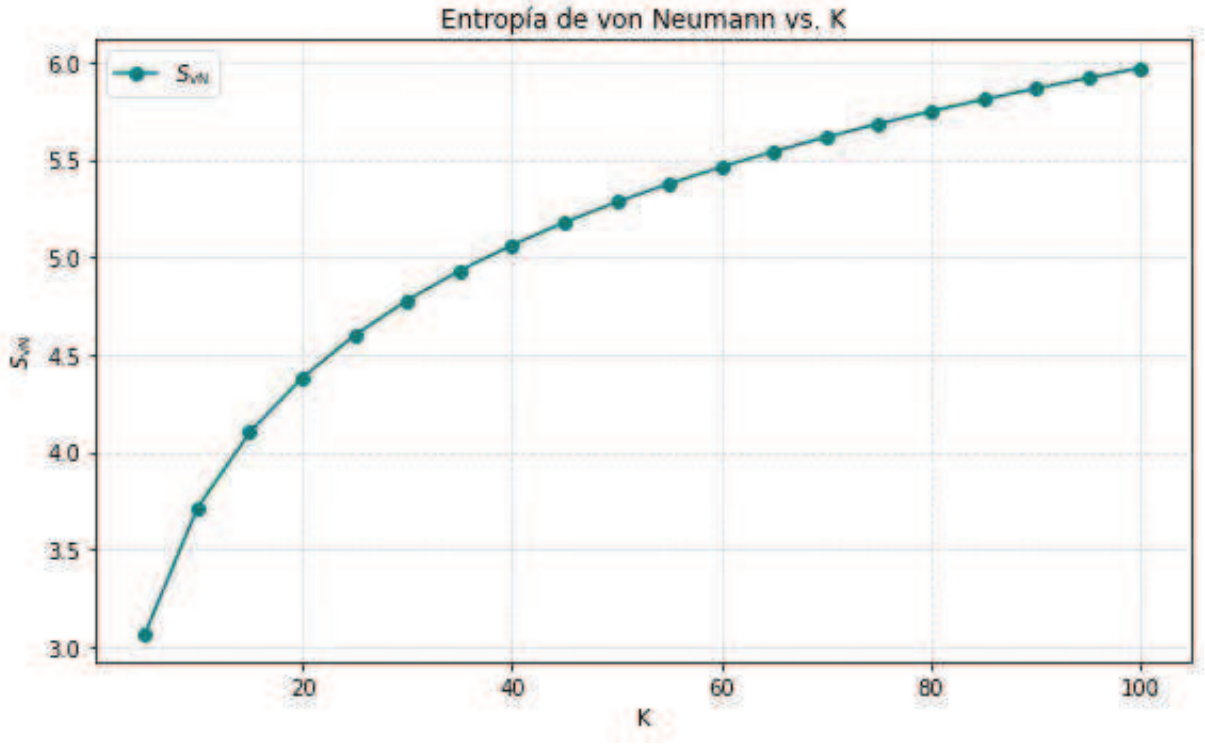


Figura 2.7: Entropía de Von Neumann como función de K.

La figura 2.7 muestra la entropía de Von Neumann asociada a los primeros K autovalores como funcion de K.
Si bien en estos modelos, en los que los autovalores estan asociados a una ecuación diferencial, el concepto de entropía no luce a priori estocástico, en los casos en los que aplicaremos la idea en los capítulos siguientes estaremos considerando series temporales con características aleatorias que producen, matrices de concetividad y laplacianos asociados, como veremos en el capítulo 3, cuyos autovalores heredan esas aleatoriedad.

Capítulo 3

Teoría de Grafos

3.1. Introducción

En este capítulo, comenzaremos con una breve introducción a la teoría de grafos, como punto de partida necesario, dado que esta tesis se centra en las ventajas que ofrece la teoría de hipergrafos frente a la teoría de grafos para la modelización y el análisis de interacciones de alto orden. Asimismo, presentaremos los conceptos básicos de grafos simples, ya que varios de los métodos propuestos para la construcción de hipergrafos se basan en grafos de conectividad. Además, trabajaremos con distintas representaciones planas de hipergrafos, las cuales se describen mediante estructuras de grafos simples.
Por lo tanto, resulta conveniente definir estos conceptos dentro del estructuras más sencillas, como son los grafos, para facilitar y hacer más comprensible su posterior extensión a hipergrafos.
El concepto de grafos simples se remonta al siglo XVIII, cuando el matemático suizo Leonhard Euler dio origen a lo que hoy conocemos como la teoría de grafos. Este campo nació a partir del famoso problema de los puentes de Königsberg.
Formalmente, un grafo se define como un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices o nodos y una colección de pares de vértices, llamados aristas, que pueden ser dirigidas o no. La forma más común de representación de un grafo no dirigido simple es mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).
En la actualidad, la teoría de grafos se ha expandido y es aplicada en distintos campos de la ciencia, como la informática, la biología, la sociología y la ingeniería, demostrando su gran capacidad para modelar redes complejas.

3.2. Conceptos básicos de teoría de grafos.

3.2.1. Presentación de los conceptos básicos a traves de IEEG

La literatura sobre teoría de grafos simples, de los grafos no dirigidos y ponderados es tan extensa y abundante que será útil comenzar repasando la terminología y los conceptos esenciales, a partir de uno de los casos considerados en nuestro análisis de interacciones múltiples, que desarrollaremos en los capítulos siguientes.
Este conjunto de señales proviene de registros de iEEG obtenidos mediante siete electrodos en ratas en distintas fases del ciclo de sueño, AWAKE (vigilia), REM (Rapid Eye Movement o sueño REM), QW (Quiet Wakefulness o vigilia tranquila) y NREM (sueño profundo), cuya disposición se muestra en la Figura 3.1.

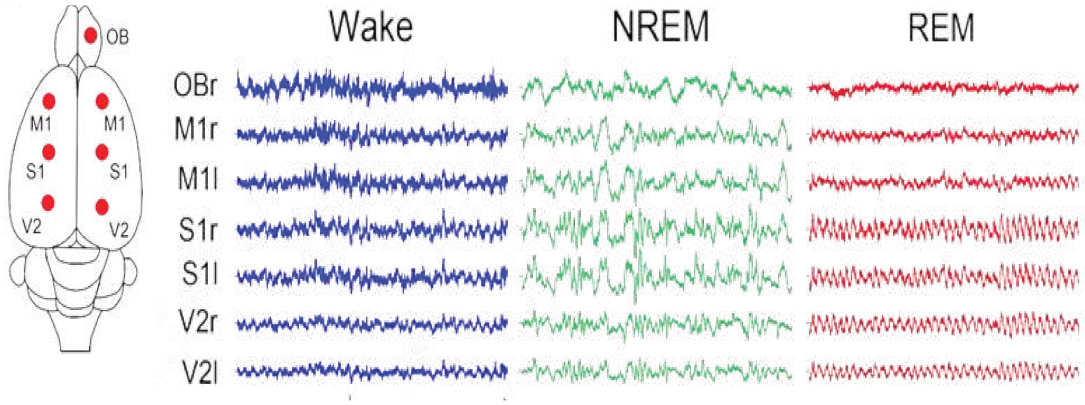


Figura 3.1: Cabeza de un roedor con la ubicación de los siete electrodos estratégicamente posicionados en distintas regiones del cerebro V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio), junto a las señales que capturan en tres estados de sueño.

Las señales fueron obtenidas en el Laboratorio de Neurobiología del Sueño del Departamento de Fisiología de la Facultad de Medicina de la Universidad de la República (UdelaR), bajo la dirección del Dr. Pablo Torterolo.
Para ilustrar la construcción de grafos a partir de las señales de iEEG, consideramos, por simplicidad, uno de los estados: Awake (vigilia). Luego de filtrar las señales como se describió en el Capítulo 1, procesamos cada una de las siete señales en seis bandas de frecuencia estándar: δ [0.5, 4] Hz, θ [4, 8] Hz, α [8,12] Hz, β_1 [12, 16] Hz, β_2 [20, 24] Hz y γ [38, 42] Hz. Posteriormente, aplicamos el algoritmo de PLI en cada banda para obtener las matrices de conectividad cerebral correspondientes: A_δ, A_θ, A_α, A_{β_1}, A_{β_2} y A_γ. A continuación se muestran a modo de ejemplo las matrices de conectividad para la banda δ y θ aplicando el algoritmo de PLI para la rata número 1 (R1).

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 0{,}000 & 0{,}053 & 0{,}010 & 0{,}060 & 0{,}105 & 0{,}045 & 0{,}014 \\ 0{,}053 & 0{,}000 & 0{,}088 & 0{,}233 & 0{,}085 & 0{,}213 & 0{,}057 \\ 0{,}010 & 0{,}088 & 0{,}000 & 0{,}016 & 0{,}023 & 0{,}004 & 0{,}132 \\ 0{,}060 & 0{,}233 & 0{,}016 & 0{,}000 & 0{,}161 & 0{,}197 & 0{,}178 \\ 0{,}105 & 0{,}085 & 0{,}023 & 0{,}161 & 0{,}000 & 0{,}144 & 0{,}113 \\ 0{,}045 & 0{,}213 & 0{,}004 & 0{,}197 & 0{,}144 & 0{,}000 & 0{,}191 \\ 0{,}014 & 0{,}057 & 0{,}132 & 0{,}178 & 0{,}113 & 0{,}191 & 0{,}000 \end{pmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 0{,}000 & 0{,}053 & 0{,}010 & 0{,}060 & 0{,}105 & 0{,}045 & 0{,}014 \\ 0{,}053 & 0{,}000 & 0{,}088 & 0{,}233 & 0{,}085 & 0{,}213 & 0{,}057 \\ 0{,}010 & 0{,}088 & 0{,}000 & 0{,}016 & 0{,}023 & 0{,}004 & 0{,}132 \\ 0{,}060 & 0{,}233 & 0{,}016 & 0{,}000 & 0{,}161 & 0{,}197 & 0{,}178 \\ 0{,}105 & 0{,}085 & 0{,}023 & 0{,}161 & 0{,}000 & 0{,}144 & 0{,}113 \\ 0{,}045 & 0{,}213 & 0{,}004 & 0{,}197 & 0{,}144 & 0{,}000 & 0{,}191 \\ 0{,}014 & 0{,}057 & 0{,}132 & 0{,}178 & 0{,}113 & 0{,}191 & 0{,}000 \end{pmatrix}$$

Cada una de estas matrices tiene entradas no negativas, es nula en su diagonal y es simétrica.
Cada entrada $A_{i,j}$ en estas matrices representa el grado de correlación entre las señales registradas en los electrodos i y j en una banda de frecuencia específica. Para determinar si los electrodos i y j están conectados, se utiliza el criterio de umbral descripto en el Capítulo 1.

Esto nos permite obtener las matrices binarizadas para cada una de las bandas de frecuencias consideradas

$$\tilde{A}_\delta = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&1&0\\ 1&1&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1&0\\ 1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_\theta = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_\gamma = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0\\ 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Estas matrices pueden representarse gráficamente conectando directamente los electrodos i y j mediante un segmento si y solo si el valor correspondiente a la entrada i, j de la matriz vale uno. Utilizando este criterio, se generan seis grafos distintos, cada uno representando una banda de frecuencia específica. Ver Figura 3.2.

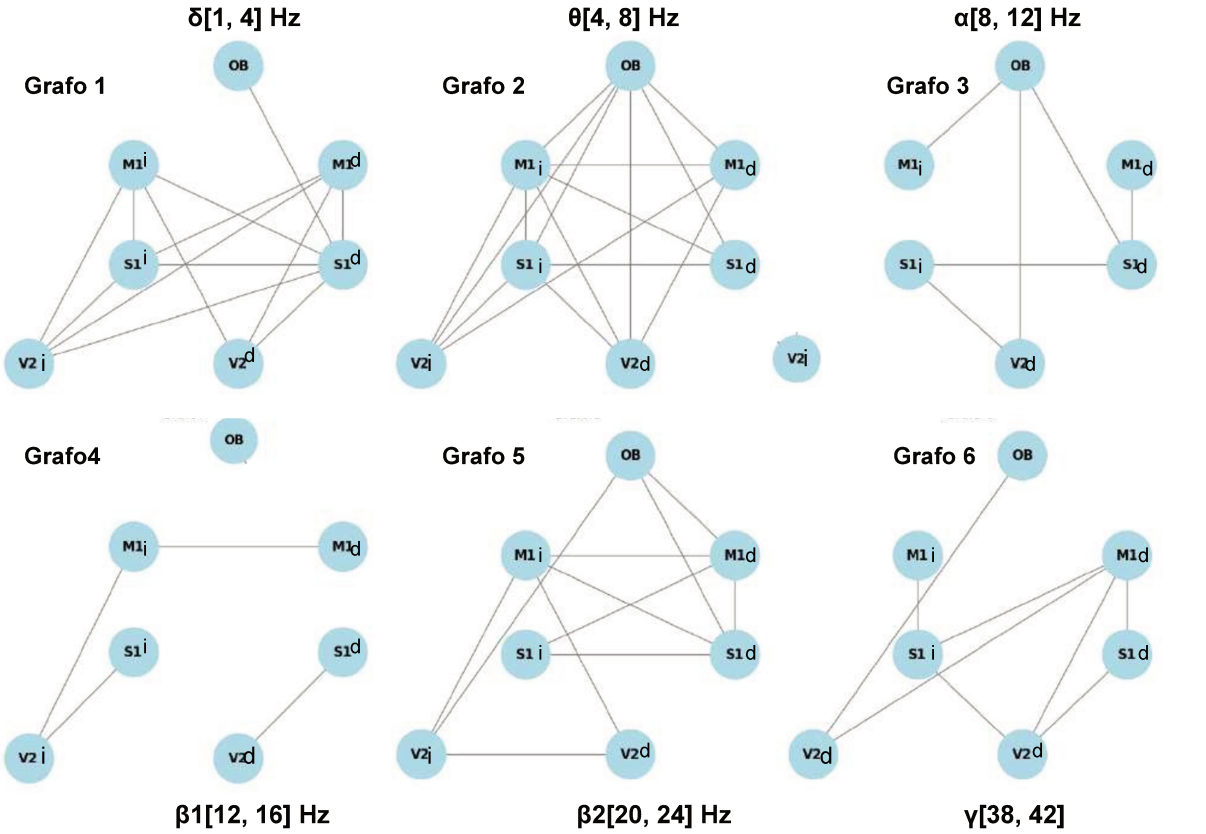


Figura 3.2: Grafos $\mathcal{G}_\delta$, $\mathcal{G}_\theta$, $\mathcal{G}_\alpha$, $\mathcal{G}_{\beta_1}$, $\mathcal{G}_{\beta_2}$ y $\mathcal{G}_\gamma$ por bandas para R_1 en el estado Awake.

Definición 7. *Definimos un Grafo simple no dirigido $\mathscr{G}$ como el par ordenado $\mathscr{G} = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto finito (vértices) y $E \subseteq \{e \in \mathscr{P}(V) : |e| = 2\}$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V (aristas). Donde $\mathscr{P}(V)$ es la familia de todos los subconjuntos de V y $|a|$ es la cantidad de elementos del conjunto a.*

Existe un tipo especial de grafo en el que todos los pares de vértices están conectados por una arista. Es decir en un grafo completo, cada vértice tiene una conexión directa con todos los demás vértices del grafo.

Definición 8. *Un **Grafo completo** es un grafo simple no dirigido $\mathscr{G} = (V, E)$, donde siempre existe una arista $e \in E$ entre cada par de vértices v_i y v_j lo que implica que $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$, donde $n = |V|$.*

La densidad de un grafo está dada por $\Delta = \frac{m}{n(n-1)/2} = \frac{2m}{n(n-1)}$, donde n es la cantidad de vértices y m la cantidad de aristas, esta es una propiedad que determina la proporción de aristas que posee sobre el total de aristas posibles que es $\frac{n(n-1)}{2}$. Un grafo **denso** es un grafo en el que el número de aristas es cercano al número máximo de aristas posibles, es decir, a las que tendría si el grafo fuera completo. Al contrario, un grafo **disperso** es un grafo con un número de aristas muy bajo, es decir, cercano al que tendría si fuera un grafo sin aristas.
En base a la Figura 3.3 podemos decir que el grafo correspondiente a la banda α[8, 16] Hz tiene pocas conexiones, por lo que su densidad será baja. Esto indica una menor conectividad entre las regiones del cerebro donde se ubicó cada electrodo. El grafo de β_1[12, 16] Hz también tiene pocas conexiones y es menos denso que el de la banda α. Los grafos asociados a las bandas δ[1,4] Hz ,θ[4,8] Hz y β_2[20,24] Hz tiene una mayor densidad debido a que la mayoría de los nodos están conectados entre sí, lo que refleja una mayor conectividad en estas bandas de frecuencia. Finalmente la banda γ presenta densidad media.

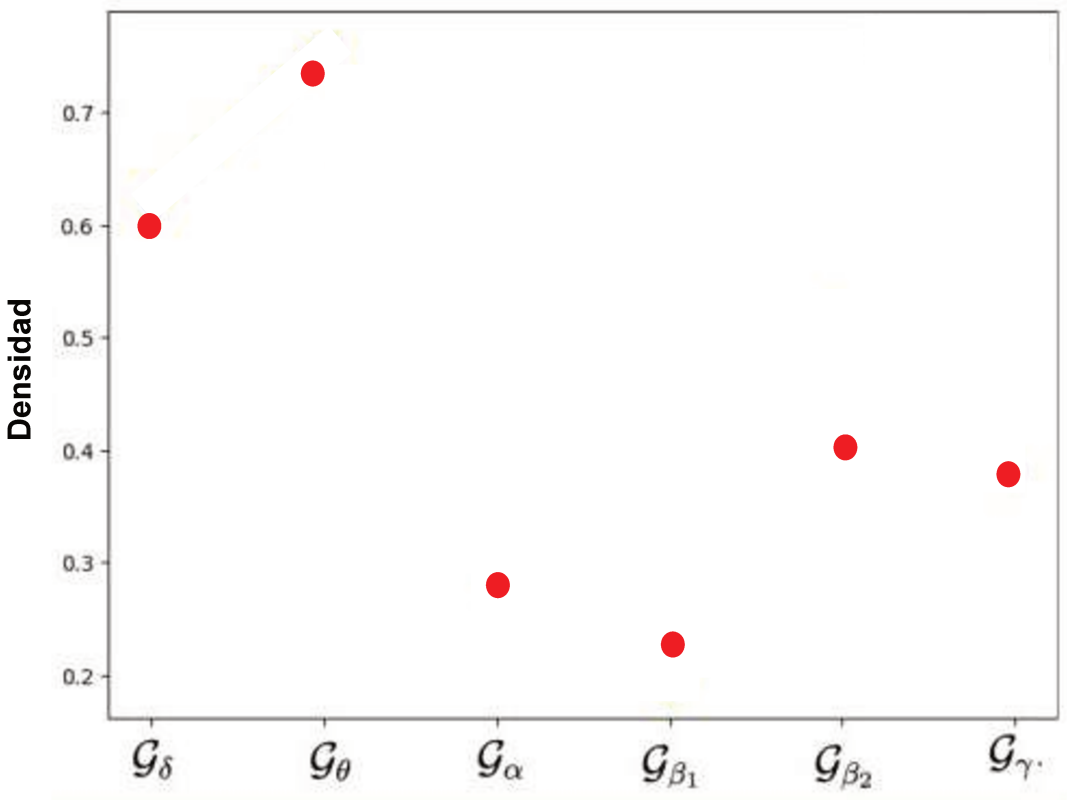


Figura 3.3: Representación de la densidad para los grafos $\mathcal{G}_\delta$, $\mathcal{G}_\theta$, $\mathcal{G}_\alpha$, $\mathcal{G}_{\beta_1}$, $\mathcal{G}_{\beta_2}$ y $\mathcal{G}_\gamma$ por bandas para la rata 1 en el estado Awake.

Los grafos admiten distintas representaciones matriciales, como las matrices de adyacencia e incidencia, que nos ofrecen una forma estructurada de capturar las relaciones y conexiones entre los vértices y las aristas del grafo. La **matriz de adyacencia** refleja las relaciones posibles entre los vértices, mientras que la **matriz de incidencia** nos da información de cómo las aristas conectan a los vértices. Cuando hablamos de dos vértices v_i y v_j, decimos que son **adyacentes** si hay una arista en el grafo que los conecta directamente. En otras palabras, v_i y v_j comparten una conexión si existe una arista $e \in E$ tal que $e = \{v_i, v_j\}$. En la Figura 3.2 tomando el grafo para la primera banda $\mathcal{G}_\delta$ tenemos las siguientes relaciones de adyacencia entre electrodos usando la notación de **i** y **d** para identificar izquierda y derecha en los tres pares de electrodos que tienen una disposición simétrica. $e_1 = \{V2d, S1d\}$, $e_2 = \{V2d, M1d\}$, $e_3 = \{V2d, M2i\}$, $e_4 = \{V2i, S1d\}$, $e_5 = \{V2i, M1d\}$, $e_6 = \{V2i, S1i\}$, $e_7 = \{V2i, M1i\}$, $e_8 = \{S1d, M1d\}$, $e_9 = \{S1d, OB\}$, $e_{10} = \{S1d, M1d\}$, $e_{11} = \{S1i, M1i\}$, $e_{12} = \{Si_1, Md_1\}$, $e_{13} = \{Mi_1, Md_1\}$.
Esta idea es clave en la construcción de la matriz de adyacencia, donde cada entrada $A_{i,j}$ indica si los vértices v_i y v_j están conectados.
Por otro lado, una arista $e \in E$ se dice que **incide** en un vértice $v_i \in V$ si esa arista conecta a v_i con algún otro vértice v_j del grafo (donde $j \neq i$). Esta relación es capturada por la matriz de incidencia, que describe cómo cada arista une pares de vértices. En este caso, cada fila de la matriz de incidencia representa una arista, y cada columna corresponde a un vértice, con entradas que indican si un vértice está involucrado en una arista particular. A continuación presentamos formalmente las definiciones de las matrices de adyacencia A y matriz de incidencia $\mathcal{M}$ que capturan y resumen las relaciones de incidencia y adyacencia.

Definición 9. *Dado $\mathcal{G} = (V, E)$ la matriz de adyacencia A del grafo $\mathcal{G}$ de $n \times n$ con $n = |V|$,*

es la matriz en la que el elemento $a_{i,j}$ toma el valor 1 si existe una arista $e \in E$ que conecte a el vértice v_i con v_j y 0 en caso contrario

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & si\ \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases} \quad para\ i, j = 1, .., n.$$

Observemos que A es simétrica y que si el grafo no tiene bucles $A_{ii} = 0$

Definición 10. *Dado $\mathscr{G} = (V, E)$ se define su matriz de incidencia $\mathscr{M}$ de orden $|E| \times |V|$ como*

$$\mathscr{M}_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ v_j \in e_i \\ 0 & si\ v_j \notin e_i \end{cases} \quad para\ 1 \leq i \leq m\ y\ 1 \leq j \leq n,\ m = |E|, n = |V|.$$

En la Figura 3.2, observamos que un vértice $v_j \in V$ puede ser adyacente a múltiples vértices. Por ejemplo, en el grafo $\mathscr{G}_\delta$, el vértice V2d es adyacente a los vértices S1i, M1d y M1i, lo que significa que tres aristas inciden en él. Este valor se conoce como el *grado* o *valencia* de un vértice $v \in V$ y se denota como gr(v). El grado de un vértice nos indica su nivel de conectividad dentro de la red, proporcionando una medida de la importancia o influencia de dicho nodo en el sistema. Utilizando la matriz de incidencia $\mathscr{M}$ de $\mathscr{G}$ podemos obtener el grado de cada $v_i \in V$.

Proposición 4. *Dado $\mathscr{G} = (V, E)$ sea $\mathscr{M}$ su matriz de incidencia, entonces el grado o valencia de un vértice $v_j \in V$ esta dado por*

$$gr(v_j) = \sum_{i=1}^{|E|} \mathscr{M}_{ij}$$

Será de utilidad definir también la matriz diagonal de los grados de los vértices

$$D_V = diag\{gr(v_1), ..., gr(v_{|V|})\}$$

de orden $|V| \times |V|$.
Observamos que $gr(v_j) = \sum_{\{i \in \{1,...,m\} | \mathscr{M}_{ij} > 0\}}^{|E|} \mathscr{M}_{ij}$

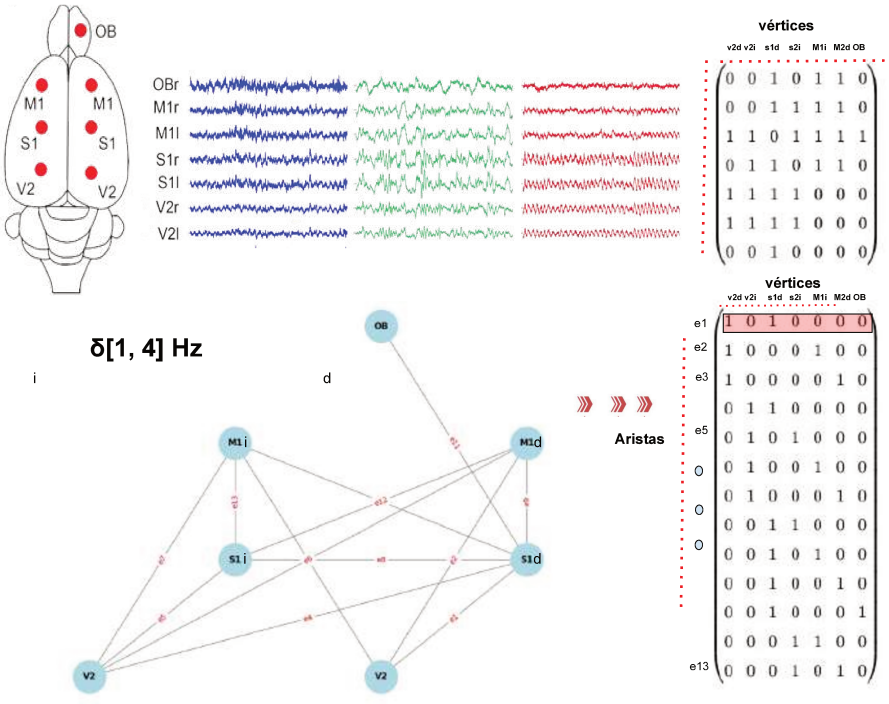
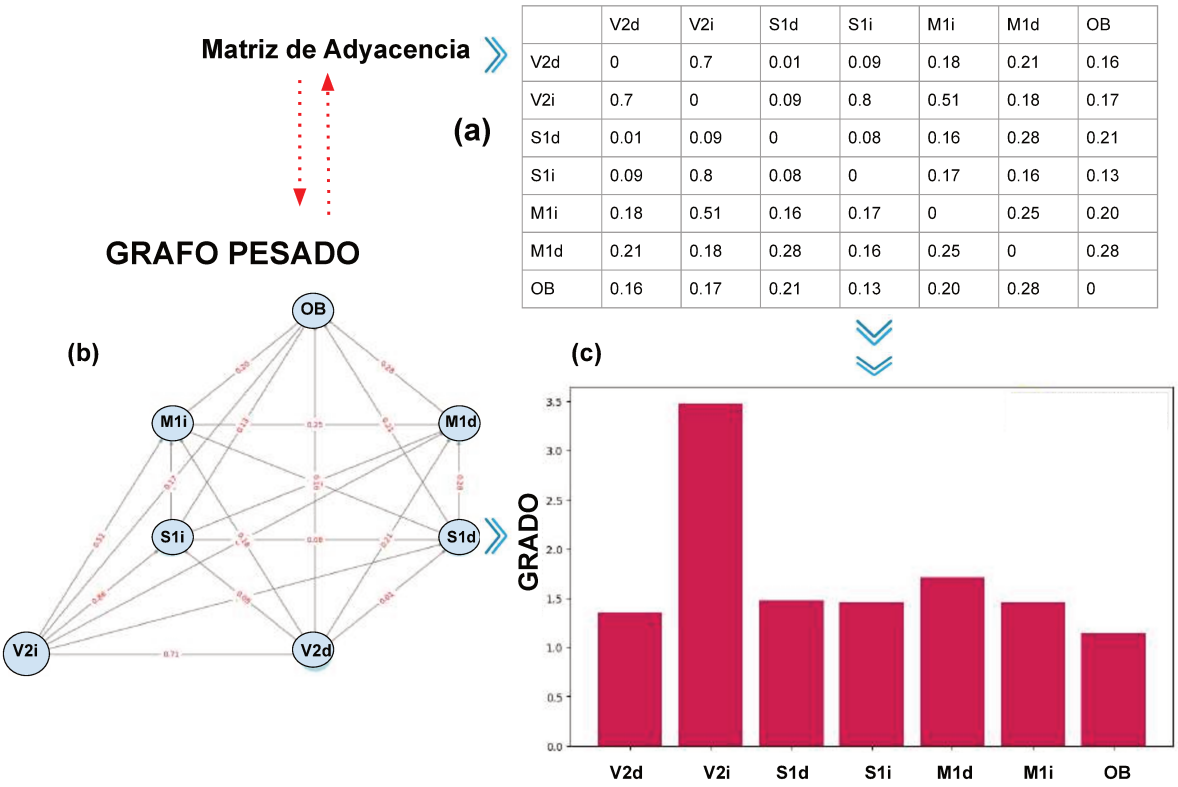


Figura 3.4: (a) $\mathcal{G}_\delta$, (b) matriz de adyacencia, (c) matriz de incidencia.

Las definiciones anteriores se refieren a grafos simples, no dirigidos y no ponderados. Sin embargo, podemos extender estos conceptos a grafos ponderados o pesados donde cada conexión (arista) entre dos vértices tiene un valor asociado, que podría representar cosas como la intensidad de la relación entre ellos, la distancia entre dos puntos o cualquier otra medida que se desee capturar. Si retomamos el ejemplo del cálculo de las matrices PLI de la Subsección 3.2.1 sus representaciones a traves de grafos simples nos dan casos particulares de grafos pesados.



	V2d	V2i	S1d	S1i	M1i	M1d	OB
V2d	0	0.7	0.01	0.09	0.18	0.21	0.16
V2i	0.7	0	0.09	0.8	0.51	0.18	0.17
S1d	0.01	0.09	0	0.08	0.16	0.28	0.21
S1i	0.09	0.8	0.08	0	0.17	0.16	0.13
M1i	0.18	0.51	0.16	0.17	0	0.25	0.20
M1d	0.21	0.18	0.28	0.16	0.25	0	0.28
OB	0.16	0.17	0.21	0.13	0.20	0.28	0

Figura 3.5: (a) Matriz de adyacencia en la banda δ al aplicar PLI. (b) $\mathscr{G}_\delta$ pesado. (c) Grados pesados de cada uno de los vértices.

Formalmente

Definición 11. *Un **grafo pesado no dirigido** se define como una terna $\mathscr{G} = (V, E, W)$, donde $\mathscr{G} = (V, E)$ representa los vértices y las aristas del grafo, y $W : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función que asigna un peso positivo a cada arista del grafo.*

Definición 12. *Dado $\mathscr{G} = (V, E, W)$ la **matriz de adyacencia** A^W de orden $n \times n$ es una matriz simétrica que en el elemento $A^W_{i,j}$ toma el valor del peso de la arista, $w(e)$ si existe una arista entre el vértice v_i y el vértice v_j y si no existe tal arista, el valor será simplemente 0,*

$$A^W_{ij} = \begin{cases} w(e) & si\ e = (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & si\ e = (v_i, v_j) \notin E, \end{cases} \quad para\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Definición 13. *Sea $\mathscr{G} = (V, E, W)$ se define su **matriz de incidencia** $\mathscr{M}^W$ de tamaño $|E| \times |V|$, como la matriz que en cada elemento $\mathscr{M}^W_{ij}$ toma el valor del peso $w(e_i)$ si el vértice v_j está conectado a la arista e_i, y 0 en caso contrario,*

$$\mathscr{M}^W_{ij} = \begin{cases} w(e_i) & si\ v_j \in e_i, \\ 0 & si\ v_j \notin e_i, \end{cases} \quad para\ 1 \leq i \leq m\ y\ 1 \leq j \leq n.\ |E| = m\ y\ n = |V|$$

En un grafo ponderado, el grado no es simplemente la cantidad de conexiones, sino que también tiene en cuenta los pesos de esas conexiones.

Definición 14. *Sea $\mathscr{G} = (V,E,W)$ con su matriz de incidencia $\mathscr{M}^W$, el* ***grado de un vértice*** *v_j se define como la suma de los pesos de todas las aristas incidentes en ese vértice*

$$gr(v_j) = \sum_{\{i\in\{1,\ldots,m\}|\mathscr{M}_{ij}>0\}}^{|E|} w(e_i).$$

Finalmente, la **matriz de grados** $D_V^W = \text{diag}\{gr(v_1), gr(v_2), \ldots, gr(v_{|V|})\}$ de $|V| \times |V|$ sujeta a esta nueva definición de grado.

3.2.2. Caminos en grafos

Si observamos la Figura 3.6, notamos algunas diferencias esenciales entre los seis grafos. En esta sección nos interesa distinguir entre los grafos de tipo δ, θ, β_2 y γ de aquellos de tipo α y β_1 en la Figura 3.6. Mientras que en los cuatro primeros podemos transitar de un vértice cualquiera a otro por caminos de aristas, no ocurre lo mismo con α y β_1. La idea topológica es clásica: la conectividad de un grafo.
En la Figura 3.6 podemos resaltar **dos rutas** posibles en la banda δ para conectar el vértice OB con el vértice V2d, $r_1 = \{e_{11}, e_1\}$ y $r_2 = \{e_{11}, e_{12}, e_6\}$.
En teoría de grafos, estas rutas se definen como caminos que justamente son estas sucesiones de aristas consecutivas. Dos vértices v_i y v_j están conectados si existe una trayectoria (camino) que permite llegar de v_i a v_j, en caso contrario, los vértices están desconectados.

Definición 15. *Dado un grafo $\mathscr{G} = (V,E)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, un* ***camino*** *es una sucesión finita de aristas distintas $e_{i_1}, e_{i_2} \ldots e_{i_k}$ tal que*
$e_{i_l} \cap e_{i_{l+1}} \neq \emptyset$, para todo $l = 1, \ldots, k$.
También podemos concebir un camino como una sucesión de vértices, es decir, aquellos que constituyen los extremos de cada arista. Si $e_{i_l} = \{v_{i_l}, v_{i_{l+1}}\}$, entonces la sucesión de vértices que define el camino puede escribirse como $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{l+1}}$, lo que muestra que dicho camino une el vértice v_{i_1} con el vértice $v_{i_{l+1}}$.

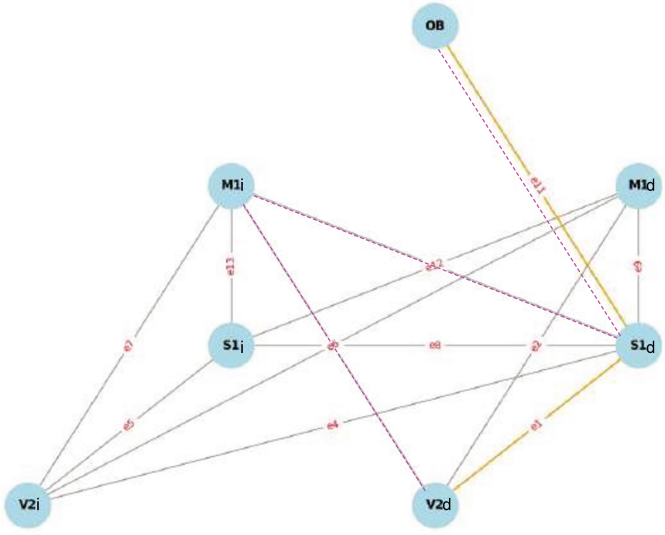


Figura 3.6: Grafo $\mathscr{G}_\delta$ indicando dos caminos posibles para unir el vértice OB con el vértice Vd2, el camino mas corto indicado en color naranja mientras que el segundo camino es de mayor longitud y esta indicado en color magenta.

Parte de esta descripción destaca que dos vértices v_i y v_j están conectados si existe una trayectoria que permite llegar de v_i a v_j. En caso contrario, los vértices están desconectados. Por lo tanto, en los grafos podemos observar tanto grupos de nodos conectados entre sí como grupos de nodos que no están conectados.
En la Figura 3.2, observamos que en las banda β_1 el nodo $V2i$ no está conectado al nodo $V2d$ nodos en $\mathscr{G}_\delta$. Mientras que también en $\mathscr{G}_{\beta_1}$, se puede apreciar que el nodo OB no está conectado a ninguno de los otros nodos.
En este caso, el grafo presenta una desconexión clara, ya que no existe un camino en $\mathscr{G}_{\beta_1}$ que conecte al nodo OB con el resto de los nodos, lo mismo ocurre entre $V2d$ y $S1i$. Este tipo de desconexiones genera lo que se conoce como subgrafos, que son conjuntos de nodos y aristas que pertenecen al grafo original, pero que forman un grupo independiente de otros nodos.
De esta manera, la idea de conectividad en grafos simples surge cuando existe al menos un camino que une cualquier par de vértices del grafo.

Definición 16. *sea $\mathscr{G} = (V,E)$ un grafo diremos que $\mathscr{G}$ es **conexo o conectado** si para cualquier par de vértices $v_i, v_j \in V$ existe al menos un camino que une v_i con v_j. Un grafo que no es conexo se denomina grafo **disconexo o inconexo**.*

Definición 17. *Sea $\mathscr{G} = (V,E)$ un grafo simple. Un subconjunto S de V define una componente conexa de $\mathscr{G}$ si S con todas las aristas que conecta puntos de S entre sí resulta conexo pero si S' es cualquier subconjunto de V que contiene estrictamente a S, entonces S' con todas las aristas en E que conectan sus puntos resulta disconexo.*

Un grafo conexo tiene una única componente conexa, mietras que un grafo no conexo tiene al menos dos componenetes conexas. En la Figura 3.7 podemos observar que en las bandas δ y θ el grafo es conexo con una única componente conexa, mientras que en las bandas α y β_1 el grafo ya deja de ser conexo, en la banda α el vértice $V2i$ se desconecta formando dos componentes conexas $C_1 = \{V2i\}$ y $C_2 = \{0B, M1d, M1i, S1d, S2i, V2d\}$ por otro lado en β_1 tenemos 3 componentes conexas $C_1 = \{OB\}$, $C_2 = \{M1d, M1i, V2i, S1i\}$ y $C_1 = \{V2d, S1d\}$

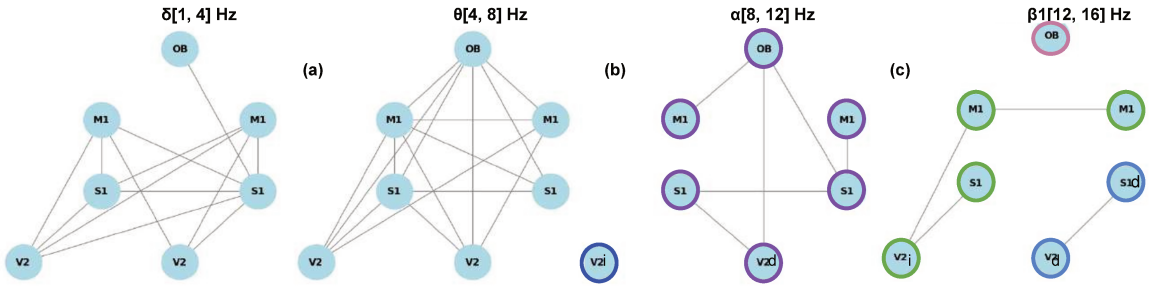


Figura 3.7: (a) Grafos conexos con una componente conexa para las bandas α y θ, (b) grafo no conexo con 2 componentes conexas para la banda α, (c) finalmente un grafo no conexo con tres componentes conexas para la banda β_1, analisis realizado sobre la R1 en el estado Awake.

3.3. El Laplaciano, laplacianos fraccionarios y sus extensiones a contextos abstractos

La manera más clásica de introducir el laplaciano en el espacio $\mathbb{R}^3$ es a través del análisis vectorial. Cuando un campo vectorial $\vec{v}$ es irrotacional, entonces tiene un potencial, es decir $\vec{v} = \overline{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$. Si además ese campo $\vec{v}$ es incompresible, se tiene div $\vec{v} = 0$ o, lo que es lo mismo, $\operatorname{div}\overline{\nabla}\varphi = \overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}\varphi = 0$. Pero, claro, $\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla} = \triangle$ es el operador de Laplace, que está en la definición misma del hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger. Este enfoque de factorización de un operador de segundo orden, como es el laplaciano, como una composición de dos operadores de primer orden, div y grad, es difícil de extender a contextos de baja o nula estructura diferenciable.

El enfoque de Euler–Lagrange, que permite obtener el laplaciano como un operador que describe las funciones de mínima energía de un sistema dado, se muestra mucho más adecuado y más general. Cuando el laplaciano se mira del lado de las frecuencias, usando la transformada de Fourier, el laplaciano no es más que el operador de multiplicación por $-4\pi^2|\xi|^2$, donde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$. En efecto, si $\wedge$ denota la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\widehat{\triangle\varphi}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\,\widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Esto permite también definir los operadores laplacianos fraccionarios de una manera simple en el lado de las frecuencias ξ de la señal o imagen φ.

Recordemos el punto de vista de Euler–Lagrange. Supongamos que φ es la clase de todas las funciones de clase $\mathscr{C}^2(\Omega)$ que se anulan en la frontera del dominio $\partial\Omega$ de $\mathbb{R}^3$. La forma cuadrática

$$Q(\varphi) = \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,dx$$

puede interpretarse como una función de energía asociada a φ. Las formulaciones lagrangianas de la mecánica clásica postulan que los fenómenos físicos transitan caminos de mínima energía. Supongamos que $Q(\varphi)$ alcanza un mínimo local en φ_0. Entonces, para toda $\psi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ que se anulan en el borde y t en un intervalo alrededor de cero, tendremos que la función de t dada por

$$Q(\varphi_0 + t\psi) = \eta_{\varphi_0,\psi}(t)$$

alcanza un mínimo local en $t = 0$.

Por lo tanto

$$\left.\frac{d\eta_{\varphi_0,\psi}}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Calculemos la derivada de $\eta_{\varphi_0,\psi}(t)$ y luego evaluémos en $t = 0$, y apliquemos el teorema de Gauss ($\iiint_\Omega \operatorname{div}\overline{F}\,dx = \iint_{\partial\Omega}\overline{F}\cdot\overline{u}\,d\sigma$).

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d\eta_{\varphi_0,\psi}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \overline{\nabla}(\varphi_0 + t\psi).\overline{\nabla}(\varphi_0 + t\psi)\,dx \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega |\overline{\nabla}\varphi_0|^2 dx + 2t\int_\Omega \overline{\nabla}\varphi_0.\overline{\nabla}\psi\,dx + t^2\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx\Big) \\
&= 2\int_\Omega \overline{\nabla}\varphi_0.\overline{\nabla}\psi\,dx + 2t\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx
\end{aligned}$$

Entonces

$$0 = \left.\frac{d\eta_{\varphi_0,\psi}}{dt}\right|_{t=0} = 2\int_\Omega \overline{\nabla}\varphi_0.\overline{\nabla}\psi\, dx$$
$$= -2\int_\Omega (\operatorname{div}\overline{\nabla}\varphi_0)\,\psi\, dx.$$

En otras palabras,

$$\int_\Omega \triangle\varphi_0\,\psi\, dx = 0$$

para todo $\psi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ y nula en $\partial\Omega$. Esta igualdad, válida para tantas **pruebas** ψ, sólo puede valer si

$$\triangle\varphi_0 = 0,$$

o si φ_0 es armónica. en $\Omega - 1$. Así, el Laplaciano surge como el minimizante de la forma cuadrática (energía) $Q(\varphi) = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx$.
Sea $\mathscr{G} = (V,E)$ un grafo simple con $\#(V) = n$. Entonces, como sabemos, el grafo queda determinado por su matriz de adyacencia $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n}$, donde $a_{ij} = 1$ si hay un arista $e \in E$ que conecta el vertice i con el vértice j, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Supondremos también que $a_{ii} = 0$. Podemos, como hicimos arriba, considerar ahora todos los potenciales funcionales $\varphi : V \to \mathbb{R}$, definidos sobre el conjunto de vértices, y volver a preguntarnos ¿qué les pasa a los potenciales φ que minimizan la energía en $\mathscr{G}$?, ¿Qué energía? Siguiendo la analogía $\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\, dx$, tendremos ahora la forma cuadrática natural, en la que el gradiente se sustituye por diferencias, dada por

$$Q_{\mathscr{G}}(\varphi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j}\left(\varphi_i - \varphi_j\right)^2.$$

Esta **forma cuadrática** es la restricción a la diagonal de la forma bilineal

$$\mathscr{B}_{\mathscr{G}}(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\left(\varphi_i - \varphi_j\right)\left(\psi_i - \psi_j\right),$$

definida sobre pares de funciones en los vértices del grafo $\mathscr{G}$. Cuando el grafo $\mathscr{G}$ es más general y los $a_{i,j}$, los pesos (afinidades) de las aristas, son números no negativos, y cada vértice tiene un peso asignado $b_i > 0,\ i = 1,\ldots,n$, entonces la forma bilineal toma el siguiente aspecto

$$\mathscr{B}_{\mathscr{G}}(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\left(\varphi_i - \varphi_j\right)\left(\psi_i - \psi_j\right) b_i b_j,$$

y la energía será entonces

$$Q_{\mathscr{G}}(\varphi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\left(\varphi_i - \varphi_j\right)^2 b_i b_j.$$

El operador de Laplace en $\mathscr{G}$ aparece naturalmente cuando se busca la ecuación de Euler–Lagrange asociada a la minimización de la energía $Q_{\mathscr{G}}$. El resultado principal está contenido en el próximo enunciado.

Proposición 5. *Si $\varphi^0 : V \to \mathbb{R}$ minimiza la energía $Q_{\mathscr{G}}$ entre todas las funciones escalares en V, entonces φ^0 satisface la ecuación*

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}\left(\varphi_i^0 - \varphi_j^0\right) b_i = 0, \quad \forall\ i = 1,\ldots,n,$$

o bien

$$\sum_{j=1}^{n} b_i a_{i,j} b_j \left(\varphi_i^0 - \varphi_j^0\right) = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

En forma matricial vectorial

$$(D - W)\varphi^0 = 0,$$

donde $W = (w_{ij})$ *con* $w_{ij} = b_i a_{i,j} b_j$, $D = \operatorname{diag} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$, *y* φ^0 *es el vector cuyas n componentes son los valores* φ_i^0 *de* φ^0 *en cada vértice.*

Demostración. Con la notación en el enunciado, la forma cuadrática de la energía es

$$Q_{\mathscr{G}}(\varphi) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(\varphi_i - \varphi_j\right)^2.$$

Supongamos que φ^0 minimiza $Q_{\mathscr{G}}$, es decir $Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0) \leq Q_{\mathscr{G}}(\varphi)$ para toda φ función definida en $\mathscr{V}$. En particular, para cualquier ψ dada y fija por el momento, definida en los vértices, tenemos una familia continua de funciones definidas en $\mathscr{V}$ dada por $\varphi^0 + t\psi, \quad t \in \mathbb{R}$.
Por consiguiente, para φ^0 y ψ fijas, tenemos una buena función de t que satisface

$$Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0) \leq Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + t\psi), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Pero el lado izquierdo de esta desigualdad es $Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + 0\psi)$. Por consiguiente, la función de t dada por $Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + t\psi)$ tiene un mínimo en $t_0 = 0$. Pero como además $Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + t\psi)$, como función de t, es diferenciable, porque es cuadrática, necesariamente tendrá que ocurrir que

$$\frac{d}{dt} Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + t\psi)\Big|_{t=0} = 0.$$

Reescribamos esta identidad y calculando explícitamente la derivada, notamos antes que

$$\begin{aligned} Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + t\psi) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(\varphi_i^0 + t\psi_i - \varphi_j^0 - t\psi_j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(\varphi_i^0 - \varphi_j^0\right)^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(\varphi_i^0 - \varphi_j^0\right) \left(\psi_i - \psi_j\right) \\ &+ t^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(\psi_i - \psi_j\right)^2. \end{aligned}$$

Calculamos la derivada como función de t en la última expresión para $Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + t\psi)$ y evaluándola en $t_0 = 0$, tenemos que

$$\frac{d}{dt} Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0 + t\psi)\Big|_{t=0} = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(\varphi_i^0 - \varphi_j^0\right) \left(\psi_i - \psi_j\right).$$

Por consiguiente, si φ^0 minimiza la energía, necesariamente
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \left(\varphi_i^0 - \varphi_j^0\right) \left(\psi_i - \psi_j\right) = 0$, para toda$\psi$.

Usamos ahora la simetría de la matriz w_{ij}.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left(\varphi_i^0-\varphi_j^0\right)\psi_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left(\varphi_i^0-\varphi_j^0\right)\psi_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left(\varphi_i^0-\varphi_j^0\right)\psi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ji}\left(\varphi_j^0-\varphi_i^0\right)\psi_j \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left(\varphi_i^0-\varphi_j^0\right)\psi_i \\
&= 2\sum_{i}\left(\sum_{j} w_{ij}\left(\varphi_i^0-\varphi_j^0\right)\right)\psi_i
\end{aligned}$$

Es decir para toda ψ se tiene que

$$\sum_{i}\left(\sum_{j} w_{ij}\left(\varphi_i^0-\varphi_j^0\right)\right)\psi_i = 0,$$

por consiguiente

$$\sum_{j} w_{ij}\left(\varphi_i^0-\varphi_j^0\right) = 0, i+1,...,n$$

Que en forma matricial se escribe

$$(D-W)\varphi^0 = 0$$

□

En otros términos, $D-W$ es a $\mathscr{G}$ con la energía $Q_{\mathscr{G}}$ lo que el Laplaciano $\triangle$ es a Ω con $Q(\varphi)=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\,dx$.
Cuando todos los vértices de $\mathscr{V}$ tienen el mismo peso, digamos $b_j=1$ para todo $j=1,\ldots,n$, y el grafo es simple, es decir, $a_{ij}=1$ si hay una arista que une los vértices i y j, y $a_{ij}=0$ en caso contrario, tenemos que $D=\operatorname{diag}\left(\sum_{j=1}^n a_{1j},\sum_{j=1}^n a_{2j},\ldots,\sum_{j=1}^n a_{nj}\right)=\operatorname{diag}\left(gr(v_1),\ldots,gr(v_{|V|})\right)$.
El operador de Laplace Δ en $\mathscr{G}$ toma la siguiente forma matricial simple

$$\begin{pmatrix}
d(1) & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\
-a_{12} & d(2) & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\
-a_{13} & -a_{23} & d(3) & \cdots & -a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & d(n)
\end{pmatrix}$$

Observemos que cuando obtuvimos el Laplaciano como el operador de Euler–Lagrange asociado a la minimización de la energía, como los extremales φ tienen que cumplir que ese operador sea idénticamente cero, podríamos tomar como el Laplaciano él o su opuesto. En el caso clásico del continuo, el operador de Laplace está dado por $\Delta=\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ y, por el teorema de la divergencia de Gauss, cuando actúa sobre las funciones suaves φ que se anulan

en la frontera del dominio Ω, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \Delta\varphi, \varphi\rangle &= \int_\Omega \Delta\varphi \cdot \varphi \, dx \\ &= \int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\nabla\varphi)\, dx \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi)\, dx - \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \, dx \\ &= \int_\Omega \varphi\nabla\varphi.\bar{n}\, d\sigma - \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \\ &= -\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\end{aligned}$$

Por consiguiente, el Laplaciano de Pierre Simon Laplace es definido negativo o mejor, con notación corriente, semidefinido negativo. En la literatura y en la práctica del uso del operador en contextos discretos, como la teoría de grafos, el signo está invertido. Resulta que $\triangle_{\mathscr{G}} = D - W$ es semidefinido positivo.

Proposición 6. *Para toda φ definida en los vértices de $\mathscr{G}$, se tiene que $\langle \Delta_{\mathscr{G}}\varphi, \varphi\rangle \geq 0$, donde $\langle \psi, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i\varphi_i$.*

Demostración. Usando nuevamente la simetría de la matriz W, tenemos

$$\begin{aligned}\langle \Delta_{\mathscr{G}}\varphi, \varphi\rangle &= \sum_{i=1}^n (\Delta_{\mathscr{G}}\varphi)_i \, \varphi_i \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n (D_{ij} - w_{ij})\varphi_j\Big)\, \varphi_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j}\varphi_j\varphi_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}\varphi_i\varphi_j. \\ &= \sum_{i=1}^n D_{ii}\varphi_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}\varphi_i\varphi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}\left(\varphi_i^2\varphi_i\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}\left(\varphi_j^2 - \varphi_i\varphi_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}\left(\varphi_i^2 + \varphi_j^2 - 2\varphi_i\varphi_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}(\varphi_i - \varphi_j)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

□

Notemos que $\langle \Delta_{\mathscr{G}}\varphi, \varphi\rangle$ determina la forma cuadrática de la energía. El siguiente resultado es entonces una consecuencia de la simetria y de la definicion positiva (no negativa) de $\triangle$

Corolario 1. *Sea $\mathscr{G}$ conexo, entonces existe una sucesión*

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$$

de números reales no negativos y una correspondiente sucesión ϕ^j, $j = 0, \ldots, n-1$, que son los autovalores y las autofunciones de $\triangle$,

$$\triangle \phi^j = \lambda_j \phi^j.$$

Además

$$\langle \phi^i, \phi^j \rangle = \delta_{ij},$$

y $\phi^0(k) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ para todo $k = 1, \ldots, n$. y las $\{\phi^j, j = 0, ..., n-1\}$ forman una base ortonormal del espacio de las funciones en los vértices del grafo

En la última proposición, en el cálculo para demostrar que $\triangle_{\mathscr{G}}$ es definido positivo, probamos una identidad fundamental

$$\langle \triangle_{\mathscr{G}} \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(\varphi_i - \varphi_j\right)^2 = Q_{\mathscr{G}}(\varphi),$$

que es la energía de φ en el grafo $\mathscr{G}$. Usando esa identidad, podemos probar que, como en mecánica cuántica, si consideramos a las autofunciones normalizadas $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ como los estados fundamentales del grafo, los correspondientes autovalores representan la energía del estado fundamental.

Proposición 7. *sean ϕ^k y λ_k las autofunciones normalizadas y los autovalores de $\triangle_{\mathscr{G}}$. Entonces*

$$Q_{\mathscr{G}} = \lambda_k$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_k \langle \phi^k, \phi^k \rangle = \langle \lambda_k \phi^k, \phi^k \rangle \\ &= \langle \triangle_{\mathscr{G}} \phi^k, \phi^k \rangle \\ &= Q_{\mathscr{G}}(\phi^k) \end{aligned}$$

□

Recordemos que, en su versión frecuencial de Fourier de $\mathbb{R}^n$, el operador $-\triangle$ clásico tiene la fórmula sencilla de multiplicación por $4\pi^2|\xi|^2 = 4\pi^2(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)$,

$$(-\triangle \varphi)\widehat{\ }(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \, \widehat{\varphi}(\xi),$$

Esta forma sencilla de operador multiplicador genera inmediatamente la idea de tomar potencias de $-\triangle$. Por ejemplo $\sqrt{-\triangle}$. Es de esperar que $\sqrt{-\triangle}$ sea un operador diferencial de primer orden tal que

$$\begin{aligned} (\sqrt{-\triangle}\varphi)\widehat{\ }(\xi) &= \sqrt{4\pi^2(\xi) 2} \widehat{\varphi}(\xi) \\ &= 2\pi|\xi|(\widehat{\varphi}(\xi)) \end{aligned}$$

Recordemos que $\widehat{\nabla \varphi}(\xi) = -2\pi i \xi \, \widehat{\varphi}(\xi)$, define bien el operador gradiente vectorial.
En cambio, $\sqrt{-\triangle}$ tiene un comportamiento diferente. Es no local. Es decir, los valores de $\sqrt{-\triangle}\,\varphi$ en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ pueden depender de valores de φ en puntos muy lejanos de x. En cambio, las potencias enteras de $-\triangle$, digamos $(-\triangle)^m$ con $m \geq 1$, entero, siguen siendo operadores locales, y su versión de Fourier está dada por

$$((-\triangle)^m \varphi)\widehat{\ }(\xi) = (4\pi^2|\xi|^2)^m \, \widehat{\varphi}(\xi).$$

Notemos que cuando $|\xi|^2$ es chico, más pequeño es $(4\pi^2|\xi|^2)^m$, y cuando $|\xi|^2$ es grande ocurre lo contrario. Por lo tanto, las potencias enteras de $-\triangle$ resaltan las frecuencias altas contenidas en φ y tienden a ignorar las bajas frecuencias. Esto puede verse como un mecanismo de filtrado.
La teoría espectral para $\triangle_{\mathscr{G}}$ nos permite establecer analogías útiles.

Proposición 8. *Sea $\varphi : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ una función definida en los vértices de $\mathscr{G}$. Entonces*

$$(\Delta_{\mathscr{G}}\varphi)(i) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \langle \varphi, \phi^j \rangle \, \phi^j(i)$$

Demostración. Como $\{\phi^j, j = 0, ..., n-1\}$ es una base ortonormal para el conjunto de todas las funciones reales en $\mathscr{V}$, tenemos que

$$\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \langle \varphi, \phi^j \rangle \phi^j.$$

Por la linealidad del operador $\triangle_{\mathscr{G}}$, se tiene

$$\begin{aligned} \triangle_{\mathscr{G}}\varphi &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle \varphi, \phi^j \rangle \triangle_{\mathscr{G}} \phi^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle \varphi, \phi^j \rangle \lambda_j \phi^j. \end{aligned}$$

□

Dada una función cualquiera g definida en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, podemos definir $g(\triangle_{\mathscr{G}})$ utilizando el espectro de $\triangle_{\mathscr{G}}$ de manera similar a las definiciones clásicas de raíz cuadrada de $\sqrt{-\Delta}$ o Δ^s,

$$g(\Delta_{\mathscr{G}})(\varphi) = \sum_{j=0}^{m-1} g(\lambda_j) \langle \varphi, \phi^j \rangle \phi^j.$$

En particular $\sqrt{\Delta_{\mathscr{G}}}(\varphi) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_j} \langle \varphi, \phi^j \rangle \phi^j$, o $\Delta_{\mathscr{G}}^k(\varphi) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k \langle \varphi, \phi^j \rangle \phi^j$.
Pero como la g puede ser cualquier función. Eligiéndola adecuadamente, puede verse $g(\Delta_{\mathscr{G}})(\varphi)$ como un método de filtrado de la señal φ de acuerdo al tamaño de los autovalores del laplaciano en el grafo $\mathscr{G}$, que de algún modo reflejan análogia con las frecuencias clásicas. Ya vimos que $\triangle_{\mathscr{G}}$ tiene siempre a λ_0 como autovalor y una función constante no nula en los vértices $\mathscr{V}$ de $\mathscr{G}$ pertenecerá al autoespacio corresondiente a λ_0.
Pero cuando el grafo no es conexo el autoespacio de λ_0 tiene dimension mayor que uno.

Proposición 9. *La multiplicidad del autovalor λ_0 en $\mathscr{G}$ coincide con el número de componentes conexas de $\mathscr{G}$.*

Demostración. Recordemos que si $\tilde{\mathscr{V}} \subset \mathscr{V}$ es un subconjunto de vértices, decimos que $\tilde{\mathscr{V}}$ es conexo si para todos $i, j \in \tilde{\mathscr{V}}$ con $i \neq j$, existen vértices $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \tilde{\mathscr{V}}$ tales que $i_1 = i$, $i_m = j$ y i_l e i_{l+1}) están conectados por una arista en $(w_{i_l, i_{l+1}} > 0)$ para todo $l = 1, \ldots, m-1$.
Una componente conexa de $\mathscr{G}$ es un conexo maximal. Es decir, $\tilde{\mathscr{V}}$ es una componente conexa de $\mathscr{G}$ si $\tilde{\mathscr{V}} \subset \mathscr{V}$, $\tilde{\mathscr{V}}$ es conexo y, si $\tilde{\mathscr{V}} \subsetneq \mathscr{V}'$, entonces $\mathscr{V}'$ no es conexo.
Es claro que existe $k = 1, \ldots, K$ tal que $\mathscr{V} = \bigcup_{k=1}^{K} \mathscr{V}_k$, donde $\mathscr{V}_k$ son las componentes conexas de $\mathscr{G}$.

Supongamos que $k = 1$, entonces, como vimos en la proposición anterior, si ϕ^0 es una autofunción correspondiente a λ_0, tenemos que

$$Q_{\mathscr{G}}(\phi^0) = \lambda_0 = 0.$$

Pero esto implica la anulación de la forma cuadrática de la energía en ϕ^0, esto es,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(\phi_i^0 - \phi_j^0)^2 = 0.$$

Como todos los términos de la suma doble son no negativos, esto solo puede ocurrir si $w_{ij}(\phi_i^0 - \phi_j^0)^2 = 0 \quad$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Sean $i_1, i_2, \ldots, i_m$ como antes, los que conectan un i con un j cualquiera en $\mathscr{V}$. Entonces, $w_{i_1 i_2}(\phi_{i_1}^0 - \phi_{i_2}^0)^2 = 0, \quad w_{i_1 i_2} > 0$; $w_{i_2 i_3}(\phi_{i_2}^0 - \phi_{i_3}^0)^2 = 0, \quad w_{i_2 i_3} > 0$; $\ldots$ $w_{i_{m-1} i_m}(\phi_{i_{m-1}}^0 - \phi_{i_m}^0)^2 = 0, \quad w_{i_{m-1} i_m} > 0$. Por consiguiente, $\phi_i^0 = \phi_{i_2}^0 = \phi_{i_3}^0 = \ldots = \phi_{i_{m-1}}^0 = \phi_j^0$ y resulta que $\phi_i^0 = \phi_j^0$ para cualquier elección de $i \neq j$ en $\{1, \ldots, n\}$. Entonces, ϕ^0 es constante y normalizada con la norma $L^2(\mathscr{V})$, será $\phi_i^0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Veamos ahora qué ocurre cuando $k > 1$. Notemos primero que, como ocurre con el operador $-\Delta$ clásico, $\Delta_{\mathscr{G}}$ es *intrínseco*, en el sentido de que, así como $-\Delta = -\text{divgrad}$ no depende del sistema de coordenadas, $\Delta_{\mathscr{G}}$ no depende de la numeración de los vértices. Así, teniendo k componentes $\mathscr{V}$, podemos numerarlo de manera que los números dentro de cada componente sean consecutivos $\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{l=1}^{k} I_l$, I_l un intervalo de enteros consecutivos. Como cada I_l numera la componente conexa de $\mathscr{V}_l$, se tendremos que $w_{ij} = 0 \quad$ siempre que $\quad i \in V_l$ y $j \in V_{l'}, \quad$ con $l \neq l'$, ya que V_l y $V_{l'}$ no están conectados. Entonces, en el análisis de la igualdad $Q_{\mathscr{G}}(\varphi^0) = 0$.
Veamos que podemos pensar en los bloques matriciales w_{ij} en cada $\mathscr{V}_l$, y escribir

$$0 = \sum_{l=1}^{k}\sum_{i\in I_l}\sum_{j\in I_l} w_{ij}\left(\phi_i^0 - \phi_j^0\right)^2.$$

Con el mismo análisis que hicimos antes, tenemos que ϕ^0 tiene que ser constante en cada $\mathscr{V}_l$, pero no necesariamente en todo $\mathscr{V}$. Esto significa, en particular, que con k funciones del tipo $\phi_i^{0l} = 0$ si $i \notin \mathscr{V}_l$ y $\phi_i^{0l} = \frac{1}{\sqrt{\#(I_l)}}$ si $i \in \mathscr{V}_l$, podemos generar el autoespacio asociado al autovalor $\lambda_0 = 0$. □

Otra de las analogías de interés entre el Laplaciano clásico y $\triangle_{\mathscr{G}}$ está en las fórmulas de valor medio de funciones armónicas. Recordemos que, dado un dominio Ω en $\mathbb{R}^n$, una función φ de clase $\mathscr{C}^2(\Omega)$ es armónica en Ω si $\triangle\varphi = 0 \quad$ en Ω. Para las funciones armónicas clásicas valen las fórmulas de valor medio

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{1}{|B(x,r)|_n}\int_{B(x,r)} \mu(y)\,dy \\ &= \frac{1}{|\mathbb{S}(x,r)|_{n-1}}\int_{\mathbb{S}(x,r)} \mu(y)\,d\sigma(y)\end{aligned}$$

para toda $B(x,r)$ tal que $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ donde $|B(x,r)|_n$ es el volumen n-dimensional de la bola sólida $B(x,r) = \{y : |x-y| < r\}$ y $\mathbb{S}(x,r)$ es la clásica esfera $\mathbb{S}(x,r) = \{y : |x-y| = r\}$ y $|\mathbb{S}(x,r)|_{n-1}$ su área $(n-1)$-dimensional.
Cuando intentamos extrapolar este tipo de resultados al caso de $\triangle_{\mathscr{G}}$ para un grafo dado, vemos que, careciendo de una métrica a priori en $\mathscr{V}$, no tenemos nociones de bola, y menos

aún de cáscara esférica. Sin embargo, si interpretamos $B(x,r)$ como los r-vecinos de x, sí tenemos una noción de vecindad al nodo $i \in \mathscr{V}$, dada por todos los $j \in \mathscr{V}$ que están conectados con i.
Es decir, $\mathscr{N}(i) = \{j \in \mathscr{V} : w_{ij} > 0\}$.
Por analogía con el caso clásico, se dice que una función φ, definida en los vértices de un grafo simple $\mathscr{G}$, es *armónica* en el vértice i si

$$\varphi(i) = \frac{1}{\text{grado}(i)} \sum_{j \in \mathscr{N}(i)} \varphi(j),$$

o escrito de otra forma , φ es armónica en $i \in \mathscr{V}$ si y solo si

$$\sum_{j \in \mathscr{N}(i)} (\varphi(i) - \varphi(j)) = 0.$$

Si el grafo $\mathscr{G}$ es conexo, las únicas funciones que son armónicas en todos los vértices son las funciones constantes. Si el grafo $\mathscr{G}$ no es conexo, las funciones armónicas son aquellas que son constantes en cada componente conexa.
Recordemos que el problema de Dirichlet en un dominio Ω consiste en hallar una función armónica en Ω con un valor prescrito en su frontera.

$$(D) = \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

En un grafo conexo $\mathscr{G}$, la analogía se resuelve tomando en lugar de la frontera $\partial\Omega$, cualquier conjunto no vacío de vértices.

Teorema 6. *Sea $\mathscr{G}$ un grafo conexo y $\mathscr{V}$ su conjunto de vértices. Sea $\tilde{\mathscr{V}} \subseteq \mathscr{V}$ un subconjunto no vacío cualquiera y $g : \tilde{\mathscr{V}} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera dada. Entonces, existe una unica función $\varphi : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ tal que φ restringida a $\tilde{\mathscr{V}}$ coincide con g y φ es armónica en todos los vértices que están en $\mathscr{V} \setminus \tilde{\mathscr{V}}$.*

En la Figura 3.8 y 3.9 presentamos una tabla con el espectro para cada uno de los grafos de la Figura 3.2. En bases a las gráficas de autovalores asociados $\mathscr{G}_\delta$, $\mathscr{G}_\theta$, $\mathscr{G}_{\beta_2}$ y $\mathscr{G}_\gamma$, se observa que estos tienen una solo autovalor igual a cero por lo tanto son conexos, mientras que para $\mathscr{G}_\alpha$,$\mathscr{G}_{\beta_1}$ se tiene 2 y 3 autovalores nulos, en el primer caso vemos la presencia de dos componentes conexas ver Figura 3.7 y tres componentes conexas para $\mathscr{G}_{\beta_1}$.

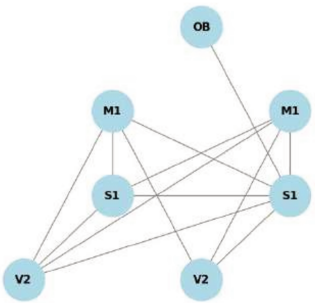
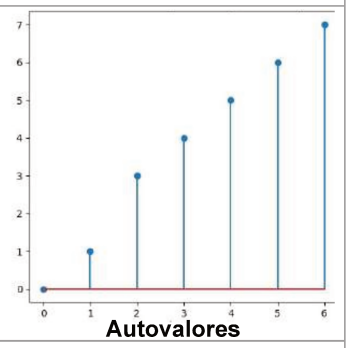
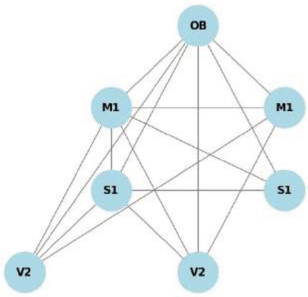
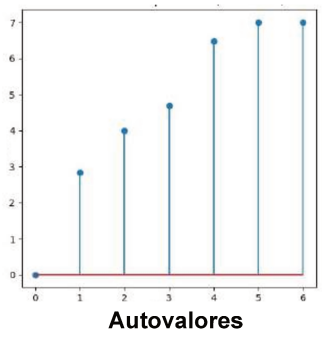
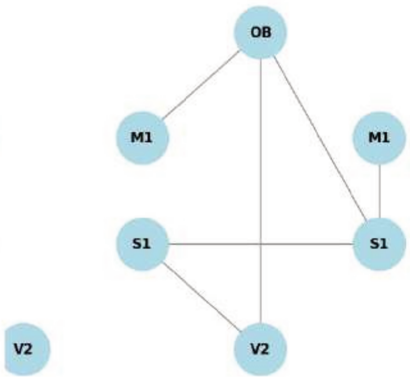
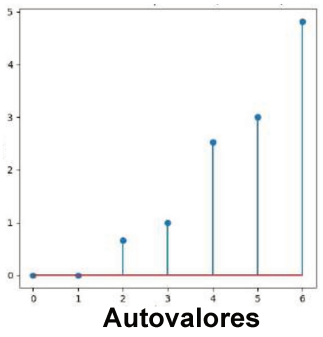
Banda	Grafo	Espectro autovalores
δ[1, 4] Hz		
θ[4, 8] Hz		
α[8, 12] Hz		

Figura 3.8: Autovalores para cada uno de los grafos asociados al estado Awake, en cada una de las bandas.

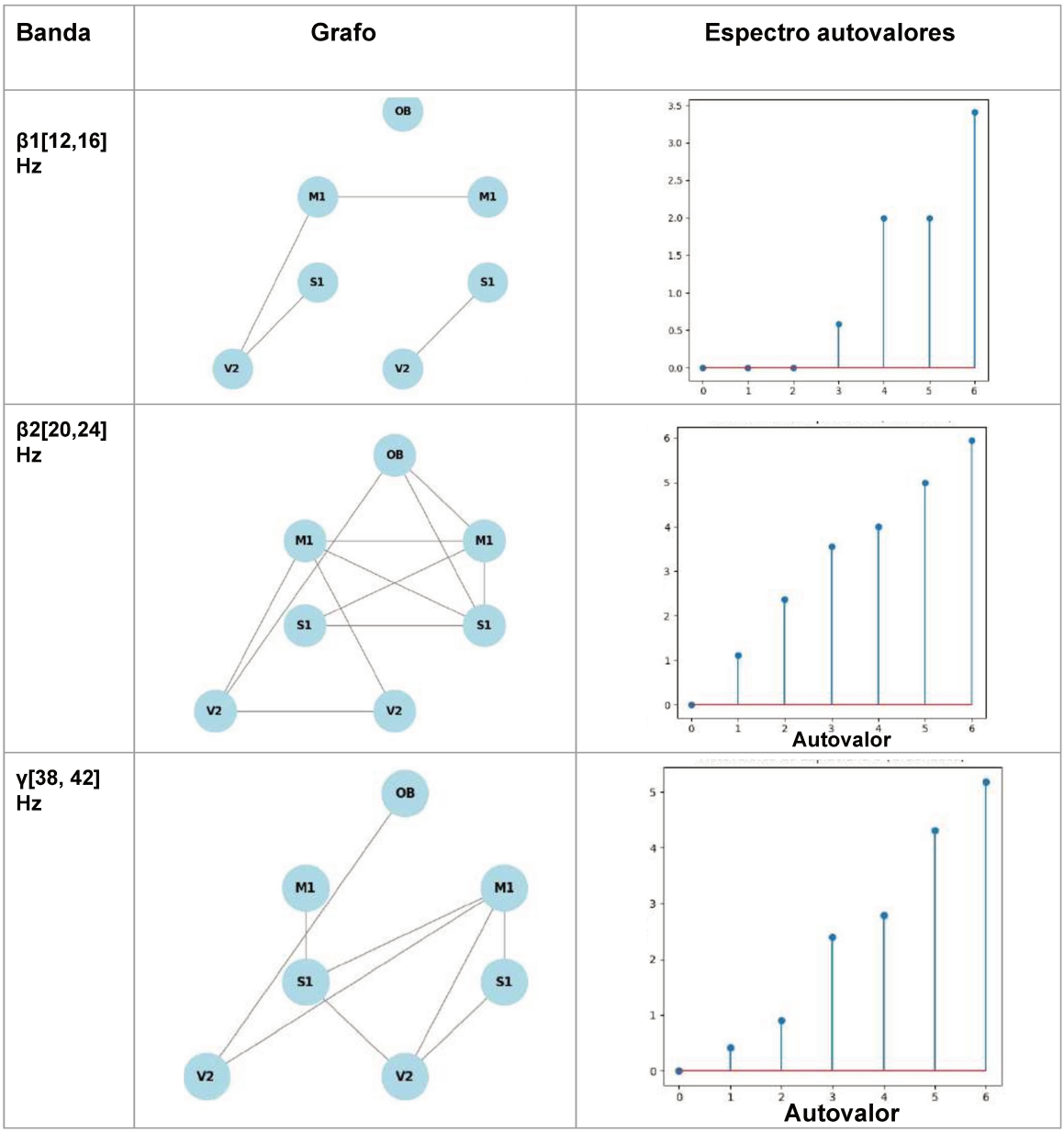


Figura 3.9: Autovalores para cada uno de los grafos asociados al estado Awake, en cada una de las bandas.

3.3.1. Entropía de von Neumann en grafos

Retomando la definición del Capítulo 2, la entropía de von Neumann puede aplicarse a grafos como una medida que combina conceptos de la teoría de grafos, la mecánica cuántica y la teoría de la información. Esta entropía se basa en la matriz Laplaciana del grafo. Al aplicar la entropía de von Neumann, es posible cuantificar el grado de orden o desorden en la distribución de las conexiones dentro del grafo, lo que permite estudiar de manera efectiva la topología y las propiedades intrínsecas de las redes complejas, así como su organización interna.

Definición 18. *Sea $\mathscr{G} = (V,E)$ un grafo no pesado, con $|V| = n$, sea $\triangle\mathscr{G}$ su matriz Lapla-*

ciana con autovalores de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *la entropía de von Neumann de* $\mathscr{G}$ *se define como:*

$$S_{vN}(G) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(\mu_i),\ \mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

En la Figura 3.10, se muestran las entropías correspondientes a los grafos asociados a las diferentes bandas de frecuencia de R1 en el estado Awake(AW). Se observa que $\mathscr{G}_\alpha$ y $\mathscr{G}_{\beta_1}$ exhiben los valores más altos de entropía, lo que refleja una mayor complejidad estructural y heterogeneidad en las conexiones entre los vértices. En estos grafos, algunos nodos están altamente conectados mientras que otros tienen pocas conexiones, lo que indica una red con una distribución desigual en los grados de los nodos y, por lo tanto, una estructura menos regular. Por otro lado, $\mathscr{G}_\theta$ presenta la entropía más baja, lo que sugiere una estructura más ordenada y regular, caracterizada por conexiones distribuidas de manera más uniforme y grados similares entre los vértices. Finalmente, $\mathscr{G}_{\beta_2}$ y $\mathscr{G}_\gamma$ muestran un valor de entropía intermedio, lo que indica una complejidad moderada en su estructura, con cierta variación en los grados de los nodos, pero sin llegar a extremos significativos.

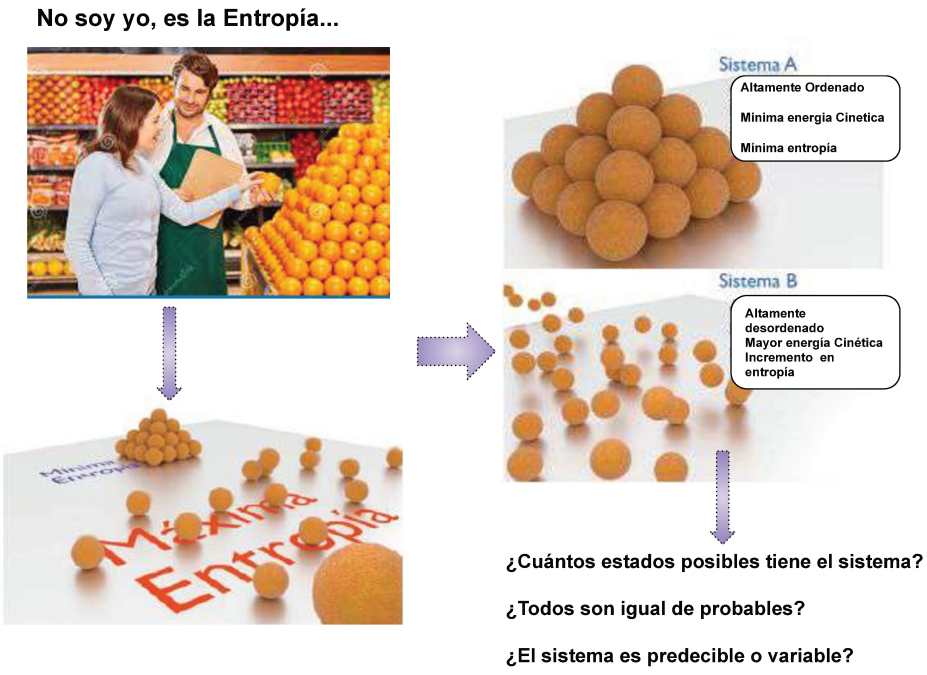


Figura 3.10: Entropía asociada a cada uno de los grafos en cada una de las bandas en el estado Awake ver Figura 3.2.

3.4. Medidas de centralidad

El concepto de centralidad dentro de la teoría de grafos fue introducido en 1940 por Alexander Bavelas [60, 61]. La centralidad en un grafo $\mathscr{G} = (V, E)$ es una medida o un valor que le es asignado a cada $v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$.
Este valor determina la relevancia de v_i y permite comparar o contrastar v_i con los demás elemento en V.
Conocer la centralidad de un nodo dentro de un grafo permite determinar el impacto que

este causa dentro del sistema del cual es parte. Este concepto en la actualidad es utilizado en distintas áreas, por ejemplo en sociología para analizar las relaciones entre sujetos, al aplicar esta medida a redes sociales para conocer la relevancia de un usuario. Existen distintas medidas o índices de centralidad, para determinar y comparar cuantitativamente la importancia de los v_i.
Comenzaremos por la medida de centralidad más sencilla la centralidad de grado, esta se mide el número de enlaces o conexiones que tiene un nodo con los demás nodos pertenecientes $\mathscr{G}$.

Definición 19. *Dado un grafo $\mathscr{G} = (V,E)$ se define la centralidad del vértice v_i como*

$$C_D(v_i) = gr(v_i)$$

Si tenemos la matriz de Adyacencia de $\mathscr{G}$

$$C_D(v_i) = \sum_{j}^{|V|} a_{i,j}$$

Y la centralidad de v_i normalizada como

$$C_{DN}(v_i) = \frac{gr(v_i)}{n}$$

Otra medida muy común es la **centralidad de cercanía (closeness)** en un grafo, esta permite determinar las rutas más cortas o más eficientes para llegar de un nodo a otro. Esta es muy utilizada debido a que puede ser interpretada como la rapidez en la que la información se puede propagar desde un nodo a todos los demás. Se basa en calcular la suma o bien el promedio de las distancias geodésicas (o longitudes de los caminos más cortos) desde un nodo hacia todos los demás.

Definición 20. *Dado un grafo $\mathscr{G} = (V,E)$ se define la centralidad de cercania del vértice $v_i \in V$ como*

$$C_C(v_i) = \frac{1}{\sum_{v_j \in V} d(v_i, v_j)}$$

La centralidad de cercania normalizada del vértice $v_i \in V$ se define como

$$C_{CN}(v_i) = \frac{n}{\sum_{v_j \in V} d(v_i, v_j)}$$

Donde $d(v_i, v_j)$ la longitud del camino más corto entre los nodos v_i y v_j

La siguiente medida de centralidad que definiremos será la **intermediación (betweenness)** que cuantifica la frecuencia o el número de veces que un nodo actúa o sirve de puente dentro de una ruta corta entre dos nodos determinados. Cuando en un grafo existen nodos de alta intermediación, estos suelen jugar un rol importante en la estructura a la que pertenecen.

Definición 21. *Dado un grafo $\mathscr{G} = (V,E)$ se define la centralidad de intermediacion $C_B(v_i)$como*

$$C_B(v_i) = \sum_{j \neq k \in V} \frac{b_{jik}}{b_{jk}}$$

con b_{jik} el numero de caminos más cortos desde j hasta k que pasan a través del vértice v_i y b_{jk} el número de caminos más cortos desde el vértice j hasta el vértice k.
Su versión normalizada es

$$C_{BN}(v_i) = \frac{2}{(n-1).(n-2)} \sum_{j \neq k \in V} \frac{b_{jik}}{b_{jk}}$$

Por último vamos a definir la medida de **centralidad de vector propio**, que es una métrica de análisis de redes que mide la influencia de un nodo en un grafo, basándose en la idea de que un nodo es importante si sus vecinos también son importantes. Se calcula iterativamente a partir del autovector principal de la matriz de adyacencia de la red, otorgando una puntuación a cada nodo que refleja su relevancia dentro del conjunto.

Definición 22 (Centralidad de vector propio [62])**.** *Sea $G = (V,E)$ un grafo, donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas. Con $n = |V|$. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de adyacencia de G y A' su transpuesta, donde $a_{ij} = 1$ si existe una arista que une a i con j y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.*

*La **centralidad de vector propio** de un nodo $j \in V$, denotada por $C_{VP}(j)$, representa la relevancia del vértice j y se define como*

$$C_{VP}(j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{VP}(i) = a_{1j}C_{VP}(1) + a_{2j}C_{VP}(2) + \cdots + a_{nj}C_{VP}(n),$$

donde $C_{VP}(i)$ es la centralidad del vértice i, y corresponde a la i-ésima componente del autovector asociado al mayor autovalor de la matriz A.

Si definimos el vector

$$\mathbf{p} = \big(C_{VP}(1), C_{VP}(2), \ldots, C_{VP}(n)\big)^{\top},$$

que contiene las centralidades de todos los nodos, entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{p} = A'\mathbf{p},$$

o de manera equivalente,

$$(I_n - A')\mathbf{p} = 0,$$

donde I_n es la matriz identidad de dimensión n.

Ahora vamos a mostrar un ejemplo como se calcula la C_{VP} Consideremos el grafo $G = (V,E)$ con vértices $V = \{1,2,3\}$ y aristas $E = \{(1,2),(2,3)\}$. La matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 1. Sistema de ecuaciones. Sea $\mathbf{p} = (C_{VP}(1), C_{VP}(2), C_{VP}(3))^{\top}$. La definición establece

$$\mathbf{p} = A\mathbf{p}.$$

$$\begin{cases} C_{VP}(1) = C_{VP}(2), \\ C_{VP}(2) = C_{VP}(1) + C_{VP}(3), \\ C_{VP}(3) = C_{VP}(2). \end{cases}$$

Paso 2. Resolución del sistema. De las ecuaciones se deduce

$$C_{VP}(1) = C_{VP}(3), \quad C_{VP}(2) = 2C_{VP}(1).$$

Paso 3. Relación con autovalores. En general, debemos resolver

$$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}.$$

El polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 2) = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
Paso 4. Vector propio principal. Tomando $\lambda = \sqrt{2}$ (autovalor dominante), el sistema se resuelve con proporción

$$(C_{VP}(1), C_{VP}(2), C_{VP}(3)) \propto (1, \sqrt{2}, 1).$$

Paso 5. Normalización (opcional). Si normalizamos en norma L^2:

$$\|(1, \sqrt{2}, 1)\|_2 = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2,$$

por lo que

$$\mathbf{p} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \approx (0{,}5,\ 0{,}7071,\ 0{,}5).$$

Conclusión. El nodo central 2 posee mayor centralidad de vector propio que los extremos 1 y 3, reflejando su rol más importante en la red.
En la Figura 3.11 y 3.12 podemos ver el calculo de las distintas medidas de centralidad definidas con anterioridad sobre los grafos de la Figura 3.6

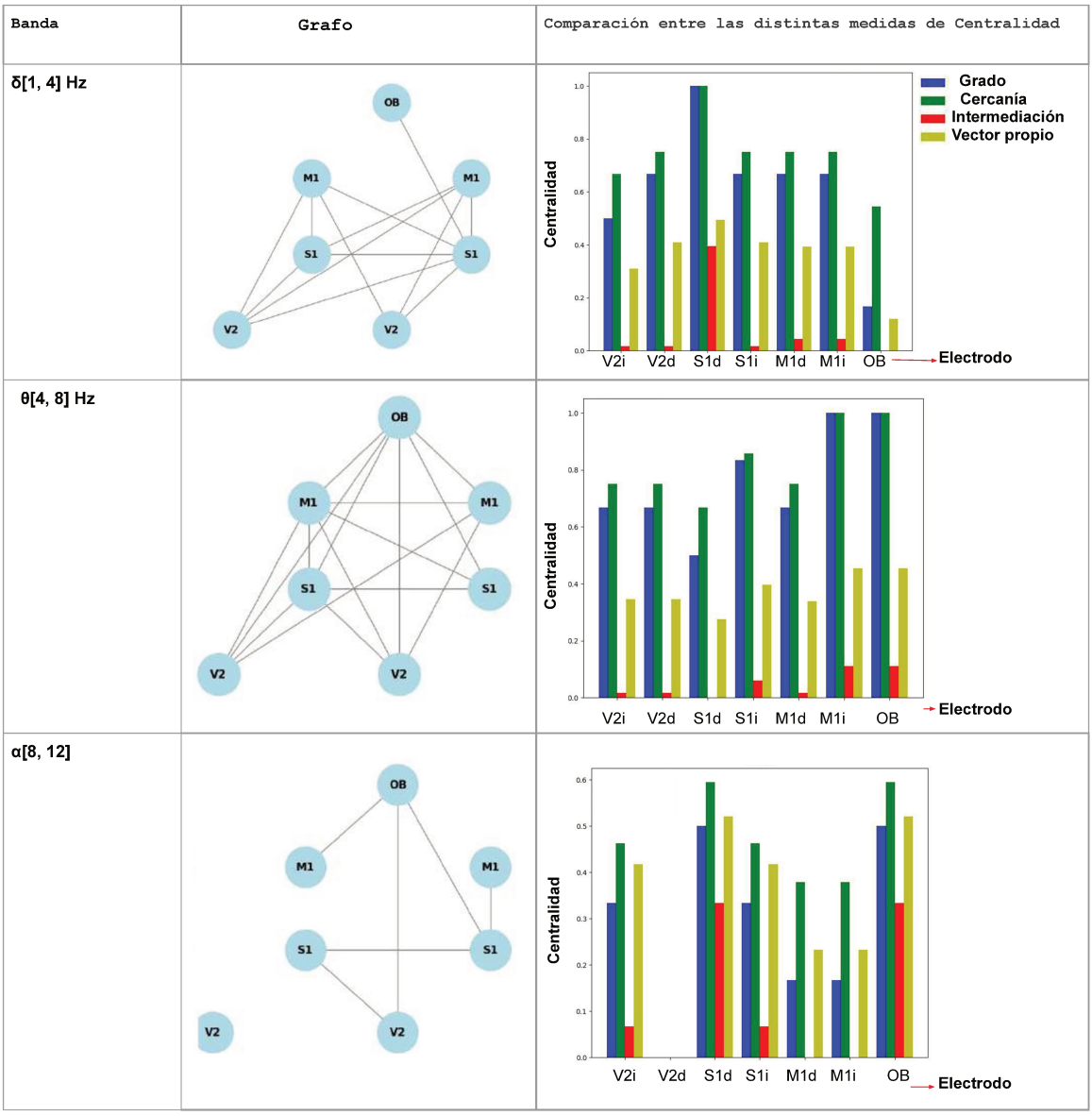


Figura 3.11: Distintas medidas de centralidad para el estado Awake para R1 en las seis bandas de frecuencia.

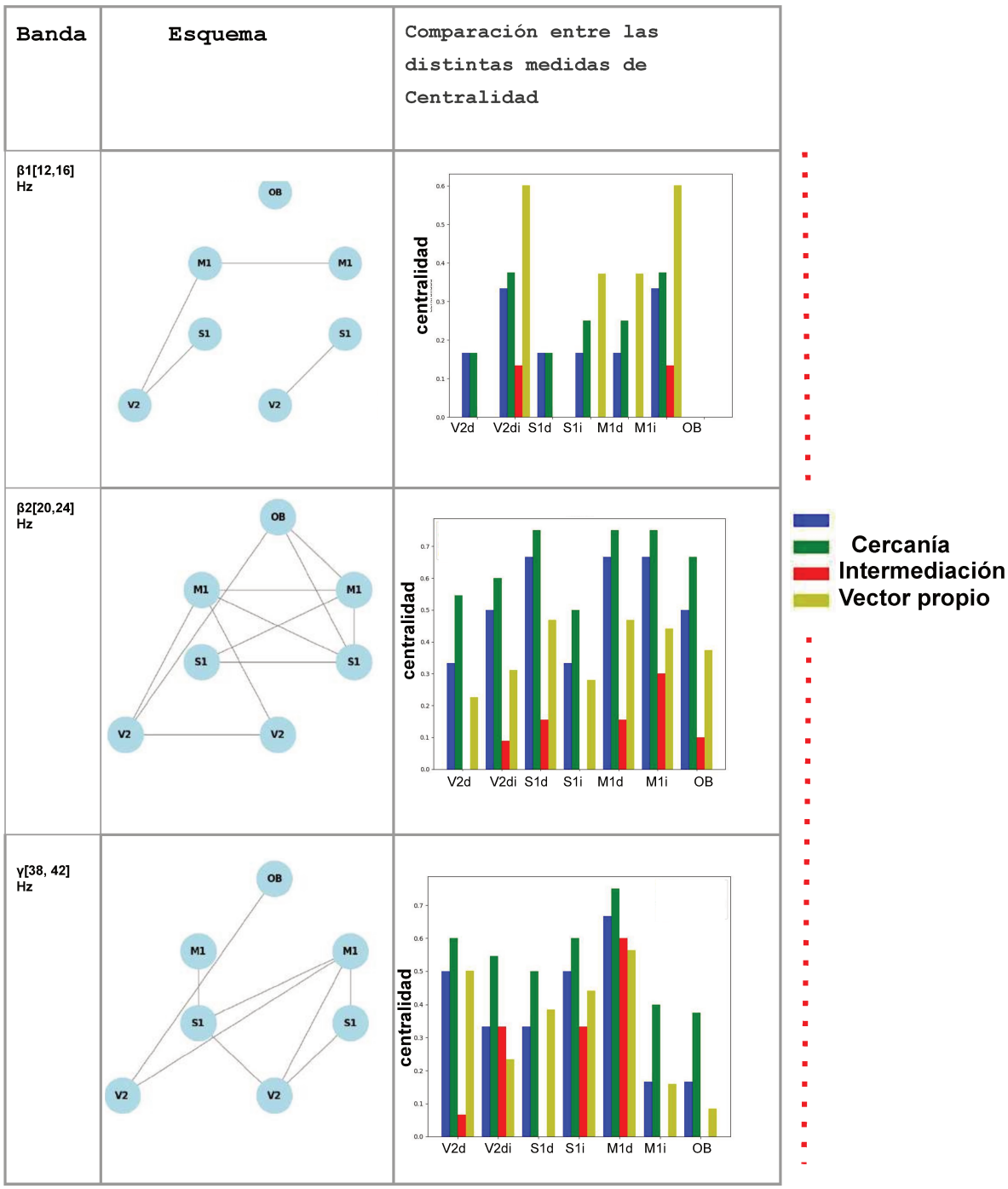


Figura 3.12: Distintas medidas de centralidad para el estado Awake para R1 en las seis bandas de frecuencia.

3.5. Métricas y distancias entre grafos

3.5.1. Métricas de disimilitud de grafos

Las **medidas de similitud en grafos** se han consolidado como una herramienta fundamental para comparar y cuantificar el grado de semejanza o diferencia entre dos grafos, y, en consecuencia, entre los cuantificadores que resultan de interés. Sin embargo, como suele

ocurrir en los modelos matemáticos de estructuras complejas, no siempre es evidente que una pequeña perturbación en los datos que dan origen al grafo por ejemplo, a través de PLI implique también una variación pequeña en la entropía de Von Neumann u otros cuantificadores que proporcionan información relevante sobre el sistema en estudio.
Consideraremos dos tipos de distancias entre grafos, las **distancias estructurales** y las **espectrales**. Las primeras capturan los cambios locales, mientras que las segundas evalúan la estructura global del grafo mediante el seguimiento de los cambios en los valores propios de la matriz laplaciana de $\mathscr{G}$ o de su matriz de adyacencia. [63]

Distancias estructurales entre grafos

Definición 23. *Sean $\mathscr{G} = (V,E)$ y $\tilde{\mathscr{G}} = (V,\tilde{E})$ dos grafos con el mismo conjunto de vertices y sean Ay $\tilde{A}$ sus correspondientes matrices de adyacencia, la **distancia de Hamming** (normalizada) mide la cantidad de eliminaciones e inserciones de aristas necesarias para transformar $\mathscr{G}$ en $\tilde{\mathscr{G}}$ y se define como:*

$$d_H(\mathscr{G},\tilde{\mathscr{G}}) = \sum_{i,j}^{|V|} \frac{|A_{ij} - \tilde{A}_{ij}|}{N(N-1)} = \frac{1}{N(N-1)} \|A_{ij} - \tilde{A}_{ij}\|,$$

donde la doble $\|\|$ denota la norma uno.

La **distancia de Hamming** es una medida que cuantifica la cantidad de cambios necesarios para transformar un grafo en otro.
Por otro lado, la **distancia de Jaccard**, que introduciremos en la próxima definición, es una medida de disimilitud entre dos conjuntos, utilizada frecuentemente en teoría de la probabilidad. Esta se basa en el *índice de Jaccard*, el cual mide la similitud entre dos conjuntos. El *índice de Jaccard* se define como la proporción entre el tamaño de la intersección de dos conjuntos A y B y el tamaño de su unión.

$$J(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

Si $J(A,B) = 1$ los conjuntos son idénticos $J(A,B) = 0$ diremos que A y B no tienen elementos en común.
La distancia de Jaccard entre conjuntos se define como

$$d_J(A,B) = 1 - J(A,B) = \frac{|A \cup B| - |A \cap B|}{|A \cup B|}$$

Dado que un grafo puede ser interpretado como un conjunto de aristas (y, por ende, de conexiones entre vértices), la distancia de Jaccard entre dos grafos puede definirse comparando directamente sus matrices de adyacencia. En lugar de contar simplemente las aristas comunes y totales, la distancia de Jaccard para grafos considera las matrices de adyacencia en cada par de vértices.

Definición 24 (Distancia de Jaccard normalizada)**.** *Sean $G = (V,E)$ y $\tilde{G} = (V,\tilde{E})$ dos grafos con el mismo conjunto de vértices, y sean A y $\tilde{A}$ sus correspondientes matrices de adyacencia. La **distancia de Jaccard normalizada** se define como*

$$d_J(G,\tilde{G}) \;=\; \frac{|G \cup \tilde{G}| - |G \cap \tilde{G}|}{|G \cup \tilde{G}|} \;=\; 1 - \frac{\sum_{i,j} \text{mín}(A_{ij},\tilde{A}_{ij})}{\sum_{i,j} \text{máx}(A_{ij},\tilde{A}_{ij})}.$$

Otras medidas que se consideran dentro de la categoría de medidas estructurales son las medidas que se derivan de centralidad definida en la Sección 3.4.

Definición 25. *Sean $\mathscr{G} = (V,E)$ y $\tilde{\mathscr{G}} = (V,\tilde{E})$ dos grafos con el mismo conjunto de vértices y sean* $\mathbf{c}$ *y* $\tilde{\mathbf{c}}$ *el vector de centralidad de nodos asociado a $\mathscr{G}$ y $\tilde{\mathscr{G}}$, $\mathbf{c} = (c_1,\cdots,c_n)^T$ y $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1,\cdots,\tilde{c}_n)^T$ al que llamaremos vector de características. Sean c_i, $i = 1,\cdots,n$ y $\tilde{c}_i$, $i = 1,\cdots,n$ las centralidades de nodos normalizadas (es decir, $|c_1| = |c_2| = 1$) para los grafos $\mathscr{G}$ y $\tilde{\mathscr{G}}$, respectivamente, entonces la medida de distancia basada en centralidad (d_C) se define como*

$$d_C(\mathscr{G},\tilde{\mathscr{G}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |c_i - \tilde{c}_i|.$$

Distancias de disimilitud espectrales entre grafos

Pasentaremos ahora a la clase de distancias espectrales. Las distancias espectrales nos permiten un analisis de las disimilitudes de dos grafos a nivel global. Son medidas definidas utilizando los valores propios de la matriz de adyacencia A o de alguna versión del laplaciano $\mathscr{L}$ asociado a $\mathscr{G}$.

Definición 26. *Dado dos grafos $\mathscr{G} = (V,E)$ y $\tilde{\mathscr{G}} = (V,\tilde{E})$. Sean A y $\tilde{A}$ las correspondientes matrices de adyacencia, $\mathscr{L}$ y $\tilde{\mathscr{L}}$ los Laplacianos normalizados asociados. Las descomposiciones espectrales de estos Laplacianos producen valores propios $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$ para $\mathscr{L}$ y $0 = \tilde{\lambda}_0 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \ldots \leq \tilde{\lambda}_{n-1}$ para $\tilde{\mathscr{L}}$. Las listas de valores propios, consideradas como vectores en $\mathbb{R}^{n-1}$, permiten definir una p-distancia entre los dos hipergrafos para $1 \leq p < \infty$ de la siguiente manera*

$$d_{Es}(\mathscr{G},\tilde{\mathscr{G}}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \left|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3.5.2. Ilustración del uso de las distancias en el análisis de estados sueño en Ratas a través de PLI

Diferenciar los estados del sueño, como vigilia (**AW**), sueño REM (**REM**), vigilia tranquila (**QW**) y sueño profundo (**NREM**), es esencial para comprender cómo el cerebro y el cuerpo operan en las distintas fases del ciclo de sueño. Cada estado presenta características neurofisiológicas, cognitivas y comportamentales únicas, proporcionando información valiosa para investigaciones en diversas áreas.
En este apartado, a modo de ejemplo, consideramos la banda *delta* [1-4]Hz y aplicamos las distancias previamente definidas con el objetivo de evaluar si es posible distinguir los distintos estados de sueño dentro de dicha banda de frecuencia. Para ello, empleamos el método de análisis descrito en el Capítulo 1, lo que nos permite obtener las matrices de conectividad correspondientes y derivar su representación mediante un grafo simple no ponderado. Posteriormente, calculamos cada una de las medidas de distancia entre los estados, con el propósito de determinar si estas métricas permiten identificar diferencias significativas entre ellos.
En la Figura 3.13 se presentan las matrices de distancias correspondientes a la centralidad de grado en vértices, la distancia de Jaccard y la distancia de Hamming, calculadas sobre la banda de frecuencia *delta*.
A partir de los resultados, se observa que, al aplicar la distancia basada en la centralidad de grado, las diferencias entre estados son menores entre AW y REM (0.19), así como entre

AW y QW, lo que sugiere cierta similitud en la organización topológica de la red durante estas fases. Las mayores distancias se registran entre REM y NREM (0.50), seguidas por las comparaciones entre REM y QW (0.43), y entre AW y NREM (0.29). Este patrón refleja una adecuada capacidad de discriminación entre los estados, diferenciando las fases del ciclo del sueño de manera coherente con sus bases fisiológicas.
De manera similar, al emplear la distancia de Jaccard, se observa el mismo comportamiento general: los estados se diferencian entre sí, presentando menor distancia entre AW y REM(0.33) y mayores diferencias entre QW y NREM(0.75), seguidas de las distancias entre REM y NREM(0.74), y AW y NREM (0.67). En el caso de la distancia de Hamming, el patrón se mantiene, con las mayores diferencias entre NREM y REM(0.57), seguidas por AW-NREM(0.41) y NREM-QW(0.37), mientras que la menor distancia se encuentra entre AW y REM(0.24).
Conclusión. En conjunto, los resultados indican que las tres métricas de distancia son capaces de reflejar las diferencias entre los estados de sueño, aunque con matices. El hecho de que las menores distancias se observen entre AW y REM concuerda con la fisiología subyacente, dado que ambos estados comparten niveles elevados de actividad cortical y patrones de conectividad más dinámicos. En contraste, las mayores distancias respecto a NREM reflejan la marcada desaceleración y sincronización neuronal propias del sueño profundo, caracterizado por un predominio de oscilaciones lentas y una reducción en la conectividad funcional. Así, las medidas de distancia analizadas capturan adecuadamente las transiciones entre estados, reproduciendo las diferencias fisiológicas que subyacen a cada fase del ciclo de sueño.

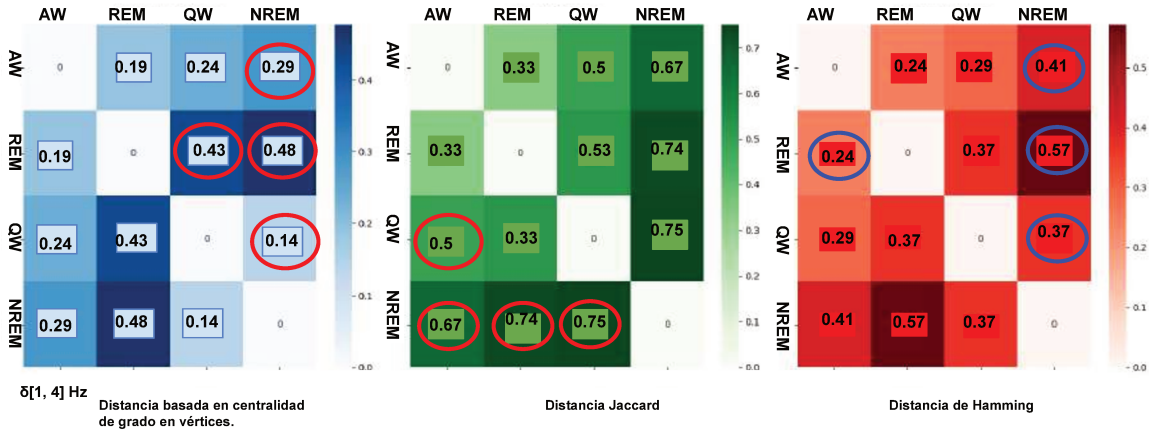


Figura 3.13: Matrices distancia en centralidad de vértice, distancia Jaccard, distancia Hamming, para cada estado sobre la banda Delta.

Finalmente, la Figura 3.14 muestra los resultados correspondientes a la misma banda previamente analizada utilizando la **distancia espectral**. En este caso, se observa que la **distancia espectral** también permite diferenciar los distintos estados de sueño, mostrando una mayor precisión en la discriminación entre ellos. Las mayores diferencias se registran entre los estados opuestos **AW** y **NREM**, seguidas por las distancias entre **NREM-REM** y **NREM-QW**. La menor distancia se observa entre **AW** y **REM** (0.34), lo que indica cierta similitud en la organización funcional de estos estados.
Conclusión. En comparación con las demás métricas evaluadas, esta distancia presenta una *mayor sensibilidad* para la diferenciación entre estados de sueño. Su capacidad para resaltar las mayores separaciones entre las fases opuestas del ciclo, particularmente entre vigilia activa (AW) y sueño profundo (NREM), refleja de manera más precisa las diferencias neuro-

fisiológicas subyacentes. Esta distancia, por tanto, capta con mayor fidelidad dichas transiciones funcionales, mostrando un mejor desempeño en la identificación y separación de los estados del sueño dentro de la banda *Delta*.

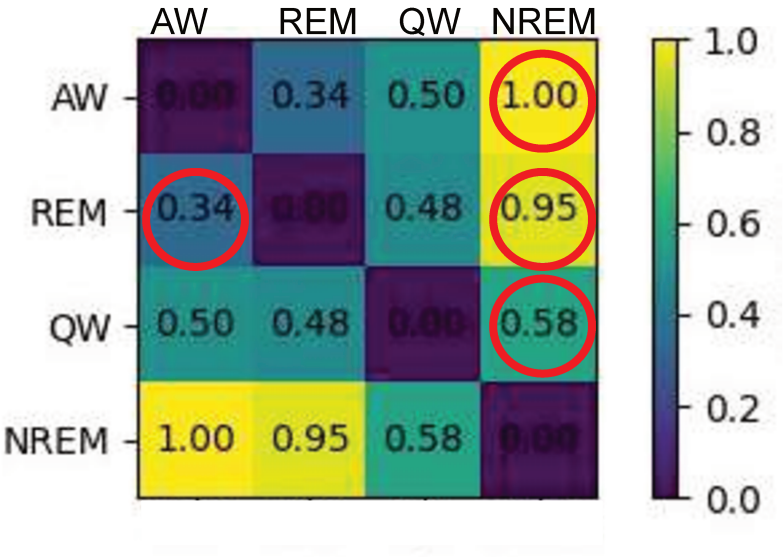


Figura 3.14: Matriz distancia espectral para cada estado sobre la banda delta [1,4]Hz.

Capítulo 4

Interacciones de alto orden

4.1. Introducción

Con el fin de estudiar la interrelación entre los componentes de un sistema, los análisis más comúnmente utilizados provienen de la teoría de grafos, la cual se basa en relaciones por pares entre los componentes. Sin embargo, en la gran mayoría de los sistemas naturales, las relaciones entre componentes se extienden más allá de simples pares, manifestándose de manera mucho más intrincada. Esto pone de manifiesto la necesidad de enfoques alternativos que permitan dilucidar la complejidad subyacente de dichos sistemas. Una de las teorías que ha intentado abordar este desafío es la de las Interacciones de Orden Superior (Higher-Order Interactions, HOI), la cual busca capturar las interacciones complejas y no lineales que se producen dentro de los sistemas.

El análisis de interacciones de orden superior ofrece varias ventajas claves para la comprensión de sistemas complejos. A diferencia de los métodos tradicionales, permite capturar interacciones de múltiples componentes que van más allá de las relaciones por pares. Este enfoque más amplio mejora la precisión predictiva y revela patrones ocultos y no lineales en los datos. Como resultado, el análisis de HOI resulta especialmente útil en áreas como el aprendizaje automático, la neurociencia, la genómica y el análisis de redes sociales, donde la complejidad de los datos suele requerir modelos más refinados [93]. Al abordar datos de alta dimensión y modelar dependencias múltiples, este tipo de análisis mejora la robustez y flexibilidad de los modelos, ofreciendo además perspectivas más profundas y sutiles que a menudo pasan desapercibidas para los métodos convencionales.

Si bien la teoría de interacciones de orden superior ha mostrado resultados prometedores en diversos campos, su impacto es particularmente notable en neurociencia, donde la complejidad de la actividad cerebral exige herramientas analíticas sofisticadas. Los avances tecnológicos en esta disciplina han permitido la recolección de conjuntos de datos vastos y multidimensionales, tales como los electroencefalogramas de alta densidad (hEEG), magnetoencefalogramas (MEG) y registros con multielectrodos de alta densidad (hMER). Estas tecnologías generan una gran cantidad de datos de alta dimensión. Sin embargo, el crecimiento exponencial en el volumen de datos vuelve el proceso de análisis cada vez más desafiante. En este contexto, los métodos basados en la teoría de HOI emergen como herramientas altamente eficaces para enfrentar este reto. Actualmente, el análisis de HOI ha sido implementado en el estudio de señales de la neurociencia. Por ejemplo, se ha utilizado para investigar el trastorno depresivo mayor [65], enfermedades neurodegenerativas como el Alzheimer [66], la interacción entre envejecimiento y función cognitiva [67], y en el diagnóstico de trastornos del espectro autista [68].

Uno de los enfoques más utilizados para estudiar las interacciones de orden superior en di-

versos sistemas es a través de la teoría de hipergrafos. Esta proporciona un marco sólido y flexible para comprender relaciones complejas y multidimensionales en distintos dominios [69]. A diferencia de los grafos tradicionales, en los que las aristas conectan únicamente pares de vértices, los hipergrafos generalizan este concepto permitiendo que las hiperaristas conecten múltiples vértices de manera simultánea. Esto permite una modelización más natural y eficaz de las interacciones grupales. Esta característica hace que los hipergrafos sean especialmente útiles para capturar interacciones de alto nivel de complejidad, como las dinámicas colectivas en sistemas biológicos [70, 71, 72], médicos [80], sociales [74, 75], y tecnológicos [76, 77]. En particular, en el campo de la neurociencia, la teoría de hipergrafos ha sido empleada para capturar relaciones reales de interacción entre regiones cerebrales, mejorando la precisión en el diagnóstico de trastornos del espectro autista [68], la clasificación y subtipificación de trastornos psiquiátricos [78], y asistiendo en la clasificación de migrañas [79]. En esta tesis, tomamos la teoría de hipergrafos como herramienta principal para modelar y analizar interacciones de orden superior. Por lo que en la sección siguiente se presentan los conceptos fundamentales de dicha teoría, los cuales constituirán la base formal sobre la que se desarrollarán los resultados teóricos y aplicados que se presentan los Capítulo 5, 6, 7 y 8 donde introducimos una perspectiva diferente basada en hipermétricas.

4.2. Hipergrafos

Inicialmente, en el campo del aprendizaje automático y el estudio de redes complejas, se utilizaron grafos para modelar redes y correlaciones entre los elementos del sistema. Sin embargo, la representación basada únicamente en conexiones por pares puede perder mucha información y no capturar adecuadamente las características descriptivas de las redes.
En la actualidad, el volumen y la complejidad de los datos han aumentado significativamente, lo que ha generado la necesidad de nuevos métodos más avanzados para modelar y analizar estas interacciones. Este desafío ha despertado un creciente interés en la exploración de los recursos que ofrece la *teoría de hipergrafos*. El desarrollo de la teoría de hipergrafos comenzó en la década de 1960, impulsado principalmente por el trabajo de Claude Berge. Desde entonces, ha ganado relevancia en la matemática discreta y ha encontrado aplicaciones en áreas como la informática y otras ciencias aplicadas, ofreciendo una poderosa herramienta para modelar interacciones complejas en problemas reales. En este capítulo, exploraremos los conceptos fundamentales de los hipergrafos, su estructura y los principales resultados teóricos que se han desarrollado en torno a ellos. La idea básica consiste en considerar conjuntos como aristas generalizadas, denominadas *hiperaristas*, y definir un *hipergrafo* como una familia de estas hiperaristas. Formalmente, un hipergrafo se representa como el par $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$, donde $\mathscr{V}$ es un conjunto finito de vértices y $\mathscr{E}$ es un conjunto de hiperaristas. A diferencia de los grafos simples, en los cuales una arista conecta exactamente dos vértices, una *hiperarista* puede conectar múltiples vértices. Las hiperaristas de tamaño mayor que 2 pueden ser vistas como curvas cerradas que engloban un subconjunto específico de vértices, separándolos del resto. De este modo, una hiperarista puede incluir más de dos vértices. Ver Figura 4.1.

Definición 27. *Un hipergrafo se define como un par ordenado $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ donde $\mathscr{V}$ es el conjunto de vértices, $|\mathscr{V}| = n$ y $\mathscr{E}$ es un subconjunto de partes no vacias de $\mathscr{V}$, que cubren $\mathscr{V}$, cuyos elementos reciben el nombre de* ***hiperaristas*** *y las denotaremos como $\mathscr{E} = \{e_1, .., e_m\}$ en otras palabras*

- $e \neq \emptyset$, $\forall e \in \mathscr{E}$
- $\bigcup_{e \in \mathscr{H}} e = \mathscr{V}$

El **orden** del hipergrafo $\mathscr{H}$ es el número n de elementos en $\mathscr{V}$, denotado como $|\mathscr{V}|$ y su tamaño es el número de elementos en $\mathscr{E}$, denotado como $|\mathscr{E}| = m$. Los hipergrafos pueden representarse de muchas formas, podemos representarlos como un sistema de conjuntos $\mathscr{H} = \{\{a,b,c\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{c,d,f\}\}$. Ver Figura 4.1.

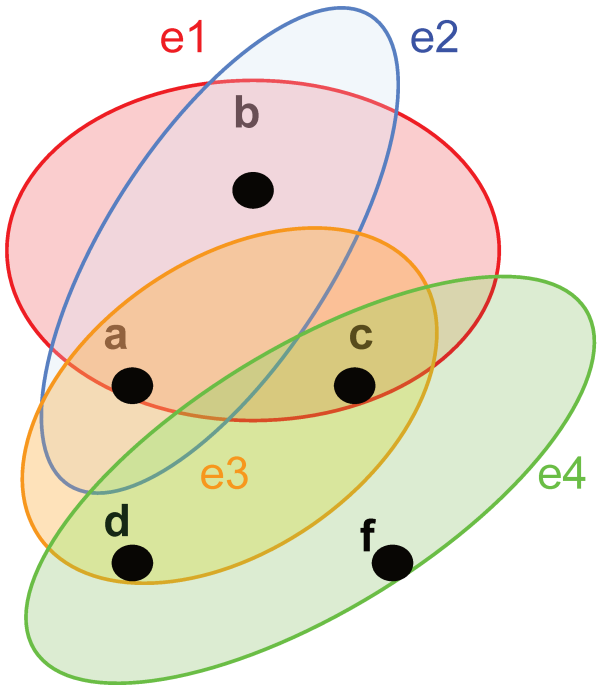


Figura 4.1: Representación típica de un Hipergrafo $\mathscr{H}$. Hipergrafo con 4 hiperaristas e_1, e_2, e_3, e_4 y con 5 vértices a, b, c, d, f

Normalmente se comprime la notación de conjuntos por comodidad y, al incluir también los nombres de los hiperaristas, obtenemos la forma compacta de sistema de conjuntos $\mathscr{E} = \{e_1 : abc, e_2 : ab, e_3 : acd, e_4 : cfd\}$. A partir de la Figura 4.1, podemos observar características distintivas de un hipergrafo tanto sobre las hiperaristas como en los vértices. La medida de una hiperarista $e \in \mathscr{E}$ es el cardinal del conjunto de vértices que la componen. En el Hipergrafos 4.1 la medida de cada hiperarista es la siguiente la hiperarista e_1 contiene 3 vértices, la hiperarista e_2 tiene 2 vértices, mientras que tanto la hiperarista e_3 como la hiperarista e_4 están compuestas por 3 vértices.

Definición 28. *Sea $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un hipergrafo, dada $e \in \mathscr{E}$ su tamaño se define como $|e|$.*

Una hiperarista $e = \{u, v\}$ con $|e| = 2$ es lo mismo que una arista en un grafo. De hecho, todos los grafos $G = \langle V, E \rangle$ son hipergrafos: en particular, los grafos son hipergrafos **"2-regular"**, de modo que ahora $E \leq \binom{V}{2}$ y todas las $e \in E$ son pares no ordenados con $|e| = 2$.

Definición 29. *Sea $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un hipergrafo. Decimos que $\mathscr{H}$ es* **k-regular** *si cada hiperarista $e \in \mathscr{E}$ tiene exactamente k vértices, es decir, $|e| = k$ para todo $e \in \mathscr{E}$.*

La dimensión de $e \in \mathscr{E}$ se define como una unidad menos que el tamaño. Esta denominación se debe a que, si concebimos un hipergrafo como un complejo simplex o simplicial,

cada hiperarista se corresponde con un símplice. La dimensión de un simplex es precisamente uno menos que la cantidad de vértices que lo conforman.
Una relación posible entre hiperaristas es la **inclusión**. Dadas dos hiperaristas e_i y $e_j \in \mathscr{E}$, diremos que la hiperarista e_i está incluida en e_j cuando todos los elementos de e_i también pertenecen a e_j, es decir, $e_i \subset e_j$. Esto implica que e_i es un subconjunto propio de e_j y, por lo tanto, tiene una menor cardinalidad que e_j. En los grafos simples, como vimos en el Capítulo 3, la relación estructural entre dos vértices distintos u y v se puede establecer únicamente a través de su adyacencia, es decir, si están conectados por una arista $(\{u,v\} \in E)$ o si no lo están $(\{u,v\} \notin E)$. A su vez, la relación de adyacencia entre dos aristas distintas e y f solo queda definida si son contiguas en un único vértice $(e \cap f = \{v\} \neq \emptyset)$.
En los hipergrafos, los conceptos de adyacencia e incidencia se extienden de manera natural, pero presentan algunas diferencias claves en comparación con los grafos simples. En la Figura 4.1, observamos que los vértices a y b son adyacentes, ya que ambos están contenidos en la hiperarista e_2. A su vez, tanto a como b son adyacentes al vértice c, debido a que la hiperarista e_1 incluye a los tres vértices a, b y c.
Esto demuestra que, dado que una hiperarista puede contener más de dos vértices, las relaciones de adyacencia entre dos vértices pueden involucrar a más de un vértice en común. Del mismo modo, las hiperaristas pueden compartir varios vértices, lo que permite que dos hiperaristas coincidan en múltiples elementos. Esto introduce una noción más compleja de adyacencia e incidencia entre los vértices y las hiperaristas en un hipergrafo.

Definición 30. *Dado $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$, sean v_i y $v_j \in \mathscr{V}$ diremos que v_i y v_j son vértices **adyacentes** si existe una hiperarista $e_i \in \mathscr{E}$ que contiene a ambos vértices.*

Los vértices adyacentes se denominan vertices vecinos entre sí y todos los vecinos de un vértice $v_i \in \mathscr{V}$ se denomina vecindad de v_i. Denotaremos la vecindad de v_i como $N(v_i)$.

Definición 31. *Sean e_i y $e_j \in \mathscr{E}$ diremos que son e_i y e_j son adyacentes, si su intersección es no vacía, es decir existe $v \in \mathscr{V}$ pertenece tanto a e_i como a e_j.*

En nuestro ejemplo Figura 4.1 tenemos que los las hiperaristas e_1 y e_2 son adyacentes ya que su intersección es no vacía.

Definición 32. *Sea $v \in \mathscr{V}$ y $e \in \mathscr{E}$ diremos que e **incide** en v si $v \in e$.*

En nuestro ejemplo de la Figura 4.1 tenemos que la hiperarista e_1 incide en el vértice a ya que $a \in e_1$. Como se ve, al igual que en la teoría de grafos, en los hipergrafos, las relaciones de adyacencia e incidencia son aplicables a conjuntos de vértices y aristas, y además son cuantitativos.
De manera similar a los grafos simples, a partir de las relaciones de adyacencia e incidencia en hipergrafos, podemos definir las matrices de adyacencia e incidencia correspondientes.

Definición 33. *Sea $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un hipergrafo definimos la **matriz de incidencia** H de orden $|\mathscr{E}| \times |\mathscr{V}|$ asociada a $\mathscr{H}$ como*

$$h(e,v) = \begin{cases} 1 & si\ v \in e \\ 0 & si\ v \notin e \end{cases}$$

A partir de la matriz de incidencia H, podemos calcular los grados de manera análoga a los grafos simples.

Definición 34. *Dado $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$, sea $v \in \mathscr{V}$, el **grado del vértice** v, se define como el número de hiperaristas que lo contienen*

$$d(v) = \sum_{e \in \mathscr{E}} h(e,v)$$

Definición 35. *Dado $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$, sea $e \in \mathscr{E}$, el* ***grado de la hiperarista****, se define como el número de vértices que forman parte de la hiperarista e.*

$$\delta(e) = \sum_{v \in \mathscr{V}} h(e, v)$$

Utilizando los grados en vértices e hiperaristas podemos definir dos matrices diagonales para representar los grados tanto en vértices como en hiperaristas de la siguiente manera:

$$D_v = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_{|\mathscr{V}|})\} \text{ de orden } |\mathscr{V}| \times |\mathscr{V}|$$

$$D_e = \text{diag}\{\delta(e_1), \delta(e_2), \ldots, \delta(e_{|\mathscr{E}|})\} \text{ de orden } |\mathscr{E}| \times |\mathscr{E}|$$

Definición 36. *Sea $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un hipergrafo, definimos la* ***matriz de Adyacencia*** *$\mathscr{A}(\mathscr{H})$ de orden $|\mathscr{V}|x|\mathscr{V}|$, como la matriz cuyos eleméntos tienen la forma*

$$a_{ij} = |\left\{e \in \mathscr{E} : v_i, v_j \in e, i \neq j\right\}| \ \ y \ \ a_{ii} = 0$$

.

Lema 4. *Sea $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ y H su matriz de incidencia asociada entonces:*

$$\mathscr{A}(\mathscr{H}) = H^T H - D_v$$

- *$\mathscr{A}(\mathscr{H})$ es simetrica;*
- *$\mathscr{A}(\mathscr{H})$ solo tiene autovalores reales.*

Demostración. Calculamos las entradas de $H^\top H$. Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(H^\top H)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} H_{ki} H_{kj} = \sum_{k=1}^{m} h(e_k, v_i)\, h(e_k, v_j).$$

Caso $i \neq j$. Para cada hiperarista e_k el producto $h(e_k, v_i)h(e_k, v_j)$ vale 1 si y sólo si $v_i \in e_k$ y $v_j \in e_k$ (es decir, si la hiperarista e_k contiene simultáneamente a ambos vértices), y vale 0 en caso contrario. Luego la suma

$$\sum_{k=1}^{m} h(e_k, v_i)h(e_k, v_j)$$

cuenta exactamente las hiperaristas que contienen a v_i y v_j. Por definición de la matriz de adyacencia,

$$(H^\top H)_{ij} = a_{ij}, \qquad \text{si } i \neq j.$$

Caso $i = j$. Usando $h(e_k, v_i) \in \{0, 1\}$ resulta

$$(H^\top H)_{ii} = \sum_{k=1}^{m} h(e_k, v_i)^2 = \sum_{k=1}^{m} h(e_k, v_i) = d(v_i).$$

Por la definición de $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ se tiene $a_{ii} = 0$ para todo i.

$D_v = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_{|\mathscr{V}|})\}$ de orden $|\mathscr{V}| \times |\mathscr{V}|$

$$a_{ij} = (H^\top H)_{ij} - (D_v)_{ij}.$$

Por tanto se obtiene la igualdad matricial

$$\boxed{\mathscr{A}(\mathscr{H}) = H^\top H - D_v}.$$

Simetría. $(H^\top H)^\top = H^\top H$. Además D_v es diagonal real, por lo que $D_v^\top = D_v$. Así,

$$\mathscr{A}(\mathscr{H})^\top = (H^\top H - D_v)^\top = H^\top H - D_v = \mathscr{A}(\mathscr{H}),$$

luego $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ es simétrica.

Autovalores reales. Como $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ es una matriz real simétrica, por el teorema espectral es ortogonalmente diagonalizable; existen una matriz ortogonal Q y una diagonal real Λ tales que $\mathscr{A}(\mathscr{H}) = Q\Lambda Q^\top$. En particular, las entradas de Λ son reales, es decir, todos los autovalores de $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ son reales. □

Las definiciones anteriores se refieren a hipergrafos no ponderados. Sin embargo, podemos extender estos conceptos a hipergrafos ponderados o pesados, donde cada hiperarista tiene un valor asociado. En un hipergrafo ponderado, cada hiperarista tiene asignado a un peso, que representa la importancia de la conexión entre los conjuntos de vértices que une.

Definición 37. *Un **hipergrafo pesado** se define como una terna $\mathscr{H}_\mathscr{W} = (\mathscr{V}, \mathscr{E}, \mathscr{W})$, donde $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ representa los vértices y las hiperaristas del hipergrafo, y $\mathscr{W} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función que asigna un peso no negativo a cada hiperarista de $\mathscr{H}$.*

Como en hipergrafos no pesados es posible definir su grado para un vértice $v \in \mathscr{V}$

$$d_\mathscr{W}(v) = \sum_{e \in \mathscr{E}} \mathscr{W}(e) h(e, v)$$

Y la matriz diagonal

$$D_v^\mathscr{W} = \text{diag}\{d_\mathscr{W}(v_1), d_\mathscr{W}(v_2), \ldots, d_\mathscr{W}(v_{|\mathscr{V}|})\}$$

En base a esta definición la matriz de adyacencia de $\mathscr{H}$ toma la forma

$$\mathscr{A}(\mathscr{H}_\mathscr{W}) = HWH^T - D_v^\mathscr{W}$$

con

$$W = \text{diag}\{\mathscr{W}(e_1), \mathscr{W}(e_1), \ldots, \mathscr{W}(e_{|\mathscr{E}|})\}$$

4.3. Cuantificadores en Hipergrafos

Los hipergrafos, al extender las conexiones de a pares de los grafos simples a relaciones de orden superior, ofrecen una herramienta poderosa para modelar sistemas complejos. Para extraer de manera efectiva características de los hipergrafos, es esencial cuantificar sus propiedades, para analizar su estructura y dinámica. En este capítulo, se introducen y formalizan tres medidas fundamentales que capturan aspectos esenciales de los hipergrafos: la **entropía espectral**, que refleja la cantidad de información contenida en las interacciones de orden superior; la **centralidad de los vértices**, que mide la importancia relativa de cada nodo en el hipergrafo ; y la **centralidad de las hiperaristas**, que describe la influencia de cada hiperarista en la conectividad global.

4.3.1. Entropía espectral

Para introducir el análogo de la noción de entropía de Von Neumann [59] que introdujo en el Capítulo 1 para grafos, observamos que dado un hipergrafo $\mathscr{H}$ su matriz de adyacencia $\mathscr{A}(\mathscr{H})$, definida en la sección anterior, es simétrica, no negativa y nula en la diagonal y es cuadrada de tamaño $n \times n = |\mathscr{V}| \times |\mathscr{V}|$. Aunque la matriz tiene en general entradas que siempre valen 1, sí determina un grafo ponderado no dirigido en $\mathscr{V}$. Específicamente el grafo $\mathscr{G}$ inducido por el hipergrafo $\mathscr{H}$ esta dado por $\mathscr{G} = (\mathscr{V}, \mathscr{A}, \mathscr{H})$ ver Figura 4.2. Es decir el peso de la arista $\{i, j\}$ $i \neq j, i, j \in \mathscr{V}$ es $a_i j = \#\{e \in \mathscr{E} : \{i.j\} \subset e\}$.

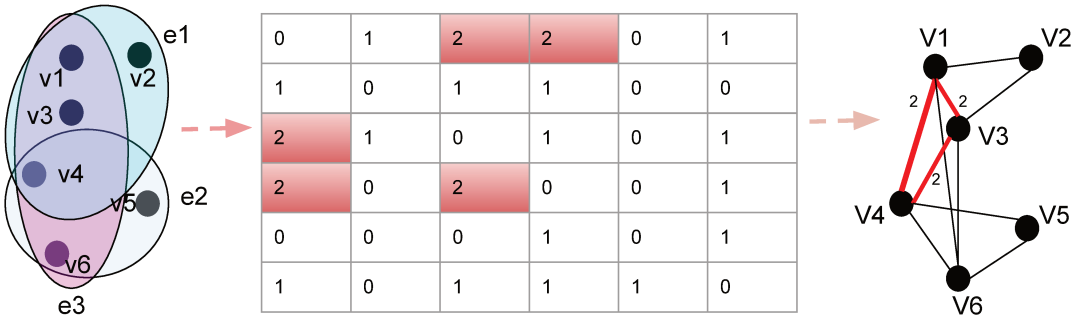


Figura 4.2: Grafo lineal pesado asociado al hipergrafo.

Como tal el grafo $\mathscr{G}$ tiene un laplaciano asociado dado por

$$\mathscr{L}(\mathscr{H}) = D - \mathscr{A}(\mathscr{H})$$

Los valores propios de esta matriz son

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \text{ con } D = \text{diag}(\sum_j^n a_{1j}, \ldots, \sum_j a_{nj})$$

El conjunto de valores propios $\{\lambda_i\}$ con $i \in \{0, 2, \ldots, n-1\}$ satisface $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 > 0$ por consiguiente tomando $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1} \lambda_j}$, tenemos $0 \leq \mu_0 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$ y $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_j = 1$. Debido a esto, este conjunto puede interpretarse como una distribución de probabilidad discreta. Por lo tanto, podemos definir la entropía del hipergrafo $\mathbf{S}(\mathscr{H})$ como

$$\mathbf{S}(\mathscr{H}) = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \log_2 \lambda_i.$$

Como es habitual, la entropía $\mathbf{S}(\mathscr{H})$ mide la información contenida en las interacciones de orden superior descritas por $\mathscr{H}$.

4.3.2. Centralidades de vértices e hiperaristas

En el caso de los grafos simples, la centralidad se refiere a una medida de cuán importante es un vértice (o nodo) dentro de la red representada por $\mathscr{G} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$. La forma más simple de definir la centralidad de un vértice en un grafo simple es contando el número de aristas conectadas a ese vértice.
Sea $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un hipergrafo dado. La función $d : \mathscr{V} \to \mathbb{N}$ definida por

$$d(v) = \sum_{e \in \mathscr{E}} h(e, v)$$

se llama función de **centralidad de grado de vértices** de $\mathscr{H}$. Esta función captura la importancia de cada nodo en el hipergrafo $\mathscr{H}$ dentro de la estructura de conectividad definida por $\mathscr{H}$.
La función de la **centralidad de hiperaristas** indica cuán crítica es una hiperarista particular para la conectividad global del hipergrafo $\mathscr{H}$. Definimos la función $\delta : \mathscr{E} \to \mathbb{N}$

$$\delta(e) = \sum_{v \in \mathscr{V}} h(v,e).$$

Esta función proporciona información valiosa sobre la estructura y las relaciones en un hipergrafo.

4.4. Distancias y métricas entre hipergrafos

En esta sección, presentamos diversas medidas de distancia (o disimilitud) diseñadas específicamente para hipergrafos, fundamentadas en los cuantificadores descritos previamente. Como se explicó anteriormente, los hipergrafos pueden ser representados mediante grafos simples equivalentes, utilizando grafos ponderados inducidos a partir de su matriz de adyacencia. Estas representaciones incluyen construcciones específicas como los grafos *lineales*. Esto permite definir las medidas de disimilitud entre hipergrafos de dos maneras: de forma directa, trabajando sobre las propiedades intrínsecas de los hipergrafos, o de forma indirecta, aplicando las medidas a sus representaciones equivalentes en forma de grafos simples.

4.5. Medidas de disimilitud basadas en las representaciones equivalentes de $\mathscr{H}$

Sean $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$ dos hipergrafos y sea G y $\tilde{G}$ sus grafos equivalentes *lineales*, *clique* y o *star*, con matrices de adyacencia A y $\tilde{A}$, respectivamente, y sean L y $\tilde{L}$ sus Laplacianos asociados. El Laplaciano del grafo G (y de manera similar $\tilde{G}$) se define

$$L = D_v - A,$$

o su versión normalizada:

$$L = I - D_v^{-1/2} A D_v^{-1/2}$$

Denotaremos los autovalores del Laplaciano como $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Las más simples medidas de disimilitud estructurales se obtienen calculando directamente la diferencia entre las matrices de adyacencia de los dos grafos y luego aplicando una norma adecuada, por ejemplo, Euclidiana, Manhattan, Canberra o Jaccard. A continuación se presenta a modo de ejemplo la distancia de Hamming:

$$D_H(G,\tilde{G}) = \frac{\|A - \tilde{A}\|_1}{n(n-1)},$$

y la distancia de Jaccard:

$$D_J(G,\tilde{G}) = 1 - \frac{\sum_{ij} \text{mín}(A_{ij},\tilde{A}_{ij})}{\sum_{ij} \text{máx}(A_{ij},\tilde{A}_{ij})}.$$

Definición 38. *Dados los hipergrafos $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$, sean G y $\tilde{G}$ sus grafos equivalentes y sean $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)^T$ y $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)^T$ los vectores de centralidad de los vértices asociados a G y $\tilde{G}$, respectivamente. La medida de disimilitud entre ambos grafos, basada en la comparación de la centralidad de los vértices, se define como:*

$$D_C(G, \tilde{G}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |c_i - \tilde{c}_i|$$

Es importante destacar que se puede utilizar cualquier noción de centralidad, como centralidad de intermediación, centralidad de cercanía, centralidad de autovalores, etc., dependiendo del tipo de problema o aplicación.

Definición 39. *Dados los hipergrafos $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$, sean G y $\tilde{G}$ sus grafos equivalentes y sean $\mathscr{L}$ y $\tilde{\mathscr{L}}$ los laplacianos normalizados asociados. Las descomposiciones espectrales de $\mathscr{L}$ y $\tilde{\mathscr{L}}$ producen los autovalores $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ y $0 = \tilde{\lambda}_0 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_{n-1}$, respectivamente. La medida de dismilitud spectral entre ambos grafos se define como:*

$$D_\lambda(G, \tilde{G}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i - \tilde{\lambda}_i|^p$$

4.6. Medidas de disimilitud directas sobre $\mathscr{H}$

Distancia espectral

Dados dos hipergrafos $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ y $\tilde{\mathscr{H}} = (\tilde{\mathscr{V}}, \tilde{\mathscr{E}})$ con $|\mathscr{V}| = |\tilde{\mathscr{V}}|$, sean $\mathscr{A}$ y $\tilde{\mathscr{A}}$ sus respectivas matrices de adyacencia, y $\mathscr{L}$ y $\tilde{\mathscr{L}}$ los laplacianos normalizados asociados. Las descomposiciones espectrales de $\mathscr{L}$ y $\tilde{\mathscr{L}}$ producen los autovalores $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ y $0 = \tilde{\lambda}_0 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_{n-1}$, respectivamente. Estas dos secuencias, consideradas como vectores en $\mathbb{R}^{n-1}$, definen las p-distancias, $1 \leq p < \infty$.

$$D_p^s(\mathscr{H}, \tilde{\mathscr{H}}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i - \tilde{\lambda}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

El caso más importante es $p = 2$, que define bien la estructura de espacio de Hilbert en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Distancia basada en la centralidad de los vértices

Dados los hipergrafos $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$ como antes, supongamos ahora que $\mathscr{V} = \tilde{\mathscr{V}}$. Sean $\mathscr{C}_\mathscr{V}$ y $\tilde{\mathscr{C}}_\mathscr{V}$ las funciones de centralidad de los vértices respectivas. Una medida de disimilitud entre $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$ que tiene en cuenta la centralidad de los vértices se define como:

$$D^{\mathscr{C}_\mathscr{V}}(\mathscr{H}, \tilde{\mathscr{H}}) = \max_{v \in \mathscr{V}} \left| \mathscr{C}_\mathscr{V}(v) - \tilde{\mathscr{C}}_\mathscr{V}(v) \right|$$

Notemos que, a partir de la definición de $\mathscr{C}_\mathscr{V}$ y $\tilde{\mathscr{C}}_\mathscr{V}$, tenemos:

$$D^{\mathscr{C}_\mathscr{V}}(\mathscr{H}, \tilde{\mathscr{H}}) = \max_{v \in \mathscr{V}} \left| \sum_{e \in \mathscr{E}} h(v, e) - \sum_{\tilde{e} \in \tilde{\mathscr{E}}} \tilde{h}(v, e) \right| \tag{4.2}$$

donde h y $\tilde{h}$ son las respectivas matrices de incidencia de $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$.

Distancia basada en la centralidad de las hiperaristas

De manera similar, dados los hipergrafos $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$, y suponiendo ahora que $m = |\mathscr{E}| = |\tilde{\mathscr{E}}|$, se puede definir una distancia basada en la centralidad de las hiperaristas entre $\mathscr{H}$ y $\tilde{\mathscr{H}}$ como:

$$D^{\mathscr{C}_{\mathscr{E}}}(\mathscr{H}, \tilde{\mathscr{H}}) = \max_{i=1,\ldots,m} \left| \mathscr{C}_{\mathscr{E}}(e_i) - \tilde{\mathscr{C}}_{\mathscr{E}}(e_i) \right|$$

Con la notación anterior, se puede calcular como:

$$D^{\mathscr{C}_{\mathscr{E}}}(\mathscr{H}, \tilde{\mathscr{H}}) = \max_{i=1,..,m} \left| \sum_{v \in \mathscr{V}} h(v, e_i) - \sum_{\tilde{v} \in \tilde{\mathscr{V}}} \tilde{h}(v, e_i) \right|. \tag{4.3}$$

4.7. Modelado con Hipergrafos

La construcción de hipergrafos a través de diversos métodos nos permite modelar correlaciones de orden superior presentes en los datos. En esta sección, exploraremos diferentes enfoques para el modelado de hipergrafos, mostrando cómo se pueden construir a partir de distintos tipos de datos. Estos métodos se dividen en dos grandes categorías, según si las correlaciones entre los elementos son **explícitas** o **implícitas** [80]. El modelado de hipergrafos implícito genera hipergrafos utilizando las distancias o similitudes que podamos establecer sobre el conjunto de vertices $\mathscr{V}$, mientras que el modelado de hipergrafos explícito utiliza la información explícita en los datos de las correlaciones de orden superior en estos, como atributos y conexiones por pares.

4.7.1. Modelado explícito con hipergrafos

En el modelado de hipergrafos explícitos, las correlaciones de orden superior entre los datos se encuentran disponibles de manera directa en la información original. En este caso, la construcción del hipergrafo se basa en relaciones observables o atributos compartidos entre múltiples elementos del conjunto de vértices $\mathscr{V}$. Este enfoque permite representar de forma más fiel las interacciones presentes en los datos, ya que las hiperaristas se definen explícitamente según las conexiones o asociaciones conocidas. Existen diversos métodos para el modelado explícito, entre los cuales se incluyen los basados en atributos comunes, coocurrencias o relaciones estructurales predefinidas en los datos.

Ejemplo 1: generación de un hipergrafo explícito para el análisis de la novela los Miserables

Los Miserables es una reconocida novela escrita por el autor francés Victor Hugo, publicada originalmente en 1862. La obra se ha convertido en un clásico de la literatura universal. La novela se desarrolla en la Francia del siglo XIX y presenta una historia épica que abarca varias décadas. Su trama principal gira en torno a la vida de Jean Valjean, un exconvicto que busca redimirse y encontrar la redención en un mundo lleno de injusticias y desigualdades. Valjean, después de cumplir una larga condena por robar un pedazo de pan, es liberado y enfrenta el desafío de reconstruir su vida en una sociedad que lo rechaza y lo estigmatiza. A medida que avanza la historia, se introducen una amplia gama de personajes. Entre ellos se encuentran Javert, un inspector de policía obsesionado con capturar a Valjean; Fantine, una joven madre soltera que lucha por sobrevivir en condiciones de extrema pobreza; Cosette la

hija adoptiva de Valjean; Marius un joven idealista involucrado en los levantamientos políticos de la época; y muchos otros. Los Miserables es conocida por su descripción vívida de la realidad social de la época, destacando las desigualdades, la pobreza, la opresión y la lucha por la justicia. La novela se divide en cinco libros, a las que aquí haremos referencia como volúmenes

Volumen 1 (Fantine): Sienta las bases de la novela. La mayoría de los personajes no aparecen en los volúmenes siguientes. El más importante es Fantine. Como madre de Cosette, sacrifica su vida para mantener a su hija y encarga a Jean Valjean que cuide de Cosette cuando ésta muera. A diferencia de Fantine, Jean Valjean y Cosette aparecen en todos los volúmenes. Una historia central de la novela sigue sus viajes mientras huyen de la implacable persecución de Javert y de los tenaces y casi siempre cómicos abusos de Thenardier.

Volumen 2 (Cosette): Sigue la liberación de Cosette de sus cuidadores, los Thenardier, por parte de Jean Valjean. Huyen para esconderse de Javert y encuentran refugio en un convento, donde Valjean trabaja como jardinero y Cosette recibe educación.

Volumen 3 (Marius): Marius Pontmercy, hijo de un oficial del ejército de Napoleón y nieto de un monárquico, experimenta un conflicto de lealtades y acaba dando la espalda a amigos y familiares y viviendo entre los pobres. Ve a Cosette y acaba enamorándose de ella.

Volumen 4 (St. Denis): Con su amor por Cosette frustrado, Marius se une a un grupo de estudiantes, para participar en un levantamiento conocido como la rebelión de junio.

Volumen 5 (Jean Valjean): Jean Valjean salva la vida de Marius cuando los soldados desbordan las barricadas. Marius descubre la verdadera identidad de Jean Valjean gracias a Thenardier. Jean Valjean muere en paz con Cosette y Marius.

A continuación, se mencionan los personajes en orden de importancia Jean Valjean (J.V.) - Ex-convicto y protagonista de la historia. Javert (J.) - Inspector de policía que persigue a Jean Valjean. Fantine (F.) - Joven madre soltera que lucha por el bienestar de su hija. Cosette (C.) - Hija de Fantine, criada por Jean Valjean. Marius Pontmercy (M.P.) - Joven estudiante y enamorado de Cosette. Eponine Thenardier (E.T.) - Hija de los posaderos Thenardier. Thenardier (T.) - Posadero y padre de Eponine. Enjolras (E.) - Líder del grupo revolucionario Amigos del ABC. Monsieur Myriel (Obispo Bienvenu) (M.M.) - Influye en la vida de Jean Valjean. Gavroche (G.) - Niño de la calle y figura simbólica de la revolución. Además de estos personajes destacados, la obra cuenta con una amplia variedad de personajes secundarios y otros que desempeñan roles importantes en la historia, como los estudiantes revolucionarios, los amigos y enemigos de Jean Valjean (J.V.), así como personajes históricos y de la sociedad francesa del siglo XIX.

Es importante tener en cuenta que la lista de personajes de "Los Miserables"puede variar según las adaptaciones y versiones específicas de la novela.

Es posible representar estos datos a traves de un hipergrafo utilizando el metodo explicito en el que cada volumen será representado como una hiperarista, y cada personaje que aparece en los volúmenes será representado como un nodo o vértice. Para ello Utilizaremos los datos disponibles de **Stanford GraphBase**. Aplicaremos sobre este ejemplo de hipergrafos los conceptos antes definidos para identificar personajes recurrentes en diferentes volúmenes, para analizar las interacciones entre personajes en cada volumen, entre otros aspectos relacionados con la trama. La Figura 4.3 (B) muestra el hipergrafo derivado de la tabla (A), donde se representa la estructura del mismo. La tabla contiene dos columnas, en la primera columna, se encuentran las hiperaristas que representan los cinco volúmenes. En la segunda columna, se encuentran los nodos que representan a los personajes presentes en cada volumen. Al observar la tabla, podemos notar que el primer volumen tiene una mayor presencia de nodos segun los conceptos previamente definidos es la hiperarista de mayor grado, lo que indica que hay más personajes presentes en ese volumen en comparación con los demás.

Por otro lado, el segundo volumen parece tener menos personajes en comparación con los demás, por lo que es la hiperarista de menor grado. La Figura 4.4 (A) muestra el hipergrafo juntos a su matriz de incidencia (B). Como podemos ver el volumen 1 presenta mayor grado en hiperaristas seguido del volumen 3 y 4. Siendo el volumen 2 el de menor grado juntos con el volumen 5. Con relación a la centralidad de vértices tenemos que los protagonistas principales de esta novela son lo de mayor centralidad pues es posible envontralos en los 5 volumnes.

(A)

Hiperaristas	Nodos
volumen 1	'JU', 'LI', 'JV', 'CL', 'CO', 'FV', 'CN', 'MY', 'BM', 'PO', 'VI', 'DA', 'GE', 'IS', 'MC', 'ZE', 'JL', 'FA', 'JA', 'CH', 'FF', 'MR', 'SS', 'SC', 'CV', 'SP', 'TH', 'PG', 'ME', 'FN', 'GG', 'NP', 'BR', 'BL', 'SN', 'MB', 'MT', 'TM', 'CC', 'FT'
volumen 2	'GR', 'TH', 'JV', 'GP', 'CO', 'JA', 'FF', 'LL', 'AZ', 'TM', 'BZ', 'EP', 'NP', 'MI'
volumen 3	'CM', 'MG', 'MA', 'CO', 'MV', 'GP', 'BA', 'JV', 'TG', 'GU', 'QU', 'GT', 'CR', 'MO', 'MP', 'JA', 'MM', 'MN', 'AZ', 'GA', 'PL', 'JO', 'TH', 'BB', 'EP', 'BT', 'BU', 'FE', 'EN', 'JP', 'TM', 'JD', 'GI', 'FT', 'BO'
volumen 4	'CM', 'MG', 'MA', 'JV', 'CO', 'XA', 'BA', 'TG', 'GU', 'XB', 'QU', 'GT', 'MO', 'CR', 'TS', 'JA', 'MM', 'MN', 'GA', 'PL', 'BJ', 'JO', 'TH', 'BB', 'EP', 'LP', 'FE', 'EN', 'HL', 'JP', 'TM', 'GI', 'BO'
volumen 5	'CM', 'MG', 'MA', 'JV', 'CO', 'XA', 'XB', 'GT', 'CR', 'JA', 'AZ', 'GA', 'JO', 'BS', 'TH', 'FE', 'EN', 'BZ', 'GI', 'BO'

(B)

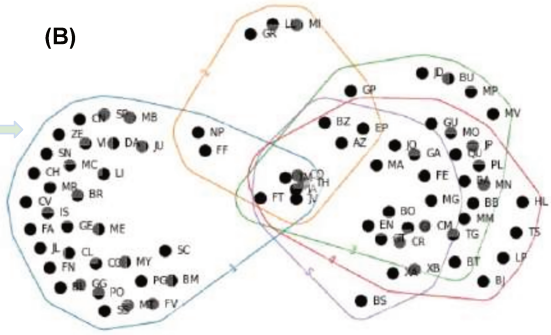


Figura 4.3: Data frame que da origen al hipergrafo $\mathscr{H}$.

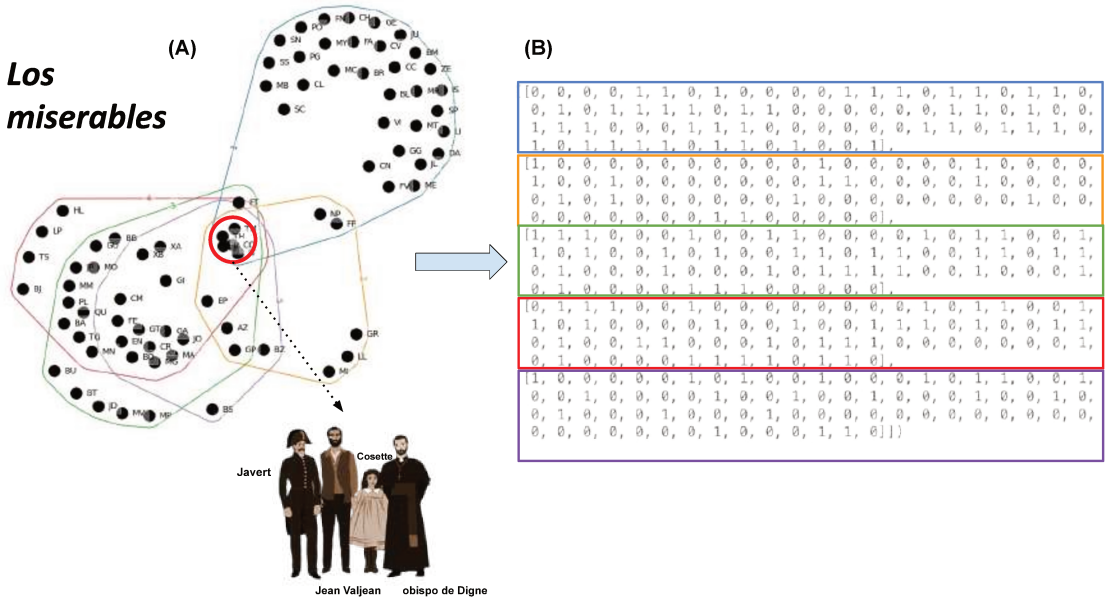


Figura 4.4: (A) Hipergrafo $\mathscr{H}$ junto con su matriz de incidencia (B).

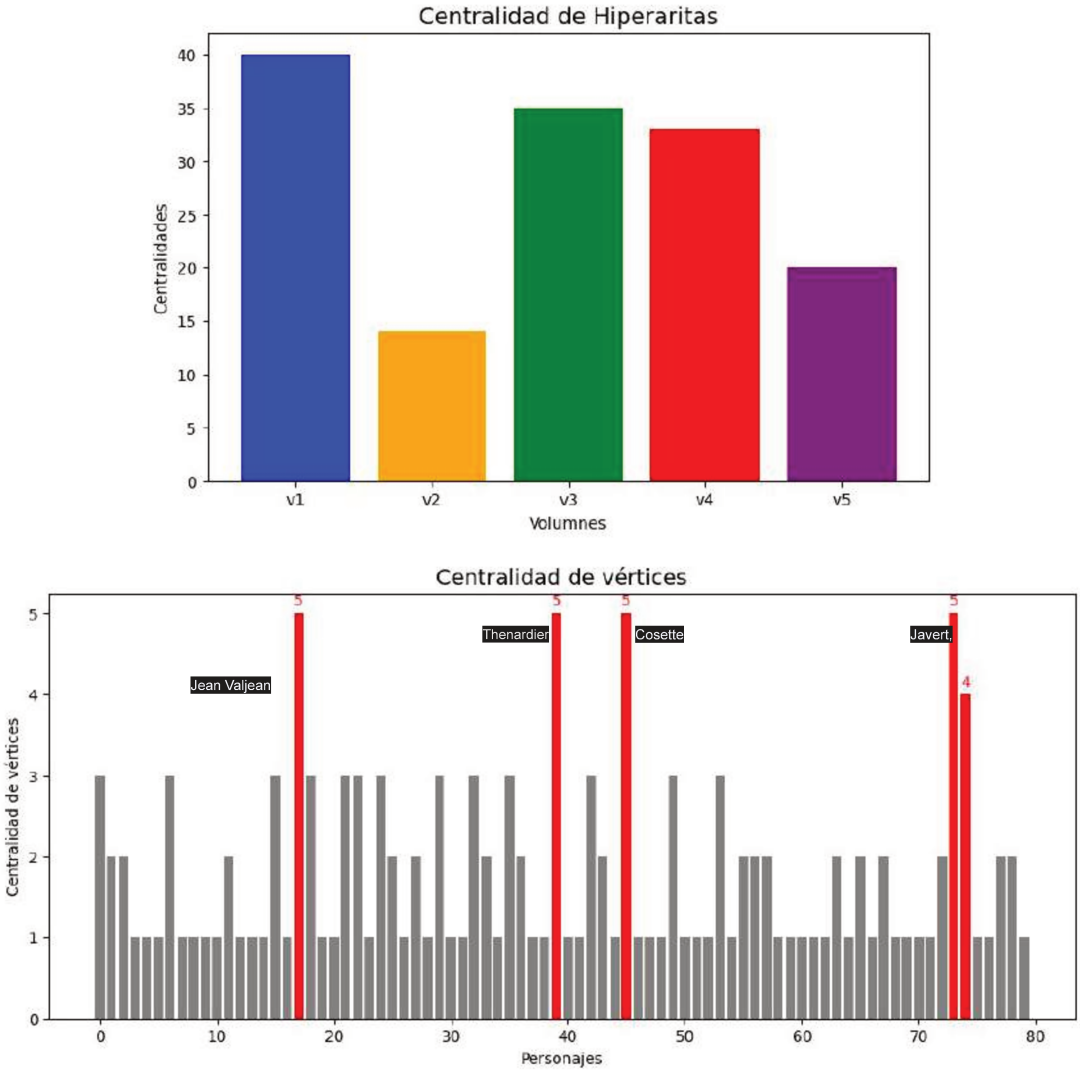


Figura 4.5: Centralidades de vértices e hiperaristas asociadas al hipergrafo $\mathscr{H}$ (ver Figura 4.4).

Ejemplo 2: generación de un hipergrafo explícito para el análisis de pacientes con Diabetes

Vamos a utilizar el conjunto de datos de diabetes del repositorio de la UCI(Machine Learning Repository), que contiene información médica de 520 pacientes. De estos, 328 son hombres y 192 son mujeres. El conjunto de datos cuenta con 17 atributos categóricos, basados en factores médicos y de estilo de vida. Las variables incluidas son: el género del paciente (hombre o mujer), la edad (clasificada en joven, mediana edad o anciano), la presencia de poliuria (micción excesiva), polidipsia (sed excesiva), pérdida de peso repentina, debilidad, polifagia (aumento excesivo del apetito), infecciones genitales por hongos, visión borrosa, picazón, irritabilidad, cicatrización retardada, parálisis parcial, rigidez muscular, alopecia (pérdida de cabello), obesidad y el diagnóstico de diabetes (positivo o negativo).
Para equilibrar los datos y realizar una comparación equitativa entre géneros, seleccionaremos el mismo número de pacientes hombres y mujeres. La base de datos cuenta con 147 mujeres diagnosticadas con diabetes frente a 142 hombres con el mismo diagnóstico. Para asegurar un equilibrio en la comparación, tomaremos la cantidad menor, es decir, 142

pacientes de cada género. En la Figura 4.6 y 4.7 se observan los hipergrafos construidos a partir de este conjunto de datos para cada grupo de pacientes, femenino y maculino, donde cada hiperarista representa un síntoma que presenta el paciente

$$\mathscr{E} = \{0 : \textit{Poliuria}, 1 : \textit{Polidipsia}, 2 : \textit{Pérdida de peso}, 3 : \textit{Debilidad}, 4 : \textit{Polifagia}, 5 : \textit{Candidiasis},$$
$$6 : \textit{Visión borrosa}, 7 : \textit{Picazón}, 8 : \textit{Irritabilidad}, 9 : \textit{Cicatrización tardía},$$
$$10 : \textit{Paresia parcial}, 11 : \textit{Rigidez muscular}, 12 : \textit{Alopecia}, 13 : \textit{Obesidad}\}$$

y los vértices corresponden a los 142 pacientes considerados, tanto en hombres como en mujeres. En ambas Figuras 4.6 y 4.7 se muestra el hipergrafo junto a su matriz de grado en hiperaristas. En el caso de las mujeres (ver Figura 4.6), se observa que las hiperaristas con mayor centralidad son *Poliuria*, *Polidipsia*, *Debilidad* y *Paresia parcial* resaltadas en color rojo, mientras que la de menor grado corresponde a *Alopeseia y Obesidad* ambos síntomas indicados en color verde en su matriz de grados en hiperaristas. Esto indica que los síntomas más comunes que se manifiestan en mujeres son los mencionados anteriormente. En los hombres Figura 4.7, se observa que se comparten los tres primeros síntomas, pero se registra *Polifagia* como cuarto síntoma más frecuente. Mientras que las hiperaristas de menor grado son *Rigidez muscular y Obesidad*, indicadas en color verde en la matriz de grados de hiperaristas.

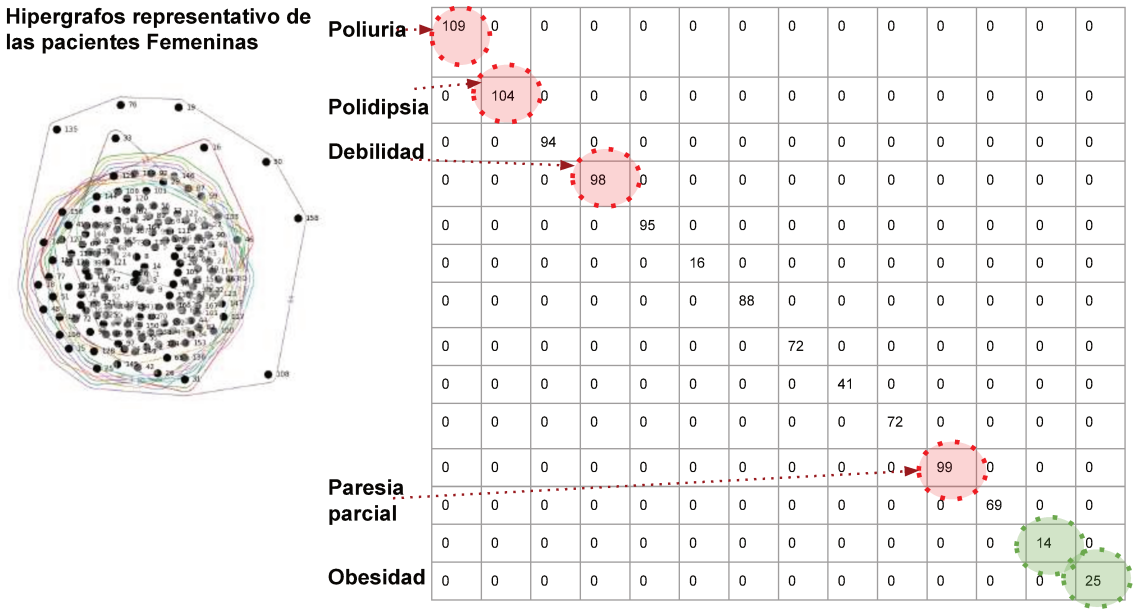


Figura 4.6: Hipergrafo explícito para pacientes femeninas con diabetes junto a su respectiva matriz de grados en hiperaristas.

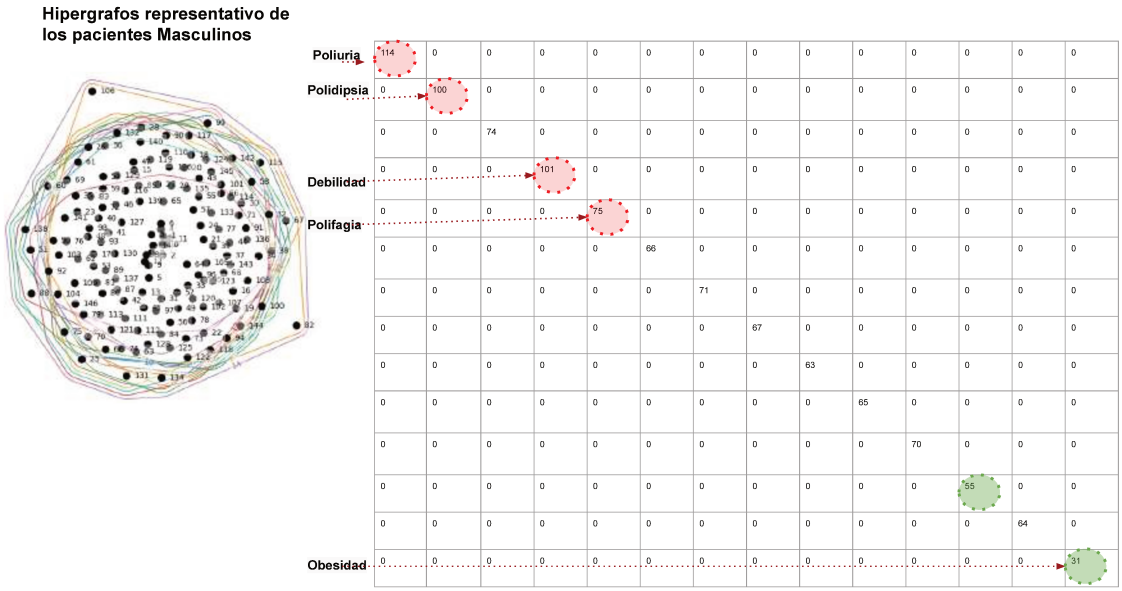
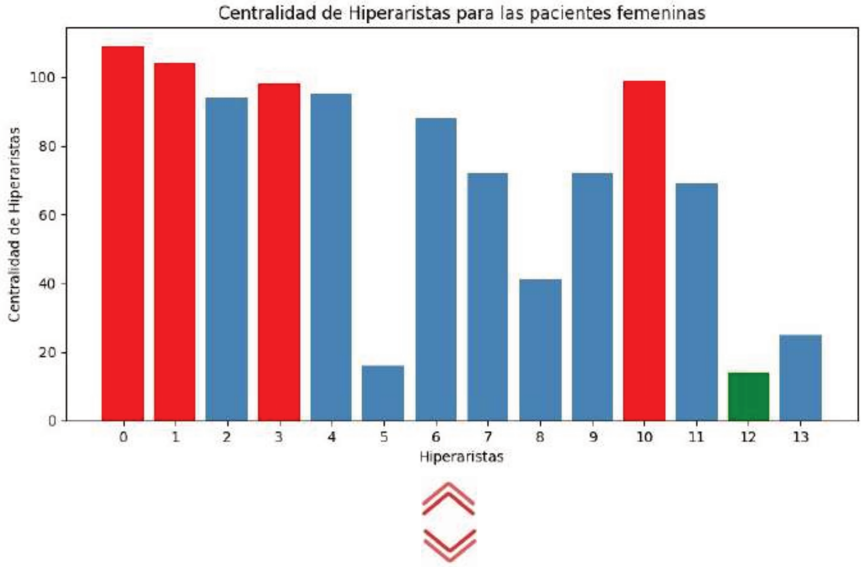


Figura 4.7: Hipergrafo explícito para pacientes masculinos con diabetes junto a su respectiva matriz de grados en hiperaristas.

En la Figura 4.8 se muestras las centralidades de vértices para cada caso y se resaltan en color rojo las mayores centralidades para ambos caso y en verde las menores centralidades. En el análisis de centralidad de los síntomas según sexo, se observa que algunos síntomas son comunes y relevantes tanto en mujeres como en varones, mientras que otros presentan diferencias notables. Entre los síntomas más frecuentes en ambos sexos destacan *Poliuria*, *Polidipsia* y *Debilidad*, reflejando su relevancia general en la población. Sin embargo, se identifican diferencias importantes: en las mujeres, síntomas como *Irritabilidad* y *Visión borrosa* presentan mayor centralidad, mientras que en los varones, *Candidiasis* y *Paresia parcial* muestran valores más altos. Otros síntomas, como *Picazón*, *Cicatrización tardía* y *Rigidez muscular*, presentan variaciones menores entre sexos. En conjunto, estos resultados permiten distinguir patrones generales y diferencias específicas en la manifestación de los síntomas entre mujeres y varones, mostrando tanto coincidencias como particularidades de cada grupo.



Hiperaristas = {0 : Poliuria,1 : Polidipsia,2 : Pérdida de peso,3 : Debilidad,4 : Polifagia,5 : Candidiasis, 6 : Visión borrosa,7 : Picazón,8 : Irritabilidad,9 : Cicatrización tardía, 10 : Paresia parcial,11 : Rigidez muscular,12 : Alopecia,13 : Obesidad}

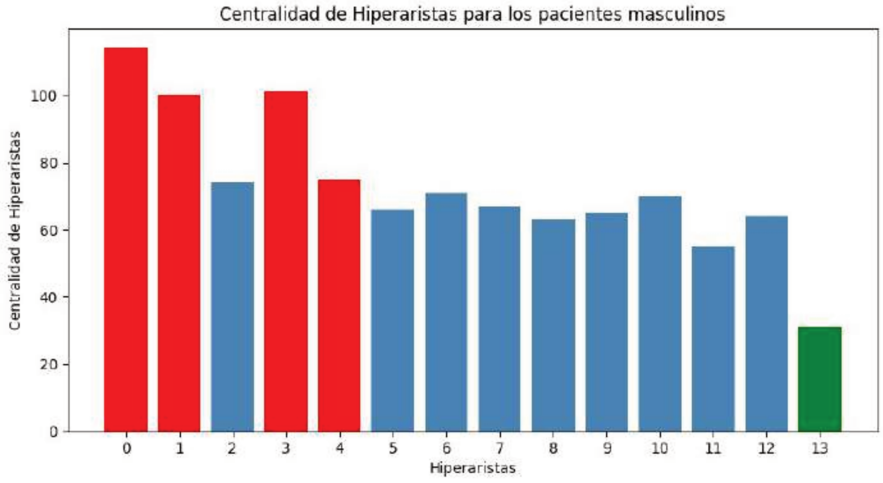


Figura 4.8: Comparación de la centralidad de hiperaristas asociados a los hipergrafos pertenecientes al grupo femenino versus los grados en hiperaristas del hipergrafos asociado al grupo masculino.

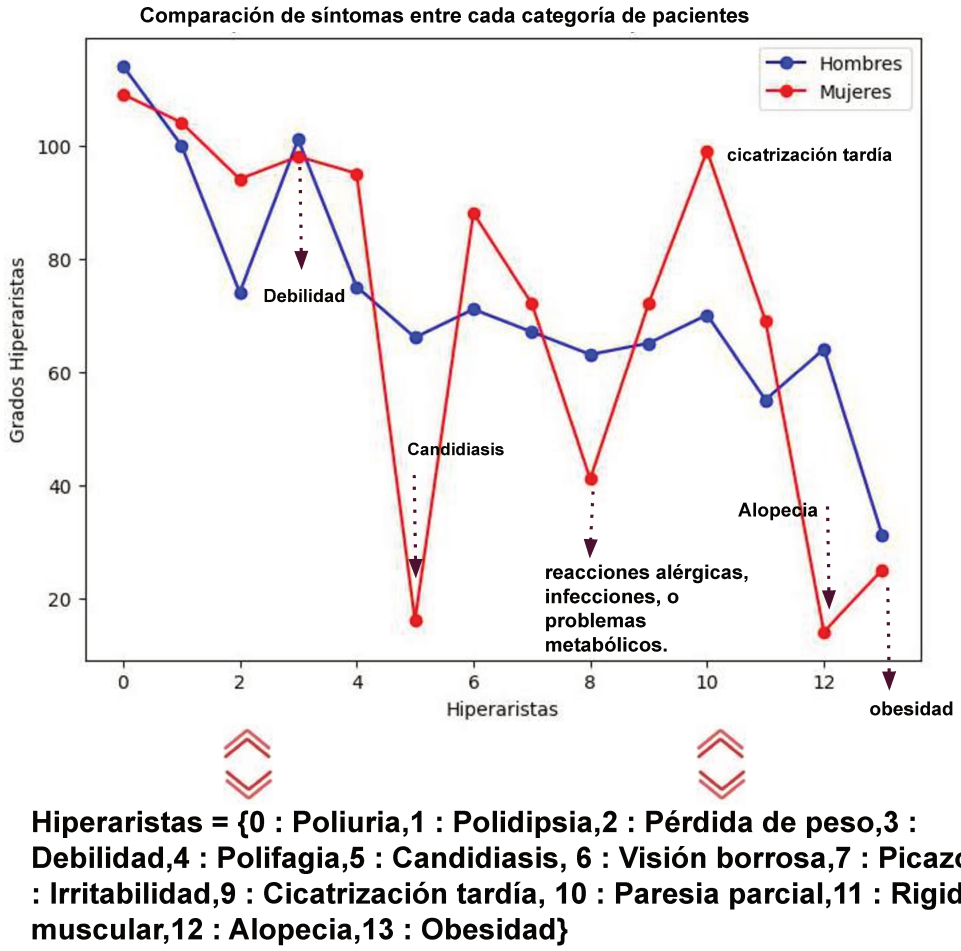


Figura 4.9: Centralidad de hiperaristas para ambos grupos.

4.7.2. Modelado implícitos con hipergrafos

En el modelado de hipergrafos **implícitos**, las correlaciones entre los datos no se proporcionan directamente. Por lo que necesitamos analizar diferentes representaciones de los datos para construir las correlaciones. Dos métodos típicos para el modelado de hipergrafos implícitos son los métodos **basados en distancias** y **los métodos basados en representación**. En los métodos basados en distancias, podemos explorar la información de vecindad para cada muestra en algunos espacios de características específicos, y las muestras con **alta similitud** (baja distancia) pueden conectarse mediante una hiperarista. En los métodos basados en **representación**, la representación entre diferentes vectores de características para las muestras se utiliza para medir la información de vecindad, que puede usarse para generar hiperaristas.

Métodos de generación de hipergrafos basados en distancias

Los métodos de generación de hipergrafos basados en distancias construyen los hiperaristas basándose en las distancias en el espacio de características para todos los vértices.

Este método puede dividirse en dos pasos: la generación de la matriz de incidencia y la asingación de pesos en las hiperaristas. Para la construcción de la matriz de incidencia, la conectividad en el hipergrafo tiene en cuenta las relaciones de vecindad entre conjuntos de vértices, donde los vecinos de los vértices en el espacio de características están conectados por una hiperarista. Existen dos enfoques principales para determinar los vecinos [80].

En el primero, *la estrategia de generación de hiperaristas se basada en el vecino más cercano* y consiste en identificar, para cada vértice (considerado como centroide), los vértices más próximos y conectarlos mediante hiperaristas. Mientras que para el segundo, *la estrategia de generación de hiperaristas se basada en el agrupamiento*, es decir forma grupos de vértices que comparten características similares y construye una hiperarista que conecta a todos los vértices pertenecientes al mismo grupo.

Método1: en la Figura 4.10 se ilustra el proceso de construcción de hipergrafos utilizando las vecindades de los vértices mediante la técnica de k vecinos más cercanos (KNN) con $k = 3$. Este procedimiento es iterativo y debe aplicarse a todos los vértices existentes. Sin embargo, para fines de ilustración, se muestran casos simplificados. Se construyen 2 hiperaristas tomando como centroides a los vértices coloreados en rojo, utilizando el método de vecinos más cercanos (KNN) y la distancia euclidiana para indicar la proximidad entre los puntos.

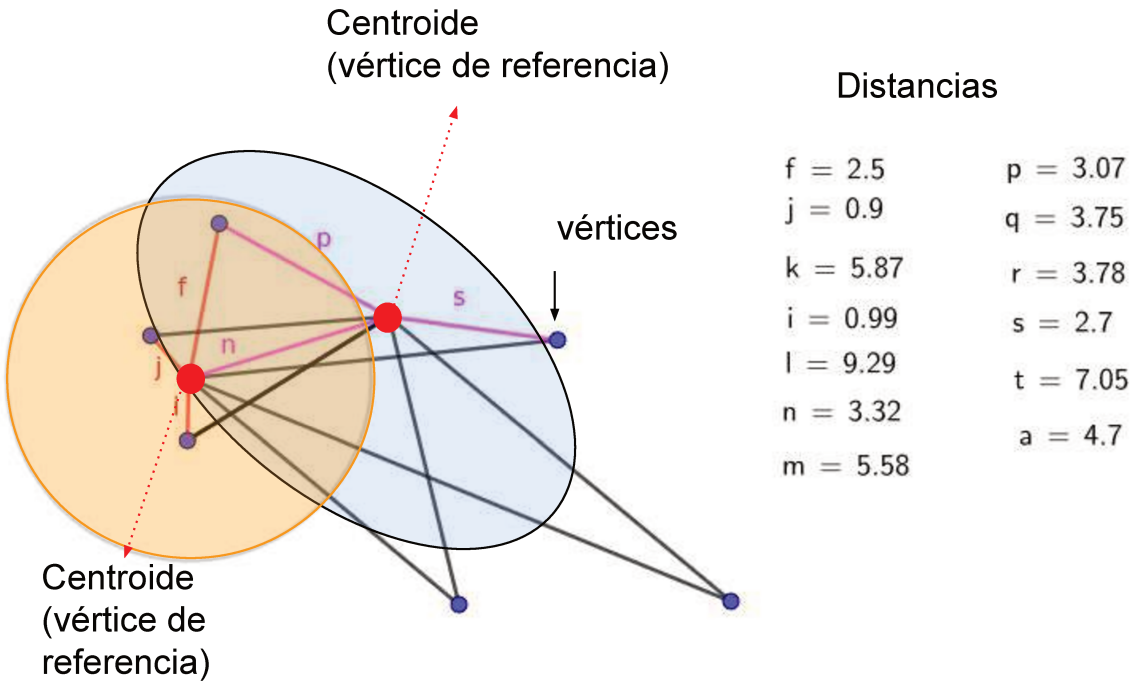


Figura 4.10: Hipergrafo construido usando KNN con k=3.

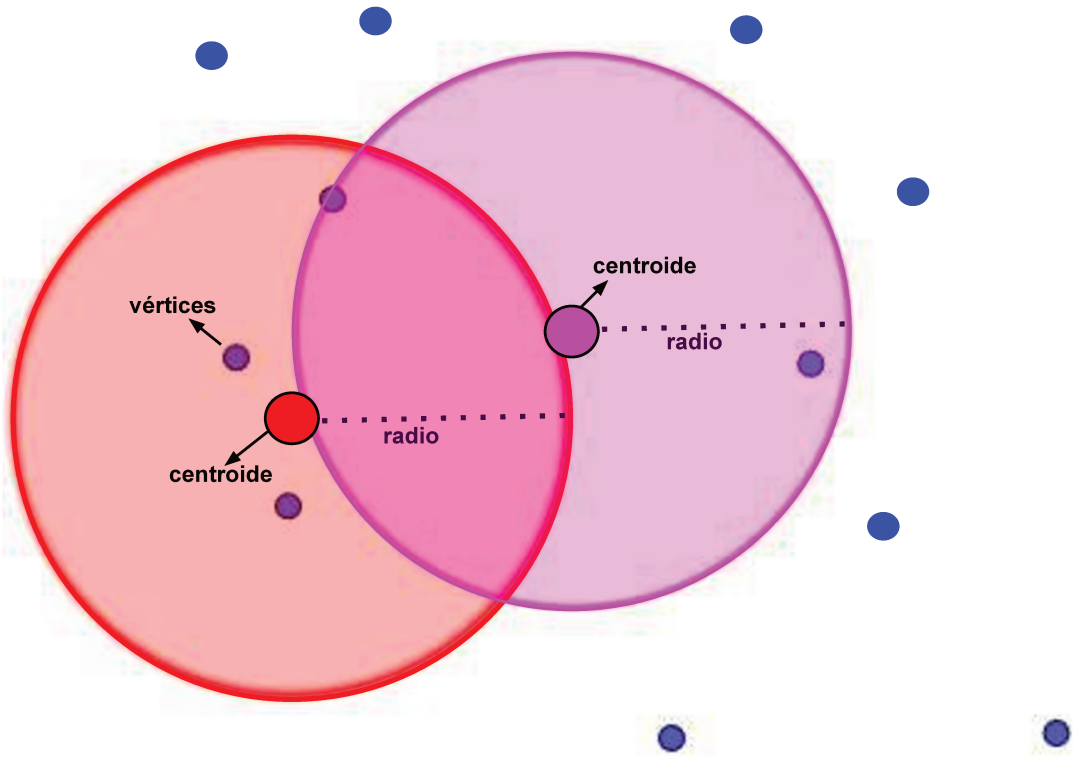


Figura 4.11: Hipergrafo construido usando r-ball.

Método 2 : En la Figura 4.11 se muestra la construcción de un hipergrafo generado utilizando el método de r-ball. En este caso, se obtiene dos hiperaristas, utilizando como centroides los vértices seleccionados previamente en el proceso de KNN. Es importante observar que, a diferencia de KNN, donde el valor de k determina explícitamente el número de vértices en cada hiperarista (generando hipergrafos k-regulares), el método r-ball no impone esta restricción. En lugar de ello, se fija un valor de radio r para todas las bolas, y se determina si los vértices caen dentro o fuera de cada bola centrada en un centroide. Este enfoque permite una mayor flexibilidad en la construcción de las hiperaristas, ya que no depende del número fijo de vecinos, sino de la proximidad en términos del radio r.

Podemos formalizar lo antes expuesto de la siguiente manera sea $\mathscr{V}$ un conjunto finito de datos que puede representar entidades como electrodos, áreas cerebrales, sensores, individuos o puntos de datos en general. Para cada vértice $v \in \mathscr{V}$, definimos $X(v)$ como un vector de características asociado, tal que $X(v) \in \mathbb{X}$.
Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico, donde $\mathbb{X}$ es un espacio vectorial de dimensión l. Esto implica que existe una base $\{y_1, y_2, \ldots, y_l\} \subset \mathbb{X}$ tal que para todo vector $x \in \mathbb{X}$, se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base

$$x = \sum_{j=1}^{l} c_j y_j \quad \text{con } c_j \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, se define la función $X : \mathscr{V} \to \mathbb{X}$, que asigna un vector de características a cada vértice v en $\mathscr{V}$. Esta función se puede expresar como $X(v) = \{(x_1(v), x_2(v), ..., x_l(v)\}$ donde $x_j(v)$ representa el valor de la j-ésima característica del vértice v. Con esta notacion podemos representar los siguientes algoritmos

Generación de hiperaristas utilizando kNN

Sea $\mathscr{V}$ un conjunto finito de vértices, donde $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
Sea $v_i \in \mathscr{V}$ el vértice centroide
Sea $X(v_i) \in \mathbb{X}$ un vector de características asociado a cada vértice v_i en $\mathscr{V}$
Calcular la distancia $d((X(v_i), (X(v_j))$ entre cada par de vectores de características asociados a los vértices $v_i, v_j \in \mathscr{V}$ utilizando una métrica $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
Seleccionar k vecinos más cercanos para cada vértice v_i, donde el conjunto de vecinos se define como

$$N_k(v_i) = \{v_j \in \mathscr{V} \mid j \neq i \text{ y } (d((X(v_i), (X(v_j)) \text{ es mínima}\}, \text{ con } |N_k(v_i)| = k$$

Crear hiperaristas e que contiene el vértice v_i y sus vecinos $N_k(v_i)$ tal que
$e = \{(v_i, v_j) \mid v_j \in N_k(v_i)\}$

Generación de hiperaristas utilizando r-ball

Sea $\mathscr{V}$ un conjunto finito de vértices, donde $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Sea $v_i \in \mathscr{V}$ el vértice considerado como centroide.
Se calcula la distancia $d(X(v_i), X(v_j))$ entre cada par de vectores de características asociados a los vértices $v_i, v_j \in \mathscr{V}$, utilizando una métrica $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.
A continuación, se define un radio $r > 0$ que determina el tamaño de la vecindad (o "bola") alrededor de cada vértice.
El conjunto de vecinos dentro de dicha bola se define como

$$N_r(v_i) = \{v_j \in \mathscr{V} \mid d(X(v_i), X(v_j)) < r\}.$$

Finalmente, se construyen las hiperaristas e conectando el vértice v_i con todos sus vecinos $N_r(v_i)$, de modo que

$$e = \{(v_i, v_j) \mid v_j \in N_r(v_i)\}.$$

Como ejemplo aplicaremos las técnicas previamente expuestas para la construcción de hipergrafos asociados a las señales de electroencefalografía intracraneal (iEEG) en ratas, presentadas en la sección 3.2, ver Figura 3.1.
Para contextualizar, los datos provienen de registros de iEEG obtenidos mediante siete electrodos implantados en ratas durante distintas fases del ciclo de sueño: AWAKE (vigilia), REM (Rapid Eye Movement o sueño REM), QW (Quiet Wakefulness o vigilia tranquila) y NREM (sueño profundo). En este caso, los vértices del hipergrafo están representados por los siete electrodos $\mathscr{V} = \{V_{2d}, V_{2i}, S_{1d}, S_{1i}, M_{1d}, M_{1i}, OB\}$, y los vectores de características $X(v_i)$, con $v_i \in \mathscr{V}$, corresponden a las señales asociadas a cada electrodo. Así, cada vector de características tendrá un solo elemento, que es la señal registrada en el tiempo t para cada electrodo. Estos vectores pueden denotarse de la siguiente forma

$$X(V_{2d}) = x_{V_{2d}}(t), \quad X(V_{2i}) = x_{V_{2i}}(t), \quad X(S_{1d}) = x_{S_{1d}}(t), \quad X(S_{1i}) = x_{S_{1i}}(t),$$

$$X(M_{1d}) = x_{M_{1d}}(t), \quad X(M_{1i}) = x_{M_{1i}}(t), \quad X(OB) = x_{OB}(t).$$

De esta manera, cada vector $X(v_i)$ refleja la señal temporal asociada a su respectivo electrodo.

Aplicaremos el método kNN con $k = 3$, utilizando la métrica de PLI definida en el Capítulo 1 para calcular las diferencias entre pares de electrodos. De esta manera, obtenemos matrices de distancia que contienen todas estas diferencias, las cuales se representan como una matriz cuadrada de orden 7×7. Si analizamos el hipergrafo representado en la Figura 4.12, observamos que contiene 7 hiperaristas.

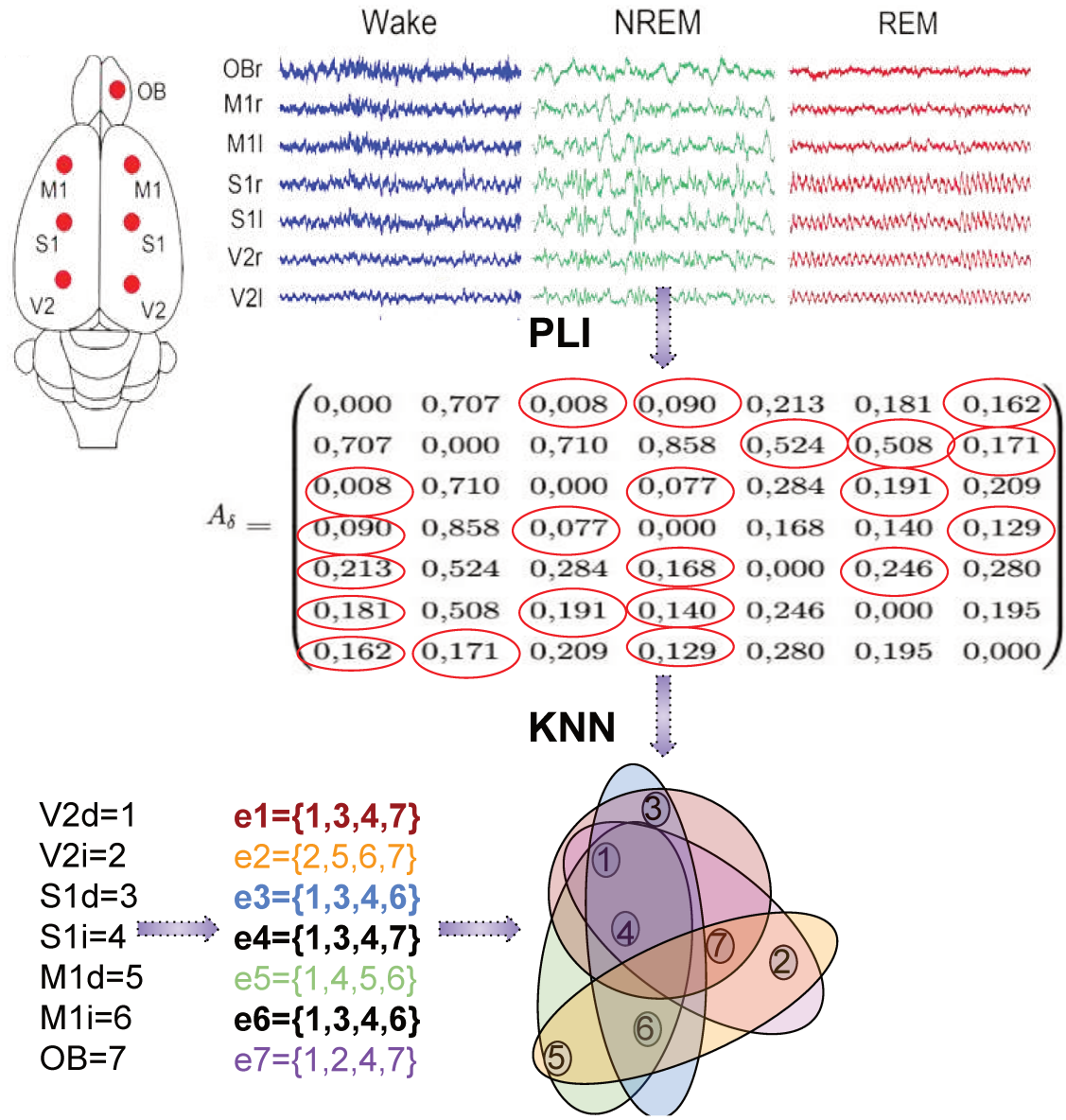


Figura 4.12: Hipergrafo construido usando KNN con $k = 3$ para rata1 en la banda δ en el estado AW.

Cada una de estas hiperaristas se construye tomando como centroide un vértice $v_i \in \mathcal{V}$, con $i = 1, \ldots, 7$. Cada hiperarista se construye utilizando los 3 vecinos más cercanos a cada vértice $v_i \in \mathcal{V}$, lo que genera hipergrafos $k+1$-regulares con $k = 3$, es decir, el cardinal de cada hiperarista e_i es igual a 4. Mediante este método, observamos la coincidencia de aristas

entre $e_1 = e_4$ y $e_3 = e_6$, por lo que solo tenemos 5 hiperaristas distintas

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \{V_{2d}, S_{1d}, S_{1i}, OB\},\\
e_2 &= \{V_{2i}, M_{1d}, M_{1i}, OB\},\\
e_3 &= \{V_{2d}, S_{1d}, S_{1i}, M_{1i}\},\\
e_5 &= \{V_{2d}, S_{1i}, M_{1d}, M_{1i}\},\\
e_7 &= \{V_{2d}, V_{2i}, S_{1i}, OB\}.
\end{aligned}
$$

En la Figura 4.13, se muestra el hipergrafo asociado a la rata 1 en el estado AW dentro de la banda δ.

(A)

	V2d	V2i	S1d	S1i	M1d	M1i	OB
e1	1	0	1	1	0	0	1
e2	0	1	0	0	1	1	1
e3	1	0	1	1	0	1	0
e4	1	0	1	1	0	0	1
e5	1	0	0	1	1	1	0
e6	1	0	1	1	0	1	0
e7	1	1	0	1	0	0	1

(B)

	V2d	V2i	S1d	S1i	M1d	M1i	OB
V2d	0	1	4	6	1	3	3
V2i	1	0	0	1	1	1	2
S1d	4	0	0	4	0	2	2
S1i	6	1	4	0	1	3	3
M1d	1	1	0	1	0	2	2
M1i	3	1	2	3	2	0	1
OB	3	2	2	3	2	1	0

(C)

e1	4	0	0	0	0	0	0
e2	0	4	0	0	0	0	0
e3	0	0	4	0	0	0	0
e4	0	0	0	4	0	0	0
e5	0	0	0	0	4	0	0
e6	0	0	0	0	0	4	0
e7	0	0	0	0	0	0	4

(D)

V2d	6	0	0	0	0	0	0
V2i	0	2	0	0	0	0	0
S1d	0	0	4	0	0	0	0
S1i	0	0	0	6	0	0	0
M1d	0	0	0	0	2	0	0
M1i	0	0	0	0	0	4	0
OB	0	0	0	0	0	0	4

Figura 4.13: Hipergrafo construido usando KNN con $k = 3$ para rata 1 en la banda δ en el estado AW. (A) matriz de incidencia,(B) matriz de adyacensia, (C) matriz de grados en hiperaristas,(D) matriz de grados de vértices.

La matriz de incidencia se presenta en (A), seguida de la matriz de adyacencia en (B). En (C), se ilustra la matriz de grados en hiperaristas, y en (D), la matriz de grados en vértices. A partir de la matriz de grados en hiperaristas (C), podemos concluir que este hipergrafo es 4-regular, lo que significa que todas las hiperaristas tienen un cardinal de 4. Al analizar la matriz de grados en vértices (D), se observa que las regiones con mayor conectividad son V2d (parte derecha del área visual primaria V2 en la corteza visual) y S1i (parte izquierda del área somatosensorial primaria S1), mientras que las regiones con menor conectividad son V2i (parte izquierda del área visual primaria V2) y M1d (parte derecha del área motora primaria M1). Por último, es importante destacar que el método de construcción de hipergrafos basado en KNN (k-nearest neighbors) genera tantas hiperaristas como vértices, con

la particularidad de que todas las hiperaristas tienen el mismo cardinal, determinado por el número de vecinos **k** que se considere.
A continuación, aplicamos el método de r-ball sobre el mismo caso considerado previamente. En este caso, definimos el radio como $r = \frac{1}{n^2}\sum A_{\delta_{ij}} = 0{,}25$, donde la elección de este valor se basa en la media de las distancias entre los nodos. En la Figura 4.14 se presenta la construcción del hipergrafo obtenido mediante este método. Observamos que, a diferencia del método basado en kNN, donde cada hiperarista tiene cardinalidad fija $k+1$ y, por lo tanto, el hipergrafo resultante es k-regular, el uso de r-ball genera hiperaristas de cardinalidad variable. Esto se debe a que el criterio de inclusión no se basa en un número fijo de vecinos, sino en un umbral de distancia: todos los vértices cuya distancia al vértice centroide sea menor que r son incluidos en la hiperarista correspondiente.
En resumen, el método de kNN impone una estructura más uniforme, forzando a cada vértice a conectarse con exactamente k vecinos más cercanos, lo que puede ser útil para garantizar una densidad constante en el hipergrafo. Por otro lado, el enfoque r-ball permite una mayor flexibilidad, ya que adapta la conectividad de cada vértice según la distribución real de las distancias, capturando mejor las variaciones locales en la estructura de los datos.

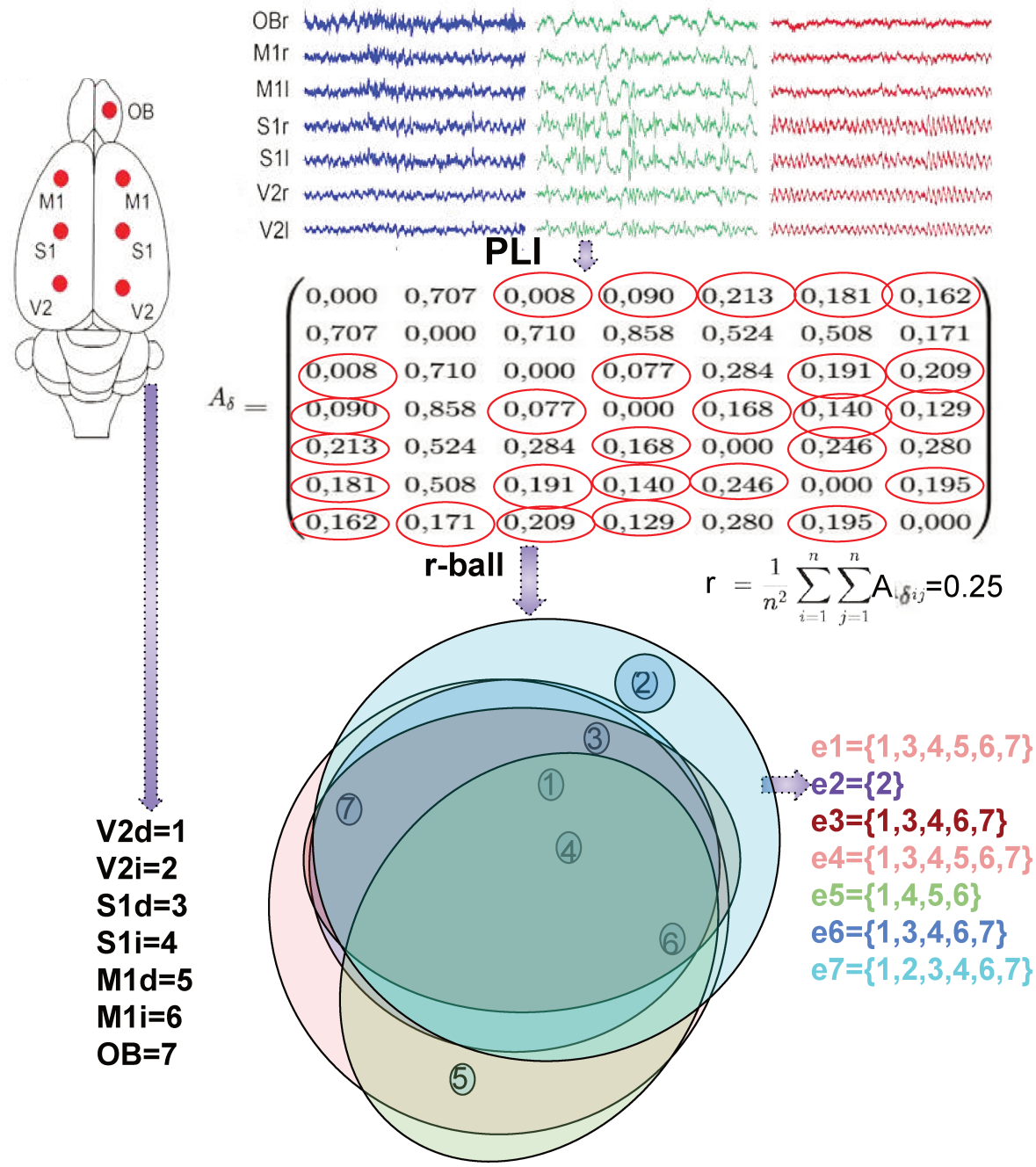


Figura 4.14: Hipergrafo construido usando r-ball con $r = 0{,}25$ para la rata1 en la banda δ en el estado AW.

Capítulo 5

Hipergrafos Métricos

5.0.1. Introducción

Tomando como base las ideas previas sobre la construcción de hipergrafos basados en distancias, en este capítulo presentamos aplicaciones concretas de los **hipergrafos métricos**, que se construyen utilizando diversas nociones de métricas. El objetivo principal es generar diferentes hipergrafos que nos permitan analizar la topología subyacente de diversos conjuntos de datos.

La construcción de estos hipergrafos métricos emplea técnicas de filtración derivadas de la topología algebraica. En lugar de utilizar un hipergrafo fijo para los datos, generamos una familia de hipergrafos en función de un parámetro variable. Este enfoque de hipergrafos dinámicos proporciona una herramienta eficaz para obtener tanto información cualitativa como cuantitativa sobre la estructura de los datos.

Para ello, examinamos conjuntos finitos de datos, que pueden consistir en elementos como puntos, señales, distribuciones o imágenes, entre otros. En primer lugar, establecemos un concepto de distancia o similitud entre los puntos pertenecientes al conjunto de datos bajo análisis, que puede derivarse de la métrica del espacio subyacente (por ejemplo, la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$) que nos permitirá definir una matriz de distancias por pares. La elección de la métrica depende del problema específico que se esté abordando y sirve a veces como una variable que puede elegirse para mejorar la eficiencia de los métodos.

Cada métrica utilizada permitirá definir distintas bolas de radio variable, que se construyen en el espacio de datos y su forma dependerá de la métrica utilizada. Por ejemplo, con la distancia euclídea las bolas adoptan forma de circunferencia, con la distancia de Chebyshev se transforman en cuadrados, con la distancia de Minkowski en rombos y aún con métricas no isótropicas como las parábolicas. Fijamos un radio r y, centrando una bola en cada punto observamos cómo estas se expanden hasta cubrir el conjunto completo.

Los puntos contenidos en cada bola determinan las **hiperaristas** de un hipergrafo. Así, para cada valor de r construimos un hipergrafo y cuantificamos el número de hiperaristas diferentes que lo conforman. . Este procedimiento de filtrado permite identificar las relaciones entre puntos que permanecen invariantes frente a la variación del radio. Finalmente, para cuantificar los cambios en el número de hiperaristas, calculamos este número en función del radio$r$ y, a continuación, caracterizamos las curvas resultantes mediante normas de tipo Lebesgue L_1 y las seminormas discreta de tipo Sobolev $\mathscr{S}$. Además, incorporamos un método para medir la distancia entre esas curvas, lo que proporciona una métrica indirecta entre los hipergrafos generados.

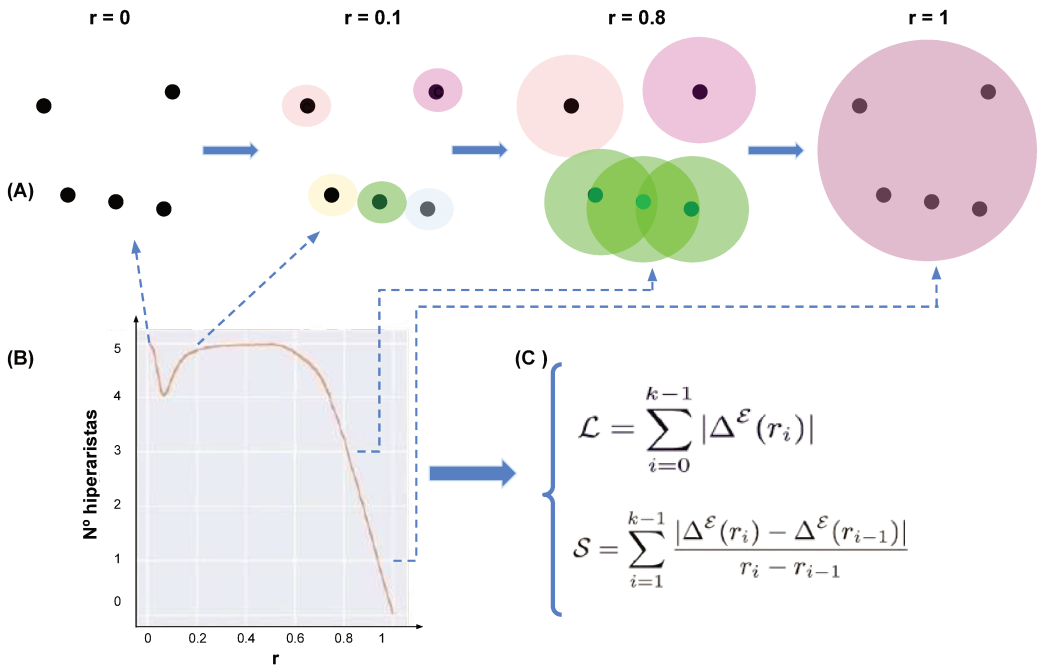


Figura 5.1: Descripción gráfica del método empleado.En (A) tenemos la representacón gráfica de como vamos generando bolas de distinto radio tomando como centros cada uno de los puntos de datos considerados, (B) computamos el número de hiperaristas en función del radio considerado, en (C) se presenta la normas de tipo Lebesgue L_1 y las seminormas discreta de tipo Sobolev $\mathscr{S}$ para la caracterización de las curvas representadas en (B).

5.0.2. Métricas

Definición 40. *Dado un conjunto de puntos $\chi \in \mathbb{R}^n$, con $\chi = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ usando diferentes métricas, definimos la componente $i, j = 1, \ldots, m$ con $j > i$ de la matriz simétrica y nula en la diagonal de distancias D_χ como sigue*

1. *Euclidiana*

$$D_\chi^{Euc}(i,j) = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^l - \boldsymbol{x}_j^l)^2}, \quad \textit{donde} \quad \boldsymbol{x}_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$$

2. *Chebyshev*

$$D_\chi^{Cheb}(i,j) = \max_{l=1,\ldots,n} |\boldsymbol{x}_i^l - \boldsymbol{x}_j^l|$$

3. *Cityblock*

$$D_\chi^{city}(i,j) = \sum_{l=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i^l - \boldsymbol{x}_j^l|$$

4. *Minkowski*

$$D_\chi^{Mink}(i,j) = \left(\sum_{l=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i^l - \boldsymbol{x}_j^l|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

5. *Parabólica en* $\mathbf{R}^3$

$$D_\chi^{Par}(i,j) = \max_{l=1,2,3} |x_i^l - x_j^l|^{\alpha_l},$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ *y* $\alpha_3 = \frac{1}{2}$.

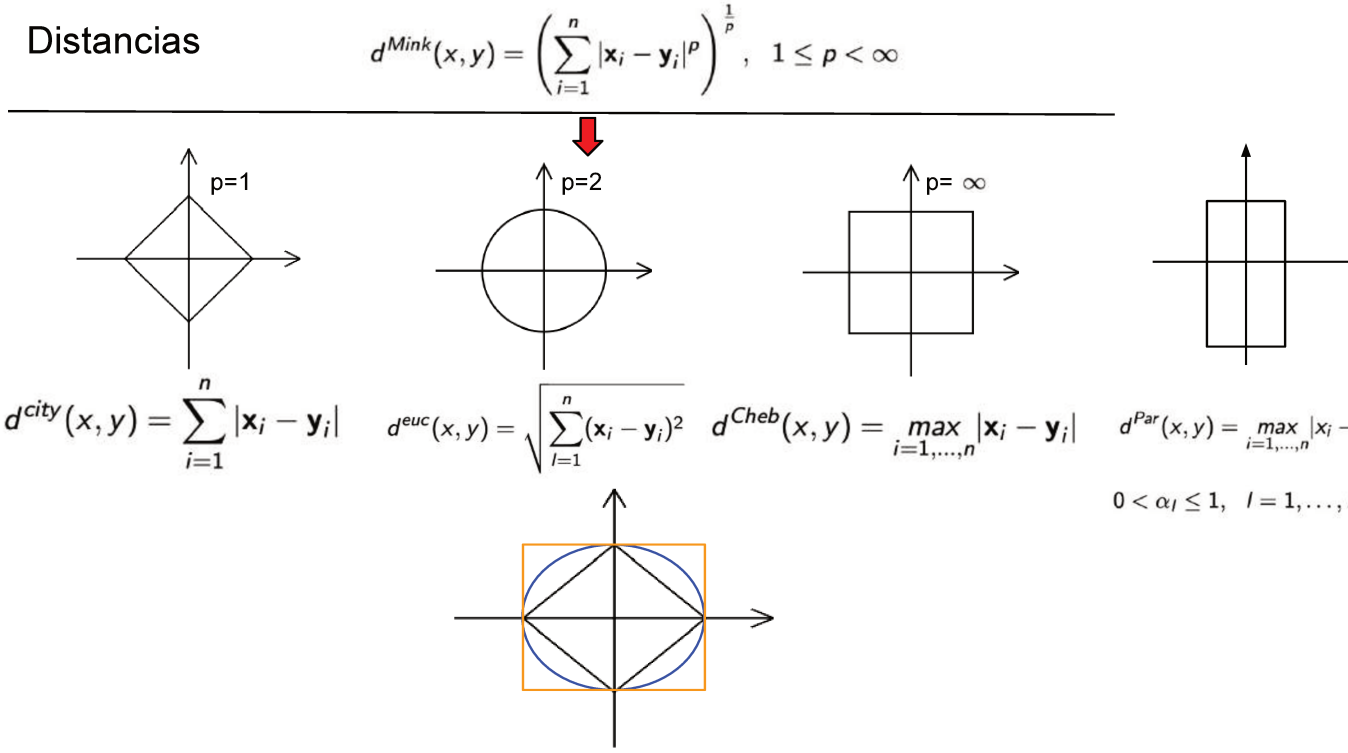


Figura 5.2: Representación gráfica de las distintas bolas en las métricas empleadas.

5.0.3. Nociones básicas

Consideremos un conjunto χ que engloba todos los puntos del conjunto de datos considerado, los cuales pueden ser vistos como un conjunto muy grande. Los elementos de χ pueden asociarse a puntos en el espacio euclidiano, denotado como $\mathbb{R}^n$, o incluso en el espacio funcional cuando los puntos de datos corresponden a señales, imágenes o distribuciones de probabilidad. En el análisis matemático clásico, tales espacios pueden tomarse como espacios de Hilbert, espacios de Banach, o incluso espacios métricos. Aún más generalmente, lo cual nos permite considerar "métricas"no simétricas como la divergencia de Kullback-Leibler, no asumiremos que χ es un espacio métrico. En su lugar, comenzaremos considerando una estructura más general similar a una métrica, llamada **protométricas** sobre χ.

Definición 41. *Una función* $\delta : \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ *se llama* ***protométrica*** *si* $\delta(x,y) = 0$ *si y solo si* $x = y$. *La bola* δ*-centrada e* $x \in \chi$ *con radio* $r > 0$ *se define como*

$$\mathscr{B}_\delta(x,r) = \{y \in \chi : \delta(x,y) < r\}.$$

Es importante notar que con la definición anterior de una protometría, en general, $\mathscr{B}_\delta(x,r)$ no coincide con el conjunto $\{y \in \chi : \delta(y,x) < r\}$ ya que δ no es necesariamente simétrica. Por supuesto, cada métrica en χ es una protométrica. Recordemos que una **métrica** d en χ satisface las propiedades adicionales
$d(x,y) = d(y,x)$ para todo par de puntos $x, y \in \chi$
$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ para toda terna de puntos $x, y, z \in \chi$.
Sea $\mathscr{V} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una muestra finita de puntos en (χ, d). Para cada $r > 0$ y para cada

$i = 1, 2, ..., n$, definimos

$$e_i(r) = \mathscr{B}_\delta(x_i, r) \cap \mathscr{V} = \{x_j \in \mathscr{V} : \delta(x_i, x_j) < r\},$$

y definimos $\mathscr{E}(r)$ como la familia de conjuntos $\{e_i(r) : i = 1, 2, ..., n\}$ para un radio fijo $r > 0$. Notemos que el número de elementos en $\mathscr{E}(r)$ se denota por $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$, que es un valor entre 1 y n. Dado que los conjuntos $e_i(r)$ cubren claramente $\mathscr{V}$, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 10. *Para cada $r > 0$, el par $(\mathscr{V}, \mathscr{E}(r))$ es un hipergrafo con la propiedad adicional de que $x_i \in e_i(r)$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.*

Ahora exploramos algunas propiedades básicas y elementales de esta familia de hipergrafos.

Proposición 11. *Sea $(\mathscr{V}, \mathscr{E}(r))$ como se definió anteriormente. Entonces:*
a) $e_i(r_1) \subset e_i(r_2)$ si $0 < r_1 \leq r_2 < \infty$;
b) $e_i(r) = \{x_i\}$ si $0 < r \leq \min_j \delta(x_i, x_j)$;
c) $e_i(r) = \mathscr{V}$ si $r > \max_j \delta(x_i, x_j)$.

En otras palabras, tenemos una familia de hipergrafos que comienza con los puntos aislados triviales de $\mathscr{V}$ y termina con el hipergrafo completo trivial cuyo única hiperarista es $\mathscr{V}$. Para producir un algoritmo sencillo de cálculo podemos generar una matriz $n \times n$ $M(r)$ asociada con el hipergrafo $(\mathscr{V}, \mathscr{E}(r))$, que está dada por

$$M(r) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{I}_{e_2(r)}(x_1) & \cdots & \mathbb{I}_{e_n(r)}(x_1) \\ \mathbb{I}_{e_1(r)}(x_2) & 1 & \cdots & \mathbb{I}_{e_n(r)}(x_2) \\ \mathbb{I}_{e_1(r)}(x_3) & \mathbb{I}_{e_2(r)}(x_3) & \cdots & \mathbb{I}_{e_n(r)}(x_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{I}_{e_1(r)}(x_n) & \mathbb{I}_{e_2(r)}(x_n) & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left(\mathbb{I}_{e_j(r)}(x_i)\right)_{\substack{j=1,...,n \\ i=1,...,n}}.$$

donde $\mathbb{I}_\theta$ es la función indicadora del conjunto θ, es decir, $\mathbb{I}_\theta(x) = 1$ si $x \in \theta$, y $\mathbb{I}_\theta(x) = 0$ si $x \notin \theta$. Notemos que si (χ, d) es un espacio métrico, entonces $M(r)$ es simétrica para cada $r > 0$. Esto sigue porque $d(x, y) = d(y, x)$, por lo que tenemos inmediatamente $\mathbb{I}_{e_j(r)}(x_i) = \mathbb{I}_{e_i(r)}(x_j)$, ya que $d(x_i, x_j) < r$ si y solo si $d(x_j, x_i) < r$.
Además, para un r fijo, podría ocurrir que $e_i(r) = e_j(r)$ para algunos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. En este caso, las filas repetidas de la matriz se eliminan ya que representan el mismo conjunto. Lo que resulta en una nueva matriz H de orden $\Delta^{\mathscr{E}}(r) \times |\mathscr{V}|$, donde $\Delta^{\mathscr{E}}(r) \leq |\mathscr{V}|$, que es la matriz de incidencia del hipergrafo.

5.0.4. Algoritmo para construir y caracterizar los hipergrafos $\mathscr{H}(r)$

Procedamos ahora a resumir el algoritmo utilizado para analizar un conjunto de datos basado en la caracterización de hipergrafos. Dado un conjunto de datos $\mathscr{V} = \{x_1, ..., x_n\} \in \chi$, generamos y caracterizamos el hipergrafo asociado con $\mathscr{V}$ de la siguiente manera

1 Construcción y caracterización del hipergrafo $\mathscr{H}(r)$

1: Definir la distancia d sobre los elementos del conjunto $\mathscr{V}$.
2: Construir la matriz de distancias $D_\chi = (d(x_i,x_j) : i,j = 1,\ldots,n)$ para cada $x_i \in \mathscr{V}$.
3: Construir la matriz $M(r)$ para cada valor de r de la siguiente forma

$$M_{i,j}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } d(x_i,x_j) < r, \\ 0 & \text{si } d(x_i,x_j) \geq r. \end{cases}$$

4: Obtener la matriz de incidencia $H(r)$ del hipergrafo de orden $\Delta^{\mathscr{E}}(r) \times |\mathscr{V}|$, eliminando las filas repetidas de $M(r)$.
5: Contar el número de filas de $H(r)$ y denotarlo como $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$.

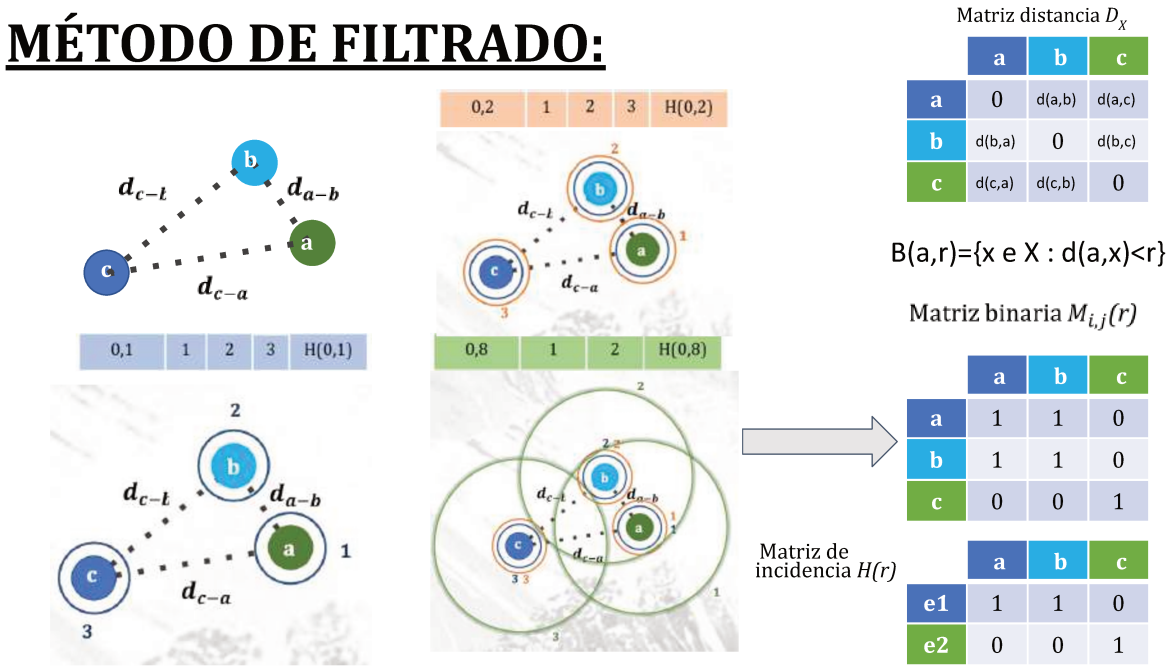


Figura 5.3: Se presenta un ejemplo visual del método de filtrado considerando tres vértices a,b,c, que actúan como centros de circunferencias de radio variable r. Las circunferencias dibujadas alrededor de cada vértice representan las hiperaristas de nuestro hipergrafo que dependeran de cada valor del radio r considerado. Para cada valor de r, se construye la matriz de distancias entre pares de vértices y se binariza asignando un valor de 1 cuando la distancia entre ellos es menor que r, y 0 en caso contrario. A partir de esta matriz binarizada se construye la matriz de incidencia correspondiente, eliminando posteriormente las filas repetidas para obtener únicamente las hiperaristas distintas del hipergrafo. El procedimiento antes expuesto se presenta a modo de ejemplo para diferentes radios $r = 0{,}1$, $r = 0{,}2$ y $r = 0{,}8$. En los casos $r = 0{,}1$ y $r = 0{,}2$ se obtienen tres hiperaristas distintas, mientras que para $r = 0{,}8$ se generan tres hiperaristas, de las cuales dos son iguales; por lo tanto, el hipergrafo final contiene solo dos hiperaristas distintas: una que incluye al vértice c y otra que incluye a a y b.

5.0.5. Cuantificación de las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$

Del algoritmo de filtrado de hipergrafos, podemos observar que el resultado es una función $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ de la variable $r > 0$ que cuenta el número de hiperaristas del hipergrafo $\mathscr{H}(r)$. A partir de esta curva, podemos derivar cuantificadores que proporcionan información más compacta sobre los sistemas en estudio. Para esto, usamos la norma de Lebesgue L^1 ($\mathscr{L}$) y la semi-norma de Sobolev discreta de orden 1 ($\mathscr{S}$), las cuales se definen a continuación. Dado que r varía de 0 a 1, ya que podemos normalizar el espacio métrico a diámetro unitario, discretizamos su valor definiendo $r_i = i\Delta r$, con $i = 0, \ldots, k-1$ y $\Delta r = \frac{1}{k}$. La norma L^1 se define como

$$\mathscr{L} = \sum_{i=0}^{k-1} \left| \Delta^{\mathscr{E}}(r_i) \right|$$

y la semi-norma de Sobolev como

$$\mathscr{S} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left| \Delta^{\mathscr{E}}(r_i) - \Delta^{\mathscr{E}}(r_{i-1}) \right|}{r_i - r_{i-1}}$$

Estas dos métricas permiten medir y cuantificar las características de las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$. En particular, la métrica $\mathscr{L}$ cuantifica el área bajo la curva, mientras que la métrica $\mathscr{S}$ mide las variaciones en la pendiente de la curva. Al aplicar estas métricas, obtenemos una comprensión más completa de las características y el comportamiento de las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$.
Para establecer una noción de distancia entre los distintos conjuntos de puntos bajo análisis, consideramos las distancias entre las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ asociadas a cada conjunto de puntos. Sea $\Psi = \{\Delta_1^{\mathscr{E}}(r), \ldots, \Delta_N^{\mathscr{E}}(r)\}$ y $\hat{\Psi} = \{\Delta_1^{\hat{\mathscr{E}}}(r), \ldots, \Delta_N^{\hat{\mathscr{E}}}(r)\}$ dos conjuntos distintos de curvas. Cada conjunto está formado por N curvas que se obtienen de N *iteraciones* del proceso asociado a generar conjuntos de datos (por ejemplo, N secuencias independientes de ruido blanco). Entendemos por *iteración* una instancia particular del procedimiento de generación de datos, en la que se obtiene un conjunto de puntos siguiendo las mismas reglas estadísticas. A partir de cada realización se construye una curva $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$. Al repetir el procedimiento N veces, se obtienen N curvas diferentes que conforman el conjunto Ψ. En la Figura 5.4 se muestran 4 iteraciones de las cuales resultan cinco curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ distintas, construidas a partir de conjuntos de puntos que siguen una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 3$.

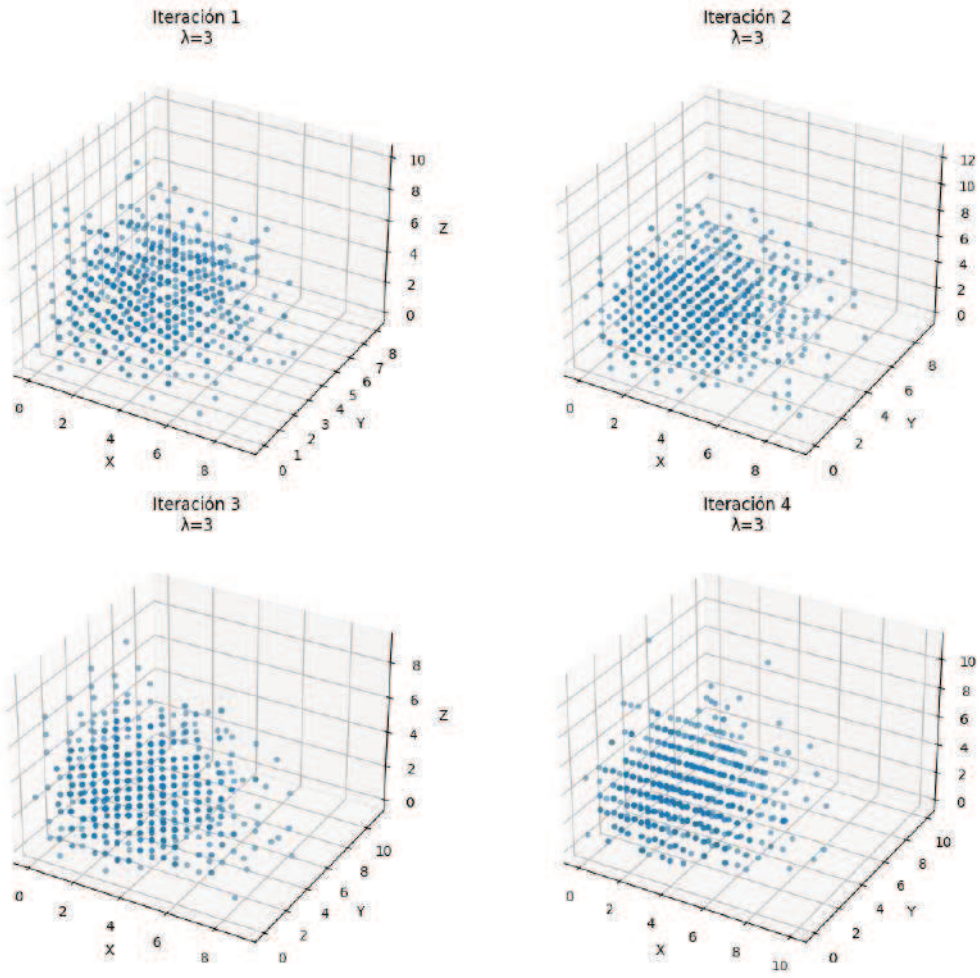


Figura 5.4: Representación gráfica de 4 iteraciones para generar puntos asociados a distribuciones de Poisson.

Luego, estimamos los valores promedio $\mu(r)$ y las desviaciones estándar $\sigma(r)$ para cada grupo. Posteriormente, calculamos la distancia entre los dos grupos, denotada como $d^{\Psi,\hat{\Psi}}(r)$, utilizando las siguientes condiciones
Si $\sigma(r) < \hat{\sigma}(r)$, entonces

$$d^{\Psi,\hat{\Psi}}(r) = \begin{cases} (\mu(r) - \sigma(r)) - (\hat{\mu}(r) + \hat{\sigma}(r)) & \text{si } (\mu(r) - \sigma(r)) > (\hat{\mu}(r) + \hat{\sigma}(r)) \\ 0 & \text{si } (\mu(r) - \sigma(r)) \leq (\hat{\mu}(r) + \hat{\sigma}(r)) \end{cases}$$

o $\sigma(r) > \hat{\sigma}(r)$, entonces

$$d^{\Psi,\hat{\Psi}}(r) = \begin{cases} (\hat{\mu}(r) - \hat{\sigma}(r)) - (\mu(r) + \sigma(r)) & \text{si } (\hat{\mu}(r) - \hat{\sigma}(r)) > (\mu(r) + \sigma(r)) \\ 0 & \text{si } (\hat{\mu}(r) - \hat{\sigma}(r)) \leq (\mu(r) + \sigma(r)) \end{cases}$$

Finalmente, cuantificamos la diferencia aplicando la norma L^1 y la semi-norma de Sobolev de orden 1 al vector de distancia $d^{\Psi,\hat{\Psi}}(r)$.

5.1. Aplicaciones

En esta sección aplicaremos el método presentado en la Subsección 5.0.4. En primera instancia aplicaremos el método a cuatro bases de datos diferentes. El primer conjunto de

datos implicó la caracterización y diferenciación de cinco conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^3$ con distribuciones de probabilidad distintas. El segundo ejemplo exploró las similitudes y diferencias entre tres sistemas dinámicos y un sistema estocástico en $\mathbb{R}^3$. En el tercer caso, se estudió la evolución dinámica de un sistema de osciladores acoplados utilizando el modelo de Kuramoto. Finalmente, se investigaron los cambios dinámicos en registros de magnetoencefalografía (MEG) de dos pacientes con epilepsia generalizada durante una crisis epiléptica. Con el fin de ilustrar la versatilidad y aplicabilidad del enfoque propuesto, cada conjunto fue elegido estratégicamente para resaltar diferentes aspectos de la metodología desde la capacidad para distinguir entre distribuciones de probabilidad, hasta el análisis de comportamientos dinámicos complejos en sistemas físicos y señales biológicas reales. En todos los casos, se trabajó en espacios tridimensionales $\mathbb{R}^3$ para facilitar la representación visual de los resultados y brindar al lector una comprensión más intuitiva de los fenómenos estudiados, siendo importante remarcar que la metodología desarrollada no se limita al espacio tridimensional, sino que puede extenderse a espacios de dimensión n o cualquier espacio métrico.

5.1.1. Distribución de puntos

En primera instancia aplicamos la construcción de hipergrafos métricos para analizar la sensibilidad del método ante diferentes tipos de distribuciones de puntos en $\mathbb{R}^3$. Consideraramos tres clases de distribuciones de probabilidad i) Normal, ii) Uniforme, iii) Poisson, junto con dos distribuciones estructuradas iv) Lattice (reticulado) y v) Fractal. A continuación se describe brevemente la generación de estos conjuntos.

Distribución normal

Una variable aleatoria discreta x se dice que tiene una distribución Normal si se distribuye de acuerdo a la densidad

$$p(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

donde μ es la media, y σ^2 es la varianza. En nuestro trabajo, para las distintas realizaciones utilizamos la función `random.normal` del paquete de Python `numpy`.

Distribución de Poisson

Una variable aleatoria discreta x se dice que tiene una distribución de Poisson si

$$p(x=k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

donde k es un número entero ($k \geq 0$) y λ es un número real positivo. La distribución de Poisson describe la probabilidad de observar exactamente k eventos en un intervalo de tiempo si los eventos ocurren independientemente a una tasa constante λ. Para generar esta distribución, usamos la función `random.poisson` del paquete `numpy` en Python.

Distribución uniforme

La distribución uniforme en el intervalo [a,b] está dada por la densidad de probabilidad

$$p(x,a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x < a \text{ o } x > b \end{cases}$$

En nuestro trabajo usamos $a = -1$ y $b = 1$, y la función `random.uniform` del paquete `numpy` en Python. En todos los casos, a partir de las distribuciones generamos un conjunto de puntos aleatorios en $\mathbb{R}^3$, utilizando como coordenadas independientes muestras de cada distribución. De esta forma, cada punto del espacio tridimensional corresponde a una realización (x_1, x_2, x_3) con x_i generado según la distribución en estudio. Los gráficos de estas realizaciones fueron construidos en Python, representando los puntos en un sistema de ejes cartesianos tridimensional ver Figura 5.6.

2 Generación de puntos en 3D según distintas distribuciones

Require: Número de puntos N, tipo de distribución `dist`, parámetros (θ)
Ensure: Conjunto de puntos $P = \{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{N}$

for $i = 1$ **to** N **do**
  if `dist = "Uniforme"` con parámetros a, b **then**
    Generar $x_i \sim U(a,b)$, $y_i \sim U(a,b)$, $z_i \sim U(a,b)$
  else if `dist = "Poisson"` con parámetro λ **then**
    Generar $x_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $y_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $z_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$
  else if `dist = "Normal"` con parámetros μ, σ **then**
    Generar $x_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $z_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
  end if
  Formar el punto $p_i = (x_i, y_i, z_i)$
  Agregar p_i al conjunto P
end for
return P

Ejemplo: tomemos la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 3$. Cada coordenada X, Y, Z se genera de manera independiente, todas con la misma distribución:

$$X \sim \text{Poisson}(3), \quad Y \sim \text{Poisson}(3), \quad Z \sim \text{Poisson}(3).$$

Paso 1. Generamos cinco valores de X:

$$X = [2, 3, 4, 1, 5].$$

Paso 2. Generamos cinco valores de Y:

$$Y = [3, 2, 5, 4, 3].$$

Paso 3. Generamos cinco valores de Z:

$$Z = [4, 3, 2, 6, 1].$$

Paso 4. Formamos los puntos en $\mathbb{R}^3$ combinando cada una de las coordenadas:

$$p^{(1)} = (2,3,4),$$
$$p^{(2)} = (3,2,3),$$
$$p^{(3)} = (4,5,2),$$
$$p^{(4)} = (1,4,6),$$
$$p^{(5)} = (5,3,1).$$

Así obtenemos un conjunto de cinco puntos tridimensionales generados de acuerdo con la misma distribución de Poisson con $\lambda = 3$.

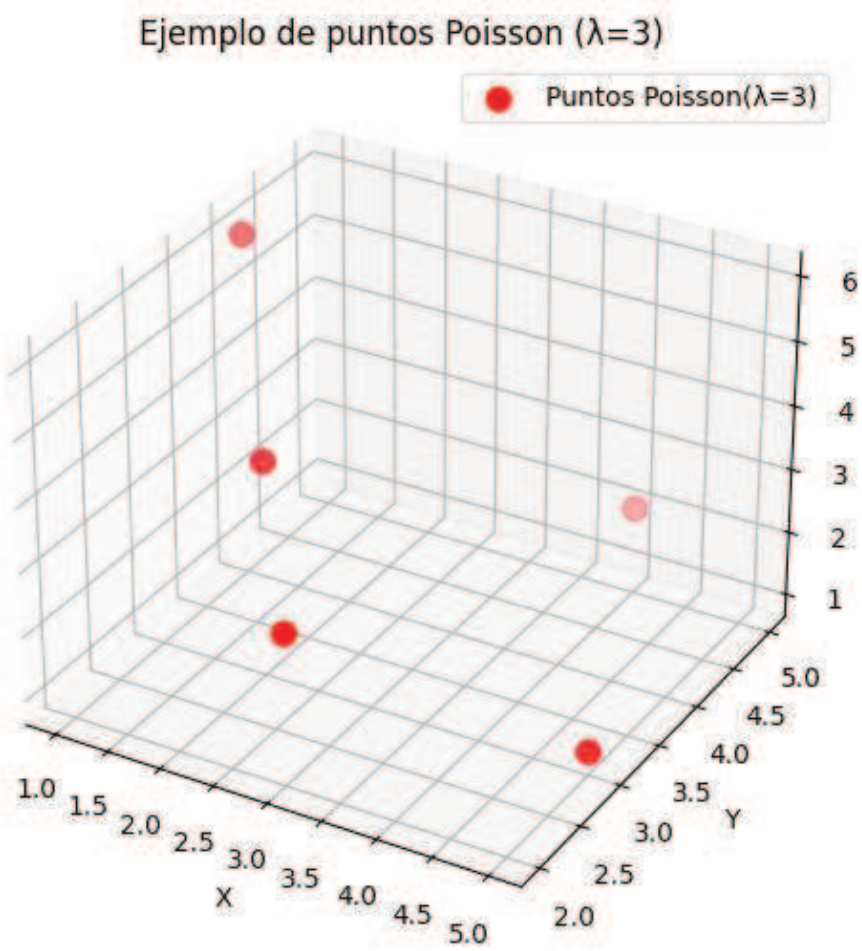


Figura 5.5: Representación gráfica del los puntos en $\mathbf{R}^3$ de una distribución de Poisson.

Lattice

Un Lattice (reticulado) es un arreglo ordenado de puntos que describe la disposición de partículas que forman un cristal. En nuestro trabajo, construimos la red definiendo un cubo tridimensional y ubicando los datos a una distancia **x** fija entre sí.

Fractal

Para el arreglo fractal, generamos $N = 1000$ puntos en $\mathbf{R}^3$. Las coordenadas $\mathbf{X} = [x^1, x^2, x^3]$ de cada punto siguen el siguiente procedimiento. Para cada coordenada x^l generamos un vector de longitud $L = 100$, $\mathbf{x}^l = \{x_1^l, \ldots, x_{100}^l\}$ con x_i^l elegidos aleatoriamente y uniformemente entre $\{0, 3\}$ por ejemplo $\mathbf{x}^1 = \{0, 3, 0, 0, 0, 3, 0, ..., 0\}$. Luego calculamos los valores x^l como

$$x^l = \sum_{i=1}^{L} \frac{x_i^l}{4^i} \quad \text{para } l = 1, 2, 3$$

Ejemplos representativos de los conjuntos antes mencionados se ilustran en la Figura 5.6.

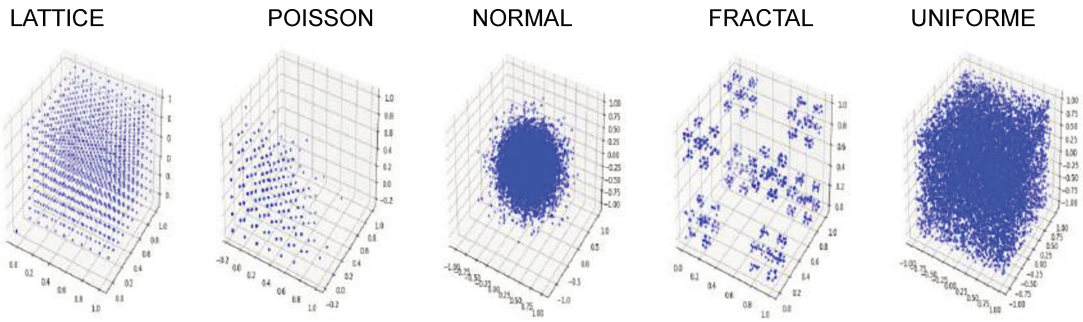


Figura 5.6: Representación gráfica de los distintos conjuntos de puntos considerados.

Para cada tipo de distribución se generaron 100 experimentos independientes. Cada experimento consistió en un conjunto de 1000 puntos en $\mathbb{R}^3$, generados aleatoriamente en cada iteración. A partir de estos puntos, se construyó una matriz de distancias de tamaño 1000×1000, en la cual se calcularon todas las distancias entre pares de puntos, siguiendo los pasos 1 y 2 del algoritmo descrito en la Subsección 5.0.4.
Las métricas empleadas para el cálculo de estas matrices de distancias fueron i) Chebyshev, ii) Cityblock (o Manhattan), iii) Euclídea, iv) Minkowski y v) Parabólica, esta última definida con los parámetros $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$ y $\alpha_3 = 1/2$. Estas distancias, combinadas con la aplicación de umbrales $r \in [0,1]$, constituyen la base del procedimiento de construcción y filtrado de los distintos hipergrafos métricos.
Para cada valor de r, se obtuvo una matriz binaria a partir de la matriz de distancias, de acuerdo con el paso 3 del algoritmo mencionado. Esta matriz binaria se empleó para construir la correspondiente matriz de incidencia del hipergrafo métrico asociado. Luego, se calculó el número total de hiperaristas generadas en cada experimento y para cada valor de r, considerando únicamente las filas únicas de la matriz de incidencia (es decir, eliminando duplicadas). Este valor de r, al variar, permite trazar una familia de curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ que describen la evolución del número de hiperaristas del hipergrafo en función del parámetro de filtrado. Dado que para cada experimento se obtienen 100 curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$, se calcula el valor medio para obtener una curva representativa de cada caso. A modo de ejemplificación del procedimiento descrito, se considera una única iteración. En esta instancia, se genera un conjunto de $N = 1000$ puntos en un espacio tridimensional, cuyas coordenadas se extraen de una **distribución normal** con media $\mu = 0{,}5$ y desviación estándar $\sigma = 1{,}0$. Esta distribución simula una nube de puntos sobre la cual se analizan las relaciones de proximidad entre nodos. A continuación, se construye una **matriz de distancias** $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde cada entrada d_{ij} representa la **distancia euclídea** entre los puntos i y j. Para trabajar con valores acotados, se normaliza esta matriz dividiendo cada entrada por la distancia máxima observada, obteniendo así una matriz $\mathscr{D}$ con valores en el intervalo $[0,1]$. Posteriormente, se analiza la conectividad entre nodos para distintos valores de umbral r, variando entre 0 y 1 en incrementos de 0.01. Para cada valor de r, se construye una **matriz binaria** $M(r)$, donde se asigna un valor de 1 a las entradas que cumplen $d(i,j) < r$, indicando una relación de proximidad, y 0 en caso contrario.
A partir de $M(r)$, se genera la **matriz de incidencia** del hipergrafo, denotada como $H(r)$, de dimensiones $\Delta^{\mathscr{E}}(r) \times |\mathscr{V}|$, donde $|\mathscr{V}|$ representa el número de vértices, y $\Delta^{\mathscr{E}}(r) \leq |\mathscr{V}|$ es el número de hiperaristas para el umbral dado. Para construir $H(r)$, se eliminan las filas duplicadas de $M(r)$, conservando sólo una. El número de filas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ en $H(r)$ corresponde al número de hiperaristas en el hipergrafo para ese umbral. A continuación, en la Tabla 5.1 se presentan los valores de $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ obtenidos para esta iteración específica para los 10 primeros

valores de r tomados en el intervalo $[0,1]$.

Valor de r	**Número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$**
0.01	987
0.02	916
0.03	878
0.04	899
0.05	928
0.06	952
0.07	972
0.08	980
0.09	993
0.10	993

Tabla 5.1: Número de hiperaristas obtenidas para distintos valores del umbral r.

En la Figura 5.7 se ilustra gráficamente la nube de puntos generada a partir de la distribución normal, así como la evolución del número de hiperaristas en función del umbral r considerando solo una realización de las 100 planteadas en el ejemplo general.

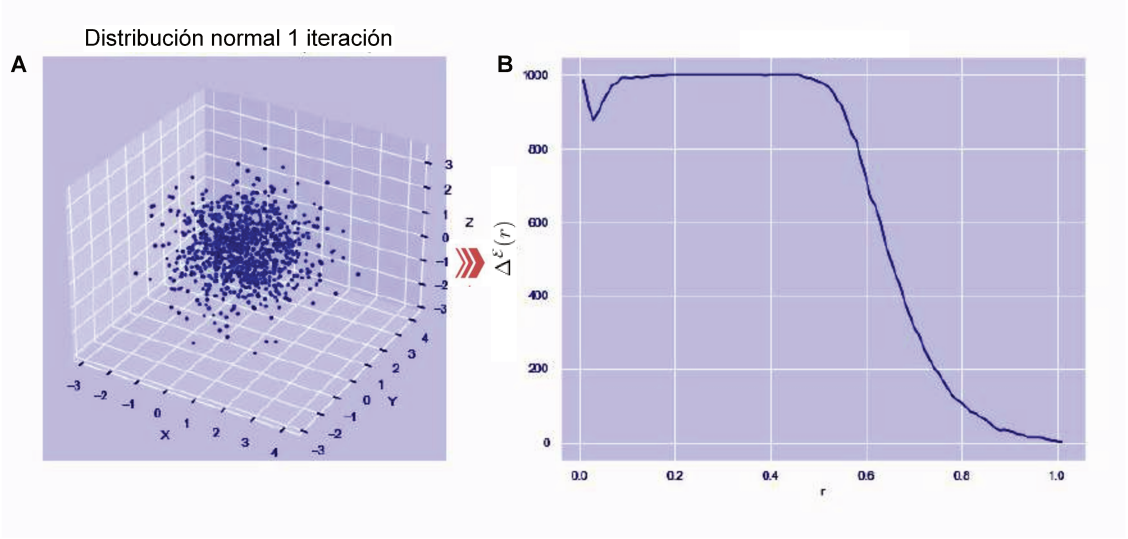


Figura 5.7: A Distribución normal generada en el espacio tridimensional. B Curva que muestra la evolución del número de hiperaristas en función del umbral r.

Este procedimiento se repite para cada una de las 100 iteraciones consideradas en el experimento original y luego se calcula el valor medio de cada una de las curvas obtenidas con el fin de representar el comportamiento típico del sistema. En la Figura 5.8 se muestra un ejemplo del proceso aplicado a cuatro iteraciones generadas a partir de una **distribución normal**, con media $\mu = (0{,}5, 0{,}5, 0{,}5)$ y desviación estándar $\sigma = (1,1,1)$. Este ejemplo busca facilitar la comprensión del enfoque propuesto, mostrando de manera simultánea las nubes de puntos tridimensionales correspondientes a cada iteración, junto con las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ obtenidas para cada una de ellas. Además, se presenta la curva promedio calculada a partir de las cuatro curvas individuales, junto con la banda de variabilidad definida por el desvío estándar.

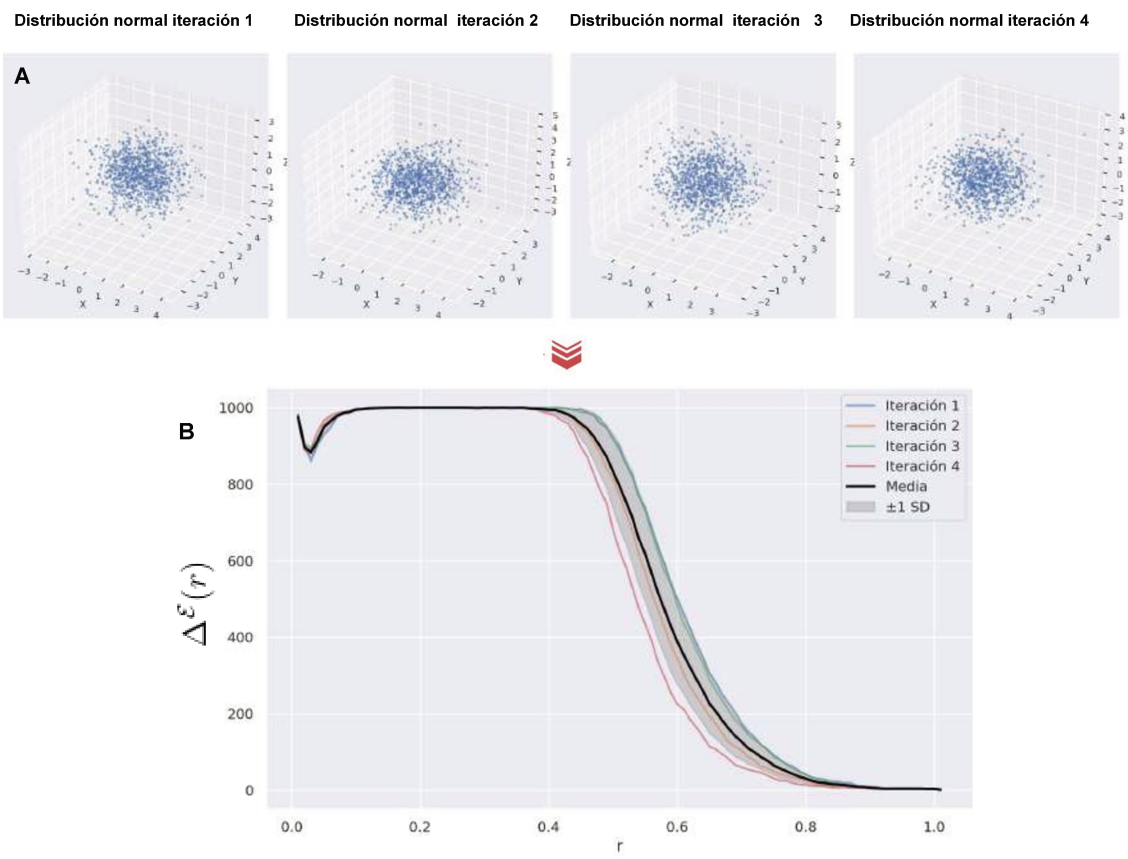


Figura 5.8: Ejemplo ilustrativo del procedimiento aplicado a cuatro distribuciones normales tridimensionales de media $\mu = (0{,}5, 0{,}5, 0{,}5)$ y desviación estándar $\sigma = (1{,}0, 1{,}0, 1{,}0)$ generadas de manera aleatoria. (A) En la parte superior se muestran las nubes de puntos correspondientes a cada iteración, en la parte inferior (B) se representan las curvas $\Delta^{\mathcal{E}}(r)$ obtenidas. También se incluye la curva promedio junto con la banda sombreada correspondiente a un desvío estándar, reflejando la variabilidad entre iteraciones.

La Figura 5.9 muestra el comportamiento del número de hiperaristas $\Delta^{\mathcal{E}}$ en función del parámetro de umbral r, para las métricas Chebyshev, Cityblock, Euclídea, Minkowski y Parabólica aplicadas sobre las 5 distribuciones de puntos definidas en Subsección 5.1.1, junto con la región sombreada que indica la desviación estándar sobre las 100 realizaciones.

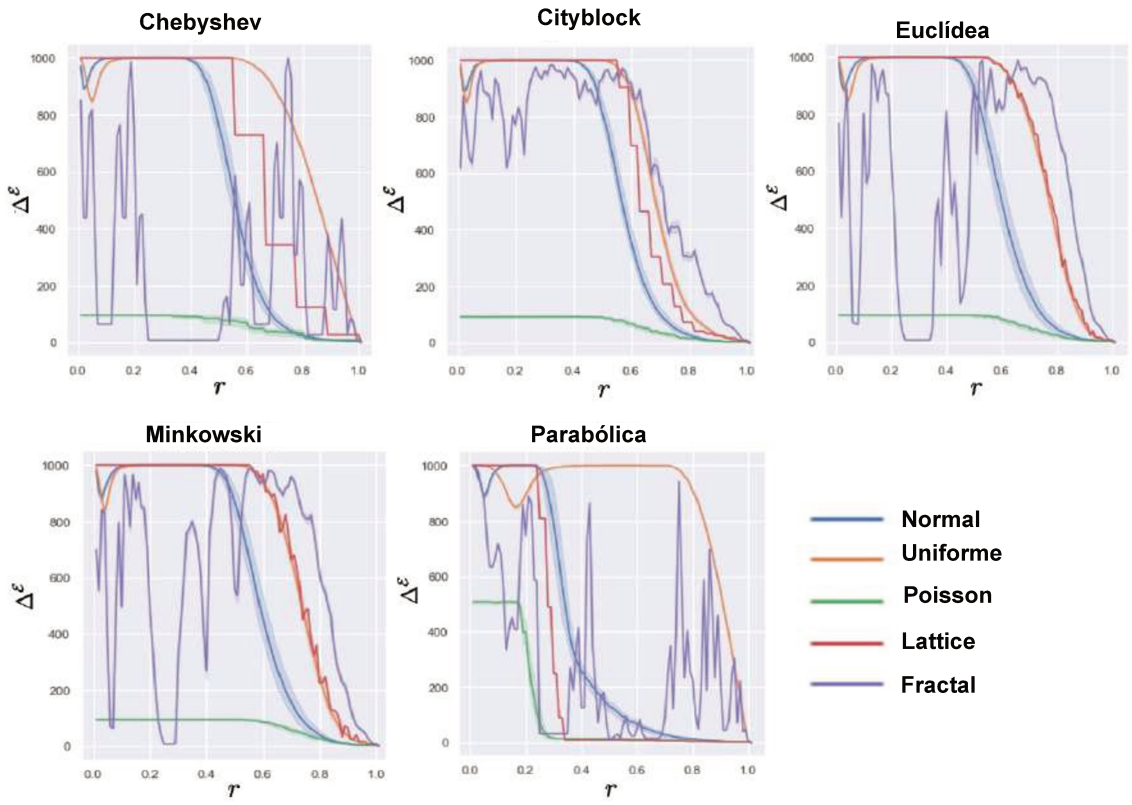


Figura 5.9: Análisis del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}$ en función del parámetro r para distribuciones de puntos en $\mathbb{R}^3$. Cada subgráfico representa la métrica utilizada para obtener el hipergrafo. La línea continua corresponde al valor medio, mientras que la región sombreada representa la desviación estándar calculada a partir de 100 realizaciones.

Cada gráfico representa una métrica específica, y en cada uno se comparan los cinco tipos de distribuciones. Se observa que las métricas **isotrópicas** — Euclidiana, Minkowski, Chebyshev y Cityblock — presentan un patrón característico aplicadas en la distribución normal, uniforme y lattice el número de hiperaristas comienza siendo comparable al número de vértices, manteniéndose relativamente constante hasta aproximadamente $r \sim 0{,}58$. A partir de este punto, $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ decrece hasta llegar a cero, pero el descenso no es uniforme. En las métricas Euclidiana y Minkowski se observan *fluctuaciones*, mientras que en Chebyshev y Cityblock la caída se da de forma *escalonada*, lo que podría estar relacionado con la forma de las bolas inducidas en el espacio por dichas métricas. A partir de este punto, $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ decrece hasta llegar a cero, pero el descenso no es uniforme. En la métrica **Chebyshev**, la distancia entre dos puntos está determinada por la *máxima diferencia entre sus coordenadas*. Esto genera bolas métricas (entornos de radio r) con forma de **cubos alineados con los ejes**, en lugar de esferas como en la métrica euclidiana. Como consecuencia, al incrementar el radio r, los puntos comienzan a conectarse de forma *discreta y abrupta*, en función de cuántos "pasos"diagonales o horizontales se permiten, lo que podría causar estas caídas escalonadas en el número de hiperaristas.
De forma similar, la métrica **Cityblock** (también conocida como Manhattan o L_1) mide las distancias como la *suma de las diferencias absolutas* en cada dimensión, generando bolas métricas con forma de **cubos de aristas no paralelas a los ejes**. Al igual que en Chebyshev, estas formas podrían estar induciendo una conectividad que cambia de forma no continua al variar el radio: ciertos grupos de vértices se conectan todos a la vez al alcanzar un umbral, generando así saltos bruscos en $\Delta^{\mathscr{E}}$.

Este mismo patrón también se observa al aplicar las métricas mencionadas sobre la distribución de puntos de **Poisson**. En este caso, el número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}$ mantiene inicialmente un comportamiento relativamente constante, similar al de las otras distribuciones, para valores pequeños de r, y comienza a decrecer progresivamente a medida que aumenta el umbral. Sin embargo, a diferencia de las distribuciones normal, uniforme y lattice, el número inicial de hiperaristas es significativamente menor alrededor de $\Delta^{\mathscr{E}} \sim 150$, lo que podría ser un indicativo del alto grado de dispersión y la menor densidad local propia de la distribución de Poisson.
A pesar de esta diferencia cuantitativa, el carácter no uniforme del descenso se conserva: se observan *fluctuaciones* en las métricas Euclidiana y Minkowski, y caídas *escalonadas* en Chebyshev y Cityblock, lo cual sugiere que la geometría inducida por cada métrica sigue jugando un rol determinante, incluso en configuraciones de puntos con menor estructura como la de Poisson.
El comportamiento descripto con anterioridad de las métricas **Euclidiana** y **Minkowski** (con $p > 1$), donde las bolas métricas tienen fronteras suaves y redondeadas, podría indicar una transición más continua en la conectividad entre los distintos puntos bajo análisis, siendo la posible razón de que los cambios en el número de hiperaristas para estas métricas presenten *fluctuaciones más suaves* y no escalonadas.
En cada una de las distribuciones analizadas se pueden identificar patrones característicos en el comportamiento del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}$ en función del parámetro r:

- **Distribución Normal** se observa que, para valores pequeños de r, el número de hiperaristas es comparable al número de vértices. Alrededor de $r \sim 0{,}06$, se presenta una caída en $\Delta^{\mathscr{E}}$, aunque rápidamente retorna a sus valores iniciales. A medida que r aumenta, el número de hiperaristas disminuye de forma progresiva hasta alcanzar cero en $r = 1$. Este comportamiento varía ligeramente según la métrica empleada: en distancias isotrópicas, la disminución comienza cerca de $r \sim 0{,}6$, mientras que para la distancia parabólica ocurre más tarde, aproximadamente en $r \sim 0{,}8$.

- **Distribución Uniforme** presenta un comportamiento similar al de la distribución normal, aunque la disminución en el número de hiperaristas es más uniforme y comienza antes, incluso antes de $r \sim 0{,}6$, independientemente de la métrica utilizada.

- **Distribución de Poisson** exhibe un alto grado de agrupamiento, lo que se traduce en un número reducido de hiperaristas incluso para valores pequeños de r. Este número se mantiene relativamente constante hasta aproximadamente $r \sim 0{,}06$, tras lo cual disminuye de forma sostenida hasta llegar a cero, en todas las métricas consideradas. Un aspecto notable es que, en la distancia parabólica, el número de hiperaristas presenta un incremento significativo, alcanzando valores cercanos a 500, en contraste con las demás métricas donde se mantiene en torno a 150.

- **Fractal** muestra un comportamiento marcadamente diferente al de las demás distribuciones. El número de hiperaristas varía de manera oscilatoria con respecto a r, especialmente bajo las métricas de Chebyshev y parabólica. Estas oscilaciones consisten en alternancias entre intervalos con bajo número de hiperaristas y picos de valores elevados de $\Delta^{\mathscr{E}}$. Un patrón similar, aunque menos acentuado, se observa en el resto de las métricas dentro del intervalo $0 < r \leq 0{,}7$. A partir de $r \sim 0{,}7$, el número de hiperaristas decrece de forma sostenida hasta alcanzar cero.

Observación general sobre la distancia parabólica en esta métrica, tanto en las distribuciones normal y de Poisson como en la estructura tipo lattice, el número de hiperaristas cae

mucho antes que en las demás métricas. En los casos de la distribución uniforme y del *lattice*, esta caída se produce alrededor de $r \sim 0{,}3$, mientras que en la distribución de Poisson ocurre incluso antes, cerca de $r \sim 0{,}2$.
Finalmente, con el objetivo de comparar las distribuciones de puntos, aplicamos las dos métricas definidas en la Subsección 5.0.5 sobre las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$: la norma $\mathscr{L}_1$ y la seminorma de Sobolev $\mathscr{S}$. Estas métricas permiten capturar tanto el comportamiento global como las variaciones locales en la estructura de los hipergrafos.
La métrica $\mathscr{L}$ mide el área bajo la curva, reflejando la conectividad total o acumulada durante todo el proceso de filtrado. Por su parte, $\mathscr{S}$ cuantifica las variaciones locales de la pendiente de la curva, lo cual indica cuán abruptamente cambia la estructura del hipergrafo conforme aumenta el radio r.

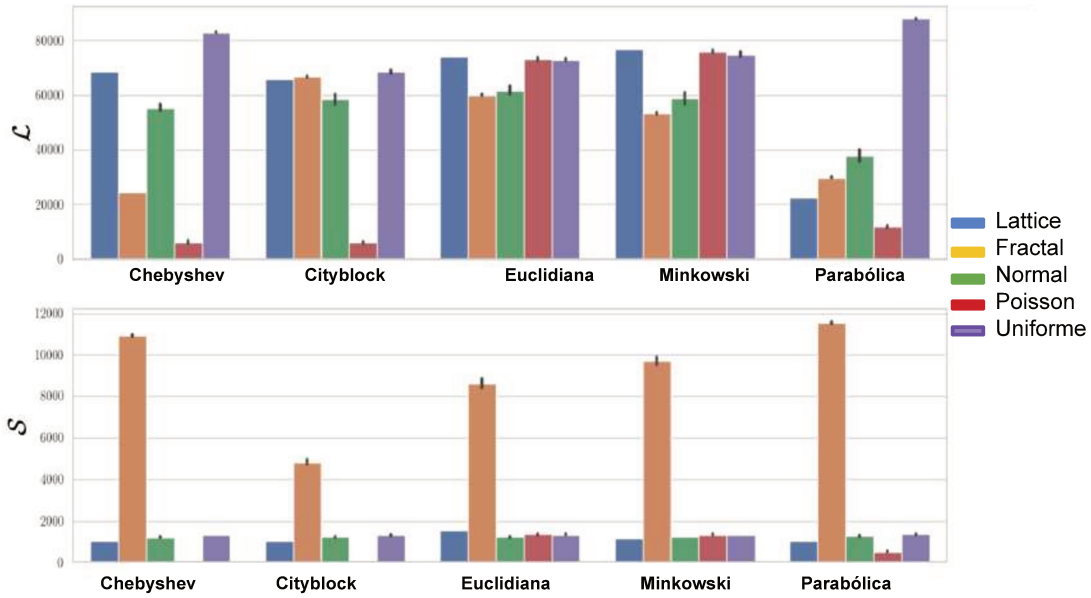


Figura 5.10: Resultados gráficos de las métricas $\mathscr{S}$ y $\mathscr{L}$ sobre las distribuciones de puntos Lattice, Fractal, Normal, Poisson y Uniforme.

En la Figura 5.10 se muestran los valores de estas métricas para diferentes distribuciones de puntos (Lattice, Fractal, Normal, Poisson y Uniforme) bajo las cinco funciones de distancia: Chebyshev, Cityblock, Euclideana, Minkowski y Parabolica. Los resultados de estas métricas muestran claramente evidencia sobre la capacidad del enfoque para discriminar entre las distintas distribuciones. Los valores de $\mathscr{L}$ revelan patrones globales de conectividad. Las distribuciones Lattice y Uniforme muestran los valores más altos en la mayoría de las distancias, indicando que sus estructuras mantienen una alta densidad de hiperaristas a lo largo del proceso de filtrado. Esto es esperable dado que ambas presentan una distribución espacial homogénea.
La distribución *Fractal* presenta valores intermedios, lo que refleja una estructura espacial más irregular, caracterizada por fuertes fluctuaciones en la densidad de hiperaristas a lo largo del proceso de filtrado. La distribución *Poisson*, en contraste, exhibe los valores más bajos de $\mathscr{L}$, indicando una rápida pérdida de hiperaristas con el aumento del radio.
La distancia *Parabólica* es la que más separa las distribuciones, mostrando fuertes diferencias especialmente muy marcadas entre la distribución *Uniforme* y *Poisson*. Dada la naturaleza de esta métrica, que induce una *geometría anisotrópica* en el espacio donde las bolas de radio r dejan de ser los conocidos círculos bajo la distancia euclidiana y se transforman en

cuerpos rectangulares alargados, especialmente en la dirección asociada a la coordenada con exponente menor, esto implica que, para un mismo radio r, las regiones de cobertura en el espacio serán más extensas en dicha dirección, facilitando la aparición de conexiones entre vértices que se encuentran más alejados en esa dimensión.
En este contexto, la diferencia marcada en el área bajo la curva $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ entre la distribución *Uniforme* y *Poisson* puede justificarse a partir de sus características estructurales

- La distribución *Uniforme* presenta una cobertura homogénea en el espacio, lo cual favorece una conectividad más progresiva y sostenida conforme aumenta el radio r. Como resultado, la curva $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ presenta valores más altos durante un mayor intervalo de r, lo que se traduce en un área bajo la curva (métrica $\mathscr{L}$) significativamente mayor.

- En contraste, la distribución *Poisson*, caracterizada por su aleatoriedad y agrupamientos locales, genera regiones densas y otras con escasa ocupación. En presencia de una métrica anisotrópica como la parabólica, los agrupamientos tienden a conectarse rápidamente en ciertas direcciones privilegiadas, produciendo un crecimiento abrupto en la cantidad de hiperaristas seguido de una estabilización precoz. Esta dinámica se refleja en una curva $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ que alcanza un máximo más rápidamente y decae antes, resultando en una menor área bajo la curva.

La métrica $\mathscr{S}$ pone de manifiesto la variabilidad local de las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$. En este caso, la distribución Fractal domina ampliamente en todas las distancias, alcanzando valores significativamente superiores al resto. Este comportamiento es coherente con la naturaleza irregular de las distribuciones fractales, en las que pequeños incrementos en r pueden provocar cambios drásticos en la estructura de conectividad.
En contraste, las demás distribuciones (Lattice, Uniforme, Normal y Poisson) presentan valores mucho más bajos y relativamente estables, lo cual sugiere un comportamiento más suave y gradual en la evolución estructural de los hipergrafos.
Finalmente, la Figura 5.11 muestra las matrices de distancia $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$ para las diferentes distribuciones de puntos evaluadas en el espacio métrico parabólico. Estas matrices se construyen aplicando el concepto de distancia entre sistemas definido en la Sección 5.0.3.
Al observar la matriz $\mathscr{L}$, que refleja la distancia acumulada en términos absolutos, se destaca que las mayores diferencias se encuentran entre la distribución Poisson y Lattice con respecto a la distribución Uniforme, con valores 7407 y 61770 respectivamente. Asimismo, la distribución Fractal también presenta una alta disimilitud con la distribución Uniforme, con una distancia de 57333, lo que sugiere una complejidad estructural intermedia pero aún marcada. Por otro lado, la menor distancia relativa se da entre *Normal* y *Uniforme* (48398), lo que podría indicar ciertos patrones de conectividad similares en escalas locales.
En contraste, la matriz $\mathscr{S}$ permite observar una distribución más equilibrada de los valores, con diferencias menos abruptas entre pares de distribuciones. Aquí, por ejemplo, las distancias máximas son entre los puntos pertenecientes al conjunto *Fractal* y los de la distribución *Uniforme*, uno de los pares más distantes, mientras que *Poisson* y *Lattice* presentan una distancia más baja (1487). Estas observaciones permiten concluir que la métrica parabólica es sensible a las diferencias estructurales entre las distribuciones de puntos, reflejando tanto contrastes globales (en $\mathscr{L}$) como patrones de variabilidad relativa (en $\mathscr{S}$). Para una visión completa del comportamiento de estas distancias en los demás espacios métricos considerados en este estudio, se invita al lector a consultar el material suplementario [24], donde se presentan las matrices correspondientes para las métricas Euclídea, de Manhattan y de Chebyshev.

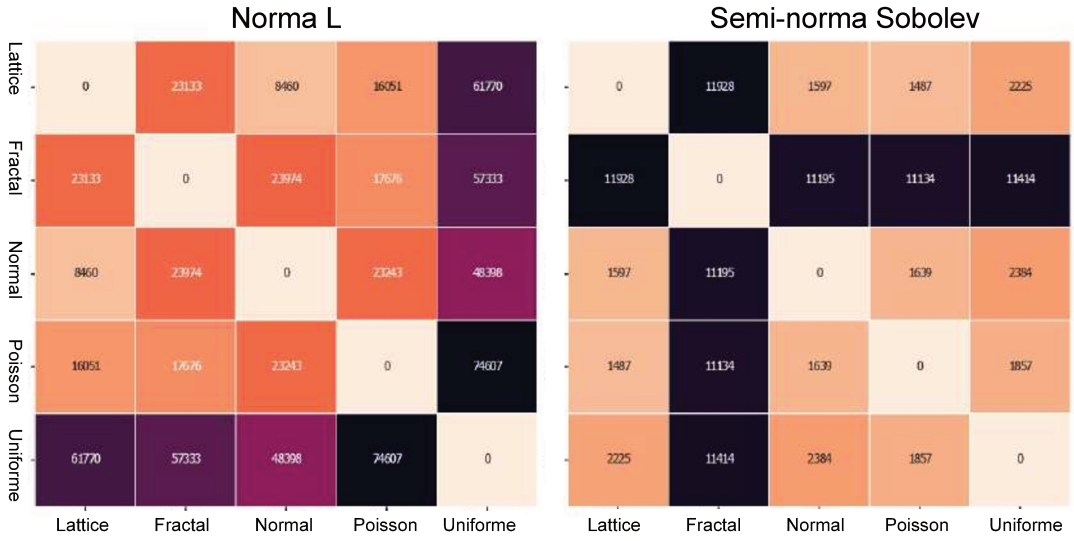


Figura 5.11: Matrices de distancia $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$ para las diferentes distribuciones de puntos evaluadas en el espacio métrico parabólico.

5.1.2. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos que describen cómo evoluciona un sistema en el tiempo a partir de un conjunto de reglas determinísticas. Estos sistemas pueden representarse mediante ecuaciones diferenciales (en el caso continuo) o mapas iterativos (en el caso discreto), y son ampliamente utilizados para estudiar fenómenos naturales, físicos y biológicos. En particular, los sistemas dinámicos caóticos, a pesar de estar gobernados por leyes deterministas, presentan una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, lo que produce comportamientos impredecibles y aparentemente aleatorios a largo plazo. Nuestro segundo tipo de conjunto de datos comprende algunos de estos sistemas caóticos tridimensionales: i) mapa de Rössler, ii) mapa mariposa complejo (Butterfly), iii) mapa de Lorenz, y iv) ruido blanco. La Figura 5.12 presenta una representación gráfica de cada uno de los modelos antes expuestos. A continuación damos la descripción en detalle de cada uno de estos sistemas.

Generación de Sistemas Dinámicos

Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz está definido como el sistema dinámico gobernado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

donde tomamos los valores usuales de los parámetros: $\sigma = 10$, $r = 284$, $b = 8/3$. Con las siguientes condiciones iniciales: $x_0 = 0$, $y_0 = -0{,}01$ y $z_0 = 9$.

Atractor de Rössler

El atractor de Rössler es el atractor del sistema de Rössler, un sistema no lineal de tres ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay \\ \dfrac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

donde tomamos los valores usuales de los parámetros: $a = b = 0{,}2$, $c = 5{,}7$.
Con las siguientes condiciones iniciales: $x_0 = -9$, $y_0 = 0$ y $z_0 = 0$.

Atractor Butterfly

El atractor Butterfly es un sistema no lineal de tres ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(y - z) \\ \dfrac{dy}{dt} = -z\,\mathrm{sgn}(x) \\ \dfrac{dz}{dt} = |x| - 1 \end{cases}$$

donde tomamos los valores usuales de los parámetros: $a = 0{,}55$, $c = 5{,}7$. Con las siguientes condiciones iniciales: $x_0 = 0{,}2$, $y_0 = 0$ y $z_0 = 0$.

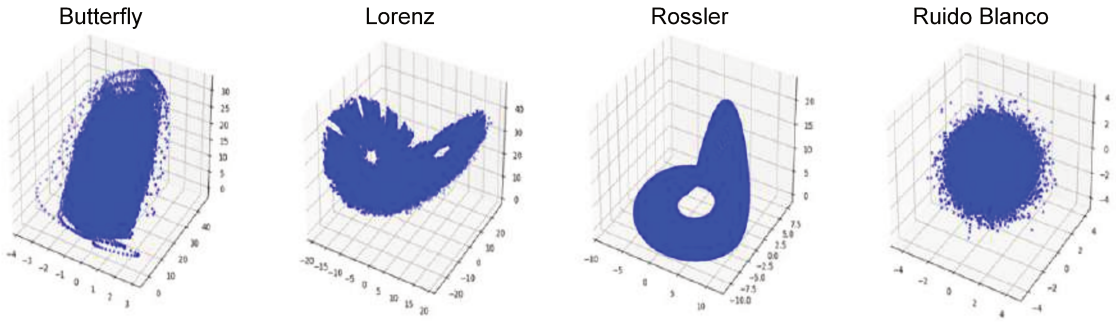


Figura 5.12: Representación gráfica de los sistemas dinámicos considerados y del ruido blanco.

Para nuestro análisis, para cada sistema se crearon 100 secuencias, cada una con 10000 puntos de datos, y luego se submuestrearon a 1000. Es decir, para el análisis de cada uno de los sistemas dinámicos, se generaron diferentes secuencias simuladas que representan cómo evoluciona el sistema en el tiempo. En concreto, se modelan 100 realizaciones distintas del sistema, cada una con 1000 nodos que generan señales temporales. Cada una de estas 100 simulaciones puede representar una condición inicial distinta, o simplemente ser una repetición del mismo sistema con un poco de variación (como ruido, o pequeños cambios en los parámetros). Es decir, estamos viendo cómo se comporta el sistema bajo diferentes escenarios posibles. Para cada una de las 100 simulaciones, y siguiendo los pasos definidos en el algoritmo de generación de hipergrafos métricos, calculamos las matrices de distancias correspondientes a cada uno de los sistemas, aplicando las mismas métricas utilizadas en

la Subsección 5.1.1. Este procedimiento nos da como resultado una matriz de distancias de orden 1000×1000 por cada realización, las cuales fueron normalizadas para que sus valores se encuentren en el rango $[0, 1]$.
A continuación, aplicamos el método de filtrado sobre el conjunto de matrices, utilizando un rango de umbrales determinado por el parámetro r, que varía entre 0 y 1 con incrementos de 0.01. Esto nos permite obtener las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$, que representan la evolución del número de hiperaristas en función del parámetro r, tal como se explicó en la Subsección 5.1.1. Posteriormente, calculamos el valor medio de estas curvas, el cual se obtiene a partir de 100 realizaciones para cada sistema, y las graficamos junto con la desviación estándar.
En la Figura 5.13 (A) se muestran, a modo de ejemplo, cinco iteraciones sobre el sistema de Lorenz, cada una con 1000 puntos. Por otro lado, en la Figura 5.13(B) se presentan las cinco curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ asociadas

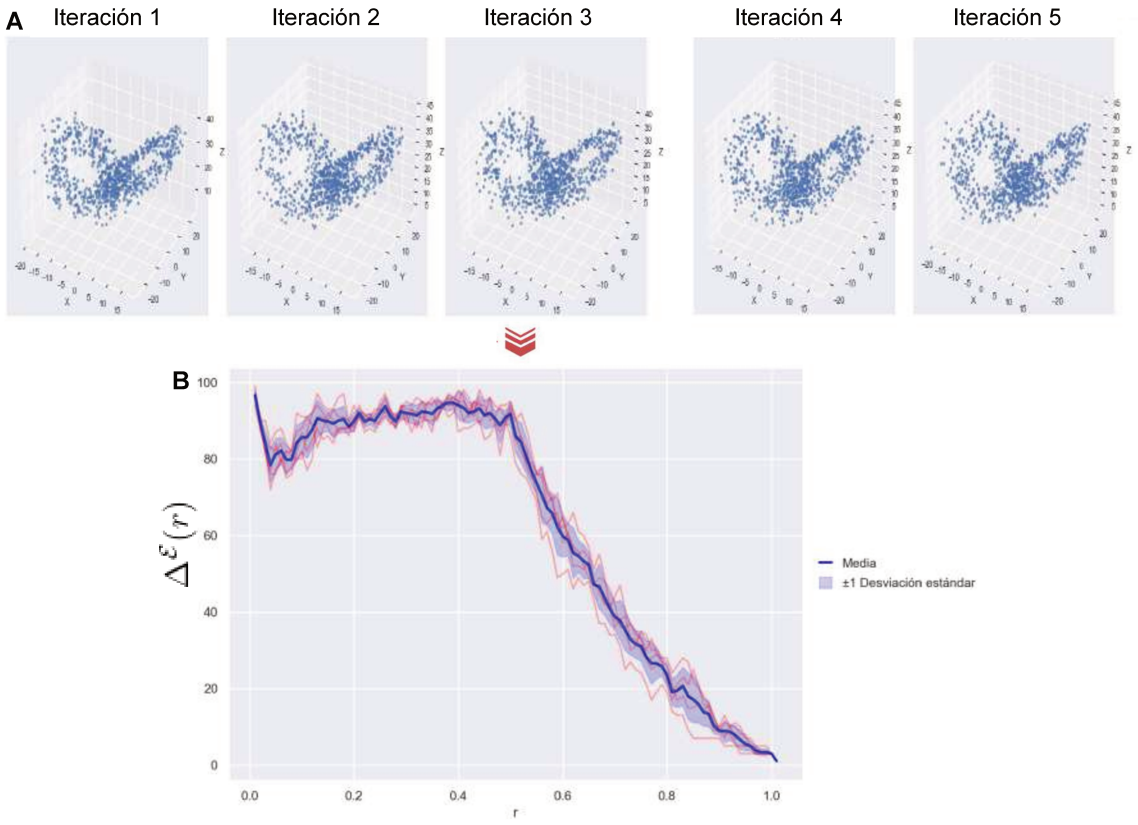


Figura 5.13: A se muestran, a modo de ejemplo, 5 iteraciones sobre el sistema de Lorenz, cada una con 1000 puntos. B se presentan las 5 curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ asociadas a estas 5.

Resultados generales sobre las 100 realizaciones se muestran en la Figura 5.14, donde se presenta el análisis del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}$ en función del parámetro de umbral r. Podemos observar que las diferentes métricas permiten diferenciar los tres sistemas caóticos considerados (Rössler, Lorenz, Butterfly) y el ruido blanco.

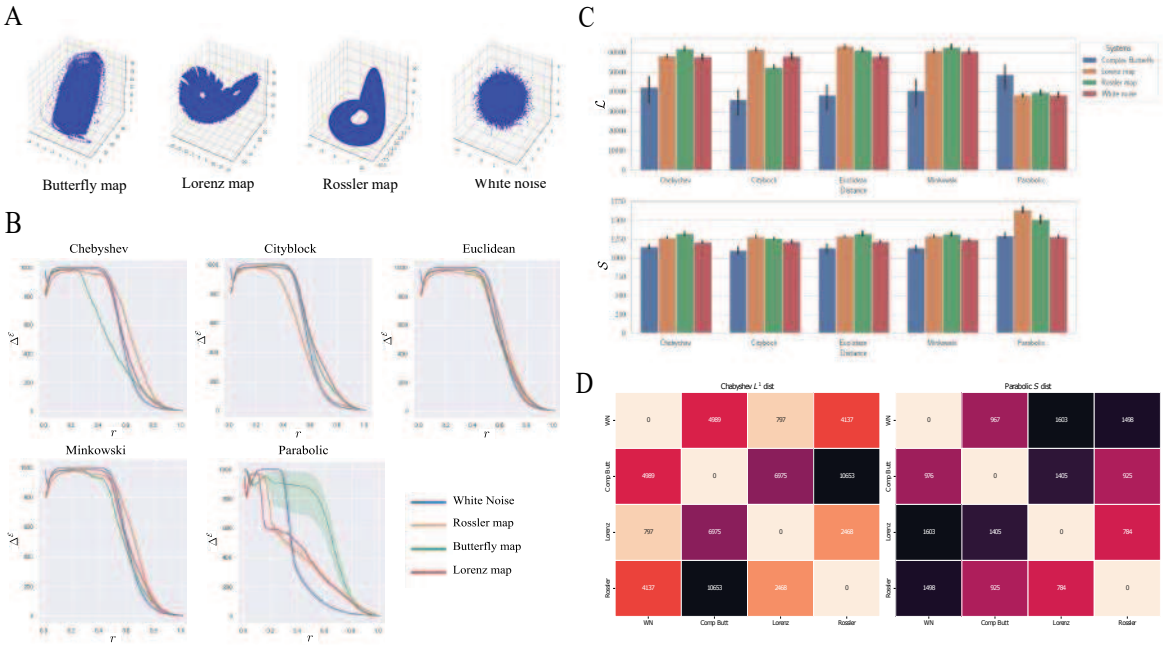


Figura 5.14: Resultados generales sobre las 100 realizaciones. **A)** Ejemplos de los tres sistemas dinámicos y del sistema estocástico utilizados en el análisis. **B)** Análisis del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}$ en función del parámetro r, para los tres sistemas dinámicos y el ruido blanco. Cada subgráfico representa la métrica de distancia utilizada para obtener el hipergrafo. La cada curva corresponde al valor medio junto a su desviación estándar calculada a partir de 100 realizaciones. **C)** Valores de la norma-L^1 ($\mathscr{L}$) y del seminorma de Sobolev ($\mathscr{S}$) para los distintos sistemas y distancias consideradas. **D)** Matriz de distancias $\mathscr{L}$ (usando la distancia de Chebyshev) y $\mathscr{S}$ (usando la distancia parabólica) entre los diferentes sistemas.

En todas las métricas, excepto en la parabólica, se observa un patrón común: una *meseta inicial*, donde $\Delta^{\mathscr{E}}$ se mantiene próxima a su valor máximo (alrededor de 1000), lo que indica estructuras altamente diferenciadas; seguida por una *transición descendente* a partir de un valor crítico de r alrededor de $r \sim 0{,}6$, donde $\Delta^{\mathscr{E}}$ comienza a decrecer uniformemente hasta llegar a cero en $r = 1$. Este valor crítico de r se asocia sólo a las métricas isotrópicas (Euclidiana, Minkowski y Cityblock). Este comportamiento refleja la pérdida progresiva del número de hiperaristas conforme se amplían las vecindades que responden a una geometría particular asociada a cada una de estas métricas. En la métrica de Chebyshev, se observa que el mapa Butterfly (curva verde) presenta una caída abrupta más temprana que el resto, mientras que los demás sistemas mantienen el comportamiento de meseta donde $\Delta^{\mathscr{E}}$ se mantiene próxima a su valor máximo (alrededor de 1000), seguida por una *transición descendente* a partir de un valor crítico de r alrededor de $r \sim 0{,}6$. El mapa Butterfly mantiene esta meseta solo en el intervalo $[0, 0{,}3]$, en $r \sim 0{,}3$ comienza la caída del número de hiperaristas. Por su parte, la métrica parabólica se comporta de manera notablemente diferente: exhibe una alta *variabilidad* especialmente para el sistema Butterfly y una disminución más gradual y dispersa de $\Delta^{\mathscr{E}}$. Un caso que vale la pena detallar más es el caso del mapa de Rössler, donde se observa que $\Delta^{\mathscr{E}} < N_{\text{vert}}$ para las métricas isotrópicas, pero luego aumenta rápidamente hasta valores cercanos al máximo en $r \sim 0{,}2$, y se mantiene elevado hasta $r \sim 0{,}6$, antes de caer a cero. Sin embargo, al utilizar la distancia parabólica (una métrica no isotrópica), el comportamiento de la curva se modifica significativamente: presenta una disminución brusca en $r \sim 0{,}15$ y un cambio de pendiente en $r \sim 0{,}2$. Los mapas Butterfly y Lorenz muestran un comportamiento similar bajo métricas isotrópicas, excepto en el caso de Chebyshev, don-

de la pendiente cambia ligeramente entre ambos. No obstante, cuando se utiliza la métrica parabólica, las diferencias entre estos dos mapas caóticos se vuelven notables. De hecho, sólo esta métrica permite distinguir claramente al mapa de Lorenz de los otros sistemas dinámicos. Los resultados sugieren que tanto la distancia de Chebyshev como la parabólica (con parámetros $\alpha^1 = 1$, $\alpha^2 = 1/2$, $\alpha^3 = 1/2$) son más efectivas que la distancia Euclidiana, Minkowski y Cityblock para diferenciar entre los sistemas. Estas últimas presentan comportamientos prácticamente *idénticos*, con curvas bien agrupadas y transiciones suaves, lo cual sugiere una capacidad de discriminación limitada entre las distintas dinámicas. En particular, la distancia Euclidiana es la que menos diferencia permite observar entre los tres sistemas caóticos y el ruido blanco. Con el objetivo de comparar los sistemas dinámicos y el ruido blanco, aplicamos las dos métricas definidas en la Subsección 5.0.2 sobre las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$, la norma $\mathscr{L}$ y la seminorma de Sobolev $\mathscr{S}$. En la Figura 5.14 C, podemos apreciar los valores de $\mathscr{L}$ (arriba) y $\mathscr{S}$ (abajo) para todos los sistemas dinámicos y estocásticos y las métricas utilizadas. Los resultados muestran que la distancia Cityblock es la mejor discriminadora entre puntos para $\mathscr{L}$. Para todas las métricas, el Mapa Butterfly muestra una diferencia significativa respecto a los otros sistemas. Las métricas Euclidiana, de Minkowski y parabólica no pueden distinguir entre el mapa de Lorenz, el de Rössler y el ruido blanco. En el caso de $\mathscr{S}$, el único espacio métrico que permite una identificación clara entre los sistemas es el parabólico; en los otros espacios no hay una diferencia clara entre los sistemas. Para comprender mejor los resultados, podemos observar la Figura 5.14 C y encontrar que la distancia de Chebyshev para $\mathscr{L}$ y la distancia parabólica para $\mathscr{S}$ son las mejores métricas para medir la distancia entre los sistemas. Las matrices de distancia correspondientes se muestran en la Figura 5.14 D. Observamos que todos los sistemas tienen distancias significativamente diferentes en la matriz $\mathscr{L}$, siendo el Mapa Mariposa Complejo el que tiene la mayor distancia respecto a los demás sistemas. En la matriz $\mathscr{S}$, las mayores distancias se encuentran entre los sistemas dinámicos y el ruido blanco.

5.1.3. Modelo de Kuramoto

El tercer caso en el cual aplicamos el filtrado por hipergrafos es el estudio de la dinámica del modelo de Kuramoto para 100 osciladores. El modelo de Kuramoto es un marco matemático utilizado para caracterizar la dinámica colectiva de un conjunto de osciladores interactuantes [81]. En este modelo, cada oscilador se caracteriza por su fase, la cual evoluciona según su frecuencia intrínseca y la fuerza del acoplamiento con los otros osciladores del sistema. Este modelo es frecuentemente utilizado para describir fenómenos de sincronización en la naturaleza, como la sincronización de luciérnagas que parpadean. El modelo de Kuramoto ha sido aplicado a una variedad de sistemas, incluidos redes neuronales, redes eléctricas y dinámicas de opinión [82, 83], también se ha aplicado en física [84] y biología [85]. En este modelo, cada oscilador se caracteriza por una variable de fase, y la dinámica del sistema está gobernada por un conjunto de ecuaciones diferenciales. La característica clave del modelo es la interacción entre osciladores, lo que lleva a la aparición de un comportamiento sincronizado bajo ciertas condiciones. En la versión más comúnmente utilizada del modelo de Kuramoto, se considera que cada oscilador tiene su propia frecuencia natural ω_i, y cada uno está acoplado por igual a todos los demás osciladores. La ecuación del modelo de Kuramoto está dada por

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

donde θ_i es la fase del i-ésimo oscilador, ω_i es la frecuencia natural del i-ésimo oscilador, K es la fuerza de acoplamiento entre los osciladores, y N es el número de osciladores. En

este caso para aplicar nuevamente el método de hipergrafos métricos tomamos $N = 100$ osciladores con una constante de acoplamiento de $K = 2{,}8$. La condición inicial de la red se basó en el modelo de Erdös-Renyi con una probabilidad de $P = 1$. El sistema se dejó evolucionar por un período de $T = 10$ con un paso de $dt = 0{,}1$. La Figura 5.15A muestra la serie temporal $\sin\theta(t)$. Para cada instante de tiempo t, se calculó la matriz de distancias $\Delta_{i,j}$ entre todos los pares de osciladores i, j, con $i \neq j$. Sobre esta matriz de distancias, aplicamos nuestro método para obtener los valores del número de hiperaristas como función de r y del tiempo t: $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t)$ (Figura 5.15B). Finalmente, se calcularon las normas $\mathscr{L}(t)$ y $\mathscr{S}(t)$ como funciones del tiempo (Figura 5.15C, D). Como se mencionó anteriormente, el sistema pasa de un estado no acoplado a un estado totalmente acoplado. Esta transición se refleja en las curvas de $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t)$, donde el número de hiperaristas cae más rápidamente a cero a medida que el sistema se acopla, llegando finalmente a un punto donde el número de hiperaristas es $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t=10) = 1$ para todo r (en el caso de acoplamiento completo). Este comportamiento se cuantifica claramente utilizando las métricas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$ (Figuras 5.15C), donde ambas distancias disminuyen a medida que el sistema se acopla.

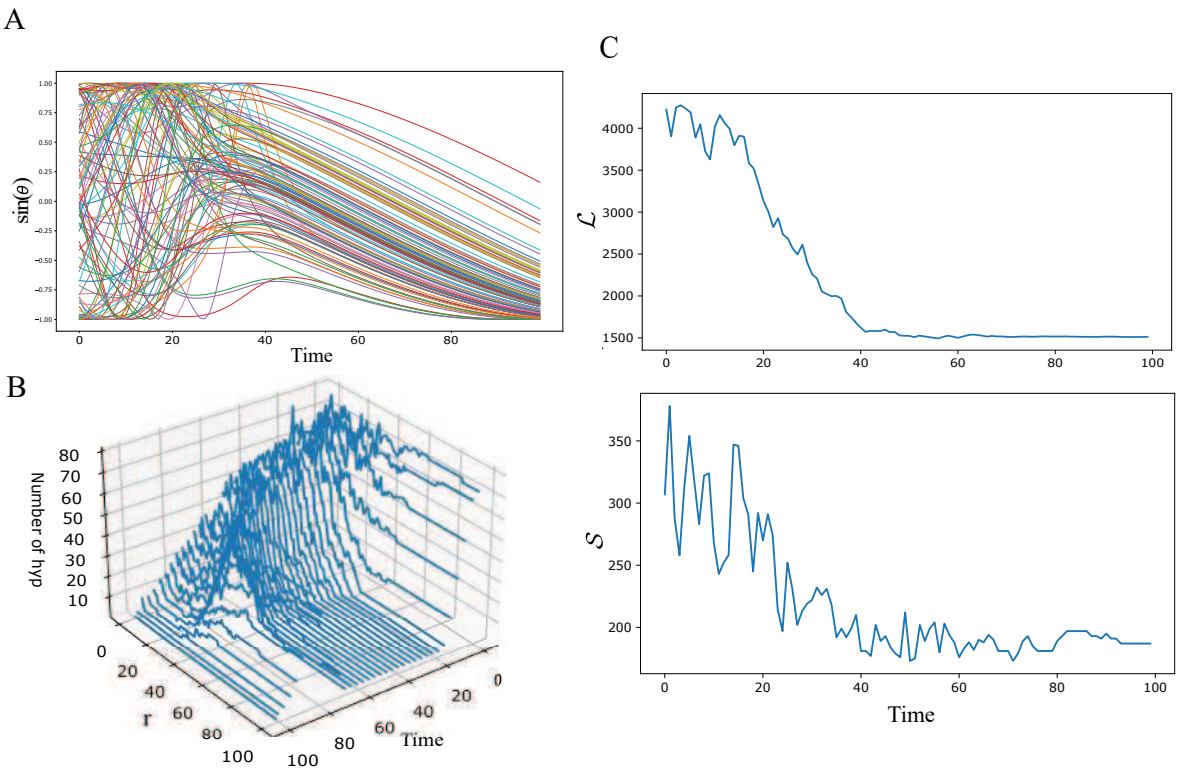


Figura 5.15: **A)** Serie temporal de $\sin\theta(t)$ producida por el modelo de Kuramoto para $N = 100$ osciladores. **B)** Evolución del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t)$ como función de r y el tiempo t. **C)** Análisis de la norma $\mathscr{L}$ y del seminorma de Sobolev $\mathscr{S}$ en función del tiempo.

5.1.4. Detección de crisis epilépticas

Como en esta sección se presenta una aplicación concreta del método de hipergrafos métricos al análisis de señales electrofisiológicas multidimensionales provenientes de magnetoencefalografía (MEG) registradas en dos pacientes con diagnóstico de epilepsia, es conveniente ofrecer una introducción general a dicha patología. La **epilepsia** es un trastorno neurológico crónico caracterizado por una predisposición del cerebro a generar crisis recurrentes, como consecuencia de una actividad eléctrica anormal, excesiva y sincronizada de

grupos de neuronas. Estas crisis pueden manifestarse de diversas maneras, afectando transitoriamente funciones motoras, sensoriales, cognitivas, dependiendo de las regiones cerebrales involucradas. La duración, intensidad y tipo de síntomas varían ampliamente entre individuos y entre episodios en un mismo paciente. Desde un enfoque clínico y neurofisiológico, la epilepsia no se comprende únicamente como una condición local, sino como una alteración global de las dinámicas cerebrales. Por ello, su estudio requiere no solo identificar las zonas corticales implicadas en el inicio de la actividad epiléptica, sino también comprender cómo dichas regiones se comunican y se sincronizan a lo largo del tiempo, especialmente durante las transiciones entre estados normales, ictales y postictales.

La actividad normal también conocida como actividad basal o interictal— se refiere al estado del cerebro en ausencia de crisis epilépticas. Durante este período, la actividad eléctrica neuronal es relativamente estable y refleja los procesos fisiológicos regulares del cerebro, como la percepción, el pensamiento, el sueño o el reposo. Desde un punto de vista electrofisiológico, en la actividad basal se observan patrones de oscilaciones que varían según el estado de vigilia, atención o sueño, pero no presentan la hiperactividad sincronizada típica de una crisis epiléptica. Este período sirve como referencia para detectar cambios patológicos en la actividad cerebral. La actividad ictal se refiere al período durante el cual ocurre una crisis epiléptica. Este estado está caracterizado por una descarga eléctrica anormal, excesiva y sincronizada de un grupo de neuronas, lo que genera una perturbación transitoria en la función cerebral. La manifestación clínica puede variar desde breves ausencias hasta convulsiones motoras intensas, dependiendo del tipo de epilepsia y de las regiones cerebrales involucradas. Durante el estado ictal, las señales electrofisiológicas (como las registradas con MEG o EEG) muestran patrones distintivos: picos agudos, ondas rápidas, o incluso descargas generalizadas, que indican una alteración crítica del equilibrio entre excitación e inhibición neuronal. Esta fase es de particular interés para el análisis, ya que permite identificar focos epilépticos y entender los mecanismos de propagación de la crisis.

Existen múltiples formas de epilepsia, que pueden clasificarse según su etiología, tipo de crisis o patrón de diseminación. En particular, distinguimos dos tipos relevantes para este trabajo: **la epilepsia generalizada primaria** y **la epilepsia generalizada secundaria** [87]. En la epilepsia generalizada primaria, las crisis se originan de manera simultánea y bilateral en ambos hemisferios cerebrales, sin un foco cortical localizado. Este tipo de epilepsia suele estar asociado a factores genéticos y a disfunciones en redes neuronales distribuidas, particularmente en los sistemas talamocorticales. Por otro lado, en la epilepsia generalizada secundaria (también conocida como epilepsia focal con generalización secundaria), la crisis se inicia en una región específica del cerebro (el foco epiléptico) y luego se propaga rápidamente hacia ambas mitades del encéfalo. Esta forma es más frecuente en pacientes con lesiones estructurales, como malformaciones corticales, tumores o secuelas de traumatismos. Para una discusión más detallada sobre esta clasificación, se remite al lector a [86].

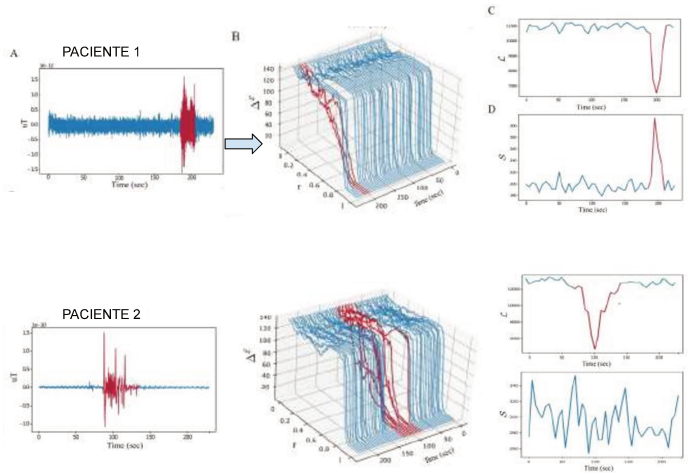


Figura 5.16: (A) Representación gráfica de la epilepsia primaria, (B) representación gráfica de la epilepsia secuandaria.

Para comprender estos cambios en la dinámica cerebral inducidos por la epilepsia, resulta crucial estudiar la evolución de la actividad eléctrica durante los diferentes estados —basal, ictal y postictal— y, especialmente, analizar cómo interactúan las distintas regiones del cerebro en cada uno de ellos. El uso de herramientas avanzadas como los hipergrafos métricos permite capturar relaciones complejas y no triviales entre señales electrofisiológicas, revelando formas de acoplamiento de orden superior que podrían estar implicadas en la transición hacia una crisis. Por estas razones, el estudio de las interacciones entre señales de MEG adquiere una relevancia particular en este contexto, ya que permite inferir la estructura dinámica de las redes neuronales subyacentes, aportar información útil para la comprensión del fenómeno epiléptico y, eventualmente, contribuir al desarrollo de biomarcadores para la detección o predicción de crisis. Nosotros aplicamos los hipergrafos métricos a registros de MEG correspondientes a dos pacientes, uno con **epilepsia generalizada primaria** y otro con **epilepsia generalizada secundaria**, considerando tanto períodos *basales o normal* como *ictales*. Cada registro está compuesto por señales captadas mediante un equipo de magnetoencefalografía de 144 canales, con una frecuencia de muestreo de 625 Hz. En la Figura 5.17, se muestra un ejemplo representativo de la señal registrada en uno de los canales, resaltando en color rojo el cambio de la dinámica de la señal durante el periodo ictal.

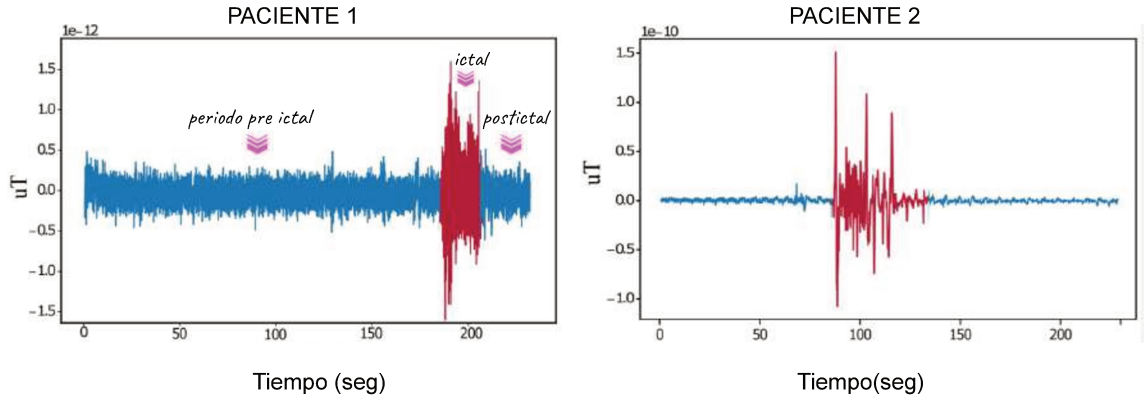


Figura 5.17: Ejemplo representativo de la señal registrada en uno de los canales, resaltando en color rojo el cambio de la dinámica de la señal durante el período ictal. La señal del paciente 1 representa una crisis epilepsia generalizada primaria, mientras que la señal 2 se asocia a una crisis epilepsia generalizada secundaria.

El análisis se llevó a cabo utilizando el método de generación de hipergrafos métricos construidos a partir de relaciones de proximidad entre pares de señales de las 144 existentes, lo que permitió captar patrones de acoplamiento de orden superior. Las señales fueron segmentadas en diferentes fases temporales (precrisis, crisis y postcrisis), a partir de las cuales se generaron hipergrafos dinámicos cuya evolución facilita el estudio de la transición entre estados fisiológicos normales y estados patológicos.
Para calcular la distancia entre señales, nos basamos en su diferencia de fase. El método utilizado para cuantificar estas distancias (o conectividad) fue **PLI** [46, 47], el cual se introdujo en el Capítulo1 , Sección 1.6.
Antes de aplicar el método de filtrado, lo primero que hicimos fue la segmentación de cada una de las señales para el posterior cálculo de la matriz de conectividad aplicando **PLI**. En cada una de las grabaciones se tomo una ventana corrediza de 5 segundos, con un solapamiento del 50 %. Luego, calculamos la matriz de distancias de 144×144. En total, obtuvimos $N = 46$ matrices de conectividad. Describimos precisamente el proceso de segmentación y cálculo de conectividad:
1. Sea $x_i(t)$ la señal de la i-ésima de las 144 señales ($i = 1, 2, \ldots, 144$), donde t representa el tiempo continuo de la señal.
2. Las señales $x_i(t)$ se segmentan en $N = 46$ ventanas solapadas de duración 5 segundos con un solapamiento del 50 %. Denotamos estas ventanas como $v_k^{(i)}$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, 45$ representa el índice de la ventana y i el índice de la señal. Entonces, para cada señal $x_i(t)$, obtenemos un conjunto de 46 ventanas $v_k^{(i)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, 46$. Es decir,

$$v_k^{(i)} = \text{segmento de } x_i(t) \text{ en el intervalo correspondiente a la ventana } k.$$

A continuación, para cada par de señales $x_i(t)$ y $x_j(t)$ con $i, j = 1, 2, \ldots, 144$, calculamos el **PLI** para cada par de ventanas correspondientes. Esto da como resultado una matriz de conectividad para cada ventana k, que denotamos como C_k, tal que

$$C_k = \left[\text{PLI}(v_k^{(i)}, v_k^{(j)}) \right]_{i,j=1}^{144},$$

donde $\text{PLI}(v_k^{(i)}, v_k^{(j)})$ es el valor del PLI calculado entre las ventanas $v_k^{(i)}$ y $v_k^{(j)}$ de las señales $x_i(t)$ y $x_j(t)$. Este proceso se repite para cada ventana k, de modo que para cada k, obtenemos

una matriz de conectividad C_k de tamaño 144×144. Finalmente, obtenemos un conjunto de matrices de conectividad $C_1, \ldots, C_{46}$, donde cada C_k representa la conectividad entre los segmentos de las señales originales que caen en la ventana k. Por lo tanto, el total de matrices de conectividad es $N = 46$, una para cada una de las ventanas de segmentación.
A cada una de estas matrices se le aplicó el método de hipergrafos métricos, lo que permitió calcular $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t)$ y las correspondientes distancias $\mathscr{S}(t)$ y $\mathscr{L}(t)$. Los resultados muestran que ambos pacientes presentaron un comportamiento similar en el estado basal (líneas azules en la Figura 5.18), caracterizado por valores altos del número de hiperaristas $\Delta^{\mathscr{E}}_{bl}(r,t)$, que se mantuvieron constantes hasta $r = 0{,}8$, punto en el cual los valores descendieron abruptamente a $\Delta^{\mathscr{E}}_{bl} = 1$. Durante el período ictal (línea roja), la topología de $\Delta^{\mathscr{E}}_{sz}(r,t)$ cambió significativamente: los valores iniciales eran altos, pero decrecieron más rápidamente, en $r = 0{,}2$ para el paciente 1 y en $r = 0{,}4$ para el paciente 2. Tras la crisis, en el período postictal (líneas azules), los valores de $\Delta^{\mathscr{E}}_{pi}(r,t)$ retornaron a un comportamiento similar al del estado basal.

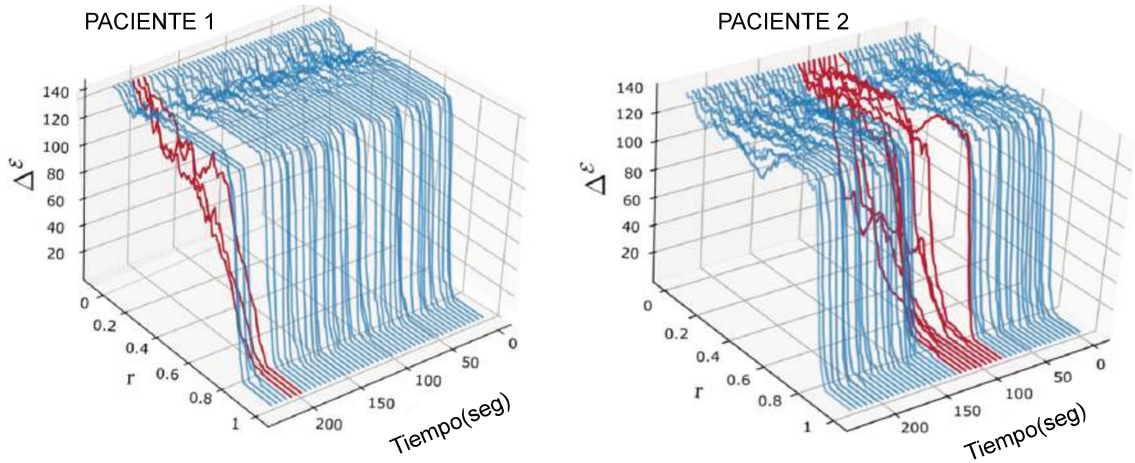


Figura 5.18: Representación gráfica del número de hiperaristas, en función de r, t y $\Delta^{\mathscr{E}}(r,t)$ en ambos pacientes estudiados.

Estas dinámicas pueden resumirse de manera más concisa mediante el cálculo de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$ mostrados en la Figura 5.19 C y D.

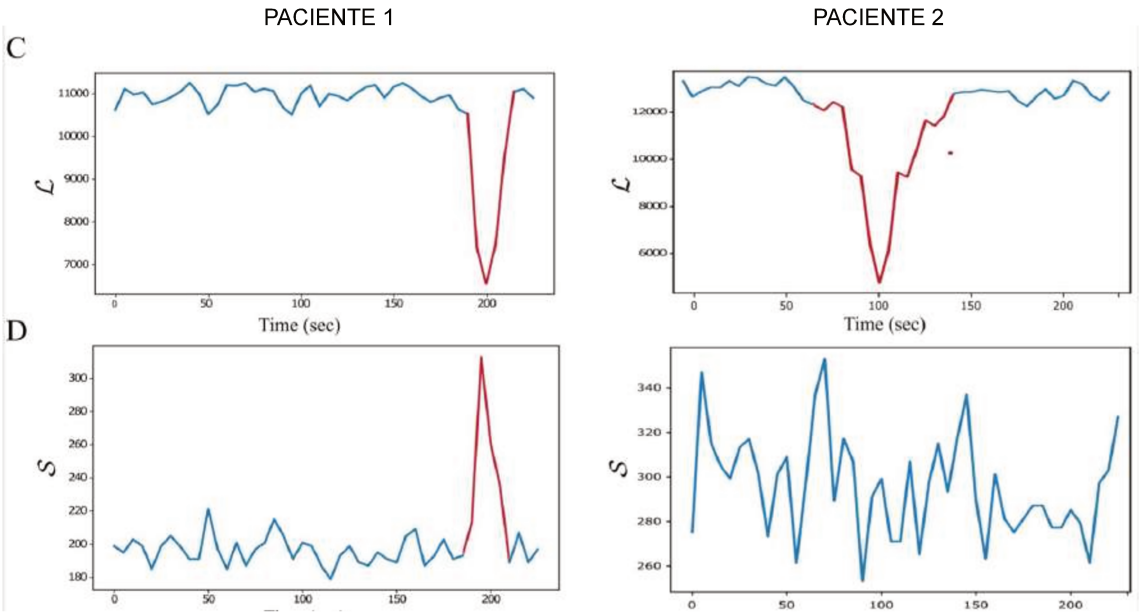


Figura 5.19: Valores para $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$

Al observar los valores de $\mathscr{L}$ a lo largo del tiempo, se aprecia que permanecieron constantes en ambos pacientes hasta el inicio del período ictal (SZ), donde disminuyeron bruscamente, para luego retornar a sus valores originales en el estado postictal. Este comportamiento refleja los cambios en la forma de las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}_{bl}(r,t)$ durante la crisis. En efecto, las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}_{sz}(r,t)$ descendieron más rápidamente hacia cero, generando un área bajo la curva menor en comparación con los estados basal o postictal ($\Delta^{\mathscr{E}}_{bl/pi}(r,t)$). El análisis de $\mathscr{S}$ logró identificar correctamente la crisis en el paciente 1, mostrando un aumento de los valores en el período ictal (SZ). Sin embargo, no detectó el episodio en el paciente 2. Este resultado sugiere que las dinámicas subyacentes a la crisis epiléptica fueron distintas entre ambos pacientes.

5.1.5. Conclusión

En esta sección, se aplicó el método de **hipergrafos métricos** para analizar diversos conjuntos de datos multidimensionales, incluyendo distribuciones de puntos, sistemas dinámicos y señales electrofisiológicas. A partir de los resultados obtenidos, podemos concluir que este método resulta eficiente, ya que permite extraer información relevante sobre la estructura y las relaciones entre los componentes del conjunto de datos. El comportamiento de $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ está fuertemente influenciado por el espacio métrico subyacente en el que están incrustados los datos. Diferentes espacios métricos pueden dar lugar a distintos patrones de agrupamiento y dispersión, lo que se traduce en valores variados de $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ para un radio r dado. Por ejemplo, en el espacio euclidiano, los puntos se definen por su distancia mutua, y $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ tiende a disminuir a medida que r aumenta, reflejando una transición desde una distribución más dispersa a una disposición más agrupada. Comprender el comportamiento de $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ en diferentes espacios métricos es crucial para interpretar y analizar los datos con precisión, ya que puede ofrecer claves importantes sobre la estructura y organización subyacente de los datos. Un valor elevado de $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ sugiere que cuando el radio r es pequeño, hay un número reducido de puntos adyacentes. Esto puede observarse en distribuciones de

puntos o sistemas dinámicos con $r \sim 0$, donde el número de hiperaristas es similar al número de puntos, lo que lleva a un valor de $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ aproximadamente igual a N. Excepciones al comportamiento de baja agrupación pueden surgir en ciertos escenarios, como en la distribución de puntos de Poisson, donde los puntos están tan densamente agrupados que, incluso con un radio pequeño, los puntos vecinos caen dentro de la misma bola. Este fenómeno de alta densidad puede eventualmente llevar a una fuerte compresión de los puntos y, por ende, a un mayor agrupamiento. En conjuntos de datos con topología isotrópica, la elección de una métrica no tiene un impacto significativo en la caracterización de los datos. Sin embargo, para conjuntos de datos con topología no isotrópica, como los generados por los mapas de Lorenz o Rossler, las métricas isotrópicas estándar como la distancia euclidiana o la distancia de Chebyshev pueden no ser adecuadas para caracterizar con precisión los datos. En su lugar, mediciones no isotrópicas, como la métrica parabólica, pueden proporcionar una mejor diferenciación entre los sistemas en cuestión. Por lo tanto, la elección de la métrica debe ser cuidadosamente considerada para garantizar una caracterización precisa de la estructura y organización subyacente de los datos. La Norma $\mathscr{L}^1$ y el seminorma de Sobolev $\mathscr{S}$ son métricas valiosas para cuantificar las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}(r)$ obtenidas mediante el método de construcción de los hipergrafos métricos. Estas métricas nos ayudan en la medida en que proporcionan una comprensión completa de las propiedades de las curvas. Además, el método propuesto para medir la distancia entre dos curvas permite identificar diferencias que pueden no ser evidentes al comparar únicamente sus valores intrínsecos, como $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$. Este método de construcción de hipergrafos también demuestra la efectividad de diferentes métricas para cuantificar las propiedades de diversos sistemas caóticos y estocásticos. En tales casos, se encontró que las distancias de Chebyshev y parabólica eran las más eficaces para diferenciar los cuatro sistemas dinámicos estudiados, algo en lo que la distancia euclidiana resultó ineficiente. Además, se observó que el uso de métricas como $\mathscr{L}$ y la seminorma de Sobolev $\mathscr{S}$ también tienen capacidad de discriminar, siendo la distancia (City block) la mejor para $\mathscr{L}$ y la distancia parabólica la mejor para $\mathscr{S}$. En el caso de diferentes distribuciones de puntos y métricas de distancia, los resultados muestran que las distancias de Chebyshev y Parabólica son más eficaces para distinguir entre diferentes distribuciones de puntos. La distribución de Poisson muestra un mayor agrupamiento de datos con un menor número de hiperaristas, mientras que la distribución fractal muestra un comportamiento diferente, con fluctuaciones y períodos alternos de bajo y alto número de hiperaristas. Las distancias de Chebyshev y Parabólica resultan ser las mejores para discriminar entre puntos respecto a $\mathscr{L}$, con los valores más altos correspondientes a la distribución uniforme y los más bajos a la de Poisson. La disposición fractal presenta valores significativamente más altos que las demás distribuciones para $\mathscr{S}$. También logramos apreciar la adecuación del método para investigar la evolución temporal de diversos tipos de sistemas dinámicos, como se demostró al aplicar el mismo en el estudio del modelo de Kuramoto acoplado. El análisis permitió caracterizar la transición de un sistema completamente desacoplado a uno totalmente acoplado, utilizando las curvas $\Delta^{\mathscr{E}}$ y las métricas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{S}$. Los resultados del estudio ofrecen una herramienta poderosa para comprender la dinámica y las transiciones del sistema. Dichos resultados son destacables en tanto que brindan una comprensión numérica del comportamiento de sincronización dentro del modelo de Kuramoto. Para el estudio de la evolución dinámica de las señales MEG en pacientes epilépticos, pudimos observar que existen cambios significativos en la topología de la red cerebral durante los periodos de inicio y post-ictal de las convulsiones. El número de hiperaristas en la red cerebral se comporta de manera similar en el estado basal para ambos pacientes, pero cambia marcadamente durante el periodo de crisis, con una caída más rápida en los valores de hiperaristas en el segundo paciente. Los valores de $\mathscr{L}$ de la red muestran una caída durante el periodo de crisis y un retorno a los valores basales en el estado post-ictal para ambos pacientes. Sin embargo, el análisis de $\mathscr{S}$ muestra que la crisis fue detectada en

el paciente 1 pero no en el paciente 2, lo que indica una diferenciación entre las dinámicas de las convulsiones entre ambos. Todos los resultados obtenidos sobre los distintos datos a los cuales se les aplicó el método de hipergrafos métricos ponen en evidencia la importancia de seleccionar métricas adecuadas al analizar distribuciones de puntos, ya que los valores relativos entre distribuciones pueden variar significativamente según la métrica utilizada. Estos resultados son indicativos de que este método es una herramienta poderosa para comprender la dinámica y las transiciones del sistema. Como se mencionó anteriormente, la elección de la métrica a utilizar no debe concebirse como una tarea trivial. No creemos que exista una solución única para todos los problemas; sin embargo, ciertos parámetros deben considerarse antes de realizar el análisis. El primero, aunque a simple vista pueda parecer poco relevante, es comprender el tipo de datos con los que se está trabajando —ya sean puntos en $\mathbb{R}^N$, distribuciones, series temporales, imágenes, etc.—. Otro factor a considerar es determinar el espacio métrico en el que se va a trabajar. Es necesario realizar un estudio del conjunto de datos para comprender qué métrica puede resultar más eficiente. Por ejemplo, si tenemos una distribución de datos en $\mathbb{R}^N$ donde $N > 3$, representar estos puntos gráficamente puede revelar si los datos están distribuidos uniformemente en el espacio. A partir de ello, puede elegirse entre métricas **isotrópicas** o **anisotrópicas**. En el caso de distribuciones, estudiar el tipo de distribución que se tiene —gaussiana, poissoniana, etc.— puede ser útil para seleccionar una métrica de distancia más específica (por ejemplo, Kullback-Leibler, Jensen-Shannon o Hellinger, entre otras). Un enfoque similar puede aplicarse a series temporales, señales o imágenes. Cabe destacar que nuestro método se basa en el recuento del número de hiperaristas para un r variable, lo cual nos permite usarlo como una métrica para cuantificar la evolución del hipergrafo. No obstante, se debe reconocer que los hipergrafos, al igual que los grafos simples, tienen más características estructurales que permitirían generar métricas alternativas, las cuales pueden ofrecer información distinta o complementaria sobre el hipergrafo. Por ejemplo, realizar un análisis sobre los vértices presentes en los hiperaristas puede proporcionar conocimientos valiosos. Se puede hacer uso de la teoría espectral de los hipergrafos y del espectro del mismo. Estas métricas, que brindan otro tipo de información, enriquecerán nuestra comprensión del hipergrafo y permitirán un análisis más completo de sus propiedades. Varios de los resultados de este Capítulo han sido publicados en la revista **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science** en febrero de 2024.[24].

Capítulo 6

Hipergrafos Multicapas

En este capítulo, se introduce un método para analizar interacciones de orden superior en señales electrofisiológicas. Se construyen hipergrafos a partir de grafos simples derivados del análisis de conectividad en diversas bandas de frecuencia electrofisiológica, donde la conectividad es medida a través del *Phase Lang Index* (PLI) [46, 47]. Cada hipergrafo será carácterizado mediante las tres métricas definidas en el Capítulo 4, para cuantificar los hipergrafos $\mathscr{H}$: (i) Entropía espectral, (ii) Centralidad de hiperaristas y (iii) Centralidad de vértices. Adicionalmente, se hace uso de tres de las métricas de disimilitud definidas en la sección 4.3 Medidas de disimilitud directas sobre $\mathscr{H}$ para comparar los distintos hipergrafos obtenidos en el análisis: (i) Distancia espectral, (ii) Distancia de centralidad de hiperaristas y (iii) Distancia de centralidad de vértices. Aplicamos este método de generación, cuantificación y comparación de hipergrafos a tres ejemplos distintos de señales neurofisiológicas multidimensionales. El objetivo principal es estudiar y comparar las dinámicas subyacentes de las redes neuronales tanto en estados cerebrales normales como patológicos. En primer lugar, se analizaron señales intracraneales de electroencefalografía (iEEG) en ratas durante diferentes etapas del sueño. En segundo lugar, se estudiaron señales de electroencefalografía de cuero cabelludo (EEG) para distinguir entre distintos tipos de epilepsia en pacientes humanos. Finalmente, se investigó la evolución temporal de la dinámica de redes neuronales en registros de magnetoencefalografía (MEG) de dos pacientes durante episodios epilépticos.
Antes de presentar formalmente las nociones básicas de la estrategia general que usaremos en este capítulo para construir hipergrafos a partir de grafos, es útil ilustrar la idea con un ejemplo simple. Supongamos que estamos considerando el trasporte de pasajeros entre algunas de las poblaciones de la provincia del Chubut,

$$W = \{\text{Comodoro Rivadavia (CR)}, \text{ Esquel (E)}, \text{ Garayalde (G)},\\ \text{Puerto Madryn (PM)}, \text{ Rawson (R)}, \text{ Trelew (T)}\}$$



Figura 6.1: Mapa de la provincia del Chubut resaltando con círculos en color rojo las ciudades en W.

es el conjunto de vértices. Considerando los tres medios de trasporte públicos usuales terrestres (colectivo y tren) y areo, podemos construir tres grafos de conectividad uno para cada medio C, T y A. Así tenemos los siguientes grafos ver Figura 6.2.

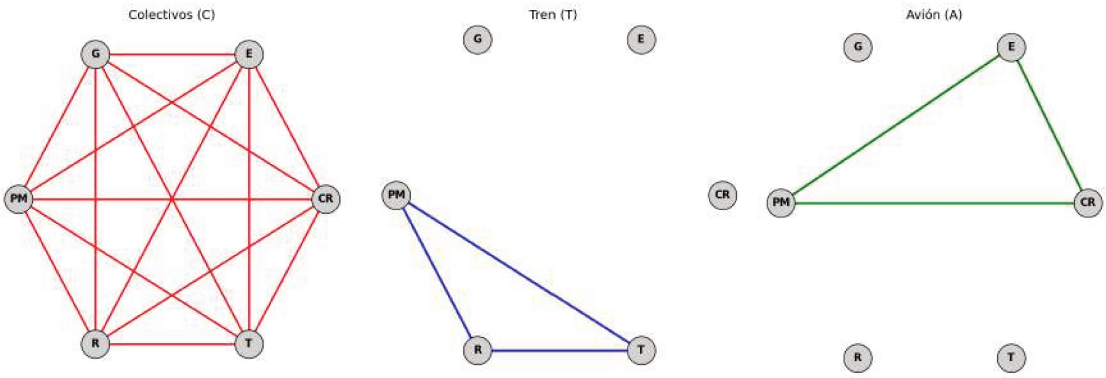


Figura 6.2: Grafos asociado a cada uno de los medios de transportes de la provincia del Chubut.

Ahora miramos el conjunto de $\mathscr{V}$ de los $\binom{6}{2} = 15$ pares de conexión entre localidades

como nuevo conjunto de vértices pertenecientes a la estructura del hipergrafo

$$\begin{aligned}\mathscr{V} = \{&\{\text{CR, E}\}, \{\text{CR, G}\}, \{\text{CR, PM}\}, \{\text{CR, R}\}, \{\text{CR, T}\},\\ &\{\text{E, G}\}, \{\text{E, PM}\}, \{\text{E, R}\}, \{\text{E, T}\}, \{\text{G, PM}\}, \{\text{G, R}\},\\ &\{\text{G, T}\}, \{\text{PM, R}\}, \{\text{PM, T}\}, \{\text{R, T}\}\}\end{aligned}$$

Podemos considerar los subconjuntos de pares en $\mathscr{V}$ que están conectados por cada uno de los tres medios de transporte para producir tres subconjuntos de $\mathscr{V}$, el primero, C coincide con $\mathscr{V}$ yá que todo par de localidades se puede unir por colectivos. El segundo $T = \{\{PM,R\},\{PM,T\},\{R,T\}\}$ y el tercero $A = \{\{CR,E\},\{CR,PM\},\{E,PM\}\}$.
Notemos que $C \cup T \cup A = \mathscr{V}$ pero que no son disjuntos, estos tres conjuntos son las hiperaristas del hipergrafo multicapa sobre $\mathscr{V}$ (ver Figura 6.3)

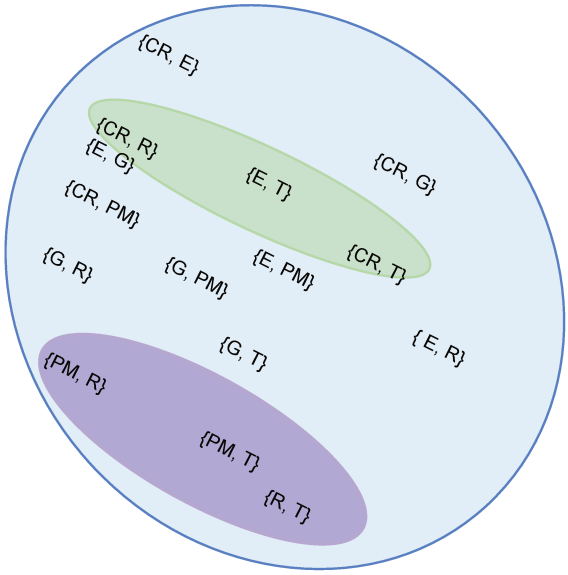


Figura 6.3: Hipergrafo para los medios de trasportes de la provincia del Chubut.

A continuación mostramos como describir esta situación desde un enfoque matricial.

6.1. Nociones básicas

Dado un conjunto W, denotaremos $P_2(W)$ como el conjunto de todos los subconjuntos de W con dos elementos, es decir, $P_2(W) = \{C \subset W : |C| = 2\}$. Nótese que si $|W| = k$, entonces $|P_2(W)| = \frac{k(k-1)}{2}$. En lo que sigue, tomaremos $W = \{1,\ldots,k\}$.
Supongamos que, para $i = 1,\ldots,m$, tenemos el grafo $\mathscr{G}_i = (W,\mathscr{E}_i)$, donde $\emptyset \neq \mathscr{E}_i \subset P_2(W)$ es el conjunto de aristas del grafo $\mathscr{G}_i$. Entonces, la matriz de adyacencia de $\mathscr{G}_i$ está dada por $a^i_{jl} = 1$ si $\{j,l\} \in \mathscr{E}_i$, y $a^i_{jl} = 0$ en caso contrario.
Supongamos también que $\bigcup_{i=1}^m \mathscr{E}_i = P_2(W)$. Definimos un hipergrafo cuyo conjunto de vértices $\mathscr{V}$ es $P_2(W)$, es decir, $\mathscr{V} = \{\{j,l\} : j,l \in W\}$. Para cada $i = 1,\ldots,m$, definimos una hiperarista e_i de la siguiente manera:

$$e_i = \{\{j,l\} : a^i_{jl} = 1\}$$

Nótese que, dado que $\mathscr{E}_i \neq \emptyset$ para $i = 1,\ldots,m$, se cumple la condición $e_i \neq \emptyset$ para $i = 1,\ldots,m$. Por otro lado, como $P_2(W) = \bigcup_{i=1}^m \mathscr{E}_i$, también tenemos que $\{e_i : i = 1,\ldots,m\}$ cubre $\mathscr{V} =$

$P_2(W)$. En otras palabras, $P_2(W) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathscr{E}_i$.
Por lo tanto, $\mathscr{H} = (P_2(W), \mathscr{E})$, donde $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$, es un hipergrafo con $\frac{k(k-1)}{2}$ vértices, dado por la familia de todas las aristas de los grafos originales.
La matriz de incidencia del hipergrafo está dada por $H_{\{j,l\},i} = h(\{j,l\}, i) = a^i_{jl}$, de modo que H es una matriz de dimensiones $m \times p$ con $p = \frac{k(k+1)}{2}$
La correspondiente matriz de adyacencia para este hipergrafo es la matriz $p \times p$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\{j,l\},\{j_1,l_1\}} &= |\{e_i \in \mathscr{E} : \{j,l\} \in e_i \wedge \{j_1,l_1\} \in e_i\}| \\ &= \left|\left\{i : a^i_{jl} = 1 \wedge a^i_{j_1 l_1} = 1\right\}\right|.\end{aligned}$$

Retomemos el ejemplo de los diferentes medios de transporte entre el conjunto fijo de ciudades W. Dos ciudades j y l en W pueden estar conectadas por tren, en cuyo caso $T_{jl} = 1$. Si no, $T_{jl} = 0$. Las ciudades j y l en W pueden estar conectadas por colectivo, en cuyo caso $C_{jl} = 1$, o no estarlo, en cuyo caso $C_{jl} = 0$. Las mismas ciudades pueden estar conectadas por avión, en cuyo caso $A_{jl} = 1$, o no estarlo, en cuyo caso $A_{jl} = 0$. Ahora tomamos $\mathscr{V}$ como el conjunto de todos los pares de ciudades. Suponiendo que cada par de ciudades dadas está conectada por alguno de los tres medios T, C o A, tenemos un hipergrafo con vértices en $\mathscr{V}$ y matriz de incidencia

$$\begin{aligned}h(\{j,l\}, T) &= T_{jl} \\ h(\{j,l\}, C) &= C_{jl} \\ h(\{j,l\}, A) &= A_{jl}\end{aligned}$$

1. Comodoro Rivadavia y Esquel están conectadas por colectivo y avión, pero no por tren. Así

$$C_{\mathrm{CR,\,E}} = 1, \quad A_{\mathrm{CR,\,E}} = 1, \quad T_{\mathrm{CR,\,E}} = 0.$$

2. Comodoro Rivadavia y Garayalde están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{CR,\,G}} = 1, \quad A_{\mathrm{CR,\,G}} = 0, \quad T_{\mathrm{CR,\,G}} = 0.$$

3. Comodoro Rivadavia y Puerto Madryn están conectadas por colectivo y avión, pero no por tren. Así

$$C_{\mathrm{CR,\,PM}} = 1, \quad A_{\mathrm{CR,\,PM}} = 1, \quad T_{\mathrm{CR,\,PM}} = 0.$$

4. Comodoro Rivadavia y Rawson están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{CR,\,R}} = 1, \quad A_{\mathrm{CR,\,R}} = 0, \quad T_{\mathrm{CR,\,R}} = 0.$$

5. Comodoro Rivadavia y Trelew están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{CR,\,T}} = 1, \quad A_{\mathrm{CR,\,T}} = 0, \quad T_{\mathrm{CR,\,T}} = 0.$$

6. Esquel y Garayalde están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{E,\,G}} = 1, \quad A_{\mathrm{E,\,G}} = 0, \quad T_{\mathrm{E,\,G}} = 0.$$

7. Esquel y Puerto Madryn están conectadas por colectivo y avión, pero no por tren. Así

$$C_{\mathrm{E,\,PM}} = 1, \quad A_{\mathrm{E,\,PM}} = 1, \quad T_{\mathrm{E,\,PM}} = 0.$$

8. Esquel y Rawson están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{E,\,R}} = 1, \quad A_{\mathrm{E,\,R}} = 0, \quad T_{\mathrm{E,\,R}} = 0.$$

9. Esquel y Trelew están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{E,\,T}} = 1, \quad A_{\mathrm{E,\,T}} = 0, \quad T_{\mathrm{E,\,T}} = 0.$$

10. Garayalde y Puerto Madryn están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{G,\,PM}} = 1, \quad A_{\mathrm{G,\,PM}} = 0, \quad T_{\mathrm{G,\,PM}} = 0.$$

11. Garayalde y Rawson están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{G,\,R}} = 1, \quad A_{\mathrm{G,\,R}} = 0, \quad T_{\mathrm{G,\,R}} = 0.$$

12. Garayalde y Trelew están conectadas únicamente por colectivo. Así

$$C_{\mathrm{G,\,T}} = 1, \quad A_{\mathrm{G,\,T}} = 0, \quad T_{\mathrm{G,\,T}} = 0.$$

13. Puerto Madryn y Rawson están conectadas por colectivo y tren, pero no por avión. Así

$$C_{\mathrm{PM,\,R}} = 1, \quad A_{\mathrm{PM,\,R}} = 0, \quad T_{\mathrm{PM,\,R}} = 1.$$

14. Puerto Madryn y Trelew están conectadas por colectivo y tren, pero no por avión. Así

$$C_{\mathrm{PM,\,T}} = 1, \quad A_{\mathrm{PM,\,T}} = 0, \quad T_{\mathrm{PM,\,T}} = 1.$$

15. Rawson y Trelew están conectadas por colectivo y tren, pero no por avión. Así

$$C_{\mathrm{R,\,T}} = 1, \quad A_{\mathrm{R,\,T}} = 0, \quad T_{\mathrm{R,\,T}} = 1.$$

La Figura 6.4 muestra de manera gráficamente la situación anterior.

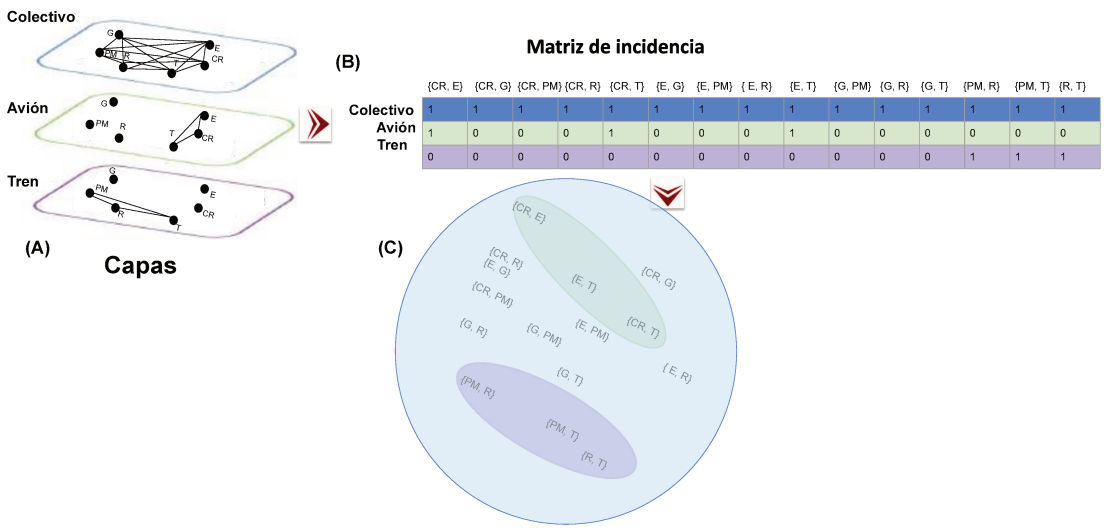


Figura 6.4: Representación gráfica del método para medios de trasportes de la provincia del Chubut. A) conexiones entre ciudades asociadas a cada medio de transporte considerado, B) matriz de incidencia asociada al hipergrafo se construye integrando las matrices de adyacencia correspondientes a cada grafo en A), C) hipergrafo resultante.

6.1.1. Algoritmo para construir hipergrafos multicapas

$G_i = (W, E_i)$, $i = 1, \ldots, m$, sean m grafos simples dados, $|W| = k$, $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = \mathscr{P}_2(W)$.

Sea $A_i = (a^i_{JL})_{j,l=1,\ldots,k}$ la matriz de adyacencia de G_i.

Sea $\mathscr{V} = \{\{j,l\} : j \neq l,\ j,l = 1,\ldots,k\} = \mathscr{P}_2(W)$.

Definir $\mathscr{E} = \left\{ e_i = \left\{ \{j,l\} : a^i_{jl} = 1 \right\} : i = 1, \ldots, m \right\}$.

Definir $H_{\{j,l\},i} = a^i_{jl}$ como la matriz de incidencia del hipergrafo $\mathscr{H} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$.

Definir $\mathscr{A}_{\{j,l\},\{j_1,l_1\}} = \left| \left\{ e_i : a^i_{jl} = 1 \wedge a^i_{j_1 l_1} = 1,\ i = 1, \ldots, m \right\} \right|$.

Para ilustrar el algoritmo ver Figura 4.7, consideremos cuatro grafos $(n = 4)$ en el conjunto $W = \{1, ..., 5\}$ con

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (W, E_1 = \{\{1,5\},\{3,5\}\}), \\
G_2 &= (W, E_2 = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,5\}\}), \\
G_3 &= (W, E_3 = \{\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\}\})\ y \\
G_4 &= (W, E_4 = \mathscr{P}_2(W)).
\end{aligned}
$$

La Figura 6.5 proporciona, para este ejemplo simple, las matrices de incidencia y adyacencia para el hipergrafo generado por el algoritmo introducido anteriormente.

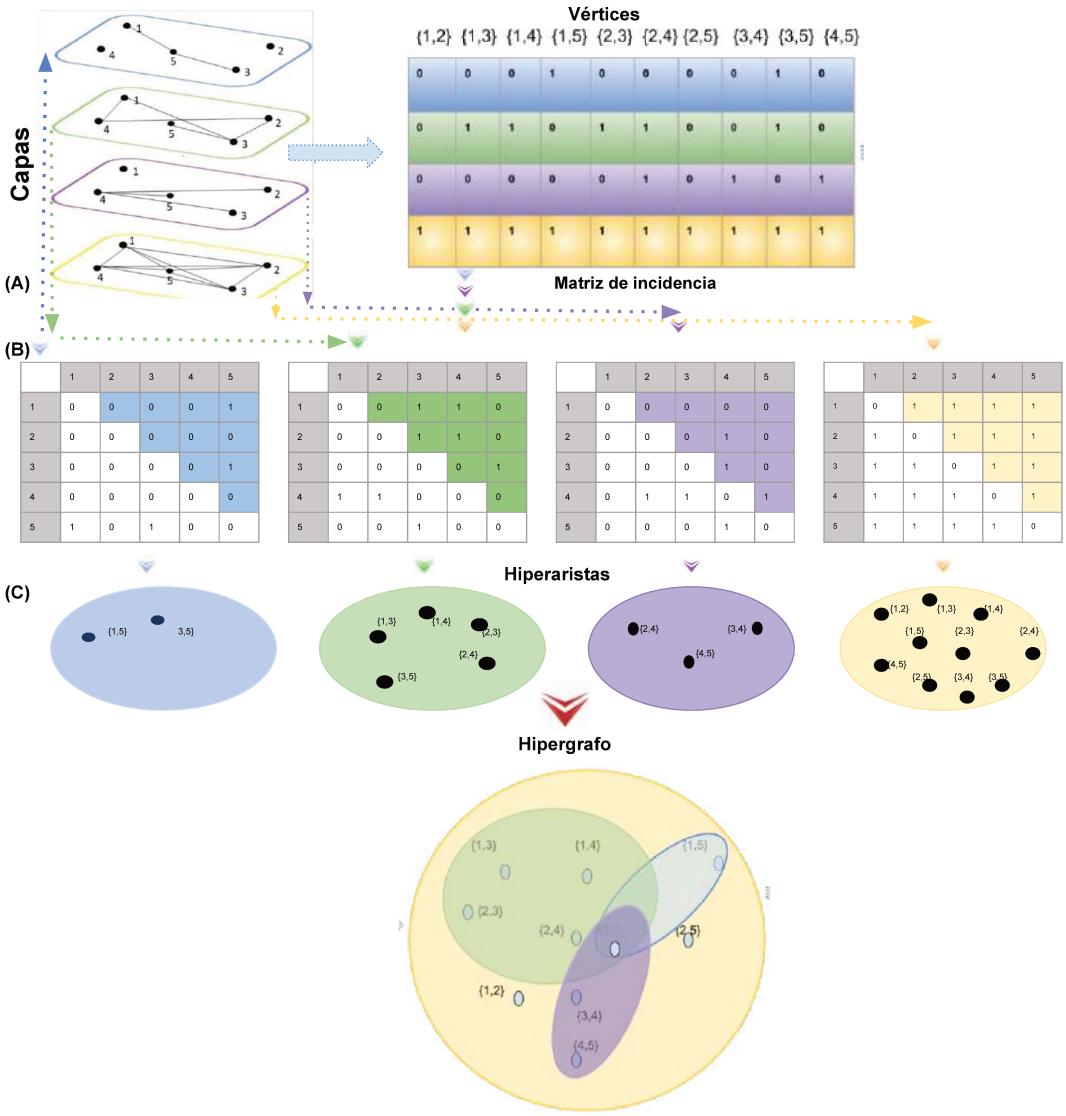


Figura 6.5: En la imagen se ilustran los distintos pasos para generar un hipergrafo multicapa. A) Cada capa contiene el mismo conjunto de vértices; lo que varía entre capas es su estructura de adyacencia entre pares de vértices. B) se muestran las matrices de adyacencia correspondientes a cada capa. A partir de estas matrices, se construyen los vértices del hipergrafo, que representan la adyacencia entre los distintos vértices de los grafos simples definidos en cada capa. C) Finalmente, las hiperaristas del hipergrafo se forman a partir de estas relaciones integrando así la información estructural de las distintas capas en una única representación.

6.1.2. Construcción de un hipergrafo multicapa sobre señales electrofisiológicas

Señales de iEEG en estados de sueño en Roedores.

En esta sección, presentamos el método de generación de hipergrafos multicapas aplicados al análisis de señales intracraneales de electroencefalografía (iEEG) registradas en nueve ratas durante cuatro estados del sueño las cuales reflejan distintos niveles de actividad cerebral y estados de conciencia. Consideramos importante, antes de describir el pre-

procesamiento de los datos y la metodología de construcción de los hipergrafos, introducir brevemente las distintas etapas del sueño sobre las que se basa este estudio, así como sus principales características neurofisiológicas.

- **AWAKE (vigilia)**: Estado caracterizado por una alta actividad cortical y plena conciencia del entorno. En este estado, el animal está despierto y activo.
- **QW (Quiet Wakefulness o vigilia tranquila)**: Corresponde a un estado de reposo con ojos cerrados y mínima actividad motora. Aunque el animal permanece despierto, la actividad cortical disminuye respecto de la vigilia activa.
- **NREM (Non-Rapid Eye Movement o sueño profundo)**: Fase del sueño caracterizada por ondas lentas y una significativa reducción en la actividad cortical. Está asociada con procesos de consolidación de memoria y restauración fisiológica.
- **REM (Rapid Eye Movement o sueño REM)**: Fase del sueño en la que se presentan movimientos oculares rápidos, atonía muscular y una intensa actividad cortical. Se asocia con sueños vívidos y funciones cognitivas como la consolidación emocional y el procesamiento de la información.

Como cada una de estas fases refleja dinámicas neuronales específicas, nuestro objetivo es identificar biomarcadores que permitan una discriminación precisa entre las distintas fases, para ello aplicamos nuestro método de hipergrafos multicapas, cuya representación mediante IAO (interacciones de alto orden) posibilita una caracterización más profunda y estructurada de la organización funcional cerebral, tanto en condiciones normales como patológicas.

Los datos

Nuestros datos fueron obtenidos por el grupo del Laboratorio de Neurobiología del Sueño de la Universidad de la República en Uruguay, liderado por el Dr. Torterolo. Cada registro cuenta con 7 electrodos posicionados en las siguientes regiones cerebrales: V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio) (ver Figura 6.6).

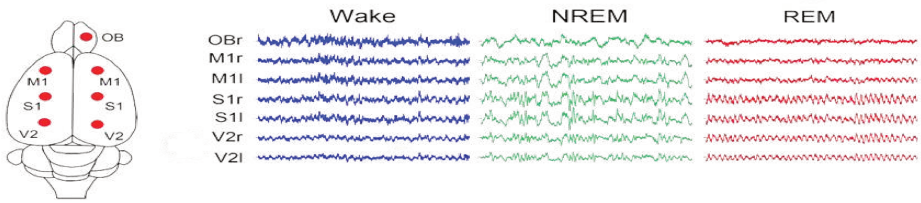


Figura 6.6: Representacón de los 7 electrodos posicionados en las siguientes regiones cerebrales: V2 (área visual secundaria), S1 (corteza somatosensorial primaria), M1 (corteza motora primaria) y OB (bulbo olfatorio).

El primer paso del preprocesamiento de las señales iEEG consistió en aplicar un filtro pasa banda entre 0.5 y 70 Hz, con el fin de eliminar tanto los componentes de muy baja frecuencia (por ejemplo, artefactos por movimiento o cambios de línea base) como las altas frecuencias que no contienen información neuronal relevante para este estudio. Adicionalmente, se aplicó un filtro notch centrado en los 60 Hz para suprimir el ruido introducido por la red eléctrica, lo cual es fundamental para evitar interferencias periódicas que podrían distorsionar las medidas de conectividad y complejidad espectral.

Una vez filtradas, las señales fueron inspeccionadas visualmente y se seleccionaron cuidadosamente épocas libres de artefactos, evitando aquellas con movimientos, parpadeos o ruido muscular evidente. Además, se priorizó la selección de períodos con características estables y no transitorias, garantizando la representatividad de cada estado fisiológico.
Los estados de vigilia activa (AW), vigilia tranquila (QW), sueño de ondas lentas (NREM) y sueño con movimientos oculares rápidos (REM) fueron etiquetados manualmente utilizando el software Spike 2 (Cambridge Electronic Design), sobre segmentos de 3 segundos de duración. La clasificación se basó en criterios estandarizados y previamente validados, como los descritos en [88], que combinan características espectrales, morfología de la señal y comportamiento observado. Particular atención se prestó a la diferenciación entre los subestados de vigilia. El estado de vigilia se subdividió en vigilia activa (AW) y vigilia tranquila (QW) en función de la actividad theta registrada en cuatro electrodos posteriores. Se calculó la potencia espectral en la banda theta para cada época, y aquellas con valores por encima del percentil 70 fueron clasificadas como AW, mientras que las restantes fueron etiquetadas como QW. Esta metodología se alineó con criterios previamente utilizados en la literatura para distinguir entre niveles de activación cortical durante la vigilia [89, 90].

Segmentación temporal de las señales

Como se mencionó anteriormente, trabajamos sobre registros provenientes de **7 electrodos**. En el marco de nuestro método, consideramos estos electrodos como **nodos (vértices)**. Cabe destacar que, dado que el PLI se basa en la fase de la señal obtenida mediante la *transformada de Hilbert*, es fundamental que la señal esté previamente **filtrada en una banda de frecuencia estrecha** para garantizar una extracción precisa de la fase [91]. En este trabajo, se utilizaron bandas de frecuencia con un ancho de $\Delta^{\mathscr{B}_i} = 4$ Hz.
Por lo tanto las distintas **capas del hipergrafo** fueron definidas a partir de las siguientes bandas de frecuencia

$$\mathscr{B} = \{[1,4],[4,8],[8,12],[12,16],[20,24],[38,42]\}$$

A partir de ellas se obtiene una **familia de seis grafos**, determinada por la **conectividad funcional entre los electrodos** para cada banda. Las señales se segmentan temporalmente en ventanas o **épocas**. Cada época tiene una duración de 5 segundos, lo que equivale $5 \times 400 = 2000$ muestras Dado que la longitud total de la señal es de 6,942,720 muestras, el número total de épocas posibles es

$$L_{\text{total}} = \left\lfloor \frac{6942720}{2000} \right\rfloor = 3471$$

Luego son filtradas en las bandas de frecuencias en $\mathscr{B}$.
Para el análisis, se seleccionan **aleatoriamente 100 épocas** entre las posibles

$$\text{Epocas}_{\text{random}} = \text{índices aleatorios en } \{1,\ldots,3470\}$$

Este procedimiento se aplicó a las señales registradas de cada una de las nueve ratas bajo análisis. Para cada **época** y cada **banda de frecuencia** $\mathscr{B}_i \in \mathscr{B}$, se siguieron los siguientes pasos

1. A partir de las señales filtradas en la banda $\mathscr{B}_i$, se generaron $N_{sub} = 30$ conjuntos de **datos sustitutos** por canal y epoca utilizando el método de *permutaciones univariadas* (ver Capítulo 1, Sección 1.11).

2. Tanto las señales filtradas como los datos sustitutos se utilizaron para calcular **matrices de conectividad funcional** basadas en el índice PLI, cada una de orden 7×7, para cada época $w = 1,\ldots,100$

- $M^{\mathscr{B}_i}_{PLI,w}$: matriz de conectividad funcional obtenida a partir de la señal real en la época w.
- $M^{\mathscr{B}_i}_{sub_j,w}$: matrices de conectividad obtenidas a partir de los datos sustitutos en la ventana w, para cada $j = 1, \ldots, N_{sub}$.

3. A partir de las matrices sustitutas, se calculó una **matriz umbral** para cada época como el promedio de las matrices sustitutas

$$M^{\mathscr{B}_i}_{Th,w} = \left\langle M^{\mathscr{B}_i}_{sub_j,w} \right\rangle_{j=1}^{N_{sub}}.$$

4. Finalmente, se comparó la matriz real $M^{\mathscr{B}_i}_{PLI,w}$ con su respectiva matriz umbral $M^{\mathscr{B}_i}_{Th,w}$, obteniendo así una **matriz binarizada** de conectividad:

$$M^{\mathscr{B}_i}_{bin,w}(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{si } M^{\mathscr{B}_i}_{PLI,w}(p,q) > M^{\mathscr{B}_i}_{Th,w}(p,q), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La Figura 6.7 ilustra el procedimiento aplicado para una única banda de frecuencia, en este caso la banda θ, en la época uno. Primero, se calcula la matriz de conectividad funcional $M^{\theta}_{PLI,1}$. Luego, se generan $N_{sub} = 30$ conjuntos de datos sustitutos por canal mediante permutaciones univariadas, a partir de los cuales se obtienen N_{sub} matrices de conectividad sustitutas $M^{\theta}_{sub_j,1}$, para $j = 1, \ldots, 30$. A continuación, se calcula la **matriz umbral** $M^{\theta}_{Th,1}$ como el promedio elemento a elemento de las matrices sustitutas

$$M^{\theta}_{Th,1} = \left\langle M^{\theta}_{sub_j,1} \right\rangle_{j=1}^{N_{sub}}.$$

Seguidamente, se construye la **matriz binarizada de conectividad** $M^{\theta}_{bin,1}$ comparando la matriz real con la umbral. A partir de las conexiones en $M^{\theta}_{bin,1}$, se construye una **hiperarista** correspondiente a la banda θ, cuyos vértices son las conexiones binarias significativas (pares de nodos conectados). Este procedimiento se repite para cada banda de frecuencia $\mathscr{B}_i \in \mathscr{B}$, dando lugar a un conjunto de hiperaristas, una por banda. De esta manera, se obtiene una representación en la que el número de hiperaristas es igual al número total de bandas de frecuencia consideradas, y donde cada hiperarista representa la topología funcional dominante de una banda particular.

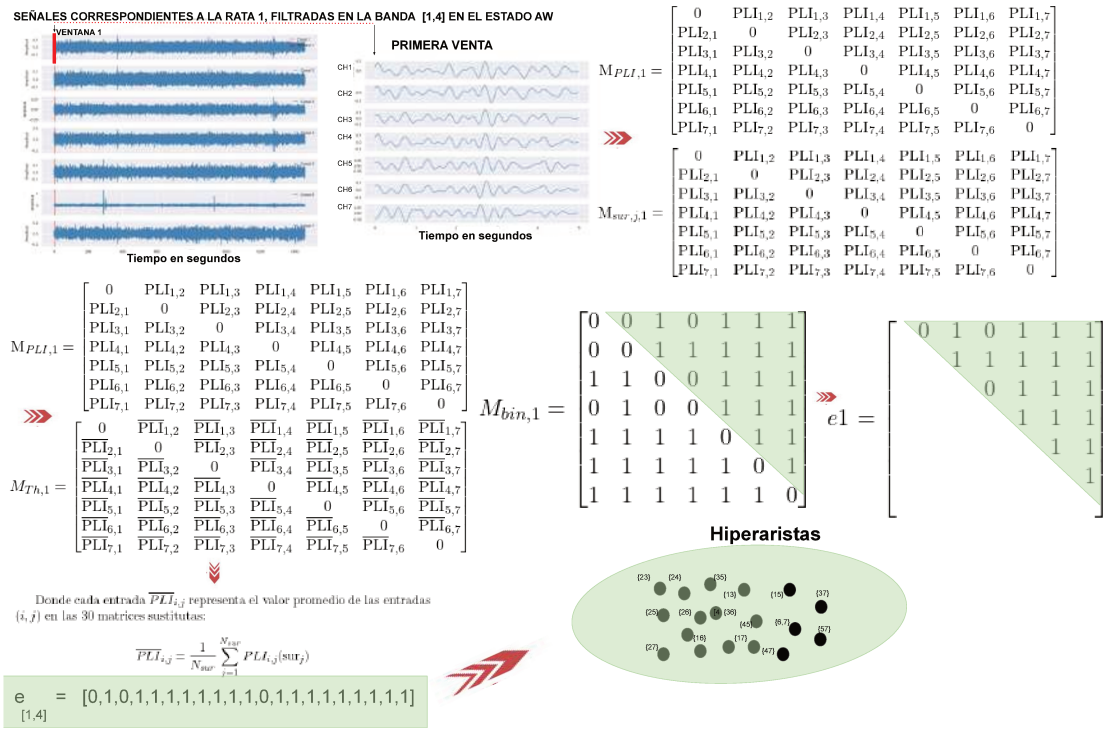


Figura 6.7: Ejemplo del procedimiento aplicado para una única banda de frecuencia, en este caso la banda θ, en la ventana uno. En el gráfico se muestra la costrucción de una de las hiperaristas del hipergrafo.

Este proceso se repitió para cada una de las 100 ventanas disponibles, obteniendo así 100 matrices de conectividad $M^{\mathscr{B}_i}_{PLI,w}$, cada una binarizada con su correspondiente matriz umbral. Esta binarización permite eliminar conexiones espurias y centrarse en aquellas interacciones que superan el nivel esperado por azar.
Una vez obtenidos los grafos para cada banda de frecuencia, procedemos a construir la matriz de incidencia h de tamaño $N_{band} \times N_{pair}$, donde N_{band} es el número de bandas de frecuencia y N_{pair} es el número de conexiones posibles entre pares de electrodos, 2^{N_k}. Cada fila de la matriz de incidencia corresponde a una banda de frecuencia, y las entradas se establecen en 0 o 1 dependiendo de si un par de electrodos está conectado en la matriz de conectividad correspondiente $M^{\mathscr{B}_i}_{bin,w}$. Una vez construida la matriz de incidencia h, se obtiene el hipergrafo asociado al grafo multicapa y su matriz de adyacencia correspondiente. Ahora podemos aplicar los cuantificadores y métricas de distancia introducidos en la Sección 4.4. La Figura 6.8 proporciona una visión gráfica del proceso utilizado para derivar hipergrafos a partir de grafos multicapas.

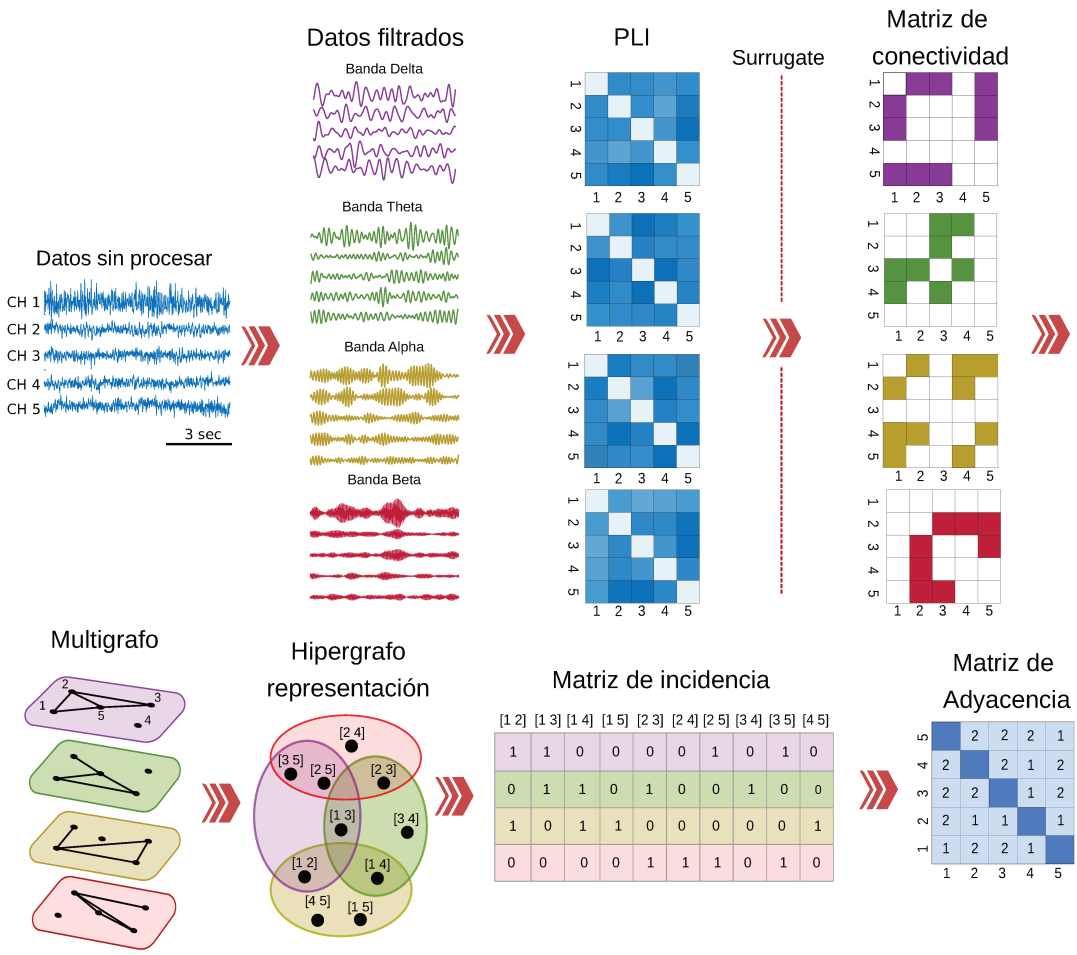


Figura 6.8: Pipeline para obtener una representación de hipergrafo de las interacciones de orden superior a partir de un multigrafo en registros electrofisiológicos.

La Figura 6.9 presenta un caso típico de los datos analizados, correspondiente al estado *Awake* una de las ratas. Esta visualización permite ilustrar de forma clara y sencilla el método aplicado en el procesamiento y análisis de la conectividad funcional.

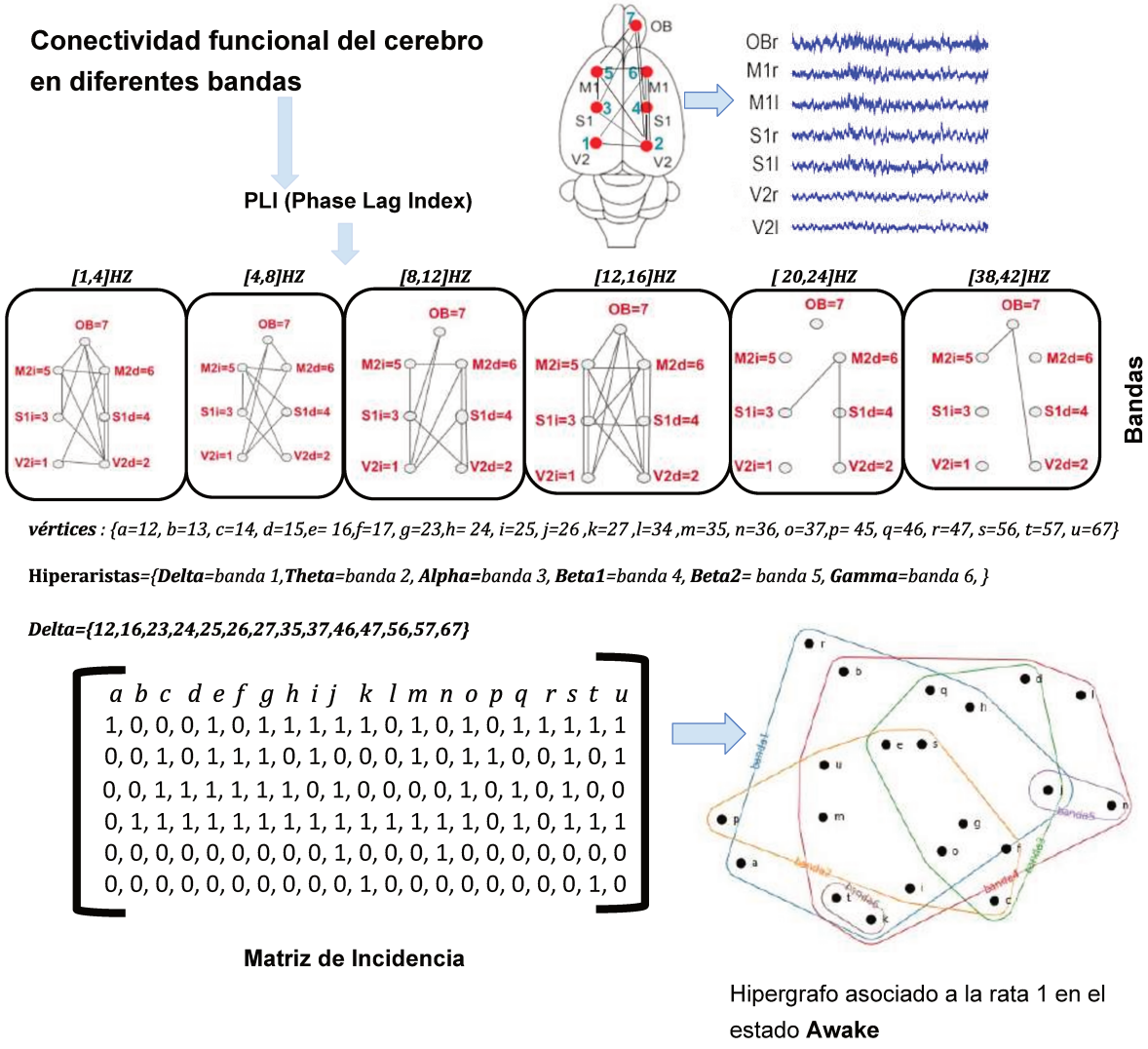


Figura 6.9: Representación de un caso representativo de los datos analizados, correspondiente al estado *Awake* para una de las ratas.

6.2. Aplicaciones

6.2.1. Estudio de estadios de sueño en roedores

Como se mencionó anteriormente, para cada estado de sueño se seleccionaron 100 épocas representativas a partir de los registros totales. Cada una de estas épocas fue procesada mediante filtrado en las siguientes bandas de frecuencia: $\delta\,[1,4]$ Hz, $\theta\,[4,8]$ Hz, $\alpha\,[8,12]$ Hz, $\sigma\,[12,15]$ Hz, $\beta\,[15,24]$ Hz, and $\gamma[38,42]$ Hz. A continuación, se aplicó el procedimiento de construcción de hipergrafos descrito en la Subsección 6.1.1 a las señales filtradas en cada época.

Como resultado, se obtuvieron 100 hipergrafos por estado de sueño y por animal, siendo el total 900 hipergrafos por estado. Para cada uno de estos hipergrafos se calcularon los cuantificadores definidos en la Sección 4.4, en particular la entropía y las medidas de centralidad tanto de vértices como de hiperaristas. Finalmente, se promediaron estos valores a lo largo de las 100 épocas para cada animal, obteniéndose así un conjunto de nueve valores (uno por

animal) para cada cuantificador y estado de sueño. Adicionalmente, se calcularon distancias entre hipergrafos correspondientes a los distintos estados de sueño, con el objetivo de evaluar diferencias estructurales entre ellos. En este análisis se aplicaron tres métricas: la distancia espectral, la distancia basada en la centralidad de vértices y la distancia basada en la centralidad de hiperaristas, todas ellas definidas en la Sección 4.4.
Para evaluar la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre los distintos conjuntos de cuantificadores asociados a cada estados de sueño, se aplicó la prueba de Kruskal-Wallis, una prueba no paramétrica de inferencia estadística que extiende el test de Mann-Whitney para más de dos grupos independientes. Esta prueba se utiliza cuando no se puede asumir la normalidad de los datos. Formalmente, el test de Kruskal-Wallis evalúa la hipótesis nula de que todas las muestras provienen de la misma distribución, es decir, que la mediana de los grupos es igual. Dado un conjunto de k grupos independientes, cada uno con n_i observaciones (donde $i = 1, 2, ..., k$), la estadística de prueba se define como

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} n_i (R_i - \bar{R})^2$$

donde

- N es el número total de observaciones, $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$
- R_i es el rango promedio del grupo i
- $\bar{R}$ es el rango promedio global

Bajo la hipótesis nula, y para tamaños muestrales suficientemente grandes, la estadística H se distribuye aproximadamente como una chi-cuadrado con $k-1$ grados de libertad. Sin embargo, esta prueba únicamente indica si existen diferencias globales entre los grupos, sin especificar entre cuáles de ellos se presentan tales diferencias. Por esta razón, se aplicó un análisis post-hoc con corrección de Dunn. El test de Dunn permite realizar comparaciones múltiples entre todos los pares posibles de grupos, evaluando para cada contraste si las medianas difieren de manera significativa. Este método utiliza una corrección para el control del error tipo I asociado a comparaciones múltiples. En particular, los valores p obtenidos se ajustan utilizando procedimientos de corrección como el método de Bonferroni o Holm-Bonferroni, garantizando que la probabilidad de obtener falsos positivos se mantenga bajo control.
La Figura 6.10B muestra los resultados del análisis de entropía espectral en los distintos estados de sueño. Para ello, se aplicó la prueba de Kruskal-Wallis sobre el conjunto de valores promedio de entropía obtenidos para cada uno de los nueve animales, donde cada valor representa el promedio de los valores de entropias asociados a cada un de los 100 hipergrafos obtenidos uno por cada época . En otras palabras dado $\mathbf{S}(\mathscr{H})_{i,j}$ el valor de la entropía para el i-ésimo animal y el j-ésimo estado de sueño, y $N = 100$ el número de épocas por estado de sueño. El promedio de los 100 valores de entropia para el i-ésimo animal en el j-ésimo estado de sueño se calcula como

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_{i,j} = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} \mathbf{S}(\mathscr{H})_{i,j,k}$$

donde

- $\bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_{i,j}$ es el valor promedio de la entropía para el i-ésimo animal y el j-ésimo estado de sueño,

- $\bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_{i,j,k}$ es el valor de la entropía en la k-ésima época para el i-ésimo animal y el j-ésimo estado de sueño.

Esta fórmula se aplica a cada uno de los 9 animales, y para cada estado de sueño j (como AW, NREM, REM, QW), obteniendo un conjunto de 9 valores promedio por estado de sueño. Expresado en términos de todos los animales y estados de sueño, el conjunto de promedios sería

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_j = \left(\bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_{1,j}, \bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_{2,j}, \ldots, \bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_{9,j}\right)$$

donde $\bar{\mathbf{S}}(\mathscr{H})_j$ es el conjunto de los promedios de los 9 animales para el j-ésimo estado de sueño. Estos conjuntos de nueve valores de entropía por estado de sueño se utilizaron para realizar el análisis estadístico, cuyos resultados se representan en los gráficos de violín de la Figura 6.10B. En dicha figura se observa que la entropía es significativamente mayor durante los estados de vigilia activa (AW) y sueño REM, en comparación con los estados de vigilia tranquila (QW) y sueño NREM. En particular, el estado NREM presentó los valores más bajos de entropía, mientras que el estado QW mostró valores intermedios. No se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre los estados AW y REM. Como se mencionó anteriormente, las comparaciones estadísticas entre los distintos estados de sueño se realizaron mediante la prueba de Kruskal-Wallis. Posteriormente, se aplicó un análisis post-hoc con corrección de Dunn para comparaciones múltiples, lo cual permitió identificar las siguientes diferencias significativas entre pares de estados.
En general, los valores p ajustados para las comparaciones múltiples revelan que el sueño REM se distingue claramente de otros estados de sueño, como el NREM y la vigilia tranquila (QW), en términos de la entropía espectral. Los valores p menores a 0.01 en la mayoría de las comparaciones destacan diferencias robustas y consistentes entre estos estados.
La Figura 6.10C muestra la comparación de la *centralidad de hiperaristas* entre las distintas bandas de frecuencia del iEEG según el estado de sueño. Como tenemos 100 hipergrafos asociados, uno por época, y cada hipergrafo contiene 6 hiperaristas, debemos promediar el valor de la centralidad de cada hiperarista a lo largo de las 100 épocas para cada rata. Esto es sea $\delta(e)_{i,j,k}$ el valor de la centralidad de la hiperarista e en la k-ésima época, para el i-ésimo animal y el j-ésimo estado de sueño, con $e = 1, \ldots, 6$, y $N = 100$ el número total de épocas por estado de sueño. El promedio de los 100 valores de centralidad para una hiperarista h del i-ésimo animal en el j-ésimo estado de sueño se calcula como

$$\bar{\delta}(e)_{i,j} = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} \delta(e)_{i,j,k}$$

donde

- $\bar{\delta}(e)_{i,j}$ es el valor promedio de la centralidad de la hiperarista e para el i-ésimo animal y el j-ésimo estado de sueño,
- $\delta(e)_{i,j,k}$ es la centralidad de la hiperarista e en la k-ésima época.

Este cálculo se realiza para cada una de las 6 hiperaristas, para los 9 animales, y para cada estado de sueño j (AW, NREM, REM, QW). El conjunto de promedios para las 6 hiperaristas del i-ésimo animal en el estado j se expresa como

$$\bar{\delta}(e)_{i,j} = \left(\bar{\delta}(1)_{i,j}, \bar{\delta}(2)_{i,j}, \ldots, \bar{\delta}(6)_{i,j}\right)$$

Finalmente, el conjunto de valores promedio para la hiperarista e, en el estado de sueño j, considerando los 9 animales, se expresa como

$$\bar{\delta}(e)_j = \left(\bar{\delta}(e)_{1,j}, \bar{\delta}(e)_{2,j}, \ldots, \bar{\delta}(e)_{9,j}\right)$$

Este conjunto permite comparar la centralidad promedio de cada hiperarista entre animales para un mismo estado de sueño.
Al igual que en los análisis anteriores, se aplicó la *prueba de Kruskal-Wallis* para evaluar diferencias globales entre estados, seguida de un *análisis post-hoc con corrección de Dunn* para comparaciones múltiples.
Los resultados revelaron diferencias significativas en la **banda Delta**, donde se observó una *conectividad significativamente mayor durante la vigilia activa (AW) y el sueño REM* en comparación con el estado NREM (AW vs. NREM, $**** \; p = 9 \times 10^{-4}$; REM vs. NREM, $**** \; p = 3 \times 10^{-5}$). Por otro lado, en la **banda Theta**, se encontró una diferencia significativa entre *vigilia activa y NREM* (AW vs. NREM, $* \; p = 3 \times 10^{-2}$), mostrando valores más altos durante la vigilia.
En las demás bandas de frecuencia no se observaron diferencias significativas entre los estados, lo que sugiere que las **bandas Delta y Theta son las más sensibles** para detectar variaciones en la conectividad funcional a través de la centralidad de hiperaristas entre estados de sueño.
Para estudiar la centralidad de estos vértices tenemos que tener en cuenta lo que se mencionó en la Subsección de Nociones Básicas, el modelo propuesto construye hipergrafos cuyos conjuntos de vértices están formados por las aristas de una familia finita de grafos definidos sobre el mismo conjunto de nodos. En nuestro caso $W = \{V2l, V2r, S1l, S2r, M1l, M1r, OB\}$ con $k = 7$. Tenemos 6 grafos simples $G_i = (W, E_i)$, todos con el mismo conjunto de nodos W uno por banda de frecuencia. Entonces el número de vértices del hipergrafos será $\mathscr{V} = \mathscr{P}_2(W)$, como $k = 7$, el número total de combinaciones posibles de dos nodos es

$$p = |\mathscr{V}| = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Es decir, el hipergrafo resultante tendrá 21 vértices, que corresponden a todas las combinaciones de pares de nodos
$\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},$
$\{2,7\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\}$.

Entonces para calcular las centralidades de este conjunto de vertices procedimos del siguiente modo: cada hipergrafo generado (uno por época) proporciona valores de centralidad para estos 21 vértices. Dado que se tienen $N = 100$ épocas por estado y por animal, se calcula el valor promedio de centralidad para cada vértice $v \in \mathscr{V}$, por cada animal i y estado j. Denotando la centralidad del vértice v en la k-ésima época como $d(v)_{i,j,k}$, el promedio se obtiene como

$$\bar{d}(v)_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} d(v)_{i,j,k}$$

donde

- $\bar{d}(v)_{i,j}$ es el valor promedio de la centralidad del vértice v para el i-ésimo animal en el j-ésimo estado de sueño,
- $d(v)_{i,j,k}$ es el valor de la centralidad del vértice v en la k-ésima época.

Este cálculo se realiza para los 21 vértices, para los 9 animales y para cada uno de los estados de sueño. Así, para cada estado j y cada animal i, se obtiene el conjunto de valores promedios

$$\bar{d}(v)_{i,j} = \left(\bar{d}(v_1)_{i,j}, \bar{d}(v_2)_{i,j}, \ldots, \bar{d}(v_{21})_{i,j}\right)$$

Este conjunto de 21 valores representa el perfil de centralidad de vértices del hipergrafo para el animal i en el estado j, y se utilizo para realizar comparaciones estadísticas entre estados

utilizando el test Kruskal-Wallis y posteriormente un análisis post-hoc con corrección de Dunn. Realizamos un filtrado de las centralidades de vertces a valores mayores iguales a 2.8 para mostrar los vértices que están conectados en más de tres bandas. En la Figura 6.10D, se observa que las regiones visuales y olfativas mostraron una fuerte conectividad durante la vigilia y el REM. En contraste, NREM mostró una reducción marcada de conectividad, particularmente con la pérdida de conexiones en las áreas visuales (V2l), mientras que la conectividad del bulbo olfatorio (OB) con (S1r) se intensificó. Estos hallazgos se alinean con estudios previos, que destacan el papel de estas regiones en el mantenimiento de funciones cognitivas durante la vigilia y el REM. La Figura 6.10E revela distinciones claras entre los estados de sueño en términos de distancias de entropía espectral, hiperaristas y centralidad de vértices. Los estados de vigilia y REM están estrechamente alineados, con la mayor distancia observada entre NREM y vigilia/REM. Estas métricas capturan eficazmente las diferencias en la dinámica neuronal a lo largo del ciclo del sueño.

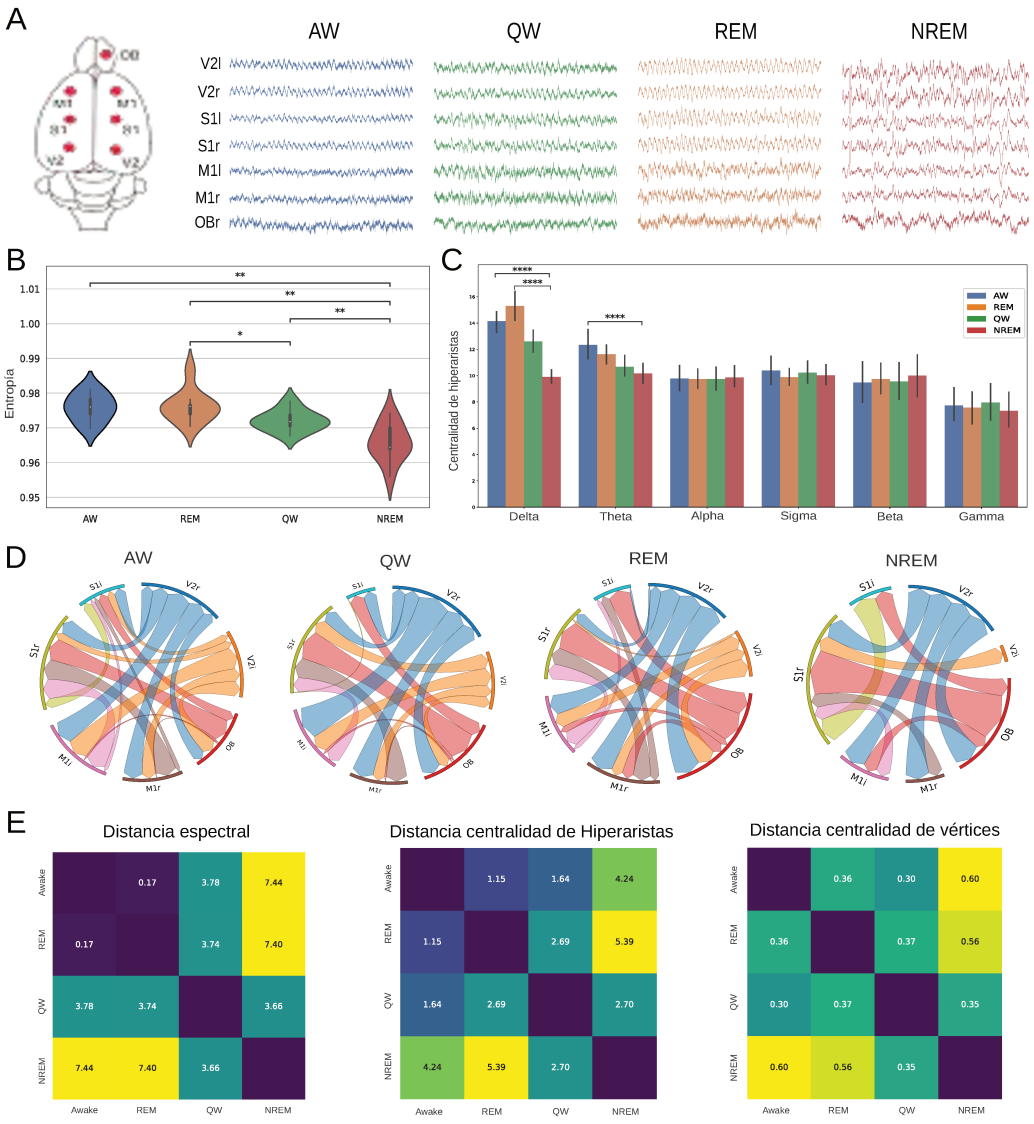


Figura 6.10: Estudio de las interacciones de orden superior (HOI) mediante análisis de hipergrafos en la dinámica de redes neuronales a lo largo de diferentes etapas del sueño en ratas. **A)** Posiciones topológicas de registro en áreas corticales de ratas (panel izquierdo) y ejemplo de datos crudos registrados en las cuatro etapas del sueño (panel derecho). **B)** Análisis de entropía espectral a lo largo de los diferentes estados del sueño. Cada diagrama de violín muestra los valores de entropía para animales individuales, calculados sobre 100 épocas por estado del sueño. Las comparaciones estadísticas entre estados se realizaron mediante la prueba de Kruskal-Wallis, con la corrección de comparaciones múltiples de Dunn indicando diferencias significativas: vigilia (AW) vs. NREM $**$ $p = 2 \times 10^{-3}$, REM vs. QW $*$ $p = 3 \times 10^{-2}$; REM vs. NREM $**$ $p = 1 \times 10^{-3}$, y QW vs. NREM $**$ $p = 9 \times 10^{-3}$. **C)** Comparación de la centralidad de hiperaristas entre diferentes bandas de frecuencia de iEEG. Los resultados del test de Kruskal-Wallis indican diferencias significativas en la banda delta: vigilia vs. NREM $****$ $p = 9 \times 10^{-4}$ y REM vs. NREM $****$ $p = 3 \times 10^{-5}$; y en la banda theta: AW vs. NREM $*$ $p = 3 \times 10^{-2}$, basadas en la prueba de Kruskal-Wallis con corrección de Dunn para comparaciones múltiples. **D)** Centralidad de grado de vértice entre diferentes estados. Esta métrica representa las conexiones entre nodos vinculados a través de tres o más bandas de frecuencia. El grosor de las flechas indica la fuerza de la conexión. **E)** Medidas de distancia de hipergrafo aplicadas entre los estados del sueño: entropía espectral, centralidad de hiperaristas y centralidad de vértices (de izquierda a derecha).

6.2.2. Diferenciación de pacientes con distintos tipos de epilepsia

El segundo ejemplo donde se aplicó nuestro método involucró un estudio y comparación de la dinámica cerebral en pacientes con diferentes tipos de epilepsia, analizando eventos intericticales. Comprender la dinámica de varios tipos de epilepsias es esencial para mejorar el diagnóstico, tratamiento y detección de la enfermedad. Esto permite terapias personalizadas, evita clasificaciones erróneas y revela los mecanismos neuronales subyacentes de las crisis. En última instancia, esto contribuye a un mejor manejo de la epilepsia y avances en la investigación y tratamiento.

El conjunto de datos utilizado en este análisis es un conjunto de datos de electroencefalografía (EEG) de código abierto proveniente de [92]. Contiene registros de pacientes en la Unidad de Monitoreo de Epilepsia del Centro Médico de la Universidad Americana de Beirut. Estos pacientes fueron diagnosticados con epilepsia focal y se sometieron a evaluaciones prequirúrgicas con monitoreo video-EEG a largo plazo para evaluar su idoneidad para la cirugía de epilepsia. Durante esta evaluación, se suspendieron los medicamentos antiepilépticos para capturar crisis naturales. Los datos EEG fueron registrados usando 19 electrodos en el cuero cabelludo, siguiendo el sistema de colocación de electrodos $10-20$, con una tasa de muestreo de 500 Hz. Los conjuntos de datos fueron preprocesados con un filtro pasa banda entre 1/1.6 Hz y 70 Hz, excluyendo la frecuencia de línea eléctrica de 50 Hz.

Las señales se segmentaron en intervalos de un segundo, resultando en una matriz de 19×500 por datos. Médicos expertos clasificaron las señales en cuatro categorías: **Datos Intericticales (INIC)**: señales en estado de reposo sin crisis. **Crisis Parciales Complejas (CPS)**: crisis con actividad ictal focal clara en el EEG y síntomas clínicos, como alteración de la conciencia o automatismos. Crisis **Electrográficas (ES)**: crisis detectadas solo por EEG, sin síntomas clínicos observables, pero con clara actividad epiléptica en el EEG. Crisis Detectadas por Video sin **Cambio Visual en EEG (VSNV)**: síntomas clínicos visibles capturados en video, pero sin cambios correspondientes en el EEG, lo que sugiere actividad no epiléptica o actividad no detectable por EEG superficial. Para cada segmento, las señales fueron filtradas en las siguientes bandas de frecuencia: $\delta\,[1,4]$ Hz, $\theta\,[4,8]$ Hz, $\alpha\,[8,12]$ Hz, $\sigma\,[12,15]$ Hz, $\beta\,[15,24]$ Hz, y $\gamma[38,42]$ Hz. A cada segmento se le aplicó el método de construcción de hipergráficos descrito en la Sección 6.1, utilizando los cuantificadores de la Sección 4.3.

La Figura 6.11B muestra el análisis de entropía entre los diferentes tipos de crisis. Los grupos CPS y ES exhibieron una entropía significativamente mayor que los grupos INIC y VSNV. Sin embargo, no se encontró diferencia significativa entre CPS y ES ni entre VSNV e INIC. Para estudiar la centralidad de hiperaristas, se observa que en la banda Delta (Fig. 6.11C), el grupo CPS tuvo los valores más altos de centralidad, con diferencias estadísticamente significativas en comparación con los grupos INIC y ES. Se observó una tendencia a valores más altos en el grupo VSNV, aunque esto no fue estadísticamente significativo. En cuanto a la banda Theta, el grupo CPS mostró valores significativamente más altos que los grupos INIC, ES y VSNV. En la banda Alfa, el grupo INIC tuvo valores más altos que el grupo CPS, mientras que el grupo ES mostró valores significativamente mayores que CPS. En la banda Sigma, solo se observaron diferencias significativas entre los grupos INIC y CPS. No se encontraron diferencias significativas en la banda Beta. Finalmente, en la banda Gamma, el grupo CPS mostró valores más altos comparado con el grupo INIC.

Para el análisis de centralidad de grado de vértice, se aplicaron los mismos criterios que la aplicación anterior. Los diagramas circulares ilustran las interacciones entre canales conectados en tres o más bandas (Fig. 6.11C). En el grupo INIC, tres electrodos (Fp2, T6, O2) no cumplieron el criterio de estar conectados en un promedio de más de 3 bandas de frecuencia. Los electrodos Fz y C4 presentaron el mayor número de conexiones con otros electrodos en este grupo. En contraste, los tres grupos epilépticos (CPS, ES, VSNV) mostraron más co-

nexiones entre canales que el grupo INIC. El grupo CPS demostró una conectividad amplia en todos los electrodos, con especial fuerza en las regiones frontales. El grupo ES mostró un patrón similar, pero con menos conexiones entre los electrodos Fp2 y Fp1 en comparación con otras regiones. El grupo VSNV presentó menos conexiones, especialmente en los electrodos Fp2, Fp1 y Fz, comparado con los otros grupos epilépticos.

La Figura 6.11E ilustra las tres distancias utilizadas en este estudio entre los grupos de crisis y los eventos intericales. El análisis de distancia espectral mostró que los grupos CPS y ES eran los más cercanos en términos de similitud espectral, mientras que ambos eran significativamente diferentes de los grupos VSNV e INIC. Los grupos VSNV e INIC exhibieron distancias más pequeñas entre ellos. La distancia basada en la centralidad de hiperaristas mostró que VSNV e INIC eran los grupos más similares, a diferencia de la medida de distancia espectral, que permitió distinguir entre CPS y ES. Por último, la centralidad de vértices reflejó la métrica de distancia espectral, aunque los valores relativos de distancia entre grupos fueron menores.

Este análisis resalta patrones distintos de dinámica cerebral entre los diferentes tipos de crisis, enfatizando el potencial de los métodos basados en hipergrafos para revelar mecanismos neuronales subyacentes y ofrecer nuevas perspectivas para el diagnóstico y tratamiento de la epilepsia.

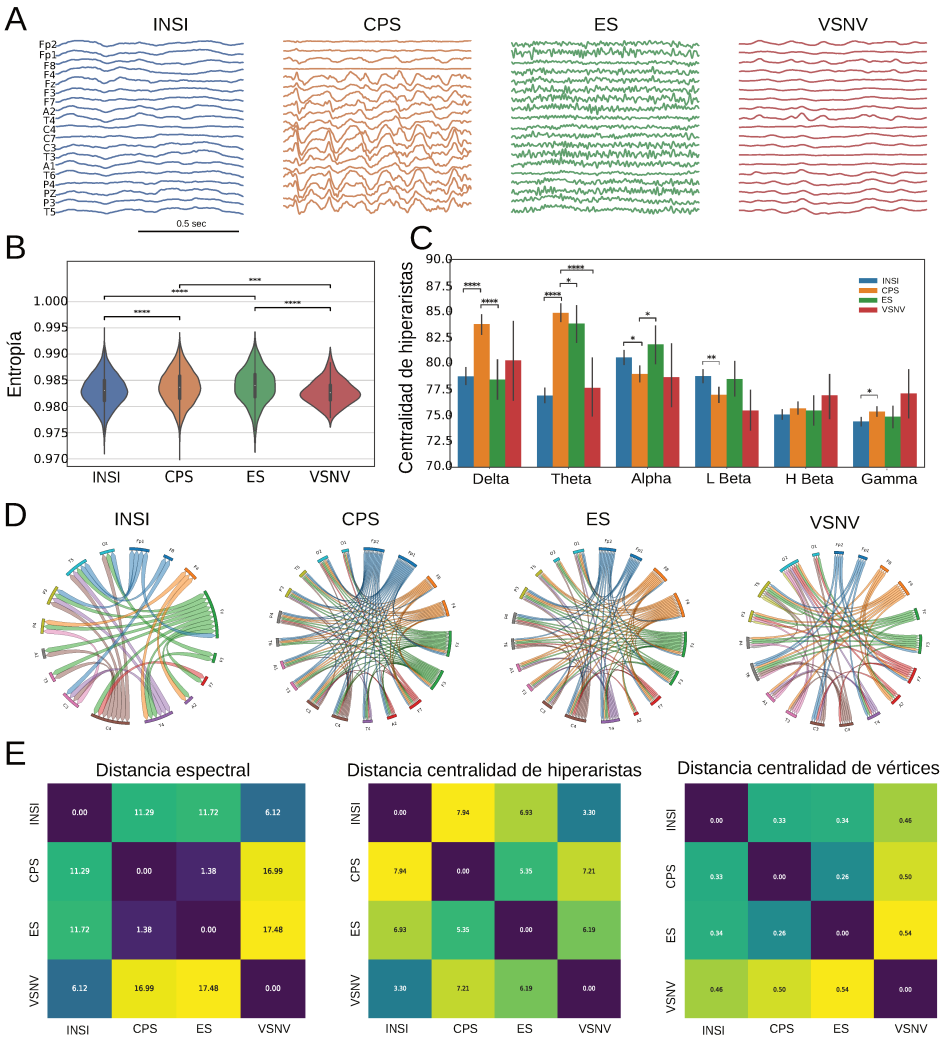


Figura 6.11: Estudio del análisis de hipergrafos en pacientes con diferentes tipos de epilepsia: (INIC) datos intericticales sin crisis, (CPS) crisis parciales complejas, (ES) crisis electrográficas, y (VSNV) crisis detectadas por video sin cambios visuales en el EEG. **A)** Ejemplo de registro de datos crudos de EEG correspondiente a cada grupo. **B)** Análisis de entropía espectral entre los diferentes estados. El diagrama de violín muestra los valores promedio de entropía sobre $N_{INIC} = 3895$, $N_{CPS} = 3034$, $N_{ES} = 705$ y $N_{VSNV} = 111$ épocas. La comparación estadística entre estados se realizó mediante la prueba de Kruskal-Wallis, con las siguientes diferencias significativas según la prueba de comparaciones múltiples de Dunn: INIC vs CPS $****p = 1{,}0 \times 10^{-7}$, INIC vs ES $*p = 3{,}0 \times 10^{-6}$; CPS vs VSNV $*p = 2{,}5 \times 10^{-2}$, y ES vs VSNV $***p = 2{,}0 \times 10^{-4}$. **C)** Comparación de la centralidad de hiperaristas entre las diferentes bandas de EEG. En la banda delta (prueba de Kruskal-Wallis), se observaron diferencias significativas entre INIC vs CPS $****p = 1{,}6 \times 10^{-12}$ y CPS vs ES $****p = 5{,}0 \times 10^{-6}$; en la banda theta, INIC vs CPS $****p < 1{,}0 \times 10^{-5}$, CPS vs ES $****p = 2{,}0 \times 10^{-6}$ y CPS vs VSNV $*p = 3{,}0 \times 10^{-2}$; en la banda alfa, INIC vs CPS $*p = 3{,}0 \times 10^{-2}$ y CPS vs ES $*p = 2{,}5 \times 10^{-2}$; en la banda sigma, INIC vs CPS $**p = 1{,}3 \times 10^{-3}$; y en la banda gamma, INIC vs CPS $**p = 1{,}7 \times 10^{-2}$, todas basadas en la prueba de comparaciones múltiples de Dunn. **D)** Análisis de la centralidad de grado de vértice, que muestra la relación entre canales que, en promedio, presentan conectividad en tres o más bandas de frecuencia. **E)** Medidas de distancia utilizadas en este trabajo: entropía espectral, centralidad de hiperaristas y centralidad de vértices (de izquierda a derecha) .

6.2.3. Detección dinámica de crisis

En el tercer ejemplo, caracterizamos la evolución de las interacciones de orden superior durante las transiciones ictales en dos casos de epilepsia generalizada. Se analizaron dos pacientes: el **Paciente 1**, diagnosticado con epilepsia generalizada primaria, y el **Paciente 2**, con epilepsia generalizada secundaria. Ambos pacientes fueron sometidos a registros de magnetoencefalografía (MEG) durante los periodos interictal (en reposo) e ictal (crisis). Las grabaciones se realizaron con un sistema MEG de 144 canales y una frecuencia de muestreo de 625 Hz. Un ejemplo de un canal individual de la señal MEG se muestra en la Figura 6.12 A.

El objetivo principal fue evaluar los cambios de nuestros cuantificadores, en particular la entropía, durante los periodos interictal, ictal y postictal. Para ello, empleamos el metodo para construir hipergrafos multicapas y aplicamoslos cuantificadores definidos en la Capitulo 4 Sección 4.3 y 4.4, con el fin de capturar la dinámica de las señales MEG. La dimensionalidad de los datos se redujo seleccionando 42 de los 144 canales de MEG para cada paciente, asegurando una distribución uniforme a lo largo de la corteza cerebral. La señal original de MEG se dividió en 30 segmentos no superpuestos, cada uno con una duración de 4 segundos (2500 puntos de datos por segmento). Para cada segmento, se construyó un hipergrafo multicapa, resultando en un total de 30 hipergrafos para toda la duración del registro. Las bandas de frecuencia utilizadas para el filtrado de las señales y la construcción de las capas fueron: $\delta[1,4]$ Hz, $\theta[4,8]$ Hz, $\alpha[8,12]$ Hz, $\beta_{\text{low}}[12,16]$ Hz, $\beta_{\text{high}}[20,24]$ Hz y $\gamma[38,42]$ Hz.

La Figura 6.12 B ilustra la dinámica de la entropía a lo largo de las 120 ventanas para ambos pacientes. En el Paciente 1, la entropía durante el estado basal (0–95 segundos) se mantuvo estable, fluctuando dentro de un rango estrecho de [0.984, 0.988]. En el segundo 97, coincidiendo con el inicio de la crisis epiléptica, se observó un aumento pronunciado de la entropía, alcanzando un máximo de 0.994. Tras la finalización de la crisis (110 segundos), la entropía retornó a los niveles basales previos. El Paciente 2 mostró una mayor variabilidad basal (0–43 segundos), con valores de entropía entre [0.985, 0.988]. En el momento del inicio de la crisis (44 segundos), la entropía aumentó abruptamente hasta 0.992. Cabe destacar una disminución transitoria previa al inicio de la crisis, mientras que las fluctuaciones postictales de la entropía se asemejaron a los patrones interictales.

En las Figuras 6.12C, 6.12D y 6.12E, se analiza además la evolución temporal mediante el cálculo de distancias entre hipergrafos en distintas ventanas de tiempo. Para este análisis, se fijó el hipergrafo correspondiente a la primera ventana ($\mathscr{H}_1$) y se calcularon las distancias entre $\mathscr{H}_1$ y los hipergrafos de las ventanas subsiguientes ($\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3, \ldots, \mathscr{H}_{120}$).

La Figura 6.12C muestra la distancia espectral para el Paciente 1, revelando desviaciones mínimas durante el periodo basal. Sin embargo, en el inicio de la crisis se observa un marcado incremento en la distancia espectral, que persiste durante toda la crisis. En el periodo postictal, la distancia retorna gradualmente a los niveles basales. Un patrón similar se observa en el Paciente 2, con un pico pronunciado coincidiendo con el inicio de la crisis.

La Figura 6.12D evidencia que la distancia entre hipergrafos presenta un comportamiento similar al de la distancia espectral en ambos pacientes. En el Paciente 1, la distancia de hiperaristas aumenta durante la crisis epiléptica y retorna a los niveles basales tras su finalización. El Paciente 2, por su parte, muestra un pico en el inicio de la crisis, pero los valores regresan rápidamente al estado interictal.

La Figura 6.12E muestra la distancia de centralidad de vértices, donde emerge un patrón diferente. No se observaron cambios significativos en ninguno de los pacientes.

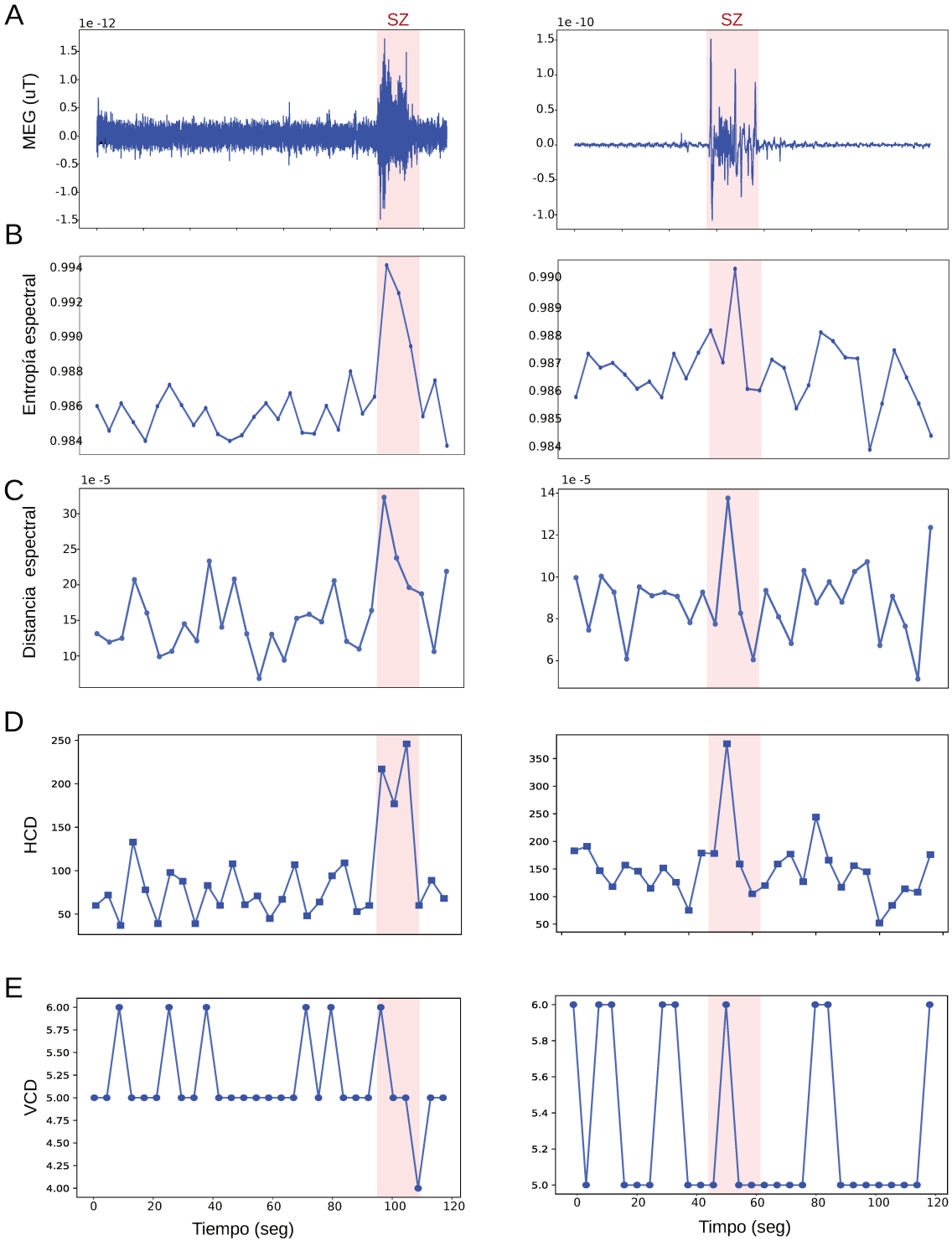


Figura 6.12: Estudio de los cambios en la dinámica neuronal durante dos crisis epilépticas. La columna izquierda corresponde al Paciente 1, quien presenta epilepsia generalizada (tipo de crisis 1), y la columna derecha corresponde a un paciente con epilepsia generalizada (tipo de crisis 2). Cada punto en el análisis representa una ventana de 4 segundos de datos registrados. El recuadro sombreado define el inicio y el final de la crisis. **A)** Señal cruda de un solo canal de datos MEG, donde la barra roja indica el período ictal. **B)** Entropía espectral calculada sobre 120 ventanas. **C)** Distancia espectral entre la primera ventana y las ventanas subsiguientes. **D)** Similar a C, pero utilizando la distancia de centralidad de hiperaristas (HCD). **E)** Similar a C, pero utilizando la distancia de centralidad de vértices (VCD).

6.3. Discusión

La teoría de Interacción de Orden Superior (HOI, por sus siglas en inglés), tal como se aplica en este estudio, proporciona un marco poderoso para capturar las relaciones complejas y multidimensionales inherentes a los datos neurocientíficos. A diferencia de los métodos tradicionales basados en grafos que dependen de interacciones por pares, HOI permite el análisis de dependencias no lineales e intrincadas entre múltiples componentes. Este enfoque demostró ser particularmente efectivo para abordar los desafíos de alta dimensionalidad planteados por los conjuntos de datos neurofisiológicos modernos, como las señales EEG y MEG [93]. Un método comúnmente utilizado para analizar interacciones de orden superior (HOIs) en diferentes sistemas es la teoría de hipergrafos. Este enfoque ofrece un marco versátil y poderoso para interpretar relaciones complejas y multidimensionales en una variedad de campos. Aquí, aplicamos la teoría de hipergrafos para analizar HOI en señales electrofisiológicas multidimensionales. Los hipergrafos se construyeron a partir de grafos simples generados a través del análisis de conectividad en diferentes bandas de frecuencia electrofisiológicas.

El análisis de las etapas del sueño mediante la teoría de hipergrafos revela valiosos conocimientos sobre la dinámica cerebral. Al examinar la entropía espectral, la centralidad de las hiperaristas y la centralidad de los vértices, podemos distinguir entre los diferentes estados del sueño. La vigilia y el sueño REM exhiben similitudes en la entropía y la centralidad de los vértices, un hallazgo consistente con estudios previos que vinculan estos estados con un procesamiento cognitivo más elevado y una mayor actividad cerebral [94, 95]. Se observa que tanto la vigilia como el sueño REM muestran valores más altos de entropía en comparación con el sueño NREM, especialmente en las etapas más profundas, como el sueño de ondas lentas (SWS), que se asocia con ondas cerebrales de baja frecuencia más sincronizadas, como las ondas delta [96]. Esta reducción en la complejidad neural está asociada con los procesos restauradores, la conservación de energía y la poda sináptica del sueño NREM [97, 98].

Un análisis adicional de la centralidad del grado de los vértices revela patrones distintos de conectividad a través de las regiones cerebrales durante las diferentes etapas del sueño. Las regiones visual y olfativa, por ejemplo, desempeñan roles prominentes en la vigilia y el sueño REM, lo cual es consistente con hallazgos previos [99, 100, 101]. En contraste, el sueño NREM muestra una conectividad reducida en estas regiones, lo que concuerda con estudios anteriores que indican una comunicación neural simplificada durante estas fases restauradoras [102, 103]. A continuación, la distancia entre hipergrafos ofrece una capa adicional de información. El análisis de la entropía espectral, la centralidad de las hiperaristas y la centralidad de los vértices a través de los diferentes estados del sueño revela diferencias clave en la dinámica neural. Por ejemplo, la similitud cercana entre la vigilia y el sueño REM refleja patrones de actividad neural compartidos, lo cual es consistente con investigaciones previas [104]. En contraste, la mayor distancia entre el sueño NREM y tanto la vigilia como el sueño REM sugiere diferencias pronunciadas en la función neural durante el sueño NREM, como se ha mostrado en estudios anteriores [105]. Una observación interesante es que, en ratas, incluso los electrofisiólogos experimentados a veces encuentran desafiante distinguir la vigilia tranquila (QW) de un estado de sueño ligero. Es decir, algunos episodios podrían representar estados transicionales. Sin embargo, en este estudio, hemos demostrado que la QW puede diferenciarse de manera confiable tanto del sueño REM como del sueño NREM a través de todos los cuantificadores.

En nuestro segunda aplicación, analizamos diferentes tipos de crisis. Clínicamente, la diferenciación entre los tipos de crisis—Crisis Parcial Compleja (CPC), Crisis Electrográficas (CE) y Crisis Detectadas por Video sin Cambio Visual en el EEG (VSNV)—está bien esta-

blecida [106, 107, 108]. Sin embargo, los estudios comparativos que exploran la dinámica y el comportamiento colectivo de las señales en estas categorías son limitados, lo que dificulta la contextualización de nuestros resultados. Nuestro análisis encontró que las métricas de entropía y centralidad de las hiperaristas proporcionan información importante sobre los mecanismos neuronales subyacentes a estos tipos de crisis. La entropía espectral, por ejemplo, fue significativamente más alta en los grupos CPC y CE en comparación con los grupos INIC (interictales) y VSNV. La mayor entropía en el Laplaciano indica una distribución más uniforme de los autovalores, lo que sugiere una conectividad más homogénea entre las bandas de frecuencia. Esto concuerda con investigaciones previas que muestran una reducción de la variabilidad en la dinámica neural durante las crisis [109]. El análisis de las distancias entre hipergrafos mejoró aún más la discriminación entre los grupos de crisis. La distancia espectral, por ejemplo, distinguió de manera efectiva entre CPC y CE, mientras que la centralidad de las hiperaristas destacó similitudes entre los grupos VSNV e INIC. Estas medidas complementarias proporcionan una comprensión más integral de la dinámica de las crisis, lo que podría mejorar la precisión diagnóstica.

En el contexto de la detección dinámica de crisis, los resultados demuestran que el análisis de hipergrafos multicapas puede caracterizar eficazmente los cambios dinámicos en las señales MEG. El uso de entropía y las tres distancias introducidas proporcionaron valiosos conocimientos sobre la evolución temporal de la actividad cerebral durante las diferentes fases de la crisis: basal (reposo), ictal (crisis) y postictal (recuperación). En ambos pacientes, la entropía aumentó significativamente durante el inicio de la crisis, lo que es consistente con investigaciones previas que sugieren que la actividad de las crisis a menudo resulta en una mayor y más uniforme conectividad entre las bandas de frecuencia. Esto se refleja en una distribución más normal de los autovalores del Laplaciano. En el Paciente 1, el aumento abrupto de la entropía durante la fase ictal, seguido de un retorno a los niveles cercanos a la línea base después de la crisis, indica un cambio claro en la dinámica cortical durante el evento de crisis. Este patrón sugiere que la entropía podría servir como un indicador confiable para detectar el inicio y la cesación de la crisis en la epilepsia primaria generalizada. En el Paciente 2, el aumento de la entropía fue menos pronunciado pero aún observable, lo que sugiere que la entropía también puede capturar cambios dinámicos en la epilepsia secundaria generalizada. El análisis de las distancias entre hipergrafos respalda aún más estos hallazgos. Las tres medidas de distancia capturaron eficazmente los cambios en la dinámica de la red para el Paciente 1. La persistencia de distancias elevadas durante la crisis y su retorno a la línea base postictal refuerza la idea de que las crisis inducen aumentos a gran escala en la conectividad funcional del cerebro [110]. Para el Paciente 2, sin embargo, estas medidas de distancia no detectaron cambios significativos durante el evento de crisis. Esta discrepancia puede explicarse por la naturaleza diferente de las crisis en la epilepsia primaria y secundaria generalizada. En la epilepsia primaria generalizada, las crisis se originan simultáneamente en ambos hemisferios del cerebro, a menudo debido a factores genéticos, y se caracterizan por una pérdida repentina de la conciencia [111]. En contraste, la epilepsia secundaria generalizada comienza con una crisis focal, que luego se propaga para involucrar ambos hemisferios, generalmente como resultado de anormalidades cerebrales estructurales, y se caracteriza por patrones de crisis más graduales y en evolución [111]. Estas diferencias en la naturaleza de la epilepsia pueden explicar las variaciones en el comportamiento de los cuantificadores entre los dos pacientes.

En este estudio, empleamos una única métrica de conectividad entre bandas, el Índice de desfasaje (PLI), ya que es óptimamente adecuado para señales que han sido filtradas en bandas de frecuencia. No obstante, se podrían emplear métricas alternativas de conectividad, como coherencia, información mutua y entropía cruzada, para cada banda de frecuencia. Además, se piensa que esta metodología puede extenderse al análisis de señales fMRI, a pesar de que

las señales fMRI no pueden separarse en bandas de frecuencia de la misma manera que EEG o MEG. Alternativamente, se pueden generar capas distintas mediante el uso de diferentes métricas de correlación entre regiones de interés (ROIs), que incluyen correlación de Pearson, información mutua o alguna divergencia. Cada métrica ofrece una perspectiva distinta sobre las interconexiones entre los ROIs. Posteriormente, se pueden construir y analizar hipergrafos de manera análoga a la empleada en este estudio. Estas ideas se implementarán en trabajos futuros. Además, en el futuro, tenemos la intención de desarrollar y aplicar métricas adicionales a los hipergráficos para determinar si se puede extraer más información. En particular, nuestro objetivo es examinar el espectro Laplaciano y las métricas asociadas que puedan ofrecer una visión más precisa que la entropía, con un enfoque en las variaciones locales en los autovalores Laplacianos. Asimismo, tenemos la intención de aplicar estas métricas a otros desafíos, como la detección temprana de la enfermedad de Alzheimer o el Parkinson a través del análisis de señales EEG o MEG. El método de hipergrafos introducido en este trabajo permite la extracción de información de orden superior, que podría utilizarse como cuantificadores en modelos de aprendizaje profundo. Estas son áreas que planeamos explorar en el futuro cercano.

6.4. Conclusión

Este estudio demuestra el valor de la teoría de Interacción de Orden Superior (HOI, por sus siglas en inglés), especialmente a través del análisis de hipergrafos, para descubrir patrones complejos y multidimensionales dentro de los datos neurocientíficos. Al aplicar la teoría de hipergrafos para analizar la dinámica cerebral en diferentes estados, como las fases de sueño y de convulsión, el estudio revela distinciones significativas en la conectividad neural y la entropía que los métodos tradicionales basados en interacciones de a pares podrían pasar por alto. Este hallazgo resalta la capacidad de HOI para refinar nuestra comprensión del comportamiento neural, ofreciendo un marco robusto para futuros estudios sobre la conciencia y, potencialmente, mejorando la precisión diagnóstica en condiciones neurológicas. Varios de estos resultados fueron publicados en la revista publicado en la revista **Biomedical Signal Processing and Control** [112].

Capítulo 7

Construcción de hipergrafos usando correlaciones múltiples

7.0.1. Introducción

A partir de un conjunto de datos, es posible detectar interacciones de orden superior mediante el uso de hipergrafos, como vimos en las secciones anteriores. Un caso particular de estos son los hipergrafos k-regulares, definidos en el Capítulo 4. A diferencia de los hipergrafos tradicionales, en los que las hiperistas pueden conectar un número variable de nodos, los hipergrafos k-regulares tienen la particularidad de que todas sus hiperistas conectan exactamente el mismo número de nodos. Cada hiperarista tiene el mismo cardinal. Esta propiedad resulta especialmente útil para capturar relaciones multivariadas de orden fijo en datos de alta dimensión. Para identificar dichas relaciones, los métodos de multi-correlación se presentan como herramientas fundamentales, ya que permiten cuantificar la dependencia conjunta entre múltiples variables de manera simultánea y se adecuan al análisis temporal de cualquier orden.
Este enfoque trasciende el análisis de correlaciones bivariadas convencionales, incorporando información sobre patrones de interdependencia que sólo emergen al considerar combinaciones de más de 2 variables. A través de la identificación de grupos de variables que presentan una correlación significativa, se definen las hiperaristas que conforman la estructura del hipergrafo k-regular.
La construcción de modelos basados en hipergrafos k-regulares no sólo proporciona una representación estructural de las interacciones complejas, sino que también facilita el análisis de sistemas donde las dependencias múltiples son críticas, como en neurociencia.

7.1. Multicorrelación n series temporales

7.1.1. Estandarización de series temporales

Sea $\mathbf{Y}$ un vector cuyas k componentes, $i = 1, ..., k$ son series temporales $Y_i(t)$ en un intervalo temporal dado I. Cuando ese intervalo se discretiza en n partes, tenemos entonces que es $\mathbf{Y}$ un campo vectorial con valores en $\mathbb{R}^k$ definido en $\mathbb{R}^n$ y podemos sintetizar $\mathbf{Y}$ en la

siguiente matriz

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ . \\ . \\ . \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k,1} & y_{k,2} & \cdots & y_{k,n} \end{bmatrix}$$

donde $y_{i,l} = Y_i(\Delta(t)l)$. Cuando pensamos a cada fila Y_i de $\mathbf{Y}$ como una variable aleatoria podemos estandarizarla de la manera usual. La media μ_i de la variable Y_i esta dada por

$$\mu_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{i,j}$$

y la desviación estándar σ_i de la variable Y_i

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{i,j} - \mu_i\right)^2}.$$

La estandarización(z-score) $s_{i,j}$ de cada observación Y_i esta dada por

$$s_{i,j} = \frac{y_{i,j} - \mu_i}{\sigma_i}.$$

De esta manera obtenemos la matriz estandarizada asociada a $\mathbf{Y}$ dada por

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k,1} & s_{k,2} & \cdots & s_{k,n} \end{bmatrix},$$

que tiene la media igual a 0 y varianza igual a 1. Cada fila corresponde a una variable estandarizada S_i. Cada columna es una observación estandarizada de las k variables. Las n observaciones son puntos en un espacio k-dimensional.

7.1.2. Proyección ortogonal en un hiperplano de $\mathbb{R}^k$

En esta sección repasaremos brevemente un concepto geométrico basico la proyección ortogonal en un hiperplano de $\mathbb{R}^k$. Sea

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b \tag{7.1}$$

la ecuación de un hiperplano donde $\mathbf{a}^\top = (a_1, \ldots, a_k)$ es un vector no nulo $\mathbf{x}^\top = (x_1, \ldots, x_k)$ es el vector de variables y b es un escalar fijo. El hiperplano es el conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}^k$ que satisfacen (7.1). Dado $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ existe un unico x^* en el hiperplano $a^\top x^* = b$ que está más cercano a $\mathbf{p}$, es decir que minimiza la distancia $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ condicionada por $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b$. La distancia mínima está definida como

$$D = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|, \quad \text{sujeto a } \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b.$$

Como la distancia euclidiana entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ está dada por $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{p})}$, para simplificar los cálculos, minimizaremos el cuadrado de la distancia

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{p}).$$

Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange escribimos $f(\mathbf{x},\lambda) = (\mathbf{x}-\mathbf{p})^T(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \lambda(\mathbf{a}^T\mathbf{x}-b)$. Derivamos $f(\mathbf{x},\lambda)$ con respecto a x_i

$$\frac{\partial f(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_i} = 2(x_i - p_i) + \lambda a_i.$$

El gradiente de f será entonces

$$\nabla f(\mathbf{x},\lambda) = 2(\mathbf{x}-\mathbf{p})^T + \lambda \mathbf{a}^T$$

Un punto $\mathbf{x}^*$ donde el mínimo se alcance, tendra que anular este gradiente

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{x}^*-\mathbf{p})^T + \lambda\mathbf{a}^T &= 0, \\ (\mathbf{x}^*-\mathbf{p}) &= -\frac{\lambda}{2}\mathbf{a}. \\ \mathbf{x}^* &= \mathbf{p} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{a} \end{aligned}$$

Sustituimos $\mathbf{x} = \mathbf{p} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{a}$ en $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ y obtenemos

$$\mathbf{a}^T\left(\mathbf{p} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{a}\right) = b,$$

de donde

$$\lambda = \frac{2(\mathbf{a}^T\mathbf{p}-b)}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}.} \tag{7.2}$$

De (7.2) y (7.3) tenemos

$$x^* = \mathbf{p} - \frac{(\mathbf{a}^T\mathbf{p}-b)\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}.$$

Para calcular

$$D^2 = \|x^* - \mathbf{p}\|^2,$$

Sustituyendo x^* en la expresión (7.4), tenemos

$$x^* - \mathbf{p} = \mathbf{p} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{a} - \mathbf{p} = -\frac{\lambda}{2}\mathbf{a} = -\frac{(\mathbf{a}^T\mathbf{p}-b)}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\ \mathbf{a}$$

Por lo tanto

$$D^2 = \|x^* - \mathbf{p}\|^2 = -\frac{(\mathbf{a}^T\mathbf{p}-b)^2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}. \tag{7.3}$$

El desarrollo anterior demuestra que la proyección ortogonal de un punto sobre un hiperplano puede obtenerse resolviendo un problema de minimización con restricción lineal. Este procedimiento permite expresar de forma analítica la posición del punto proyectado y la distancia mínima entre el punto y el hiperplano. En términos geométricos, evidencia que el vector que une ambos puntos es perpendicular al hiperplano, lo que constituye la base del concepto de proyección ortogonal en espacios de dimensión arbitraria. Ver Figura 7.1

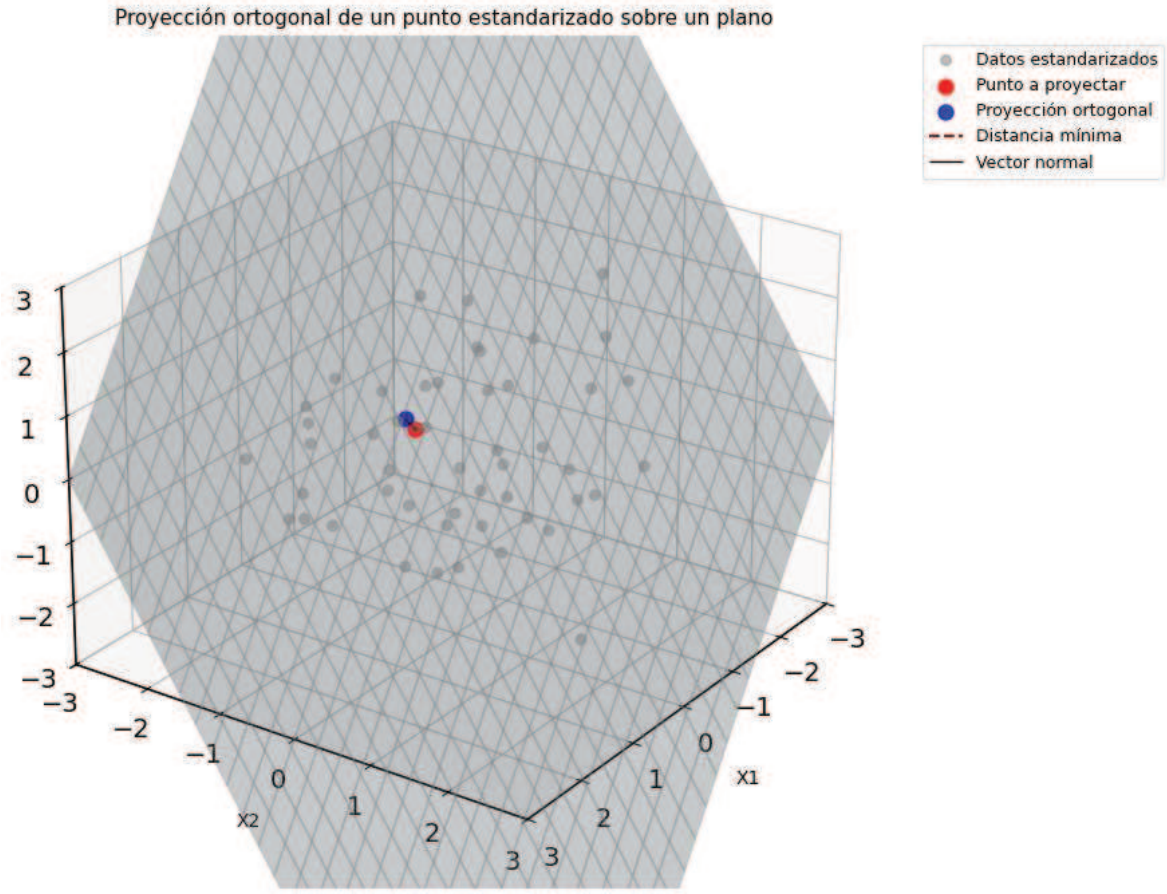


Figura 7.1: Proyección ortogonal sobre un plano.

7.1.3. Hiperplano óptimo asociado a vectores aleatorios

En la Subsección 7.1.1 , obtuvimos la estandarización del vector $\mathbf{Y}$ dada por la matriz

$$S = s_{i,j} = \frac{y_{i,j} - \mu_i}{\sigma_i}$$

Para j fijo entre 1 y n, la columna $\mathbf{p}_j = (s_{1,j}, .., s_{k,j})$ de S determina un vector de $\mathbb{R}^k$. Por la fórmula (7.1) dados $\mathbf{a}$ y b si D_j^2 denota la distancia al cuadrado de $\mathbf{p}_j$ al plano determinado por $\mathbf{a}$ y b está dada por

$$D_j^2 = \frac{(\mathbf{a}^\top \mathbf{p}_j - b)^2}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} (\sum_{i=1}^{k} a_i s_{i,j} - b)$$

Ahora buscamos un vector $\mathbf{a} \neq 0$ y un escalar b de modo que $\sum_{j=1}^{n} D_j^2$ sea mínima. El problema se reformula, entonces , de la siguiente manera minimizar

$$F(\mathbf{a}, b) = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{k} (a_i s_{ij} - b))^2 \tag{7.4}$$

la ecuacion (7.4) se rescribe en forma matricial

$$F(\mathbf{a}, b) = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \|S^\top \mathbf{a} - b\mathbf{e}\|^2,$$

Donde S es la matriz $(k \times n)$ estandarizada de las de observaciones, $\mathbf{a}$ y b son las variables independientes de F con $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k)$, $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{e} = (1, .., 1) \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte podemos reescribir la función $F(\mathbf{a}, b)$ de la siguiente forma

$$F(\mathbf{a}, b) = (S^\top \mathbf{a} - b\mathbf{e})^\top (S^\top \mathbf{a} - b\mathbf{e}) = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \left(\mathbf{a}^\top SS^\top \mathbf{a} - (S^\top \mathbf{a})^\top (b\mathbf{e}) - (b\mathbf{e})^\top (S^\top \mathbf{a}) + b^2 \mathbf{e}^\top \mathbf{e} \right)$$

Como $(S^\top \mathbf{a})^\top \mathbf{e} = \mathbf{e}^\top S^\top \mathbf{a}$
tenemos

$$F(\mathbf{a}, b) = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \left(\mathbf{a}^\top SS^\top \mathbf{a} - 2b\mathbf{e}^\top S^\top \mathbf{a} + b^2 \mathbf{e}^\top \mathbf{e} \right) \tag{7.5}$$

Una condición necesaria de minímo será entonces $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$. Como por (7.5)

$$F(\mathbf{a}, b) = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \left(\mathbf{a}^\top SS^\top \mathbf{a} - 2b\mathbf{e}^\top S^\top \mathbf{a} + b^2 \mathbf{e}^\top \mathbf{e} \right)$$

Tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \left(2b\mathbf{e}^\top \mathbf{e} - 2\mathbf{e}^\top S^\top \mathbf{a} \right)$$

Notemos ahora que como S está estandarizada sus filas tienen suma cero , por consiguiente $\mathbf{e}^\top S^\top$ es el vector nulo. De modo que $\frac{\partial F}{\partial b}$ se anulará sólo si $b = 0$. Por otra parte, con $b = 0$ la función $F(\mathbf{a}, 0)$ toma las forma simple

$$F(\mathbf{a}, 0) = F(\mathbf{a}) = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} (S^\top \mathbf{a})^\top (S^\top \mathbf{a}) = \frac{1}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \mathbf{a}^\top SS^\top \mathbf{a} \quad (6)$$

Que no es otra cosa que el cociente de Rayleigh cuyo mínimo produce el primer autovalor de las matriz $SS^\top$ que tiene un primer autovector $\mathbf{a}$. Asi tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7. *Sea* $\mathbf{Y} = (Y_1, ..Y_k)$ *un vector aleatorio cuya estandarización esta dada por la matriz S. Entonces* $\mathbf{a}$ *es el primer* ***autovector*** *de* $SS^\top$ *se tiene que el hiperplano*

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = 0\}$$

minimiza

$$\sum_{i=1}^{n} D_j^2$$

Obervando que las entradas de la matriz $k \times k$ dada por $R = SS^\top$ determinan la correlación entre las filas de S y que el primer autovector que provee el hiperplano del Teorema 7, corresponde al menor autovalor de R, $\lambda(R)$, que resulta ser menor que uno, es razonable construir umbrales a partir de la diferencias $1 - \lambda(R)$.

Definición 42. *El coeficiente de multicorrelación de Drezner de las variables aleatorias* $Y_1, \ldots, Y_k$ *se define como*

$$r(Y_1, \ldots, Y_k) = 1 - \lambda(R)$$

donde $\lambda(R)$ *es el menor autovalor de R.*

El coeficiente de multirrelación de Drezner [118] es una medida de la relación lineal entre todas las variables Y_i para $i = 1, \ldots, k$ y satisface todas las propiedades expuestas en la Proposicion 12.

Proposición 12. ***a)*** $0 \leq r(Y_1,\ldots,Y_k) \leq 1$

b) $r(Y_1,\ldots,Y_{k-1}) \leq r(Y_1,\ldots,Y_k)$.

c) *Sea Z un subconjunto de las variables $Y = (Y_1,\ldots,Y_k)$, para $Z \subset Y$, se cumple que*

$$r(Z) \leq r(Y).$$

$$r(Y_1,\ldots,Y_k) = 0 \iff r_{ij} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq k.$$

d)

$$r(Y_1,\ldots,Y_k) = 1 \iff \textit{algunos vectores son combinaciones lineales de los demás.}$$

Demostración.

$$(\text{Diag } S.S^\top)_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}s_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^{n} (s_{i,j} - \sum_{l=1}^{n} s_{i,l})^2 = 1$$

$$\sum_{\{\lambda \text{ autovalor de } R\}} \lambda = \text{Traza de } R = k$$

Notemos también que como R es definida positiva, todos los autovalores son no negativos. Si el primer autovalor de R fuera > 1 entonces todos los demas serian mayores que uno y $\sum_{\{\lambda \text{ autovalor de } R\}} \lambda > k$. Que es imposible. □

Demostración. El valor de $\lambda(R)$ para $(Y_1,\ldots,Y_{k-1})$ se obtiene minimizando (6) con la restricción adicional $a_k = 0$. Por lo tanto, $\lambda(R)$ para $(Y_1,\ldots,Y_{k-1})$ no puede ser menor que $\lambda(R)$ para el conjunto completo, y la proposición se cumple. □

Demostración. Si $r(Y_1,\ldots,Y_k) = 0$, entonces el menor autovalor de R es $\lambda(R) = 1$, lo que implica que todos los valores propios de R son al menos uno. Dado que la suma de los valores propios es k, todos los valores propios deben ser iguales a 1.Por lo tanto, R es la matriz identidad y $r_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Inversamente, si todos los $r_{ij} = 0$, entonces R es la matriz identidad y $\lambda(R) = 1$. □

Demostración. Si $r(Y_1,\ldots,Y_k) = 1$, entonces $\lambda(R) = 0$. Supongamos que el vector propio asociado a $\lambda(R)$ es v, entonces $Sv = \lambda(R)v = 0$, es decir, los vectores en S son linealmente dependientes, al igual que los vectores Y. Inversamente, si los vectores Y son linealmente dependientes, existe un vector v tal que $Sv = 0$. Esto implica que $F(v) = 0$. Por lo tanto, el mínimo de $F(a)$ en (6) es 0, lo que implica que $\lambda(R) = 0$. □

A partir de los resultados anteriores, podemos interpretar que el problema de determinar la multicorrelación entre un conjunto de variables aleatorias estandarizadas puede abordarse geométricamente como la búsqueda del hiperplano óptimo que minimiza la suma de las distancias cuadráticas de los puntos de observación a dicho hiperplano. Este planteo, basado en el trabajo de Drezner [118], permite expresar la dependencia lineal conjunta de las variables mediante el menor autovalor de la matriz de correlación $R = SS^\top$. El correspondiente coeficiente de multicorrelación $r(Y_1,\ldots,Y_k) = 1 - \lambda(R)$ cuantifica entonces la fuerza de la asociación lineal global entre las k variables consideradas.

La elección del menor autovalor en la definición del coeficiente de multicorrelación se fundamenta en el enfoque geométrico propuesto por Drezner [118]. Al representar las variables estandarizadas $Y_1,\ldots,Y_k$ como puntos en $\mathbb{R}^k$, el problema de cuantificar su dependencia lineal conjunta se traduce en encontrar el hiperplano que minimiza la suma de las distancias cuadráticas de los puntos a dicho hiperplano.

La resolución de este problema conduce a la ecuación de autovalores $R\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$, donde R es

la matriz de correlación. Cada autovalor λ_i representa la varianza explicada en una dirección ortogonal del espacio. El menor autovalor, $\lambda_{\text{mín}}(R)$, corresponde a la dirección de mínima variabilidad, es decir, a la orientación del hiperplano que mejor se ajusta a los datos. Por consiguiente, $\lambda_{\text{mín}}(R)$ cuantifica la parte de la variabilidad total que no puede ser explicada por una combinación lineal de las demás variables, de modo que valores pequeños de $\lambda_{\text{mín}}(R)$ indican una fuerte correlación conjunta entre las variables, mientras que valores cercanos a uno reflejan independencia lineal. Sobre esta base teórica, el coeficiente de Drezner ofrece una herramienta natural para extender el análisis de conectividad más allá de las relaciones por pares, permitiendo identificar grupos de variables (o nodos) que exhiben una correlación conjunta significativa. Esta propiedad resulta especialmente útil para la construcción de *hipergrafos k-regulares*, donde cada hiperarista representa una interacción simultánea entre k variables altamente correlacionadas.
A continuación, se presenta el algoritmo propuesto para la construcción de hipergrafos basados en multicorrelaciones, en el cual utilizanmos el coeficiente de multicorrelación.

Algoritmo para construir hipergrafos k-regulares utilizando multicorrelación

---

3 Construcción del hipergrafo basado en multicorrelaciones

1: Sea $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, matriz de datos con m observaciones y n variables.
2: Estandarizar D para obtener S.
3: Calcular la matriz $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como

$$R = SS^{\top},$$

donde $R_{i,j}$ es el producto interno entre variables normalizadas i y j.
4: Sea k tal que $2 \leq k \leq n$. Considerar todos los subconjuntos $W \in \mathscr{P}_k(\mathscr{V})$ donde $\mathscr{V} = \{1,\ldots n\}$ con $|\mathscr{P}_k(\mathscr{V})| = \binom{n}{k}$.
5: Para cada W, construir la submatriz R_W de R de tamaño $k\times k$ con elementos $r_{i,j}$, $i,j \in W$.
6: Calcular el primer autovalor λ_W^1 de R_W
7: Calcular el coeficiente de multicorrelación

$$\delta_W = 1 - \lambda_W^1,$$

donde λ_W^1 es el menor autovalor de R_W.
8: Definir el umbral

$$\tau(k) = \frac{\sum_{W\in\mathscr{P}_k(\mathscr{V})} \delta_W}{\binom{n}{k}}.$$

9: Construir el hipergrafo $\mathscr{H}_k$ con hiperaristas

$$\mathscr{E}(\mathscr{H}_k) = \{W \in \mathscr{P}_k(\mathscr{V}) : \delta_W > \tau(k)\}.$$

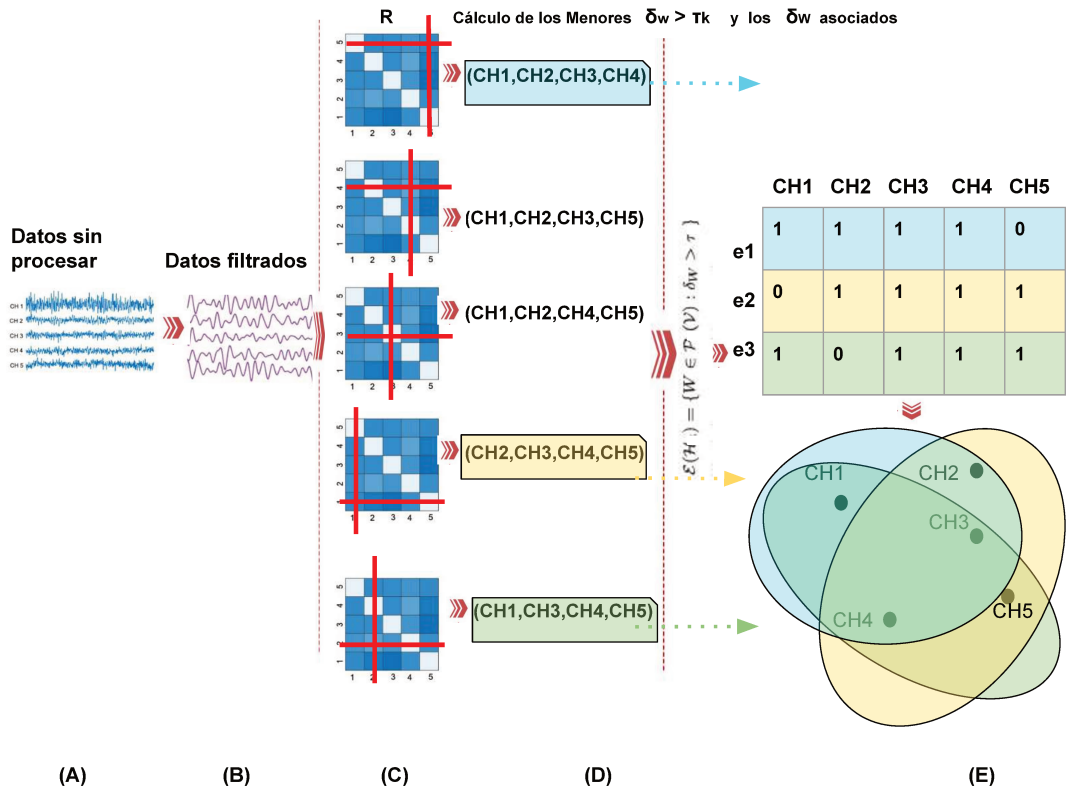


Figura 7.2: Esquema básico del método para construir hipergrafos k-regulares, en este caso particular el ejemplo es de un Hipergrafo 4-regular. A) datos sin procesar, B) datos filtrados, C) cálculo de menosres de orden 4, D) cálculo de los coeficientes de Drezner, E) cálculamos las hiperaristas del hipergrafo junto a su matriz de incidencia.

Ejemplo con estandarización de datos

Sea D la matriz de datos:

$$D = \begin{bmatrix} 0{,}4218 & 0{,}6557 & 0{,}6787 & 0{,}6555 & 0{,}5000 \\ 0{,}9157 & 0{,}0357 & 0{,}7577 & 0{,}1712 & 0{,}6000 \\ 0{,}7922 & 0{,}8491 & 0{,}7431 & 0{,}7060 & 0{,}7000 \\ 0{,}9595 & 0{,}9340 & 0{,}3922 & 0{,}0318 & 0{,}8000 \end{bmatrix}$$

1. Estandarización de los datos

Cada variable fue estandarizada mediante la transformación *Z-score*, que consiste en restar la media μ y dividir por la desviación estándar σ de cada columna:

$$s_{ij} = \frac{d_{ij} - \mu_j}{\sigma_j}, \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$$

La matriz estandarizada S es:

$$S = \begin{bmatrix} -1{,}3414 & 0{,}1751 & 0{,}3435 & 1{,}0925 & -1{,}3416 \\ -0{,}4471 & -1{,}5626 & 1{,}3121 & -0{,}2841 & -0{,}4472 \\ 0{,}4471 & 0{,}8111 & 1{,}1858 & 1{,}2715 & 0{,}4472 \\ 1{,}3414 & 0{,}5764 & -2{,}8414 & -2{,}0799 & 1{,}3416 \end{bmatrix}$$

2. Matriz de correlación R a partir de S

A partir de la matriz estandarizada, se obtiene la matriz de correlación $R = SS^\top$:

$$R = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & -0{,}6212 & -0{,}2327 & -0{,}5700 & -0{,}4123 \\ -0{,}6212 & 1{,}0000 & -0{,}1627 & 0{,}2152 & 0{,}3105 \\ -0{,}2327 & -0{,}1627 & 1{,}0000 & 0{,}9162 & 0{,}5234 \\ -0{,}5700 & 0{,}2152 & 0{,}9162 & 1{,}0000 & 0{,}4125 \\ -0{,}4123 & 0{,}3105 & 0{,}5234 & 0{,}4125 & 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

3. Cálculo de menores

Para $k = 3$, se consideran todos los menores R_W de orden 3 correspondientes a subconjuntos $W \subset \{1,2,3,4,5\}$ con $\#W = 3$.

Por ejemplo:

$$R_{\{1,2,3\}} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & -0{,}6212 & -0{,}2327 \\ -0{,}6212 & 1{,}0000 & -0{,}1627 \\ -0{,}2327 & -0{,}1627 & 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

y de manera análoga se construyen los restantes menores.

4. Índices de multi-correlación δ_W

Para cada combinación W, se calcula:

$$\delta_W = 1 - \lambda_{\text{mín}}(R_W),$$

donde $\lambda_{\text{mín}}(R_W)$ es el menor autovalor del menor R_W.

Por ejemplo:

$$\delta_{\{1,2,3\}} = 1 - \lambda_{\text{mín}}(R_{\{1,2,3\}}) = 1 - 0{,}2713 = 0{,}7287.$$

Los demás δ_W se calculan de forma análoga:

$$\begin{aligned} \delta_{\{1,2,3\}} &= 0{,}7287, & \delta_{\{1,2,4\}} &= 0{,}7430, \\ \delta_{\{1,2,5\}} &= 0{,}6334, & \delta_{\{1,3,4\}} &= 0{,}9859, \\ \delta_{\{1,3,5\}} &= 0{,}5664, & \delta_{\{1,4,5\}} &= 0{,}5700, \\ \delta_{\{2,3,4\}} &= 0{,}9885, & \delta_{\{2,3,5\}} &= 0{,}6882, \\ \delta_{\{2,4,5\}} &= 0{,}4296, & \delta_{\{3,4,5\}} &= 0{,}9251. \end{aligned}$$

5. Promedio de índices $\tau(3)$

Se obtiene el promedio de los índices de multi-correlación:

$$\tau(3) = \frac{1}{10} \sum_{W:\#W=3} \delta_W = 0{,}7259.$$

6. Construcción del hipergrafo $\mathscr{H}_3$

Se seleccionan como hiperaristas aquellas combinaciones W con $\delta_W > \tau(3)$. Por lo tanto:

$$\mathscr{E}(\mathscr{H}_3) = \{(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,3,4),\ (2,3,4),\ (3,4,5)\}.$$

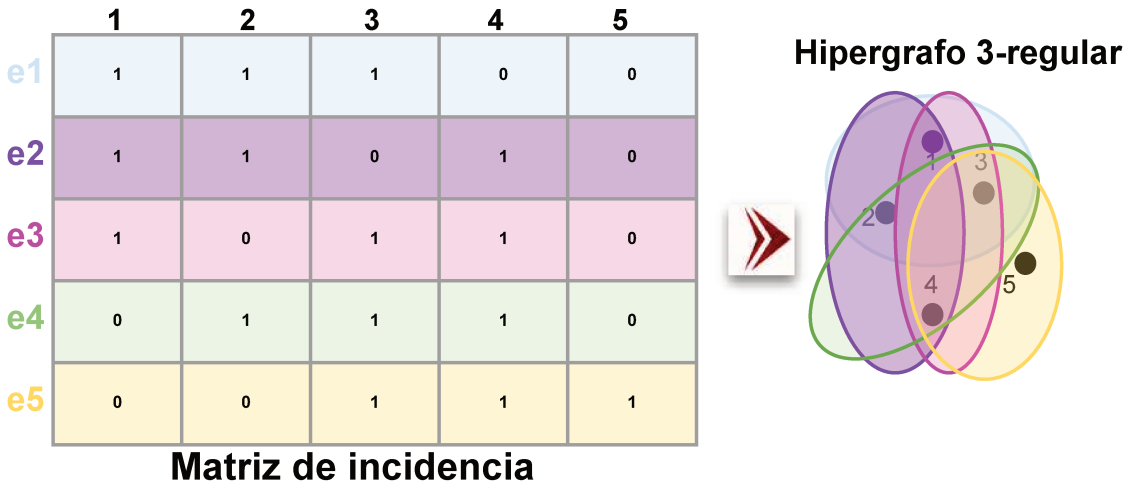


Figura 7.3: Hipergrafo asociado a la matriz de datos D que contiene 4 variables ($n = 4$), cada una con 5 mediciones ($m = 5$).

7.2. Aplicaciones: Estudio de enfermedades neurodegenerativas

7.2.1. Alzheimer

A nivel mundial, se estima que más de 55 millones de personas viven con demencia, y entre el 60 % y el 70 % de estos casos corresponden a la enfermedad de Alzheimer. Esto equivale a entre 33 y 39 millones de personas afectadas por esta patología neurodegenerativa [113].

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), cada año se registran cerca de 10 millones de nuevos casos de demencia. Se proyecta que, para el año 2050, el número total de personas con demencia alcanzará los 139 millones, impulsado principalmente por el envejecimiento de la población global [113]. La enfermedad de Alzheimer (EA), también conocida como demencia senil de tipo Alzheimer (DSTA), es la forma más común de demencia en personas mayores. Generalmente aparece a partir de los 65 años, aunque en casos poco frecuentes puede desarrollarse desde los 40 años.

Se trata de una enfermedad neurodegenerativa progresiva que se manifiesta a través del deterioro cognitivo, pérdida de memoria, alteraciones en el lenguaje, desorientación temporo-espacial, y cambios en el comportamiento. Con el tiempo, la enfermedad afecta gravemente la autonomía de la persona. Fue descrita por primera vez a principios del siglo XX por el neurólogo alemán Alois Alzheimer, quien identificó el primer caso en una mujer de 51 años llamada Auguste Deter. Auguste sufría pérdida de memoria de corto plazo, alucinaciones auditivas y deterioro funcional progresivo. Tras su fallecimiento, Alzheimer analizó su cerebro y observó dos tipos de anomalías estructurales: placas de **amiloide**, que son depósitos extracelulares de proteínas entre las neuronas, y ovillos neurofibrilares de proteína **tau** en el interior neuronal. Estas lesiones están asociadas a la pérdida sináptica, atrofia cortical y muerte neuronal [114, 115].

A pesar de los avances en la comprensión de la enfermedad, aún no existe una cura definitiva. Sin embargo, las investigaciones actuales se centran en terapias que puedan ralentizar su progresión o aliviar los síntomas cognitivos.

Recién en 1976, la enfermedad de Alzheimer fue reconocida como una forma prevalente de demencia, cuando el neurólogo Robert Katzman publicó un editorial en *Archives of Neurology*, advirtiendo que representaba un verdadero desafío para la salud pública [116].

Síntomas y progresión clínica del Alzheimer El Alzheimer comienza típicamente con dificultades para recordar hechos recientes (amnesia anterógrada), que se acentúan progresivamente y afectan otras funciones cognitivas. A medida que avanza la enfermedad, los pacientes pueden presentar

- Desorientación temporal y espacial
- Dificultades en el lenguaje (afasia)
- Problemas para realizar tareas complejas (apraxia)
- Alteraciones en la capacidad de juicio y razonamiento
- Cambios de personalidad y conductas sociales inapropiadas
- Etapas finales con pérdida de autonomía funcional total

Los síntomas progresan a lo largo de años, y el diagnóstico se apoya en criterios clínicos, neuropsicológicos y neuroimagen.

Cambios cerebrales asociados A nivel anatómico y funcional, la enfermedad se caracteriza por

- Atrofia cerebral, especialmente en el hipocampo y corteza entorrinal
- Disminución de la actividad metabólica cerebral observable por PET con fluorodeoxiglucosa (FDG)
- Presencia de placas de beta-amiloide y ovillos de tau en regiones corticales y límbicas
- Disminución en la transmisión colinérgica

Estos cambios estructurales y bioquímicos alteran la conectividad neuronal, afectando la plasticidad sináptica y la función cognitiva.

7.2.2. Demencia frontotemporal

La demencia frontotemporal (DFT) constituye un grupo de trastornos neurodegenerativos que afectan predominantemente los lóbulos frontal y temporal. A diferencia del Alzheimer, suele comenzar a edades más tempranas (entre los 45 y 65 años) y se manifiesta inicialmente con alteraciones en la personalidad, el comportamiento y el lenguaje, más que con pérdida de memoria. Existen variantes clínicas de la DFT:

- **Variante conductual:** marcada por desinhibición, apatía, pérdida de empatía, impulsividad y conductas compulsivas.
- **Afasia progresiva primaria (APP):** se subdivide en la variante semántica (dificultad para comprender palabras) y la no fluente (dificultad para articular frases).

En la DFT se observan inclusiones anómalas de proteínas como tau o TDP-43, y la neurodegeneración suele ser más focal que en el Alzheimer, afectando selectivamente las regiones frontotemporales del cerebro.

7.2.3. Deterioro Cognitivo Leve (DCL)

El Deterioro Cognitivo Leve, conocido por sus siglas en inglés *Mild Cognitive Impairment* (MCI), es una condición clínica caracterizada por un deterioro en una o más funciones cognitivas (como la memoria, la atención o el lenguaje), mayor al esperado para la edad y el nivel educativo del individuo, pero que no interfiere significativamente con las actividades de la vida diaria.
El DCL se considera una etapa intermedia entre el envejecimiento cognitivo normal y las demencias, en particular la enfermedad de Alzheimer. Aunque no todas las personas con DCL progresan a una demencia, se estima que entre un 10 % y un 15 % de los casos evolucionan anualmente hacia una demencia, especialmente si el déficit principal se encuentra en la memoria (DCL tipo amnésico).

- **Criterios diagnósticos:**
  - Quejas cognitivas referidas por el paciente o terceros
  - Preservación relativa de la funcionalidad cotidiana
  - Evidencia objetiva de deterioro en pruebas neuropsicológicas
  - Ausencia de demencia
- **Subtipos clínicos:**
  - **Amnésico:** afecta principalmente la memoria, tiene mayor riesgo de progresión a Alzheimer.
  - **No amnésico:** afecta otras funciones como el lenguaje, la atención o la función ejecutiva, y puede derivar en otras formas de demencia.

El diagnóstico precoz del DCL permite realizar un seguimiento clínico adecuado, implementar estrategias terapéuticas y promover hábitos que retrasen la progresión a etapas más avanzadas de deterioro cognitivo. La siguiente tabla 7.1 muestra la comparación entre envejecimiento normal, deterioro cognitivo leve (DCL), enfermedad de Alzheimer (A) y demencia frontotemporal (DFT).

Tabla 7.1: Comparación entre envejecimiento normal, deterioro cognitivo leve (DCL), enfermedad de Alzheimer (A) y demencia frontotemporal (DFT)

Características	**Envejecimiento normal**	**DCL**	**Alzheimer (A)**	**DFT**
Edad de inicio	Envejecimiento fisiológico (>60 años)	60 años en adelante	>65 años (tardío)	45–65 años
Síntoma inicial típico	Olvido ocasional	Dificultades de memoria leves	Pérdida de memoria reciente (amnesia anterógrada)	Cambios de personalidad, conducta o lenguaje
Áreas cerebrales afectadas	Cambios difusos leves	Hipocampo (atrofia leve)	Hipocampo, corteza entorrinal y parietal	Lóbulos frontal y temporal
Progresión de síntomas	Estable, no progresiva	Posible progresión a demencia (10–15 % anual)	Progresiva, generalizada	Focal, con preservación inicial de la memoria
Memoria	Leve olvido, no interfiere con la vida diaria	Olvidos frecuentes, sobre todo de hechos recientes	Pérdida significativa, afecta funcionalidad	Afectada tardíamente
Lenguaje	Leve dificultad para encontrar palabras	Dificultad leve pero funcional	Alteración progresiva del lenguaje	Puede ser síntoma inicial (afasia progresiva)
Funciones ejecutivas	Leve desaceleración	Alteración leve en planificación y decisiones	Alteraciones marcadas	Severamente afectadas desde etapas tempranas
Cambios conductuales	Ninguno relevante	Leves frustraciones o ansiedad	Menores en fases iniciales	Desinhibición, apatía, impulsividad
Autonomía funcional	Total	Levemente afectada, independiente	Pérdida progresiva	Rápida pérdida de autonomía
Conciencia del déficit	Conservada	Parcialmente conservada	Disminuida	Frecuentemente alterada
Cambios estructurales	Cambios leves por envejecimiento	Atrofia hipocampal leve	Atrofia marcada, placas beta-amiloide y ovillos tau	Atrofia frontal/temporal, inclusiones tau o TDP-43
Herencia genética	No aplica	Variable	Raro en casos esporádicos	Hasta 40 % con antecedentes familiares
Riesgo de progresión	Bajo	10–15 % anual a demencia	Enfermedad irreversible	Progresiva, variable según subtipo

7.3. Aplicación del método de multirelación e hipergrafos k-regulares.

El análisis de la conectividad cerebral ha adquirido un papel central en la comprensión de los mecanismos funcionales del cerebro y en la caracterización de distintas patologías neurodegenerativas. Entre las técnicas más utilizadas para estudiar la actividad cerebral se encuentran el electroencefalograma (**EEG**), la magnetoencefalografía (**MEG**) y la resonancia magnética funcional (**fMRI**), cada una de las cuales ofrece una perspectiva complementaria del funcionamiento cerebral. El **EEG** y la **MEG** proporcionan una alta resolución temporal, permitiendo estudiar la dinámica neuronal en el rango de los milisegundos, mientras que la **fMRI** ofrece una mayor resolución espacial, permitiendo identificar con precisión las regiones cerebrales activadas durante distintos estados cognitivos.
En este sección, utilizamos el algoritmo para construir hipergrafos k-regulares utilizando multicorrelación para el estudio de la conectividad funcional de alto orden a partir de estas tres modalidades de señal.
La construcción de hipergrafos k-regulares permite modelar interacciones simultáneas entre múltiples regiones cerebrales, superando la limitación de los grafos tradicionales que solo consideran relaciones por pares.

7.3.1. Descripción de los datos y preprocesamiento

El primer conjunto de datos utilizados en este estudio fueron obtenidos del repositorio (https://openneuro.org , una plataforma abierta para el intercambio de datos de neuroimagen (MRI, MEG, EEG, iEEG, ECoG)) y contiene registros de EEG en estado de reposo con ojos cerrados de un total de 88 sujetos: 36 con diagnóstico de enfermedad de Alzheimer (**A**), 23 con demencia frontotemporal (**DFT**) y 29 controles sanos (**C**).
Los datos crudos fueron adquiridos mediante un sistema clínico *Nihon Kohden 2100* utilizando 19 electrodos dispuestos según el sistema internacional 10–20, con una frecuencia de muestreo de 500 Hz. Para este estudio, se empleó la versión preprocesada disponible en la carpeta `derivatives` del repositorio original.
El preprocesamiento incluyó los siguientes pasos

- **Filtrado**: se aplicó un filtro Butterworth pasa-banda entre 0.5 y 45 Hz para eliminar componentes de muy baja y alta frecuencia.
- **Re-referenciación**: las señales fueron re-referenciadas respecto a los electrodos mastoideos A1–A2.
- **Artifact Subspace Reconstruction (ASR)**: técnica automática de detección y corrección de artefactos, eliminando segmentos con desviaciones estándar superiores a un umbral conservador (17) en ventanas de 0.5 s.
- **Análisis de Componentes Independientes (ICA)**: aplicado mediante el algoritmo `RunICA` para separar fuentes independientes en las señales EEG.
- **Rechazo automático de artefactos**: eliminación de componentes asociados a movimientos oculares o mandibulares mediante el clasificador automático `ICLabel` de `EEGLab`.

El segundo conjunto de datos incluye un total de 80 sujetos distribuidos en tres grupos: 26 controles sanos **(C)** de edad avanzada, 18 pacientes con deterioro cognitivo leve (**DCL**) y

36 pacientes diagnosticados con enfermedad de Alzheimer (**A**). Los registros de magnetoencefalografía (**MEG**) se adquirieron en condiciones de reposo con los ojos cerrados durante 5 minutos (300 s), con una frecuencia de muestreo de 169.54 Hz.
Las señales fueron segmentadas en *trials* de 5 s (848 muestras cada uno). En las matrices finales se incluyeron únicamente los *trials* libres de artefactos, por lo que el número de épocas varía entre sujetos.
En el grupo de pacientes con **Alzheimer**, la cantidad de ventanas obtenidas por sujeto fue la siguiente: Paciente 1: 8, Paciente 2: 6, Paciente 3: 7, Paciente 4: 9, Paciente 5: 8, Paciente 6: 5, Paciente 7: 15, Paciente 8: 24, Paciente 9: 4, Paciente 10: 35, Paciente 11: 13, Paciente 12: 32, Paciente 13: 20, Paciente 14: 35, Paciente 15: 31, Paciente 16: 45, Paciente 17: 13, Paciente 18: 26, Paciente 19: 25, Paciente 20: 14, Paciente 21: 22, Paciente 22: 35, Paciente 23: 13, Paciente 24: 16, Paciente 25: 51, Paciente 26: 19, Paciente 27: 15, Paciente 28: 26, Paciente 29: 10, Paciente 30: 33, Paciente 31: 27, Paciente 32: 20, Paciente 33: 36, Paciente 34: 2, Paciente 35: 31 y Paciente 36: 37 ventanas.
En el grupo **Control**, las señales presentaron el siguiente número de ventanas por sujeto: Paciente 1: 27, Paciente 2: 21, Paciente 3: 33, Paciente 4: 4, Paciente 5: 11, Paciente 6: 11, Paciente 7: 20, Paciente 8: 19, Paciente 9: 5, Paciente 10: 4, Paciente 11: 5, Paciente 12: 12, Paciente 13: 30, Paciente 14: 8, Paciente 15: 7, Paciente 16: 28, Paciente 17: 14, Paciente 18: 5, Paciente 19: 7, Paciente 20: 13, Paciente 21: 15, Paciente 22: 17, Paciente 23: 14, Paciente 24: 24 y Paciente 25: 16 ventanas.
Por último, en el grupo con **Deterioro Cognitivo Leve (DCL)**, se registraron las siguientes cantidades de ventanas: Paciente 1: 26, Paciente 2: 24, Paciente 3: 29, Paciente 4: 22, Paciente 5: 25, Paciente 6: 22, Paciente 7: 29, Paciente 8: 34, Paciente 9: 19, Paciente 10: 24, Paciente 11: 15, Paciente 12: 11, Paciente 13: 21, Paciente 14: 17, Paciente 15: 16, Paciente 16: 16, Paciente 17: 26 y Paciente 18: 21 ventanas.

El preprocesamiento de los registros incluyó

- **Filtrado**: se aplicó un filtro FIR pasa-banda de [1–65] Hz (2000 coeficientes, ventana de Hamming).
- **Eliminación de artefactos**: mediante ICA se eliminaron componentes cardíacos y oculares.
- **Corrección adicional de ruido**: se empleó el algoritmo `SOUND` para mejorar la calidad de las señales.
- **Selección visual**: se conservaron únicamente las épocas de 5 s libres de artefactos.

Cabe destacar que las épocas concatenadas en las matrices son disjuntas, es decir, no necesariamente consecutivas en el tiempo. Por ejemplo, la primera época puede corresponder al intervalo [0–5] s y la siguiente al intervalo [10–15] s.

Los datos se organizaron en formato matricial a dos niveles de representación:

- **Nivel sensor**: matrices de tamaño $148 \times N$, donde 148 corresponde al número de sensores y N al total de muestras concatenadas (múltiplos de 848). Por ejemplo, una matriz de tamaño 148×21200 corresponde a 25 épocas de 5 s ($25 \times 848 = 21200$).
- **Nivel fuente**: matrices de tamaño $68 \times N$, correspondientes a 68 regiones corticales segmentadas según el atlas de Desikan–Killiany. La estimación de la actividad cortical se realizó mediante cuatro algoritmos: **dSPM**, **LCMV**, **sLORETA** y **wMNE**.

La tercera base de datos corresponde a registros de **fMRI**, cuyo procesamiento y características se describen a continuación. Se utilizaron datos de resonancia magnética funcional en reposo (rs-fMRI) provenientes de la iniciativa *Alzheimer's Disease Neuroimaging Initiative* (ADNI) (EE.UU. y Canadá) — disponible en `https://adni.loni.usc.edu/`. Esta es una investigación longitudinal y multicéntrica cuyo objetivo es validar biomarcadores para ensayos clínicos de la enfermedad de Alzheimer. Las imágenes fueron adquiridas con escáneres de 3 T siguiendo el protocolo básico de ADNI, con una secuencia EPI (TR = 3 s, TE = 30 ms, ángulo de giro = 90, tamaño de matriz $64 \times 64 \times 48$ y tamaño de vóxel $3{,}4 \times 3{,}4 \times 3{,}4$ mm^3). La duración de las adquisiciones fue de 7 min (140 puntos temporales) para ADNI2 y 10 min (200 puntos) para ADNI3.
Tras el control de calidad, la muestra final estuvo compuesta por $N = 431$ participantes, distribuidos en tres grupos diagnósticos: Alzheimer , $A = 95$, deterioro cognitivo leve, $DCL = 248$ y normal $N = 89$. Las imágenes provinieron de 272 escáneres Philips, 111 Siemens y 47 GE.
El preprocesamiento se realizó utilizando la caja de herramientas *Data Processing Assistant for Resting-State fMRI* (DPARSF) basada en SPM12. La secuencia de pasos incluyó: corrección por desfase temporal entre cortes, realineamiento para corrección de movimiento, normalización espacial al espacio MNI, suavizado espacial con un kernel gaussiano de 6 mm FWHM, filtrado temporal (0.01–0.08 Hz) y regresión de covariables de confusión (seis parámetros de movimiento, señales medias de sustancia blanca y líquido cefalorraquídeo). Todas las imágenes se normalizaron a una resolución isotrópica de $2 \times 2 \times$ mm^3 y se escalaron a una intensidad media global de 10000.
Las series temporales regionales se extrajeron utilizando el atlas AAL3. De los 170 ROI iniciales, se eliminaron cuatro regiones vacías y 35 con menos de 100 vóxeles, obteniéndose un total de 131 ROI. Cada serie temporal se truncó a 140 puntos temporales y se estandarizó mediante z-score. Finalmente, los ROI se reordenaron según la plantilla funcional Yeo-17 para agrupar regiones funcionalmente relacionadas.
Así, para cada participante se obtuvo una matriz $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{140\times131}$, donde las columnas representan las señales BOLD estandarizadas de las 131 regiones cerebrales. Estas matrices constituyen el conjunto de datos de entrada utilizado en los análisis de conectividad multicanal presentados en este trabajo.

7.3.2. Procedimiento para construir hipergrafos k-regulares utilizando el coeficiente de multirrelación de Drezner a partir de señales de EEG, MEG y fMRI

Señales de EEG y MEG Cada señal fue filtrada mediante un filtro pasabanda en las bandas de frecuencia específicas para cada modalidad. En las señales de **EEG**, se consideraron las bandas clásicas: *delta* (0.5–4 Hz), *theta* (4–8 Hz), *alpha* (8–13 Hz), *beta* (13–30 Hz) y *gamma* (30–100 Hz). La frecuencia de muestreo utilizada fue de 500 Hz, y las señales registradas en los 19 electrodos se segmentaron en ventanas de 2 segundos. Se obtuvieron 413 ventanas sin solapamiento con 1000 muestras cada una.
Por otro lado, en las señales de **MEG** se emplearon las bandas *delta* (0.5–4 Hz), *theta* (4–8 Hz), *alpha* (8–13 Hz), *beta* (13–30 Hz) y *gamma* (30–80 Hz). La frecuencia de muestreo en este caso fue de 169.5 Hz, y las señales se segmentaron en épocas de 5 segundos (848 muestras por época), concatenando varias épocas disjuntas que no necesariamente corresponden a segmentos consecutivos de señal. Por ejemplo, la primera época (0–5 s, muestras [1, 848]) y la segunda (10–15 s, muestras [849, 1696]) provienen de intervalos temporales separados. Cabe destacar que el límite superior de la banda gamma en MEG (80 Hz) es menor que

en EEG (100 Hz), debido a la menor frecuencia de muestreo. Según el teorema de Nyquist–Shannon [117], la frecuencia máxima que puede representarse sin aliasing es la mitad de la frecuencia de muestreo, lo que restringe el rango de frecuencias analizables en las señales de MEG.

Cada señal de cada canal fue estandarizada mediante la transformación *Z-score*, implementada en las librerías de Python. Esta transformación garantiza que los datos tengan media cero y desviación estándar uno, homogenizando la escala de las señales entre canales y sujetos. La estandarización Z-score transforma la señal $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_t] \in \mathbb{R}^t$, donde t es el número de muestras, en una nueva señal $\mathbf{x}_{\text{std}}$ definida como

$$\mathbf{x}_{\text{std}} = \frac{\mathbf{x} - \mu}{\sigma},$$

donde μ es la media de $\mathbf{x}$, y σ es su desviación estándar. Una vez estandarizados los datos, tomando $1 < n < m$, consideramos todos los subconjuntos de $\mathscr{V} = \{1, \ldots, m\}$ de cardinalidad n, a los que denotamos como $\mathscr{P}_n(\mathscr{V})$. Notemos que $|\mathscr{P}_n(\mathscr{V})| = \binom{m}{n}$, fijamos un $W \in \mathscr{P}_n(\mathscr{V})$ y calculamos las submatrices de $R = SS^\top$ de tamaño $n \times n$, que solo contienen las filas y columnas indicadas por W.

En nuestro caso particular, cada ventana o época w de señal está representada por una matriz de datos $S^{(w)}_{i,j,\mathscr{B}} \in \mathbb{R}^{m \times t}$, donde $m = 19$ es el número de electrodos, t el número de muestras por ventana ($t = 1000$ para EEG y $t = 848$ para MEG), $\mathscr{B}$ representa la banda de frecuencia $\mathscr{B} = \{\theta, \delta, \alpha, \beta, \gamma\}$, j representa el estado bajo análisis A, DFT y C para EEG y A, DCL y C para MEG e i representa el paciente bajo análisis.

La matriz de correlación para la ventana w, el estado j , y el participante $i = 1, \ldots, N$ se calcula de la siguiente forma

$$R^{(w)}_{i,j,\mathscr{B}} = S^{(w)}_i \times (S^{(w)}_i)^\top,$$

Luego, la matriz de correlación promedio para cada participante y cada estado j se obtiene promediando las matrices de correlación de todas las ventanas o épocas analizadas

$$\overline{R}_{i,j,\mathscr{B}} = \frac{1}{W} \sum_{w=1}^{W} R^{(w)}_{i,j,\mathscr{B}},$$

donde W es el número total de ventanas analizadas para el participante i, y $\mathscr{B}$ indica la banda de frecuencia.

A partir de la matriz de correlación promedio $\overline{R}_{i,j,\mathscr{B}}$ asociada a cada paciente i, estado j y banda de frecuencia $\mathscr{B}$, se consideran todos los subconjuntos $P \subseteq \mathscr{V}$, donde $\mathscr{V} = \{1, \ldots, m\}$ representa el conjunto de $m = 19$ electrodos, y $|P| = n$ denota el tamaño del subconjunto. En esta aplicación, se emplearon valores de $n = 2, 3, 4$. Para cada subconjunto $P = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, se extrae el menor de orden n, es decir, la submatriz $\overline{R}_{i,j,\mathscr{B},P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, obtenida seleccionando las filas y columnas correspondientes a los elementos de P en $\overline{R}_{i,j,\mathscr{B}}$

$$\overline{R}_{i,j,\mathscr{B},P} = \left(\overline{R}_{i,j,\mathscr{B},i_p i_q}\right)_{p,q=1}^{n}.$$

El número total de menores de orden n es igual a $\binom{m}{n}$. Sobre cada submatriz $\overline{R}_{i,j,\mathscr{B},P}$, se calcula el *coeficiente de multicorrelación* $\delta_{i,j,,\mathscr{B},P}$ definido como

$$\delta_{i,j,\mathscr{B},P} = 1 - \lambda_{P1},$$

donde λ_{P1} es el menor autovalor de $\overline{R}_{i,j,\mathscr{B},P}$.

Posteriormente, se calcula el umbral $\tau_{i,j,\mathscr{B}}(n)$ como el valor promedio de los coeficientes

$\delta_{i,j,\mathscr{B},P}$ para todos los subconjuntos de tamaño n

$$\tau_{i,j,\mathscr{B}}(n) = \frac{1}{\binom{m}{n}} \sum_{\substack{P \subseteq \mathscr{V} \\ |P|=n}} \delta_{i,j,,\mathscr{B},P}.$$

Se seleccionan aquellos subconjuntos P que satisfacen $\delta_{i,j,\mathscr{B},P} > \tau_{i,j,\mathscr{B}}(n)$, los cuales constituyen las hiperaristas del hipergrafo.
Finalmente, el hipergrafo $\mathscr{H}_k$, con vértices en $\mathscr{V}$, tiene como conjunto de hiperaristas

$$\mathscr{E}(\mathscr{H}_k) = \left\{ P \in \mathscr{P}_k(\mathscr{V}) : \delta_{i,j,\mathscr{B},P} > \tau_{i,j,\mathscr{B}}(k) \right\}.$$

fMRI Para el caso de las señales de fMRI , las señales extraídas de las regiones de interés (ROIs) no fueron sometidas a un filtrado por bandas de frecuencia ni divididas en ventanas temporales. Esta decisión metodológica se fundamenta en consideraciones tanto teóricas como prácticas relacionadas con la naturaleza de la señal BOLD. Las señales fMRI (BOLD) poseen una resolución temporal baja, con frecuencias de muestreo del orden de 0.3 a 1 Hz, dependiendo del TR (del inglés Repetition Time o Tiempo de Repetición) es un parámetro clave en la adquisición de datos fMRI. Representa el intervalo de tiempo entre la adquisición de dos volúmenes completos del cerebro). Esto implica que su contenido frecuencial útil se restringe a un rango muy bajo, principalmente entre 0.01 y 0.1 Hz, donde se ha demostrado que se concentra la mayor parte de la información funcional relevante. Además, la propia respuesta hemodinámica actúa como un filtro de natural pasa bajos, amortiguando las componentes de alta frecuencia de la señal neuronal subyacente. Por esta razón, se evita aplicar filtrados adicionales que podrían eliminar información útil o distorsionar la señal, especialmente si no se dispone de una serie temporal suficientemente larga para compensar los efectos del filtrado. A pesar de no aplicar filtrado ni segmentación en las señales de fMRI, el procedimiento para la construcción de hipergrafos k-regulares es el mismo que en EEG y MEG.
El procedimiento como antes comienza con la estandarización de las series temporales de cada región de interés (ROI) utilizando la estandarización tipo **z-score**, lo que permite comparar directamente las activaciones eliminando diferencias de escala. A partir de las señales estandarizadas, se construye una matriz de correlación R mediante el producto escalar entre las series temporales, reflejando la correlación lineal entre las distintas ROIs. Con esta matriz se procede a generar hiperaristas, considerando todas las combinaciones posibles con k=2, k=3 y k=4. Para cada uno de estos casos, se extrae la submatriz correspondiente de R y se calculan sus autovalores; el menor de ellos se utiliza para obtener un peso mediante la expresión $1 - \lambda_{\min}$, el cual cuantifica la interacción entre conjuntos de señales. Posteriormente, se aplica un umbral, definido como el promedio de todos los pesos calculados, y se conservan únicamente aquellos que superan este valor. Finalmente, se construye una matriz de incidencia binaria donde cada fila representa una hiperarista y cada columna una ROI.

7.4. Resultados EEG

7.4.1. Entropía

A continuación se presentan los resultados de la entropía calculada sobre los hipergrafos k-regulare costruidos sobre nuestra primera base de datos descripta en la Sección 7.3. El análisis se llevó a cabo considerando las distintas combinaciones posibles de los 19 electrodos, tomando $k = 2, 3, 4$.

Sea $\mathbf{S}_{k,b}^{(g)}(i)$ la entropía calculada para el paciente i perteneciente al grupo $g \in \{\mathrm{A}, \mathrm{DFT}, \mathrm{C}\}$, en la combinación de k electrodos y en la banda de frecuencia b. De este modo, para cada grupo se obtiene un conjunto de valores de entropía

$$\{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{A})}(i)\}_{i=1}^{36}, \quad \{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{DFT})}(i)\}_{i=1}^{23}, \quad \{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{C})}(i)\}_{i=1}^{29},$$

donde el subíndice i recorre los pacientes de cada grupo.

Sobre cada conjuntos de valores $\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(g)}$ se aplicó la prueba no paramétrica de Kruskal–Wallis para evaluar la existencia de diferencias globales entre los tres grupos (A, DFT y C). Posteriormente, se realizaron comparaciones post-hoc mediante el test de Dunn con corrección de Bonferroni.

Los niveles de significancia se representan mediante asteriscos, siguiendo los criterios $p < 0{,}05: *, \quad p < 0{,}01: **, \quad p < 0{,}001: ***$.

La Figura 7.4 muestra los diagramas de violín correspondientes a cada grupo en la banda de frecuencia **Delta** ([0.5–4 Hz]) para $k = 3$, donde se observaron diferencias significativas entre los grupos **C** y **A**. Asimismo, se incluyen los resultados obtenidos en la banda **Beta** ([13–30 Hz]) para las combinaciones $k = 2, 3, 4$, en las cuales también se registraron diferencias significativas entre los grupos analizados.

En la banda **Beta**, los resultados del test de *Kruskal–Wallis* mostraron diferencias globales significativas, con las siguientes diferencias específicas según la prueba de comparaciones múltiples de *Dunn*:

- Para $k = 2$: C vs DFT $*p = 3{,}2 \times 10^{-2}$; C vs A $*p = 4{,}0 \times 10^{-2}$.
- Para $k = 3$: C vs DFT $**p = 3{,}44 \times 10^{-3}$; C vs A $**p = 5{,}01 \times 10^{-3}$.
- Para $k = 4$: C vs DFT $**p = 3{,}10 \times 10^{-3}$; C vs A $***p = 4{,}9 \times 10^{-4}$.

Estos resultados evidencian una separación clara entre los grupos **C DFT** y **A** en las bandas y órdenes analizados.

Conclusión: El aumento del orden k en la construcción de hipergrafos mejora la capacidad del análisis para detectar diferencias significativas entre los grupos. En particular, los resultados muestran que las diferencias entre estados son estadísticamente más significativas a medida que aumenta k, lo que sugiere que las interacciones de orden superior capturan información adicional que no es evidente en las relaciones pareadas ($k = 2$).

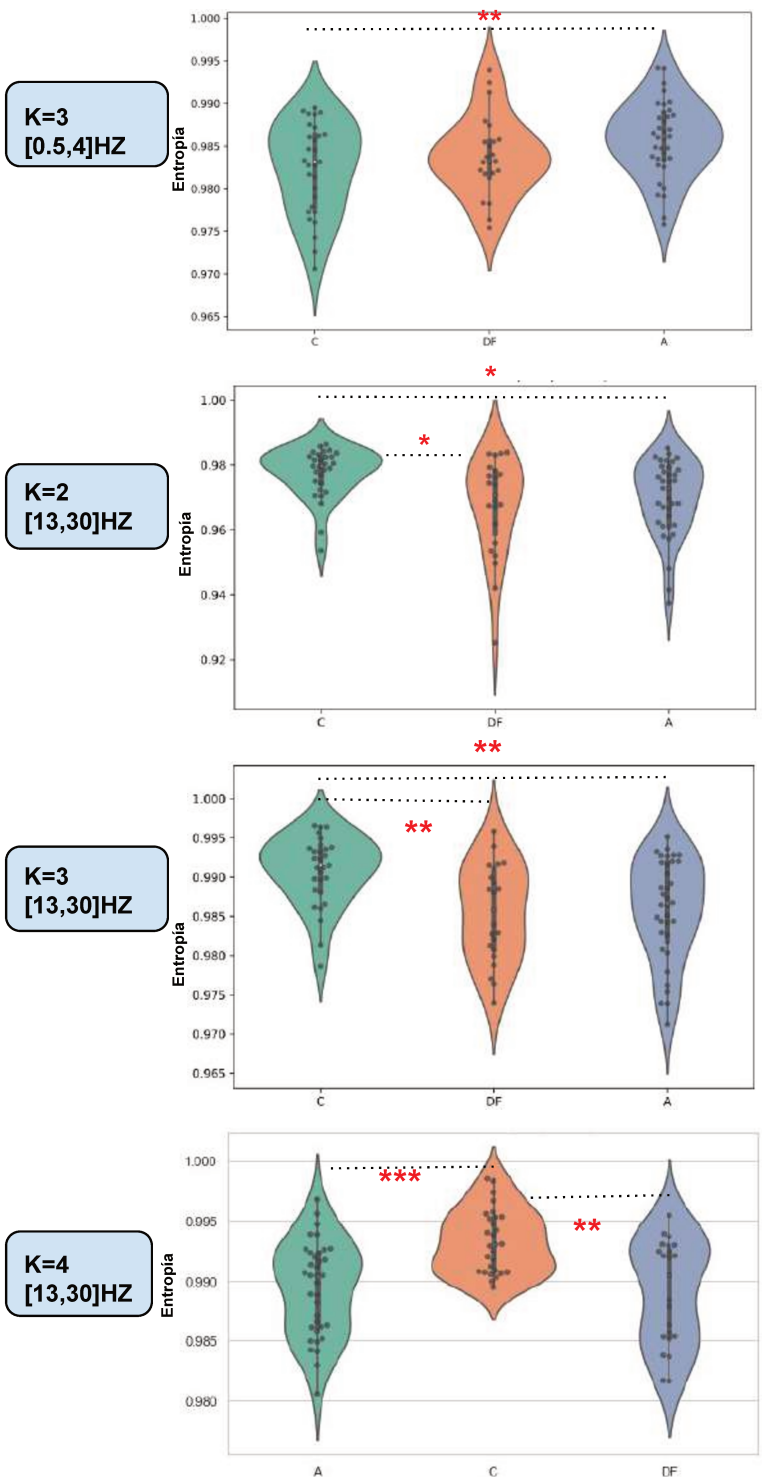


Figura 7.4: Valores de entropía para las bandas [0.5,4]HZ y [13,30]HZ donde se registro diferencia significativa para las distintas combinaciones de electrodos $k = 2$, $k = 3$ y $k = 4$.

7.4.2. Centralidad de Vértices

En esta sección se presentan los resultados asociados a la *centralidad de los vértices* asociados a cada uno de los hipergrafos k-regulares obtenidos para cada paciente en cada estado considerado. Dado que trabajamos con 19 electrodos, se calculó la centralidad de cada

vértice v_i ($i = 1, \ldots, 19$) de cada uno de los hipergrafos de cada sujeto y, posteriormente, se promedió la suma de las centralidades de cada v_i sobre el numero total de los individuos de cada grupo. Para cada vértice v_i y cada grupo $g \in \{\mathrm{A}, \mathrm{DFT}, \mathrm{C}\}$, se obtuvo la centralidad promedio:

$$d_g(v_i) = \frac{1}{N_g} \sum_{j=1}^{N_g} d_{g,j}(v_i),$$

donde $d_{g,j}(v_i)$ denota la centralidad del vértice v_i en el sujeto j del grupo g, y N_g es el número de sujetos en dicho grupo. Con el fin de evaluar diferencias estadísticas entre los tres grupos, se aplicó la prueba no paramétrica de Kruskal–Wallis para cada vértice v_i. En los casos en los que se detectó significancia global, se realizaron comparaciones post-hoc mediante el test de Dunn con corrección de Bonferroni. De este modo, se identificaron los vértices en los que existían diferencias significativas entre pares de grupos (A vs. DFT, A vs. C, DFT vs. C). En los casos sin diferencias significativas, se indica con *ns* (no significativo). Los niveles de significancia estadística se representan de la siguiente manera $p < 0{,}05 : *$, $p < 0{,}01 : **$, $p < 0{,}001 : ***$. Finalmente, nos concentramos en aquellos vértices donde se observaron diferencias significativas. Para cada par de grupos (g_1, g_2), se calculó la diferencia en la centralidad promedio:

$$\Delta_{g_1,g_2}(v_i) = |d_{g_1}(v_i) - d_{g_2}(v_i)|,$$

y se representaron gráficamente dichas diferencias, destacando los vértices en los que se obtuvieron los contrastes estadísticamente significativos. Ver Figuras 7.5, 7.6, 7.7.

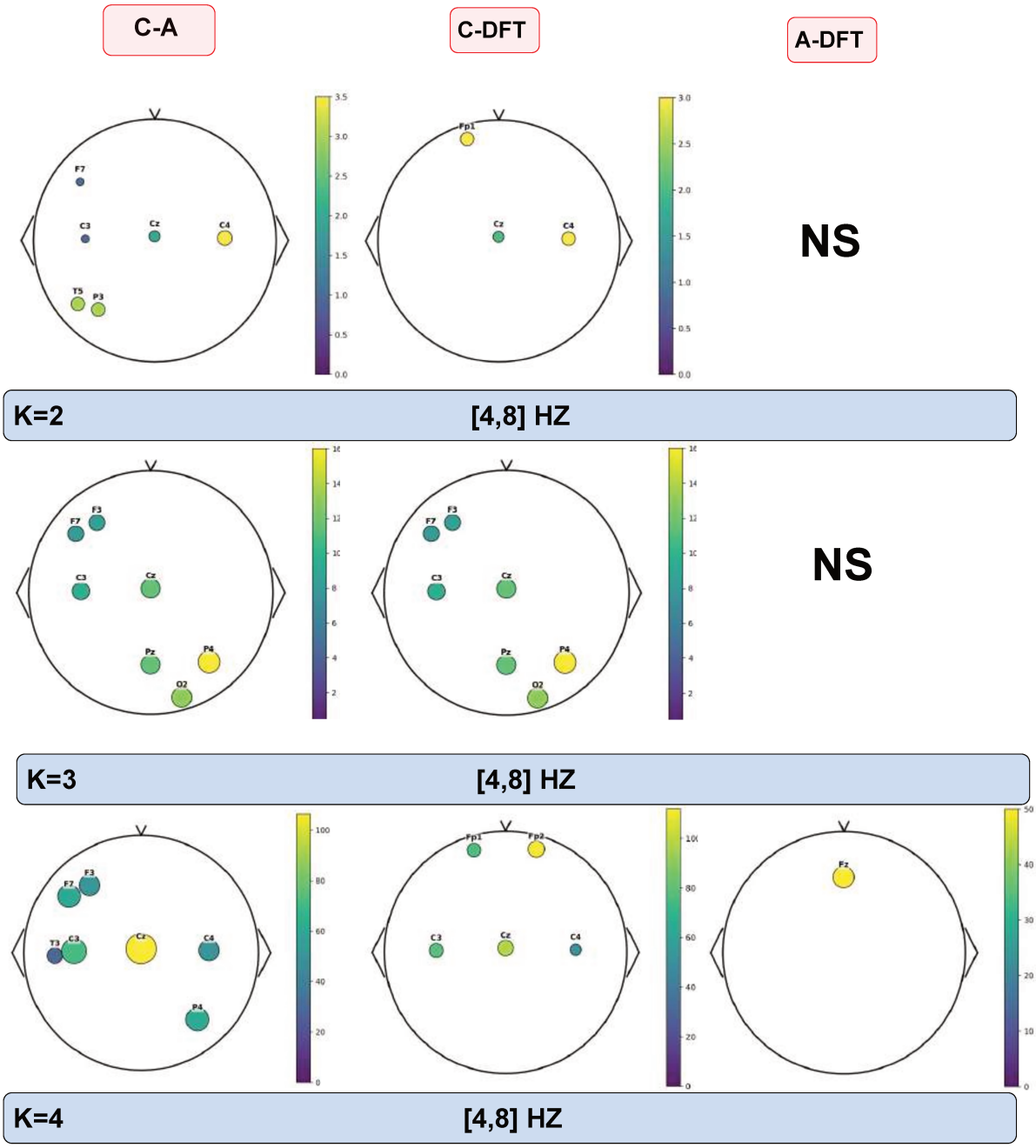


Figura 7.5: Diferencias entre la centralidad de vértices para $k = 2, 3, 4$ en la banda [4,8]Hz.

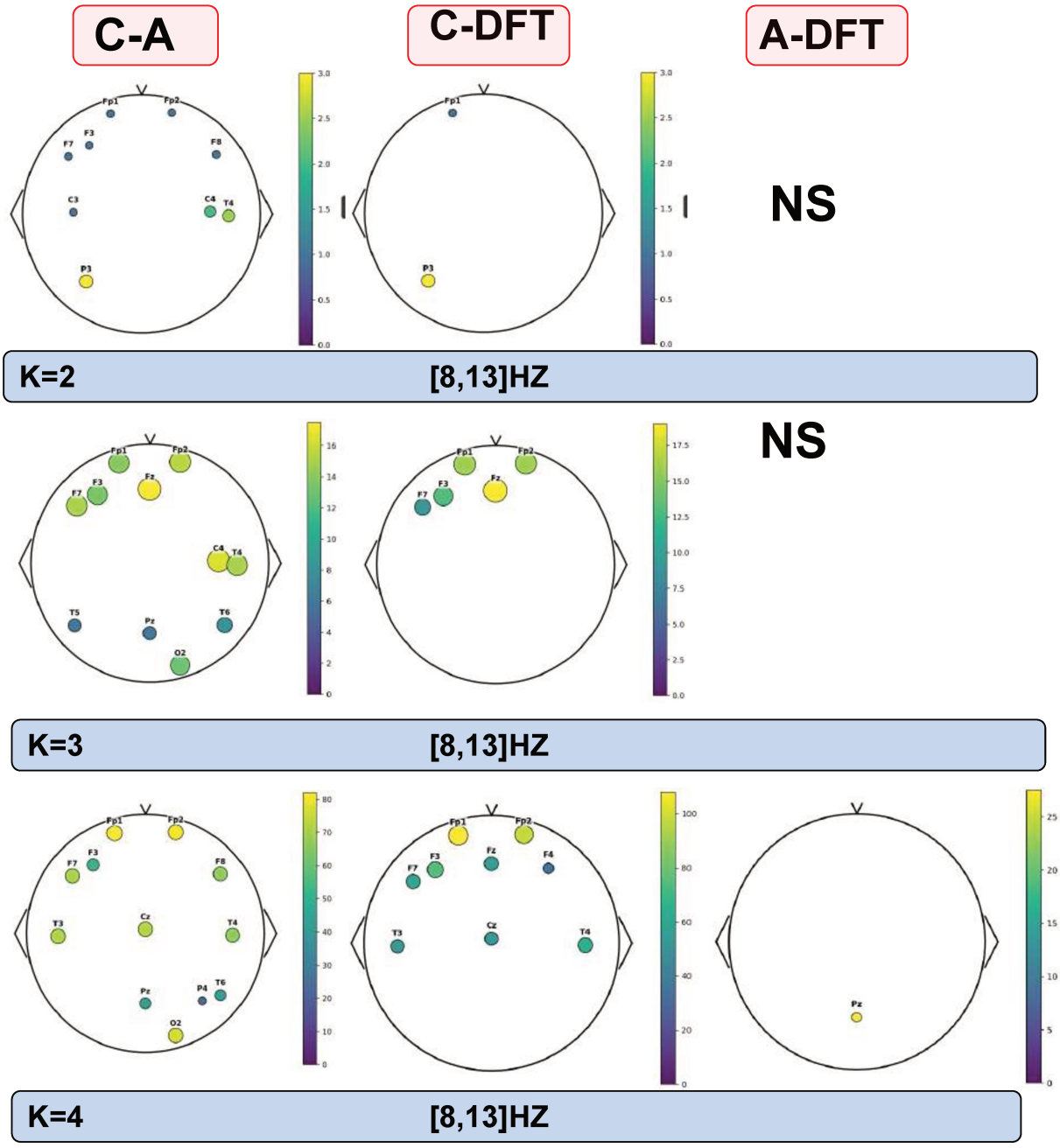


Figura 7.6: Diferencias entre la centralidad de vértices para $k = 2, 3, 4$ en la banda [8,13]Hz.

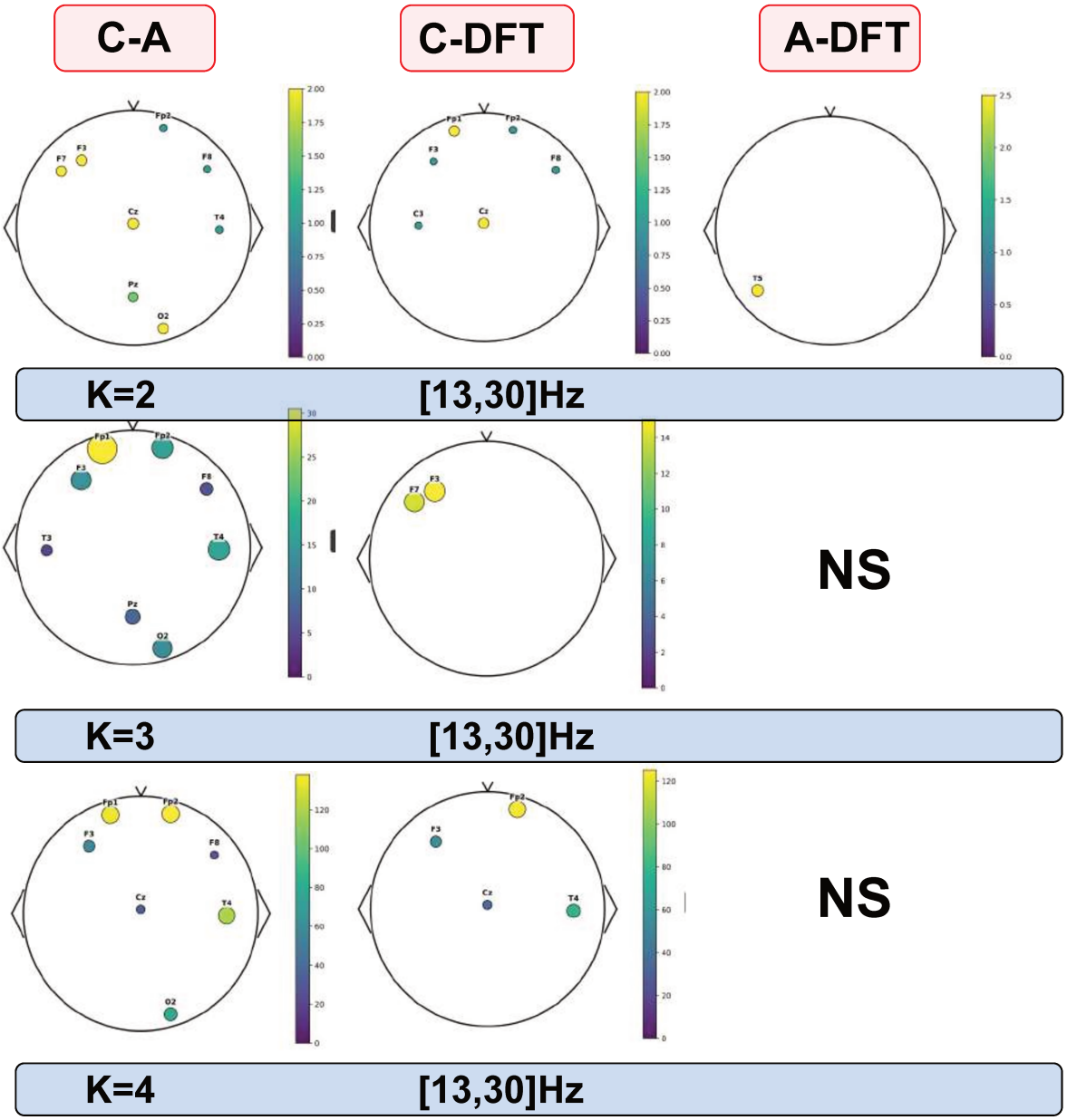


Figura 7.7: Diferencias entre la centralidad de vértices para $k = 2, 3, 4$ en la banda [13,30]Hz.

Del análisis de las Figuras 7.5, 7.6, 7.7 se desprende que las diferencias significativas entre estados no se distribuyen de manera uniforme, sino que se concentran en regiones específicas de la corteza cerebral según la banda de frecuencia.
Para la banda **Theta** ([4–8 Hz]) para los órdenes $k = 2, 3, 4$. Ver Figura 7.5. El test de *Kruskal–Wallis* reveló diferencias significativas entre los grupos, y las comparaciones múltiples mediante la prueba de *Dunn* mostraron los siguientes resultados:

- Para $k = 2$: se observaron diferencias significativas entre los grupos **C** y **A** en los electrodos F7, P3, C3, CZ, C4 y T5 ($p = 1{,}0 \times 10^{-2}, 2{,}0 \times 10^{-2}, 6{,}0 \times 10^{-3}, 6{,}0 \times 10^{-5}, 4{,}0 \times 10^{-3}, 3{,}0 \times 10^{-2}$), correspondientes a áreas **frontales**, **centrales**, **parietales** y **temporales**.

- Para $k = 3$: las diferencias más marcadas entre **C** y **A** se localizaron en O2, F7, F3, C3,

CZ, PZ y P4 ($p = 9{,}0 \times 10^{-3}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $4{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-4}$, $1{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-4}$), abarcando regiones **frontales**, **centrales**, **parietales** y **occipitales**.

- Para $k = 4$: se evidenciaron diferencias significativas en C3, F7, F3, T3, CZ, C4 y P4 ($p = 2{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-5}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-4}$), principalmente en regiones **frontales**, **centrales**, **temporales** y **parietales**.

Por otro lado, las comparaciones entre los grupos **DFT** y **C** mostraron también diferencias significativas distribuidas en varias áreas corticales:

- Para $k = 2$: se encontraron diferencias en FP1, CZ y C4 ($p = 1{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $5{,}0 \times 10^{-3}$), correspondientes a regiones **frontales** y **centrales**.
- Para $k = 3$: FP1, F7, CZ, PZ y O2 mostraron $p = 1{,}0 \times 10^{-2}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $9{,}0 \times 10^{-3}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, evidenciando diferencias en áreas **frontales**, **centrales**, **parietales** y **occipitales**.
- Para $k = 4$: se observaron diferencias en FP1, FP2, C3, CZ y C4 ($p = 7{,}0 \times 10^{-3}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-3}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$), todas ubicadas en regiones **frontales** y **centrales**.

Los resultados muestran que las diferencias entre grupos se distribuyen principalmente en regiones **frontales** y **centrales**, extendiéndose hacia áreas **parietales** y **occipitales** a medida que aumenta el orden k. Esta expansión espacial sugiere que el incremento del orden en la construcción de los hipergrafos para $k = 3$ y $k = 4$ mejora la sensibilidad del análisis, permitiendo detectar interacciones de orden superior. En particular, los valores de p más bajos para $k = 3$ y $k = 4$ indican que las relaciones multivariadas entre múltiples regiones cerebrales aportan información adicional que no es capturada por las conexiones pareadas ($k = 2$). Para la banda **Alfa** ([8–13 Hz]) y los órdenes $k = 2, 3, 4$ ver Figura 7.6, el test de *Kruskal–Wallis* reveló diferencias significativas entre los grupos, y las comparaciones múltiples mediante la prueba de *Dunn* mostraron los siguientes resultados:

Comparación C vs A.

- Para $k = 2$: se observaron diferencias significativas en los electrodos FP1, FP2, F7, F3, F8, C3, C4, T4 y P3 ($p = 4{,}0 \times 10^{-4}$, $2{,}0 \times 10^{-3}$, $3{,}0 \times 10^{-3}$, $2{,}0 \times 10^{-3}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $4{,}0 \times 10^{-4}$, $8{,}0 \times 10^{-6}$, $2{,}0 \times 10^{-3}$), correspondientes a regiones **frontales**, **centrales**, **temporales** y **parietales**.
- Para $k = 3$: se registraron diferencias en T6, FZ, T4, O2, FP1, FP2, F7, F3, C4, T5 y PZ ($p = 6{,}0 \times 10^{-4}$, $9{,}0 \times 10^{-5}$, $9{,}0 \times 10^{-4}$, $3{,}0 \times 10^{-5}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $2{,}0 \times 10^{-4}$, $5{,}0 \times 10^{-5}$, $7{,}0 \times 10^{-3}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-3}$), abarcando áreas **frontales**, **temporales**, **parietales** y **occipitales**.
- Para $k = 4$: las diferencias más marcadas se observaron en O2, FP1, FP2, PZ, P4, F7, T6, F3, F8, T3, CZ y T4 ($p = 4{,}0 \times 10^{-4}$, $2{,}0 \times 10^{-4}$, $1{,}0 \times 10^{-4}$, $9{,}0 \times 10^{-4}$, $3{,}0 \times 10^{-4}$, $8{,}0 \times 10^{-5}$, $1{,}0 \times 10^{-5}$, $1{,}0 \times 10^{-3}$, $9{,}0 \times 10^{-4}$, $3{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$), involucrando regiones **frontales**, **centrales**, **temporales**, **parietales** y **occipitales**.

Comparación DF vs C.

- Para $k = 2$: se encontraron diferencias significativas en FP1 y P3 ($p = 8{,}0 \times 10^{-3}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$), ubicadas en regiones **frontales** y **parietales**.
- Para $k = 3$: se observaron diferencias en FP1, FP2, F7, F3 y FZ ($p = 1{,}0 \times 10^{-4}$, $3{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $2{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$), correspondientes a áreas **frontales** y **prefrontales**.
- Para $k = 4$: las diferencias se extendieron a CZ, F4, T4, FP1, FP2, F7, F3, T3 y FZ ($p = 3{,}0 \times 10^{-5}$, $6{,}0 \times 10^{-4}$, $4{,}0 \times 10^{-3}$, $4{,}0 \times 10^{-3}$, $4{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $4{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$), abarcando regiones **frontales**, **centrales** y **temporales**.

Comparación A vs DF.

- Para $k = 2$:no se observaron diferencias significativas (*NS*).
- Para $k = 3$: no se observaron diferencias significativas (*NS*).
- Para $k = 4$: se registró una diferencia en PZ ($p = 4{,}0 \times 10^{-2}$), asociada al área **parietal media**.

En conjunto, los resultados en la banda alfa muestran una clara tendencia al incremento de la extensión topográfica y la magnitud de las diferencias significativas a medida que aumenta el orden k. Mientras que para $k = 2$ las diferencias se concentran en áreas frontales y parietales, los valores de $k = 3$ y $k = 4$ revelan una mayor participación de regiones temporales y occipitales, reflejando una integración funcional más global. Los valores de p más bajos observados para $k = 3$ y $k = 4$ sugieren que las interacciones de orden superior capturan relaciones multivariadas entre regiones cerebrales que no son detectadas por las conexiones pareadas ($k = 2$).
Para la banda **Beta** ([13–30 Hz]) y los órdenes $k = 2, 3, 4$ ver Figura 7.7, el test de *Kruskal–Wallis* reveló diferencias significativas entre los grupos, y las comparaciones múltiples mediante la prueba de *Dunn* mostraron los siguientes resultados:

Comparación A vs C.

- Para $k = 2$: se observaron diferencias significativas en los electrodos O2, FP2, T4, F7, F3, PZ, F8 y CZ ($p = 5{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-3}$, $5{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $7{,}0 \times 10^{-3}$), correspondientes a regiones **frontales**, **centrales**, **temporales** y **occipitales**.
- Para $k = 3$: las diferencias se registraron en FP1, FP2, F3, O2, F8, T3, T4 y PZ ($p = 4{,}0 \times 10^{-3}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$, $8{,}0 \times 10^{-3}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-4}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$, $2{,}0 \times 10^{-2}$), abarcando áreas **frontales**, **temporales**, **parietales** y **occipitales**.
- Para $k = 4$: las diferencias más marcadas se observaron en FP1, FP2, F3, F8, CZ, T4 y O2 ($p = 2{,}0 \times 10^{-2}$, $4{,}0 \times 10^{-3}$, $5{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$, $3{,}0 \times 10^{-3}$, $1{,}0 \times 10^{-4}$, $4{,}0 \times 10^{-3}$), involucrando regiones **frontales**, **centrales**, **temporales** y **occipitales**.

Comparación DF vs A.

- Para $k = 2$: se encontró una diferencia significativa en el electrodo T5 ($p = 2{,}0 \times 10^{-2}$), correspondiente al área **temporo-parietal izquierda**.
- Para $k = 3$: no se observaron diferencias significativas (*NS*).
- Para $k = 4$: no se observaron diferencias significativas (*NS*).

Comparación DF vs C.

- Para $k = 2$: se encontraron diferencias significativas en FP1, FP2, F3, F8, C3 y CZ ($p = 2{,}0 \times 10^{-2}$, $5{,}0 \times 10^{-3}$, $4{,}0 \times 10^{-3}$, $5{,}0 \times 10^{-3}$, $9{,}0 \times 10^{-3}$, $7{,}0 \times 10^{-3}$), correspondientes a regiones **frontales** y **centrales**.
- Para $k = 3$: las diferencias se restringieron a F7 y F3 ($p = 3{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-2}$), ambas ubicadas en el área **frontal izquierda**.
- Para $k = 4$: las diferencias se observaron en FP2, F3, CZ y T4 ($p = 2{,}0 \times 10^{-2}$, $4{,}0 \times 10^{-2}$, $1{,}0 \times 10^{-3}$, $3{,}0 \times 10^{-2}$), abarcando regiones **frontales**, **centrales** y **temporales derechas**.

En conjunto, los resultados en la banda beta muestran una tendencia similar a la observada en la banda alfa, donde el incremento del orden k se asocia con una mayor especificidad y coherencia topográfica de las diferencias significativas. Para $k = 2$, las diferencias se distribuyen ampliamente en regiones frontales y centrales, mientras que para $k = 3$ y $k = 4$ se observa una reorganización más focalizada, especialmente en áreas fronto-temporales. Los valores de p más bajos obtenidos para $k = 4$ sugieren que las interacciones de orden superior capturan relaciones neuronales más complejas. En consecuencia, el aumento del número de k mejora la sensibilidad del análisis, permitiendo identificar con mayor precisión los patrones diferenciales de conectividad funcional entre condiciones.
El análisis conjunto de las bandas **Theta**, **Alfa** y **Beta** revela un patrón consistente: las diferencias significativas entre los grupos no se distribuyen de manera uniforme en la corteza cerebral, sino que presentan una organización espacial específica que depende tanto de la banda de frecuencia como del orden k empleado en la construcción de los hipergrafos. A medida que el orden k aumenta, se observa una expansión y diversificación de las regiones corticales implicadas, pasando de una predominancia en áreas **frontales** y **centrales** para $k = 2$, hacia una participación más amplia que incluye regiones **temporales**, **parietales** y **occipitales** para $k = 3$ y $k = 4$.
Este incremento en la extensión topográfica y la disminución de los valores de p indican que los hipergrafos de orden superior capturan interacciones multivariadas más complejas entre regiones cerebrales. En particular, las relaciones de tercer y cuarto orden permiten detectar patrones de conexiones entre distintas areas del cerebro que no emergen a partir de las simples conexiones pareadas ($k = 2$). En síntesis, los resultados sugieren que el aumento del orden k potencia la capacidad del modelo hipergáfico para discriminar entre estados o condiciones.

7.5. Resultados MEG

Con el objetivo de comparar los cuantificadores obtenidos de los hipergrafos k-regulares construidos a partir de señales de EEG y MEG, fue necesario establecer una correspondencia

espacial entre los electrodos de EEG y los sensores de MEG. Para ello, se trabajó con ambos conjuntos de coordenadas: por un lado, las posiciones estandarizadas de los electrodos EEG (Fp1, Cz, O2, etc.), y por otro, las posiciones de los sensores MEG. Dado que estos sistemas difieren en su escala y en la ubicación de su centro, el primer paso consistió en normalizar y alinear las coordenadas. Primero se trasladó cada conjunto de puntos a su centro geométrico y luego se aplicó un reescalamiento de modo que ambos quedaran contenidos en una esfera unitaria centrada en el origen. De esta manera, se consiguió que electrodos EEG y sensores MEG pudieran compararse dentro de un mismo marco espacial. Una vez alineados, se realizó una visualización inicial en 3D, donde los electrodos EEG (en azul) y los sensores MEG (en rojo) muestran su distribución relativa. Posteriormente, con el fin de identificar correspondencias entre ambos sistemas, se calcularon las distancias euclidianas entre cada electrodo EEG y todos los sensores MEG. A cada electrodo se le asignó el sensor más cercano, identificando así el punto que mejor lo representa en el espacio. Finalmente, se construyó una segunda visualización en 3D, en la cual se representan los electrodos EEG con sus etiquetas, los sensores MEG correspondientes y líneas discontinuas que conectan cada par más próximo, evidenciando el mapeo espacial entre ambos sistemas. Ver Figura 7.8 y Tabla 7.2

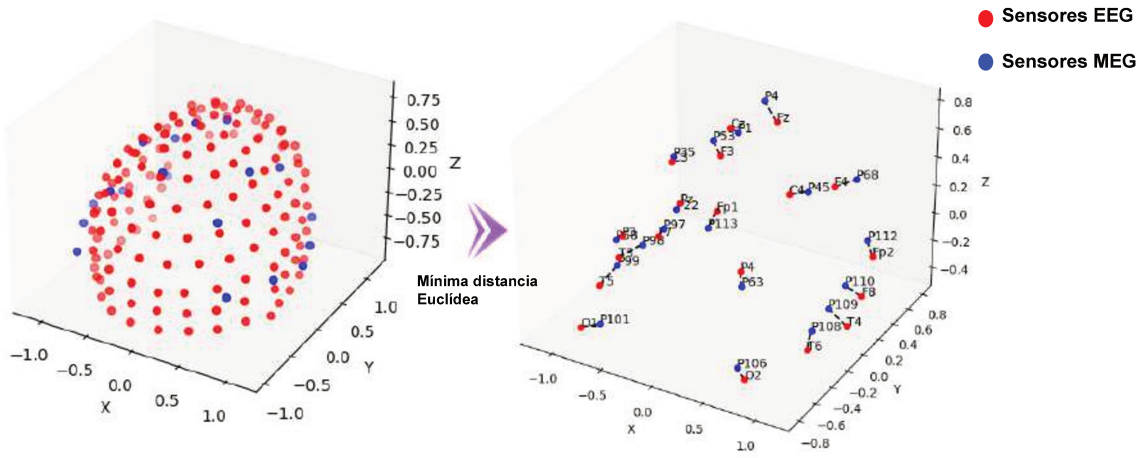


Figura 7.8: Distribución espacial de los electrodos EEG (azul) y los sensores MEG (rojo) tras la normalización y alineación de coordenadas en una esfera unitaria. La visualización permite observar la correspondencia espacial relativa entre ambos sistemas de registro.

Electrodo (EEG)	Sensor (MEG)
Fp1	113
Fp2	112
F7	97
F3	53
Fz	4
F4	68
F8	110
T3	98
C3	35
Cz	1
C4	45
T4	109
T5	99
P3	58
Pz	22
P4	63
T6	108
O1	101
O2	106

Tabla 7.2: Correspondencia entre electrodos de EEG y sensores de MEG utilizando la distancia mínima Euclidea.

7.5.1. Entropía

Como antes sea $\mathbf{S}_{k,b}^{(g)}(i)$ la entropía calculada para el paciente i perteneciente al grupo $g \in \{\mathrm{AD}, \mathrm{DCL}, \mathrm{C}\}$, en la combinación de k electrodos y en la banda de frecuencia b. De este modo, para cada grupo se obtiene un conjunto de valores de entropía

$$\{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{AD})}(i)\}_{i=1}^{36}, \quad \{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{DCL})}(i)\}_{i=1}^{18}, \quad \{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{C})}(i)\}_{i=1}^{26},$$

donde el subíndice i recorre los pacientes de cada grupo.

Sobre cada conjuntos de valores $\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(g)}$ se aplicó la prueba no paramétrica de Kruskal–Wallis para evaluar la existencia de diferencias globales entre los tres grupos (A, DCL y C). Posteriormente, se realizaron comparaciones post-hoc mediante el test de Dunn con corrección de Bonferroni. Los niveles de significancia se representan mediante asteriscos, siguiendo los criterios: $p < 0{,}05$: *, $p < 0{,}01$: **, $p < 0{,}001$: ***. Ver Figura 7.9, 7.10, 7.11

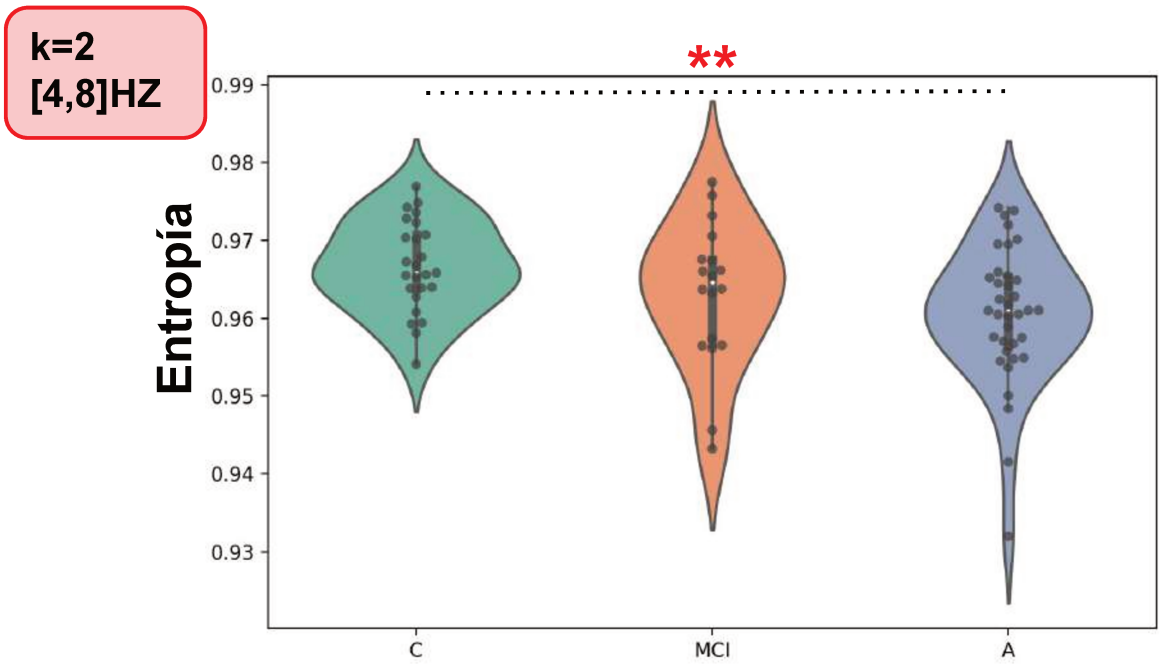


Figura 7.9: Representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2$ en la banda [4,8]Hz.

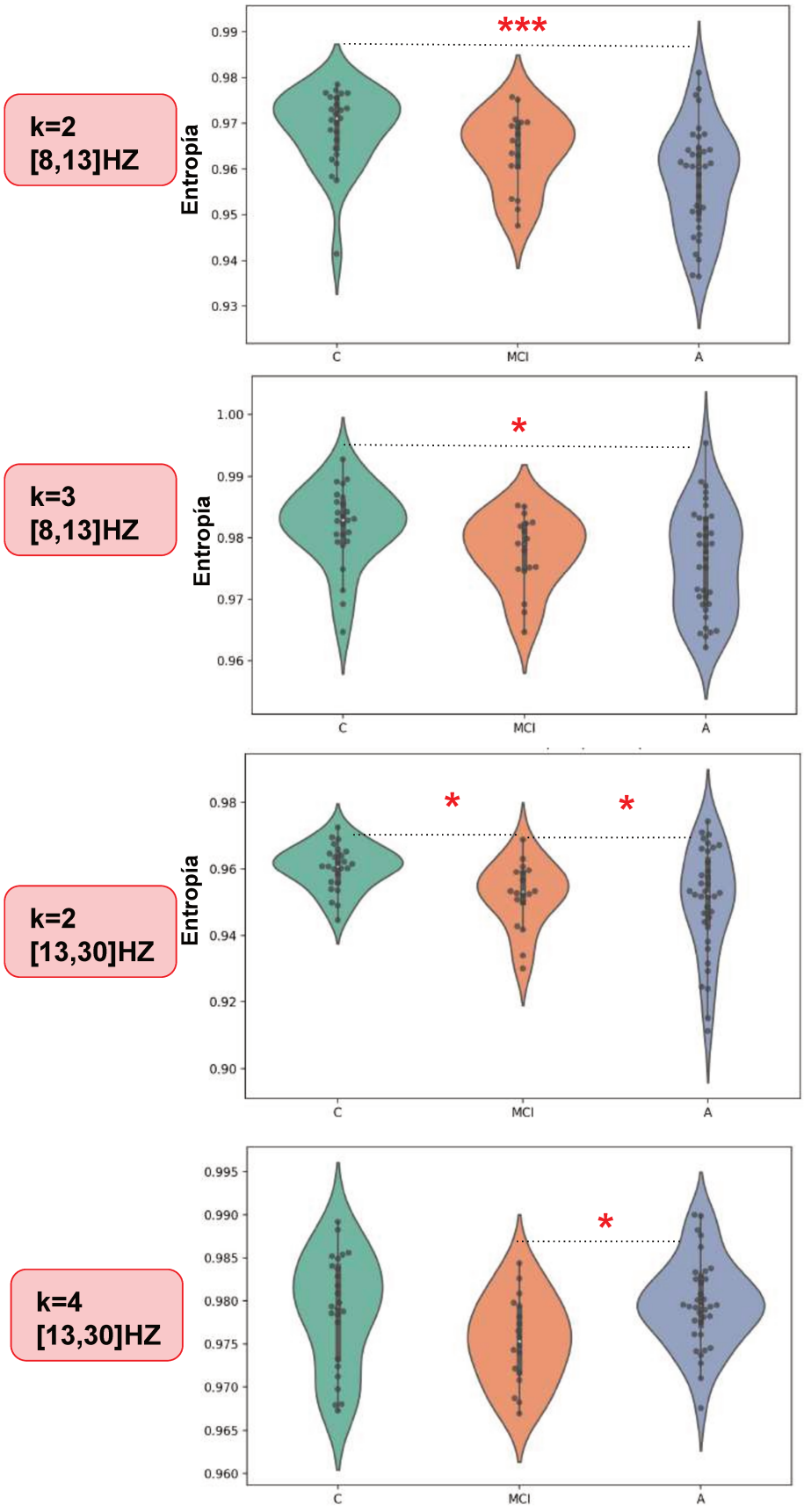


Figura 7.10: Representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2,3$ en la banda [8,13]Hz y representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2,4$ en la banda [13,30]Hz.

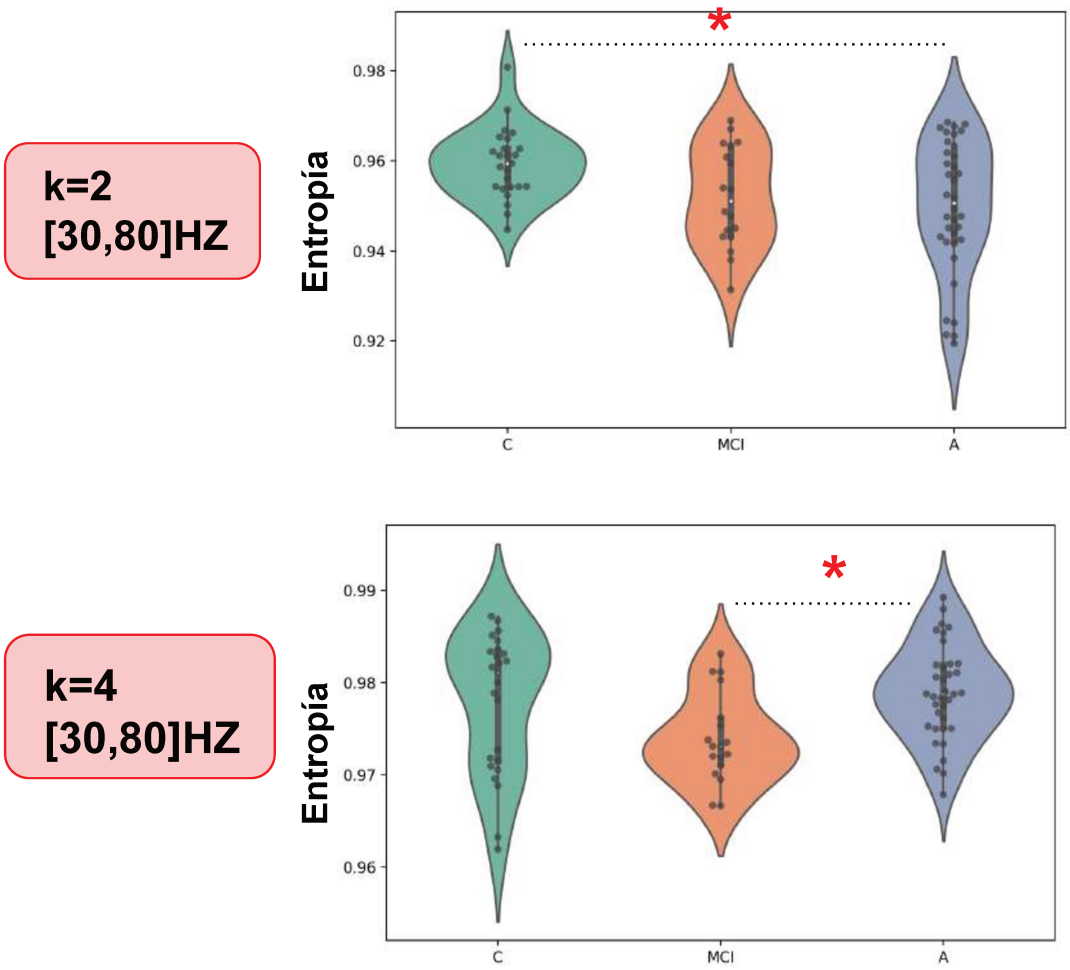


Figura 7.11: Representación gráfica de los valores de entropía para $k = 2,4$ en la banda [30,80]Hz.

El análisis de la entropía calculada sobre los hipergrafos k-regulares Figura 7.9, 7.10, 7.11 para los tres grupos (A),(DCL) y (C) revela un comportamiento dependiente tanto de la banda de frecuencia como del orden k del hipergrafo considerado. Los resultados de las comparaciones post-hoc muestran que, a medida que aumenta k, las diferencias significativas entre grupos tienden a concentrarse en bandas específicas y a disminuir en número. Para $k = 2$ se observa la mayor cantidad de diferencias significativas. Las comparaciones entre C y A muestran contrastes notables en varias bandas de frecuencia: theta $[4,8]$ Hz ($p = 0{,}008^{**}$), alfa $[8,13]$ Hz ($p = 0{,}0001^{***}$), beta $[13,30]$ Hz ($p = 0{,}01^{*}$) y gamma $[30,80]$ Hz ($p = 0{,}04^{*}$). Además, aparece una diferencia adicional entre DCL y C en la banda beta ($p = 0{,}02^{*}$). Este patrón sugiere que, para hipergrafos de bajo orden, la entropía refleja con claridad las diferencias de la organización funcional de los tres grupos considerados, abarcando tanto bandas lentas como rápidas.
Al aumentar el orden a $k = 3$, las diferencias significativas se reducen considerablemente, persistiendo únicamente una diferencia entre C y A en la banda alfa ($p = 0{,}01^{*}$). Esto indica que, cuando las interacciones involucran tríos de electrodos, la entropía discrimina de manera más específica, concentrándose en la actividad alfa, tradicionalmente asociada con los procesos de atención y memoria, los cuales se ven alterados en la enfermedad de Alzheimer. Finalmente, para $k = 4$ las diferencias entre grupos reaparecen en las bandas beta $[13,30]$ Hz ($p = 0{,}03^{*}$) y gamma $[30,80]$ Hz ($p = 0{,}02^{*}$) entre C y A, mientras que las bandas bajas no muestran contrastes significativos. Este resultado sugiere que, al considerar interacciones

más complejas entre cuatro electrodos, las diferencias de entropía se hacen evidentes únicamente en las frecuencias más altas. En conjunto, los resultados muestran que la capacidad discriminativa de la entropía depende del nivel de conectividad considerado. Con $k = 2$, la entropía captura diferencias amplias y globales entre estados cognitivos en múltiples bandas. Con $k = 3$, las diferencias se vuelven más focalizadas, restringiéndose a la banda alfa. Y con $k = 4$, las diferencias emergen nuevamente, pero se observan en las bandas rápidas.

7.5.2. Centralidad de vértices

En esta sección se presentan los resultados asociados a la *centralidad de los vértices* de los hipergrafos k-regulares obtenidos para cada paciente en cada estado considerado. Dado que trabajamos con 19 electrodos, se calculó la centralidad de cada vértice v_i ($i = 1, \ldots, 19$) de cada uno de los hipergrafos de cada sujeto y, posteriormente, se promedió la suma de las centralidades de cada v_i sobre el número total de los individuos de cada grupo. Para cada vértice v_i y cada grupo $g \in \{\mathrm{AD}, \mathrm{DCL}, \mathrm{C}\}$, se obtuvo la centralidad promedio:

$$d_g(v_i) = \frac{1}{N_g} \sum_{j=1}^{N_g} d_{g,j}(v_i),$$

donde $d_{g,j}(v_i)$ denota la centralidad del vértice v_i en el sujeto j del grupo g, y N_g es el número de sujetos en dicho grupo. Con el fin de evaluar diferencias estadísticas entre los tres grupos, se aplicó la prueba no paramétrica de Kruskal–Wallis para cada vértice v_i. En los casos en los que se detectó significancia global, se realizaron comparaciones post-hoc mediante el test de Dunn con corrección de Bonferroni. De este modo, se identificaron los vértices en los que existían diferencias significativas entre pares de grupos (A vs. DCL, A vs. C, DCL vs. C). En los casos sin diferencias significativas, se indica con *ns* (no significativo). Los niveles de significancia estadística se representan de la siguiente manera $p < 0{,}05 : *$, $p < 0{,}01 : **$, $p < 0{,}001 : ***$. Finalmente, nos concentramos en aquellos vértices donde se observaron diferencias significativas. Para cada par de grupos (g_1, g_2), se calculó la diferencia en la centralidad promedio

$$\Delta_{g_1,g_2}(v_i) = |d_{g_1}(v_i) - d_{g_2}(v_i)|,$$

y se representaron gráficamente dichas diferencias, destacando los vértices en los que se obtuvieron los contrastes estadísticamente significativos ver Figura 7.12, 7.13, 7.14, 7.15, 7.16.

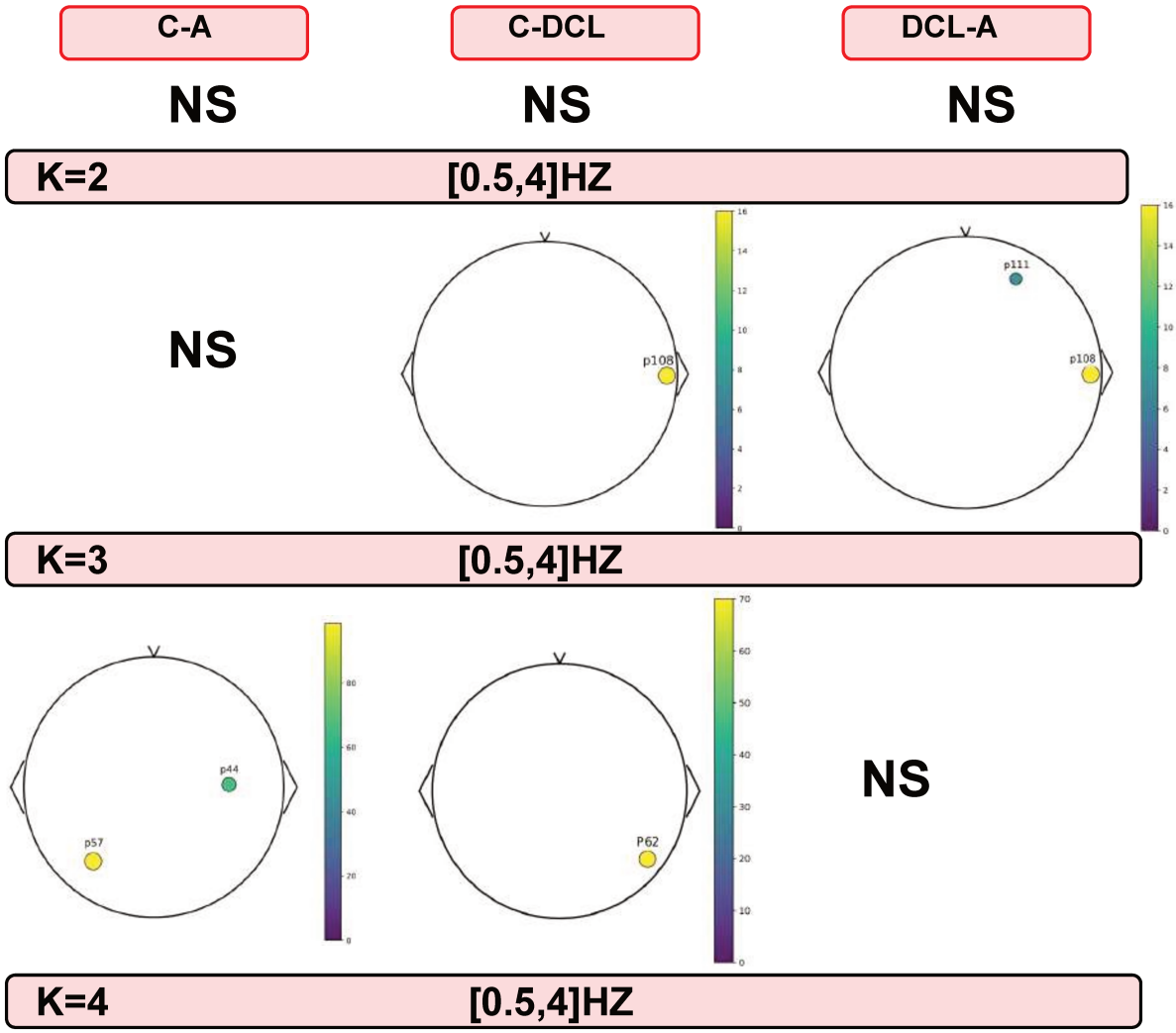


Figura 7.12: Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [0.5,4]Hz.

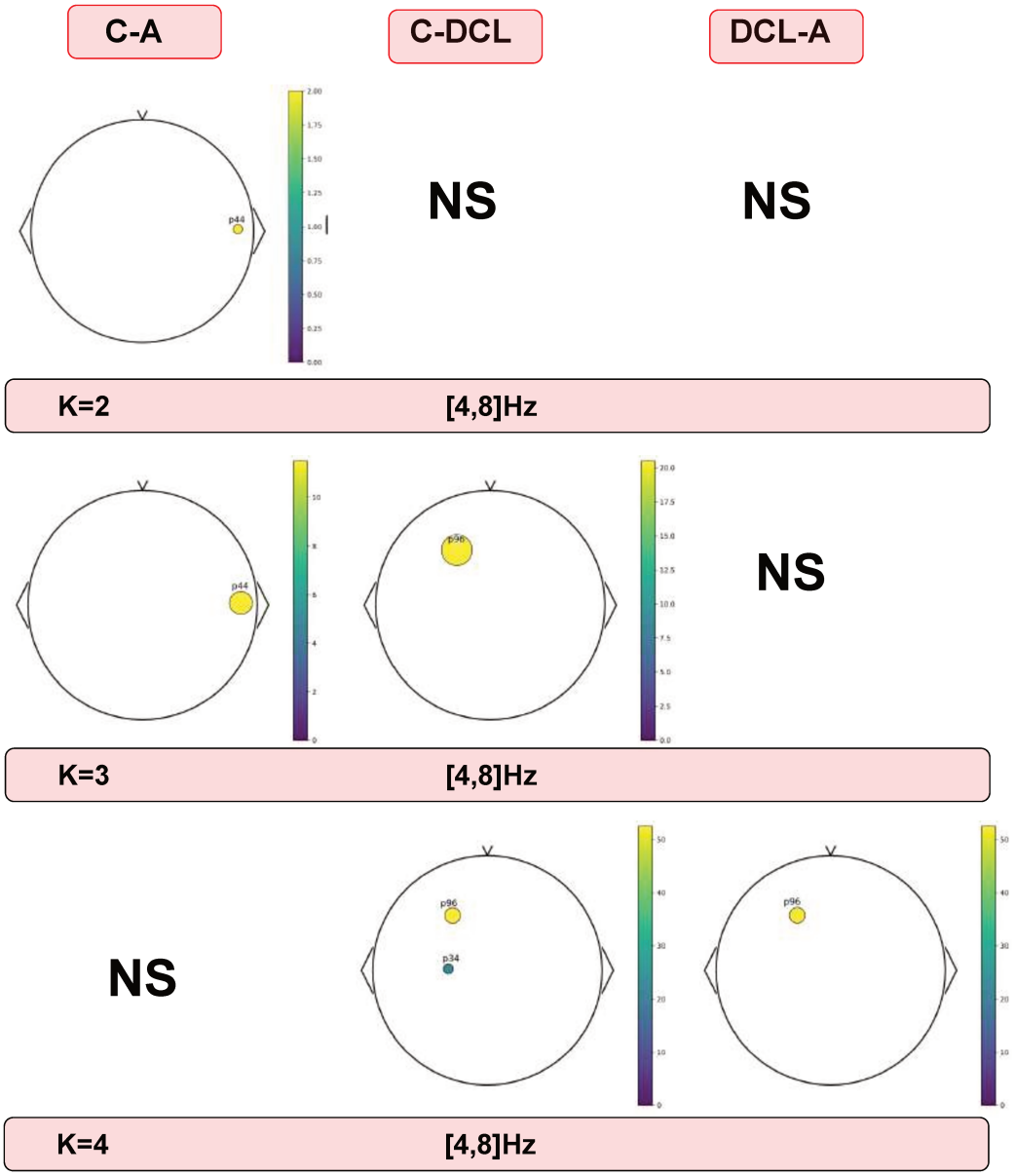


Figura 7.13: Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2, 3, 4$ en la banda [4,8]Hz.

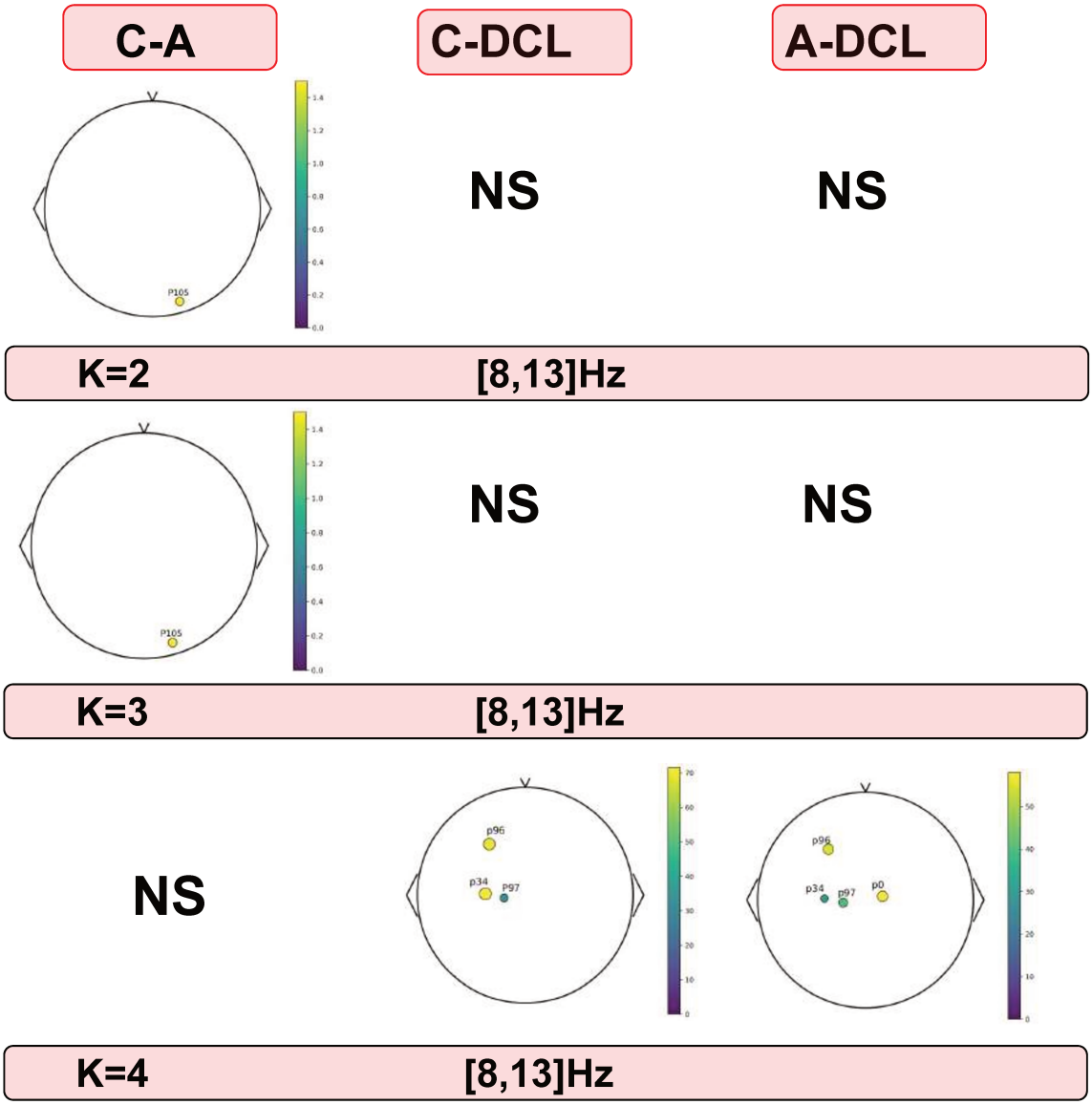


Figura 7.14: Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [8,13]Hz.

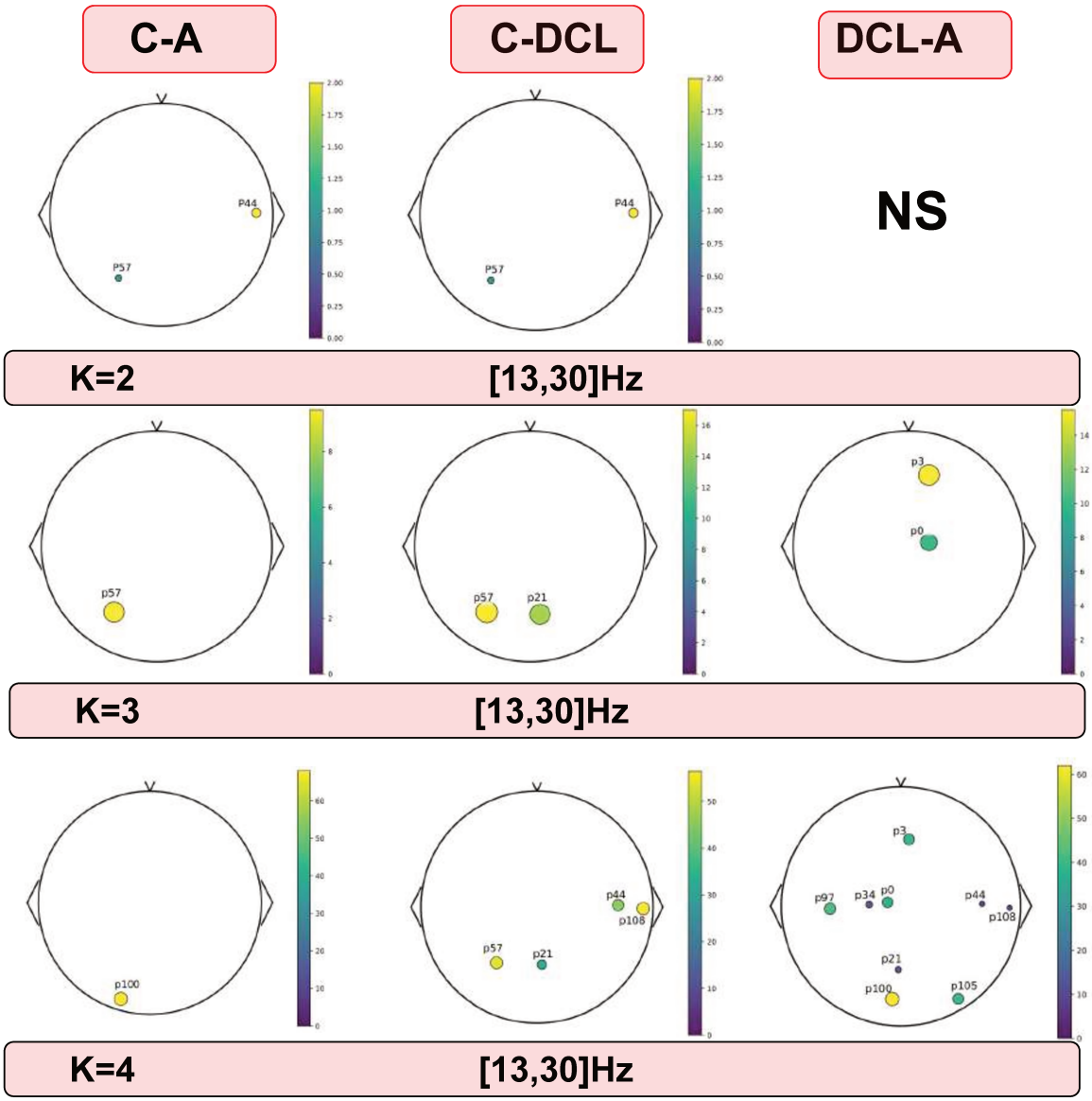


Figura 7.15: Representación gráfica de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [13,30]Hz.

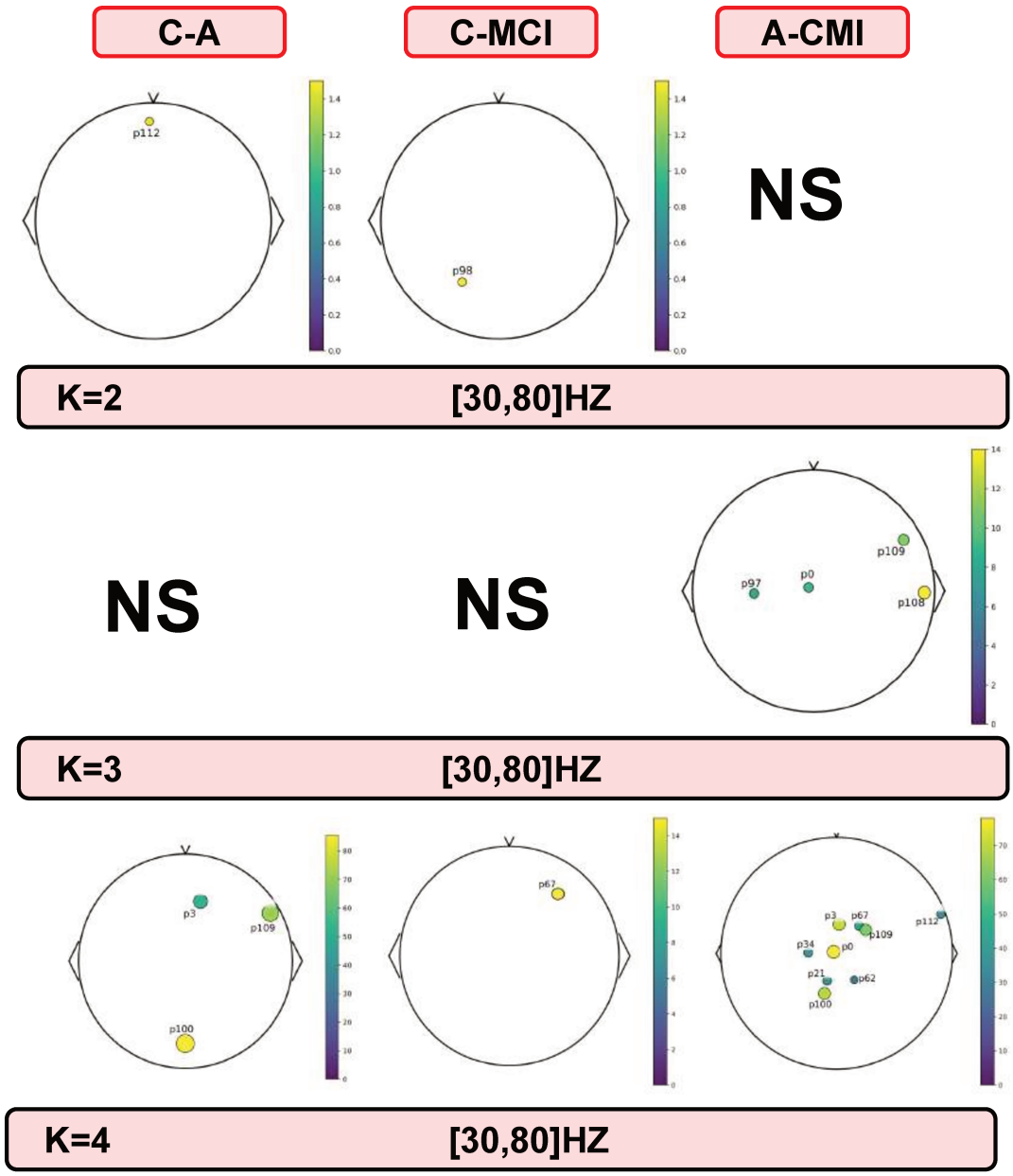


Figura 7.16: Representación gráfica, de la diferencia entre los valores de centralidad de vértices para $k = 2,3,4$ en la banda [30,80]Hz

En base a los resultados gráficos Figura 7.12, en la banda delta $[0{,}5,4]$ Hz para $k = 2$, no se observaron diferencias entre los grupos en ninguna de las comparaciones.
En el caso de $k = 3$, se detectaron diferencias entre los grupos AD y DCL en los electrodos P111 ($p = 0{,}03^{*}$) y P108 ($p = 0{,}03^{*}$), así como una diferencia adicional entre los grupos DCL y C en el electrodo P108 ($p = 0{,}01^{**}$).
Por último, para $k = 4$, se registraron diferencias significativas entre los grupos C y A en los electrodos P44 ($p = 0{,}01^{**}$) y P57 ($p = 0{,}04^{*}$), y entre los grupos DCL y C en el electrodo P62 ($p = 0{,}003^{**}$).
En términos funcionales, estas diferencias se localizaron principalmente en regiones parietales y temporales del cerebro. En particular, los electrodos P111 y P108 corresponden a áreas parietal inferior y temporal superior izquierdas, implicadas en la integración multisensorial,

la memoria de trabajo y el procesamiento auditivo. Los electrodos P44 y P57 se sitúan sobre regiones parietal superior y temporal media derechas, asociadas a la integración visoespacial y semántica, mientras que el electrodo P62 se ubica en la zona parieto–occipital derecha, vinculada al procesamiento visual y la atención espacial.

En conjunto, estos resultados indican que, si bien las diferencias en la banda delta son escasas para $k = 2$, al aumentar el número de electrodos involucrados ($k = 3$ y $k = 4$) emergen contrastes localizados entre grupos en regiones corticales específicas. En la banda theta $[4, 8]$Hz ver Figura 7.13, se observaron diferencias significativas entre grupos en un conjunto reducido de electrodos, dependiendo del valor de k. Para $k = 2$, se registró una diferencia entre los grupos C y A en el electrodo P44 ($p = 0{,}01^{**}$). De manera similar, para $k = 3$, se mantuvo esta diferencia en el mismo electrodo P44 ($p = 0{,}01^{**}$), mientras que entre los grupos DCL y C apareció una diferencia adicional en el electrodo P96 ($p = 0{,}01^{**}$). Finalmente, para $k = 4$, no se observaron diferencias entre C y A, pero sí se evidenciaron contrastes entre A y DCL en el electrodo P96 ($p = 0{,}008^{**}$), y entre MCI y CN en los electrodos P34 ($p = 0{,}04^{*}$) y P96 ($p = 0{,}00005^{***}$).

Desde el punto de vista funcional, estas diferencias se localizaron en regiones parietales y occipito–temporales. El electrodo P44 corresponde a la región parietal superior derecha, asociada con la integración visoespacial y la atención. Los electrodos P96 y P34 se ubican sobre áreas occipitotemporales derechas, vinculadas con el procesamiento visual y la comunicación entre regiones posteriores y temporales.

En conjunto, estos resultados muestran que, en la banda theta, las diferencias entre grupos se concentran en regiones posteriores, con una participación destacada de los electrodos parietales y occipitotemporales derechos. Además, el aumento del orden k modifica la topografía de las diferencias: para $k = 2$ y $k = 3$ las alteraciones se mantienen en una misma región (P44), mientras que para $k = 4$ emergen diferencias adicionales más específicas en P34 y P96.

En base a los resultados obtenidos (ver Figuras 7.14), para la banda $[8, 13]$ Hz , se observaron los siguientes patrones en las diferencias de centralidad de vértices entre grupos.

Para $k = 2$, se registraron diferencias entre los grupos C y A en el electrodo P105 ($p = 0{,}04^{*}$). En el caso de $k = 3$, también se observaron diferencias entre los grupos C y A en el electrodo P109 ($p = 0{,}03^{*}$). No se detectaron diferencias significativas para las demás comparaciones en este orden.

Por último, para $k = 4$, las diferencias se manifestaron principalmente entre los grupos A y DCL en los electrodos P96 ($p = 0{,}003^{**}$), P97 ($p = 0{,}007^{**}$) y P0 ($p = 0{,}008^{**}$), y entre los grupos DCL y C en los electrodos P96 ($p = 0{,}002^{**}$), P97 ($p = 0{,}02^{*}$) y P34 ($p = 0{,}001^{**}$). En conjunto, estos resultados indican que en la banda alfa las diferencias entre grupos se localizan principalmente en regiones posteriores y occipitales.

En base a los resultados obtenidos para la banda **beta** $[13, 30]$ ver Figura 7.15 se observaron diferencias significativas entre grupos en diversas regiones corticales.

Para $k = 2$, se registraron diferencias entre los grupos DCL y C en el electrodo P111 ($p = 0{,}01^{**}$), correspondiente a una región parietal posterior derecha. Asimismo, entre los grupos C y A se hallaron diferencias en los electrodos P44 ($p = 0{,}003^{**}$) y P57 ($p = 0{,}04^{*}$), localizados en regiones parietales posteriores bilaterales.

Para $k = 3$, se detectaron diferencias adicionales entre los grupos C y A en los electrodos P3 ($p = 0{,}01^{*}$) y P0 ($p = 0{,}003^{**}$), ambos asociados a regiones occipitales. También se observaron diferencias entre los grupos DCL y C en el electrodo P100 ($p = 0{,}03^{*}$), correspondiente a una región parietal derecha.

Por último, para $k = 4$, se evidenció una mayor extensión espacial de las diferencias entre grupos. Entre C y A, se observaron diferencias en P3 ($p = 0{,}0002^{***}$), P0 ($p = 0{,}001^{**}$), P108 ($p = 0{,}0005^{***}$), P34 ($p = 0{,}03^{*}$), P97 ($p = 0{,}001^{**}$), P44 ($p = 0{,}01^{**}$), P21 ($p = 0{,}0005^{***}$),

P105 ($p = 0{,}002^{**}$) y P100 ($p = 0{,}003^{**}$), distribuidos principalmente en regiones parieto–occipitales posteriores. En tanto, para el contraste entre DCL y A, las diferencias se localizaron en P21 ($p = 0{,}04^{*}$) y P57 ($p = 0{,}01^{**}$), mientras que entre A y DCL se detectaron efectos en P21 ($p = 0{,}02^{*}$), P57 ($p = 0{,}04^{*}$), P108 ($p = 0{,}02^{*}$) y P44 ($p = 0{,}03^{*}$), todos ellos en regiones parietales posteriores.
En conjunto, estos resultados muestran que en la banda beta las diferencias en centralidad de vértices entre grupos se concentran principalmente en las regiones parietales y occipitales conforme aumenta la complejidad del orden k. Finalmenta para la banda **gamma baja** $[30, 80]$ Hz ver Figura 7.16 se observaron diferencias significativas en la centralidad de vértices entre los grupos en distintas regiones corticales.
Para $k = 2$, se identificaron diferencias entre los grupos C y A en el electrodo P112 ($p = 0{,}01^{**}$), correspondiente a una región parietal posterior derecha. Asimismo, entre los grupos DCL y C se observaron diferencias en el electrodo P98 ($p = 0{,}03^{*}$), asociado a una región parietal izquierda.
En el caso de $k = 3$, las diferencias fueron más localizadas: entre A y DCL se observó una diferencia significativa en el electrodo P0 ($p = 0{,}01^{**}$), correspondiente a una región occipital medial, mientras que no se hallaron diferencias en el contraste C vs A ni en DCL vs C .
Finalmente, para $k = 4$, emergieron múltiples diferencias distribuidas en regiones parieto–occipitales. Entre C y A, las diferencias se observaron en los electrodos P109 ($p = 0{,}02^{*}$) y P3 ($p = 0{,}03^{*}$). Entre A y DCL, se registraron efectos en P108 ($p = 0{,}02^{*}$), P97 ($p = 0{,}008^{**}$), P109 ($p = 0{,}03^{*}$), P3 ($p = 0{,}03^{*}$), P100 ($p = 0{,}01^{**}$), P0 ($p = 0{,}001^{**}$), P34 ($p = 0{,}0003^{***}$), P112 ($p = 0{,}03^{*}$), P109 ($p = 0{,}01^{**}$), P3 ($p = 0{,}0003^{***}$), P21 ($p = 0{,}0002^{***}$), P67 ($p = 0{,}03^{*}$), P97 ($p = 0{,}0002^{***}$), P108 ($p = 0{,}003^{**}$) y P62 ($p = 0{,}03^{*}$), distribuidos principalmente en regiones parietales y occipitales posteriores. Además, en el contraste DCL vs C, se encontraron diferencias en los electrodos P67 ($p = 0{,}01^{**}$), ubicados en regiones parietales posteriores.
En conjunto, los resultados en la banda gamma baja indican que, a medida que aumenta el orden k, se incrementa la extensión espacial de las diferencias en centralidad de vértices entre grupos, concentrándose principalmente en regiones parieto–occipitales.

7.6. Resultado FMRI

7.6.1. Entropías

En este análisis se trabajó con la tercera base de datos descripta en la Subsección 7.3.1
Para cada participante se empleó el archivo `ROISignals.ID.mat`, que contiene las series temporales de activación BOLD correspondientes a 170 regiones de interés (ROIs).
En primer lugar, se cargaron las matrices de señales de cada sujeto y se eliminaron las columnas con valores faltantes (*NaNs*) ROIs (34,35,80,81), de lo que sultaron 166 regiones (ROIs). Posteriormente, cada serie temporal fue estandarizada mediante el método *z-score*. Con las señales estandarizada, se construyó la matriz de correlacion $R = S^{\top} S$.
A partir de cada matriz de correlaciones se calcularon los menores asociados considerando órdenes $k = 2$ y $k = 3$, con los cuales se construyeron los hipergrafos k-regulares correspondientes. Sobre cada uno de los hipergrafos obtenidos para las tres condiciones analizadas (**A**, **C** y **MCI**), se calculó la entropía asociada.
En total, se analizaron 96 hipergrafos correspondientes a la condición **A**, 94 a la condición **MCI** y 90 a la condición **C**. De este modo, para cada grupo se obtiene un conjunto de valores de entropía

$$\{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{A})}(i)\}_{i=1}^{96}, \quad \{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{MCI})}(i)\}_{i=1}^{94}, \quad \{\mathbf{S}(\mathscr{H})_{k,b}^{(\mathrm{C})}(i)\}_{i=1}^{90},$$

Los valores de entropía obtenidos para los grupos AD, C y MCI fueron comparados mediante el test no paramétrico de *Kruskal–Wallis*, seguido de la prueba post-hoc de *Dunn* con corrección de Bonferroni. Los resultados se representaron mediante gráficos de violín que muestran la distribución y dispersión de la entropía en cada grupo. Los resultados obtenidos para la entropía se muestran a continuación ver Figura 7.17. Para $k = 2$, el test de Kruskal–Wallis mostró diferencias significativas entre los grupos $(p = 1{,}36 \times 10^{-2}, *)$. El análisis post-hoc de Dunn con corrección de Bonferroni reveló una diferencia significativa entre los grupos **A** y **MCI** $(p = 1{,}49 \times 10^{-2}, *)$, mientras que no se observaron diferencias entre **A–C** ni entre **MCI–C**.
Para $k = 3$, las diferencias se hicieron más marcadas $(p = 2{,}10 \times 10^{-3}, **)$. En este caso, las comparaciones post-hoc indicaron un refuerzo de la diferencia entre **A–MCI** $(p = 3{,}0 \times 10^{-3}, **)$, así como la aparición de una diferencia significativa entre **A–C** $(p = 2{,}23 \times 10^{-2}, *)$, mientras que no se observaron diferencias entre **C–MCI**.

En conjunto, los resultados muestran que al aumentar el orden k, la separación entre **A-MCI** se vuelve más significativa y además emerge una nueva diferencia entre **A-C**, reflejando una mayor discriminación en la entropía de las redes cerebrales con el avance del deterioro cognitivo.

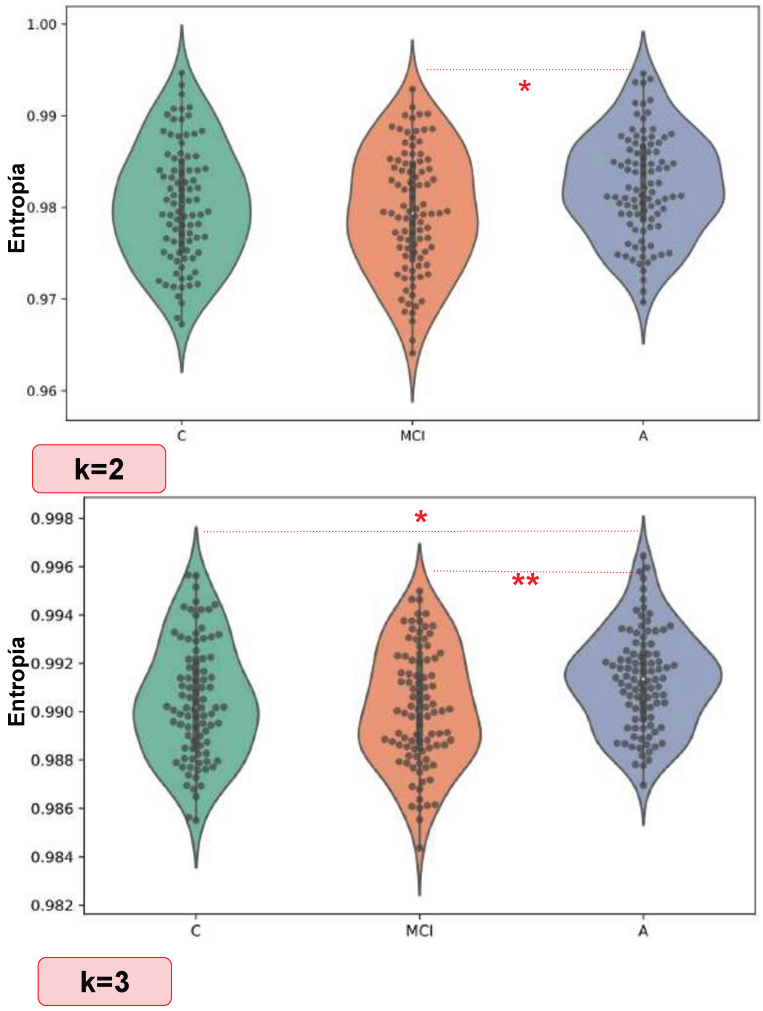


Figura 7.17: Valores de la entropía para $k = 2$ y $k = 3$.

7.6.2. Centralidad de Vértices

A partir de cada uno de los hipergrafos k regulares se obtuvieron las matrices de incidencia asociadas y se analizó la centralidad de los vértices (ROIs) dentro del hipergrafo. En dichas matrices, cada fila representa una hiperarista y cada columna una región cerebral.
Para cada participante $l \in Y = \{A, C, MCI\}$ se calcularon las centralidades de los $m = 166$ vértices del hipergrafo (ROIs), obteniendo un conjunto de valores

$$\mathscr{C}^{(l)} = \{d_l(1), ..., d_l(166)\}.$$

De esta manera, cada participante queda representado por un vector de 166 valores que describen la centralidad de cada vértice.
Posteriormente, se agruparon los vectores de centralidades según la condición clínica del sujeto, formando tres matrices

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_A &= \{\mathscr{C}^{(l)} : l \in \text{A}\}, & \mathscr{C}_A &\in \mathbb{R}^{N_A \times 166}, \\ \mathscr{C}_C &= \{\mathscr{C}^{(l)} : l \in \text{C}\}, & \mathscr{C}_C &\in \mathbb{R}^{N_C \times 166}, \\ \mathscr{C}_{MCI} &= \{\mathscr{C}^{(l)} : l \in \text{MCI}\}, & \mathscr{C}_{MCI} &\in \mathbb{R}^{N_M CI \times 166}. \end{aligned}$$

donde N_A, N_C y N_{MCI} representan el número de participantes de cada grupo. Para evaluar si existían diferencias significativas entre los grupos en cada vértice, se aplicó la prueba no paramétrica de **Kruskal–Wallis**, adecuada para comparar distribuciones sin asumir normalidad. En los casos donde se obtuvo un $p < 0{,}05$, se aplicó la prueba post-hoc de **Dunn** con corrección de Bonferroni para identificar entre qué pares de grupos se encontraban las diferencias significativas. Adicionalmente, se calcularon las diferencias absolutas entre los vectores de centralidades de cada grupo, con el fin de cuantificar el grado de separación global entre ellos,tomando las diferencias asociadas a los electrodos donde existian diferencias significativas.

$$\begin{aligned} \Delta_{A,MCI} &= |\mathscr{C}_A - \mathscr{C}_{MCI}|, \\ \Delta_{A,C} &= |\mathscr{C}_A - \mathscr{C}_C|, \\ \Delta_{C,MCI} &= |\mathscr{C}_C - \mathscr{C}_{MCI}|. \end{aligned}$$

Estos vectores Δ proporcionan una medida de distancia entre las centralidades de los grupos, reflejando el nivel de diferencia en la conectividad estructural entre condiciones clínicas.
Los resultados obtenidos para la diferencia de centralidad de vértices se muestran a continuación ver Figura 7.18 y 7.19.

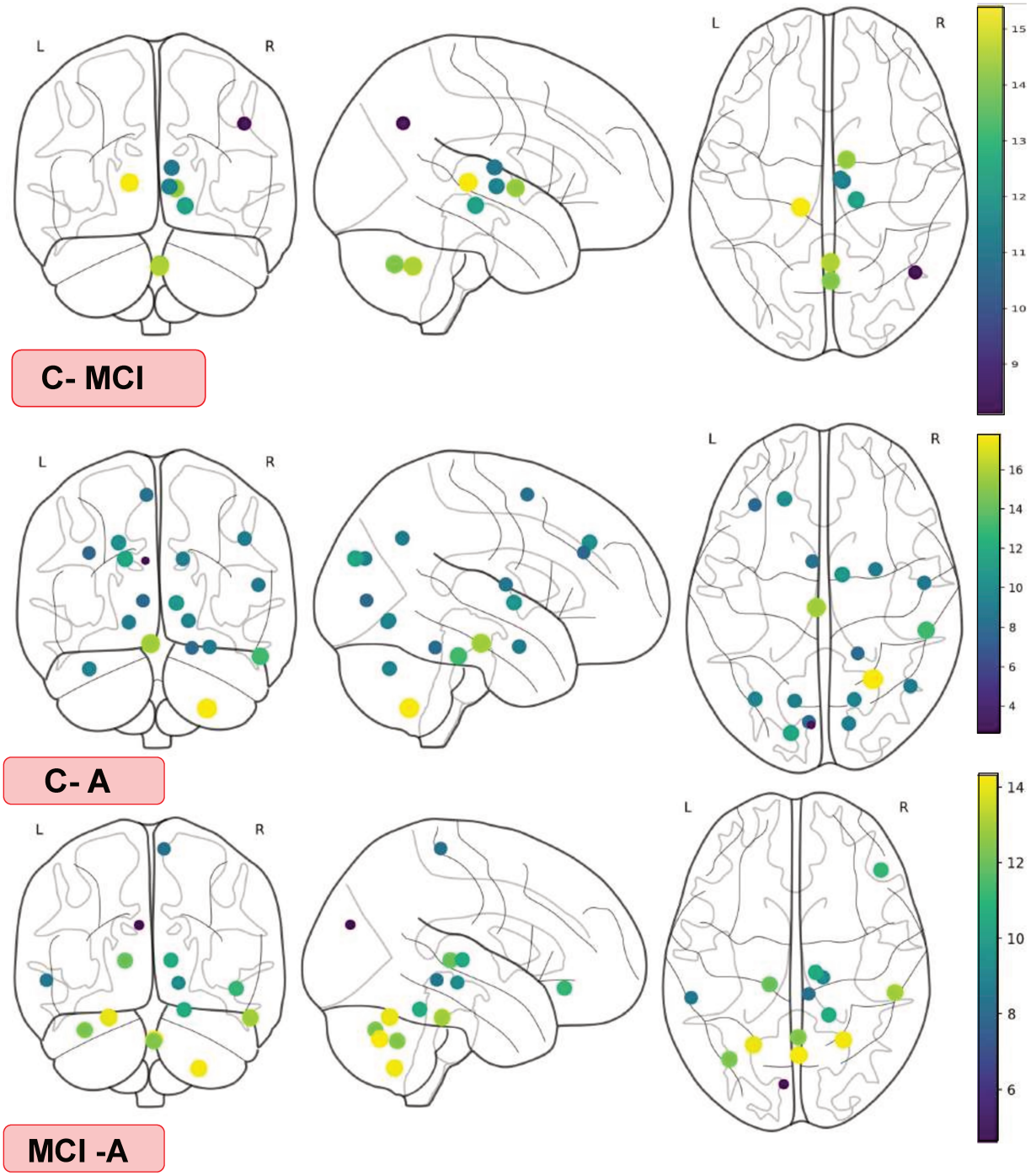


Figura 7.18: Diferencias entre las centralidad de vértices para k=2 en cada par de estados.

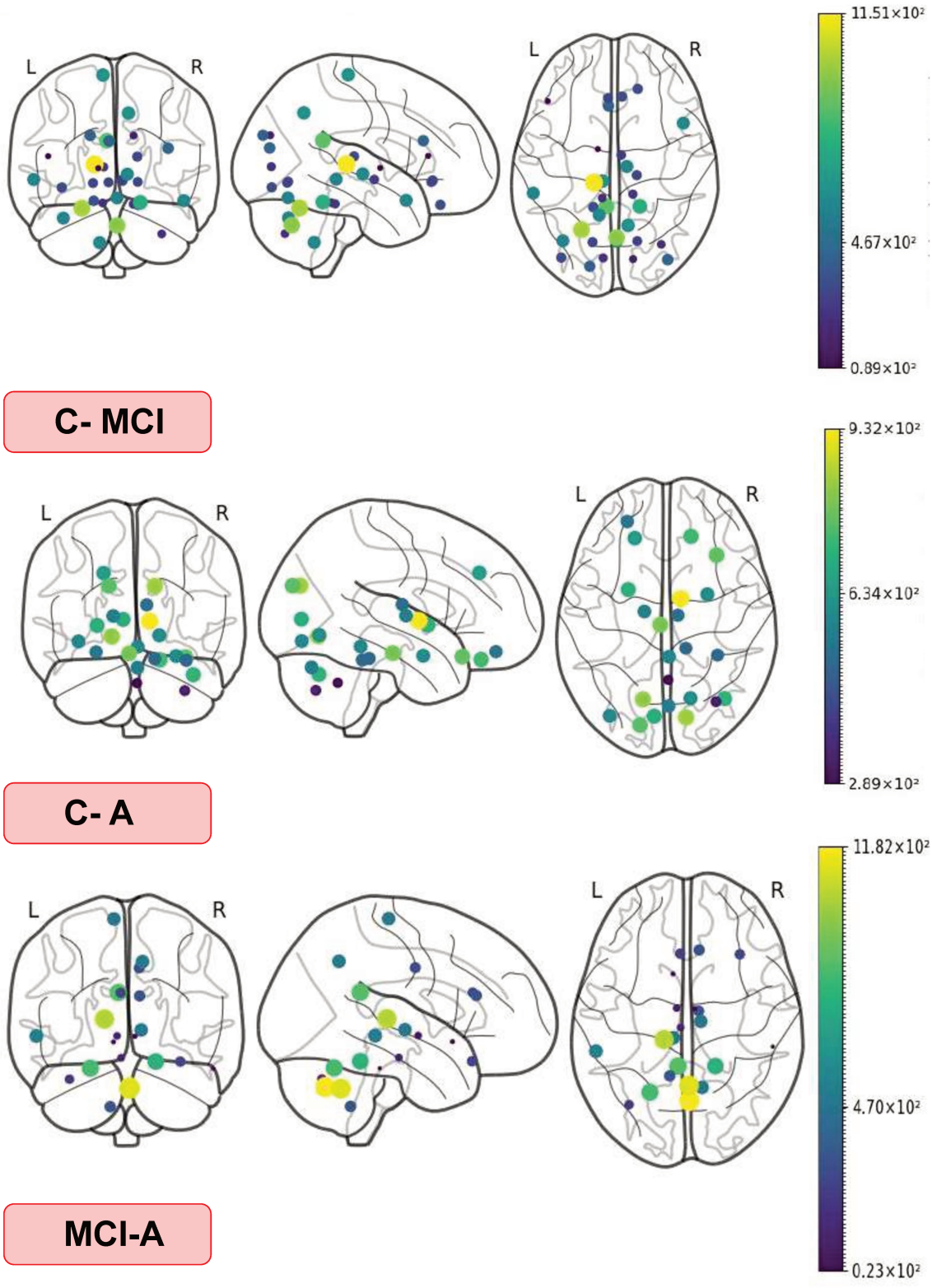


Figura 7.19: Diferencias entre las centralidad de vértices para k=3 en cada par de estados.

El análisis de la centralidad de vértices para $k = 2$ evidenció diferencias significativas entre los grupos **A**, **C** y **MCI** en múltiples regiones corticales y subcorticales. En la comparación **A vs C**, se observaron valores significativos en el **ROI 3** (área frontal media izquierda, $p = 1 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 5** (frontal superior derecho, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 14** (cingulado

anterior izquierdo, $p = 1 \times 10^{-2}$, **), **ROI 15** (cingulado anterior derecho, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 46** (precentral izquierdo, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 47** (precentral derecho, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 50** (postcentral derecho, $p = 1 \times 10^{-2}$, **), **ROI 51** (parietal inferior izquierdo, $p = 9 \times 10^{-3}$, **), **ROI 52** (parietal inferior derecho, $p = 3 \times 10^{-3}$, **), **ROI 53** (supramarginal izquierdo, $p = 3 \times 10^{-4}$, ***), **ROI 70** (temporal medio derecho, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 74** (temporal inferior izquierdo, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 81** (occipital medio derecho, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 89** (precuneus derecho, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 94** (cuneus izquierdo, $p = 9 \times 10^{-3}$, **), **ROI 95** (cuneus derecho, $p = 4 \times 10^{-2}$, *), **ROI 102** (hipocampo derecho, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 103** (amígdala izquierda, $p = 3 \times 10^{-4}$, ***), **ROI 108** (putamen izquierdo, $p = 1 \times 10^{-4}$, ****), **ROI 118** (ínsula izquierda, $p = 5 \times 10^{-3}$, **), **ROI 119** (ínsula derecha, $p = 4 \times 10^{-3}$, **), **ROI 124** (cerebelo anterior izquierdo, $p = 7 \times 10^{-4}$, ***), **ROI 126** (cerebelo posterior izquierdo, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 138** (cerebelo posterior derecho, $p = 1 \times 10^{-2}$, **), **ROI 142** (cerebelo lateral izquierdo, $p = 1 \times 10^{-2}$, **), **ROI 145** (cerebelo lateral derecho, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 148** (vermis cerebeloso, $p = 4 \times 10^{-2}$, *), y **ROI 159** (temporal superior derecho, $p = 4 \times 10^{-3}$, **).

En la comparación **A vs MCI**, las diferencias se localizaron en el **ROI 12** (frontal medial derecho, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 15** (cingulado anterior derecho, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 49** (postcentral izquierdo, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 70** (temporal medio derecho, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 74** (temporal inferior izquierdo, $p = 3 \times 10^{-2}$, *), **ROI 94** (cuneus izquierdo, $p = 1 \times 10^{-2}$, **), **ROI 95** (cuneus derecho, $p = 7 \times 10^{-3}$, **), **ROI 102** (hipocampo derecho, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 108** (putamen izquierdo, $p = 2 \times 10^{-3}$, **), **ROI 118** (ínsula izquierda, $p = 5 \times 10^{-3}$, **), **ROI 119** (ínsula derecha, $p = 4 \times 10^{-3}$, **), **ROI 126** (cerebelo posterior izquierdo, $p = 1 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 142** (cerebelo lateral izquierdo, $p = 1 \times 10^{-3}$, ***), y **ROI 145** (cerebelo lateral derecho, $p = 4 \times 10^{-3}$, **).

Por su parte, en la comparación **MCI vs C**, las diferencias se concentraron en el **ROI 70** (temporal medio derecho, $p = 2 \times 10^{-2}$, *), **ROI 108** (putamen izquierdo, $p = 1 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 118** (ínsula izquierda, $p = 1 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 119** (ínsula derecha, $p = 2 \times 10^{-3}$, **), **ROI 124** (cerebelo anterior izquierdo, $p = 7 \times 10^{-4}$, ***), **ROI 126** (cerebelo posterior izquierdo, $p = 1 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 142** (cerebelo lateral izquierdo, $p = 1 \times 10^{-3}$, ***), y **ROI 145** (cerebelo lateral derecho, $p = 4 \times 10^{-3}$, **).

En síntesis, las comparaciones que involucran al grupo **MCI** muestran una mayor concentración de diferencias en estructuras subcorticales (putamen, ínsulas) y cerebelosas (regiones posteriores y laterales), sugiriendo una alteración progresiva en circuitos relacionados con la integración sensoriomotora y la coordinación funcional. En contraste, las comparaciones **A vs C** exhiben un patrón más extenso que abarca áreas frontales, parietales y temporales, lo que sugiere que en las etapas iniciales del deterioro cognitivo las diferencias de centralidad son más difusas, afectando redes de integración global antes de focalizarse en regiones subcorticales y cerebelosas en el avance de la enfermedad.

Del análisis de resultados para $k = 3$ (ver Figura 7.19), se observaron diferencias significativas en múltiples regiones cerebrales (**ROIs**) al comparar los grupos **A**, **C** y **MCI**. Los valores-p se expresan en notación científica y su equivalencia por asteriscos corresponde a: ($* \; p < 0{,}05$; $** \; p < 0{,}01$; $*** \; p < 0{,}001$; $**** \; p < 0{,}0001$).

En la comparación **A vs C**, se hallaron diferencias notables en regiones frontales, temporales y parietales, incluyendo el **ROI 3** (Frontal Superior Izquierdo, $p = 1{,}27 \times 10^{-2}$, *), **ROI 26** (Frontal Inferior Derecho, $p = 4{,}59 \times 10^{-6}$, ****), **ROI 27** (Frontal Medio Derecho, $p = 3{,}33 \times 10^{-3}$, **), **ROI 30** (Frontal Inferior Orbital Derecho, $p = 3{,}70 \times 10^{-3}$, **), **ROI 46** (Cíngulo Medio Izquierdo, $p = 6{,}00 \times 10^{-4}$, ****), **ROI 47** (Cíngulo Medio Derecho, $p = 5{,}44 \times 10^{-5}$, ****), **ROI 50** (Hipocampo Izquierdo, $p = 2{,}15 \times 10^{-7}$, ****), **ROI 51** (Hipocampo Derecho, $p = 4{,}68 \times 10^{-6}$, ****), **ROI 52** (Amígdala Izquierda, $p = 7{,}83 \times 10^{-6}$, ****), **ROI 53** (Amígdala Derecha, $p = 1{,}32 \times 10^{-5}$, ****), **ROI 57**

(Precúneo Izquierdo, $p = 5{,}70 \times 10^{-3}$, **), **ROI 60** (Precúneo Derecho, $p = 2{,}90 \times 10^{-3}$, **), **ROI 77** (Parietal Superior Derecho, $p = 1{,}89 \times 10^{-2}$, *), **ROI 96** (Temporal Medio Derecho, $p = 2{,}21 \times 10^{-2}$, *), **ROI 98** (Temporal Inferior Derecho, $p = 1{,}74 \times 10^{-2}$, *), **ROI 100** (Temporal Medio Izquierdo, $p = 1{,}96 \times 10^{-2}$, *), **ROI 114** (Occipital Medio Derecho, $p = 3{,}89 \times 10^{-2}$, *), **ROI 117** (Occipital Inferior Izquierdo, $p = 1{,}73 \times 10^{-2}$, *), **ROI 119** (Fusiforme Derecho, $p = 3{,}02 \times 10^{-2}$, *), **ROI 124** (Língula Izquierda, $p = 1{,}38 \times 10^{-2}$, *), **ROI 126** (Cerebelo Izquierdo, $p = 4{,}00 \times 10^{-3}$, **), **ROI 127** (Cerebelo Derecho, $p = 3{,}67 \times 10^{-2}$, *), y **ROI 159** (Tálamo Izquierdo, $p = 1{,}70 \times 10^{-2}$, *). Estas diferencias se concentran principalmente en el sistema límbico (hipocampo y amígdala), así como en regiones frontales y parietales, indicando un patrón típico de deterioro cortical en la enfermedad de Alzheimer.

En la comparación **A vs MCI**, se observaron diferencias en el **ROI 30** (Frontal Inferior Orbital Derecho, $p = 4{,}88 \times 10^{-2}$, *), **ROI 38** (Frontal Medio Izquierdo, $p = 1{,}00 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 39** (Frontal Medio Derecho, $p = 2{,}40 \times 10^{-3}$, **), **ROI 72** (Cíngulo Posterior Izquierdo, $p = 1{,}66 \times 10^{-2}$, *), **ROI 73** (Cíngulo Posterior Derecho, $p = 9{,}30 \times 10^{-3}$, **), **ROI 89** (Temporal Superior Izquierdo, $p = 7{,}30 \times 10^{-3}$, **), **ROI 94** (Temporal Superior Derecho, $p = 7{,}50 \times 10^{-4}$, ****), **ROI 95** (Temporal Medio Derecho, $p = 1{,}10 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 102** (Temporal Inferior Izquierdo, $p = 1{,}94 \times 10^{-2}$, *), **ROI 103** (Temporal Inferior Derecho, $p = 5{,}60 \times 10^{-4}$, ****), **ROI 109** (Parahipocampal Derecho, $p = 1{,}70 \times 10^{-3}$, ***), **ROI 118** (Fusiforme Izquierdo, $p = 9{,}10 \times 10^{-4}$, ****), **ROI 119** (Fusiforme Derecho, $p = 1{,}68 \times 10^{-2}$, *), **ROI 132** (Cerebelo Posterior Izquierdo, $p = 1{,}67 \times 10^{-2}$, *), **ROI 133** (Cerebelo Posterior Derecho, $p = 5{,}40 \times 10^{-3}$, **), **ROI 134** (Cerebelo Anterior Izquierdo, $p = 1{,}03 \times 10^{-2}$, *), **ROI 145** (Cerebelo Anterior Derecho, $p = 2{,}20 \times 10^{-3}$, **), **ROI 155** (Vermis, $p = 4{,}20 \times 10^{-3}$, **), **ROI 156** (Cerebelo Central Derecho, $p = 4{,}24 \times 10^{-2}$, *), **ROI 157** (Cerebelo Central Izquierdo, $p = 1{,}40 \times 10^{-3}$, ***), y **ROI 159** (Tálamo Izquierdo, $p = 2{,}40 \times 10^{-4}$, ****). En este contraste predominan las diferencias en estructuras temporales, fusiformes y cerebelosas, sugiriendo una progresión de la alteración subcortical en la transición de Alzheimer a MCI.

Por último, en la comparación **C vs MCI**, se detectaron diferencias en los **ROIs 9** (Frontal Superior Derecho, $p = 1{,}50 \times 10^{-2}$, *), **26** (Frontal Inferior Derecho, $p = 1{,}50 \times 10^{-3}$, ***), **39** (Frontal Medio Derecho, $p = 2{,}00 \times 10^{-4}$, ****), **47** (Cíngulo Medio Derecho, $p = 9{,}70 \times 10^{-3}$, **), **50** (Hipocampo Izquierdo, $p = 2{,}25 \times 10^{-5}$, ****), **51** (Hipocampo Derecho, $p = 1{,}66 \times 10^{-2}$, *), **52** (Amígdala Izquierda, $p = 6{,}80 \times 10^{-3}$, **), **53** (Amígdala Derecha, $p = 3{,}34 \times 10^{-2}$, *), **56** (Precúneo Izquierdo, $p = 9{,}00 \times 10^{-4}$, ****), **57** (Precúneo Derecho, $p = 1{,}05 \times 10^{-5}$, ****), **72** (Cíngulo Posterior Izquierdo, $p = 1{,}60 \times 10^{-3}$, ***), **73** (Cíngulo Posterior Derecho, $p = 4{,}30 \times 10^{-3}$, **), **89** (Temporal Superior Izquierdo, $p = 2{,}59 \times 10^{-5}$, ****), **95** (Temporal Medio Derecho, $p = 2{,}51 \times 10^{-2}$, *), **98** (Temporal Inferior Derecho, $p = 1{,}80 \times 10^{-3}$, ***), **99** (Temporal Inferior Izquierdo, $p = 1{,}90 \times 10^{-3}$, ***), **102** (Temporal Inferior Izquierdo, $p = 9{,}00 \times 10^{-4}$, ****), **103** (Temporal Inferior Derecho, $p = 5{,}38 \times 10^{-5}$, ****), **109** (Parahipocampal Derecho, $p = 4{,}00 \times 10^{-4}$, ****), **116** (Occipital Medio Izquierdo, $p = 2{,}90 \times 10^{-3}$, **), **118** (Fusiforme Izquierdo, $p = 1{,}20 \times 10^{-7}$, ****), **119** (Fusiforme Derecho, $p = 4{,}86 \times 10^{-7}$, ****), **124** (Língula Izquierda, $p = 5{,}00 \times 10^{-3}$, **), **125** (Língula Derecha, $p = 2{,}41 \times 10^{-2}$, *), **132** (Cerebelo Posterior Izquierdo, $p = 1{,}20 \times 10^{-3}$, ***), **134** (Cerebelo Anterior Izquierdo, $p = 3{,}30 \times 10^{-3}$, **), **145** (Cerebelo Anterior Derecho, $p = 3{,}30 \times 10^{-4}$, ****), **150** (Cerebelo Superior Izquierdo, $p = 4{,}55 \times 10^{-2}$, *), **151** (Cerebelo Superior Derecho, $p = 1{,}33 \times 10^{-2}$, *), **152** (Cerebelo Inferior Izquierdo, $p = 2{,}18 \times 10^{-2}$, *), y **155** (Vermis, $p = 3{,}80 \times 10^{-4}$, ****). Este contraste revela una amplia afectación bilateral en regiones temporales, fusiformes y cerebelosas, reflejando un patrón de disfunción funcional más extendido en MCI frente a los controles. En conjunto, los resultados indican que las diferencias más marcadas se localizan en el sistema

límbico (hipocampo, amígdala, parahipocampo y cíngulo), en las regiones temporales y cerebelosas. El contraste **C vs MCI** presenta el mayor número de **ROIs** significativos, seguido por **A vs C**, lo que sugiere una progresión de la disfunción cortical y subcortical a medida que avanza el deterioro cognitivo.
En términos generales, el incremento en el orden del hipergrafo ($k = 3$) mejora la capacidad del análisis para discriminar entre los grupos clínicos, evidenciando un patrón más definido y consistente de diferencias respecto de $k = 2$. Mientras que para $k = 2$ las diferencias se distribuían de manera más difusa, abarcando amplias regiones corticales y subcorticales, en $k = 3$ se observa una concentración de efectos significativos en estructuras clave del sistema límbico, regiones temporales y cerebelosas. Este aumento en la capacidad de difrenciación sugiere que los hipergrafos de mayor orden capturan de forma más eficiente las interacciones funcionales de orden superior, aportando una caracterización más precisa de los cambios topológicos asociados a la progresión de la enfermedad.

Capítulo 8

Hipermétricas

8.1. Introducción

Comencemos con una observación simple sobre una forma de calcular la distancia entre dos números reales x e y desde la posición relativa del punto (x,y) del plano con respecto a la diagonal.
Precisemos. Sea $\triangle_2 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonal del plano $\mathbb{R}^2$. Sea $P_{\triangle_2}$ el operador de proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre $\triangle_2$, $P_{\triangle_2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \triangle_2$, estará dado entonces por

$$\begin{aligned} P_{\triangle_2}(x,y) &= \langle \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (x,y) \rangle \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\tfrac{x}{\sqrt{2}} + \tfrac{y}{\sqrt{2}}\right) \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\tfrac{x+y}{2}, \tfrac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

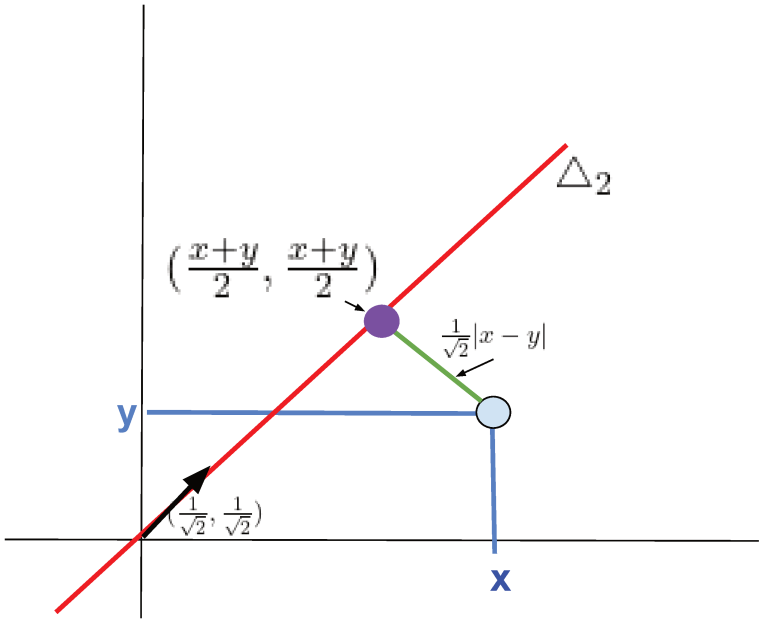


Figura 8.1: El valor absoluto de $|x-y|$ visto desde el plano.

Calculemos ahora la distancia en $\mathbb{R}^2$ de (x,y) a la diagonal, usando que el punto de $\triangle_2$ más cercano a (x,y) es $P_{\triangle_2}(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} d^2\big((x,y), \triangle_2\big) &= \|(x,y) - P_{\triangle_2}(x,y)\|^2 \\ &= \left\|(x,y) - \left(\tfrac{x+y}{2}, \tfrac{x+y}{2}\right)\right\|^2 \\ &= \left(x - \tfrac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{x+y}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{aligned}$$

De donde

$$|x-y| = \sqrt{2}\, d\big((x,y), \triangle_2\big)$$

En otras palabras, salvo el factor $\sqrt{2}$, la distancia usual entre dos números reales x e y se puede calcular como la distancia del par (x,y) a la diagonal de $\mathbb{R}^2$.
Esta idea puede extenderse para producir nociones de hipermétricas. Digamos aquí que, dados tres números reales x,y,z, podemos considerar el cuantificador de separación entre esos puntos calculando la distancia del punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ a la diagonal $\triangle_3 = \{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$.
En las secciones siguientes generalizamos esta idea y la usamos en algunos casos concretos.

8.2. El contexto general

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espacio de Hilbert. Es decir, H es un espacio vectorial con producto interno que es completo con la norma $||\phi||_H^2 = \langle\phi,\phi\rangle_H$. Sea $H^k = \{\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k) : \phi_j \in H,\ j = 1, \ldots, k\}$ y $\langle\Phi,\Psi\rangle_{H^k} = \sum_{i=1}^k \langle\phi_i,\psi_i\rangle_H$. El nuevo espacio $(H^k, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^k})$ resulta también un espacio de Hilbert.
Sea $\triangle_k$ la diagonal de H^k, esto es,

$$\triangle_k = \{\Phi \in H^k : \phi_1 = \cdots = \phi_k\}.$$

Como $\triangle_k$ es un subespacio cerrado de H^k, resulta un subespacio de Hilbert de H^k, y entonces la función $P_{\triangle_k} : H^k \to \triangle_k$ está bien definida como proyector ortogonal sobre $\triangle_k$. El siguiente resultado identifica la proyección.

Proposición 13. *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k) \in H^k$. Entonces*

$$P_{\triangle_k}\Phi = \left(\tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^k \phi_i, \ldots, \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^k \phi_i\right) =: M(\Phi).$$

Demostración. Es claro que $M(\Phi) \in \triangle_k$. Basta, entonces, ver que $\Phi - M(\Phi)$ es perpendicular a $\triangle_k$. Sea $\Psi = (\psi, \ldots, \psi) \in \triangle_k$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle\Phi - M(\Phi), \Psi\rangle_{H^k} &= \sum_{l=1}^k \left\langle \left(\phi_l - \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^k \phi_i\right), \psi \right\rangle_H \\ &= \sum_{l=1}^k \langle\phi_l,\psi\rangle_H - \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^k \langle\phi_i,\psi\rangle_H \left(\sum_{l=1}^k 1\right) \\ &= \sum_{l=1}^k \langle\phi_l,\psi\rangle_H - \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^k \langle\phi_i,\psi\rangle_H\, k = 0. \end{aligned}$$

□

Por consiguiente la distancia de Φ a $\triangle_k$, a la diagonal de H^k, es la misma que la distancia de Φ a $\mathbf{M}(\Phi)$.

Definición 43. *La Función* $\rho : H^k \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ *dada por*

$$\rho_k(\phi_1, ..., \phi_k) = ||\Phi - \boldsymbol{M}(\Phi)||_{H^k}$$

con $\Phi(\phi_1, ..., \phi_k)$ *y* $\boldsymbol{M}(\varphi)$ *como en la Proposición (8.1) es la* ***hipermétrica*** *de orden k en H.*

Cuando $H = L^2(I)$ y el intervalo I es un dominio temporal para las señales de cuadrado integrable, tendremos que

$$\rho^2(\phi_1, \ldots, \phi_k) = \sum_{i=1}^{k} \int_I \left| \phi_i(t) - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \phi_j(t) \right|^2 dt$$

En el caso concreto que implementaremos aquí en la aplicación de esta técnica corresponde a la siguiente situación. Sean $\{\chi_1(t), \ldots, \chi_n(t)\}$ las señales que provienen de los n electrodos de EEG en la ventana temporal I. Fijemos, por ejemplo, y por simplicidad, $k = 3$. Para cada $\chi_i(t)$ podemos calcular, como ya vimos, su fase instantánea

$$\phi_i(t) = \tan^{-1}\left(\frac{H\chi_i(t)}{\chi_i(t)}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde H es la transformada de Hilbert. De esta manera tenemos n fases $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)\}$. Dados tres elementos distintos cualesquieras $(\phi_j(t), \phi_l(t), \phi_m(t))$ del conjunto $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ calculamos $\rho_3(\phi_j, \phi_l, \phi_m)$,

$$\begin{aligned}
\rho_3^2(\phi_j, \phi_l, \phi_m) &= \int_I \left| \phi_j(t) - \frac{1}{3}(\phi_j(t) + \phi_l(t) + \phi_m(t)) \right|^2 dt \\
&+ \int_I \left| \phi_l(t) - \frac{1}{3}(\phi_l(t) + \phi_l(t) + \phi_m(t)) \right|^2 dt \\
&+ \int_I \left| \phi_m(t) - \frac{1}{3}(\phi_j(t) + \phi_l(t) + \phi_m(t)) \right|^2 dt
\end{aligned}$$

Para cada una de las ternas $\{j, l, m\}$ en $\{1, ..., n\}$ tendremos entonces una especie de PLI colectivo para esa terna que es $\rho_3(\phi_j, \phi_l, \phi_m)$ y con esto un tensor de orden tres en $\mathbb{R}^n$. ver Figura 8.2.

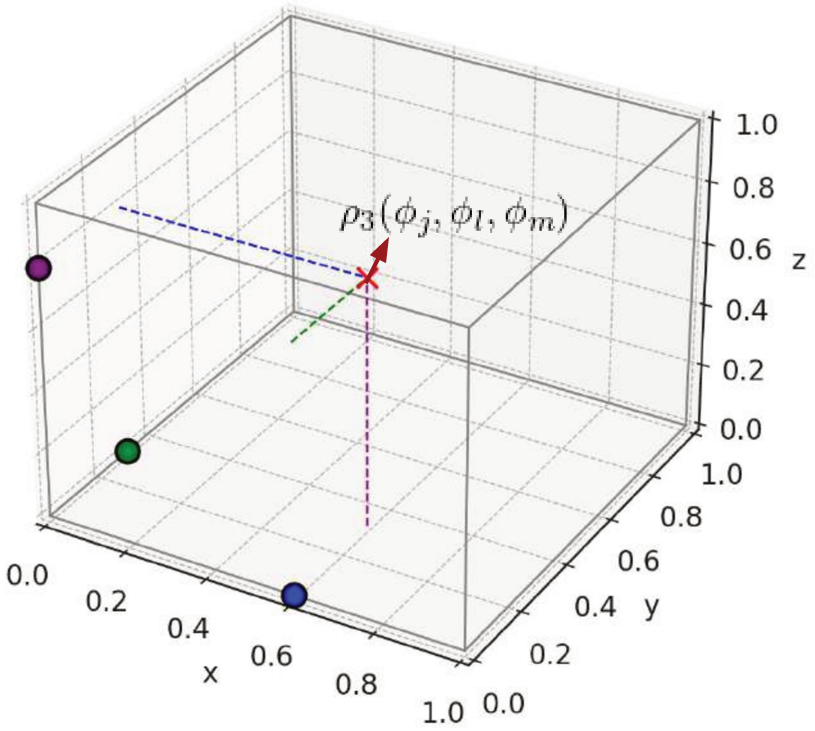


Figura 8.2: Representación gráfica de un tensor en $\mathbb{R}^3$.

El tensor es simétrico y tiene varias propiedades interesantes que, para orden k general se resumen en el siguiente resultado.

Proposición 14. *a)* $\rho_k(\Phi) = 0$ *si y solo* $\Phi \in \triangle_k$*;*

b) para toda permutación I de $\{1,...,k\}$ *se tiene que* $\rho_k(\phi_{\tau(1)},...,\phi_{\tau(k)}) = \rho_k(\phi_1,...,\phi_k)$*;*

c) para todo $\psi \in H$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}
&\rho_k(\phi_1,...,\rho_k) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{k-1}(\rho_k(\phi_1,...,\phi_{k-1},\psi) + \rho_k(\phi_1,...,\phi_{k-2},\psi,\phi_k) + \\
&... + \rho_k(\psi,\phi_2,...,\phi_k))
\end{aligned}$$

Demostración. a) la ecuación $\rho_k(\Phi) = 0$ equivale a la anulación de cada una de las normas $||\phi_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \phi_j||_H$. Que a su vez equivale a que cada ϕ_i sea igual a la media $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \phi_j$.
Pero esto ocurre si y sólo si todas las ϕ_i, $i = 1,..,k$, son iguales.
Es decir a que $\Phi \in \triangle_k$.

b) Se deduce simplemente de la conmutatividad de la suma, sea $\Phi \circ \tau = (\phi_{\tau(1)},...,\phi_{\tau(k)})$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho_k^2(\Phi \circ \tau) &= \sum_{i=1}^k ||\phi_{\tau(i)} - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \phi_{\tau(j)}||_H^2 \\
&= \sum_{i=1}^k ||\phi_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \phi_j||_H^2 = \rho_k^2(\Phi).
\end{aligned}$$

c) Sea $\psi \in H$, entonces

$$
\begin{aligned}
&(k-1)(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k) + (\psi, \psi, ..., \psi) \\
&= (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{k-1}, \psi) + \\
&+ (\phi_1, \phi_2, ..., \psi, \phi_k) \\
&+ ..... \\
&+ (\psi, \phi_2, ..., \phi_{k-1}, \phi_k)
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, como $(\psi, \psi, ..., \psi) \in \triangle_k$ tenemos que $P_{\triangle_k} = (\psi, \psi, ..., \psi)$ y entonces

$$
\begin{aligned}
P_{\triangle_k}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k) = \frac{1}{k-1} \Big[& P_{\triangle_k}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{k-1}, \psi) \\
& + P_{\triangle_k}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \psi, \phi_k) \quad + \ldots + P_{\triangle_k}(\psi, \phi_2, \ldots, \phi_k) \\
& - (\psi, \psi, \ldots, \psi) \Big].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\rho_k(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_k) = \Big|\Big|(\phi_1,\ldots,\phi_k)\\
&-P_{\triangle_k}(\phi_1,\ldots,\phi_k)\Big|\Big|_{H^k}\\
&= \Big|\Big|(\phi_1,\ldots,\phi_k)+\frac{1}{k-1}(\psi,\psi,\ldots,\psi)-\\
&\frac{1}{k-1}\big(P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\psi)+\\
&\quad P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\psi,\phi_k)+\ldots\\
&\quad +P_{\triangle_k}(\psi,\phi_2,\ldots,\phi_k)\big)\Big|\Big|_{H^k}\\
&= \frac{1}{k-1}\Big|\Big|(k-1)(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_k)+(\psi,\psi,\ldots,\psi)-\\
&\quad P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\psi)\\
&\quad -P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\psi,\phi_k)\\
&\quad -\ldots\\
&\quad -P_{\triangle_k}(\psi,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\phi_k)\Big|\Big|_{H^k}\\
&= \frac{1}{k-1}\Big|\Big|(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\psi)-P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\psi)\\
&\quad +(\phi_1,\phi_2,\ldots,\psi,\phi_k)-P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\psi,\phi_k)\\
&\quad +\ldots\\
&\quad +(\psi,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\phi_k)-P_{\triangle_k}(\psi,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\phi_k)\Big|\Big|_{H^k}\\
&\leqslant \frac{1}{k-1}\Big(\Big|\Big|(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\psi)-P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\psi)\Big|\Big|_{H^k}\\
&\quad +\Big|\Big|(\phi_1,\phi_2,\ldots,\psi,\phi_k)-P_{\triangle_k}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\psi,\phi_k)\Big|\Big|_{H^k}\\
&\quad +\ldots\\
&\quad +\Big|\Big|(\psi,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\phi_k)-P_{\triangle_k}(\psi,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\phi_k)\Big|\Big|_{H^k}\Big)\\
&= \frac{1}{k-1}\big(\rho_k(\phi_1,\ldots,\phi_{k-1},\psi)+\rho_k(\phi_1,\phi_2,\ldots,\psi,\phi_k)\\
&\quad +\ldots+\rho_k(\psi,\phi_2,\ldots,\phi_{k-1},\phi_k)\big).
\end{aligned}
$$

□

8.2.1. Algoritmo Multiplecorrelación de fase (MCF)

4 Construcción de hipergrafos k regulares basado en MCF

Dadas n señales temporales $\chi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$:

1: Calcular las fases instantáneas $\phi_i(t)$ asociadas a cada una de las n señales

2: Considerar el conjunto de vértices $\mathscr{V} = \{1, \ldots, n\}$ formado por las n señales dadas y el conjunto de todas las combinaciones de k señales:

$$P_k(\mathscr{V}) = \{W \subseteq \mathscr{V} \mid |W| = k\}, \quad |P_k(\mathscr{V})| = \binom{n}{k}.$$

3: Para cada subconjunto $W = \{i_1, \ldots, i_k\} \in P_k(\mathscr{V})$

1. Calcular la fase media:
$$\bar{\phi}_W(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \phi_{i_r}(t)$$
2. Calcular las diferencias respecto de la media
$$d_{i_r}(t) = \phi_{i_r}(t) - \bar{\phi}_W(t)$$
3. Calcular la norma
$$de_W(t) = \sum_{r=1}^{k} d_{i_r}(t)^2$$
4. Obtener el valor promedio temporal discretizando la función en la variable
$$\delta_W^2 = \frac{1}{T} \sum_t de_W(t)$$
5. Calcular el umbral promedio
$$\tau(k) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{W \in P_k(\mathscr{V})} \delta_W$$

4: Definir el conjunto de hiperaristas:

$$\mathscr{E}(\mathscr{H}_k) = \{W \in P_k(\mathscr{V}) \mid \delta_W < \tau(k)\}.$$

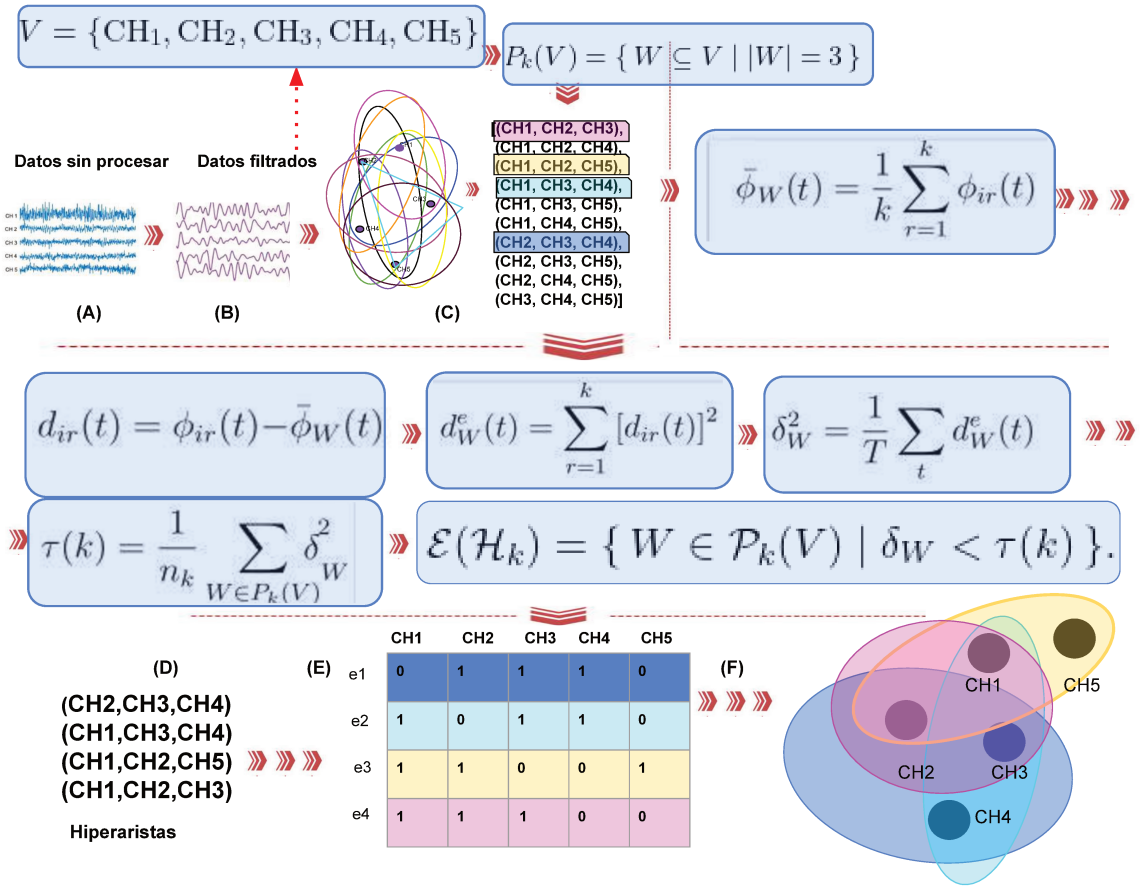


Figura 8.3: Representación gráfica del método antes expuesto. A) Ejemplo de señales sin procesar.B) Aplicamos distintos filtros. C) Tomamos subconjuntos de 3 elementos de 5 canales aplicamos los items del paso 3 del método MFC. D) Aplicamos el paso 4 del algoritmo y computamos el número de hiperaristas que resultan. E) matriz de incidencia. F) hipergrafo 3-regular asociado a cada matriz de incidencia del paso E.

En la siguiente sección presentamos los resultados obtenidos al aplicar el método de construcción de hipergrafos k-regulares utilizando el enfoque basado MCF. Para ello, se empleó el mismo conjunto de datos utilizado previamente en el método de Multicorrelación ver Sección 7.3. Dicho conjunto contiene registros de EEG en estado de reposo con ojos cerrados correspondientes a 88 sujetos: 36 con diagnóstico de enfermedad de Alzheimer (A), 23 con demencia frontotemporal (DFT) y 29 controles sanos (C). Para más detalles sobre los datos y el preprocesamiento, ver Sección 7.3.

8.2.2. Entropías

Como se dijo previamente, el objetivo de este procedimiento es construir hipergrafos k-regulares que representen grupos de electrodos con un alto grado de sincronización de fase, con el fin de diferenciar entre distintas patologías.
Para ello utilizaremos la entropía asociada a los hipergrafos k-regulares. A continuación se describe el procedimiento completo aplicado a un participante l, perteneciente a alguna de las categorías bajo análisis (ver Sección 7.3 para el cálculo de los hipergrafos y el posterior cálculo de la entropía).
En primer lugar, cada señal fue filtrada mediante un filtro pasa banda en las bandas de frecuencia de interés:

$$\mathscr{B} = \{[1,4],[4,8],[8,12],[12,16],[20,24],[38,42],[80,84]\}.$$

Sea $\chi_i(t)$ la señal registrada en el electrodo i, con $i = 1,2,\ldots,m$ y $m = 19$ el número total de electrodos. Cada señal se segmentó en ventanas temporales de 2 seg sin solapamiento. Se obtuvieron 413 ventanas con 1000 muestras cada una, la frecuencia de muestreo $f_s = 500$ Hz), denotadas como $v = 1,\ldots,S$.
En cada ventana v, se obtuvo la **fase instantánea** mediante la transformada de Hilbert:

$$\phi_i^v(t), \quad i = 1,\ldots,m, \quad t = 1,\ldots,T,$$

y se consideraron todos los subconjuntos posibles de k electrodos donde $k \in \mathscr{V} = \{1,...,19\}$:

$$P_k(\mathscr{V}) = \{W \subseteq M : |W| = k\}, \quad M = \{1,2,\ldots,19\}.$$

Para cada combinación $W = \{i_1,\ldots,i_k\} \in P_k(\mathscr{V})$ se calculó la dispersión de fase en la ventana v:

1. **Fase media de la combinación**:

$$\bar{\phi}_W^v(t) = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} \phi_{i_r}^v(t)$$

2. **Diferencia respecto de la media**:

$$d_{i_r}^v(t) = \phi_{i_r}^v(t) - \bar{\phi}_W^v(t)$$

3. **Norma de las diferencias (desviación de fase)**:

$$de_W^v(t) = \sqrt{\sum_{r=1}^{k} \left(d_{i_r}^v(t)\right)^2}$$

4. **Valor promedio de la ventana**:

$$\delta_W^{2,v} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} de_W^v(t)$$

Este cálculo genera, para cada ventana v, un **vector de tamaño** $|P_k(\mathscr{V})|$, donde cada elemento corresponde a una combinación W y refleja la dispersión de fase de dicha combinación en esa ventana:

$$\delta_k^{2,v} = \left[\delta_{W_1}^{2,v}, \delta_{W_2}^{2,v}, \ldots, \delta_{W_{|P_k(V)|}}^{2,v}\right]^\top, \quad v = 1,\ldots,S.$$

Posteriormente, se promedian los valores de todas las ventanas componente a componente para obtener el vector final:

$$\overline{\delta}_k^2 = \frac{1}{S}\sum_{v=1}^{S} \delta_k^{2,v} = \left[\overline{\delta}_{W_1}^2, \overline{\delta}_{W_2}^2, \ldots, \overline{\delta}_{W_{|P_k(\mathscr{V})|}}^2\right]^\top,$$

donde

$$\overline{\delta}_{W_j}^2 = \frac{1}{S}\sum_{v=1}^{S} \delta_{W_j}^{2,v}, \quad W_j \in P_k(\mathscr{V}), \quad j = 1,\ldots,|P_k(\mathscr{V})|.$$

Así,

$$\overline{\delta}_k^2 \in \mathbb{R}^{|P_k(\mathcal{V})|}$$

representa el vector que resume la dispersión promedio de fase para todas las combinaciones posibles de k electrodos.

Finalmente, sobre este vector final se calculó su valor medio global, el cual se utilizó como umbral para filtrar las combinaciones. Solo se consideraron aquellas combinaciones cuya dispersión de fase promedio $\overline{\delta}_k^2$ resultó menor que este umbral. Estas combinaciones seleccionadas constituyen las **hiperaristas** del hipergrafo k-regular del participante. Sobre cada hipergrafo se calculó la correspondiente **entropía**, que cuantifica la complejidad y el grado de desorden de las relaciones de fase. Los resultados se presentan en la Figura 8.4.

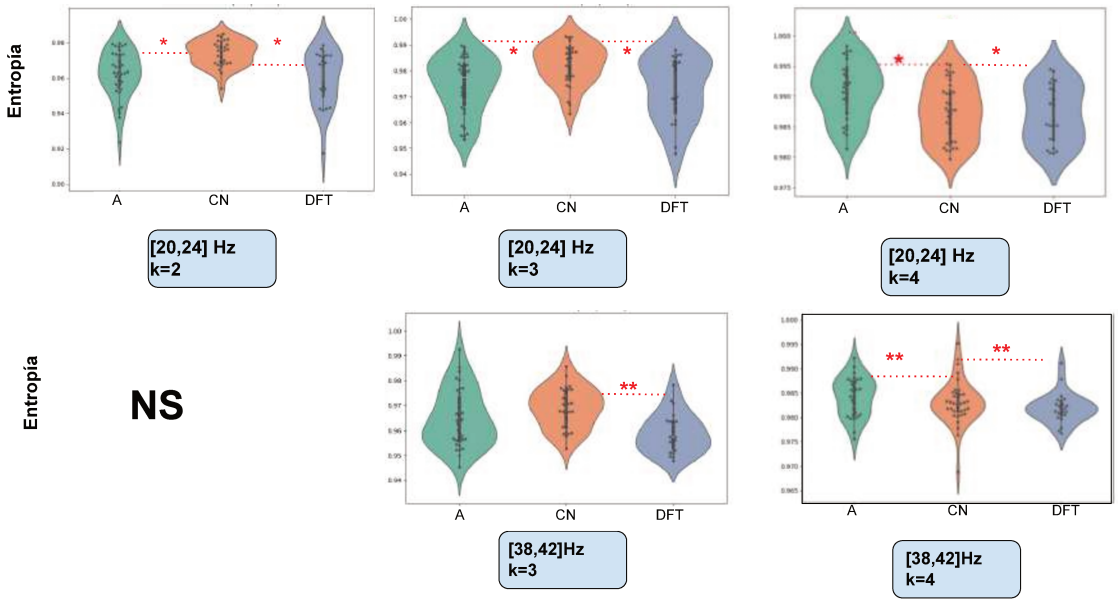


Figura 8.4: Valores de entropía para $k = 2, 3, 4$.

Con el objetivo de evaluar la existencia de diferencias significativas entre los tres grupos analizados —pacientes con Alzheimer (**A**), con demencia frontotemporal (**DFT**) y controles sanos (**C**)—, se aplicó la prueba no paramétrica de *Kruskal–Wallis* sobre los valores de entropía obtenidos para cada participante y banda de frecuencia.Posteriormente, cuando se observaron diferencias globales significativas, se realizaron comparaciones post-hoc mediante el test de *Dunn* con corrección de Bonferroni, con el fin de identificar entre qué pares de grupos se encontraban dichas diferencias.

Los resultados mostraron que en las bandas de frecuencia $[20,24]$Hz y $[38,42]$Hz, y para las configuraciones de electrodos $k = 2,3,4$, se observaron diferencias estadísticamente significativas entre los grupos. En particular, para la banda $[20,24]$Hz y $k = 2$, el test de Kruskal–Wallis indicó diferencias globales significativas ($p = 4{,}5 \times 10^{-3}*$), con comparaciones post-hoc que revelaron diferencias entre **A–C** ($p = 3{,}0 \times 10^{-2}*$) y **C–DFT** ($p = 1{,}615 \times 10^{-2}*$).

Para la misma banda, pero con $k = 3$, se mantuvo la significancia global ($p = 5{,}5 \times 10^{-3}*$), observándose nuevamente diferencias significativas entre **A–C** ($p = 1{,}37 \times 10^{-2}*$) y **C–DFT** ($p = 1{,}86 \times 10^{-2}*$). Cuando se incrementó el número de electrodos a $k = 4$, las diferencias

globales persistieron ($H = 8{,}5467$, $p = 4{,}0 \times 10^{-3}$ $*$), y las comparaciones post-hoc evidenciaron diferencias entre **A–C** ($p = 3{,}0 \times 10^{-2}$ $*$) y **C–DFT** ($p = 5{,}5 \times 10^{-3}$ $*$). En conjunto, estos resultados indican que en la banda $[20, 24]$Hz el grupo **C** se diferencia consistentemente tanto de **A** como de **DFT**, lo que sugiere una reducción progresiva de la entropía asociada a la pérdida de complejidad en los estados de deterioro cognitivo.
En la banda $[38, 42]$Hz, correspondiente a las frecuencias más altas, no se registraron diferencias significativas para $k = 2$. Sin embargo, para $k = 3$, el test de Kruskal–Wallis mostró diferencias globales significativas ($H = 13{,}2541$, $p = 3{,}0 \times 10^{-3}$ $**$), con comparaciones post-hoc que evidenciaron una diferencia entre los grupos **C–DFT** ($p = 8{,}5 \times 10^{-3}$ $**$). Finalmente, para $k = 4$ se observó un incremento en la magnitud de las diferencias ($H = 11{,}5467$, $p = 1{,}2 \times 10^{-3}$ $**$), con resultados post-hoc que indicaron diferencias entre **A–C** ($p = 1{,}2 \times 10^{-3}$ $**$) y **C–DFT** ($p = 3{,}5 \times 10^{-3}$ $**$).
En síntesis, los resultados muestran un patrón consistente a través de los diferentes órdenes k: las diferencias más marcadas se registran entre el grupo **C** y los grupos con deterioro cognitivo (**A** y **DFT**), especialmente en las bandas de frecuencia medias y altas. La medida de entropía derivada de los hipergrafos k-regulares construidos mediante el método *MPLI* se muestra sensible a las alteraciones en la dinámica de sincronización cerebral características de las demencias. Este hallazgo respalda la capacidad del enfoque hipergáfico para discriminar entre sujetos sanos y pacientes con deterioro cognitivo.

8.2.3. Centralidad de vértices

A continuación, se describe el procedimiento aplicado para evaluar diferencias estadísticas en las **centralidades de vértice** entre los tres grupos de estudio: Alzheimer (A), Controles (C) y Demencia Frontotemporal (DFT). Este análisis se realizó de manera análoga al aplicado a la entropía espectral, pero considerando las medidas de centralidad de los vértices de los hipergrafos obtenidos en cada ventana temporal.
Para cada participante $l \in Y = \{A, C, DFT\}$ y cada ventana $v = 1, \ldots, S$, se calcularon las centralidades de los $m = 19$ vértices del hipergrafo, obteniendo un conjunto de valores

$$\mathscr{C}^{(l,v)} = \{\mathscr{C}_1^{(l,v)}, \mathscr{C}_2^{(l,v)}, \ldots, \mathscr{C}_{19}^{(l,v)}\}.$$

A continuación, se promediaron las centralidades a lo largo de todas las ventanas del mismo participante, obteniendo un vector promedio de centralidades por sujeto

$$\overline{\mathscr{C}}^{(l)} = \frac{1}{S} \sum_{v=1}^{W} C^{(l,v)} = \left[\overline{\mathscr{C}}_1^{(l)}, \overline{\mathscr{C}}_2^{(l)}, \ldots, \overline{\mathscr{C}}_{19}^{(l)}\right].$$

De esta manera, cada participante queda representado por un vector de 19 valores que describen el nivel promedio de centralidad de cada vértice a lo largo del tiempo.
Posteriormente, se agruparon los vectores promedio de centralidades según la condición clínica del sujeto, formando tres matrices

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_A &= \{\overline{\mathscr{C}}^{(l)} : l \in \text{AD}\}, & \mathscr{C}_A &\in \mathbb{R}^{N_A \times 19}, \\
\mathscr{C}_C &= \{\overline{\mathscr{C}}^{(l)} : l \in \text{CT}\}, & \mathscr{C}_C &\in \mathbb{R}^{N_C \times 19}, \\
\mathscr{C}_{DFT} &= \{\overline{\mathscr{C}}^{(l)} : l \in \text{DFT}\}, & \mathscr{C}_{DFT} &\in \mathbb{R}^{N_D \times 19}.
\end{aligned}$$

donde N_A, N_C y N_{DFT} representan el número de participantes de cada grupo. Cada columna de estas matrices corresponde a un vértice (electrodo) y cada fila a un sujeto. Para evaluar

si existían diferencias significativas entre los grupos en cada vértice, se aplicó la prueba no paramétrica de **Kruskal–Wallis** y en los casos donde se obtuvo un $p < 0{,}05$, se aplicó la prueba post-hoc de **Dunn** con corrección de Bonferroni para identificar entre qué pares de grupos se encontraban las diferencias significativas. Adicionalmente, se calcularon las diferencias absolutas entre los vectores promedio de centralidades de cada grupo, con el fin de cuantificar el grado de separación global entre ellos tomando las diferencias asociadas a los electrodos donde existian diferencias significativas.

$$\Delta_{A,D} = |\overline{\mathscr{C}}_A - \overline{\mathscr{C}}_D|,$$
$$\Delta_{A,C} = |\overline{\mathscr{C}}_A - \overline{\mathscr{C}}_C|,$$
$$\Delta_{C,D} = |\overline{\mathscr{C}}_C - \overline{\mathscr{C}}_D|.$$

Estos vectores Δ proporcionan una medida de distancia entre las centralidades promedio de los grupos, reflejando el nivel de diferencia en la conectividad estructural entre condiciones clínicas.
A continuación se presentan los resultados de las diferencias de la centralidad eb vértices para $k = 2,3,4$, junto con la ubicación de los electrodos en el sistema de representación EEG estándar Ver Figuras 8.5, 8.6, 8.7, 8.8,8.9, 8.10

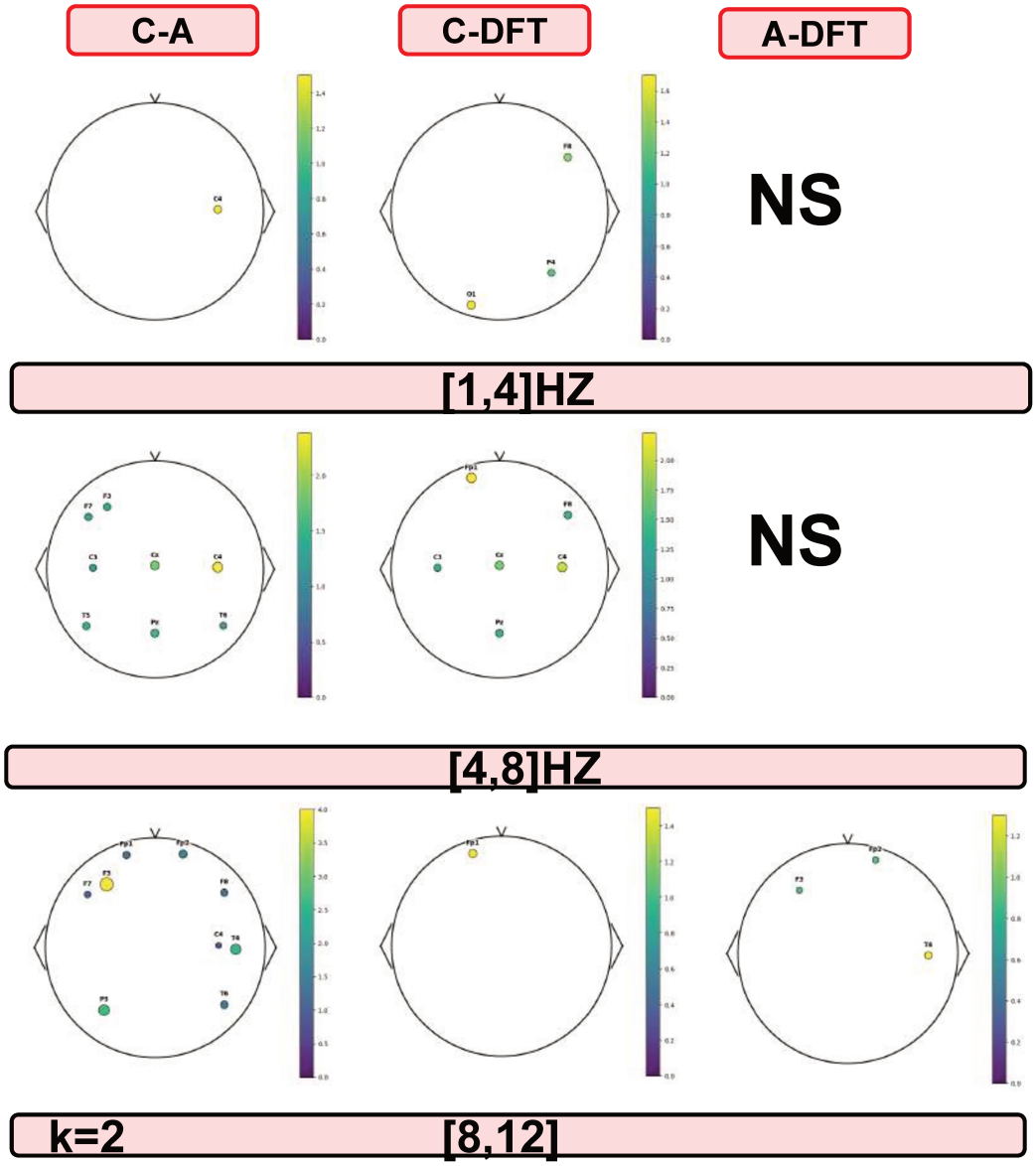


Figura 8.5: Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=2, entre pares de estados.

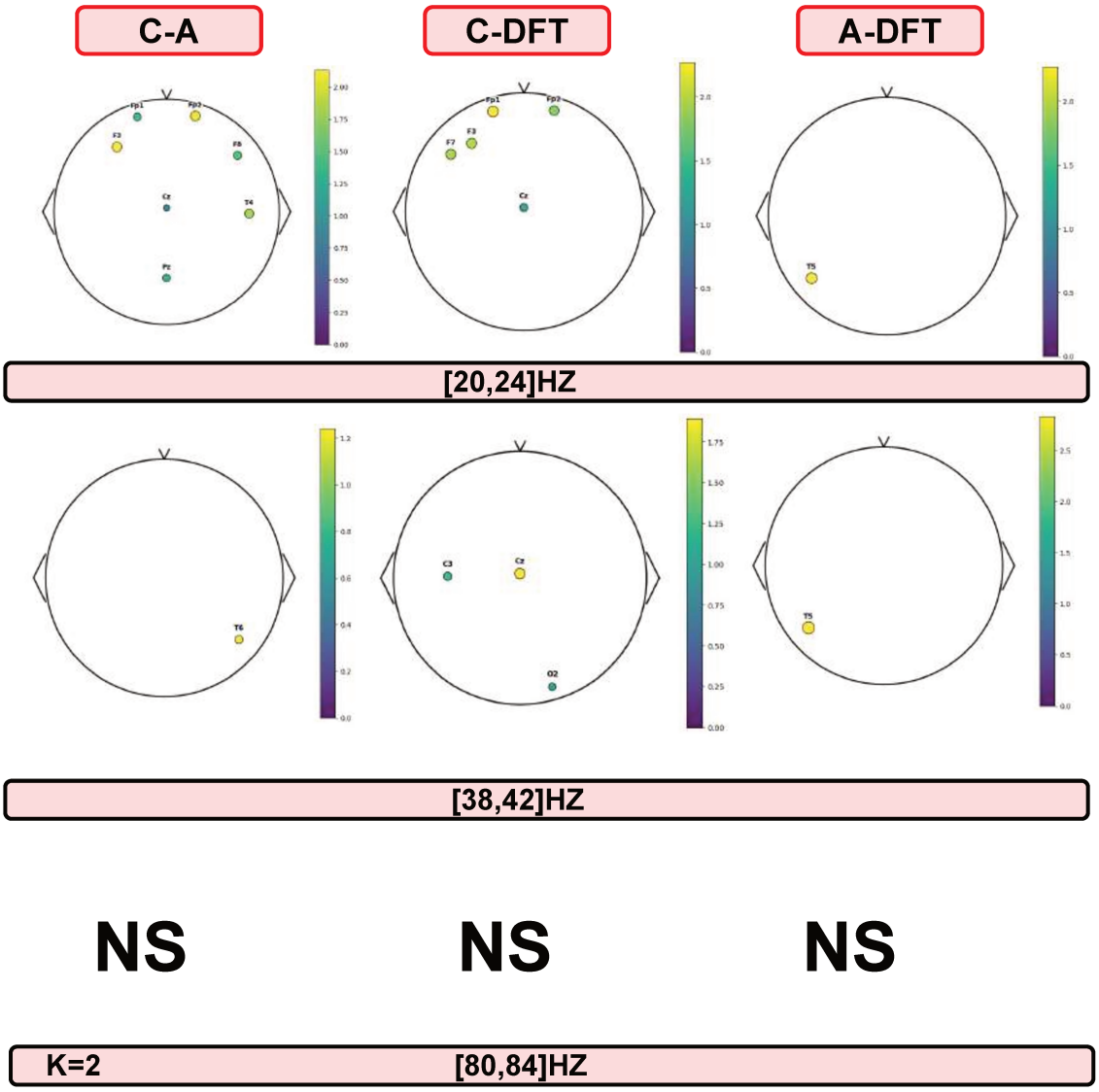


Figura 8.6: Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=2, entre pares de estados

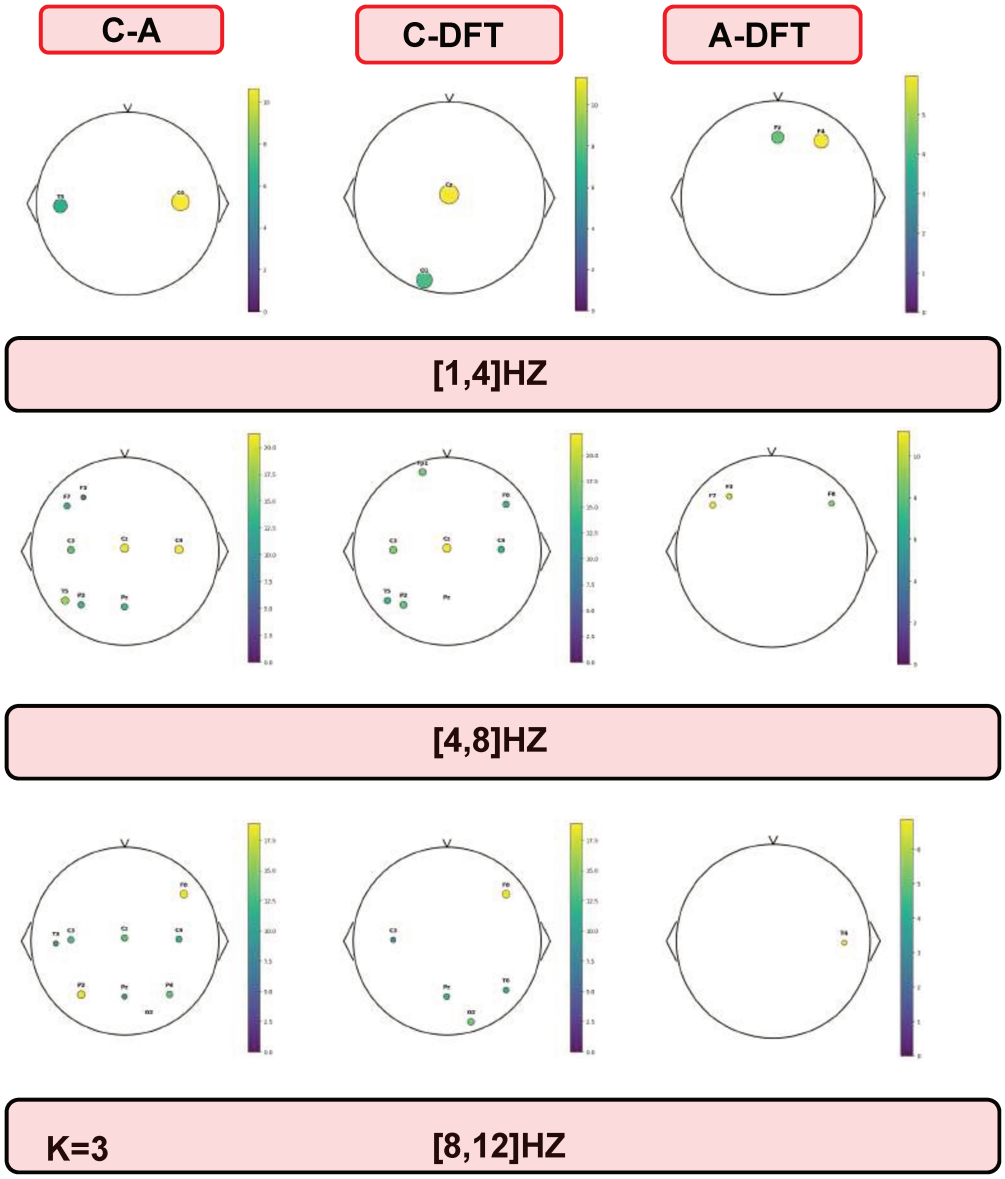


Figura 8.7: Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=3, entre pares de estados.

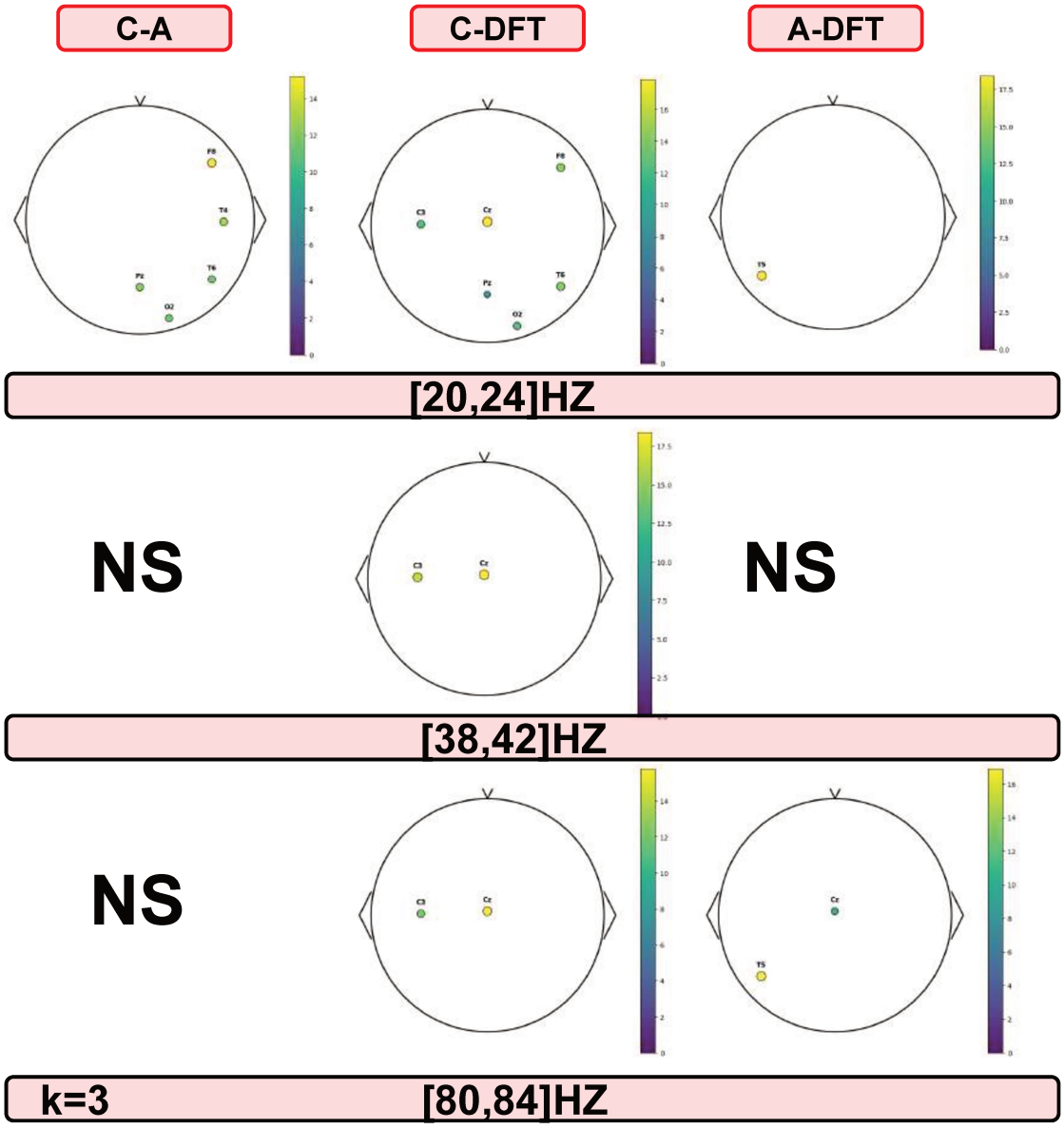


Figura 8.8: Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=3, entre pares de estados.

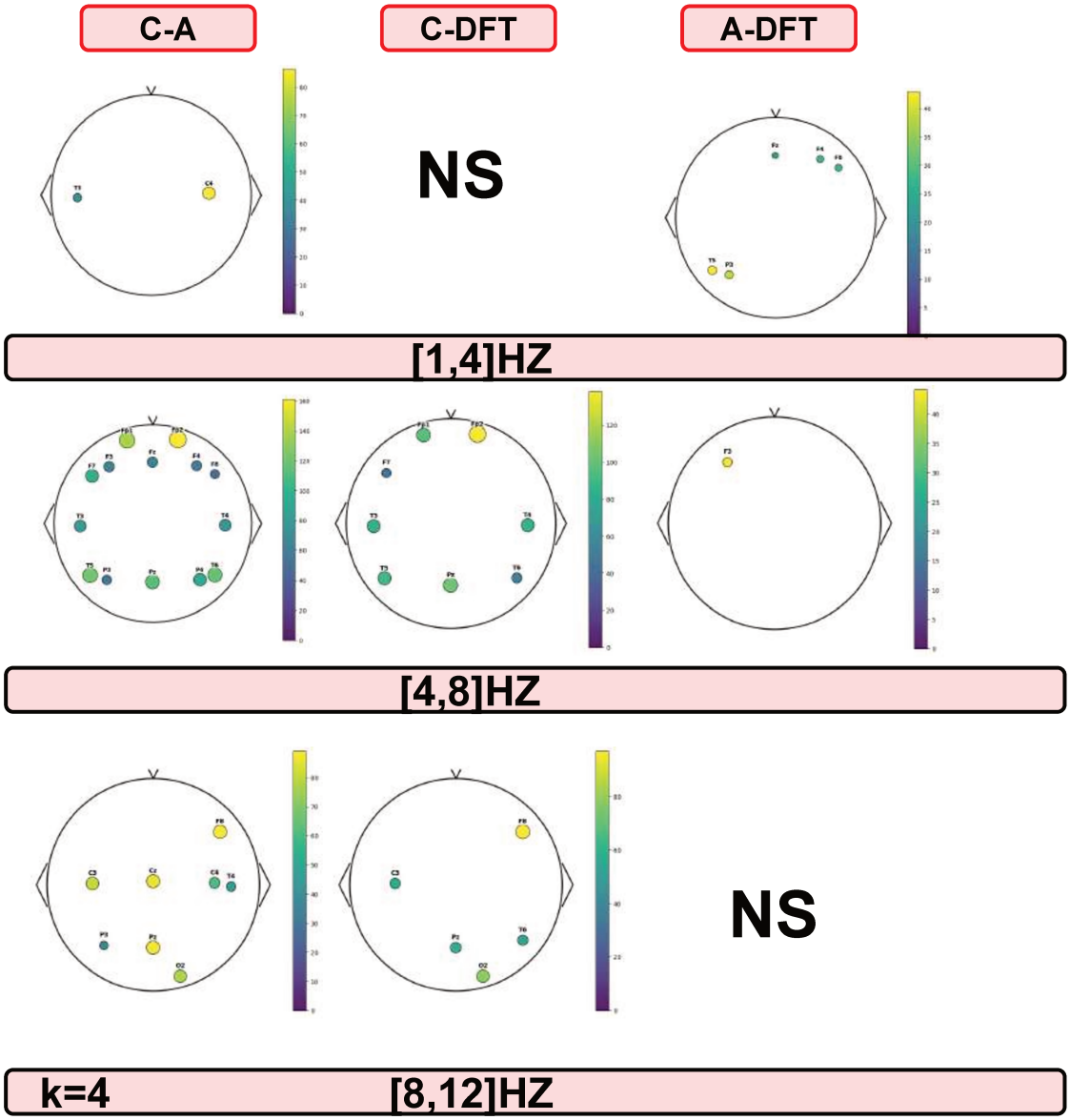


Figura 8.9: Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=4, entre pares de estados.

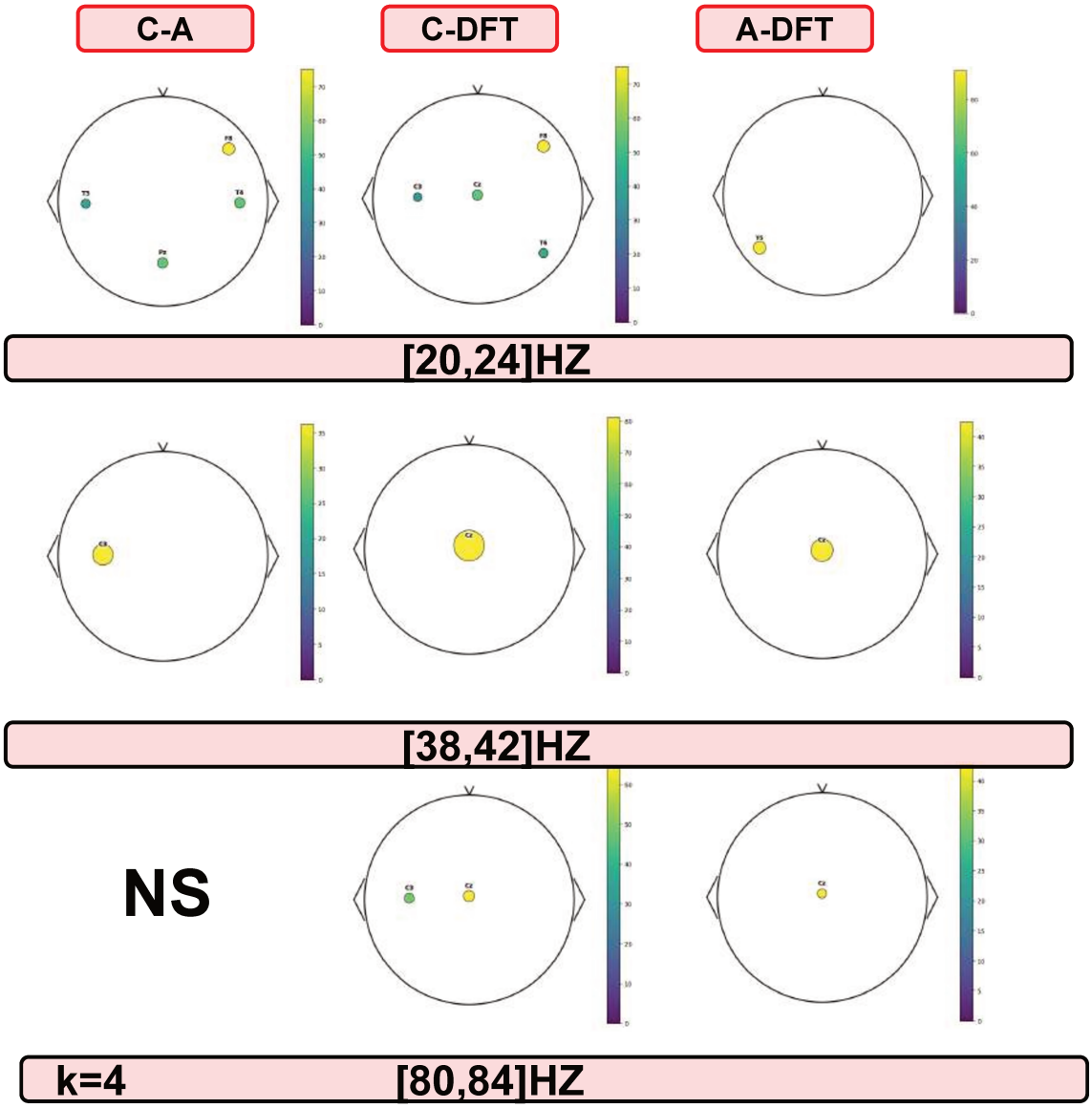


Figura 8.10: Valores de la diferencia entre la centralidad de vértices para k=4, entre pares de estados.

De los graficos anteriores Figuras 8.5, 8.6 podemos obsevar que para $k = 2$ en la banda [1–4] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas entre grupos en varios electrodos. En el electrodo F8 se observó una diferencia entre los grupos **C** y **DFT** ($p = 2{,}21 \times 10^{-2}$ $*$). Asimismo, en C4 se encontraron diferencias entre A y C ($p = 6{,}12 \times 10^{-3}$ $**$), en P4 entre **C** y **DFT** ($p = 3{,}52 \times 10^{-2}$ $*$), y en O1 también entre **C** y **DFT** ($p = 4{,}85 \times 10^{-2}$ $*$). Estos resultados indican que, dentro de la banda [1–4] Hz, las diferencias más marcadas se observaron en regiones posteriores y frontales, con el grupo C diferenciándose principalmente de DFT y, en menor medida, de A.
Para la banda [4–8] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas entre grupos en múltiples electrodos.

- **A vs C**: Se registraron diferencias en los electrodos F7 ($p = 1{,}86 \times 10^{-3}$ $**$), F3 ($p = 2{,}241 \times 10^{-2}$ $*$), Cz ($p = 4{,}9 \times 10^{-5}$ $***$), C4 ($p = 1{,}777 \times 10^{-3}$ $**$), T5 ($p = 1{,}737 \times 10^{-2}$ $*$) y Pz ($p = 6{,}918 \times 10^{-3}$ $**$). Estas diferencias se concentran principalmente en

regiones frontales y centro-frontales, indicando una separación clara entre los grupos **A** y **C**.

- **C vs DFT**: Se observaron diferencias en los electrodos FP1 ($p = 1{,}063 \times 10^{-2}$ $*$), F8 ($p = 2{,}58 \times 10^{-4}$ $***$), C3 ($p = 9{,}57 \times 10^{-4}$ $**$), Cz ($p = 4{,}9 \times 10^{-5}$ $***$), C4 ($p = 1{,}777 \times 10^{-3}$ $**$) y nuevamente C3 ($p = 9{,}57 \times 10^{-4}$ $**$). Las diferencias se registran sobre todo en electrodos frontales y centrales, reflejando la separación entre los grupos **C** y **DFT**.

Estos resultados indican que la banda [4–8] Hz presenta diferencias significativas entre grupos especialmente en los electrodos frontales y centrales, con los grupos **A**, **C** y **DFT**. Las regiones frontales y centro-frontales (**F7**, **F8**, **C3**, **C4**, **Cz**) muestran diferencias significativdas mayores con $(***)y(**)$ niveles de significancia, lo que sugiere que la dinámica de esta banda es sensible a las diferencias entre condiciones. En la banda [8–12] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas agrupadas según la comparación entre grupos:

- **A vs C**: Se registraron diferencias en los electrodos Fp1 ($p = 9{,}99 \times 10^{-4}$ $**$), Fp2 ($p = 1{,}54 \times 10^{-4}$ $***$), F7 ($p = 9{,}0 \times 10^{-6}$ $***$), F3 ($p = 2{,}9 \times 10^{-5}$ $***$), F8 ($p = 4{,}6905 \times 10^{-2}$ $*$), C4 ($p = 5{,}766 \times 10^{-3}$ $**$), T4 ($p = 4{,}6905 \times 10^{-2}$ $*$), P3 ($p = 5{,}766 \times 10^{-3}$ $**$) y T6 ($p = 4{,}0758 \times 10^{-2}$ $*$). Estas diferencias se concentran en electrodos frontales, fronto-centro y temporales, mostrando una separación clara entre los grupos **A** y **C**.

- **C vs DFT**: Se observaron diferencias en los electrodos Fp1 ($p = 9{,}99 \times 10^{-4}$ $**$), Fp2 ($p = 1{,}54 \times 10^{-4}$ $***$), F3 ($p = 9{,}0 \times 10^{-6}$ $***$) y T4 ($p = 2{,}9 \times 10^{-5}$ $***$). Estas diferencias se registran sobre todo en electrodos frontales y centro-frontales, reflejando la separación entre los grupos **C** y **DFT**.

Estos resultados indican que la banda [8–12] Hz presenta diferencias significativas entre grupos, especialmente en los electrodos frontales y centro-frontales, con los grupos **A**, **C** y **DFT**. Las regiones frontales y centro-frontales (**Fp1**, **Fp2**, **F7**, **F3**, **F8**, **C4**, **T4**, **P3**, **T6**) muestran diferencias significativas mayores con $(***)$ y $(**)$ niveles de significancia, lo que sugiere que la dinámica de esta banda es muy sensible a las diferencias entre condiciones. En la siguiente banda [20–24] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas agrupadas según la comparación entre grupos:

- **A vs C**: Se registraron diferencias en los electrodos F8 ($p = 4{,}6905 \times 10^{-2}$ $*$), T4 ($p = 1{,}0 \times 10^{-2}$ $*$), Pz ($p = 7{,}7 \times 10^{-4}$ $**$), T6 ($p = 1{,}54 \times 10^{-4}$ $***$) y O2 ($p = 9{,}0 \times 10^{-6}$ $***$). Estas diferencias se concentran en electrodos frontales, temporales y parietales, indicando una separación clara entre los grupos **A** y **C**.

- **A vs DFT**: Se observó una diferencia en el electrodo T5 ($p = 4{,}56 \times 10^{-2}$ $*$), mostrando un efecto más localizado entre los grupos **A** y **D**.

- **C vs DFT**: Se registraron diferencias en los electrodos C3 ($p = 5{,}766 \times 10^{-3}$ $**$), Cz ($p = 3{,}0 \times 10^{-2}$ $*$), Pz ($p = 9{,}99 \times 10^{-4}$ $**$), T6 ($p = 2{,}34 \times 10^{-4}$ $***$) y O2 ($p = 7{,}0 \times 10^{-4}$ $**$). Estas diferencias se concentran principalmente en electrodos centrales, parietales y temporales, reflejando la separación entre los grupos **C** y **DFT**.

Estos resultados indican que la banda [20–24] Hz presenta diferencias significativas entre grupos, especialmente en los electrodos frontales, centrales y temporales, con los grupos **A**, **C** y **DFT**. Las regiones frontales y centro-frontales (**F8**, **T4**, **Pz**, **T6**, **O2**) muestran diferencias significativas mayores con $(***)$ y $(**)$ niveles de significancia, lo que sugiere que

la dinámica de esta banda es sensible a las diferencias entre condiciones. Finalmente en la banda [38–42] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas agrupadas según la comparación entre grupos:

- **A vs C**: Se registró una diferencia en el electrodo T6 ($p = 4{,}3 \times 10^{-2}$ $*$), indicando un efecto más localizado entre los grupos **A** y **C**.
- **A vs DFT**: Se observó una diferencia en el electrodo T5 ($p = 8{,}0 \times 10^{-3}$ $**$), reflejando un efecto entre los grupos **A** y **DFT**.
- **C vs DFT**: Se registraron diferencias en los electrodos C3 ($p = 2{,}0 \times 10^{-4}$ $***$), Cz ($p = 7{,}0 \times 10^{-3}$ $**$) y O2 ($p = 4{,}0 \times 10^{-3}$ $**$). Estas diferencias se concentran principalmente en electrodos centrales y parietales, reflejando la separación entre los grupos **C** y **DFT**.

Estos resultados indican que la banda [38–42] Hz presenta diferencias significativas entre grupos, especialmente en los electrodos centrales y parietales, con los grupos **A**, **C** y **DFT**. Las regiones centrales y parietales (**C3**, **Cz**, **T5**, **T6**, **O2**) muestran diferencias significativas mayores con ($***$) y ($**$) niveles de significancia, lo que sugiere que la dinámica de esta banda es sensible a las diferencias entre condiciones. Para la banda [80-84]Hz no se registraron diferencias significativas.
En base a los anteriores resultados en general para $k = 2$. El análisis post-hoc de todas las bandas evaluadas ([1–4], [4–8], [8–12], [20–24] y [38–42] Hz) evidencia que existen diferencias significativas entre grupos, con un patrón consistente en regiones frontales, centro-frontales, centrales y parietales.
En las bandas bajas ([1–4] Hz), las diferencias se concentran en electrodos posteriores y frontales, con el grupo **C** diferenciándose principalmente de **D** y, en menor medida, de **A**.
En las bandas theta y alfa ([4–8] y [8–12] Hz), las diferencias más pronunciadas se observan en regiones frontales y centro-frontales (**Fp1**, **Fp2**, **F7**, **F3**, **F8**, **C3**, **C4**, **Cz**, **T4**, **T6**, **P3**), destacando la separación clara entre los grupos **A**, **C** y **D**. En bandas más altas ([20–24] y [38–42] Hz), las diferencias se observan principalmente en electrodos frontales, temporales, centrales y parietales (**F8**, **T4**, **T5**, **T6**, **Pz**, **O2**, **C3**, **Cz**), mostrando que la dinámica de estas bandas es particularmente sensible a la distinción entre grupos **A**, **C** y **DFT**.
Para $k = 3$,ver las Figuras 8.7, 8.8 se observaron diferencias significativas entre grupos en varias bandas de frecuencia. En la banda [1–4] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas entre grupos en varios electrodos, agrupadas según la comparación entre grupos:

- **A vs DFT**: Se registraron diferencias en los electrodos Fz ($p = 1{,}90 \times 10^{-2}$ $*$) y F4 ($p = 7{,}2 \times 10^{-3}$ $**$), concentradas en regiones frontales, indicando una separación entre los grupos **A** y **D**.
- **A vs C**: Se observaron diferencias en los electrodos T3 ($p = 4{,}77 \times 10^{-2}$ $*$) y C4 ($p = 7{,}0 \times 10^{-4}$ $**$), reflejando un efecto sobre electrodos temporales y centrales entre los grupos **A** y **C**.
- **C vs DFT**: Se registraron diferencias en los electrodos Cz ($p = 3{,}46 \times 10^{-2}$ $*$) y O1 ($p = 4{,}92 \times 10^{-2}$ $*$), indicando que los grupos **C** y **DFT** se diferencian principalmente en electrodos centrales y posteriores.

Continuando con la banda [4–8] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas en múltiples electrodos, concentradas en regiones frontales, centro-frontales y parietales:

- **A vs C**: Se registraron diferencias en F7 ($p = 2{,}7 \times 10^{-3}$ $**$), F3 ($p = 1{,}88 \times 10^{-2}$ $*$), C3 ($p = 6{,}2 \times 10^{-5}$ $***$), Cz ($p = 6{,}0 \times 10^{-6}$ $***$), C4 ($p = 1{,}4 \times 10^{-5}$ $***$), T5 ($p = 2{,}5 \times 10^{-4}$ $***$), P3 ($p = 2{,}863 \times 10^{-3}$ $**$) y Pz ($p = 3{,}929 \times 10^{-3}$ $**$), mostrando una clara separación entre los grupos.
- **A vs DFT**: Diferencias en F7 ($p = 2{,}49 \times 10^{-2}$ $*$), F3 ($p = 3{,}5 \times 10^{-3}$ $**$) y F8 ($p = 4{,}91 \times 10^{-2}$ $*$), concentradas en electrodos frontales.
- **C vs DFT**: Diferencias en Fp1 ($p = 1{,}71 \times 10^{-2}$ $*$), F8 ($p = 2{,}06 \times 10^{-2}$ $*$), C3 ($p = 1{,}34 \times 10^{-4}$ $***$), Cz ($p = 9{,}9 \times 10^{-5}$ $***$), C4 ($p = 1{,}275 \times 10^{-3}$ $**$), T5 ($p = 2{,}3633 \times 10^{-2}$ $*$), P3 ($p = 2{,}4699 \times 10^{-2}$ $*$) y Pz ($p = 3{,}723 \times 10^{-3}$ $**$), reflejando la separación entre los grupos **C** y **DFT**.

Al considerar la banda [8–12] Hz, se observaron diferencias significativas en electrodos frontales, centro-frontales y parietales:

- **A vs C**: Se registraron diferencias en F8 ($p = 1{,}3 \times 10^{-4}$ $***$), T3 ($p = 1{,}2983 \times 10^{-2}$ $*$), C3 ($p = 2{,}08 \times 10^{-4}$ $***$), Cz ($p = 3{,}301 \times 10^{-3}$ $**$), C4 ($p = 1{,}8983 \times 10^{-2}$ $*$), Pz ($p = 2{,}4 \times 10^{-5}$ $***$), P4 ($p = 4{,}2278 \times 10^{-2}$ $*$) y O2 ($p = 1{,}5753 \times 10^{-2}$ $*$), mostrando una separación clara entre los grupos.
- **A vs DFT**: Diferencia localizada en T4 ($p = 2{,}3678 \times 10^{-2}$ $*$), indicando un efecto específico entre estos grupos.
- **C vs DFT**: Diferencias en F8 ($p = 6{,}07 \times 10^{-4}$ $**$), C3 ($p = 1{,}0 \times 10^{-3}$ $**$), Pz ($p = 4{,}7092 \times 10^{-2}$ $*$), T6 ($p = 2{,}4917 \times 10^{-2}$ $*$) y O2 ($p = 3{,}1233 \times 10^{-2}$ $*$), reflejando la separación entre los grupos **C** y **D**.

En la banda [20–24] Hz, las diferencias significativas se concentraron en electrodos frontales, temporales, centrales y parietales:

- **A vs C**: Diferencias en F8 ($p = 7{,}51 \times 10^{-4}$ $**$), T4 ($p = 1{,}1324 \times 10^{-2}$ $*$), Pz ($p = 1{,}928 \times 10^{-3}$ $**$), T6 ($p = 4{,}5627 \times 10^{-2}$ $*$) y O2 ($p = 1{,}987 \times 10^{-2}$ $*$).
- **A vs DFT**: Diferencia en T5 ($p = 2{,}0351 \times 10^{-2}$ $*$), indicando un efecto localizado.
- **C vs DFT**: Diferencias en F8 ($p = 8{,}064 \times 10^{-3}$ $**$), C3 ($p = 1{,}6216 \times 10^{-2}$ $*$), Cz ($p = 1{,}889 \times 10^{-3}$ $**$), Pz ($p = 4{,}2499 \times 10^{-2}$ $*$), T6 ($p = 1{,}9555 \times 10^{-2}$ $*$) y O2 ($p = 2{,}6099 \times 10^{-2}$ $*$), reflejando la separación entre los grupos.

Por su parte, en la banda [38–42] Hz, las diferencias significativas se observaron principalmente en electrodos centrales:

- **C vs DFT**: Diferencias en C3 ($p = 1{,}899 \times 10^{-3}$ $**$) y Cz ($p = 7{,}8 \times 10^{-5}$ $***$), indicando una separación clara entre los grupos.

Finalmente, en la banda [80–84] Hz, el análisis post-hoc mostró diferencias significativas en electrodos centrales y temporales:

- **C vs DFT**: Diferencias en C3 ($p = 1{,}0 \times 10^{-3}$ $**$) y Cz ($p = 7{,}0 \times 10^{-4}$ $***$), reflejando la separación entre los grupos.
- **A vs DFT**: Diferencias en Cz ($p = 6{,}0 \times 10^{-3}$ $**$) y T5 ($p = 1{,}3 \times 10^{-4}$ $***$), indicando efectos en regiones centrales y temporales.

En conjunto, estos resultados muestran que para $k = 3$ existen diferencias significativas entre los grupos **A**, **C** y **DFT** a lo largo de múltiples bandas de frecuencia. Las regiones frontales, centro-frontales, centrales y parietales son particularmente sensibles a las condiciones de los grupos, con niveles de significancia que varían entre $*$, $**$ y $***$, lo que sugiere que la dinámica cerebral medida en estas bandas refleja cambios consistentes entre las condiciones experimentales. Por último para $k = 4$ ver las Figuras 8.9, 8.10, los análisis post-hoc mostraron diferencias significativas entre grupos en varias bandas de frecuencia, con electrodos distribuidos en regiones frontales, centrales, temporales y parietales.

En la banda [1–4] Hz, las diferencias se observaron principalmente en regiones frontales, temporales y parietales. Entre los grupos **A** y **DFT** se registraron diferencias en Fz ($p = 0{,}01$, $*$), F4 ($p = 0{,}002$, $**$), F8 ($p = 0{,}004$, $**$), T5 ($p = 0{,}0001$, $***$) y P3 ($p = 0{,}008$, $**$), mientras que entre los grupos **A** y **C** se observaron diferencias en T3 ($p = 0{,}0034$, $**$) y C4 ($p = 0{,}0023$, $**$).

Pasando a la banda [8–12] Hz, se detectaron diferencias en electrodos frontales, centro-frontales, centrales y parietales. Entre los grupos **A** y **C** se registraron diferencias en F8 ($p = 0{,}002$, $**$), C3 ($p = 0{,}018$, $*$), Cz ($p = 0{,}035$, $*$), C4 ($p = 0{,}000001$, $***$), T4 ($p = 0{,}00012$, $***$), Pz ($p = 0{,}0067$, $**$) y O2 ($p = 0{,}005$, $**$), mientras que entre los grupos **DFT** y **C** se observaron diferencias en F8 ($p = 0{,}0156$, $*$), C3 ($p = 0{,}0045$, $**$), P3 ($p = 0{,}0123$, $*$), Pz ($p = 0{,}0087$, $**$), T6 ($p = 0{,}00001$, $***$) y O2 ($p = 0{,}0009$, $**$).

En la banda [20–24] Hz, las diferencias se concentraron en electrodos frontales, temporales, centrales y parietales. Entre **A** y **C** se registraron diferencias en F8 ($p = 0{,}006$, $**$), T3 ($p = 0{,}002$, $**$), T4 ($p = 0{,}0010$, $***$) y Pz ($p = 0{,}03$, $*$). Entre **DFT** y **C** se observaron diferencias en F8 ($p = 0{,}0087$, $**$), C3 ($p = 0{,}0001$, $***$), Cz ($p = 0{,}0045$, $**$) y T6 ($p = 0{,}02$, $*$), mientras que entre **A** y **DFT** se registró una diferencia en T5 ($p = 0{,}004$, $**$).

En la banda [38–42] Hz, las diferencias se localizaron principalmente en electrodos centrales. Entre **A** y **C** se observó diferencia en C3 ($p = 0{,}000078$, $***$), entre **C** y **DFT** en Cz ($p = 0{,}000658$, $***$), y entre **A** y **DFT** también en Cz ($p = 0{,}000398$, $***$).

Finalmente, en la banda [80–84] Hz, las diferencias se concentraron en electrodos centrales y temporales. Entre **DFT** y **C** se registraron diferencias en C3 ($p = 0{,}001$, $**$) y Cz ($p = 0{,}0045$, $**$), mientras que entre **A** y **DFT** se observó diferencia en Cz ($p = 0{,}0001$, $***$).

En conjunto, estos resultados indican que para $k = 4$, las bandas de frecuencia analizadas presentan diferencias significativas entre los grupos **A**, **C** y **DFT**, con regiones frontales, centrales, temporales y parietales mostrando niveles de significancia variados ($*$, $**$, $***$). Las bandas bajas ([1–4] Hz) y medias ([8–12] Hz, [20–24] Hz) reflejan diferencias más distribuidas en múltiples regiones, mientras que las bandas altas ([38–42] Hz y [80–84] Hz) muestran efectos más focalizados en electrodos centrales, lo que sugiere que la dinámica de estas bandas es sensible a las condiciones experimentales y permite diferenciar claramente entre los grupos.

En base a los análisis post-hoc realizados para $k = 2, 3, 4$ en las distintas bandas de frecuencia ([1–4], [4–8], [8–12], [20–24], [38–42] y [80–84] Hz), se observan patrones consistentes de diferencias significativas entre los grupos **A**, **C** y **DFT**.

Para $k = 2$, las diferencias se detectan principalmente en regiones frontales, centro-frontales, centrales y parietales, con los grupos **C** y **DFT** mostrando las mayores separaciones en bandas bajas y medias.

Al aumentar a $k = 3$, se observa un incremento en la cantidad de electrodos con diferencias significativas y una mayor distribución espacial de los efectos, abarcando regiones frontales, centro-frontales, temporales, centrales y parietales, lo que indica una mejor capacidad del método para discriminar entre grupos.

Finalmente, para $k = 4$, los resultados muestran que las diferencias significativas se man-

tienen y se amplifican en varias bandas, especialmente en bandas bajas y medias, mientras que las bandas altas muestran efectos más focalizados en electrodos centrales. Este patrón sugiere que la elección de $k = 4$ permite una mayor sensibilidad del método para detectar diferencias entre condiciones, mejorando la resolución espacial y la discriminación entre grupos respecto a $k = 2$ y $k = 3$.
En conclusión, el incremento de k de 2 a 4 resulta en una mejora progresiva del método, con mayor número de electrodos significativos, mayor cobertura de regiones cerebrales y una capacidad más clara para diferenciar los grupos bajo analisis.

8.3. Conclusión

En este capítulo se introdujo la idea de *multicorrelación de fase* mediante la construcción de hipermétricas y el algoritmo Multicorrelación de fase (MCF). Este enfoque permite estudiar las diferencias de fase entre más de dos señales simultáneamente, extendiendo la noción de sincronización más allá de los análisis par a par tradicionales. El cálculo de la hipermétrica sobre conjuntos de k fases proporciona un marco cuantitativo que refleja la coherencia colectiva de las señales, midiendo su dispersión con respecto a la fase media del conjunto. De esta manera, cada combinación de k señales genera un valor que puede interpretarse como un indicador de sincronización grupal o multicorrelación de orden superior.
En desarrollos futuros, los valores de sincronización grupal, que permiten definir las hiperaristas de nuestros hipergrafos k-regulares, serán filtrados mediante umbrales más adecuados, utilizando los conceptos introducidos en el Capítulo 1, Sección 1.11.

Capítulo 9

Conclusión general

A lo largo de esta tesis se abordó el desafío de representar y analizar interacciones de orden superior en sistemas complejos mediante la teoría de hipergrafos. El trabajo integró desarrollos teóricos, metodológicos y aplicados, que permitieron extender las herramientas clásicas de la teoría de grafos hacia un marco más general, capaz de capturar dependencias colectivas entre múltiples elementos.

Los resultados obtenidos muestran que los hipergrafos constituyen una estructura adecuada para el estudio de la conectividad funcional en señales neuronales. La incorporación de métricas adaptadas a los datos como el *Phase Lag Index* y las distancias geométricas clásicas permitió construir representaciones que preservan tanto la información topológica como la relación espacial o funcional entre las señales. Del mismo modo, la inclusión de medidas derivadas de la teoría de la información, como la entropía espectral y la entropía de von Neumann, proporcionó cuantificadores sensibles de la complejidad y la organización global del sistema.

Los modelos propuestos hipergrafos métricos, multicapas y k-regulares demostraron su capacidad para diferenciar estados cerebrales, detectar cambios dinámicos y caracterizar distintos tipos de patologías neurológicas. En particular, las medidas de centralidad y las distancias entre hipergrafos ofrecieron una nueva perspectiva para evaluar similitudes estructurales entre configuraciones de conectividad, aportando una herramienta sólida para el estudio comparativo de redes neuronales.

Desde un punto de vista teórico, la tesis contribuye a la formalización de métricas y cuantificadores sobre familias de hipergrafos, estableciendo vínculos entre geometría, topología y teoría espectral. Desde una perspectiva aplicada, proporciona un conjunto de algoritmos y procedimientos reproducibles para la construcción y análisis de hipergrafos a partir de datos reales.

Como líneas futuras, se prevé la extensión de estos métodos al estudio de redes dinámicas y adaptativas. En este sentido, los resultados aquí presentados sientan las bases para una comprensión más amplia de la complejidad estructural y funcional de los sistemas naturales, donde las interacciones de orden superior no son una excepción, sino la regla que gobierna su comportamiento colectivo.

Bibliografía

[1] Ouvrard, Xavier. *Hypergraphs: an introduction and review*. arXiv preprint arXiv:2002.05014, 2020.

[2] Berge, Claude. *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland Publishing Company, 1973.

[3] Corsini, Piergiulio, and Leoreanu, Violeta. *Graphs and Hypergraphs*, pp. 55–94. Springer US, Boston, MA, 2003.

[4] Dai, Qionghai, and Gao, Yue. *Hypergraph computation*. Springer Nature Singapore, 2023.

[5] Bretto, Alain. *Hypergraph Theory: An Introduction*. Springer International Publishing Switzerland, 2013.

[6] Voloshin, Vitaly I. *Introduction to Graph and Hypergraph Theory*. Nova Science Publishers, Inc, New York, 2009.

[7] Rafferty, James, Watkins, Alan, Lyons, Jane, Lyons, Ronan A., *et al.* Ranking sets of morbidities using hypergraph centrality. *Journal of Biomedical Informatics*, 122:103916, October 2021.

[8] Kovalenko, Kirill, and Romance, Miguel. Vector centrality in hypergraphs. *Chaos, Solitons & Fractals*, 162:112397, 2022.

[9] Roy, Sanjukta, and Ravindran, Balaraman. Measuring network centrality using hypergraphs. 2015.

[10] Aksoy, Sinan G., Joslyn, Cliff, Ortiz Marrero, Carlos, Praggastis, Brenda, and Purvine, Emilie. Hypernetwork science via high-order hypergraph walks. *EPJ Data Science*, 9(1):16, 2020.

[11] Song, Feng, and Heath, Emily. Hypergraph models of biological networks to identify genes critical to pathogenic viral response. *BMC Bioinformatics*, 22(1):287, 2021.

[12] Feng, Yifan, You, Haoxuan, Zhang, Zizhao, Ji, Rongrong, and Gao, Yue. Hypergraph neural networks. 2019.

[13] Zhang, Feng, *et al.* Heterogeneous graph neural networks for malware detection. In *Proceedings of the 28th ACM International Conference on Information and Knowledge Management*, 2019.

[14] Ma, Yao. *Heterogeneous graph neural network*. arXiv preprint arXiv:2003.01332, 2020.

[15] Wang, Shiyi. *Heterogeneous graph attention network*. arXiv preprint arXiv:2103.14051, 2021.

[16] Gao, Yue, Feng, Yifan, Ji, Shuyi, and Ji, Rongrong. HGNN: General hypergraph neural networks. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 45(3):3181–3199, March 2023.

[17] Mulas, Raffaella, and Jost, Jürgen. Graphs, simplicial complexes and hypergraphs: Spectral theory and topology. In Battiston, Federico, and Petri, Giovanni (eds.), *Higher-Order Systems*. Springer, Cham, 2022.

[18] Jost, Jürgen, and Mulas, Raffaella. Hypergraph Laplace operators for chemical reaction networks. *Advances in Mathematics*, 351:870–896, 2019.

[19] Mulas, Raffaella, and Zhang, Dong. Spectral theory of Laplace operators on oriented hypergraphs. *Discrete Mathematics*, 344(6):112372, 2021.

[20] Jost, Jürgen, and Mulas, Raffaella. Normalized Laplace operators for hypergraphs with real coefficients. *Journal of Complex Networks*, 9(1):cnab009, 2021.

[21] Mulas, Raffaella. Spectral classes of hypergraphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 79(3):495–514, 2021.

[22] Gu, Jiao, Hua, Bobo, and Liu, Shiping. Spectral distance on graph. *Discrete Applied Mathematics*, 190:56–74, 2015.

[23] Mateos, Diego M., Morana, Federico, and Aimar, Hugo. A graph complexity measure based on the spectral analysis of the Laplace operator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 156:111817, March 2022.

[24] Bilbao, Dalma, Mateos, Diego, and Aimar, Hugo. Filtration evolution of Hypergraphs: A novel approach to studying multidimensional dataset. *preprint 2022-0061*, 2022.

[25] Benson, Austin R., Gleich, David F., and Leskovec, Jure. Higher-order organization of complex networks. *Science*, 353(6295):163–166, 2016.

[26] Basu, Sugato, Kumbier, Karl, Brown, James B., and Yu, Bin. Iterative random forests to discover predictive and stable high-order interactions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(8):1943–1948, 2018.

[27] Crivello, Fabrice, Étard, Olivier, Delcroix, Nicolas, Mazoyer, Bernard, and Joliot, Marc. Automated anatomical labeling of activations in SPM using a macroscopic anatomical parcellation of the MNI MRI single-subject brain. *NeuroImage*, 15:273–289, 2002.

[28] Milo, Ron, Shen-Orr, Shai, Kashtan, Nadav, and Umran, Alan. Network motifs: simple building blocks of complex networks. *Science*, 298(5594):824–827, 2002.

[29] Benson, Austin R., Abebe, Rediet, Schaub, Michael T., Jadbabaie, Ali, and Kleinberg, Jon. Simplicial closure and higher-order link prediction. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(48):E11221–E11230, 2018.

[30] Grilli, Jacopo, Barabás, György, Michalska-Smith, Matthew J., and Allesina, Stefano. Higher-order interactions stabilize dynamics in competitive network models. *Nature*, 548(7666):210–213, 2017.

[31] Frankl, Peter. Extremal problems on set systems. In *Handbook of Combinatorics*, vol. 2, pp. 1293–1329. Elsevier, Amsterdam, 1996.

[32] Prenowitz, Walter. Projective geometries as multigroups. *Amer. J. Math.*, 65(2):235–256, 1943.

[33] Jantosciak, James, and Prenowitz, Walter. Geometrics and join spaces. *J. für die Reine und Angewandte Mathematik*, 257:100–128, 1972.

[34] Ji, Shuyi, Feng, Yifan, Ji, Rongrong, Zhao, Xibin, Tang, Wanwan, and Gao, Yue. Dual channel hypergraph collaborative filtering. In *Proceedings of the 26th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pp. 2020–2029, 2020.

[35] Ji, Rongrong, Chen, Fuhai, Cao, Liujuan, and Gao, Yue. Cross-modality microblog sentiment prediction via bi-layer multimodal hypergraph learning. *IEEE Transactions on Multimedia*, 21(4):1062–1075, 2019.

[36] Voloshin, Vitaly I. The mixed hypergraphs. *Computer Science Journal of Moldova*, 1(1):1, 1993.

[37] Voloshin, Vitaly I. *Coloring Mixed Hypergraphs: Theory, Algorithms and Applications*, vol. 17. American Mathematical Society, Providence, 2002.

[38] Hall, Philip. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10(1):26–30, 1935.

[39] Edmonds, Jack. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17:449–467, 1965.

[40] Karypis, George, Kumar, Vipin, and Shekhar, Shashi. Multilevel hypergraph partitioning: Applications in VLSI domain. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems*, 7(1):69–79, 1999.

[41] Zhou, Youjia, Rathore, Archit, Purvine, Emilie, and Wang, Bei. Topological simplifications of hypergraphs. 2021.

[42] Arias, Exequiel. Distancias entre espacios métricos y cuasi-métricos con medidas. *Espacios aleatorios y aplicaciones*, 2023.

[43] Kipf, Thomas N., and Welling, Max. Semi-supervised classification with graph convolutional networks. arXiv preprint arXiv:1609.02907, 2017.

[44] Hamilton, William L., Ying, Rex, and Leskovec, Jure. *Graph Representation Learning*. Cambridge University Press, 2020.

[45] Zhou, Jie, Cui, Ganqu, Hu, Shengding, Zhang, Zhengyan, Yang, Cheng, Liu, Zhiyuan, Wang, Lifeng, Li, Changcheng, and Sun, Maosong. Graph neural networks: A review of methods and applications. *IEEE Access*, 2019.

[46] Stam, C. J., Nolte, G., & Daffertshofer, A. (2007). *Phase lag index: assessment of functional connectivity from multi channel EEG and MEG with diminished bias from common sources*. Human Brain Mapping, 28(11), 1178–1193. `https://doi.org/10.1002/hbm.20346`

[47] Cohen, M. X. (2014). *Analyzing Neural Time Series Data: Theory and Practice*. The MIT Press.

[48] Borck, C. (2005). *Hirnströme: Eine Kulturgeschichte der Elektroenzephalographie*. Göttingen: Wallstein Verlag.

[49] Caton, R. (1875). *The electric currents of the brain*. British Medical Journal, 2(765), 278.

[50] Niedermeyer, E., & Lopes da Silva, F. H. (2005). *Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields* (5th ed.). Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins.

[51] Walter, W. G. (1936). *The location of cerebral tumors by electro-encephalography*. Lancet, 2, 305–308.

[52] Cooper, R., Winter, A. L., Crow, H. J., & Walter, W. G. (1965). *Comparison of subcortical, cortical and scalp activity using chronically indwelling electrodes in man.* Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 18(2), 217–228.

[53] Bremer, F. (1935). *Cérébrocortical synchronization and desynchronization*. Comptes Rendus des Séances de la Société de Biologie et de Ses Filiales, 118, 1235–1241.

[54] Niedermeyer, E., & Lopes da Silva, F. H. (2005). *Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields* (5th ed.). Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins.

[55] Başar-Eroglu, C., Strüber, D., Schürmann, M., Stadler, M., & Başar, E. (1996). *Gamma-band responses in the brain: A short review of psychophysiological correlates and functional significance.* International Journal of Psychophysiology, 24(1–2), 101–112.

[56] Homan, R. W., Herman, J., y Purdy, P. (1987). *Cerebral location of international 10–20 system electrode placement*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 66(4), 376–382. https://doi.org/10.1016/0013-4694(87)90206-9

[57] Hyvärinen, A., & Oja, E. (2000). *Independent component analysis: algorithms and applications*. Neural Networks, 13(4–5), 411–430. `https://doi.org/10.1016/S0893-6080(00)00026-5`

[58] Theiler, J., Eubank, S., Longtin, A., Galdrikian, B., & Farmer, J. D. (1992). *Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 58(1–4), 77–94. `https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90102-S`

[59] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[60] Bavelas, A. (1948). *A mathematical model for group structures*. Human Organization, 7(3), 16–30. https://doi.org/10.17730/humo.7.3.f4033344851gl053

[61] Bavelas, A. (1950). *Communication patterns in task-oriented groups*. The Journal of the Acoustical Society of America, 22(6), 725–730. https://doi.org/10.1121/1.1906679

[62] Bonacich, P. (1972). *Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification*. Journal of Mathematical Sociology, 2(1), 113–120. https://doi.org/10.1080/0022250X.1972.9989806

[63] Surana, A., Chen, C., & Rajapakse, I. (2021). *Hypergraph Dissimilarity Measures*. arXiv preprint arXiv:2106.08206. https://arxiv.org/abs/2106.08206

[64] Battiston, F., Cencetti, G., Iacopini, I., Latora, V., Lucas, M., Patania, A., Young, J. G., & Petri, G. (2021). *The physics of higher-order interactions in complex systems*. Nature Physics, 17, 1093–1098. https://doi.org/10.1038/s41567-021-01288-8

[65] Dolgov, V., Li, X., & Rajapakse, I. (2023). *Higher-order interactions in major depressive disorder networks*. Journal of Neural Engineering, 20(1), 016005. https://doi.org/10.1088/1741-2552/acb8f3

[66] Herzog, E., Surana, A., & Rajapakse, I. (2022). *Genuine higher-order interactions in Alzheimer's disease networks*. Frontiers in Network Physiology, 2, 857324. https://doi.org/10.3389/fnetp.2022.857324

[67] Gatica, M., Surana, A., & Rajapakse, I. (2021). *High-order network analysis of aging and cognitive function*. Network Neuroscience, 5(4), 1041–1062.

[68] Yang, J., Chen, C., Surana, A., & Rajapakse, I. (2023). *Constructing hypergraph models for autism spectrum disorder*. Neuroinformatics, 21, 123–140. https://doi.org/10.1007/s12021-022-09601-3

[69] Berge, C. (1984). *Hypergraphs: Combinatorics of finite sets*. North-Holland.

[70] Feng, Y., Li, X., & Rajapakse, I. (2021). *Hypergraph representation learning in biological systems*. Bioinformatics, 37(10), 1404–1412. https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btab876

[71] Tian, Y., Zhou, W., & Gao, Y. (2009). *Hypergraph learning for image classification*. Pattern Recognition, 42(11), 2365–2377. https://doi.org/10.1016/j.patcog.2009.04.013

[72] Mulas, R., Bianconi, G., & Petri, G. (2021). *Geometry of hypergraphs: Simplicial complexes and beyond*. Physical Review E, 104, 014303. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.014303

[73] Dai, L., Wang, H., & Chen, C. (2023). *Hypergraph models for medical data analysis*. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 34(5), 2123–2136. https://doi.org/10.1109/TNNLS.2022.3214125

[74] De, S., Surana, A., & Rajapakse, I. (2020). *Social network analysis using hypergraphs*. Social Network Analysis and Mining, 10, 1–15. https://doi.org/10.1007/s13278-020-00686-8

[75] Yang, J., Chen, C., & Rajapakse, I. (2019). *Revisiting hypergraph clustering in social networks*. Information Sciences, 501, 313–327. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.06.007

[76] Zhang, Q., Li, X., & Rajapakse, I. (2019). *Introducing hypergraphs to technological networks*. IEEE Access, 7, 176324–176335. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2957316

[77] Qu, X., Wang, H., & Chen, C. (2018). *Hypergraph models for complex technological systems*. Complexity, 2018, 1–11. https://doi.org/10.1155/2018/9672430

[78] Niu, H., Surana, A., & Rajapakse, I. (2023). *Applications of hypergraph theory in psychiatric disorders*. Frontiers in Psychiatry, 14, 1156702. https://doi.org/10.3389/fpsyt.2023.1156702

[79] Shen, L., Chen, C., & Rajapakse, I. (2024). *Research on hypergraph-based migraine classification*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 71(1), 45–58. https://doi.org/10.1109/TBME.2023.3312345

[80] Dai, Q., & Gao, Y. (2023). *Hypergraph Computation*. Springer Nature. ISBN: 978-9819901876. https://doi.org/10.1007/978-981-99-0185-2

[81] Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin.

[82] Strogatz, S. H. (2000). *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 143(1-4), 1–20. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4

[83] Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., Ritort, F., & Spigler, R. (2005). *The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena*. Reviews of Modern Physics, 77(1), 137–185. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137

[84] Strogatz, S. H. (2004). *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion Books.

[85] Mondragón, R. J., & Pérez, G. (2011). *Entrainment of biological oscillators in complex networks*. Physical Review E, 83, 016207. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.016207

[86] Velázquez, J. L. P., García, J. A., Sánchez, J. M., & Pérez, A. L. (2011). *Experimental models of generalized epilepsy*. Epilepsia, 52(5), 1–10. https://doi.org/10.1111/j.1528-1167.2011.03234.x

[87] International League Against Epilepsy (ILAE) (2017). *Revised classification of seizures by the International League Against Epilepsy (ILAE)*. Epilepsia, 58(4), 512–521. https://doi.org/10.1111/epi.13709

[88] K. Kis, D. Andrillon, G. Chauvette, and I. Timofeev, "Development of sleep slow waves and of the slow wave sleep EEG spectrum in the rat," *Journal of Sleep Research*, vol. 23, no. 5, pp. 502–510, 2014.

[89] M. Cavelli, F. Castro-Zaballa, J. Mondino, A. Faletti, A. Pérez-Perera, P. A. Velluti, and P. Crespo, "Power and coherence analysis of sleep electroencephalogram in rats with pontine lesions," *Journal of Neuroscience Research*, vol. 96, no. 6, pp. 1016–1029, 2018.

[90] A. A. Serantes, M. Cavelli, F. Castro-Zaballa, and P. Crespo, "Characterising the transition between active and quiet wakefulness in the rat: a spectral and connectivity approach," *Scientific Reports*, vol. 13, no. 1, pp. 1–14, 2023.

[91] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001

[92] W. Nasreddine, Epileptic EEG Dataset, *Mendeley Data*, V1, 2021. Available at: https://doi.org/10.17632/5pc2j46cbc.1

[93] Battiston, F., Cencetti, G., Iacopini, I., Latora, V., Lucas, M., Patania, A., Young, J.-G., & Petri, G. (2021). *The physics of higher-order interactions in complex systems*. Nature Physics, 17(10), 1093–1098. https://doi.org/10.1038/s41567-021-01371-4

[94] Lee, Y. J., Kim, S., Kim, H. W., Choi, J. W., Kim, S. A., & Hwang, E. (2013). *Electroencephalogram (EEG) functional connectivity during sleep and its relationship with cognitive function in young adults*. Sleep, 36(9), 1391–1402. https://doi.org/10.5665/sleep.2952

[95] Miyazaki, T., Hashimoto, T., Ueno, K., & Ishikawa, T. (2020). *Dynamics of functional brain networks during REM and NREM sleep revealed by high-density EEG*. NeuroImage, 221, 117178. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2020.117178

[96] Maquet, P. (2010). *Understanding non rapid eye movement sleep through neuroimaging*. World Journal of Biological Psychiatry, 11(Suppl 1), 8–13. https://doi.org/10.3109/15622971003637640

[97] de Andrés, I., & García-García, F. (2022). *NREM sleep and the restorative functions of the brain*. Neuroscience & Biobehavioral Reviews, 137, 104653. https://doi.org/10.1016/j.neubiorev.2022.104653

[98] Chen, S., & Li, Y. (2021). *Energy conservation and synaptic homeostasis during NREM sleep: mechanisms and implications*. Frontiers in Neuroscience, 15, 639118. https://doi.org/10.3389/fnins.2021.639118

[99] Lambert, I., Comte, J. C., & Chavez, M. (2022). *Cortico-cortical connectivity across sleep–wake states in humans: an EEG study*. Brain Connectivity, 12(8), 640–652. https://doi.org/10.1089/brain.2021.0115

[100] Wang, C., Ong, J. L., Patanaik, A., Zhou, J., & Chee, M. W. L. (2021). *Connectivity of the human cortex during sleep transitions*. NeuroImage, 231, 117784. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2021.117784

[101] González, A. F., & Soria, F. N. (2023). *Mechanisms of sensory processing during REM sleep*. Nature Reviews Neuroscience, 24(3), 182–196. https://doi.org/10.1038/s41583-023-00675-2

[102] Bernardi, G., Siclari, F., Yu, X., Zennig, C., Bellesi, M., Ricciardi, E., ... & Tononi, G. (2019). *Visual imagery and visual perception share neural representations in the human brain*. Nature Human Behaviour, 3(5), 484–498. https://doi.org/10.1038/s41562-019-0597-9

[103] Schreck, M., & Baglioni, C. (2022). *State-dependent functional connectivity during sleep: a meta-analysis of EEG and fMRI studies*. Sleep Medicine Reviews, 63, 101614. https://doi.org/10.1016/j.smrv.2022.101614

[104] Siclari, F., Bernardi, G., Cataldi, J., & Tononi, G. (2017). *The neural correlates of dreaming*. Nature Neuroscience, 20(6), 872–878. https://doi.org/10.1038/nn.4545

[105] Purves, D., Augustine, G. J., Fitzpatrick, D., Hall, W. C., LaMantia, A.-S., & White, L. E. (2001). *Stages of sleep*. In Neuroscience (2nd ed.). Sinauer Associates.

[106] Williamson, P. D., Spencer, D. D., Spencer, S. S., Novelly, R. A., & Mattson, R. H. (1985). *Complex partial seizures of frontal lobe origin*. Annals of Neurology, 18(4), 497–504. https://doi.org/10.1002/ana.410180414

[107] Goodin, D. S., Aminoff, M. J., & Gillis, R. A. (1990). *Detection of epileptic seizures by video and EEG*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 75(2), 161–170. https://doi.org/10.1016/0013-4694(90)90157-Y

[108] Hennessy, M. J., Elwes, R. D., Binnie, C. D., Polkey, C. E., & Reynolds, E. H. (2000). *Photogenic and other reflex epilepsies: a clinical and video-EEG study*. Journal of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry, 68(4), 438–443. https://doi.org/10.1136/jnnp.68.4.438

[109] Velázquez, J. L. P., Riera, J. J., & Sotero, R. C. (2023). *Tendency toward homogeneity of brain dynamics during seizures: insights from spectral entropy*. Frontiers in Human Neuroscience, 17, 1120197. https://doi.org/10.3389/fnhum.2023.1120197

[110] Eissa, T. L., Tryba, A. K., Marcuccilli, C. J., Ben-Mabrouk, F., Smith, B. N., & Basheer, R. (2017). *Cross-scale interactions during cortical seizure propagation*. Journal of Neuroscience, 37(35), 8397–8411. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.0930-17.2017

[111] Avoli, M., & Gloor, P. (2001). *Generalized epileptic discharges: mechanisms and pathophysiology*. Epilepsia, 42(Suppl 3), 2–11. https://doi.org/10.1046/j.1528-1157.2001.042suppl.3002.x

[112] Bilbao, D., Aimar, H., Torterolo, P., & Mateos, D. M. (2024). *Higher-Order Interaction Analysis via Hypergraph Models for Studying Multidimensional Neuroscience Data*. Biomedical Signal Processing and Control, 78, 108564. https://doi.org/10.1016/j.bspc.2025.108564

[113] World Health Organization (WHO). *Global status report on the public health response to dementia.* World Health Organization, 2021. Disponible en: `https://www.who.int/publications/i/item/9789240033245`

[114] Selkoe, D. J. (2001). *Alzheimer's disease: genes, proteins, and therapy*. Physiological Reviews, 81(2), 741–766.

[115] Braak, H., & Braak, E. (1991). *Neuropathological stageing of Alzheimer-related changes.* Acta Neuropathologica, 82(4), 239–259.

[116] Katzman, R. (1976). *The prevalence and malignancy of Alzheimer disease: a major killer.* Archives of Neurology, 33(4), 217–218.

[117] Shannon, C. E. (1949). *Communication in the presence of noise*. Proceedings of the IRE, 37(1), 10–21. https://doi.org/10.1109/JRPROC.1949.232969

[118] Z. Drezner, Multirelation a correlation among more than two variables *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 20, no. 6, pp. 703–716, 1995.